

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
  
**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES  
SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

Par **Florian Desmons**

*Étude numérique du déferlement de vagues  
capillo-gravitaires*

Sous la direction de **Pierre Lubin**  
Et sous l'encadrement de **Maria Kazolea**

Soutenue le 12 février 2021

Membres du jury

Mario Ricchiuto	Directeur de Recherche	INRIA Bordeaux Sud-Ouest	Président
Stéphane Popinet	Directeur de Recherche	Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Fabrice Véron	Professeur	Université du Delaware	Rapporteur
Anthony Wachs	Professeur	Université de British Columbia	Rapporteur
Stéphan T. Grilli	Professeur	Université de Rhodes Island	Examinateur
Pierre Lubin	Professeur	Bordeaux INP	Directeur
Maria Kazolea	Chargée de Recherche	INRIA Bordeaux Sud-Ouest	Encadrante



# Étude numérique du déferlement de vagues capillo-gravitaires

## Résumé

Le déferlement des vagues, qui se produit de l'océan vers la zone côtière, est un phénomène d'écoulement diphasique complexe qui joue un rôle important dans de nombreux processus, notamment sur le transfert de matière, de quantité de mouvement et d'énergie entre l'air et l'océan. Les récentes tentatives de modélisation se heurtent au manque de connaissances physiques des plus petits détails des processus de déferlement. En outre, aucune loi d'échelle universelle pour les variables physiques n'a été trouvée jusqu'à présent.

Une méthode de préservation de la quantité de mouvement, basée sur des travaux récents de la littérature, a été développée pendant la thèse afin d'atteindre les plus fins détails du processus de déferlement pour les ondes capillo-gravitaires. Cette méthode réduit l'échange non physique de la quantité de mouvement entre deux fluides pendant la simulation, ce qui permet d'effectuer des simulations très précises de déferlement de vague. Cette méthode a été vérifiée sur des cas de vérification de la littérature et validée par des expériences réalisées en laboratoire, telles que l'impact d'une goutte d'eau sur une surface libre et le déferlement d'une vague plongeante sur une plage. Ces vérifications et validations confirment l'utilisation de la méthode développée lors de l'étude suivante sur le déferlement des vagues.

Dans la littérature, la plupart des résultats expérimentaux et numériques ont été réalisés pour des vagues en eau profonde. L'étude se concentre sur l'influence de la profondeur sur la dynamique du déferlement. La géométrie de surface, les anneaux de vorticité sous-marins et l'énergie totale sont étudiés pour plus de 170 simulations précises du déferlement d'une vague de Stokes sur un fond plat. Les nombreux résultats des simulations ont permis la génération de carte de déferlements pour trois différentes profondeurs d'eau. Les types de déferlements plongeant et glissant ont été subdivisés en fonction des observations faites. Ainsi, les études réalisées au cours de la thèse ont permis d'accroître les connaissances sur le déferlement d'ondes capillo-gravitaires de profondeurs d'eau intermédiaires.

**Mots clés :** Déferlement de vague, Fond plat, Anneaux de vorticité, Énergie, Simulation numérique, Notus CFD, Volume finis, HOMP

# Numerical study of the breaking process for capillary-gravity waves

## Abstract

Surface wave breaking, occurring from the ocean to the coastal zone, is a complex and challenging two-phase flow phenomenon which plays an important role in numerous processes, including air-sea transfer of gas, momentum and energy. Recent modelling attempts are struggling with the lack of physical knowledge of the finest details of the breaking processes. Furthermore, no universal scaling laws for physical variables have been found so far. Hence, parameterising and characterising breaking dynamics becomes very difficult.

A numerical momentum preserving method, based on literature, has been developed during the thesis in order reach the finest details of the breaking process for capillary-gravity waves. This method reduces the nonphysical sea-air exchange of momentum during the simulation which allows to perform highly accurate simulations of the breaking process. This method is verified on literature verification cases. And it is validated on laboratory experiments such as drop impact on deep pool and breaking plunging wave on the sloping beach. These verifications and validations confirm the use the method developed during the following study on breaking wave.

The breaking of capillary-gravity waves was investigated with the variation of the wave depth. In the literature, most of the experimental and numerical results were performed for deep water wave. The study is focused on the influence of the depth on the breaking dynamics. The surface geometry, underwater vorticities and total energy are studied for more than 170 simulations of the breaking of a Stokes wave on a flat bottom. The numerous simulations results permit to create a breaking map for three different ratios of water depth over the wavelength. The plunging and spilling breaking types were subdivided following the observations done on the simulations. The studies performed during the thesis lead to a better understanding of the breaking wave of capillary-gravity waves for intermediate depth.

**Mots clés :** Wave breaking, Flat bottom, Vorticity, Energy, Numerical simulation, Notus CFD, Finite volume, HOMP

# Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein de l'Institut de mécanique et d'ingénierie (I2M) aux laboratoires TREFLE (Transfert Fluide Énergétique) dans l'équipe MFN (Mécanique des Fluides Numériques) et au sein de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique Sud-Ouest (INRIA) dans l'équipe CARDAMOM (Certified Adaptive discrete moDels for robust simulAtions of coMplex fLOws with Moving fronts).

La thèse a été réalisée avec le soutien financier de l'État français, géré par l'Agence nationale de la recherche (ANR) dans le cadre du programme "Investments for the future" IdEx Bordeaux - SysNum (ANR-10-IDEX-03-02).

Je tiens à remercier Stéphane Popinet, Fabrice Véron et Anthony Wachs pour leurs rapports de thèse détaillés ayant permis d'améliorer grandement la qualité du manuscrit de thèse et la mise en avant des résultats. Je remercie également Mario Ricchiuto d'avoir présidé mon jury et Stéphan T. Grilli pour sa participation au jury de thèse.

Je remercie tout particulièrement les personnes qui m'ont encadré au cours de cette thèse. Un énorme merci à mon directeur de thèse, Pierre, avec qui les discussions m'ont fait évoluer en tant que chercheur mais surtout en tant que personne. Je remercie aussi grandement Maria pour sa gentillesse, le temps accordé dans les moments difficiles et pour les questions scientifiques dès que j'en avais besoin.

Je suis reconnaissant des ressources mises à disposition par les appels à projet DARI de GENCI (2018 – A0082A06104 et 2020 – A0082A06104), par le Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain (MCIA) et par la Plateforme Fédérative pour la Recherche en Informatique et Mathématiques (PlaFRIM) de l'INRIA. Sans ces millions d'heures de calcul, la thèse n'aurait pas pu être menée.

Je remercie ma compagne (Mathilde), mes parents (Patricia et Alain), mon frère (Julien) et mes amis proches (Chloé, Laurent, Ludo, Mathu, Maxou, Soupey, Valou, Vincent) pour leurs soutiens avant et pendant la thèse et sans qui je ne serai jamais arrivé jusqu'ici aujourd'hui.

Merci enfin à toute l'équipe MFN. J'aimerais commencer par remercier Valérie, véritable maman de l'équipe, qui remplit les documents administratifs avant même que l'on en ait fait la demande. Je remercie également tous les permanents (Antoine, Arnaud, Cédric, David, Delphine, Mathieu, Mejd, Stéphane, Sylvie, Thomas, ...) pour leurs conseils, gentillesse, humour et la découverte du tir à l'arc et du basketball. Un grand merci aux anciens doctorants (Audrey, Deewakar, Fabien, Julien, Kévin et Lucas) grâce à qui les retours d'expérience ont permis le bon déroulement de la thèse. Je remercie les doctorants actuels (Félix, Quentin et Odelin) et post-doctorants (Antoine et Maimouna) pour les discussions scientifiques et culinaires pendant les pauses repas et café.

Pour finir, merci à Julien Burgin, qui par sa gentillesse et son enthousiasme pendant le tutorat CPBx, m'a donné envie de continuer ma carrière dans la recherche.



# Table des matières

Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xiii
Nomenclature	xvi
Introduction	1
<b>Chapitre 1 : Contexte général du déferlement de vague dans la littérature</b>	<b>5</b>
1.1. Transport de sédiments . . . . .	7
1.2. Influence de la bathymétrie . . . . .	9
1.2.1. Plage à pente constante . . . . .	9
1.2.2. Bathymétrie complexe . . . . .	10
1.2.3. Impact sur des structures . . . . .	10
1.3. Échanges et interactions air-océan . . . . .	10
1.3.1. Influence du vent sur le déferlement de vague . . . . .	10
1.3.2. Aération des océans . . . . .	10
1.3.3. Couche d'air . . . . .	12
1.4. Positionnement de la thèse . . . . .	13
<b>Chapitre 2 : Qu'est qu'une vague déferlante et comment la caractériser ?</b>	<b>15</b>
2.1. Définition et description d'une vague . . . . .	16
2.1.1. Grandeurs et relations caractéristiques . . . . .	16
2.1.1.1. Longueurs caractéristiques . . . . .	17
2.1.1.2. Relations caractéristiques . . . . .	17
2.1.2. Génération . . . . .	18
2.1.2.1. Vent . . . . .	18
2.1.2.2. Impact d'un corps sur la surface . . . . .	19
2.1.2.3. Mouvement sous la surface . . . . .	19
2.1.2.4. Influence de corps céleste . . . . .	19
2.1.3. Profondeur . . . . .	19
2.1.4. Mouvement des particules . . . . .	20
2.1.5. Régime d'une vague . . . . .	20
2.1.5.1. Capillaire . . . . .	22
2.1.5.2. Capillo-Gravitaire . . . . .	22
2.1.5.3. Gravitaire . . . . .	23
2.1.6. Hypothèses et domaine d'étude de la thèse . . . . .	23
2.2. Vague déferlante . . . . .	24
2.2.1. Ondes capillaires parasites . . . . .	25
2.2.2. Déferlement glissant . . . . .	26
2.2.3. Déferlement plongeant . . . . .	27
2.3. Méthodes pour l'étude du déferlement . . . . .	28
2.4. Bilan . . . . .	29

<b>Chapitre 3 : Notus CFD</b>	<b>31</b>
3.1. Structure du maillage . . . . .	32
3.1.1. Coordonnées . . . . .	33
3.1.2. Volume de contrôle . . . . .	34
3.2. Méthode des Volumes Finis . . . . .	35
3.2.1. Variable moyennée . . . . .	35
3.2.2. Théorème de Green-Ostrogradski . . . . .	36
3.2.3. La méthode . . . . .	37
3.2.4. Limiteur de flux . . . . .	38
3.2.5. Interpolation et reconstruction . . . . .	38
3.3. Équations résolues . . . . .	39
3.3.1. Équation de continuité . . . . .	39
3.3.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	41
3.3.2.1. Accélération - partie temporelle . . . . .	42
3.3.2.2. Accélération - partie spatiale . . . . .	42
3.3.2.3. Gradient de pression . . . . .	43
3.3.2.4. Force de gravité . . . . .	44
3.3.2.5. Force de tension de surface . . . . .	44
3.3.2.6. Force visqueuse . . . . .	46
3.3.2.7. Axisymétrie . . . . .	48
3.4. Représentations d'interface . . . . .	49
3.4.1. Volume-Of-Fluid (VOF) . . . . .	49
3.4.2. Moment-Of-Fluid (MOF) . . . . .	50
3.4.3. Level-Set Method (LSM) . . . . .	51
3.4.4. Lissage . . . . .	53
3.4.4.1. Volume-Of-Fluid et Moment-Of-Fluid . . . . .	53
3.4.4.2. Level-Set Method . . . . .	54
3.5. Algorithme du code . . . . .	54
3.5.1. Méthode de prédiction-corrrection . . . . .	54
3.5.2. Algorithme . . . . .	55
3.5.2.1. Étape 1 : Advection de la phase . . . . .	55
3.5.2.2. Étape 2 : Résolution de l'équation de continuité . . . . .	56
3.5.2.3. Étape 3 : Prédiction de la vitesse . . . . .	56
3.5.2.4. Étape 4 : Équation de Poisson . . . . .	56
3.5.2.5. Étape 5 : Correction de la vitesse . . . . .	56
3.6. Schémas numériques . . . . .	56
3.6.1. Schémas spatiaux . . . . .	57
3.6.1.1. Upwind d'ordre 1 . . . . .	57
3.6.1.2. Weno 3,2 . . . . .	57
3.6.1.3. Weno 5,3 . . . . .	59
3.6.2. Schémas temporels . . . . .	61
3.6.2.1. Euler explicite . . . . .	61
3.6.2.2. Euler implicite . . . . .	62
3.6.2.3. Crank-Nicolson . . . . .	62
3.6.2.4. NSSP 3,2 . . . . .	62
3.6.2.5. NSSP 5,3 . . . . .	63
3.7. Conditions limites . . . . .	64
3.7.1. Glissement . . . . .	64
3.7.2. Non glissement . . . . .	65
3.7.3. Neumann homogène . . . . .	66
3.7.4. Périodique . . . . .	66



<b>Chapitre 4 : Méthode de préservation de la quantité de mouvement</b>	<b>69</b>
4.1. État de l'art . . . . .	70
4.2. Origine du problème . . . . .	72
4.2.1. Erreurs temporelles . . . . .	73
4.2.2. Erreurs spatiales . . . . .	74
4.2.3. Critères nécessaires . . . . .	76
4.3. Méthode High Order Momentum Preserving (HOMP) . . . . .	76
4.3.1. Bénéfices . . . . .	76
4.3.2. Algorithme . . . . .	76
4.3.3. Comparaison avec l'algorithme standard . . . . .	79
4.3.4. Remarques importantes . . . . .	80
4.4. Méthodes numériques . . . . .	81
4.4.1. Équations d'advection . . . . .	81
4.4.2. Représentation d'interface . . . . .	82
4.4.3. Terme de gravité . . . . .	82
4.4.4. Terme de tension de surface . . . . .	82
4.5. Vérifications et validations de la méthode . . . . .	82
4.5.1. Calcul des quantités de post-traitement . . . . .	83
4.5.1.1. Quantité de mouvement . . . . .	83
4.5.1.2. Énergie cinétique . . . . .	83
4.5.1.3. Densité-vorticité . . . . .	84
4.5.2. Advection d'une goutte de grande densité . . . . .	84
4.5.2.1. Description de la condition initiale . . . . .	85
4.5.2.2. Schémas numériques . . . . .	86
4.5.2.3. Discrétisations . . . . .	86
4.5.2.4. Résultats avec une épaisseur d'interface fixe . . . . .	87
4.5.2.5. Résultats avec une épaisseur d'interface de plus en plus petite . . . . .	87
4.5.2.6. Résultat en trois dimensions . . . . .	91
4.5.3. Onde gravitaire stationnaire . . . . .	91
4.5.3.1. Description de la condition initiale . . . . .	94
4.5.3.2. Schémas numériques . . . . .	94
4.5.3.3. Discrétisations . . . . .	95
4.5.3.4. Résultats . . . . .	95
4.5.4. Onde capillaire stationnaire . . . . .	102
4.5.4.1. Description de la condition initiale . . . . .	102
4.5.4.2. Schémas numériques . . . . .	102
4.5.4.3. Discrétisations . . . . .	103
4.5.4.4. Résultats . . . . .	103
4.5.5. Impact de gouttes . . . . .	104
4.5.5.1. Description de la condition initiale . . . . .	105
4.5.5.2. Schémas numériques . . . . .	106
4.5.5.3. Discrétisations . . . . .	106
4.5.5.4. Résultats . . . . .	108
4.5.6. Déferlement d'une vague capillo-gravitaire sur une plage . . . . .	113
4.5.6.1. Description de la condition initiale . . . . .	114
4.5.6.2. Schémas numériques . . . . .	114
4.5.6.3. Discrétisations . . . . .	115
4.5.6.4. Résultats . . . . .	115
4.6. Conclusion et observations de la méthode . . . . .	116

<b>Chapitre 5 : Onde capillo-gravitaire sur fond plat</b>	<b>120</b>
5.1. Présentation de la condition initiale . . . . .	121
5.1.1. Domaine . . . . .	121
5.1.2. Initialisation de la vague . . . . .	122
5.2. Étude du maillage . . . . .	123
5.2.1. Étude phénoménologique . . . . .	123
5.2.2. Étude énergétique . . . . .	125
5.2.3. Étude du mouvement de la particule centrale . . . . .	127
5.2.4. Bilan . . . . .	129
5.2.5. Simulations lancées et supercalculteurs . . . . .	130
5.3. Ondes capillaires . . . . .	130
5.3.1. Apparitions . . . . .	130
5.3.1.1. Première forme . . . . .	131
5.3.1.2. Seconde forme . . . . .	131
5.3.1.3. Troisième forme . . . . .	131
5.3.1.4. Quatrième forme . . . . .	133
5.3.2. Angle $\theta_{01}$ . . . . .	133
5.3.2.1. Méthode de calcul . . . . .	134
5.3.2.2. Étude des ondes capillaires de la première forme . . . . .	135
5.3.2.3. Étude des ondes capillaires de la seconde forme . . . . .	139
5.3.3. Bilan . . . . .	141
5.4. Anneaux de vortacité . . . . .	141
5.4.1. Définition de la positivité . . . . .	143
5.4.2. Apparitions et générations . . . . .	144
5.4.2.1. Forme 1 : Vortacité du train d'onde capillaires . . . . .	144
5.4.2.2. Forme 2 : Vortacité de la base du front . . . . .	144
5.4.2.3. Forme 3 : Interaction de plusieurs vortex . . . . .	146
5.4.2.4. Forme 4 : Vortacité sans rouleau . . . . .	147
5.4.2.5. Forme 5 : Vortacité autour du rouleau . . . . .	148
5.4.3. Caractérisation de la vortacité en fonction de la longueur d'onde et de la profondeur d'eau . . . . .	150
5.4.3.1. Épaisseur de couche . . . . .	150
5.4.4. Bilan . . . . .	152
5.5. Types de déferlement . . . . .	154
5.5.1. Pas de déferlement . . . . .	154
5.5.2. Ondes capillaires parasitiques . . . . .	155
5.5.3. Glissant - Avec une forte influence de la tension de surface . . . . .	155
5.5.3.1. Un anneau de vortacité . . . . .	155
5.5.3.2. Multiple anneaux de vortacité avec et sans bulles capturées . . . . .	157
5.5.4. Plongeant . . . . .	161
5.5.4.1. Sans rouleau . . . . .	161
5.5.4.2. Avec rouleau . . . . .	163
5.5.5. Bilan . . . . .	166
5.6. Cartes des déferlements . . . . .	166
5.7. Étude énergétique . . . . .	168
5.7.1. Dissipation d'énergie . . . . .	168
5.7.2. Intensité du déferlement . . . . .	170
5.7.3. Bilan . . . . .	170
5.8. Conclusion et discussions . . . . .	174
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>176</b>

<b>Bibliographie</b>	<b>180</b>
<b>Annexes</b>	<b>193</b>
<b>A. Condition initiale : Stokes d'ordre 1</b>	<b>194</b>
<b>B. Angle minimum <math>\theta_{01}</math>: Forme 1</b>	<b>198</b>
<b>C. Angle minimum <math>\theta_{01}</math>: Forme 2</b>	<b>199</b>
<b>D. Épaisseur de la couche de vorticité</b>	<b>200</b>
<b>E. �tude énergétique</b>	<b>202</b>

# Table des figures

1.1.	Évolution de la puissance annuelle moyenne au sein des vagues dans les différents océans sur Terre entre 1948 et 2008. . . . .	6
1.2.	Évolution de l'écart de température moyenne à la surface des océans par rapport à l'année 1992. . . . .	6
1.3.	Évolution de la modification moyenne de la puissance des vagues entre 1985 et 2008 en % par année. . . . .	7
1.4.	Schématisation de la zone de transport de sédiments en fonction de l'avancée du déferlement. . . . .	8
1.5.	Images de phénomènes de vorticité. . . . .	8
1.6.	Image du déferlement de vague sur une plage avec trois méthodes différentes. . . . .	9
1.7.	Images du déferlement de vague sur une plage avec des bathymétries complexes. . . . .	11
1.8.	Image du déferlement de vague sur trois infrastructures complexes. . . . .	12
1.9.	Image du déferlement plongeant. . . . .	13
2.1.	Définition des grandeurs liées à une onde sinusoïdale. . . . .	17
2.2.	Influence du ratio $\frac{d}{\lambda}$ sur l'équation 2.3. . . . .	20
2.3.	Mouvement elliptique des particules sous la surface dans une eau profonde et peu profonde. . . . .	21
2.4.	Type de vague en fonction de la longueur d'onde $\lambda$ . . . . .	21
2.5.	Regime capillaire : vue du dessus d'un impact de goutte sur la surface. . . . .	22
2.6.	Photographies de déferlement d'une vague dans le premier et le second régimes d'une onde capillo-gravitaire. . . . .	23
2.7.	Déferlement plongeant d'une vague gravitaire � Teahupoo (Tahiti). . . . .	23
2.8.	Carte des déferlements en fonction du nombre de Bond (Bo) et de la cambrure de la vague (Slope). . . . .	25
2.9.	Photographie du déferlement d'ondes capillaires parasitiques observé expérimentalement. . . . .	26
2.10.	Photographie de déferlement glissant observé expérimentalement. . . . .	27
2.11.	Photographie du déferlement plongeant observé expérimentalement. . . . .	27
3.1.	Description d'une grille du type Marker-And-Cell grid. . . . .	33
3.2.	Description des coordonnées d'une cellule. . . . .	34
3.3.	Schéma des volumes de contrôle. . . . .	35
3.4.	Schéma en 1D d'une fonction $f_{VF}(x)$ et de ses deux composantes $\bar{f}_{VF}(x)$ et $\tilde{f}_{VF}(x)$ . . . . .	36
3.5.	Schéma des flux du volume de contrôle. . . . .	36
3.6.	Description d'une interpolation centrée d'une variable moyennée $\bar{f}_c$ gr�ce aux variables $\bar{f}_g$ et $\bar{f}_d$ . . . . .	39
3.7.	Description d'une reconstruction centrée d'une variable $f_c$ gr�ce aux variables $\bar{f}_g$ et $\bar{f}_d$ . . . . .	39
3.8.	Schéma de la fonction hauteur suivant la direction $y$ . . . . .	47
3.9.	Schéma de l'interpolation harmonique de la viscosité moyennée $\bar{\mu}$ sur la face basse du volume de contrôle vectoriel suivant $x$ . . . . .	48
3.10.	Description des informations connues pour la méthode Volume-of-Fluid (VOF) . . . . .	50

3.11. Description des informations connues par la méthode Moment-of-Fluid (MOF) . . . . .	51
3.12. Description des informations connues par la méthode Level-Set Method (LSM) . . . . .	52
3.13. Description du schéma Upwind d'ordre 1 en $1D$ . . . . .	57
3.14. Description du schéma WENO 3, 2 en $1D$ . . . . .	59
3.15. Description du schéma WENO 5, 3 en $1D$ . . . . .	61
3.16. Description des Ghost Nodes. . . . .	64
3.17. Condition limite de glissement sur la paroi basse du domaine. . . . .	65
3.18. Condition limite de non glissement sur la paroi basse du domaine. . . . .	65
3.19. Condition limite de neumann homogène sur la paroi basse du domaine. . . . .	66
3.20. Condition limite périodique suivant $x$ . . . . .	67
4.1. Illustration de l'impact de l'approximation du premier ordre sur le champ de densité $\rho$ suivant la position de l'interface $\Gamma$ dans le temps. . . . .	75
4.2. Schéma 2D de la condition initiale de l'advection d'une goutte de grande masse volumique. . . . .	86
4.3. Convection d'une goutte de grande masse volumique avec une épaisseur d'interface constante : comparaison de la convergence numérique de la forme et de la quantité de mouvement suivant pour diverses méthodes numériques et d'interface : Upwind d'ordre 1 (a), WENO 3, 2 (b) et WENO 5, 3 (c). . . . .	88
4.4. Convection d'une goutte de grande masse volumique avec une épaisseur d'interface diminuant en racine du pas d'espace : comparaison de la convergence numérique de la forme et de la quantité de mouvement suivant pour diverses méthodes numériques et d'interface : Upwind d'ordre 1 (a), WENO 3, 2 (b) et WENO 5, 3 (c). . . . .	90
4.5. Convection d'une goutte de grande densité avec une épaisseur d'interface réduite : comparaison de la convergence numérique de l'énergie cinétique totale $E_K$ en fonction du temps pour les trois schémas d'advection et les représentations d'interface étudiés, LSM (a), VOF-PLIC (b) et MOF (c). La conservation du volume de la phase eau est montrée dans l'image (d). . . . .	92
4.6. Convection d'une goutte $3D$ de grande masse volumique : convergence numérique de la forme de l'interface $3D$ en bleu et isocontours de la quantité de mouvement suivant $x$ sur le plan $x, y$ . . . . .	93
4.7. Convection d'une goutte $3D$ de grande masse volumique : convergence de l'énergie cinétique totale $E_k$ en fonction du temps pour la méthode LSM . . . . .	93
4.8. Schéma de la condition initiale de l'onde stationnaire gravitaire. . . . .	94
4.11. Onde de gravité stationnaire : visualisation de la densité de la vorticité $\bar{\rho}\bar{\omega}_{vort}$ pour la méthode LSM au temps $t = 52 s$ (environ 50 périodes) avec trois schémas d'advection différents : Uwind d'ordre 1 (a), WENO 3, 2 (b) et WENO 5, 3 (c). . . . .	97
4.9. Onde de gravité stationnaire : convergence spatiale de la quantité de mouvement suivant $y$ en fonction du temps pour la méthode LSM en utilisant divers schémas d'advection, avec et sans la méthode HOMP, après environ 70 périodes. . . . .	98
4.10. Onde de gravité stationnaire : visualisation de la quantité de mouvement dans la direction $y$ pour la méthode LSM au temps $t = 52 s$ (environ 50 périodes) avec trois schémas d'advection différents : Upwind d'ordre 1 (a), WENO 3, 2 (b) et WENO 5, 3 (c). . . . .	99

4.12. Onde de gravité stationnaire : quantité de mouvement totale dans la direction $y$ en fonction du temps pour la méthode LSM avec la méthode HOMP. . . . .	100
4.13. Onde de gravité stationnaire : convergence spatiale de la quantité de mouvement suivant la direction $y$ en fonction du temps pour VOF, MOF et LSM avec la méthode proposée HOMP. . . . .	101
4.14. Onde capillaire stationnaire : schéma de la condition initiale de l'onde capillaire stationnaire. . . . .	103
4.15. Onde capillaire stationnaire : convergence spatiale de la densité-vorticité $\bar{\rho}\bar{\omega}$ , en utilisant la méthode LSM avec la méthode standard (ligne du haut) et avec la méthode HOMP (ligne du bas), au temps $t = 0, 2 s$ . . . . .	104
4.16. Impact de gouttes : Schéma de la condition initiale. . . . .	106
4.17. Impact de gouttes : domaine physique et maillage sous-jacent (avec $N = 16$ pour l'illustration). . . . .	108
4.18. Impact de gouttes : comparaison des phénomènes observés expérimentalement par D. Morton <i>et al</i> [171] à la simulation faite avec la méthode proposée à $T_{morton} : 4.1, 7.9, 16.0, 20.0$ et $41.0$ . . . . .	109
4.19. Impact de gouttes : profondeur de la cavité (gauche) et évolution temporelle du jet (droite) par rapport à [173, 171]. . . . .	110
4.20. Impact de gouttes : phénomène de rétraction de la cavité. Le profil de surface libre est en $2D$ (ligne noire épaisse) avec coloration densité-vorticité (même échelle que dans la figure 4.21a) chevauchant la révolution $3D$ semi transparente. . . . .	110
4.21. Impact de gouttes : comparaison de la méthode standard (à gauche de chaque image) avec la méthode proposée HOMP (à droite de chaque image). . . . .	111
4.22. Impact de gouttes : comparaison des phénomènes observés expérimentalement par D. Cole à la simulation avec la méthode proposée. . . . .	112
4.23. Impact de gouttes : gros plan sur le profil de la surface libre et le colorant de la simulation au temps $t = 15.18 ms$ et illustration des différents phénomènes qui suivent l'impact. . . . .	112
4.24. Impact de gouttes : comparaison de la méthode standard (à gauche de chaque image) avec la méthode proposée HOMP (à droite de chaque image). . . . .	113
4.25. Déferlement de vague sur une plage : schéma de la condition initiale. . . . .	115
4.26. Déferlement de vague sur une plage : comparaison de la surface libre, pour 9 clichés différents, entre l'expérimental (Y. Li [175]) et la simulation avec la méthode HOMP. . . . .	116
4.27. Déferlement de vague sur une plage : comparaison de la méthode standard (ligne supérieure) avec la méthode proposée HOMP (ligne inférieure). . . . .	117
5.1. Conditions initiales d'une onde sinusoidale $2D$ . . . . .	122
5.2. Étude de la convergence des phénomènes associés à chaque longueur d'onde $\lambda : 0.05 m$ (a), $0.10 m$ (b), $0.15 m$ (c), $0.25 m$ (d) et $0.35 m$ (e). . . . .	125
5.3. Étude de la convergence de la différence d'énergie totale entre l'instant $t : E(t)$ et l'instant initial $t_0 : E_0$ . Les résultats sont présentés pour chaque longueur d'onde $\lambda : 0.05 m$ (a), $0.10 m$ (b), $0.15 m$ (c), $0.25 m$ (d) et $0.35 m$ (e). . . . .	126
5.4. Étude de la convergence du mouvement de la particule quelques instant après le début du déferlement. La trajectoire des particules va de la droite vers la gauche. Les résultats sont présentés pour chaque longueur d'onde $\lambda : 0.05 m$ (a), $0.10 m$ (b), $0.15 m$ (c), $0.25 m$ (d) et $0.35 m$ (e). . . . .	128
5.5. Schéma d'un déferlement d'ondes capillaires parasites et de ses caractéristiques géométriques associées. . . . .	131

5.6. Ondes capillaires : apparition première forme. . . . .	132
5.7. Ondes capillaires : apparition seconde forme. . . . .	132
5.8. Ondes capillaires : apparition troisième forme. . . . .	133
5.9. Ondes capillaires : apparition quatrième forme. . . . .	134
5.10. Schéma du calcul de l'angle $\theta_{01}$ . . . . .	134
5.11. Évolution de $\theta_{01}(\circ)$ au cours du temps (s) pour la simulation correspondant aux conditions initiales : $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ , $\lambda = 0.05 m$ et $\epsilon = 0.15$ . . . . .	135
5.12. Évolution du minimum de $\theta_{01}(\circ)$ en fonction de la cambrure $\epsilon$ pour toutes les simulations ayant des ondes capillaires du premier cas. . . . .	136
5.13. Angle minimal en fonction de la cambrure. . . . .	138
5.14. Limite $\epsilon_{max,PCW}$ entre les deux premières formes d'ondes capillaires. Les courbes rouge, verte, violette, bleue et marron représentent respectivement la limite pour les profondeurs d'eau 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5. . . . .	139
5.15. Évolution du minimum de $\theta_{01}(\circ)$ en fonction de la cambrure $\epsilon$ pour toutes les simulations ayant des ondes capillaires du second cas. . . . .	140
5.16. Présentation des vorticités positive et négative pour une vague s'adveçant de gauche à droite. . . . .	144
5.17. Présentation de la vortacité de forme 1 provenant des ondes capillaires. . .	145
5.18. Présentation de la vortacité de forme 2 provenant de la séparation des lignes de courants à la base du front. . . . .	145
5.19. Observations de la dynamique de la base du front. Dans la figure (a), un seul anneau est généré. Tandis que dans la figure (b), plusieurs anneaux sont générés. . . . .	146
5.20. Présentation de la vortacité de forme 3 provenant de l'interaction de mul- tiples anneaux de vortacité (a) modifiant la surface (b). . . . .	146
5.21. Observations de la dynamique du mouvement de la surface avec génération du diplôme sans (a) et avec bulle (b). . . . .	147
5.22. Présentation de la vortacité de forme 4 provenant de la génération d'un jet (a). Lors du mouvement de ce jet, la forte courbure génère un mouvement et empêche l'emprisonnement du rouleau (b). Les multiples anneaux de vortacité se déplacent avec la vague (c). . . . .	148
5.23. Schémas du critère de position horizontale pour des déferlements glissant (a) et plongeant (b). . . . .	149
5.24. Présentation de la vortacité de forme 5 provenant de la génération d'un jet (a) et de son impact sur la surface. De nombreux anneaux de vortacité sont générés et vont s'enrouler autour du rouleau (b). . . . .	149
5.25. Résultat de l'intégrale spatiale (suivant $x$ ) et temporelle de la valeur absolue de la vortacité multipliée par la densité. . . . .	150
5.26. Épaisseur de vortacité en fonction de la cambrure initiale de la vague. Les résultats sont affichés suivant trois longueurs d'onde : 0.05 m (a), 0.10 m (b) et 0.15 m (c) . . . . .	151
5.27. Pourcentage de vortacité négative pour chaque simulation. Les résultats sont affichés suivant trois longueurs d'onde : 0.05 m (a), 0.10 m (b) et 0.15 m (c) . . . . .	153
5.28. Présentation d'une vague non déferlante. La vague fait 0.15 m de longueur d'onde, 0.10 de cambrure et 0.5 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.37 s (a) et 0.56 s (b). . . . .	154
5.29. Présentation d'une vague déferlant sous la forme d'ondes capillaires para- sitiques. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.275 de cambrure et 0.3 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.129 s (a), 0.186 s (b), 0.287 s (c) et 0.444 s (d). . . . .	156

5.30.	Présentation d'une vague déferlant sous la forme glissant avec un anneau de vorticité. La vague fait 0.05 m de longueur d'onde, 0.210 de cambrure et 0.1 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.093 s (a), 0.143 s (b), 0.196 s (c) et 0.268 s (d). . . . .	158
5.31.	Présentation d'une vague déferlant sous la forme glissant avec plusieurs anneaux de vorticité. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.250 de cambrure et 0.1 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.145 s (a), 0.155 s (b), 0.173 s (c) et 0.185 s (d). . . . .	159
5.32.	Présentation d'une vague déferlant sous la forme glissant avec plusieurs anneaux de vorticité. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.250 de cambrure et 0.1 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.207 s (a), 0.217 s (b), 0.264 s (c) et 0.427 s (d). . . . .	160
5.33.	Présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant sans rouleau. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.550 de cambrure et 0.5 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.107 s (a), 0.134 s (b), 0.153 s (c) et 0.175 s (d). . . . .	162
5.34.	Suite de la présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant sans rouleau. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.550 de cambrure et 0.5 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.210 s (a), 0.232 s (b) et 0.312 s (c). . . . .	163
5.35.	Présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant avec rouleau. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.600 de cambrure et 0.5 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.111 s (a), 0.132 s (b), 0.163 s (c) et 0.178 s (d). . . . .	164
5.36.	Suite de la présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant avec rouleau. La vague fait 0.10 m de longueur d'onde, 0.600 de cambrure et 0.5 de profondeur d'eau. Les images sont prises à 0.198 s (a), 0.212 s (b), 0.216 s (c) et 0.237 s (d). . . . .	165
5.37.	Cartes des déferlements pour la profondeur d'eau $\frac{d}{\lambda}$ : 0.1 (a), 0.3 (b) et 0.5 (c). . . . .	167
5.38.	Facteur de dissipation d'énergie $\epsilon_{dissip}$ en fonction de la cambure $\epsilon$ pour les profondeurs d'eau : 0.1 (a), 0.3 (b) et 0.5 (c). . . . .	169
5.39.	Facteur de dissipation d'énergie $\epsilon_{dissip}$ en fonction de la cambure $\epsilon$ pour les longueurs d'onde : 0.05 (a), 0.10 (b), 0.15 (c), 0.25 (d) et 0.35 (e). . . . .	171
5.40.	Facteur d'intensité du déferlement $b_{int}$ en fonction de la cambure $\epsilon$ pour les profondeurs d'eau : 0.1 (a), 0.3 (b) et 0.5 (c). . . . .	172
5.41.	Facteur d'intensité du déferlement $b_{int}$ en fonction de la cambure $\epsilon$ pour les longueurs d'onde : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e). . . . .	173
A.1.	Conditions de bords appliquées à la vague. DFSBC : Dynamic Free Surface Boundary Condition. KFSBC : Kinematic Free Surface Boundary Condition. BBC : Bottom Boundary Condition. PLBC : Periodic Lateral Boundary Condition. . . . .	195



# Liste des tableaux

2.1.	Expériences et simulations d'ondes capillaires parasitiques avec un vent nul.	26
2.2.	Expériences et simulations de déferlement glissant.	27
2.3.	Expériences et simulations de déferlement plongeant.	28
3.1.	Tableau de Butcher pour la méthode NSSP 3, 2.	62
3.2.	Tableau de Butcher pour la méthode NSSP 5, 3.	63
4.1.	Comparaison des algorithmes pour HOMP (gauche) et pour la méthode standard (droite).	79
4.2.	Onde capillaire stationnaire : paramètres de la décroissance exponentielle des courbes (sous la forme $M_0 e^{-(t-t_0)\mu_{amortissement}}$ ) de la quantité de mouvement totale suivant la direction $y$ mesurée, comme indiqué sur la figure 4.12a.	100
4.3.	Onde capillaire stationnaire : valeurs approximatives de densité-vorticité maximale $max(\bar{\rho}\bar{\omega})$ au centre de la masse de vorticité parasite sous la crête (voir figure 4.15 pour sa localisation) au temps $t = 0, 2$ s. Les unités sont $10^4 kg.m^{-3}.s^{-1}$ .	104
4.4.	Les caractéristiques initiales des deux simulations sont présentées. $D$ est le diamètre de la goutte en $m$ , $U$ la vitesse moyenne de la goutte à l'impact en $m.s^{-1}$ , $\rho_{eau}$ (respectivement $\rho_{air}$ ) la masse volumique de l'eau (respectivement de l'air) en $kg.m^{-3}$ , $\mu_{eau}$ (resp. $\mu_{air}$ ) la viscosité dynamique de l'eau (respectivement de l'air) en $Pa.s$ et $\sigma$ la tension de surface entre l'air et l'eau en $N \cdot m^{-1}$ .	107
5.1.	Récapitulatif des simulations pour l'étude de la convergence du maillage.	124
5.2.	Récapitulatif du pas d'espace choisi pour chaque longueur d'onde.	129
5.3.	Tableau des coefficients après l'utilisation de la méthode des moindres carrés pour la fonction $\theta_{01,PCW}$ .	137
5.4.	Tableau des coefficients après l'utilisation de la méthode des moindres carrés pour la fonction $\theta_{01,SB}$ .	141
B.1.	Angle minimum $\theta_{01}$ des simulations présentant uniquement la première forme des ondes capillaires.	198
C.1.	Angle minimum $\theta_{01}$ des simulations présentant uniquement la seconde forme des ondes capillaires.	199
D.1.	Epaisseur de la vorticité pour $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e).	200
D.2.	Epaisseur de la vorticité pour $\frac{d}{\lambda} = 0.3$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e).	201
D.3.	Epaisseur de la vorticité pour $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e).	201
E.1.	Résultats de $\xi$ , $E_0$ , $\epsilon_{dissip}$ et $b_{int}$ pour $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e).	202
E.2.	Résultats de $\xi$ , $E_0$ , $\epsilon_{dissip}$ et $b_{int}$ pour $\frac{d}{\lambda} = 0.3$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e).	203

E.3. Résultats de  $\xi$ ,  $E_0$ ,  $\epsilon_{dissip}$  et  $b_{int}$  pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e). 204

# Nomenclature

## Accronymes

Nom	Description
HOMP	High Order Momentum Preserving
CSF	Continuum Surface Force
NSSP	Non-Strong Stability Preserving
WENO	Weighted Essentially Non-Oscillatory
OFM	One-Fluid Method
GFM	Ghost Fluid Method
CFD	Computational Fluid Dynamics
VOF	Volume-Of-Fluid
MOF	Moment-Of-Fluid
LSM	Level-Set Method
CISL	Cell Integrated Semi-Lagrangian
SLIC	Simple Line Interface Calculation
PLIC	Piecewise Linear Interface Calculation
PCW	Ondes capillaires parasitiques
SB	Déferlement glissant
PB	Déferlement plongeant

## Champs physiques

Variable	Description	Unité
$\cdot^n$	Champ physique au temps $t^n$	
$\cdot^*$	Champ physique prédit au temps $t^{n+1}$	
$\cdot^{n+1}$	Champ physique au temps $t^{n+1}$	
$\cdot_0$	Valeur au temps initial	
$\rho \mathbf{u}$	Champ vectoriel de quantité de mouvement	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
$\mathbf{u}$	Champ vectoriel de vitesse	$m.s^{-1}$
$u$	Champ de vitesse suivant $x$ (horizontal)	$m.s^{-1}$
$v$	Champ de vitesse suivant $y$ (vertical)	$m.s^{-1}$
$p$	Champ scalaire de pression	$Pa$
$\Psi$	Incrément de pression	$Pa$
$\rho$	Champ scalaire de densité	$kg.m^{-3}$
$\mu$	Champ scalaire de viscosité dynamique	$Pa$
$m$	Champ de masse	$kg$
$\eta$	Hauteur d'eau par rapport au niveau moyen de l'eau au repos	$m$
$V_{vol}$	Volume du système étudié	$m^3$
$\kappa$	Courbure de la surface	$m^{-1}$
$\Gamma$	Interface entre les deux fluides	
$\sum \mathbf{f}_{orces}$	Ensemble des forces externes agissant sur le système	$N$
$\omega_{vort}$	Champ de vorticité	$s^{-1}$

## Code

Variable	Description	Unité
$t^n$	Temps à la $n^{\text{ième}}$ itération temporelle	$s$
$t^{n+1}$	Temps à la $n + 1^{\text{ième}}$ itération temporelle	$s$
$\Delta t$	Pas de temps entre $t^n$ et $t^{n+1}$	$s$
$\Delta t_{inertie}$	Pas de temps maximal nécessaire pour la force d'inertie	$s$
$\Delta t_{TS}$	Pas de temps maximal nécessaire pour la force de surface	$s$
$i$	Position de la $i^{\text{ième}}$ cellule suivant $x$	
$x_i$	Coordonnée horizontale de la $i^{\text{ième}}$ cellule suivant $x$	$m$
$\Delta x$	Pas d'espace spatial entre $x_i$ et $x_{i+1}$	$m$
$n_{lignes}$	Nombres de cellules horizontales	
$j$	Position de la $j^{\text{ième}}$ cellule suivant $y$	
$y_j$	Coordonnée verticale de la $j^{\text{ième}}$ cellule suivant $y$	$m$
$\Delta y$	Pas d'espace spatial entre $y_j$ et $y_{j+1}$	$m$
$n_{colonnes}$	Nombres de cellules horizontales	
$r$	Distance par rapport à l'axe (axisymétrie)	$m$
$\partial\Omega_{vc}$	Surface externe du volume de contrôle	
$\Omega_{vc}$	Volume de contrôle générique	
$\Omega_{i,j}^c$	Volume de contrôle de la grille scalaire de la cellule $i,j$	
$\Omega_{i,j}^u$	Volume de contrôle de la grille vectorielle suivant $x$ de la cellule $i,j$	
$\Omega_{i,j}^v$	Volume de contrôle de la grille vectorielle suivant $y$ de la cellule $i,j$	
$\mathbf{n}_{vc}$	Vecteur de la normale sortante au volume de contrôle	
$CFL$	Coefficient assurant la stabilité de la simulation	
$\phi$	Fonction distance (méthode Level-Set)	
$d_\phi$	Distance à la surface (méthode Level-Set)	$m$
$\phi_{eikonal}$	Fonction distance reconstruite par la méthode eikonal	
$\delta_\Gamma$	Masse de Dirac localisant l'interface	
$\mathbf{n}_\Gamma$	Normale à l'interface	
$C$	Fonction couleur (méthode Volume-Of-Fluid)	
$f_{VF}$	Fonction scalaire quelconque (méthode des volumes finis)	
$F_{godunov}$	Flux de Godunov	
$H_f$	Fonction hauteur	

## Grandeurs caractéristiques

Variable	Description	Unité
$\lambda$	Longueur d'onde de la vague	$m$
$a$	Semi-amplitude de la vague	$m$
$h$	Amplitude totale de la vague	$m$
$d$	Profondeur de la vague	$m$
$d'$	Hauteur de la couche d'air au dessus de la vague	$m$

$k$	Nombre d'onde	$rad.m^{-1}$
$\omega$	Fréquence angulaire	$rad.s^{-1}$
$T$	Période	$s$
$f$	Fréquence	$s^{-1}$
$c$	Célérité	$m.s^{-1}$
$c_b$	Célérité juste avant le déferlement	$m.s^{-1}$
$\frac{d}{\lambda}$	Profondeur d'eau	-
$\epsilon$	Cambrure de la vague	$rad$
$\theta_{01}$	Angle minimal du creux entre les deux premiers capillaires	$^\circ$
$\alpha_{\theta,}$	Coefficient de reconstruction des ondes capillaires de forme 1	
$\theta_{01,PCW}$	Fonction reconstruite de l'angle $\theta_{01}$ des ondes capillaires de forme 1	$^\circ$
$\beta_{\theta,}$	Coefficient de reconstruction des ondes capillaires de forme 2	
$\theta_{01,SB}$	Fonction reconstruite de l'angle $\theta_{01}$ des ondes capillaires de forme 2	$^\circ$
$\epsilon_{dissip}$	Variation de l'énergie	$J.s^{-1}$
$b_{int}$	Intensité du déferlement	$m$
$\xi$	Facteur de dissipation	$s^{-1}$
$D$	Diamètre d'une goutte	$m$
$R$	Rayon d'une goutte	$m$
$R_{type}$	Ratio entre les forces de gravité et de surface	
$E_K$	Energie cinétique	$J$
$E_P$	Energie potentielle	$J$
$E_\sigma$	Energie de surface	$J$
$E_T$	Energie totale	$J$
$Fr$	Nombre de Froude	
$Re$	Nombre de Reynolds	
$We$	Nombre de Weber	

## Opérations mathématiques

Variable	Description
----------	-------------

---

$\nabla$	Opérateur gradient
$\nabla \cdot$	Opérateur divergence
$\nabla \times$	Opérateur rotationnel
$\otimes$	Produit tensoriel
$\cdot^T$	Transposée d'une matrice
$\bar{\cdot}$	Moyenne spatiale d'un champ ou d'une fonction
$\tilde{\cdot}$	Variation spatiale d'un champ ou d'une fonction
$\cdot_{lisse}$	Champ lissé sur plusieurs cellules
$\cdot_{ext}$	Champ extrapolé par rapport au temps
$\cdot_{int}$	Champ interpolé spatialement
$\ \cdot\ _2$	Norme 2

$f$	Champ scalaire, avec $f$ un champ quelconque
$\mathbf{f}$	Champ vectoriel, avec $\mathbf{f}$ un champ quelconque
$\frac{d}{dt}$	Dérivée temporelle
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle temporelle
$\tanh$	Tangente hyperbolique
$\cotanh$	Cotangente hyperbolique
$\sin$	Sinus
$\sqrt{\cdot}$	Racine carrée
$\min(\cdot, \cdot)$	Valeur minimale entre les deux variables
$\max(\cdot, \cdot)$	Valeur maximale entre les deux variables

## Propriétés physiques

Variable	Description	Unité
$g$	Constante de gravité sur Terre : 9.81	$m.s^{-2}$
$\sigma$	Coefficient de tension de surface entre l'air et l'eau : 0.0728	$N.m^{-1}$
$\rho_i$	Masse volumique du fluide $i$	$kg.m^3$
$\mu_i$	Viscosité dynamique du fluide $i$	$Pa.s$
$\rho_{eau}$	Masse volumique de l'eau : 1000	$kg.m^3$
$\rho_{air}$	Masse volumique de l'air : 1.176	$kg.m^3$
$\mu_{eau}$	Viscosité dynamique de l'eau : $1.0e^{-3}$	$Pa.s$
$\mu_{air}$	Viscosité dynamique de l'air : $1.85e^{-5}$	$Pa.s$
$\chi$	Fraction volumique du second fluide dans une cellule	





# Introduction

Une vague océanique provient de la modification de la surface survenant suite à un mouvement d'eau, sous l'effet du vent ou après l'impact d'une masse de liquide ou de solide. Cette modification forme la succession de plusieurs ondes se propageant à la surface des océans et des mers. Lors de la présence de ces vagues proches des côtes, un phénomène de surface reconnaissable par l'apparition d'une nappe blanche apparaît. Ce phénomène est très apprécié des surfeurs, cependant il possède premièrement une fonction importante dans de nombreux phénomènes naturels : la dissipation de l'énergie de la vague, l'aération des océans, le transport de sédiments et le cycle de l'eau. Les récentes prises de conscience environnementales ont conduit la recherche scientifique à étudier l'influence de la modification climatique sur les courants marins [1, 2] et l'énergie contenue dans les vagues [3, 4]. Les premiers résultats alarmants sur cette modification d'ampleur mondiale démontrent que le monde océanique n'est pas épargné et joue un rôle majeur dans la modification climatique [5]. La fonte des glaces produit la fusion et l'effondrement de glacier [6, 7] avec la production de tsunami [8], ainsi qu'un changement dans la répartition de la température à la surface [9, 10], la hauteur moyenne de l'eau [3] et la salinité locale de l'eau [11, 12, 13]. La récurrence et la rapidité du changement climatique engendrent de nombreuses modifications locales des phénomènes physiques se produisant proches des littoraux. La montée des eaux et l'augmentation de l'énergie des vagues dans les océans accélèrent l'érosion des côtes [14] et le risque de submersion est accru [15, 16, 17, 18]. La modification de la température produit une stratification de la température des océans et des mers [19]. Cette stratification empêche le transfert de l'oxygène vers les fonds marins. Ainsi, ces 50 dernières années, l'oxygénation des océans est en fort déclin [20]. Cependant, malgré les constats alarmants, les chercheurs s'accordent sur un point : il est difficile de prévoir, avec les connaissances et données actuelles, l'influence de chaque élément sur la modification climatique et l'évolution précise du climat dans les prochaines décennies. Par conséquent, une augmentation des connaissances dans chaque domaine est nécessaire pour réduire les zones d'ombres autour de ce phénomène planétaire.

Dans cet optique, l'objectif principal de la thèse est l'analyse et la consolidation des connaissances sur le déferlement d'une vague sur fond plat grâce à la simulation numérique. Les améliorations récentes des performances informatiques permettent la réalisation de simulations numériques très précises. Cependant, une barrière numérique a fait son apparition empêchant une bonne représentation de la dynamique du déferlement à cause de décalages spatiaux-temporels observés lors de la résolution des équations. Ainsi, le premier objectif de la thèse est l'établissement d'une méthode numérique, basée sur des travaux récents, permettant la simulation précise du déferlement tout en utilisant des méthodes numériques d'ordres élevés. L'implémentation de cette nouvelle méthode et de la tension de surface dans le code permet la réalisation du second objectif : analyser le déferlement sur fond plat et générer une carte des phénomènes de déferlement en fonction des caractéristiques initiales de la vague. Suite à une première étude bibliographique, l'étude fut focalisée sur l'influence de la profondeur d'eau sur le déferlement de vague capillo-gravitaire. En effet, la complexité et la richesse du déferlement provenant de l'interaction de phénomènes capillaires et gravitaires en font un processus nécessitant davantage d'informations pour le comprendre et le caractériser.

Le document se structure en 5 chapitres.

Le premier chapitre constitue le contexte général dans lequel se situe l'étude réalisée dans ce mémoire. Une description détaillée de l'influence de la modification climatique laisse place à la présentation d'une partie des études provenant de la littérature. Cette courte introduction du contexte permet de replacer l'étude présentée dans ce manuscrit

par rapport à la richesse des études dans le domaine du déferlement de vague. Ce chapitre n'a pas vocation à faire une description pointue de tous les domaines du déferlement de vague mais de démontrer la complexité et les méthodes utilisées pour comprendre le phénomène.

Le second chapitre se consacre à la présentation d'une vague et de son déferlement. Les hypothèses de génération et des caractéristiques de la vague simulée seront présentées. Une présentation rapide de la littérature sera effectuée lors de la description des types de déferlement. Cette partie est nécessaire pour comprendre les zones d'ombres présentes dans la littérature et l'objet d'étude du manuscrit.

Le troisième chapitre est la présentation de l'outil numérique utilisé. La méthode des volumes finis sur laquelle est basé le code est définie dans ce chapitre et est nécessaire dans la compréhension des erreurs numériques. Puis l'ensemble des équations résolues dans ce mémoire est décrit, ainsi que l'utilisation de la méthode des volumes finis sur chaque terme des équations. Finalement, les méthodes numériques et les conditions initiales utilisées dans la thèse sont présentées pour avoir un descriptif complet du code utilisé.

Le quatrième chapitre porte sur la description et validation de la méthode proposée permettant de réduire considérablement les erreurs numériques provenant de la résolution découplée des équations. La méthode se basant sur des travaux de la littérature, une présentation de l'état de l'art est réalisée. L'origine du problème est présentée afin de permettre la meilleure compréhension de l'algorithme. Cet algorithme est par la suite vérifié sur des cas de la littérature puis validé sur des phénomènes physiques plus complexes. Pour finir, la méthode et les paramètres associés seront validés sur le déferlement d'une vague sur une plage.

Le dernier chapitre présente l'analyse finale réalisée sur le déferlement d'onde capillaro-gravitaire. Cette étude porte sur cinq longueurs d'onde différentes. Par conséquent, une étude préliminaire définit le pas d'espace utilisé pour chaque longueur d'onde. Les phénomènes d'ondes capillaires, de vorticités et de dissipation d'énergie sont présentés dans ce manuscrit. L'étude des deux premiers phénomènes permet la description détaillée des différents types de déferlement. Dans un dernier temps, la dissipation d'énergie et l'intensité du déferlement seront présentées et étudiées.

Une conclusion clôturera le travail réalisé dans ce manuscrit. Des perspectives seront développées quant aux possibilités d'études suite aux résultats obtenus.

Au regard de l'immense richesse de la bibliographie sur le déferlement de vague, son interaction avec des structures ou la récupération de l'énergie par les vagues, l'état de l'art présentée dans ce manuscrit se focalisera sur la littérature proche de l'objet d'étude. De plus, l'auteur a choisi de redistribuer la présentation de l'état de l'art dans l'ensemble du manuscrit. Celui-ci sera présenté dans les sections correspondantes.



# Chapitre 1

Contexte général du déferlement de  
vague dans la littérature

L'étude récente de B. G. Reguero *et al* en 2019 [3] publiée dans *Nature communications* analyse l'influence du changement climatique sur la génération des vagues dans chaque océan entre 1948 et 2017. L'augmentation moyenne de la température sur Terre engendre la fonte de glaciers et produit un élèvement de la surface des océans modifiant l'interaction de l'océan et des zones côtières. L'influence de la modification climatique provoque une augmentation régulière de la puissance moyenne annuelle contenue dans les vagues dans l'ensemble des océans. La figure 1.1 représente les résultats provenant de l'article. Depuis 1948, l'augmentation moyenne de la puissance globale contenue par les vagues est de 0.47%. Cependant, cette augmentation tend à augmenter dans les dernières décennies provoquant en moyenne depuis 1994 une augmentation de la puissance de 2.3% par année.

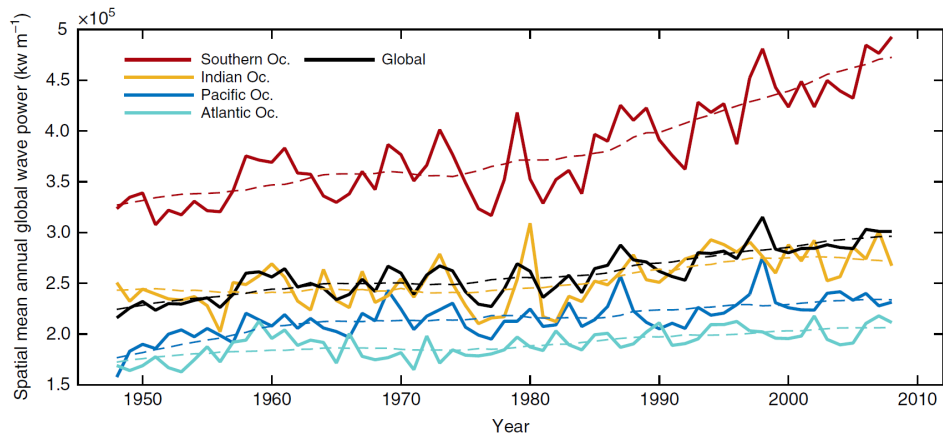


Figure 1.1. – Évolution de la puissance annuelle moyenne au sein des vagues dans les différents océans sur Terre entre 1948 et 2008. L'image provient de l'article de B. G. Reguero *et al* en 2019 [3].

L'augmentation de la puissance des vagues a été comparée avec l'augmentation de la température moyenne à la surface des océans. Les deux courbes de la figure 1.2, provenant de deux bases de données différentes, confirment l'augmentation de la température à la surface des océans. L'augmentation de cette température globale moyenne dans la dernière décennie est de 0.1%. L'analyse des résultats de l'augmentation de la puissance annuelle moyenne globale et de l'augmentation de la température moyenne globale à la surface des océans confirme l'étroite relation entre ces deux caractéristiques.

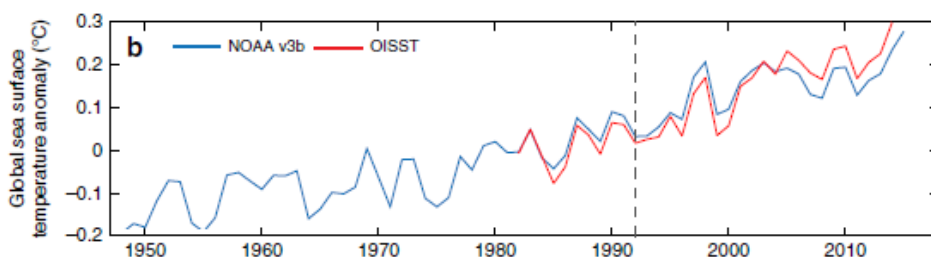


Figure 1.2. – Évolution de l'écart de température moyenne à la surface des océans par rapport à l'année 1992. L'image provient de l'article de B. G. Reguero *et al* en 2019 [3].

Cependant, l'augmentation des précédentes variables n'est pas équitablement répartie sur la surface totale des océans. La figure 1.3 est une cartographie de l'augmentation annuelle moyenne de la puissance des vagues en %. Tandis que l'augmentation moyenne de la puissance des vagues est élevée globalement, il existe des zones d'océans où la puissance a fortement augmenté et d'autres zones pour lesquelles la puissance des vagues a diminué avec les années.

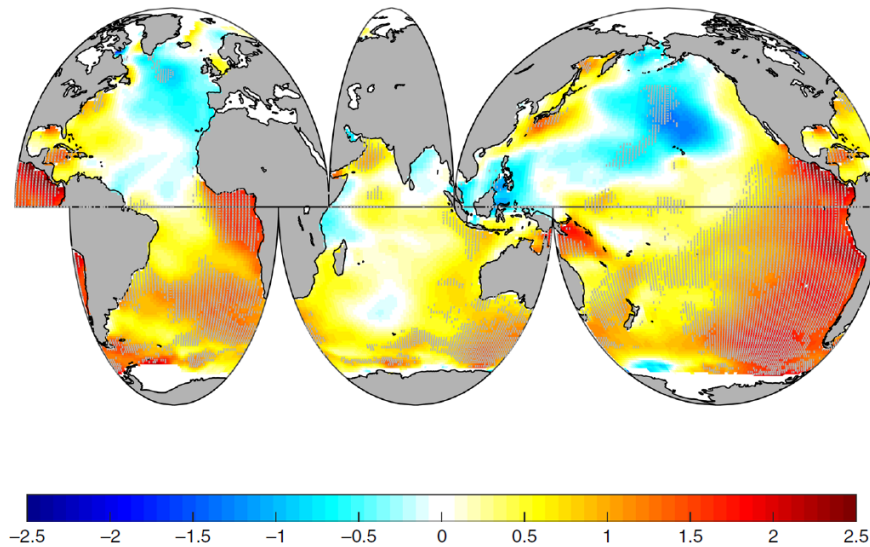


Figure 1.3. – Évolution de la modification moyenne de la puissance des vagues entre 1985 et 2008 en % par année. L'image provient de l'article de B. G. Reguero *et al* en 2019 [3].

La modification climatique produit une constante augmentation de la température à la surface des océans. De plus, une seconde conséquence du changement climatique est l'augmentation globale de l'intensité des vents sur la planète. L'interaction de ces deux conséquences produit une augmentation moyenne de l'amplitude des vagues entre 0.25% et 0.5% chaque année. Ces changements influencent de plus en plus chaque année le comportement du déferlement des vagues dans l'ensemble des océans de la planète. Par conséquent, l'amélioration de la connaissance du déferlement pourrait permettre d'affiner les prédictions et caractérisations de l'évolution à long terme de l'impact des vagues sur les côtes terrestres.

## 1.1. Transport de sédiments

Le transport de sédiments dans les zones côtières entraîne une déstabilisation de la structure du fond marin, l'érosion de plages et la modification de la profondeur de l'eau. Le déferlement de vague est un processus important dans la suspension et le transport de ces sédiments. Par conséquent, de nombreuses études sur l'influence du déferlement sur le transport de sédiments ont été réalisées. Le mouvement de l'eau généré par le déferlement de vague produit un important cisaillement et décroche des poches de sédiments tout en les advectant vers la surface de l'eau. R. L Miller [21] et K. Nadaoka *et al* [22] ont été les premiers à étudier l'importance du déferlement sur la suspension du sable et les modifications engendrées. Une grande majorité du transport de sédiment provient de l'interaction du déferlement sur la bathymétrie (Fig. 1.4).

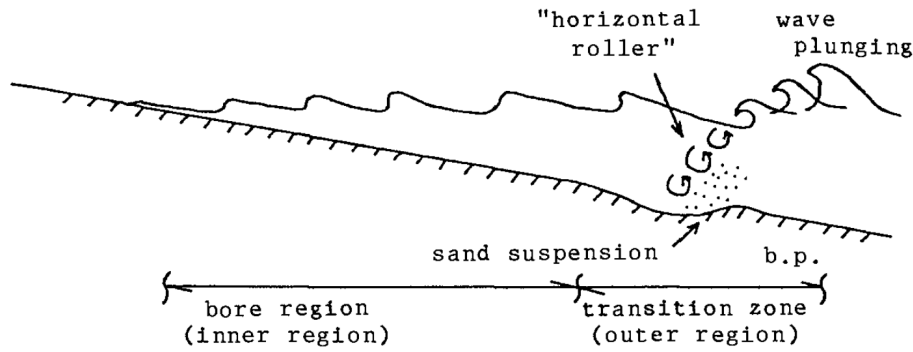
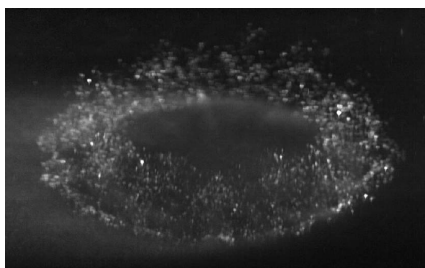
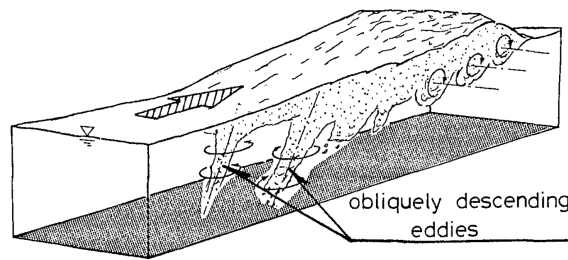


Figure 1.4. – Schématisation de la zone de transport de sédiments en fonction de l’avancée du déferlement. L’image provient de l’article de K. Nadaoka *et al* [22].

La suspension des sédiments par le déferlement provient généralement de l’interaction d’un phénomène de forte vorticité avec le lit de la bathymétrie. Un déferlement de vague entraîne l’apparition de phénomènes rotatifs de forme et d’intensité fortement dépendantes des caractéristiques initiales de la vague déferlante. Des anneaux de vorticité horizontaux (Fig. 1.5a) ou encore des phénomènes de vorticité obliques descendants (Fig. 1.5b) peuvent être observés. Les récentes études [23, 24, 25, 26] expérimentales et numériques du déferlement démontrent l’influence de ce phénomène sur le transport de sédiment. L’élément majeur de la suspension est l’apparition de cisaillement important proche du fond permettant le décrochage des fines particules. Ainsi, un mouvement de cisaillement ordonné semble plus propice au transport de sédiments en comparaison d’un phénomène turbulent. De plus, la vitesse verticale d’impact de ces structures cohérentes influence la suspension et le transport des particules. L’étude de la génération et propagation de ces systèmes de vorticité cohérents est importante pour améliorer la compréhension et le développement de modèle de transport de sédiments.



(a) Suspension de particules provenant de l’impact d’un anneau de vorticité circulaire sur le fond. L’image provient de l’article de R. J. Munro *et al* [23].



(b) Schématisation de la vorticité oblique descendante («obliquely descending eddies»). L’image provient de l’article de K. Nadaoka *et al* [22].

Figure 1.5. – Images de phénomènes de vorticité : anneau circulaire (a) et oblique descendante (b).

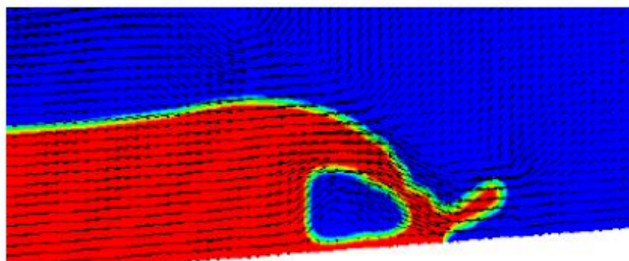


## 1.2. Influence de la bathymétrie

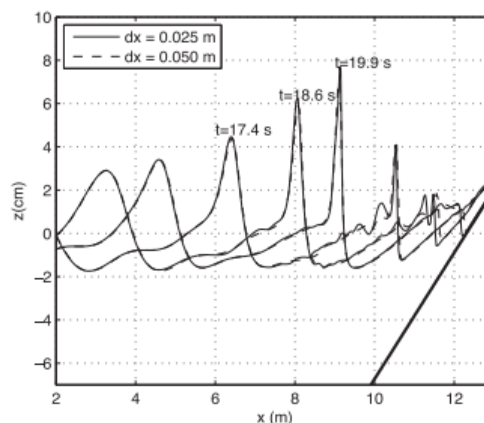
Les premières études du déferlement sur les zones côtières ont démontré l'importance de la bathymétrie sur la forme du déferlement [27, 28]. Différentes bathymétries ont été étudiées : une pente constante (plage), des bathymétries plus complexes et des infrastructures.

### 1.2.1. Plage à pente constante

Dans leur article, B. Robertson *et al* [29] font une analyse complète du déferlement de vagues sur une plage à pente constante. Ils démontrent l'importance de l'évolution des méthodes et la géométrie de la bathymétrie sur la connaissance du déferlement. En effet, le déferlement de vague étant un phénomène complexe, il est nécessaire de produire un protocole précis pour étudier et mettre en corrélation les résultats. Les paramètres tels que l'angle de la pente et la longueur d'onde à l'amplitude de la vague sont des éléments importants dans le processus du déferlement. La variation d'un de ces paramètres peut modifier le type de déferlement, l'angle d'impact du jet, etc. Le déferlement sur une plage constante est étudié expérimentalement [30, 31] et numériquement [32, 33]. La figure 1.6 représente trois des méthodes permettant l'étude du déferlement sur une plage. L'utilisation de méthodes différentes permet l'augmentation de l'ensemble des connaissances du déferlement sur une plage. Chaque méthode possède ses propres domaines d'études.



(a) Simulation numérique du déferlement d'une vague sur une plage. L'image provient de l'article de J. Camille *et al* [34].



(b) Modélisation du déferlement d'une vague sur une plage. L'image provient de l'article de F. Shi *et al* [35].



(c) Expérience en laboratoire du déferlement de vague sur une plage. L'image provient de l'article de B. M. Sumer *et al* [24].

Figure 1.6. – Image du déferlement de vague sur une plage avec trois méthodes différentes : simulation numérique (a), modélisation (b) et expérimental en laboratoire (c).

## 1.2.2. Bathymétrie complexe

Les fonds marins possèdent des bathymétries complexes et variées. Par conséquent, des études analysent le déferlement sur des géométries plus complexes. Parmi ces géométries se trouve : la simple ou la double marche [36, 37], un récif immergé [38, 39] ou une plage en trois dimensions [40]. Les bathymétries présentées dans la figure 1.7 sont des exemples de résultats présents dans la littérature sur les bathymétries complexes. Une nouvelle fois, l'expérimental (Fig. 1.7a et 1.7b), la simulation numérique (1.7c) et la modélisation (Fig. 1.7d, 1.7e) sont des méthodes permettant l'analyse du déferlement.

## 1.2.3. Impact sur des structures

Le déferlement de vague est également étudié afin de comprendre son impact sur des structures humaines et naturelles. Les formes les plus connues de structures étudiées sont : une paroi verticale (Fig. 1.8a), un ou plusieurs cylindres (Fig. 1.8b) et un cône (Fig. 1.8c).

# 1.3. Échanges et interactions air-océan

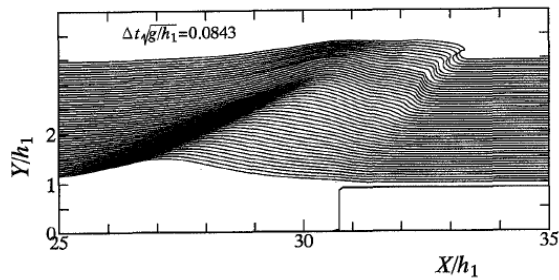
Dans les récentes études, il a été reconnu que le déferlement de vague avait une influence dans les échanges et interactions entre l'air et l'océan.

## 1.3.1. Influence du vent sur le déferlement de vague

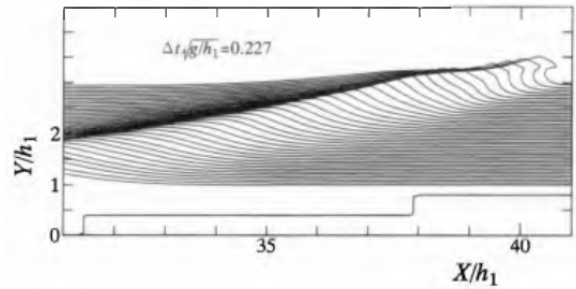
Le vent n'est pas seulement un élément générateur de vagues, il modifie également la forme du déferlement par sa direction et son intensité [44, 45, 46, 47, 48]. L'amplitude de la vague au moment du déferlement, la forme du jet et du rouleau, le point de déclanchement du déferlement, la dissipation de l'énergie, l'ensemble de ces phénomènes sont modifiés par la présence de vent pendant le déferlement. Tandis qu'un vent de direction opposée au déferlement force le processus et produit un déferlement plus tôt que prévu, la direction similaire à la direction du déferlement facilite le mouvement de la vague et retarde l'apparition du déferlement. Ainsi, les conditions externes semblent également jouer un rôle important dans le processus du déferlement. De plus, la présence de vent contraire produit le déchirement de gouttes d'eau sur le dessus de la vague. Ces gouttes d'eau interagissent avec la couche d'air au dessus de la vague [49].

## 1.3.2. Aération des océans

Un déferlement de vague peut produire l'apparition de mécanismes capturant des bulles au sein de l'eau et augmentant la surface de contact entre l'air et l'océan. Cette augmentation de la surface de contact produit une augmentation de l'échange de matière entre les deux fluides. L'aération des océans est un mécanisme influencé par la forme du déferlement. Tandis qu'un déferlement glissant produit une légère augmentation de la surface de contact, le déferlement plongeant capture une grande quantité de bulles (Fig. 1.9a). D'autres phénomènes comme les filaments peuvent augmenter le taux d'échange



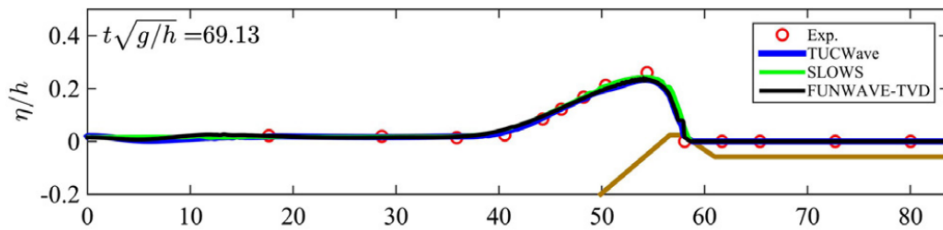
(a) Évolution de la surface d'un déferlement sur une marche réalisée expérimentalement. L'image provient de l'article de T. Yasuda *et al* [41].



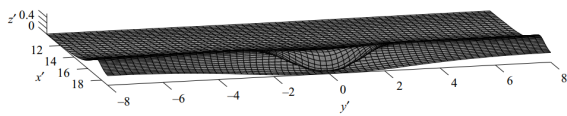
(b) Évolution de la surface d'un déferlement sur une double marche réalisée expérimentalement. L'image provient de l'article de T. Yasuda *et al* [41].



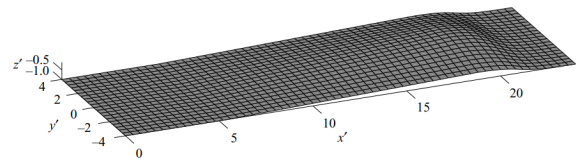
(c) Simulation numérique du déferlement d'une vague sur une récif. L'image provient de l'article de M. Kazolea *et al* [38].



(d) Modélisation du déferlement d'une vague sur une récif. L'image provient de l'article de M. Kazolea *et al* [38].

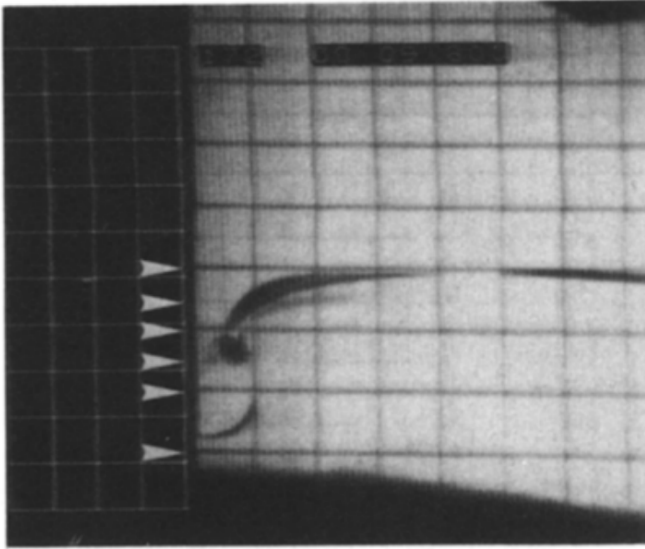


(e) Modélisation du déferlement d'une vague sur une plage en trois dimensions. L'image provient de l'article de P. Guyenne *et al* [40].

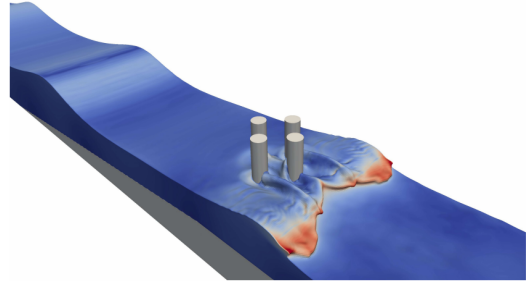


(f) Plage en trois dimensions de la vague déferlante de l'image (e). L'image provient de l'article de P. Guyenne *et al* [40].

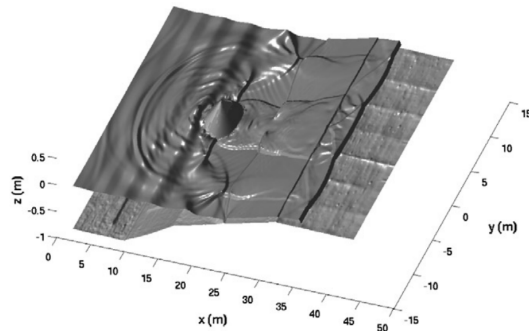
Figure 1.7. – Images du déferlement de vague sur une plage avec des bathymétries complexes : simple marche (a), double marche (b), récif (c,d) et en trois dimensions (e,f).



(a) Expérience du déferlement d'une vague sur une paroi verticale. L'image provient de l'article de M. Hattori *et al* [42].



(b) Simulation numérique du déferlement d'une vague sur un groupe de quatre cylindres. L'image provient de l'article de M. A. Chella *et al* [43].



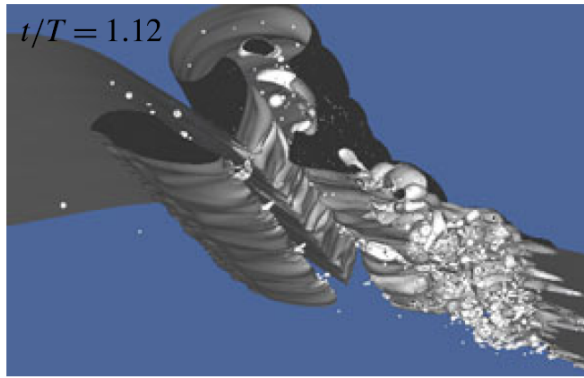
(c) Modélisation numérique du déferlement d'une vague sur un cône. L'image provient de l'article de F. Shi *et al* [35].

Figure 1.8. – Image du déferlement de vague sur trois infrastructures complexes : paroi verticale (a), quatre cylindres (b) et cône (c).

de matière entre l'air et l'océan (Fig. 1.9b). L'aération des océans est un domaine étudié par des méthodes expérimentales [50, 51, 52] et numériques [52, 53, 54].

### 1.3.3. Couche d'air

Le vent est un élément externe agissant sur le déferlement. De plus, le processus de déferlement vient modifier à son tour la couche d'air au dessus de l'eau. En effet, l'apparition de sprays océaniques participe à la modification de l'humidité ambiante et de la température ambiante de la couche d'air [49]. En outre, le mouvement soudain du déferlement de vague produit l'apparition de vorticité dans l'eau sous la forme de monopole ou de dipole [55]. Les interactions entre les vagues et la couche d'air au dessus de l'eau engendre la modification des propriétés physiques et cinétiques de chaque élément, augmentant la complexité de l'étude du déferlement de vague.



(a) Simulation numérique du déferlement de vague plongeant. Observation du dessous des bulles capturées. L'image provient de l'article de L. Deike *et al* [53].



(b) Expérience en laboratoire d'un déferlement plongeant. Des filaments d'air sont visibles autour du rouleau. L'image provient de l'article de P. Lubin *et al* [52].

Figure 1.9. – Image du déferlement plongeant avec l'apparition de bulles (a) et de filaments d'air (b).

## 1.4. Positionnement de la thèse

Les caractéristiques du déferlement présentées dans ce chapitre sont une partie des nombreuses études présentes dans la littérature. Par conséquent, le phénomène de déferlement de vagues possède une richesse et une complexité nécessitant l'interaction de plusieurs méthodes et de plusieurs formes d'études pour accroître les connaissances de ce phénomène. L'analyse réalisée pendant la thèse se focalise sur la consolidation de la connaissance des phénomènes apparaissant pendant le déferlement d'une seule vague. La simulation numérique avec la résolution des équations de Navier-Stokes couplée à l'utilisation d'une condition initiale d'onde sinusoïdale dans un domaine périodique sans interaction avec un courant marin ou avec du vent est choisie. L'amélioration récente des performances des outils de simulation numérique et des supercalculateurs permettent la réalisation de simulations plus précises pour décrire le processus du déferlement de vague. De nombreuses simulations ont, de ce fait, été lancées afin de compléter les connaissances du déferlement d'une vague sur fond plat pour diverses profondeurs d'eau. Ces simulations serviront également à la production de cartes de déferlement en fonction de grandeurs caractéristiques liées à la vague initiale.



## Chapitre 2

Qu'est qu'une vague déferlante et  
comment la caractériser ?

L'objectif de ce chapitre est la présentation et la définition des hypothèses d'études du déferlement de vagues étudié dans le dernier chapitre.

## 2.1. Définition et description d'une vague

En mécanique des fluides, une vague est une onde de surface, impliquant une combinaison de mouvements longitudinaux et transversaux, se propageant dans une eau de profondeur variable. Lorsque l'onde arrive sur une colonne d'eau, les particules composant la colonne commencent à se déplacer de manière elliptique, générant un mouvement irrotationnel du fluide. Ce mouvement des particules permet la propagation de l'onde ainsi que l'énergie associée vers le rivage. Au cours des siècles précédents, les études mathématiques [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63] ont permis la découverte de grandeurs et relations définissant l'ensemble des ondes générées (section 2.1.1). De plus, une meilleure compréhension de la génération (section 2.1.2) de ces ondes complète les connaissances acquises mathématiquement et permet la prédiction des vagues se propageant dans l'océan. Dans les sections suivantes, les notions de profondeur (section 2.1.3) et de mouvement des particules composant la colonne d'eau (section 2.1.4) seront discutées afin de mieux cerner le mouvement interne de l'onde pour une bathymétrie quelconque. Finalement, la définition du régime d'une vague (section 2.1.5) laissera place à la discussion des hypothèses et des caractéristiques des vagues étudiées dans ce manuscrit.

### 2.1.1. Grandeurs et relations caractéristiques

Dans la nature, il existe de nombreuses formes d'ondes de surface. Parmi ces ondes, se trouvent l'onde sinusoïdale et l'onde solitaire. Tandis que l'onde sinusoïdale correspond à un train d'onde se déplaçant en phase, l'onde solitaire a la particularité de se déplacer seule à la surface de l'eau. Les différentes propriétés associées à ces deux ondes modifient les grandeurs et relations caractéristiques. Dans ce manuscrit, l'étude du déferlement de vague est réalisée sur une onde sinusoïdale périodique. Par conséquent, les grandeurs et relations présentées dans cette section sont celles associées à une onde sinusoïdale.

Les travaux sur les ondes sinusoïdales linéaires de G. B. Airy en 1845 [64] ont permis à G. G. Stokes [61, 60] de développer un modèle, encore utilisé aujourd'hui, d'ordre plus élevé sur l'onde sinusoïdale gravitationnelle et la caractérisation de cette onde. Les études suivantes de H. Lamb en 1932 [57] et G. D. Crapper en 1957 [59] ont étendue cette caractérisation jusqu'aux ondes capillaires et pour toutes profondeurs d'eau. Les premières grandeurs associées à une onde sinusoïdale sont généralement des longueurs du fait de la facilité à mesurer les caractéristiques géométriques de l'onde. La connaissance de ces longueurs, associée à la période  $T$ , permet l'étude plus approfondie de l'onde. L'ensemble des caractéristiques et relations importantes sont présentées dans cette partie. Elles seront dans un premier temps définies dans un cas général d'une onde se déplaçant dans un système composé de deux liquides ayant une profondeur  $d$  et une hauteur  $d'$  finies. Puis ces relations générales seront écrites sous leur forme la plus réduite en prenant en compte les hypothèses liées à la thèse. Les vagues simulées au cours de la thèse possèdent les propriétés physiques de masse volumique et viscosité dynamique liées à l'eau et à l'air. De plus, la hauteur de la couche d'air est supposée être suffisamment grande pour ne pas impacter le type de déferlement.



### 2.1.1.1. Longueurs caractéristiques

Une onde est caractérisée par plusieurs longueurs : une longueur d'onde  $\lambda$ , une demi-amplitude  $a$ , une amplitude  $h$  et une profondeur  $d$  pouvant varier en fonction de la bathymétrie associée (Figure 2.1).

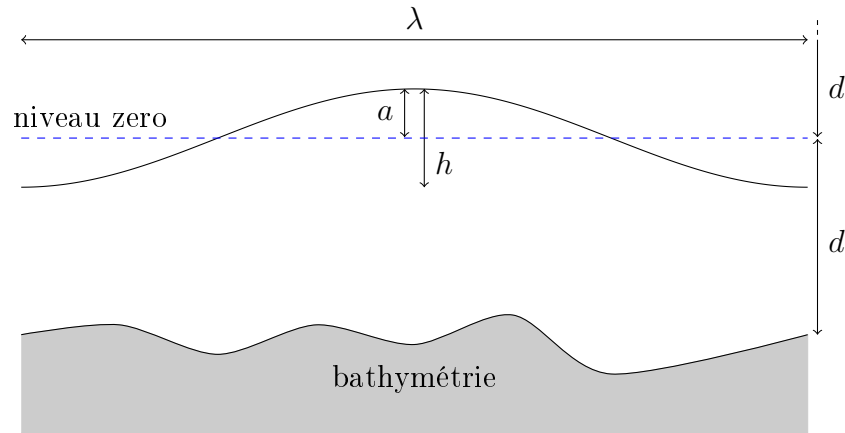


Figure 2.1. – Définition des grandeurs liées à une onde sinusoidale.

**Longueur d'onde  $\lambda$**  La longueur d'onde est une distance séparant deux particules ayant une dynamique identique, ces deux particules sont dites étant en phase l'une de l'autre.

**Amplitudes  $a$  et  $h$**  Tandis que l'amplitude  $a$  correspond à la distance entre la crête de la vague et le niveau moyen de l'eau, l'amplitude  $h$  correspond quant à elle à la distance verticale entre la crête et le creux de la vague.

**Profondeurs  $d$  et  $d'$**  La profondeur  $d$  d'une onde de surface correspond à la distance entre le niveau moyen de l'eau et la bathymétrie. Cette distance peut varier au fur et à mesure de l'advection de la vague, comme par exemple l'advection de la vague sur une plage en pente. A l'inverse, la profondeur  $d'$  va relier la hauteur du niveau moyen de l'eau à la hauteur de la paroi supérieure. Cette dernière distance devient importante lors de l'advection d'une onde dans un domaine fermé verticalement. Le domaine d'étude de la thèse se concentrera uniquement sur une hauteur  $d'$  supposée infinie, c'est-à-dire n'ayant pas d'influence sur la dynamique du déferlement et une profondeur  $d$  constante.

### 2.1.1.2. Relations caractéristiques

**Nombre d'onde angulaire  $k$**  Le nombre d'onde  $k$ , en radian par mètre, représente la fréquence spatiale. Il est proportionnel à l'inverse de la longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

**Cambrure  $\epsilon$**  La cambrure  $\epsilon$ , en radian, représente le ratio de la demi-amplitude de la vague par sa longueur d'onde :

$$\epsilon = ak = \frac{a \cdot 2\pi}{\lambda}$$

**Relation de dispersion  $\omega$**  La fréquence angulaire  $\omega$ , en radian par seconde, mesure le déplacement angulaire par unité de temps. La relation d'ordre 1 pour une onde de surface pour toute profondeur  $d$  avec une épaisseur d'air constante  $d'$  [65, 57, 59, 66] se traduit par :

$$\omega^2 = \frac{\rho_{eau} - \rho_{air}}{\rho_{eau} \cotanh(kd) + \rho_{air} \cotanh(kd')} gk + \frac{\sigma}{(\rho_{eau} \cotanh(kd) + \rho_{air} \cotanh(kd'))} k^3 \quad (2.1)$$

L'ensemble de l'étude est faite pour une épaisseur d'air très grande par rapport à la longueur d'onde, le terme  $\cotanh(kd') \approx 1$ . De plus, le rapport entre la masse de l'eau et celle de l'air  $\frac{\rho_{eau} \cotanh(kd)}{\rho_{air}} > 1000$  permet la réduction de l'équation 2.1. Celle-ci devient :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\sigma}{\rho_{eau}} k^3 \right) \tanh(kd) \quad (2.2)$$

**Période  $T$**  La période  $T$ , en seconde, représente la durée pour laquelle une particule va reprendre sa position initiale. Elle peut être reliée à la relation de dispersion par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Fréquence  $f$**  La fréquence  $f$ , en unité par seconde, est le nombre de répétition de l'onde par unité de temps :

$$f = \frac{1}{T}$$

**Célérité  $c$**  La célérité  $c$  de la vague, en mètre par seconde, représente la vitesse à laquelle l'onde se propage à la surface de l'eau. Elle est définie, sous les hypothèses définies précédemment, par la relation suivante :

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left( \frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho_{eau}} k \right) \tanh(kd)}$$

La célérité de l'onde est différente de la vitesse des particules.

## 2.1.2. Génération

L'élément universel lors de la génération d'une vague est un transfert énergétique, ponctuel ou continu, d'un corps ou un fluide vers une colonne d'eau. La manière dont l'énergie est transférée, couplée à la quantité d'énergie transférée, vont déterminer le type d'onde généré ainsi que les caractéristiques physiques de la vague (longueur, amplitude, etc. ). L'ensemble de ces sources, peuvent générer des ondes de longueurs d'onde et d'amplitudes variées. Ces vagues peuvent avoir une longueur d'onde allant du millimètre jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres et une amplitude variant du millimètre jusqu'à une trentaine de mètres. Dans cette section, les méthodes les plus connues de génération d'une vagues seront discutées.

### 2.1.2.1. Vent

Les vagues générées par le vent sont des ondes de surface qui résultent d'une pression du vent soufflant sur une zone de surface d'eau [67, 17]. La taille des vagues générées

par le vent varie de quelques centimètres à des vagues mesurant 20 à 30 *m* d'amplitude [68, 69]. En pleine mer et océan, ces vagues générées sont généralement nommées houle et peuvent parcourir plusieurs milliers de kilomètres avant de venir déferler et dissiper leur énergie sur une côte.

### 2.1.2.2. Impact d'un corps sur la surface

L'impact d'une quantité de matière sur la surface génère une transmission d'énergie sur la surface et les premières couches de la colonne d'eau pouvant prendre la forme d'une onde. Les caractéristiques de la vague formée sont ainsi reliées à l'énergie initiale contenue avant impact mais aussi à la forme de l'impact. Lors de pluies, l'impact des gouttes sur une surface d'eau génère de nombreuses ondes capillaires [70, 71] s'adveçant par la suite sur la surface jusqu'à dissipation de celles-ci. Pour des impacts plus énergétiques, tel que l'effondrement d'un pan de falaise dans l'océan [72] ou l'impact d'une météorite [73], la vague générée peut s'apparenter à un tsunami voire à un mégatsunami et engendrer des destructions humaines et naturelles importantes.

### 2.1.2.3. Mouvement sous la surface

Le mouvement soudain d'une quantité de matière sous la surface peut engendrer la création d'une onde à la surface de l'eau. Les glissements de terrain sous-marins, les éruptions sous-marines et la fissure de plaque tectonique sont les sources énergétiques majeures produisant une onde [73]. Une nouvelle fois, l'intensité énergétique transférée peut générer des ondes de longueur d'onde et amplitude variées. Une des méthodes expérimentales de génération de vague consiste en l'utilisation d'un piston permettant le déplacement soudain de la colonne d'eau [74]. Cette méthode s'apparente à un transfert d'énergie sous la surface produisant des ondes solitaires [75] et sinusoïdales [76].

### 2.1.2.4. Influence de corps céleste

Dans l'article de P. Lubin et H. Chanson en 2017 [77], une discussion et une revue des analogies entre une vague et un mascaret sont effectuées. Un mascaret est une vague générée par la marée montante dans les fleuves et les rivières. Les deux corps célestes, la Lune et le Soleil, sont des sources de génération des mascarets [78]. L'énergie est transmise à la masse d'eau grâce à l'influence de la force de gravitation de ces deux astres sur l'eau située sur Terre. Cependant, cette influence devient non négligeable uniquement pour d'immenses masses d'eau. Les ondes ainsi générées possèdent des longueurs de plusieurs centaines à plusieurs milliers de kilomètres, ce qui correspond essentiellement aux vagues provenant des marées.

## 2.1.3. Profondeur

Suite à leur génération, les ondes vont parcourir la surface de l'eau avant d'être dissipées. Lors de leur périple, la bathymétrie va évoluer au fur et à mesure des mètres/kilomètres parcourus. Cependant, la profondeur de la bathymétrie va influencer le mouvement des particules et donc le transport de l'onde. Dans l'équation 2.2 de fréquence angulaire  $\omega$  de l'onde sinusoïdale, l'influence de la profondeur devient proportionnelle à :

$$\sqrt{\tanh(kd)} = \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\right)} \quad (2.3)$$

La notion d'eau profonde correspond à la condition où la bathymétrie n'influence pas l'advection de la vague ainsi que son déferlement. A l'inverse, l'eau peu profonde est

associée au domaine correspondant à une influence non négligeable de la bathymétrie. Le terme majeur de l'influence de la bathymétrie est fonction du ratio profondeur sur longueur d'onde  $\frac{d}{\lambda}$ . Ce ratio est nommé profondeur d'eau. La figure 2.2 représente la valeur de l'équation 2.3 en fonction du rapport  $\frac{d}{\lambda}$ . H. Lamb [57] définit la notion d'eau profonde correspondant à toute vague dont le ratio  $\frac{d}{\lambda} \geq 0.5$ . Par conséquent, la notion d'eau peu profonde représente l'ensemble des autres vagues, le domaine est défini par  $\frac{d}{\lambda} < 0.5$ . Grâce à ce ratio, il a été possible de construire un domaine dont le fond intervient dans le système d'advection et de déferlement, et un domaine dont la connaissance précise de la bathymétrie n'est pas nécessaire. Dans ce manuscrit, les deux domaines, eaux profonde et peu profonde, seront étudiés.

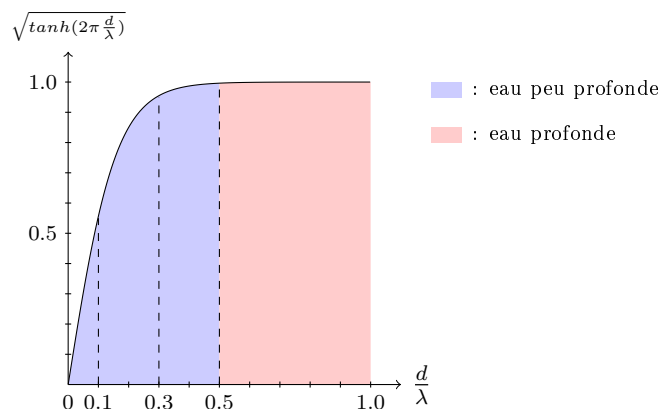


Figure 2.2. – Influence du ratio  $\frac{d}{\lambda}$  sur l'équation 2.3. Les zones bleue et rouge correspondent respectivement à une eau peu profonde et une eau profonde.

#### 2.1.4. Mouvement des particules

Le passage d'une vague sur une colonne d'eau engendre le déplacement de ses particules. Elles commencent à se déplacer depuis leur position initiale, puis suite à un mouvement elliptique ces particules vont reprendre leur position initiale. Le mouvement est alors défini sans transport de matière, c'est à dire sans modification de la position des particules entre avant et après le passage de l'onde.

Le mouvement sans transport de matière correspond à un mouvement parfaitement elliptique de la trajectoire des particules. Ce mouvement est modifié par la profondeur. La figure 2.3 schématise la trajectoire des particules en eau profonde et peu profonde. Plus les particules sont éloignées de la surface, plus l'amplitude du mouvement elliptique sera faible. L'énergie de la vague est ainsi concentrée dans les premières couches situées sous la surface de l'eau. Lorsque la vague se propage dans une eau profonde (Fig. 2.3a), le mouvement des particules est circulaire. Tandis que pour une propagation d'onde en eau peu profonde (Fig. 2.3b), le mouvement est ovale. La distance longitudinale parcourue par les particules est alors plus grande que la distance verticale. La profondeur du fond de l'eau modifie le mouvement et la répartition de l'énergie interne au sein de la vague.

#### 2.1.5. Régime d'une vague

Le mouvement d'une vague est reliée aussi bien à la dynamique de la surface qu'aux différences de potentiel de l'eau. Il existe ainsi deux forces motrices agissant sur l'advection

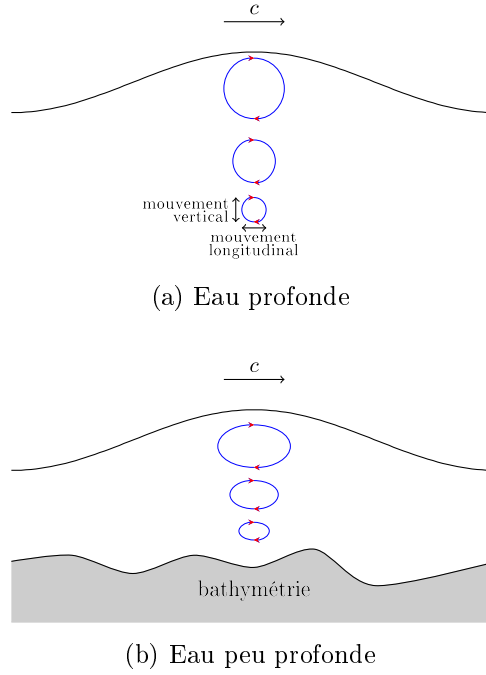


Figure 2.3. – Mouvement elliptique des particules sous la surface dans une eau profonde (a) et peu profonde (b). Le mouvement est représenté par une ellipse bleue et l'orientation par des flèches rouges.

de l'onde : la force de pesanteur et la tension de surface. La relation de dispersion (Eq. 2.2) peut être manipulée pour représenter le rapport de ces deux forces, aussi appelé nombre Bond  $Bo$  dans la littérature, par

$$Bo = \frac{\frac{g}{k}}{\frac{\sigma}{\rho_{eau}} k} = \frac{g\rho_{eau}}{\sigma k^2} \quad (2.4)$$

L'étude de ce ratio permet la représentation en trois régimes différents de l'importance des deux forces sur la dynamique du déferlement. Ces trois régimes sont appelés : capillaire, capillo-gravitaire et gravitaire (Fig. 2.4). Les domaines de longueurs d'onde associés aux trois régimes sont :  $\lambda < 0.0017 m$  (capillaire),  $0.0017 m < \lambda < 0.54 m$  (capillo-gravitaire) et  $0.54 m < \lambda$  (gravitaire).

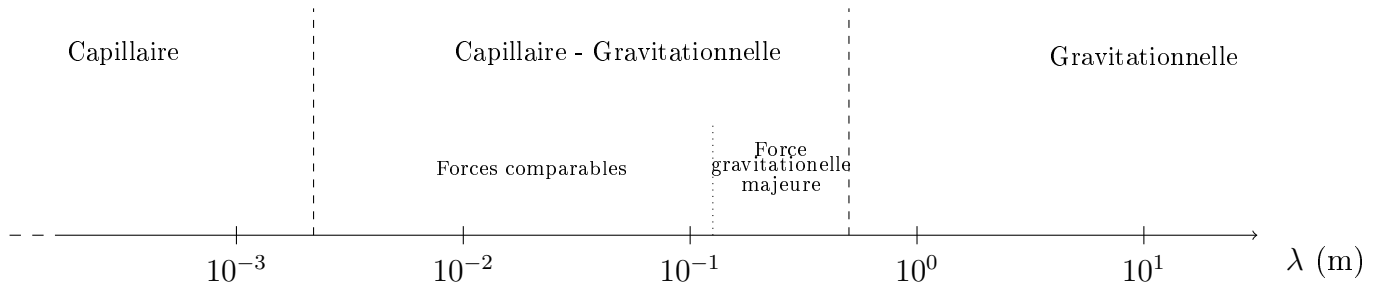


Figure 2.4. – Type de vague en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$

L'étude réalisée dans ce manuscrit portera sur le second régime : capillo-gravitaire. Par conséquent, la résolution des deux forces, gravité et de surface, est nécessaire pour représenter correctement la dynamique du déferlements dans ce régime.

### 2.1.5.1. Capillaire

Le régime capillaire correspond à une vague dont l'influence de la tension de surface est 100 fois supérieur à celle de la force de pesanteur, ce qui correspond à  $Bo < 0.01$ . Le domaine de ce régime correspond à  $\lambda < 0.0017m$ . Les ondes capillaires générées se déplacent avec une très grande célérité due à la tension de surface. La figure 2.5 est une image d'ondes capillaires générées après l'impact d'une goutte sur une surface d'eau profonde. Ce régime est connu dans la littérature [59, 79].

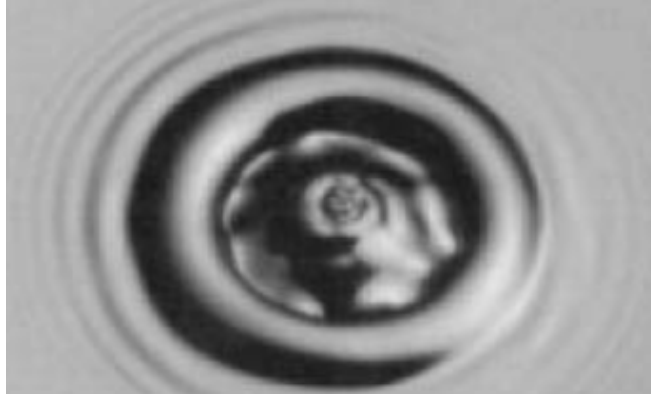


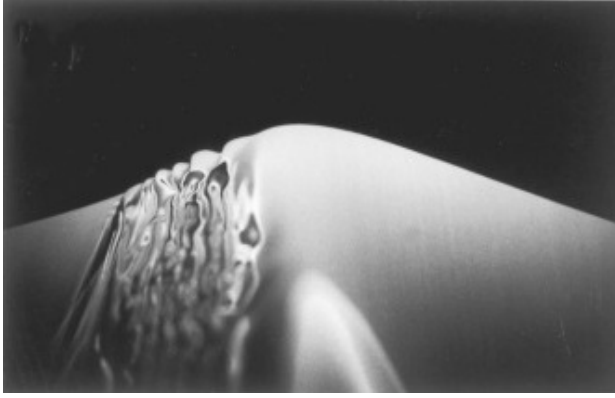
Figure 2.5. – Vue du dessus d'un impact de goutte sur la surface. Des ondes capillaires s'adventent depuis le point d'impact sous la forme de cercles. L'image provient de la thèse de D. Cole [80].

### 2.1.5.2. Capillo-Gravitaire

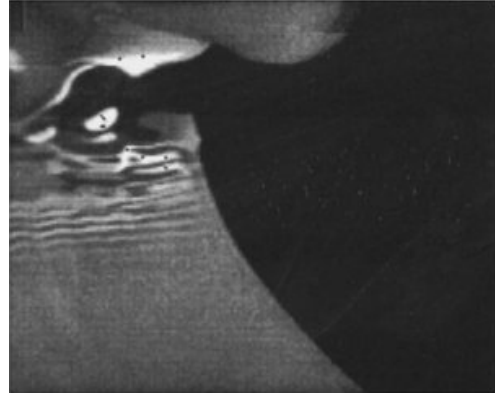
La complexité de ce régime est l'apparition et l'interaction de phénomènes provenant de la tension de surface et de la force de gravité. La présence de ces deux forces motrices produit des dynamiques de déferlement spécifiques à ce régime [81, 82, 83]. La richesse et la difficulté de reproduction des résultats de ce régime en font un sujet intéressant à étudier nécessitant encore des approfondissements dans les connaissances sur le déferlement.

Le régime capillo-gravitaire correspond à un domaine pour lequel des phénomènes physiques liées aux deux forces peuvent être aperçus lors du déferlement. Ce régime sera alors étudié dans ce manuscrit.

Le régime capillo-gravitaire peut être scindé en deux sous-régimes. Le premier se rapporte au domaine où les deux forces sont comparables, c'est-à-dire  $0.01 < Bo < 100$ . Cela correspond à une longueur d'onde de  $0.0017m < \lambda < 0.17m$ . Dans ce champ de longueur d'onde, des phénomènes physiques liés à la gravité et à la tension de surface vont apparaître générant de nombreux types de déferlement (Fig. 2.6a), dont certains présentés par la suite ont été peu ou pas encore étudiés dans la littérature. Le second sous-régime correspond à un déferlement dont l'élément moteur est la force de gravité avec l'apparition de phénomènes capillaires (Fig. 2.6b) ayant peu d'influence sur le type de déferlement mais agissant sur les échelles plus petites (rouleau, jet, bulles, gouttes, etc.). L'augmentation de la longueur d'onde réduit l'importance des petites échelles sur la forme générale du déferlement. Ce régime est borné arbitrairement à  $0.54m$ , correspondant à  $Bo = 1000$ . Le domaine de longueurs d'onde composant le second sous-régime est  $0.17m < \lambda < 0.54m$ .



(a) Déferlement glissant d'une vague. Les ondes capillaires, proches de la crête, glissent le long de la face avant (à gauche) de la vague générant une surface turbulente. La vague se situe dans le premier régime d'une onde capillaire-gravitaire. L'image provient de l'article de W.K. Melville [82].



(b) Vue rapprochée de la face avant d'un déferlement plongeant d'une vague de  $0.80\text{ m}$  de longueur d'onde. Des ondes capillaires se déplacent le long de la face inférieure du jet. La vague se situe dans le second régime d'une onde capillaire-gravitaire. L'image provient de l'article de M. Perlin *et al* [84].

Figure 2.6. – Photographies de déferlement d'une vague dans le premier (a) et le second (b) régimes d'une onde capillaire-gravitaire. Des phénomènes liés à la tension de surface et à la force de gravité sont présents dans les deux déferlements.



Figure 2.7. – Déferlement plongeant d'une vague gravitaire à Teahupoo (Tahiti). La vague a été photographiée par Aaron Chang.

### 2.1.5.3. Gravitaire

Le régime gravitaire, connu dans la littérature [85, 78], correspond aux vagues dont la force de gravité est presque l'unique élément moteur du mouvement de la vague. Il représente l'extension du régime précédent pour lequel la force de tension de surface devient totalement négligeable dans la génération du déferlement. Ce régime est particulièrement caractérisé par la présence du déferlement plongeant. La figure 2.7 est une photographie d'une vague gravitaire déferlante.

### 2.1.6. Hypothèses et domaine d'étude de la thèse

L'analyse du déferlement de vague se concentre sur des ondes capillaire-gravitaires en eaux profonde et peu profonde. L'intervalle de longueurs d'onde des vagues étudiées est inclus dans le régime d'onde capillaire-gravitaire :  $0.05\text{ m} < \lambda < 0.35\text{ m}$ . Le train d'onde

sinusoïdale se déplace à l'interface d'une couche d'eau de profondeur fixe et d'une couche d'air supposée infinie. L'influence de la profondeur du fond plat sera un des points d'étude dans le dernier chapitre de ce manuscrit.

## 2.2. Vague déferlante

Le déferlement de vague est un phénomène physique observable notamment par ses mouvements de surface particuliers. De nombreuses recherches ont permis la compréhension partielle de la formation et des caractéristiques de plusieurs formes de déferlement. Cependant, il n'existe à ce jour aucune définition universelle d'un déferlement pour tout type d'onde. Lors des premières études faites sur le déferlement [60, 27, 86], cette différence pouvait s'expliquer par une modification de la forme de la vague avec l'apparition potentielle d'un jet et de l'écume. Ces études initiatrices ont donné naissance aux premiers critères de détection du déferlement. Permettant à de nouvelles études d'accroître les connaissances de ce phénomène diphasique complexe. Depuis, des études sur le transport lagrangien des particules lors d'un déferlement [53], la dynamique sous surfacique [87, 88, 89, 90, 81, 91, 52, 92, 54], ainsi que la dissipation d'énergie associée au déferlement [54, 93, 94, 92, 95, 90, 96] ont fait leur apparition. Grâce à ces nombreuses études, la définition d'une vague déferlante a pu être précisée. Cette définition possède trois points de vue : surfacique, dynamique et énergétique.

**Modification de la forme de la vague** Une vague commence son déferlement lors de l'apparition d'une modification de l'aspect surfacique de l'onde. Une vague non déferlante va osciller autour de sa forme stable sans modification importante de la symétrie axiale de la surface au niveau de la crête. Cette oscillation entre différents états peut provenir de l'interaction avec le vent, le courant ou la bathymétrie. Cependant, dès l'apparition de phénomènes autre que cette oscillation, une onde capillaire, un jet ou de l'écume, la symétrie de la vague est rompue et la vague peut être caractérisée de déferlante [97].

**Transport de matière** Le passage d'une vague non déferlante sur une colonne d'eau produit un mouvement parfaitement elliptique, ou presque en considérant la dérive de Stokes, des particules au sein de la colonne. Cependant, la génération d'un déferlement de vague modifie les lignes de courant et brise le mouvement elliptique. Les particules ne retrouvant pas leur position d'origine, la dynamique induite par la vague déferlante est alors considérée avec transport de matière [53]. En fonction du type de déferlement, le transport peut être plus ou moins important. De manière mathématique, cela correspond à la modification du caractère irrotationnel de la vague.

**Dissipation d'énergie** Lorsque les conditions environnantes dans lesquelles l'onde est advectée (bathymétrie, courants aérien et marin, interaction avec les autres vagues) ne permettent sa bonne propagation, l'onde se déstabilise. Des phénomènes physique apparaissent et dissipent l'énergie totale contenue dans la vague initiale. La quantité d'énergie dissipée varie en fonction du phénomène de déferlement. Le phénomène apparaissant peut détruire l'onde totalement ou partiellement. La destruction partielle de l'onde augmente ponctuellement la dissipation d'énergie permettant de réduire et stabiliser l'onde. L'onde initiale de plus faible énergie continue son advection. A l'inverse, la destruction totale provient de la génération d'un phénomène de forte intensité. L'onde initiale n'est plus présente suite à ce phénomène intense. Le déferlement partiellement destructif peut être associé aux déferlement de type glissant et ondes capillaires parasites. Le déferlement totalement destructif se réfère au déferlement plongeant. Ainsi de manière énergétique,



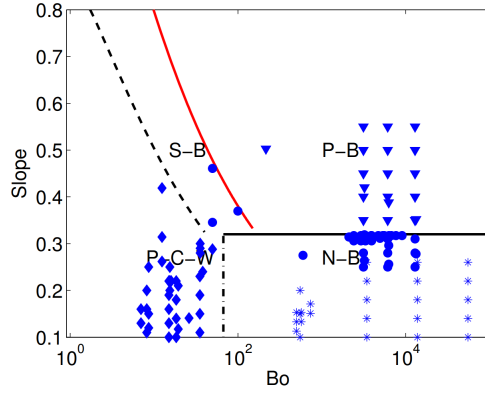


Figure 2.8. – Carte des déferlements en fonction du nombre de Bond ( $Bo$ ) et de la cambrure  $\epsilon$  de la vague (Slope). Les quatre types de déferlements sont représentés par : pas de déferlement ( $*$ , N-B), ondes capillaires parasites ( $\blacklozenge$ , P-C-W), déferlement glissant ( $\bullet$ , S-B) et déferlement plongeant ( $\blacktriangledown$ , P-B). Les symboles associés correspondent à des expériences présentes dans la littérature. La figure provient de l'article écrit par Deike *et al* [90].

le déferlement de vague peut être représenté par l'accentuation de la dissipation d'énergie contenue dans la vague initiale.

La caractérisation du déferlement dans la littérature a permis la classification des phénomènes observés en trois parties : ondes capillaires parasitiques, déferlement glissant et déferlement plongeant. L'une des premières carte de déferlement avec fonction de caractéristiques physiques de la vague a été proposée dans l'article de P. Lubin *et al* [98]. Elle consiste en la présentation du type de déferlement observée en fonction de deux nombres adimensionnés :  $\frac{d}{\lambda}$  et  $\frac{h}{\lambda}$ . Cette carte de déferlement n'est valable que pour une longueur d'onde fixe  $\lambda = 0.10 m$ . Puis en 2015, L. Deike *et al* [90] propose la dernière carte des déferlements pour des vagues en eau profonde grâce au nombre de Bond  $Bo = \frac{g\Delta\rho}{\sigma k^2}$  et à la cambrure  $\epsilon = \frac{2\pi a}{\lambda}$ . La figure 2.8 est la classification proposée. Il n'existe pas actuellement de carte de déferlement prenant en compte les trois variables suivantes : l'amplitude  $a$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et la profondeur  $d$ .

### 2.2.1. Ondes capillaires parasitiques

Lorsque l'onde possède une cambrure suffisamment élevée, l'effet de la tension de surface sur la face avant de la vague produit l'apparition d'un train d'onde de petites longueurs d'onde avec une célérité légèrement supérieure à celle de la vague initiale. La similarité entre ces deux célérités produit un effet d'optique. Le train d'onde généré semble stationnaire par rapport à un observateur se déplaçant avec la vague. Les longueurs d'onde et amplitudes des capillaires de ce train d'onde sont beaucoup plus petites que la vague initiale. Ainsi, la tension de surface joue un rôle majeur dans leur dynamique. Chacune de ces ondes sera appelée onde capillaire. La figure 2.9 est une photographie d'une expérience réalisée par N. Ebuchi *et al* en 1987 [99] sur le déferlement d'ondes capillaires parasitiques.

La présence d'un train d'onde capillaire forme une couche de vorticit e proche de la surface dissipant l'énergie de la vague. Cette couche de vorticit e provient de chaque creux de capillaire et continue dans le sillage de celui-ci jusqu'à la crête du capillaire précédent. La

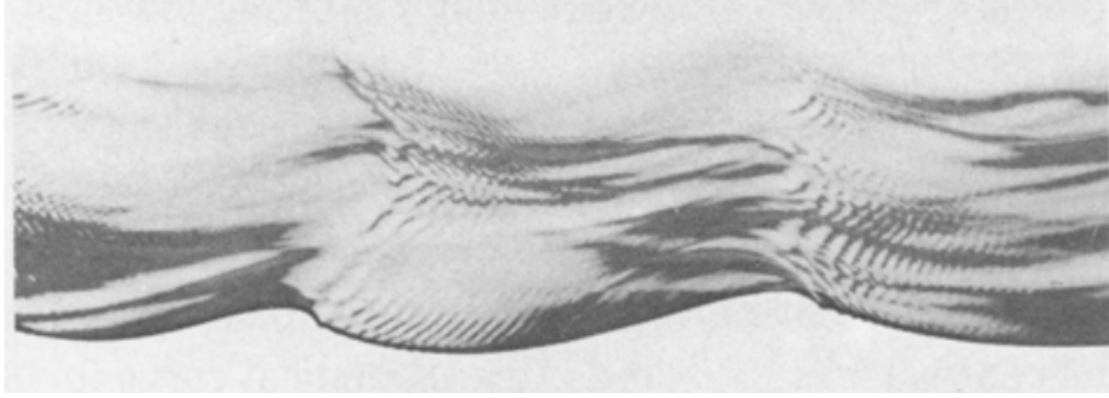


Figure 2.9. – Photographie du déferlement d’ondes capillaires parasites observé expérimentalement par N. Ebuchi *et al* en 1987 [99].

Article	Année	Méthode	Longueur d’onde $\lambda$ (m)	Cambrure $\epsilon$	Profondeur $\frac{d}{\lambda}$
K. D. Ruvinsky <i>et al</i> [104]	1991	Numérique	0.05 – 0.06	0.182 – 0.207	> 0.5
Perlin <i>et al</i> [105]	1992	Expérimental	0.068 – 0.105	0.22 – 0.24	> 0.5
M. Longuet-Higgins [106]	1995	Analytique	0.0682 – 0.08	0.217 – 0.30	> 0.5
A. V. Fedorov <i>et al</i> [107]	1998	Analytique	0.055 – 0.07	0.199 – 0.30	> 0.5
A. V. Fedorov <i>et al</i> [107]	1998	Expérimental	0.051 – 0.11	0.11 – 0.31	> 0.5
L. Jiang <i>et al</i> [108]	1999	Numérique	0.05 – 0.065	0.15 – 0.30	> 0.5
Lin <i>et al</i> [103]	2001	Expérimental	0.06	0.17 – 0.21	> 0.5
Hung <i>et al</i> [109]	2009	Numérique	0.10	0.22 – 0.30	> 0.5
L. Deike <i>et al</i> [90]	2015	Numérique	0.085	0.30	> 0.5

Table 2.1. – Expériences et simulations d’ondes capillaires parasites avec un vent nul.

formation de cette zone de vorticité est l’élément principal dissipant le surplus d’énergie [100, 101, 102, 103].

Une liste d’observations expérimentales et numériques sans vent des ondes capillaires parasites dans le régime capillo-gravitaire est présentée dans le tableau 2.1. Seules les données présentant les caractéristiques de longueur d’onde  $\lambda$ , cambrure  $\epsilon$  et profondeur d’eau  $\frac{d}{\lambda}$  associées ont été répertoriées. On observe que ces données sur les ondes capillaires parasites proviennent essentiellement d’études réalisées en eau profonde.

### 2.2.2. Déferlement glissant

Dans le régime capillo-gravitaire, c’est-à-dire avec une forte influence de la tension de surface, le déferlement glissant est représenté par l’apparition d’un mouvement turbulent de la surface. L’exc dent d’énergie contenu dans la vague produit une augmentation de la pente de la face avant. Cependant, l’influence importante de la tension de surface va empêcher la génération d’un jet en produisant des ondes capillaires. Ces ondes capillaires possèdent une célérité plus importante que la vague initiale et glissent le long de la face avant. Pendant leur mouvement, des ondes capillaires de plus grande longueur d’onde sont relâchées entre le premier capillaire et la crête de la vague initiale. D’intenses anneaux de vorticité sont produits pendant le déferlement. La figure 2.10 est une photographie expérimentale du déferlement glissant réalisée par X. Liu *et al* en 2006 [110]. L’image représente le déferlement après l’apparition des ondes de surface de plus grandes longueurs d’onde provenant du glissement du train d’onde capillaire sur la face avant.

Les analyses expérimentales et numériques ont permis de situer l’apparition de ce d fer-

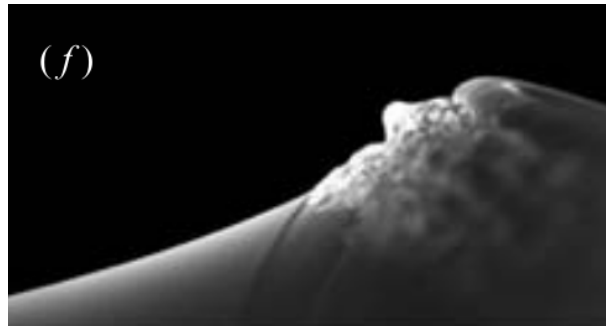


Figure 2.10. – Photographie de déferlement glissant observé expérimentalement par X. Liu *et al* en 2006 [110].

Article	Année	Méthode	Longueur d'onde $\lambda$ (m)	Cambrure $\epsilon$	Profondeur $\frac{d}{\lambda}$
M. Longuet-Higgins [106]	1995	Analytique	0.08	0.32 – 0.36	> 0.5
A. V. Fedorov <i>et al</i> [111]	1998	Analytique	0.05 – 0.10	0.40 – 0.45	> 0.5
J. H. Duncan <i>et al</i> [81]	2001	Expérimental	0.41	0.275	> 0.5
A. Iafrati [112]	2009	Numérique	0.3	0.33 – 0.35	> 0.5
L. Deike <i>et al</i> [90]	2015	Numérique	0.085 – 0.143	0.45	> 0.5

Table 2.2. – Expériences et simulations de déferlement glissant.

lement entre les ondes capillaires parasitiques et le déferlement plongeant. Une liste d'observations expérimentales et numériques sans vent du déferlement glissant dans le régime capillo-gravitaire est présentée dans le tableau 2.2. L'ensemble des études réalisées sur le déferlement glissant dans le régime étudié fut réalisé dans le cadre d'une eau profonde.

### 2.2.3. Déferlement plongeant

Le déferlement plongeant fut la première forme analysée dans la littérature. Cette forme se caractérise par la présence d'un jet en chute libre au niveau de la crête. L'impact de ce jet sur la face avant de la vague capture une masse d'air nommée rouleau. La dynamique de cet impact produit l'apparition d'un jet secondaire sur le devant de la vague. En fonction des caractéristiques initiales de la vague, ce jet pourra de nouveau capturer un rouleau secondaire devant ou au-dessus du premier rouleau. L'image 2.11 réalisée par P. Lubin *et al* en 2019 [52] est une photographie d'un déferlement plongeant. On observe sur la photographie la capture du rouleau et l'apparition d'un jet secondaire.

Au cours du processus de déferlement, de nombreuses gouttes et bulles sont engendrées, augmentant de ce fait la surface de contact entre l'air et l'eau. Plusieurs analyses ont été réalisées pour accroître les connaissances de l'aération de l'eau produite par le déferlement



Figure 2.11. – Photographie du déferlement plongeant observé expérimentalement par P. Lubin *et al* en 2019 [52].

Article	Année	Méthode	Longueur d'onde $\lambda$ (m)	Cambrure $\epsilon$	Profondeur $\frac{d}{\lambda}$
P. Lubin <i>et al</i> [98]	2006	Numérique	0.1	0.08 – 0.15	0.1 – 0.2
A. Iafrati [112, 54]	2009	Numérique	0.3	0.37 – 0.65	> 0.5
G. Caulliez [113]	2013	Expérimental	0.25	0.5	> 0.5
L. Deike <i>et al</i> [90]	2015	Numérique	0.54	0.55	> 0.5
L. Deike <i>et al</i> [89]	2016	Numérique	0.24	0.42 – 0.6	> 0.5

Table 2.3. – Expériences et simulations de déferlement plongeant.

plongeant. De plus, ce phénomène facilement observable dans la nature sur des vagues de grande longueur d'onde a été reproduit expérimentalement et numériquement dans le régime d'onde étudié. Une liste d'observations expérimentales et numériques du déferlement plongeant dans le régime capillo-gravitaire est présentée dans le tableau 2.3. Seuls les travaux effectués par P. Lubin *et al* [98] avec la tension de surface prennent en compte l'influence de la profondeur sur le déferlement pour un fond plat.

## 2.3. Méthodes pour l'étude du déferlement

La complexité du déferlement d'une vague nécessite plusieurs méthodes pour analyser les caractéristiques de ce phénomène. Ces méthodes faisant leurs apparitions suite aux avancées technologiques sont complémentaires et permettent d'étudier le déferlement grâce à des points de vue différents. Ces méthodes peuvent être regroupées en trois grandes familles : mathématique, expérimental et numérique.

L'outil mathématique est une forme d'étude du déferlement basée sur la prise en compte d'hypothèses fortes permettant de simplifier les équations gouvernant la dynamique de déferlement et d'étudier un phénomène particulier. Cette méthode ancestrale a permis notamment la mise en équation d'un profil de vague sinusoïdale [61, 64], la compréhension des phénomènes physiques apparaissant pendant le déferlement [59, 114, 111] ou encore la création de critère de détection du déferlement [115]. Cependant, la réduction de l'importance des hypothèses prises en compte augmente exponentiellement la complexité des équations les rendant difficilement voire totalement impossible à résoudre. Grâce aux avancées technologiques, les méthodes expérimentales et numériques ont pris le relais dans l'étude de ce phénomène complexe.

Les méthodes expérimentales analysent le comportement du déferlement d'onde dans des conditions initiales particulières : sur le terrain [116, 117, 118] ou en laboratoire [119, 120, 121, 99, 37, 36, 41]. Les mesures réalisées sur le terrain permettent l'étude de ces vagues naturellement générées. A l'inverse, en laboratoire, ces vagues sont générées de manières artificielles pour correspondre au type de vague étudié. Les expériences réalisées sur le terrain permettent l'étude approfondie du déferlement de vague dans des conditions naturelles de bathymétrie, courant marin, intensité et direction du vent. La complexité de ces études réside dans l'évaluation de données provenant d'un ensemble d'onde interagissant entre elles. Les expériences en laboratoire permettent, quant à elles, le contrôle des conditions initiales du déferlement grâce à plusieurs formes de génération d'une onde : vent, piston, etc. Ces expériences nécessitent des infrastructures et des moyens importants. Un des points négatifs est la difficulté d'évaluation de l'ensemble des champs physiques (vitesse, pression, vorticité, etc.) à tout instant et toute position de la vague du fait de l'utilisation d'outils pouvant modifier la forme du déferlement.

L'outil numérique est une extension de l'outil mathématique avec l'intégration de la puissance de calcul d'un ordinateur pour résoudre des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations permet la connaissance d'un phénomène à chaque moment du déferlement souhaité. Cet outil peut être divisé en deux sous-familles : la modélisation [35, 38, 39, 122, 123, 124, 40, 53, 125] et la simulation numériques [89, 90, 48, 54, 55, 91, 126]. La modélisation numérique est une représentation simplifiée des équations résolues pour la simulation numérique grâce à l'utilisation d'hypothèses. Ces hypothèses vont permettre une résolution rapide des équations tout en se séparant d'avantages provenant de la simulation. Par conséquent, cette méthode est particulièrement efficace lors de l'étude du mouvement et du déferlement d'une vague sur plusieurs mètres/kilomètres ou la prédiction du déferlement d'une vague. Cependant, l'ensemble des champs (vitesses, pression, etc.), et la reconnexion de surface ne peuvent être représentés dans certains modèles. Contrairement à la modélisation numérique, la simulation numérique est une méthode permettant le calcul complet du déferlement de vague sans modification de l'aspect du déferlement et tout en conservant la connaissance de l'ensemble des champs souhaités. Cette méthode est efficace dans l'étude précise du déferlement. Cependant, la conservation et le calcul de l'ensemble de ces données engendrent un temps de calcul important. De ce fait, la simulation numérique se consacre généralement à l'étude très précise d'une seule et unique vague déferlant sur un fond plat ou sur une plage.

## 2.4. Bilan

L'objectif de ce manuscrit est l'analyse du déferlement d'une vague sinusoïdale périodique sur fond plat en deux dimensions grâce à la simulation numérique. Cette analyse a pour ambition d'étudier l'apparition du déferlement, et d'accroître les connaissances sur des phénomènes associés au déferlement d'onde capillo-gravitaire sans la présence de courants marin et aérien. Cependant, l'outil numérique utilisé (Notus CFD) a nécessité le développement d'une méthode basée sur d'autres travaux de la littérature pour diminuer fortement les erreurs engendrées lors de l'utilisation d'un maillage très raffiné. Cette méthode sera présentée dans les chapitres 3 et 4. L'analyse du déferlement est présentée dans le dernier chapitre.



# Chapitre 3

## Notus CFD

Le code utilisé pour étudier le déferlement de vague est Notus CFD. Celui-ci, développé au sein de l'équipe Mécanique des Fluides Numeriques (MFN) du laboratoire Institut d'Ingénierie et de Mécanique (I2M, Université de Bordeaux, CNRS UMR 5295), fut initié en 2015 par Stéphane Glocker, actuel chef du projet. Les développeurs ayant participé à ce projet avant et pendant la thèse sont : Stéphane Glockner (Ingénieur de Recherche et chef du projet), Mathieu Coquerelle (Maître de Conférences), Antoine Lemoine (Maître de Conférences), Thomas Milcent (Maître de Conférences), Joris Picot (Ingénieur de Recherche) et Félix Henri (Doctorant).

Avec toute l'expérience et les connaissances acquises pendant le développement du code Thétis, ce nouveau projet fut commencé avec l'ambition de créer un code open source massivement parallèle dédié à la simulation d'écoulements incompressibles de phénomènes diphasiques. La récence du code couplé à la complexité des objectifs du projet induisent la nécessité d'implémenter de nouvelles méthodes qui n'étaient pas encore existantes dans le code. De plus, étant la première thèse utilisant ce code sur un cas de dynamique complexe, une validation poussée de sa capacité à représenter correctement la dynamique des cas complexes est nécessaire. Dans ce manuscrit, l'objectif final de l'utilisation du code, présenté dans ce chapitre, est d'étudier le comportement des vagues déferlantes de petites longueur d'onde dans une eau de profondeur variable. Ainsi, le code sera validé dans le chapitre suivant grâce notamment à la comparaison entre des résultats expérimentaux et des simulations pour des impacts de gouttes (échelle capillaire) et un déferlement de vague sur une plage (échelle gravito-capillaire).

Dans un souci de compréhension de l'outil numérique utilisé tout au long de ce manuscrit, le présent chapitre est consacré à la présentation du code, des méthodes numériques et des notions importantes liées à l'outil. Il peut être lu comme une introduction approfondie du chapitre suivant portant sur le développement de la méthode High Order Momentum Preserving (HOMP) proposée afin d'accroître la précision des simulations du déferlement de vague. Afin de simplifier la lecture et la compréhension des équations et du code, seulement deux dimensions seront présentées. La troisième dimension peut être représentée de manière similaire aux deux premières dimensions.

Avant de présenter les équations résolues lors des simulations, il est important de définir le cadre dans lequel ces équations seront discrétisées. Les sections 3.1 et 3.2 présentent les bases de la résolution de ces équations. Elles définissent les notions de maillage, grille décalée, valeur moyennée et volumes finis. L'ensemble de ces notions fondamentales permettent une bonne compréhension de la méthode proposée et de son impact lors de la simulation précise de phénomènes complexes comme le déferlement de vague. Suite à l'introduction de ces notions fondamentales, les équations résolues et l'algorithme proposé pour les résoudre seront présentés et discutés dans les sections 3.3, 3.4 et 3.5. Pour finir, dans un souci de présentation complète de l'outil numérique, les schémas numériques (section 3.6) et les conditions limites (section 3.7) sont rapidement introduits dans le cadre des volumes finis sur un maillage décalé. Ces deux dernières parties, nécessaires lors d'une présentation complète d'un code numérique, ne sont pas nécessaires pour une bonne lecture des chapitres suivants.

### 3.1. Structure du maillage

La résolution des équations présentées dans la section 3.3 s'appuie sur l'utilisation d'un maillage (ou grille) cartésien structuré ayant la caractéristique d'être décalé. Ce type de grille, appelé Marker-And-Cell (MAC), fut présenté pour la première fois par F. H. Harlow



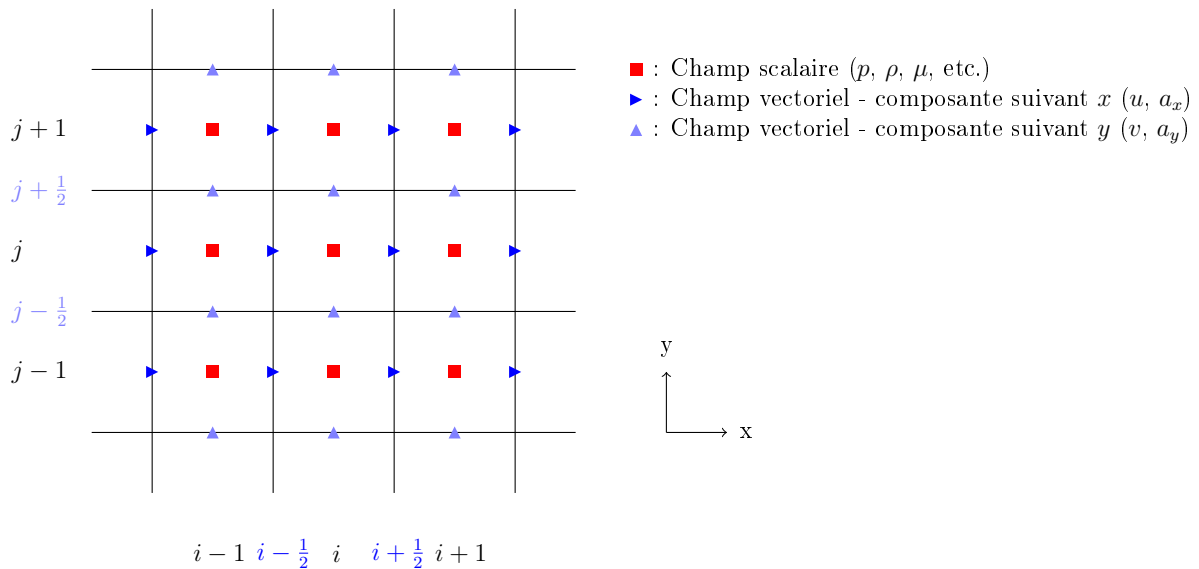


Figure 3.1. – Description d’une grille du type Marker-And-Cell grid.

*et al* en 1965 [127]. Elle a la particularité de discrétiser le domaine étudié sous la forme de pavés droits que l’on appellera cellules ou mailles dans la suite du manuscrit. Au sein de ces cellules, les divers champs et paramètres physiques y sont représentés. Les champs scalaires, telles que la pression  $p$  et la fonction de fraction volumique  $\chi$ , se situent au centre de chaque cellule. Au contraire, les champs vectoriels (vitesse  $\mathbf{u}$ , etc.) sont quant à eux définis au centre des faces des cellules. Il a été montré par D. Cline *et al* en 2005 [128] que l’utilisation d’une grille MAC permet une bonne stabilité des simulations et a l’avantage de pouvoir modéliser le mouvement de fluides subissant de grandes déformations, ainsi que la reconnexion et déconnexion de ceux-ci. Il permet également de minimiser les erreurs commises lors de l’utilisation de la méthode “prediction-correction” lors de la résolution des équations de Navier-Stokes en incompressible. Cependant, le principal désavantage de cette méthode est le stockage de la position de chaque élément augmentant considérablement la mémoire nécessaire en trois dimensions. La figure 3.1 représente la disposition des indices associés à un maillage de type MAC. Les indices  $i$  et  $j$  permettent une représentation de la position de la cellule dans le domaine. L’indice  $i$  (respectivement  $j$ ) est un indicateur de position suivant la direction  $x$  (respectivement  $y$ ) et varie entre 1 et  $n_{lignes}$  (respectivement  $n_{colonnes}$ ). Les entiers  $n_{lignes}$  et  $n_{colonnes}$  représentent le nombre de cellules suivant les deux directions.

### 3.1.1. Coordonnées

Les équations seront résolues sur trois grilles : scalaire, vectorielle suivant  $x$  et vectorielle suivant  $y$ . L’utilisation de ces grilles nécessite la connaissance du centre de chaque cellule ainsi que la position de ses faces. Le code utilisant un maillage cartésien, ces informations se réduisent à connaître uniquement un nombre réduit de valeurs : les coordonnées du centre de la cellule  $(x_{centre}, y_{centre})$ , les coordonnées suivant  $x$  des faces gauche et droite de la cellule  $x_{face,gauche}$  et  $x_{face,droite}$ , et finalement les coordonnées suivant  $y$  des faces basse et haute de la cellule  $y_{face,basse}$  et  $y_{face,haute}$ . La figure 3.2 schématise la position des coordonnées pour une cellule. Il est possible de définir la position des cellules associées à chaque grille grâce aux figures 3.1 et 3.2.

Le maillage utilisé est structuré, ainsi une face est reliée à deux cellules différentes. Par

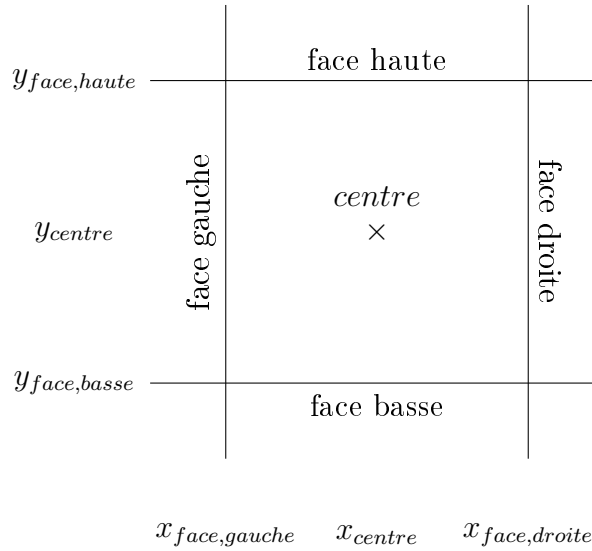


Figure 3.2. – Description des coordonnées d’une cellule.

exemple, le face droite de la cellule de gauche sera identique à la face gauche de la cellule de droite. Grâce à cette particularité, il est possible de diminuer une nouvelle fois les informations stockées en une liste de coordonnées de chaque face pour toutes les directions. En fonction de sa position dans le liste, la coordonnée sera associée à la face correspondante dans la cellule étudiée. Ces informations sont définies pour les trois cellules étudiées :

**Coordonnées de la cellule scalaire** La cellule de la grille de résolution d’un champ scalaire à la position  $i, j$  dans la figure 3.1 possède son centre en  $(x_i, y_j)$ . Le centre des faces gauche, droite, basse et haute sont respectivement positionnés en  $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$ ,  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$  et  $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$ .

**Coordonnées de la cellule vectorielle suivant  $x$**  La cellule de la grille de résolution d’un champ vectoriel décalé dans la direction  $x$  à la position  $i - \frac{1}{2}, j$  dans la figure 3.1 possède son centre en  $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$ . Le centre des faces gauche, droite, basse et haute sont respectivement positionnés en  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$  et  $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$ .

**Coordonnées de la cellule vectorielle suivant  $y$**  La cellule de la grille de résolution d’un champ vectoriel décalé dans la direction  $y$  à la position  $i, j - \frac{1}{2}$  dans la figure 3.1 possède son centre en  $(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$ . Le centre des faces gauche, droite, basse et haute sont respectivement positionnés en  $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$ ,  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  et  $(x_i, y_j)$ .

### 3.1.2. Volume de contrôle

Le partitionnement du domaine en trois types de cellules présentées s’appelle communément volume de contrôle  $\Omega_{vc}$ . Ce terme, utilisé par la suite pour définir les volumes fins, sera employé comme étant un terme pouvant être remplacé par l’une des trois partitions de domaines. Il est, ainsi, utilisé pour simplifier les explications. De manière plus précise, les volumes de contrôle de chaque cellule  $\Omega_{i,j}^c$  (scalaire),  $\Omega_{i,j}^u$  (vectoriel suivant  $x$ )

et  $\Omega_{i,j}^v$  (vectoriel suivant  $y$ ) sont représentés respectivement par les domaines rectangulaires correspondant  $\Omega_{i,j}^c = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ ,  $\Omega_{i,j}^u = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$  et  $\Omega_{i,j}^v = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-1}, y_j]$ . Ces volumes de contrôles sont présentés dans la figure 3.3. Le décalage de ces volumes de contrôle est la base de la particularité de la grille MAC. Les avantages apportés par l'utilisation d'une telle méthode seront expliqués tout au long de ce chapitre.

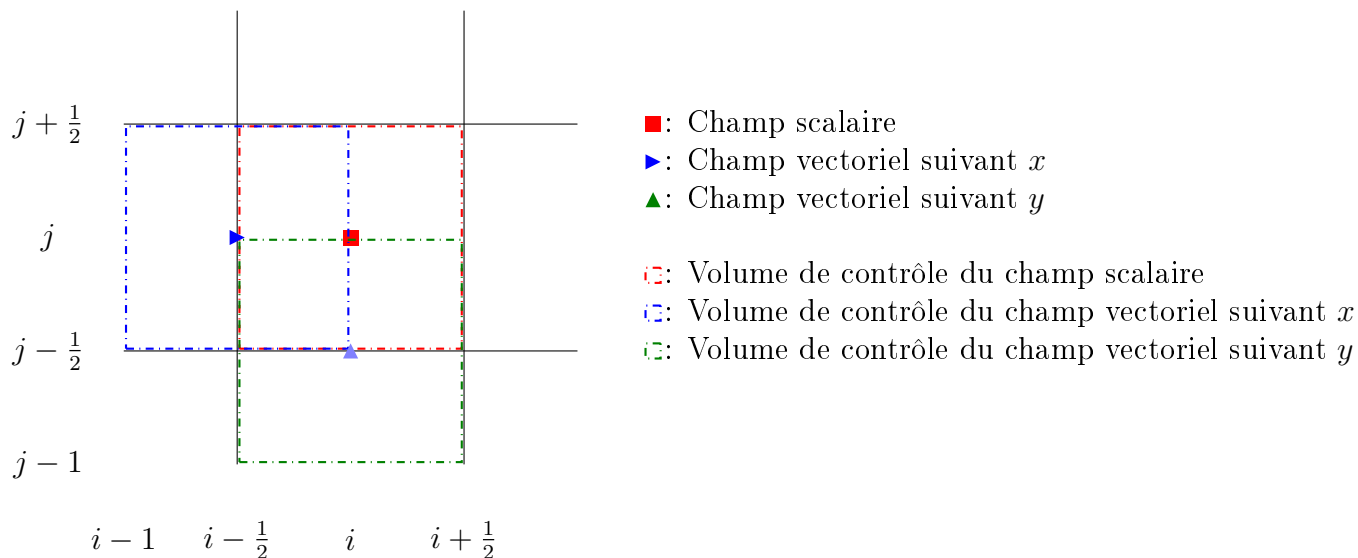


Figure 3.3. – Schéma des volumes de contrôle. Les champs scalaire, vectoriel suivant  $x$  et vectoriel suivant  $y$  sont associés aux couleurs rouge, bleue et verte.

## 3.2. Méthode des Volumes Finis

Le code Notus est basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Les articles écrits par S. Godunov et I. Bohachevsky [129], A. N. Tikhonov et A. A. Samarskii [130] et P. W. McDonald [131] font partie des écrits précurseurs de la méthode des volumes finis. Avant de présenter la méthode, des propriétés mathématiques nécessaires sont développées sur la variable moyennée dans la sous-section 3.2.1 et le théorème de flux-divergence dans la sous-section 3.2.2. Ces propriétés seront fondamentales lors de la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis. Suite à l'introduction de ces notions, la méthode des volumes finis est décrite dans la sous-section 3.2.3.

### 3.2.1. Variable moyennée

La méthode des volumes finis est basée sur la notion de variable moyennée. Ces variables correspondent à l'utilisation d'une valeur moyenne de la variable sur un domaine de calcul. En supposant une variable  $f_{VF}(x)$  quelconque variant dans un volume de contrôle  $\Omega_{vc}$ , la résultante de la moyenne correspond à l'intégrale de cette valeur sur tout le volume de contrôle. En effet, la variable  $f_{VF}(x)$  peut être décomposée en deux composantes  $\bar{f}_{VF}(x)$ , la valeur moyennée, et  $\tilde{f}_{VF}(x)$  la variation de cette valeur sur le volume de contrôle. Soit :

$$f_{VF}(x) = \bar{f}_{VF}(x) + \tilde{f}_{VF}(x)$$

La relation entre la fonction et ses composantes est schématisée dans la figure 3.4. La variation  $\tilde{f}_{VF}(x)$  de la fonction  $f_{VF}(x)$  a pour particularité mathématique d'avoir une intégrale nulle sur l'ensemble du volume de contrôle. Par conséquent, cela revient à :

$$\frac{1}{|\Omega_{vc}|} \int_{\Omega_{vc}} f_{VF}(x) d\Omega = \frac{1}{|\Omega_{vc}|} \left( \int_{\Omega_{vc}} \bar{f}_{VF}(x) d\Omega + \int_{\Omega_{vc}} \tilde{f}_{VF}(x) d\Omega \right) = \frac{1}{|\Omega_{vc}|} \int_{\Omega_{vc}} \bar{f}_{VF}(x) d\Omega = \bar{f}_{VF}(x) \quad (3.5)$$

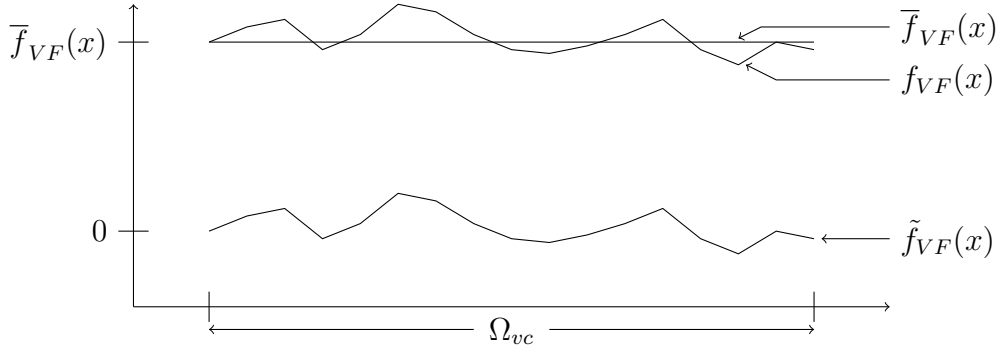


Figure 3.4. – Schéma en 1D d'une fonction  $f_{VF}(x)$  et de ses deux composantes  $\bar{f}_{VF}(x)$  et  $\tilde{f}_{VF}(x)$ .

### 3.2.2. Théorème de Green-Ostrogradski

Le théorème de Green-Ostrogradski [132], aussi appelé théorème de flux-divergence, est un théorème démontrant l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume de contrôle et l'intégrale du flux du champ vectoriel à travers les faces de ce volume de contrôle :

$$\int_{\Omega_{vc}} \nabla \cdot \mathbf{f}_{VF} d\Omega = \int_{\partial\Omega_{vc}} \mathbf{f}_{VF} \cdot \mathbf{n}_{vc} d\partial\Omega_{vc} \quad (3.6)$$

avec  $\mathbf{f}_{VF}$  une fonction représentant un champ vectoriel quelconque,  $\Omega_{vc}$  le volume de contrôle,  $\partial\Omega_{vc}$  surface externe du volume de contrôle et  $\mathbf{n}_{vc}$  le vecteur normale sortante de la surface du volume de contrôle. Ce théorème est utilisé pour faciliter la résolution des intégrales avec une divergence en un calcul de flux sur les parois du volume. Dans le cas présent de volume de contrôle rectangulaire, la normale extérieure de la surface peut être découpée en quatre parties correspondant aux quatre faces. La figure 3.5 schématise ce découpage des variables.

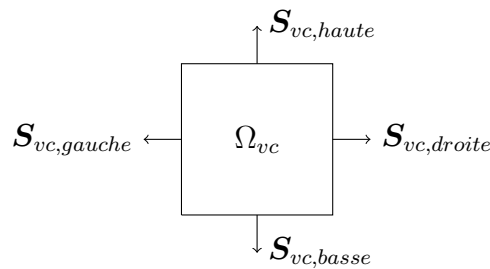


Figure 3.5. – Schéma des flux du volume de contrôle.

### 3.2.3. La méthode

Maintenant que les notions de variable moyennée et du théorème de flux-divergence ont été présentées, la méthode des volumes finis est décrite. Elle consiste en la résolution de l'intégrale sur un volume de contrôle des équations souhaitées. Cependant, les intégrales étant trop complexes à résoudre en état, les deux propriétés mathématiques (équations 3.5 et 3.6) seront utilisées pour faciliter leurs résolutions. Tandis que la moyenne de la variable permet d'approcher l'intégrale parfaitement mathématiquement, le théorème de Green-Ostrogradski est une méthode permettant la simplification de la résolution de certaines parties des équations aux dérivées partielles.

Il existe deux propriétés importantes lors de la résolution des équations grâce à la méthode des volumes finis avec des flux : la conservation et la consistance des flux.

**Conservation** La résolution finale des équations se fait grâce, en partie, à l'étude des flux entrants et sortants du volume de contrôle (voir figure 3.2.2). La conservation des flux est le fait d'imposer, sur l'ensemble de la surface de la cellule, une égalité entre le flux entrant et l'opposé du flux sortant. La somme des flux donne un résultat final nul. Cela revient à dire que l'ensemble des flux sortants de la cellule est de même intensité que celui des flux entrants. C'est-à-dire

$$\sum_{faces} \mathbf{f}_{VC} \cdot \mathbf{S}_{VC} = 0$$

avec  $\mathbf{f}_{VC}$  le champ vectoriel quelconque à intégrer et  $\mathbf{S}_{VC}$  la normal sortante des faces du volume de contrôle. L'utilisation de cette hypothèse permet d'obtenir une conservation globale de la variable dans l'ensemble du système. Il ne doit pas y avoir de perte ou de création de cette variable au sein du système de manière non souhaitée (hors termes sources).

**Consistance** La consistance des flux est l'utilisation des flux reconstruits de la manière la plus proche possible de flux réel. En effet, ne connaissant pas parfaitement chaque information dans les positions souhaitées, il faut reconstruire et interpoler la variable. En effectuant ces opérations, des erreurs numériques apparaissent et viennent perturber les résultats. Sachant que pour une face d'une cellule, le flux calculé pour cette face doit être égal au flux calculé pour la même face mais du point de vue de la cellule voisine (consistance des flux). Cependant, à cause des erreurs de calculs, ces deux flux ne sont pas strictement identiques. Il faut, par conséquent, choisir le flux à utiliser. Dans ce but, il existe des méthodes, appelées limiteur de flux, permettant le calcul du flux final grâce à l'utilisation d'un algorithme plus ou moins complexe. Le flux obtenu sera par la suite utilisé pour les deux cellules voisines.

Dans le cadre du code utilisé (cartésien avec une grille MAC), il est possible de simplifier les équations en utilisant une méthode de reconstruction de la variable uniquement suivant une direction et de garder la valeur moyennée dans l'autre direction. Effectivement, le calcul du flux sur une paroi revient à intégrer cette variable sur la surface. Dans notre cas, la surface étant un segment suivant la direction  $x$  ou un segment suivant la direction  $y$ , il est de ce fait possible de conserver la variable moyennée dans la direction du segment et de reconstruire uniquement la variable dans la seconde direction.

### 3.2.4. Limiteur de flux

Le limiteur de flux est une fonction mathématique permettant dans un premier temps l'utilisation d'une méthode consistante pour les deux cellules voisines de la face de contact, et dans un second temps de limiter la pente du flux. La représentation du flux provenant d'une reconstruction d'une variable ne peut être parfaite. Les erreurs numériques peuvent devenir trop importantes et faire diverger la reconstruction par rapport au flux exact attendu. Le limiteur permet de minimiser cette erreur et stabilise le calcul des flux. De manière générale, un flux de haute résolution, plus précis mais moins stable, et un flux de basse résolution, moins précis mais stable, sont calculés. Dans le cas où le flux de haute précision ne présente pas d'oscillations pouvant perturber la solution, le flux final sera celui proche du flux de haute précision. À l'inverse, s'il semble être fortement oscillant, le flux stable sera privilégié par le limiteur de flux. Cette méthode mathématique permet d'accentuer la consistance des flux et la stabilité des résultats.

Dans le code, le flux utilisé pour l'ensemble des résultats est celui de Godunov.

$$F_{godunov} = \begin{cases} \min(F_{gauche}, F_{droite}) & \text{si } f_{gauche} < f_{droite} \\ \max(F_{gauche}, F_{droite}) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $F_{godunov}$  le flux final calculé par la méthode,  $F_{gauche}$  et  $F_{droite}$  les flux des cellules de gauche et de droite,  $f_{gauche}$  et  $f_{droite}$  les variables, reconstruites des cellules gauche et droite, transportés par le champ de vitesse. Les opérations  $\min$  et  $\max$  renvoient la plus petite et la plus grande des valeurs entre les deux variables d'entrées.

Le limiteur Godunov fut choisi car il a déjà démontré sa capacité lors de la simulation d'écoulements complexes diphasiques [91].

### 3.2.5. Interpolation et reconstruction

Lors de la résolution des équations grâce à la méthode des volumes finis, il est important de définir les notions d'interpolation et de reconstruction. Un des points présentés précédemment est la notion de valeur moyennée. Les interpolations sont des méthodes mathématiques permettant de connaître la valeur d'une variable en un point grâce à la connaissance de cette variable en plusieurs autres points. Si la variable est moyennée, le résultat obtenu par l'utilisation d'une de ces méthodes reste moyennée. La schématisation de l'interpolation centrée est présentée dans la figure 3.6. La variable moyennée  $\bar{f}_c$  est une interpolation au centre des deux variables  $\bar{f}_g$  et  $\bar{f}_d$ . L'interpolation s'effectue suivant l'équation suivante

$$\bar{f}_c = \frac{||\Omega_{vc,g}||_2 \bar{f}_g + ||\Omega_{vc,d}||_2 \bar{f}_d}{||\Omega_{vc,c}||_2}$$

La reconstruction est une méthode mathématique, qui, à l'inverse de l'interpolation permet d'approximer la valeur non moyennée grâce à des valeurs moyennées. Lors de l'utilisation du théorème de Green-Ostrogradski, il est nécessaire de connaître la valeur du champ non moyenné sur les faces. Pour cela un schéma numérique, détaillé dans la section 3.6, sera utilisé. Le principe d'une reconstruction est l'approximation de la fonction réelle par une autre fonction. Connaissant la valeur moyennée en plusieurs cellules, il est possible de reconstruire une fonction approchée ayant pour caractéristique d'avoir sa valeur moyennée égale à celle connue sur chaque volume de contrôle. Pour finir, la variable reconstruite est l'évaluation au point souhaité de la fonction approchée. La

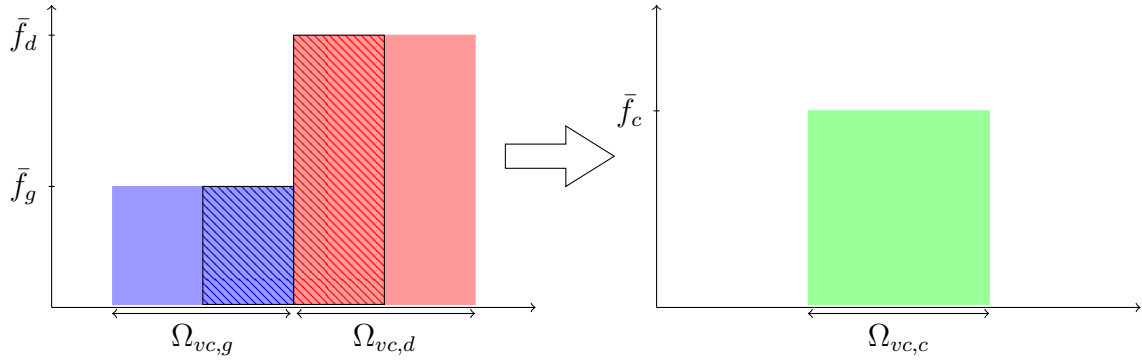


Figure 3.6. – Description d'une interpolation centrée d'une variable moyennée  $\bar{f}_c$  grâce aux variables  $\bar{f}_g$  et  $\bar{f}_d$ . La couleur bleue représente la cellule de gauche et la couleur rouge la cellule de droite. Les hachures décrivent les valeurs utilisées pour l'interpolation (en vert).

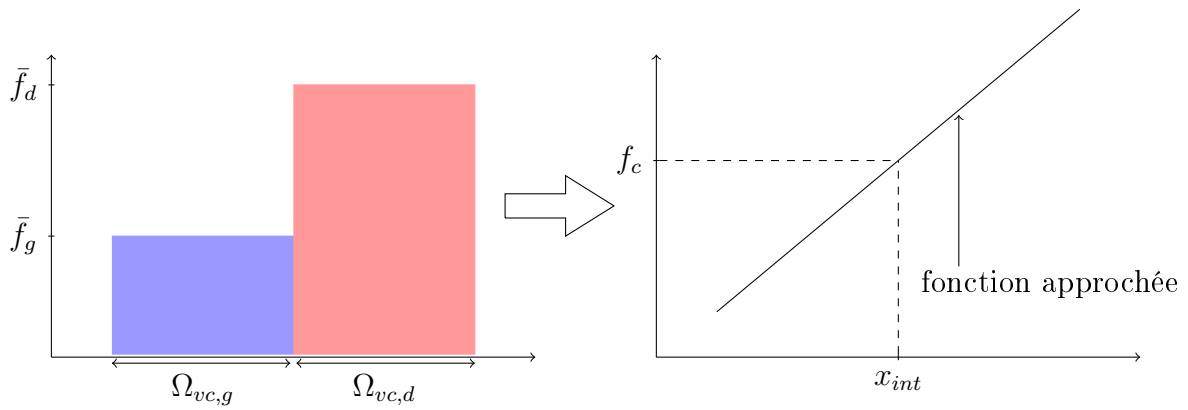


Figure 3.7. – Description d'une reconstruction centrée d'une variable  $f_c$  grâce aux variables  $\bar{f}_g$  et  $\bar{f}_d$ . La couleur bleue représente la cellule de gauche et la couleur rouge la cellule de droite. La courbe noire est la fonction reconstruite.

figure 3.7 est une schématisation d'une reconstruction centrée. Les schémas numériques de reconstruction plus précis sont présentés dans la section 3.6.

### 3.3. Équations résolues

Maintenant que la base mathématique nécessaire à la résolution des équations a été discutée, les équations résolues sont présentées. Lors de l'étude de la dynamique d'un système diphasique, il est nécessaire de pouvoir représenter l'évolution des fluides ( $\rho$  et  $\mu$ ) (sous-sections 3.3.1 et 3.4) ainsi que les champs physiques liés à la mécanique des fluides ( $\mathbf{u}$  et  $p$ ) (sous-section 3.3.2). Les deux équations présentées seront la base de l'étude et les méthodes numériques utilisées seront uniquement un moyen de résoudre ces équations de la manière la plus pertinente possible.

#### 3.3.1. Équation de continuité

L'équation de continuité en mécanique des fluides dérive de la loi de conservation de masse. En effet, au cours du temps, l'intégrale de la masse dans un volume  $\Omega$  est constante

:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

$\rho$  la densité,  $\Omega$  le volume de contrôle et  $d\Omega$  la mesure d'intégration. La simplification de l'équation 3.7 permet d'écrire la forme finale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.8)$$

avec  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse advectant la densité au cours du temps.

Il est important de noter que l'équation de continuité transporte uniquement la densité  $\rho$  du fluide. Les propriétés du fluides sont composées de deux variables  $\rho$  la densité et  $\mu$  la viscosité dynamique. Au lieu de résoudre une seconde équation de transport sur la viscosité dynamique, il est possible de remplacer ces variables par une autre variable  $\chi$  représentant la proportion d'un fluide. Cette variable permet la résolution du mouvement de deux fluides au cours du temps. L'équation résolue est

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}) = 0 \quad (3.9)$$

Les propriétés physiques du fluides  $\rho$  et  $\mu$  sont reconstruies grâce à  $\chi$  telle que

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1(1 - \chi) + \rho_2\chi \\ \mu &= \mu_1(1 - \chi) + \mu_2\chi \end{aligned}$$

avec  $\rho_1$  et  $\mu_1$  les propriétés du fluide 1 et  $\rho_2$  et  $\mu_2$  les propriétés du fluide 2.

L'équation de continuité 3.9 sera résolue de deux manières différentes dans le code. La première méthode est la représentation d'interface (section 3.4). La seconde est la résolution de cette méthode par la méthode des volumes finis. L'intégrale de cette équation sur un volume de contrôle  $\Omega_{VC}$  scalaire est

$$\int_{\Omega_{VC}} \frac{\partial \chi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_{VC}} \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}) d\Omega = 0$$

Par le théorème de Green-Ostrogradski, l'équation peut être modifiée en

$$\int_{\Omega_{VC}} \frac{\partial \chi}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{VC}} \chi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{vc} dS_{vc} = 0$$

avec  $S_{vc}$  la surface d'intégration et  $\mathbf{n}_{vc}$  la normale à la surface.

En émettant l'hypothèse que le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  par lequel le fluide est transporté est proche de la valeur moyennée  $\bar{\mathbf{u}}$ , on obtient

$$\int_{\Omega_{VC}} \frac{\partial \chi}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{VC}} \chi dS_{vc} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{vc} = 0$$

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale permet dans ces conditions de permuter l'intégrale et la dérivée partielle, le premier terme est mathématiquement égal à  $\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t}$ , avec  $\bar{\chi}$  la valeur moyennée de la fraction sur le volume de contrôle. Le second terme correspond à l'intégrale sur quatre segments de la valeur de  $\chi$  scalaire la normale à ces segments et de nouveau scalaire au champ de vitesse. L'algorithme utilisé ne permet pas de connaître la valeur de  $\chi$  mais sa valeur moyennée  $\bar{\chi}$ . Lorsque la normale du segment est suivant  $x$  (respectivement  $y$ ), pour les faces gauche et droite (respectivement basse et haut), il suffit de reconstruire la variable par rapport à  $x$  (respectivement  $y$ ) tout en con-



servant la moyenne suivant  $y$  (respectivement  $x$ ). Dans les cas tests, cette reconstruction se fera grâce à la méthode Upwind d'ordre 1, WENO 3, 2 et WENO 5, 3 (section 3.6.1). Grâce à la grille MAC, le champ de vitesse moyenné est déjà connu sur les faces. Il suffit par la suite d'évaluer le produit scalaire de l'intégrale et du champ de vitesse.

Il faut maintenant intégrer l'équation entre le temps présent  $t^n$  et le temps suivant  $t^{n+1}$ . L'équation devient

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\partial \Omega_{VC}} \chi dS_{vc} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{vc} \right) = 0$$

Tandis que le premier terme est directement égal à  $\bar{\chi}^* - \bar{\chi}^n$  ( $\bar{\chi}^*$  correspond à la valeur prédite au temps  $t^{n+1}$ ), l'évaluation de la seconde intégrale peut être résolue suivant diverses méthodes. Les méthodes utilisées dans ce manuscrit sont : Euler explicit, NSSP 3, 2 et NSSP 5, 3 (section 3.6.2).

Grâce à l'utilisation des schémas numériques il est possible d'évaluer la double intégrale, en temps et en espace, du terme d'advection de la phase et résoudre l'équation de continuité par la méthode des volumes finis. Lors de l'utilisation des schémas numériques, il est indispensable de résoudre les dérivées partielles sur des fonctions continues et dérivables afin de limiter l'apparition d'erreurs numériques allant de l'altération légère de la dynamique jusqu'à la déstabilisation de la simulation. La variable  $\bar{\chi}$  est issue d'un algorithme de lissage avant le calcul de l'équation de continuité. La solution  $\bar{\chi}^*$  sera donc également lissée. La notion de lissage est expliquée dans la section 3.4 sur la représentation d'interface.

### 3.3.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement

Afin de suivre l'évolution temporelle du champ de vitesse et de pression, les équations sous la forme conservative suivante sont résolues :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \sum \mathbf{f}_{orces} \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.11)$$

Tandis que l'équation 3.10 représente l'évolution de la quantité de mouvement volumique  $\rho \mathbf{u}$  au cours du temps, l'équation 3.11 permet la prise en compte de l'hypothèse d'incompressibilité du système étudié.

Tandis que la partie gauche de l'équation 3.10 décrit l'accélération  $\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ , la partie droite décrit la force de gradient de pression et l'ensemble des autres efforts extérieur  $\sum \mathbf{f}_{orces}$  venant impacter le système. À travers la résolution de cette équation, on souhaite étudier le comportement de deux champs d'intérêts : la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ . Afin de résoudre les deux champs d'intérêts grâce aux équations 3.10 et 3.11, la méthode de prédiction-corrrection est utilisée. La méthode propose de découpler la résolution de  $\mathbf{u}$  et  $p$  grâce aux deux équations précédentes (section 3.5). Une nouvelle fois, l'utilisation des schémas numériques permet la résolution des dérivées partielles sur des fonctions continues et dérivables. Les champs de densité et de viscosité sont calculés grâce à la fonction  $\bar{\chi}$  lissée sur plusieurs cellules. Cette utilisation induit un abaissement de la qualité de représentation de l'interface mais la résolution de l'équation est possible car les variables ne sont plus discontinues. Les différents termes résolus sont présentés. Puis l'utilisation de la méthode des volumes finis et des schémas est discutée pour chaque force.

Pour les termes d'inertie et de tension de surface, définis par la suite, une équation de stabilité est présentée. Ces deux équations permettent de calculer le pas de temps maximal entre deux temps pour lequel la simulation est supposée stable énergétiquement. Un coefficient CFL multiplie le pas de temps obtenu afin de s'assurer de la bonne convergence de la simulation. Dans les prochains chapitres, le pas de temps sera soit fixe, soit calculé grâce au coefficient CFL de telle sorte que

$$\Delta t = \min(\Delta t_{inertie}, \Delta t_{TS}) \cdot CFL$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ ,  $\Delta t_{inertie}$  le pas de temps calculé pour le terme d'inertie et  $\Delta t_{TS}$  le pas de temps calculé pour la tension de surface. Lors des simulations de déferlement de vague faites au cours de la thèse, la condition de stabilité la plus contraignante pour les maillages utilisés est celle liée à la tension de surface.

### 3.3.2.1. Accélération - partie temporelle

L'accélération du fluide est représentée par le premier terme

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t}$$

Lors de l'utilisation de la méthode des volumes finis, l'intégrale sur le volume de contrôle  $\Omega_{vc}$  vectoriel (suivant  $x$  pour  $u$  et suivant  $y$  pour  $v$ ) donne

$$\int_{\Omega_{vc}} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} d\Omega \quad (3.12)$$

L'approximation que la moyenne de la quantité de mouvement volumique  $\bar{\rho \mathbf{u}}$  est proche de la moyenne de chaque terme séparé  $\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}$  est faite. L'équation 3.12 devient

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})}{\partial t} \quad (3.13)$$

Cette équation est intégrée par rapport au temps entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  tel que, comme lors de l'équation de continuité 3.8, cela devient

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} dt = (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})^{n+1} - (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})^n \approx \bar{\rho}^{n+1} \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^n$$

avec l'approximation que le découplage des deux variables  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\mathbf{u}}$  au temps  $t$  soit proche de la quantité de mouvement  $\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}$  à ce même temps.

La résolution de ce terme par la méthode des volumes finis devient  $\bar{\rho}^{n+1} \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^n$ . Afin que le champ de densité corresponde au champ de vitesse, il est interpolé à l'ordre 2 sur les grilles vectorielles.

### 3.3.2.2. Accélération - partie spatiale

L'accélération du fluide est représentée par le second terme

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$$

Ce terme possède un opérateur divergence, le théorème de Green-Ostrogradski peut être utilisé. De la même manière que le terme d'advection de l'équation de continuité 3.8, l'équation intégrée sur le volume de contrôle vectoriel  $\Omega_{VC}$  est simplifiée en

$$\int_{\Omega_{VC}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \cdot d\partial\Omega$$

Afin d'avoir une méthode synchronisée avec la méthode utilisée pour la résolution de l'équation de continuité, le second terme de champ de vitesse est directement approximé à l'ordre 2 à  $\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}}$ ,

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \cdot d\partial\Omega \approx \left( \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot d\partial\Omega \right) \otimes \bar{\mathbf{u}}$$

Lors de la résolution de l'équation de continuité, un schéma numérique sera utilisé pour reconstruire le premier terme suivant la direction  $x$  ou la direction  $y$ . Il faut impérativement utiliser le même schéma numérique. Pour évaluer  $\rho \mathbf{u}$ , il suffit de reconstruire la variable séparément grâce aux variables moyennées connues  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\mathbf{u}}$ . La différence par rapport à l'équation de continuité 3.8 est la position du terme  $\bar{\mathbf{u}}$  situé sur les faces. Les interpolations de ces variables sont effectuées grâce à un schéma centré d'ordre 2 ou un schéma WENO 4.

Finalement l'évaluation de l'intégrale temporelle de ce terme

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot d\partial\Omega \otimes \bar{\mathbf{u}} dt$$

doit être faite de manière synchronisée avec l'équation de continuité 3.8. Le même schéma temporel doit être utilisé.

La contrainte de stabilité liée à ce terme provient de l'étude du maximum de la vitesse sur un pas d'espace :

$$\Delta t_{inertie} = \max_{i,j} \left( \frac{|\bar{u}_{i,j}|}{x_i - x_{i-1}}, \frac{|\bar{v}_{i,j}|}{y_j - y_{j-1}} \right)$$

### 3.3.2.3. Gradient de pression

Le gradient de pression joue un rôle essentiel et important dans le balancement des autres forces exercées sur le système. De plus, lors d'un déferlement, le mouvement de l'eau devient fortement non uniforme avec des accélérations importantes proche de la surface, créant de grandes modifications de pression. Il en devient crucial de résoudre le gradient de pression lors de l'étude du déferlement :

$$-\nabla p$$

L'ajout de cette force nécessite la résolution de la pression à chaque pas de temps. Cette résolution s'effectue grâce à la méthode prédiction-corrrection introduite dans la section 3.5.1. Cette force étant liée directement aux autres forces et faisant office de balancement des forces, il est nécessaire de la résoudre de manière pointilleuse pour éviter toute augmentation de l'énergie au sein du système. La méthode consiste en l'utilisation d'un terme d'incrément de pression  $\Psi$  définie par  $p^{n+1} = p^n + \Psi$ .

L'intégrale spatiale sur le volume de contrôle vectoriel du terme de gradient de pression peut s'écrire en injectant la notion de moyenne :

$$-\int_{\Omega_{VC}} \nabla p d\Omega = -\nabla \bar{p}$$

avec  $\bar{p}$  la valeur moyennée de la pression sur le volume de contrôle. Le terme de gradient

est résolu grâce à un schéma centré d'ordre 2. L'utilisation d'un maillage décalé permet d'obtenir directement l'évaluation du gradient dans la position souhaitée sur les grilles vectorielles sans interpolation ou manipulation particulière.

L'intégrale temporelle fait intervenir la méthode de prédiction-corrrection de la section 3.5.1. Dans un premier temps, l'intégrale du gradient de pression sera approximé par un schéma euler implicite :

$$-\int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla \bar{p} dt \approx -\Delta t \nabla \bar{p}^{n+1} \quad (3.14)$$

En injectant le terme d'incrément de pression dans l'équation 3.14, celle-ci devient

$$-\Delta t \nabla \bar{p}^{n+1} = -\Delta t (\nabla \bar{p}^n + \nabla \bar{\Psi})$$

avec  $\bar{\Psi}$  la valeur moyennée de l'incrément de pression  $\Psi$ .

Ce découplage en deux termes de l'évaluation de la pression permet le calcul du champ de pression moyenné.

### 3.3.2.4. Force de gravité

Les cas étudiées dans ce manuscrit peuvent être gravitationnels. C'est-à dire que la force de gravité joue un rôle non négligeable dans la dynamique du système. Pour les vagues étudiées, la force de gravité est importante. Plus la longueur de la vague est grande, plus la part d'énergie potentielle au sein de l'énergie totale est importante. D'après les études analytiques, cette énergie peut atteindre 50% de l'énergie totale. La force de gravité résolue s'écrit sous la forme :

$$\rho \mathbf{g}$$

avec  $\rho$  le champ de densité et  $\mathbf{g} = (0, -9.81, 0)$  la constante de gravité agissant sur terre.

L'intégrale spatiale de ce terme est directe. Sachant que la variable  $\mathbf{g}$  est constante, il ne reste plus que l'intégrale de la densité. Celle-ci est mathématiquement égale à la valeur moyennée de la densité sur le volume de contrôle vectoriel.

$$\int_{\Omega_{VC}} \rho \mathbf{g} d\Omega = \bar{\rho} \mathbf{g}$$

Le champ de densité est connu sur la grille scalaire. Une étape d'interpolation est nécessaire pour décaler cette variable sur une grille vectorielle. Pour cela, une méthode centrée d'ordre 2 est utilisée.

La seconde étape de la méthode des volumes finis consiste en l'intégration temporelle de ce terme. Un schéma explicite sera utilisé pour l'évaluation de l'intégrale temporelle lors de la simulation du déferlement de vague. Cependant, uniquement pour la vérification de la méthode HOMP proposée, un schéma Crank-Nicolson, d'ordre plus élevé, sera utilisé.

L'intégrale temporelle utilisée dans l'équation de Navier-Stokes avec la méthode des volumes finis est

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{\rho} \mathbf{g} dt$$

### 3.3.2.5. Force de tension de surface

La force de tension de surface est une force surfacique correspondant à l'interaction au niveau moléculaire entre deux fluides modifiant le mouvement de l'interface pour des

systèmes de petites dimensions. Cette force joue un rôle important dans la dissipation de l'énergie au cours du déferlement car une partie de l'énergie mécanique est emmagasinée au niveau de l'interface et induit un mouvement de surface générant des anneaux de vorticité en dessous et au dessus de l'interface. Cette force est représentée par

$$\sigma\kappa\delta_{\Gamma}\mathbf{n}_{\Gamma}$$

avec  $\sigma$  le coefficient de tension de surface entre les deux fluides,  $\kappa$  la courbure à l'interface,  $\delta_{\Gamma}$  la masse de Dirac permettant l'évaluation de la force uniquement sur l'interface et  $\mathbf{n}_{\Gamma}$  la normale à l'interface.

Le modèle Continuum Surface Force (CSF) utilisé a été introduit par Brackbill *et al* en 1992 [133]. Il propose de récrire  $\delta_{\Gamma}\mathbf{n}_{\Gamma}$  grâce à la fonction caractéristique  $\chi$  :  $\delta_{\Gamma}\mathbf{n}_{\Gamma} \approx \nabla\chi$ . La force devient :

$$\sigma\kappa\nabla\chi$$

L'intégrale spatiale de ce terme sur un volume de contrôle vectoriel est

$$\int_{\Omega_{VC}} \sigma\kappa\nabla\chi d\Omega \approx \sigma\kappa \int_{\Omega_{VC}} \nabla\chi d\Omega = \sigma\kappa\nabla\bar{\chi}$$

L'équation issue de la méthode CSF, nécessite le calcul de la courbure  $\kappa$ . Ce point est expliqué dans la fin de cette sous-section. L'évaluation du gradient de la fonction caractéristique moyennée  $\bar{\chi}$  doit être strictement identique à l'évaluation du gradient de pression. L'utilisation d'une méthode différente peut engendrer des erreurs numériques importantes.

L'intégration temporelle de ce terme est totalement explicite. Le terme final injecté dans l'équation est

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \sigma\kappa\nabla\bar{\chi} dt = \sigma\kappa^n\nabla\bar{\chi}^n$$

La contrainte de stabilité liée à ce terme provient des ondes capillaires sur un pas d'espace

$$\Delta t_{TS} = \max_{i,j} \left( \frac{\bar{u}_{i,j} + \sqrt{\frac{\sigma\pi(\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j})}{(\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j})}}}{x_i - x_{i-1}}, \frac{\bar{v}_{i,j} + \sqrt{\frac{\sigma\pi(\kappa_{i,j} + \kappa_{i,j-1})}{(\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1})}}}{y_j - y_{j-1}} \right)$$

### 3.3.2.5.1. Méthodes de calculs de la courbure $\kappa$

**Fonction hauteur** La première méthode présentée dans cette section n'était pas présente dans le code. Celle-ci fut implémentée, vérifiée et validée sur les cas tests analytiques de la littérature. L'objectif principal de la thèse ne portant pas sur le calcul de la tension de surface, les travaux effectués sur cette méthode ne sont pas présentés. Uniquement les résultats provenant de la méthode connue dans la littérature sont présentés.

Pour les méthodes de représentation d'interface géométriques (Volume-Of-Fluid et Moment-Of-Fluid), l'évaluation de la courbure est effectuée grâce à la méthode des fonctions hauteurs. Cette méthode présentée par S. Popinet [134] a été modifiée par M. Owkes *et al*

[135] afin de correspondre à des maillages non structurés. Les deux algorithmes ont été utilisés tels que lorsque les informations pour calculer la fonction hauteur sont suffisamment précises, la méthode proposée par S. Popinet est utilisée. Cependant, si l'interface n'est pas suffisamment bien représentée, la méthode proposée par M. Owkes *et al* est utilisée.

Une fonction hauteur est la sommation sur plusieurs mailles de la fonction caractéristique sans lissage suivant une direction donnée  $x$  ou  $y$ .

$$H_f = x_0 + \sum_i \bar{\chi}_i \Delta_i$$

avec  $H_f$  la fonction hauteur  $x_0$  la position de la face la plus basse, ou la plus à gauche, des cellules et  $\Delta_i$  le pas d'espace de la cellule  $i$ , à remplacer par  $\Delta x_i$  ou  $\Delta y_i$ . La figure 3.8 est la schématisation de la fonction hauteur suivant la direction  $y$ . En fonction du calcul de la normal  $\nabla \bar{\chi}$ , si la normal suivant  $x$  est supérieur à la normale suivant  $y$ , la direction du calcul de la fonction hauteur est la direction  $x$ , et inversement. Lorsqu'il est possible de traverser totalement l'interface pour les trois fonctions hauteurs calculées, la méthode développée par S. Popinet est utilisée. Cependant, lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir cette propriétés sur quelques mailles, la méthode de M. Owkes est utilisée. Elle consiste en une rotation de maillage permettant de faire coïncider la direction de la fonction hauteur avec la normale calculée. Malgré une meilleure approximation de la courbure pour des éléments composés de quelques mailles (goutte, bulle, etc.), elle est cependant moins précise que la méthode standard de S. Popinet pour les fonctions hauteurs calculées correctement.

Suite au calcul des trois fonctions hauteurs, la courbure est calculée grâce à l'équation suivante :

$$\kappa = \frac{\frac{H_{f,i+1} - 2H_{f,i} + H_{f,i-1}}{\Delta^2}}{\left(1 + \left(\frac{H_{f,i+1} - H_{f,i-1}}{2\Delta}\right)^2\right)^{3/2}}$$

avec  $\Delta$  pouvant être  $\Delta x$  (direction  $y$ ) ou  $\Delta y$  (direction  $x$ ). La description plus précise de la fonction hauteur et de son utilisation peut être trouvée dans les articles écrits par S. Popinet [136, 134].

**Courbure depuis la fonction distance** La seconde méthode de calcul de la courbure est quant à elle déjà implémentée dans le code. Elle s'utilise avec la représentation de l'interface issue de la fonction de distance Level-Set Method. La méthode Closest-Point (CP) développée par M. Coquerelle et S. Glockner [137] permet l'évaluation de la courbure grâce à

$$\kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_2} \right)$$

avec  $\phi$  la fonction distance à l'interface, au point de l'interface la plus proche de l'endroit où l'on souhaite évaluer la courbure. Cette méthode, d'ordre 4, est utilisable uniquement pour la représentation d'interface Level-Set Method car elle utilise la caractéristique de la fonction distance. Pour plus d'information sur la méthode CP, le lecteur est invité à lire l'article [137].

### 3.3.2.6. Force visqueuse

L'un des enjeux de la thèse est d'étudier la dissipation de l'énergie totale au fur et à mesure que le brassage se produit. La force de viscosité est l'élément moteur provoquant une dissipation de l'énergie mécanique permettant au déferlement de s'estomper. Pour

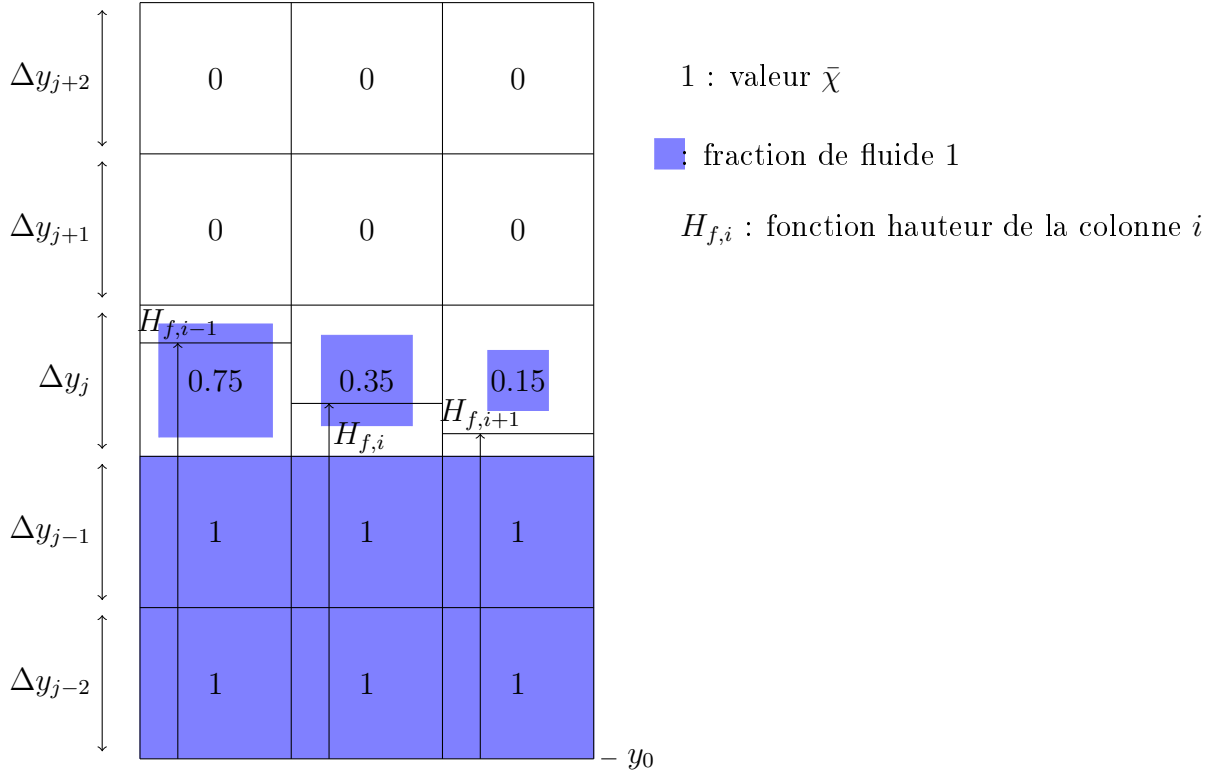


Figure 3.8. – Schéma de la fonction hauteur suivant la direction  $y$ .

les systèmes étudiés, la dynamique est considérée incompressible :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . La force de viscosité pour un fluide incompressible se traduit de la manière suivante :

$$\nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T))$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $\mathbf{u}$  le champ vectoriel de vitesse associé au fluide.

L'intégration spatiale de ce terme s'effectue par l'évolution des flux sur le volume de contrôle vectoriel, suivant  $x$  lors de la résolution de  $u$  et suivant  $y$  lors de la résolution de  $v$ . Soit

$$\int_{\Omega_{VC}} \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \cdot d\partial\Omega$$

Cette fonction est résolue sur les quatres faces gauche, droite, basse et haute. Afin de simplifier, l'hypothèse, à l'ordre 2, de l'approximation de la valeur en sa valeur moyennée est faite :

$$\int_{\partial\Omega} \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \cdot d\partial\Omega \approx \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}(\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T) \cdot d\partial\Omega$$

Lors de la résolution de ce dernier terme, il est nécessaire de connaître la valeur de la viscosité moyennée sur les quatre faces. Deux sont connues parfaitement grâce à la disposition des cellules, cependant, sur les deux autres faces, une interpolation est nécessaire. L'interpolation utilisée est harmonique. Elle correspond, en suivant le schéma de la figure 3.9 pour l'interpolation de la viscosité dynamique sur la face basse du volume de contrôle vectoriel suivant  $x$ , à

$$\bar{\mu}_{int} = \frac{\left[ \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2} \cdot \frac{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}{2} \right]}{\left( \frac{\Delta x_i \cdot \Delta y_j}{4\bar{\mu}_{i-1,j-1}} + \frac{\Delta x_{i-1} \cdot \Delta y_j}{4\bar{\mu}_{i,j-1}} + \frac{\Delta x_{i-1} \cdot \Delta y_{j-1}}{4\bar{\mu}_{i,j}} + \frac{\Delta x_i \cdot \Delta y_{j-1}}{4\bar{\mu}_{i-1,j}} \right)}$$

L'opérateur gradient est résolu grâce à une méthode centrée d'ordre 2.

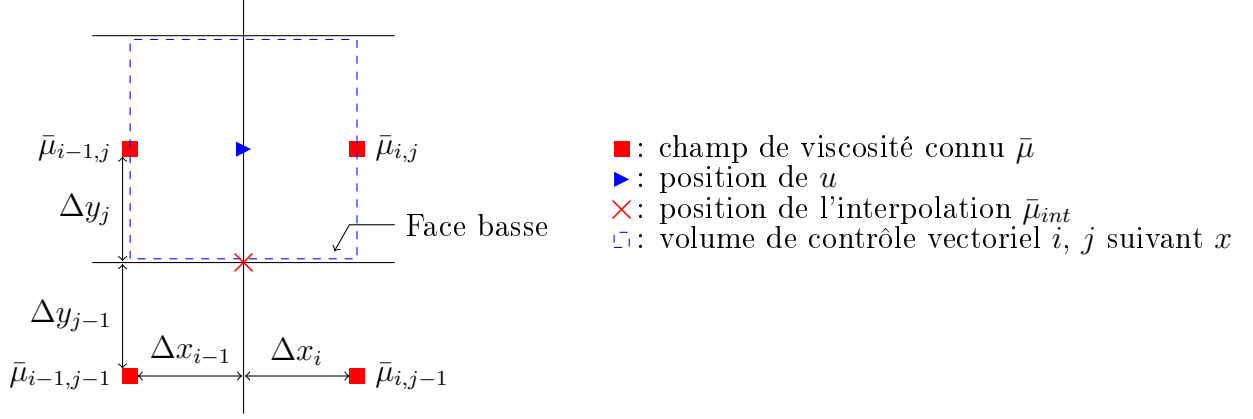


Figure 3.9. – Schéma de l'interpolation harmonique de la viscosité moyennee  $\bar{\mu}$  sur la face basse du volume de contrôle vectoriel suivant  $x$ .

L'intégration temporelle est effectuée grâce à un schéma euler implicite. C'est-à-dire que l'ensemble des variables est calculée au temps  $t^{n+1}$ . Cette méthode nécessite l'inversion d'une matrice. Malgré le temps supplémentaire de calcul de l'inversion de la matrice, l'utilisation d'une méthode implicite permet de s'abstraire du critère de stabilité appelé *CFL*. Celui-ci étant très restrictif sur ce terme, le pas de temps est réduit fortement. Cela augmente considérablement le temps de calcul de la simulation. L'utilisation de la méthode augmente le temps de calcul d'une itération mais réduit de manière non négligeable le nombre d'itérations. Le temps total de calcul est, grâce à l'implicite, réduit. La force injectée dans l'équation 3.10 devient

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T) \cdot d\partial\Omega dt = \Delta t \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^{n+1} (\nabla \bar{\mathbf{u}}^{n+1} + (\nabla \bar{\mathbf{u}}^{n+1})^T) \cdot d\partial\Omega$$

### 3.3.2.7. Axisymétrie

Dans le cas de l'utilisation d'une simulation basée sur l'axisymétrie, c'est-à-dire lorsque l'écoulement attendu est invariant autour d'un axe, un terme supplémentaire est ajouté lors de la résolution de l'équation de quantité de mouvement. Ce terme est

$$\frac{p}{r}$$

avec  $r$  la distance entre le centre du volume de contrôle  $\Omega_{vc}$  et l'axe de révolution. Dans le code utilisé, seul l'axe horizontal (suivant  $x$ ) peut être défini comme axe axisymétrique. Par souci d'exactitude, les variables  $x_i$  et  $\Delta x_i$  sont remplacés par  $r_i$  et  $\Delta r_i$ . Lors de l'utilisation de la méthode des volumes finis sur cette force, cela devient :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_{vc}} \frac{p^f}{r} d\Omega dt \approx \Delta t \frac{(\bar{p}^f)^n}{r}$$



avec  $p^f$  la pression interpolée sur le centre du volume de contrôle et  $(\bar{p}^f)^n$  la pression interpolée moyennée sur le volume de contrôle au temps  $t^n$ . L'utilisation de cette méthode permet la validation de la méthode proposée sur des impacts de goutte sur une surface libre.

## 3.4. Représentations d'interface

La représentation d'interface est une méthode permettant la résolution de l'équation de continuité avec des hypothèses particulières. En effet, lors de la résolution directe de cette équation, les schémas numériques utilisés tendent à diffuser et dissiper l'interface. Ces erreurs, très petites pour une centaine d'itérations, sont en revanche plus marquantes pour des simulations nécessitant 100 000 itérations. Depuis maintenant une trentaine d'années, l'avancée technologique permet l'utilisation de maillages plus fins, provoquant une diminution du pas de temps et une augmentation importante du nombre d'itérations. Afin de conserver une propriété d'interface nette pour chaque itération, c'est-à-dire sans lissage, des méthodes ont été développées : Volume-Of-Fluid (VOF), Moment-Of-Fluid (MOF) et Level-Set Method (LSM). Ces méthodes, géométriques ou mathématique, prennent en compte plus d'informations et permettent le suivi de l'interface au cours du temps. Les trois méthodes présentées, déjà implémentées dans le code, sont trois des représentations d'interface les plus utilisées actuellement pour étudier une dynamique de système diphasique. Dans un premier temps, ces représentations sont présentées. Puis dans un second et dernier temps, le terme de lissage de l'interface sera présenté et discuté.

### 3.4.1. Volume-Of-Fluid (VOF)

La méthode Volume-Of-Fluid (VOF) fut présentée en premier par W. F. Noh *et al* en 1976 [138]. Cette méthode est basée sur l'idée que la fonction couleur  $\bar{C}$  représente l'intégrale de la fonction caractéristique  $\chi$  sur un volume de contrôle  $\Omega_{VC}$ . Cette fonction couleur, identique à la valeur moyennée de la fonction caractéristique  $\bar{\chi}$ , représente le taux de fluide contenu dans une maille. Initialement, cette fonction couleur était calculée grâce à une méthode Simple Line Interface Calculation (SLIC) qui avait pour caractéristique de reconstruire l'interface parallèlement aux faces des cellules. L'interface ne pouvait donc être uniquement horizontale ou verticale. Cette représentation trop simpliste de l'orientation de l'interface nécessitait une amélioration. D. L. Young propose en 1982 [139] une amélioration de la reconstruction en une droite affine permettant une orientation plus variée de l'interface. Cette méthode appelée Piecewise Linear Interface Construction (PLIC) est celle utilisée au sein de code. La figure 3.10 représente la reconstruction de l'interface pour plusieurs cellules.

Les méthodes utilisées pour résoudre cette équation sont des méthodes géométriques. L'application de méthodes géométriques à cette équation permet une conservation presque parfaite de l'intégrale de  $\bar{C}$  sur tout le domaine et de minimiser la diffusion de l'interface. Les propriétés locales du fluide  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\mu}$  sont obtenues par la fonction de couleur  $\bar{C}$  :

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \rho_1 \bar{C} + \rho_2 (1 - \bar{C}) \\ \bar{\mu} = \mu_1 \bar{C} + \mu_2 (1 - \bar{C}) \end{cases}$$

Aucune méthode permettant de contrôler les erreurs sur la conservation de la masse au cours du temps n'est implémentée avec la méthode VOF, ainsi de petites variations de l'intégrale de  $\chi$  apparaissent en raison des erreurs temporelle et spatiale. Cela explique la non conservativité de la masse avec la méthode VOF. La faible erreur de la conservation de la masse est l'une des principales raisons pour lesquelles cette méthode est couramment

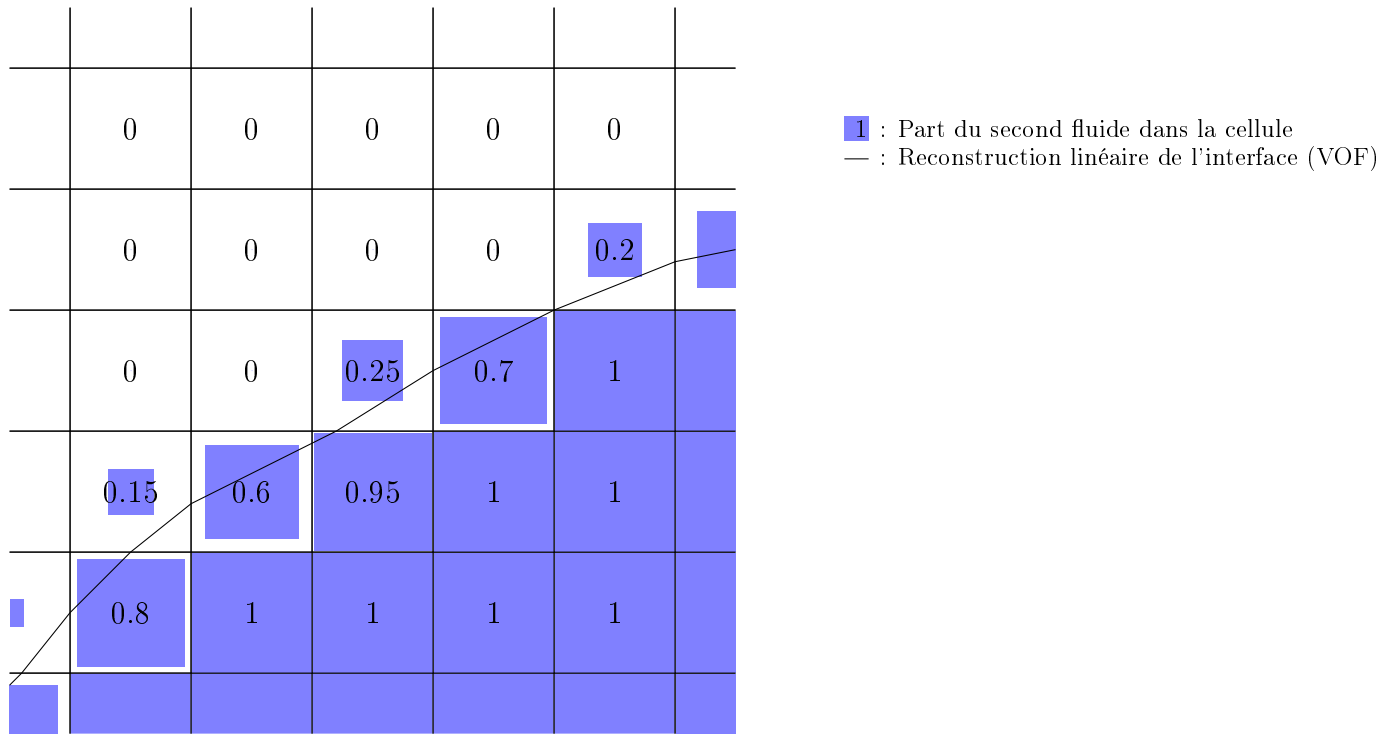


Figure 3.10. – Description des informations connues pour la méthode Volume-of-Fluid (VOF)

utilisée pour simuler des écoulements diphasiques. Cependant, en forçant cette conservation de masse, l'ordre élevé de la représentation de l'interface est difficilement réalisable. La méthode mise en œuvre est d'ordre 2 spatialement et d'ordre un temporellement. Cet ordre inférieur et la reconstruction linéaire de l'interface induisent une impossibilité de calculer la courbure de l'interface avec un ordre élevé. La méthode des fonctions hauteurs est utilisée pour calculer la courbure.

La méthode Volume-Of-Fluid sera utilisée pour la vérification et validation de la méthode proposée ainsi que pour l'étude du déferlement de vague. Elle fut privilégiée car elle permet une bonne représentation du calcul de l'interface et son temps de calcul est négligeable par rapport au calcul total d'une itération. Le temps est inférieur à 1%.

### 3.4.2. Moment-Of-Fluid (MOF)

La méthode Moment-Of-Fluid est une nouvelle méthode de suivi du volume qui utilise les données de fraction volumique  $\bar{\chi}$  ainsi que les centroïdes des matériaux (Fig. 3.11). La méthode Moment-Of-Fluid est une méthode étendue de Volume-of-Fluid. Contrairement à la méthode précédente, elle utilise davantage d'informations pour reconstituer l'interface. Ces surplus d'informations permettent de reconstruire des éléments plus petits que la cellule, comme par exemple des filaments. Grâce à cela, aucune perte de masse dans chaque fluide n'est observé. La méthode est totalement conservative en masse. Les interfaces des matériaux sont reconstruites avec un troisième ordre en espace et un second ordre en temps. La méthode développée par A. Lemoine *et al* [140] est déjà implémentée dans le code.

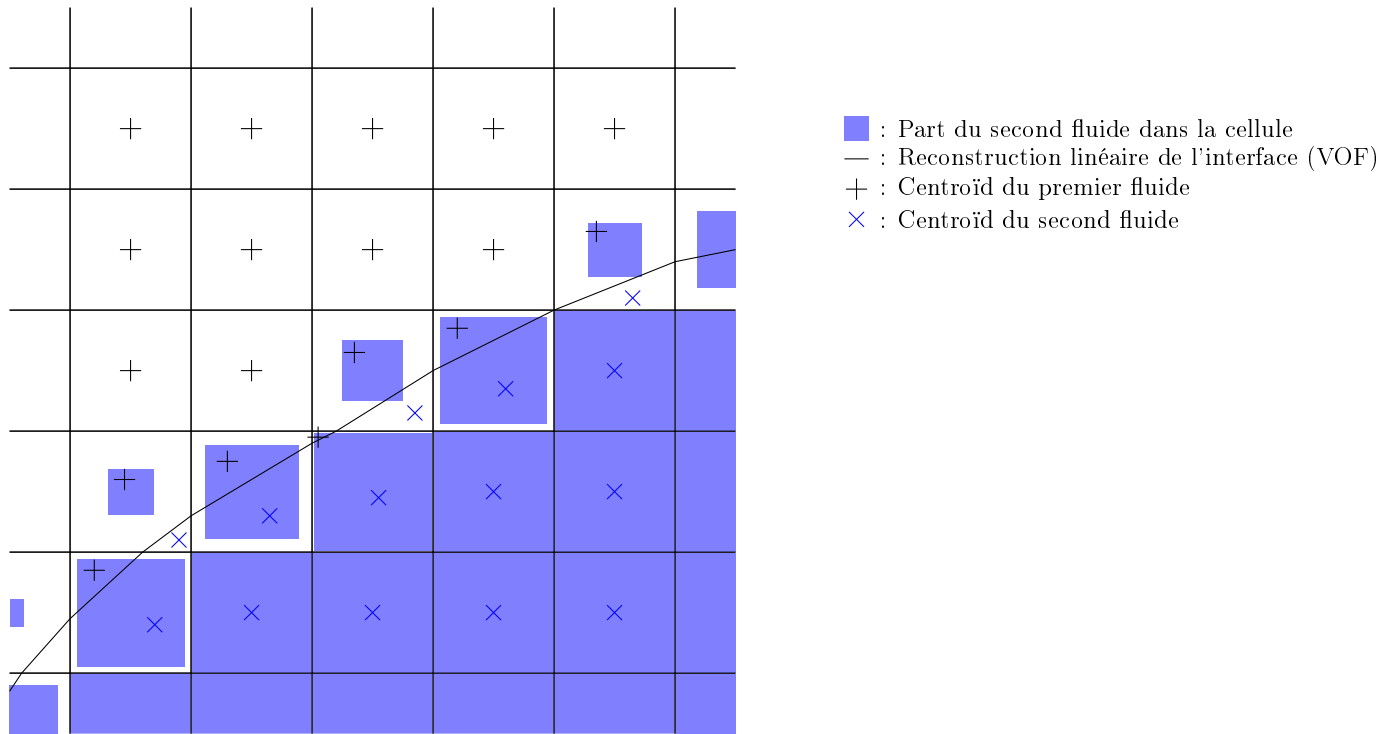


Figure 3.11. – Description des informations connues par la méthode Moment-of-Fluid (MOF)

La méthode Moment-Of-Fluid sera utilisée uniquement pour la vérification et validation de la méthode proposée ainsi que pour l'étude du déferlement de vague. Même si sa représentation est de très bonne qualité, le temps de calcul est important, jusqu'à 60 % du temps total. Le gain de précision n'était pas suffisant pour contre balancer l'augmentation importante du temps de calcul.

### 3.4.3. Level-Set Method (LSM)

La méthode Level-Set conçue par S. Osher *et al* en 1988 [141] est une méthode de représentation et de calcul du mouvement de l'interface en deux ou trois dimensions. De même que pour les deux représentations précédentes, cette méthode résout l'équation de continuité 3.8. L'équation résolue au sein du code est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

La fonction caractéristique est remplacée par une fonction discrète  $\phi$  correspondant à la distance  $d_\phi$  à l'interface (Fig.3.12). La valeur 0 indique la position de l'interface. Les valeurs positives et négatives évoquent respectivement la présence du premier et du second fluides.

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{interface} \\ +d_\phi & \text{fluide}_1 \\ -d_\phi & \text{fluide}_2 \end{cases}$$

L'avantage majeur de cette méthode est sa capacité à représenter de manière élevée l'interface permettant une étude et analyse de la surface de grande qualité. Cette propriété influence positivement le calcul de la courbure [137] et améliore l'ordre de convergence du calcul de la tension de surface avec la méthode Closest-Point (sous-section

3.3.2.5.1). A contrario, la fonction  $\phi$  ne conserve pas sa propriété de fonction de distance signée lorsqu'elle évolue dans le temps [142]. Plusieurs équations de réinitialisation ont été mise en place afin de redéfinir  $\phi$  en fonction distance. L'utilisation d'une méthode de réinitialisation ne permet pas une conservation de la masse totale de chaque fluide. Ainsi les petites échelles tendent à être effacées par cette méthode. De plus, l'utilisation chronique d'une réinitialisation empêche la bonne modification topologique (reconnexion et déconnexion). La fréquence d'utilisation peut avoir une importance sur la dynamique finale du système.

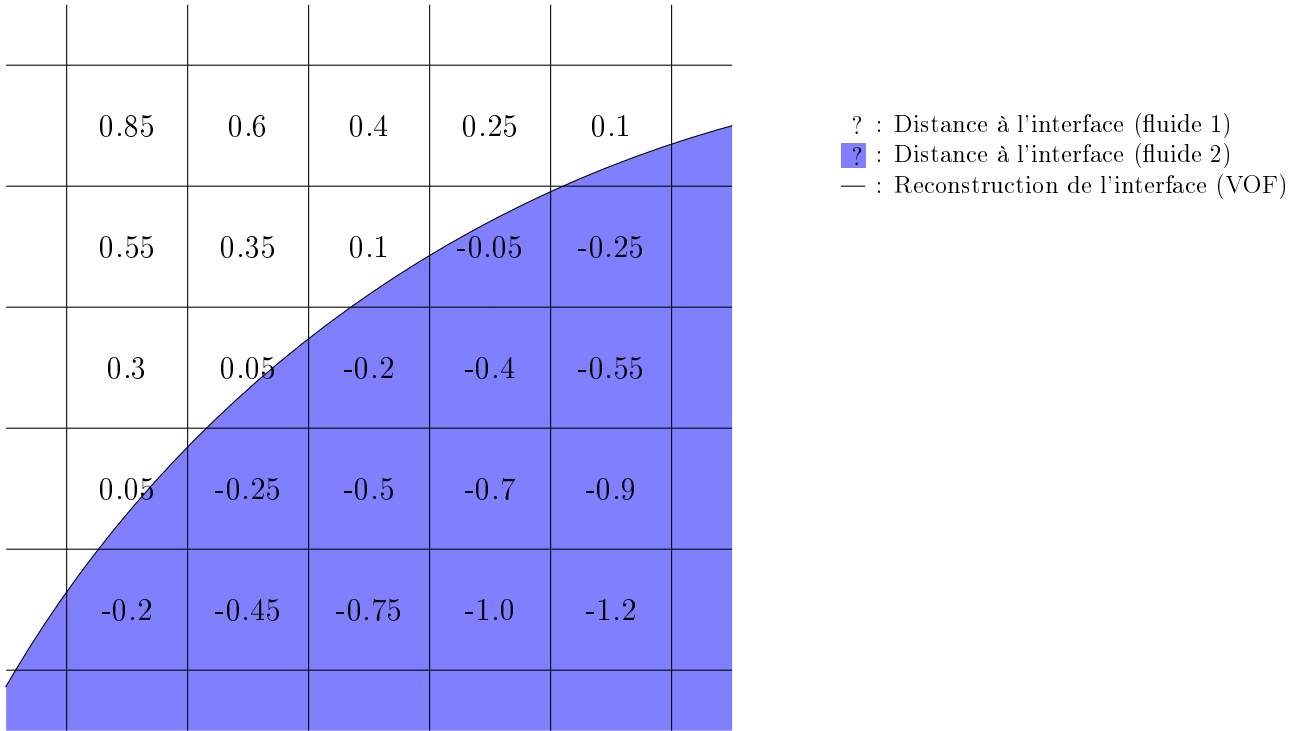


Figure 3.12. – Description des informations connues par la méthode Level-Set Method (LSM)

La méthode permettant le passage de la fonction discrete  $\phi$  en une fonction non lisse  $\bar{\chi}$  provient de l'article de C. Min *et al.* [143]. Elle consiste en un découpage du volume de contrôle en triangle. Puis une fonction reliant la position des sommets et sa valeur  $\phi$  interpolée à la valeur moyenne de la fraction volumique est utilisée. La fonction décrite dans l'article [143] provient d'une approximation à l'ordre 2 en espace.

La méthode d'advection de la Level-Set Method est basée sur l'hypothèse forte de la fonction distance. A cause de l'utilisation répétée de schémas numériques, les erreurs numériques vont perturber cette notion de distance. Dans le but de transformer  $\phi$  en un champ de fonction distance signée, une méthode de réinitialisation eikonal est utilisée. Celle-ci permet de redresser la pente de la fonction en une pente unitaire :

$$\|\nabla\phi\|_2 = 1 \quad (3.15)$$

La méthode eikonale est une modification petit à petit de la fonction tout le temps que l'erreur sur la pente est trop haute. Une itération de la boucle est le calcul de

$$\phi_{eikonal} = \phi + 0.1 \min(\Delta) \cdot \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \Delta^2}} \cdot (1 - \|\nabla\phi\|_2) \cdot e^{-\max\left(0, \frac{|\kappa| - \frac{5}{\min(\Delta)}}{\min(\Delta)}\right)}$$

avec  $\kappa$  la courbure locale calculée grâce au Closest-Point,  $\Delta$  le pas d'espace suivant les deux directions et  $\phi_{eikonal}$  le champ  $\phi$  à l'itération suivante. Lorsque  $\phi_{eikonal}$  possède une erreur acceptable pour l'équation 3.15, le champ final est remplacé par  $\phi_{eikonal}$ . L'opérateur gradient est calculé grâce à un schéma WENO 5,3. L'erreur minimale est fixée à  $2.10^{-2}$ . Cette valeur a prouvé une bonne capacité à rectifier la pente du gradient de la fonction distance dans un temps de calcul acceptable.

Cette méthode est utilisée uniquement lors de la vérification et validation de la méthode proposée. Malgré une représentation d'ordre élevée de l'interface, il existe une perte de masse non négligeable au fur et à mesure que la simulation avance. Les petites structures proches de l'interface peuvent, de ce fait, être diffusées et supprimées de la simulation. De plus, lors du déferlement plongeant, une reconnexion de l'interface s'effectue au point de l'impact entre le jet et la surface de l'eau. Cette reconnexion a montré, lors de cas tests effectués pendant la thèse, être sensible à la méthode de réinitialisation et à sa fréquence d'utilisation. Pour toutes ces raisons, la méthode Level-Set Method n'est pas utilisée pour étudier le déferlement de vague.

### 3.4.4. Lissage

Le lissage de la fraction volumique  $\bar{\chi}$  semi-discrète permet de résoudre les équations de Navier-Stokes grâce aux schémas numériques spatiaux sans injection d'erreur numérique provenant de la résolution de dérivées partielles sur des fonctions discontinues.

Une fonction continue par morceau sans saut de valeur possède, au niveau de sa discontinuité, un nombre infini d'onde de longueurs d'onde différentes. Les erreurs des schémas numériques sont fonction de la longueur d'onde. Généralement, les plus grandes erreurs numériques se trouvent sur les toutes petites longueurs d'onde. L'utilisation de schémas numériques pour représenter le gradient en ce point de discontinuité, n'étant pas possible mathématiquement car continue par morceau donc théoriquement non dérivable, génère des oscillations provenant d'une mauvaise représentation de cette infinité d'onde. La fonction, advectée par ce gradient, va au fur et à mesure de son déplacement se modifier et osciller fortement uniquement à cause de la résolution du gradient. Une manière de pallier ce problème est de lisser la fonction au niveau de la discontinuité afin de la rendre dérivable. Cette méthode stabilise, presque totalement, la résolution de l'équation. Cependant, plus l'épaisseur physique de lissage est grande, plus la représentation de la discontinuité sera mauvaise. Il est nécessaire de contrôler le ratio entre une bonne stabilité et une bonne représentation de la discontinuité. Dans le cas de la simulation d'écoulement diphasique, la fonction nécessitant un lissage est la fraction volumique  $\bar{\chi}$ . Un lissage trop important ne permettra pas de représenter et capturer correctement les phénomènes surfaciques (ondes, tension de surface, etc.). Les méthodes de représentation d'interface étant basées sur deux concepts différents, géométrique et mathématique, il existe deux méthodes de lissage différentes. La première est utilisée par les méthodes Volume-Of-Fluid et Moment-Of-Fluid (géométrique). La seconde est utilisée par la Level-Set Method (mathématique). Les méthodes étant totalement différentes, l'épaisseur d'interface de lissage  $\epsilon_{lissage}$  sera équivalent pour toutes les méthodes lors de la validation de la méthode proposée.

#### 3.4.4.1. Volume-Of-Fluid et Moment-Of-Fluid

La méthode utilisée pour lisser la fraction volumique moyennée  $\bar{\chi}$  est géométrique. Elle correspond en un algorithme itératif permettant un étalement à chaque itération de la fonction. L'étalement permet de rendre continue la fonction. La fonction est lissée suivant les 8 voisins de la cellule étudiée. Ainsi, chaque itération étale le lissage sur une cellule

dans chaque direction, donc sur un total de 2 cellules supplémentaires. La méthode de lissage, appelée pondération inverse à la distance, correspond à un poids porté par chaque cellule équivalent à l'inverse de la distance la plus grande entre la cellule étudiée (une des neuf cellules) et l'endroit où l'on souhaite calculer la fonction lissée. Pour la cellule centrale, cela correspond au pas d'espace de la cellule. Pour une cellule voisine par une face, cela correspond à la distance entre les faces les plus éloignées des cellules. Pour une cellule voisine par le sommet de la cellule centrale, la distance est celle des coins les plus éloignées. Le calcul des poids  $\omega_{i,j}$  des cellules permet l'évaluation finale, pour une itération, du lissage de la fraction volumique tel que

$$\bar{\chi}_{lisse} = \sum_{i=-1,1;j=-1,1} \omega_{i,j} \bar{\chi}_{i,j}$$

### 3.4.4.2. Level-Set Method

La fraction volumique moyennée lissée  $\bar{\chi}_{lisse}$  est calculée grâce à la fonction  $\phi$  discrète. La fonction  $H_\epsilon$ , appelée Heaviside, permet la représentation de la valeur  $\bar{\chi}_{lisse}$  moyennée sur un epsilon  $\epsilon_{Heaviside}$  :

$$\bar{\chi}_{lisse} = H_\epsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi > \epsilon_{Heaviside} \\ 1 & \text{si } \phi < -\epsilon_{Heaviside} \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\phi}{\epsilon_{Heaviside}} + \frac{\sin\left(\pi \frac{\phi}{\epsilon_{Heaviside}}\right)}{\pi} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\epsilon_{Heaviside} = N_{Heaviside} \cdot \frac{\min(\Delta_{i,j}) + \max(\Delta_{i,j})}{2}$ ,  $\Delta_{i,j}$  le pas d'espace suivant  $x$  et  $y$ , et  $N_{Heaviside}$  le nombre de cellules lissées autour de l'interface. Cette méthode permet le lissage de la fraction volumique sur une bande  $[-\epsilon_{Heaviside}, +\epsilon_{Heaviside}]$  entourant l'interface. Autrement, il est égale à 0 dans le fluide 1 et 1 dans le fluide 2. Dans les cas de vérification et validation de la méthode proposée, le nombre de cellule  $N_{Heaviside}$  est fixé à 3. Soit une bande totale de 6 cellules.

## 3.5. Algorithme du code

L'algorithme du code est présentée rapidement dans cette section. Une présentation plus détaillée de la méthode proposée est effectuée dans le chapitre 4. L'algorithme est issu de la méthode de prédiction-corrrection.

### 3.5.1. Méthode de prédiction-corrrection

La méthode utilisée pour représenter l'évolution des champs  $\mathbf{u}$  et  $p$  au cours du temps est celle développée par A. J. Chorin en 1968 [144], R. Témam en 1969 [145] et K. Goda en 1979 [146]. Ils proposent de résoudre l'équation en plusieurs étapes en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité (éq. 3.11) :

$$\underbrace{\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0}_{\text{Correction}}$$

Afin de simplifier l'écriture les forces visqueuses, de surface et gravité sont englobées dans une fonction représentant les forces extérieures  $\sum \mathbf{f}_{orces}$ . Le développement effectué précédemment pour chaque terme de l'équation de la quantité de mouvement est utilisé dans cette partie. Après l'utilisation de la double intégrale, spatiale et temporelle, on obtient

$$\bar{\rho}^{n+1}\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\rho}^n\bar{\mathbf{u}}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\theta} \otimes \bar{\mathbf{u}} dt = -\Delta t (\nabla \bar{p}^n + \nabla \bar{\Psi}) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_{VC}} \sum \mathbf{f}_{orces} d\Omega dt \quad (3.16)$$

K. Goda propose l'introduction d'une variable temporaire  $\bar{\mathbf{u}}^*$  permettant une prédiction de la vitesse au temps  $t^{n+1}$  avec le gradient de pression  $\nabla \bar{p}^n$ . Cela revient à résoudre l'équation suivante

$$\bar{\rho}^{n+1}\bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\rho}^n\bar{\mathbf{u}}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\theta} \otimes \bar{\mathbf{u}} dt = -\Delta t \nabla \bar{p}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_{VC}} \sum \mathbf{f}_{orces} d\Omega dt$$

Suite à la résolution de cette équation, le champ de vitesse  $\bar{\mathbf{u}}^*$  prédit est connu dans l'ensemble du domaine. Cela va permettre la résolution de la seconde étape : l'étape de correction.

Cette seconde étape est effectuée en deux points. Le premier point correspond au calcul du champ de pression  $\bar{p}^{n+1}$ . Le second point correspond à la correction de la vitesse en imposant l'incompressibilité du fluide. Afin de résoudre le premier point, le reste de l'équation 3.16 est à résoudre, soit

$$\bar{\rho}^{n+1}\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\rho}^{n+1}\bar{\mathbf{u}}^* = -\Delta t \nabla \bar{\Psi} \quad (3.17)$$

En utilisant l'opérateur divergence sur cette équation et l'hypothèse d'incompressibilité, on obtient

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^{n+1}} \nabla \bar{\Psi} \right)$$

La résolution de cette équation, aussi appelée équation de Poisson, est résolue en fixant un point dans la grille. Après résolution de  $\bar{\Psi}$ , il est possible de connaître le champ de pression  $\bar{p}^{n+1}$  grâce à la formule  $\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n + \bar{\Psi}$ . Le second point utilise la formule 3.17. Il n'existe maintenant plus qu'une seule variable inconnue  $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$  dans l'équation. Il est important, et nécessaire, d'utiliser le même opérateur numérique du gradient entre le premier et le second point.

Cette méthode, couramment utilisée dans l'ensemble des codes de simulations d'écoulements biphasiques, permet le suivi des champs de pression  $\bar{p}$  et de vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  au cours du temps.

### 3.5.2. Algorithme

Dans cette section, une présentation rapide de l'algorithme High Order Momentum Preserving (HOMP), est effectuée. La présentation détaillée est réalisée dans la section correspondante de la présentation de l'algorithme (chapitre 3). L'algorithme est détaillée pour l'ensemble des forces présentées précédemment, d'un point de vue global. Toutes les forces ne seront pas utilisées pour chaque simulation.

#### 3.5.2.1. Étape 1 : Advection de la phase

L'advection de la phase  $\bar{\chi}$  est effectuée grâce à une méthode de représentation d'interface. Pour les méthodes VOF et MOF, la vitesse utilisée est une extrapolation au temps  $t^{n+1}$  du champ de vitesse :  $\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+1} = 2\bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^{n-1}$ . Pour la méthode LSM, les schémas numériques doivent être équivalents à ceux utilisés dans les étapes 2 et 3 sur le terme d'inertie.

### 3.5.2.2. Étape 2 : Résolution de l'équation de continuité

L'équation de continuité 3.8 est résolue en première grâce à la méthode des volumes finis. La variable  $\bar{\chi}^*$  obtenue est une variable temporaire. Grâce au lien entre cette variable et les propriétés physiques du fluide, il est possible de calculer les champs moyennés  $\bar{\rho}^*$  et  $\bar{\mu}^*$ .

### 3.5.2.3. Étape 3 : Prédiction de la vitesse

L'étape de prédiction de la vitesse est résolue. Cependant, il est à noter que la variable  $\bar{\rho}^{n+1}$  est remplacée par la valeur prédite à l'étape 1. L'équation résolue est

$$\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\Omega} \otimes \bar{\mathbf{u}} dt = -\Delta t \nabla \bar{p}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{\rho} \mathbf{g} dt + \sigma \kappa^n \nabla \bar{\chi}^n \Delta t \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^* (\nabla \bar{\mathbf{u}}^* + (\nabla \bar{\mathbf{u}}^*)^T) \cdot d\boldsymbol{\Omega}$$

La variable  $\bar{\mathbf{u}}^*$  est obtenue grâce à cette étape.

### 3.5.2.4. Étape 4 : Équation de Poisson

L'étape de la résolution de l'équation de Poisson permet la résolution de la pression au temps  $t^{n+1}$ . L'utilisation de la méthode de prédiction-correction, permet l'introduction de l'incrément de pression  $\bar{\Psi}$ . L'équation sur l'incrément de pression est

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^* = -\frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi}$$

En appliquant l'opérateur divergence avec la notion d'incompressibilité, on obtient finalement

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi} \right)$$

L'utilisation d'un point fixe permet de résoudre cette équation. Le champ de pression est calculé grâce à

$$\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n + \bar{\Psi}$$

### 3.5.2.5. Étape 5 : Correction de la vitesse

Dans cette étape, la vitesse est corrigée de telle sorte que le champ soit à divergence nulle, donc incompressible.

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^* - \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{p}^{n+1}$$

## 3.6. Schémas numériques

Les schémas numériques peuvent être considérés comme étant la fondation de la résolution d'une équation aux dérivées partielles. En effet, l'utilisation d'une méthode de mauvaise qualité engendrera automatiquement des résultats non physiques ou des simulations ayant divergées. Il est, de ce fait, nécessaire d'utiliser le bon schéma numérique en fonction du système résolu et de l'importance de chaque terme.

En physique, les notions d'espace et de temps sont généralement découplées en deux espaces vectoriels :  $\mathbb{R}^2$  (en 2D) ou  $\mathbb{R}^3$  (en 3D) et  $\mathbb{R}$ . De la même manière, les schémas numériques sont découplés spatialement et temporellement.



### 3.6.1. Schémas spatiaux

Les trois schémas suivant sont des schémas de reconstruction de la valeur en un point donné. La valeur moyennée, sera reconstruire sous la forme d'un polynôme permettant l'évaluation de la valeur non moyennée en un point. Les méthodes Upwind d'ordre 1, WENO 3, 2 [147] et WENO 5, 3 [148] sont utilisés dans ce manuscrit.

#### 3.6.1.1. Upwind d'ordre 1

La méthode Upwind d'ordre 1, étant également une interpolation, est l'utilisation de la valeur la plus proche dans la direction du flux.

$$f_{upwind} = \begin{cases} \bar{f}_{i+1} & \text{si } u \geq 0 \\ \bar{f}_i & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

avec  $f_{upwind}$  la valeur reconstruite,  $\bar{f}_{i+1}$  et  $\bar{f}_i$  les valeurs des cellules environnantes et  $u$  la vitesse transportant le flux. Le schéma associé est représenté dans la figure 3.13.

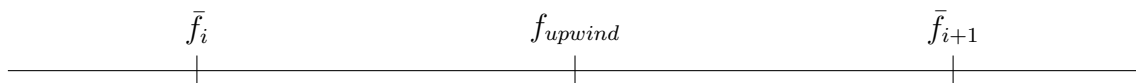


Figure 3.13. – Description du schéma Upwind d'ordre 1 en 1D.

#### 3.6.1.2. Weno 3, 2

Dans cette partie, les termes  $i$  correspondent à la cellule étudiée et  $j$  au stencil étudié allant de 1 à 2. Dans un premier temps, deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont définies. Ces fonctions représentent les points spatiaux des dérivées deuxième d'ordre 1 et première d'ordre 2. Les fonctions sont définies pour tout pas d'espace quelconque  $h_1$  et  $h_2$ .

$$f_1(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \frac{-2h_1 - h_2}{h_1 h_2 (1 + \frac{h_1}{h_2})} \\ \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \\ \frac{-h_1}{h_1 h_2 (1 + \frac{h_2}{h_1})} \end{pmatrix}$$

$$f_2(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h_1 h_2 (1 + \frac{h_1}{h_2})} \\ \frac{-2}{h_1 h_2} \\ \frac{2}{h_1 h_2 (1 + \frac{h_2}{h_1})} \end{pmatrix}$$

Grâce à ces fonctions, il est possible de définir des poids associés à chaque cellule  $i$ , chaque fonction  $f_d$ , chaque stencil  $j$  et chaque point du stencil  $k$ . La fonction  $\beta_{3,2}$  permet la résolution de ces poids.

$$\beta_{3,2}(i, k, d, j) = \Delta_{i-3+k+j} \cdot \sum_{l=k+1,3} f_d(\Delta_{i-2+j}, \Delta_{i-1+j})(l)$$

Afin de simplifier les équations, une fonction temporaire est introduite. La fonction  $X_s$  prend en compte deux pas d'espace quelconque et redonne un vecteur associé aux deux pas d'espace.

$$X_s(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Cette nouvelle fonction temporaire est par la suite utilisée lors de la définition des poids des polynômes reconstruits  $P_{oly}$ . Cette fonction prend en compte un vecteur de poids calculés par la fonction  $\beta$  et la position de la cellule étudiée et du stencil.

$$P_{oly}(i, j) = \beta_{3,2}(i, :, 1, j) + X_s(\Delta_{i-1}, \Delta_i)(j) \cdot \beta_{3,2}(i, :, 2, j)$$

avec : représentant l'ensemble du vecteur. Les calculs précédents sont des poids calculés grâce au pas d'espace et sont constants en fonction du temps.

Les prochains poids calculés correspondent quant à eux à la variation apportée par les stencils étudiés. En effet, lorsqu'un stencil est mauvais, il ne sera pas ou faiblement pris en compte lors de la reconstruction. La fonction  $\alpha$  est fonction de passage pour calculer les autres poids.

$$\alpha_{3,2}(i) = \left( \frac{\frac{\Delta_{i+1}}{(\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1})}}{\frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{(\Delta_{i-1} + \Delta_i + \Delta_{i+1})}} \right)$$

Le vecteur  $IS$  est l'indicateur de lissage des stencils étudiés.

$$IS_{3,2}(i) = \left( \begin{array}{c} \left[ \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} (-\bar{f}_{i-1} + \bar{f}_i) \right]^2 \\ [-\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1}]^2 \end{array} \right)$$

Grâce aux variables  $\tau_{3,2}$ ,  $\epsilon_{r,3,2}$  et  $\lambda_{3,2}$

$$\tau_{3,2}(i) = |IS_{3,2}(i)(2) - IS_{3,2}(i)(1)|$$

$$\epsilon_{r,3,2}(i) = 10^{-6} \cdot \left( \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} \right)$$

$$\lambda_{3,2}(i) = \left( \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

il est possible de reconstruire les poids  $\omega_{3,2}$  de chaque polynôme  $P_{oly}$  reconstruit précédemment. Les poids sont calculés grâce à :

$$\omega_{3,2}(i) = \alpha_{3,2}(i) \left( \begin{array}{c} 1 + \left( \frac{\tau_{3,2}(i) + \epsilon_{r,3,2}(i)}{\epsilon_{r,3,2}(i) + IS_{3,2}(i)(1)} \right)^2 + \lambda_{3,2}(i) \cdot \left( \frac{\epsilon_{r,3,2}(i) + IS_{3,2}(i)(1)}{\tau_{3,2}(i) + \epsilon_{r,3,2}(i)} \right) \\ 1 + \left( \frac{\tau_{3,2}(i) + \epsilon_{r,3,2}(i)}{\epsilon_{r,3,2}(i) + IS_{3,2}(i)(2)} \right)^2 + \lambda_{3,2}(i) \cdot \left( \frac{\epsilon_{r,3,2}(i) + IS_{3,2}(i)(2)}{\tau_{3,2}(i) + \epsilon_{r,3,2}(i)} \right) \end{array} \right)$$

$$\omega_{3,2}(i) = \frac{\omega_{3,2}(i)}{\omega_{3,2}(i)(1) + \omega_{3,2}(i)(2)}$$

Finalement la valeur reconstruite  $f_{weno32}$  est un mélange des poids de chaque polynôme et de la reconstruction de ces polynômes. Plus le polynôme semble correct, plus grande sera sa contribution lors de la reconstruction. Cela permet de minimiser les oscillations apporter par une mauvaise représentation de la fonction.

$$f_{weno32} = \omega_{3,2}(i)(1) \left( P_{oly}(i, 1) \cdot \left( \begin{array}{c} \bar{f}_{i-1} \\ \bar{f}_i \end{array} \right) \right) + \omega_{3,2}(i)(2) \left( P_{oly}(i, 2) \cdot \left( \begin{array}{c} \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \end{array} \right) \right)$$

Cette méthode d'ordre 3 en espace permet de reconstruire une fonction et de calculer sa valeur sur la face droite de la cellule. Il est possible de calculer la valeur sur la face

gauche de la cellule en inversant l'ordre des valeurs et les pas d'espaces associés

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{i-1} \\ \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{f}_{i+1} \\ \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \Delta_{i-1} \\ \Delta_i \\ \Delta_{i+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta_{i+1} \\ \Delta_i \\ \Delta_{i-1} \end{pmatrix}$$

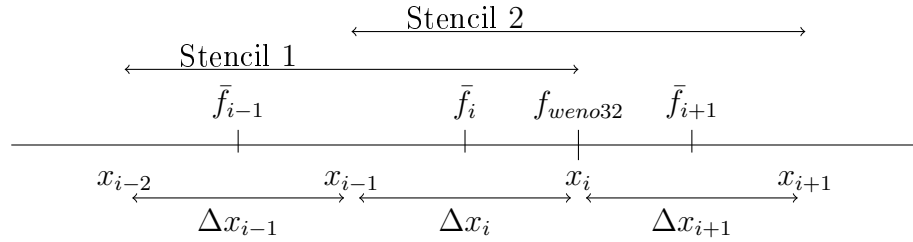


Figure 3.14. – Description du schéma WENO 3,2 en 1D.

### 3.6.1.3. Weno 5,3

Dans cette partie, les termes  $i$  correspondent à la cellule étudiée et  $j$  au stencil étudié allant de 1 à 3. Dans un premier temps, trois fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont définies. Ces fonctions représentent les points spatiaux des dérivées troisième d'ordre 1, deuxième d'ordre 2 et première d'ordre 1. Les fonctions sont définies pour tout pas d'espace quelconque  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ .

$$f_1(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} \frac{-3h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2 + 2h_1h_3 + h_2h_3}{(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3)h_1} \\ \frac{h_1h_2(h_2+h_3)}{(h_1+h_2+h_3)h_1} \\ \frac{-(h_1+h_2+h_3)h_1}{(h_1+h_2)h_2h_3} \\ \frac{(h_1+h_2)h_1}{(h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)h_3} \end{pmatrix}$$

$$f_2(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} \frac{6h_1 + 4h_2 + 2h_3}{(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3)h_1} \\ \frac{-4h_1 - 4h_2 - 2h_3}{h_1h_2(h_2+h_3)} \\ \frac{4h_1 + 2h_2 + 2h_3}{(h_1+h_2)h_2h_3} \\ \frac{-4h_1 - 2h_2}{(h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)h_3} \end{pmatrix}$$

$$f_3(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3)h_1} \\ \frac{1}{h_1h_2(h_2+h_3)} \\ \frac{-1}{(h_1+h_2)h_2h_3} \\ \frac{1}{(h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)h_3} \end{pmatrix}$$

Grâce à ces fonctions, il est possible de définir des poids associés à chaque cellule  $i$ , chaque fonction  $f_d$ , chaque stencil  $j$  et chaque point du stencil  $k$ . La fonction  $\beta$  permet la résolution de ces poids.

$$\beta(i, k, d, j) = \Delta_{i-4+k+s} \cdot \sum_{l=k+1,4} f_d(\Delta_{i-3+j}, \Delta_{i-2+j}, \Delta_{i-1+j})(l)$$

Afin de simplifier les équations, une fonction temporaire est introduite. La fonction  $X_s$  prend en compte trois pas d'espace quelconque et redonne un vecteur associé aux trois pas d'espace.

$$X_s(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 + h_3 \\ h_2 + h_3 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Cette nouvelle fonction temporaire est par la suite utilisée lors de la définition des poids des polynômes reconstruits  $P_{oly}$ . Cette fonction prend en compte un vecteur de poids calculés par la fonction  $\beta$  et la position de la cellule étudiée et du stencil.

$$P_{oly}(i, j) = \beta(i, :, 1, j) + X_s(\Delta_{i-2}, \Delta_{i-1}, \Delta_i)(j) \cdot \beta(i, :, 2, j) + \frac{X_s^2}{2}(\Delta_{i-2}, \Delta_{i-1}, \Delta_i)(j) \cdot \beta(i, :, 3, j)$$

avec : représentant l'ensemble du vecteur. Les calculs précédents sont des poids calculés grâce au pas d'espace et sont constants en fonction du temps.

Les prochains poids calculés correspondent quant à eux à la variation apportée par les stencils étudiés. En effet, lorsqu'un stencil est mauvais, il ne sera pas ou faiblement pris en compte lors de la reconstruction. La fonction  $\alpha$  est fonction de passage pour calculer les autres poids.

$$\alpha_{5,3}(i) = \left( 1 - \frac{\frac{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})\Delta_{i+1}}{(\sum_{n=i-2, i+2} \Delta_n)(\sum_{n=i-2, i+1} \Delta_n)}}{\frac{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})\Delta_{i+1}}{(\sum_{n=i-2, i+2} \Delta_n)(\sum_{n=i-2, i+1} \Delta_n)}} - \frac{(\Delta_{i-1} + \Delta_i)(\sum_{n=i-2, i} \Delta_n)}{(\sum_{n=i-2, i+2} \Delta_n)(\sum_{n=i-1, i+2} \Delta_n)} \right)$$

Le vecteur  $IS$  est l'indicateur de lissage des stencils étudiés.

$$IS_{5,3}(i) = \begin{pmatrix} \frac{13}{12}(\bar{f}_{i-2} - 2\bar{f}_{i-1} + \bar{f}_i)^2 + \frac{1}{4}(\bar{f}_{i-2} - 4\bar{f}_{i-1} + 3\bar{f}_i)^2 \\ \frac{13}{12}(\bar{f}_{i-1} - 2\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\bar{f}_{i-1} - \bar{f}_{i+1})^2 \\ \frac{13}{12}(\bar{f}_i - 2\bar{f}_{i+1} + \bar{f}_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\bar{f}_i - 4\bar{f}_{i+1} + \bar{f}_{i+2})^2 \end{pmatrix}$$

Grâce aux variables  $\tau_{5,3}$ ,  $\epsilon_{r,5,3}$  et  $\lambda_{5,3}$

$$\tau_{5,3}(i) = |IS_{5,3}(i)(3) - IS_{5,3}(i)(1)|$$

$$\epsilon_{r,5,3}(i) = 10^{-6} \cdot \left( \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} \right)^4$$

$$\lambda_{5,3}(i) = \left( \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

il est possible de reconstruire les poids  $\omega_{5,3}$  de chaque polynôme  $P_{oly}$  reconstruit précédemment. Les poids sont calculés grâce à :

$$\omega_{5,3}(i) = \alpha_{5,3}(i) \begin{pmatrix} 1 + \left( \frac{\tau_{5,3}(i) + \epsilon_{r,5,3}(i)}{\epsilon_{r,5,3}(i) + IS_{5,3}(i)(1)} \right)^2 + \lambda_{5,3}(i) \cdot \left( \frac{\epsilon_{r,5,3}(i) + IS_{5,3}(i)(1)}{\tau_{5,3}(i) + \epsilon_{r,5,3}(i)} \right) \\ 1 + \left( \frac{\tau_{5,3}(i) + \epsilon_{r,5,3}(i)}{\epsilon_{r,5,3}(i) + IS_{5,3}(i)(2)} \right)^2 + \lambda_{5,3}(i) \cdot \left( \frac{\epsilon_{r,5,3}(i) + IS_{5,3}(i)(2)}{\tau_{5,3}(i) + \epsilon_{r,5,3}(i)} \right) \\ 1 + \left( \frac{\tau_{5,3}(i) + \epsilon_{r,5,3}(i)}{\epsilon_{r,5,3}(i) + IS_{5,3}(i)(3)} \right)^2 + \lambda_{5,3}(i) \cdot \left( \frac{\epsilon_{r,5,3}(i) + IS_{5,3}(i)(3)}{\tau_{5,3}(i) + \epsilon_{r,5,3}(i)} \right) \end{pmatrix}$$

$$\omega_{5,3}(i) = \frac{\omega_{5,3}(i)}{\omega_{5,3}(i)(1) + \omega_{5,3}(i)(2) + \omega_{5,3}(i)(3)}$$

Finalement la valeur reconstruite  $f_{weno53}$  est un mélange des poids de chaque polynôme et de la reconstruction de ces polynômes. Plus le polynôme semble correcte, plus grande sera sa contribution lors de la reconstruction. Cela permet de minimiser les oscillations apporter par une mauvaise représentation de la fonction.

$$f_{weno53} = \omega_{5,3}(i)(1) \left( P_{oly}(i, 1) \cdot \begin{pmatrix} \bar{f}_{i-2} \\ \bar{f}_{i-1} \\ \bar{f}_i \end{pmatrix} \right) + \omega_{5,3}(i)(2) \left( P_{oly}(i, 2) \cdot \begin{pmatrix} \bar{f}_{i-1} \\ \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \end{pmatrix} \right) + \omega_{5,3}(i)(3) \left( P_{oly}(i, 3) \cdot \begin{pmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \\ \bar{f}_{i+2} \end{pmatrix} \right)$$

Cette méthode d'ordre 5 en espace permet de reconstruire une fonction et de calculer sa valeur sur la face droite de la cellule. Il est possible de calculer la valeur sur la face gauche de la cellule en inversant l'ordre des valeurs et les pas d'espaces associés

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{i-2} \\ \bar{f}_{i-1} \\ \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i+1} \\ \bar{f}_{i+2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{f}_{i+2} \\ \bar{f}_{i+1} \\ \bar{f}_i \\ \bar{f}_{i-1} \\ \bar{f}_{i-2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \Delta_{i-2} \\ \Delta_{i-1} \\ \Delta_i \\ \Delta_{i+1} \\ \Delta_{i+2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta_{i+2} \\ \Delta_{i+1} \\ \Delta_i \\ \Delta_{i-1} \\ \Delta_{i-2} \end{pmatrix}.$$

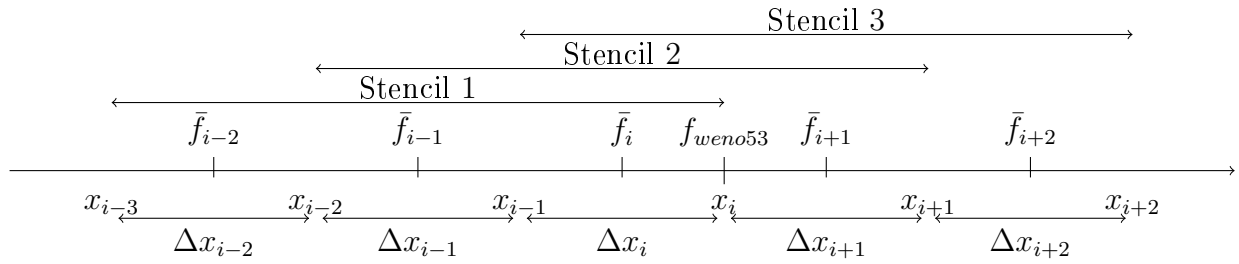


Figure 3.15. – Description du schéma WENO 5,3 en 1D.

### 3.6.2. Schémas temporels

Les cinq schémas temporels suivant sont des schémas de l'évaluation d'une intégrale suivant le temps. Ils seront démontrés pour une intégrale d'une fonction quelconque  $f$  entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f dt$$

#### 3.6.2.1. Euler explicite

La méthode Euler explicite est le fait de fixer la valeur à  $t^n$  sur l'ensemble de l'intégrale, cette valeur est constante suivant le domaine de temps intégrée, soit

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f dt \approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} f^n dt = \Delta t f^n$$

Ce schéma est d'ordre 1 en temps. Il est utilisé lors de l'évaluation de terme d'inertie, de la force de gravité et de la force de tension de surface.

### 3.6.2.2. Euler implicite

Dans le même état d'esprit que précédemment, la valeur est fixée. Cependant, cette fois-ci elle est fixée au pas de temps suivant  $t^{n+1}$ , soit

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f dt \approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} f^{n+1} dt = \Delta t f^{n+1}$$

Ce schéma est également d'ordre 1 en temps. Il est utilisé lors de l'évaluation de la force visqueuse. Cette méthode peut engendrer la nécessité d'inverser un système matriciel, ce qui est le cas dans ce manuscrit.

### 3.6.2.3. Crank-Nicolson

La méthode Crank-Nicolson utilise les avantages de chaque schéma d'Euler et permet l'augmentation de l'ordre de convergence de la méthode en un second ordre. Ce schéma est plus précis mais moins stable que les deux précédents. Il consiste en l'approximation de la fonction au milieu du temps intégré, soit en  $t^{n+\frac{1}{2}}$ . La fonction  $f^{n+\frac{1}{2}}$  peut être approximée à l'ordre deux par la moyenne de la fonction au temps  $t^n$  et au temps  $t^{n+1}$ . Le schéma est

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f dt \approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} f^{n+\frac{1}{2}} dt = \Delta t f^{n+\frac{1}{2}} \approx \Delta t \left( \frac{f^n + f^{n+1}}{2} \right)$$

Ce schéma sera utilisé uniquement pour la force de gravité dans la validation de la méthode proposée lorsque le terme de gravité est majoritairement prépondérant.

### 3.6.2.4. NSSP 3,2

La méthode Non Strong-Stability-Preserving Explicit-Runge-Kutta d'ordre 2 en 3 étapes (NSSP 3,2) [148] permet l'évaluation de l'intégrale avec un ordre 2 avec une stabilité accrue par rapport à la méthode Crank-Nicolson. Cependant, le temps de calcul de cette méthode n'étant pas négligeable, elle est utilisée uniquement sur les termes avec de fortes variations temporelles. La méthode est basée sur une méthode de Runge-Kutta. Le tableau de Butcher est décrit dans le tableau 3.1.

0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
1	0	1	0
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Table 3.1. – Tableau de Butcher pour la méthode NSSP 3,2.

Afin d'utiliser cette méthode, il est nécessaire de redéfinir la fonction quelconque en une fonction dépendant du champ de vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  et du temps, soit

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\bar{\mathbf{u}}, t) dt$$

La fonction suivante, temporaire, permet l'utilisation de la méthode Runge-Kutta pour résoudre l'intégrale temporelle :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = f(\bar{\mathbf{u}}, t) \tag{3.18}$$

En intégrant temporellement entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , on obtient :

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\bar{\mathbf{u}}, t) dt \quad (3.19)$$

Sachant que l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta sur l'équation 3.18 permet le calcul de  $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$ , l'injection de cette variable dans l'équation 3.19 justifie l'évaluation de l'intégrale par cette méthode.

L'algorithme suivant permet la résolution de l'intégrale sur un pas de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

$$\begin{aligned} f_{1,NSSP} &= f(\bar{\mathbf{u}}^n, t^n) \\ f_{2,NSSP} &= f\left(\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{\Delta t}{3} f_{1,NSSP}, t^n + \frac{\Delta t}{3}\right) \\ f_{3,NSSP} &= f\left(\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+1} + \Delta t f_{2,NSSP}, t^{n+1}\right) \\ \bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \bar{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t}{2} (f_{1,NSSP} + f_{3,NSSP}) \\ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\bar{\mathbf{u}}, t) dt &= \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^n = \frac{\Delta t}{2} (f_{1,NSSP} + f_{3,NSSP}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+\frac{1}{3}}$  le champ de vitesse extrapolé au temps  $t^{n+\frac{1}{3}}$  et  $\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+1}$  le champ de vitesse extrapolé au temps  $t^{n+1}$  grâce aux champs  $\bar{\mathbf{u}}^{n-1}$  et  $\bar{\mathbf{u}}^n$ . Les fonctions  $f_{1,NSSP}$ ,  $f_{2,NSSP}$  et  $f_{3,NSSP}$  sont les différentes étapes de Runge-Kutta. Cela permet d'évaluer l'intégrale grâce à l'équation 3.20.

Cette méthode est utilisée sur le terme d'inertie et permet une évaluation plus précise de l'intégrale.

### 3.6.2.5. NSSP 5, 3

La méthode Non Strong-Stability-Preserving Explicit-Runge-Kutta d'ordre 3 en 5 étapes (NSSP 5, 3) [148] permet l'évaluation de l'intégrale avec un ordre 3 avec une stabilité encore plus accrue par rapport à la méthode Crank-Nicolson. De la même manière que la méthode NSSP 3, 2, les différentes étapes sont définies par le tableau 3.2 de Butcher.

0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	0	0
$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{3}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$

Table 3.2. – Tableau de Butcher pour la méthode NSSP 5, 3.

L'algorithme issu de la méthode de Runge-Kutta est

$$\begin{aligned} f_{1,NSSP} &= f(\bar{\mathbf{u}}^n, t^n) \\ f_{2,NSSP} &= f\left(\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+\frac{1}{7}} + \frac{\Delta t}{7} f_{1,NSSP}, t^n + \frac{\Delta t}{7}\right) \end{aligned}$$

$$f_{3,NSSP} = f(\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+\frac{3}{16}} + \frac{3\Delta t}{16} f_{2,NSSP}, t^n + \frac{3\Delta t}{16})$$

$$f_{4,NSSP} = f(\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{\Delta t}{3} f_{3,NSSP}, t^n + \frac{\Delta t}{3})$$

$$f_{5,NSSP} = f(\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{2\Delta t}{3} f_{4,NSSP}, t^n + \frac{2\Delta t}{3})$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t}{4} (f_{1,NSSP} + 3f_{5,NSSP})$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\bar{\mathbf{u}}, t) dt = \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^n = \frac{\Delta t}{4} (f_{1,NSSP} + 3f_{5,NSSP}) \quad (3.21)$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}_{ext}^m$  le champ de vitesse extrapolé au temps  $t^m$  grâce aux champs  $\bar{\mathbf{u}}^{n-1}$  et  $\bar{\mathbf{u}}^n$ . Les fonctions  $f_{1,NSSP}$ ,  $f_{2,NSSP}$ ,  $f_{3,NSSP}$ ,  $f_{4,NSSP}$  et  $f_{5,NSSP}$  sont les différentes étapes de Runge-Kutta. Cela permet d'évaluer l'intégrale grâce à l'équation 3.21.

Cette méthode est utilisée sur le terme d'inertie et permet une évaluation très précise de l'intégrale.

## 3.7. Conditions limites

La résolution des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation d'une fermeture des équations. L'utilisation appropriée des conditions limites induit l'existence et l'unicité de la solution. Dans cette section, les conditions limites utilisées sont expliquées et discutées.

Afin de résoudre les équations, le domaine de résolution est agrandi de quelques mailles. Ces mailles, représentant les conditions limites s'appellent des Ghost Nodes. Elles vont prendre en compte le type de la condition limite et seront modifiées au cours du temps. La figure 3.16 est une schématisation des conditions limites.

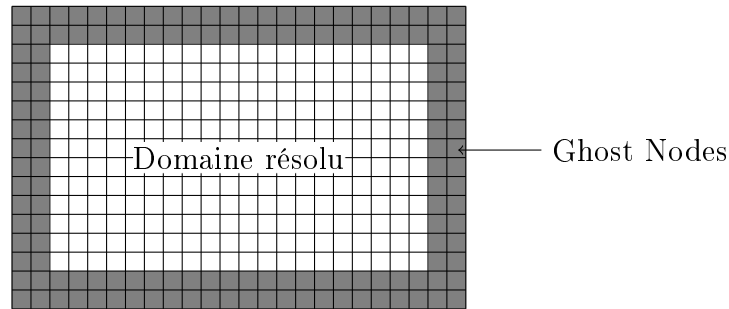


Figure 3.16. – Description des Ghost Nodes. Les cellules blanches correspondent au domaine résolu, les cellules grises au domaine non résolu (Ghost Nodes).

### 3.7.1. Glissement

La condition de glissement est une condition de non sortie du fluide avec un glissement du champ sans interaction avec la paroi. La condition de non sortie du fluide induit un flux nul à la paroi concernée. Le champ vectoriel dans la direction de la normale à la paroi



est fixe et nul :  $f \cdot \mathbf{n}_{\text{domaine}} = 0$ . Concernant les champs vectoriels tangents à la paroi et les champs scalaires, ils sont égaux de chaque côté de la paroi  $\nabla f \cdot \mathbf{t}_{\text{domaine}} = 0$ . Cette condition est schématisée dans la figure 3.17.

Elle est utilisée lors de la résolution des équations de continuité et de quantité de mouvement avec les volumes finis.

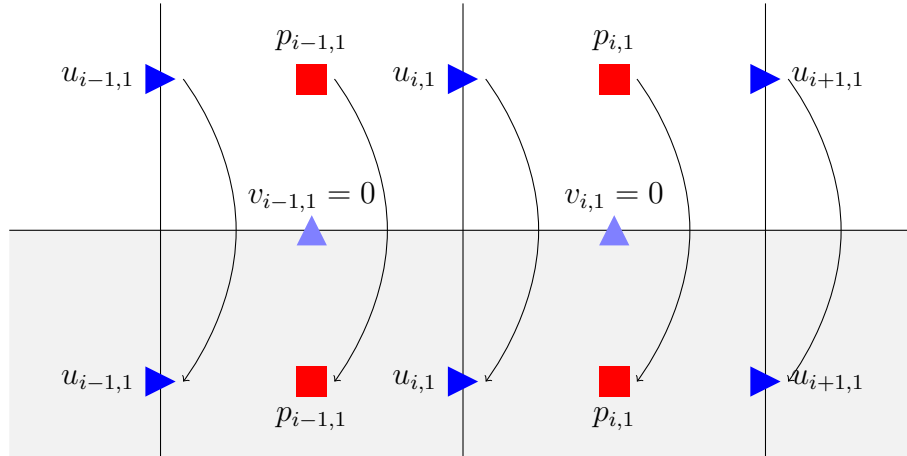


Figure 3.17. – Condition limite de glissement sur la paroi basse du domaine. La partie grise représente le zone de Ghost Nodes.

### 3.7.2. Non glissement

La condition de non glissement est une condition correspondante à un mur. Ce mur est considéré non poreux, il n'y a donc aucun transfert de la quantité à travers la paroi et son mouvement est considéré nul. La condition de non sortie du fluide induit un flux nul à la paroi concernée  $f \cdot \mathbf{n}_{\text{domaine}} = 0$ . La champ vectoriel de l'autre côté de la paroi est une extrapolation du second ordre, cela permet une simplification lors de la résolution des équations. Cette condition est schématisée dans la figure 3.18.

Elle est utilisée lors de la résolution de l'équation de la quantité de mouvement avec les volumes finis.

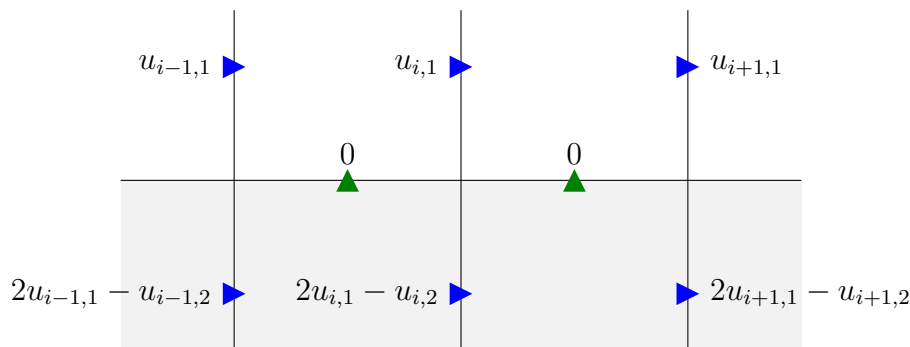


Figure 3.18. – Condition limite de non glissement sur la paroi basse du domaine. La partie grise représente le zone de Ghost Nodes.

### 3.7.3. Neumann homogène

La condition de neumann homogène est une condition correspondante à une sortie. Le flux à travers la paroi est considéré constant, cela se traduit grâce à un gradient nul suivant la normale à la paroi :  $\nabla f \cdot \mathbf{n}_{\text{domaine}} = 0$ . Cette condition est schématisée dans la figure 3.19.

Elle est utilisée lors de résolution des équations de la quantité de mouvement et de Poisson avec les volumes finis.

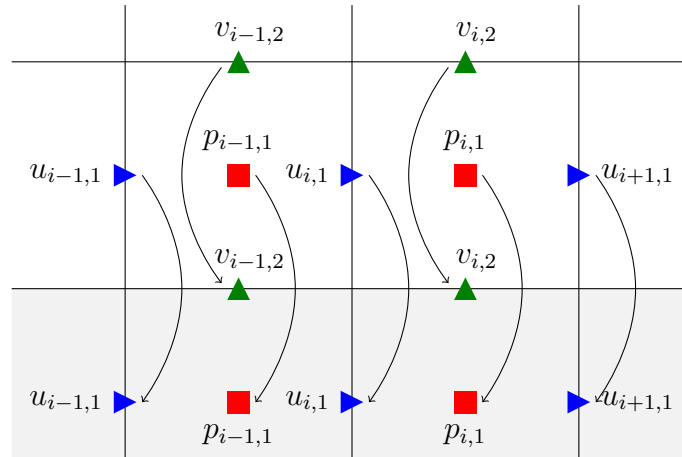


Figure 3.19. – Condition limite de neumann homogène sur la paroi basse du domaine. La partie grise représente le zone de Ghost Nodes.

### 3.7.4. Périodique

La condition périodique est un méthode permettant l'interface entre deux parois. Les parois sont définies comme étant reliées l'une à l'autre de telle sorte que le flux de chacune de ces parois soit identique. Numériquement, cela revient à échanger les informations de chaque côté des parois à chaque nouvelle résolution de l'équation. La figure 3.20 est une schématisation de la condition périodique.

Elle est utilisée dans l'ensemble de l'algorithme (conservation de la quantité de mouvement et continuité).

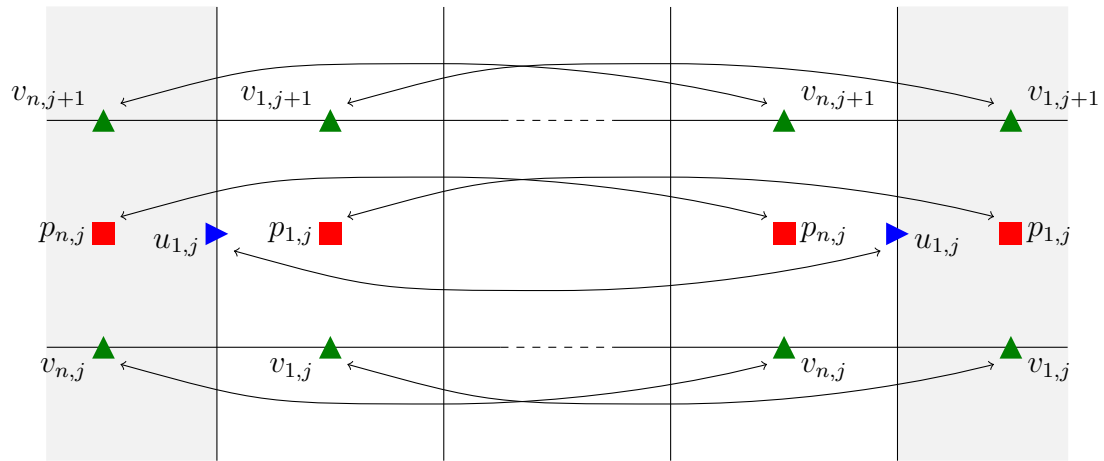


Figure 3.20. – Condition limite périodique suivant  $x$ . La partie grise représente le zone de Ghost Nodes. La partie en pointillée représente la partie centrale du domaine. Les faces gauche et droite sont reliées par les flèches.



## Chapitre 4

# Méthode de préservation de la quantité de mouvement

Avant de commencer cette thèse sur le déferlement de vague, l’auteur a effectué un stage de dernière année d’école d’ingénieurs sur la simulation de l’impact de goutte dans une eau profonde pour des nombres de Froude  $Fr$  et Weber  $We$  élevés. Lors de ce stage, tutoré par Mathieu Coquerelle, il a été observé, en plus d’une dynamique de surface proche de l’expérimental, l’apparition de vorticité de grande intensité sous la surface. Ce phénomène n’ayant pas été observé dans la littérature, les simulations produites pendant le stage semblaient mettre en avant soit l’observation d’un phénomène encore non identifié dans la littérature, soit l’apparition d’une limite du code à reproduire correctement le mouvement de l’eau proche de la surface pour ces impacts fortement inertiels. Par la suite, les premières simulations lancées pendant le début de la thèse ont démontré une incapacité du code à simuler le déferlement de vague plongeant pour des maillages très fins avec un lissage de l’interface sur seulement quelques mailles. Cette incapacité été visible par la génération d’instabilités numériques provenant d’une augmentation de la vorticité proche de l’interface. Cela nous a conduit, Mathieu Coquerelle et moi-même, à travailler sur la compréhension de cette limitation purement numérique et au développement d’une méthode, basée sur d’autres travaux de la littérature, permettant de repousser cette limitation à des maillages encore plus fins. Les résultats présentés dans ce chapitre proviennent d’un travail collaboratif avec Mathieu Coquerelle ayant été soumis à *Journal of Computational Physics*. L’article est actuellement en «minor revision».

La méthode s’appuyant sur des travaux précédents, une présentation de la position et de l’amélioration apportée par la méthode proposée par rapport aux autres méthodes est faite dans la section 4.1. Ensuite, dans la section 4.2, les origines des erreurs de transferts de quantité de mouvement entre les phases du point de vue discret sont détaillées et analysées. La méthode proposée, appelée HOMP pour High Order Momentum Preserving, est développée et discutée dans la section 4.3. Les résultats de la méthode proposée sont détaillés et étudiés dans la section 4.5 où sont présents des cas de vérification et de validation ainsi que l’application à des écoulements biphasiques plus complexes avec des forces de gravité et de tension superficielle. La méthode HOMP montre une réduction très satisfaisante des erreurs numériques générant le transfert de quantité de mouvement pour les trois méthodes de représentation d’interface, même lorsqu’elle est couplée à des schémas d’advection d’ordre élevé tel que le WENO d’ordre 5.

La thèse ayant pour ambition finale d’étudier précisement le déferlement de vague, la méthode proposée sera validée en comparant les résultats sur un cas expérimental de déferlement d’une vague sur une plage inclinée. La comparaison des deux méthodes (standard et HOMP) va permettre de mettre en lumière la capacité de cette nouvelle méthode à simuler correctement un déferlement de vague avec un maillage très raffini . Cette validation confirmera le choix de la méthode pour étudier le déferlement dans le chapitre suivant.

## 4.1.  tat de l’art

De nombreuses applications en mécanique des fluides impliquent l’interaction de deux phases incompressibles (ou presque incompressibles) avec un rapport de masse volumique élevé autour de  $10^3$  et un rapport de viscosité dynamique autour de  $10^2$ , comme l’air et l’eau du quotidien. Le déferlement des vagues d’eau, les impacts de gouttes, les trajectoires de bulles, ou encore la formation de couches minces sont des phénomènes courants qui sont largement étudiés avec les codes CFD. Que ce soit à l’échelle micrométrique ou océanique, l’inertie joue généralement un rôle dominant, en particulier pour les écoulements à des nombres de Froude  $Fr$ , Reynolds  $Re$  ou Weber  $We$   lev s. L’importance de la simulation

précise des interactions mécaniques entre les liquides et les gaz incite à utiliser des modèles bien adaptés et des méthodes numériques précises.

La transition physique entre deux phases non miscibles se fait à l'échelle du nanomètre, et se situe hors du champ d'application des équations de Navier-Stokes. Ainsi, pour la simulation numérique, l'hypothèse courante est de la considérer comme infiniment petite. Les équations Navier-Stokes peuvent être résolues séparément dans chaque phase avec des conditions aux limites appropriées. Proche de l'interface, aucun transfert de masse ne s'effectue entre les deux phases, la pression varie en fonction de la tension de surface locale tel que le saut de pression  $[p]$  est équivalent à  $\sigma\kappa$ , et finalement une condition de continuité de la contrainte visqueuse  $[\mu \frac{\partial u_n}{\partial n}] = 0$  est prise en compte.

Lors de la résolution des équations sur un maillage (cadre eulérien), l'interface est implicitement représentée par un champ de fraction volumique et les équations Navier-Stokes sont résolues dans l'ensemble du domaine. Dans ce cadre, il existe deux grandes familles de méthodes : la méthode Ghost Fluid (GFM) et la méthode One-Fluid (OFM), principalement issue de I. Kataoka [149]. La première est basée sur l'injection des conditions limites dans les schémas discrets (c'est-à-dire pour l'incompressibilité, la convection et les termes visqueux). Cette méthode nécessite la connaissance précise de l'emplacement de l'interface et des méthodes numériques appropriées, généralement limitées au second ordre. La dernière méthode repose sur une transition régularisée (c'est-à-dire lisse) de la densité et de la viscosité au niveau du maillage (par exemple, la densité passe de 1 à  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  dans environ 6 cellules autour de l'interface). Dans ce cas, les schémas numériques classiques pour calculer l'équation de la quantité de mouvement, et en particulier le terme de convection, ont été largement utilisés. Alors qu'un schéma du premier ordre est très diffusif, diminue rapidement l'énergie cinétique et est très stable, les schémas d'ordre supérieur sont beaucoup moins diffusifs, capturent mieux les petits mouvements de liquide mais peuvent induire des instabilités numériques. Cependant, à mesure que le maillage s'affine et que le gradient de densité s'approche de zéro, la dérivation de la quantité de mouvement à travers l'interface peut engendrer de graves erreurs numériques et donc rendre les simulations instables.

La méthode One-Fluid est basée sur une méthode de représentation d'interface qui assure le contrôle de l'utilisation d'une interface lisse. Plusieurs méthodes existent dans la littérature et sont disponibles dans les codes CFD. L'étude se focalise sur les principales méthodes présentées dans le chapitre précédent. La méthode Volume-Of-Fluid (VOF) a été introduite par C. W. Hirst *et al* [150], complétée par l'approche géométrique Piecewise Linear Interface Calculation (PLIC) de W. J. Rider *et al* [151]. L'un des inconvénients de cette méthode est qu'elle n'est précise qu'au premier ordre. Plus récemment, l'approche du Moment-Of-Fluid (MOF) a été introduite par V. Dyadechko *et al* [152] pour sa précision accrue (jusqu'au second ordre) et développée plus avant dans M. Jemison *et al* [153] et T. Milcent *et al* [154] pour les filaments des sous-cellules et l'optimisation analytique. Enfin, les méthodes Level-Set Method (LSM), originaires de S. Osher *et al* [141], sont largement utilisées pour leur propriété de distance à l'interface, ce qui les rend particulièrement adaptées au calcul de la tension de surface. La méthode LSM est toutefois connue pour sa perte de masse et sa déformation : plusieurs techniques sont employées pour contrer ces problèmes, notamment des algorithmes de réinitialisation [155, 156]. Une étude détaillée de la méthode Level-Set Method a été menée par F. Gibou *et al* [142].

Le couplage des équations de continuité et de quantité de mouvement avec la représentation de l'interface conduit à un dilemme où, lorsqu'il est résolu au niveau discret, de la quantité de mouvement peut être perdue et, pire encore, transférée d'une phase à l'autre. Par exemple, en raison d'erreurs numériques lorsque l'inertie de la phase avec la masse volumique la plus haute est transférée vers la phase avec celle la plus légère, des vitesses numériques élevées et non physiques apparaissent dans cette dernière. De manière inverse,

lorsque le fluide moins dense transfère son inertie vers la phase la plus dense, même si la vitesse peut augmenter de façon limitée, l'énergie totale augmente considérablement. Ces erreurs peuvent provenir d'approximations, des termes tronqués, du découplage, de la linéarisation ou encore de l'incohérence des schémas numériques. Bien que ces phénomènes n'aient pas été particulièrement détectés pendant des années, ces erreurs numériques ont été observées à mesure que le maillage s'affine, car la croissance de la puissance de calcul permet de simuler jusqu'à des milliards de cellules, apportant ainsi un nouveau défi à relever. En conséquence, la capture précise et stable de la dynamique des écoulements diphasiques à grande et petite échelle simultanément est devenue un véritable défi qui nécessite le développement de méthodes adéquates et robustes.

Récemment, de nombreux travaux ont été consacrés à ce problème. Dans un cadre de la méthode VOF, à la suite d'un travail précurseur de M. Rudman [157], puis de M. Bussman *et al* [158], D. Fuster *et al* [159] ont récemment proposé une méthode adaptée aux écoulements compressibles mais limitée au premier ordre. De leur côté, M. Owkes *et al* [160] ont développé un schéma semi-lagrangien couplé à la méthode VOF. Dans un cadre de MOF, M. Jemison *et al* [161] ont fourni le schéma numérique CISL (Cell Integrated Semi-Lagrangian) pour les écoulements compressibles. Les deux méthodes sont basées sur une reconstruction PLIC de l'interface. Dans le cadre de LSM, plusieurs travaux de M. Herrmann et S. Ghods [162, 163, 164] ont été menés afin de synchroniser les flux de la quantité de mouvement et de la masse permettant de diminuer les problèmes inhérents à l'approche LSM. Dans un cadre plus générique, J. Manik *et al* [165] ont abordé le problème des maillages non structurés, en se basant sur une approche itérative pour faire correspondre les flux. Les derniers travaux de N. Nangia *et al* [166], dans une approche similaire, tirent parti d'un calcul entièrement couplé avec une méthode LSM pour calculer des flux consistants. Tous ces articles mettent en évidence la nécessité d'une approche consistante de l'advection de la masse et de la quantité de mouvement lorsque le ratio de masse volumique est supérieur à 100.

La plupart des approches sont liées de manière critique à la méthode de transport et d'advection d'interface et peuvent être compliquées à implémenter et à étendre aux schémas d'ordre élevé et à la 3D. Au prix d'une conservation moins précise de quantité de mouvement, des approches plus génériques assurent la synchronisation et la cohérence de la masse et de la quantité de mouvement.

L'approche proposée suit ce principe basé sur une résolution consistante des équations de continuité et de quantité de mouvement dans un cadre eulérien avec une densité lissée. Elle est indépendante de la méthode de l'interface et est compatible avec les schémas d'ordre élevé classiques tels que WENO, ce qui permet de l'adapter facilement aux codes CFD existants en 2D et 3D. Cette stratégie assure la convergence vers la solution continue attendue d'un point de vue discret, d'où le principe dit de préservation de la quantité de mouvement. Il est démontré à travers divers cas de vérification et de validation que la méthode proposée réduit efficacement les transferts de quantité de mouvement dues à des erreurs numériques.

## 4.2. Origine du problème

L'utilisation des équations 4.22

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) & = -\nabla p + \sum \mathbf{f}_{orces} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) & = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

résolues généralement dans l'ensemble des codes de simulation s'est avérée générer



un important transfert de quantité de mouvement à travers l'interface en raison de l'incohérence entre la forme continue et la forme discrète. Lors de la mauvaise discrétisation et/ou intégration des dérivées partielles (spatiales et temporelles) des équations de Navier-Stokes, des flux de quantité de mouvement  $\rho\mathbf{u}$  apparaissent à l'interface entre les deux phases. Ces transferts peuvent être importants, en ce qui concerne l'interaction entre l'air et l'eau, ils ont un impact sur le champ de vitesse dans une phase qui est 1000 fois plus dense que l'autre. Par conséquent, la variation rapide de la densité au voisinage de l'interface doit être prise en compte de manière adéquate, tant pour la continuité que pour les équations de quantité de mouvement. Il est important de noter la différence entre l'équation 4.22, appelée standard par la suite, et les équations présentées dans le chapitre précédent, appelée HOMP par la suite. L'injection de l'équation de continuité 3.8 dans la méthode HOMP permet l'obtention de l'équation 4.22. Malgré la résolution d'un système identique algébriquement, l'utilisation des schémas numériques sur ces équations modifient les erreurs obtenues. Ces erreurs sont temporelles et spatiales.

### 4.2.1. Erreurs temporelles

D'un point de vue algébrique, le problème vient du fait que, pour faciliter la résolution des équations de continuité et de quantité de mouvement, celle-ci est découplée. C'est-à-dire que les équations ne sont pas résolues simultanément et, de ce fait, la condition de continuité est rompue. En conséquence, lorsqu'on intègre l'équation de la quantité de mouvement, il faut connaître à la fois le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et le champ de densité  $\rho$ . Par souci de simplicité, les forces externes sont enlevées de sorte que l'équation devienne :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p. \quad (4.23)$$

En intégrant temporellement l'équation 4.23 entre  $t^n = t$  et  $t^{n+1} = t + \delta t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} -\nabla p \cdot dt \\ (\rho \mathbf{u})^{n+1} - (\rho \mathbf{u})^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} -\nabla p \cdot dt \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $(\rho \mathbf{u})^n \approx \rho^n \mathbf{u}^n$  est définie comme étant la quantité de mouvement au temps  $t^n$  et  $(\rho \mathbf{u})^{n+1} \approx \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}$  la quantité de mouvement à calculer au temps  $t^{n+1}$ . La séparation de la variable d'intérêt  $\rho \mathbf{u}$  en deux variables est la cause majeure de l'erreur temporelle lors de la résolution des équations. La manière d'approcher les intégrales restantes peut être faite grâce aux schémas d'intégrations temporelles connues dans la littérature. Ainsi, seules les erreurs temporelles des schémas d'intégrations utilisés pour les termes d'inertie et de gradient de pression restent.

En effectuant une approche similaire sur l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

on obtient :

$$\rho^{n+1} - \rho^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \cdot dt = 0 \quad (4.25)$$

La difficulté vient du fait qu'il y ait deux inconnues,  $\rho^{n+1}$  et  $\mathbf{u}^{n+1}$ , et deux équations contenant des intégrales de termes variant dans le temps  $\rho(t)$  et  $\mathbf{u}(t)$ . En conséquence, pour trouver une solution, certaines hypothèses doivent être prises. Ce qui rend la méth-

ode présentée dans ce manuscrit limitée au premier ordre dans le temps car, pour résoudre l'équation 4.25, il faut connaître exactement le champ de vitesse  $\mathbf{u}(t)$  et pour l'équation 4.24, il faut connaître exactement le champ de densité  $\rho(t)$  (ainsi que  $\mathbf{u}(t)$ ). Comme cela ne peut pas être fait simultanément, l'hypothèse de continuité qui a conduit à l'équation simplifiée est rompue.

En pratique, on suppose généralement que le champ de densité  $\rho(t)$  ne varie pas beaucoup dans le temps et on peut prendre l'approximation du premier ordre  $\rho(t) \simeq \rho^n$  lors de la résolution de l'équation 4.24. D'où, le terme  $(\rho\mathbf{u})^{n+1}$  est approximé par  $\rho^n\mathbf{u}^{n+1}$  et le terme d'inertie par  $\rho^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot dt$ . Cette hypothèse permet de simplifier considérablement le problème en divisant la quantité de mouvement par  $\rho^n$ . Comme pour les méthodes courantes d'écoulement diphasique non miscible, le champ de densité est constant dans presque tout le domaine sauf au voisinage de l'interface. Ainsi, l'approximation a uniquement une influence lorsque  $\rho$  varie dans l'espace et le temps. Cependant, cette approximation de premier ordre limite les méthodes globales et introduit en particulier des erreurs proches de l'interface où se produisent de nombreuses interactions physiques importantes. En outre, le modèle à un fluide repose sur le fait que l'épaisseur de l'interface, c'est-à-dire le volume dans lequel  $\rho(\mathbf{x})$  varie entre les deux phases, est aussi faible que possible. Si, idéalement, cette épaisseur, notée  $\epsilon_{lissage}$ , devrait être nulle, pour des questions de continuité spatiale, elle a une longueur finie. Elle est communément définie comme

$$\epsilon_{lissage} = k_{lisse} \cdot \Delta x$$

où  $\Delta x$  est la taille de la maille locale et  $k_{lisse}$  une constante, généralement comprise entre 3 et 6. En conséquence, si l'interface avance dans le sens normal avec une condition *CFL*, c'est-à-dire que l'interface se déplace à la vitesse d'environ une cellule par pas de temps  $\Delta t$ , la variation de la densité au cours du temps dans cette cellule est non négligeable et l'approximation que  $\rho^{n+1} \simeq \rho^n$  entraîne de nombreuses erreurs. Et ce problème est particulièrement important car le rapport entre la masse volumique des deux fluides est élevée, comme par exemple pour l'air et l'eau pour lesquels il se situe autour de  $10^3$ . Si l'on parvenait à obtenir une bonne correspondance entre  $\rho^*$  (le champ de densité prédit), et  $\rho^{n+1}$ , l'erreur d'intégration serait beaucoup plus faible (Fig. 4.1). C'est le cas avec les techniques de conservation de quantité de mouvement basées sur l'interface comme l'ont fait M. Raessi *et al* [164], M. Jemison *et al* [161] et D. Fuster *et al* [159] qui sont cependant généralement limitées au premier ordre.

## 4.2.2. Erreurs spatiales

Une deuxième source d'erreur est l'erreur spatiale de l'approche standard provenant de la division du terme inertiel incompressible  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\rho\mathbf{u}))$  (première forme - HOMP) en deux parties :  $\rho\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}))\mathbf{u}$  (deuxième forme, généralement utilisée dans la pratique, où il est utilisé le fait que le symbole  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ). Dans cette dernière, le terme de gauche est la densité multipliée par le terme de convection et celui de droite est le terme d'advection de la densité (le même que dans l'équation de continuité) multiplié par la vitesse. Bien que cette décomposition tienne sur la partie algébrique, elle souffre d'approximations importantes lors de la résolution au niveau discret. Par souci de simplicité, le raisonnement est basé sur une grille colocalisée en  $1D$ , l'utilisation de grilles décalées et de dimension supérieure conduirait à des conclusions similaires.

Dans un volume de contrôle  $\Omega_{vc}$ , les flux peuvent être calculés avec des schémas numériques traditionnels. En appliquant la méthode des volumes finis sur la quantité de

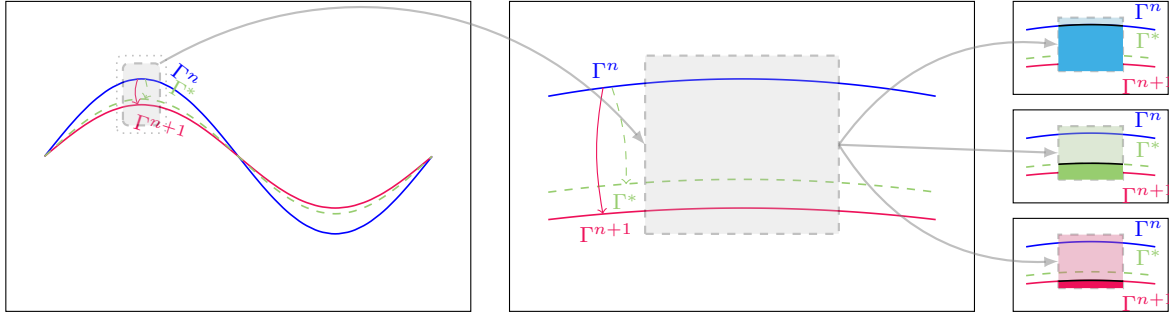


Figure 4.1. – Illustration de l'impact de l'approximation du premier ordre sur le champ de densité  $\rho$  suivant la position de l'interface  $\Gamma$  dans le temps. Les exposants font référence aux positions temporelles de  $\Gamma$ , où  $\Gamma^n$  (resp.  $\Gamma^{n+1}$ ) est l'interface au temps  $t^n$  (resp.  $t^{n+1}$ ) ;  $\Gamma^*$  est une bonne prédiction (approximation) de la position de l'interface au temps  $t^{n+1}$ . Le volume de contrôle est indiqué en gris. La première figure présente la forme globale de l'interface du fluide, la seconde au centre est zoomée près du volume de contrôle en gris (une cellule de maillage par exemple). Les trois sous-figures de droite représentent la densité pour chaque approximation : la couleur opaque représente le fluide le plus dense, la couleur plus claire le moins dense. La différence entre les champs de densité au temps  $t^{n+1}$  et la prédiction par  $\Gamma^*$  est beaucoup plus faible qu'avec le champ de densité au temps  $t^n$ , ce qui illustre la nécessité d'une bonne prédiction.

mouvement suivant la direction  $x$  pour la première forme :

$$\frac{1}{\|\Omega_{vc}\|_2} \int_{\Omega_{vc}} \frac{\partial}{\partial x} (u\rho u) \cdot dx = \frac{(u\rho u)_{i+\frac{1}{2}} - (u\rho u)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

où  $(\cdot)_{i-\frac{1}{2}}$  représente la valeur du champ à la position  $i - \frac{1}{2}$ , correspondant à la face gauche du volume de contrôle. De manière similaire sur la seconde forme :

$$\frac{1}{\|\Omega_{vc}\|_2} \int_{\Omega_{vc}} \rho u \frac{\partial}{\partial x} (u) + u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \cdot dx = (\rho u)_i \frac{(u)_{i+\frac{1}{2}} - (u)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + u_i \frac{(\rho u)_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

Même si algébriquement, ces deux formes sont identiques de manière continue, les deux formes ne sont pas égales numériquement. En supposant une vitesse positive et un schéma de premier ordre Upwind pour plus de simplicité, le flux au niveau de la face  $i + \frac{1}{2}$  (resp.  $i - \frac{1}{2}$ ) est approximé par  $(\cdot)_{i+\frac{1}{2}} \simeq (\cdot)_i$  (resp.  $(\cdot)_{i-\frac{1}{2}} \simeq (\cdot)_{i-1}$ ). En conséquence, les deux formes diffèrent lors du développement des flux :

$$\frac{u_i \rho_i u_i - u_{i-1} \rho_{i-1} u_{i-1}}{\Delta x} \neq \rho_i u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_i \frac{\rho_i u_i - \rho_{i-1} u_{i-1}}{\Delta x}.$$

Les termes de troncatures issus des approximations ne sont pas les mêmes et l'étude de leur impact sur la solution n'est pas forcément triviale. Lorsque l'on connaît l'origine du flux, il est possible de réarranger les équations pour réduire l'inconsistance des schémas. De plus, le problème est plus important lorsque des schémas non linéaires (tel que WENO) sont utilisés car l'interpolation de la quantité de mouvement  $(\rho \mathbf{u})$  ne serait jamais égale au produit des interpolations de la densité  $\rho$  et le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ .

### 4.2.3. Critères nécessaires

En conclusion, les simplifications habituellement utilisées dans l’approche du découplage de la résolution des équations induisent des termes d’erreur supplémentaires qui peuvent être évités par l’utilisation de la forme conservatrice initiale des équations couplées. En effet, pour compléter l’article le plus récent sur ce problème de N. Nangia *et al* [166], deux critères sont nécessaires pour assurer le calcul cohérent et homogène de la masse et de la quantité de mouvement :

1. l’utilisation d’une intégration temporelle synchronisée,
2. l’utilisation de schémas spatiaux consistants

à la fois pour la partie advective de l’équation de la quantité de mouvement et l’équation de continuité.

## 4.3. Méthode High Order Momentum Preserving (HOMP)

Dans cette section, la méthode HOMP proposée afin de préserver la quantité de mouvement, c’est-à-dire de réduire les transferts de quantité de mouvement discrets, est décrite. L’approche proposée est un prolongement du travail initial de M. Bussman *et al* [158] et se réfère à l’article récent de N. Nangia *et al* [166]. Cependant, la méthode est développée pour être indépendante de la représentation d’interface, adaptable à de nombreux schémas d’advection d’ordre élevé et elle peut être facilement mise en œuvre en  $2D$  et  $3D$  comme une modification des codes CFD conventionnels en utilisant l’approche des fluides uniques. Les différentes étapes de l’algorithme sont développées par la suite. Les différences entre la méthode standard et la méthode proposée sont indiquées dans le tableau 4.1.

### 4.3.1. Bénéfices

La méthode proposée dans un cadre discret pour les flux incompressibles à deux phases, appelé High Order Momentum Preserving (HOMP) :

1. tire profit des schémas d’advection d’ordre élevé existants (à la fois dans l’espace et dans le temps) ;
2. est indépendant de la représentation de l’interface ;
3. s’adapte facilement à un code Navier-Stokes  $2D$  et  $3D$  existant grâce à l’utilisation de schémas existants ;
4. réduit considérablement le transfert de quantité de mouvement à travers l’interface.

### 4.3.2. Algorithme

Dans cette section est décrit l’algorithme de la méthode proposée dans le cadre des volumes finis. Les champs calculés sont, de ce fait, moyennés sur le volume de contrôle  $\Omega_{vc}$ .

**Étape 1: Advection de la phase (transport de l’interface)** Tout d’abord, l’équation d’advection de phase pour  $\bar{\chi}^{n+1}$  est résolue grâce à la méthode d’interface choisie (VOF, LSM, MOF) et les propriétés physiques finales (lissées)  $\bar{\rho}^{n+1}$  et  $\bar{\mu}^{n+1}$  du fluide au pas de temps  $t^{n+1}$  sont calculées. À cette fin, comme il est nécessaire pour l’intégration temporelle d’ordre élevé des représentations d’interface VOF et MOF, la vitesse est extrapolée au temps  $t^{n+1}$  avec  $\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+1} = 2\bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^{n-1}$ , où  $\bar{\mathbf{u}}_{ext}^{n+1}$  correspond à la vitesse extrapolée. Plusieurs

études faites pendant la thèse ont démontré une meilleure convergence des résultats lors de l'utilisation d'une vitesse extrapolée au temps  $t^{n+1}$ . Ces études ne seront pas présentées dans ce manuscrit. Pour la méthode LSM, l'intégration temporelle du terme d'inertie doit être identique à celle de l'étape 2 et 3.

**Étape 2: Équation de continuité (prédiction)** Les équations de Navier-Stokes sont résolues de manière découplées. Le premier terme résolu est l'équation de continuité. L'objectif de cette première étape est de calculer une prédiction du champ  $\bar{\chi}^* \simeq \bar{\chi}(t + \Delta t)$ , où  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . Pour les systèmes incompressibles à deux phases, les propriétés physiques  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\mu}$  sont définies comme une interpolation linéaire de  $\rho_1, \rho_2, \mu_1$  et  $\mu_2$  avec  $\bar{\chi}$ . La résolution de l'équation suivante avec la méthode des volumes finis permet de déduire les champs de densité et viscosité dynamique au temps suivant.

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\chi) = 0$$

avec  $\nabla \cdot (\mathbf{u}\chi) = \mathbf{u} \cdot \nabla \chi + \chi \nabla \cdot \mathbf{u}$  et en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Lorsque l'on utilise la méthode des volumes finis sur  $\Omega_{vc}$  et entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , l'équation d'avection conservative devient :

$$\bar{\chi}^* - \bar{\chi}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\partial\Omega_{vc}} \bar{\mathbf{u}}\chi . d\partial\Omega \right) dt = 0. \quad (4.26)$$

Cette équation peut être résolue à l'aide de schémas temporels et spatiaux d'ordre élevé, comme cela se fait traditionnellement, par exemple, pour l'équation d'énergie.

$\rho^*$  et  $\mu^*$  sont les champs de densité et de viscosité prédits au pas de temps  $t^{n+1}$ , mais ils ne remplacent pas les champs finaux (notés  $\rho^{n+1}$  et  $\mu^{n+1}$ ) qui seront calculés par la méthode de transport d'interface choisie à l'étape 1, qu'il s'agisse de VOF, MOF, LSM, ou d'autres méthodes non présentées dans ce manuscrit. Dans le cas d'une méthode de grille décalée, les champs  $\rho^*$  et  $\mu^*$  basés sur les cellules doivent être interpolés/reconstruits sur les faces, comme cela est généralement fait avant de résoudre l'équation de la quantité de mouvement.

Par exemple, l'équation 4.26 peut être résolue grâce à un schéma explicite d'ordre 1, tel que :

$$\bar{\chi}^* = \bar{\chi}^n - \Delta t \int_{\partial\Omega_{vc}} \bar{\mathbf{u}}^n \chi^n . d\partial\Omega$$

Des schémas d'ordre supérieurs seront bien sûr utilisés, comme le montrent les tests de la méthode dans la section 4.5.

**Étape 3: Équation de la quantité de mouvement (prédiction)** La quantité de mouvement prédite  $(\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}})^*$  est obtenue de manière découplée [146], après intégration temporelle de l'équation de Navier-Stokes, en résolvant :

$$(\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}})^* - (\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}})^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\partial\Omega_{vc}} \bar{\mathbf{u}} \otimes (\rho\mathbf{u}) . d\partial\Omega \right) dt = -\Delta t \nabla \bar{p}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\Omega_{vc}} \sum \mathbf{f}_{orces} d\Omega \right) dt$$

où le terme d'incrément de pression a été enlevé et sera réintroduit à l'étape 4. En prenant la définition de  $(\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}})^n \equiv \bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^n$  (qui est connu à ce stade) et  $(\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}})^* \equiv \bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^*$  où  $\rho^*$  a été calculé à l'étape 2, on obtient finalement l'équation :

$$\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\partial\Omega_{vc}} \bar{\mathbf{u}} \otimes (\rho \mathbf{u}) \cdot d\partial\Omega \right) dt = -\Delta t \nabla \bar{p}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\Omega_{vc}} \sum \mathbf{f}_{forces} d\Omega \right) dt \quad (4.27)$$

pouvant être résolue avec diverses schémas numériques temporels et spatiaux.

Le point essentiel de la méthode est que le terme d'inertie doit être intégré exactement de la même manière numérique que pour l'équation de continuité.

Pour illustrer la suite de la discussion dans le manuscrit concernant le terme inertiel, la partie de l'équation d'advection 4.27 sera notée telle que :

$$\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^* = \bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^n - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\partial\Omega_{vc}} \bar{\mathbf{u}} \otimes (\rho \mathbf{u}) \cdot d\partial\Omega \right) dt - \Delta t \nabla \bar{p}^n \quad (4.28)$$

**Étape 4: Équation de Poisson (correction)** Le terme d'incrément de pression qui a été enlevé dans l'étape précédente est utilisé pour forcer l'incompressibilité. Ainsi, on peut écrire :

$$(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})^{n+1} - (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})^* = -\Delta t \nabla \bar{\Psi} dt$$

Maintenant, le symbole  $(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})^{n+1}$  qui pourrait permettre la résolution de cette équation n'est pas connu. Cependant, en supposant que les discrétisation ( $\Delta x$  et  $\Delta t$ ) soient proches de zéro, il en découle

$$\rho^* \rightarrow \rho^{n+1}$$

Donc, en prenant en compte l'approximation :

$$(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})^{n+1} \equiv \bar{\rho}^{n+1} \bar{\mathbf{u}}^{n+1} \simeq \bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^{n+1}$$

l'équation précédente devient :

$$\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^* = -\Delta t \nabla \bar{\Psi}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^* = -\frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi}$$

Par incompressibilité, la propriété  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = 0$  est admise, ce qui donne l'équation de Poisson bien connue :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi} \right) \quad (4.29)$$

La solution  $\bar{p}^{n+1}$  de cette équation, calculée grâce à

$$\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n + \bar{\Psi}$$

est utilisée dans l'étape suivante pour assurer l'incompressibilité au temps  $t^{n+1}$ . Pour les étapes 3 et 4 il est possible d'utiliser une autre méthode pour intégrer le gradient de pression en temps. Cependant, dans ce manuscrit uniquement la méthode Goda est utilisée.

Dans cette étape, des erreurs numériques sont faites lorsque la densité  $\bar{\rho}^{n+1}$  est assimilée à la densité prédite  $\bar{\rho}^*$ . Même s'il est possible d'utiliser  $\bar{\rho}^{n+1}$  calculé à l'étape 1, les simulations de vérification et validation lancées avec cette configuration ont toute divergé. L'utilisation de cette approximation permet, grâce à l'injection d'erreur, de stabiliser fortement la représentation de la quantité de mouvement proche de l'interface.

Méthode proposée (HOMP)	Méthode Standard
Étape 1 : Advection de la phase $\bar{\chi}^{n+1} \Rightarrow \bar{\rho}^{n+1}, \bar{\mu}^{n+1}$	Étape 1 : Advection de la phase $\bar{\chi}^{n+1} \Rightarrow \bar{\rho}^{n+1}, \bar{\mu}^{n+1}$
Étape 2: Deuxième advection de la phase $\bar{\chi}^* \Rightarrow \bar{\rho}^*, \bar{\mu}^*$	- -
Étape 3: Équation de la quantité de mouvement $\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^*$	Étape 2: Équation de la quantité de mouvement $\bar{\rho}^n \bar{\mathbf{u}}^*$
Étape 4: Équation de Poisson $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi} \right)$	Étape 3: Équation de Poisson $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^n} \nabla \bar{\Psi} \right)$
Étape 5: Correction de la vitesse $\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^* - \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi}$	Étape 4: Correction de la vitesse $\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^* - \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^n} \nabla \bar{\Psi}$

Table 4.1. – Comparaison des algorithmes pour HOMP (gauche) et pour la méthode standard (droite).

**Étape 5: Correction de la vitesse** L'étape de correction est la dernière étape permettant le forçage de l'incompressibilité du champ de vitesse  $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$ . L'incrément de pression  $\bar{\Psi}$  calculé à l'étape précédente est utilisé afin de déterminer le nouveau champ de vitesse :

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^* - \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^*} \nabla \bar{\Psi} \quad (4.30)$$

### 4.3.3. Comparaison avec l'algorithme standard

Le tableau 4.1 présente les différences entre la méthode initiale et la méthode HOMP proposée. La première étape est ajoutée pour HOMP et peut être réduite à la résolution d'une équation d'advection de base. Après cela, il n'y a que très peu de modifications à l'intérieur des autres étapes : essentiellement, le remplacement de  $\bar{\rho}^n$  par la  $\bar{\rho}^*$  prédite. L'équation résolue dans l'étape 3 devient

$$\bar{\rho}^n \left( \bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\mathbf{u}}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\partial\Omega_{vc}} \bar{\mathbf{u}} \otimes (\mathbf{u}) . d\partial\Omega \right) dt \right) = -\Delta t \nabla \bar{p}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\Omega_{vc}} \sum \mathbf{f}_{orces} d\Omega \right) dt$$

Cette modification affecte également les étapes 4

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^n} \nabla \bar{\Psi} \right)$$

et 5

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^* - \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^n} \nabla \bar{\Psi}$$

Il est important de noter que la modification entre les équations de la méthode proposée et la méthode standard est minimale. Ainsi, l'algorithme permet de réduire considérablement le transfert de quantité de mouvement discret tout en ne nécessitant que quelques modifications simples dans le code original, indépendamment de la méthode de représentation de l'interface, et pour un faible coût de calcul.

### 4.3.4. Remarques importantes

**Remarque 1 :** Même si la méthode proposée entraîne une réduction du transfert de la quantité de mouvement entre les deux phases, la dernière étape de l’algorithme remplace l’idéal  $\bar{\rho}^*$  par  $\bar{\rho}^{n+1}$  qui est un résultat de l’advection de phase. Cette partie est généralement réalisée avec LSM, VOF ou toute autre méthode traditionnelle qui permet de conserver une transition suffisamment rapide et contrôlée entre les deux phases. En pratique,  $\bar{\rho}^{n+1}$  est la solution de la translation de la position de l’interface, transférée dans une fraction de volume eulérienne (qui est inhérente aux méthodes VOF et MOF ou obtenue par un algorithme de cellule coupée ou, plus simplement, une fonction de Heaviside pour LSM). En fin de compte, ce n’est pas la quantité de mouvement  $\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^{n+1}$  qui est la solution au pas de temps suivant mais plutôt  $\bar{\rho}^{n+1} \bar{\mathbf{u}}^{n+1}$ . Un transfert à l’interface, proportionnelle à  $\Delta(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) \simeq \bar{\mathbf{u}}^{n+1} \Delta \bar{\rho} = \bar{\mathbf{u}}^{n+1} (\bar{\rho}^{n+1} - \bar{\rho}^*)$ , sera néanmoins introduit par la méthode, comme c’est le cas dans l’approche standard lorsqu’aucun algorithme spécifique de conservation de la quantité de mouvement n’est utilisé. Toutefois, celle-ci est beaucoup moins importante que celle qui est obtenue sans la méthode proposée, qui supprime l’erreur inhérente à l’inertie. Les articles présents dans la littérature, S. Ghods *et al* [163] et D. Fuster *et al* [159] pallient ce problème en concevant une méthode adaptée à la représentation de l’interface. Cependant, ces méthodes sont limitées à une précision du premier ou du second ordre. D’autre part, la méthode est conçue pour être indépendante de cette représentation d’interface tout en permettant d’utiliser des schémas d’advection d’ordre élevé comme il sera montré dans la section des résultats 4.5.

**Remarque 2 :** L’équation de continuité peut être utilisée efficacement dans la mesure où, loin de l’interface, le champ de densité  $\bar{\rho}$  (équivalent de la fonction caractéristique  $\bar{\chi}$ ) est constant (en raison de l’hypothèse d’incompressibilité). Par conséquent, le terme d’advection  $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\rho})$  est numériquement non nul uniquement proche de l’interface, où le stencil du schéma d’advection coupe les cellules portant une variation de  $\bar{\rho}$ . Pour les schémas d’ordre élevés, le stencil est plus grand et nécessite donc plus d’efforts de calcul. Néanmoins, le nombre relatif de cellules proches de l’interface permettant le calcul du terme  $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\rho})$  par rapport au total des cellules dans le volume où  $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes (\bar{\rho} \mathbf{u}))$  doit être calculé diminue lorsque le maillage est raffiné. Ainsi, le coût supplémentaire de la méthode HOMP est inférieur d’une dimension au coût du terme inertiel.

**Remarque 3 :** La plupart des codes modernes de volumes finis sont basés sur des grilles décalées où la densité est définie au centre des cellules tandis que les composantes de vitesse sont définies sur les faces associées. Pour des raisons d’efficacité de calcul, sauf indication contraire, l’équation de continuité est résolue sur les cellules et la quantité de mouvement sur les faces. Cela nécessite l’interpolation du champ de densité  $\bar{\rho}^*$  des cellules sur les volumes de contrôle des faces après la prédiction (étape 1 de l’algorithme). Même si cette approche introduit des erreurs numériques supplémentaires, cette approximation semble ne poser aucun problème lors du développement de la méthode et de la simulation de fluides avec un rapport de densité allant jusqu’à  $10^3$ . Une interpolation centrée du second ordre s’est avérée suffisante. Afin de comparer les méthodes, l’implémentation de l’advection du champ de densité basé sur les faces a été effectuée afin de lier plus étroitement la solution à l’équation du moment. Cette stratégie de discrétisation présente le principal inconvénient d’être plus coûteuse en temps de calcul, car elle nécessite la solution de deux autres équations d’advection en  $3D$  (1 pour chaque composante). Néanmoins, l’augmentation du coût peut être contrôlée suite à la remarque 2.



**Remarque 4 :** Il est nécessaire d'utiliser conjointement les mêmes schémas temporels et spatiaux pour intégrer la continuité (étape 1) et le terme inertiel (étape 2) afin d'assurer la cohérence. Une alternative à la méthode proposée pourrait consister à utiliser la solution  $\bar{\rho}^{n+1}$  obtenue après l'équation de transport d'interface comme la  $\bar{\rho}^*$  prédite. Toutefois, cette approche romperait le principe du couplage des méthodes numériques pour l'équation de continuité et le terme de convection. Il a été constaté qu'elle donne des résultats de mauvaise qualité et instables, en particulier lorsqu'un transport d'interface qui n'est pas fortement conservatif pour la masse est utilisé.

**Remarque 5 :** Le lecteur peut noter que, dans le découpage effectué pour les équations Navier-Stokes et l'étape d'advection de l'interface, il a été choisi de commencer par l'advection de l'interface (étape 1 des algorithmes) plutôt que par la fin. Bien que l'étude de cette question dépasse le cadre de la thèse, l'expérience a montré que les simulations étaient beaucoup plus stables pour la seconde méthode.

## 4.4. Méthodes numériques

Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur une grille décalée en utilisant la méthode de correction par fractionnement du temps [146] pour tenir compte du couplage vitesse-pression. L'approche temporelle globale est donc du premier ordre. Cependant, comme l'inertie joue un rôle clé dans la méthode de préservation de la quantité de mouvement, les schémas d'ordres élevés sont importants pour résoudre l'équation d'advection, comme détaillé ci-dessous. Une validation avec différents schémas numériques est effectuée dans la section 4.5.

Les systèmes linéaires de l'équation de la quantité de mouvement et de la pression sont résolus par la méthode du résidu minimal généralisé (Generalized Minimal RESidual - GMRES), initialement préconditionnée par une méthode de Jacobi à gauche. La bibliothèque utilisée est HYPRE qui fournit des résultats précis avec une très bonne efficacité et une bonne extensibilité lors de l'utilisation du calcul parallèle multiprocesseur.

L'algorithme proposé est indépendant de la représentation de l'interface, c'est pourquoi les tests de vérification et de validation sont effectués à l'aide de trois méthodes différentes : VOF, MOF et LSM. Ces trois méthodes et les clés de leur mise en œuvre sont décrites ci-dessous.

Dans cette partie, les différentes méthodes et schémas numériques utilisés par la suite pour vérifier et valider la méthode proposée sont présentés.

### 4.4.1. Équations d'advection

Tout type de schéma peut être utilisé pour intégrer les deux équations d'advection 4.26 et 4.28, qu'il soit implicite ou explicite. En pratique, comme le transfert de moment discret veut être minimisé, des schémas temporels et spatiaux d'ordre élevé telle qu'une méthode Runge-Kutta explicite d'ordre 2 (NSSP 3,2) et un schéma WENO d'ordre 5 seront utilisés. Une description détaillée de ces schémas est présentée dans l'article de R. Wang *et al* [148]. La méthode est également testée avec un schéma d'intégration temporelle d'ordre 3 (NSSP 5,3) mais cela n'a pas montré une différence remarquable dans la précision des résultats tout en nécessitant plus de temps de calcul. Néanmoins, il n'y a pas de limite concernant l'ordre du schéma d'intégration temporelle et spatial si ceux-ci restent cohérents pour les équations de masse et de quantité de mouvement.

## 4.4.2. Représentation d'interface

**Volume-Of-Fluid :** La méthode VOF, est une représentation à deux fluides directement basée sur la fonction de fraction de volume  $\bar{\chi}$ . Le schéma de calcul géométrique de l'interface linéaire (PLIC) [151] couplé à un schéma d'advection du premier ordre dans le temps est utilisé.

**Moment-Of-Fluid :** La méthode MOF est une méthode VOF étendue qui incorpore le centroïde du matériau en plus de la fraction de volume du matériau pour la reconstruction de l'interface, provenant de V. Dyadechko *et al* [152]. Afin de réduire le coût de calcul de cette méthode, l'algorithme utilisé est celui de la reconstruction analytique proposée par T. Milcent *et al* [154].

**Level-Set Method :** La méthode LSM, introduite par S. Osher *et al* en 1988 [141], est une représentation à deux phases basée sur une fonction signée  $\phi$ , généralement une fonction de distance. La fonction est transportée par le fluide à travers une équation d'advection. Elle nécessite l'application fréquente d'une procédure de réinitialisation. La fonction  $\bar{\chi}$  est ensuite calculée par une fonction de Heaviside (décrite ci-dessous). Par conséquent, la méthode LSM semble être l'approche la plus proche de l'équation de continuité car elle est intrinsèquement basée sur l'advection d'un champ scalaire lié au champ de densité par interpolation linéaire. L'équation d'advection est résolue en utilisant un schéma WENO 5,3 et une méthode d'intégration temporelle Runge-Kutta N SSP 3,2 d'ordre 2. La ré-initialisation fréquente est effectuée en résolvant l'équation Eikonal classique de G. Russo *et al* [155] dans une bande autour de l'interface.

## 4.4.3. Terme de gravité

L'utilisation d'un schéma d'ordre 2 en temps Crank-Nicolson permet une meilleure représentation de l'interaction de la force de gravité avec le système. L'équation est définie par :

$$f = \frac{\bar{\rho}^n + \bar{\rho}^*}{2} g \quad (4.31)$$

avec  $g$  le vecteur gravité. Ce schéma est particulièrement important pour le cas test de la vague stationnaire. Il a l'avantage d'être plus stable que le schéma explicite ( $\rho^n g$ ) et moins diffusif que le schéma implicite ( $\rho^* g$ ).

## 4.4.4. Terme de tension de surface

Le terme de tension de surface est calculé dans l'équation de la quantité de mouvement grâce au modèle Continuum Surface Force (CSF) de J. U. Brackbill *et al* [133] :

$$f = \sigma \kappa \nabla \bar{\chi} \quad (4.32)$$

avec  $\sigma$  le coefficient de tension superficielle et  $\kappa$  la courbure à l'interface calculée grâce aux fonctions hauteurs pour VOF et MOF et grâce aux CP pour LSM (*cf.* chapitre 3).

## 4.5. Vérifications et validations de la méthode

Afin de démontrer l'efficacité de la méthode HOMP, une présentation des résultats obtenus sur différents cas tests est effectuée, ces résultats vont des applications numériques (cas de vérifications) aux applications physiques (cas de validations). Dans la section 4.5.2,

la convergence de la méthode et sa capacité à préserver la quantité de mouvement sur l'advection d'une goutte de grande densité sont démontrées. Les cas d'ondes stationnaires ne sont pas présents dans la littérature, cependant, ils semblent être représentatifs des problèmes de transfert de quantité de mouvement car ils se concentrent sur la dynamique d'une longueur d'onde. Même si les interactions non linéaires entre les phases gazeuses et liquides sont très importantes dans les applications quotidiennes, l'étude de longueurs d'onde séparées peut, sur une base simplifiée similaire à la théorie linéaire, aider à mettre en évidence les erreurs numériques et leurs implications dans la dynamique du système. En conséquence, une étude détaillée est effectuée sur les cas tests associés dans les sections 4.5.3 et 4.5.4 dans lesquelles la méthode HOMP permet de réduire considérablement le transfert de quantité de mouvement sur les ondes gravitaires et capillaires stationnaires, en 2D et 3D. Enfin, dans les sections 4.5.5 et 4.5.6, la méthode est confrontée à la simulation de cas dynamiques plus complexes : l'impact d'une goutte dans une eau profonde et le déferlement plongeant d'une onde sur une plage.

## 4.5.1. Calcul des quantités de post-traitement

### 4.5.1.1. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est mesurée dans l'ensemble du domaine et dans chaque phase par le calcul des intégrales suivantes

$$\mathbf{M}_1 = \int_{\Omega} (1 - \chi) \rho_1 \mathbf{u} d\Omega$$

et

$$\mathbf{M}_2 = \int_{\Omega} \chi \rho_2 \mathbf{u} d\Omega$$

Dans le cadre des volumes finis appliqués sur une grille décalée, il est possible de transformer l'intégrale en une somme sur chaque cellule d'une grille. Lors de la résolution des équations de Navier-Stokes, les grilles de résolution du terme inertiel sont les grilles décalées suivant chaque direction. Par conséquent, les volumes de contrôle sont :  $\Omega_{i,j,k}^u$  (vectoriel suivant  $x$ ),  $\Omega_{i,j,k}^v$  (vectoriel suivant  $y$ ) et  $\Omega_{i,j,k}^w$  (vectoriel suivant  $z$ ). Avec  $w$  et  $k$  les composantes correspondantes à la troisième dimension. Lors de la résolution de l'équation de quantité de mouvement, il est fait l'hypothèse que  $\bar{\rho}\mathbf{u} \equiv \bar{\rho}\bar{\mathbf{u}}$ . Dans le même état d'esprit, la valeur moyennée  $\bar{\chi}\mathbf{u}$  est approximée par  $\bar{\chi}\bar{\mathbf{u}}$ . Les deux intégrales en deviennent par conséquent :

$$\mathbf{M}_1 = \sum_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k (1 - \bar{\chi}_{i,j,k}^{face}) \rho_1 \bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}$$

et

$$\mathbf{M}_2 = \sum_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \bar{\chi}_{i,j,k}^{face} \rho_2 \bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}$$

avec  $\bar{\chi}_{i,j,k}^{face}$  la valeur interpolé à l'ordre 2 sur les faces,  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  et  $\Delta z_k$  les pas spatiaux,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les masses volumiques de chaque fluide et  $\bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}$  le champ de vitesse du fluide.

### 4.5.1.2. Énergie cinétique

L'énergie cinétique  $E_K$  provient du calcul de l'intégrale suivante

$$E_K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|_2^2 d\Omega$$

Une nouvelle fois, le cadre des volumes finis et de la grille MAC induisent l'utilisation d'une sommation des valeurs moyennés sur l'ensemble des volumes de contrôle. Cependant, cette fois-ci il est nécessaire de calculer la norme 2 du champ de vitesse. Pour évaluer cette fonction, les différentes composantes de la vitesse doivent être connues sur le même volume de contrôle. Le champ de vitesse est interpolé à l'ordre 2 sur le volume de contrôle scalaire  $\Omega_{i,j,k}^c$ . Maintenant que les composantes ont été centralisées sur la grille scalaire, il est possible de calculer :

$$\|\bar{\mathbf{u}}^{centre}\|_2^2 = (\bar{u}^{centre})^2 + (\bar{v}^{centre})^2 + (\bar{w}^{centre})^2$$

L'équation finale pour calculer l'énergie cinétique est

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \bar{\rho}_{i,j,k} \|\bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{centre}\|_2^2 \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

avec  $\bar{\rho}_{i,j,k}$  la densité local du fluide unique,  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  et  $\Delta z_k$  les pas spatiaux et  $\bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{centre}$  le champ de vitesse du fluide interpolé sur la grille scalaire.

#### 4.5.1.3. Densité-vorticité

La dernière variable utilisée pour étudier les cas tests est la densité-vorticité. Cela correspond à la multiplication du champ scalaire  $\bar{\rho}$  par le champ vectoriel  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{vort}$  représentant la vorticité du champ de vitesse  $\nabla \times \bar{\mathbf{u}}$ . Chaque terme est défini sur la grille scalaire. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer une interpolation du champ obtenu après l'évaluation de  $\nabla \times \bar{\mathbf{u}}$  sur la grille scalaire. Les dérivées partielles sont évalués à l'aide d'un schéma centré l'ordre 2 décalant le volume de contrôle sur les coins en  $2D$  (resp. arrêtes en  $3D$ ). Par conséquent, une interpolation est utilisée pour recentrer les quantités sur la grille scalaire centrale. L'interpolation effectuée est à l'ordre 2 avec un schéma centré.

C'est une variable importante car elle permet la visualisation des tourbillons parasites qui se produisent dans chaque phase, comme il sera observé dans les sections suivantes. La pondération de la vorticité par  $\bar{\rho}$  est pertinente car même un vortex de faible intensité transmet beaucoup d'énergie dans un fluide dense comme l'eau.

#### 4.5.2. Advection d'une goutte de grande densité

Le faux transfert de la quantité de mouvement dû à des approximations de modèles ou numériques est directement lié au rapport de masse volumique des deux fluides. L'augmentation de ce rapport augmentera les instabilités numériques non physiques proches de l'interface. Ainsi, le cas test numérique de la convection d'une goutte de haute densité, avec un rapport de densité  $\rho_1/\rho_2 = 10^6$ , peut être utilisé pour montrer et détecter les transferts de quantité de mouvement parasites. Ce cas, sur-mesure, a été étudié dans plusieurs références telles que [163, 166, 167, 168, 165, 164, 158]. Il n'est pas basé sur une expérience physique et doit être pris avec précaution car il est très sensible à l'initialisation et aux méthodes numériques. Cependant, afin de comparer avec la littérature, l'impact de l'utilisation de la méthode HOMP est étudié.

La goutte est initialisée avec une vitesse uniforme et le gaz est au repos. Idéalement, comme la goutte est très dense, sa forme doit rester la même et sa quantité de mouvement totale doit être conservée. Si une quantité de mouvement erronée est transférée dans la goutte, on s'attend à ce qu'elle se déforme et, inversement, à ce que le gaz soit fortement perturbé par cet échange. Il est important de noter que, dans la continuité des remarques de Nangia *et al* [166], dans le cadre de l'incompressibilité et comme la densité du liquide est

finie (bien que très élevée), il faut s'attendre de toute façon, même sans erreurs numériques, à une déformation de la goutte. Ceci est dû à quatre faits :

1. le champ de vitesse initial imposé dans l'ensemble du domaine est de plus en plus discontinu à mesure que le maillage s'affine.
2. le champ de vitesse doit être incompressible ; il n'y a donc pas de solution analytique triviale pour initialiser le cas.
3. comme pour l'étude du mouvement autour d'une sphère, la pression du gaz sera élevée devant la goutte et faible dans le sillage. Cela entraînera une compression de la phase liquide en amont et son allongement en aval. De plus, la translation périodique de la goutte dans le milieu gazeux induit une dynamique des fluides non linéaire dans ce dernier, rendant inévitable l'apparition de tourbillons et leurs interactions avec le liquide difficilement prévisible.
4. même si le rapport de densité est important, la dynamique du liquide n'est pas celle d'un corps rigide.

En conséquence, la vitesse de la goutte ne sera pas uniforme, à moins qu'une initialisation plus stricte (comme dans le cas de la pénalisation) ne soit appliquée au niveau discret, ce qui dépasse le champ d'application de la thèse. Cependant, comme le rapport de masse volumique est très élevé, la variation de la vitesse ne devrait pas être trop importante, tout en étant suffisante pour déformer un peu le domaine liquide. Sans effets visqueux, de petites structures devraient apparaître lors du raffinement du maillage.

Comme les deux fluides incompressibles ne sont pas visqueux, et en l'absence de gravité et de tension superficielle, l'énergie cinétique totale devrait être conservée. Il sera démontré que pour la méthode standart cela ne sera pas le cas. Le problème est encore plus important avec un rapport de masse volumique  $\rho_1/\rho_2$  aussi élevé. Par exemple, si une faible quantité de mouvement  $\epsilon_{qm}$  est transféré du gaz au liquide, la quantité résultant dans le liquide est augmentée de  $\frac{\rho_1}{\rho_2}\epsilon_{qm} \gg \epsilon_{qm}$ . De plus, avec l'approche standard, le résultat diverge même lorsque le maillage est grossié. D'autre part, la méthode HOMP permet de bien conserver la quantité de mouvement en réduisant son transfert à travers l'interface.

En conclusion, une première étude en  $2D$  sera effectuée à épaisseur d'interface constante, puis en réduisant celle-ci. Les résultats  $3D$  de l'advection d'une goutte sphérique seront présentés pour démontrer les capacités du code à s'étendre au  $3D$ .

#### 4.5.2.1. Description de la condition initiale

Une goutte (sphérique en  $3D$  et circulaire en  $2D$ ) de rayon  $0.2m$  se tient dans un domaine  $[0, L_{goutte}] \times [0, L_{goutte}]$  de taille  $L_{goutte} = 1m$ , et située initialement au centre de celui-ci. Les conditions limites sont périodiques dans la direction  $x$  et glissement dans la direction  $y$ . Comme le problème est purement symétrique en théorie, seule la moitié supérieure du domaine est simulée en pratique. La masse volumique du fluide le plus lourd est fixée à  $\rho_1 = 10^6 kg.m^{-3}$  et celle du plus léger à  $\rho_2 = 1 kg.m^{-3}$ . Afin de se concentrer sur le terme inertiel et pour que le terme visqueux n'affecte pas la solution, les deux fluides sont non visqueux.

L'initialisation du champ de vitesse est importante car elle est la base de la simulation et peut changer le résultat final lors d'une mauvaise initialisation. À  $t = 0s$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{u}}(t = 0s)$  est calculée telle que  $\bar{\mathbf{u}}_0(x, y) = \bar{\chi}_0(x, y) \cdot (1, 0)^T$  où  $\bar{\chi}_0(x, y)$  est la fonction caractéristique moyennée initiale de la goutte, donnée par la représentation de l'interface. Cette initialisation est cohérente avec le cadre de volume fini et est nécessaire pour régulariser le champ de vitesse qui serait autrement discontinu. De plus, le champ de vitesse est projeté sur l'espace de divergence nulle afin d'utiliser une condition initiale qui est physiquement

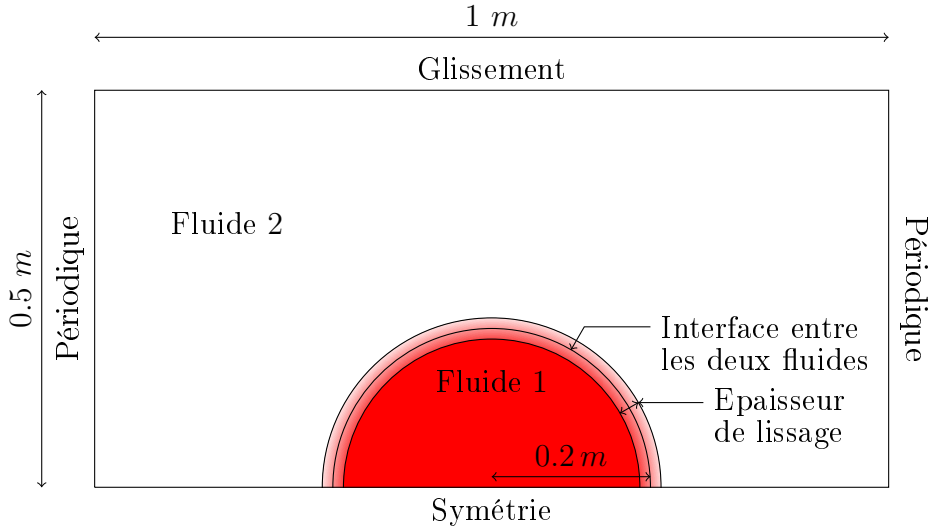


Figure 4.2. – Schéma 2D de la condition initiale de l’advection d’une goutte de grande masse volumique. La vitesse du fluide 1 est  $1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et est nulle dans le fluide 2. Le domaine de simulation est  $[0, 1] \times [0, 0.5]$  en mètres.

incompressible. Par conséquent, la vitesse à l’intérieur de la goutte n’est pas exactement uniforme et la déformerait de toute façon. Le résultat montre l’inaptitude de la méthode standard pour saisir la dynamique attendue.

La figure 4.2 est la schématisation de la condition initiale en 2D. L’extension au 3D est faite en utilisant la même condition que pour la direction  $y$ .

#### 4.5.2.2. Schémas numériques

Concernant le calcul de  $\bar{\rho}^*$  (équation 4.26) et le terme inertiel (équation 4.27), une étude est effectuée sur l’impact de trois schémas numériques : upwind d’ordre 1, WENO 3,2 d’ordre 3 et WENO 5,3 d’ordre 5, le tout couplé à un schéma temporelle de type Runge-Kutta (NSSP3,2). Cependant, à cause du rapport de masse volumique élevé, les termes de troncature dans l’équation de continuité apportent beaucoup d’erreurs. Ainsi, pour diminuer ces erreurs numériques, la résolution de l’équation est effectuée directement sur les faces des cellules. Cela permet de supprimer les approximations qui sont faites lors de l’utilisation de l’interpolation des cellules aux faces après l’étape d’advection et de renforcer la cohérence avec l’équation de quantité de mouvement.

#### 4.5.2.3. Discrétisations

Une grille régulière et uniforme est utilisée pour la discrétisation du domaine. Le nombre totale de mailles est  $n_{lignes} \cdot n_{colonnes} = N \cdot \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2}$ , avec  $N$  le nombre de mailles dans la direction  $x$ . Celui-ci varie entre 64, 128 et 256. Le pas d’espace peut, ainsi, être calculé comme  $\Delta x = \frac{L_{goutte}}{N}$ .

Le pas de temps a été fixé à  $\Delta t = \frac{10}{31.25 \cdot N}$  et ne suit pas une condition CFL. Avec l’initialisation imposée, cela correspond à un nombre CFL  $\frac{\Delta t \cdot \max(|\bar{u}|, |\bar{v}|, |\bar{w}|)}{\Delta x}$  autour de 0.3 (en pratique, cela augmenterait particulièrement en présence de tourbillons dans le gaz, sans perturber les résultats). C’est 10 fois plus que le pas utilisé dans N. Nangia *et al* [166]. Malgré l’utilisation d’un pas de temps plus grand que dans la littérature, l’erreur sur les résultats reste relativement faible. Cela démontre la robustesse de la méthode HOMP lors de l’utilisation de grands pas de temps proches de la restriction explicite des CFL.

#### 4.5.2.4. Résultats avec une épaisseur d'interface fixe

Tout d'abord, afin d'éviter le problème d'un champ de vitesse discontinu lors du raffinement du maillage, et ainsi réduire les déformations inévitables de la goutte, une première étude sur la convergence des méthodes avec une épaisseur d'interface constante est réalisée. La méthode de lissage est appliquée à la fraction volumique calculée par les algorithmes d'interface. Dans le cas particulier de LSM, afin de correspondre aussi précisément que possible aux VOF et MOF, le calcul de la fraction volumique est celui proposé par C. Min *et al* [143]. La procédure de lissage est appliquée de sorte à assurer une épaisseur d'interface d'environ  $0.1 m$ , quelle que soit le maillage utilisé. Ainsi, pour la maille la plus fine  $N = 256$ , il y a environ 24 cellules pour la transition de densité du gaz au liquide. En pratique, il est impossible de définir et de contrôler très précisément l'épaisseur de l'interface, mais l'approche proposée permet d'obtenir une approximation suffisante.

Les résultats des simulations sont présentés sur la figure 4.3. Globalement, on peut observer que, comme prévu, la forme de la goutte ne converge pas vers un disque parfait : lorsque la vitesse horizontale augmente dans le sillage de la goutte (au niveau de la ligne de symétrie), le liquide est poussé vers la droite, induisant un petit pincement. La sous-figure gauche de 4.3 démontre que le schéma du premier ordre est beaucoup plus diffusif et apporte une déformation importante de la phase liquide, étirant même l'interface dans la direction opposée. Cependant, grâce à la méthode HOMP, la goutte est beaucoup plus compacte car moins d'énergie a été transférée dans la phase peu dense. À cet égard, les contours bleus capturent une quantité de mouvement importante dans la phase plus légère - notez qu'à ces endroits non éloignés de l'interface, en raison du lissage du champ de densité,  $\bar{\rho} > 1 kg.m^{-3}$ , et donc la quantité de mouvement  $\bar{\rho}\bar{u}$  est impactée.

#### 4.5.2.5. Résultats avec une épaisseur d'interface de plus en plus petite

Comme le modèle à un seul fluide visant à capturer l'immiscibilité et la transition brusque entre les phases où l'épaisseur de l'interface tend vers zéro, la convergence de notre méthode par rapport à la méthode standard est étudiée. Pour cela, la même procédure de lissage est utilisée que celle décrite précédemment, cependant, l'épaisseur d'interface varie en fonction du maillage utilisé. Il diminue en fonction de la racine du pas d'espace  $\Delta x$ . Alors que dans l'article de N. Nangia *et al* [166], les auteurs ont utilisé une épaisseur d'interface très fine, comme de nombreux auteurs l'ont remarqué, l'épaisseur d'interface doit s'échelonner plus lentement que linéairement avec le maillage afin d'obtenir des résultats convergents et stables.

Dans cette configuration, comme le gradient de densité diminue à un rythme plus lent que le raffinement du maillage, les transferts de quantité de mouvement doivent, avec la méthode standard, être beaucoup plus élevés. La pente du lissage étant plus grande, les champs de vitesse et de densité deviennent plus nets ; par conséquent, la quantité de mouvement étant le produit des deux, les termes de troncature d'ordre élevé dans les équations d'advection augmenteront à un taux doublé. Là encore, comme il n'y a pas de solution analytique ou physique triviale à ce cas de test, il n'y aura pas de solution régulière et lisse de l'interface et du mouvement autour de la goutte.

De plus, les schémas numériques d'ordre élevé, montrant une diffusion numérique très faible, peuvent éventuellement induire plus d'erreurs dans les simulations à mesure que le maillage est affiné. Il est important de noter que c'est un résultat attendu sur ce cas particulier qui n'est pas corrélé avec la méthode HOMP mais qui est dû à la rigidité inhérente du cas. D'ailleurs, des schémas d'ordre inférieur peuvent être préférés mais, pour des expériences générales et plus physiques comme celles présentées dans les sections suivantes, la méthode fixant l'incompressibilité permet d'utiliser correctement des schémas d'ordre supérieur.

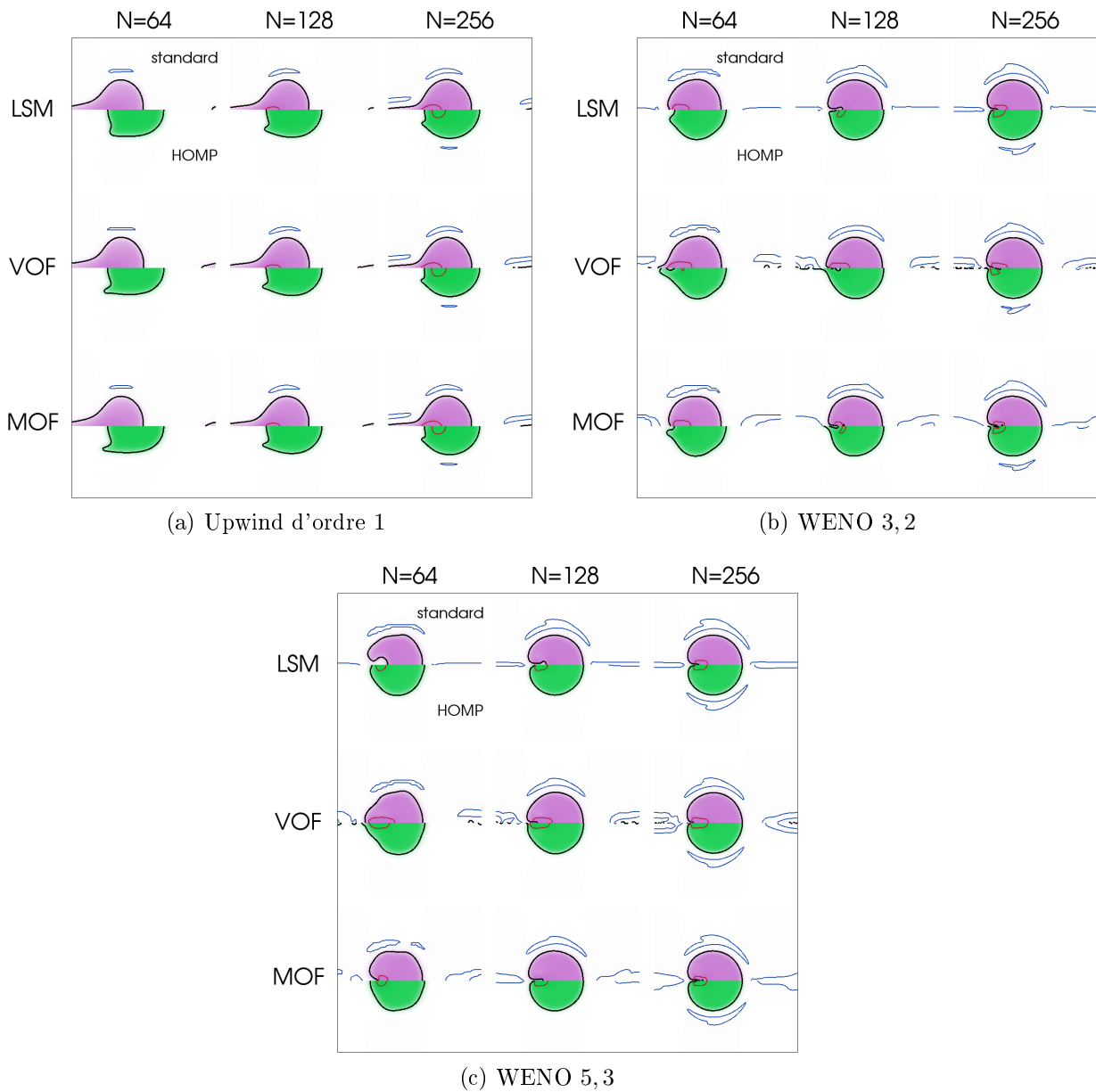


Figure 4.3. – Convection d’une goutte de grande masse volumique avec une épaisseur d’interface constante : comparaison de la convergence numérique de la forme et de la quantité de mouvement suivant  $x$  pour diverses méthodes numériques et d’interface : Upwind d’ordre 1 (a), WENO 3, 2 (b) et WENO 5, 3 (c). Le temps est  $t = 1 s$ . Pour chaque simulation, la moitié supérieure est le résultat obtenu par la méthode standard, la moitié inférieure par la méthode HOMP. La couleur violette (verte) est utilisée pour les quantités de mouvements jusqu’à  $10^6 kg.m^{-2}.s^{-1}$  (qui est la quantité de mouvement à l’intérieur de la goutte à l’initialisation), la partie blanche correspond à une valeur nulle de la quantité de mouvement. Les contours mettent en évidence des contours de valeurs particulières : noir pour la position de l’interface entre les deux fluides, bleu (dans la phase gazeuse) pour  $\bar{\rho}\bar{u} = -10 kg.m^{-2}.s^{-1}$  et rouge (à l’intérieur de la goutte) pour  $\bar{\rho}\bar{u} = 10^6 kg.m^{-2}.s^{-1}$ .



Les résultats sont présentés dans la figure 4.4. On peut tout d’abord observer que, à mesure que le maillage s’affine, la dynamique des fluides est plus complexe et apporte plus de perturbations à la forme de la goutte. Comme expliqué dans la description, ce comportement est attendu alors que le champ de vitesse se rapproche d’une discontinuité. En l’absence de forces qui permettraient de conserver la forme sphérique, comme la tension de surface, l’interface finit par se déformer. Comme cela a été observé dans la littérature, la méthode standard (partie supérieure de chaque simulation) conduit à une dynamique instable et destructive qui finit par faire diverger la solution et le code. Ceci est principalement dû à des transferts erronés de la quantité de mouvement de la phase gazeuse vers la phase liquide ; un phénomène qui s’accroît lorsque le gradient de densité tend vers l’infini.

En revanche, tous les résultats obtenus par la méthode HOMP (partie inférieure de chaque simulation) démontrent une bien meilleure prise en compte de la physique. Même en utilisant le schéma WENO non linéaire du cinquième ordre qui est destiné à induire plus de tourbillons dans l’écoulement non visqueux, les simulations restent stables pour toutes les méthodes d’interface pour  $N = 64$  et  $N = 128$ . Pour la maille la plus fine ( $N = 256$ ), la discontinuité initiale de la vitesse et de la densité induit beaucoup de variations d’ordre élevé dans l’écoulement : on peut voir que la méthode standard produit beaucoup plus de déformation de l’interface tandis que la méthode HOMP parvient à garder la goutte plus compacte.

La méthode proposée introduit beaucoup moins d’extrêmes de quantité de mouvement dans les deux phases, en particulier dans le gaz, ce qui démontre un échange réduit de quantité de mouvement à travers l’interface. Le résultat de la méthode LSM semble plus lisse. Cela peut s’expliquer par une advection plus proche de l’équation de continuité, l’interface est, ainsi, moins déformée à mesure que le maillage est affiné.

Alors que l’utilisation du schéma Upwind d’ordre 1 donne des résultats très satisfaisants, même avec des mailles grossières, les schémas WENO apportent des termes d’ordre élevé dans la quantité de mouvement qui ne sont que légèrement amortis. Cela entraîne davantage de perturbations de l’interface. Les résultats diffèrent de ceux exposés dans l’article de N. Nangia *et al* [166] où l’interface semble plus lisse et plus proche d’une sphère. Cette différence peut s’expliquer par deux points : premièrement, le résultat de la simulation est très sensible à la condition initiale du champ de vitesse, et deuxièmement, les auteurs ont adapté un schéma d’advection particulier avec des limiteurs qui améliore la préservation de la quantité de mouvement alors que la présente étude est effectuée sur des schémas plus courants. Le développement de schémas d’advection d’ordre élevé adaptés aux équations couplées de continuité/quantité de mouvement est un facteur important. Néanmoins, les résultats obtenus avec HOMP sont bien meilleurs que ceux obtenus avec la méthode standard. La précision de la méthode sera discutée dans les prochaines sections avec des rapports de densité plus courants de  $10^3$  et des cas plus pertinents physiquement.

La figure 4.5 montrent comment l’énergie cinétique totale  $E_K$  associée au domaine liquide se modifie au cours du temps. Tout d’abord, il est observé un lien évident entre l’énergie cinétique et la conservation de la masse. Un gain de masse s’accompagne d’un gain d’énergie cinétique, et inversement. La méthode standard (lignes pointillées) conserve beaucoup moins bien l’énergie cinétique. Alors que la diffusion numérique peut expliquer l’importante diminution avec le schéma du premier ordre, on observe toujours une importante diminution de l’énergie cinétique pour des schémas d’ordre élevé. C’est d’autant plus notable pour des mailles grossières. Cela peut s’expliquer par le transfert de quantité de mouvement de la phase la plus dense vers la phase la moins dense, comme l’illustre la quantité de mouvement croissante de la figure 4.4. Pour les mailles les plus fines ( $N = 256$ ), les simulations deviennent instables avec le temps, car de plus en plus

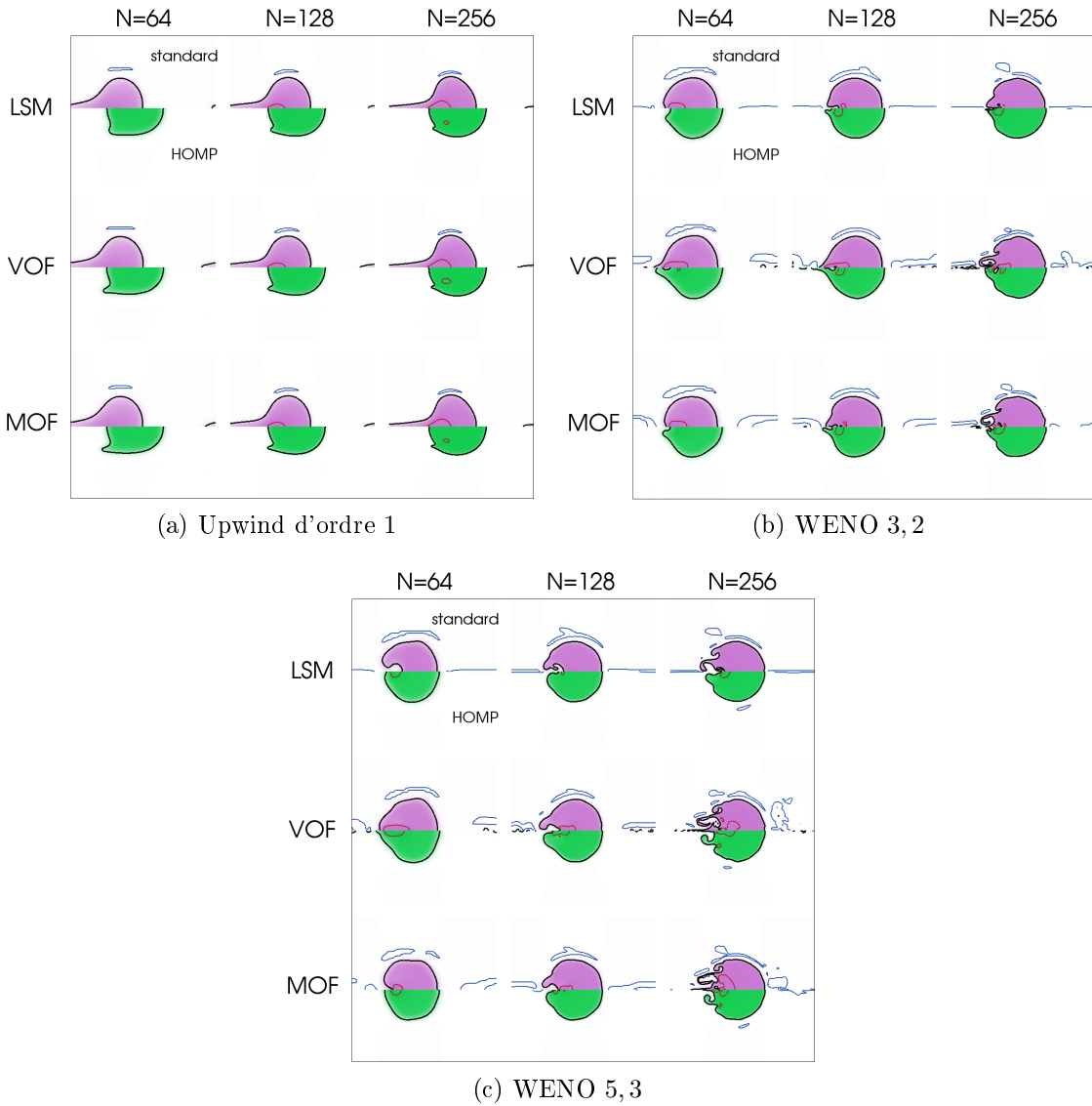


Figure 4.4. – Convection d'une goutte de grande masse volumique avec une épaisseur d'interface diminuant en racine du pas d'espace : comparaison de la convergence numérique de la forme et de la quantité de mouvement suivant  $x$  pour diverses méthodes numériques et d'interface : Upwind d'ordre 1 (a), WENO 3, 2 (b) et WENO 5, 3 (c). Le temps est  $t = 1 \text{ s}$ . Pour chaque simulation, la moitié supérieure est le résultat obtenu par la méthode standard, la moitié inférieure par la méthode HOMP. La couleur violette (verte) est utilisée pour les quantités de mouvements jusqu'à  $10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  (qui est la quantité de mouvement à l'intérieur de la goutte à l'initialisation), la partie blanche correspond à une valeur nulle de la quantité de mouvement. Les contours mettent en évidence des contours de valeurs particulières : noir pour la position de l'interface entre les deux fluides, bleu (dans la phase gazeuse) pour  $\bar{\rho}\bar{u} = -10 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  et rouge (à l'intérieur de la goutte) pour  $\bar{\rho}\bar{u} = 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ .

de petites structures apparaissent et la quantité de mouvement est faussée.

D'autre part, la méthode HOMP permet une bien meilleure conservation de l'énergie cinétique avec les trois schémas numériques. Le WENO d'ordre 5 donne les meilleurs résultats tout en permettant de capturer des structures fines dans l'écoulement. L'augmentation de  $E_K$  avec le schéma du premier ordre ainsi qu'avec le VOF-PLIC d'ordre inférieur peut s'expliquer par l'importante diffusivité de ces méthodes qui conduit à un faible transfert de la quantité de mouvement de la phase gazeuse vers la phase liquide, couplé au gain important dans le volume de la phase liquide, augmentant ainsi de façon plus importante l'énergie. Il est à noter que ces résultats quantitatifs sont très similaires pour les méthodes LSM et MOF qui bénéficient toutes deux de la résolution d'équations de transport d'ordre élevé. Cette dernière assure une meilleure conservation de la masse et donc de l'énergie. La méthode HOMP maintient les simulations très stables même avec des maillages très fins.

#### 4.5.2.6. Résultat en trois dimensions

Le même cas test fut simulé en  $3D$  où des conditions symétriques ont été utilisées pour les plans  $y = 0$  (face inférieure) et  $z = 0$  (face arrière). L'épaisseur de l'interface, comme dans le paragraphe précédent, suit linéairement le maillage. Le pas de temps est le même que dans le cas en  $2D$ . Les schémas WENO 3,2 et N SSP3,2 sont utilisés pour les termes d'advection. La figure 4.6 illustre la forme de l'interface en utilisant le LSM (réinitialisation à chaque pas de temps) et le VOF pour ce maillage, sans (moitié supérieure) et avec l'utilisation de la méthode HOMP (moitié inférieure). Il est observé que la méthode permet une déformation réduite de l'interface et un transfert d'énergie beaucoup moins important dans la phase gazeuse. En  $3D$ , le liquide est aspiré dans le sillage par la zone de basse pression (qui est plus importante qu'en  $2D$ ), comme il est couramment observé lors de l'étude de la chute libre des gouttes de pluie.

Quantitativement, il est possible de voir avec les isocontours de la figure 4.6 un transfert réduit de la quantité de mouvement suivant  $x$  à l'intérieur de la phase gazeuse à travers le temps avec la méthode HOMP. De plus, dans la continuité des résultats  $2D$ , l'énergie cinétique totale  $E_K$ , illustrée sur la figure 4.7, est également beaucoup mieux conservée. La diminution de l'énergie cinétique avec la méthode standard est principalement due à un transfert erroné de l'énergie cinétique à travers l'interface entre la phase liquide et la phase gazeuse où la masse volumique est  $10^6$  fois plus faible.

#### 4.5.3. Onde gravitaire stationnaire

Ce cas de vérification a été conçu afin de montrer l'impact et la précision de la méthode HOMP proposée sur un problème très simple, mais classique. Une onde gravitaire sinusoïdale stationnaire est la somme de deux ondes progressives de même amplitude et de même longueur. Elles présentent une dynamique périodique triviale qui rend bien compte de toute discrétisation et erreur numérique. Selon une hypothèse linéaire, pour un nombre de Reynolds élevé et des effets visqueux négligés, une onde stationnaire devrait conserver sa forme sinusoïdale, son amplitude et sa fréquence d'oscillation.

Cependant, selon la théorie linéaire, il est attendu que la vitesse du fluide soit maximale à l'interface. Cela justifie l'intérêt du cas test car les erreurs numériques devraient être très concentrées à cet endroit, mettant ainsi en évidence les améliorations apportées par la méthode HOMP.

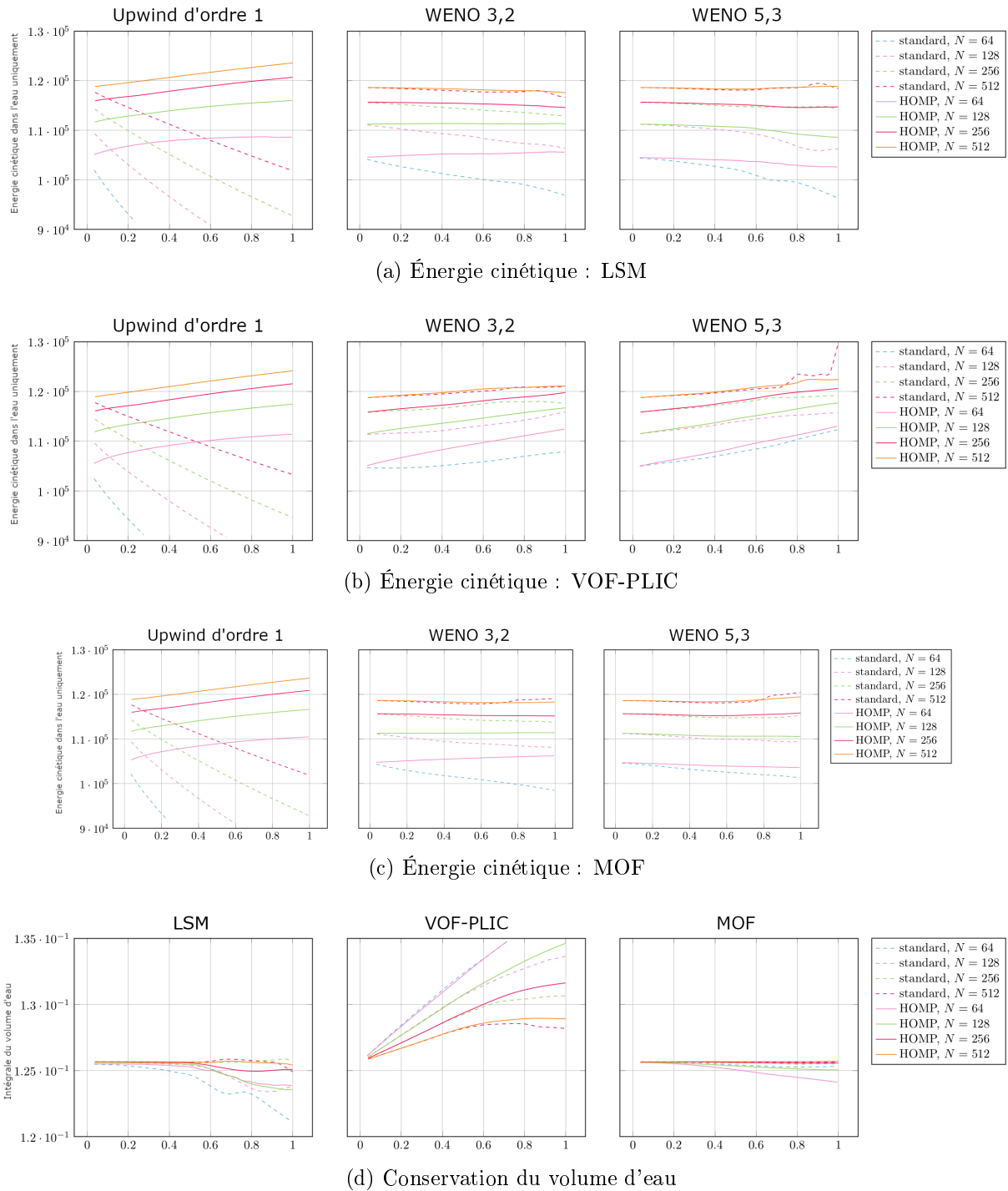


Figure 4.5. – Convection d’une goutte de grande densité avec une épaisseur d’interface réduite : comparaison de la convergence numérique de l’énergie cinétique totale  $E_K$  en fonction du temps pour les trois schémas d’advection et les représentations d’interface étudiés, LSM (a), VOF-PLIC (b) et MOF (c). La conservation du volume de la phase eau est montrée dans l’image (d).

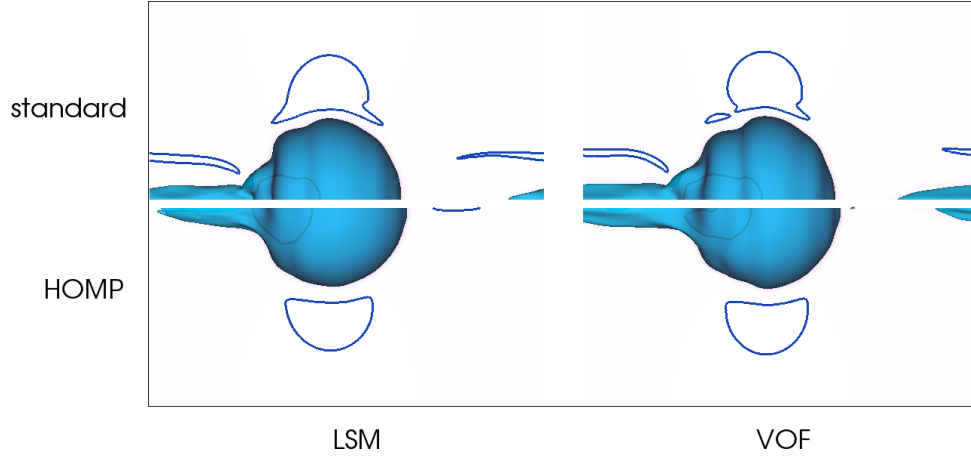


Figure 4.6. – Convection d’une goutte 3D de grande masse volumique : convergence numérique de la forme de l’interface 3D en bleu et isocontours de la quantité de mouvement suivant  $x$  sur le plan  $x, y$ . Le temps est  $t = 1 s$  et  $N = 128$ . La ligne du haut correspond à la méthode standard et la ligne du bas à la méthode HOMP. La colonne de gauche correspond à la méthode LSM et la colonne de droite à la méthode VOF. Les contours en 2D mettent en évidence des valeurs particulières pour la quantité de mouvement : bleue pour  $\bar{\rho}\bar{u} = -0.1 kg.m^{-2}.s^{-1}$  (cent fois moins qu’en 2D) et rouge (à l’intérieur de la goutte) pour  $\bar{\rho}\bar{u} = 10^6 kg.m^{-2}.s^{-1}$ . Les schémas numériques pour le terme d’inertie sont les schémas WENO 3,2 et NSSP 3,2..

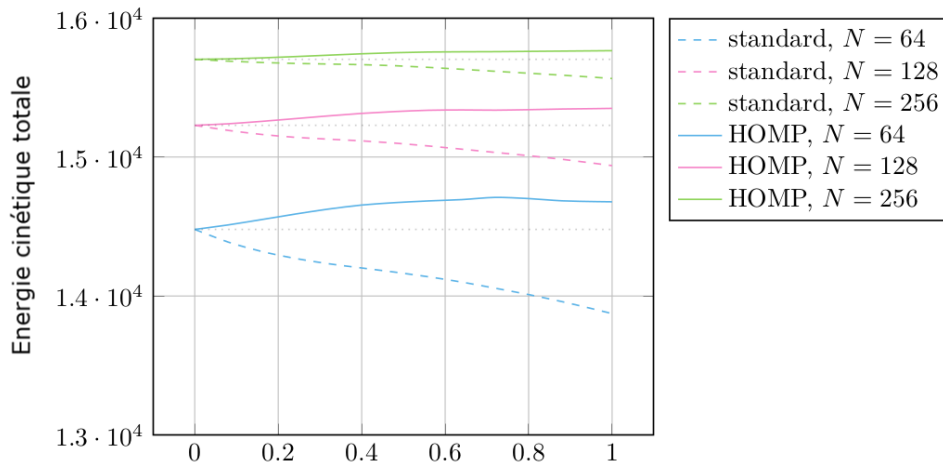


Figure 4.7. – Convection d’une goutte 3D de grande masse volumique : convergence de l’énergie cinétique totale  $E_k$  en fonction du temps pour la méthode LSM. La valeur initiale a été tracée avec une ligne en pointillée gris clair. Les schémas numériques pour le terme d’inertie sont les schémas WENO 3,2 et NSSP 3,2.

#### 4.5.3.1. Description de la condition initiale

Une onde horizontale  $2D$  est initialisée dans une boîte rectangulaire de taille  $10\text{ m} \times 20\text{ m}$ . Les conditions limites sont périodiques dans la direction  $x$  et la paroi est supposée non-glissante en haut et en bas. L'onde est initialisée comme une fonction sinusoïdale d'amplitude  $0.05\text{ m}$  et de longueur d'onde  $\lambda = 10\text{ m}$  centrée dans le domaine. Le fluide le plus lourd (eau) est de masse volumique  $\rho_1 = 1000\text{ kg.m}^{-3}$  et le plus léger (air) est de masse volumique  $\rho_2 = 1\text{ kg.m}^{-3}$ . La gravité est fixée à  $g = 9.81\text{ m.s}^{-2}$  vers la direction  $y$  négative. Le champ de vitesse initial est fixé à  $0\text{ m.s}^{-1}$  (ce qui correspond à une onde stationnaire avec son énergie potentielle maximale et une énergie cinétique nulle). Le champ de pression initial est également fixé à  $0\text{ Pa}$ , il sera naturellement réglé sur hydrostatique après la première itération de l'algorithme. Le schéma de la simulation est décrite dans la figure 4.8.

La vitesse verticale maximale de la vague est approximativement  $0.8\text{ m.s}^{-1}$  et sa période  $T$  temporelle est  $1.3\text{ s}$ .

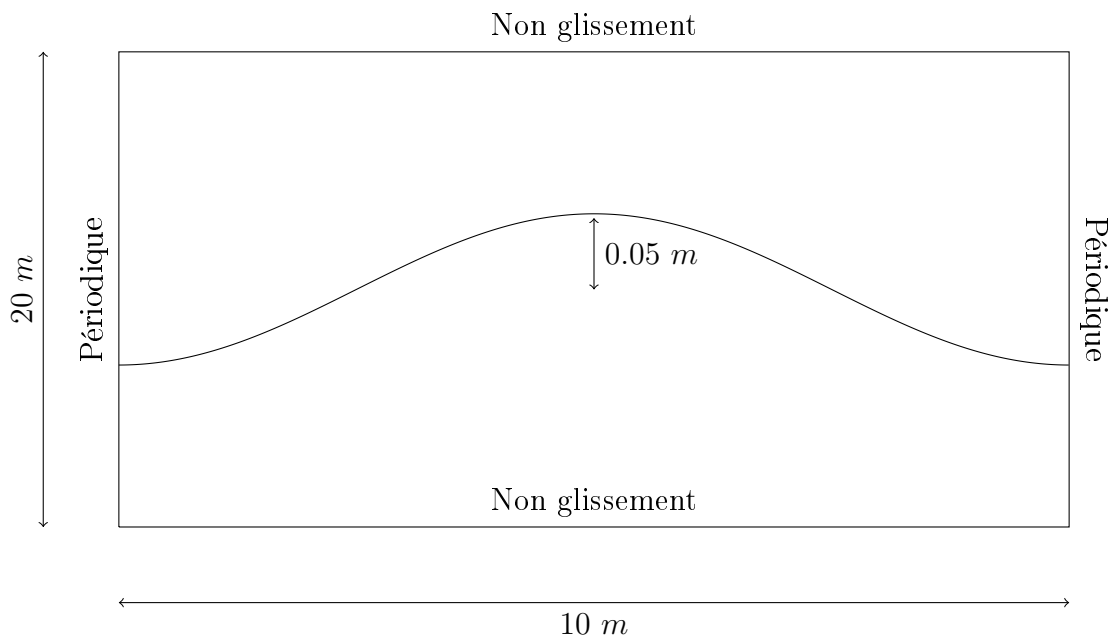


Figure 4.8. – Schéma de la condition initiale de l'onde stationnaire gravitaire. La vitesse est nulle dans tout le domaine. Le domaine de simulation est  $[0, 10] \times [0, 20]$  en mètres. Et l'amplitude de la vague est  $0.05\text{ m}$ .

#### 4.5.3.2. Schémas numériques

Le nombre de Reynolds pour ce cas test est  $Re = \frac{\rho_{eau} U_{max} \lambda}{\mu_{eau}} \simeq 8 \cdot 10^6$ . L'inertie est largement supérieure à la force visqueuse. Par conséquent, l'hypothèse de la théorie linéaire est utilisée et le terme visqueux est enlevé de l'équation de la quantité de mouvement.

D'autre part, comme les effets gravitationnels sont dominants ( $Fr_{II} \simeq 6.5 \cdot 10^{-3}$ ), l'utilisation d'un schéma Crank-Nicolson d'ordre 2 est nécessaire pour approximer le terme gravitationnel dans l'équation.

Concernant le calcul de  $\bar{p}^*$  (équation 4.26) et le terme inertiel (équation 4.27), l'influence de trois schémas numériques est étudié : Upwind d'ordre 1, WENO 3, 2 et WENO 5, 3 couplé à une intégration Runge-Kutta NSSP3, 2.

Enfin, l'utilisation de trois représentations d'interface différentes est également étudiée : VOF, MOF et LSM. Comme prédit précédemment, l'épaisseur de l'interface varie de

manière régulière à travers 6 cellules, grâce à une régularisation et un lissage appropriés.

### 4.5.3.3. Discrétisations

Une grille régulière et uniforme est utilisée pour la discrétisation du domaine. Le nombre totale de mailles est  $n_{lignes} \cdot n_{colonnes} = 2N \cdot N = 2N^2$ , avec  $N$  le nombre de mailles dans la direction  $x$ . Celui-ci va varier entre 64 (échelle 1), 256 (échelle 4) et 1024 (échelle 16). Le pas d'espace peut, ainsi, être calculé comme  $\Delta x = \frac{\lambda}{N}$ .

Un point important concerne le pas de temps : lorsque le maillage est affiné, comme  $\Delta x \rightarrow 0$ , l'épaisseur de l'interface de largeur  $6\Delta x$  diminue. Il faut donc appliquer une condition de type CFL afin de maintenir constant le nombre de cellules parcourues par l'interface par seconde. Elle permet d'étudier de manière appropriée la convergence numérique spatiale et temporelle à la fois. Le pas de temps décroît linéairement avec le maillage :  $\Delta t = \frac{3.2}{N} s$ . Par rapport à la vitesse maximale de l'onde atteinte lorsque l'interface est plate,  $0,8 m \cdot s^{-1}$ , cela correspond à un nombre de CFL d'environ  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \max(|\bar{u}|, |\bar{v}|) \simeq \frac{0,05 \cdot 64}{\lambda} \cdot 0,8 \simeq \frac{1}{4}$ . Le pas de temps est donc  $\Delta t = 0.25 \Delta x$ .

### 4.5.3.4. Résultats

La validation de la méthode et sa précision sont démontrées par la comparaison des différentes méthodes numériques et des tests de convergence. Par symétrie, la composante  $x$  de l'intégrale de la quantité de mouvement est nulle (en pratique : très proche de la précision de la machine, sauf indication contraire). On s'attend à ce que la composante  $y$  oscille entre une valeur maximale (positive) et une valeur minimale (négative) dans une tendance périodique, lorsque l'interface est plate, tout en étant nulle lorsque l'onde est entièrement déployée. Si l'énergie est conservée, l'interface devrait rester exactement la même sur une période régulière  $T$  d'oscillation. De plus, il ne devrait pas y avoir de transfert de quantité de mouvement entre les deux phases et donc une phase ne devrait pas perturber l'autre.

Le lecteur doit noter que, comme l'air a une densité beaucoup plus faible que l'eau, la phase air contient beaucoup plus de tourbillons que la phase eau. En ce qui concerne la quantité de mouvement totale, il y a un facteur d'environ 400 entre les valeurs maximales attendues de  $M_1$  et  $M_2$  suivant  $y$ . De plus, les tourbillons parasites sont poussés à l'intérieur des deux phases et évoluent avec le temps. Cela conduit à une moyenne temporelle du moment non nulle. Ceci est particulièrement observable dans les graphiques de la quantité de mouvement de l'air et la visualisation des tourbillons.

En raison d'erreurs numériques, il existe un transfert efficace et significatif de la quantité de mouvement qui se manifesterait par la suite, ce qui pourrait ne pas être apparent si seulement l'évolution de la hauteur des vagues est regardée. Comme il est montré, la méthode HOMP parvient à stabiliser la simulation numérique en réduisant considérablement le transfert numérique de quantité de mouvement près de l'interface et l'intensité des tourbillons parasites.

#### 4.5.3.4.1. Étude des schémas spatiaux

Tout d'abord, une comparaison est effectuée sur l'impact de l'utilisation de divers schémas numériques pour le calcul des équations d'advection dans le moment cinétique et la prévision de l'advection de la densité. À cette fin, la convergence spatiale est étudiée pour les schémas Upwind d'ordre 1, WENO 3,2 et WENO 5,3. La représentation de l'interface utilisée est la LSM avec un paramètre de régularisation de  $3\Delta x$ . L'intégration temporelle pour les termes d'advection est faite par un schéma Nssp3,2. La figure 4.9 montre la variation temporelle totale de la quantité de mouvement dans chaque phase après  $t = 90 s$  (c'est-à-dire après environ 70 périodes)

pour diverses méthodes et maillages, tandis que la figure 4.12a montre le résultat avec le schéma WENO 5,3, plus précis, et la méthode HOMP proposée pour l'ensemble de la simulation. La convergence spatiale est étudiée sous un nombre CLF constant (c'est-à-dire que les pas de temps  $\Delta t$  sont linéaires avec  $\Delta x$ ). Il est important de noter que la quantité de mouvement totale, qui sera étudiée en premier, est un critère qui doit être complété par la distribution de la quantité de mouvement effectif ainsi que les tourbillons à l'intérieur de chaque phase. Cela sera étudié par la suite.

Il est important de noter que, pour toutes les méthodes, au maillage le plus fin, les amplitudes des ondes sont du même ordre de grandeur et toutes présentent une forme sinusoïdale persistante (voir figure 4.10). Malgré cela, on observe que la méthode standard ne parvient pas à reproduire une dynamique correcte et diverge alors que la méthode HOMP présente de très bonnes propriétés de convergence.

Il est observable dans la figure 4.9b que la quantité de mouvement suivant  $y$  totale dans l'air semble converger au maillage le plus fin autour d'une valeur de  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  pour toutes les méthodes. Cependant, par rapport à cette valeur, la méthode standard couplée au schéma Upwind d'ordre 1 montre une quantité de mouvement totale significative dans la phase air pour les mailles grossières. Ceci est dû à une diffusion excessive de la quantité de mouvement qui entraîne des transferts entre les deux phases. Bien qu'elle soit réduite lors du raffinement du maillage, cette augmentation est très mauvaise. Elle finira par entraîner des instabilités numériques dans la simulation car l'énergie est ajoutée au système par des erreurs numériques, et de ce fait, des comportements dynamiques erronés non souhaités sont observés. D'autre part, l'utilisation de la méthode HOMP proposée avec le schéma de premier ordre montre des valeurs de dynamique beaucoup plus faibles, ce qui prouve une quantité de transfert réduite. Lorsque des schémas d'ordre supérieur sont utilisés, la quantité de mouvement suivant  $y$  dans la phase air est beaucoup plus acceptable et la méthode HOMP est toujours inférieure à la méthode standard, jusqu'à 2 fois plus petite avec WENO 3,2 pour la maille la plus grossière. D'autre part, il est visible dans la figure 4.9c que la quantité de mouvement suivant  $y$  totale de l'eau ne converge pas correctement lorsque la méthode standard est utilisée, alors que la méthode HOMP présente, dans la figure 4.9d, une très bonne convergence par le bas (c'est-à-dire avec une valeur croissante vers la convergence lorsque la maille est affinée). Il est important de noter que le WENO 5,3 donne qualitativement le même résultat pour les deux méthodes, ce qui est une propriété attendue des schémas WENO qui sont faits pour bien se comporter en présence de discontinuités (donc près de l'interface).

Cependant, si le moment cinétique de la figure 4.10 et la distribution des tourbillons de la figure 4.11 sont comparés, il est observé que la méthode standard conduit à des courants parasites importants qui perturbent les deux phases air et eau. Il est également possible que les tourbillons sous-interfaciaux deviennent plus importants à mesure que le maillage s'affine, présentant des erreurs numériques croissantes. D'autre part, la méthode HOMP permet d'obtenir des résultats convergents à mesure que la taille du maillage se réduit. L'utilisation de schémas d'ordre élevé tel que WENO 5,3 apporte une plus grande précision dans les résultats en capturant les structures fines comme prévu, ce qui est un critère très important pour la précision des simulations complexes (comme présenté dans les sections suivantes).

Ces résultats montrent tous que, quel que soit le schéma spatial utilisé pour les termes d'advection, une très bonne réduction du transfert de la quantité de mouvement entre les phases peut être attendue lorsque l'approche proposée est utilisée. Ils prouvent donc que la méthode HOMP est très bien adaptée au couplage avec tout schéma d'advection classique sans qu'un traitement particulier soit nécessaire près de l'interface, et qu'elle



peut être insérée dans un code existant sans trop d'efforts.

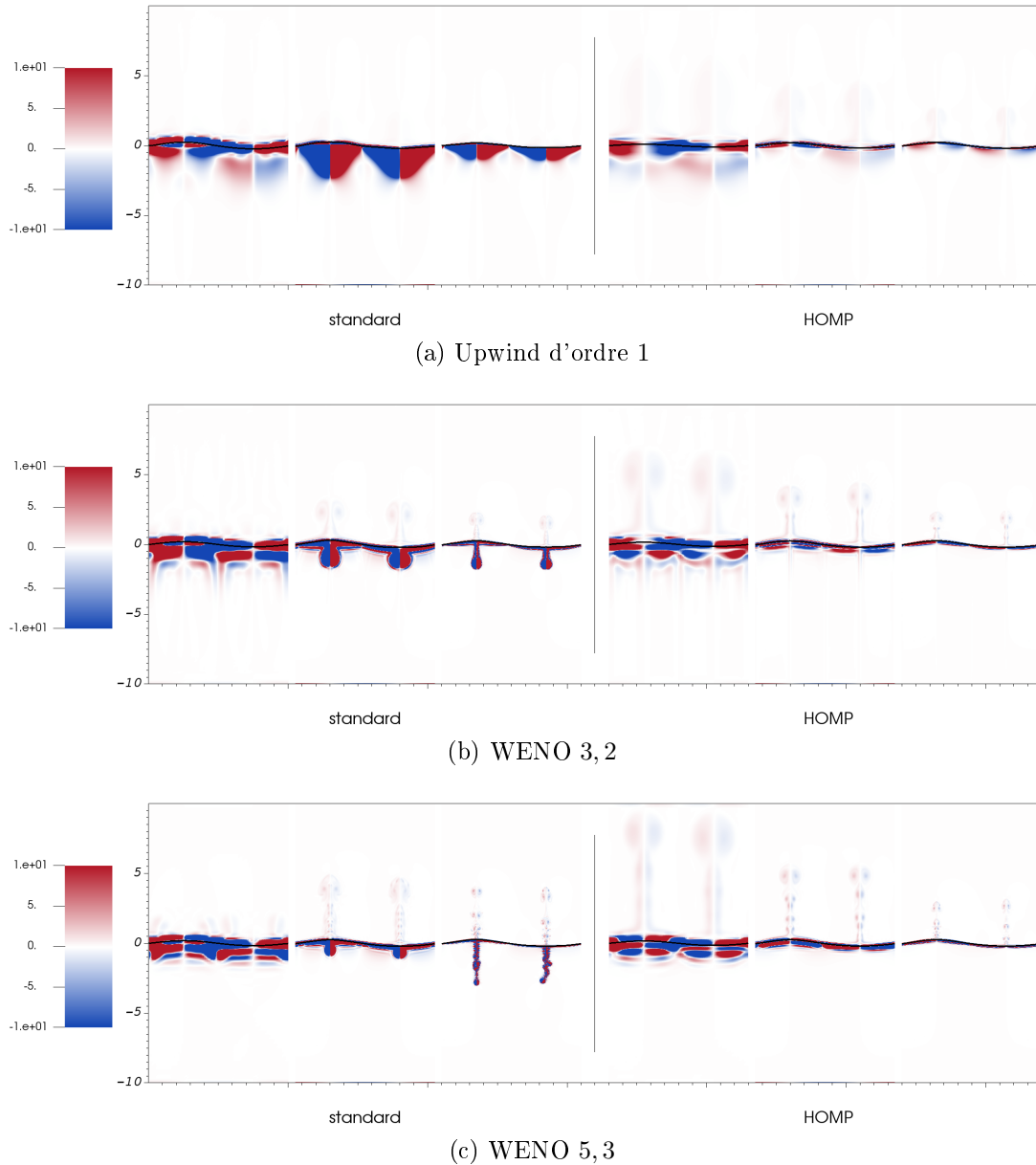
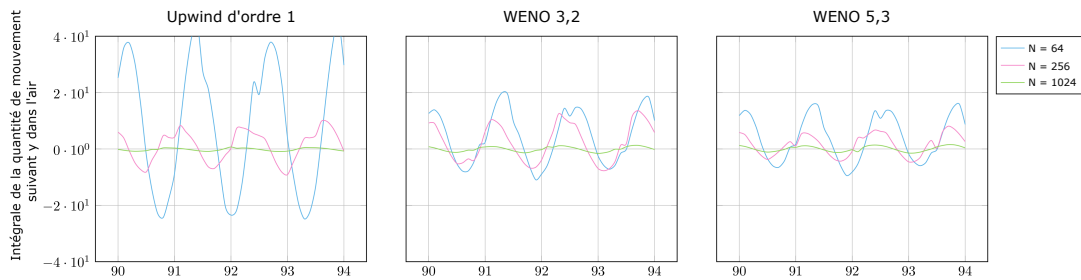
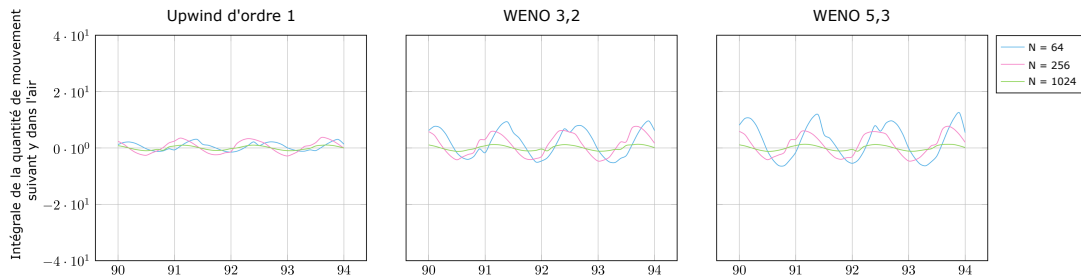


Figure 4.11. – Onde de gravité stationnaire : visualisation de la densité de la vorticité  $\bar{\rho}\bar{\omega}_{vort}$  pour la méthode LSM au temps  $t = 52 s$  (environ 50 périodes) avec trois schémas d'advection différents : Uwind d'ordre 1 (a), WENO 3,2 (b) et WENO 5,3 (c). Les trois graphiques les plus à gauche utilisent la méthode standard alors que les trois graphiques les plus à droite sont les résultats utilisant la méthode HOMP sur les trois même maillages. Pour la méthode standard, des tourbillons sous surfacique intenses sont observés qui sont encore plus apparents lorsque le maillage est affiné, alors que la méthode HOMP converge bien pour toutes les simulations. Les couleurs rouge et bleue représentent les valeurs positive et négative de la quantité de mouvement.

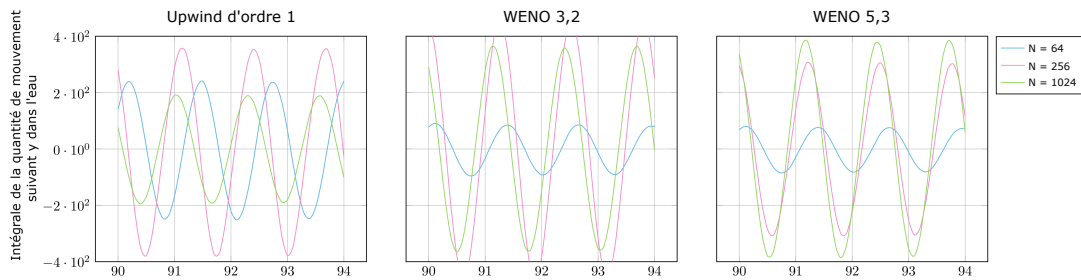
**4.5.3.4.2. Étude du pas de temps** L'impact du pas de temps sur les erreurs numériques est étudié pour ce cas de vérification. Pour cela, la méthode LSM avec des schémas temporel NSSP3,2 et spatial WENO5,3 sont utilisés. Le maillage est fixé à  $N = 256$  (échelle 4). Les différents pas de temps ont été fixés à  $\Delta_{TS} = 0,05 \cdot \frac{1}{4 \cdot TS}$  pour  $TS$  dans  $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$  ce qui correspond approximativement aux nombres de CFL de  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ,



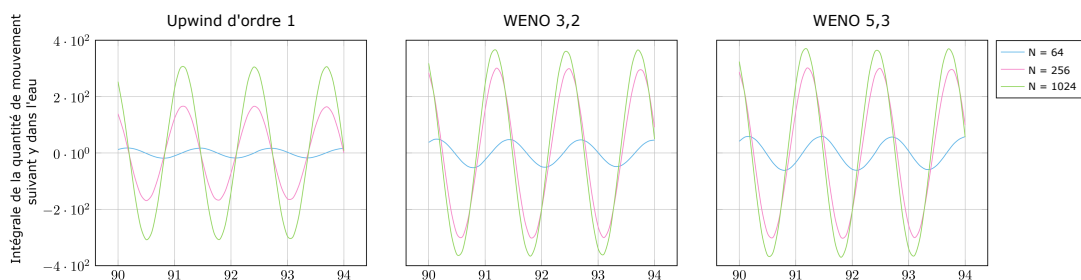
(a) Intégrale de la quantité de mouvement dans la direction des  $y$  pour la phase air avec la méthode standard.



(b) Intégrale de la quantité de mouvement dans la direction des  $y$  pour la phase air avec la méthode HOMP.

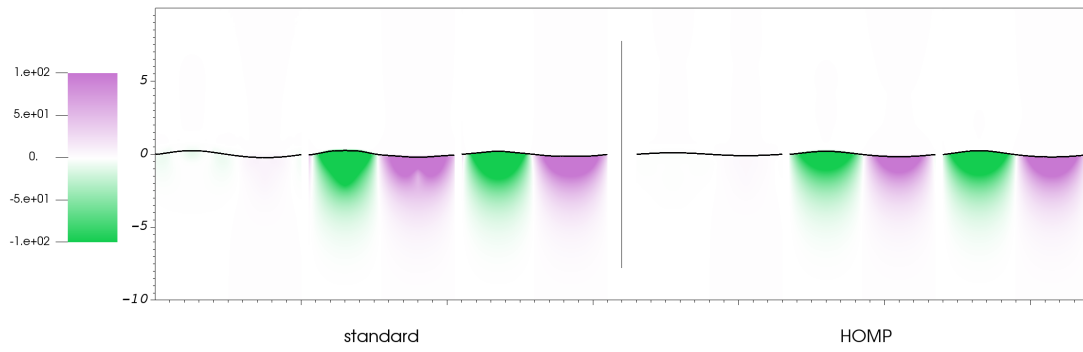


(c) Intégrale de la quantité de mouvement dans la direction des  $y$  pour la phase eau avec la méthode standard.

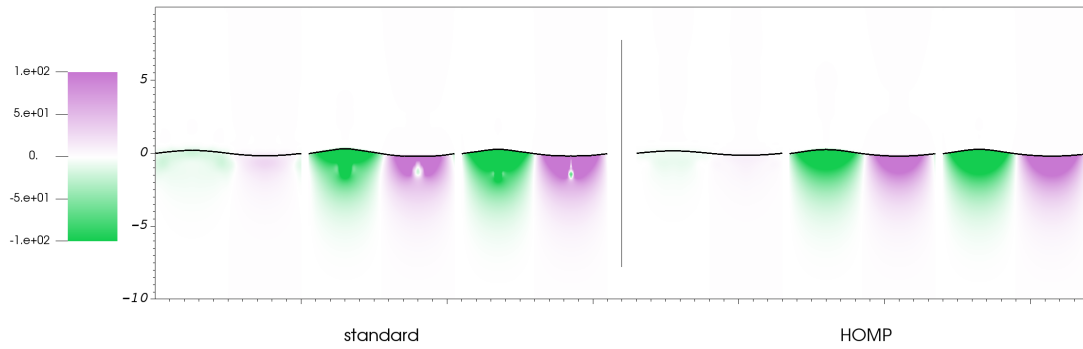


(d) Intégrale de la quantité de mouvement dans la direction des  $y$  pour la phase eau avec la méthode HOMP.

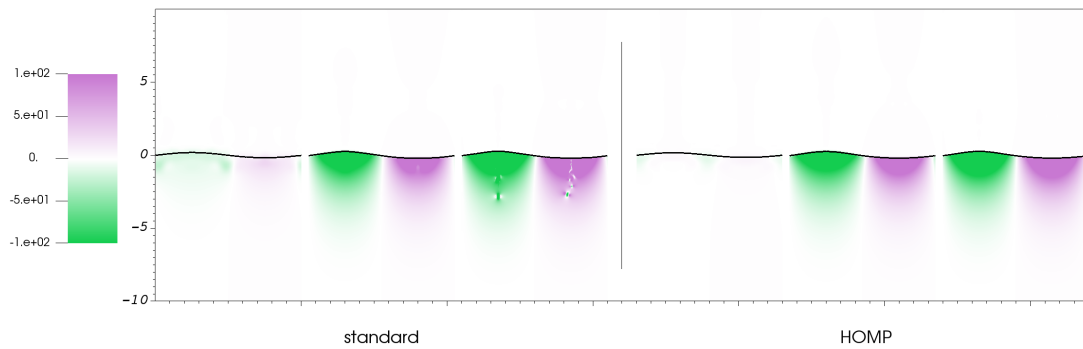
Figure 4.9. – Onde de gravité stationnaire : convergence spatiale de la quantité de mouvement suivant  $y$  en fonction du temps pour la méthode LSM en utilisant divers schémas d'advection, avec et sans la méthode HOMP, après environ 70 périodes. Avec la méthode standard, la quantité de mouvement totale est moins bien conservée. Au contraire, la méthode HOMP capture bien cette quantité dans chaque phase et montre une très bonne convergence numérique.



(a) Upwind d'ordre 1



(b) WENO 3,2

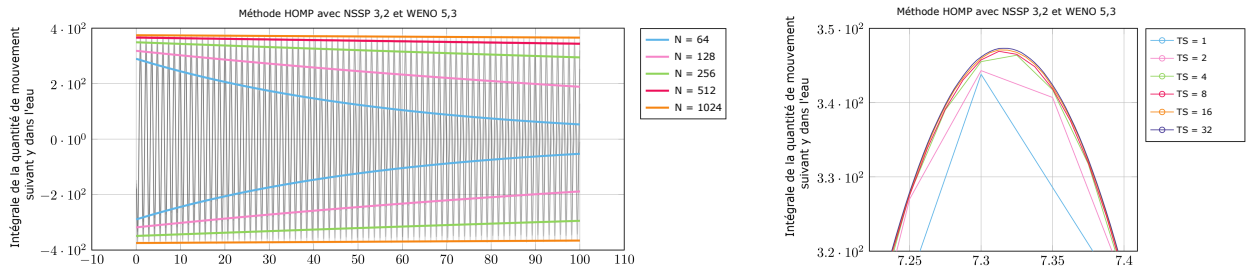


(c) WENO 5,3

Figure 4.10. – Onde de gravité stationnaire : visualisation de la quantité de mouvement dans la direction  $y$  pour la méthode LSM au temps  $t = 52 s$  (environ 50 périodes) avec trois schémas d'advection différents : Upwind d'ordre 1 (a), WENO 3,2 (b) et WENO 5,3 (c). Les trois graphiques les plus à gauche utilisent la méthode standard alors que les trois graphiques les plus à droite sont les résultats utilisant la méthode HOMP sur les trois même maillages. L'utilisation d'un maillage plus fin permet de réduire la diffusion du moment cinétique. Cependant, pour la méthode standard, de la quantité de mouvement parasite apparaît sous l'eau alors que la méthode HOMP converge bien pour toutes les simulations. La couleur violette représente la quantité de mouvement négative et la couleur verte la quantité de mouvement positive.

$\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{64}$  et  $\frac{1}{128}$ . La simulation avec  $TS = 1$  a déjà été présentée dans le paragraphe précédent sur la convergence spatiale et sert de référence. La figure 4.12b montre, comme prévu, une très bonne convergence temporelle. Pour de très petits pas de temps, l'erreur résiduelle est due à la discrétisation spatiale. Les fonctions exponentielles tracées dans le graphique sont définies comme  $M_0 e^{-(t-t_0)\mu_{amortissement}}$  où  $M_0$  est la valeur maximale de la quantité de mouvement pour la première période au temps  $t_0$  et  $\mu_{amortissement}$  est le coefficient d'amortissement mesuré associé, comme résumé dans le tableau 4.2.

Il est observé que, même après un nombre important de pas de temps, pendant une longue période, l'erreur temporelle est très faible et les résultats donnés à  $TS = 2$  (soit une CFL de  $\frac{1}{8}$ ) donnent un résultat suffisamment bon par rapport à des pas de temps plus petits. Il semble donc qu'il ne soit pas nécessaire de choisir un nombre de CFL inférieur à  $\frac{1}{10}$  alors qu'un nombre de CFL autour de  $\frac{1}{4}$  donne des résultats très acceptables, ce qui rend la méthode très fiable même avec de grands pas de temps.



- (a) Convergence spatiale dans l'intervalle  $t \in [0, 100]$  s. Les courbes associées pour les valeurs minimales et maximales sont présentées sous forme de fonctions exponentielles décroissantes colorées (dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.2).
- (b) Gros plan dans l'intervalle  $t \in [7.2, 7.4]$  s pour le maillage  $N = 256$  avec une convergence temporelle.

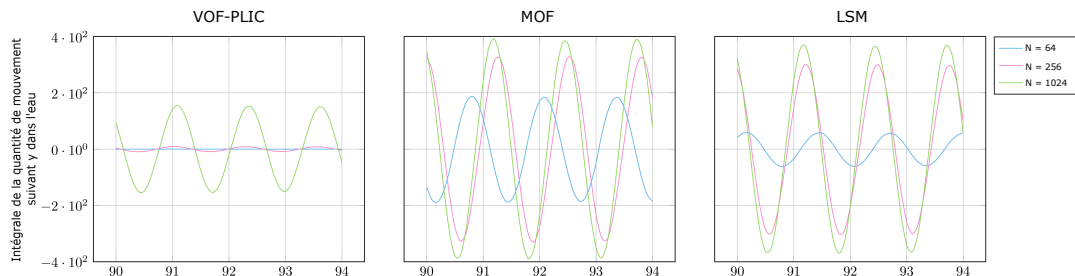
Figure 4.12. – Onde de gravité stationnaire : quantité de mouvement totale dans la direction  $y$  en fonction du temps pour la méthode LSM avec la méthode HOMP. La méthode converge vers une solution plafonnée par les erreurs de discrétisation spatiale.

Échelle ( $TS$ )	1	2	4	8	16
$M_0$ (suivant $y$ )	284.6	316.6	348.5	365.8	374.4
$\mu_{amortissement}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$
$t_0$	1	0.96	0.95	0.95	0.95

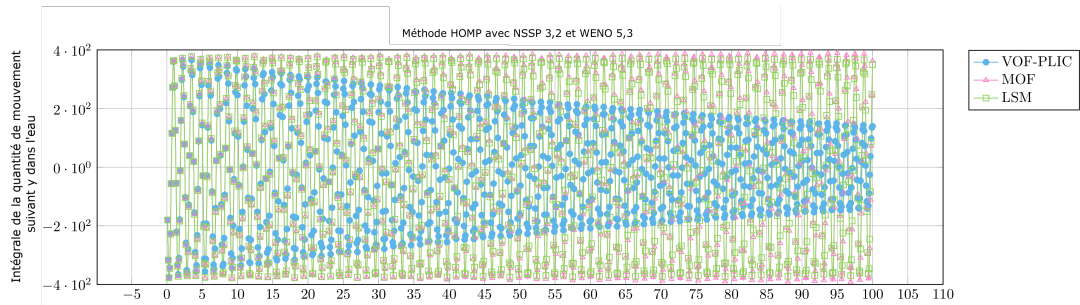
Table 4.2. – Onde capillaire stationnaire : paramètres de la décroissance exponentielle des courbes (sous la forme  $M_0 e^{-(t-t_0)\mu_{amortissement}}$ ) de la quantité de mouvement totale suivant la direction  $y$  mesurée, comme indiqué sur la figure 4.12a.

**4.5.3.4.3. Étude de la représentation d'interface** La fiabilité et la flexibilité de la méthode HOMP est validée en comparant les résultats obtenus avec les méthodes de transport d'interface LSM, VOF et MOF. Les deux dernières sont des méthodes dites pointues car elles reposent sur une discrétisation géométrique explicite de l'interface, ce qui permet de localiser la région de transition de la fraction volumique dans une seule cellule. La géométrie de l'interface est advectée par le fluide sous-jacent et permet, ensuite, de reconstruire la fraction volumique au pas de temps suivant. La méthode MOF est

connue, au même titre que la méthode LSM, pour être plus précise que la méthode VOF, tout en étant plus intensive en calcul.



(a) Résultats pour les méthodes VOF (gauche), MOF (centre) et LSM (droite) après 70 périodes.



(b) Comparaison des trois méthodes d'interface pour le maillage le plus raffiné ( $N = 1024$ ).

Figure 4.13. – Onde de gravité stationnaire : convergence spatiale de la quantité de mouvement suivant la direction  $y$  en fonction du temps pour VOF, MOF et LSM avec la méthode proposée HOMP. Comme prévu, le VOF d'ordre inférieur est plus diffusif alors que les méthodes MOF et LSM donnant des résultats similaires.

Ces trois méthodes d'interface sont facilement disponibles dans Notus et utilisables en changeant les paramètres numériques associés. Ainsi, tous les autres paramètres sont réglés de manière identique aux simulations précédentes avec la méthode LSM.

La figure 4.13 montre les résultats de convergence obtenus avec VOF, MOF et LSM en utilisant la méthode HOMP couplée avec le schéma WENO 5,3. Si les deux méthodes VOF et MOF donnent des résultats assez similaires dans les premiers temps (c'est-à-dire après quelques périodes), il est observé, cependant, un dissipation moindre pour la méthode MOF que pour la méthode VOF. Cela concorde avec le fait que la méthode MOF est plus précise que la méthode VOF. A l'opposé, l'utilisation de la VOF présente un amortissement plus important de la quantité de mouvement pendant une longue période, ce qui reflète une caractéristique d'une méthode d'ordre inférieur. En ce qui concerne la méthode MOF, il est observé une légère augmentation de la quantité de mouvement dans le temps qui peut s'expliquer par la différence importante entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^*$  induite par la prédiction de la fraction de volume basée sur une représentation lisse et la forte advection de l'interface, un comportement caractéristique des méthodes d'ordre élevé. Ce comportement antidiffusif peut également expliquer le meilleur résultat de la méthode MOF par rapport à la méthode LSM pour les maillages les plus grossiers.

Il convient de noter que, dans le cadre de la méthode LSM, de petits sauts de quantité de mouvement peuvent être observés à intervalles réguliers. Cet artefact est dû à la procédure de réinitialisation qui est appliquée pour les simulations avec la méthode LSM tous les 10 pas de temps. Sans la réinitialisation, sa résolution d'équation est très proche

de celle de l'équation de continuité, c'est-à-dire  $\rho^{n+1} \simeq \rho^*$ , en particulier si elles partagent les mêmes schémas numériques, comme pour le schéma WENO 5, 3. Cela rend la méthode LSM particulièrement adaptée pour les mouvements de fluides à deux phases. Cependant, au cours du temps, la méthode LSM est contractée ou étalée par le champ de vitesse du fluide, tout comme le champ de fraction de volume. Lorsque la réinitialisation est effectuée à la fin d'un pas de temps, la fraction de volume régularisée associée à  $\rho^{n+1}$  (calculée par la fonction Heaviside) est instantanément et fortement modifiée. Le nouveau champ de densité de  $\rho^{n+1}$  s'écarte donc beaucoup plus de la  $\rho^*$  prédite que si aucune réinitialisation n'est effectuée. En effet, il est possible d'appliquer la procédure de réinitialisation plus souvent afin d'étaler l'erreur numérique. Néanmoins, la déformation étant intrinsèquement induite par le fluide sous-jacent et l'hypothèse d'interface lisse, cette procédure ne peut éliminer toutes les erreurs accumulées.

#### 4.5.4. Onde capillaire stationnaire

Ce cas de vérification a été conçu afin de confirmer les résultats présentés dans le cas précédent pour les mouvements interfaciaux à très petite échelle, c'est-à-dire à l'échelle capillaire. Il est donc très similaire au précédent, bien que l'étude se concentre ici sur les forces de tension superficielle plutôt que sur la force gravitaire qui est ainsi supprimée. Afin de refléter les éventuels effets visqueux à des échelles de maille fine et de tester la méthode dans un cadre général, l'hypothèse liée à la théorie linéaire n'est pas utilisée. Par conséquent, les fluides sont visqueux. Contrairement à la gravité qui agit comme une force volumique, dans le modèle à un fluide, la tension superficielle est singulière à l'interface et interagit donc différemment avec l'écoulement.

##### 4.5.4.1. Description de la condition initiale

Le domaine a été réduit d'un facteur de  $10^{-3}$  : une onde horizontale 2D est initialisée dans une boîte de taille  $10\text{ mm} \times 20\text{ mm}$ . Les conditions aux limites sont périodiques dans la direction  $x$  et la paroi non glissante en haut et en bas. L'onde est initialisée comme une fonction sinusoidale d'amplitude  $0,2\text{ mm}$  et de longueur d'onde  $\lambda = 10\text{ mm}$ . L'amplitude relative a été augmentée par rapport au cas précédent afin de correspondre plus étroitement aux applications à l'échelle capillaire. Le coefficient de tension de surface est pris comme  $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}\text{ N} \cdot \text{m}$ . La masse volumique et la viscosité sont fixées sur  $\rho_1 = 10^3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\mu_1 = 10^{-3}\text{ Pa} \cdot \text{s}$  (resp.  $\rho_2 = 1\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-5}\text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) pour la phase liquide (resp. la phase gazeuse). La figure 4.14 est la représentation de la condition initiale associée à ce cas de vérification.

##### 4.5.4.2. Schémas numériques

En ce qui concerne le calcul de  $\bar{\rho}^*$  et le terme inertiel  $\bar{\rho}^* \bar{\mathbf{u}}^*$ , le schéma WENO 5, 3 couplé à une intégration Runge-Kutta d'ordre 2 (NSSP3, 2) est utilisé. La méthode de représentation d'interface est LSM avec un paramètre de régularisation de  $3\Delta x$ .

Les forces de tension superficielle sont modélisées dans l'équation de la quantité de mouvement d'une manière CSF (voir 3.10). Suite aux conclusions de l'étude réalisée par F. Denner *et al* [169], il est important, en plus d'avoir des champs de densité et de viscosité lisses, d'utiliser une représentation précise de la fonction caractéristique  $\bar{\chi}$  pour calculer les forces de tension superficielle de telle sorte que la force volumétrique externe ajoutée à l'équation du moment soit :

$$\sigma \kappa \nabla \bar{\chi}$$

où  $\bar{\chi}$  est calculée selon la même procédure que celle décrite pour le cas de la goutte de grande densité, grâce à la méthode du calcul de fraction volumique décrite dans l'article

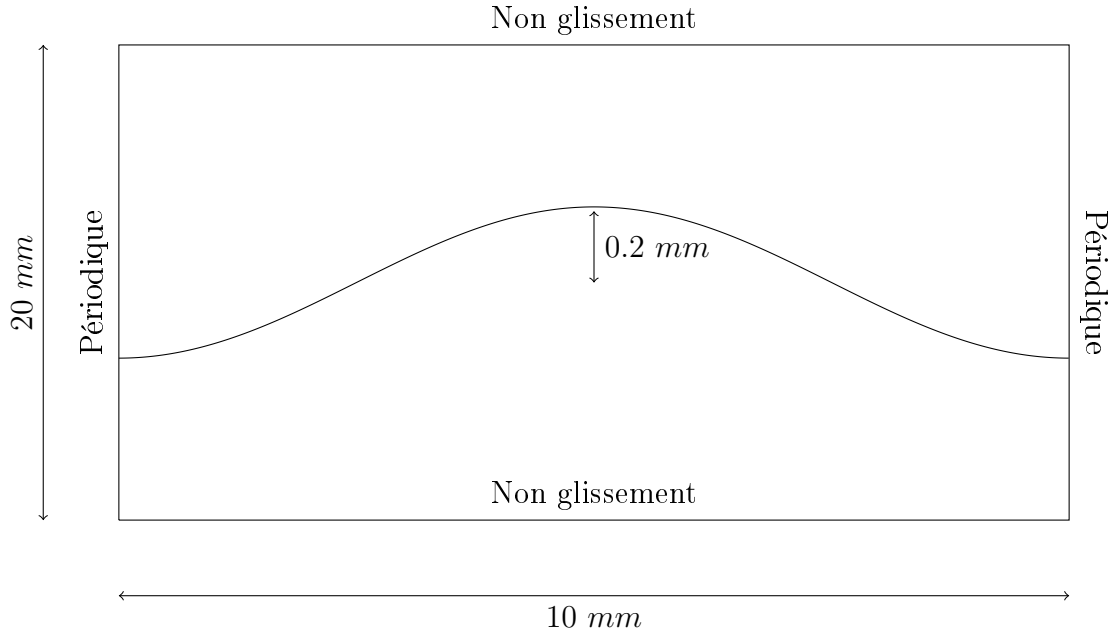


Figure 4.14. – Onde capillaire stationnaire : schéma de la condition initiale de l'onde capillaire stationnaire. La vitesse est nulle dans tout le domaine. Le domaine de simulation est  $[0, 10] \times [0, 20]$  en millimètres. Et l'amplitude de la vague est  $0.2 \text{ mm}$ .

de C. Min *et al* [143], et  $\kappa$  est la courbure calculée avec une précision d'ordre 4 dans la direction normale comme prescrit dans l'article de M. Coquerelle *et al* [137].

#### 4.5.4.3. Discrétisations

La célérité des ondes capillaires, selon la théorie linéaire, si l'on néglige les effets visqueux, est fonction de  $\lambda^{-1/2}$ . Elle peut être approchée pour les ondes profondes par :  $c \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1} \frac{2\pi}{\lambda}}$  car  $\tanh(\frac{2\pi d}{\lambda}) \simeq 1$  et la force de gravité est négligée. La célérité associée au cas d'étude est  $c = 0.21 \text{ m.s}^{-1}$ . En pratique, la vitesse dans la phase aqueuse est inférieure à la célérité, et les vitesses maximales observées sont  $0.16 \text{ m.s}^{-1}$ . De plus, les méthodes de tension de surface sont soumises à une contrainte de pas de temps plus restrictive que les CFL d'advection. Elle est fonction de  $\Delta x^{3/2}$ .

Une grille régulière et uniforme est utilisée pour la discrétisation du domaine. Le nombre totale de mailles est  $n_{\text{ligne}} \cdot n_{\text{colonne}} = 2N \cdot N = 2N^2$ , avec  $N$  le nombre de mailles dans la direction  $x$ . Celui-ci va varier entre 32 (échelle 1), 64 (échelle 2), 128 (échelle 4) et 512 (échelle 16). Le pas d'espace peut, ainsi, être calculé comme  $\Delta x = \frac{\lambda}{N}$ . Le pas de temps choisi est fixé à  $10^{-4} \text{ s}$  (échelle 1),  $5.0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  (échelle 2),  $2.5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  (échelle 4) et  $6.25 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  (échelle 16).

#### 4.5.4.4. Résultats

La figure 4.15 montre les champs de densité-vorticité (c'est-à-dire  $\bar{\rho}\bar{\omega}$ ) résultants pour différentes échelles spatiales. Qualitativement, il est observé que, avec la méthode standard, la quantité de vorticité sous-interfaciale non physique est beaucoup plus élevée que lors de l'utilisation de la méthode HOMP. Sous la crête, pour le maillage grossier, une zone beaucoup plus grande (représentée par le cercle sur la figure 4.15) de vorticité erronée élevée sous la crête est observée. En revanche, le maillage fin, la forme est moins étendue

et la valeur maximale  $y$  est également réduite de moitié, comme le montre le tableau 4.3. De plus, sous le creux, il est observé également une bien meilleure convergence, avec le HOMP, vers le maillage plus fin où la vorticité est concentrée plus près de l'interface. Il est important de noter qu'à mesure que le maillage se raffine, les petits courants et tourbillons parasites induits par les transferts de quantité de mouvement, comme cela a été observé dans le cas des ondes de gravité, sont amortis par des effets visqueux, non négligeables à cette échelle spatiale. Cela explique la réduction de la vorticité maximale et la convergence des simulations, même avec la méthode standard. Pour un maillage plus fins ( $N > 128$ ), comme le montrent les résultats les plus à droite sur la figure 4.15, ces poches de vorticité parasite finissent par disparaître pour toutes les méthodes.

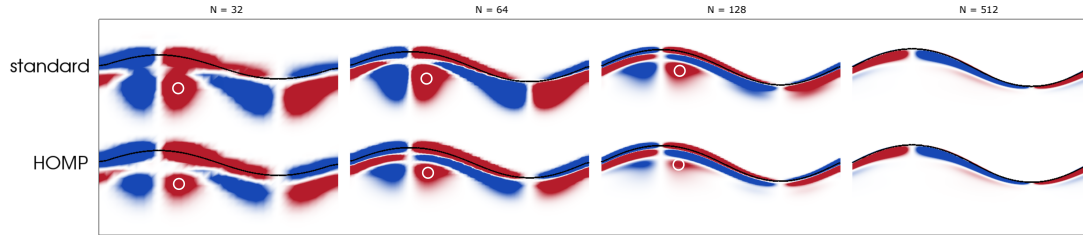


Figure 4.15. – Onde capillaire stationnaire : convergence spatiale de la densité-vorticité  $\bar{\rho}\bar{\omega}$ , en utilisant la méthode *LSM* avec la méthode standard (ligne du haut) et avec la méthode HOMP (ligne du bas), au temps  $t = 0,2 s$ . Les mailles sont, de gauche à droite, obtenues avec :  $N = 32, 64, 128, 512$ . Le maximum de densité de vorticité parasites (représenté par des cercles blancs) est particulièrement observable sur les mailles les plus grossières, notamment sous la crête. Elles sont beaucoup plus petites et disparaissent plus rapidement avec la méthode HOMP. La carte des couleurs va de  $-10^4 kg.m^{-3}.s^{-1}$  (bleu) à  $+10^4 kg.m^{-3}.s^{-1}$  (rouge).

N	32	64	128	512
standard	4.0	5.2	2.0	∅
HOMP	2.4	2.4	1.2	∅

Table 4.3. – Onde capillaire stationnaire : valeurs approximatives de densité-vorticité maximale  $max(\bar{\rho}\bar{\omega})$  au centre de la masse de vorticité parasite sous la crête (voir figure 4.15 pour sa localisation) au temps  $t = 0,2 s$ . Les unités sont  $10^4 kg.m^{-3}.s^{-1}$ .

#### 4.5.5. Impact de gouttes

L'étude de l'impact d'une goutte sur une surface libre plane permet la validation de la capacité de la méthode à saisir correctement la dynamique d'un cas physique plus complexe. Ce problème a été largement étudié dans la littérature. Le premier impact provient de la littérature J.-L. Liow [170] et D. Morton *et al* [171]. Le second impact est celui provenant de la thèse de D. Cole [80]. Ces impacts possèdent des nombres de Reynolds ( $Re = \frac{\rho_{eau}UD}{\mu_{eau}}$ ), Weber ( $We = \frac{\rho_{eau}U^2D}{\sigma}$ ) et Froude ( $Fr \equiv \frac{U^2}{gD}$ ) différents, avec  $D$  le diamètre de la goutte,  $U$  la vitesse moyenne de la goutte avant impact et  $\rho_{eau}$ ,  $\mu_{eau}$  et



$\sigma$  les propriétés des liquides.

Afin de valider la méthode, le cas “B” de D. Morton *et al* est reproduit (correspondant à  $Re = 7250$ ,  $We = 248$  et  $Fr = 220$ ). Ce cas montre la formation d’une cavité sphérique provenant de l’impact de la goutte sur la surface, suivie de la création et l’advection de nombreuses ondes capillaires au sein du cratère. Ces capillaires se dirigent vers le centre de la cavité. Ensuite, la rétractation du cratère génère l’apparition d’un jet épais relachant, dans son mouvement ascensionnel, des gouttes secondaires. Ce cas est intéressant car il correspond à des nombres adimensionnels élevés.

Dans un second temps, l’expérience “III” de D. Cole (correspondant à  $Re = 3082$ ,  $We = 62$  et  $Fr = 67$ ) est également simulée. Ce cas présente des phénomènes très intéressants : la formation d’une petite cavité ressemblant à un champignon au premier stade, suivie d’une cavité qui finit par s’effondrer en un pincement. Ensuite, une bulle d’air est capturée sous la surface tandis qu’un jet épais s’élève. L’utilisation d’un colorant permet de mettre en évidence la formation d’un anneau tourbillonnaire qui entraîne la bulle dans les profondeurs de l’eau.

Les phénomènes liés aux deux cas sont illustrés dans les images de comparaisons avec les simulations.

Il est important de noter que les différents phénomènes qui surviennent après l’impact de la goutte sur la piscine sont complexes et très sensibles aux conditions initiales (ainsi qu’à l’incertitude des mesures expérimentales). La tension de surface et la capture de très petites structures (de l’ordre de  $10^{-5} m$ ) qui déclenchent certains phénomènes conséquents est un facteur clé pour des simulations précises. Pour ces raisons, cette application est encore aujourd’hui un problème difficile pour le calcul numérique et son analyse détaillée est au-delà de la portée de ce manuscrit. La capacité de la méthode proposée HOMP est démontrée grâce à ces deux premiers cas de validation à l’expérimental.

#### 4.5.5.1. Description de la condition initiale

Il n’est pas nécessaire d’utiliser la même taille de domaine physique que dans les expériences, car l’hypothèse du bassin profond est largement valable avec un domaine plus petit. De plus, l’impact des parois latérales peut être négligé dans les premières étapes de l’expérience. La dynamique de l’impact et de ses conséquences est principalement axisymétrique. Le domaine est une boîte de taille  $9D \times 18D$  avec une condition axisymétrique, pas de glissement sur le fond, glissement sur la droite et une condition neumann homogène sur la limite supérieure. Cela permet de laisser l’air circuler librement comme dans l’expérience tout en confinant le liquide à l’intérieur du domaine de calcul. La piscine de liquide est initialisée au centre vertical du domaine, c’est-à-dire à  $y = 0$ , d’où la profondeur de la piscine est de  $9D$ . La figure 4.16 illustre la configuration.

Les paramètres physiques du cas “B” de D. Morton *et al* (indiqué par l’exposant B) et du cas “III” de D. Cole (indiqué par l’exposant “III”) sont résumés dans le tableau 4.4. Ces choix conduisent à des valeurs numériques légèrement différentes pour  $Re$ ,  $We$  et  $Fr$  et mais cela n’a pas montré de différence notable dans la dynamique de l’impact tout en correspondant plus étroitement aux mesures des propriétés du fluide expérimental. La gravité est fixée à  $g = 9.81 m.s^{-2}$ .

Bien que la condition initiale de la vitesse du fluide à l’intérieur et à proximité de la goutte soit un problème compliqué, plusieurs tests ont démontré qu’il n’était pas nécessaire de la positionner trop haut au-dessus de la piscine, d’où le réglage en  $y = 2D$ . De plus, la vitesse  $U$  est initialement imposée à l’intérieur de la goutte. Cependant, afin d’atténuer toute discontinuité, un étalement linéaire de cette vitesse est effectué dans

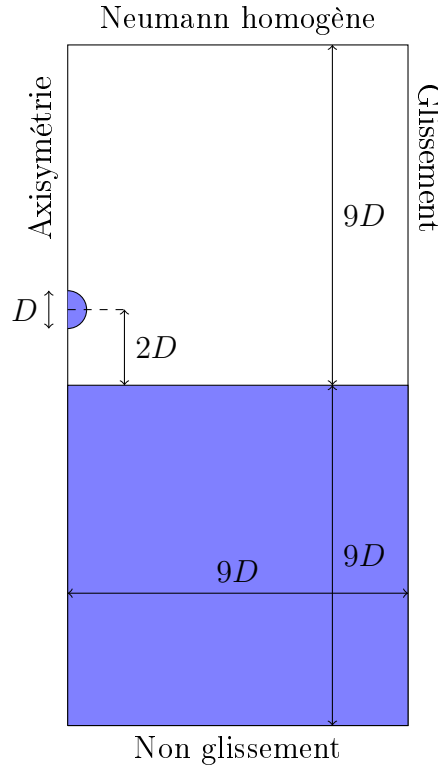


Figure 4.16. – Impact de gouttes : schéma de la condition initiale. Le domaine de simulation est  $[0, 9D] \times [0, 18D]$ . Les données associées aux simulations sont présentées dans le tableau 4.4.

l'air environnant de telle sorte que :

$$U_0 = \begin{cases} U & \text{si } r \leq R \\ U \left(1 - \frac{r-R}{0.4}\right) & \text{si } r \leq 1.4R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $U_0$ , la vitesse initiale,  $R$  le rayon de la goutte et  $r$  la distance du centre de la cellule au centre de la goutte.

#### 4.5.5.2. Schémas numériques

Pour capturer avec précision les effets de tension de surface qui sont un point clé et déclencheur de la plupart des phénomènes attendus, la méthode LSM avec le calcul de courbure le plus précis est utilisé avec un schéma spatial WENO 5,3 et temporel NSSP 3,2 pour intégrer les équations d'advection. Le paramètre de régularisation associé à l'épaisseur de l'interface a été fixé à  $1,5\Delta r$  et la méthode numérique est similaire à celle utilisée pour le cas d'onde stationnaire capillaire. Le terme de gravité est également calculé avec le même schéma que pour le cas d'onde gravitaire stationnaire.

#### 4.5.5.3. Discrétisations

Comme la dynamique de l'écoulement est moins importante loin de la zone d'impact, afin de gagner du temps de calcul, le domaine physique a été discrétisé avec une grille avec un espacement uniforme centré autour de la zone d'intérêt de taille  $3D \times 6D$  et un espacement croissant exponentiellement plus loin, comme le montre la figure 4.17. Dans la zone uniforme, la discrétisation spatiale est telle que  $\Delta r = \Delta y = \frac{6D}{N}$  où  $N$  (respectivement

	Cas "B" [171]	Cas "III" [80]
Fr	220	67
We	248	62
Re	7250	3082
$D$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$
$U$	2.5	1.32
$\rho_{eau}$	1000	998
$\rho_{air}$	1	1.2
$\mu_{eau}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-3}$
$\mu_{air}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$
$\sigma$	$73.1 \cdot 10^{-3}$	$72.8 \cdot 10^{-3}$

Table 4.4. – Les caractéristiques initiales des deux simulations sont présentées.  $D$  est le diamètre de la goutte en  $m$ ,  $U$  la vitesse moyenne de la goutte à l’impact en  $m.s^{-1}$ ,  $\rho_{eau}$  (respectivement  $\rho_{air}$ ) la masse volumique de l’eau (respectivement de l’air) en  $kg.m^{-3}$ ,  $\mu_{eau}$  (resp.  $\mu_{air}$ ) la viscosité dynamique de l’eau (respectivement de l’air) en  $Pa.s$  et  $\sigma$  la tension de surface entre l’air et l’eau en  $N \cdot m^{-1}$ .

$2N$ ) est le nombre total de cellules dans la direction  $r$  (resp.  $y$ ). Afin de pouvoir saisir avec précision les très petits phénomènes physiques quise produisent en particulier à proximité de l’interface (par exemple la cavité en forme de champignon, le pincement, la bulle emprisonnée et les gouttes secondaires),  $N$  est fixé à 1024 (c’est-à-dire que le maillage est constitué de  $1024 \times 2048 = 2\,097\,152$  cellules). Cela correspond à un nombre de cellules par diamètre de  $\Delta r/D \simeq 170$ , et donne donc  $\Delta r^B = 1,7 \cdot 10^{-5}m$  pour le cas "B" et  $\Delta r^{III} = 1,541 \cdot 10^{-5}m$  pour le cas "III".

Le choix du pas de temps est très restrictif à ces petites échelles spatiales car les ondes capillaires peuvent se déplacer très rapidement. Afin d’éviter toute instabilité, conformément aux prescriptions de F. Denner *et al* [172], une contrainte de pas de temps  $\Delta t$  est imposée sous la forme suivante :

$$\Delta t \leq CFL \frac{\min(\Delta r)}{c_\sigma + \max(|\bar{u}|, |\bar{v}|)}$$

où  $\cdot$  désigne la direction spatiale la plus restrictive (*i.e.* ici  $r$  ou  $y$ ),  $c_\sigma = \sqrt{\frac{2\pi}{(\rho_l + \rho_g)\max(\Delta r)}}$  est la célérité de l’onde capillaire la plus rapide capturée par le maillage et  $\mathbf{u}$  est la vitesse d’écoulement. Cela correspond à la condition classique de CFL où la vitesse considérée est la vitesse maximale d’une particule de fluide à l’interface où la plus petite onde peut éventuellement se produire. Cependant, à des échelles de l’ordre de  $10^{-5}m$ , les forces visqueuses commencent à jouer un rôle non négligeable et diffusent des ondes capillaires qui sont rapidement amorties. Même si des pas de temps plus grands ont donné des résultats très satisfaisants, par souci de rigueur, la  $CFL$  est fixée à 1 avec la contrainte prescrite.

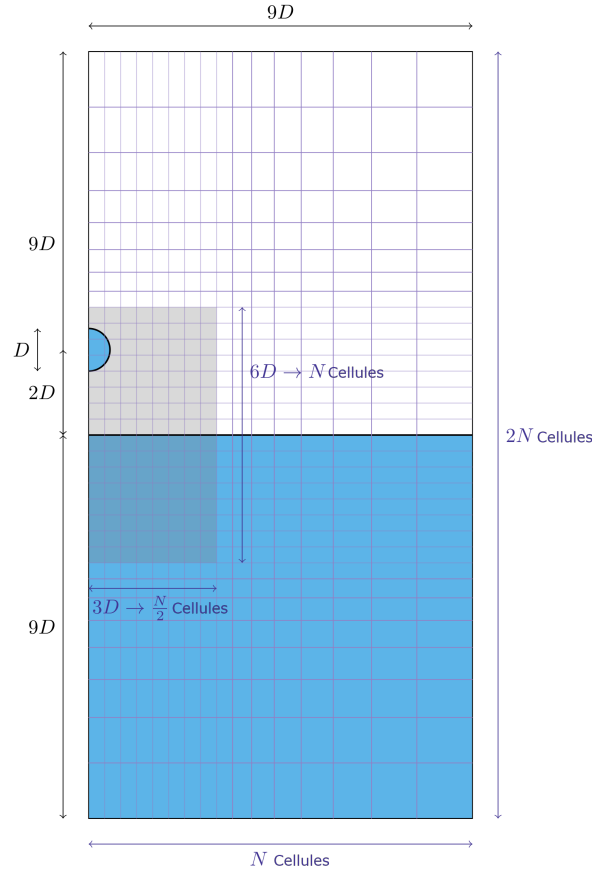


Figure 4.17. – Impact de gouttes : domaine physique et maillage sous-jacent (avec  $N = 16$  pour l’illustration). La partie uniforme du maillage a été mise en évidence en gris clair.

#### 4.5.5.4. Résultats

**4.5.5.4.1. Cas “B” de D. Morton *et al* et J.-L. Liow *et al*** La figure 4.18 compare directement les phénomènes associés à l’impact de la goutte, 5 temps différents, entre l’expérimental et la simulation numérique avec la méthode proposée. Le temps est adimensionnalisé suivant

$$T_{morton} = (t - t_{impact}) \frac{U}{D}$$

Après l’impact, le cratère formé semble être de forme et de taille similaire à celui observé expérimentalement. Puis, l’advection des ondes capillaires le long du cratère génère correctement cette forme d’anneau autour du cratère ( $T_{morton} = 16.0$ ). Un léger retard sur la rétractation du cratère est à noter pour la simulation numérique ( $T_{morton} = 20.0$ ). Ce retard pouvant être dû aux erreurs numériques pendant la simulation ou à l’utilisation d’une condition légèrement différente de l’expérimental. Finalement, un jet épais est généré avec l’observation du début de détachement de la goutte secondaire ( $T_{morton} = 41.0$ ).

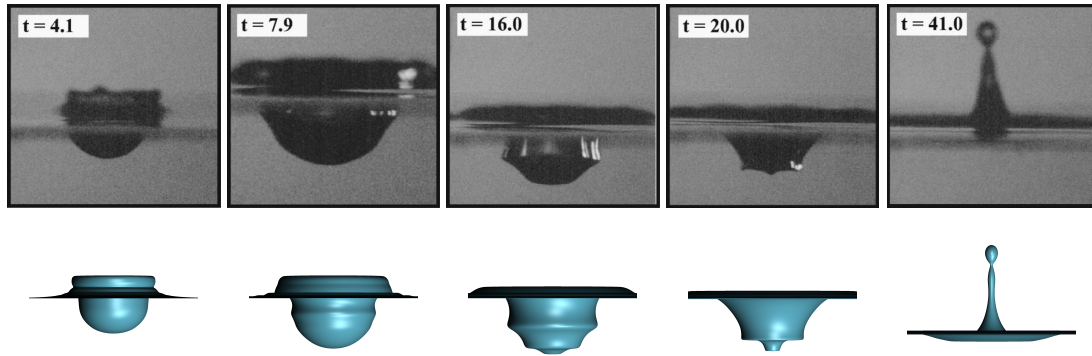


Figure 4.18. – Impact de gouttes : comparaison des phénomènes observés expérimentalement par D. Morton *et al* [171] à la simulation faite avec la méthode proposée à  $T_{morton}$  : 4.1, 7.9, 16.0, 20.0 et 41.0.

En utilisant la méthode HOMP, la cavité et la formation de jet résultantes sont qualitativement similaires aux expériences de D. Morton *et al* [171]. Les résultats sont affichés dans la figure 4.19. Il est observé une très bonne concordance de la simulation concernant la forme de la cavité. Ici, le temps est sans dimension  $T_{morton}$  et les longueurs sont également adimensionnalisées par  $D$ . La profondeur de la cavité mesurée, représentée sur la figure 4.19 suit les mêmes courbes que les résultats de la littérature. Cependant, à partir de  $T_{morton} = 15$ , une petite onde capillaire a convergé vers le centre de la cavité sans pour autant disparaître : cela provoque la formation notable d’une petite bosse (illustrée dans la figure 4.20) pendant une période très courte, où le profil de surface induit une courbure très élevée capturée par la simulation utilisée ici qui ne peut être saisie avec des mailles plus grossières. Ce phénomène fait remonter la mesure du niveau de l’eau vers le haut puis vers le bas dans la figure 4.19.

En ce qui concerne le jet, dans la simulation, une hauteur maximale plus élevée d’environ 5.8 (adimensionnée par rapport à  $D$ ) est observée avant qu’il ne libère une première goutte à  $T_{morton} = 41.0$ . Le temps de libération est en bon accord avec les simulations de B. Ray *et al* [173], mais il est plus tardif que dans les résultats expérimentaux. Ici, le lecteur peut noter une erreur possible dans les temps d’expérimentation et de simulation déclarés de D. Morton *et al* [171]. Cela correspond à la dernière image (voir 4.18 ligne supérieure, dernière colonne) au temps  $T_{morton} = 41$  qui est en contradiction avec les mesures expérimentales (voir 4.19, disques pleins) pour la discontinuité autour de  $T_{morton} = 37.0$ . Néanmoins, le diamètre de la goutte secondaire a été mesuré à  $D = 2.6\text{ mm}$ , d’où un rapport de 0.897 par rapport à la goutte initiale, qui est du même ordre que celui rapporté par les travaux précédents. En raison de l’existence de plusieurs ondes capillaires le long du jet, peu après la goutte secondaire, il est également observé la libération d’une deuxième goutte secondaire.

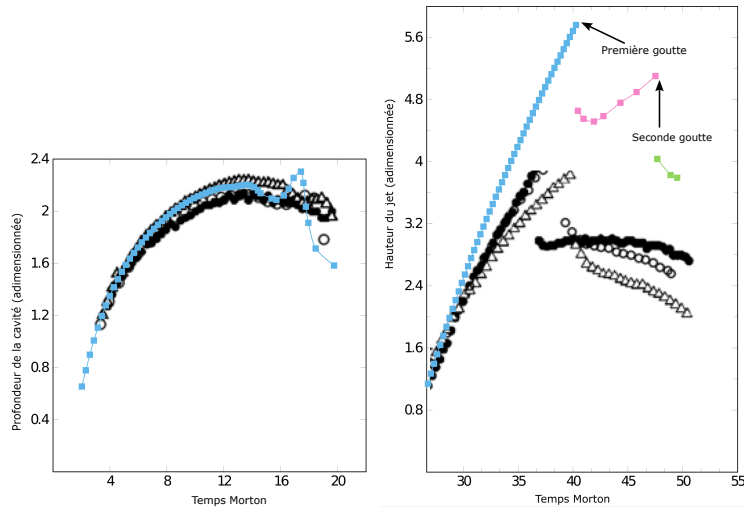


Figure 4.19. – Impact de gouttes : profondeur de la cavité (gauche) et évolution temporelle du jet (droite) par rapport à B. Ray *et al* et D. Morton *et al* [173, 171]. Toutes les valeurs sont additionnées. Les résultats de la méthode sont en carrés bleus remplis, B. Ray *et al* en cercles creux, D. Morton *et al* en triangles creux (simulation) et disques pleins (expérience).

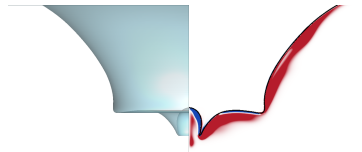


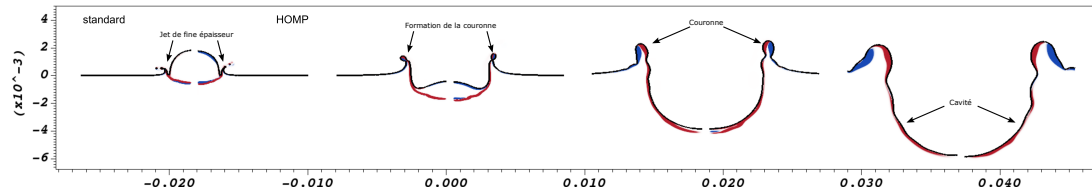
Figure 4.20. – Impact de gouttes : phénomène de rétraction de la cavité. Le profil de surface libre est en  $2D$  (ligne noire épaisse) avec coloration densité-vorticité (même échelle que dans la figure 4.21a) chevauchant la révolution  $3D$  semi transparente. Une petite bosse apparaît au centre de la cavité.

La figure 4.21 résume les résultats obtenus pour les simulations avec et sans la méthode HOMP du cas “B” [171]. Dans la figure 4.21a, sans l’utilisation de la méthode HOMP, les tout premiers stades de la formation de la cavité sont très différents : peu après l’impact (environ  $t = 1\text{ ms}$ ), la fine pellicule est moins bien capturée, la couronne a moins d’énergie et se développe donc moins haut tout en s’étalant plus. Le lecteur peut également remarquer une différence non négligeable dans le champ de vorticité au sommet de la goutte sur la première image qui est ensuite transférée au centre de la cavité ; la méthode HOMP capture une couche importante de vorticité négative qui est due à l’importante inertie à l’intérieur de la goutte. Ces différences ont un impact sur la dynamique globale de la simulation, ce qui fait que la méthode standard ne parvient pas à capturer le processus avec précision.

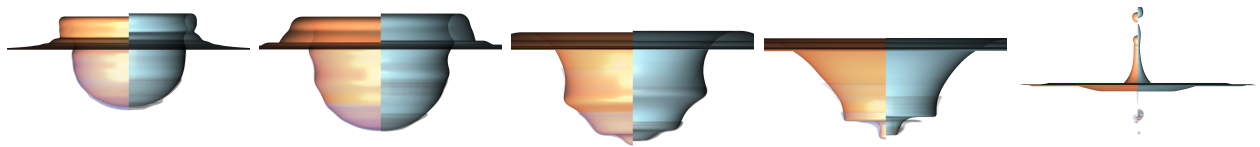
Les différences sur la forme de la surface de l’impact peuvent être observées dans la figure 4.21b. Comme expliqué précédemment, la couronne de la simulation standard (surface orange) formée est beaucoup plus basse et étalée que la couronne de la méthode HOMP. Les phénomènes d’ondes capillaires et de rétractation de la cavité sont de ce fait modifiés. Une différence notable est également observable sur la formation d’anneau de vorticité tout au long de la simulation. Cet anneau est suivi par un marqueur disposé initialement

dans la goutte. Sur la dernière image, une forme totalement différente de l’anneau de vorticité est à remarquer.

La méthode proposée HOMP permet une meilleure représentation de la dynamique de surface globale de l’impact de la goutte. De plus, un anneau de vorticité de plus grand diamètre semble être capturé.



(a) Comparaison de la densité-vorticité sans (côté gauche de chaque cliché) et avec HOMP (côté droit de chaque cliché). L’interface est dessinée avec une ligne noire épaisse et l’échelle de couleur va de  $-10^{-5} kg.m^{-2}.s^{-1}$  (bleu)   0 (blanc)    $+10^{-5} kg.m^{-2}.s^{-1}$  (rouge). De gauche à droite : clichés à  $t = \{1.02, 2.04, 5.1, 10.6\} ms$ .



(b) Comparaison de la surface pour la méthode standard (en orange) et la méthode HOMP (en bleue). Un colorant a été rajouté dans la goutte initiale pour suivre la trajectoire de l’eau contenue dans la goutte. Celui-ci est représenté par une masse grise transparente dans les deux méthodes. Les temps de simulations vont de gauche à droite  $t = \{3.88, 9.8, 13.3, 18.1, 36.85\} ms$ .

Figure 4.21. – Impact de gouttes : comparaison de la méthode standard (  gauche de chaque image) avec la méthode proposée HOMP (  droite de chaque image).

**4.5.5.4.2. Cas “III” de D. Cole** Les résultats numériques présentés dans la figure 4.22 se comparent très bien aux photos prises par D. Cole [80]. Une disparité similaire a été observée pour la méthode standard comme dans le cas précédent, ce qui justifie à nouveau la nécessité d’utiliser la méthode HOMP. La forme de champignon à  $t = 3.67 ms$  est correctement représentée par la simulation numérique. L’ensemble des phénomènes sous jacents, forme de cylindre ( $t = 6.67 ms$ ), apparition du pincement ( $t = 13 ms$ ) et la capture d’une bulle ( $t = 18 ms$ ), sont présents. Dans la simulation, la bulle capturée a un diamètre d’environ  $0.5 mm$ , ce qui est deux fois plus petit que dans l’expérience. Cette différence n’est pas surprenante car ce phénomène de piégeage de la bulle est, comme expliqué précédemment et dans la littérature, très sensible aux conditions initiales et aux mesures d’erreurs, ainsi qu’aux erreurs numériques. De plus, un colorant a été ajouté à l’intérieur de la goutte afin de retracer le liquide initial et de mettre en évidence les tourbillons. Sur l’ensemble des images, ce colorant est représenté par une couche grise. Tout au long de l’impact, la dynamique de la trajectoire est bien calculée. Le colorant se déplace le long de la paroi de la cavité, entraîné par un anneau de vorticité proche du capillaire, puis ce volume de colorant est éjecté lors de la rétractation de la cavité ( $t = 13 - 18 ms$ ). Sur les deux dernières images, l’anneau de vorticité continue sa descente et entraîne le colorant avec lui, ce qui permet de visualisé le mouvement d’eau à ce niveau. La disposition et la forme du colorant est très proche de celui observable lors de l’expérience de D. Cole. Ce

résultat appuie la validation de la méthode proposée et sa justification d'utilisation pour représenter des phénomènes observés expérimentalement.

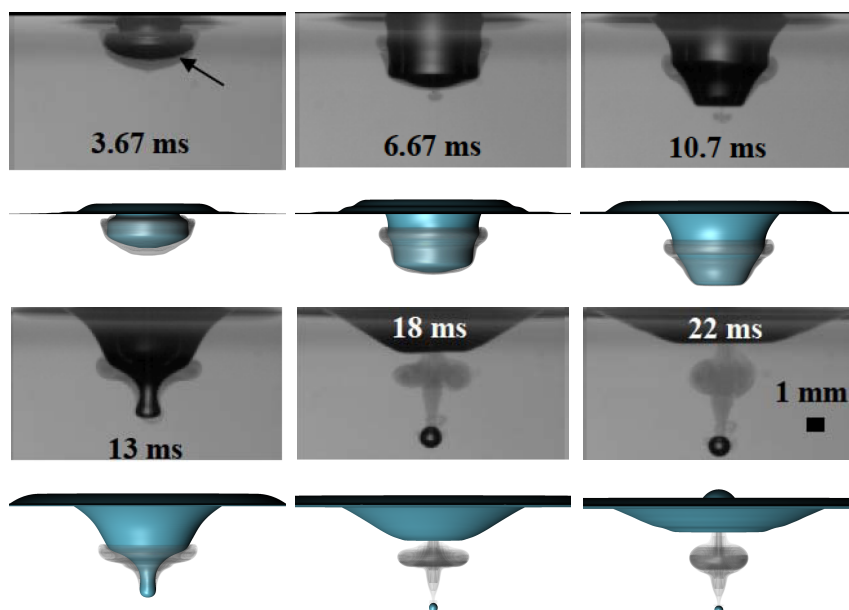


Figure 4.22. – Impact de gouttes : comparaison des phénomènes observés expérimentalement par D. Cole à la simulation avec la méthode proposée.

Lorsque le pincement s'effondre sur lui-même, un très fort courant d'air sort de la cavité vers le haut à une vitesse de  $16 m.s^{-1}$ . Deux petites gouttelettes de  $0.2 mm$  et  $0.3 mm$  de diamètre sont observées. Ce phénomène, visible sur l'image 4.23, apparaît au début de la formation du jet, autour de  $t \sim 15 ms$  et l'éjection des gouttelettes est à une vitesse d'environ  $7.3 m.s^{-1}$  et  $1.65 m.s^{-1}$ . Ce très petit phénomène a également été observé dans la thèse de D. Cole [80].

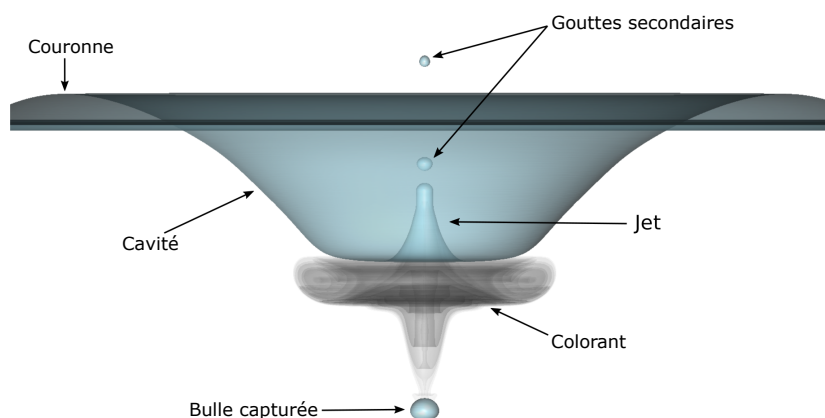
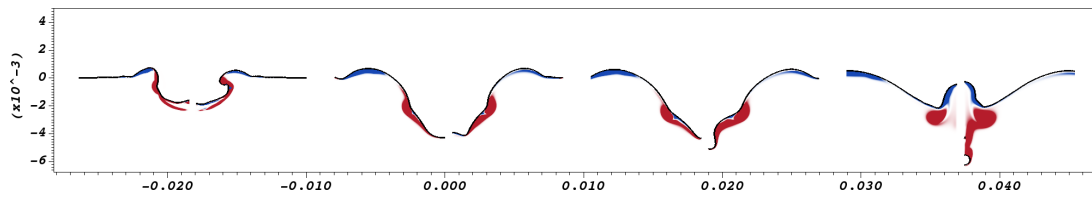


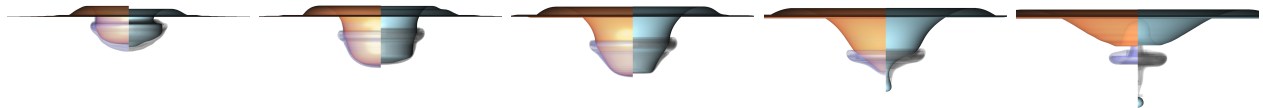
Figure 4.23. – Impact de gouttes : gros plan sur le profil de la surface libre et le colorant de la simulation au temps  $t = 15.18 ms$  et illustration des différents phénomènes qui suivent l'impact. Ici, des gouttelettes secondaires rapides (avec une vitesse supérieure à  $5 m.s^{-1}$ ) sont éjectées par le jet en formation après la rétraction de la cavité alors que la bulle emprisonnée se déplace lentement vers le bas. Le colorant présente la présence de tourbillons sous-marins relativement importants.



L'avantage de la méthode HOMP est de nouveau illustré par la figure 4.24. Les simulations possèdent le même pas de temps constant pour la comparaison des résultats. La méthode standard ne parvient pas à capturer la cavité initiale en forme de champignon (images de gauche, à  $t = 3.27\text{ ms}$ ) et les formes particulières de la cavité (à  $t = 6.67\text{ ms}$  et  $t = 10.7\text{ ms}$ ) qui conduit au piégeage de la bulle ( $t = 13\text{ ms}$  puis  $t = 18\text{ ms}$ ). La méthode standard ne permet pas de représentation correcte des phénomènes physiques liés à l'impact. Cette incapacité fut démontrée par la présente comparaison comme ne provenant pas uniquement des erreurs numériques ou initiales mais provenant également de la méthode de résolution du couplage des équations de Navier-Stokes. Sur ce second impact de goutte, la méthode proposée est une nouvelle fois plus précise et permet d'atteindre un niveau de détail des phénomènes plus précis que lors de l'utilisation de la méthode standard.



(a) Comparaison de la densité-vorticité sans (côté gauche de chaque cliché) et avec HOMP (côté droit de chaque cliché). L'interface est dessinée avec une ligne noire épaisse et l'échelle de couleur va de  $-10^{-5}\text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  (bleu) à 0 (blanc) à  $+10^{-5}\text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  (rouge). De gauche à droite : clichés à  $t = \{3.27, 10.7, 13, 18\}\text{ ms}$ .



(b) Comparaison de la surface pour la méthode standard (en orange) et la méthode HOMP (en bleue). Un colorant a été rajouté dans la goutte initiale pour suivre la trajectoire de l'eau contenu dans la goutte. Celui-ci est représenté par une masse grise transparente dans les deux méthodes. Les temps de simulations vont de gauche à droite  $t = \{3.67, 6.67, 10.7, 13, 18\}\text{ ms}$ .

Figure 4.24. – Impact de gouttes : comparaison de la méthode standard (à gauche de chaque image) avec la méthode proposée HOMP (à droite de chaque image).

#### 4.5.6. Déferlement d'une vague capillo-gravitaire sur une plage

Pour étudier le déferlement de vague, la méthode standard est encore couramment utilisée avec la méthode VOF [90, 91] ou LSM [174]. Une étude de la méthode proposée est effectuée sur ce cas de validation afin de montrer l'influence de l'utilisation de la méthode HOMP pour simuler un écoulement multiphasique complexe sur un maillage fin. Le déferlement étudié est le déferlement plongeant sur une plage. Lorsque la vague commence à se briser, un jet plongeant est généré. Celui-ci va impacter la surface et se transformer en rouleau. Pendant la génération du jet, un fort cisaillement se produit au-dessus de celui-ci.

En plus de prouver l'utilisation possible de la méthode pour étudier le déferlement, ce cas est une bonne démonstration de la limite d'utilisation de la méthode standard pour

un maillage très fin et un lissage sur quelques cellules. Les résultats seront comparés à l'expérimental et commentés par la suite.

#### 4.5.6.1. Description de la condition initiale

La vague est initialisée dans un domaine de  $14\text{ m} \times 0.8\text{ m}$ . Les premiers mètres sont utilisés pour permettre à la vague initialisée de se stabiliser avant d'arriver sur la plage. La plage commence son ascension à par de  $8\text{ m}$  depuis l'initialisation de la vague et avec un ratio de pente de  $\frac{1}{15}$ . Ce ratio fut celui utilisé par Y. Li [175] lors de son expérience. Les parois sont supposées être sans glissement pour le fond et avec glissement pour le haut. Afin de minimiser l'impact des parois latérales, une condition de neumann homogène est utilisée. Celle-ci permet l'étude du déferlement de vague unique sans interférences de la part des bords. La vague de  $0.1982\text{ m}$  de hauteur est initialisée à  $3.5\text{ m}$  de distance par rapport au bord de gauche. La profondeur de l'eau est  $0.3048\text{ m}$ . La figure 4.25 est le schéma représentant la condition initiale.

La condition initiale de la vague est représentée par une méthode de premier ordre :

$$\eta_0(x) = h \cdot \left( \frac{1}{c_{sol,1}^{te}} \right)^2 + d$$

$$u_0(x, y) = \sqrt{gd} \cdot \left\{ c_{sol,2}^{te} \cdot \left( \frac{1}{c_{sol,1}^{te}} \right)^2 - \frac{1}{4} \cdot (c_{sol,2}^{te})^2 \cdot \left( \frac{1}{c_{sol,1}^{te}} \right)^4 + \frac{1}{3} \cdot c_{sol,2}^{te} \cdot \frac{d^2}{c^2} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{d} \right)^2 \cdot \left( 2 \cdot (c_{sol,3}^{te})^2 \cdot c^2 \cdot \frac{[2 \cdot (c_{sol,1}^{te})^2 - 3]}{(c_{sol,1}^{te})^4} \right) \right\}$$

$$v_0(x, y) = y \cdot \sqrt{gd} \cdot \frac{c_{sol,2}^{te}}{c} \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot c_{sol,2}^{te} \cdot \left( \frac{1}{c_{sol,1}^{te}} \right)^2 \right) \cdot \left( \frac{2 \cdot c_{sol,4}^{te} \cdot c_{sol,3}^{te} \cdot c}{(c_{sol,1}^{te})^3} \right) + \frac{d^2}{3c^2} \cdot \frac{(8 \cdot (c_{sol,3}^{te})^3 \cdot c^3 \cdot c_{sol,4}^{te} \cdot ((c_{sol,1}^{te})^2 - 3))}{(c_{sol,1}^{te})^5} \right\}$$

$$c = \sqrt{g \cdot (h + d)}$$

avec  $c_{sol,1}^{te} = \cosh(\sqrt{\frac{3h}{4d^3}} \cdot (x - x_0))$ ,  $c_{sol,2}^{te} = \frac{h}{d}$ ,  $c_{sol,3}^{te} = \sqrt{\frac{3h}{4d^3}}$ ,  $c_{sol,4}^{te} = \sinh(\sqrt{\frac{3h}{4d^3}} \cdot (x - x_0))$ ,  $\eta_0$  la hauteur d'eau par rapport au fond,  $u_0$  et  $v_0$  les vitesses initiales suivant les directions  $x$  et  $y$ ,  $c$  la célérité de la vague,  $d$  la profondeur de l'eau,  $h$  l'amplitude totale de la vague,  $g$  la constante gravitaire et  $x_0$  la position initiale de la vague. La pression est initialisée comme étant la pression hydrostatique, puis celle-ci sera modifiée en amont à l'aide d'une première résolution du champ de pression pour correspondre au champ de vitesse.

#### 4.5.6.2. Schémas numériques

Dans la littérature, l'ensemble des simulations de déferlement de vague est effectué grâce à l'utilisation de la représentation d'interface VOF. De ce fait, la validation du déferlement de vague se fera avec cette méthode. L'ensemble des forces expliquées dans les autres cas de vérifications sont activées. Un schéma WENO 3,2 couplé au schéma N SSP3,2 est utilisé pour le terme d'advection des équations. Le lissage de la fraction volumique est effectué sur un total de 6 mailles. Le terme de gravité est également calculé avec le même schéma que pour le cas d'onde gravitaire stationnaire.

La plage est représentée par une méthode de pénalisation à l'ordre 1. Cette méthode consiste en une fixation de la vitesse nulle sur les faces pour lesquelles la cellule est au sein de la plage. Par conséquent, la plage est considérée statique et non poreuse.

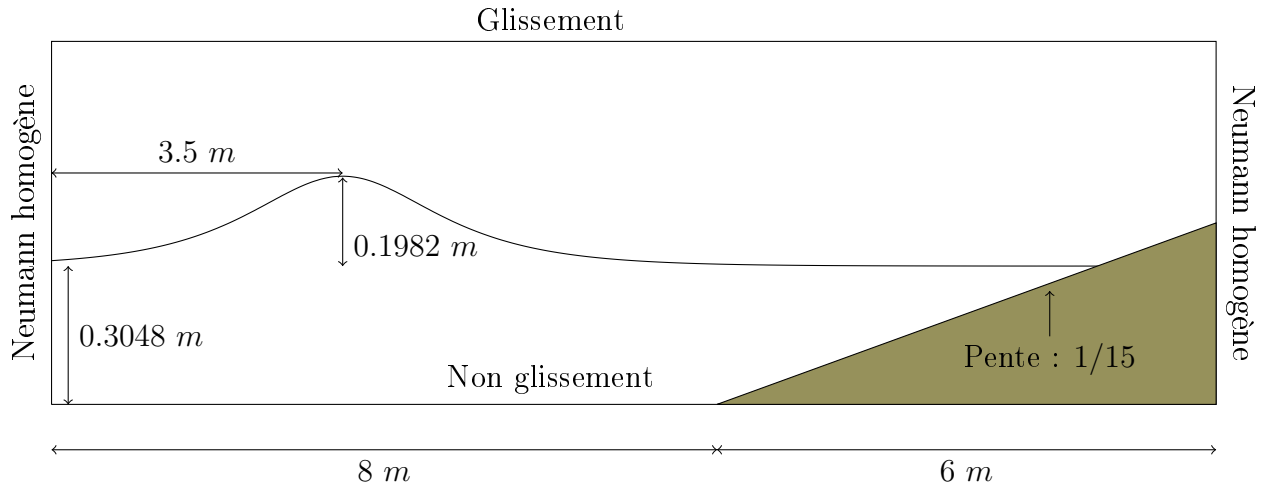


Figure 4.25. – Déferlement de vague sur une plage : schéma de la condition initiale. Le domaine de simulation est  $[0, 14] \times [0, 0.8]$  en mètres.

#### 4.5.6.3. Discrétisations

Une grille régulière et uniforme est utilisée pour la discrétisation du domaine. Le nombre total de mailles est  $4480 \times 256 = 1146880$ . Le pas d'espace  $\Delta x$  est constant et est égal à  $\frac{14}{4480} = 0.003125$  m. Le pas de temps suit la condition CFL avec un coefficient de 0.4. Cela permet un bon compromis entre la rapidité de calcul et la précision des résultats. Cela va, une dernière fois, permettre la démonstration de la capacité de la méthode proposée à représenter un cas expérimental avec un nombre  $CFL$  grand.

#### 4.5.6.4. Résultats

Les résultats numériques présentés dans la figure 4.26 se comparent aux photos prises lors de l'expérience de Y. Li [175]. Jusqu'à l'image e, la simulation est presque parfaitement similaire à la forme du déferlement. À partir, de l'image f, une légère différence est observée dans les résultats obtenus. Cela peut une nouvelle fois s'expliquer par une initialisation de la vague différente de la réalité ou des erreurs numériques. Cependant, malgré les légères différences, la forme globale du déferlement est correctement capturée. Il est à noter que la simulation effectuée est en deux dimensions, tandis que des effets tridimensionnels à partir de l'image f, avec la génération de bulles et gouttes, peuvent être observés. Le fait de ne pas prendre en compte la troisième dimension peut également avoir une influence sur la différence entre la simulation et l'expérimental. Les temps physiques n'étant pas donnés dans l'article, les courbes de simulations ont été prises pour des formes de surface libre proche de celles visible dans les photographies. Il est également à noter que chaque photographie provient de données expérimentales différentes. Chaque expérience a été réalisée avec des conditions initiales similaires. La méthode proposée est suffisamment robuste pour représenter correctement le déferlement d'une vague sur une plage.

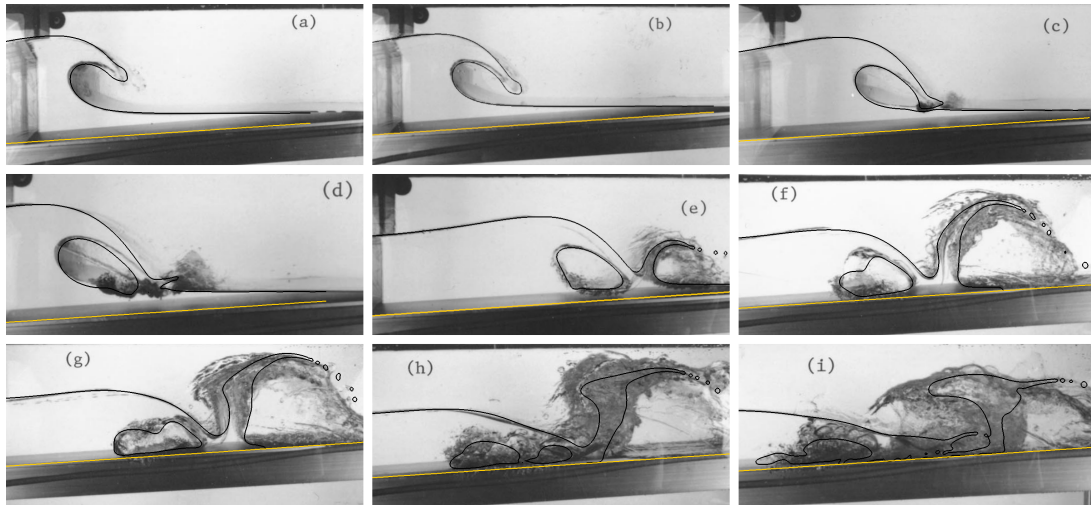


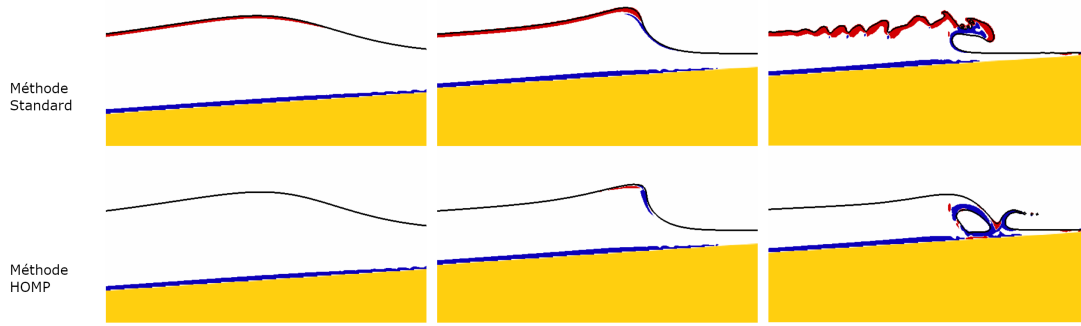
Figure 4.26. – Déferlement de vague sur une plage : comparaison de la surface libre, pour 9 clichés différents, entre l'expérimental (Y. Li [175]) et la simulation avec la méthode HOMP. Pour cette dernière, l'interface est dessinée avec une ligne noire épaisse et la plage par une ligne jaune épaisse.

La figure 4.27 illustre la différence de forme de déferlement entre les deux méthodes. Tandis que la méthode proposée réussie à capturer l'ensemble du déferlement correctement, la méthode standard n'est pas capable de faire de même. En effet, l'image 4.27b permet d'observer l'apparition d'instabilités purement numériques sur le dessus de la vague. Ces instabilités viennent perturber la forme de la surface et modifient drastiquement le déferlement. Contrairement à la méthode standard, ces instabilités ne sont pas visibles dans le cas de la méthode HOMP. L'apparition de ces phénomènes numériques provient du transfert de quantité de mouvement à l'interface, comme démontré dans les sections précédentes. L'image 4.27a représente la vorticité-densité dans l'ensemble du domaine pour trois temps différents. Une couche importante de valeur positive dans le cas la méthode standard est observée. Les instabilités proviennent de l'énergie, due aux erreurs numériques, contenue dans cette couche proche de l'interface. Pour la méthode HOMP, cette couche n'est pas ou peu visible. Le transfert de quantité de mouvement a été énormément réduit. Cela est une bonne représentation de la dynamique attendue.

La méthode HOMP a prouvé, sur un dernier cas de validation, sa capacité à représenter des phénomènes physiques issus de l'expérimental. Mais aussi, la comparaison avec la méthode standard confirme l'amélioration apportée par l'utilisation de cette nouvelle méthode. Les méthodes et schémas numériques utilisés pour ce cas de validation seront ceux utilisés par la suite pour étudier le déferlement de vague.

## 4.6. Conclusion et observations de la méthode

Une méthode est proposée permettant la préservation de la quantité de mouvement pour la dynamique de fluides incompressibles à deux phases avec un rapport de masse volumique élevé. Cette méthode permet également l'utilisation de schémas d'advection classiques, jusqu'au WENO 5, 3 d'ordre élevé, couplé à une intégration temporelle Runge-Kutta de second ordre. La méthode HOMP peut donc être intégrée presque sans effort dans un code existant en  $2D$  et  $3D$  et nécessite essentiellement la résolution d'une équation



(a) Comparaison de la densité-vorticité sans (ligne supérieure) et avec HOMP (ligne inférieure). L'interface est dessinée avec une ligne noire épaisse et l'échelle de couleur va de  $-10^4 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  (bleu) à 0 (blanc) à  $+10^4 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  (rouge). La plage est représentée par la couleur jaune. De gauche à droite : clichés à  $t = \{1.05, 1.75, 2.05\}$  s après le moment où la crête de la vague correspond au début de la plage.



(b) Comparaison de la forme de la vague pour la méthode standard (ligne supérieure) et la méthode HOMP (ligne inférieure). La plage est représentée par la couleur jaune. De gauche à droite : clichés à  $t = \{1.05, 1.75, 2.05\}$  s après le moment où la crête de la vague correspond au début de la plage.

Figure 4.27. – Déferlement de vague sur une plage : comparaison de la méthode standard (ligne supérieure) avec la méthode proposée HOMP (ligne inférieure).

d'advection supplémentaire pour la prédiction de la densité, en accord avec le terme inertiel de l'équation du moment, comme cela est maintenant reconnu dans le domaine N. Nangia *et al* [166]. Cette stratégie réduit considérablement les faux échanges numériques de quantité de mouvement à travers l'interface, problème dont souffre le modèle standard à un seul fluide, et cède la place à des solutions convergentes avec un raffinement du maillage, démêlant ainsi un problème de convergence qui a été observé dans la littérature.

En outre, la méthode est indépendante de la représentation de l'interface sous-jacente. Les différents cas de vérifications ont prouvé le bon fonctionnement de la méthode avec VOF, MOF et LSM sans ajout d'algorithme spécifique à chaque représentation, contrairement à la littérature [157, 159, 160, 163]. La méthode a été testée sur des cas de validation numérique sélectionnés, y compris des ondes gravitaires et capillaires, qui ont donné des résultats très satisfaisants même avec des maillages relativement grossiers et de grands pas de temps. En outre, l'approche proposée a réduit l'apparition de fortes vorticités proche de l'interface pour les cas d'impact de goutte et de déferlement de vague. Les simulations montrent une bonne concordance avec les résultats de la littérature et la dynamique attendue des écoulements, là où la méthode standard a échoué, et ce sans qu'il soit nécessaire de recourir à une stratégie numérique complexe ou coûteuse en temps de calcul. De plus, l'utilisation de schémas d'advection d'ordre élevé même près de l'interface facilite la cohérence et la précision globales du solveur Navier-Stokes à deux fluides.

Tout type de schéma d'advection couplé masse/mouvement devrait fonctionner correctement dans le cadre de la méthode, à condition qu'ils soient cohérents entre eux. En outre, d'autres représentations d'interface telles que le front-tracking pourraient également bénéficier de la méthode HOMP.

La méthode ayant subi des vérifications et validations rigoureuses, elle peut maintenant être utilisée pour la simulation et l'étude de phénomènes diphasiques. Par conséquent, la méthode proposée dans ce chapitre, et plus particulièrement le cadre de la validation du code sur le déferlement d'une vague sur une plage, sera utilisé par la suite dans le but de caractériser le déferlement d'une onde sinusoïdale sur un fond plat en variant des caractéristiques géométriques de la condition initiale.



## Chapitre 5

### Onde capillo-gravitaire sur fond plat



Dans la littérature, l'étude du déferlement de vague a démontré la présence d'une modification de la dynamique du déferlement pour des ondes dont les forces inertielle, gravitationnelle et de surface semblent être en compétition. Cependant, malgré les nombreuses études sur la compréhension des différents types de déferlement observés expérimentalement et numériquement, il existe toujours des zones d'ombres sur les phénomènes de surface et sous-surfaciques impliquées dans une onde capillo-gravitaire. Dans ce contexte, la méthode proposée dans le chapitre précédent permet l'étude approfondie du déferlement et de l'influence des caractéristiques initiales de la vague sur celui-ci. De plus, la majorité des études ont été réalisées sur des vagues en milieu profond. Ainsi, en plus de l'étude du déferlement, une étude sur l'influence de la profondeur d'eau sera présentée.

Une première étude est effectuée, dans la section 5.2, afin de vérifier et valider le maillage utilisé pour l'ensemble des longueurs d'onde simulées. Cette étude aura pour ambition de trouver le maillage le plus adapté pour simuler le déferlement tout en minimisant le temps de calcul. La première étude sur les ondes capillaires, section 5.3, associée à la seconde étude sur les anneaux de vorticité, section 5.4, vont permettre la définition de plusieurs types de déferlement, section 5.5. Une majorité de ces types est déjà connue dans la littérature. Cependant, grâce à ces deux premières études, deux nouveaux types de déferlement, non observés dans la littérature, ont pu être identifiés et caractérisés. Suite à la définition des types de déferlements et l'exploitation des nombreuses simulations lancées, trois cartes de déferlements ont pu être générées, section 5.6. Chaque carte représente le type de déferlement obtenu pour une longueur d'onde et une cambrure données. Finalement, une dernière étude sur la dissipation d'énergie et l'intensité du déferlement sera présentée, section 5.7. L' tat de l'art nécessaire pour chaque étude sera présentée au début de chaque section.

## 5.1. Présentation de la condition initiale

Les conditions initiales, importantes lors de l'étude du déferlement de vague, peuvent être utilisées pour caractériser un type spécifique de rupture (déversement, plongée, déferlement) ou de configuration (fond plat, plage, sur une marche, etc.). Les principales études de simulations numériques utilisant l'équation de Navier-Stokes consistent à initialiser une vague sinusoïdale dans un domaine périodique avec un fond plat. La profondeur  $d$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et l'amplitude  $a$  de la vague sont alors les variables qui seront modifiées dans ce manuscrit pour étudier l'ensemble des types de déferlement. Le domaine et les équations d'initialisation utilisés sont définis dans cette section.

### 5.1.1. Domaine

Dans la continuité de l'étude réalisée par P. Lubin et S. Glockner en 2015 [91], les ondes sont initialisées dans un domaine à deux dimensions (Fig. 5.1). Pour ne pas perturber la dynamique du déferlement, il est nécessaire d'avoir une hauteur de domaine suffisamment élevée. Pour s'en assurer, une hauteur de  $0.4\lambda$  est ajoutée au dessus de la crête de la vague. Celle-ci est la hauteur minimum permettant le déferlement dans un domaine supposé infini au dessus de l'eau. La profondeur  $d$  du domaine quant à elle varie entre trois valeurs :  $0.1\lambda$ ,  $0.3\lambda$  et  $0.5\lambda$ , afin d'étudier l'évolution du déferlement pour trois ratio profondeur sur longueur d'onde différents. Ce ratio sera appelé profondeur d'eau dans ce manuscrit. Les conditions de bords utilisées sont : dirichlet homogène pour l'interaction avec le fond plat, périodique pour les bords gauche et droit afin de laisser advecter la vague dans un domaine périodique et glissement sur le bord supérieur pour limiter son

influence sur le mouvement de l'air au dessus de la vague. Les couches d'eau et d'air sont supposées au repos avant l'initialisation de l'onde sinusoidale.

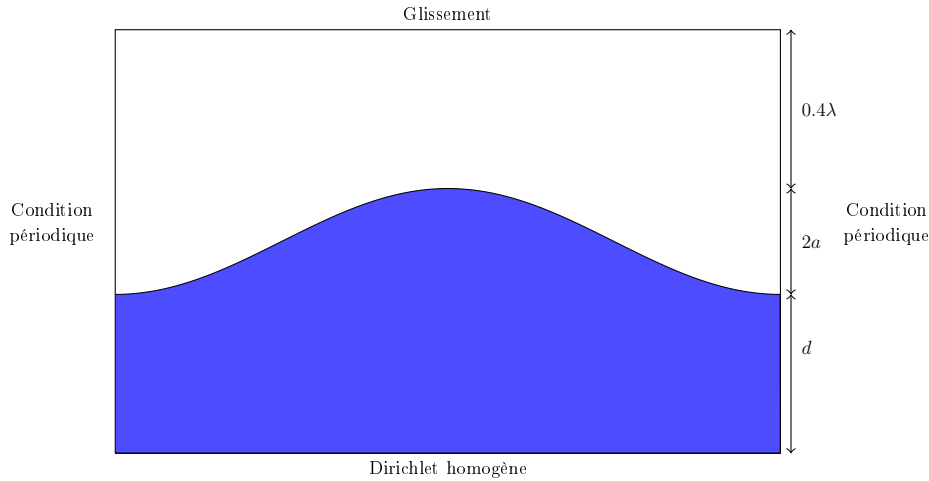


Figure 5.1. – Conditions initiales d'une onde sinusoidale 2D

### 5.1.2. Initialisation de la vague

La théorie des ondes de Stokes, réécrit par R. G. Dean *et al* [176], est un modèle approximant la surface et la dynamique du fluide d'une vague de type train d'onde. Un train d'onde est une suite de vagues de periode similaire et se propageant dans la même direction. Dans la réalité, un train d'onde possède un nombre fini de vagues avec des amplitudes pouvant varier. Cependant, l'approximation du modèle écrit par G. G. Stokes représente le cas d'un train d'onde infini d'amplitude unique. Il utilise les hypothèses d'incompressibilité, d'irrotationnalité et de viscosité négligée pour obtenir les équations suivantes à l'ordre 1 :

$$\eta(x, t) = a \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$u_0(x, y) = \frac{\partial \phi_{pot,0}(x, y)}{\partial x} = a \cdot \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho_{water}} k^3\right) \cdot \tanh(kd)} \cdot \frac{\cosh(k(y+d))}{\sinh(kd)} \cdot \cos(kx) \quad (5.33)$$

$$v_0(x, y) = \frac{\partial \phi_{pot,0}(x, y)}{\partial y} = a \cdot \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho_{water}} k^3\right) \cdot \tanh(kd)} \cdot \frac{\sinh(k(y+d))}{\sinh(kd)} \cdot \sin(kx) \quad (5.34)$$

avec  $\eta(x, t)$  la hauteur d'eau par rapport au niveau de l'eau au repos et  $u_0(x, y)$  et  $v_0(x, y)$  les vitesses horizontale et verticale initiales dans l'eau.

Le profil de pression  $p_0(x, y)$  est initialisé grâce à une première résolution de l'équation de Poisson sur la pression. Cette initialisation est similaire à celle utilisée lors de l'étude faite par P. Lubin et S. Glockner en 2015 [91] et a déjà prouvé son efficacité pour étudier le déferlement de vague. La description plus complète de l'initialisation de la vague est décrite dans l'annexe A.

## 5.2. Étude du maillage

Le maillage utilisé pour étudier le déferlement de vague est un maillage structuré avec un pas d'espace fixe dans les deux directions pour toutes les simulations. Ainsi, afin de simplifier la lecture, le pas d'espace sera noté  $\Delta x$  mais correspondra aux pas des deux directions  $x$  et  $y$ .

Le maillage est un élément clé à vérifier lors de la simulation d'un phénomène physique. L'utilisation d'un maillage non approprié peut générer des erreurs importantes perturbant le phénomène final étudié. Ces erreurs commises lors de la résolution des équations sont fonctions du pas d'espace  $\Delta x$  et du pas de temps  $\Delta t$ . L'erreur spatiale est identifiable grâce à une meilleure représentation des phénomènes de surface : amplitudes des ondes capillaires, volume du rouleau capturé, etc. L'erreur temporelle est représentée par une avancée ou un retard de l'apparition de ces phénomènes. Sachant que l'étude effectuée dans ce manuscrit porte essentiellement sur les phénomènes observés et l'énergie dissipée, les études de convergences porteront essentiellement sur l'erreur spatiale et le coefficient  $CFL$  est fixé à 0.4. Il est, de ce fait, nécessaire de trouver une méthode pour la vérification du pas d'espace  $\Delta x$  minimal permettant la bonne représentation du phénomène.

Dans ce manuscrit, l'étude porte sur le déferlement de vague pour différentes longueurs d'ondes, profondeurs et amplitudes. La méthode choisie est la vérification du maillage pour chaque longueur d'onde. Celui-ci sera utilisé par la suite pour toutes profondeurs et amplitudes. Afin de minimiser le temps de calcul pour l'étude de convergence, la profondeur d'eau choisie sera  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ . Dans ce même objectif, la cambrure de la vague  $\epsilon$  sera de 0.15 pour  $\lambda = 0.05 m$ ,  $0.10 m$  et  $0.15 m$  puis augmentée à 0.25 pour  $\lambda = 0.25 m$  et  $0.35 m$  afin de vérifier le maillage sur des déferlements plus inertiels. L'étude du maillage se concentre sur la convergence des phénomènes de surface, sur la trajectoire d'une particule située initialement à  $x = 0 m$  et  $y = 0 m$  et sur la dissipation de l'énergie  $\Delta E = E(t) - E_0$  au cours du temps. La convergence simultanée de ces trois paramètres permet la validation des phénomènes à l'interface, sous l'interface et l'énergie dissipée par le déferlement. Les études dans les parties suivantes se baseront sur les résultats obtenus dans cette partie.

L'ensemble des simulations présentées par la suite sont synthétisées dans le tableau 5.1.

### 5.2.1. Étude phénoménologique

Dans cette partie, les phénomènes de surface observés ne seront pas décrits ou étudiés. L'étude approfondie de ceux-ci sera présentée dans les sections 5.3 et 5.5.

La figure 5.2 représente la convergence de la surface pour chaque longueur d'onde. Pour chacune d'entre elles, les simulations présentées sont à un temps identique lorsque la vague déferle.

$\lambda : 0.05 m$  La figure 5.2a est une image agrandie de la surface entre deux ondes capillaires. Les erreurs commises sont faibles à partir du second maillage (orange - carré). Le maillage de pas d'espace  $\Delta x : 4.883 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour représenter les phénomènes de surface associés à cette longueur d'onde.

$\lambda : 0.10 m$  La figure 5.2b est une image agrandie de la surface de plusieurs ondes capillaires. L'onde capillaire de gauche correspond à la crête initiale de la vague. Les

Longueur d'onde $\lambda$ (m)	Cambrure $\epsilon$	Profondeur $d$	Pas d'espace $\Delta x$ (m)	Nombre de mailles	Couleur - Symbole
0.05	0.15	$0.1\lambda$	$9.766 \times 10^{-5}$	137 216	Rouge - Croix
0.05	0.15	$0.1\lambda$	$4.883 \times 10^{-5}$	549 888	Orange - Carré
0.05	0.15	$0.1\lambda$	$2.441 \times 10^{-5}$	2 201 600	Vert - Losange
0.05	0.15	$0.1\lambda$	$1.221 \times 10^{-5}$	8 806 400	Bleu - Cercle
0.10	0.15	$0.1\lambda$	$1.953 \times 10^{-4}$	137 216	Rouge - Croix
0.10	0.15	$0.1\lambda$	$9.766 \times 10^{-5}$	549 888	Orange - Carré
0.10	0.15	$0.1\lambda$	$4.883 \times 10^{-5}$	2 201 600	Vert - Losange
0.10	0.15	$0.1\lambda$	$2.441 \times 10^{-5}$	8 806 400	Bleu - Cercle
0.15	0.15	$0.1\lambda$	$1.468 \times 10^{-4}$	549 888	Rouge - Croix
0.15	0.15	$0.1\lambda$	$7.324 \times 10^{-5}$	2 201 600	Orange - Carré
0.15	0.15	$0.1\lambda$	$3.662 \times 10^{-5}$	8 806 400	Vert - Losange
0.15	0.15	$0.1\lambda$	$2.441 \times 10^{-5}$	19 814 400	Bleu - Cercle
0.25	0.25	$0.1\lambda$	$6.104 \times 10^{-5}$	9 084 928	Orange - Carré
0.25	0.25	$0.1\lambda$	$3.052 \times 10^{-5}$	36 347 904	Vert - Losange
0.25	0.25	$0.1\lambda$	$1.973 \times 10^{-5}$	81 788 928	Bleu - Cercle
0.35	0.25	$0.1\lambda$	$8.545 \times 10^{-5}$	9 084 928	Orange - Carré
0.35	0.25	$0.1\lambda$	$4.273 \times 10^{-5}$	36 347 904	Vert - Losange
0.35	0.25	$0.1\lambda$	$2.848 \times 10^{-5}$	81 788 928	Bleu - Cercle

Table 5.1. – Récapitulatif des simulations pour l'étude de la convergence du maillage.

erreurs commises par les deux premiers maillages sont beaucoup trop importantes. Ces deux maillages ne pourront être utilisés. Le troisième maillage (vert - losange) semble être assez proche du maillage le plus fin. Cependant, on remarque une légère différence est remarquée sur le dernier creux. Cette différence ne fera que grandir au cours du temps. Par conséquent, le maillage le plus fin (bleu - cercle) de pas d'espace  $\Delta x : 2.441 \times 10^{-5} m$  sera utilisé pour représenter les phénomènes de surface associés à cette longueur d'onde.

$\lambda : 0.15 m$  La figure 5.2c est une image agrandie de la surface entre l'onde capillaire située sur la crête et la première onde capillaire. Tandis que les courbes associées aux deux premiers maillages semblent insuffisantes, les courbes des deux derniers maillages (vert - losange et bleu - cercle) sont superposées. Le troisième maillage de pas d'espace  $\Delta x : 3.662 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour représenter les phénomènes de surface associés à cette longueur d'onde.

$\lambda : 0.25 m$  La figure 5.2d est une image agrandie de la surface du jet d'une vague plongeante. Les phénomènes observés sur la première courbe (orange - carré) sont d'amplitudes plus faibles, ce maillage ne pourra être utilisé. On observe une similarité entre les deux dernières courbes (vert - losange et bleu - cercle). Les différences observables entre les deux courbes proviennent des erreurs temporelles. Le second maillage (vert - losange) de pas d'espace  $\Delta x : 3.052 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour représenter les phénomènes de surface associés à cette longueur d'onde.

$\lambda : 0.35 m$  La figure 5.2e est une image agrandie de la surface du rouleau capturé après l'impact du jet sur la surface d'eau. L'observation de la surface du rouleau permet de déduire l'erreur importante du premier maillage (orange - carré). Une nouvelle fois, les deux dernières courbes (vert - losange et bleu - cercle) sont similaires et les différences observables proviennent des erreurs temporelles. Le maillage de pas d'espace  $\Delta x : 4.273 \times$

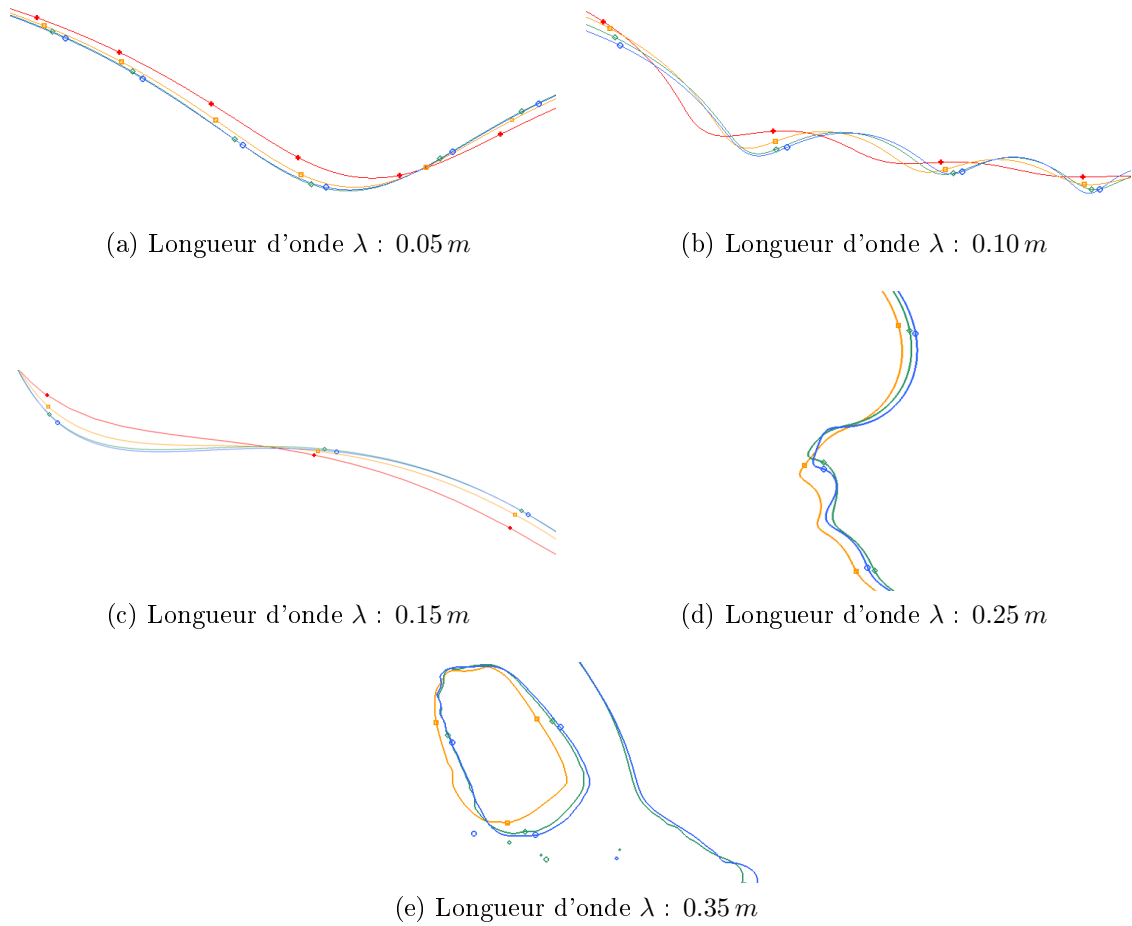


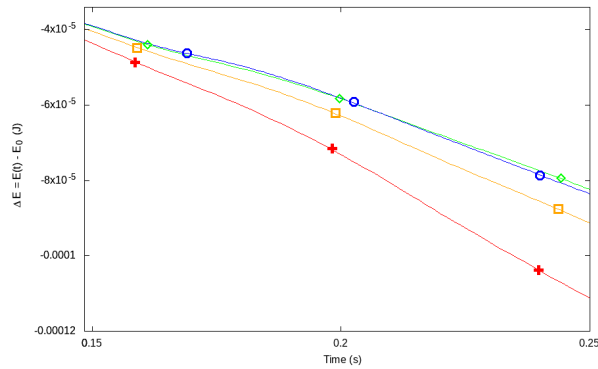
Figure 5.2. – Étude de la convergence des phénomènes associés à chaque longueur d'onde  $\lambda : 0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e). Les différentes tailles de maillage sont représentées par une couleur et un symbole. Les couleurs (symboles) du maillage le plus grossier au maillage le plus fin sont : rouge (croix), orange (carré), vert (losange) et bleu (cercle).

$10^{-5} m$  est suffisant pour représenter les phénomènes de surface associés à cette longueur d'onde.

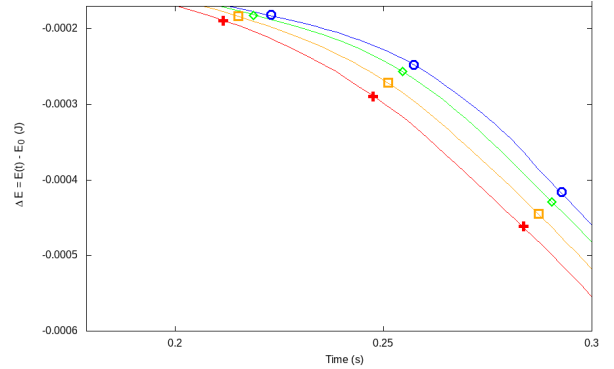
### 5.2.2. Étude énergétique

Dans cette partie, la convergence de la différence d'énergie totale par rapport à l'état initial est observée. Cette partie est très importante car une étude sur la dissipation d'énergie est effectuée dans la section 5.7. Une grande erreur commise par une mauvaise convergence pourrait entraîner de mauvais résultats et fausser les conclusions obtenues grâce aux simulations. La figure 5.3 représente la convergence de l'énergie totale au cours du temps pour chaque longueur d'onde.

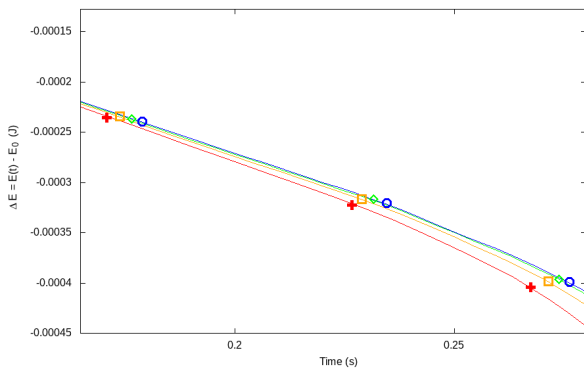
$\lambda : 0.05 m$  La figure 5.3a est un graphique agrandi se focalisant sur la différence d'énergie entre 0.15 et 0.25 s. Les courbes des deux maillages les plus fins (vert - losange et bleu - cercle) se superposent. Le maillage de pas d'espace  $\Delta x : 2.441 \times 10^{-5} m$  est nécessaire et suffisant pour représenter la dissipation d'énergie au cours du déferlement.



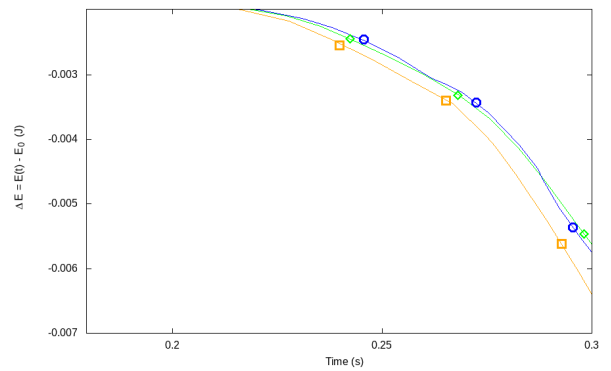
(a) Longueur d'onde  $\lambda$  : 0.05 m



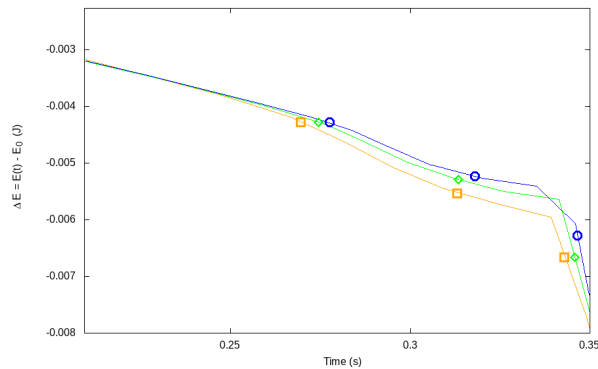
(b) Longueur d'onde  $\lambda$  : 0.10 m



(c) Longueur d'onde  $\lambda$  : 0.15 m



(d) Longueur d'onde  $\lambda$  : 0.25 m



(e) Longueur d'onde  $\lambda$  : 0.35 m

Figure 5.3. – Étude de la convergence de la différence d'énergie totale entre l'instant  $t$  :  $E(t)$  et l'instant initial  $t_0$  :  $E_0$ . Les résultats sont présentés pour chaque longueur d'onde  $\lambda$  : 0.05 m (a), 0.10 m (b), 0.15 m (c), 0.25 m (d) et 0.35 m (e). Les différentes tailles de maillage sont représentées par une couleur et un symbole. Les couleurs (symboles) du maillage le plus grossier au maillage le plus fin sont : rouge (croix), orange (carré), vert (losange) et bleu (cercle).

$\lambda : 0.10 m$  La figure 5.3b est un graphique agrandi se focalisant sur la différence d'énergie entre 0.18 et 0.30 s. Aucune courbe ne se superpose. Cependant, la pente de la dissipation d'énergie est similaire pour les trois maillages les plus fins (orange - carré, vert - losange et bleu - cercle). Afin de minimiser l'erreur potentielle, le dernier maillage est à privilégier. Par conséquent, le maillage le plus fin (bleu - cercle) de pas d'espace  $\Delta x : 2.441 \times 10^{-5} m$  doit être utilisé pour calculer la dissipation d'énergie au cours du temps.

$\lambda : 0.15 m$  La figure 5.3c est un graphique agrandi se focalisant sur la différence d'énergie entre 0.17 et 0.27 s. Tandis que les courbes associées aux deux premiers maillages démontrent une erreur trop importante, la superposition des courbes des deux derniers maillages (vert - losange et bleu - cercle) démontrent la bonne convergence des résultats. Le troisième maillage de pas d'espace  $\Delta x : 3.662 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour représenter la dissipation de l'énergie.

$\lambda : 0.25 m$  La figure 5.3d est un graphique agrandi se focalisant sur la différence d'énergie entre 0.18 et 0.30 s. Les deux courbes des maillages les plus fins (vert - losange et bleu - cercle) se superposent. Le second maillage (vert - losange) de pas d'espace  $\Delta x : 3.052 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour représenter la dissipation de l'énergie.

$\lambda : 0.35 m$  La figure 5.3e est un graphique agrandi se focalisant sur la différence d'énergie entre 0.21 et 0.35 s. Les deux courbes des maillages les plus fins (vert - losange et bleu - cercle) ne se superposent pas complètement mais sont très proches l'une de l'autre. Une nouvelle fois, cette différence provient d'un décalage temporelle entre les deux simulations. Par conséquent, le maillage de pas d'espace  $\Delta x : 4.273 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour représenter la dissipation de l'énergie.

### 5.2.3. Étude du mouvement de la particule centrale

Lors d'un déferlement de vague, le mouvement des particules sous-surfaciques est directement lié à la variation de la surface et à la vorticit   g  n  r   pendant le d  ferlement. Cependant, il n'existe pas de crit  re simple permettant de v  rifier qu'en tout point de la simulation, le mouvement des particules a converg  . Dans cette sous-partie, l'hypoth  se que l'  tude de la particule centrale, sous la cr  te au niveau de l'eau stagnante, permet d'obtenir des indications quant    la convergence de la trajectoire de l'ensemble des autres particules est faite. Cette hypoth  se permet de faciliter l'  tude et de valider le maillage minimal n  cessaire pour simuler correctement le d  ferlement de vague pour chaque longueur d'onde. Une   tude sur la pr  sence d'anneaux de vorticit   est faite dans la suite de ce manuscrit, section 5.4.

Dans cette partie, la convergence de la trajectoire d'une particule centrale est   tudi  e. La figure 5.4 repr  sente la convergence de la trajectoire des particules au cours du temps pour chaque longueur d'onde.

$\lambda : 0.05 m$  La figure 5.4a est un graphique agrandi se focalisant sur la fin de la trajectoire de la particule entre 0.21 et 0.25 s. Les courbes des deux maillages les plus fins (vert - losange et bleu - cercle) se superposent. Le maillage de pas d'espace  $\Delta x : 2.441 \times 10^{-5} m$  est n  cessaire et suffisant pour repr  senter la trajectoire de la particule.

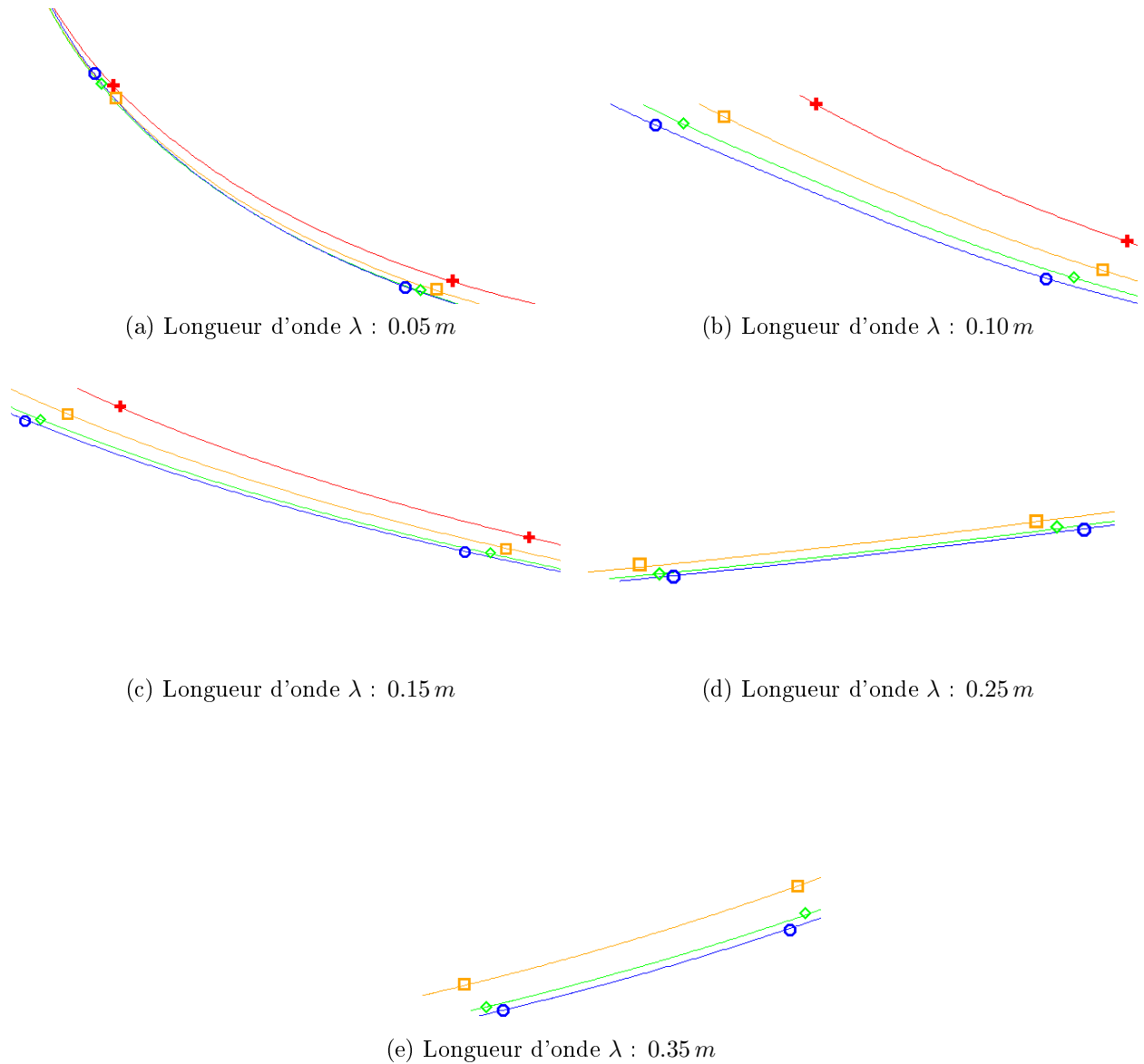


Figure 5.4. – Étude de la convergence du mouvement de la particule quelques instant après le début du déferlement. La trajectoire des particules va de la droite vers la gauche. Les résultats sont présentés pour chaque longueur d'onde  $\lambda : 0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e). Les différentes tailles de maillage sont représentées par une couleur et un symbole. Les couleurs (symboles) du maillage le plus grossier au maillage le plus fin sont : rouge (croix), orange (carré), vert (losange) et bleu (cercle).



$\lambda : 0.10 m$  La figure 5.4b est un graphique agrandi se focalisant sur la fin de la trajectoire de la particule entre 0.25 et 0.28 s. Aucune courbes ne se superposent. Par conséquent, le maillage le plus fin (bleu - cercle) de pas d'espace  $\Delta x : 2.441 \times 10^{-5} m$  doit être utilisé pour représenter une bonne trajectoire de la particule au cours du temps.

$\lambda : 0.15 m$  La figure 5.4c est un graphique agrandi se focalisant sur la fin de la trajectoire de la particule entre 0.24 et 0.27 s. Tandis que les courbes associées aux deux premiers maillages semblent différentes, les courbes des deux derniers maillages (vert - losange et bleu - cercle) sont presque superposées. Le troisième maillage de pas d'espace  $\Delta x : 3.662 \times 10^{-5} m$  est suffisant pour la trajectoire de la particule.

$\lambda : 0.25 m$  La figure 5.4d est un graphique agrandi se focalisant sur la fin de la trajectoire de la particule entre 0.24 et 0.27 s. Les deux courbes des maillages les plus fins (vert - losange et bleu - cercle) se superposent. Le second maillage (vert - losange) de pas d'espace  $\Delta x : 3.052 \times 10^{-5} m$  est suffisant.

$\lambda : 0.35 m$  La figure 5.4e est un graphique agrandi se focalisant sur la fin de la trajectoire de la particule entre 0.25 et 0.28 s. Les deux courbes des maillages les plus fins (vert - losange et bleu - cercle) ne se superposent pas complètement mais sont très proches l'une de l'autre. Par conséquent, l'utilisation du maillage de pas d'espace  $\Delta x : 4.273 \times 10^{-5} m$  est suffisant.

## 5.2.4. Bilan

L'ensemble des simulations lancées sont présentées dans le tableau 5.1. Le maillage choisi correspond à la restriction la plus grande entre les trois études de convergence. Dans la majorité des cas, l'ensemble des essais de convergence proposent la même valeur pour le pas d'espace. Seule la plus petite longueur d'onde  $\lambda = 0.05 m$  possède une différence entre les trois résultats. La prise en compte du plus petit maillage donne :  $\Delta x = 2.441 \times 10^{-5} m$ . Le récapitulatif des pas d'espace choisis pour chaque longueur d'onde est présenté dans le tableau 5.2.

Les pas d'espace sélectionnés sont généralement inférieurs à ceux utilisés dans la littérature récente [54, 55, 90, 91, 53]. Cela confirme l'utilisation de la simulation numérique directe (DNS) pour représenter la dissipation d'énergie sans l'utilisation de modèle de turbulence, à l'instar de L. Deike *et al* [90, 53]. Afin de vérifier l'hypothèse précédente sur la turbulence, chaque configurations sélectionnées ont été lancées avec le même modèle de turbulence "mixed scale" utilisé dans l'article de P. Lubin *et al* [91]. Les résultats ne seront pas présentés dans ce manuscrit car ils ont démontré que les maillages sont suffisamment précis pour représenter correctement la dissipation d'énergie et les anneaux de vorticités capturés pendant le déferlement. Aucun modèle de turbulence ne sera utilisé lors des simulations présentées dans ce manuscrit.

Longueur d'onde $\lambda$ (m)	Pas d'espace $\Delta x$ (m)
0.05	$2.441 \times 10^{-5}$
0.10	$2.441 \times 10^{-5}$
0.15	$3.662 \times 10^{-5}$
0.25	$3.052 \times 10^{-5}$
0.35	$4.273 \times 10^{-5}$

Table 5.2. – Récapitulatif du pas d'espace choisi pour chaque longueur d'onde.

### 5.2.5. Simulations lancées et supercalculateurs

L'investigation du déferlement de vague à partir d'une onde sinusoïdale sur un fond plat est réalisée grâce à plus de 170 simulations numériques précises. Chacune de ces simulations représente le déferlement d'une vague avec une longueur d'onde  $\lambda$ , une cambrure  $\epsilon$  et une profondeur d'eau  $\frac{d}{\lambda}$  unique. La variation de ces trois variables est :

1. la longueur d'onde varie entre  $0.05\ m$  et  $0.35\ m$
2. la profondeur d'eau varie entre  $0.1$  et  $0.5$
3. la cambrure varie entre  $0.025$  et  $0.6$

Plus la profondeur d'eau est élevée, plus la cambrure maximale de la vague sera grande.

La réalisation de ces simulations aura été effectuée grâce à deux campagnes de simulations faite en 2018 – 2019 et 2019 – 2020. Pour obtenir les résultats présentés dans ce manuscrit, un total de 3.5 millions d'heures de calculs aura été nécessaire. De plus, la production massive des résultats provenant des simulations précises a généré environ 20 *To* de données compressées. L'ensemble des simulations ont été effectuées sur plusieurs supercalculateur : Condor (I2M), Curta (MCIA), Plafrim (INRIA), Irene SKL (TGCC), Curie (TGCC) et Jean-Zay (IDRIS). Les heures de calculs ont été obtenus grâce au projet DARI de GENCI.

## 5.3. Ondes capillaires

Une onde capillaire est un phénomène surfacique de faible longueur d'onde apparaissant sur le face avant de la vague permettant une accélération de la dissipation d'énergie de la vague initiale. Ce phénomène n'apparaît généralement pas seul et sera appelé par la suite ondes capillaires. Ces ondes capillaires ont fait l'objet d'études depuis les années 1915 avec le travail fait par J. R. Wilton [177] jusqu'à encore récemment [178, 179]. Ces ondes capillaires ont été caractérisées grâce à de nombreuses études énergétiques [180, 90, 92] et géométriques [181, 108, 109, 180]. La modification de la surface générée par la présence de ces ondes capillaires laisse apparaître des caractéristiques géométriques telles que : l'amplitude, la longueur d'onde et l'angle de la crête de chaque capillaire. En 1999 Jiang *et al* [108] étudient ces ondes capillaires grâce à la variation des pentes de la surface de chaque ondes ainsi qu'à l'angle de la crête de chaque capillaire. Cependant, il existe une grandeur caractéristique supplémentaire jouant un rôle majeur dans le déferlement n'ayant pour le moment eu aucune étude à son sujet. Lors de la génération des ondes, un angle apparaît entre le capillaire 0 (la crête de la vague) et le capillaire 1. Cet angle sera noté par la suite  $\theta_{01}$ . Le schéma 5.10 représente un déferlement avec l'apparition des ondes capillaires sur le devant de la vague avec la schématisation de ce nouveau critère de déferlement  $\theta_{01}$ .

### 5.3.1. Apparitions

Lors de l'ensemble des simulations lancées dans le domaine longueur d'onde entre  $0.05\ m$  et  $0.35\ m$ , toutes les vagues déferlantes présentent l'apparition des ondes capillaires au début de la génération du déferlement. Cependant, en fonction du phénomène physique régissant le déferlement, ces premières ondes capillaires peuvent avoir une importance variable sur la dynamique finale du déferlement. L'apparition de ces ondes capillaires a

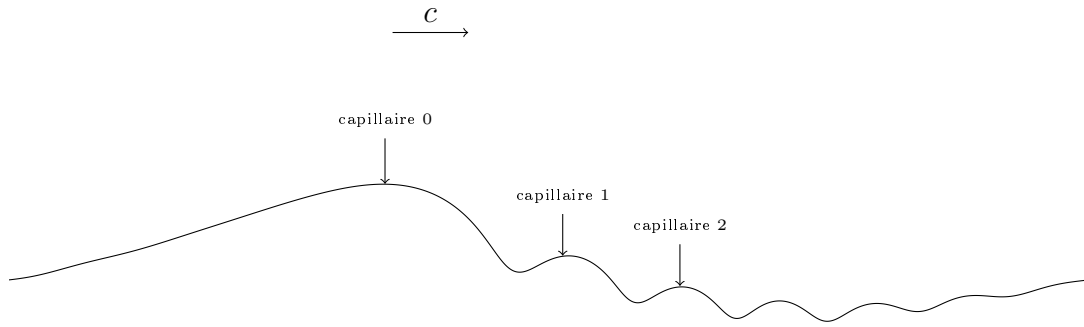


Figure 5.5. – Schéma d'un déferlement d'ondes capillaires parasites et de ses caractéristiques géométriques associées.

pu être divisée sous 4 formes différentes. Chaque forme pourra être présente dans un ou plusieurs types de déferlement présentés dans la section 5.5.

### 5.3.1.1. Première forme

Les ondes capillaires de la première forme peuvent jouer un rôle majeur lors de la dissipation d'énergie. En effet, en fonction du type de déferlement, ces ondes peuvent être l'unique phénomène associé au déferlement. L'augmentation de la dissipation d'énergie provient uniquement de ces ondes capillaires. Cependant, pour d'autres types de déferlement, ces ondes peuvent être observées mais ne sont pas l'élément important de celui-ci. C'est le cas notamment pour le déferlement plongeant.

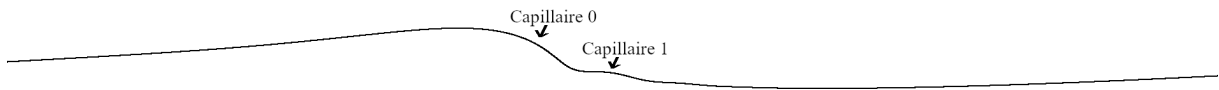
Lors de l'advection de la vague, des ondes capillaires font leur apparition sur la face avant de la vague initiale. Ces petites ondes capillaires sont fortement influencées par la tension de surface. Elles se déplacent à une célérité proche de celle de la vague initiale et possèdent une amplitude et longueur beaucoup plus petites que celles de la vague initiale. La longueur de chaque onde capillaire est presque constante tout le long du déferlement. Tandis que leur amplitude diminue lentement en corrélation avec la dissipation de l'énergie. La figure 5.6a permet l'observation de l'apparition de ces ondes capillaires sur le devant de la vague. Le capillaire 0 identifie, dans l'ensemble du document, le capillaire formé sur la crête de la vague. Les capillaires 1 et 2 sont les autres capillaires suivant leur ordre d'apparition (Fig. 5.6b).

### 5.3.1.2. Seconde forme

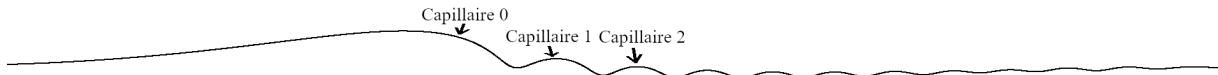
Les ondes capillaires de la seconde forme jouent un rôle majeur dans le déferlement glissant, présenté par la suite. Les ondes générées lors du début du déferlement subissent une modification géométrique importante. En effet, un phénomène de compression (Fig. 5.7a) et de décompression (Fig. 5.7b) va apparaître générant une ou plusieurs ondes supplémentaires (Fig. 5.7c). Ces nouvelles ondes ont une célérité différente de la vague initiale et, potentiellement, une direction également différente. La création de ce phénomène génère une illusion de glisse des ondes capillaires de la première forme sur le devant de la vague (Fig. 5.7c). Cette forme d'onde capillaire est visible uniquement pour les déferlements glissants.

### 5.3.1.3. Troisième forme

Contrairement aux formes précédentes, les premières ondes capillaires générées possèdent, dans ce cas, un rôle majeur dans la forme du déferlement lors de leurs interactions



(a) Début de la génération des ondes capillaires.



(b) Déplacement des ondes capillaires.

Figure 5.6. – Ondes capillaires : apparition première forme. Les ondes capillaires commencent à apparaître dans la figure (a) puis continuent leur déplacement avec la vague dans la figure (b).



(a) Compression de la première onde capillaire.



(b) Décompression de la première onde capillaire.



(c) Création de nouvelles ondes.

Figure 5.7. – Ondes capillaires : apparition seconde forme. Les ondes capillaires commencent à apparaître dans la figure (a) en se comprimant puis se décompressent (b) générant de nouvelles ondes capillaires (c).

avec un phénomène ne provenant pas de la tension de surface, à savoir un jet. La formation de ce jet modifie la surface (Fig. 5.8a) et le phénomène de compression-décompression apparaît sur les ondes situées sous le jet (Fig. 5.8a et 5.8b). Lors de la décompression, la surface de l'eau est propulsée dans le sens de la vague et la dynamique du jet ne crée pas de reconnexion au niveau de la surface. Dans ce cas, le rouleau provenant du premier jet n'est pas capturé et un second jet apparaît capturant un rouleau secondaire (Fig. 5.8c).

Cette forme d'onde capillaire n'est pas encore connue dans la littérature et est spécifique à un type de déferlement plongeant présenté dans la section 5.5.

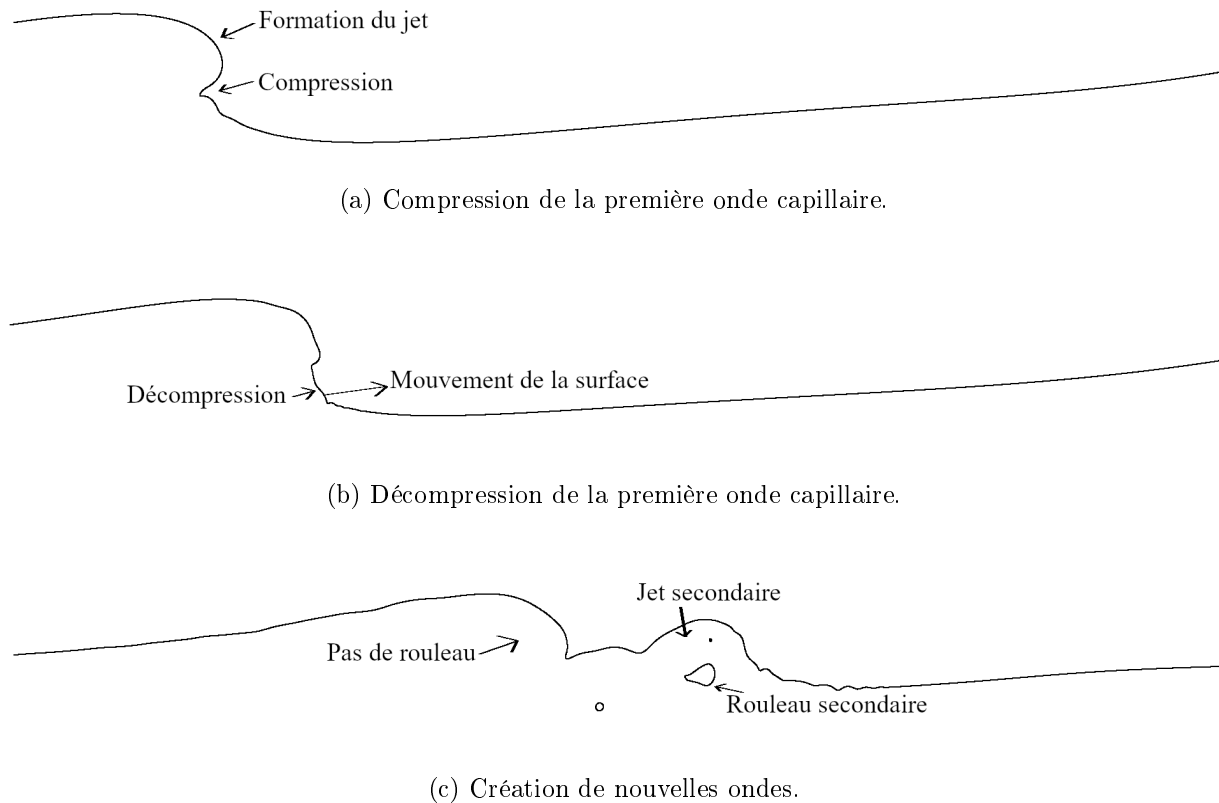


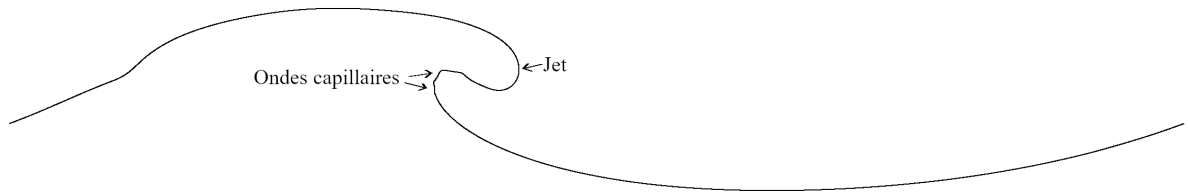
Figure 5.8. – Ondes capillaires : apparition troisième forme. Les ondes capillaires commencent à apparaître dans la figure (a) en se comprimant puis se décompressent (b) générant un mouvement de surface en amont de la vague et la création d'un jet secondaire avec son rouleau (c).

#### 5.3.1.4. Quatrième forme

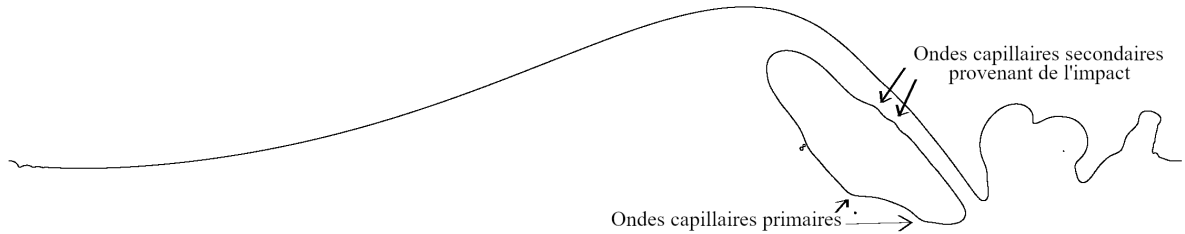
La dernière forme est totalement différente car les ondes capillaires ne jouent pas un rôle majeur dans le déferlement. Ces ondes capillaires sont transportées par le jet (Fig. 5.9a), générant une forme de doigt au bout de ce jet. Lors de l'impact de ce jet sur la surface, les ondes capillaires se baladent le long de la surface du rouleau capturé et de nouvelles ondes sont créées (Fig. 5.9b). Les premières ondes ne sont ainsi pas motrices de la dynamique du déferlement et de la dissipation de l'énergie de la vague. Cette forme d'onde capillaire est un dérivé de la première forme avec la présence d'un rouleau. Par conséquent, elle est visible uniquement dans le cas de déferlement plongeant.

#### 5.3.2. Angle $\theta_{01}$

La présence d'ondes capillaires sur la face avant de la vague laisse apparaître l'angle  $\theta_{01}$  entre les capillaires 0 et 1 présentés au début de la section. L'étude démontre l'importance de cet angle dans la génération et modification du comportement du déferlement. La méthode de calcul de cet angle est décrite dans un premier temps. Puis l'étude de cet angle est réalisée sur les deux premières formes des ondes capillaires.



(a) Jet avec les ondes capillaires.



(b) Impact du jet sur la surface capturant un rouleau avec des ondes capillaires.

Figure 5.9. – Ondes capillaires : apparition quatrième forme. Les ondes capillaires de la première forme sont transportées par le jet (a) puis se déplacent sur les parois du rouleau avec de nouvelles ondes capillaires (b).

### 5.3.2.1. Méthode de calcul

La formation du creux entre les deux ondes capillaires forme l'apparition de deux faces. Sur chacune de ces faces, la pente de la surface est mesurée. L'algorithme consiste en 3 étapes :

1. le calcul de la position du creux entre les capillaires 0 et 1
2. la recherche des deux pics entourant le creux
3. le calcul de la pente de chaque face au centre du creux et du pic

Afin d'obtenir un résultat précis, le calcul de la pente est étalé sur 6 mailles. La figure 5.10 est un schéma représentant le calcul de cet angle.

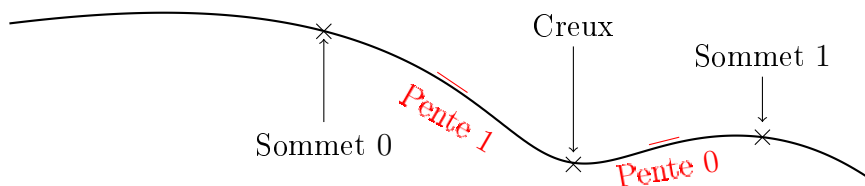


Figure 5.10. – Schéma du calcul de l'angle  $\theta_{01}$ .

L'angle  $\theta_{01}$  évolue tout au long du déferlement, cependant, une particularité intéressante et régissant le type de déferlement obtenu est étudiée : la valeur minimale de l'angle  $\theta_{01}$ . La figure 5.11 représente l'évolution de l'angle au cours du temps pour une simulation. Sur cette figure, il est observé une diminution de l'angle dans les premiers instants (étape de compression). Cette diminution est suivie par la naissance d'un plateau pour lequel l'évolution de l'angle semble ralentir puis stagner autour d'une valeur minimale. Après avoir atteint son minimum, à  $t = 0.223$  s, l'angle augmente progressivement à vitesse constante vers  $180^\circ$  (étape de décompression). Dans cette partie, l'angle  $\theta_{01}$  étudié correspond au minimum de la valeur lors des premiers instants de génération du

déferlement. Cette dynamique de surface ressemble à la compression d'un ressort avec l'emmagasinement d'énergie dans un volume/une surface restreint. Puis, tel le ressort, la surface décompresse et libère l'énergie accumulée. En fonction de l'énergie dissipée, les phénomènes sous-jacents obtenus sont différents. Dans le cas des ondes capillaires de la première forme, l'angle  $\theta_{01}$  va augmenter petit à petit à mesure que l'excédant d'énergie se dissipe. Cependant, pour les ondes capillaires de la seconde forme, le mouvement soudain de surface engendre l'apparition d'anneaux de vorticité accompagnés d'une ou plusieurs ondes. En fonction de l'intensité des vortex générés, des bulles peuvent être capturées. L'angle minimal est donc un élément majeur de plusieurs déferlements.

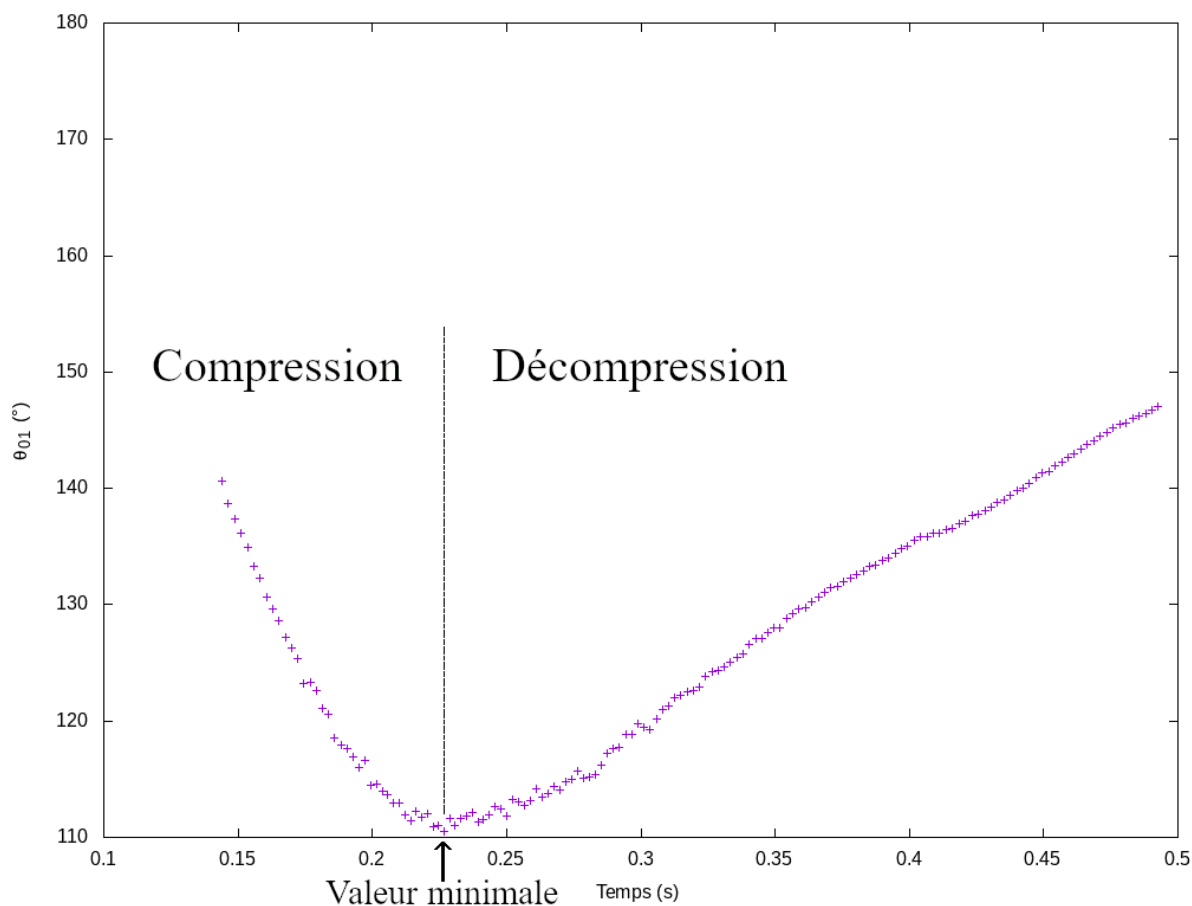


Figure 5.11. –  volution de  $\theta_{01}$ ( ) au cours du temps (s) pour la simulation correspondant aux conditions initiales :  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ ,  $\lambda = 0.05 \text{ m}$  et  $\epsilon = 0.15$ .

### 5.3.2.2.  tude des ondes capillaires de la première forme

Après l'utilisation de la méthode, les résultats obtenus pour la valeur de l'angle minimum de  $\theta_{01}$  correspondant aux ondes capillaires de la première forme sont présentés dans la figure 5.12. L'angle a été calculé en fonction de la cambrure initiale de la vague. Il est possible de remarquer la présence d'un schéma identique pour l'ensemble des courbes. La courbe semble commencer pour un angle proche de 180  puis diminue lorsque la cambrure augmente. La valeur minimale semble converger vers une valeur proche de 90 . La similarité observable entre ces courbes permet la construction d'une fonction polynomiale ayant pour but de prédire l'angle minimum en fonction des conditions initiales : longueur d'onde  $\lambda$ , profondeur  $d$  et amplitude  $a$ . Les données associées à l'onde capillaire de la première forme se trouvent dans l'annexe B.

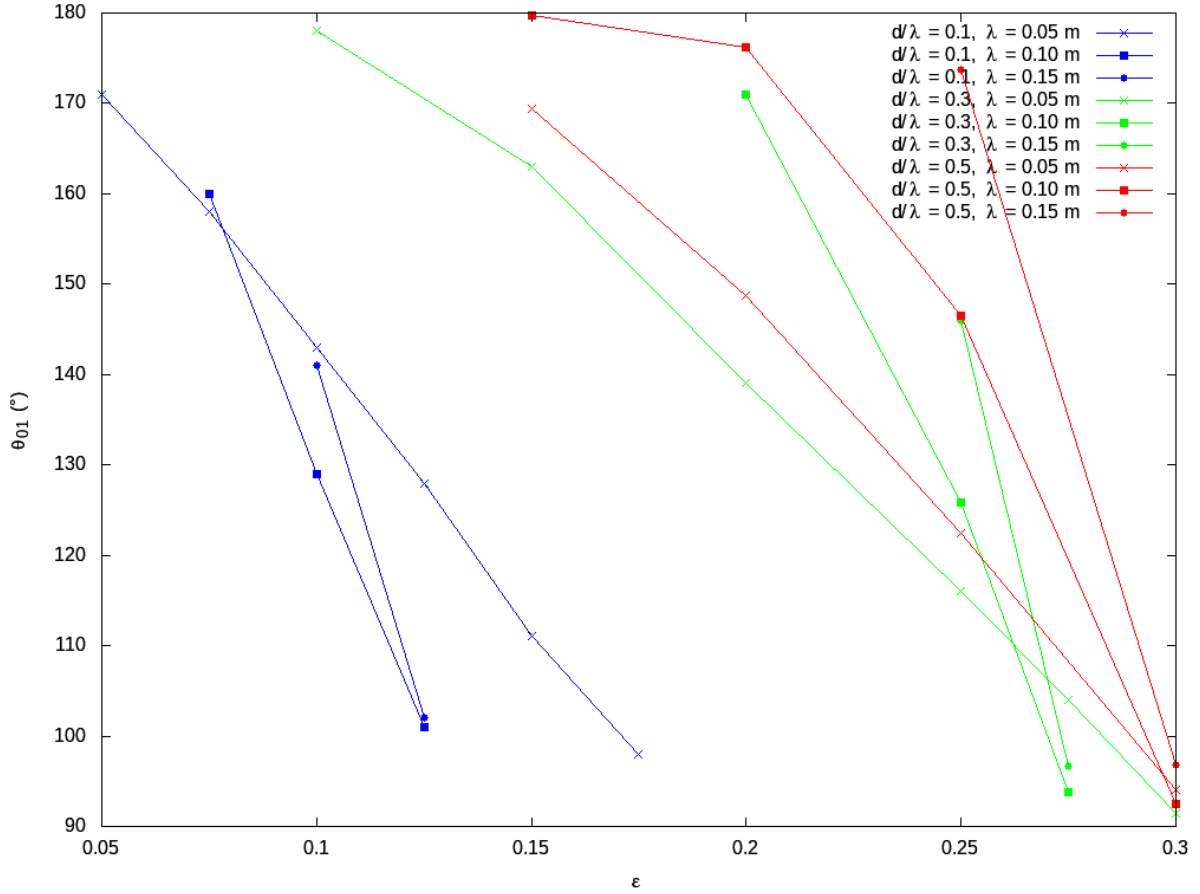


Figure 5.12. – Évolution du minimum de  $\theta_{01}(\text{°})$  en fonction de la cambrure  $\epsilon$  pour toutes les simulations ayant des ondes capillaires du premier cas.

**5.3.2.2.1. Reconstruction de la fonction** La reconstruction de la fonction est appelée :  $\theta_{01,PCW}$ . Cette fonction a pour ambition de prédire l'angle minimal en fonction des trois longueurs caractéristiques de la vague initiale. Grâce à l'optimisation de l'erreur de la fonction reconstruite par rapport au nombre de coefficients et des combinaisons des longueurs caractéristiques, cela a permis le développement de la fonction reconstruite grâce à un nombre limité de coefficients. Les variables de la fonction  $\theta_{01,PCW}$  sont : la cambrure  $\epsilon = \frac{2\pi a}{\lambda}$ , la racine du nombre d'onde  $\sqrt{k} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$  et une variable représentant la profondeur dans les équations 5.33 et 5.34 de la condition initiale  $\sqrt{\tanh(kd)} = \sqrt{\tanh(\frac{2\pi d}{\lambda})}$ .

Lors de la reconstruction de la fonction, les normes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$  relatives de l'erreur sont vérifiées. Les équations représentant ces normes sont

$$r_{L_1} = \frac{\sum \left| \frac{\theta_{01,PCW} - \theta_{01}}{\theta_{01}} \right|}{N_{\theta_{01}}}$$

$$r_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum (\theta_{01,PCW} - \theta_{01})^2}{\sum (\theta_{01})^2}}$$

$$r_{L_\infty} = \max\left(\left| \frac{\theta_{01,PCW} - \theta_{01}}{\theta_{01}} \right|\right)$$

avec  $\theta_{01,PCW}$  la fonction reconstruite,  $\theta_{01}$  la valeur obtenue grâce à la simulation et  $N_{\theta_{01}}$



le nombre de résultats.

Dans un premier temps, la fonction reconstruite est sous la forme d'un polynôme du second degré suivant chaque variables. Par conséquent, il y a un total de 36 résultats pour 27 coefficients à résoudre. La méthode des moindres carrés est une approche standard permettant la résolution de systèmes surdéterminés tout en minimisant la somme des carrés des résidus. La fonction DGELS, proposée par la librairie LAPACK, est utilisée pour obtenir les coefficients de ce système surdéterminé. La fonction reconstruite possède les erreurs  $r_{L_1}$ ,  $r_{L_2}$  et  $r_{L_\infty}$  suivantes : 0.01037, 0.00012 et 0.06515. Par conséquent, l'erreur maximale obtenue est : 6.515%. Cependant, l'utilisation et la prise en compte d'une fonction possédant 27 coefficients ne sera pas facilement utilisable en pratique.

En prenant en compte la facilité d'utilisation, une seconde reconstruction a été effectuée. Cette fois-ci, les termes sont enlevés un à un pour trouver la forme reconstruite la plus compacte avec une erreur légèrement détériorée. La fonction obtenue possède seulement 11 coefficients. Les erreurs obtenues sont :  $r_{L_1} = 0.01812$ ,  $r_{L_2} = 0.00019$  et  $r_{L_\infty} = 0.06175$ . Tandis que les erreurs  $r_{L_1}$  et  $r_{L_2}$  ont légèrement augmenté, l'erreur maximale a diminué vers la valeur de 6.175%. L'enlèvement d'un terme supplémentaire de la fonction reconstruite augmente l'erreur maximale à environ 20%. La nouvelle fonction reconstruite à 11 coefficients semble être le meilleur compromis entre l'erreur commise et la facilité d'utilisation.

Voici la fonction reconstruite

$$\begin{aligned} \theta_{01,PCW}(\lambda, a, d) = & \alpha_{\theta,1} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,2} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 + \alpha_{\theta,3} \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} \\ & + \alpha_{\theta,4} \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,5} \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \alpha_{\theta,6} \frac{2\pi a}{\lambda} + \alpha_{\theta,7} \frac{2\pi}{\lambda} \\ & + \alpha_{\theta,8} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \alpha_{\theta,9} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,10} \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \alpha_{\theta,11} \end{aligned}$$

avec  $\alpha_{\theta,}$ , les coefficients provenant de la méthode des moindres carrés. Les coefficients de la fonction sont présentés dans le tableau 5.3.

Coefficients de la fonction $\theta_{01,PCW}$	Valeurs
$\alpha_{\theta,1}$	1514.8995
$\alpha_{\theta,2}$	-16982.9998
$\alpha_{\theta,3}$	-2063.1402
$\alpha_{\theta,4}$	1426.9144
$\alpha_{\theta,5}$	23586.6100
$\alpha_{\theta,6}$	-16931.8538
$\alpha_{\theta,7}$	1.0887
$\alpha_{\theta,8}$	222.5496
$\alpha_{\theta,9}$	-188.2525
$\alpha_{\theta,10}$	-2336.2441
$\alpha_{\theta,11}$	2056.9544

Table 5.3. – Tableau des coefficients après l'utilisation de la méthode des moindres carrés pour la fonction  $\theta_{01,PCW}$ .

**5.3.2.2.2. Angle limite : 90°** Pour de nombreux déferlements de petites longueurs d'ondes des ondes capillaires vont être générées. Cependant, en fonction du déferlement observé, il est possible que ces ondes soient un élément moteur au déferlement et donc à la dissipation de l'énergie. Un élément clé de cette étude est la présence d'un angle critique  $\theta_{90}$  entre les ondes capillaires des deux premières formes. La cambrure initiale de la vague influence la formation de l'angle  $\theta_{01}$  (Fig. 5.12). Plus la vague est cambrée, plus petit sera l'angle obtenu. Celui-ci tend, de ce fait, vers 40° pour les grandes cambrures. Lors de la naissance de ces ondes capillaires, l'angle est proche de 180°. Sur la figure 5.13, il est observé une zone de séparation entre les résultats provenant des simulations des ondes de la première forme, en carré bleu, et des simulations de la seconde forme, en croix rouge. Dans la présente étude, la valeur minimal de l'angle des simulations avec des ondes capillaires de la première forme est 91.02°. Tandis que les simulations des ondes capillaires de la seconde forme possèdent une valeur maximale de 87.3°. Par conséquent, il existe un angle critique séparant les différentes formes de comportement des ondes capillaires. Afin de simplifier l'étude, cet angle limite  $\theta_{90}$  sera supposé avoir une valeur de 90°.

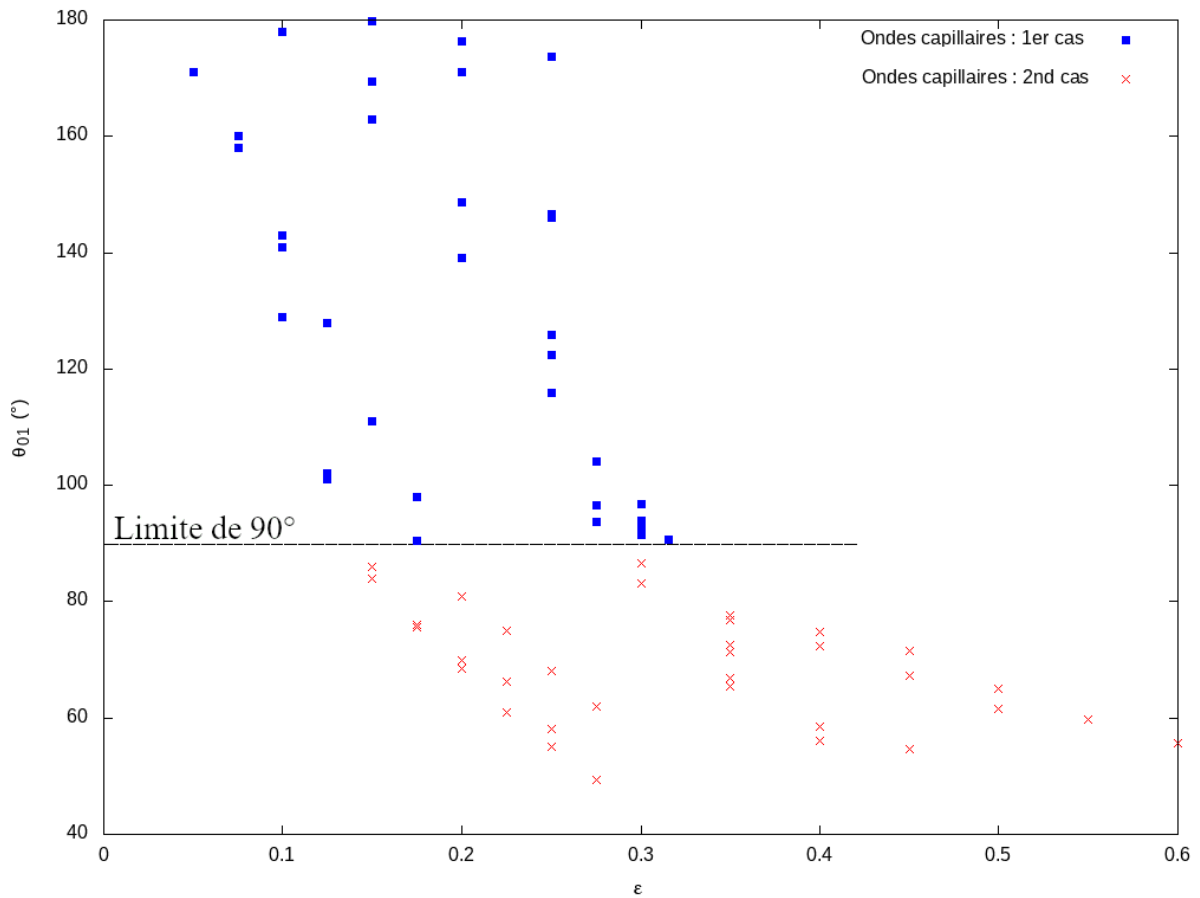


Figure 5.13. – Angle minimal en fonction de la cambrure. Les résultats des ondes capillaires des première et seconde formes sont notés respectivement en : carré bleu et croix rouge.

La fonction reconstruite précédemment  $\theta_{01,PCW}$  peut être modifiée afin de résoudre la courbe  $\epsilon_{max,PCW}(\lambda, d)$  représentant l'apparition de l'angle critique  $\theta_{90}$ . Cette fonction nécessite la résolution du système suivant

$$\begin{aligned} &\epsilon^2(\alpha_{\theta,1}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,2}) + \epsilon(\alpha_{\theta,3}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,5}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,6}) \\ &+ \alpha_{\theta,7}\frac{2\pi}{\lambda} + \alpha_{\theta,8}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,9}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,10}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,11} - \theta_{90} = 0 \end{aligned}$$

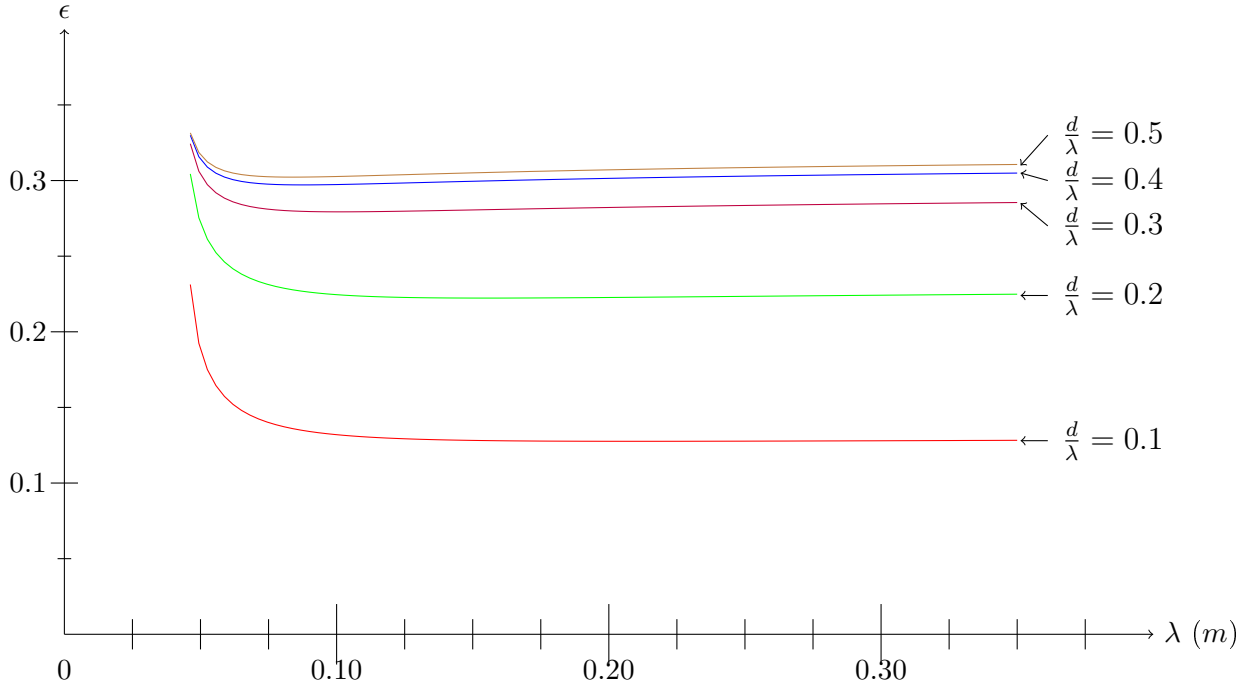


Figure 5.14. – Limite  $\epsilon_{max,PCW}$  entre les deux premières formes d'ondes capillaires. Les courbes rouge, verte, violette, bleue et marron représentent respectivement la limite pour les profondeurs d'eau 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5.

La résolution de ce système d'équation du second degré donne

$$\epsilon_{max,PCW}(\lambda, d) = \frac{-\gamma_{\theta,2} - \sqrt{\gamma_{\theta,2}^2 - 4\gamma_{\theta,1}\gamma_{\theta,3}}}{2\gamma_{\theta,1}}$$

avec  $\gamma_{\theta,1} = \alpha_{\theta,1}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,2}$ ,  $\gamma_{\theta,2} = \alpha_{\theta,3}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,5}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,6}$  et  $\gamma_{\theta,3} = \alpha_{\theta,7}\frac{2\pi}{\lambda} + \alpha_{\theta,8}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,9}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \alpha_{\theta,10}\sqrt{\tanh(\frac{2\pi}{\lambda}d)} + \alpha_{\theta,11} - \theta_{90}$ . Le domaine de validité de cette équation est  $\lambda \times \frac{d}{\lambda} = [0.05 m, 0.35 m] \times [0.1, 0.5]$ . Afin d'extrapoler la possible utilisation de cette équation en dehors de ce domaine, il est nécessaire de faire une étude supplémentaire avec des longueurs d'ondes et/ou des profondeurs d'eau en dehors de domaine de validité.

**5.3.2.2.3. Étude de la limite  $\epsilon_{max,PCW}$**  L'image 5.14 démontre l'influence de la profondeur d'eau sur l'apparition de la limite entre les deux premières formes des ondes. Un fait intéressant est la baisse de l'apparition de cette limite pour des eaux peu profondes. L'influence de la profondeur semble devenir importante lorsque  $\frac{d}{\lambda} \leq 0.3$ .

### 5.3.2.3. Étude des ondes capillaires de la seconde forme

Dans le même état d'esprit que pour la première forme, l'angle des ondes capillaires de la seconde forme est étudié dans cette section. La figure 5.15 représente la valeur de l'angle minimum de  $\theta_{01}$  en fonction de la cambrure pour toutes les ondes capillaires de la seconde forme. Les données associées à l'onde capillaire de la seconde forme se trouvent dans l'annexe C.

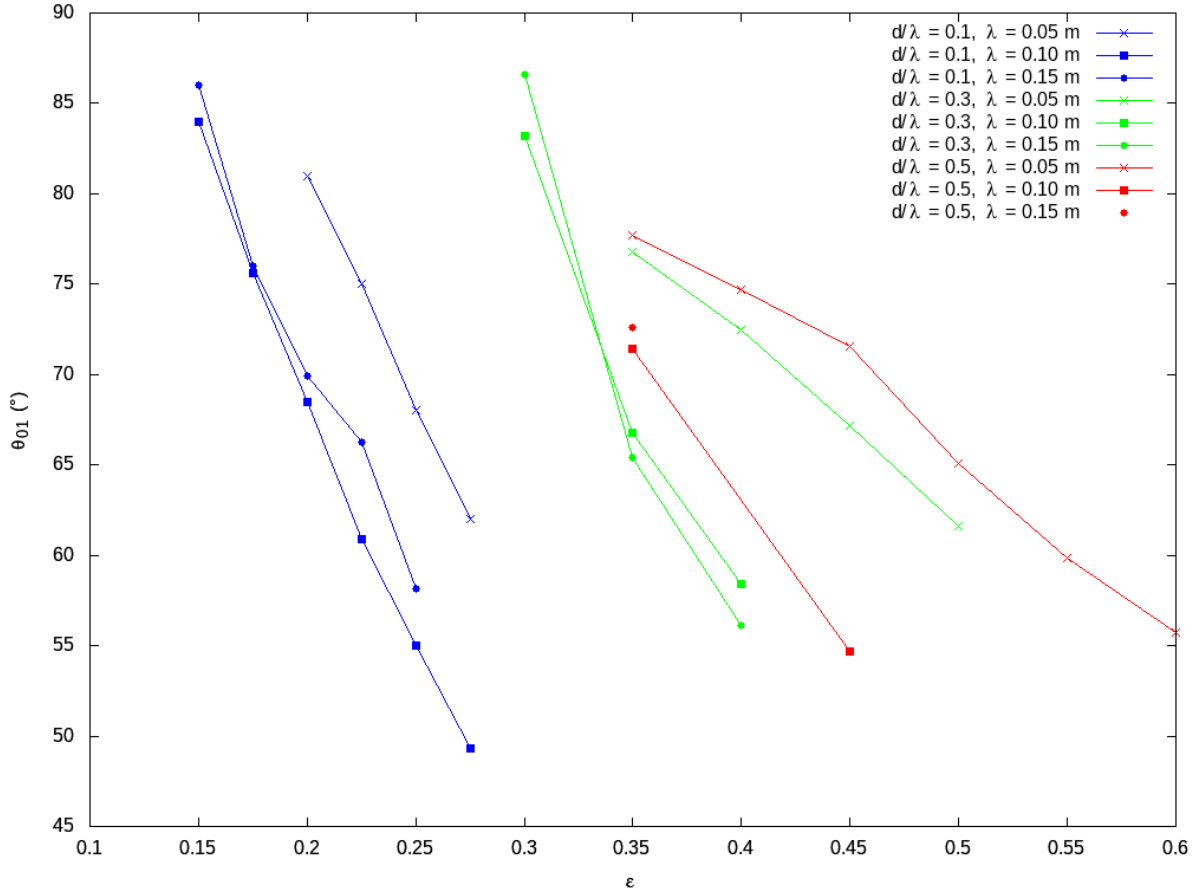


Figure 5.15. – Évolution du minimum de  $\theta_{01}$ (°) en fonction de la cambrure  $\epsilon$  pour toutes les simulations ayant des ondes capillaires du second cas.

Une seconde fonction est reconstruite avec les mêmes variables et le même polynôme de base pour prédire la valeur de l'angle minimum  $\theta_{01}$  des ondes de la seconde forme. Cette fonction est notée  $\theta_{01,SB}$ . La fonction sera supposée être similaire à celle précédente avec la prise en compte des terme d'ordre 2 sur chaque variable. La fonction reconstruite et optimisée entre le nombre de coefficients et les erreurs est

$$\begin{aligned} \theta_{01,SB}(\lambda, a, d) = & \beta_{\theta,1} \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \beta_{\theta,2} \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} + \beta_{\theta,3} \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cdot \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \beta_{\theta,4} \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \\ & + \beta_{\theta,5} \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \beta_{\theta,6} \frac{2\pi a}{\lambda} + \beta_{\theta,7} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) + \beta_{\theta,8} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} \\ & + \beta_{\theta,9} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) + \beta_{\theta,10} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \cdot \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right)} + \beta_{\theta,11} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) + \beta_{\theta,12} \end{aligned}$$

avec 12 coefficients  $\beta_{\theta,}$  résolus par la méthode des moindres carrés sur 33 résultats de simulations. Les erreurs relatives en normes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$  associées à cette reconstruction sont respectivement : 0.02085, 0.00037 et 0.06365. Soit une erreur maximale de 6.365%. Les coefficients de la fonction de reconstruite sont présentés dans le tableau 5.4. L'utilisation de nombre plus réduit de coefficients augmente l'erreur maximale à environ 10%.

Contrairement au cas précédent, il ne semble pas y avoir de relation particulière entre la limite de la deuxième et la troisième formes des ondes capillaires provenant de l'étude de l'angle minimum  $\theta_{01}$ .

Coefficients de la fonction $\theta_{01,SB}$	Valeurs
$\beta_{\theta,1}$	-64.8108
$\beta_{\theta,2}$	48.3957
$\beta_{\theta,3}$	1405.4438
$\beta_{\theta,4}$	-1065.5388
$\beta_{\theta,5}$	-6700.7758
$\beta_{\theta,6}$	4868.5630
$\beta_{\theta,7}$	14.2838
$\beta_{\theta,8}$	-8.9034
$\beta_{\theta,9}$	-343.6678
$\beta_{\theta,10}$	232.7304
$\beta_{\theta,11}$	1117.3690
$\beta_{\theta,12}$	-442.8510

Table 5.4. – Tableau des coefficients après l’utilisation de la méthode des moindres carrés pour la fonction  $\theta_{01,SB}$ .

### 5.3.3. Bilan

L’étude des ondes capillaires a mis en évidence la présence de 4 formes différentes de dynamique de surface provenant, en partie, de l’influence de la tension de surface sur le mouvement de la vague. La description de ces 4 formes va permettre le développement et la caractérisation de nouveaux types de déferlements dans la section 5.5.

De plus, un nouveau critère de détection et de caractérisation fut observé lors de la présence des ondes capillaires. L’angle  $\theta_{01}$  situé entre le creux des deux premiers capillaires semble conditionner le type de déferlement obtenu. L’évolution de cet angle se décompose en 3 parties : compression, plateau et décompression. Si le minimum de cet angle possède une valeur inférieure à  $\theta_{90} = 90^\circ$ , une modification du déferlement apparaît. Cette modification sera davantage étudiée dans la section 5.4.

La reconstruction de deux fonctions polynomiales  $\theta_{01,PCW}$  et  $\theta_{01,SB}$  permet la prédiction de l’angle minimal, observé grâce à la simulation, lors de la connaissance des grandeurs caractéristiques de la vague initiale : longueur d’onde  $\lambda$ , amplitude  $a$  et profondeur  $d$ .

L’utilisation de la première fonction reconstruite  $\theta_{01,PCW}$  et de l’angle critique  $\theta_{90}$  a permis le développement d’une nouvelle fonction représentant la limite entre les deux premières formes d’ondes capillaires pour toutes longueurs d’onde  $\lambda$  comprises entre 0.05 m et 0.35 m et toutes profondeurs d’eau comprises entre 0.1 et 0.5. L’extension de ce domaine d’application nécessite la vérification sur des résultats en dehors du domaine étudié dans le manuscrit.

L’étude de cette limite a mis en évidence une forte influence de la profondeur d’eau lorsque  $\frac{d}{\lambda} \leq 0.3$ . Cette influence provoque la modification du type de déferlement pour des cambrures plus petites. L’influence de la profondeur semble être facteur de  $\sqrt{\tanh(\frac{2\pi d}{\lambda})}$ .

## 5.4. Anneaux de vorticité

La notion de vorticité dans l’eau et dans l’air est une caractéristique importante lors de l’étude du déferlement de vague. En effet, la présence de vorticité accroît localement

la dissipation de l'énergie cinétique et, de ce fait, modifie la dynamique du déferlement. Dans chaque type de déferlement, de nombreux articles font la définition et l'étude du champ de vorticité observé.

**Ondes capillaires parasitiques** Dans les années 1980, K. Okuda *et al* [100] et N. Ebuchi *et al* [99] ont été les premiers à définir la zone de forte vorticité présente pour des déferlements d'ondes capillaires parasitiques, ou ondes capillaires de premier cas. Une forte vorticité apparait dans la partie supérieure du capillaire 0 correspondant à la crête de la vague. Cette zone s'étire vers l'arrière au fur et à mesure de la progression de la vague. Puis M. S. Longuet-Higgins va en 1992 [101] étendre la compréhension du mouvement du fluide proche des crêtes et des creux des capillaires. Du point de vue d'une vague progressive avançant de gauche à droite, le mouvement des particules fait une rotation de sens horaire dans les creux et de sens anti-horaire dans les crêtes. Ce mouvement permet aux ondes capillaires générées d'être advectées dans la même direction que la vague initiale. D. Dommermuth *et al* en 1994 [102] confirment la présence de vorticité dans l'ensemble des capillaires. Ils observent numériquement la présence d'un décrochage des lignes de courants sous la surface de chaque capillaire. Ce décrochage engendre l'apparition de vorticité juste après chaque creux. Cependant, ce n'est qu'en 2001 avec l'article écrit par H. J. Lin *et al* [103] que la présence de ces zones de vorticité fut démontrées expérimentalement à l'aide d'une caméra PIV (Particule Image Velocity). Les vagues étudiées dans cet article possèdent des caractéristiques de longueur d'onde et de cambrure similaires à celles prises dans ce manuscrit. Puis en 2009, D. Fuster *et al* [182] ont fait un état de l'art de plusieurs simulations de phénomène physique. Une des simulations est le déferlement de vagues d'ondes capillaires parasitiques pour lequel une image de la vorticité présente dans l'air est présente. Cette image permet d'observer la présence d'une zone de forte vorticité au dessus des capillaires. Ces zones démontrent le décrochage des lignes courant derrière chaque ondes générant une recirculation dans l'air au niveau de chaque creux. L.-P. Hung *et al* [109], démontrent, grâce à leur étude en 2009, que l'intensité de la vorticité proche des creux est plus grande que celle présente au niveau de la crête de chaque capillaire et confirment numériquement l'approximation linéaire de M. S. Longuet-Higgins [101] prédisant l'intensité des anneaux grâce à la célérité de l'onde initiale et la courbure locale de la surface. Ils prouvent également l'existence d'un lien entre la vorticité et la courbure du creux du capillaire. Finalement dans un article récent, L. Deike *et al* [90] présentent le champ de vorticité dans l'air et l'eau pour le déferlement d'ondes capillaires parasitiques.

**Glissant avec forte tension de surface** En 1996, W. K. Melville [183] explique la présence de vorticité dans le cas de déferlement glissant, vorticité provenant de phénomènes physiques proches de ceux des ondes capillaires parasitiques. Grâce aux études précédentes, J. H. Duncan *et al* [184] étudie en 1999 l'apparition d'un front descendant la face avant de la vague. Au fur et à mesure de l'avancement de la vague, le front relâche de plus en plus de capillaires, accentuant la vorticité générée par le déferlement. Puis quelques années plus tard, en 2001, ils publient un article [81] présentant l'observation du champ de vitesse lors d'une déferlement glissant avec une forte tension de surface. Grâce à cette étude, ils déterminent la présence de forte vorticité proche de la base de ce front descendant. Dans la même année, X. Qiao *et al* [185] étudient l'apparition de la vorticité à plusieurs étapes du déferlement. Dans un premier temps, ils confirment la présence d'une zone de forte vorticité à la base du front, puis ils démontrent l'observation d'un étirement progressif de cette zone jusqu'à rejoindre la crête de la vague initiale. En 2005, A. Iafrati *et al* [186] observent la présence de nombreux vortex sous la surface lors du déferlement.

Une image montre l'apparition de cette vorticit   à plusieurs instants du déferlement. Ils indiquent que la présence de ces zones de vorticit   avec une forte intensit   est responsable de la modification du profil de la vague sous la forme de fluctuations. Puis en 2009, A. Iafrati [112] confirme que la présence de la vorticit   provient essentiellement de la base du front. Ces vortex sont par la suite rel ch  s dans l'eau créant une couche de vorticit  . Finalement, L. Deike *et al* [90] présentent le champ de vorticit   dans l'air et l'eau pour le déferlement glissant. Ils observent l'apparition de vortex contrarotatifs provenant de la fine couche de vorticit   négative qui finissent par générer des structures turbulentes.

**Plongeant sans retournement** Un type de déferlement unique est décrit pour la première et unique fois dans l'article de L. Deike *et al* [90]. Dans cet article, ils soulignent que ce déferlement est une extension du déferlement précédent avec une plus grande aération et une intensit   de vorticit   plus importante. Ils nomment ce déferlement "glissant à fort nombre de Bond". Cependant, dans ce manuscrit, il sera pr sent   comme étant un déferlement plongeant sans retournement suite à l'étude faite sur la formation de la vorticit  .

**Plongeant** En 1989, P. Bonmarin [97] schématise l'apparition de zones de vorticit   pendant le déferlement plongeant. Il définit deux zones d'apparition de la vorticit  . La première se trouve à l'emplacement du rouleau avec une sens identique à la chute du jet. Le second, plus intense, se trouve dans la zone du jet secondaire avec les nombreuses bulles g n r  es. En 1999, G. Chen *et al* [87] présentent grâce à la simulation numérique l'apparition du maximum de vorticit   pour une vague plongeante. Ils démontrent que le maximum de vorticit   est obtenu au moment de l'impact du jet sur la surface. En 2009, A. Iafrati [112] étudie le signe de la vorticit   lors d'une déferlement plongeant. Il observe une production de vorticit   négative plus grande que de vorticit   positive.  galement, la production de vorticit   positive est irrégulière. Il continue son étude en 2013 [55] et observe la formation d'un dipôle g n r   dans l'air lors du déferlement. En 2015, L. Deike *et al* [90] présentent le champ de vorticit   dans l'air et l'eau pour le déferlement plongeant avec la génération de vorticit   négative autour du rouleau captur   et la présence de vorticit   dans le jet secondaire. Confirmant une nouvelle fois la schématisation faite par P. Bonmarin en 1989. Récemment en 2019, P. Lubin *et al* [52] présentent la simulation numérique en 3D du déferlement d'une vague plongeante avec le champ de vitesse associ   à ce déferlement. Sur ces images, la génération de nombreuses structures cohérentes sont observables dans l'air, au dessus du jet secondaire et dans le rouleau, et dans l'eau autour du rouleau.

### 5.4.1. Définition de la positivit  

Avant de procéder à la présentation de l'apparition des anneaux de vorticit  , il est nécessaire de présenter la positivit   de la vorticit  . Dans ce manuscrit, un anneau de vorticit   positive correspond à un tourbillon de sens antihoraire lorsque la vague se déplace de gauche à droite. A l'inverse un anneau de vorticit   négative correspond au tourbillon de sens horaire. La figure 5.16 décrit la positivit   et le champ de vitesse associ  s aux tourbillons. Le champ de vorticit   est calcul   grâce à la relation suivante :

$$\nabla \times \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Dans le cas présent, le calcul des dérivées partielles est effectu   avec un schéma centr  , déplaçant le centre des cellules dans les coins de la cellule scalaire  $\Omega_{i,j}^c$ . Une interpolation bilinéaire est effectu  e pour recentrer la connaissance de cette variable sur la grille scalaire.

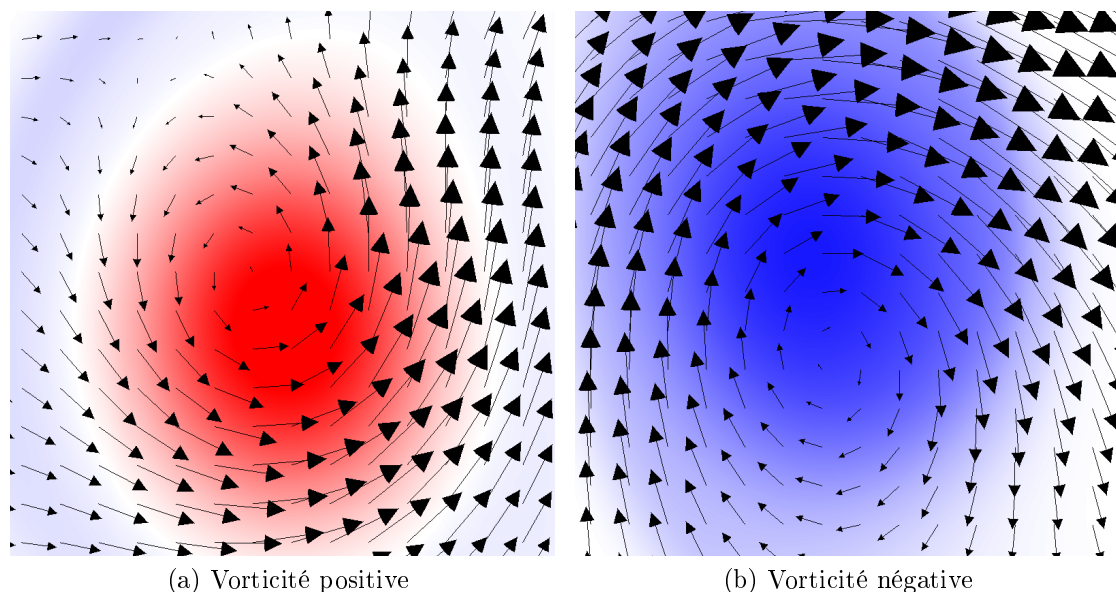


Figure 5.16. – Présentation des vorticités positive et négative pour une vague s’adveçant de gauche à droite. Le champ de vitesse est marqué par des flèches. Le vortex positif (resp. négatif) est représenté par la couleur rouge (resp. bleue).

## 5.4.2. Apparitions et générations

Grâce aux nombreuses simulations numériques, 5 types de vorticité ont pu être observées. Ces formes de vorticité pourront être caractéristiques d’un ou plusieurs types de déferlement.

### 5.4.2.1. Forme 1 : Vorticité du train d’onde capillaires

La première forme de vorticité apparaît dès lors qu’un train d’onde capillaires nait à la surface. Cette forme de vorticité, bien connue dans la littérature, correspond à la génération d’une zone de vorticité négative sous chaque creux et positive au dessus de chaque capillaire au sein de l’air (Fig. 5.17). En fonction de la forme du déferlement, cette vorticité générée peut être un élément majeur dans la dissipation d’énergie. L’apparition de ce type de vorticité est aussi observable dans le cas d’un déferlement glissant (Fig. 5.17). Ce type de vorticité apparaît dans l’ensemble des simulations présentant un déferlement.

### 5.4.2.2. Forme 2 : Vorticité de la base du front

La seconde forme de vorticité apparaît dès lors que l’angle formé par la base du front possède un angle inférieur à 90 . Dans la partie 5.3, cet angle a déjà démontré être à l’origine d’une limite entre deux types de déferlements. En effet, lorsque cette barre de 90  est franchie, un anneau de vorticité est généré dans le sillage du creux de la vague engendrant un couche de vorticité négative proche de la surface. Cette couche de vorticité fut remarqu e par J. H. Duncan *et al* [81] en 2001. La figure 5.18 permet l’observation de la création d’un anneau de vorticité provenant de la séparation des lignes de courant proche du premier creux. Cette séparation intervient lorsque l’angle  $\theta_{01}$  se comprime à une valeur inférieure à 90  comme présenté précédemment.



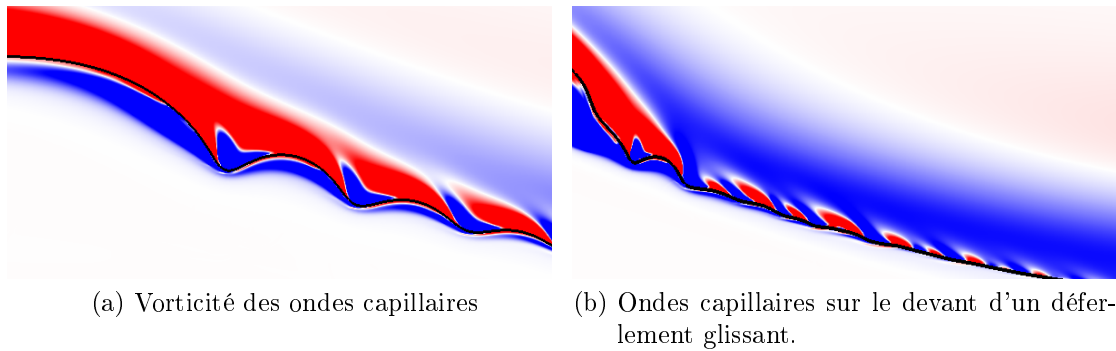


Figure 5.17. – Présentation de la vorticité de forme 1 provenant des ondes capillaires. La figure (a) est un zoom de la vorticité pour plusieurs ondes. La figure (b) est un plan large du front d'un déferlement glissant. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

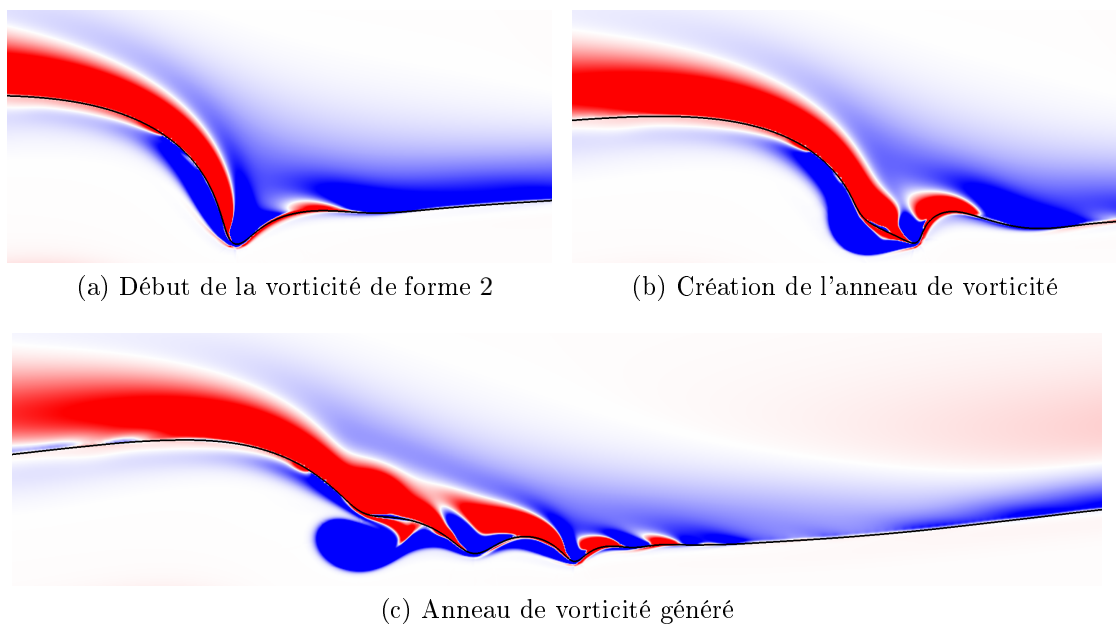
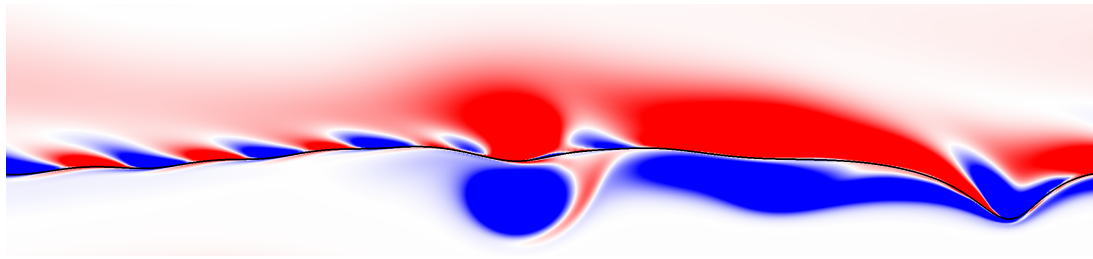
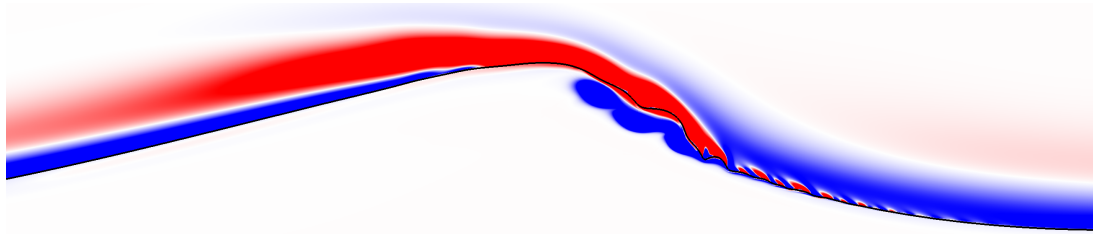


Figure 5.18. – Présentation de la vorticité de forme 2 provenant de la séparation des lignes de courants à la base du front. L'angle  $\theta_{01}$  continue de se compresser (a) générant l'apparition d'un anneau de vorticité (b) relâché par la suite vers la crête de la vague (c). Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

En fonction du type de déferlement, la base du front peut générer un anneau de vorticité unique basé sur un dipôle avec une vorticité négative dans l'eau et positive dans l'air. Cet anneau aura la particularité d'avoir une vitesse horizontale quasiment négative. La dynamique de cet anneau de vorticité n'est pour le moment par définie dans la littérature. Lorsque le déferlement est plus énergétique, une multitude d'anneaux de vorticité peut être générée créant la couche de vorticité observée dans la littérature [81, 185, 54, 90]. La génération de ces multiples vortex provient de l'oscillation de l'angle de la base du front proche de  $90^\circ$ . À chaque passage en dessous de  $90^\circ$ , un nouvel anneau est généré. La figure 5.19 montre les deux dynamiques possibles.



(a) Anneau de vorticité unique

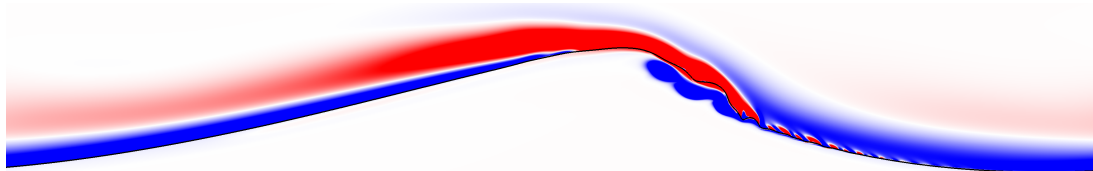


(b) Multiple anneaux de vorticité

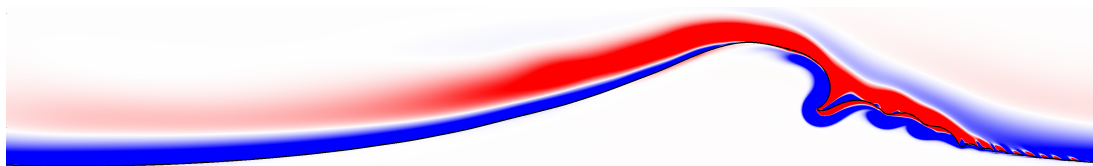
Figure 5.19. – Observations de la dynamique de la base du front. Dans la figure (a), un seul anneau est généré. Tandis que dans la figure (b), plusieurs anneaux sont générés. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

#### 5.4.2.3. Forme 3 : Interaction de plusieurs vortex

Lors de la deuxième dynamique de la forme 2, la génération de nombreux vortex va induire l'interaction entre deux ou plusieurs anneaux de vorticité lorsqu'ils sont suffisamment proches l'un des autres. Ces anneaux étant proches de la surface, ils génèrent une modification surfacique importante (Fig. 5.20).



(a) Deux anneaux de vorticité proches en dessous de la surface



(b) Interaction des anneaux et modification surfacique

Figure 5.20. – Présentation de la vorticité de forme 3 provenant de l'interaction de multiples anneaux de vorticité (a) modifiant la surface (b). Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

La modification de la surface combinée à la forte courbure obtenue génère un mouvement rapide de la surface dans la direction opposée. En fonction de l'intensité des deux anneaux de vorticité, il est possible qu'une bulle soit capturée. Le mouvement rapide de

la surface génère l'apparition d'un dipôle contrarotatif poussé dans la direction inverse du mouvement de la surface. La figure 5.21 présente la formation de dipôle avec et sans bulle capturée. Ce phénomène d'interaction entre plusieurs vortex peut être observé plusieurs fois au cours d'un même déferlement. Chaque interaction génère un dipôle se déplaçant vers le fond de l'eau. L'ensemble des dipôles générés par cette interaction possède une vitesse horizontale presque nulle. Ces anneaux contrarotatifs stagnent proche de leur zone d'apparition. Il est possible d'observer ces dipôles dans l'article écrit par L. Deike *et al* en 2015 [90], cependant il n'existe encore aucune caractérisation ou observation du mécanisme de création dans la littérature.

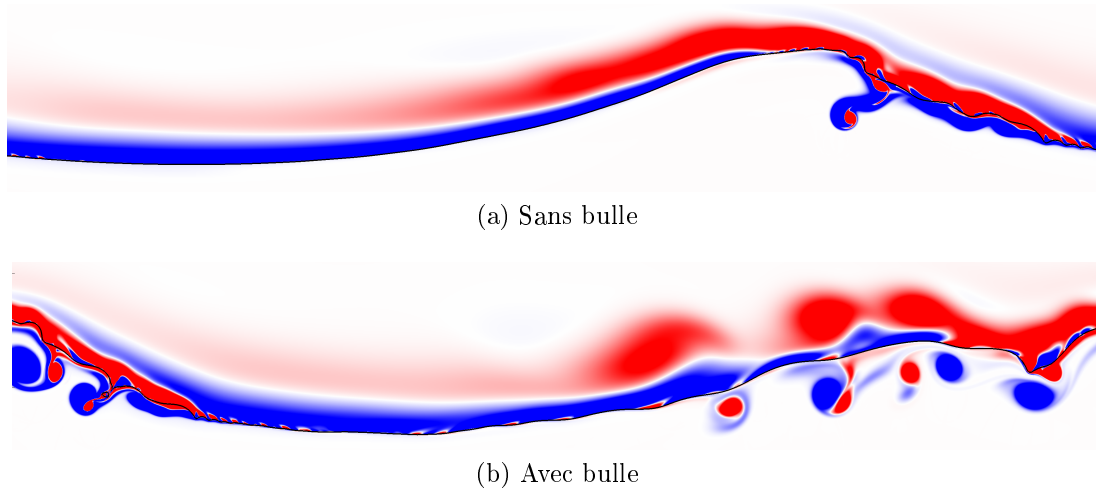


Figure 5.21. – Observations de la dynamique du mouvement de la surface avec génération du dipôle sans (a) et avec bulle (b). Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100$   $s^{-1}$ .

#### 5.4.2.4. Forme 4 : Vorticité sans rouleau

La 4<sup>ème</sup> forme de vorticité provient du déferlement plongeant sans rouleau, peu connu dans la littérature. Lors de la génération du jet, la surface située sous la vague possède une forte courbure. La tension de surface joue un rôle majeur et un mouvement de celle-ci est engendré dans la direction de la vague. Le mouvement de la surface étant plus rapide que la dynamique du jet, le jet ne peut impacter la surface et aucun rouleau n'est capturé. Cependant, pendant la chute du jet et le mouvement de la surface, de nombreux anneaux de vorticité contrarotatifs sont générés. Ces anneaux, contrairement aux deux formes précédentes, suivent le déferlement et s'advectionnent à une vitesse similaire à la crête.

**Avancée du jet par rapport au premier capillaire** En 1980, D. H. Peregrine *et al* [187] définissent un critère de détection du déferlement lié à la verticalité de l'interface. Ils ont observé, grâce à la modélisation mathématique, la présence d'une interface verticale pour tout déferlement plongeant. Cela correspond à l'angle de  $90^\circ$  de la surface par rapport à l'horizon. Cependant, pour caractériser les types de déferlement glissant et plongeant à petites échelles, ce critère n'est plus suffisant. En effet, pour le déferlement glissant, il est possible d'obtenir un angle inférieur à  $90^\circ$ . Un nouveau critère, étant l'extension du premier, permet de différencier les deux types de déferlement.

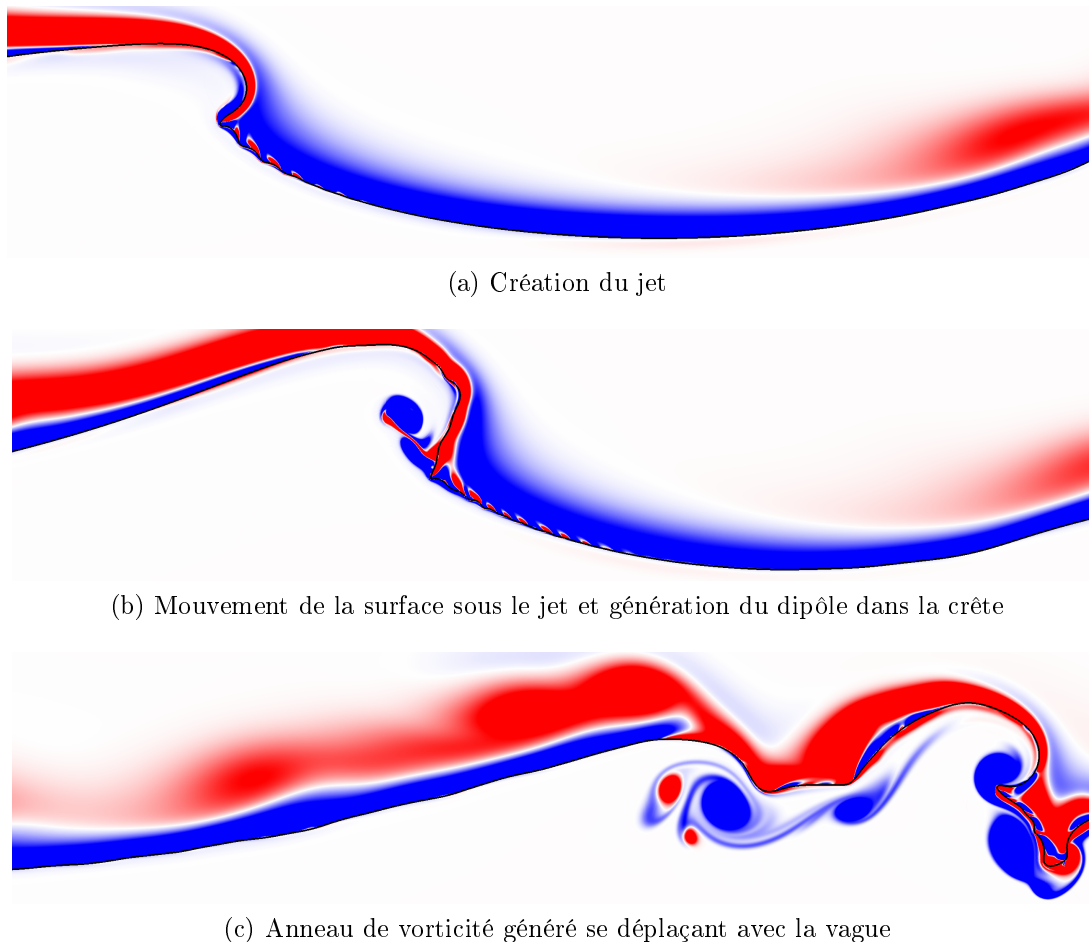


Figure 5.22. – Présentation de la vorticit e de forme 4 provenant de la génération d’un jet (a). Lors du mouvement de ce jet, la forte courbure génère un mouvement et empêche l’emprisonnement du rouleau (b). Les multiples anneaux de vorticit e se déplacent avec la vague (c). Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

En complément de l’angle vertical, il est nécessaire que l’avancée du jet soit devant la crête de la première onde capillaire. La figure 5.23 est une schématisation du critère de position horizontale du jet. La position horizontale de la première onde capillaire est représentée par une croix et des traits rouges, tandis que la position horizontale du jet est représentée par une croix et ligne noires. Ce critère géométrique permet de vérifier que l’avancée du capillaire 0 provient d’un excédant d’énergie cinétique et non de la modification surfacique provenant de la forme des capillaires. Par conséquent, pour un déferlement glissant (Fig. 5.23a), le jet est situé derrière la crête de l’onde capillaire (forme 3). A l’inverse, une position plus avancée du jet est observée pour une déferlement plongeant (Fig. 5.23b). Ce critère permet la distinction des déferlements : glissant d’onde capillaires et plongeant.

#### 5.4.2.5. Forme 5 : Vorticit e autour du rouleau

La dernière forme de vorticit e générée est celle provenant de l’impact du jet sur la surface. Au moment de l’impact sur la surface, les anneaux de vorticit es contenus dans le jet ainsi que les anneaux de vorticit e générées par l’impact s’enroulent autour du rouleau. Cela correspond à la zone de vorticit e présentée par P. Bonmarin en 1989 [97]. Cette forme

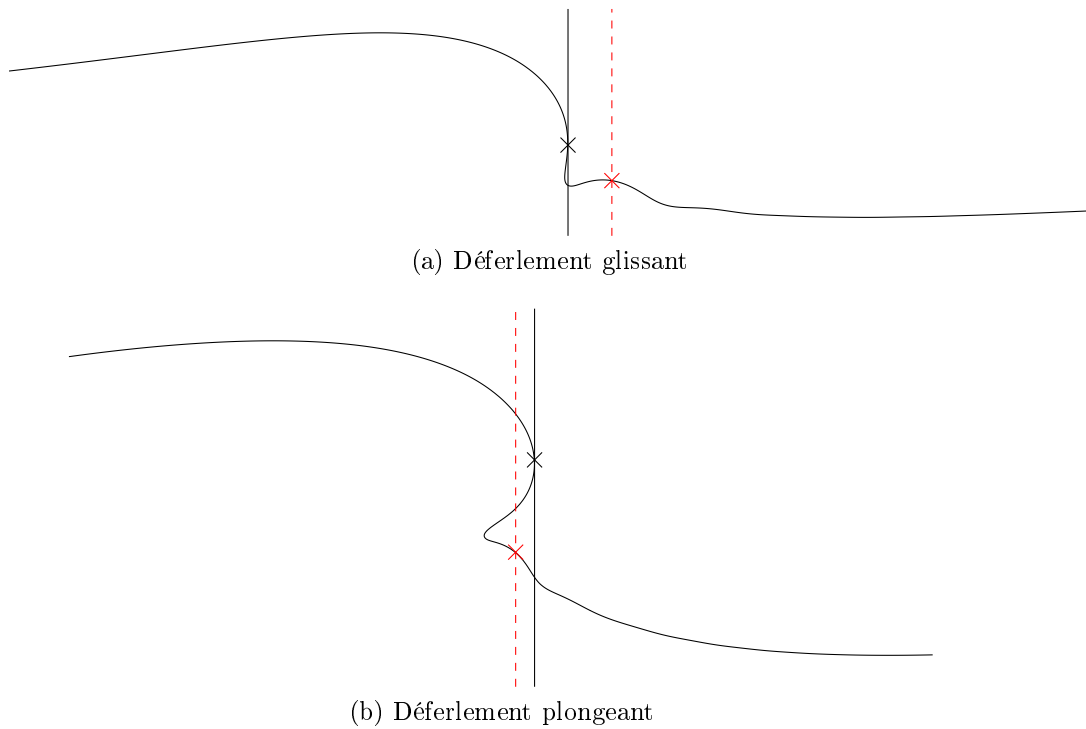


Figure 5.23. – Schémas du critère de position horizontale pour des déferlements glissant (a) et plongeant (b). La position du jet est notée par une croix noire  $\times$  et la position du sommet de la première onde capillaire est notée par une croix rouge  $\times$ .

de vorticité est déjà connue dans la littérature et elle est caractérisée dans de nombreux articles.

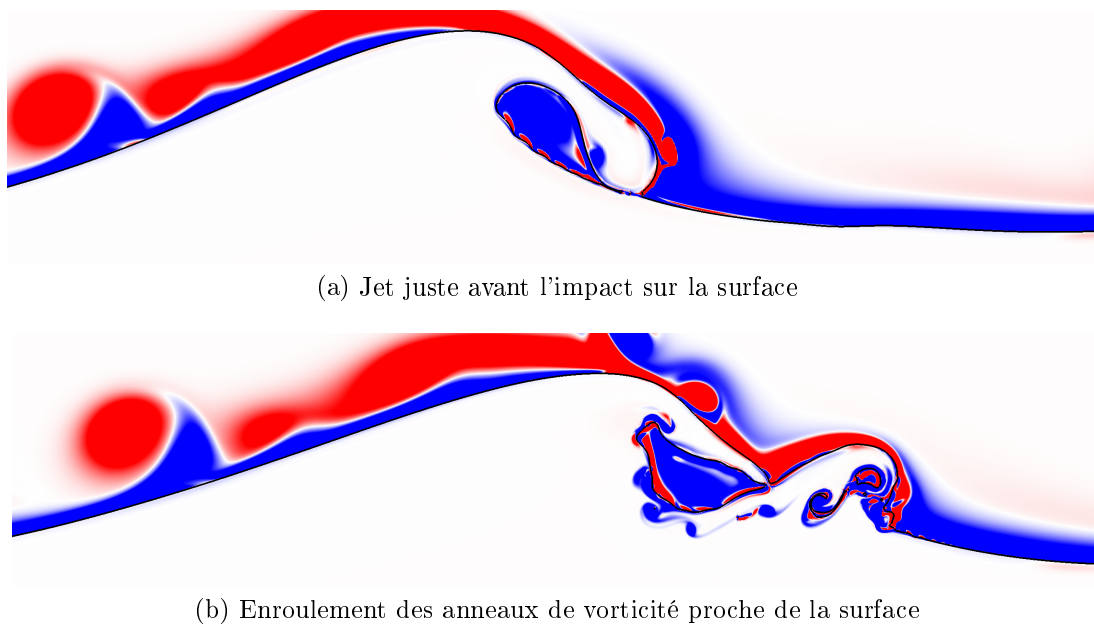


Figure 5.24. – Présentation de la vorticité de forme 5 provenant de la génération d'un jet (a) et de son impact sur la surface. De nombreux anneaux de vorticité sont générés et s'enroulent autour du rouleau (b). Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

### 5.4.3. Caractérisation de la vorticité en fonction de la longueur d'onde et de la profondeur d'eau

Dans son article écrit en 2009, A. Iafrati [112] étudie le signe de la vorticité lors d'une déferlement plongeant pour une eau profonde. Dans la littérature, il n'existe pas d'étude de la vorticité pour plusieurs types de déferlement de longueurs d'onde et de profondeurs d'eau variables. L'étude présentée ici porte sur deux points :

1. la caractérisation de l'épaisseur de couche provenant de la vorticité totale
2. la caractérisation de la positivité de la vorticité

L'ensemble des résultats présentés proviennent de résultats moyennés entre  $0T$  et  $1.5T$  pour chaque simulations. Dans cet interval de temps, le phénomène physique du déferlement est déjà apparu. Seule l'advection des dipoles contrarotatifs générés par la 3<sup> me</sup> forme de vorticité n'est pas prise en compte. L'étude de l'advection lente de ces dipôles vers le fond de l'eau nécessite un temps de calcul et un stockage des résultats sur une plus longue période. L'étude se focalise sur les premiers instants du déferlement.

#### 5.4.3.1.  paisseur de couche

L'épaisseur de couche représente la longueur suivant l'axe verticale de la présence de phénomène de vorticité entre  $0T$  et  $1.5T$ . Pour cela, la valeur absolue de la vorticité multipliée par la densité sont somm es suivant l'axe horizontale puis moyennées temporellement entre  $0T$  et  $1.5T$ . Cette méthode permet de connaître l'épaisseur de vorticité pour chaque simulation. La figure 5.25 est un résultat obtenu lors d'une simulation. La présence de deux pics y est observée. Le premier, à gauche, est le pic de vorticité de la couche limite provenant de l'interaction du mouvement de l'eau avec le fond. Le second pic, à droite, correspond à la vorticité générée par l'une ou plusieurs formes de vorticité lors du déferlement. Le niveau de l'eau au repos correspond à  $y = 0\text{ m}$  sur la figure. Une légère présence de vorticité en dessous de  $-0.01\text{ m}$  est observable sur le graphique. Cela correspond à la présence de vorticité de forme 3 se déplaçant doucement vers le fond.

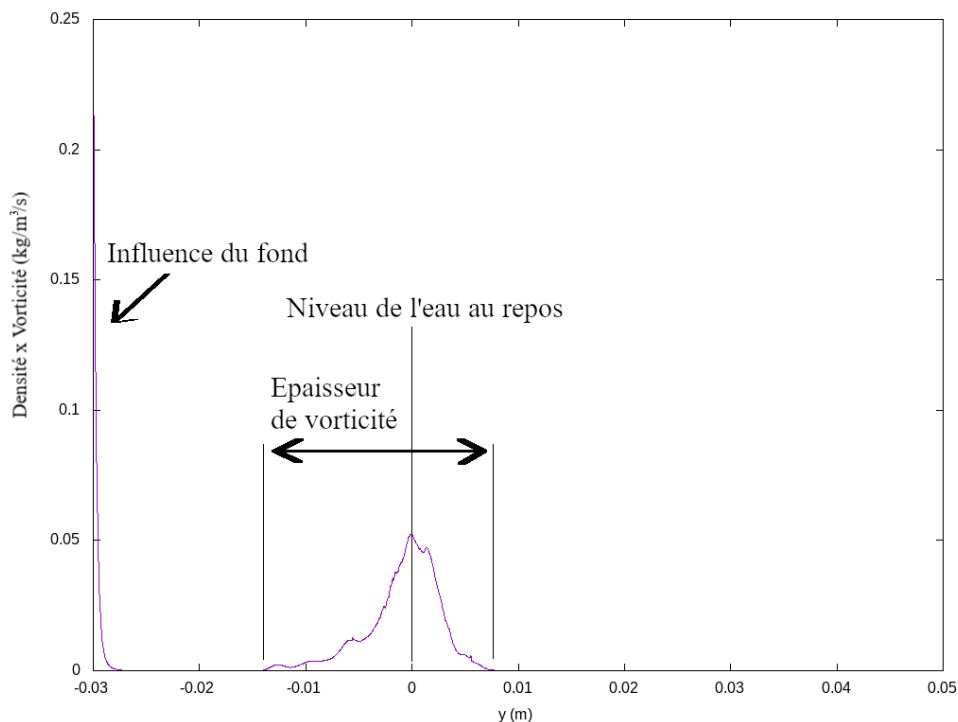


Figure 5.25. – Résultat de l'intégrale spatiale (suivant  $x$ ) et temporelle de la valeur absolue de la vorticité multipliée par la densité.

La figure 5.26 compare l'épaisseur de l'interface suivant la cambrure initiale de la vague pour 3 longueurs d'onde et 3 profondeurs d'eau. L'apparition d'une corrélation par rapport à la cambrure de cette épaisseur est en fonction affine. Cette corrélation semble être complètement indépendante de la profondeur d'eau. De plus, la présence de pics aléatoires augmentant considérablement l'épaisseur de vorticité est observée. Ce phénomène apparaît lors de la présence de vorticité de forme 3 relâchant un anneau de vorticité vers le fond de l'eau et augmentant ainsi l'épaisseur de présence de la vorticité. Ce phénomène s'observe essentiellement pour de fortes cambrures. Les données de la couche de vorticité se trouvent dans l'annexe D.

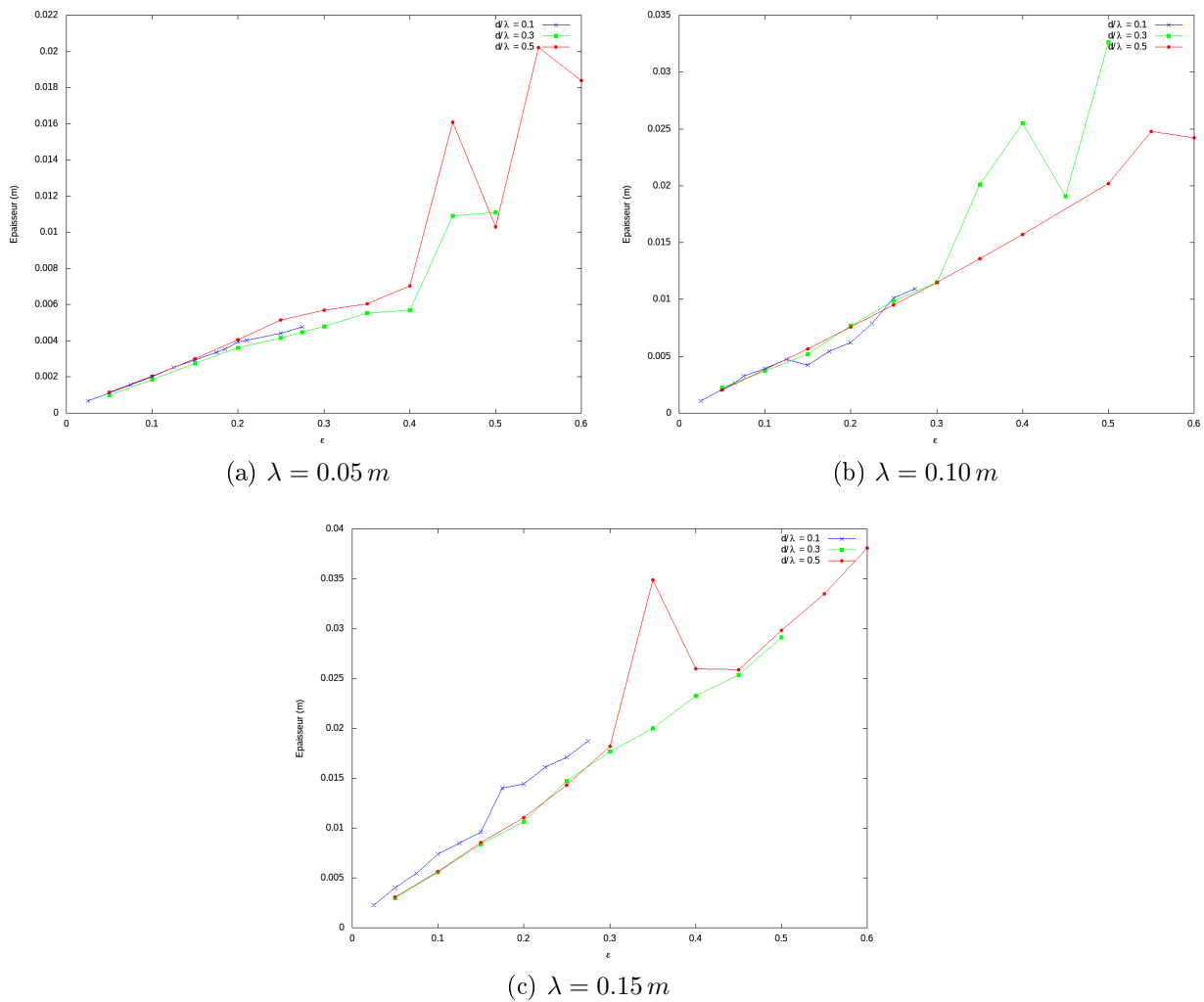


Figure 5.26. – Épaisseur de vorticité en fonction de la cambrure initiale de la vague. Les résultats sont affichés suivant trois longueurs d'onde :  $0.05\text{ m}$  (a),  $0.10\text{ m}$  (b) et  $0.15\text{ m}$  (c) .

**5.4.3.1.1. Positivité de vorticité** La positivité de vorticité est le ratio de l'intégrale temporelle et spatiale des anneaux de vorticité négative et positive. L'évolution de la positivité, montrée dans la figure 5.27, démontre une évolution de la courbe en deux temps. Le pourcentage de vorticité négative augmente à mesure que la cambrure augmente. Cette augmentation s'explique par la présence des vorticités de la première et seconde forme.

En effet, les ondes capillaires génèrent essentiellement une vorticité negative présente sous les creux de chaque capillaire (D. Dommermuth *et al* en 1994 [102]). Dans ce régime, la vorticité générée semble être fonction de la cambrure de la vague. La seconde forme de vorticité laisse échapper un unique anneau de vorticité negative. La génération de cet anneau tend à augmenter la part de circulation horaire dans l'ensemble du déferlement. Lorsque la courbe atteint son maximum, on observe une diminution aléatoire du pourcentage. Ce phénomène provient de la présence aléatoire de la forme de vorticité 3 générant l'apparition de dipôles contrarotatifs diminuant le ratio final.

Le maximum du ratio de vorticité negative sur la vorticité positive tend à diminuer avec une augmentation de la longueur d'onde. Plus la longueur de la vague augmente et plus l'importance de la tension de surface est faible. Les anneaux de vorticités générés par l'action de la tension de surface, essentiellement négatifs, auront de ce fait une plus faible influence dans la dynamique finale du déferlement.

Chaque image de la figure 5.27 permettent l'observation d'une apparition plus tardive du maximum du ratio pour une eau de forte profondeur ( $\frac{d}{\lambda} = 0.5$  et  $\frac{d}{\lambda} = 0.3$ ). Par conséquent, l'apparition des formes de vorticités 3, 4 et 5 intervient pour des cambrures plus faibles pour des eaux peu profondes comparativement aux eaux profondes. La profondeur de l'eau semble jouer un rôle important dans l'apparition de phénomènes de surface et sous-surfacique pour des déferlements en eaux peu profondes  $\frac{d}{\lambda} < 0.3$ . Ce résultat vient confirmer les conclusions faites sur l'influence de la profondeur dans la section 5.3.

#### 5.4.4. Bilan

L'étude de la dynamique des anneaux de vorticité générés a mis en évidence la présence de 5 formes différentes. Les formes 1 et 5 sont les seules formes dont l'ensemble des informations est déjà présente dans la littérature.

L'étude réalisée dans la section 5.3 a permis de mettre en lumière le processus de formation des anneaux de vorticité issus des ondes capillaires. En effet, lorsque l'angle  $\theta_{01}$  descend en dessous de l'angle critique  $\theta_{90} = 90^\circ$ , un anneau de vorticité est relâché dans le sillage du premier capillaire. Ainsi, à chaque fois que cet angle descend en dessous de  $90^\circ$ , un nouvel anneau est relâché. Ce processus correspond à la seconde forme.

La génération de multiple vortex peut engendrer un forte interaction proche de la surface. Cette interaction génère un cratère au niveau de la surface. La courbure du fond du cratère étant élevée, la tension de surface produit un mouvement soudain de la surface et crée un dipôle contrarotatifs sous la surface. Une bulle peut être capturée lors de ce processus. Ces dipôles peuvent notamment être observés dans l'article de L. Deike *et al* [90]. Cependant, aucun ne décrit la génération de ces dipôles contrarotatifs. Cela correspond à la troisième forme de vorticité.

La quatrième forme de vorticité fut observée numériquement dans un seul article [90]. Ce phénomène est encore peu connu dans la littérature et les descriptions à son sujet sont évasives. Lors de la génération du jet, une forte courbure est formée dans le creux de la vague. Cette forte courbure va produire un mouvement de surface très rapide empêchant la reconnection du jet sur la surface de la vague et produisant la formation d'un grand anneau de vorticité à la place du rouleau. Par conséquent, aucun rouleau n'est capturé. Cependant, la dynamique de la vague est proche de celle d'un déferlement plongeant avec



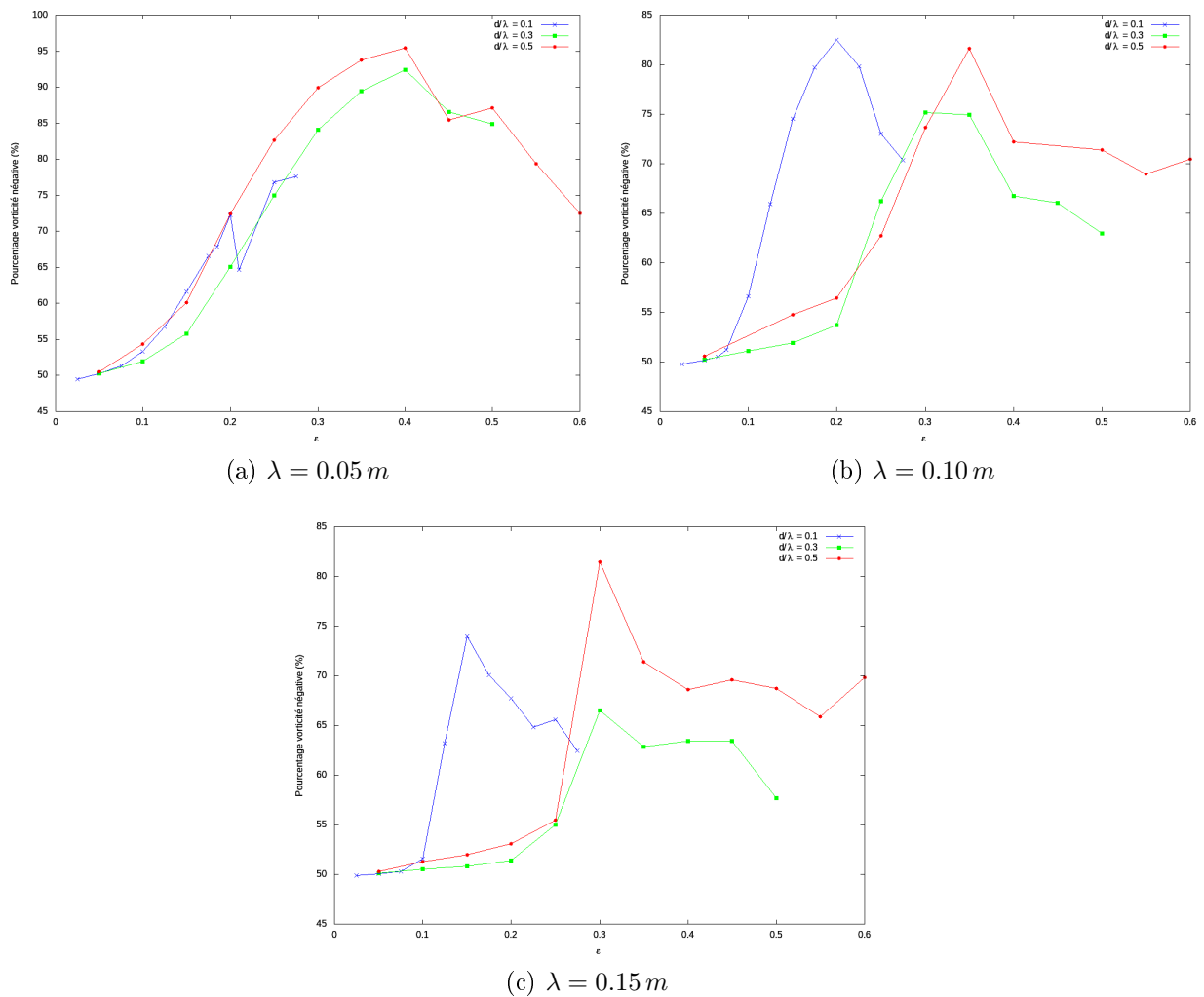


Figure 5.27. – Pourcentage de vorticité négative pour chaque simulation. Les résultats sont affichés suivant trois longueurs d’onde :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b) et  $0.15 m$  (c) .

la possible génération d’un jet secondaire et la capture d’un rouleau secondaire.

Les anneaux de vorticité engendrés par les deuxième et troisième formes produisent des vortex rotatifs ou contrarotatifs avec une vitesse horizontale presque nulle comparativement à la célérité de la vague. Ainsi, ces anneaux de vorticité vont stagner dans la zone de leur génération et modifier le comportement des vagues suivantes.

Un critère de déferlement permettant la délimitation entre les déferlements glissant et plongeant a été introduit : l’avancée horizontale de la position du jet par rapport à la crête du premier capillaire. Ce critère est une amélioration de critère déjà existant pour détecter le déferlement.

Tandis que la profondeur d’eau ne semble pas avoir d’influence dans l’épaisseur de la couche de vorticité entre  $0T$  et  $1.5T$ , celle-ci modifie le pourcentage de vorticité négative générée. L’apparition d’un pic pour des cambrures plus basses lorsque l’eau est peu profonde est notamment observée. Ce résultat vient confirmer les conclusions faites dans la précédente étude sur les ondes capillaires. Ceci s’accompagne d’une baisse de pourcentage de vorticité négative avec la longueur d’onde. La tension de surface semble jouer un rôle important dans la génération de la vorticité négative.

## 5.5. Types de déferlement

Grâce aux études réalisées ces dernières décennies, le déferlement de vague a pu être classifié en 3 grandes familles pour le domaine de longueur de vague étudié. Cette classification, basée sur l'observation phénoménologique, a permis la simplification d'outils utilisés pour caractériser un déferlement. Les trois grandes familles sont : déferlement en ondes capillaires parasitiques, déferlement glissant avec une forte tension de surface et déferlement plongeant. Grâce aux études faites précédemment, une classification détaillée des phénomènes physiques obtenus pour chaque déferlement est présentée. Les deux familles, déferlements glissant et plongeant, sont par la suite subdivisées en deux nouvelles formes de déferlement, peu ou pas connues dans la littérature. Avant de présenter les types de déferlement, la dynamique référence d'une vague non déferlante est décrite.

### 5.5.1. Pas de déferlement

Une vague non déferlante est une onde se propageant sans modification de la symétrie de la surface de la vague. La forme de la surface de la vague oscille autour de son état d'équilibre. Au cours de son advection, l'énergie totale contenue dans l'onde

se dissipe tout doucement jusqu'à s'aplatir totalement après un nombre important de période. Cette vague est généralement caractérisée par une faible cambrure. La figure 5.28 présente l'état de surface et le champ de vorticité pour une vague non déferlante. Un  tat de surface similaire entre les deux images prises à deux instants différents est observé. La forme de la surface est proche d'une onde sinusoïdale. Il n'y presque pas de vorticité générée dans l'eau comparativement aux déferlements. Toutes autres modifications de la surface ou de la dynamique sous la surface définissent le phénomène observé comme étant un déferlement.

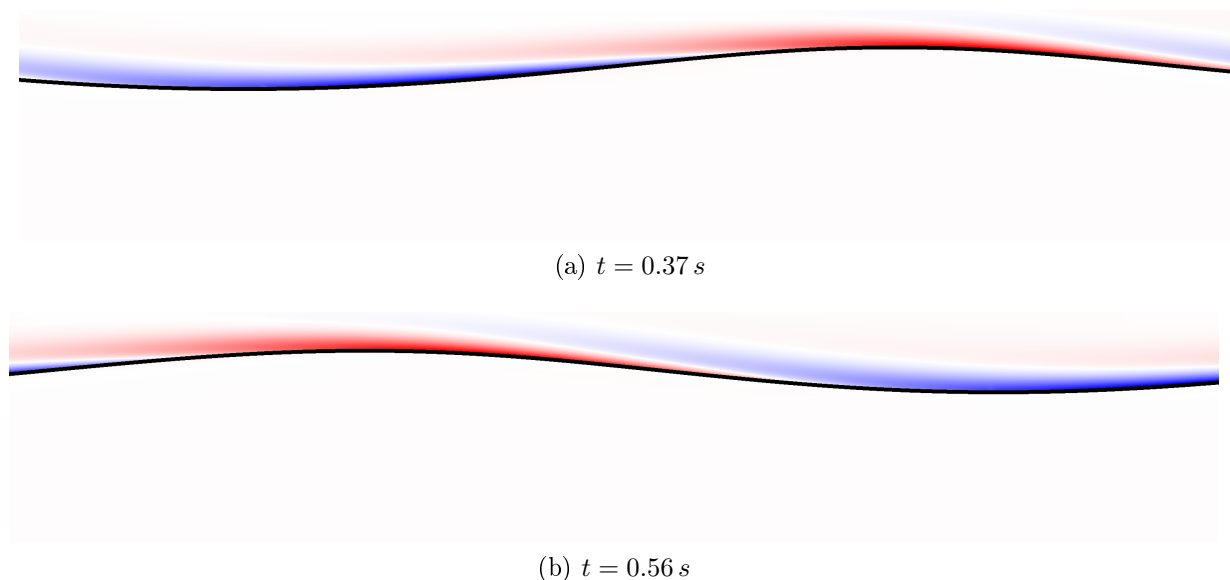


Figure 5.28. – Présentation d'une vague non déferlante. La vague fait  $0.15 m$  de longueur d'onde,  $0.10$  de cambrure et  $0.5$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.37 s$  (a) et  $0.56 s$  (b). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 s^{-1}$ .

## 5.5.2. Ondes capillaires parasitiques

Les ondes capillaires parasitiques étudiées depuis les années 1980 avec K. Okuda *et al* [100] et N. Ebuchi *et al* [99] est un type de déferlement générant l'apparition d'un train d'onde capillaires sur le devant la vague. Au début du déferlement, la face avant de la vague se cambrure (Fig. 5.29a). Suite à cette cambrure, la première onde capillaire apparaît sur la partie supérieure de la face avant (Fig. 5.29b). Cette première onde capillaire modifie, dès sa génération, la forme de la vorticité dans l'air et laisse apparaître une légère couche de vorticité négative sous l'angle  $\theta_{01}$ . Puis la vague continue de progresser et de nouvelles ondes capillaires apparaissent (Fig. 5.29c). Le nombre de capillaires est encore difficile à prévoir. Les études expérimentales et numériques convergent vers le fait que le nombre de capillaire augmente avec l'augmentation de la cambrure initiale de la vague. La célérité de ces ondes est tellement proche de celle de la vague initiale que cela donne l'impression d'avoir un train d'ondes poussé par la crête. Une diminution progressive de l'amplitude des ondes capillaires additionnelles générées est également observée. Chaque onde possède ainsi moins d'énergie que la précédente. Le champ de vorticité sous les capillaires, de positivité négative, s'étend de chaque creux formé par la combinaison de deux capillaires jusqu'au centre du capillaire précédent. Cette zone de vorticité s'étire et prend une place plus importante au cours du temps (Fig. 5.29d). Au niveau de la crête initiale, aussi nommée capillaire 0, cette couche de vorticité est étirée sur une distance plus importante que sur l'image 5.29c, formant la couche initialement expliquée par N. Ebuchi *et al* [99]. Cette forme de déferlement possède des ondes capillaires de la première forme, soit un angle minimum  $\theta_{01}$ , angle du creux formé par les capillaires 0 et 1, supérieur à  $90^\circ$ , ainsi qu'une seule forme de vorticité : la première.

## 5.5.3. Glissant - Avec une forte influence de la tension de surface

Au cours des précédentes études dans le manuscrit, il a été démontré la présence de formes de vorticité différentes pour le déferlement de vague glissant. Les formes de vorticités 1, 2 et 3 peuvent apparaître lors du déferlement glissant. Cependant, suite à l'observation et l'étude des simulations, une subdivision supplémentaire peut être effectuée. Ce déferlement est alors présenté en deux étapes : le déferlement avec un anneau de vorticité et celui avec de multiple anneaux de vorticité (avec ou sans bulles capturées).

### 5.5.3.1. Un anneau de vorticité

Le déferlement avec un anneau de vorticité n'est pas présent dans la littérature actuelle. La forme de base de ce déferlement est identique à celle des ondes capillaires parasitiques. Le pente du front de la vague augmente (Fig. 5.30a) et génère des ondes capillaires sur le devant de la vague avec le champ de vorticité associé au déferlement précédent (Fig. 5.30b). Cependant, l'étude faite sur le minimum de l'angle  $\theta_{01}$  entre le crête et le premier capillaire a démontré que lorsque l'angle devient inférieur à  $90^\circ$ , une ou plusieurs ondes capillaires de seconde forme sont observées. Dans le déferlement présent, une seule et unique onde sera générée lors de la phase de décompression (Fig. 5.30c). Cette onde est entourée par un système contrarotatif, avec un anneau de vorticité négative dans l'eau et positive dans l'air. De plus, l'angle  $\theta_{01}$  est de nouveau supérieur à  $90^\circ$  et ne relâchera plus d'ondes supplémentaires. Sur la figure 5.30d prise à  $t = 0.268 s$ , il est remarquer que cette onde et le vortex générés sous l'eau n'ont que très peu avancés contrairement au mouvement de la vague et des ondes capillaires. Une des particularité de ce type de déferlement est la génération d'une unique onde et d'un anneau de vorticité négative sous

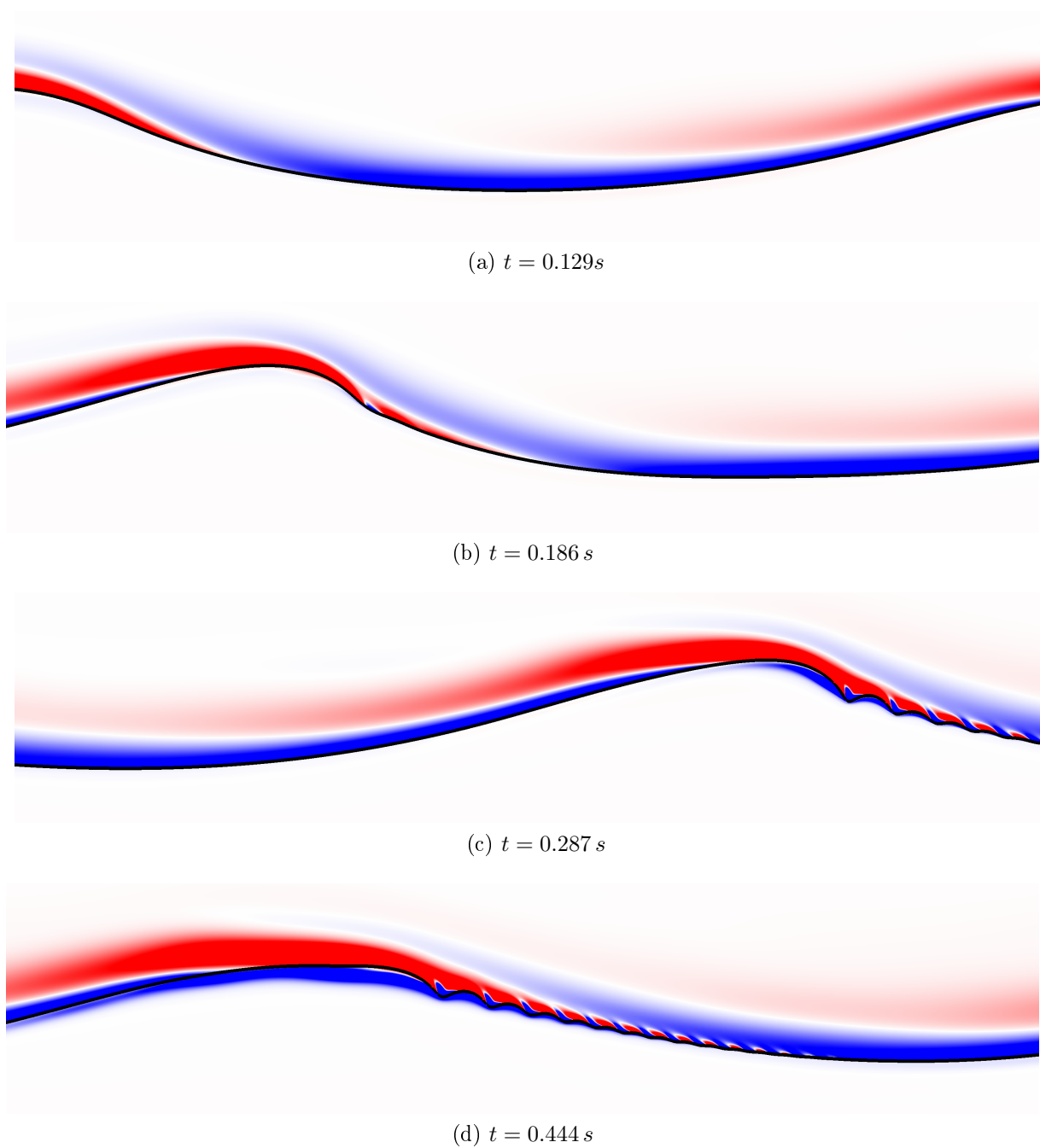
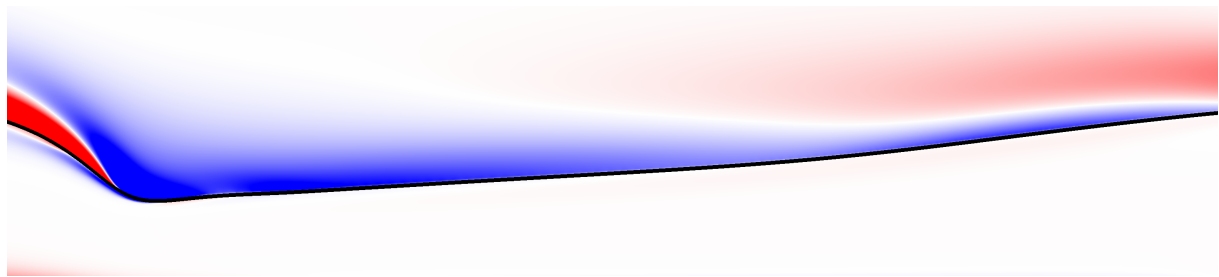


Figure 5.29. – Présentation d'une vague déferlant sous la forme d'ondes capillaires parasites. La vague fait  $0.10\text{ m}$  de longueur d'onde,  $0.275$  de cambrure et  $0.3$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.129\text{ s}$  (a),  $0.186\text{ s}$  (b),  $0.287\text{ s}$  (c) et  $0.444\text{ s}$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100\text{ s}^{-1}$ .

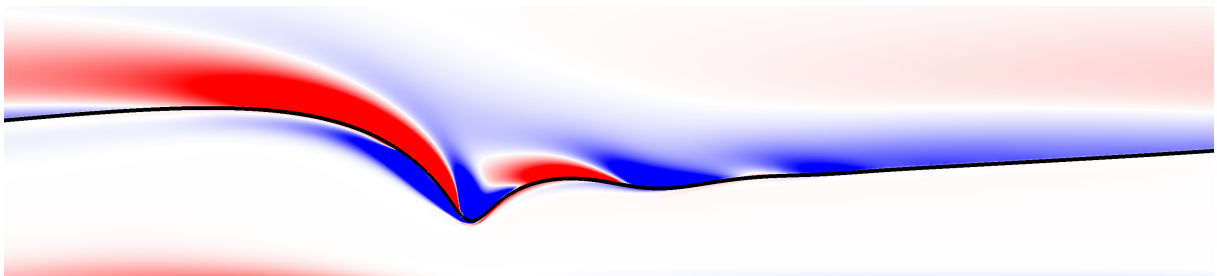
l'eau (vorticité de forme 2) stagnant à la surface de l'eau. Ce phénomène peut par la suite interagir et modifier le déferlement de la vague suivante.

### 5.5.3.2. Multiple anneaux de vorticité avec et sans bulles capturées

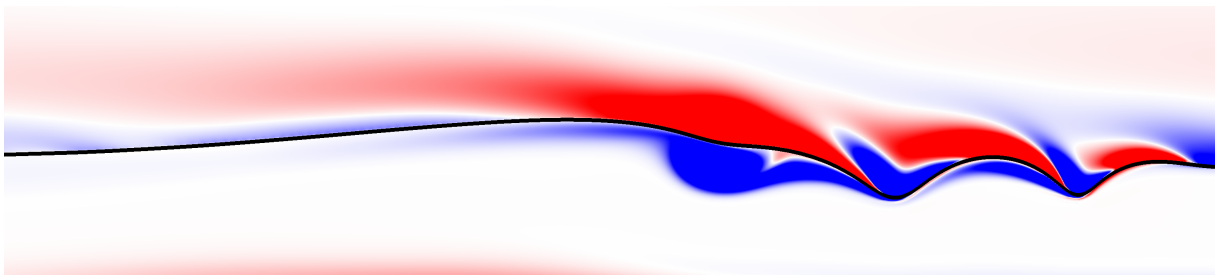
Le déferlement avec de multiples anneaux de vorticité est un déferlement présent dans la littérature. Les études réalisées sur l'angle  $\theta_{01}$  et les formes de vorticité ont permis d'améliorer la compréhension de ce phénomène dont le mouvement de surface semble aléatoire. Une nouvelle fois, le déferlement commence par la génération d'ondes capillaires sur le devant de la vague (Fig. 5.31a). Cependant, rapidement les capillaires de seconde forme apparaissent et génèrent une première vague relâchée ainsi que la première apparition de la vorticité de forme 2 (Fig. 5.31b). L'angle  $\theta_{01}$  commence à osciller et franchit une nouvelle fois la barre des  $90^\circ$ . Cela a pour conséquences la génération d'une seconde vague (capillaire du second cas) et d'un second vortex (vorticité de forme 2). Ce phénomène est visible sur la figure 5.31c. La proximité de ces deux anneaux de vorticité engendre une forte interaction sous et au niveau de la surface. Les deux anneaux commencent à s'enrouler et un mouvement de surface apparaît sous la forme d'une cavité profonde (Fig. 5.31d). La génération d'un 3<sup>ème</sup> anneau de vorticité de forme 2 par l'oscillation de l'angle sous la barre des  $90^\circ$  peut également être observé. La courbure dans la cavité est tellement forte que la tension de surface engendre un mouvement de surface dans la direction opposée du cratère (Fig. 5.32a). Ce mouvement soudain de surface entre le relachement d'un dipôle contrarotatif dans la direction opposée à ce mouvement (vorticité de forme 3). L'advection de ce dipôle est par la suite essentiellement vertical. Il ne se propage pas avec le mouvement de la vague et va interagir avec les vagues suivantes. La rétractation de ce cratère va créer un jet épais et des ondes capillaires dans chaque directions.



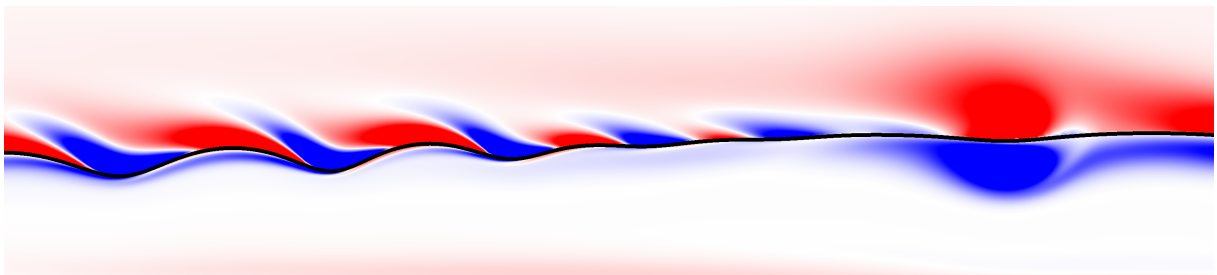
(a)  $t = 0.093 s$



(b)  $t = 0.143 s$

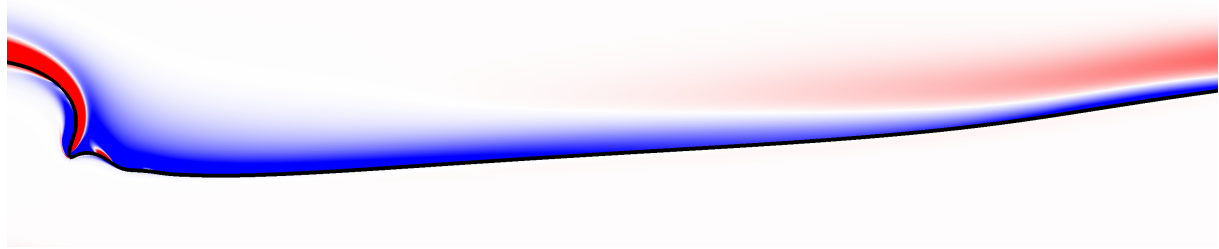


(c)  $t = 0.196 s$

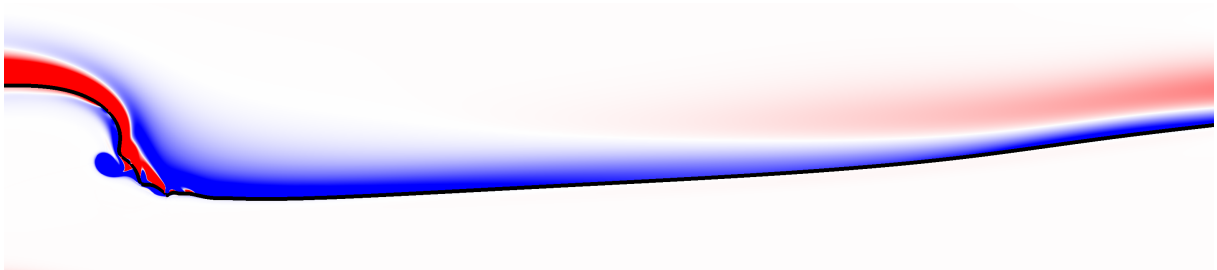


(d)  $t = 0.268 s$

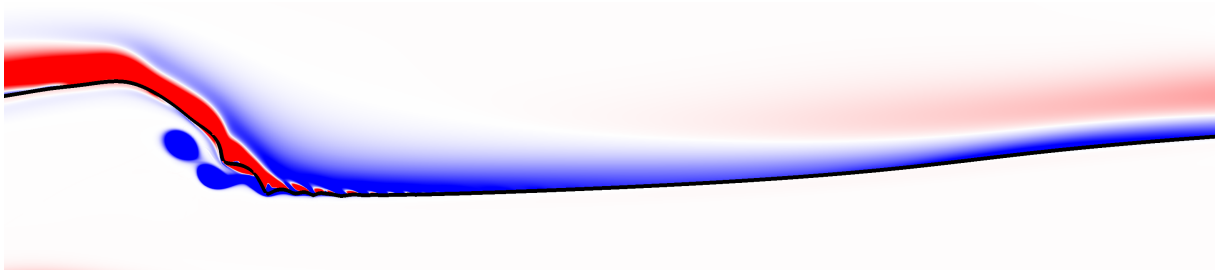
Figure 5.30. – Présentation d'une vague déferlant sous la forme glissante avec un anneau de vorticité. La vague fait  $0.05 m$  de longueur d'onde,  $0.210$  de cambrure et  $0.1$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.093 s$  (a),  $0.143 s$  (b),  $0.196 s$  (c) et  $0.268 s$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représentée est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 s^{-1}$ .



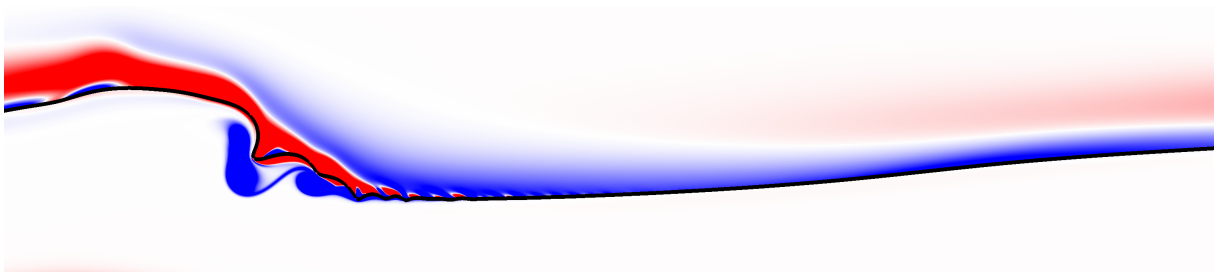
(a)  $t = 0.145 s$



(b)  $t = 0.155 s$

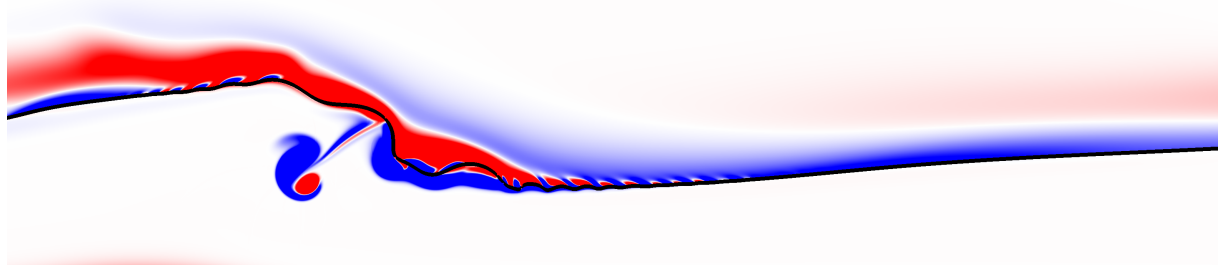


(c)  $t = 0.173 s$

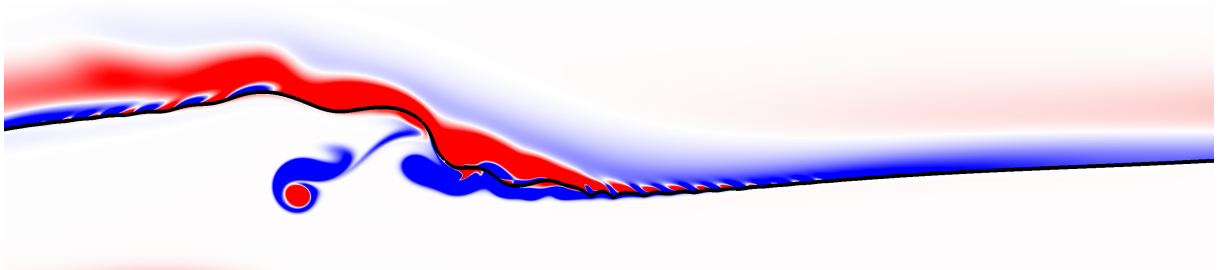


(d)  $t = 0.185 s$

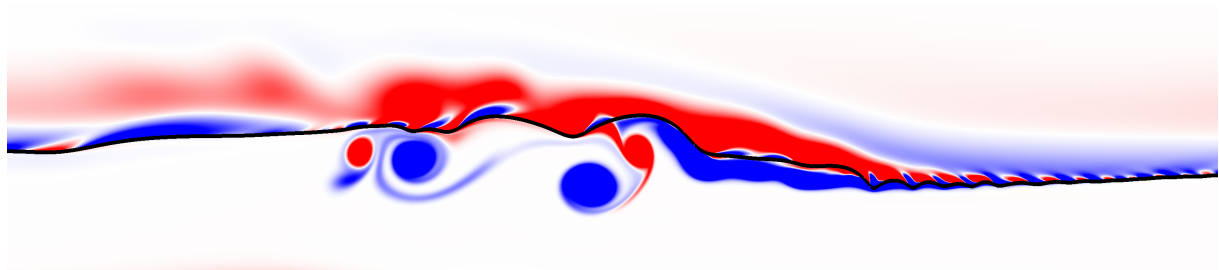
Figure 5.31. – Présentation d'une vague déferlant sous la forme glissant avec plusieurs anneaux de vorticité. La vague fait  $0.10 m$  de longueur d'onde,  $0.250$  de cambrure et  $0.1$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.145 s$  (a),  $0.155 s$  (b),  $0.173 s$  (c) et  $0.185 s$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représentée est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 s^{-1}$ .



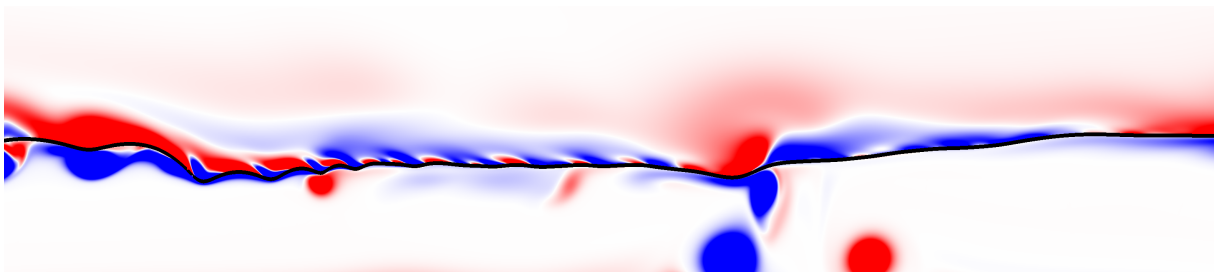
(a)  $t = 0.207 s$



(b)  $t = 0.217 s$



(c)  $t = 0.264 s$



(d)  $t = 0.427 s$

Figure 5.32. – Présentation d'une vague déferlant sous la forme glissant avec plusieurs anneaux de vorticité. La vague fait  $0.10 m$  de longueur d'onde,  $0.250$  de cambrure et  $0.1$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.207 s$  (a),  $0.217 s$  (b),  $0.264 s$  (c) et  $0.427 s$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 s^{-1}$ .

Pendant le mouvement du cratère, le premier capillaire continue à avancer et à relâcher un nombre important d'anneaux de vorticité. Un nouvelle fois, lorsque deux anneaux de vorticité sont suffisamment proches et de fortes intensités (Fig. 5.32b), un cratère est formé générant par la suite un nouveau dipôle, relâché dans l'eau et se déplaçant uniquement verticalement, ainsi qu'un jet épais (Fig. 5.32c). Ainsi, ce phénomène se répète de manière aléatoire jusqu'à l'augmentation définitive de l'angle  $\theta_{01}$  au dessus de  $90^\circ$  arrêtant la production de vorticité de la seconde forme. Au cours de ce déferlement, il est possible



qu'une bulle soit capturée lors de la génération et rétractation du cratère. Si l'intensité des vortex est très élevée, le cratère peut se refermer sur lui-même de la même manière qu'un jet viendrait impacter la surface et capturer un rouleau. La dynamique générale du déferlement n'est pas modifiée mise à part la capture d'une bulle et d'un anneau de vorticit   autour ou en dessous de cette bulle.

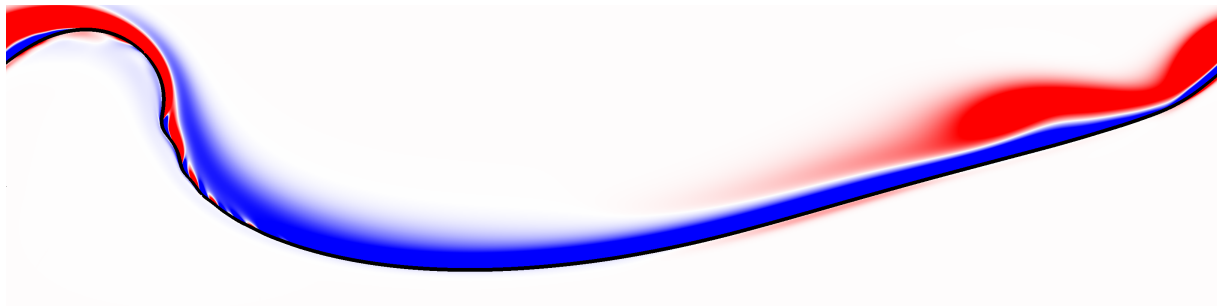
Ce d  ferlement tr  s complexe vient fortement modifier la surface de la vague avec des capillaires des deux premi  res formes. Le mouvement en dessous de la surface devient particuli  rement turbulent avec l'apparition de nombreux anneaux de vorticit   d'advection uniquement verticale. Au cours de ce d  ferlement, l'apparition de vorticit   des trois premi  res formes est observ  e.

### 5.5.4. Plongeant

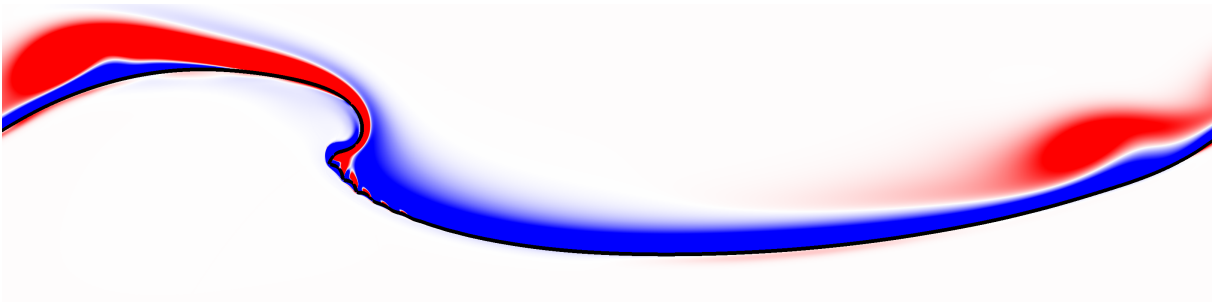
Lors de l'  tude sur les formes de vorticit   apparaissant dans les d  ferlements, un d  ferlement observ   uniquement dans un article [90] fut pr  sent   : le d  ferlement plongeant sans rouleau. Par cons  quent, il est possible de subdiviser une nouvelle fois un type de d  ferlement en deux : sans et avec rouleau. Un des points importants de ce d  ferlement est la g  n  ration du jet. Le jet est suppos     tre g  n  r   lorsque le front de la cr  te de la vague initiale est devant la cr  te du premier capillaire. Ce crit  re permet de v  rifier que l'avancement du jet provient de l'  nergie cin  tique et non de la modification surfacique issue de la pr  sence d'ondes capillaires.

#### 5.5.4.1. Sans rouleau

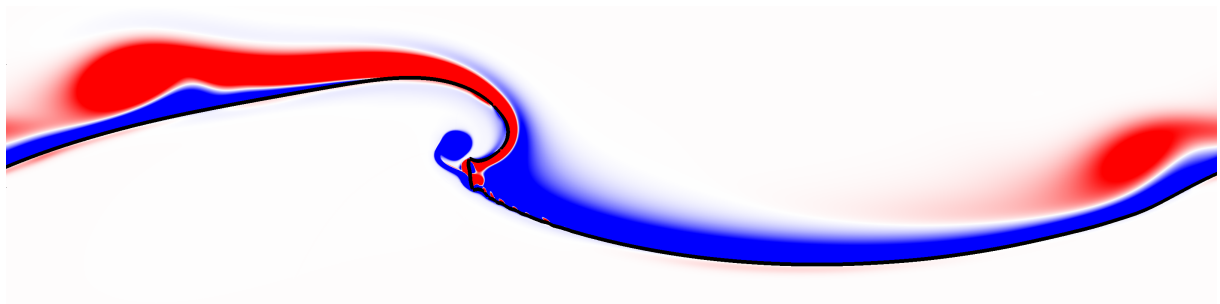
Le d  ferlement plongeant sans rouleau commence son mouvement par une ascension de la cr  te (Fig. 5.33a). L'exc  dent cin  tique contenu dans la vague engendre l'apparition d'un jet (Fig. 5.33b). La position horizontale du jet est devant la cr  te du premier capillaire. De plus, l'angle  $\theta_{01}$  form   par le creux du premier capillaire avec le jet est inf  rieur     $90^\circ$ . Par cons  quent, des anneaux de vorticit   de forme 2 sont g  n  r  s et rel  ch  s au sein du jet (Fig. 5.33c). La forme de la surface sous le jet, avec une forte courbure, engendre le mouvement de la surface vers l'avant de la vague (Fig. 5.33d). L'angle  $\theta_{01}$  inf  rieur     $90^\circ$  coupl      ce mouvement de surface produisent l'apparition d'une forte concentration d'anneaux de vorticit   au centre du jet. Ces anneaux interagissent ensemble (Fig. 5.34a) tandis que la surface continue son mouvement vers l'avant de la vague et peut g  n  rer l'apparition d'un jet. Dans l'article   crit par L. Deike *et al* [90], une petite bulle est captur  e par la pr  sence du jet secondaire. Une forte concentration de vorticit   est observable dans le jet secondaire. Le jet peut impacter la surface et capturer un rouleau secondaire (Fig. 5.34b). L'impact du jet secondaire peut engendrer un nouveau jet avec la capture d'un second rouleau secondaire. Dans le cas pr  sent  , seul un rouleau secondaire est captur  . Les deux zones concentr  es en vorticit  , et dans le centre du jet principal et dans la zone d'impact et de jet secondaire, sont emport  es par le mouvement de la vague (Fig. 5.34c). L'interaction de ce type de d  ferlement avec la vague suivante se produira dans une zone plus   loign  e en comparaison du point de d  clenchement du d  ferlement, contrairement aux d  ferlements glissants. Au cours de ce d  ferlement la pr  sence de capillaire de la troisi  me forme et les quatre premi  res formes de vorticit   est observable.



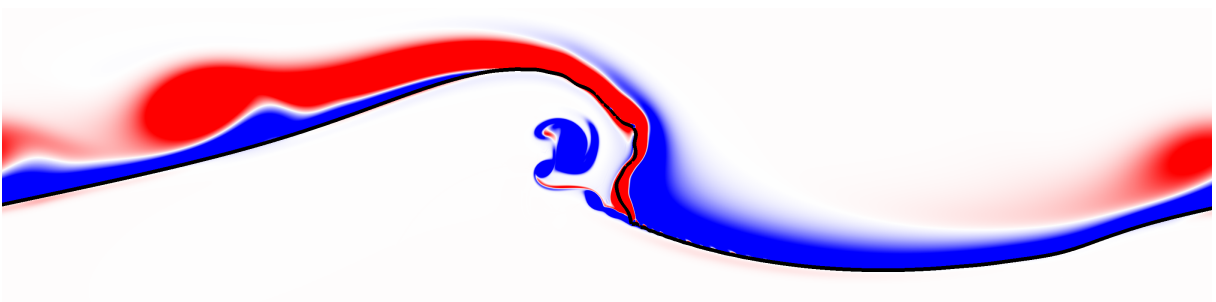
(a)  $t = 0.107 \text{ s}$



(b)  $t = 0.134 \text{ s}$



(c)  $t = 0.153 \text{ s}$



(d)  $t = 0.175 \text{ s}$

Figure 5.33. – Présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant sans rouleau. La vague fait  $0.10 \text{ m}$  de longueur d'onde,  $0.550$  de cambrure et  $0.5$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.107 \text{ s}$  (a),  $0.134 \text{ s}$  (b),  $0.153 \text{ s}$  (c) et  $0.175 \text{ s}$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 \text{ s}^{-1}$ .

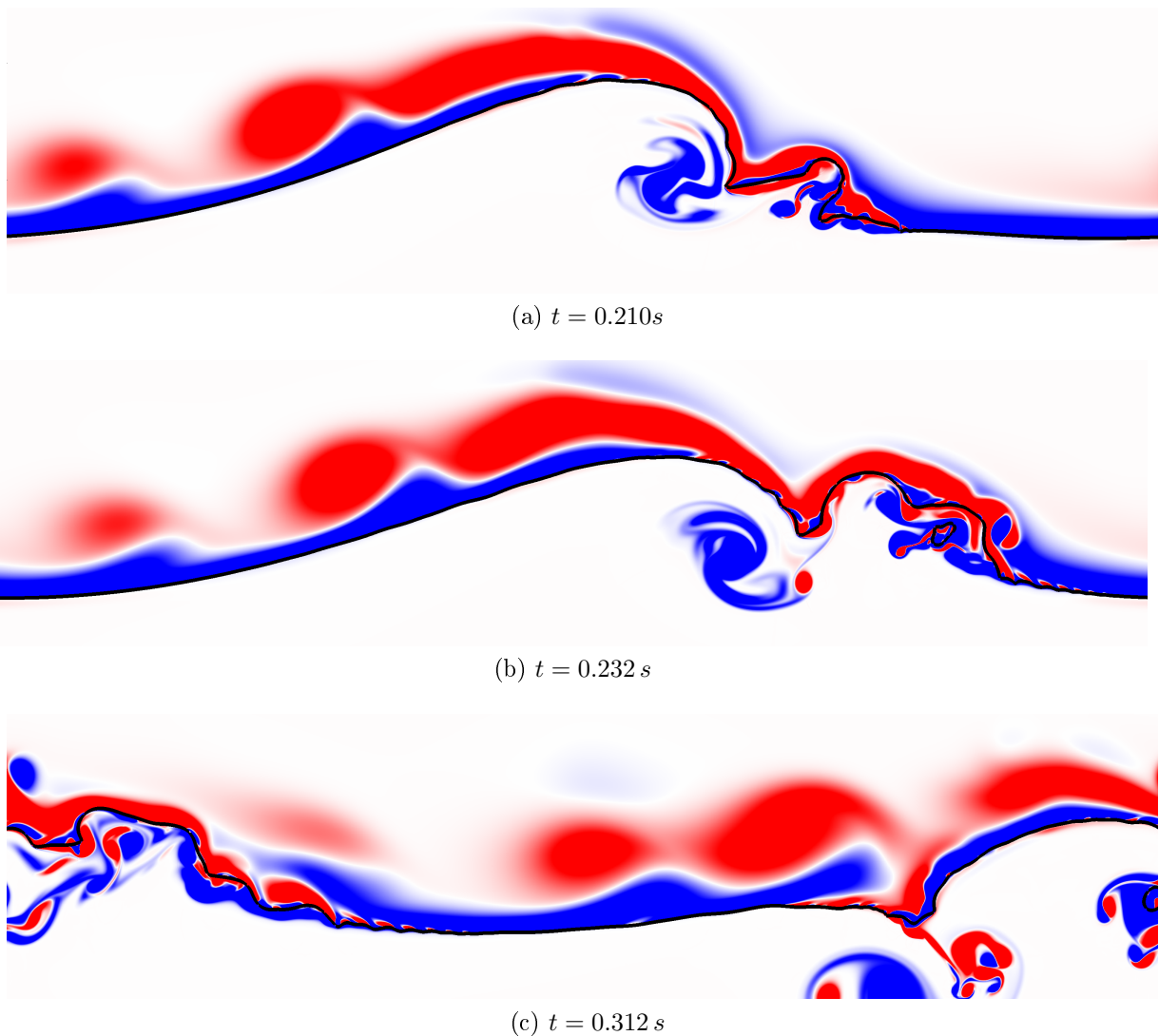
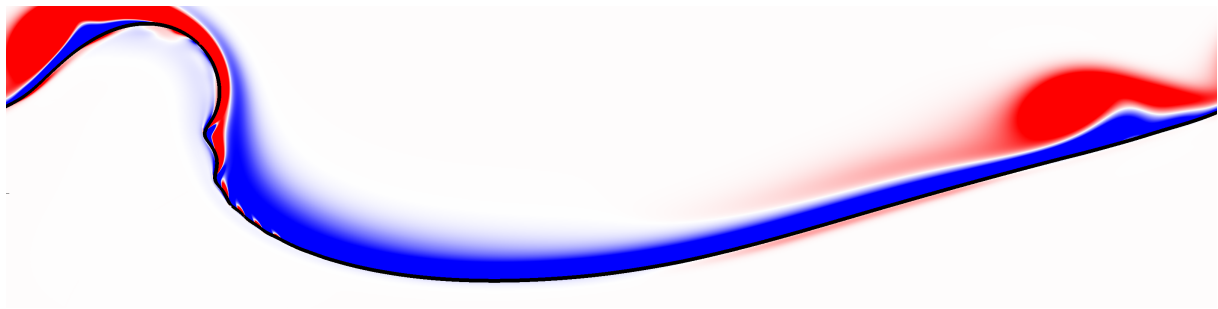


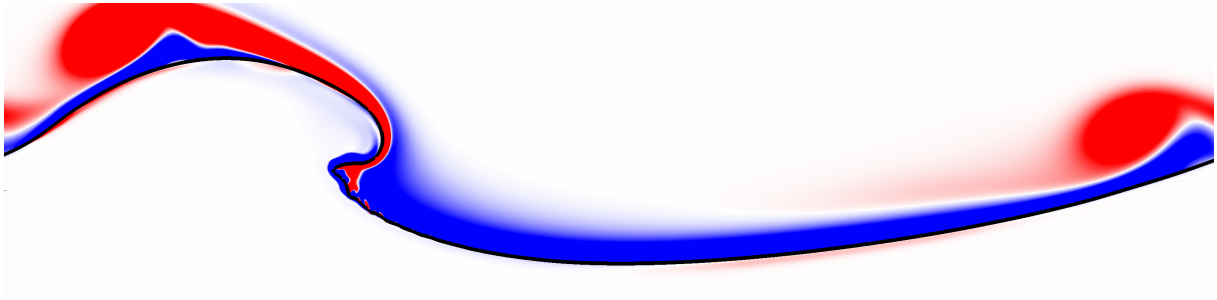
Figure 5.34. – Suite de la présentation d’une vague déferlant sous la forme plongeant sans rouleau. La vague fait  $0.10\text{ m}$  de longueur d’onde,  $0.550$  de cambrure et  $0.5$  de profondeur d’eau. Les images sont prises à  $0.210\text{ s}$  (a),  $0.232\text{ s}$  (b) et  $0.312\text{ s}$  (c). L’interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100\text{ s}^{-1}$ .

#### 5.5.4.2. Avec rouleau

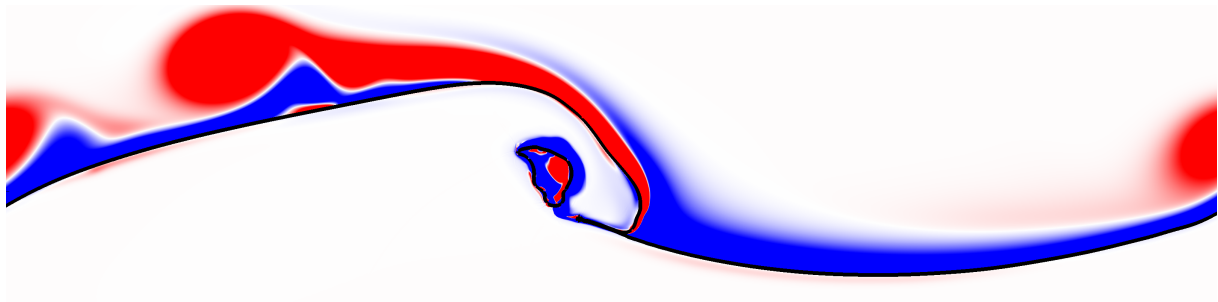
Le déferlement plongeant avec rouleau commence son mouvement par une ascension de la crête (Fig. 5.35a). L’excédent cinétique contenu dans la vague engendre l’apparition d’un jet (Fig. 5.35b). La position horizontale du jet est devant la crête du premier capillaire. Même si l’angle  $\theta_{01}$  formé par le creux du premier capillaire avec le jet est inférieur à  $90^\circ$ , le mouvement de rotation empêche la génération du décrochage des lignes de courants. Par conséquent, aucun anneau de vorticité n’est généré par le premier capillaire. Le jet vient impacter la surface capturant les ondes capillaires au sein du rouleau (Fig. 5.35c). Lors de l’impact de ce jet sur la surface, de nombreux vortex sont produits. Une majorité de ces vortex est influencée par le rouleau et s’enroule autour de celui-ci (Fig. 5.36a). L’impact du jet sur la surface peut produire la formation d’un jet secondaire avec la capture d’un rouleau secondaire (Fig. 5.36b et 5.36c). La modification de la forme du rouleau principal capturé par les anneaux de vorticité gravitant proche de son interface est observée (Fig. 5.36d).



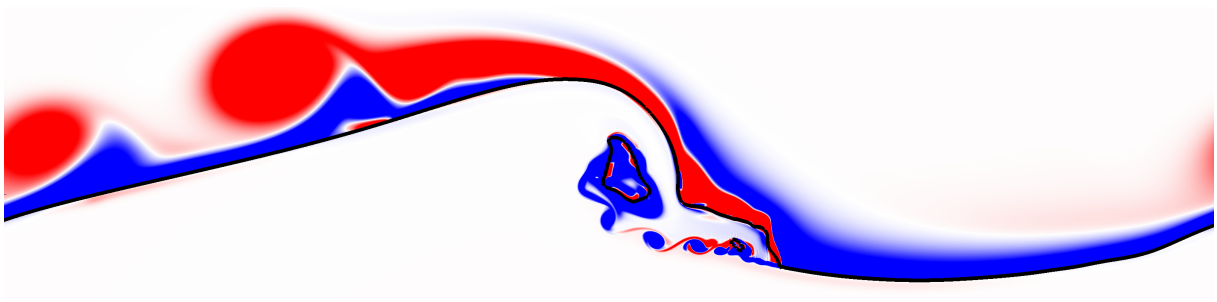
(a)  $t = 0.111 s$



(b)  $t = 0.132 s$

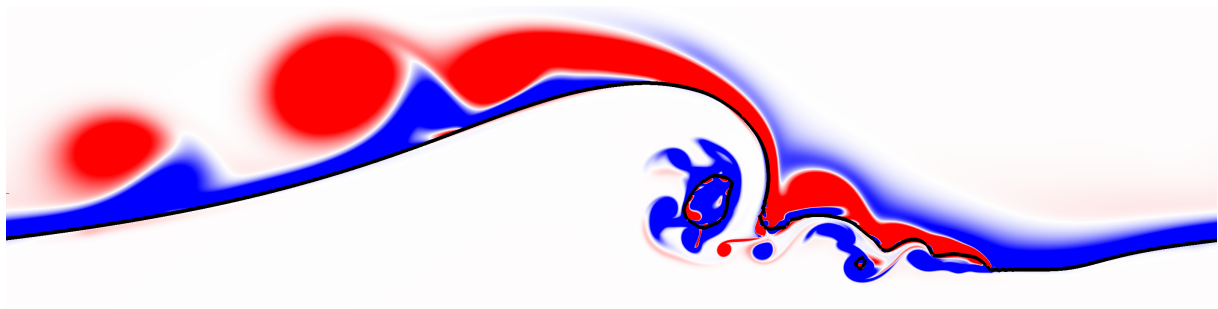


(c)  $t = 0.163 s$

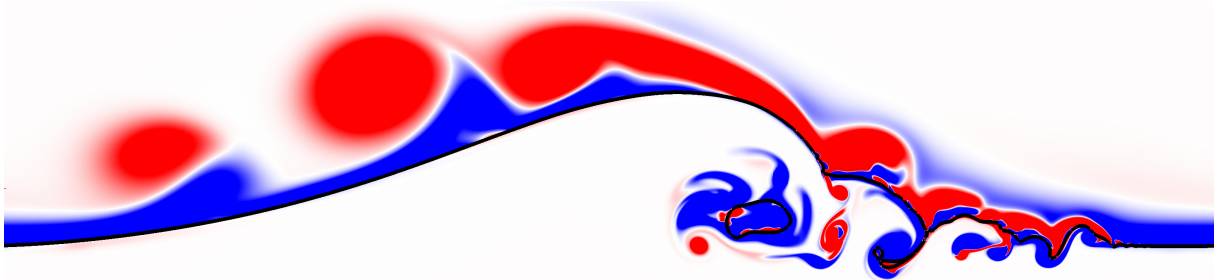


(d)  $t = 0.178 s$

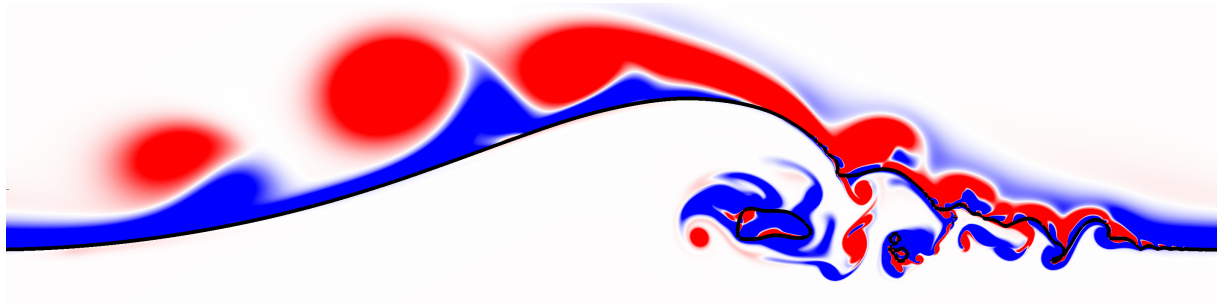
Figure 5.35. – Présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant avec rouleau. La vague fait  $0.10 m$  de longueur d'onde,  $0.600$  de cambrure et  $0.5$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.111 s$  (a),  $0.132 s$  (b),  $0.163 s$  (c) et  $0.178 s$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 s^{-1}$ .



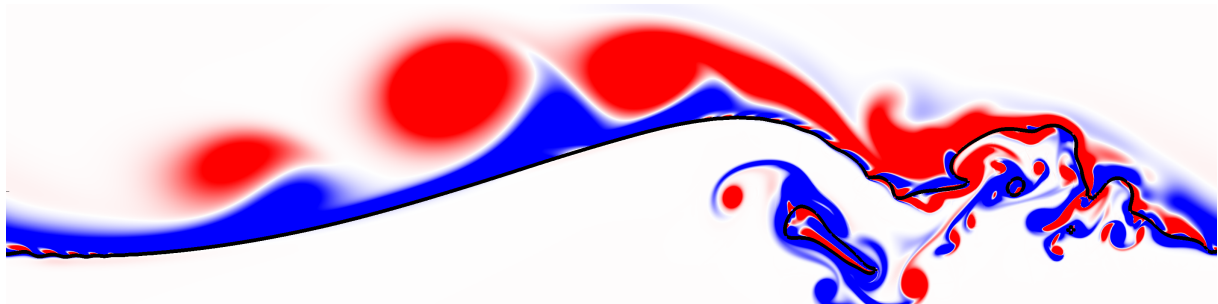
(a)  $t = 0.198 s$



(b)  $t = 0.212 s$



(c)  $t = 0.216 s$



(d)  $t = 0.237 s$

Figure 5.36. – Suite de la présentation d'une vague déferlant sous la forme plongeant avec rouleau. La vague fait  $0.10 m$  de longueur d'onde,  $0.600$  de cambrure et  $0.5$  de profondeur d'eau. Les images sont prises à  $0.198 s$  (a),  $0.212 s$  (b),  $0.216 s$  (c) et  $0.237 s$  (d). L'interface de la vague est représentée par une ligne noire. Le champ représenté est la vorticité. Les colorations maximum (rouge) et minimum (bleue) sont fixées à :  $+100$  et  $-100 s^{-1}$ .

Dans la zone de l'impact du jet, une grande zone de vorticité apparaît proche de la surface. Les deux zones concentrées en vorticité, et autour du rouleau principal et dans la zone d'impact et de jet secondaire, sont emportées par le mouvement de la vague (Fig. 5.36d). L'interaction de ce type de déferlement avec la vague suivante se produira

dans une zone plus éloignée en comparaison du point de déclenchement du déferlement, contrairement aux déferlements glissants. Au cours de ce déferlement la présence de capillaire de la quatrième forme et de la vorticité de formes : 1, 2, 3 et 5 sont observables. Les phénomènes associées à ce déferlement sont connus dans la littérature.

### 5.5.5. Bilan

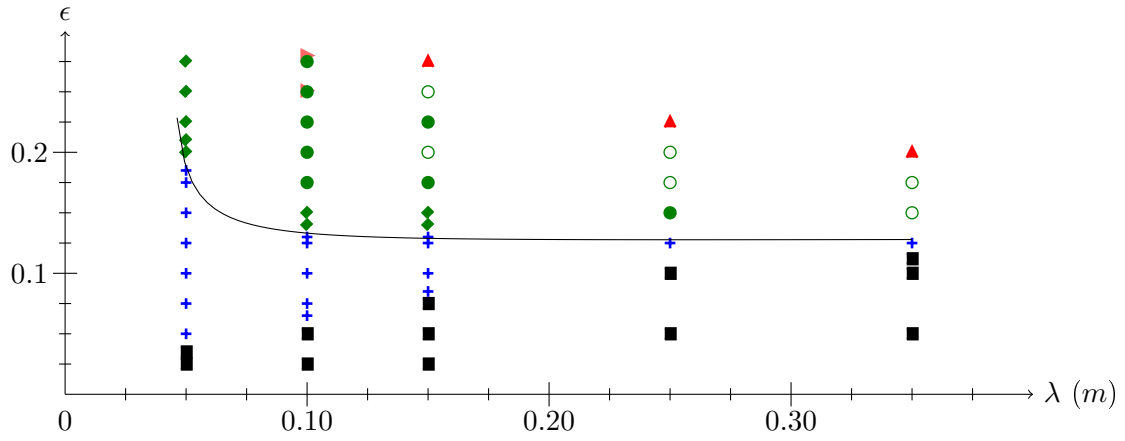
Les grands types du déferlement de vague ont été étudiés et présentés. Lors des études sur les ondes capillaires et sur la vorticité, plusieurs formes ont pu être définies. Ces classifications ont permis la subdivision des déferlements glissant et plongeant en deux sous-parties : une première connue dans la littérature et une seconde moins ou pas connue. Ainsi, les déferlements pour des vagues capillo-gravitaires peuvent être classées en 6 types différents : pas de déferlement, ondes capillaires parasites, glissant avec un anneau de vorticité, glissant avec de multiple anneaux de vorticité, plongeant sans rouleau et plongeant avec rouleau.

## 5.6. Cartes des déferlements

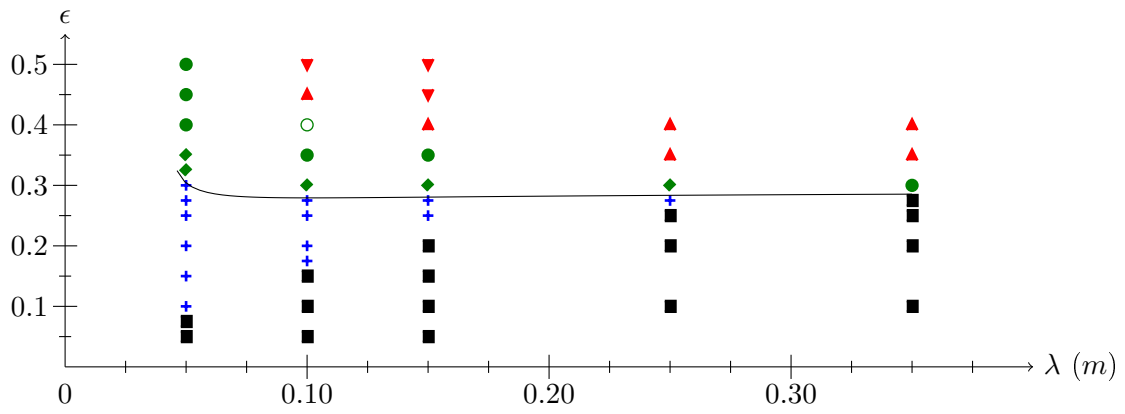
Grâce aux simulations du déferlement de vague pour plusieurs valeurs de longueur d'onde  $\lambda$ , cambrure  $\epsilon$  et profondeur d'eau  $\frac{d}{\lambda}$ , il a été possible de créer une carte de déferlement pour chaque profondeur d'eau : 0.1, 0.3 et 0.5 (Fig. 5.37). Il est retrouvé pour chaque carte le type de déferlement obtenu pour une longueur d'onde et une cambrure donnée. Il existe peu de carte de déferlement dans la littérature. La carte la plus récente est celle de L. Deike *et al* en 2015 [90]. Cependant, l'ensemble de ces cartes de déferlement sont uniquement valables pour le cas de déferlement de vague dans une eau profonde  $\frac{d}{\lambda} \geq 0.5$ . Il n'existe pas de carte pour des profondeurs d'eau plus faibles.

Les résultats de simulations sont cohérents avec la majorité des résultats de la littérature. Le symbole  $\blacktriangleright$  est utilisé afin de représenter la simulation initialement présentée comme déferlement glissant par L. Deike *et al* [90]. Du fait des résultats précédents, il est redéfini que le déferlement considéré glissant est qualifié de plongeant ici. De plus, Sur la carte  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ , les résultats obtenus par P. Lubin *et al* [98] semblent différents des résultats obtenus grâce aux simulations de ce manuscrit. Cette différence peut s'expliquer par l'utilisation d'un pas d'espace 20 fois plus petits. L'utilisation d'un plus petit pas d'espace réduit les erreurs engendrées lors de la résolution des équations. Ainsi, une meilleure représentation de l'interface est obtenue, pouvant capturer des phénomènes de tension de surface impossibles à obtenir sans l'utilisation d'un maillage très raffiné.

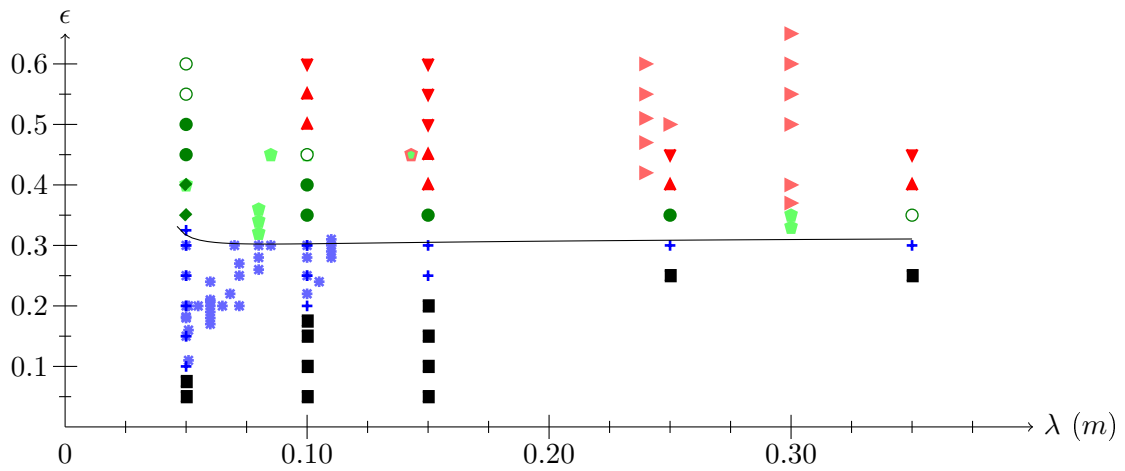
Tout d'abord, l'augmentation de l'énergie totale dans le système, pour une longueur d'onde donnée, modifie le type de déferlement. L'apparition des déferlements va des ondes capillaires parasites au déferlement plongeant avec rouleau. De plus, lorsque la longueur d'onde de la vague est petite, l'influence de la tension de surface sera importante en comparaison des autres forces. Cela a pour conséquences l'obtention de déferlements de vague dirigés essentiellement par le mouvement de surface et la génération d'ondes capillaires. À l'inverse, l'augmentation de la longueur d'onde, et donc de l'influence de la tension de surface, produit davantage de déferlements plongeants. Ces caractéristiques, connues dans la littérature, sont visibles sur les cartes de déferlement.



(a)  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$



(b)  $\frac{d}{\lambda} = 0.3$



(c)  $\frac{d}{\lambda} = 0.5$

Figure 5.37. – Cartes des déferlements pour la profondeur d'eau  $\frac{d}{\lambda}$  : 0.1 (a), 0.3 (b) et 0.5 (c). Les différents déferlements provenant des simulations sont représentés par : pas de déferlement (■), ondes capillaires parasites (+), glissant avec un anneau (◆), glissant avec plusieurs anneaux (○), glissant avec plusieurs anneaux et une bulle (●), plongeant sans rouleau (▲) et plongeant avec rouleau (▼). Les déferlements provenant de la littérature sont représentés par : ondes capillaires parasites (\*), glissant (◆) et plongeant (▶). La ligne noire représente la limite entre les déferlements d'ondes capillaires parasites et glissant calculée dans ce manuscrit.

La présence et la capture de bulles lors du déferlement glissant semble similaire au déferlement plongeant. Par conséquent, l'excédent d'énergie au sein de la vague doit être suffisamment élevé pour engendrer des anneaux de vorticités de grandes intensités produisant la capture d'une ou de plusieurs bulles.

La variation de la profondeur semble avoir une influence particulièrement grande pour la carte de déferlement  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ . En effet, l'ensemble des transitions entre deux types de déferlements est observé pour des valeurs de cambrure  $\epsilon$  plus basses que pour les deux autres cartes. La légère différence entre les cartes de déferlement 0.3 et 0.5 laisse à penser que la différence entre les limites de déferlement est proportionnel à  $\sqrt{\tanh(\frac{2\pi d}{\lambda})}$ .

## 5.7. Étude énergétique

La vitesse de dissipation de l'énergie au cours du déferlement est une caractéristique importante lors de l'étude de l'interaction de l'océan et de l'air. En 1981, J. H. Duncan [188] étudie expérimentalement l'influence des caractéristiques géométriques et dynamiques de la vague sur la dissipation de l'énergie. Il observe une relation directe entre la variation de l'énergie  $\epsilon_{dissip}$ , la célérité  $c_b$  de la vague juste avant le déferlement, la constante de gravité  $g$  et la masse volumique du fluide  $\rho$ . Cette relation est

$$\epsilon_{dissip} = b_{int} \frac{c_b^5 \rho}{g} \quad (5.35)$$

avec  $b_{int}$  une variable représentant l'intensité du déferlement. O. M. Phillips démontre, en 1985 [189], que cette dernière variable  $b_{int}$  dépend de plusieurs paramètres : la présence de bulles, la température de la surface, l'humidité dans l'air et le coefficient de tension de surface entre les deux fluides. Les études expérimentales [188, 94, 95, 92, 190, 191], mathématique [189] et numériques [87, 90, 54] justifient l'utilisation de l'équation 5.35 pour étudier le déferlement de vagues. L'article de L. Deike *et al* [90] propose de résoudre le coefficient de variation de l'énergie  $\epsilon_{dissip}$  grâce à la connaissance de l'énergie totale initiale  $E_0$  et  $\xi$  le facteur de dissipation de l'énergie au cours du déferlement de telle sorte que

$$E(t) = E_0 e^{-\xi t}$$

et

$$\epsilon_{dissip} = E_0 \xi$$

avec  $E(t)$  l'énergie totale à chaque instant  $t$  du déferlement.

Le calcul de la vitesse de dissipation de l'énergie totale  $\epsilon_{dissip}$  et le coefficient d'intensité du déferlement  $b_{int}$  sont mesurés pour les simulations sur une période à partir du point de déferlement. Au cours de cette période, un grand nombre de phénomènes physiques sont apparues et une majorité des anneaux de vorticité a été générée.

Les données associées à l'étude énergétique se trouvent dans l'annexe E.

### 5.7.1. Dissipation d'énergie

Le facteur de dissipation d'énergie  $\epsilon_{dissip}$  est influencé par l'apparition du déferlement, ainsi que son type. Plus le déferlement se rapproche du déferlement plongeant et plus le



facteur de dissipation d'énergie sera élevé (Fig. 5.38 et 5.39).

Le facteur de dissipation semble être influencé par la longueur d'onde. En effet, plus la longueur d'onde augmente, plus l'énergie contenue au sein de la vague initiale est grande. Par conséquent, même si leurs coefficients de dissipation  $\xi$  sont similaires, la vague de grande longueur d'onde aura dissipé plus d'énergie en comparaison d'une plus petite vague. Cela s'observe sur les résultats de fortes et faibles cambrures par la présence de courbes plus hautes pour les grandes longueurs d'ondes en comparaison des courbes des plus petites longueurs d'ondes (Fig. 5.38). Cependant, les cartes du déferlement (Fig. 5.37) démontrent une influence de la longueur d'onde dans l'apparition des ondes capillaires parasitiques. Cette influence produit une apparition du déferlement pour des cambrures plus élevées lorsque la longueur d'onde augmente. Sachant que l'apparition du déferlement augmente l'énergie dissipée, l'accroissement de l'énergie dissipée intervient pour des cambrures différentes en fonction de la longueur d'onde et de la profondeur. L'influence du décalage d'apparition du déferlement dans le croisement des courbes dans la figure 5.38 pour un domaine de cambrure restreint et différent en fonction de la profondeur d'eau est observé. Dans ce domaine, le facteur de dissipation semble similaire pour chaque longueur d'onde. Cette remarque ne semble pas s'appliquer à longueur d'onde  $\lambda = 0.05\text{ m}$  de profondeur d'eau  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$  à cause du type de déferlement observé. De ce fait, les déferlements glissants avec de multiple anneaux de vorticités et plongeants sont les déferlements les plus dissipatifs.

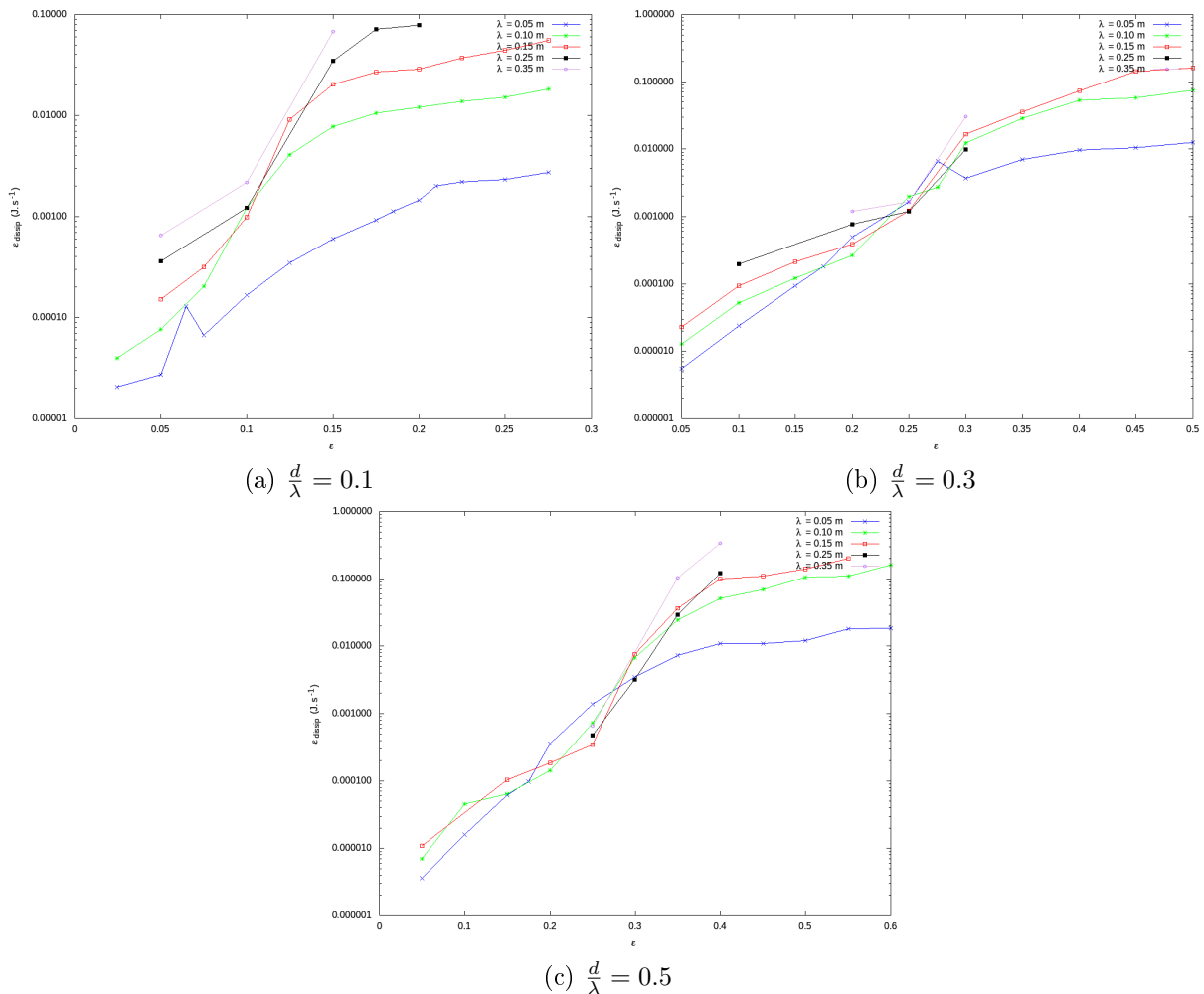


Figure 5.38. – Facteur de dissipation d'énergie  $\epsilon_{dissip}$  en fonction de la cambrure  $\epsilon$  pour les profondeurs d'eau : 0.1 (a), 0.3 (b) et 0.5 (c).

Pour l'ensemble des longueurs d'onde, le facteur de dissipation d'énergie augmente lors de la baisse de la profondeur (Fig. 5.39). Chaque courbe possède une augmentation progressive pour les faibles cambrures. Cette augmentation est associée aux vagues ne déferlant pas. Puis, elle est suivie d'une plus forte augmentation de la dissipation correspondant à l'apparition des ondes capillaires parasites ainsi qu'au déferlement glissant avec un anneau. Cette forte augmentation diminue pour laisser apparaître une légère augmentation constante. Ce dernier plateau possède des valeurs de facteur de dissipation de l'énergie plus élevées et correspond au déferlement glissant avec de multiples anneaux de vorticités et plongeants. Ces informations sont plus facilement visibles pour les longueurs d'ondes  $\lambda = 0.10\text{ m}$  et  $\lambda = 0.15\text{ m}$ . Pour finir, par observation de la valeur du coefficient  $\epsilon_{dissip}$  pour les trois profondeurs d'eau, une plus grande valeur de ce coefficient pour les eaux profondes est à souligner. Cela semble correspondre avec les conclusions présentées pendant les précédentes études sur une influence proportionnelle à  $\sqrt{\tanh(\frac{2\pi d}{\lambda})}$ .

### 5.7.2. Intensité du déferlement

Le coefficient d'intensité du déferlement  $b_{int}$  démontre également que les déferlements les plus intenses semblent être les déferlements glissant avec de multiples anneaux et plongeants (Fig. 5.40). Contrairement au coefficient de dissipation d'énergie, l'intensité du déferlement semble être plus importante pour les petites longueurs d'ondes. Par conséquent, même si l'énergie totale dissipée est plus petite, l'intensité du déferlement des petites vagues est plus grande comparativement à sa taille et son énergie initiale. Ce résultat correspond à l'observation présentée par L. Deike *et al* [90] et W. K. Melville *et al* [92]. Cependant, cette observation semble être vérifiable jusqu'à une longueur d'onde minimale. En effet, sur la figure 5.40a, la courbe de la longueur d'onde  $\lambda = 0.05\text{ m}$  est plus basse que celle de la longueur d'onde  $\lambda = 0.10\text{ m}$ . Ce résultat provient du type de déferlement obtenu. Pour la plus petite longueur d'onde, le déferlement glissant avec un seul anneau est observé. Tandis que pour la plus grande longueur d'onde, le déferlement glissant avec de multiples anneaux de vorticités est observé. Ce type de déferlement semble plus intense que le précédent. Cela explique la baisse d'intensité du déferlement pour la plus petite onde. Ce résultat vient confirmer le résultat obtenu sur la dissipation d'énergie. Par conséquent, il semble exister une longueur d'onde minimale jusqu'à laquelle l'intensité du déferlement semble augmenter lorsque la longueur d'onde diminue.

Similairement à la dissipation d'énergie, pour une même cambrure, l'intensité du déferlement est plus grande lorsque la profondeur d'eau diminue (Fig. 5.41). Les valeurs maximales de ce coefficient sont équivalentes pour l'ensemble des profondeurs d'eau.

### 5.7.3. Bilan

Dans cette partie, deux facteurs connus dans la littérature ont été étudiés : la dissipation d'énergie  $\epsilon_{dissip}$  et l'intensité du déferlement  $b_{int}$ . L'étude de ces deux variables démontre la forte influence de la profondeur sur l'apparition des déferlements dissipatifs. Plus la profondeur d'eau est faible, plus les types de déferlements apparaissent pour une faible cambrure ayant pour conséquences une augmentation de l'énergie dissipée et de l'intensité du déferlement pour les petites cambrures. Cependant, les valeurs maximales de ces deux variables semblent être faiblement dépendantes de la profondeur d'eau. Par conséquent, les profondeurs d'eau faibles dissipent mieux l'énergie pour les faibles cambrures mais ne sont pas plus dissipatives lorsque l'on compare la valeur de chaque type de déferlement.

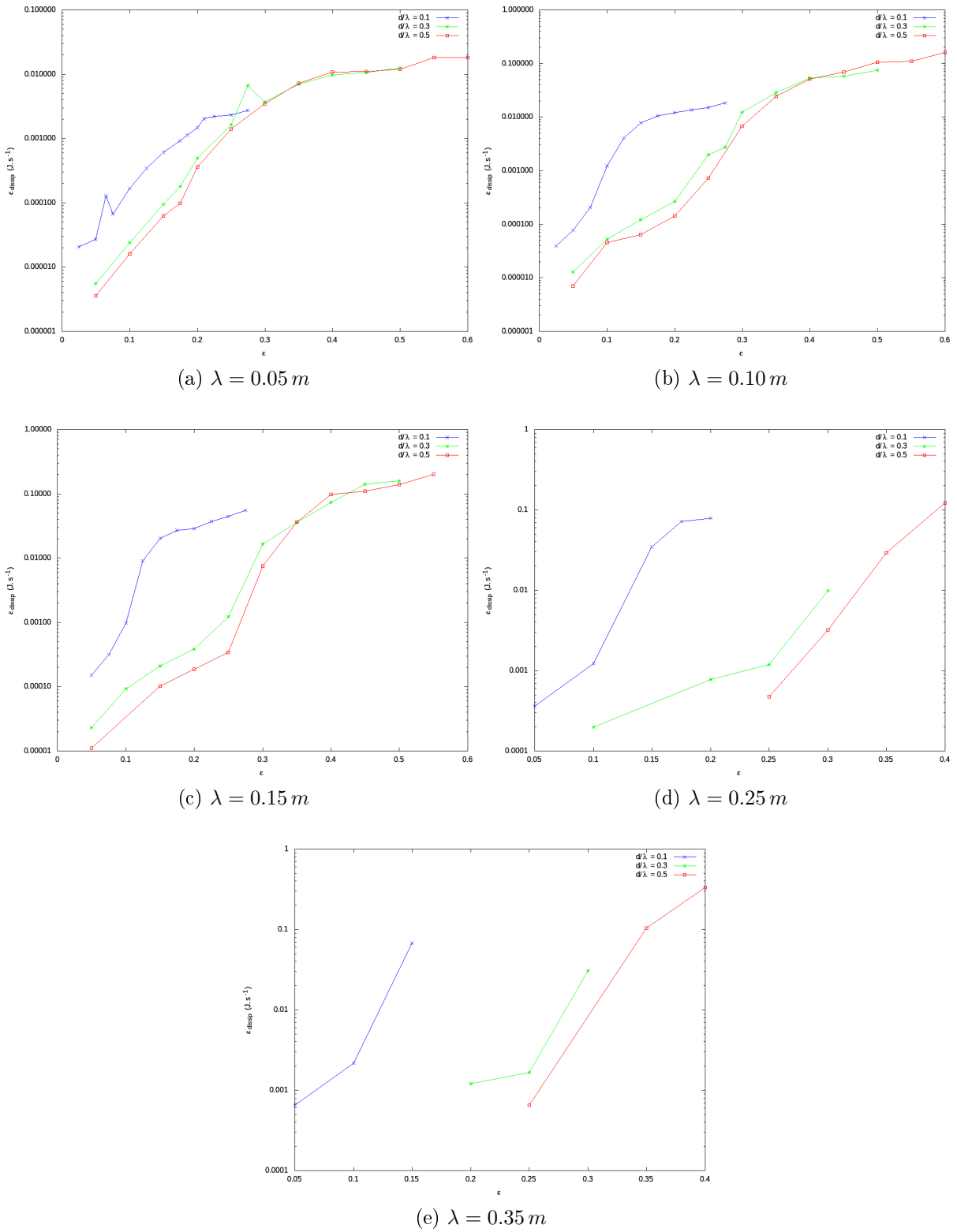


Figure 5.39. – Facteur de dissipation d'énergie  $\epsilon_{dissip}$  en fonction de la cambrure  $\epsilon$  pour les longueurs d'onde : 0.05 (a), 0.10 (b), 0.15 (c), 0.25 (d) et 0.35 (e).

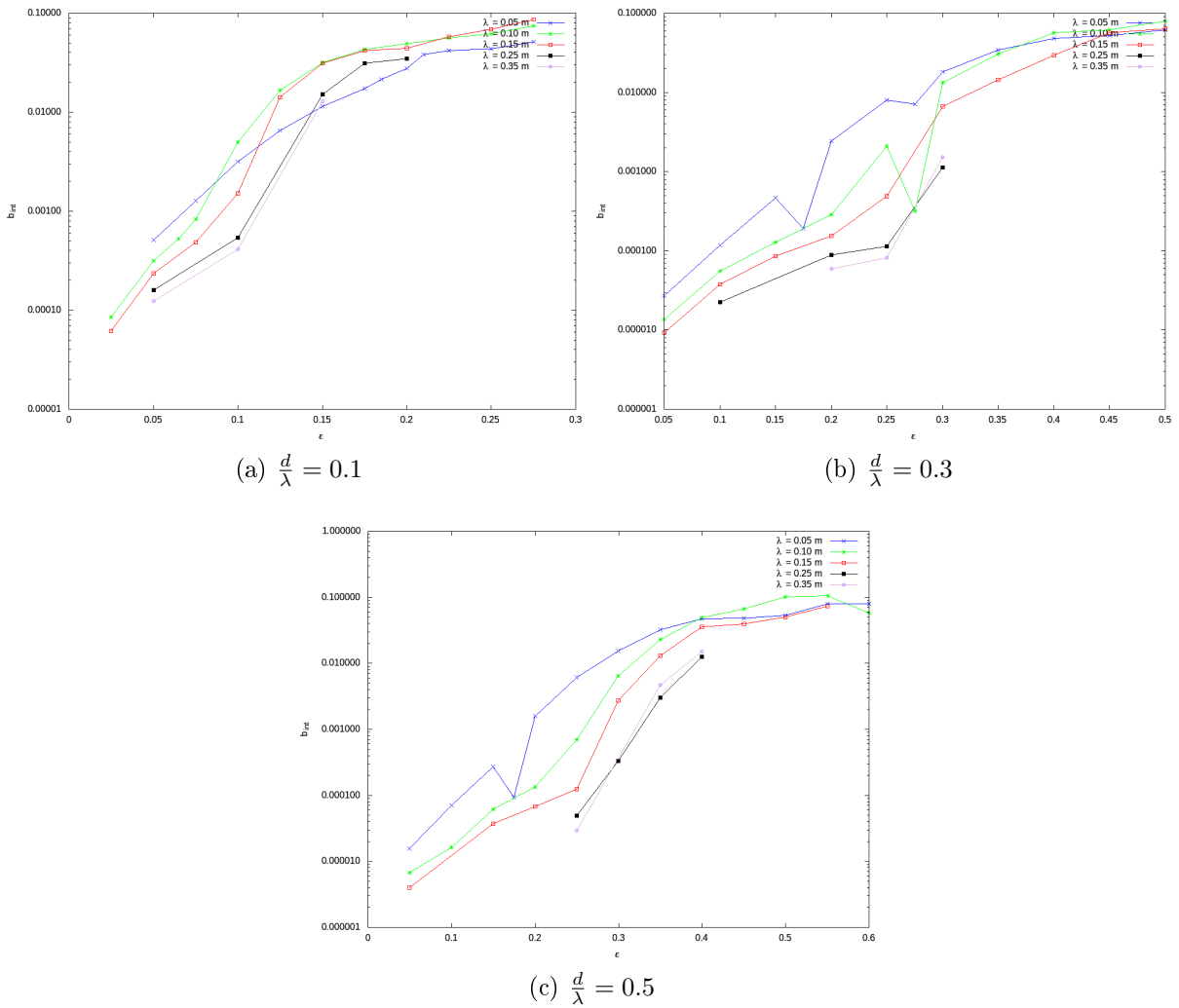


Figure 5.40. – Facteur d'intensité du déferlement  $b_{int}$  en fonction de la cambure  $\epsilon$  pour les profondeurs d'eau : 0.1 (a), 0.3 (b) et 0.5 (c).

Les déferlements glissant avec de nombreux anneaux de vorticité et plongeants possèdent une dissipation d'énergie et une intensité de déferlement semblable. Ces déferlements peuvent être considérés comme étant les plus intenses et dissipatifs pour le domaine de longueur d'onde étudié.

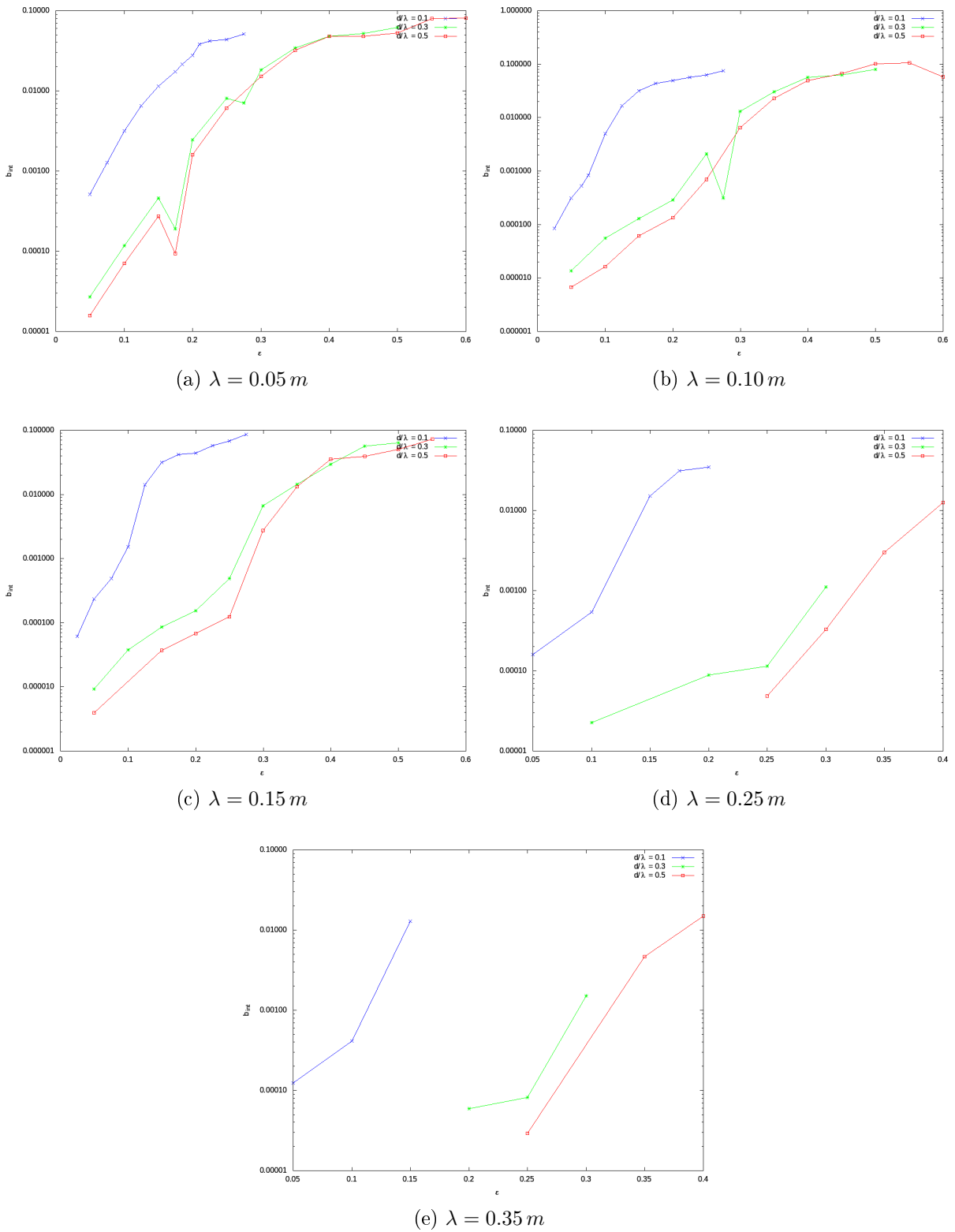


Figure 5.41. – Facteur d'intensité du déferlement  $b_{int}$  en fonction de la cambrure  $\epsilon$  pour les longueurs d'onde :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).

## 5.8. Conclusion et discussions

Ce chapitre est dédié à l'étude numérique du déferlement de vagues pour des longueurs d'onde et profondeurs d'eau variables. Les connaissances sur l'influence de la profondeur sur le déferlement et sur les caractéristiques de plusieurs types de déferlement ont été améliorées.

La profondeur d'eau joue un rôle important sur l'apparition du déferlement pour de petites cambrures. Il est possible de distinguer les cas d'apparition de cambrure en eau profonde ou peu profonde, ce qui génère une variation de dissipation de l'énergie et de l'intensité du déferlement. Cependant, les valeurs maximales et minimales de ces variables sont similaires pour chaque profondeur d'eau. De plus, l'épaisseur de vorticité générée lors du déferlement est également similaire pour l'ensemble des profondeurs d'eau. Il est possible de déduire que la variation de la profondeur n'influence que très peu les caractéristiques de chaque type de déferlement. Par conséquent, la profondeur modifie uniquement le domaine de cambrure d'apparition des types de déferlement.

Pour décrire précisément la dynamique de chaque type de déferlement, deux études ont été réalisées de manière complémentaire : l'étude des ondes capillaires associée à l'étude de la naissance de la vorticité. Grâce à ces études, les types de déferlements glissant et plongeant communément rencontrés dans la littérature ont pu être subdivisés en deux sous parties chacun, et faire ainsi apparaître deux types de déferlement originaux: glissant avec un anneau de vorticité et plongeant sans rouleau. Ainsi, deux nouveaux types de déferlement ont pu être présentés.

Un premier critère de détection du déferlement plongeant a été proposé. Il consiste en l'étude de l'avancée du jet par rapport à la crête du premier capillaire. Ce critère provient de l'extension de critères existants aux ondes capillo-gravitaires.

Un second critère de détection du déferlement glissant fut également proposé. Il est basé sur une étude physique du mouvement de la surface. Lors de l'apparition des ondes capillaires, l'angle du creux formé par les deux premières ondes influence le type de déferlement. Si cet angle descend en dessous de l'angle de  $90^\circ$ , il sera générateur d'anneaux de vorticité au sein de l'eau et engendrera un déferlement glissant. Grâce à l'étude du minimum de cet angle, deux fonctions ont été reconstruites permettant la prédiction de l'angle minimum en fonction des grandeurs caractéristiques de la vague pour les déferlements d'ondes capillaires parasites et glissants. En injectant l'angle de  $90^\circ$ , il a été possible de calculer une fonction représentant la limite entre ces deux déferlements.

Pour finir, grâce aux nombreuses simulations lancées, trois cartes de déferlements ont pu être construites permettant la prédiction du type de déferlement en fonction de la longueur d'onde, de la cambrure et d'une profondeur d'eau de 0.1, 0.3 ou 0.5. La génération de ces trois cartes vient enrichir les connaissances du déferlement en milieu peu profond.

Le déferlement a été analysé grâce à la simulation numérique précise en 2 dimensions. L'hypothèse de l'utilisation d'une vague en 2 dimensions pour étudier un phénomène physique en 3 dimensions peut engendrer des erreurs lors de l'extrapolation des résultats vers la 3D, mais se révèle incontournable pour observer les phénomènes et focaliser l'attention sur les structures-types. Afin de minimiser ces erreurs, seuls les premiers instants ont été étudiés. Cependant, une étude supplémentaire sur l'influence de la troisième dimension dans ces résultats pourrait permettre de confirmer l'exploitation de ces données. De plus, la condition initiale unique choisie ne permet pas l'utilisation et l'extrapolation de plusieurs résultats obtenus dans le manuscrit à d'autres types de vague, et nécessitera une adaptation. Cependant cette étude fournit une base pour l'interprétation des phénomènes.



## Conclusion et perspectives



## Conclusion

L'objectif de la thèse est l'analyse approfondie du déferlement de vagues capillo-gravitaires pour une profondeur d'eau variable. Lors des premières simulations effectuées pendant la thèse, il est apparu la nécessité de développer une méthode numérique permettant la simulation de ce phénomène complexe sur un maillage très raffiné. Les travaux de la thèse se sont scindés en deux parties distinctes : le développement et la validation d'un algorithme permettant la préservation de la quantité de mouvement tout en utilisant des schémas numériques d'ordres élevés, et l'étude et la caractérisation des phénomènes associés au déferlement de ce régime d'onde.

Lors de l'utilisation de la méthode standard couramment implémentée dans les codes existants, une couche de vorticité intense apparaît proche de la surface et modifie le comportement de l'interface entre les deux fluides. L'utilisation de la méthode standard sur des résultats expérimentaux d'impacts de goutte et déferlement de vague démontre que cette couche de vorticité n'est pas physique et provient d'un artéfact numérique. Ce décalage phénoménologique par rapport à l'expérimental grandit à mesure que le maillage est raffiné. Par conséquent, l'étude très précise du déferlement de vague nécessitait l'implémentation d'une méthode numérique, appelée HOMP, permettant la réduction de ce décalage de phénomène. Celle-ci est proposée et validée dans ce manuscrit. Cette méthode, basée sur de récents travaux de la littérature, permet la préservation de la quantité de mouvement pour la dynamique de fluides incompressibles. De plus, cette méthode a la particularité d'être indépendante de la représentation de l'interface et permet l'utilisation de schémas numériques d'ordre élevés.

L'approche proposée dans ce manuscrit a été confrontée dans un premier temps aux cas de vérifications présents dans la littérature, puis dans un second aux résultats expérimentaux d'impact de gouttes et de déferlement de vague. Les résultats satisfaisants des simulations confirment l'utilisation de cette méthode pour la simulation numérique de phénomènes complexes tel que le déferlement de vague.

L'étude dans ce manuscrit s'est focalisée sur la base du déferlement grâce à l'étude d'une seule vague avec un fond plat, ce qui a permis d'améliorer la connaissance sur le déferlement de vague. L'amélioration des capacités informatiques et des méthodes numériques a permis de réaliser des simulations en deux dimensions avec un maillage plus raffiné que dans la littérature. Ainsi, grâce à l'amélioration de la précision des résultats et le nombre de simulations lancées, le déferlement fut cartographié et analysé pour des longueurs d'onde de 5 cm   35 cm. L'analyse des phénomènes obtenus pour l'ensemble des simulations a, dans un premier temps, confirmé les résultats observés par rapport à la littérature, puis dans un second temps, permis la définition de plusieurs formes d'apparition des ondes capillaires et de la présence de vorticité. De nouveaux types de déferlement ont été décrits grâce à l'étude des phénomènes de surface et sous-surfaciques. De plus, deux nouveaux critères de déferlement ont été employés afin de faciliter l'étude des phénomènes. Un de ces critères, l'angle minimal du premier creux  $\theta_{01}$ , a permis la fabrication d'une équation séparant le déferlement d'ondes capillaires parasitiques du déferlement glissant. Finalement, une analyse sur l'influence de la profondeur sur la vorticité et sur l'énergie dissipée a été réalisée. La principale influence de la profondeur est sur le domaine de cambrure d'observation des types de déferlements. Un déferlement plongeant possède une dissipation d'énergie et une intensité de déferlement similaires pour les trois profondeurs d'eau étudiées. Cependant, l'apparition du déferlement plongeant est observée pour des cambrures plus faibles à mesure que la profondeur d'eau diminue.

## Perspectives

La tension de surface est un facteur important dans le déferlement d'onde capillo-gravitaire. La méthode de calcul de la tension de surface implémentée dans le code provient de la littérature et a déjà prouvé son efficacité lors de la simulation du déferlement. Cependant, l'amélioration du calcul de la courbure pourrait permettre une meilleure représentation des phénomènes de surface lorsque ceux-ci ne sont pas représentés par suffisamment de cellules.

La base du déferlement de vague a été consolidée par l'étude d'une onde unique sur un fond plat sans la présence de vent ni de courant marin. Cependant, de nombreuses études existent sur le déferlement. Parmi ces études se trouve le déferlement sur une bathymétrie plus complexe : une plage, une marche simple ou double, etc. Plusieurs études supplémentaires sur ces bathymétries pourraient confirmer la présence de nouvelles formes de déferlement, de zones de vorticité et d'ondes capillaires.

De nouvelles formes de vorticité ont été observées et détaillées dans ce manuscrit. Lors du déferlement glissant, des anneaux de vorticité contrarotatifs sont générés. Ces anneaux s'advectionnent vers le fond pour intéragir avec celui-ci. Cependant, l'interaction entre la vorticité et le fond n'est pas étudiée dans ce manuscrit. Une étude supplémentaire sur la génération de ces anneaux de vorticité et l'interaction avec les sédiments pourrait expliquer une nouvelle forme de suspension et transport de sédiments. En fonction de la masse des particules sédimentaires, l'intensité du cisaillement pourrait être suffisante pour décrocher et transporter des particules.

Pour finir, les travaux présentés dans le manuscrit confère une base solide de l'étude du déferlement de vague d'un point de vue bi-dimensionnel. L'extension à la troisième dimension pour mieux comprendre la dynamique des petites échelles (bulles, gouttes) est nécessaire. La moyennisation des résultats obtenus pourraient également permettre d'étendre les résultats vers la 2.5<sup> me</sup> dimension.



# Bibliographie

- [1] C. Guan M. J. McPhaden F. Wang D. Hu W. Cai S. Hu, J. Sprintall. Deep-reaching acceleration of global mean ocean circulation over the past two decades. *Science Advances*, 6(6), February 2020.
- [2] P. Sutton N. Zilberman D. Roemmich, J. Gilson. Multidecadal Change of the South Pacific Gyre Circulation. *Journal of Physical Oceanography*, 46(6) :1871–1883, June 2016. Publisher : American Meteorological Society Section : Journal of Physical Oceanography.
- [3] F. J. Méndez B. G. Reguero, I. Losada. A recent increase in global wave power as a consequence of oceanic warming. *Nature Communications*, 10(1) :205, January 2019.
- [4] E. Campins J. P. Sierra, M. Casas-Prat. Impact of climate change on wave energy resource : The case of Menorca (Spain). *Renewable Energy*, 101 :275–285, February 2017.
- [5] J. M. Baxter D. Laffoley. Explaining ocean warming : Causes, scale, effects and consequences. Technical report, September 2016.
- [6] R. Mohan A. Kumar, J. Yadav. Global warming leading to alarming recession of the Arctic sea-ice cover : Insights from remote sensing observations and model reanalysis. *Heliyon*, 6(7) :e04355, July 2020.
- [7] E. Hanna X. Asay-Davis R. DeConto G. Durand L. Favier X. Fettweis H. Goelzer N. R. Golledge P. Kuipers Munneke J. T. M. Lenaerts S. Nowicki A. J. Payne A. Robinson H. Seroussi L. D. Trusel M. van den Broeke F. Pattyn, C. Ritz. The Greenland and Antarctic ice sheets under 1.5 Å°C global warming. *Nature Climate Change*, 8(12) :1053–1061, December 2018. Number : 12 Publisher : Nature Publishing Group.
- [8] C. P. Stark-G. Ekström M. N. Koppes P. Lynett A. Dufresne P. J. Haeussler M. Geertsema S. Gulick A. Mattox J. G. Venditti M. A. L. Walton N. McCall E. Mckittrick B. MacInnes E. L. Bilderback H. Tang M. J. Willis B. Richmond R. S. Reece C. Larsen B. Olson J. Capra A. Ayca C. Bloom H. Williams D. Bonno R. Weiss A. Keen V. Skanavis M. Loso B. Higman, D. H. Shugar. The 2015 landslide and tsunami in Taan Fiord, Alaska. *Scientific Reports*, 8(1) :12993, September 2018. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [9] N. L. Bindoff-T. Boyer L. J. Cheng J. A. Church J. L. Conroy C. M. Domingues J. T. Fasullo J. Gilson G. Goni S. A. Good J. M. Gorman V. Gouretski M. Ishii G. C. Johnson S. Kizu J. M. Lyman A. M. Macdonald W. J. Minkowycz S. E. Moffitt M. D. Palmer A. R. Piola F. Reseghetti K. Schuckmann K. E. Trenberth I. Velicogna J. K. Willis J. P. Abraham, M. Baringer. A review of global ocean temperature observations : Implications for ocean heat content estimates and climate change. *Reviews of Geophysics*, 51(3) :450–483, September 2013.
- [10] P. Gleckler S. Purkey G. Johnson J. Lyman T. Boywe Lawrence Livermore National Laboratory, P. Durack. Ocean Warming : From the Surface to the Deep in Observations and Models. *Oceanography*, 31(2) :41–51, June 2018.
- [11] A. S. P. S. Reboleira A. Castaño-Sánchez, G. C. Hose. Salinity and temperature increase impact groundwater crustaceans. *Scientific Reports*, 10(1) :12328, July 2020. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [12] M. M. Joshi J. Cullum, D. P. Stevens. Importance of ocean salinity for climate and habitability. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(16) :4278–4283, April 2016. Publisher : National Academy of Sciences Section : Physical Sciences.
- [13] R. J. Matear P. J. Durack, S. E. Wijffels. Ocean Salinities Reveal Strong Global Water Cycle Intensification During 1950 to 2000. *Science*, 336(6080) :455–458, April

2012. Publisher : American Association for the Advancement of Science Section : Report.
- [14] L. Mentaschi T. A. Plomaritis P. Athanasiou A. Luijendijk L. Feyen M. I. Vousdoukas, R. Ranasinghe. Sandy coastlines under threat of erosion. *Nature Climate Change*, 10(3) :260–263, March 2020. Number : 3 Publisher : Nature Publishing Group.
- [15] M. Gracia-León J. Lin-Ye J.-P. Sierra A. Grases, V. Gracia. Coastal Flooding and Erosion under a Changing Climate : Implications at a Low-Lying Coast (Ebro Delta). *Water*, 12(2) :346, January 2020.
- [16] R. Ranasinghe S. Muis-R. J. Nicholls D. Lincke J. Hinkel E. Kirezci, I. R. Young. Projections of global-scale extreme sea levels and resulting episodic coastal flooding over the 21st Century. *Scientific Reports*, 10(1) :11629, July 2020. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [17] D. Lumbroso. 12 - Coastal Surges. In Freddy Vinet, editor, *Floods*, pages 209–223. Elsevier, January 2017.
- [18] J. C. Doornkamp. Coastal flooding, global warming and environmental management. *Journal of Environmental Management*, 52(4) :327–333, April 1998.
- [19] J. Zhu K. E. Trenberth-M. E. Mann J. P. Abraham G. Li, L. Cheng. Increasing ocean stratification over the past half-century. *Nature Climate Change*, 10(12) :1116–1123, December 2020. Number : 12 Publisher : Nature Publishing Group.
- [20] M. Visbeck S. Schmidtko, L. Stramma. Decline in global oceanic oxygen content during the past five decades. *Nature*, 542(7641) :335–339, February 2017. Number : 7641 Publisher : Nature Publishing Group.
- [21] R. L. Miller. Role of Vortices in Surf Zone Prediction : Sedimentation and Wave Forces. January 1976.
- [22] T. Igarashi K. Nadaoka, S. Ueno. Sediment Suspension Due to Large Scale Eddies in the Surf Zone. pages 1646–1660, December 2015.
- [23] S. B. Dalziel R. J. Munro, N. Bethke. Sediment resuspension and erosion by vortex rings. *Physics of Fluids*, 21(4) :046601, April 2009.
- [24] N. M. Hansen D. R. Fuhrman J. Fredsøe B. M. Sumer, H. A. A. Guner. Laboratory observations of flow and sediment transport induced by plunging regular waves. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 118(11) :6161–6182, 2013.
- [25] D. A. Beck F. C. K. Ting. Observation of sediment suspension by breaking-wave-generated vortices using volumetric three-component velocimetry. *Coastal Engineering*, 151 :97–120, September 2019.
- [26] J. Kirby. Recent advances in nearshore wave, circulation and sediment transport modeling. January 2017.
- [27] M. Miche. Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante. *Annales de Ponts et Chaussées*, 1944, pp(1) 26-78, (2)270-292, (3) 369-406, 1944.
- [28] A. S. Peters. Water waves over sloping beaches and the solution of a mixed boundary value problem for  $\delta^2\phi - k^2\phi = 0$  in a sector. *CommunicationsonPureandAppliedMathematics*, 5(1) : 87 – 108, 1952.
- [29] R. Zytner I. Nistor B. Robertson, K. Hall. Breaking Waves : Review of Characteristic Relationships. *Coastal Engineering Journal*, 55, June 2013.

- [30] F. Raichlen Y. Li. Energy Balance Model for Breaking Solitary Wave Runup. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 129(2) :47–59, March 2003.
- [31] M.-S. Li Y.-Y. Chen. Evolution of breaking waves on sloping beaches. *Coastal Engineering*, 95 :51–65, January 2015.
- [32] F. Shi G. Ma M. Derakhti, J. T. Kirby. Wave breaking in the surf zone and deep-water in a non-hydrostatic RANS model. Part 1 : Organized wave motions. *Ocean Modelling*, 107 :125–138, November 2016.
- [33] I. A. Svendsen S. T. Grilli, J. Skourup. An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(2) :97–107, June 1989.
- [34] R. Marcer J. Camille, K. Pons. Saint-Venant and Navier-Stokes Models for Tsunami Simulations. *Journal of Shipping and Ocean Engineering*, 9, March 2019.
- [35] J. C. Harris J. D. Geiman S. T. Grilli F. Shi, J. T. Kirby. A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modeling of breaking waves and coastal inundation. *Ocean Modelling*, 43-44 :36–51, January 2012.
- [36] N. Mizutani H. Matsuda T. Yasuda, H. Mutsuda. Relationships of Plunging Jet Size to Kinematics of Breaking Waves with Spray and Entrained Air Bubbles. *Coastal Engineering Journal*, 41(3-4) :269–280, September 1999.
- [37] N. Mizutani T. Yasuda, H. Mutsuda. Kinematics of overturning solitary waves and their relations to breaker types. *Coastal Engineering*, 29(3) :317–346, January 1997.
- [38] M. Ricchiuto S. Abadie M. Martin Medina D. Morichon C. Journeau R. Marcer K. Pons S. LeRoy R. Pedreros M. Rousseau M. Kazolea, A. Filippini. Wave propagation, breaking, and overtopping on a 2D reef : A comparative evaluation of numerical codes for tsunami modelling. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 73 :122–131, January 2019.
- [39] M. Ricchiuto M. Kazolea. On wave breaking for Boussinesq-type models. *Ocean Modelling*, 123 :16–39, March 2018.
- [40] S. T. Grilli P. Guyenne. Numerical study of three-dimensional overturning waves in shallow water. *Journal of Fluid Mechanics*, 547 :361–388, January 2006.
- [41] A. Oya A. Tada T. Fukumoto T. Yasuda, H. Mutsuda. A New Type Breaker Forming a Giant Jet and its Decaying Properties. pages 300–313, December 2015.
- [42] T. Yui M. Hattori, A. Arami. Wave impact pressure on vertical walls under breaking waves of various types. *Coastal Engineering*, 22(1) :79–114, January 1994.
- [43] A. Kamath D. Myrhaug ø. Arntsen M. Alagan Chella, H. Bihs. Breaking Wave Interaction With a Group of Four Vertical Slender Cylinders in Two Square Arrangements. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 141, April 2019.
- [44] H. Chen Q. Zou. Wind and Current Effects on Extreme Wave Formation and Breaking. *Journal of Physical Oceanography*, 47(7) :1817–1841, July 2017.
- [45] A. D. Moran J. S. Galloway, M. B. Collins. Onshore/offshore wind influence on breaking waves : An empirical study. *Coastal Engineering*, 13(4) :305–323, December 1989.
- [46] S. L. Douglass. Influence of Wind on Breaking Waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 116(6) :651–663, November 1990.
- [47] J. Johannessen V. Kudryavtsev. On effect of wave breaking on short wind waves. *Geophysical Research Letters*, 31, October 2004.
- [48] R. Verzicco A. Iafrazi, F. De Vita. Effects of the wind on the breaking of modulated wave trains. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 73 :6–23, January 2019.

- [49] F. Veron. Ocean Spray. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47(1) :507–538, 2015.
- [50] A. H. Callaghan. On the Relationship between the Energy Dissipation Rate of Surface-Breaking Waves and Oceanic Whitecap Coverage. *Journal of Physical Oceanography*, 48(11) :2609–2626, November 2018.
- [51] S. D. Miller W. J. de Bruyn A. H. Callaghan B. Scanlon B. Ward M. Yang E. S. Saltzman T. G. Bell, S. Landwehr. Estimation of bubble-mediated air-sea gas exchange from concurrent DMS and CO<sub>2</sub> transfer velocities at intermediate-high wind speeds. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 17(14) :9019–9033, July 2017.
- [52] F. Véron S. Glockner P. Lubin, O. Kimmoun. Discussion on instabilities in breaking waves : Vortices, air-entrainment and droplet generation. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 73 :144–156, January 2019.
- [53] W. K. Melville L. Deike, N. Pizzo. Lagrangian transport by breaking surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 829 :364–391, October 2017.
- [54] A. Iafrazi. Energy dissipation mechanisms in wave breaking processes : Spilling and highly aerated plunging breaking events. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 116(C7), 2011.
- [55] M. Onorato A. Iafrazi, A. Babanin. Modulational Instability, Wave Breaking, and Formation of Large-Scale Dipoles in the Atmosphere. *Physical Review Letters*, 110(18) :184504, May 2013.
- [56] G. C. Hsiao R. Timman, A. J. Hermans. *Water waves and ship hydrodynamics*, volume 5 of *Mechanics of Fluids and Transport Processes*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1985.
- [57] H. Lamb. *Hydrodynamics*. The University Press, 1932.
- [58] J. Lighthill Sir M. J. Lighthill. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, November 2001.
- [59] G. D. Crapper. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(6) :532–540, August 1957.
- [60] G. G. Stokes. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves. *Mathematical and Physical papers*, 1(314-326) :14, 1880.
- [61] G. G. Stokes. *On the Theory of Oscillatory Waves*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Printed at the Pitt Press by John W. Parker, 1847.
- [62] M. Selwyn E. D. Cokelet, Longuet-Higgins. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 286(1335) :183–230, July 1977.
- [63] T. B. Benjamin. The solitary wave with surface tension. *Quarterly of Applied Mathematics*, 40(2) :231–234, 1982.
- [64] G. B. Airy. *Tides and Waves*. B. Fellowes, 1845.
- [65] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves : Whitham/Linear*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, June 1999.
- [66] L. Deike M. Berhanu, E. Falcon. Turbulence of capillary waves forced by steep gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 850 :803–843, September 2018.
- [67] O. M. Phillips. On the generation of waves by turbulent wind. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(05) :417, July 1957.
- [68] M. Margarida P. Cunha, P. Gouveia. *The Nazaré coast, the submarine canyon and the giant waves - a synthesis*. February 2015.



- [69] H. Segur M. F. Mahmood, D. Henderson. *Water Waves : Theory and Experiment, Proceedings of the Conference on Howard University, USA 13-18 May 2008*. World Sscientific, 2010.
- [70] Martin Rein. Wave Phenomena During Droplet Impact. In L. Van Wijngaarden S. Morioka, editor, *IUTAM Symposium on Waves in Liquid/Gas and Liquid/Vapour Two-Phase Systems*, Fluid Mechanics and its Applications, pages 171–190, Dordrecht, 1995. Springer Netherlands.
- [71] W. Dong P. Li, S. Wang. Capillary Wave and Initial Spreading Velocity at Impact of Drop onto a Surface. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 12 :1265–1272, July 2019.
- [72] T. Kakinuma. Tsunami Generation Due to a Landslide or a Submarine Eruption. October 2016.
- [73] C. Chagué-Goff K. Goto J. Goff, J. P. Terry. What is a mega-tsunami? *Marine Geology*, 358 :12–17, December 2014.
- [74] John Scott Russell. Report of the Committee on Waves, appointed by the British Association. *BA reports VI*, pages 417–468, 1837.
- [75] B. Eric K. Guizien. Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker. *Journal of Hydraulic Research*, May 2002 :321–331, February 2010.
- [76] O. Madsen. WAVES GENERATED BY A PISTON-TYPE WAVEMAKER. *Coastal Engineering Proceedings*, 1 :36, January 1970.
- [77] H. Chanson P. Lubin. Are breaking waves, bores, surges and jumps the same flow? *Environmental Fluid Mechanics*, 17(1) :47–77, February 2017.
- [78] E. M. Bitner-Gregersen A. Toffoli. Types of Ocean Surface Waves, Wave Classification. In *Encyclopedia of Maritime and Offshore Engineering*, pages 1–8. American Cancer Society, 2017.
- [79] E. J. Hopfinger B. A. Puthenveetil. Evolution and breaking of parametrically forced capillary waves in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 633 :355–379, August 2009.
- [80] D. Cole. *The splashing morphology of liquid-liquid impacts*. phd, James Cook University, July 2007.
- [81] J. H. Duncan. Spilling Breakers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33(1) :519–547, 2001.
- [82] W. K. Melville. Surface Gravity and Capillary Waves\*. In John H. Steele, editor, *Encyclopedia of Ocean Sciences (Second Edition)*, pages 573–581. Academic Press, Oxford, January 2001.
- [83] W. W. Schultz M. Perlin. Capillary Effects on Surface Waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32(1) :241–274, 2000.
- [84] L. P. Bernal M. Perlin, J. He. An experimental study of deep water plunging breakers. *Physics of Fluids*, 8(9) :2365–2374, September 1996.
- [85] A. R. Osborne. Chapter 1.9.2 - Nonlinear Ocean Wave and the Inverse Scattering Transform. In P. Sabatier R. Pike, editor, *Scattering*, pages 637–666. Academic Press, London, January 2002.
- [86] J. A. Battjes. Surf similarity. *Coastal Engineering Proceedings*, (14) :26–26, January 1974.
- [87] S. Zaleski J. Li G. Chen, C. Kharif. Two-dimensional Navier–Stokes simulation of breaking waves. *Physics of Fluids*, 11(1) :121–133, December 1998.

- [88] T. Y. Hou H. D. Cenicerros. Dynamic generation of capillary waves. *Physics of Fluids*, 11(5) :1042–1050, April 1999.
- [89] S. Popinet L. Deike, W. K. Melville. Air entrainment and bubble statistics in breaking waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 801 :91–129, August 2016.
- [90] W. K. Melville L. Deike, S. Popinet. Capillary effects on wave breaking. *Journal of Fluid Mechanics*, 769 :541–569, April 2015.
- [91] S. Glockner P. Lubin. Numerical simulations of three-dimensional plunging breaking waves : generation and evolution of aerated vortex filaments. *Journal of Fluid Mechanics*, 767 :364–393, March 2015.
- [92] A. V. Fedorov W. K. Melville. The equilibrium dynamics and statistics of gravityâcapillary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 767 :449–466, March 2015.
- [93] Longuet-Higgins M. Selwyn R. J. Rapp, W. K. Melville. Laboratory measurements of deep-water breaking waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 331(1622) :735–800, June 1990.
- [94] S. A. Thorpe. Energy Loss by Breaking waves. *Journal of Physical Oceanography*, 23(11) :2498–2502, November 1993.
- [95] W. K. Melville. Energy Dissipation by Breaking Waves. *Journal of Physical Oceanography*, 24(10) :2041–2049, October 1994.
- [96] W. L. Peirson M. L. Banner. Wave breaking onset and strength for two-dimensional deep-water wave groups. *Journal of Fluid Mechanics*, 585 :93–115, August 2007.
- [97] P. Bonmarin. Geometric properties of deep-water breaking waves. 1989.
- [98] S. Abadie J.-P. Caltagirone P. Lubin, S. Vincent. Three-dimensional Large Eddy Simulation of air entrainment under plunging breaking waves. *Coastal Engineering*, 53(8) :631–655, June 2006.
- [99] Y. Toba N. Ebuchi, H. Kawamura. Fine structure of laboratory wind-wave surfaces studied using an optical method. *Boundary-Layer Meteorology*, 39(1) :133–151, April 1987.
- [100] K. Okuda. Internal flow structure of short wind waves. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 38(6) :331–338, January 1983.
- [101] S. Michael Longuet-Higgins. Capillary rollers and bores. *Journal of Fluid Mechanics*, 240 :659–679, July 1992.
- [102] R. Mui D. Dommermuth. *The vortical structure of a near-breaking gravity-capillary wave*. August 1994.
- [103] M. Perlin H. J. Lin. The velocity and vorticity fields beneath gravity-capillary waves exhibiting parasitic ripples. *Wave Motion*, 33(3) :245–257, March 2001.
- [104] G. I. Freidman K. D. Ruvinsky, F. I. Feldstein. Numerical simulations of the quasi-stationary stage of ripple excitation by steep gravityâcapillary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 230 :339–353, September 1991.
- [105] C.-L. Ting M. Perlin. Steep gravity-capillary waves within the internal resonance regime. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(11) :2466–2478, November 1992.
- [106] S. Michael Longuet-Higgins. Parasitic capillary waves : a direct calculation. *Journal of Fluid Mechanics*, 301 :79–107, October 1995.
- [107] A. Rozenberg A. V. Fedorov, W. K. Melville. An experimental and numerical study of parasitic capillary waves. *Physics of Fluids*, 10(6) :1315–1323, May 1998.
- [108] W. W. Schultz M. Perlin L. Jiang, H.-J. Lin. Unsteady ripple generation on steep gravityâcapillary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 386 :281–304, May 1999.

- [109] W.-T. Tsai L.-P. Hung. The Formation of Parasitic Capillary Ripples on Gravity-Capillary Waves and the Underlying Vortical Structures. *Journal of Physical Oceanography*, 39(2) :263–289, February 2009.
- [110] J. H. Duncan X. Liu. An experimental study of surfactant effects on spilling breakers. *Journal of Fluid Mechanics*, 567 :433–455, November 2006.
- [111] W. K. Melville A. V. Fedorov. Nonlinear gravity-capillary waves with forcing and dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 354 :1–42, January 1998.
- [112] A. Iafrati. Numerical study of the effects of the breaking intensity on wave breaking flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 622 :371–411, March 2009.
- [113] G. Caulliez. Dissipation regimes for short wind waves. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 118(2) :672–684, 2013.
- [114] M. S. Longuet-Higgins. The generation of capillary waves by steep gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 16(1) :138–159, May 1963.
- [115] J. H. Michell. XLIV. The highest waves in water. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 36(222) :430–437, November 1893.
- [116] R. Almar B. Castelle N. Bonneton A. Nahon M. Tissier, P. Bonneton. Field measurements and non-linear prediction of wave celerity in the surf zone. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 30(6) :635–641, November 2011.
- [117] H. Dupuis N. Sénéchal, P. Bonneton. Field experiment on secondary wave generation on a barred beach and the consequent evolution of energy dissipation on the beach face. *Coastal Engineering*, 46(3) :233–247, August 2002.
- [118] W. Dally. Random breaking waves : Field verification of a wave-by-wave algorithm for engineering application. *Coastal Engineering*, 16 :369–397, March 1992.
- [119] J. R. Chaplin C. E. Blenkinsopp. Void fraction measurements and scale effects in breaking waves in freshwater and seawater. *Coastal Engineering*, 58(5) :417–428, May 2011.
- [120] G. B. Deane A. H. Callaghan, M. D. Stokes. The effect of water temperature on air entrainment, bubble plumes, and surface foam in a laboratory breaking-wave analog. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 119(11) :7463–7482, 2014. \_eprint : <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/2014JC010351>.
- [121] M. D. Stokes A. H. Callaghan, G. B. Deane. Laboratory air-entraining breaking waves : Imaging visible foam signatures to estimate energy dissipation. *Geophysical Research Letters*, 43(21) :11,320–11,328, 2016. \_eprint : <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/2016GL071226>.
- [122] M. Ricchiuto M. Kazolea. *Wave breaking for Boussinesq-type models using a turbulence kinetic energy model*. January 2016.
- [123] I. K. Nikolos C. E. Synolakis M. Kazolea, A. I. Delis. An unstructured finite volume numerical scheme for extended 2D Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*, 69 :42–66, November 2012.
- [124] S. Guignard S. T. Grilli, J. Horrillo. Fully Nonlinear Potential Flow Simulations of Wave Shoaling Over Slopes : Spilling Breaker Model and Integral Wave Properties. *Water Waves*, October 2019.
- [125] W. K. Melville N. Pizzo. Vortex generation by deep-water breaking waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 734, November 2013.
- [126] O. Kimmoun H. Branger P. Lubin, S. Glockner. NUMERICAL SIMULATIONS OF SPILLING BREAKING WAVES. 2011.

- [127] J. E. Welch F. H. Harlow. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids*, 8 :2182–2189, December 1965.
- [128] B. Young D. Cline, D. Cardon. Fluid Flow for the Rest of Us : Tutorial of the Marker and Cell Method in Computer Graphics. 2005.
- [129] I. Bohachevsky S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematičeskij sbornik*, 47(89)(3) :271–306, 1959.
- [130] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii. Homogeneous difference schemes on non-uniform nets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2(5) :927–953, 1963.
- [131] P. W. McDonald. The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 1971.
- [132] V. J. Katz. The History of Stokes’ Theorem. *Mathematics Magazine*, 52(3) :146–156, May 1979. Publisher : Taylor & Francis \_eprint : <https://doi.org/10.1080/0025570X.1979.11976770>.
- [133] C. Zemach J. U. Brackbill, D. B. Kothe. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100(2) :335–354, June 1992.
- [134] S. Popinet. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, 228(16) :5838–5866, September 2009.
- [135] O. Desjardins M. Owkes. A mesh-decoupled height function method for computing interface curvature. *Journal of Computational Physics*, 281 :285–300, January 2015.
- [136] S. Popinet. Numerical Models of Surface Tension. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50(1) :49–75, 2018. \_eprint : <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-045034>.
- [137] S. Glockner M. Coquerelle. A fourth-order accurate curvature computation in a level set framework for two-phase flows subjected to surface tension forces. *Journal of Computational Physics*, 305 :838–876, January 2016.
- [138] P. Woodward W. F. Noh. SLIC (Simple Line Interface Calculation). In Adriaan I. van de Vooren and Pieter J. Zandbergen, editors, *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28 â July 2, 1976 Twente University, Enschede*, Lecture Notes in Physics, pages 330–340, Berlin, Heidelberg, 1976. Springer.
- [139] D. L. Young. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 273–285, January 1982.
- [140] J. Breil A. Lemoine, S. Glockner. Moment-of-fluid analytic reconstruction on 2D Cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, 328 :131–139, January 2017.
- [141] J. A. Sethian S. Osher. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, November 1988.
- [142] S. Osher F. Gibou, R. Fedkiw. A review of level-set methods and some recent applications. *Journal of Computational Physics*, 353 :82–109, January 2018.
- [143] F. Gibou C. Min. Robust second-order accurate discretizations of the multi-dimensional Heaviside and Dirac delta functions. *Journal of Computational Physics*, 227(22) :9686–9695, November 2008.

- [144] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104) :745–762, 1968.
- [145] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des equations de navier-stokes par la methode des pas fractionnaires (i). *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 32 :135–153, 1969.
- [146] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, 30(1) :76–95, January 1979.
- [147] C.-W. Shu. High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems. *SIAM Review*, 51(1) :82–126, 2009.
- [148] R. J. Spiteri R. Wang. Linear Instability of the Fifth-Order WENO Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(5) :1871–1901, January 2007. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [149] I. Kataoka. Local instant formulation of two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5) :745–758, September 1986.
- [150] B. D. Nichols C. W. Hirt. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201–225, January 1981.
- [151] D. B. Kothe W. J. Rider. Reconstructing Volume Tracking. *J. Comput. Phys*, 141 :141–112, 1997.
- [152] M. Shashkov V. Dyadechko. Moment-of-fluid interface reconstruction. Technical report, Los Alamos National Laboratory, Oct 2005., 2005.
- [153] M. Shashkov M. Jemison, M. Sussman. Filament capturing with the Multimaterial Moment-of-Fluid method. *Journal of Computational Physics*, 285 :149–172, 2015.
- [154] A. Lemoine T. Milcent. Moment-of-fluid analytic reconstruction on 3D rectangular hexahedrons. *Journal of Computational Physics*, 409 :109346, May 2020.
- [155] P. Smereka G. Russo. A Remark on Computing Distance Functions. *Journal of Computational Physics*, 163(1) :51–67, September 2000.
- [156] W. Schröder D. Hartmann, M. Meinke. The constrained reinitialization equation for level set methods. *Journal of Computational Physics*, 229(5) :1514–1535, March 2010.
- [157] M. Rudman. A volume-tracking method for incompressible multifluid flows with large density variations. 1998.
- [158] J. M. Sicilian M. Bussmann, D. B. Kothe. Modeling High Density Ratio Incompressible Interfacial Flows. pages 707–713. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, February 2009.
- [159] S. Popinet D. Fuster. An all-Mach method for the simulation of bubble dynamics problems in the presence of surface tension. *Journal of Computational Physics*, 374 :752–768, December 2018.
- [160] O. Desjardins M. Owkes. A mass and momentum conserving unsplit semi-Lagrangian framework for simulating multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 332 :21–46, March 2017.
- [161] M. Arienti M. Jemison, M. Sussman. Compressible, multiphase semi-implicit method with moment of fluid interface representation. *Journal of Computational Physics*, 279 :182–217, December 2014.
- [162] M. Herrmann. A balanced force refined level set grid method for two-phase flows on unstructured flow solver grids. *Journal of Computational Physics*, 227(4) :2674–2706, February 2008.

- [163] M. Herrmann S. Ghods. A consistent rescaled momentum transport method for simulating large density ratio incompressible multiphase flows using level set methods. *Physica Scripta*, T155 :014050, July 2013. Publisher : IOP Publishing.
- [164] H. Pitsch M. Raessi. Consistent mass and momentum transport for simulating incompressible interfacial flows with large density ratios using the level set method. *Computers & Fluids*, 63 :70–81, June 2012.
- [165] G. Natarajan J. Manik, A. Dalal. A generic algorithm for three-dimensional multiphase flows on unstructured meshes. *International Journal of Multiphase Flow*, 106 :228–242, September 2018.
- [166] N. A. Patankar A. P. S. Bhalla N. Nangia, B. E. Griffith. A robust incompressible Navier-Stokes solver for high density ratio multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 390 :548–594, August 2019.
- [167] A. Mani S. Mirjalili, C. B. Ivey. Comparison between the diffuse interface and volume of fluid methods for simulating two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 116 :221–238, July 2019.
- [168] G. Natarajan J. K. Patel. A novel consistent and well-balanced algorithm for simulations of multiphase flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 350 :207–236, December 2017.
- [169] B. G. M. van Wachem F. Denner. On the convolution of fluid properties and surface force for interface capturing methods. *International Journal of Multiphase Flow*, 54 :61–64, September 2013.
- [170] J.-L. Liow. Splash formation by spherical drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 427 :73–105, January 2001. Publisher : Cambridge University Press.
- [171] J.-L. Liow D. Morton, M. Rudman. An investigation of the flow regimes resulting from splashing drops. *Physics of Fluids*, 12(4) :747–763, March 2000. Publisher : American Institute of Physics.
- [172] B. van Wachem F. Denner. Numerical time-step restrictions as a result of capillary waves. *Journal of Computational Physics*, 285 :24–40, March 2015.
- [173] A. Sharma B. Ray, G. Biswas. Regimes during liquid drop impact on a liquid pool. *Journal of Fluid Mechanics*, 768 :492–523, April 2015. Publisher : Cambridge University Press.
- [174] M. Onorato A. Iafrati, A. Babanin. Modeling of ocean–atmosphere interaction phenomena during the breaking of modulated wave trains. *Journal of Computational Physics*, 271 :151–171, August 2014.
- [175] Y. Li. Tsunamis : Non-Breaking and Breaking Solitary Wave Run-Up, June 2000. Issue : 60 Num Pages : 249 Number : 60 Place : Pasadena, CA Publisher : California Institute of Technology.
- [176] R. A. Dalrymple R. G. Dean. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, volume 2 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. World scientific, January 1991.
- [177] J. Wilkening O. Trichtchenko, B. Deconinck. The instability of Wilton ripples. *Wave Motion*, 66 :147–155, November 2016.
- [178] P. H. Trinh J. Shelton, P. Milewski. On the structure of parasitic gravity-capillary waves in the small surface tension limit. *arXiv :2007.14337 [physics]*, July 2020.
- [179] W. Choi S. Murashige. A numerical study on parasitic capillary waves using unsteady conformal mapping. *Journal of Computational Physics*, 328, October 2016.
- [180] Z. Tian M. Perlin, W. Choi. Breaking Waves in Deep and Intermediate Waters. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45(1) :115–145, 2013.

- [181] G. Tryggvason Y. Yang. Dissipation of energy by finite-amplitude surface waves. *Computers & Fluids*, 27(7) :829–845, September 1998.
- [182] C. Josserand S. Popinet S. Zaleski D. Fuster, G. Agbaglah. Numerical simulation of droplets, bubbles and waves : state of the art. *Fluid Dynamics Research*, 41(6) :065001, December 2009.
- [183] W. K. Melville. The Role of Surface-Wave Breaking in Air-Sea Interaction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28(1) :279–321, 1996.
- [184] V. Philomin A. Wenz J. H. Duncan, H. Qiao. Gentle spilling breakers : crest profile evolution. *Journal of Fluid Mechanics*, 379 :191–222, January 1999.
- [185] J. H. Duncan H. Qiao. Gentle spilling breakers : crest flow-field evolution. *Journal of Fluid Mechanics*, 439 :57–85, July 2001.
- [186] E. Campana A.Iafrati. Free-surface fluctuations behind microbreakers : Space-time behaviour and subsurface flow field. *Journal of Fluid Mechanics*, 529 :311–347, April 2005.
- [187] P. McIver D. H. Peregrine, E. D. Cokelet. THE FLUID MECHANICS OF WAVES APPROACHING BREAKING. *Coastal Engineering Proceedings*, (17) :31–31, January 1980.
- [188] S. Michael J. H. Duncan, Longuet-Higgins. An experimental investigation of breaking waves produced by a towed hydrofoil. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 377(1770) :331–348, July 1981.
- [189] O. M. Phillips. Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 156 :505–531, July 1985.
- [190] W. K. Melville D. A. Drazen. Turbulence and mixing in unsteady breaking surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 628 :85–119, June 2009.
- [191] W. Choi Z. Tian, M. Perlin. Energy dissipation in two-dimensional unsteady plunging breakers and an eddy viscosity model. *Journal of Fluid Mechanics*, 655 :217–257, July 2010.





# Annexes

# A. Condition initiale : Stokes d'ordre 1

La théorie des ondes de Stokes développée dans cette partie provient d'un livre écrit par R. G. Dean *et al* [176]. Le fluide est supposé incompressible et irrotationnel (eq. A.1).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

En supposant que la force de viscosité peut être négligée, l'équation de Bernoulli peut être utilisée pour avoir une bonne approximation des champs de vitesse et de pression à l'intérieur de l'onde. La résolution de cette équation est également un moyen de définir les profils de la surface de l'onde. Les équations de Bernoulli en 2D sont les suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (\text{A.3})$$

Les équations A.2 et A.3 peuvent être réécrites en y ajoutant l'équation A.1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (\text{A.5})$$

Il existe un potentiel de vitesse  $\phi_{pot}$  pour le fluide tel que

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi_{pot}}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi_{pot}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Si nous substituons l'équation A.6 aux équations A.4 et A.5, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_{pot}}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_{pot}}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = -g \quad (\text{A.8})$$

L'intégration des deux dernières équations donne

$$\frac{\partial \phi_{pot}}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p}{\rho} = C_1^{te}(y, t) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \phi_{pot}}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p}{\rho} = -gy + C_2^{te}(x, t) \quad (\text{A.10})$$

La partie gauche de ces deux équations est la même, ce qui conduit à

$$C_1^{te}(y, t) = -gy + C_2^{te}(x, t) \quad (\text{A.11})$$

$C_2^{te}(x, t)$  ne peut pas être une fonction de  $x$  et peut donc être réécrite en  $C(t)$ .  
L'équation sur la vitesse potentielle devient

$$\frac{\partial \phi_{pot}}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p}{\rho} = -gy + C(t) \quad (\text{A.12})$$

Les conditions aux limites suivantes sont utilisées pour fermer l'équation A.12. La figure A.1 montre l'emplacement de leur application. Les conditions Dynamic Free Surface Boundary Condition (DFSBC) et Kinematic Free Surface Boundary Condition (KFSBC) sont utilisées à l'interface. La condition Bottom Boundary Condition (BBC) est utilisée sur le fond de l'eau. Et les conditions Periodic Lateral Boundary Condition (PLBC) sont utilisées pour définir des ondes sinusoïdales périodiques.

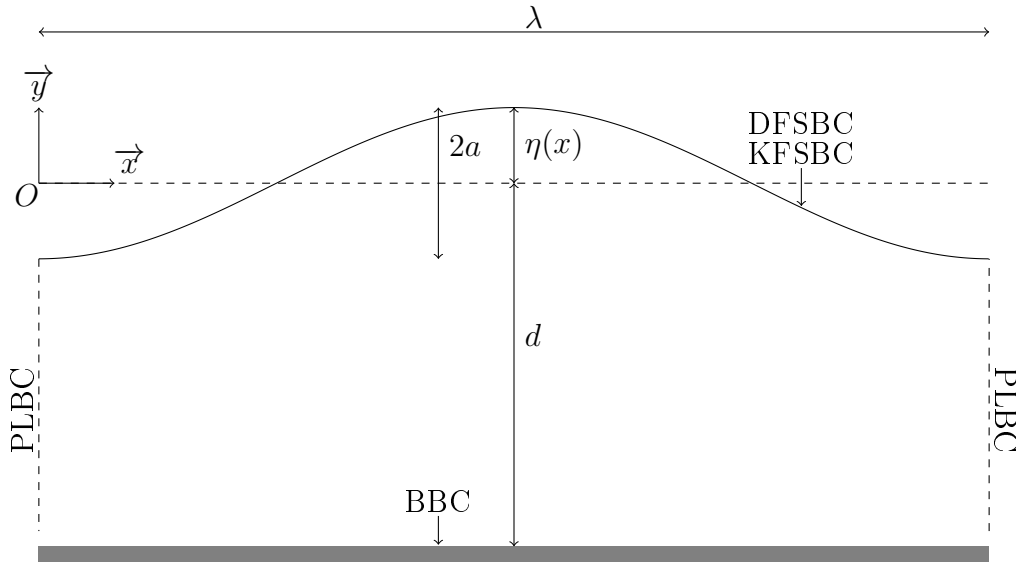


Figure A.1. – Conditions de bords appliquées à la vague. DFSBC : Dynamic Free Surface Boundary Condition. KFSBC : Kinematic Free Surface Boundary Condition. BBC : Bottom Boundary Condition. PLBC : Periodic Lateral Boundary Condition.

**Dynamic Free Surface Boundary Condition (DFSBC)** La surface est considérée "libre", c'est-à-dire que l'interface air-eau maintient une pression constante  $p_\eta$  sur elle. La tension superficielle est censée être négligée. L'équation de Bernoulli potentielle (eq. A.12) appliquée à la surface  $y = \eta(x, t)$  donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p_\eta}{\rho} + g\eta = C(t)$$

Afin de simplifier l'équation,  $p_\eta$  est fixé à  $0 Pa$ . Donc, la condition DFSBC devient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + g\eta = C(t) \quad (\text{A.13})$$

Cependant, pour des vagues de petites longueurs d'ondes, la tension superficielle ne peut plus être négligée. Le terme de pression dépendant de la tension de surface est décrit par

:  $p = p_\eta - \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ . L'équation généralisée à des ondes de faibles longueurs d'onde est

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{p_\eta}{\rho} - \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g\eta = C(t) \quad (\text{A.14})$$

**Kinematic Free Surface Boudary Condition (KFSBC)** La condition cinétique à l'interface est

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 1}}$$

avec  $\vec{n}$  la normal à l'interface

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit scalaire, la condition devient

$$v = \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{|y=\eta} \quad (\text{A.15})$$

**Bottom Boundary Condition (BBC)** Le sol est considéré non poreux donc  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ . La fond de l'eau est décrit par  $y = -d$ . La normale sur un fond plat est définie par

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une nouvelle fois en effectuant le produit scalaire on obtient  $\frac{v}{u} = 0$ , soit

$$v_{|y=-d} = 0 \quad (\text{A.16})$$

sur  $y = -d$ .

**Periodic Lateral Boundary Condition (PLBC)** La condition considère qu'après une période  $T$ , le profil de vitesse et de surface sont les mêmes. La vague est ainsi considérée périodique en espace et en temps.

$$\begin{cases} \phi_{pot}(x, y, t) = \phi_{pot}(x + \lambda, y, t) \\ \phi_{pot}(x, y, t) = \phi_{pot}(x, y, t + T) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

## Onde de Stokes d'ordre 1

La solution des équations présentées dans la section 5.1 est :

$$\eta(x, t) = a \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (\text{A.18})$$

$$\phi_{pot}(x, y, t) = \frac{a}{k} \cdot \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho_{water}} k^3\right) \cdot \tanh(kh)} \cdot \frac{\cosh(k(y+h))}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (\text{A.19})$$

avec  $\eta(x, t)$  la hauteur d'eau par rapport au niveau de l'eau au repos et  $\phi_{pot}$  le potentiel de vitesse. Afin d'initialiser une vague, il est uniquement nécessaire de connaître la valeur

en un temps donné. La condition initiale est prise à  $t = 0$  s, les équations A.18 et A.19 deviennent

$$\eta_0(x) = \eta(x, 0) = a \cdot \cos(kx) \quad (\text{A.20})$$

$$\phi_{pot,0}(x, y) = \phi_{pot}(x, y, 0) = \frac{a}{k} \cdot \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho_{water}} k^3\right) \cdot \tanh(kh)} \cdot \frac{\cosh(k(y+h))}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx) \quad (\text{A.21})$$

$$u_0(x, y) = \frac{\partial \phi_{pot,0}(x, y)}{\partial x} = a \cdot \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho_{water}} k^3\right) \cdot \tanh(kh)} \cdot \frac{\cosh(k(y+h))}{\sinh(kh)} \cdot \cos(kx) \quad (\text{A.22})$$

$$v_0(x, y) = \frac{\partial \phi_{pot,0}(x, y)}{\partial y} = a \cdot \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho_{water}} k^3\right) \cdot \tanh(kh)} \cdot \frac{\sinh(k(y+h))}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx) \quad (\text{A.23})$$

Le profil de pression  $p_0(x, y)$  est initialisé grâce à une première résolution de l'équation de Poisson sur la pression.

## B. Angle minimum $\theta_{01}$ : Forme 1

Le tableau B.1 est le regroupement des angles minimums observés pour les simulations d'ondes parasitiques capillaires, c'est-à-dire avec la première forme d'ondes capillaires.

Profondeur d'eau $\frac{d}{\lambda}$	Longueur d'onde $\lambda$ (m)	Cambrure $\epsilon$	$\theta_{01}$ ( $^\circ$ )
0.1	0.05	0.05	170.16
0.1	0.05	0.075	158.03
0.1	0.05	0.1	144.07
0.1	0.05	0.125	128.12
0.1	0.05	0.15	111.10
0.1	0.05	0.175	97.60
0.1	0.05	0.185	91.02
0.1	0.1	0.065	170.81
0.1	0.1	0.075	160.61
0.1	0.1	0.1	129.90
0.1	0.1	0.125	101.64
0.1	0.15	0.1	141.57
0.1	0.15	0.125	102.30
0.1	0.25	0.125	96.22
0.1	0.35	0.125	92.71
0.3	0.05	0.1	178.81
0.3	0.05	0.15	165.11
0.3	0.05	0.2	141.15
0.3	0.05	0.25	116.06
0.3	0.05	0.3	61.49
0.3	0.1	0.2	171.01
0.3	0.1	0.25	125.58
0.3	0.1	0.275	93.80
0.3	0.15	0.25	137.69
0.3	0.15	0.275	96.67
0.5	0.05	0.15	169.41
0.5	0.05	0.2	148.72
0.5	0.05	0.25	122.50
0.5	0.05	0.3	94.05
0.5	0.05	0.325	91.53
0.5	0.1	0.2	176.25
0.5	0.1	0.25	146.57
0.5	0.1	0.3	92.48
0.5	0.15	0.25	173.71
0.5	0.15	0.3	96.80
0.5	0.25	0.3	113.44

Table B.1. – Angle minimum  $\theta_{01}$  des simulations présentant uniquement la première forme des ondes capillaires.

## C. Angle minimum $\theta_{01}$ : Forme 2

Le tableau C.1 est le regroupement des angles minimums observés pour les simulations de déferlement glissant, c'est-à-dire avec la seconde forme d'ondes capillaires.

Profondeur d'eau $\frac{d}{\lambda}$	Longueur d'onde $\lambda$ (m)	Cambrure $\epsilon$	$\theta_{01}$ (°)
0.1	0.05	0.2	81.0
0.1	0.05	0.225	75.1
0.1	0.05	0.25	68.2
0.1	0.1	0.15	83.9
0.1	0.1	0.175	75.6
0.1	0.1	0.2	68.5
0.1	0.1	0.225	60.9
0.1	0.1	0.25	55.0
0.1	0.1	0.275	49.3
0.1	0.15	0.15	89.0
0.1	0.15	0.175	76.1
0.1	0.15	0.2	69.9
0.1	0.15	0.225	65.2
0.1	0.15	0.25	59.2
0.1	0.15	0.275	57.0
0.3	0.05	0.35	76.7
0.3	0.05	0.40	72.5
0.3	0.05	0.45	67.2
0.3	0.05	0.50	61.6
0.3	0.1	0.35	83.2
0.3	0.1	0.40	66.8
0.3	0.1	0.45	58.4
0.3	0.15	0.30	86.6
0.3	0.15	0.35	65.4
0.5	0.05	0.35	77.7
0.5	0.05	0.40	74.7
0.5	0.05	0.45	71.6
0.5	0.05	0.50	65.1
0.5	0.05	0.55	59.8
0.5	0.05	0.60	55.7
0.5	0.1	0.35	71.4
0.5	0.1	0.45	54.7
0.5	0.15	0.35	72.6

Table C.1. – Angle minimum  $\theta_{01}$  des simulations présentant uniquement la seconde forme des ondes capillaires.

# D. Épaisseur de la couche de vorticité

L'épaisseur de la vorticité observé entre  $0T$  et  $1.5T$  se trouve dans les tableaux D.1, D.2 et D.3.

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.025	$6.74e^{-4}$
0.05	$1.12e^{-3}$
0.075	$1.56e^{-3}$
0.1	$2.01e^{-3}$
0.125	$2.52e^{-3}$
0.15	$2.93e^{-3}$
0.175	$3.37e^{-3}$
0.185	$3.56e^{-3}$
0.2	$3.93e^{-3}$
0.21	$4.02e^{-3}$
0.25	$4.41e^{-3}$
0.275	$4.76e^{-3}$

(a)  $\lambda = 0.05 m$

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.025	$1.06e^{-3}$
0.05	$2.08e^{-3}$
0.065	$2.67e^{-3}$
0.075	$3.24e^{-3}$
0.1	$3.94e^{-3}$
0.125	$4.71e^{-3}$
0.15	$4.24e^{-3}$
0.175	$5.44e^{-3}$
0.2	$6.21e^{-3}$
0.225	$7.87e^{-3}$
0.25	$1.01e^{-2}$
0.275	$1.09e^{-2}$

(b)  $\lambda = 0.10 m$

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.025	$2.28e^{-3}$
0.05	$4.03e^{-3}$
0.075	$5.45e^{-3}$
0.1	$7.39e^{-3}$
0.125	$8.51e^{-3}$
0.15	$9.59e^{-3}$
0.175	$1.40e^{-2}$
0.2	$1.44e^{-2}$
0.225	$1.61e^{-2}$
0.25	$1.71e^{-2}$
0.275	$1.87e^{-2}$

(c)  $\lambda = 0.15 m$

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$4.87e^{-3}$
0.1	$1.09e^{-2}$
0.15	$1.22e^{-2}$
0.175	$1.63e^{-2}$
0.2	$1.88e^{-2}$

(d)  $\lambda = 0.25 m$

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$7.26e^{-3}$
0.1	$1.57e^{-2}$
0.15	$2.22e^{-2}$
0.175	$2.32e^{-2}$
0.2	$2.41e^{-2}$

(e)  $\lambda = 0.35 m$

Table D.1. – Epaisseur de la vorticité pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).



Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$9.83e^{-4}$
0.1	$1.86e^{-3}$
0.15	$2.74e^{-3}$
0.2	$3.60e^{-3}$
0.25	$4.16e^{-3}$
0.275	$4.44e^{-3}$
0.3	$4.80e^{-3}$
0.35	$5.53e^{-3}$
0.4	$5.69e^{-3}$
0.45	$1.09e^{-2}$
0.5	$1.11e^{-2}$

(a)  $\lambda = 0.05 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$2.24e^{-3}$
0.1	$3.72e^{-3}$
0.15	$5.19e^{-3}$
0.2	$7.67e^{-3}$
0.25	$9.85e^{-3}$
0.3	$1.15e^{-2}$
0.35	$2.01e^{-2}$
0.4	$2.55e^{-2}$
0.45	$1.91e^{-2}$
0.5	$3.26e^{-2}$

(b)  $\lambda = 0.1 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$2.99e^{-3}$
0.1	$5.60e^{-3}$
0.15	$8.37e^{-3}$
0.2	$1.06e^{-2}$
0.25	$1.47e^{-2}$
0.3	$1.77e^{-2}$
0.35	$2.00e^{-2}$
0.4	$2.32e^{-2}$
0.45	$2.53e^{-2}$
0.5	$2.91e^{-2}$

(c)  $\lambda = 0.15 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.1	$8.50e^{-3}$
0.2	$1.86e^{-2}$
0.25	$2.43e^{-2}$
0.275	$2.44e^{-2}$
0.3	$3.04e^{-2}$

(d)  $\lambda = 0.25 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.2	$2.58e^{-3}$
0.25	$3.44e^{-2}$
0.3	$4.57e^{-2}$
0.35	$5.05e^{-2}$
0.4	$5.20e^{-2}$

(e)  $\lambda = 0.35 m$ 

Table D.2. – Epaisseur de la vorticité pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.3$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$1.15e^{-3}$
0.1	$2.04e^{-3}$
0.15	$3.01e^{-3}$
0.2	$4.06e^{-3}$
0.25	$5.16e^{-3}$
0.3	$5.68e^{-3}$
0.35	$6.05e^{-3}$
0.4	$7.03e^{-3}$
0.45	$1.61e^{-2}$
0.5	$1.03e^{-2}$
0.55	$2.02e^{-2}$
0.6	$1.84e^{-2}$

(a)  $\lambda = 0.05 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$2.05e^{-3}$
0.15	$5.66e^{-3}$
0.2	$7.56e^{-3}$
0.25	$9.50e^{-3}$
0.3	$1.15e^{-2}$
0.35	$1.36e^{-2}$
0.4	$1.57e^{-2}$
0.5	$2.02e^{-2}$
0.55	$2.48e^{-2}$
0.6	$2.42e^{-2}$

(b)  $\lambda = 0.1 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.05	$3.09e^{-3}$
0.1	$5.66e^{-3}$
0.15	$8.56e^{-3}$
0.2	$1.11e^{-2}$
0.25	$1.43e^{-2}$
0.3	$1.82e^{-2}$
0.35	$3.49e^{-2}$
0.4	$2.60e^{-2}$
0.45	$2.59e^{-2}$
0.5	$2.98e^{-2}$
0.55	$3.35e^{-2}$
0.6	$3.81e^{-2}$

(c)  $\lambda = 0.15 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.25	$2.40e^{-2}$
0.3	$3.14e^{-2}$
0.35	$3.61e^{-2}$
0.4	$4.28e^{-2}$
0.45	$4.76e^{-2}$

(d)  $\lambda = 0.25 m$ 

Cambrure $\epsilon$	Epaisseur (m)
0.25	$3.37e^{-2}$
0.3	$4.40e^{-2}$
0.35	$5.14e^{-2}$
0.4	$5.86e^{-2}$
0.45	$6.59e^{-2}$

(e)  $\lambda = 0.35 m$ 

Table D.3. – Epaisseur de la vorticité pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).

# E. Étude énergétique

Les résultats de l'étude énergétique se trouvent dans les tableaux E.1, E.2 et E.3.

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.600	$4.54e^{-5}$	$2.72e^{-5}$	$5.14e^{-4}$
0.075	0.658	$1.02e^{-4}$	$6.71e^{-5}$	$1.27e^{-3}$
0.1	0.918	$1.81e^{-4}$	$1.66e^{-4}$	$3.14e^{-3}$
0.125	1.216	$2.84e^{-4}$	$3.45e^{-4}$	$6.52e^{-3}$
0.15	1.474	$4.09e^{-4}$	$6.03e^{-4}$	$1.14e^{-2}$
0.175	1.643	$5.58e^{-4}$	$9.17e^{-4}$	$1.73e^{-2}$
0.185	1.817	$6.25e^{-4}$	$1.13e^{-3}$	$2.14e^{-2}$
0.2	2.000	$7.31e^{-4}$	$1.46e^{-3}$	$2.76e^{-2}$
0.21	2.629	$7.66e^{-4}$	$2.01e^{-3}$	$3.80e^{-2}$
0.225	2.379	$9.28e^{-4}$	$2.21e^{-3}$	$4.17e^{-2}$
0.25	2.008	$1.15e^{-3}$	$2.31e^{-3}$	$4.36e^{-2}$
0.275	2.061	$1.33e^{-3}$	$2.73e^{-3}$	$5.15e^{-2}$

(a)  $\lambda = 0.05 m$

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.025	0.256	$8.08e^{-5}$	$2.07e^{-5}$	$8.49e^{-5}$
0.05	0.238	$3.23e^{-4}$	$7.70e^{-5}$	$3.15e^{-4}$
0.065	0.235	$5.47e^{-4}$	$1.29e^{-4}$	$5.27e^{-4}$
0.075	0.278	$7.28e^{-4}$	$2.03e^{-4}$	$8.31e^{-4}$
0.1	0.941	$1.30e^{-3}$	$1.22e^{-3}$	$5.00e^{-3}$
0.125	2.009	$2.03e^{-3}$	$4.08e^{-3}$	$1.67e^{-2}$
0.15	2.635	$2.93e^{-3}$	$7.73e^{-3}$	$3.17e^{-2}$
0.175	2.634	$4.01e^{-3}$	$1.06e^{-2}$	$4.32e^{-2}$
0.2	2.286	$5.26e^{-3}$	$1.20e^{-2}$	$4.92e^{-2}$
0.225	2.050	$6.68e^{-3}$	$1.37e^{-2}$	$5.61e^{-2}$
0.25	1.826	$8.29e^{-3}$	$1.51e^{-2}$	$6.20e^{-2}$
0.275	1.812	$1.01e^{-2}$	$1.83e^{-2}$	$7.49e^{-2}$

(b)  $\lambda = 0.10 m$

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.025	0.149	$2.66e^{-4}$	$3.98e^{-5}$	$6.15e^{-5}$
0.05	0.142	$1.07e^{-3}$	$1.52e^{-4}$	$2.34e^{-4}$
0.075	0.131	$2.40e^{-3}$	$3.16e^{-4}$	$4.88e^{-4}$
0.1	0.229	$4.28e^{-3}$	$9.83e^{-4}$	$1.52e^{-3}$
0.125	1.361	$6.71e^{-3}$	$9.12e^{-3}$	$1.41e^{-2}$
0.15	2.099	$9.69e^{-3}$	$2.03e^{-2}$	$3.14e^{-2}$
0.175	2.042	$1.32e^{-2}$	$2.70e^{-2}$	$4.18e^{-2}$
0.2	1.654	$1.74e^{-2}$	$2.87e^{-2}$	$4.44e^{-2}$
0.225	1.684	$2.21e^{-2}$	$3.72e^{-2}$	$5.75e^{-2}$
0.25	1.618	$2.74e^{-2}$	$4.44e^{-2}$	$6.86e^{-2}$
0.275	1.661	$3.34e^{-2}$	$5.54e^{-2}$	$8.58e^{-2}$

(c)  $\lambda = 0.15 m$

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.074	$4.88e^{-3}$	$3.62e^{-4}$	$1.59e^{-4}$
0.1	0.062	$1.96e^{-2}$	$1.22e^{-3}$	$5.38e^{-4}$
0.15	0.779	$4.44e^{-2}$	$3.46e^{-2}$	$1.52e^{-2}$
0.175	1.176	$6.06e^{-2}$	$7.13e^{-2}$	$3.14e^{-2}$
0.2	0.991	$7.96e^{-2}$	$7.29e^{-2}$	$3.47e^{-2}$

(d)  $\lambda = 0.25 m$

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.049	$1.34e^{-2}$	$6.51e^{-4}$	$1.24e^{-4}$
0.1	0.041	$5.36e^{-2}$	$2.18e^{-3}$	$4.16e^{-4}$
0.15	0.558	$1.21e^{-1}$	$6.78e^{-2}$	$1.29e^{-2}$

(e)  $\lambda = 0.35 m$

Table E.1. – Résultats de  $\xi$ ,  $E_0$ ,  $\epsilon_{dissip}$  et  $b_{int}$  pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.1$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.128	$4.31e^{-5}$	$5.53e^{-6}$	$2.71e^{-5}$
0.1	0.139	$1.72e^{-4}$	$2.40e^{-5}$	$1.18e^{-4}$
0.15	0.242	$3.88e^{-4}$	$9.41e^{-5}$	$4.61e^{-4}$
0.2	0.720	$6.93e^{-4}$	$4.99e^{-4}$	$2.45e^{-3}$
0.25	1.504	$1.09e^{-3}$	$1.64e^{-3}$	$8.04e^{-3}$
0.3	2.345	$1.58e^{-3}$	$3.71e^{-3}$	$1.82e^{-2}$
0.35	3.210	$2.18e^{-3}$	$6.99e^{-3}$	$3.43e^{-2}$
0.4	3.363	$2.89e^{-3}$	$9.71e^{-3}$	$4.76e^{-2}$
0.45	2.837	$3.71e^{-3}$	$1.05e^{-2}$	$5.17e^{-2}$
0.5	2.702	$4.67e^{-3}$	$1.26e^{-2}$	$6.19e^{-2}$

(a)  $\lambda = 0.05 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.040	$3.19e^{-4}$	$1.29e^{-5}$	$1.37e^{-5}$
0.1	0.041	$1.28e^{-3}$	$5.21e^{-5}$	$5.54e^{-5}$
0.15	0.042	$2.89e^{-3}$	$1.20e^{-4}$	$1.28e^{-4}$
0.175	0.046	$3.95e^{-3}$	$1.80e^{-4}$	$1.91e^{-4}$
0.2	0.052	$5.18e^{-3}$	$2.68e^{-4}$	$2.88e^{-4}$
0.25	0.242	$8.17e^{-3}$	$1.97e^{-3}$	$2.10e^{-3}$
0.275	0.668	$9.95e^{-3}$	$6.65e^{-3}$	$7.07e^{-3}$
0.3	1.030	$1.19e^{-2}$	$1.22e^{-2}$	$1.31e^{-2}$
0.35	1.733	$1.64e^{-2}$	$2.85e^{-2}$	$3.03e^{-2}$
0.4	2.415	$2.19e^{-2}$	$5.28e^{-2}$	$5.62e^{-2}$
0.45	2.064	$2.82e^{-2}$	$5.83e^{-2}$	$6.20e^{-2}$
0.5	2.085	$3.57e^{-2}$	$7.43e^{-2}$	$7.91e^{-2}$

(b)  $\lambda = 0.10 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.021	$1.05e^{-3}$	$2.31e^{-5}$	$9.27e^{-6}$
0.1	0.022	$4.25e^{-3}$	$9.33e^{-5}$	$3.75e^{-5}$
0.15	0.022	$9.62e^{-3}$	$2.12e^{-4}$	$8.58e^{-5}$
0.2	0.023	$1.72e^{-2}$	$3.85e^{-4}$	$1.55e^{-4}$
0.25	0.044	$2.74e^{-2}$	$1.21e^{-3}$	$4.88e^{-4}$
0.3	0.413	$4.00e^{-2}$	$1.65e^{-2}$	$6.63e^{-3}$
0.35	0.644	$5.53e^{-2}$	$3.56e^{-2}$	$1.43e^{-2}$
0.4	1.005	$7.36e^{-2}$	$7.39e^{-2}$	$2.97e^{-2}$
0.45	1.491	$9.51e^{-2}$	$1.42e^{-1}$	$5.69e^{-2}$
0.5	1.327	$1.20e^{-1}$	$1.59e^{-1}$	$6.40e^{-2}$

(c)  $\lambda = 0.15 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.15	0.010	$1.92e^{-2}$	$1.98e^{-4}$	$2.26e^{-5}$
0.2	0.009	$7.96e^{-2}$	$7.76e^{-4}$	$8.87e^{-5}$
0.25	0.010	$1.26e^{-1}$	$1.19e^{-3}$	$1.14e^{-4}$
0.275	0.018	$1.53e^{-1}$	$2.74e^{-3}$	$3.14e^{-4}$
0.3	0.053	$1.83e^{-1}$	$9.80e^{-3}$	$1.12e^{-3}$

(d)  $\lambda = 0.25 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.2	0.005	$2.17e^{-1}$	$1.20e^{-3}$	$5.95e^{-5}$
0.25	0.004	$3.44e^{-1}$	$1.65e^{-3}$	$8.22e^{-5}$
0.3	0.061	$5.02e^{-1}$	$3.05e^{-2}$	$1.52e^{-3}$

(e)  $\lambda = 0.35 m$ 

Table E.2. – Résultats de  $\xi$ ,  $E_0$ ,  $\epsilon_{dissip}$  et  $b_{int}$  pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.3$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.079	$4.54e^{-5}$	$3.60e^{-6}$	$1.58e^{-5}$
0.1	0.088	$1.81e^{-4}$	$1.60e^{-5}$	$7.05e^{-5}$
0.15	0.151	$4.09e^{-4}$	$6.19e^{-5}$	$2.73e^{-4}$
0.2	0.495	$7.31e^{-4}$	$3.62e^{-4}$	$1.59e^{-3}$
0.25	1.210	$1.15e^{-3}$	$1.39e^{-3}$	$6.13e^{-3}$
0.3	2.067	$1.67e^{-3}$	$3.45e^{-3}$	$1.52e^{-2}$
0.35	3.145	$2.30e^{-3}$	$7.25e^{-3}$	$3.19e^{-2}$
0.4	3.536	$3.05e^{-3}$	$1.08e^{-2}$	$4.76e^{-2}$
0.45	2.776	$3.93e^{-3}$	$1.09e^{-2}$	$4.81e^{-2}$
0.5	2.421	$4.96e^{-3}$	$1.20e^{-2}$	$5.29e^{-2}$
0.55	2.946	$6.14e^{-3}$	$1.81e^{-2}$	$7.97e^{-2}$
0.6	2.433	$7.49e^{-3}$	$1.82e^{-2}$	$8.04e^{-2}$

(a)  $\lambda = 0.05 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.021	$3.23e^{-4}$	$7.00e^{-6}$	$6.70e^{-6}$
0.15	0.022	$2.93e^{-3}$	$6.40e^{-5}$	$6.12e^{-5}$
0.175	0.024	$3.95e^{-3}$	$9.81e^{-5}$	$9.38e^{-5}$
0.2	0.027	$5.25e^{-3}$	$1.41e^{-4}$	$1.35e^{-4}$
0.25	0.087	$8.28e^{-3}$	$7.27e^{-4}$	$6.96e^{-4}$
0.3	0.555	$1.21e^{-2}$	$6.71e^{-3}$	$6.42e^{-3}$
0.35	1.447	$1.67e^{-2}$	$2.42e^{-2}$	$2.31e^{-2}$
0.4	2.321	$2.21e^{-2}$	$5.12e^{-2}$	$4.93e^{-2}$
0.45	2.410	$2.86e^{-2}$	$6.90e^{-2}$	$6.60e^{-2}$
0.5	2.900	$3.62e^{-2}$	$1.05e^{-2}$	$1.01e^{-1}$
0.55	2.464	$4.50e^{-2}$	$1.11e^{-2}$	$1.06e^{-1}$

(b)  $\lambda = 0.10 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.05	0.010	$1.06e^{-3}$	$1.10e^{-5}$	$3.97e^{-6}$
0.1	0.011	$4.27e^{-3}$	$4.49e^{-5}$	$1.62e^{-5}$
0.15	0.011	$9.68e^{-3}$	$1.03e^{-4}$	$3.71e^{-5}$
0.2	0.011	$1.73e^{-2}$	$1.86e^{-4}$	$6.74e^{-5}$
0.25	0.012	$2.74e^{-2}$	$3.43e^{-4}$	$1.24e^{-4}$
0.3	0.188	$4.00e^{-2}$	$7.53e^{-3}$	$2.72e^{-3}$
0.35	0.656	$5.53e^{-2}$	$3.63e^{-2}$	$1.31e^{-2}$
0.4	1.338	$7.36e^{-2}$	$9.84e^{-2}$	$3.56e^{-2}$
0.45	1.149	$9.51e^{-2}$	$1.09e^{-1}$	$3.95e^{-2}$
0.5	1.155	$1.20e^{-1}$	$1.39e^{-1}$	$5.01e^{-2}$
0.55	1.351	$1.49e^{-1}$	$2.01e^{-1}$	$7.28e^{-2}$
0.6	0.879	$1.83e^{-1}$	$1.60e^{-1}$	$5.80e^{-2}$

(c)  $\lambda = 0.15 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.25	0.003	$1.26e^{-1}$	$4.75e^{-4}$	$4.88e^{-5}$
0.3	0.017	$1.83e^{-1}$	$3.22e^{-3}$	$3.31e^{-4}$
0.35	0.114	$2.53e^{-1}$	$2.90e^{-2}$	$2.99e^{-3}$
0.4	0.363	$3.37e^{-1}$	$1.22e^{-1}$	$1.26e^{-2}$

(d)  $\lambda = 0.25 m$ 

$\epsilon$	$\xi (s^{-1})$	$E_0 (J)$	$\epsilon_{dissip} (J.s^{-1})$	$b_{int}$
0.25	0.002	$3.43e^{-1}$	$6.52e^{-4}$	$2.91e^{-5}$
0.35	0.150	$6.94e^{-1}$	$1.04e^{-1}$	$4.65e^{-3}$
0.4	0.363	$9.24e^{-1}$	$3.35e^{-1}$	$1.50e^{-2}$

(e)  $\lambda = 0.35 m$ 

Table E.3. – Résultats de  $\xi$ ,  $E_0$ ,  $\epsilon_{dissip}$  et  $b_{int}$  pour  $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ . Les cinq longueurs d'onde sont présentées :  $0.05 m$  (a),  $0.10 m$  (b),  $0.15 m$  (c),  $0.25 m$  (d) et  $0.35 m$  (e).