



**HAL**  
open science

# MODELISATION BIDIMENSIONNELLE DES TRANSFORMATEURS PIEZOELECTRIQUES PAR L'APPROCHE POLYNOMIALE

Derandraibe Jeannot Falimiaramananana

► **To cite this version:**

Derandraibe Jeannot Falimiaramananana. MODELISATION BIDIMENSIONNELLE DES TRANSFORMATEURS PIEZOELECTRIQUES PAR L'APPROCHE POLYNOMIALE. Physique [physics]. Université de Fianarantsoa, 2021. Français. NNT: . tel-03206492

**HAL Id: tel-03206492**

**<https://theses.hal.science/tel-03206492v1>**

Submitted on 23 Apr 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2021/001



---

## THESE

Effectuée à

**l'Université de Fianarantsoa (Madagascar)**

**Ecole Doctorale : Modélisation-Informatique**

par

**FALIMIARAMANANA Derandraibe Jeannot**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

Spécialité : **ACOUSTIQUE**

# **MODELISATION BIDIMENSIONNELLE DES TRANSFORMATEURS PIEZOELECTRIQUES PAR L'APPROCHE POLYNOMIALE**

Soutenue publiquement le 19 février 2021 devant la commission d'examen :

**Président :**

Mr. RAMAMONJISOA Bertin Olivier, Professeur Titulaire, Université de Fianarantsoa

**Rapporteurs:**

Mme LEMAIRE Betty, Professeur des Universités, Université de Lille 1

Mr. CROS Dominique, Professeur des Universités, Université de Limoges

**Examineurs :**

Mr. RANIRIHARINOSY Karyl Danielson, Professeur Titulaire, Université de Fianarantsoa

Mr. RAZAFINDRAKOTO Nicolas Raft, Professeur Titulaire, Université d'Antananarivo

**Directeur de thèse :**

Mr. RATOLOJANAHARY Faniry Emilson, Professeur Titulaire, Université de Fianarantsoa



*A mes parents,  
A mes beaux-parents,  
A ma femme et mes filles,  
A mes sœurs,  
A mes frères,  
A ce qui doit être sera.*

## RESUME

Dans ce travail, une étude unidimensionnelle puis bidimensionnelle d'un transformateur piézoélectrique (TP) de type Rosen utilisant une approche polynomiale est menée. Le modèle qui peut prédire les propriétés électromécaniques du TP consiste à incorporer dans les équations de propagation les conditions aux limites et de continuité en utilisant une fonction delta. Dans le modèle 1D seul le déplacement mécanique est décomposé en série de polynômes de Legendre tandis que dans le cas 2D les déplacements mécaniques et les potentiels électriques sont développés en série de produits de deux polynômes orthonormés avec une forme analytique pouvant tenir compte des conditions de continuité. Les résultats numériques comme les fréquences de résonance et d'antirésonance, l'admittance d'entrée électrique et le gain en tension sont présentés et comparés avec ceux obtenus analytiquement pour les cas 1D et avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis 3D et des résultats expérimentaux dans le cas du modèle 2D. Une bonne concordance a été obtenue entre les résultats du modèle proposé et les résultats dans la littérature tant sur l'analyse harmonique que sur l'analyse modale ce qui nous conduit à l'exploitation de la méthode en calculant plusieurs grandeurs électromécaniques et en effectuant l'analyse des effets des variations des paramètres sur les caractéristiques du transformateur. Le modèle 2D peut être utilisé pour étudier un TP large.

**Mots clés :** piézoélectricité, transformateur piézoélectrique, modélisation polynomiale, polynôme de Legendre, fréquence de résonance, fréquence d'antirésonance, admittance d'entrée électrique, fonction de transfert, analyse de sensibilité.

## ABSTRACT

In this work one-dimensional and two-dimensional semi-analytical models using the Legendre polynomial approach were applied for modeling the piezoelectric transformer. The electromechanical behavior of PT can be predicted by the model. The method consists in incorporating directly into the equations of motion the continuity and boundary conditions by the use of the delta function. In the 2D model, the mechanical displacements and the electric potential were expanded in a double series of orthonormal polynomials with an appropriate analytical form. The numerical results are presented such as resonance and anti-resonance frequencies, electrical input admittance and voltage gain. The validity of the model is confirmed through a comparison between the results using the polynomial approach and the results obtained from an analytical method for the 1D model and from FEA and experimental results for the 2D model. A good agreement was obtained between the results of the proposed polynomial approach and the results from the literature for both the free and forced vibration analysis. The mechanical displacement, the load dependence, the dimension effect and the sensibility analysis are presented to illustrate our model. The 2D approach is able to predict the behavior of a wide and a long piezoelectric transformer.

**Key words:** piezoelectricity, piezoelectric transformers, polynomial approach, Legendre polynomial, resonance frequencies, anti-resonance frequencies, electrical input admittance, voltage gain, sensibility analysis.

## REMERCIEMENTS

*Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Physique Appliquée de l'Université de Fianarantsoa (LAPAUF). Je remercie très profondément mon Directeur de thèse, le Professeur RATOLOJANAHARY Faniry Emilson, Responsable du Laboratoire LAPAUF et Professeur Titulaire à la Faculté des Sciences de l'Université de Fianarantsoa, de m'avoir fait confiance, de m'avoir dirigé avec attention et gentillesse, de m'avoir accordé un temps précieux et de m'avoir encouragé aussi tout au long de ces trois dernières années. Ce travail n'existerait pas sans vous. Merci beaucoup.*

*Je remercie également le Professeur LEFEBVRE Jean Etienne, Enseignant Chercheur et Professeur Emérite à l'Université de Valenciennes (France) et le Professeur EL MAIMOUNI Lahoucine, Enseignant Chercheur et Professeur à la faculté Polydisciplinaire Ouarzazate, Université Ibn Zohr Maroc qui ont accepté de travailler avec nous durant les trois années de thèse. Je suis reconnaissant pour la collaboration, leur encouragement et leur soutien constant.*

*Je remercie très sincèrement Monsieur RAMAMONJISOA Bertin Olivier, Professeur Titulaire à l'ENI-Université de Fianarantsoa de m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de cette thèse.*

*J'exprime également mes plus sincères remerciements à Madame LEMAIRE-SEMAIL Betty, Professeur des Universités et Directrice du Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance (L2EP), Université de Lille 1, France, d'avoir accepté avec une grande sympathie d'être rapporteur et membre du jury et à Monsieur CROS Dominique, Professeur des Universités, Université de Limoges, de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteur de ce mémoire.*

*Je m'adresse également ma profonde gratitude à Monsieur RANIRIHARINOSY Karyl Danielson, Professeur Titulaire à la Faculté des Sciences de l'Université de Fianarantsoa, Directeur de l'Ecole Doctorale Modélisation-Informatique de l'Université de Fianarantsoa, d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.*

*J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur RAZAFINDRAKOTO Nicolas Raft, Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je n'oublierais pas de remercier Monsieur le Docteur Antoine RAHERISON, Maître de conférences et Enseignant-chercheur de la Faculté des Sciences de l'Université de*

*Fianarantsoa, Monsieur le Docteur Pierre Maximin RABOTOVAO, Maître de conférences et Enseignant-chercheur de la Faculté des Sciences de l'Université de Fianarantsoa pour l'aide et les bons conseils qu'ils m'ont apportés durant la réalisation de cette thèse.*

*Je remercie aussi très sincèrement tous les collègues qui ont de près ou de loin contribué à ce travail.*

*Enfin, j'adresse un grand merci à l'ensemble de ma famille et en particulier à mes parents pour m'avoir fait l'énorme plaisir d'être présents le jour de ma soutenance et pour leur soutien sans faille.*

*Merci à tous !*



# TABLE DES MATIERES

<i>RESUME</i> .....	<i>i</i>
<i>ABSTRACT</i> .....	<i>ii</i>
<i>REMERCIEMENTS</i> .....	<i>iii</i>
<i>LISTE DES FIGURES</i> .....	<i>x</i>
<i>LISTE DES TABLEAUX</i> .....	<i>xii</i>
<i>LISTE DES SYMBOLES UTILISES</i> .....	<i>xiii</i>
<i>LISTE DES ABREVIATIONS UTILISEES</i> .....	<i>xv</i>
<i>INTRODUCTION GENERALE</i>	

## *Chapitre 1*

### *GENERALITES SUR LA PIEZOELECTRICITE*

1.1. Introduction .....	4
1.2. Piézoélectricité .....	4
1.2.1. Définition .....	4
1.2.2. Historique .....	5
1.3. Céramiques piézoélectriques .....	5
1.3.1. Préparation des céramiques .....	6
1.3.2. Titanate de zirconate de plomb .....	7
1.3.3. Limitation des céramiques .....	7
1.3.4. Propriétés d'une céramique PZT .....	8
1.4. Théorie de la piézoélectricité .....	9
1.4.1. Elasticité linéaire .....	9
1.4.2. Relations entre propriétés d'un matériau piézoélectrique .....	10
1.4.3. Equations fondamentales de la piézoélectricité .....	10
1.4.4. Cas d'une céramique piézoélectrique .....	13
1.4.4.1. Lois de comportement d'une céramique .....	13
1.4.4.2. Lois de comportement réduites pour les plaques .....	14
1.4.4.3. Lois de comportement réduites pour les poutres .....	14
1.4.5. Coefficients de couplage électromécanique .....	16
1.4.6. Pertes dans les matériaux piézoélectriques .....	17
1.5. Applications de la piézoélectricité .....	18
1.5.1. Générateur .....	18

1.5.2.	Moteur et actionneur .....	18
1.5.3.	Transducteur .....	19
1.5.4.	Transformateur .....	19
1.6.	Conclusion .....	19
	<i>Références bibliographiques</i> .....	21

## Chapitre 2

### ETAT DE L'ART SUR LES TRANSFORMATEURS PIEZOELECTRIQUES

2.1.	Introduction .....	23
2.2.	Généralités .....	23
2.2.1.	Principe du transformateur piézoélectrique .....	23
2.2.2.	Historique.....	24
2.2.3.	Avantages et inconvénients des transformateurs piézoélectriques .....	26
2.3.	Principaux types de transformateurs piézoélectriques .....	26
2.3.1.	Transformateur vibrant en mode épaisseur .....	27
2.3.2.	Transformateur vibrant en mode radial.....	27
2.3.3.	Transformateur vibrant en mode transversal .....	28
2.3.4.	Transformateur de type Rosen .....	28
2.4.	Domaines d'applications.....	29
2.4.1.	Alimentation des lampes fluorescentes.....	29
2.4.2.	Intégration dans les convertisseurs statiques .....	30
2.4.3.	Alimentation des moteurs piézoélectriques .....	30
2.4.4.	Applications spatiales, de défense et de sécurité des transformateurs piézoélectriques.....	31
2.4.5.	Autres applications des transformateurs piézoélectriques .....	31
2.5.	Méthodes de modélisation du transformateur piézoélectrique de type Rosen employées dans la littérature.....	32
2.5.1.	Schéma électromécanique équivalent .....	32
2.5.2.	Modèle analytique 1D.....	33
2.5.3.	Modèle analytique général par l'approche variationnelle.....	34
2.5.4.	Méthode des éléments finis.....	34
2.6.	Conclusion .....	35
	<i>Références bibliographiques</i> .....	36

## Chapitre 3

### EXTENSION DE LA METHODE POLYNOMIALE A L'ETUDE UNIDIMENSIONNELLE D'UN TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE

3.1. Introduction .....	40
3.2. Formulation mathématique .....	40
3.2.1. Description de la structure .....	40
3.2.2. Hypothèses mécaniques : .....	41
3.2.3. Hypothèses électriques : .....	41
3.2.4. Equations constitutives .....	42
3.2.5. Equations de propagation .....	43
3.3. Résolution analytique – Extension de la méthode polynomiale .....	43
3.3.1. Résolution polynomiale .....	43
3.3.2. Recherche des solutions .....	45
3.4. Résultats analytiques .....	46
3.4.1. Analyse harmonique .....	46
3.4.2. Analyse modale .....	47
3.5. Résultats des simulations .....	47
3.5.1. Convergence de la méthode .....	47
3.5.2. Validation de la méthode .....	49
3.5.2.1. Fréquences propres .....	49
3.5.2.2. Admittance d'entrée .....	50
3.5.2.3. Gain en tension .....	51
3.5.3. Exploitation de la méthode .....	52
3.5.3.1. Dépendance de la résistance de charge .....	52
□ Influence sur la fréquence de résonance .....	52
□ Influence sur le gain, la puissance et le rendement .....	53
3.5.3.2. Profils des déplacements mécaniques et potentiels électriques .....	54
3.5.3.3. Coefficient de couplage électromécanique .....	55
3.6. Limitations du modèle .....	56
3.7. Conclusion .....	57
Références bibliographiques .....	58

## Chapitre 4

### METHODE POLYNOMIALE APPLIQUEE A L'ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE : HYPOTHESE DEFORMATION PLANE

4.1.	Introduction .....	60
4.2.	Structure étudiée et hypothèses .....	60
4.3.	Conditions aux limites et continuités .....	61
4.3.1.	Conditions aux limites .....	62
4.3.2.	Conditions de continuité .....	62
4.4.	Formulation mathématique .....	63
4.4.1.	Equations constitutives .....	63
4.4.2.	Equations de propagation .....	64
4.4.3.	Résolution polynomiale .....	65
4.4.4.	Recherche des solutions .....	66
4.4.5.	Résultats analytiques .....	67
4.4.5.1.	Analyse harmonique .....	67
4.4.5.2.	Analyse modale .....	69
4.5.	Résultats des simulations .....	69
4.5.1.	Comparaison des résultats de la méthode polynomiale 2D et de la méthode des éléments finis 2D. ....	69
4.5.1.1.	Fréquences propres .....	70
4.5.1.2.	Admittance d'entrée .....	71
4.5.1.3.	Gain en tension .....	72
4.5.2.	Profil des champs .....	72
4.5.3.	Limitations du modèle .....	72
4.6.	Conclusion .....	74
	Références bibliographiques .....	75

## Chapitre 5

### METHODE POLYNOMIALE APPLIQUEE A L'ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE : HYPOTHESE CONTRAINTE PLANE

5.1.	Introduction .....	76
5.2.	Hypothèses .....	76

5.3.	Conditions aux limites et continuités .....	77
5.4.	Formulation mathématique .....	77
5.4.1.	Equations de propagation.....	77
5.4.2.	Recherche des solutions .....	78
5.5.	Résultats des simulations .....	79
5.5.1.	Convergence de la méthode .....	79
5.5.2.	Validations et limitations de la méthode.....	80
5.5.2.1.	Fréquences propres .....	81
5.5.2.2.	Admittance d'entrée et gain en tension.....	81
5.5.3.	Exploitation de la méthode .....	85
5.5.3.1.	Profils des champs .....	85
5.5.3.2.	Dépendance avec la résistance de charge .....	88
5.5.3.3.	Analyse de sensibilité .....	91
5.5.3.3.1.	Variation des dimensions.....	91
5.5.3.3.2.	Variation des constantes de rigidité .....	92
5.5.3.3.3.	Variation des constantes piézoélectriques et des constantes diélectriques ..	94
5.5.3.3.4.	Variation de la masse volumique et du facteur de qualité .....	95
5.6.	Conclusion .....	96
	<i>Références bibliographiques</i> .....	97

## CONCLUSION GENERALE

	<i>ANNEXE A : GRANDEURS ELECTRIQUES ET MECANIQUES</i> .....	A1
	<i>ANNEXE B : MODELISATION ANALYTIQUE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE DE TYPE ROSEN</i> .....	A7
	<i>ANNEXE C : MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE DE TYPE ROSEN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL</i> .....	A13
	<i>ANNEXE D : DESCRIPTION DES MATRICES UTILISEES cas déformation plane</i> .....	A16
	<i>ANNEXE E : RESOLUTION DES EQUATIONS DE PROPAGATION DES ONDES, DESCRIPTION DES MATRICES UTILISEES ET CALCUL DE L'ADMITTANCE ELECTRIQUE DU TP cas contrainte plane</i> .....	A17
E.1.	<i>Equations constitutives</i> .....	A17
E.2.	<i>Résolution des équations de propagation</i> .....	A18
E.3.	<i>Admittance d'entrée et tension de sortie</i> .....	A20

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Illustration de l'effet direct (a) et de l'effet inverse (b).....	4
Figure 1.2 : Préparation des céramiques piézoélectriques .....	6
Figure 1.3 : Interactions entre les grandeurs physiques d'un matériau piézoélectrique. ....	10
Figure 1.4 : Poutre céramique polarisée suivant l'épaisseur (a) et suivant la longueur (b) .....	15
Figure 2.1 : Principe de fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique.....	24
Figure 2.2 : Transformateur piézoélectrique à mode en épaisseur.....	27
Figure 2.3 : Transformateur à mode radial - Structure monocouche .....	28
Figure 2.4 : Transformateur piézoélectrique à mode transversal .....	28
Figure 2.5 : Transformateur piézoélectrique de type Rosen .....	29
Figure 2.6 : Schéma électromécanique équivalent d'un transformateur piézoélectrique .....	32
Figure 2.7 : Schéma électromécanique équivalent d'un transformateur piézoélectrique simplifié .....	33
Figure 3.1 : Transformateur piézoélectrique de type Rosen multicouche.....	41
Figure 3.2 : Etude de convergence du modèle polynomial 1D .....	48
Figure 3.3 : Fréquence de résonance en fonction de l'ordre de troncature .....	48
Figure 3.4: Admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert.....	51
Figure 3.5 : Gain en tension en fonction de fréquence.....	51
Figure 3.6 : Évolution fréquentielle du gain, de la puissance et du rendement pour $R_{ch}=1M\Omega$ ...	52
Figure 3.7 : Variation de la fréquence de résonance et gain en tension en fonction de la charge du TP .....	53
Figure 3.8 : La puissance et le rendement du transformateur en fonction de la charge.....	54
Figure 3.9: Profil de déplacement mécanique et potentiel électrique .....	54
Figure 3.10: Évolution de fréquence de résonance $f_s$ et d'antirésonance $f_p$ en fonction du rapport $\tau=L_1/L$ du TP.....	55
Figure 3.11: Évolution de coefficient de couplage électromécanique en fonction du rapport $\tau=L_1/L$ du TP.....	56
Figure 3.12 : Comparaison des gains en tension 1D et 3D .....	57
Figure 4.1: Admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert.....	71
Figure 4.2: Gain à vide du transformateur piézoélectrique.....	72
Figure 4.3 : Profil des champs.....	73
Figure 4.4 : Comparaison entre méthode polynomiale 2D et numérique 3D .....	74
Figure 5.1 : Etude de la convergence .....	80
Figure 5.2 : Erreur relative .....	80

Figure 5.3 : Admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert....	83
Figure 5.4 : Gain à vide du transformateur piézoélectrique.....	83
Figure 5.5. Profil de déplacement 3D pour a) $f=129$ kHz b) $f=214$ kHz. ....	83
Figure 5.6 : Admittance d'entrée (à gauche) et gain en tension (à droite)au voisinage des fréquences parasites.....	84
Figure 5.7 : Profil des déplacements mécaniques des quatre premiers modes longitudinaux cas secondaire en circuit ouvert (à gauche) et secondaire court-circuité (à droite).....	85
Figure 5.8 Composantes longitudinale (a) et transversale (b) du déplacement mécanique pour TP1, $f=141.39$ kHz. ....	85
Figure 5.9 : Composantes longitudinale (a) et transversale (b) du déplacement mécanique pour TP2a, $f=303.40$ kHz. ....	86
Figure 5.10 : Profils des potentiels électriques suivant l'axe $x_1$ , secondaire en circuit ouvert (à droite) et secondaire court-circuité (à gauche).....	87
Figure 5.11 : Contraintes mécaniques .....	87
Figure 5.12 : Contrainte de Von Mises .....	88
Figure 5.13 : Gain en tension en fonction de la résistance de charge .....	89
Figure 5.14 : Fréquence de résonance en fonction de la résistance de charge.....	89
Figure 5.15 : Gain en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de la résistance de charge au voisinage du second mode longitudinal .....	89
Figure 5.16 : Dépendance, avec la valeur de la charge, du gain en tension et de la puissance pour un transformateur large fonctionnant sur le second mode longitudinal pour deux largeurs différentes.....	90
Figure 5.17. Rendement en puissance vs charge.....	91
Figure 5.18 : Effet de la variation des dimensions du transformateur sur le gain en tension et la fréquence de résonance (mode 2).....	92
Figure 5.19 : Effet de variabilité la variation des constantes de rigidité sur le gain et la fréquence de résonance .....	93
Figure 5.20 : Effet de la variation des constantes piézoélectriques et des constantes diélectriques .....	95
Figure 5.21 : Effet de la variation de la masse volumique et du facteur de qualité .....	95
Figure A.1 : Géométrie de transformateur sous COMSOL	
Figure A.2 : Maillage sous COMSOL	

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt.....	12
Tableau 1.2 : Les équations de couplage.....	12
Tableau 1.3 : Matrice des constantes mécaniques, piézoélectriques et diélectriques .....	13
Tableau 1.4 : Modes de vibration et coefficients de couplage associés. $L$ est la longueur de l'échantillon, $e$ son épaisseur et $D$ son diamètre s'il est de forme cylindrique .....	17
Tableau 3.1 : Convergence de la méthode polynomiale pour la fréquence [en Hz] .....	49
Tableau 3.2 : Fréquence de résonance .....	50
Tableau 3.3 : Fréquence d'anti-résonance.....	50
Tableau 4.1 : Propriétés physiques et géométriques du transformateur piézoélectrique .....	70
Tableau 4.2 : Fréquence de résonance série: comparaison entre 2D FEA et polynomial.....	70
Tableau 4.3 : Fréquence de résonance parallèle: comparaison entre 2D FEA et polynomial.....	71
Tableau 4.4. Fréquence de résonance série: comparaison entre 3D FEA et polynomial.....	73
Tableau 4.5. Fréquence de résonance parallèle: comparaison entre 3D FEA et polynomial.....	73
Tableau 5.1 : Fréquence de résonance série: comparaison entre 3D FEA, polynomial ( $M=7$ , $N=3$ ) et résultats expérimentaux. ....	81
Tableau 5.2 : Fréquence de résonance parallèle: comparaison entre 3D FEA, polynomial ( $M=7$ , $N=3$ ) et résultats expérimentaux. ....	81
Tableau 5.3. Paramètres géométriques et propriétés du matériau pour TP2a et TP2b .....	84
Tableau 5.4 : Effet en pourcentage de la variation de chaque dimension sur le gain en tension et la fréquence de résonance. ....	92
Tableau 5.5 : Effet en pourcentage de la variation des constantes de rigidité sur le gain en tension et la fréquence de résonance.....	93
Tableau 5.6 : Pourcentage de l'effet de variation des constantes piézoélectriques et des constantes diélectriques.....	94
Tableau 5.7 : Effet de la variation de la masse volumique et du facteur de qualité.....	96



## LISTE DES SYMBOLES UTILISES

Symboles	Paramètres	Unités
$C_s$ .	Capacité statique du secondaire	F
$C_p$ .	Capacité statique du primaire	F
$c_{ij}^E$	Éléments du tenseur de rigidité à champ électrique constant	N/m <sup>2</sup>
$\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle suivant $x_i$ et suivant le temps	
$D_i$ .	Composantes du tenseur de déplacement électrique	C/m <sup>2</sup>
$d_{ij}$ , $e_{ij}$ , $h_{ij}$	Composante du tenseur piézoélectrique	C/N, C/m <sup>2</sup> , N/C
$E_i$	Composantes du tenseur de champ électrique	V/m
$f_r$ et $f_p$	Fréquences de résonance et d'antirésonance	Hz
$G_v$	Gain en tension	
$h$	Epaisseur de la lame piézoélectrique	m
$i(t)$	Courant électrique	A
$j$	Nombre complexe $j = \sqrt{-1}$	
$k_1$ et $k_2$	Nombres d'onde au primaire et au secondaire	m <sup>-1</sup>
$k_{eff}^2$ .	Coefficient de couplage électromécanique	
$L$	Longueur	m
$l$	Largeur	m
$n$	Nombre des couches du primaire	
$P$	Puissance	W
$Q_m$	Facteur de qualité mécanique	
$R_{ch}$	Résistance de charge	$\Omega$
$s_{ij}^E$	Éléments du tenseur de souplesse à champ électrique constant	m <sup>2</sup> /N
$S_i$	Composantes du tenseur de déformation mécanique	
$t$	Temps	s
$T_i$	Composantes du tenseur de contrainte mécanique	N/m <sup>2</sup>
$u_i$	Composantes du tenseur de déplacement mécanique	m
$v(t)$	Tension électrique	V
$(x_1, x_2, x_3)$	Coordonnées cartésiennes	
$Y$	Admittance électrique	$\Omega^{-1}$
$\beta$	Inverse de la permittivité diélectrique	m/F
$\Delta$	Différence	
$\delta$	Angle de pertes	rad

$\varepsilon$	Permittivité diélectrique	F/m
$\varepsilon_0$	Permittivité diélectrique du vide	F/m
$\eta$	Rendement en puissance	
$\lambda$	Longueur d'onde	m
$\rho$	Masse volumique	kg/m <sup>3</sup>
$\omega$	Pulsation	rad/s
$\Phi$	Potentiel électrique	V

## LISTE DES ABREVIATIONS UTILISEES

CCFL	Cold Cathode Fluorescent Lamp
CEM	Compatibilité Electromagnétique
EPC	Conditionneur de puissance électronique
FEA	Finite Element Analysis
FEM	Finite Element Method
IGBT	Isolated Gate Bipolar Transistor
LCD	Liquid Crystal Display
LED	Light-Emitting Diode
NASA	National Aeronautics and Space Administration
PCB	Printed Circuit Board
PZT	Zirco Titanate de Plomb
RAM	Random-Access Memory
SBIR	Small Business Innovation Research
TPs	Transformateurs Piézoélectriques
TWT	Tubes à ondes progressives

---

---

## **INTRODUCTION GENERALE**

---

---

Durant ces deux dernières décennies, il y a eu une forte croissance des technologies utilisant les radiofréquences. De manière générale, les équipements électroniques sont présents partout dans la société actuelle, loisirs, santé, travail, sécurité, etc..., ce qui accentue la demande dans le marché mondial et renforce le phénomène d'accroissement du nombre de produits. Le développement de certains équipements se traduit par un débit plus important des ondes qui entraînent la pollution électromagnétique avec des impacts non négligeables sur notre environnement et notre santé. Les équipements produits deviennent portables et de taille réduite ce qui s'accompagne d'une densité énergétique élevée comme par exemple pour les micro-ordinateurs, les téléphones cellulaires, les microsystemes, les caméras, les appareils de mesure... La manière de réduire le volume de ces équipements électroniques est d'intégrer les composants sur un support unique. Ainsi la demande de transformateurs de tension miniaturisés s'est accrue avec le développement rapide de ces équipements portables. Or, les transformateurs électromagnétiques classiques sont difficiles à miniaturiser dans l'automatisation du processus de fabrication et demandent un bobinage spécifique des enroulements qui augmente le prix. Ces inconvénients ont engendré des efforts de recherche pour réaliser des transformateurs électromagnétiques intégrés, bobines plates à air, sur un substrat de type circuit imprimé. Toutefois, la fabrication de ces structures est complexe, l'isolant galvanique est souvent uniquement l'air, ce qui limite la rigidité diélectrique. Par ailleurs, les enroulements se comportant comme une antenne rayonnent, ce qui entraîne des problèmes de compatibilité électromagnétique (CEM). La solution intéressante est l'utilisation de transformateurs piézoélectriques.

Dès que le premier transformateur piézoélectrique (TP) fut proposé par Rosen en 1956, plusieurs études ont été menées à son sujet et de nouvelles structures ont été proposées, fabriquées et testées pour divers objectifs. Le transformateur piézoélectrique présente un certain nombre d'avantages. D'abord, sa structure est compacte donc il est facilement intégrable et industrialisable. Ensuite, il est possible d'avoir une très forte isolation galvanique en utilisant des matériaux diélectriques de rigidité élevée, l'ordre de grandeur du champ de claquage peut être supérieur à plusieurs kV/mm. De plus, le mécanisme de transfert de puissance dans un transformateur piézoélectrique consiste à transformer au primaire de l'énergie électrique en vibrations mécaniques puis de récupérer au secondaire ces vibrations mécaniques sous forme d'énergie électrique. Donc il n'y a aucun couplage électromagnétique dans ce type de transformateur. En conséquence, il est favorable en terme de CEM. Les TPs peuvent avoir un gain en tension élevé et un bon rendement et il est aussi possible d'avoir des densités de puissances significatives et de travailler à haute fréquence.

L'amélioration des performances de ce composant et la satisfaction des besoins des clients au niveau du commerce international requiert une modélisation nécessitant une méthode de calcul qui permette de décrire les phénomènes physiques dans la structure et qui soit apte à résoudre les problèmes physiques à l'aide des équations mathématiques. Dans le cas des transformateurs, plusieurs modèles sont exposés dans la littérature comme le modèle analytique, le modèle de Mason, le modèle des différences finies et le modèle des éléments finis...

Ce travail propose une nouvelle méthode pour optimiser les caractéristiques du transformateur piézoélectrique par rapport aux exigences spécifiques au cahier des charges. Cette méthode utilise les polynômes de Legendre dans le cadre d'une modélisation unidimensionnelle puis bidimensionnelle dans l'hypothèse déformation plane puis contrainte plane. La méthode repose sur le développement de chaque composante de déplacement mécanique et de potentiel électrique en série de polynômes de Legendre orthonormés avec des expressions appropriées pour imposer les conditions de continuité et les conditions aux limites. En utilisant une fonction delta, les continuités et les conditions aux limites de contrainte mécanique et de déplacement électrique sont incorporées directement dans les équations de propagation. Avec une formulation unique la méthode peut obtenir avec une précision satisfaisante la réponse en fréquence et les modes propres sans nécessiter le maillage de la structure.

Les généralités sur la piézoélectricité sont présentées dans le premier chapitre. Des exemples d'applications sont présentés, décrivant le phénomène de la piézoélectricité en donnant un aperçu historique, les circonstances de sa découverte et en citant quelques matériaux piézoélectriques. Les équations d'un problème de dynamique pour un matériau piézoélectrique sont ensuite rappelées. Le deuxième chapitre est consacré à la description de l'état de l'art des transformateurs piézoélectriques. Différents types de TPs conçus et étudiés à ce jour sont présentés. Leurs modes de vibration ainsi que leurs domaines d'application sont cités.

Les trois chapitres suivants montrent le principe de la méthode polynomiale appliquée à la modélisation d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen. D'abord, l'étude de faisabilité de la méthode est faite en travaillant sur une structure unidimensionnelle. Puis l'extension du modèle à une structure bidimensionnelle est abordée en adoptant une hypothèse déformation plane. La comparaison des résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature nous permet de dire que cette hypothèse n'est pas conforme au comportement du transformateur de type Rosen. Une hypothèse bidimensionnelle contrainte plane est adoptée dans le dernier chapitre et une bonne convergence est obtenue par l'approche polynomiale ; la précision est

excellente en comparant les résultats avec ceux calculés avec la méthode des éléments finis 3D et avec les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Enfin, une conclusion générale de cette étude est présentée et les perspectives envisageables pour ce travail sont évoquées.

## **Chapitre 1**

---

---

# **GENERALITES SUR LA PIEZOELECTRICITE**

---

---



## 1.1. Introduction

Une introduction aux matériaux piézoélectriques choisis pour la réalisation de cette thèse est présentée dans ce chapitre. Dans un premier temps on procède à un rappel d'élasticité linéaire qui permet au lecteur de se familiariser avec les grandeurs en jeu après avoir défini la piézoélectricité et donné son histoire. Ensuite, la relation de comportement piézoélectrique que l'on utilisera dans ce manuscrit ainsi que les équations dynamiques couplées d'un milieu piézoélectrique sont exposées; puis on définit les divers coefficients de couplage du matériau. Finalement, les diverses applications des matériaux piézoélectriques sont explorées.

## 1.2. Piézoélectricité

### 1.2.1. Définition

La piézoélectricité, qui vient de deux mots grecs « *piezein* » qui signifie pression et « *elektron* » (électron), est la propriété que possèdent certains cristaux dont la maille élémentaire est asymétrique de transformer une énergie mécanique en une énergie électrique (effet direct) ou vice versa (effet inverse). C'est donc le fait d'un couplage électromécanique, c'est-à-dire d'une interdépendance des propriétés électriques et mécaniques dans le matériau considéré. Sous l'effet de la contrainte mécanique, les ions de toutes les cellules élémentaires se déplacent en engendrant une polarisation de ces cellules. Par le fait de la répartition régulière de la structure cristalline la polarisation se propage vers d'autres cellules en créant ainsi une différence de potentiel électrique entre certaines faces du cristal. Un matériau piézoélectrique soumis à un champ électrique se déforme aussi sous l'action des forces internes [1-6].

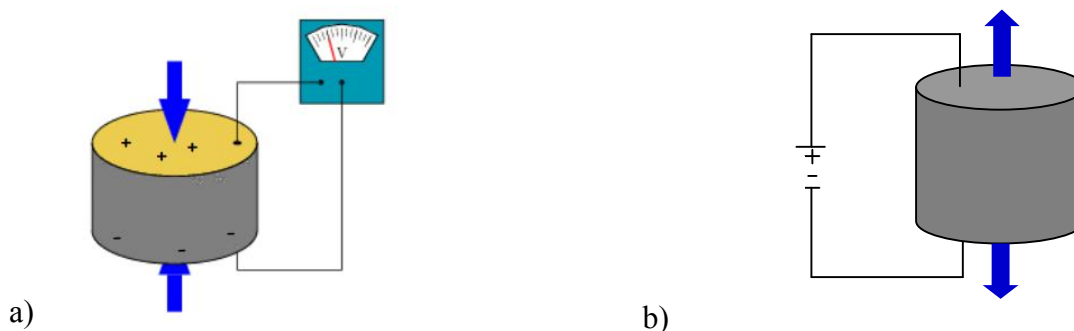


Figure 1.1 : Illustration de l'effet direct (a) et de l'effet inverse (b).

### 1.2.2. Historique

Après la première observation de l'effet piézoélectrique direct en 1817 par Haüy, ce sont les frères Pierre et Jacques Curie en 1880 qui ont été les premiers à découvrir expérimentalement que lorsque certains cristaux sont soumis à une pression, dans des directions particulières, des charges négatives et positives apparaissent sur certaines portions de leur surface [7]. Puis Lippmann a déterminé théoriquement en 1881 l'existence de l'effet inverse qui a finalement été confirmé expérimentalement par les frères Curie. La première application concrète par Paul Langevin ne verra le jour qu'en 1916-1917 sous la forme d'un transducteur dédié à l'émission ultrasonique sous-marine.

Avant environ 1940, seuls deux types de matériaux ferroélectriques étaient connus, le Sel de Rochelle et certains tartrates étroitement apparentés, et le dihydrogénophosphate de potassium et ses isomorphes [8]. Cela a changé en 1942 avec l'annonce par Wainer et Salomon [9] du titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ) comme nouvelle céramique ferroélectrique. Cette découverte a été associée à la découverte du processus de polarisation électrique dans les céramiques polycristallines par Gary et Roberts [10,11], au développement de l'effet piézoélectrique dans les céramiques polarisées par Mason [12] et à l'extraction des premières valeurs des coefficients piézoélectriques de  $\text{BaTiO}_3$  par Hans Jaffe en 1948 [13]. Ceci a conduit dans les années 1950 au déploiement des transducteurs piézoélectriques dont la propriété est acquise à partir d'une polarisation électrique. Aujourd'hui le matériau de type PZT basé sur des solutions solides zircono-titanate de plomb est largement employé, à l'instar des applications de type transformateur piézoélectrique abordées dans ces travaux de thèse. Dû essentiellement à l'évolution des applications des matériaux piézoélectriques, ces matériaux se sont développés d'une manière rapide depuis leur découverte et cinq catégories, les semi-conducteurs, le piézo-électret, les polymères piézoélectriques, les matériaux composites et les céramiques, sont reportées dans la littérature. Les céramiques piézoélectriques de synthèse apparaissent dans les années cinquante, elles sont alors utilisées dans les sonars, puis voient leurs domaines d'application s'étendre considérablement grâce à leurs coefficients piézoélectriques élevés. L'origine des propriétés ferroélectriques et piézoélectriques des céramiques, qui tient à l'organisation cristalline du matériau, est également explicitée dans la suite.

### 1.3. Céramiques piézoélectriques

Les céramiques, du grec *keramikos* «argile cuite», n'existent pas à l'état naturel. Elles sont réalisées par frittage à chaud, procédé consistant à chauffer les poudres, sans les mener

jusqu'à la fusion, d'oxydes ou de sels de monocristaux ferroélectriques, doués d'une polarisation spontanée, mélangés à un liant et soumis à une contrainte axiale pour améliorer la tenue des grains entre eux et réduire la porosité. Les céramiques sont polycristallines et inorganiques. Elles résultent de la combinaison binaire ou ternaire d'un certain nombre d'éléments métalliques (Mg, Al, Fe, Pb, Ti, etc.) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène. On distingue le titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ), le titanate de plomb ( $\text{PbTiO}_3$ ), le titano-zirconate de plomb PZT, etc. [14].

### 1.3.1. Préparation des céramiques

Pour préparer une céramique piézoélectrique, des poudres fines des oxydes métalliques sont mélangées à température ambiante avec un liant organique. Le mélange est pressé pour former des structures ayant la forme souhaitée (disques, tiges, plaques, etc.). Les éléments sont chauffés à une température entre  $1100^\circ\text{C}$  et  $1400^\circ\text{C}$  avec un temps spécifique pendant lequel les particules de poudre se frittent et le matériau atteint une structure cristalline dense. Les échantillons sont refroidis, puis façonnés ou rognés selon les spécifications, et des électrodes sont appliquées sur les surfaces appropriées. Les céramiques fabriquées à base de matériaux ferroélectriques n'ont aucun moment dipolaire électrique global à l'échelle macroscopique. Un tel milieu ne peut acquérir la propriété de piézoélectricité qu'après avoir subi un traitement particulier, dit de «polarisation». Il s'agit de l'application d'un champ électrique externe, continu et intense (de l'ordre de  $20 \text{ kV/cm}$ ) pendant quelques minutes à une température inférieure à celle de Curie  $T_c$  ( $200^\circ\text{C} < T_c < 400^\circ\text{C}$ ), d'environ  $100^\circ\text{C}$ . Par définition,  $T_c$  est la température au-dessus de laquelle le matériau perd sa polarisation spontanée [15].

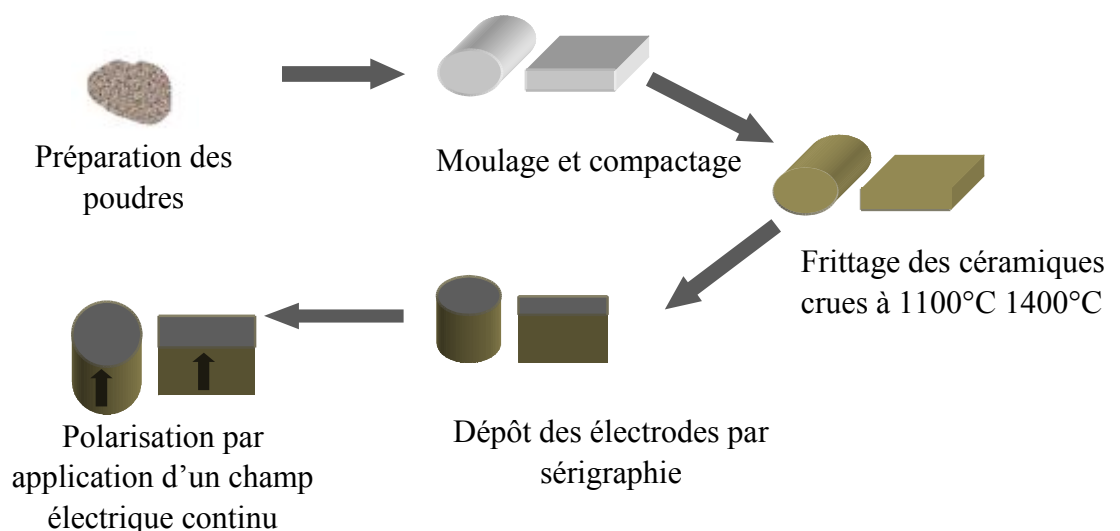


Figure 1.2 : Préparation des céramiques piézoélectriques.

### **1.3.2. Titanate de zirconate de plomb**

Le titanate de zirconate de plomb (PZT) est la céramique piézoélectrique la plus utilisée. La structure cristalline du PZT est la structure de la pérovskite ou un dérivé de la pérovskite. Désormais, le plomb contenant des pérovskites comme le PZT est le plus performant pour les actionneurs, les transducteurs et les capteurs. De petites quantités d'un dopant donneur ajoutées à une formulation céramique créent des lacunes de métal (cation) dans la structure cristalline, améliorant les effets des facteurs extrinsèques sur les propriétés piézoélectriques de la céramique.

Dans la plupart des applications, les céramiques PZT doivent être fixées sur un substrat. Les trois principales méthodes pour y parvenir sont le serrage, le soudage et le collage. Le serrage est souvent considéré comme une méthode peu fiable et n'est pas souvent utilisé. Le soudage a l'avantage de donner une connexion conductrice mais le mouvement entraînera une fatigue dans la liaison. Le collage est généralement la meilleure approche. Les colles fournissent des joints solides mais toujours flexibles entre les surfaces adjacentes. Il n'y a pas de fatigue et les températures de fonctionnement peuvent monter jusqu'à 150°C. Un contact électrique entre le substrat et l'électrode sur le PZT est presque toujours requis. Une possibilité consiste à utiliser de la colle conductrice, généralement un époxy rempli de particules. Un inconvénient de ces colles est qu'elles sont si fortement chargées en particules conductrices que la ligne de colle est souvent faible. Une solution à ce problème consiste à mélanger de la poudre de nickel dans la colle ou à utiliser des colles contenant de l'argent car les électrodes des céramiques PZT sont en nickel ou en argent. Le soudage sur des surfaces de ces types de matériaux est possible, mais une attention particulière à la dépolarisation doit être effectuée. En effet, les températures peuvent être si élevées qu'elles peuvent affecter l'activité piézoélectrique de la céramique et entraîner une perte partielle voire totale de ses propriétés piézoélectriques.

### **1.3.3. Limitation des céramiques**

Il existe de nombreuses lacunes dans les matériaux piézoélectriques, par exemple:

- Rupture par fatigue résultant de la contrainte alternée dans les éléments céramiques
- Relâchement des propriétés piézoélectriques au voisinage du point de température de Curie ( $> 300^{\circ}\text{C}$ )
- Affaiblissement de la liaison adhésive survenant en dessous du point de Curie
- Changement du module de Young avec la température provoquant un changement de la fréquence de résonance et entraînant ainsi une baisse des performances de l'appareil
- Durée de vie courte en raison de l'usure rapide

- Pertes de friction importantes dues à la nature complexe des vibrations et à d'autres phénomènes (les pertes de glissement et de déformation conduisent à des rendements inférieurs, par exemple au plus ~ 50% dans les applications de moteurs à ultrasons).

#### **1.3.4. Propriétés d'une céramique PZT**

Les matériaux céramiques PZT présentent, après leur polarisation, des coefficients de couplage électromécanique élevés, de fortes permittivités diélectriques, des coefficients piézoélectriques importants. Leurs propriétés physiques dépendent largement de leur processus de fabrication et leurs différents coefficients (de qualité, de couplage électromécanique, piézoélectriques, etc.) varient avec la température de frittage, la granulométrie des poudres utilisées et la composition de la céramique [16-19].

Pendant le processus de fabrication, selon les formulations, on peut avoir des PZT douces qui sont caractérisées par de grands facteurs de couplage électromécanique, de grandes constantes piézoélectriques, une permittivité élevée, de grandes constantes diélectriques, des pertes diélectriques élevées, de faibles facteurs de qualité mécanique et une mauvaise linéarité. Ces céramiques produisent des déplacements plus importants et des largeurs de bande de signal plus larges, par rapport aux céramiques dures, mais elles présentent une hystérésis plus importante et sont plus sensibles à la dépolarisation ou à d'autres détériorations. Ce type de céramiques est utilisé à des températures plus basses car elles possèdent des points de Curie généralement inférieurs à 300°C. Les céramiques douces sont utilisées principalement dans les applications de sensibilité plutôt que dans les applications de puissance. Les céramiques massives ont des caractéristiques généralement opposées à celles des céramiques douces, notamment des points de Curie supérieurs à 300°C, de petites constantes piézoélectriques, de grands facteurs de couplage électromécanique et de grands facteurs de qualité mécanique. Elles sont également plus difficiles à polariser ou à dépolariser. Bien que les céramiques massives soient généralement plus stables que les céramiques douces, elles ne peuvent pas produire les mêmes déplacements importants. Les céramiques massives sont compatibles avec des charges mécaniques et des tensions élevées.

Lorsqu'un élément en céramique piézoélectrique est exposé à un champ électrique alternatif les grandeurs électromécaniques qui le caractérisent varient dans un domaine fréquentiel. La fréquence à laquelle l'élément vibrant convertit le plus efficacement l'énergie électrique d'entrée en énergie mécanique est déterminée par la composition du matériau céramique et par la forme et le volume de l'élément. À mesure que la fréquence augmente, les

oscillations de l'élément approchent d'abord une fréquence à laquelle l'impédance est minimale (admittance max.). Cette fréquence d'impédance minimale se rapproche de la fréquence de résonance série  $f_s$ . Cette fréquence est également appelée fréquence de résonance  $f_r$ . Au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'impédance augmente au maximum (admittance min.). Cette fréquence d'impédance maximale se rapproche de la fréquence de résonance parallèle  $f_p$ , la fréquence à laquelle la résistance parallèle dans le circuit électrique équivalent est infinie (en négligeant la résistance causée par les pertes mécaniques). Cette fréquence est également appelée fréquence d'anti-résonance  $f_a$ . Les valeurs de fréquence d'impédance minimale et de fréquence d'impédance maximale peuvent être utilisées pour calculer le facteur de couplage électromécanique, un indicateur de l'efficacité avec laquelle un matériau piézoélectrique convertit l'énergie électrique en énergie mécanique ou l'énergie mécanique en énergie électrique. Les pertes diélectriques et les pertes mécaniques affectent également l'efficacité de la conversion d'énergie. Ces différents aspects sont présentés plus en détail dans la section suivante.

## 1.4. Théorie de la piézoélectricité

### 1.4.1. Elasticité linéaire

Lorsqu'un solide est soumis à l'action d'une contrainte, il se déforme c'est-à-dire qu'il change de forme et de volume. Pour un corps parfaitement élastique, cette déformation disparaît lorsque les contraintes sont supprimées. Si une déformation permanente subsiste, le corps est appelé plastique. Pratiquement, les solides usuels peuvent être considérés comme parfaitement élastiques à condition de ne pas dépasser une valeur limite maximale des contraintes extérieures. Au-delà de cette limite le matériau passe du domaine élastique au domaine plastique. Si cette limite n'est jamais atteinte en aucun point du milieu, le solide présente un comportement linéaire. La déformation subie par un corps parfaitement élastique est proportionnelle à la force ou à la contrainte appliquée. La relation existant entre contraintes et déformations est connue sous le nom de loi de Hooke et s'écrit pour des petites déformations :

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}. \quad (1.1)$$

Les coefficients  $c_{ijkl}$  qui traduisent la relation linéaire la plus générale entre deux tenseurs de rang deux  $T_{ij}$  et  $S_{kl}$  sont les composantes d'un tenseur de rang quatre appelé tenseur de rigidités élastiques possédant  $3^4 = 81$  composantes. Cependant du fait des symétries des tenseurs  $T_{ij}$  et  $S_{kl}$ , le tenseur  $c_{ijkl}$  est aussi symétrique par rapport à  $i$  et  $j$  d'une part et  $k$  et  $l$  d'autre part:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}.$$

Cette relation de symétrie réduit de 81 à 36 le nombre de constantes élastiques indépendantes. La relation de contraction des indices peut alors être appliquée.

#### 1.4.2. Relations entre propriétés d'un matériau piézoélectrique

Les propriétés thermiques, mécaniques et électriques d'un cristal sont gouvernées par un certain nombre de grandeurs physiques telles que la température  $\theta$ , l'entropie  $\sigma$ , la contrainte  $T$ , la déformation  $S$ , ainsi que par le champ électrique  $E$  et l'induction électrique  $D$ . On peut établir entre toutes ces grandeurs trois ensembles d'effets appelés effets électromécaniques, effets thermoélectriques et effets thermoélastiques (figure 1.3).

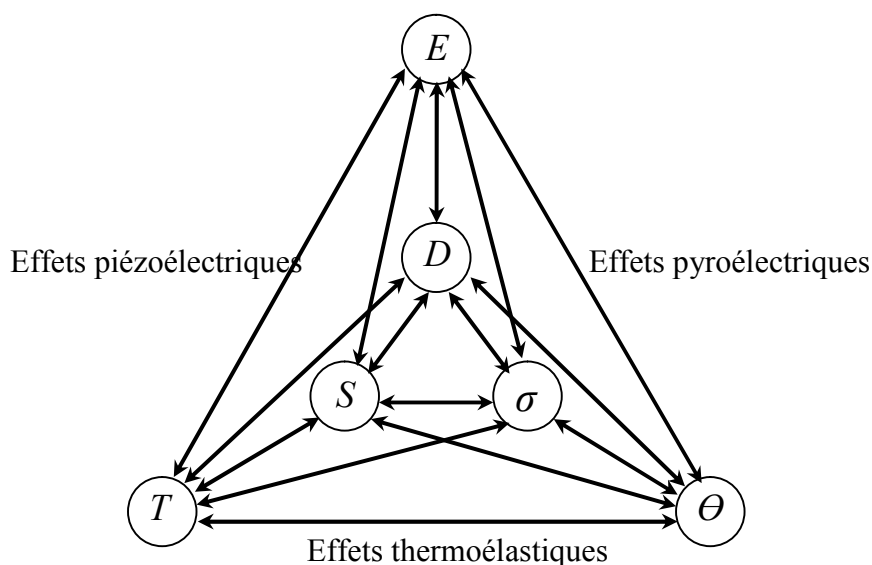


Figure 1.3 : Interactions entre les grandeurs physiques d'un matériau piézoélectrique.

Les interactions entre les différentes grandeurs correspondent à un ensemble de constantes liées entre elles. Ces relations seront détaillées dans la sous-section suivante.

#### 1.4.3. Equations fondamentales de la piézoélectricité

La piézoélectricité est le résultat d'un couplage entre l'énergie électrique et l'énergie mécanique d'un matériau en négligeant l'énergie thermique, lorsque l'effet pyroélectrique est négligeable. De façon générale, en se limitant à de faibles déformations, on peut établir des relations locales liant les grandeurs électriques dans le matériau, telles que le champ électrique  $E$  et le champ d'induction électrique  $D$ , aux grandeurs mécaniques, telles que les contraintes  $T$  et les déformations relatives  $S$ . Dans un milieu piézoélectrique, l'induction électrique de composante  $D_i$  ainsi que les contraintes sont fonction à la fois des déformations et du champ

électrique de composante  $E_i$ . Ces quatre grandeurs peuvent être décrites comme les dérivées partielles de l'enthalpie  $H$  telle que :

$$H = U - D_k E_k. \quad (1.2)$$

où  $U$  est l'énergie interne. Pour une transformation adiabatique et réversible, on a :

$$dU = T_{ij} dS_{ij} + E_k dD_k, \quad (1.3)$$

d'où :

$$dH = T_{ij} dS_{ij} - D_k dE_k. \quad (1.4)$$

Si maintenant on développe l'enthalpie au premier ordre, on peut écrire :

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \right)_E dS_{ij} + \left( \frac{\partial H}{\partial E_k} \right)_S dE_k, \quad (1.5)$$

ce qui par identification donne :

$$T_{ij} = \left( \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \right)_E \quad \text{et} \quad D_k = - \left( \frac{\partial H}{\partial E_k} \right)_S \quad (1.6)$$

Ainsi, si on exprime les dérivées totales de la contrainte et de l'induction :

$$dT_{ij} = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial S_{kl} \partial S_{ij}} \right)_E dS_{kl} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_k \partial S_{ij}} \right)_S dE_k \quad (1.7a)$$

$$dD_k = - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial S_{ij} \partial E_k} \right)_E dS_{ij} - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_j \partial E_k} \right)_S dE_j \quad (1.7b)$$

on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_j &= e_{jkl} S_{kl} + \varepsilon_{jk}^S E_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .  $e_{jkl}$  et  $\varepsilon_{jk}^S$  sont les constantes piézoélectriques exprimées en N/Vm et les constantes diélectriques à déformation nulle exprimées en F/m. Elles vérifient aussi les relations de symétrie suivantes :  $e_{jkl} = e_{jlk}$  et  $\varepsilon_{jk}^S = \varepsilon_{kj}^S$ .

Pour pouvoir écrire des relations avec des matrices à deux indices, et en tenant compte des symétries des équations 1.8, il est commode d'utiliser des notations avec indices contractés



appelées aussi notations de Voigt [20], résumées dans le tableau 1.1, de sorte que toutes les grandeurs des relations 1.8 deviennent des vecteurs ou des matrices. La relation de comportement s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} T \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^E & -e^T \\ e & \varepsilon^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ E \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Tableau 1.1 : Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt.

	Contraintes						Déformations					
Tensorielles	$T_{11}$	$T_{22}$	$T_{33}$	$T_{23}$	$T_{13}$	$T_{12}$	$S_{11}$	$S_{22}$	$S_{33}$	$2S_{23}$	$2S_{13}$	$2S_{12}$
Voigt	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$

Ce sont les équations de couplage exprimées en choisissant  $(S, E)$  comme couple de variables indépendantes. L'exposant  $E$  indique que la rigidité  $c$  est calculée à un champ électrique  $E$  constante ou nul. De même l'exposant  $S$  sur la permittivité diélectrique indique que ce dernier est calculée à une déformation mécanique constante ou nulle. Le même développement peut être appliqué pour exprimer d'autres couples de variables qui sont données dans le tableau 1.2 ; les noms, les symboles ainsi que les unités des tenseurs correspondant à chacune des constantes mises en jeu sont résumés dans le tableau 1.3.

Tableau 1.2 : Les équations de couplage.

Couple	variables indépendantes	Equation piézoélectrique associée	Forme
$(T, E)$	Extensives	$S = s^E T + d^T E$ $D = dT + \varepsilon^T E$	Forme en $d$
$(T, D)$	Mixtes	$S = s^D T + g^T D$ $E = gT + \beta^T D$	Forme en $g$
$(S, E)$	Mixtes	$T = c^E S - e^T E$ $D = eS + \varepsilon^S E$	Forme en $e$
$(S, D)$	Intensives	$T = c^D S - h^T D$ $E = hS + \beta^S D$	Forme en $h$

Tableau 1.3 : Matrice des constantes mécaniques, piézoélectriques et diélectriques.

Matrice	Notation	Définition	Unité
Mécanique	$s^E$	Souplesse à $E$ constante	m <sup>2</sup> /N
	$s^D$	Souplesse à $D$ constante	m <sup>2</sup> /N
	$c^E$	Rigidité à $E$ constante	N/m <sup>2</sup>
	$c^D$	Rigidité à $D$ constante	N/m <sup>2</sup>
Piézoélectrique	$d$	Matrice reliant $T$ à $D$ à $E$ constante	C/N ou m/V
	$g$	Matrice reliant $T$ à $E$ à $D$ constante	m <sup>2</sup> /C ou Vm/N
	$e$	Matrice reliant $S$ à $D$ à $E$ constante	C/m <sup>2</sup> ou N/Vm
	$h$	Matrice reliant $S$ à $E$ à $D$ constante	N/C ou V/m
Diélectrique	$\varepsilon^S$	Permittivité à $S$ constante	F/m
	$\varepsilon^T$	Permittivité à $T$ constante	F/m
	$\beta^S$	Impermittivité à $S$ constante	m/F
	$\beta^T$	Impermittivité à $T$ constante	m/F

#### 1.4.4. Cas d'une céramique piézoélectrique

##### 1.4.4.1. Lois de comportement d'une céramique

Une céramique piézoélectrique, polarisée dans une direction donnée, est en général considérée comme un matériau isotrope transverse, avec le plan d'isotropie orthogonal à la direction de polarisation. La forme en  $e$  de la relation de comportement, dans le cas où la direction de polarisation est  $z=3$ , s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

La polarisation explique les composantes nulles de l'opérateur  $e$  : seule la composante suivant  $z$  ( $E_3 = E_z$ ) du champ électrique crée des contraintes normales  $T_{ii}$ . Inversement, seule la composante suivant  $z$  ( $D_3 = D_z$ ) du déplacement électrique est modifiée par des déformations

normales  $S_{ii}$ . Ce matériau est alors caractérisé par 10 constantes indépendantes dont 5 élastiques, 3 piézoélectriques et 2 diélectriques.

Si on s'intéresse au comportement électromécanique d'un solide piézoélectrique de la forme d'une plaque mince et d'une poutre, on est conduit à réduire la relation de comportement pour ne faire apparaître que les grandeurs mécaniques, dans le plan considéré pour le premier cas de la forme plaque mince et dans l'axe de la poutre pour le deuxième cas, et les grandeurs électriques dans la direction de polarisation.

#### 1.4.4.2. Lois de comportement réduites pour les plaques

Pour une céramique piézoélectrique en forme de plaque mince polarisée suivant la direction  $z$ , la contrainte est supposée plane dans les directions  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire  $T_3=T_4=T_5=0$ . Avec l'hypothèse des petites déformations, déformations inférieures au cinquième de l'épaisseur, la section droite reste perpendiculaire au plan neutre après déformation [21]. Le champ électrique est supposé être uniformément réparti dans la direction  $z$ . Dans ce cas la loi de comportement tridimensionnelle en  $e$  se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T_1 &= \bar{c}'_{11} S_1 + \bar{c}'_{12} S_2 - \bar{e}'_{31} E_3 \\ T_2 &= \bar{c}'_{12} S_1 + \bar{c}'_{11} S_2 - \bar{e}'_{31} E_3 \\ T_6 &= c^E_{66} S_6 \\ D_3 &= \bar{e}'_{31} S_1 + \bar{e}'_{31} S_2 + \bar{\epsilon}'_{33} E_3 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\text{avec } \bar{c}'_{pq} = c^E_{pq} - \frac{c^E_{13}{}^2}{c^E_{33}}, \quad \bar{e}'_{31} = e_{31} - \frac{e_{33} c^E_{13}}{c^E_{33}}, \quad \bar{\epsilon}'_{33} = \epsilon^S_{33} + \frac{e^2_{33}}{c^E_{33}}.$$

#### 1.4.4.3. Lois de comportement réduites pour les poutres

Dans le cas d'une céramique sous forme de poutre polarisée suivant la direction  $x_3$  dont l'axe principal est la direction suivant  $x_1$  (couplage 31) et en considérant les couplages entre les grandeurs mécaniques axiales ( $T_1$  et  $S_1$ ) et les grandeurs électriques transverses ( $E_3$  et  $D_3$ ) la loi de comportement tridimensionnelle se réduit. Il s'agit de supposer que les contraintes sont nulles dans les directions 2 et 3.

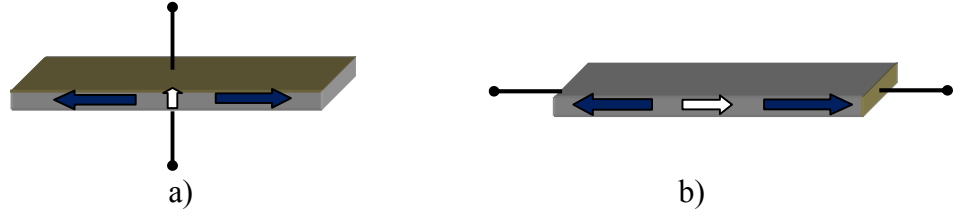


Figure 1.4 : Poutre céramique polarisée suivant l'épaisseur (a) et suivant la longueur (b).

Dans ce cas, la loi de comportement tridimensionnelle en  $e$  se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T_1 &= \bar{c}_{11}^E S_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 &= \bar{e}_{31} S_1 + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec

$$\bar{c}_{11}^E = Y_1^E = 1/s_{11}^E = c_{11} - \frac{c_{12}^2 c_{33} + c_{13}^2 c_{11} - 2c_{12} c_{13}^2}{\Delta} \quad (1.13a)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{12} c_{33} - c_{13} c_{13}}{\Delta} e_{31} - \frac{c_{13} c_{11} - c_{12} c_{13}}{\Delta} e_{33} \quad (1.13b)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^S + \frac{c_{33} e_{31}^2 + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{12} e_{31} e_{33}}{\Delta} \quad (1.13c)$$

où  $\Delta = c_{11} c_{33} - c_{13}^2$  et  $Y_1$  est le module d'Young du matériau dans le plan 12.

Si on s'intéresse à un couplage 33, qui est observé lorsque le matériau est polarisé suivant la direction 1 et qu'on considère les couplages entre les grandeurs mécaniques axiales ( $T_1$  et  $S_1$ ) et les grandeurs électriques transverses ( $E_1$  et  $D_1$ ) la loi de comportement tridimensionnelle en  $h$  se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{33}^D S_1 - \bar{h}_{33} D_1 \\ E_1 = -\bar{h}_{33} S_1 + \bar{\beta}_{33}^S D_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

où

$$\bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2), \quad \bar{c}_{33}^D = \frac{1}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)}, \quad \bar{h}_{33} = \frac{d_{33}}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \quad \text{et} \quad \bar{\beta}_{33}^S = \frac{1}{\epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \cdot k_{31} \quad \text{et} \quad k_{33} \quad \text{sont les}$$

coefficients de couplage électromécanique transversal et longitudinal définis dans la sous section suivante.

### 1.4.5. Coefficients de couplage électromécanique

Le coefficient de couplage électromécanique définit, pour un mode vibratoire considéré, la capacité d'un matériau piézoélectrique à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique, et inversement. Il ne faut pas le confondre avec le rendement, qui lui peut être nettement supérieur à ce coefficient, il s'apparente plus à un facteur de puissance. La conversion électromécanique de l'énergie s'effectue de manière directe au sein de la céramique. Ce coefficient, calculé au cours d'un cycle de travail, est défini, pour une conversion électromécanique, par le rapport des énergies suivant :

$$k = \frac{E_m}{\sqrt{E_c E_d}} \quad (1.15)$$

avec :

$E_c$  : l'énergie élastique,  $E_d$  : l'énergie diélectrique,  $E_m$  : l'énergie d'interaction, ou mutuelle, élasto-diélectrique.

La forme de l'échantillon conditionne l'expression du coefficient de couplage, c'est le coefficient de couplage intrinsèque. Il existe ainsi plusieurs coefficients de couplage intrinsèque:

- $k_{33}$  pour la vibration longitudinale,
- $k_{31}$  pour la vibration transversale (perpendiculaire à la direction de polarisation),
- $k_p$  pour la vibration radiale d'un disque mince,
- $k_t$  pour la vibration de l'épaisseur des pièces minces selon la direction de polarisation.
- $k_{15}$  pour la vibration en cisaillement.

Ces différents coefficients sont définis dans le tableau 1.4. La nature du mode dépend des dimensions de l'échantillon, de la direction du champ d'excitation  $E$  et du vecteur polarisation  $P$ .

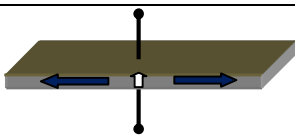
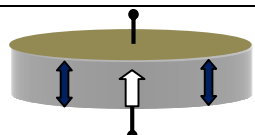

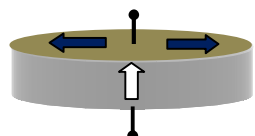
Dans le cas général d'une structure et d'une déformation quelconque, ce coefficient intrinsèque définit la limite supérieure du coefficient de couplage effectif mis en jeu. Le coefficient intrinsèque de couplage n'est valable qu'en fonctionnement quasi-statique du matériau, c'est-à-dire pour des variations très lentes du champ électrique  $E$  et de la déformation. Lorsque la céramique est exploitée à la résonance, ce qui est le cas pour les transformateurs, on définit un coefficient effectif de couplage électromécanique spécifique à chaque mode de résonance et à une configuration donnée. La détermination de ce coefficient effectif de couplage

se fait à partir de l'expression de l'impédance d'entrée du dispositif à la fréquence de résonance. Il est exprimé comme suit:

$$k_{eff}^2 = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2} \quad (1.16)$$

où  $f_s$  est la fréquence de résonance série et  $f_p$  la fréquence de résonance parallèle. La relation (1.16) est employée pour une détermination expérimentale du coefficient de couplage.

Tableau 1.4 : Modes de vibration et coefficients de couplage associés.  $L$  est la longueur de l'échantillon,  $e$  son épaisseur et  $D$  son diamètre s'il est de forme cylindrique.

Modes de vibration.	Forme échantillon	Coefficient de couplage
Mode transversal		$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}$
Mode épaisseur		$k_t^2 = \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S c_{33}^D}$
Mode longitudinal		$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T s_{33}^E}$
Mode radial		$k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{1 - \sigma^E}$

où  $\sigma^E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$  est le coefficient de Poisson.

#### 1.4.6. Pertes dans les matériaux piézoélectriques

Tout système physique dissipe l'énergie emmagasinée. Même si l'ordre cristallin est parfait, l'amplitude du déplacement à la résonance mécanique dans un matériau piézoélectrique ne peut être infinie. Le dispositif piézoélectrique est soumis à un ensemble de pertes qui sont d'origines diélectrique, mécanique et piézoélectrique.

Dans un milieu diélectrique réel, il existe toujours à basse fréquence une faible conductivité liée aux différents mécanismes microscopiques (défauts notamment). On parle alors de pertes diélectriques qui sont représentées par des permittivités complexes. Elles sont déterminées par la mesure à basse fréquence de l'angle de pertes électriques noté  $\delta$  que forment la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance électrique. Le coefficient de qualité diélectrique qui représente cette perte est défini par  $Q_e = 1/\tan\delta$ .

Les pertes mécaniques sont déterminées par la surtension du pic de résonance dans un barreau piézoélectrique. Ces pertes sont traduites par un coefficient qui représente le rapport entre l'énergie maximale emmagasinée pendant une période donnée et l'énergie dissipée pendant la même période appelée facteur de qualité mécanique noté  $Q_m$  dont la valeur élevée traduit un faible amortissement de la structure et donc des pertes minimales. Le coefficient de qualité mécanique dépend du mode de vibration aussi.

Les pertes piézoélectriques, encore mal maîtrisées, sont quelquefois prises en compte dans l'analyse des résonateurs. Elles sont décrites, comme pour les pertes diélectriques, par des coefficients piézoélectriques complexes. Cependant, ce phénomène est relativement lent et ne s'exprime qu'aux basses fréquences, nous n'en tenons pas compte dans notre étude.

## **1.5. Applications de la piézoélectricité**

### **1.5.1. Générateur**

Les matériaux piézoélectriques sont au cœur d'applications plus récentes visant à récupérer l'énergie présente dans notre environnement sous différentes formes ou effectuées par des mouvements quotidiens. Par exemple l'incorporation d'un film piézoélectrique dans les chaussures permet de produire de l'énergie grâce à la pression du talon pendant la marche. Les faibles puissances produites pourraient suffire à terme à alimenter certains dispositifs électroniques [19].

### **1.5.2. Moteur et actionneur**

Une pression exercée sur un matériau piézoélectrique génère des charges mesurables électroniquement, ce qui fait d'eux des candidats naturels pour les applications basées sur la détection de pressions. Les actionneurs et les moteurs piézoélectriques tirent profit de l'effet piézoélectrique inverse en utilisant la déformation induite par une tension électrique pour générer le déplacement. Leur faible échauffement et leur haute densité énergétique sont des atouts majeurs dans le domaine spatial. Le microscope à force atomique et le microscope à effet tunnel

utilisent la piézoélectricité pour réaliser les petits déplacements nécessaires au balayage de la surface sondée. Certains injecteurs automobiles les utilisent pour gagner en rapidité d'injection et en consommation. Les moteurs piézoélectriques sont utilisés dans les systèmes autofocus d'appareils photographiques, dans les mécanismes de vitre électrique de voiture, et en général dans les applications où la taille réduite de ces moteurs répond à des contraintes volumiques. L'actionneur piézoélectrique est très utilisé dans le monde industriel. Cependant, le transfert n'est pas linéaire. Il est alors nécessaire de développer des commandes adaptées à ce type d'actionneur, en particulier pour compenser les non-linéarités [18-19].

### **1.5.3. Transducteur**

Les matériaux piézoélectriques permettent de convertir une onde acoustique en signal électrique et inversement. Ils constituent le cœur des transducteurs acoustiques utilisés pour émettre ou détecter des ondes acoustiques dans les sonars, mais aussi dans l'automobile pour la détection d'obstacles et en médecine, ou pour les échographies, qui nécessitent l'émission et la détection d'ondes ultrasonores. Dans les gammes de fréquences audibles, on les réalise des microphones et des haut-parleurs, [18-19].

### **1.5.4. Transformateur**

L'effet piézoélectrique est aussi utilisé dans le domaine des transformateurs pour amplifier des tensions alternatives. Contrairement au transformateur classique qui utilise un couplage magnétique, le couplage mis à profit est acoustique. Par effet piézoélectrique inverse, une tension d'excitation génère une contrainte alternative dans une barre d'un matériau fortement piézoélectrique. Cette contrainte permet la mise en vibration de la barre à une fréquence choisie correspondant à une fréquence de résonance. Par effet piézoélectrique direct, une tension est générée sur des électrodes situées sur la deuxième extrémité de la barre. Cette tension, qui bénéficie de l'amplification du mouvement dû à la résonance, peut être 1000 fois plus élevée. L'émergence des transformateurs piézoélectriques coïncide avec le développement dans les années 1950 des céramiques ferroélectriques. Ils offrent des performances remarquables en termes de gain en tension et rendement utiles pour des applications nécessitant une adaptation de tension ou une isolation galvanique.

## **1.6. Conclusion**

Au cours de ce chapitre introductif un rappel historique sur la piézoélectricité est présenté. Parmi différents types de matériaux piézoélectriques, les céramiques, plus précisément le PZT,



sont décrites : préparations, limitations et propriétés. Les applications de la piézoélectricité sont évoquées après avoir décrit la théorie de l'élasticité linéaire et présenté les équations fondamentales de la piézoélectricité. L'une de ces applications citées est le transformateur que nous abordons dans le chapitre suivant de ce travail.

## *Références bibliographiques*

- [1]. J. F. Rosenbaum, « Bulk Acoustic Wave Theory and Devices », *Artech House Boston-London*, 1988.
- [2]. J. D. Achenbach, « Wave Propagation in Elastic Solids », North-Holland, 1987.
- [3]. D. Royer, E. Dieulesaint, « Ondes élastiques dans les solides – Propagation libre et guidée », Tome 1. Masson, Paris 1997.
- [4]. A. Parent, «Apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des microgyromètres vibrants» no. 9081, version 1, 27 Oct 2008.
- [5]. P. Curie et J. Curie, « Développement par pression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1880.
- [6]. P. Curie et J. Curie, « Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1881.
- [7]. A. Régis, « Effet piézo-électrique dans les puits quantiques CdTe/CdMnTe et CdTe/CdZnTe », *Thèse de Doctorat Université Joseph Fourier - GRENOBLE 1*, 1994
- [8]. B. Jaffe; W.R. Cook, H. Jaffe, «Piezoelectric Ceramics, » 1<sup>st</sup> ed.; Academic Press: New York, NY, USA, 1971, 1–5.
- [9]. E. Wainer, A.N. Salomon, « Electrical Reports of the Titanium Alloy Manufacturing Division, » Report 10; National Lead Co.: Winchester, MA, USA, 1943.
- [10]. R.B. Gray, «Transducer and Method of Making the Same », *U.S. Patent*, no. 2,486,560, 20 September 1946.
- [11]. S. Roberts, «Dielectric and piezoelectric properties of barium titanate», *Phys. Rev.* Vol. 71, pp. 890–895, 1947.
- [12]. W.P. Mason, «Electrostrictive effect in barium titanate ceramics», *Phys. Rev.* Vol. 74, pp. 1134–1147, 1948.
- [13]. H. Jaffe, «Properties of electromechanical ceramics», *Electronics*, Vol. 21, pp.128–130, 1948.

- [14]. B. Guiffard. « *Elaboration et Caractérisation de Céramiques Ferroélectriques de Type PZT Fluoré* », Thèse de doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 1999.
- [15]. E. Dieulesaint, D. Royer. « *Ondes Élastiques dans les Solides, Application au Traitement du Signal* », Masson & Cie, 1974.
- [16]. M. Aparna, T. Bhimasankaram, S. V. Suryanarayana, G. Prasad, S. Kumar. « *Effect of Lanthanum Doping on Electrical and Electromechanical Properties of Ba-xLaxTiO<sub>3</sub>* Bull. Mater», *Sci.*, Vol. 24, no.5, pp. 497-504, 2001.
- [17]. E.L. Adler, « *Bulk and Surface Acoustic Waves in Anisotropic Solids* », *International Journal of High Speed Electronics and Systems*, Vol. 10, no. 3, pp. 653–684, 2000.
- [18]. C. Nadal, « *Contribution à la modélisation et la conception de transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma* », thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse, 2012.
- [19]. D. Royer, E. Dieulesaint, « *Ondes élastiques dans les solides – Génération, Interaction acousto-optique, Applications* », Tome 2. Masson, Paris 1999.
- [20]. V.W. Voigt, « *Lehrbuch der kristallphysik* », Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910
- [21]. H.Hariri, « *Modélisation par éléments finis d'un système asymétrique de type plaque avec des patches piézoélectriques* », JCGE, Décembre 2011.

## **Chapitre 2**

---

---

# **ETAT DE L'ART SUR LES TRANSFORMATEURS PIEZOELECTRIQUES**

---

---

## **2.1. Introduction**

Les progrès récents en électronique de puissance, particulièrement dans le domaine de la miniaturisation des composants électriques et électromécaniques, ont permis d'envisager le développement de systèmes très compacts. Les progrès accomplis sont le déploiement des microordinateurs, microsystèmes, téléphones cellulaires, caméras, appareils de mesures...La génération, le stockage et la transformation de l'énergie électrique dans ces systèmes doivent respecter cette tendance. Pourtant, les transformateurs électromagnétiques sont difficiles à miniaturiser (bobinages, noyau...). Une solution intéressante consiste à utiliser des transformateurs piézoélectriques (TPs) [1-6]. Les TPs offrent plusieurs avantages par rapport aux transformateurs électromagnétiques dans des applications bien spécifiques : dimension réduite, structure compacte, gain élevé, bon rendement, hautes fréquences et possibilité d'avoir des densités de puissance significatives.

Dans ce chapitre, on présente les généralités concernant le transformateur piézoélectrique en commençant par son principe de fonctionnement et son historique. Ensuite, les différents types de transformateurs et leurs applications sont présentés. Pour finir, des outils de simulation appliqués à la modélisation du transformateur piézoélectrique disponibles dans la littérature sont décrits dans la dernière section de ce chapitre.

## **2.2. Généralités**

### **2.2.1. Principe du transformateur piézoélectrique**

Un transformateur piézoélectrique est le plus généralement constitué d'un bloc uniforme de céramique sur lequel sont disposées deux électrodes au primaire et deux électrodes au secondaire. Il convertit une tension alternative au primaire en une tension alternative proportionnelle au secondaire [7]. Cette architecture met en œuvre une double conversion électromécanique puis mécano-électrique de l'énergie [8]. Pour cela, une tension électrique alternative est appliquée au primaire du transformateur ce qui a pour effet la déformation de tout le matériau, particulièrement lorsque l'excitation coïncide avec une fréquence de résonance de la structure. La vibration mécanique ainsi créée va en retour induire une tension électrique au secondaire du transformateur par effet piézoélectrique direct [9, 10]. L'efficacité du transformateur n'est atteinte qu'aux alentours des fréquences de résonance mécanique de la structure. Ces dernières sont dépendantes des dimensions, des propriétés du matériau, mais aussi des conditions de charge au primaire et au secondaire du transformateur.

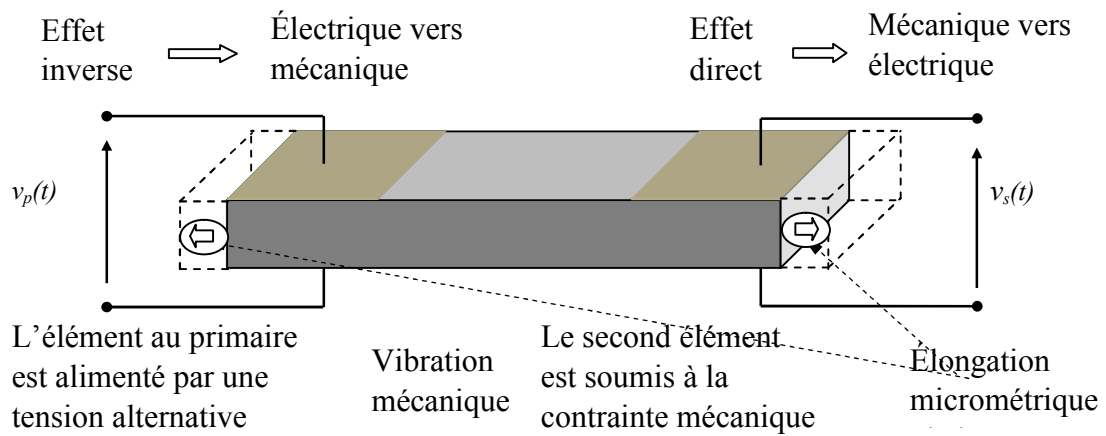


Figure 2.1 : Principe de fonctionnement d'un transformateur piézoélectrique.

### 2.2.2. Historique

Les premières études sur la conversion d'énergie électrique en énergie électrique à l'aide de matériaux piézoélectriques ont eu lieu à la fin des années 1920 et au début des années 1930. Alexander McLean Nicolson a l'honneur d'être le premier chercheur à étudier l'idée d'un transformateur piézoélectrique. Ses travaux sur les transformateurs piézoélectriques, décrits dans de multiples brevets [11-13], se limitaient à l'utilisation de monocristaux de Sel de Rochelle, le seul matériau largement disponible à l'époque. L'utilisation de ce matériau a conduit à des limitations évidentes de performance, de conception et d'applicabilité par rapport aux matériaux piézocéramiques développés plus tard.

Avec l'annonce du titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ) comme nouvelle céramique ferroélectrique par Wainer et Salomon [14] en 1942 associée à la découverte du processus de polarisation électrique dans les céramiques polycristallines par Gary et Roberts [15,16], le développement de l'effet piézoélectrique dans les céramiques polarisées par Mason [17], et l'extraction des premières valeurs des coefficients piézoélectriques de  $\text{BaTiO}_3$  par Hans Jaffe en 1948 [18], les céramiques ferroélectriques ont été rapidement reconnues comme présentant des avantages significatifs pour de nombreuses applications électromécaniques, notamment la facilité de fabrication dans les formes souhaitées, le contrôle de la réponse grâce à la sélection des directions de polarisation, une constante diélectrique élevée et un couplage électromécanique élevé.

À la fin des années 40 et dans les années 50, le  $\text{BaTiO}_3$  est devenu disponible dans le commerce, déclenchant la prolifération des applications piézoélectriques. Au cours de cette période, Charles Abraham Rosen a commencé à travailler sur les transformateurs

piézoélectriques en utilisant le nouveau BaTiO<sub>3</sub>. et appliquer le travail théorique développé par Mason. Contrairement aux tentatives antérieures de Nicolson de fabriquer des transformateurs piézoélectriques en utilisant deux morceaux de cristaux solides piézoélectriques liés ensemble et serrés avec une structure externe, l'approche de Rosen impliquait l'utilisation d'un seul bloc rectangulaire de céramique polycristalline BaTiO<sub>3</sub> comprenant deux zones de polarisation distinctes. Rosen a créé les deux zones en appliquant des électrodes séparées et des tensions de polarisation différentes aux deux moitiés du bloc. La moitié du bloc était polarisée dans le sens longitudinal et l'autre moitié dans le sens de l'épaisseur.

Le travail de Rosen a été poursuivi par Stephen W. Tehon aux nouveaux matériaux ferroélectriques et aux matériaux magnétostrictifs. De 1960 à 1962, l'équipe de General Electric à Syracuse a poursuivi les travaux de Rosen et Tehon sur les transformateurs de puissance en céramique grâce à un contrat de recherche accordé par la marine américaine [19].

Jusqu'au milieu des années 1960, les transformateurs piézoélectriques n'étaient pas praticables en raison du manque de matériaux capables de fonctionner avec de faibles pertes mécaniques. Cette situation s'est améliorée avec l'introduction de compositions céramiques piézoélectriques dopées, telles que le PZT8, présentant des facteurs  $Q_m$  mécaniques et diélectriques élevés.

En 1972, Berlincourt a breveté l'une des premières applications spécifiques des transformateurs piézoélectriques comme démarreur et ballast pour lampes à décharge gazeuse [20]. Dans les années 1980, Siemens (Berlin, Allemagne) [21] et General Electric (Schenectady, NY, USA) [22] faisaient partie de certaines entreprises travaillant sur l'application de TP pour déclencher des grilles de commutation de puissance telles que des triacs, des thyristors, Mosfets, etc., avec découplage galvanique. À la fin des années 1980, plusieurs sociétés japonaises ont reconsidéré l'utilisation des TP, profitant des améliorations apportées aux nouveaux matériaux piézoélectriques, d'une technologie de fabrication plus fiable, de nouveaux concepts sur les circuits intégrés.

Au cours des années 1990, la technologie CCFL a connu un essor commercial important pour les appareils compacts et portables. Au début des années 2000, on estimait que 25 à 30% des circuits de rétroéclairage CCFL produits étaient fabriqués à l'aide de la technologie des transformateurs piézoélectriques.

À la fin des années 2000 et au début des années 2010, la technologie de rétroéclairage CCFL utilisée pour l'écran LCD a commencé à être remplacée par des diodes électroluminescentes (LED). Cela a entraîné une baisse de la production de transformateurs piézoélectriques hautes tensions et a finalement arrêté la production à haut volume de ces composants par la plupart des principaux fournisseurs.

Actuellement, le principal domaine d'intérêt des transformateurs piézoélectriques est dans les équipements médicaux, de défense, de sécurité et de mesures sensibles.

### **2.2.3. Avantages et inconvénients des transformateurs piézoélectriques**

Les transformateurs piézoélectriques ont de nombreux avantages par rapport à leurs homologues magnétiques:

- Des densités de puissance plus importantes.
- Des rendements supérieurs pour des densités de puissance équivalentes.
- L'absence d'enroulement facilite la construction et limite les risques de court-circuit.
- Certaines structures jouissent d'une isolation galvanique naturelle, sinon cette propriété est relativement facile à obtenir.
- Peu d'émission électromagnétique.

Les transformateurs piézoélectriques présentent toutefois quelques inconvénients par rapport aux transformateurs électromagnétiques. On peut notamment citer la forte dépendance des comportements électriques et mécaniques vis-à-vis de la résistance de charge connectée au secondaire, celle-ci influe fortement sur la puissance transférée par le transformateur, sur le rendement de ce transfert ainsi que sur le rapport de transformation. Ceci impose la mise en œuvre d'une électronique complexe permettant de régler la tension ou la puissance par exemple.

## **2.3. Principaux types de transformateurs piézoélectriques**

En général, les transformateurs piézoélectriques peuvent être classifiés en différentes catégories basées sur leurs modes de vibration ou leurs fréquences de fonctionnement. Ils sont en général classifiés en trois groupes principaux: haute tension ou TP type Rosen [23-29], basse tension ou transformateur vibrant en mode épaisseur [30-35], et TP vibrant en mode radial [36-38] ; mais il y a aussi d'autres types de transformateurs piézoélectriques.



### 2.3.1. Le transformateur vibrant en mode épaisseur

Le transformateur vibrant en mode épaisseur présenté dans la figure 2.2 est la combinaison de deux ou plusieurs couches piézoélectriques. Le primaire et le secondaire sont séparés par une couche diélectrique qui assure l'isolation galvanique. Les deux parties sont polarisées suivant leur épaisseur et le même mode électromécanique d'épaisseur qui correspond une vibration de l'ensemble de la structure suivant son épaisseur est exploité. Le gain en tension est directement proportionnel au rapport des épaisseurs des couches secondaires sur les couches primaires. La fréquence d'utilisation est inversement proportionnelle à l'épaisseur totale de la structure et dépend du mode de résonance élastique choisi. Ces structures sont intéressantes de par leur rapport de forme faible qui permet un report aisé sur une carte électronique [30-35].

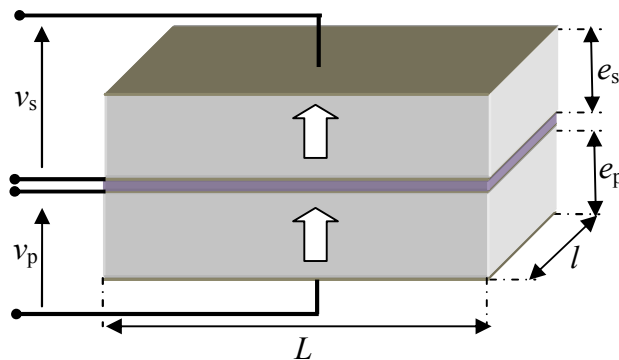


Figure 2.2 : Transformateur piézoélectrique à mode en épaisseur.

### 2.3.2. Le transformateur vibrant en mode radial

Le transformateur piézoélectrique vibrant en mode radial présenté dans la figure 2.3 est fabriqué à partir d'une céramique en forme de cylindre, sur lequel sont apposées des électrodes concentriques, d'épaisseur plus petite que le rayon et polarisées selon l'épaisseur. Le mode de couplage (transversal) est similaire au primaire et secondaire et l'onde mécanique sollicitée se propage suivant le rayon. De nature comparable aux transformateurs à mode transversal, ils tirent parti du même mode électromécanique planaire au primaire et au secondaire équivalent à une vibration de l'architecture selon son rayon. A noter que la sollicitation bidimensionnelle améliore légèrement le couplage. Par ailleurs, la modification des rayons des électrodes primaires et secondaires influe fortement sur le gain en tension et requiert donc une attention particulière [36-38].

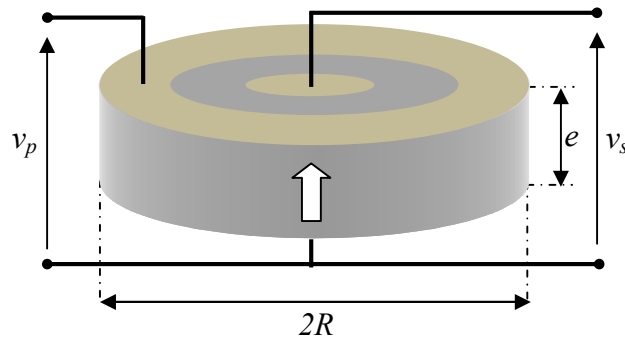


Figure 2.3 : Transformateur à mode radial - Structure monocouche.

### 2.3.3. Le transformateur vibrant en mode transversal

Cette structure est constituée d'un seul barreau piézo-électrique polarisé en épaisseur. Au primaire et au secondaire, on utilise le même mode électromécanique transversal qui correspond à une vibration de l'ensemble du barreau suivant sa longueur. La grande symétrie de cette structure, tant sur le plan géométrique que sur les modes utilisés, ne permet pas d'obtenir des gains en tension importants. La fréquence de fonctionnement de ce type de transformateur est inversement proportionnelle à la longueur du barreau et dépend du mode de résonance considéré. En raison d'une isolation galvanique naturelle due à la présence de quatre pôles électriques distincts cette structure est généralement utilisée comme transformateur d'isolement de rapport unitaire [7].

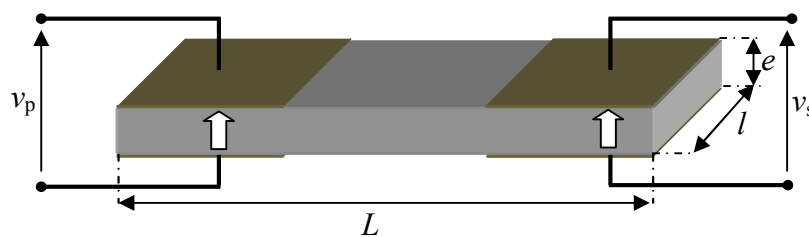


Figure 2.4 : Transformateur piézoélectrique à mode transversal.

### 2.3.4. Le transformateur de type Rosen

Le transformateur piézoélectrique de type Rosen est fabriqué par une combinaison d'un actionneur piézoélectrique en mode transversal et d'un transducteur piézoélectrique vibrant en mode longitudinal, c'est-à-dire il exploite simultanément des modes transversal {31} au primaire et longitudinal {33} au secondaire. Son architecture favorise naturellement une déformation longitudinale dont la résonance mécanique est directement proportionnelle à la longueur du

transformateur et il travaille à basse fréquence. En raison de son gain en tension très élevé qui augmente avec le rapport  $L/e$ , il est principalement classifié comme un transformateur de haute tension. Il est possible de feuilletter le primaire du transformateur ce qui aura pour effet d'augmenter le gain en tension, l'impédance d'entrée et enfin d'accroître notablement la puissance de sortie. [23, 25, 27,28].

Enfin, parmi les inconvénients de ce transformateur, il faut souligner sa fragilité mécanique, notamment lorsqu'il est soumis à de fortes vibrations. En effet l'exploitation simultanée de deux modes différents (transversal et longitudinal) fragilise le transformateur particulièrement à l'interface primaire/secondaire. Une fatigue prématurée de la céramique couplée à des sollicitations mécaniques trop importantes peut entraîner une rupture de la structure. Les contraintes thermiques sont également limitantes puisqu'au-delà de la valeur dite de Curie, la polarisation ainsi que l'effet piézoélectrique disparaissent. Cette limite en température est dépendante du matériau employé et est généralement comprise entre 150°C et 300°C.

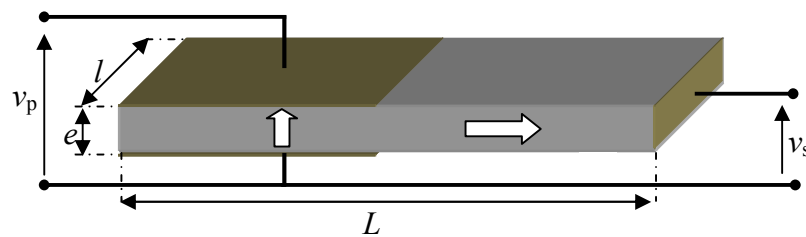


Figure 2.5 : Transformateur piézoélectrique de type Rosen.

## 2.4. Domaines d'applications

### 2.4.1. Alimentation des lampes fluorescentes

Les lampes fluorescentes à cathode froide sont communément employées comme source de lumière pour le rétro éclairage des écrans LCD utilisés pour les ordinateurs portables ou tout autre appareil électronique portatif les nécessitant. Ces lampes requièrent une forte tension alternative, l'oscillation favorisant au mieux la conversion électro-optique de l'énergie, aussi bien pour l'allumage que durant leur fonctionnement en régime établi. A priori, la fonction d'élévation en tension que doit présenter l'alimentation peut indifféremment être réalisée par un transformateur magnétique conventionnel ou un transformateur piézoélectrique [39].

Pour ce type d'application, il est nécessaire d'utiliser des ballasts car la tension nécessaire au démarrage de la lampe est sensiblement différente de celle nécessaire en régime permanent.

Ces ballasts sont généralement constitués d'un réseau résonant, composé d'une inductance et d'une capacité. Les transformateurs peuvent, par nature, remplacer avantageusement ces réseaux en réduisant l'encombrement et le prix de ces éléments avec des performances égales sinon supérieures.

#### **2.4.2. Intégration dans les convertisseurs statiques**

L'emploi des transformateurs piézoélectriques dans les convertisseurs statiques constitue également une application incontournable. En effet, la démocratisation des équipements électroniques portatifs a suscité un besoin considérable en terme de miniaturisation de leur alimentation. Le convertisseur d'une puissance de 10W réalise le redressement d'une tension alternative de 115V en une tension continue de 12 V. Le transformateur piézoélectrique utilisé est constitué d'un empilement de deux anneaux séparés par une couche isolante. Chaque anneau est polarisé selon son épaisseur et le facteur de forme observé suggère la sollicitation par le transformateur d'un mode en épaisseur. La fréquence de fonctionnement du transformateur se situe autour de 400 kHz afin d'éviter les modes parasites. A cette fréquence, une puissance de 15W en sortie du transformateur a été observée pour un rendement supérieur à 98 % [39].

#### **2.4.3. Alimentation des moteurs piézoélectriques**

Pour donner naissance à une onde progressive permettant la mise en mouvement de son rotor, un moteur à ultrasons, constitué de céramiques piézoélectriques, nécessite de fortes tensions alternatives d'un ordre de grandeur avoisinant la centaine de volts. Afin d'obtenir ces niveaux de tension à partir d'une source continue, le schéma synoptique de l'alimentation d'un tel moteur se compose traditionnellement de trois éléments : une batterie, un onduleur et un transformateur élévateur de tension. Habituellement, la fonction élévatrice est réalisée par un transformateur magnétique conventionnel et ce, en dépit de ses nombreux défauts tels que sa taille, sa masse, son faible rendement ou encore sa forte émissivité électromagnétique. L'emploi du transformateur piézoélectrique pour assurer l'élévation en tension avait jusqu'alors été écarté en raison de ses performances remarquables seulement accessibles au voisinage de la résonance. Toutefois, si le dimensionnement du transformateur piézoélectrique est opéré afin de caler une de ses fréquences de résonance sur celle du moteur à ultrasons, une miniaturisation du dispositif et une amélioration significative du rendement de l'ensemble peuvent être constatées.

#### **2.4.4. Applications spatiales, de défense et de sécurité des transformateurs piézoélectriques**

Au cours des années 2000, la NASA a accordé plusieurs projets SBIR (Small Business Innovation Research) pour intégrer des transformateurs piézoélectriques dans des applications spatiales [40]. Ce programme de recherche fondé par le SBIR de la NASA, dirigé par le Dr Carazo, a mis au point un module de conditionneur de puissance électronique (EPC) piézoélectrique pour alimenter les tubes à ondes progressives (TWT) utilisés pour la communication sans fil de longue distance espace-terre [41–43 ]. La conception développée a éliminé les transformateurs électromagnétiques conventionnels avec un transformateur piézoélectrique compact et très efficace. L'unité EPC développée se composait de plusieurs modules fournissant différents niveaux de haute tension et de puissance aux différents circuits d'un TWT. Ce programme a permis de développer de nouveaux systèmes d'allumage intégrés pour les petits propulseurs satellites.

Une alimentation piézoélectrique à très haute tension (1 MV) et haute puissance (40 W) pour piloter des générateurs de neutrons compacts est l'une des applications du transformateur piézoélectrique. L'alimentation est basée sur un système modulaire empilable qui combine des transformateurs piézoélectriques et des circuits multiplicateurs de tension Cockroft-Walton [44]

#### **2.4.5. Autres applications des transformateurs piézoélectriques**

L'un des domaines d'application les moins courants a été proposé à la fin des années 1990 par l'Université Politecnica de Catalunya, Espagne, par A. V. Carazo dans sa thèse de doctorat [41]. Dans ce travail, une construction de transformateur piézoélectrique non résonnant a été évaluée comme transducteur de mesure haute tension pour les réseaux haute tension. A. Vasquez Carazo a considéré une application originale des transformateurs piézoélectriques : leur utilisation dans des sondes haute tension. Dans ce type d'application, le transformateur est utilisé hors résonance limitant la bande passante à quelques kilohertz. De plus, étant donné la forte impédance de sortie, l'interfaçage avec les appareils de mesure peut s'avérer difficile à réaliser. Enfin, la forte dépendance des propriétés des matériaux piézoélectriques aux conditions extérieures fait que cet appareil de mesure se révèle finalement assez imprécis en l'état. Ce n'est pas le meilleur exemple d'application des transformateurs piézoélectriques mais il témoigne de l'effort fait pour élargir les champs d'applications [44-45].

D'autres applications, plutôt liées à la mesure et à l'intégration, ont été envisagées. Vasic et al [9] utilisent des petits transformateurs pour commander des IGBT. Exploitant le couplage

longitudinal, ils fonctionnent à une fréquence très supérieure à la fréquence de commutation des IGBT et permettent de passer l'énergie nécessaire à la démodulation des signaux de commande. Dans cette application, le transformateur remplace avantageusement l'optocoupleur réalisant habituellement ce type d'isolation, puisqu'il communique à la fois le signal et l'énergie de commande tout en assurant l'isolation galvanique.

## 2.5. Méthodes de modélisation du transformateur piézoélectrique de type Rosen employées dans la littérature.

### 2.5.1. Schéma électromécanique équivalent

Le schéma électromécanique équivalent est l'un des modèles le plus utilisé pour décrire l'élément piézoélectrique quand les couches piézoélectriques sont connectées à un circuit électronique. De façon classique, l'analyse théorique du comportement électromécanique d'un transducteur piézoélectrique repose sur la définition d'un modèle unidimensionnel qui permet d'établir un schéma électromécanique équivalent sous la forme d'un hexapôle comprenant un accès électrique et deux accès mécaniques. Cette démarche repose sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices comme par exemple la séparation des modes de couplage, un fonctionnement en régime linéaire, des conditions d'interface parfaites, etc. Il s'agit donc d'une approche idéalisée qui, cependant, permet de bien rendre compte du comportement électromécanique global du transformateur et, par suite, de comprendre l'influence des dimensions de la structure.

Comme le transformateur piézoélectrique est la combinaison d'un actionneur et d'un transducteur, après simplification, pour un fonctionnement autour d'un mode de résonance, on obtient le schéma de la figure 2.6 faisant apparaître une branche mécanique (ou motionnelle) et deux branches électriques (ou statiques).

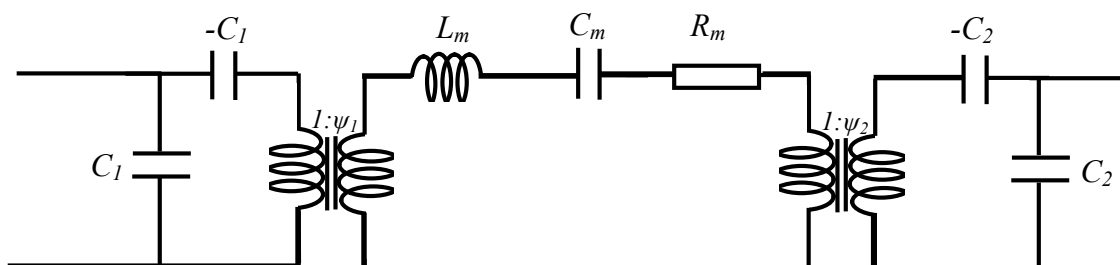


Figure 2.6 : Schéma électromécanique équivalent d'un transformateur piézoélectrique.

$C_1$  et  $C_2$  désignent les capacités vues du primaire et du secondaire à l'état bloqué.  $L_m$  rend compte de sa masse,  $C_m$  de son élasticité et  $R_m$  des pertes mécaniques associées. La double conversion électromécanique d'énergie est matérialisée par deux transformateurs parfaits de rapport  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . En général, on établit le schéma pratique de la figure 2.7 où les impédances mécaniques ont été ramenées côté primaire et où n'apparaît plus qu'un seul transformateur parfait de rapport  $\psi$ . Les différents éléments de ce schéma peuvent être soit précalculés à partir de la connaissance des propriétés physiques du matériau utilisé et de sa géométrie, soit déterminés expérimentalement.

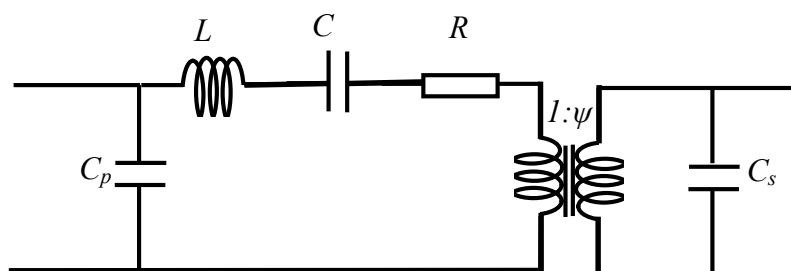


Figure 2.7 : Schéma électromécanique simplifié équivalent d'un transformateur piézoélectrique.

Une méthode classique d'identification des éléments du schéma équivalent d'un transducteur piézoélectrique repose sur l'exploitation du tracé expérimental, dans le plan de Nyquist, de l'admittance vue des bornes électriques.

### 2.5.2. Modèle analytique 1D

Les modèles analytiques sont basés sur la résolution analytique des équations de propagation du déplacement mécanique et les équations constitutives de la piézoélectricité. Le modèle physique de la structure étudiée exprime les conditions aux limites et permet de faire certaines approximations telles que la propagation dans une seule direction en négligeant les deux autres dimensions. On suppose que l'onde se propage suivant l'axe choisi, alors les équations de propagation et les équations constitutives se réduisent pour chaque partie du transformateur. À partir d'hypothèses simplificatrices, notamment une évolution spatiale unidimensionnelle des grandeurs caractéristiques, les équations du mouvement sont obtenues. A partir des conditions aux limites on peut obtenir un système de plusieurs équations caractérisant le système que l'on a pu écrire sous forme matricielle. La résolution de ce système peut s'effectuer par différentes méthodes et donne les expressions explicites des grandeurs d'entrée et de sortie du transformateur.

### **2.5.3. Modèle analytique général par l'approche variationnelle**

A partir du principe de moindre action, il a été possible d'établir, grâce aux résultats depuis longtemps connus de la mécanique analytique, une méthode générale d'étude du comportement électrodynamique des milieux piézoélectriques. En s'inspirant de travaux antérieurs ayant trait à la description de la dynamique d'un milieu piézoélectrique par approche variationnelle, un modèle général adaptable à différentes géométries de transformateur a pu être mis en place. Les propriétés d'orthogonalité des modes d'un transformateur piézoélectrique pour un fonctionnement en court-circuit (cas série) et en circuit ouvert (cas parallèle) ont pu être démontrées et les solutions générales du problème exprimées par le truchement d'une décomposition modale ont été définies. Toutefois, la mise en œuvre de cette approche nécessite au préalable une détermination du champ de déplacement et du potentiel électrique. S'il semble tout à fait utopique de vouloir calculer les solutions exactes du problème considéré, une approximation peut toutefois être proposée. L'approche retenue est la méthode d'approximation de Rayleigh-Ritz où le champ de déplacement s'écrit comme la combinaison linéaire de fonctions qui vérifient conjointement les relations de continuité et les conditions aux limites cinématiques. La mise en équation du problème et l'obtention des équations du mouvement consistent par conséquent en l'application du principe de moindre action selon le champ de déplacement approximé et les coordonnées généralisées choisies [46].

### **2.5.4. Méthode des éléments finis**

L'arrivée du calcul numérique et de méthodes de résolution performantes par ordinateur a permis de populariser la méthode des éléments finis qui est apparue avec l'analyse des structures, née vers 1850. Depuis 1960, de nombreux progrès ont été accomplis et la méthode des éléments finis subit un développement rapide. Elle permet de résoudre de façon approchée le problème mécanique continu. Elle consiste à discrétiser le matériau à analyser à l'aide d'éléments de base tels que des quadrilatères ou des triangles pour un problème à deux dimensions, c'est le maillage. C'est un modèle généralisé car il s'applique à la totalité des problèmes de physique et d'ingénierie rencontrés dans la pratique. Il est particulièrement bien adapté dans le cas des milieux hétérogènes. Dans la résolution, les déplacements mécaniques, les forces mécaniques, le potentiel électrique et la charge électrique sont calculés aux nœuds de chaque élément. A partir de ces quantités mécaniques et électriques, les grandeurs relatives à chaque élément sont calculées à l'aide de combinaisons linéaires de fonctions polynomiales d'interpolation. En substituant la contrainte mécanique, le déplacement électrique, le déplacement mécanique et le potentiel électrique dans les équations de propagation, on obtient le système d'équations



différentielles telles que les degrés de liberté du problème représentent le nombre d'inconnues du système d'équations associé à tous les nœuds. Avec les progrès croissants réalisés en terme de moyens informatiques, des logiciels de calcul par éléments finis, notamment Ansys et Comsol, ont été utilisés pour la modélisation à trois dimensions des transformateurs piézoélectriques.

## **2.6. Conclusion**

Le principe de fonctionnement du transformateur piézoélectrique qui exploite les phénomènes piézoélectriques direct et inverse est présenté dans ce chapitre. Inventé dans la première moitié du vingtième siècle, il est encore utilisé aujourd'hui. Il a été rappelé qu'il est appliqué dans plusieurs domaines. A cause des propriétés résonantes de ce composant, une modélisation est nécessaire. Comparés aux transducteurs et autres résonateurs piézoélectriques, la modélisation du comportement électromécanique des transformateurs piézoélectriques a été plus tardive. Les modèles classiques reposent généralement sur l'exploitation d'un schéma électrique équivalent obtenu à partir des hypothèses unidimensionnelles qui ne peut pas tenir compte des effets des autres dimensions. Aujourd'hui plusieurs modèles sont présentés dans la littérature. Ils ont été décrits dans le présent chapitre. Nous présentons dans le chapitre suivant une nouvelle méthode pour modéliser un transformateur piézoélectrique.

### *Références bibliographiques*

- [1]. Y. H. Hsu, C. K. Lee and W. H. Hsiao, «Electrical and mechanical fully coupled theory and experimental verification of Rosen-type piezoelectric transformers », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, Vol. 52, no. 10, pp. 1829-1839, 2005.
- [2]. T.Andersen , M. A. E. Andersen, O. C. Thomsen, « Simulation of piezoelectric transformers with COMSOL », in *COMSOL*, Milan. 2012.
- [3]. F. Boukazouha, G. Poulin-Vittrant, L.P.Tran-Huu-Hue, M. Bavencoffe, F. Boubenider, M. Rguiti, et M. A Lethiecq, « Comparison of 1D analytical model and 3D finite element analysis with experiments for a Rosen-type piezoelectric transformer », *Ultrasonics*, Vol. 60, pp. 41–50, 2015.
- [4]. F. Boukazouha, F. Boubenider et G. Poulin-Vittrant, « Calcul et mesure du gain en tension à vide d'un transformateur piézoélectrique », *3ème Conférence Internationale sur le Soudage CND et Industrie des Matériaux et Alliages*, Oran.2012.
- [5]. H. L. Li, H. H. Jun et L. W. C. «Helen, Finiteelement analysis on piezoelectrc ring transformer », in *IEEE Ultrasonics symposium*, 2002, pp. 1177-1180.
- [6]. M. Ajay, B. Chole, G. Fernandes, « Performance study on piezoelectric transformers », *2nd International Conference on Power Electronics Systems and Applications*, Mumbai, 2006, pp 85-86.
- [7]. S. Emmanuel, D. Vasic et C. François, « Transformateurs statiques piézoélectriques », *Techniques de l'ingénieur*. D 3015, 2012.
- [8]. M. Thomas, « Contribution à l'étude des générateurs piézoélectriques pour la génération des décharges plasmas », Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2015.
- [9]. D. Vasic, « Apports des matériaux piézoélectriques pour l'intégration hybride et monolithique des transformateurs », Thèse de doctorat, E N S de Cachan, France, 2003.
- [10]. S. Bronstein, « *Piezoelectric Transformers in Power Electronics* », thèse de doctorat, Université de Negev, 2005.
- [11]. A.M. Nicolson, « Piezo-Electric Crystal Transformer », *U.S. Patent* no. 1,829,234, 25 January 1927.

- [12]. A.M. Nicolson, « Multiple Piezo-Electric Transformer », *U.S. Patent*, no. 1,863,345, 11 March 1927.
- [13]. A. M. Nicolson, « Piezoelectric Crystal Converter-Generator », *U.S. Patent*, no. 1,975,517, 2 May 1931.
- [14]. E. Wainer; A.N. Salomon, « Electrical Reports of the Titanium Alloy Manufacturing Division », Report 10; National Lead Co.: Winchester, MA, USA, 1943.
- [15]. R.B. Gray, « Transducer and Method of Making the Same ». *U.S. Patent*, no. 2,486,560, 20 September 1946.
- [16]. S.Roberts, « Dielectric and piezoelectric properties of barium titanate ». *Phys. Rev.*, Vol. 71, pp. 890–895, 1947.
- [17]. W.P. Mason, « Electrostrictive effect in barium titanate ceramics », *Phys. Rev.*, Vol. 74, pp. 1134–1147, 1948.
- [18]. H. Jaffe, « Properties of electromechanical ceramics ». *Electronics*, Vol. 21, pp. 128–130, 1948.
- [19]. S.W. Tehon, « Final Report for Ceramic Power Transformers », General Electric Company to Navy Department, BuShips Contract NObsr-81369, June 1960–January 1962; General Electric Company: Syracuse, NY, USA, 1962.
- [20]. D.A. Berlincourt, « Piezoelectric Starter and Ballast for Gaseous Discharge Lamps ». *U.S. Patent*, no. 3,764,848, 15 March 1972.
- [21]. V.Magori, « Trigger Device and Piezo-Ignition Coupler with Galvanic Decoupling ». *U.S. Patent*, no. 4,392,074, 9 April 1981.
- [22]. R.A.Leskovec; J.M. Davenport, O.B. Burman, « Autoresonant Piezoelectric Transformer Signal Coupler ». *U.S. Patent*, no. 4,584,499, 12 April 1985.
- [23]. E. M. Syed, F. P. Dawson, and E. S. Rogers, « Analysis and modeling of a Rosen-Type piezoelectric transformer », in *Proc. IEEE PESC*, 2001, pp.1761-1766.

- [24]. Y. Sasaki, M. Yamamoto, A. Ochi, T. Inoue, and S. Takahashi, « Small multilayer piezoelectric transformers with high power density characteristics of second and third-mode Rosen-Type transformers », *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 38, pp. 5598-5602, 1999.
- [25]. K. Kanayama, N. Maruko, and H. Saigoh, « Development of the multilayer alternately poled piezoelectric transformer », *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 37, pp. 2891-2895, 1998,.
- [26]. C. Y. Lin and F. C. Lee, « Piezoelectric transformer and its application », in *Proc. IEEE VPEC*, 1995, pp. 129-136.
- [27]. C. Y. Lin, « Design and analysis of piezoelectric transformer converters », thèse de doctorat, Virginia. 1997.
- [28]. K. Sacurai, K. Ohnishi and Y. Tomikawa, « Presentation of a new equivalent circuit of a piezoelectric transformer under high-power operation », *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 38, pp. 5592-5597, 1999.
- [29]. J. Hu, Y. Fuda, M. Katsuno, and T. Yoshida, « A study on the rectangular bar-shaped multilayer piezoelectric transformer using length extension mode », *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 38, pp. 3208-3212, 1999.
- [30]. J. Navas, T. Bove, J. A. Cobos, F. Nuno, K. Brebol, « Miniaturized battery charger using piezoelectric transformer », in *Proc. IEEE PESC*, 2001, pp. 492-496.
- [31]. A. Oliver, R. Prieto, M. Sanz, J. A. Cobos, and J. Uceda, « 1D modeling of multi-layer piezoelectric transformers », in *Proc. IEEE PESC*, 2001, pp. 2097-2102.
- [32]. M. J. Prieto, J. Diaz, J. A. Martin, F. Nuno, « A very simple DC/DC converter using piezoelectric transformer », in *Proc. IEEE PESC*, 2001, pp. 1755-1760.
- [33]. T. Bove, W. Wolny, E. Ringgaard, K. Breboel, « New type of piezoelectric transformer with very high power density », in *Proc IEEE PESC*, 2002, pp. 2005-2009.
- [34]. T. Zaitso, O. Ohnishi, T. Inoue, M. Shoyama, T. Ninomiya, F. Lee, and G. Hua, « Piezoelectric transformer operating in thickness extensional vibration and its application to switching converter », in *Proc. IEEE PESC*, 1994, pp. 585-589.

- [35]. J. Hu, H. Li, H. Chan, and C. Choy, « A ring-shaped piezoelectric transformer operating in the third symmetric extensional vibration mode », *Sensors and Actuators*, Vol. 88, pp. 79-86, 2001.
- [36]. K. Sacurai, T. Nakazawa, S. Shindou, K. Ohnishi and Y. Tomikawa, « Experimental investigation of a piezoelectric ceramic transformer using radial vibration of disks combined with a coupling element », *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 37, pp. 2896-2900, 1998.
- [37]. R. L. Lin, F. C. Lee, and E. Baker, « Characterization of piezoelectric transformers », in *Proc. IEEE VPEC*, 2000, pp. 219-225.
- [38]. R. L. Lin, P. L. Wong, and F. C. Lee, « An equivalent circuit model of radial vibration mode piezoelectric transformers », in *Proc. IEEE VPEC*, 2000, pp. 120-125.
- [39]. C. Aida, « *Optimisation du transformateur piézoélectrique* ». Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas-Setif, Algérie, 2012.
- [40]. A.V. Carazo, « Piezoelectric transformers for space applications », In *MRS Proceedings: Materials Research Society: Warrendale, PA, USA*, 2003; Vol. 785, pp. D6–D8.
- [41]. A.V. Carazo, « Transoner Power Transfer for TWT Power Systems » NASA SBIR 2001 Phase II. Available online: <https://www.sbir.gov/sbirsearch/detail/164409> (accessed on 22 April 2016).
- [42]. A.V. Carazo, « *Novel High-Voltage, High-Power Piezoelectric Transformer Developed and Demonstrated for Space Communications Applications* »; Research & Technology NASA Glenn Research Center: Cleveland, OH, USA, 2003; pp. 123–124.
- [43]. A.V. Carazo, « Piezoelectric Transformer and Modular Connections for High Power and High Voltage Power Supplies », U.S. Patent No. 7,019,993, 12 May 2004
- [44]. A.V. Carazo, « Piezoelectric Transformers: An Historical Review », *Actuator*, Vol. 5, no. 12, pp. 1-22, 2016.
- [45]. A.V. Carazo, « Novel Piezoelectric Transducers for High Voltage Measurements », Thèse de doctorat, Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2000.
- [46]. C. Nadal, et F. Pigache, « Multimodal electromechanical model of piezoelectric transformers by Hamilton's principle », *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 56, no. 11, pp. 2530-2543, 2009.

## **Chapitre 3**

---

---

# **EXTENSION DE LA METHODE POLYNOMIALE A L'ETUDE UNIDIMENSIONNELLE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE**

---

---

### 3.1. Introduction

Un transformateur piézoélectrique est fabriqué par la combinaison de deux céramiques piézoélectriques [1-4]. Son comportement dépend de plusieurs paramètres avec un optimum lorsqu'il fonctionne au voisinage de sa fréquence de résonance. Cela requiert un bon modèle pour le décrire [5-8]. Ce chapitre montre une nouvelle approche utilisant le polynôme de Legendre appliqué à la modélisation du transformateur piézoélectrique. L'objectif est de donner un nouvel outil mathématique permettant d'effectuer l'analyse des modes libres et de la réponse harmonique de transformateur piézoélectrique de type Rosen qui a forme la plus simple par rapport aux autres transformateurs et le plus utilisé comme élévateur haute tension électrique en équipement électronique. La structure à étudier est décrite avant d'écrire les équations constitutives et les équations de propagation des ondes dans le transformateur. On présente ensuite les résultats de simulation numérique en précisant le domaine de faisabilité du modèle.

### 3.2. Formulation mathématique

#### 3.2.1. Description de la structure

La structure étudiée est un transformateur piézoélectrique de type Rosen qui repose sur l'association de deux éléments ferroélectriques, l'un, la partie primaire, faisant intervenir l'effet piézoélectrique inverse l'autre, la partie secondaire, l'effet direct. L'élément primaire est polarisé suivant l'épaisseur tandis que le secondaire est polarisé suivant sa plus grande longueur. Les deux éléments font donc intervenir le mode transversal et longitudinal. La figure 3.1 est une représentation schématique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $h$ . Les longueurs respectives du primaire et du secondaire sont notées  $L_1$  et  $L_2$ . L'origine du repère du système de coordonnées cartésiennes  $(O, x_1, x_2, x_3)$  est située au centre de l'interface entre le primaire et le secondaire. Le primaire compris dans l'intervalle  $-L_1 < x_1 < 0$  est composé de  $n$  couches d'épaisseur respective  $h/n$ , chacune d'entre elles étant alimentée par une tension sinusoïdale d'amplitude  $v_p$  et de pulsation  $\omega$ . Le secondaire est situé dans l'intervalle  $0 < x_1 < L_2$  et l'électrode de sortie repérée par l'abscisse  $x_1 = L_2$  est reliée à une résistance de charge  $R_{ch}$ . Nous faisons l'hypothèse que le transformateur est fabriqué par un matériau PZT de classe 6mm et que les axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  et  $Ox_3$  coïncident respectivement avec les axes cristallographiques X, Y et Z.

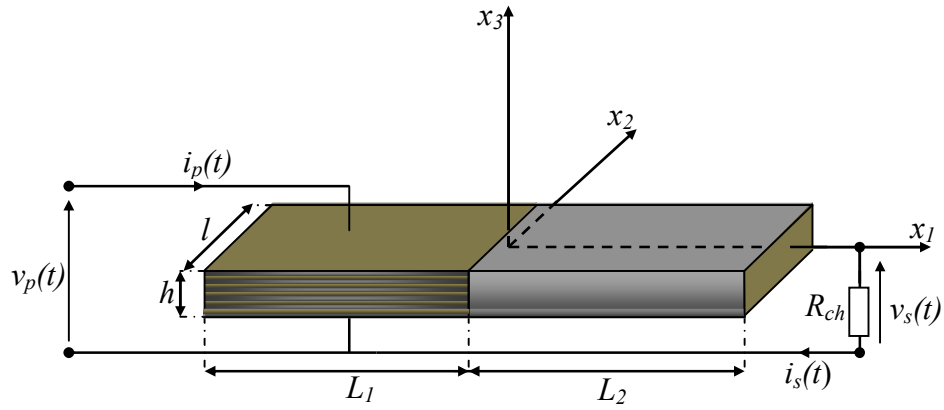


Figure 3.1 : Transformateur piézoélectrique de type Rosen multicouche.

### 3.2.2. Hypothèses mécaniques :

- Le transformateur est considéré comme une fine poutre, la contrainte normale suivant l'axe  $(Ox_1)$  de la structure est supposée prépondérante si bien que  $T_1 \gg T_2$  et  $T_1 \gg T_3$ , elle est supposée libre de toute contrainte de cisaillement ce qui impose :

$$T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0 ; \quad (3.1a)$$

- La dépendance des trois déplacements avec les coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et les déplacements suivant les directions  $(Ox_2)$  et  $(Ox_3)$  sont négligés. Les relations suivantes sont par conséquent vérifiées :

$$u_1(x_k, t) = 0 \text{ si } k \neq 1 ; u_1 = u_2 = 0 ; \quad (3.1b)$$

- Les épaisseurs des électrodes sont négligeables.

- Le transformateur piézoélectrique est supposé ne subir aucune contrainte à l'extrémité du primaire et du secondaire. Ces conditions aux limites dites « libre-libre » s'écrivent simplement :

$$T_1(x_1 = -L_1, t) = T_1(x_1 = L_2, t) = 0 \quad (3.1c)$$

### 3.2.3. Hypothèses électriques :

- De par la structure du primaire, l'épaisseur est infiniment mince, alors on peut dire que le potentiel varie linéairement suivant  $(Ox_3)$ . Dans ce cas :

$$E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = c^{te} \text{ et } [E] = \left[ 0 \ 0 \ -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right]^T. \quad (3.2a)$$

L'exposant  $T$  représente la transposée de matrice.



- Pour le secondaire, les composantes de l'induction électrique selon les directions ( $Ox_2$ ) et ( $Ox_3$ ) sont négligeables :

$$[D] = [D_1 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.2b)$$

### 3.2.4. Equations constitutives

Pour décrire le comportement dudit transformateur, on résout les équations de propagation des ondes dans toute la structure en utilisant les équations constitutives pour chaque partie. Dans la partie primaire un champ électrique appliqué suivant la direction  $x_3$  génère une déformation mécanique, on travaille avec les variables indépendantes déplacement mécanique et potentiel électrique dans l'équation constitutive. Du côté secondaire on travaille avec les variables indépendantes déplacements mécanique et électrique. En effet, du fait de l'approximation 1D le champ électrique au primaire et le déplacement électrique au secondaire sont uniformes.

Compte tenu des hypothèses et en utilisant la notation de Voigt dans les composantes de tenseur, les équations de la piézoélectricité au sein du primaire et du secondaire s'écrivent respectivement comme suit :

$$\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{11}^E S_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} S_1 + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3 \end{cases} \quad (3.3a)$$

$$\begin{cases} T_1 = \bar{c}_{33}^D S_1 - \bar{h}_{33} D_1 \\ E_1 = -\bar{h}_{33} S_1 + \bar{\beta}_{33}^S D_1 \end{cases} \quad (3.3b)$$

Tableau 3.1: Propriétés matérielles du transformateur piézoélectrique (TP).

Propriétés	Symboles	Valeurs
Densité	$\rho$	7600 Kg/m <sup>3</sup>
Compliances à champ E constant	$s_{11}^E$	1,256×10 <sup>-11</sup> m <sup>2</sup> /N
	$s_{33}^E$	1,610×10 <sup>-11</sup> m <sup>2</sup> /N
Permittivité	$\epsilon_{33}^T$	1454 F/m
Coefficients piézoélectriques	$d_{31}$	-1,329×10 <sup>-10</sup> C/N
	$d_{33}$	3,086×10 <sup>-10</sup> C/N
Facteur de qualité mécanique	$Q_m$	300

### 3.2.5. Equations de propagation

Les équations de propagation des ondes acoustiques dans un matériau piézoélectrique sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $u_i$  représente les composantes du déplacement mécanique suivant l'axe  $x_i$  et  $\rho$  est la masse volumique.

En utilisant la forme réduite des équations constitutives, les équations de propagation des ondes acoustiques dans les deux parties sont données par:

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dx_1} = \rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \bar{c}_{11}^E \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \\ \frac{dD_3}{dx_3} = 0 \end{cases}, \text{ pour } -L_1 \leq x_1 \leq 0 \quad (3.5a)$$

et

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dx_1} = \rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \bar{c}_{33}^D \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \\ \frac{dD_1}{dx_1} = 0 \end{cases}, \text{ pour } 0 \leq x_1 \leq L_2. \quad (3.5b)$$

## 3.3. Résolution analytique – Extension de la méthode polynomiale

### 3.3.1. Résolution polynomiale

La résolution de ces dernières équations se fait en utilisant la méthode polynomiale. Dans la résolution polynomiale, tous les paramètres et les variables sont normalisés. Nous appliquons le changement de variable suivant :  $q_1 = x_1/L$ , et utilisons la variable normalisée  $\bar{T}_1^{(R)} = T_1^{(R)} / \bar{c}_{11}^E$ .  $R$  est le numéro de la région qui est égal à 1 côté primaire et 2 côté secondaire. La pulsation est aussi normalisée et est définie par  $\Omega = \omega/\omega_p$  où  $\omega_p = (\pi/L_1) \sqrt{\bar{c}_{11}^E / \rho}$  est la pulsation de résonance de plaque du côté primaire. Le choix des variables indépendantes dans la section précédente nous permet de développer uniquement le déplacement mécanique en série de polynômes orthonormés, dans l'hypothèse unidimensionnelle, avec une forme analytique choisie pour assurer sa continuité à l'interface ( $u_1^{(1)}(0) = u_1^{(2)}(0)$ ). Ce déplacement est donné par:

$$u_1^{(1)}(q_1) = \sum_{m=0}^{+\infty} Q_m^{(1)}(q_1) p_m^{(1)}. \quad (3.6a)$$

dans la région 1 et

$$u_1^{(2)}(q_1) = \sum_{m=0}^{+\infty} Q_m^{(1)}(0) p_m^{(1)} + q_1 \sum_{m=0}^{+\infty} Q_m^{(2)}(q_1) p_m^{(2)} \quad (3.6b)$$

dans la région 2

avec  $Q_m^{(R)}(q_1) = \sqrt{\frac{(2m+1)L}{L_R}} P_m\left(\frac{2q_1L}{L_R} - (-1)^R\right)$  où  $P_m$  sont les polynômes de Legendre de degré  $m$ .  $p_m^{(R)}$

sont les coefficients du développement polynomial. Le facteur  $q_1$  dans l'expression du déplacement dans la région 2 assure la continuité à l'interface entre la partie primaire et la partie secondaire.

Pour décrire la structure et incorporer automatiquement les conditions aux limites et les continuités, fonctions porte définies comme suit [9-12] :

$$\Pi^{q_p,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } q_p \leq q_1 \leq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.7a)$$

et

$$\Pi^{0,q_s} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq q_1 \leq q_s \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (3.7b)$$

sont introduites dans les équations de propagation

$$\frac{d\bar{T}_1^s}{dq_1} = -\rho\Omega^2 \omega_p^2 u_1^s \quad (3.8)$$

où  $\bar{T}_1^s = \bar{T}_1^{(1)} \Pi^{q_p,0} + \bar{T}_1^{(2)} \Pi^{0,q_s}$  et  $u_1^s = u_1^{(1)} + u_1^{(2)}$ . L'exposant  $s$  représente la structure globale.

Cela nous donne :

$$\frac{d\bar{T}_1^{(1)}}{dq_1} \Pi^{q_p,0} + \bar{T}_1^{(1)} \delta(q_1 - q_p) + (\bar{T}_1^{(2)} - \bar{T}_1^{(1)}) \delta(q_1) + \frac{d\bar{T}_1^{(2)}}{dq_1} \Pi^{0,q_s} - \bar{T}_1^{(2)} \delta(q_1 - q_s) = -\rho\Omega^2 \omega_p^2 u_1^s \quad (3.9)$$

Dans cette dernière relation, les conditions de l'annulation des contraintes à l'extrémité de la structure, plus précisément  $\bar{T}_1^{(1)} = 0$  pour  $q_1 = q_p$  et  $\bar{T}_1^{(2)} = 0$  pour  $q_1 = q_s$ , sont imposées

respectivement par les termes  $\bar{T}_1^{(1)}\delta(q_1 - q_p)$  et  $\bar{T}_1^{(2)}\delta(q_1 - q_s)$  et la continuité à l'interface,  $\bar{T}_1^{(1)} = \bar{T}_1^{(2)}$  pour  $q_1 = 0$ , est assurée par le terme  $(\bar{T}_1^{(2)} - \bar{T}_1^{(1)})\delta(q_1)$  [9-12].

### 3.3.2. Recherche des solutions

En injectant les expressions du déplacement mécanique pour chaque partie dans les équations constitutives réduites puis ces équations constitutives dans les équations de propagation multipliées par  $Q_j^{(R)*}(q_1)$  et intégrées sur  $q_1$  de  $q_p$  jusqu'à 0 dans la région 1 et de 0 jusqu'à  $q_s$  dans la région 2, nous obtenons un système de  $2(M+1)$  équations linéaires à  $2(M+1)$  inconnues  $p_m^{(R)}$  avec un paramètre  $\Omega$  :

$$\left[ A1 + \left( \pi/q_p \right)^2 \Omega^2 M1 \right] p + C1 D1^{(2)} = D1 v_p. \quad (3.10)$$

avec  $p = \begin{bmatrix} p_m^{(1)} & p_m^{(2)} \end{bmatrix}^T$ , l'exposant  $T$  signifiant la matrice transposée. Les coefficients du développement  $p$  peuvent être obtenus à partir de cette équation matricielle. Ceci nous permet d'effectuer l'analyse des réponses en fréquence du transformateur en calculant l'admittance d'entrée et le gain en tension. Les matrices  $A1$ ,  $C1$ ,  $D1$  et  $E1$  sont données par :

$$A1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad M1 = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad C1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}, \quad D1 = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

avec

$$A_{11} = (J_{3,jm}^{q_p,0,0} + Q_j^{(1)*}(q_p) dQ_m^{(1)}(q_p) - Q_j^{(1)*}(0) dQ_m^{(1)}(0)),$$

$$A_{12} = \frac{\bar{c}_{33}}{\bar{c}_{11}} Q_j^{(1)*}(0) dQ_m^{(2)}(0),$$

$$A_{22} = \frac{\bar{c}_{33}}{\bar{c}_{11}} \left( J_{3,jm}^{0,q_s,1} + Q_j^{(2)*}(0) Q_m^{(2)}(0) - Q_j^{(2)*}(q_s) Q_m^{(2)}(q_s) - q_s Q_j^{(2)*}(q_s) dQ_m^{(2)}(q_s) \right),$$

$$A_{21} = Q_j^{(2)*}(0) dQ_m^{(1)}(0);$$

$$C_{11} = (\tilde{e}_{31} / rz) (Q_j^{(1)*}(q_p) - Q_j^{(1)*}(0)), \quad C_{21} = (\tilde{e}_{31} / rz) Q_j^{(2)*}(0);$$

$$M_{11} = J_{1,jm}^{qp,0,0}, \quad M_{21} = \sqrt{q_s} J_{1,jm}^{0,q_s,0} Q_m^{(1)}(0) \text{ et } M_{22} = J_{1,jm}^{0,q_s,1}$$

où

$$\tilde{\epsilon}_{31} = \frac{e_{31}}{\sqrt{c_{11}^E \epsilon_{33}^T}}$$

$$J_{1jm}^{q_p, 0, \gamma} = \int_{q_p}^0 Q_j^{(1)*} q_1^\gamma Q_m^{(1)} dq_1, \quad J_{1jm}^{0, q_s, \gamma} = \int_0^{q_s} Q_j^{(2)*} q_1^\gamma Q_m^{(2)} dq_1$$

$$J_{3jm}^{q_p, 0, \gamma} = \int_{q_p}^0 Q_j^{(1)*} \frac{\partial^2 (q_1^\gamma Q_m^{(1)})}{\partial q_1^2} dq_1, \quad J_{3jm}^{0, q_s, \gamma} = \int_0^{q_s} Q_j^{(2)*} \frac{\partial^2 (q_1^\gamma Q_m^{(2)})}{\partial q_1^2} dq_1.$$

### 3.4. Résultats analytiques

#### 3.4.1. Analyse harmonique

On calcule l'admittance d'entrée et le gain en tension dans cette analyse en étudiant les réponses en fréquence du transformateur à partir desquelles les autres grandeurs électriques comme le rendement en puissance et la puissance de sortie sont obtenues. L'admittance d'entrée est obtenue en calculant le courant qui circule dans les électrodes métalliques du côté primaire par l'application du théorème d'Ampère qui est donné par :

$$i_p = i\omega L \int_{q_p}^0 D_3^{(1)} dq_1 = i\omega \epsilon_{33}^{-s} l \int_{q_p}^0 \left[ \frac{\tilde{\epsilon}_{31}}{r} \frac{du_1^{(1)}}{dq_1} - \frac{1}{z} v_p \right] dq_1. \quad (3.11)$$

Après le calcul pour une tension d'entrée d'amplitude 1V, l'admittance d'entrée est

$$y_{in} = -i\Omega \omega_p C_{sp} \left( 1 - \frac{z\tilde{\epsilon}_{31}}{r} XX_y P_m^{(1)} \right), \quad (3.12)$$

avec  $C_{sp} = lL_1 \epsilon_{33}^{-s} / h$  la capacité bloquée vue du primaire et  $XX_y = Q_m^{(1)}(0) - Q_m^{(1)}(q_p)$ .

Pour déterminer la tension de sortie telle que  $v_s = \Phi^{(2)}(q_s)$ , on fait l'intégration sur  $q_1$  de 0 à  $q_s$  de la composante suivant  $Ox_1$  du champ électrique dans la région 2 donné dans les équations constitutives.

D'autre part  $v_s = R_{ch} i_s$  où  $i_s$  est le courant de sortie obtenu à partir du théorème d'Ampère du côté secondaire du TP. Après le calcul on obtient :

$$v_s = \left[ \bar{h}_{33} q_s / \left( 1 - i \frac{Q}{\Omega} \right) \right] XX_v P_m^{(2)}. \quad (3.13)$$

$XX_v = Q_m^{(2)}(q_s)$ ,  $Q$  est le facteur de qualité électrique exprimé par  $Q = 1/(R_{ch} C_{ss} \omega_p)$ , avec  $C_{ss} = lh\bar{\epsilon}_{33}^T(1 - k_{33}^2)/L_2$  la capacité bloquée vue du secondaire.

### 3.4.2. Analyse modale

On peut écrire l'équation 3.11 sous la forme d'une équation aux valeurs propres pour déterminer les fréquences de résonance :

dans le cas TP à sortie en court-circuit elle devient :

$$M1^{-1} A1_{CC} p_m = -(\pi/q_p)^2 p_m \quad (3.14a)$$

et dans le cas sortie en circuit ouvert :

$$M1^{-1} A1_{CO} p_m = -(\pi/q_p)^2 p_m \quad (3.14b)$$

## 3.5. Résultats des simulations

### 3.5.1. Convergence de la méthode

Dans la simulation numérique, la convergence des résultats est obtenue pour une valeur de l'ordre de troncature définie par  $M$  à partir de laquelle ces résultats restent constants même si on augmente les valeurs de  $M$ . Nous calculons les fréquences de résonance et d'antirésonance et l'admittance d'entrée pour différentes valeurs de l'ordre de troncature pour étudier la convergence de la méthode polynomiale proposée.

La figure 3.2 représente l'admittance électrique du transformateur piézoélectrique pour une structure unidimensionnelle avec différentes valeurs des ordres de troncature  $M$ . Sur toute la gamme des fréquences données sur l'axe des abscisses, nous remarquons que la convergence du premier mode est atteinte pour  $M = 5$  et celle du deuxième mode pour  $M = 7$ . A partir de  $M = 9$ , les fréquences de résonance qui correspondent à l'admittance maximale pour les trois premiers modes restent constantes.

Les courbes présentées dans la figure 3.3 sont la variation des fréquences de résonance parallèle en fonction de l'ordre de troncature pour les quatre premiers modes du transformateur piézoélectrique de type Rosen. On constate que chaque courbe devient invariante à partir d'une valeur de  $M$  lorsqu'on augmente cette valeur. Pour mieux expliquer ces figures, quelques valeurs dans ces courbes sont relevées et données dans le tableau 3.1. et on observe que lorsque  $M = 5$  la convergence du premier mode pour la fréquence d'antirésonance est obtenue ; pour  $M$  supérieur ou égal à 9 une valeur constante des seconde et troisième fréquences propres est obtenue ; le

quatrième mode ne change pas en valeur à partir de  $M=11$ . Cette convergence est identique à celle du transformateur à secondaire en court-circuit. Cela signifie que le modèle polynomial restitue la fréquence de résonance et l'admittance électrique du transformateur piézoélectrique à partir de  $M=11$ .

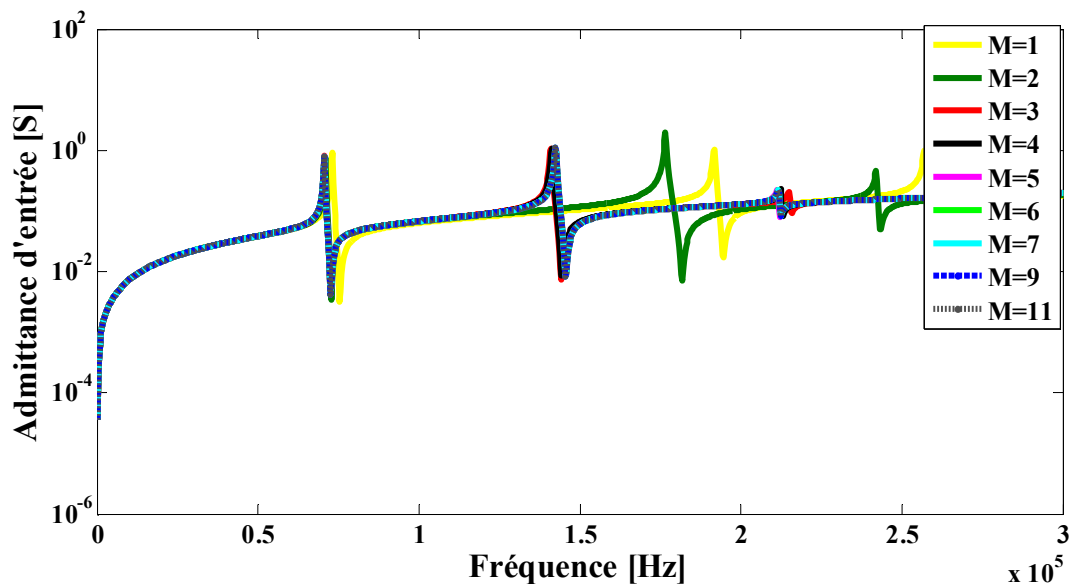


Figure 3.2 : Etude de convergence du modèle polynomial 1D.

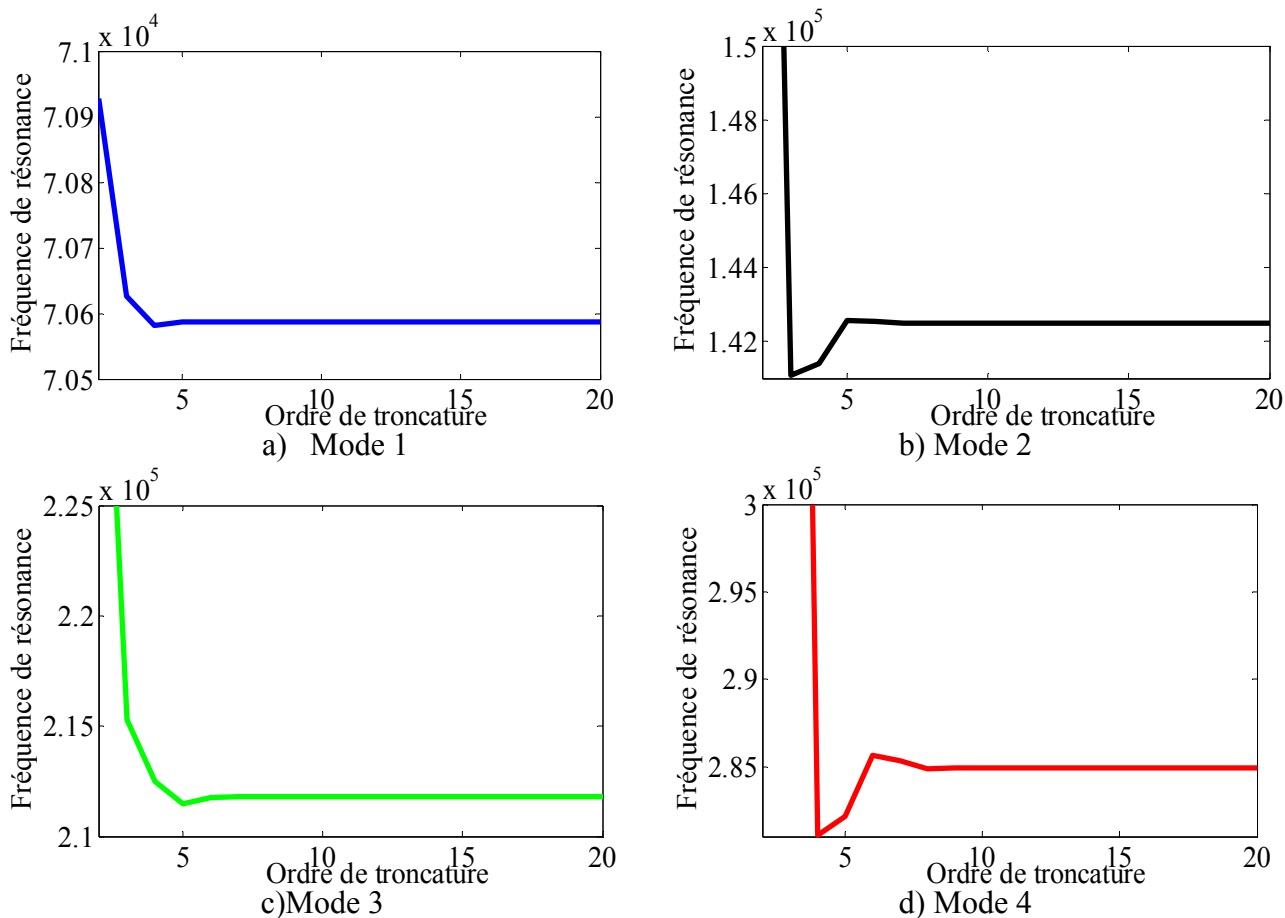


Figure 3.3 : Fréquence de résonance en Hertz en fonction de l'ordre de troncature.

Tableau 3.1 : Convergence de la méthode polynomiale pour la fréquence [en Hz].

Ordre de troncature	M=3	M=5	M=7	M=9	M=11	M=13	M=15	M=20
Mode 1	70625	70587	70587	70587	70587	70587	70587	70587
Mode 2	141078	142561	142503	142504	142504	142504	142504	142504
Mode 3	215271	211475	211812	211796	211796	211796	211796	211796
Mode 4	382785	282177	285341	284920	284939	284939	284939	284939

### 3.5.2. Validation de la méthode

La convergence de la méthode étant établie, pour valider notre modèle les fréquences de résonance et d'anti-résonance, l'admittance d'entrée électrique et le gain en tension sont calculés en comparant les résultats numériques calculés par les approches polynomiales aux résultats obtenus par la modélisation analytique, outil d'optimisation le plus utilisé, détaillée dans l'annexe B [7]. L'erreur relative associée est calculée comme suit pour, respectivement, les fréquences de résonance, les fréquences d'anti-résonance, l'admittance et le gain en tension [9-13]:

$$\varepsilon_{f_r}(\%) = 100 \times \left| \left( f_{r_{anal}} - f_{r_{pol}} \right) / f_{r_{anal}} \right|, \quad (3.15a)$$

$$\varepsilon_{f_a}(\%) = 100 \times \left| \left( f_{a_{anal}} - f_{a_{pol}} \right) / f_{a_{anal}} \right|, \quad (3.15b)$$

$$\varepsilon_y(\%) = 100 \times \left| \left( |y_{in_{anal}}| - |y_{in_{pol}}| \right) / |y_{in_{anal}}| \right|, \quad (3.15c)$$

et

$$\varepsilon_G(\%) = 100 \times \left| \left( |G|_{anal} - |G|_{pol} \right) / |G|_{anal} \right|, \quad (3.15d)$$

où les indices *anal* et *pol* désignent respectivement analytique et polynomial. *G* désigne l'amplitude du gain en tension. Les paramètres des matériaux utilisés dans les simulations sont donnés dans le tableau 3.1.

#### 3.5.2.1. Fréquences propres

Les fréquences de résonance et d'anti-résonance d'un TP sont données, respectivement, dans le tableau 3.3 et le tableau 3.4 avec M=11. Les résultats obtenus par l'approche polynomiale sont en très bon accord avec les résultats de la méthode analytique. Ces résultats valident notre approche polynomiale pour l'analyse modale du TP. De plus, contrairement à la méthode analytique pour laquelle les fréquences propres sont obtenues par une résolution



graphique, notre méthode peut les calculer directement sans approximation. C'est l'un des avantages de l'utilisation d'une approche polynomiale pour la modélisation d'un transformateur piézoélectrique.

Tableau 3.2 : Fréquence de résonance [en Hz].

$f_{rpol}$	$f_{ranal}$	$\epsilon_f \times 10^{-3}$
61767,71	61767,65	0,10
125713,53	125713,05	0,38
208752,03	208752,05	0,00
284935,97	284936,23	0,11

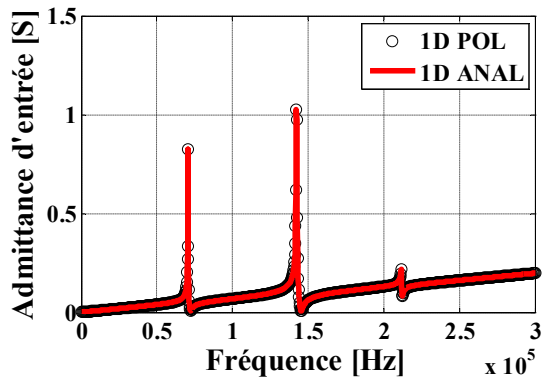
Tableau 3.3 : Fréquence d'anti-résonance [en Hz].

$f_{apol}$	$f_{aanal}$	$\epsilon_f \times 10^{-4}$
70587,54	70587,53	0,13
142504,77	142504,83	0,36
211796,83	211796,76	0,30
284940,12	284939,67	1,61

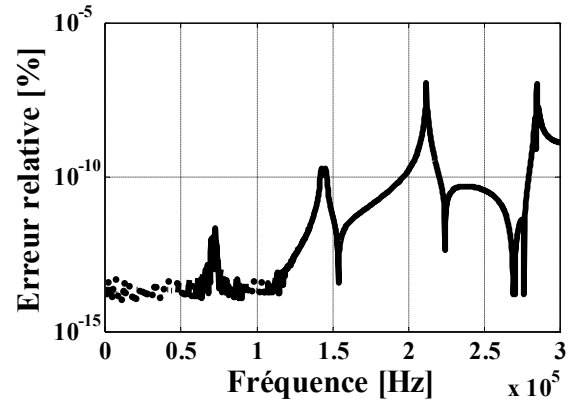
### 3.5.2.2. Admittance d'entrée

Dans l'étude des vibrations forcées, la réponse harmonique du transformateur a été calculée pour une tension sinusoïdale d'amplitude 1 V appliquée au primaire, avec une résistance de charge connectée au secondaire. Les pertes mécaniques dans le matériau sont introduites à l'aide de constantes élastiques complexes  $s_{11}^E$  et  $s_{33}^E$  qui sont remplacées par  $s_{11}^E (1 - i/Q_m)$  et  $s_{33}^E (1 - i/Q_m)$  [7] où  $Q_m$  est défini dans le tableau 3.1.

La figure 3.4a donne l'amplitude de l'admittance d'entrée avec un ordre de troncature  $M = 11$  en fonction de fréquence de la tension sinusoïdale appliquée au primaire. Les résultats via la méthode polynomiale sont en accord étroit avec ceux calculés analytiquement représentés par une ligne continue avec une erreur relative inférieure à  $10^{-6}\%$  qui est présentée sur la figure 3.4b. De plus, à proximité des fréquences d'anti-résonance que nous avons obtenues ci-dessus, l'amplitude de l'admittance varie brusquement avec la fréquence et on observe alors les valeurs maximales de l'erreur relative, c'est-à-dire qu'au voisinage des résonances la méthode polynomiale rencontre des difficultés sur la convergence mais du point de vue valeur l'erreur est acceptable.



a) Amplitude de l'admittance d'entrée

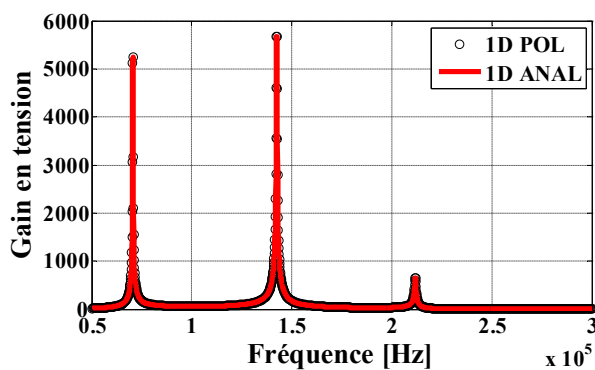


b) Erreur relative entre les deux méthodes

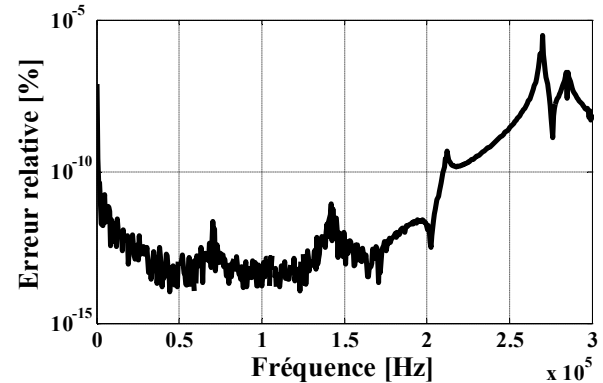
Figure 3.4: Admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert.

### 3.5.2.3. Gain en tension

Le gain en tension en fonction de la fréquence calculé avec deux méthodes différentes est présenté sur la figure 3.5a pour le transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert. Les courbes dans cette figure montrent que les approches polynomiale et analytique ont des résultats en bon accord avec une erreur relative présentée dans la figure 3.5b qui ne dépasse pas  $10^{-5}$  %.



a) Amplitude du gain en tension

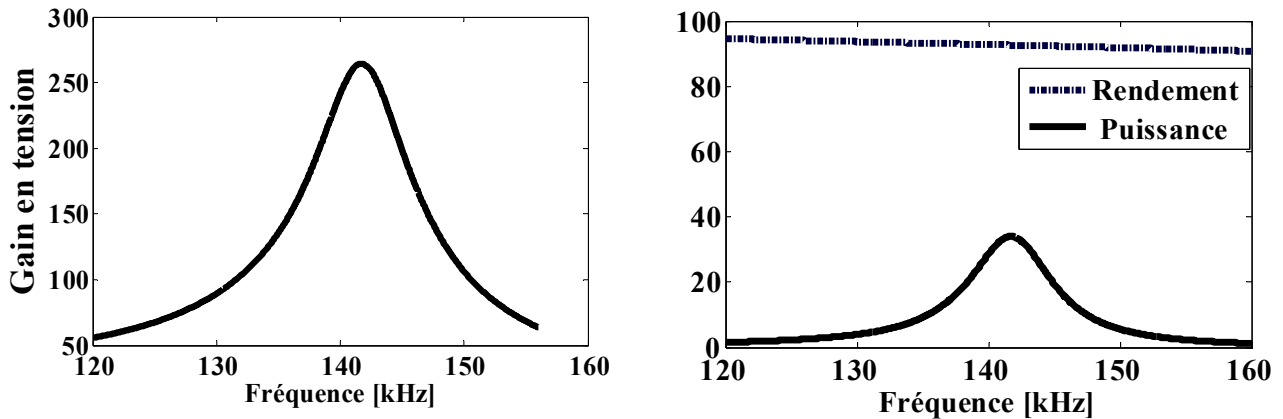


b) Erreur relative

Figure 3.5 : Gain en tension en fonction de la fréquence.

Le gain en tension est maximal au voisinage des fréquences de résonance et le plus important est celui du deuxième mode. Au voisinage de ce mode, la figure 3.6a donne le tracé fréquentiel du gain en tension du transformateur et la figure 3.6b montre celui de la puissance de sortie et du rendement en puissance, définis dans l'annexe B, pour une charge ( $R_{ch}$ ) égale à 1 M $\Omega$ . Il est bien vérifié que, pour  $R_{ch}$  constante, une géométrie et une qualité de matériau données, le gain en tension, la puissance de sortie et le rendement sont ceux d'un filtre passe-bande. Les performances du transformateur piézoélectrique sont donc très fortement dépendantes de la fréquence de fonctionnement et ne sont véritablement intéressantes qu'au voisinage de la

fréquence de résonance  $f_r$ . Nous voyons donc d'ores et déjà que la fréquence d'alimentation doit être asservie à la fréquence de résonance afin d'obtenir les meilleures performances du transformateur [1, 3, 7, 13]. Il est à noter que la fréquence de résonance et les autres grandeurs électriques du transformateur varient en fonction de la charge, ceci sera détaillé dans la sous-section suivante.



a) Module du gain en fonction de la fréquence      b) Puissance de sortie et rendement

Figure 3.6 : Évolution fréquentielle du gain, de la puissance et du rendement pour  $R_{ch}=1M\Omega$ .

### 3.5.3. Exploitation de la méthode

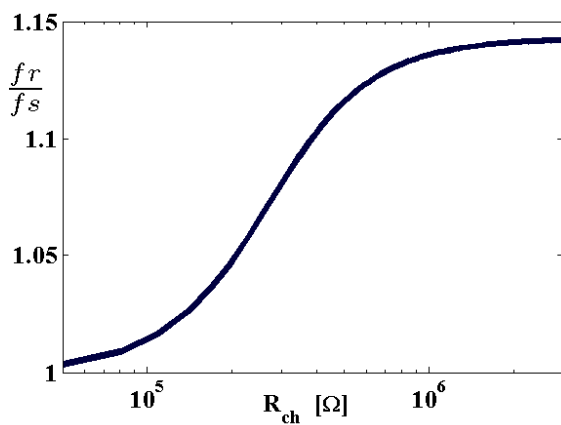
#### 3.5.3.1. Dépendance de la résistance de charge

##### ❖ Influence sur la fréquence de résonance

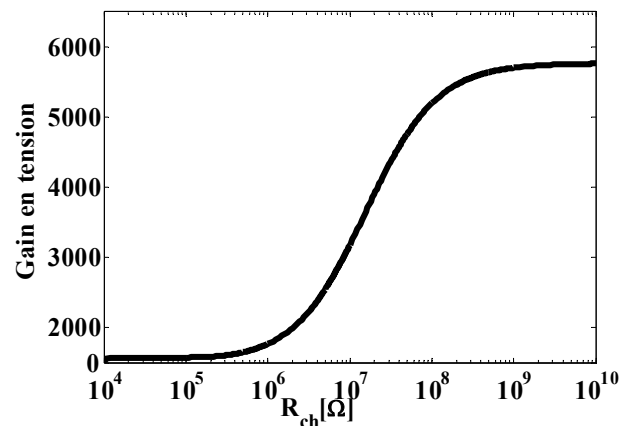
La variation en fonction de la résistance de charge de la fréquence de résonance  $f_r$  ramenée à la fréquence de résonance série  $f_s$  de la structure est tracée dans la figure 3.7a. On constate que la fréquence de résonance est très influencée par le niveau de charge que l'on met au secondaire du transformateur et évolue, de manière croissante, entre les fréquences de résonance correspondant au cas série et au cas parallèle. Plus la différence  $\Delta f = f_p - f_s$  est importante plus cette dépendance est forte. Cette variation de  $f_r$  peut être préjudiciable lors d'un fonctionnement sur charge variable et contribue à dégrader très fortement les performances du transformateur. Pour pallier ce problème, un dispositif d'asservissement de la fréquence d'alimentation du transformateur est nécessaire de façon à l'ajuster en fonction du niveau de charge. En outre, la charge résistive placée au secondaire n'influe pas sur la fréquence de fonctionnement de la structure lorsque  $\Delta f$  est nulle. Cependant, toute annulation de cet intervalle de fréquence dégrade la puissance et le rendement du transformateur [1, 3, 7, 13].

### ❖ Influence sur le gain, la puissance et le rendement

La figure 3.7b donne l'évolution du gain en tension en fonction de la charge à tension d'entrée constante avec la fréquence asservie sur la fréquence de résonance. Au delà de la charge optimale qui est égale à  $5 \times 10^5 \Omega$  le gain en tension augmente jusqu'à sa valeur maximale. Le transformateur présente un gain à vide important (grand facteur de qualité  $Q$ ). Pour des charges importantes, le gain en tension est considérable. Physiquement, si la valeur de la charge est très importante, les électrodes de sortie sont pratiquement en circuit ouvert [5, 14]. Dans ce cas, la tension de sortie est élevée, et le courant de sortie tend vers zéro. La fréquence de résonance s'apparente alors à la fréquence parallèle  $f_p$ . On voit bien que le transformateur piézoélectrique de type Rosen est un élévateur de tension [13].



a) Fréquence de résonance vs  $R_{ch}$

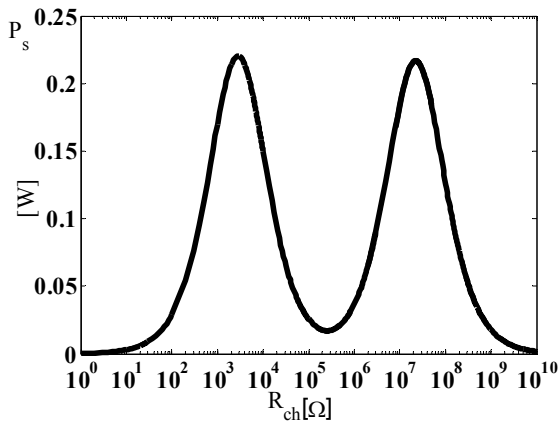


b) Gain en tension du transformateur vs  $R_{ch}$

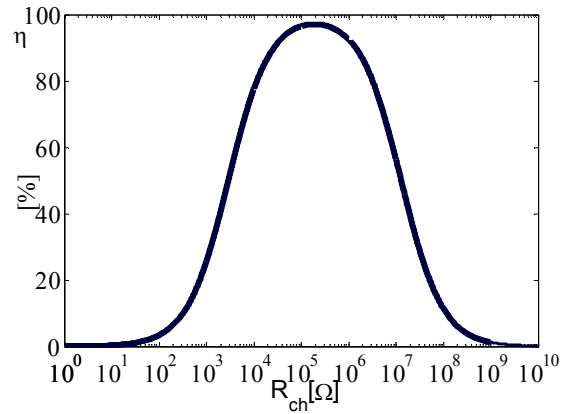
Figure 3.7 : Variation de la fréquence de résonance et gain en tension en fonction de la charge du TP.

La puissance transmise à la charge est représentée sur la figure 3.8a. La courbe de puissance est principalement caractérisée par trois extrema locaux : deux (2) maxima et un (1) minimum. La puissance est maximale lorsque la vibration du transformateur, lors de la conversion de l'énergie au secondaire, n'est pas trop amortie [13]. Les deux maxima conduisent à un rendement de 50 % et à deux valeurs très distinctes du gain en tension et correspondent à une adaptation de la charge [3]. Lorsque la conversion d'énergie au secondaire est maximale, correspondant au minimum de la vitesse de vibration, l'amortissement induit ne permet pas de transférer une quantité importante d'énergie [13], d'où la présence d'un minimum pour cette valeur particulière de résistance.

La figure 3.8b représente le rendement du transformateur en fonction de la charge. Contrairement à la puissance transmise à la charge, le rendement n'admet qu'un seul maximum correspondant à la charge pour laquelle la vitesse de particule dans la structure est minimale.



(a) La puissance transmise par le TP en fonction de la charge



(b) Le rendement du TP en fonction de la charge

Figure 3.8 : La puissance et le rendement du transformateur en fonction de la charge.

En termes de fonctionnement et de dimensionnement, un choix pourra être fait entre ces deux situations.

### 3.5.3.2. Profils des déplacements mécaniques et potentiels électriques

Chaque valeur propre trouvée correspond à un vecteur propre qui nous permet de calculer le déplacement mécanique et le potentiel électrique pour chaque mode. La figure 3.9a montre les profils de déplacement mécanique du transformateur étudié pour les quatre premiers modes calculés par la méthode polynomiale pour un transformateur à sortie en circuit ouvert. La continuité imposée sur le déplacement mécanique est vérifiée sur ces résultats.

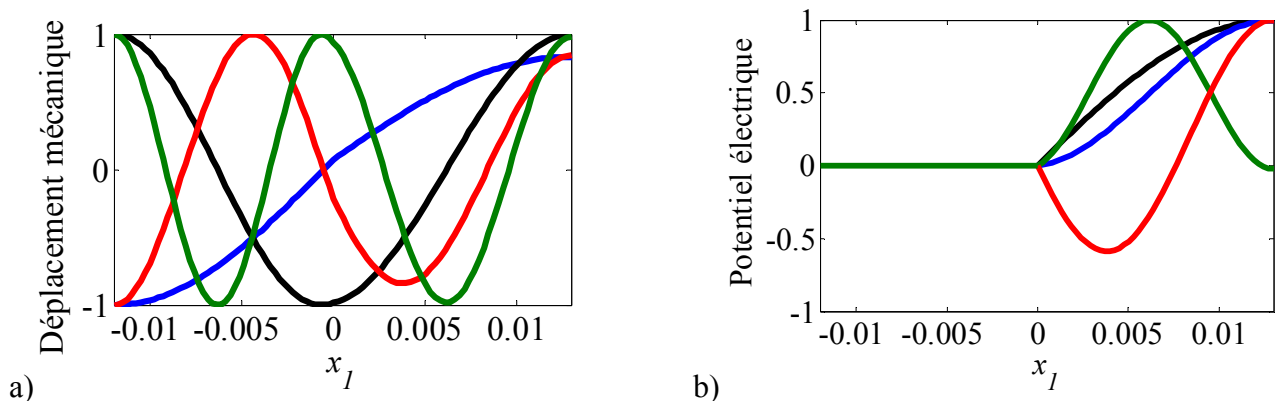


Figure 3.9: Profil de déplacement mécanique et potentiel électrique.

La figure 3.9b permet de visualiser la répartition spatiale du potentiel électrique pour les quatre premiers modes d'élongation selon ( $Ox_1$ ) dans le cas d'un fonctionnement en circuit ouvert calculé en utilisant la méthode polynomiale. Les conditions aux limites et les continuités sont vérifiées par les résultats présentés. D'après ces courbes une variation importante de potentiel

électrique dans la partie secondaire  $x_1 \in [0, L_2]$  est observée. Cela est dû à l'accumulation spatiale de la tension générée dans cette partie. Le taux de changement de potentiel  $\Phi^{(2)}$  est grand près de  $x_1$  où la contrainte d'extension est grande.

### 3.5.3.3. Coefficient de couplage électromécanique

Le modèle polynomial est un outil de pré-dimensionnement. Nous avons donc mené une étude de la variation des fréquences de résonance, d'antirésonance et du coefficient de couplage électromécanique en fonction de la proportion longueur du primaire sur longueur totale de la structure. Ce choix paramétrique est motivé par sa forte incidence sur le comportement électromécanique de la structure. La figure 3.10 donne les fréquences de résonance série et parallèle pour une évolution du rapport  $\tau=L_1/L$  entre 0% et 100%. On constate sur cette figure que les fréquences de résonance et d'antirésonance et la différence  $\Delta f=f_p-f_s$ , qui rend compte de l'influence de la charge sur les fréquences, varie avec le rapport  $\tau$ . La différence  $\Delta f$  est reliée à un facteur de mérite des transformateurs piézoélectriques : le coefficient de couplage électromécanique  $k_{eff}^2$ . Plus cet intervalle de fréquence sera élevé, plus grand sera le coefficient  $k_{eff}^2$ . Ce facteur dépend des dimensions de la géométrie considérée et est utile pour déterminer quel matériau piézoélectrique choisir en fonction de l'application visée [15]. Il est aussi une donnée très importante dans le dimensionnement d'un transformateur piézoélectrique. Ce coefficient définit, pour un mode vibratoire considéré, la capacité de la structure à convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique, et inversement. Nous avons tracé, sur la figure 3.11, la variation du coefficient de couplage effectif, donné par (1.16), en fonction du taux de recouvrement des électrodes au primaire, pour le deuxième mode. Le coefficient de couplage est maximal pour un rapport  $\tau$  de 0,48 à 0,6.

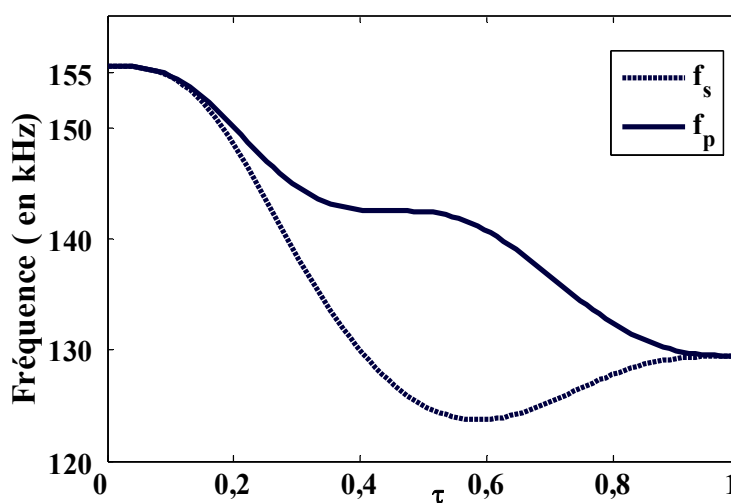


Figure 3.10: Évolution des fréquences de résonance  $f_s$  et d'antirésonance  $f_p$  en fonction du rapport  $\tau=L_1/L$  du TP.

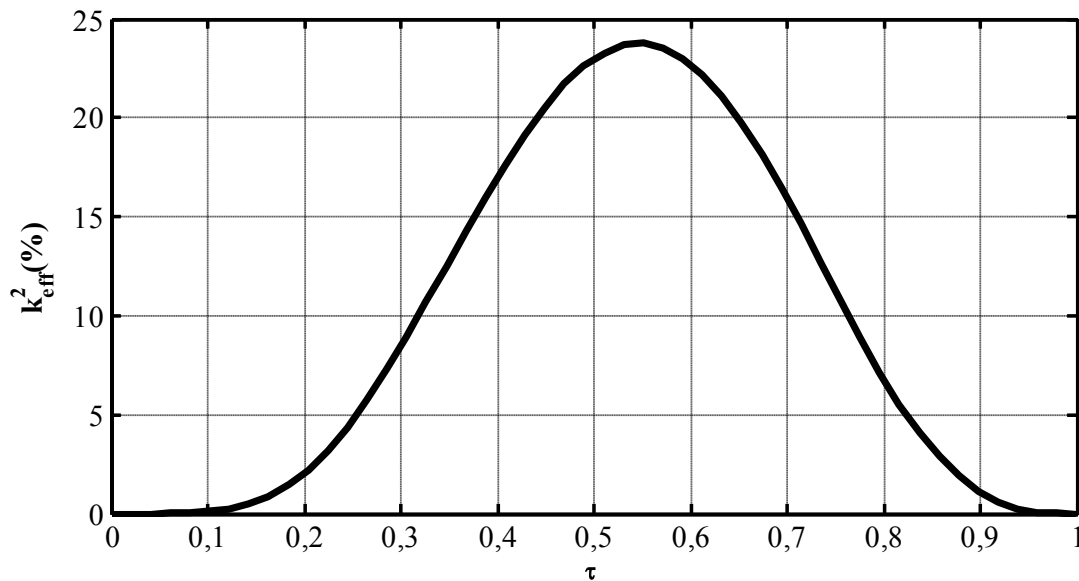


Figure 3.11: Évolution du coefficient de couplage électromécanique en fonction du rapport  $\tau=L_1/L$  du TP.

### 3.6. Limitations du modèle

Nous avons modélisé dans la section précédente le transformateur de tension de type Rosen en utilisant la méthode polynomiale 1D. Il a été démontré, avec des hypothèses particulières, que les équations constitutives se réduisent et la caractérisation du transformateur est facile à faire. Toutefois, cette méthode demeure restrictive : elle repose sur l'hypothèse qu'une seule onde longitudinale se propage selon la longueur, négligeant ainsi tous les phénomènes de couplage dans les autres directions (largeur et épaisseur). Utiliser un logiciel d'analyse par éléments finis pour modéliser les transformateurs piézoélectriques s'impose nécessairement si on veut tenir compte de toutes les vibrations. Dans notre cas, l'intérêt d'employer une méthode numérique tridimensionnelle est principalement d'étudier la limite du modèle polynomial unidimensionnel développé auparavant en comparant les résultats (1D et 3D) obtenus. Un logiciel de calcul par éléments finis a donc été utilisé pour la modélisation à trois dimensions des transformateurs piézoélectriques. Dans notre cas, nous avons utilisé le logiciel COMSOL Multiphysics. La figure 3.12 illustre les quatre premiers modes de vibration et les valeurs associées au gain en tension. Les résultats illustrés sur cette figure montrent que des différences existent entre le modèle polynomial 1D et le modèle numérique 3D avec un écart relatif sur les fréquences de résonance entre les deux modèles de 0,17 % dans le meilleur des cas (mode 1) et de 6,9 % dans le pire des cas (mode 4). En ce qui concerne le gain en tension, une différence est aussi obtenue. L'écart relatif varie entre 14 % (mode 2) et 23 % (mode 1).

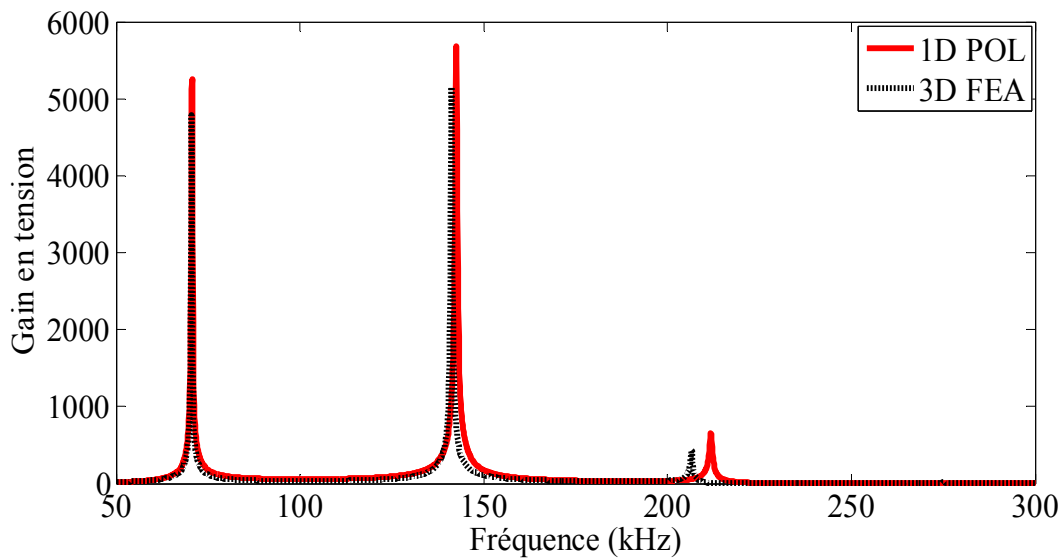


Figure 3.12 : Comparaison des gains en tension 1D et 3D.

La comparaison des gains en tension et des fréquences de résonance obtenus à l'aide du modèle polynomial 1D et du modèle numérique 3D du transformateur est suffisante pour tirer des conclusions sur la limite du modèle 1D : les écarts sur les résultats montrent que le modèle 1D ne respecte pas le comportement physique réel du TP de type Rosen. Pour réduire ces écarts sur les résultats, nous proposons un modèle 2D qui permet de tenir compte des effets de la dimension latérale du transformateur.

### 3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode polynomiale a été étendue pour la modélisation du TP de type Rosen. Les équations du mouvement sont résolues numériquement en développant chaque composante de déplacement mécanique en série de polynômes de Legendre. Les conditions aux limites et de continuités sont directement intégrées dans l'équation de propagation. Les résultats de l'analyse des modes libres et des vibrations forcées sont présentés pour le TP. Les fréquences de résonance et d'anti-résonance sont obtenues directement sans approximation. Le déplacement mécanique, l'admittance d'entrée électrique et le gain en tension sont facilement obtenus pour un TP de type Rosen par cette méthode. Dans le cadre de cette étude unidimensionnelle, les résultats numériques sont en excellent accord avec les résultats analytiques. Ce modèle 1D ne prend pas en compte les effets transversaux, un modèle bidimensionnel est abordé dans les chapitres suivants.



## *Références bibliographiques*

- [1]. S. Emmanuel, V. Dejan et C. François « Transformateurs statiques piézoélectriques », *Techniques de l'ingénieur*. D 3015, 2012.
- [2]. M. Thomas, « *Contribution à l'étude des générateurs piézoélectriques pour la génération des décharges plasmas* ». Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2015.
- [3]. D. Vasic, « *Apports des matériaux piézoélectriques pour l'intégration hybride et monolithique des transformateurs* ». Thèse de doctorat, E N S de Cachan, France, 2003.
- [4]. S. Bronstein, « *Piezoelectric Transformers in Power Electronics* ». Thèse de doctorat, Université de Negev. 2005.
- [5]. J.S. Yang, « Piezoelectric transformer structural modeling-A Review », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, Vol. 54, no. 6, pp. 1154-1170, 2007.
- [6]. A.V. Carazo, « Piezoelectric Transformers: An Historical Review », *Actuator*, Vol. 5, no. 12, pp. 1-22, 2016.
- [7]. C. Nadal, « *Contribution à la modélisation et la conception de transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma* », thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse, France, 2012.
- [8]. F. Boukazouha, G. Poulin-Vittrant, L.P. Tran-Huu-Hue, M. Bavencoffe, F. Boubenider, M. Rguiti and M. Lethiecq, « A comparison of 1D analytical model and 3D finite element analysis with experiments for a Rosen-type piezoelectric transformer », *Ultrasonics*, Vol. 60, pp. 41-50, 2015.
- [9]. J.E. Lefebvre, J.G. Yu, F.E. Ratolojanahary, L. Elmaimouni, W.J. Xu and T. Gryba, « Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices », *AIP Advances*, Vol. 16, pp. 065307, 2016.
- [10]. P.M. Rabotovao, F.E. Ratolojanahary, J.E. Lefebvre, A. Raheison, L. Elmaimouni, T. Gryba, and J.G. Yu, « Modeling of high contrast partially electroded resonators by means of a polynomial approach », *J. Applied Physics*, Vol.114, no. 12, pp.124502, 2013.
- [11]. D. J. Falimiamanana, F. E. Ratolojanahary, J. E. Lefebvre, P. M. Rabotovao, L. Elmaimouni, I. Naciri, M. Rguiti and T. Gryba, « Modeling of Rosen-type piezoelectric transformer by means of a polynomial approach », in *ICMCS*, 2018.

- [12]. I. Naciri, A. Rguiti<sup>1</sup>, L. Elmaimouni<sup>1</sup> J.E. Lefebvre, F. E. Ratolojanahary, Y.Belkassmi, S. Krit, M. Rguiti and T. Gryba, « Modeling of a PZT5A MEMS resonator disc partially metallized: Annular metallization », in *ICEMIS, 2017*.
- [13]. C. Aida, « *Optimisation du transformateur piézoélectrique* ». Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas-Setif, Algérie, 2012.
- [14]. J. Yang, L. Jinjin, & L. Jiangyu, « Analysis of a rectangular ceramic plate in electrically forced thickness-twist vibration as a piezoelectric transformer », *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, Vol. 54, no. 4, 830-835, 2007.
- [15]. G. Eric, « *Etude des résonateurs piézoélectriques dans le domaine des microondes : application au filtrage* ». Thèse de doctorat, Université de Limoges, France, 2004.

## **Chapitre 4**

---

---

# **METHODE POLYNOMIALE APPLIQUEE A L'ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE : HYPOTHESE DEFORMATION PLANE**

---

---

## 4.1. Introduction

Le chapitre précédent a permis de présenter la faisabilité de la méthode polynomiale pour modéliser un transformateur. Toutefois, le modèle unidimensionnel n'a pas permis de mettre en évidence les effets des autres dimensions latérales. On fait donc appel à un modèle bidimensionnel où on a deux possibilités pour le transformateur, chacune d'entre elles dépend des hypothèses adoptées: déformation plane ou contrainte plane. Dans ce chapitre l'approche polynomiale est utilisée pour modéliser un transformateur piézoélectrique en adoptant l'hypothèse bidimensionnelle déformation plane. La comparaison entre les résultats obtenus avec le modèle des éléments finis 2D pour la même hypothèse déformation plane et les résultats obtenus avec l'approche polynomiale est faite après avoir présenté la méthode de calcul de cette approche. Un calcul général éléments finis 3D est ensuite effectué pour déterminer si l'hypothèse déformation plane est valide ou non.

## 4.2. Structure étudiée et hypothèses

Nous prenons la même structure que celle étudiée dans le chapitre 3. C'est un transformateur piézoélectrique de type Rosen composé d'une céramique PZT dont l'axe de polarisation est différent au primaire et au secondaire. Les matrices des coefficients des matériaux pour chaque partie doivent donc respecter un système de coordonnées local. Les matrices des propriétés électromécaniques du primaire (polarisé selon l'axe  $(Ox_3)$ ) et du secondaire (polarisé selon l'axe  $(Ox_1)$ ) sont les suivantes [1-4]:

côté primaire

$$c^{(1)} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad e^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^s \end{bmatrix} \quad (4.1a)$$

et côté secondaire

$$c^{(2)} = \begin{bmatrix} c_{33}^E & c_{13}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{11}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{12}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E \end{bmatrix} e^{(2)} = \begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \quad (4.1b).$$

Dans l'hypothèse déformation plane travaillant dans le plan  $(Ox_1, Ox_3)$  le système est supposé invariant par rapport à l'axe  $Ox_2$  et donc les ondes sont uniformes suivant  $x_2$ . Au niveau des équations de propagation, les composantes du déplacement mécanique  $u_1$  et  $u_3$  sont découplées avec  $u_2$ . Par conséquent, on peut résoudre séparément les équations dépendant de  $u_2$  d'un côté et dépendant de  $u_1$  et  $u_3$  d'autre côté. Dans notre cas, on ne considère que les ondes qui se propagent dans le plan sagittal  $(Ox_1, Ox_3)$ . Nous travaillons ici en régime harmonique et la dépendance temporelle est de la forme  $\exp(i\omega t)$  où  $\omega$  désigne la pulsation de l'onde. En outre l'épaisseur des électrodes est supposée très mince et donc nous les considérons mécaniquement comme négligeables. Pendant la résolution polynomiale nous adoptons les changements de variables suivants :

$$q_1 = x_1 / L, \quad q_3 = 2x_3 / h, \quad z = h / L \quad (4.2a)$$

et nous normalisons les contraintes mécaniques et les déplacements électriques :

$$\overline{T}_{ij}^{(R)} = T_{ij}^{(R)} / \overline{c}_{11}^E, \quad \overline{D}_i^{(R)} = D_i^{(R)} / \overline{\varepsilon}_{33}^S. \quad (4.2b)$$

L'indice supérieur  $R=1,2$  représente le numéro de région dans la structure étudiée. En effet, ces variables sont différentes dans chaque partie du transformateur sauf à l'interface avec les conditions de continuité présentées dans la section suivante.

### 4.3. Conditions aux limites et continuités

Chaque partie du transformateur est caractérisée par les variables  $u$ ,  $T$ ,  $D$  et  $\Phi$ . Les conditions aux limites et de continuité appliquées à la structure étudiée sont données par les expressions suivantes en appliquant ici la forme contractée du tenseur pour les indices inférieurs des composantes de  $T$ , (1)=(11), (3)=(33), (4)=(23)=(32) et (5)=(13)=(31).

### 4.3.1. Conditions aux limites

- la composante normale de la contrainte mécanique est nulle sur les surfaces mécaniquement libres :

$$\bar{T}_1^{(1)}(q_1 = q_p) = \bar{T}_5^{(1)}(q_1 = q_p) = 0 \quad (4.3a)$$

$$\bar{T}_1^{(2)}(q_1 = q_s) = \bar{T}_5^{(2)}(q_1 = q_s) = 0 \quad (4.3b)$$

$$\bar{T}_3^{(R)}(q_3 = \pm 1) = \bar{T}_5^{(R)}(q_3 = \pm 1) = 0 \quad (4.3c)$$

- la composante normale du déplacement électrique est nulle sur les surfaces latérales et non nulle sur les surfaces métallisées :

$$\bar{D}_3^{(2)}(q_3 = \pm 1) = 0 \quad (4.3d)$$

$$\bar{D}_1^{(1)}(q_1 = q_p) = 0 \quad (4.3e)$$

-les conditions sur les potentiels électriques sont données comme suit :

$$\Phi^{(1)}(q_3 = 1) = v_p, \quad \Phi^{(1)}(q_3 = -1) = 0, \quad \Phi^{(2)}(q_1 = q_s) = v_s. \quad (4.3f)$$

### 4.3.2. Conditions de continuité

Les contraintes mécaniques, la composante de déplacement électrique suivant  $q_1$ , les composantes de déplacement mécanique et le potentiel électrique sont continus à travers l'interface entre la partie primaire et la partie secondaire, c'est-à-dire :

$$\bar{T}_1^{(1)}(q_1 = 0) = \bar{T}_1^{(2)}(q_1 = 0) \quad (4.4a)$$

$$\bar{T}_5^{(1)}(q_1 = 0) = \bar{T}_5^{(2)}(q_1 = 0) \quad (4.4b)$$

$$\bar{D}_1^{(1)}(q_1 = 0) = \bar{D}_1^{(2)}(q_1 = 0) \quad (4.4c)$$

$$u_1^{(1)}(q_1 = 0) = u_1^{(2)}(q_1 = 0) \quad (4.4d)$$

$$u_3^{(1)}(q_1 = 0) = u_3^{(2)}(q_1 = 0) \quad (4.4e)$$

$$\Phi^{(1)}(q_1 = 0) = \Phi^{(2)}(q_1 = 0) \quad (4.4f)$$

Ces conditions sont utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui sont les équations de propagation des ondes dans le milieu piézoélectrique considéré comme

diélectrique dont le principe de résolution par la méthode polynomiale est décrite dans la section qui suit.

#### 4.4. Formulation mathématique

##### 4.4.1. Equations constitutives

En utilisant toujours les variables réduites sans dimension et les paramètres physiques normalisés, les équations constitutives qui régissent la structure sont données par les expressions suivantes :

dans la région 1

$$\bar{T}_1^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}'_{11} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{c}'_{13}}{z} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_3} + \frac{2\tilde{e}'_{31}}{rz} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial q_3} \right], \quad (4.5a)$$

$$\bar{T}_3^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}'_{13} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{c}'_{33}}{z} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_3} + \frac{2\tilde{e}'_{33}}{rz} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial q_3} \right], \quad (4.5b)$$

$$\bar{T}_5^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \frac{2\tilde{c}'_{44}}{z} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_3} + \tilde{c}'_{44} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_1} + \frac{\tilde{e}'_{15}}{r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial q_1} \right], \quad (4.5c)$$

$$\bar{D}_1^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ 2 \frac{\tilde{e}'_{15} r}{z} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_3} + \tilde{e}'_{15} r \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_1} - \tilde{\varepsilon}'_{33} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial q_1} \right], \quad (4.5d)$$

$$\bar{D}_3^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{e}'_{31} r \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{e}'_{33}}{z} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial q_3} - \tilde{\varepsilon}'_{33} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial q_3} \right], \quad (4.5e)$$

et dans la région 2 :

$$\bar{T}_1^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}'_{33} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{c}'_{31}}{z} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_3} + \frac{\tilde{e}'_{31}}{r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial q_1} \right], \quad (4.6a)$$

$$\bar{T}_3^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}'_{13} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{c}'_{11}}{z} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_3} + \frac{\tilde{e}'_{31}}{r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial q_1} \right], \quad (4.6b)$$

$$\bar{T}_5^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \frac{2\tilde{c}'_{44}}{z} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{c}'_{44}}{z} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_3} + \frac{2\tilde{e}'_{15}}{rz} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial q_3} \right], \quad (4.6c)$$

$$\bar{D}_1^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{e}'_{33} r \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_1} + \frac{2\tilde{e}'_{31} r}{z} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_3} - \tilde{\varepsilon}'_{33} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial q_1} \right], \quad (4.6d)$$

$$\bar{D}_3^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \frac{2\tilde{e}'_{15} r}{z} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial q_3} + \tilde{e}'_{15} r \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial q_1} - \frac{2\tilde{\varepsilon}'_{11}}{z} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial q_3} \right], \quad (4.6e)$$

avec  $\tilde{c}'_{pq} = c_{pq}^E / \bar{c}_{11}^E$ ,  $\tilde{e}'_{pq} = e_{pq} / \sqrt{\bar{\varepsilon}_{33}^T \bar{c}_{11}^E}$  et  $\tilde{\varepsilon}'_{pq} = \varepsilon_{pq}^S / \bar{\varepsilon}_{33}^T$ .

#### 4.4.2. Equations de propagation

Le principe de la méthode polynomiale est d'incorporer automatiquement les conditions aux limites et les continuités dans les équations de propagation pour décrire la structure. Pour ce faire, la fonction porte et la fonction échelon sont introduites dans les équations de propagation suivantes [5-8]:

$$\begin{cases} \frac{1}{l} \frac{\partial \bar{T}_{ij}^S}{\partial q_i} = -\rho \omega^2 u_j^S \\ \frac{\partial \bar{D}_i^S}{\partial q_i} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

où

$$\bar{T}_{ij}^S = (\bar{T}_{ij}^{(1)} \Pi^{q_p, 0}(q_1) + \bar{T}_{ij}^{(2)} \Pi^{0, q_s}(q_1)) \Pi(q_3); \quad (4.8a)$$

$u_i^{(R)}$  sont les composantes de déplacement mécanique;

$$u^S = u_j^{(1)} + u_j^{(2)}; \quad (4.8b)$$

et

$$\bar{D}_i^S = (\bar{D}_i^{(1)} \Pi^{q_p, 0}(q_1) + \bar{D}_i^{(2)} H(q_1)) \Pi(q_3); \quad (4.8c)$$

avec

$$\Pi(q_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq q_3 \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad H(q_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_1 \geq q_s, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.8d)$$

L'exposant  $S$  représente la structure globale.

En remplaçant  $\bar{T}_{ij}^S$  et  $\bar{D}_i^S$  par leurs expressions, l'équation 4.7 devient :

$$\begin{cases} \left( \frac{2}{\xi} \delta_{i3} + \delta_{i1} \right) \sum_R \frac{\partial \bar{T}_{ij}^{(R)}}{\partial q_i} + \frac{2}{\xi} \delta_{3j} \sum_R \bar{T}_{ij}^{(R)} (\delta(q_j + 1) - \delta(q_j - 1)) \\ - \delta_{1j} [\bar{T}_{ij}^{(2)} \delta(q_j - q_s) - \bar{T}_{ij}^{(1)} \delta(q_j - q_p)] + \delta_{i1} [\bar{T}_{ij}^{(2)} - \bar{T}_{ij}^{(1)}] \delta(q_i) \\ = (L\rho / \bar{c}_{11}^{-E}) \omega^2 \sum_R u_j^{(R)}; \\ \left( \frac{2}{\xi} \delta_{i3} + \delta_{i1} \right) \sum_R \frac{\partial \bar{D}_i^{(R)}}{\partial q_i} + \frac{2}{\xi} \delta_{i3} \sum_R \bar{D}_i^{(2)} (\delta(q_i + 1) - \delta(q_i - 1)) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

La fonction delta multipliée par les composantes normales du déplacement électrique  $D$  et les composantes normales de la contrainte mécanique  $T$  impose automatiquement les conditions aux limites et de continuité sur les variables  $T$  et  $D$ . Plus précisément,  $\bar{T}_{i1}^{(1)} = 0$  pour  $q_1 = q_p$  et  $\bar{T}_{i1}^{(2)} = 0$  pour  $q_1 = q_s$  sont imposés par les termes  $\bar{T}_{ij}^{(1)} \delta(q_j - q_p)$  et  $\bar{T}_{ij}^{(2)} \delta(q_j - q_s)$



respectivement. La condition de continuité sur la jonction,  $\bar{T}_{1j}^{(2)} = \bar{T}_{1j}^{(1)}$  pour  $q_1 = 0$  est assurée par le terme  $(\bar{T}_{ij}^{(2)} - \bar{T}_{ij}^{(1)})\delta(q_i)$  tandis que les termes  $\bar{T}_{ij}^{(R)}\delta(q_j \pm 1)$  et  $\bar{D}_i^{(2)}\delta(q_i \pm 1)$  assurent respectivement l'annulation de contrainte  $\bar{T}_{i3}^{(R)}$  et de déplacement électrique  $\bar{D}_i^{(2)}$  pour  $q_3 = \pm 1$  [5-8].

#### 4.4.3. Résolution polynomiale

Nous travaillons ici avec les variables indépendantes déplacement mécanique et potentiel électrique plutôt qu'avec le déplacement mécanique et le déplacement électrique pour les raisons suivantes : (i) d'après l'équation de Gauss, le déplacement électrique n'est plus uniforme ; (ii) l'utilisation de ces variables ne pose pas de problème sur la convergence de la méthode. Les composantes de déplacement mécanique  $u_i^{(R)}$  et le potentiel électrique  $\Phi_i^{(R)}$  sont décomposés en fonction de produits des polynômes de Legendre en  $q_1$  et  $q_3$  normalisés avec une forme analytique choisie pour assurer la condition de continuité:

dans la région 1:

$$u_1^{(1)}(q_1, q_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(q_1) \mathcal{Q}_n(q_3) p_{1mn}^{(1)} ; \quad (4.10a)$$

$$u_3^{(1)}(q_1, q_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(q_1) \mathcal{Q}_n(q_3) p_{3mn}^{(1)} ; \quad (4.10b)$$

$$\Phi^{(1)}(q_1, q_3) = \left( \frac{q_3 + 1}{2} \right) v_p + (q_3^2 - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(q_1) \mathcal{Q}_n(q_3) r_{mn}^{(1)} ; \quad (4.10c)$$

et dans la région 2:

$$u_1^{(2)}(q_1, q_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(0) \mathcal{Q}_n(q_2) p_{1mn}^{(1)} + q_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(2)}(q_1) \mathcal{Q}_n(q_3) p_{1mn}^{(1)} ; \quad (4.11a)$$

$$u_3^{(2)}(q_1, q_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(0) \mathcal{Q}_n(q_3) p_{2mn}^{(1)} + q_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(2)}(q_1) \mathcal{Q}_n(q_3) p_{3mn}^{(1)} ; \quad (4.11b)$$

$$\Phi^{(2)}(q_1, q_3) = \left( 1 - \frac{q_1}{q_s} \right) \left( \left( \frac{q_3 + 1}{2} \right) v_p + (q_3^2 - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(0) \mathcal{Q}_n(q_3) r_{mn}^{(1)} \right) + \frac{q_1}{q_s} v_s + q_1 (q_1 - q_s) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{Q}_m^{(1)}(q_1) \mathcal{Q}_n(q_3) r_{mn}^{(2)} ; \quad (4.11c)$$

avec  $\mathcal{Q}_n(q_3) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2}} P_n(q_3)$  où  $P_n$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$  [9-10]. La sommation sur les polynômes dans les équations 4.10 et 4.11 est tronquée à des valeurs finies  $m=M$  et  $n=N$ ,

dans le calcul numérique, quand les termes d'ordre supérieur deviennent négligeables [5-8].  $p_{k,mn}^{(R)}$  et  $r_{mn}$  sont les coefficients des développements polynomiaux. Les facteurs  $q_l$  dans (4.11a), (4.11b), et (4.11c) assurent la condition de continuité de  $u$  à l'interface entre le primaire et le secondaire et les facteurs  $\left(1 - \frac{q_1}{q_s}\right), \frac{q_1}{q_s}$  et  $(q_1 - q_s)$  dans (4.11c) imposent  $\Phi^{(2)}(q_s, q_3) = v_s$ .

#### 4.4.4. Recherche des solutions

En reportant les expressions du déplacement mécanique et du potentiel électrique dans les équations constitutives, elles-mêmes reportées dans les équations de propagation, en multipliant par  $Q_j^{(R)*}(q_1)$  et  $Q_k^*(q_2)$  et en intégrant sur  $q_3$  de -1 à 1 et sur  $q_l$  de  $q_p$  à 0 dans la région 1 et de 0 à  $q_s$  dans la région 2, un système linéaire avec une infinité d'équations d'inconnues  $p_{k,mn}^{(R)}$  avec un paramètre  $\Omega$  est obtenu:

$$\begin{aligned} AA_{111}p_{1mn}^{(1)} + AA_{311}p_{3mn}^{(1)} + AA_{121}p_{1mn}^{(2)} + AA_{321}p_{3mn}^{(2)} + BB_{11}r_{mn}^{(1)} + BB_{21}r_{mn}^{(2)} + EE_1v_p \\ = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 [MM_{111}p_{1mn}^{(1)} + MM_{311}p_{3mn}^{(1)} + MM_{121}p_{1mn}^{(2)} + MM_{321}p_{3mn}^{(2)}] \end{aligned} \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned} AA_{112}p_{1mn}^{(1)} + AA_{312}p_{3mn}^{(1)} + AA_{122}p_{1mn}^{(2)} + AA_{322}p_{3mn}^{(2)} + BB_{12}r_{mn}^{(1)} + BB_{22}r_{mn}^{(2)} + EE_2v_p \\ = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 [MM_{112}p_{1mn}^{(1)} + MM_{312}p_{3mn}^{(1)} + MM_{122}p_{1mn}^{(2)} + MM_{322}p_{3mn}^{(2)}] \end{aligned} \quad (4.12b)$$

$$\begin{aligned} AA_{113}p_{1mn}^{(1)} + AA_{313}p_{3mn}^{(1)} + AA_{123}p_{1mn}^{(2)} + AA_{323}p_{3mn}^{(2)} + BB_{13}r_{mn}^{(1)} + BB_{23}r_{mn}^{(2)} + EE_3v_p \\ = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 [MM_{113}p_{1mn}^{(1)} + MM_{313}p_{3mn}^{(1)} + MM_{123}p_{1mn}^{(2)} + MM_{323}p_{3mn}^{(2)}] \end{aligned} \quad (4.12c)$$

$$\begin{aligned} AA_{114}p_{1mn}^{(1)} + AA_{314}p_{3mn}^{(1)} + AA_{124}p_{1mn}^{(2)} + AA_{324}p_{3mn}^{(2)} + BB_{14}r_{mn}^{(1)} + BB_{24}r_{mn}^{(2)} + EE_4v_p \\ = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 [MM_{114}p_{1mn}^{(1)} + MM_{314}p_{3mn}^{(1)} + MM_{124}p_{1mn}^{(2)} + MM_{324}p_{3mn}^{(2)}] \end{aligned} \quad (4.12d)$$

$$AA_{115}p_{1mn}^{(1)} + AA_{315}p_{3mn}^{(1)} + AA_{125}p_{1mn}^{(2)} + AA_{325}p_{3mn}^{(2)} + BB_{15}r_{mn}^{(1)} + BB_{25}r_{mn}^{(2)} + EE_5v_p = 0 \quad (4.12e)$$

$$AA_{116}p_{1mn}^{(1)} + AA_{316}p_{3mn}^{(1)} + AA_{126}p_{1mn}^{(2)} + AA_{326}p_{3mn}^{(2)} + BB_{16}r_{mn}^{(1)} + BB_{26}r_{mn}^{(2)} + EE_6v_p = 0 \quad (4.12f)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$AA_N \cdot P + BB_N \cdot r_{mn} + CC_N \cdot v_s = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 MMP + EE_N \cdot v_p ; \quad (4.13a)$$

$$AA_G \cdot P + BB_G \cdot r_{mn} + CC_G \cdot v_s = -EE_G \cdot v_p \quad (4.13b)$$

avec

$$AA_N = \begin{pmatrix} AA_{111} & AA_{311} & AA_{121} & AA_{321} \\ AA_{112} & AA_{312} & AA_{122} & AA_{322} \\ AA_{113} & AA_{313} & AA_{123} & AA_{323} \\ AA_{114} & AA_{314} & AA_{124} & AA_{324} \end{pmatrix}, \quad MM = \begin{pmatrix} MM_{111} & MM_{311} & MM_{121} & MM_{321} \\ MM_{112} & MM_{312} & MM_{122} & MM_{322} \\ MM_{113} & MM_{313} & MM_{123} & MM_{323} \\ MM_{114} & MM_{314} & MM_{124} & MM_{324} \end{pmatrix}$$

$$BB_N = \begin{pmatrix} BB_{11} & BB_{21} \\ BB_{12} & BB_{22} \\ BB_{13} & BB_{23} \\ BB_{14} & BB_{24} \end{pmatrix}, \quad CC_N = \begin{pmatrix} CC_1 \\ CC_2 \\ CC_3 \\ CC_4 \end{pmatrix}, \quad EE_N = \begin{pmatrix} EE_1 \\ EE_2 \\ EE_3 \\ EE_4 \end{pmatrix}$$

$$AA_G = \begin{pmatrix} AA_{115} & AA_{315} & AA_{125} & AA_{325} \\ AA_{116} & AA_{316} & AA_{126} & AA_{326} \end{pmatrix}, \quad BB_G = \begin{pmatrix} BB_{15} & BB_{25} \\ BB_{16} & BB_{26} \end{pmatrix}, \quad CC_G = \begin{pmatrix} CC_6 \\ CC_6 \end{pmatrix}, \quad EE_G = \begin{pmatrix} EE_1 \\ EE_2 \end{pmatrix},$$

où chaque composante est donnée dans l'Annexe D.

L'inconnue  $r_{mn}$  peut être obtenue à partir de l'équation 4.13b et est donnée par :

$$r_{mn} = BB_G^{-1} \cdot [-AA_G \cdot P - CC_G \cdot v_s + DD_G \cdot v_p]. \quad (4.14)$$

L'équation 4.14 injectée dans 4.13a donne :

$$AA \cdot P + CC \cdot v_s = -(\pi / q_p)^2 \Omega^2 EE \cdot P + DD \cdot v_p. \quad (4.15)$$

Avec  $P = [p_{1,mn}^{(1)} \quad p_{3,mn}^{(1)} \quad p_{1,mn}^{(2)} \quad p_{3,mn}^{(2)}]^T$  et  $r_{mn} = [r_{mn}^{(1)} \quad r_{mn}^{(2)}]^T$ .

#### 4.4.5. Résultats analytiques

##### 4.4.5.1. Analyse harmonique

Dans le cas bidimensionnel, en effectuant le même calcul que celui que nous avons fait dans le chapitre précédent, nous obtenons l'admittance qui est donnée par:

$$y_{in} = -j\Omega\omega_p C_p \delta_{i3} (\tilde{\epsilon}_{ij} - r\tilde{\epsilon}_{kij} X_{ky} p_{kmn}^{(1)}), \quad (4.16a)$$

avec

$$X_{1y} = r\tilde{\epsilon}_{31} \sqrt{q_s} J_{10m}^{0,qs,1} \frac{1}{\xi} [(Q_n(1) - Q_n(-1))], \quad (4.16b)$$

et

$$X_{2y} = r\tilde{e}'_{31}q_s \frac{1}{\xi} [Q_m^{(1)}(0)(Q_n(1) - Q_n(-1))]. \quad (4.16c)$$

La tension de sortie est obtenue par l'utilisation du théorème d'Ampère et la loi d'Ohm dans la partie secondaire du TP. Par définition  $v_s = R_{ch}i_s$

avec

$$i_s = \frac{1}{q_s} j\omega \int_0^{q_s} \int_S D_1^{(2)} ds dq_1.$$

Si on remplace le déplacement électrique par son expression et en effectuant le calcul d'intégration on obtient :

$$i_s = \frac{1}{q_s} j\omega \tilde{e}'_{33} l \left[ \int_{-1}^1 r\tilde{e}'_{33} [u_1^{(2)}(q_s) - u_1^{(2)}(0)] \frac{h}{2} dq_3 + \int_0^{q_s} r\tilde{e}'_{31} [u_3^{(2)}(1) - u_3^{(2)}(-1)] L dq_1 - \int_{-1}^1 [\phi^{(2)}(q_s) - \phi^{(2)}(0)] \frac{h}{2} dq_3 \right].$$

En multipliant par  $R_{ch}$  et en remplaçant les déplacements mécaniques par leurs expressions on a :

$$v_s = \frac{j\Omega}{Q} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} r\tilde{e}'_{33} q_s Q_m^{(2)}(q_s) J_{10n}^{-1,1,0} p_{1mn}^{(2)} + r\tilde{e}'_{31} \sqrt{q_s} J_{1m0}^{0,qs,1} [(Q_n(1) - Q_n(-1))] \frac{1}{Z} p_{3mn}^{(2)} \right. \\ \left. + r\tilde{e}'_{31} q_s [Q_m^{(1)}(0)(Q_n(1) - Q_n(-1))] p_{3mn}^{(1)} \right] \frac{1}{Z} - v_s$$

$$v_s = \frac{1}{\left(1 - \frac{jQ}{\Omega}\right)} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} r\tilde{e}'_{33} q_s Q_m^{(2)}(q_s) J_{1n0}^{-1,1,0} p_{1mn}^{(2)} + r\tilde{e}'_{31} J_{1m0}^{0,qs,1} [(Q_n(1) - Q_n(-1))] \frac{1}{Z} p_{3mn}^{(2)} \right. \\ \left. + r\tilde{e}'_{31} q_s [Q_m^{(1)}(0)(Q_n(1) - Q_n(-1))] p_{3mn}^{(1)} \right] \frac{1}{Z}$$

$$v_s = \frac{1}{\left(1 - \frac{jQ}{\Omega}\right)} [A_{127mn} p_{1mn}^{(2)} + A_{327mn} p_{3mn}^{(2)} + A_{317mn} p_{3mn}^{(1)}], \quad (4.17)$$

où

$$A_{127mn} = \frac{\sqrt{2}}{2} r\tilde{e}'_{33} q_s Q_m^{(2)}(q_s) J_{10n}^{-1,1,0}, \quad (4.18a)$$

$$A_{327mn} = r\tilde{e}'_{31} \sqrt{q_s} J_{10m}^{0,qs,1} \frac{1}{Z} [(Q_n(1) - Q_n(-1))], \quad (4.18b)$$

$$A_{317mn} = r\tilde{e}'_{31} q_s \frac{1}{Z} [Q_m^{(1)}(0)(Q_n(1) - Q_n(-1))]. \quad (4.18c)$$

#### 4.4.5.2. Analyse modale

Les fréquences de résonance parallèle sont obtenues lorsque les électrodes côté primaire sont court-circuitées,  $v_p = 0$ , et les électrodes dans la partie récepteur sont en circuit ouvert  $i_s = 0$ . Le système 4.14 devient:

$$EE^{-1}AA.P = -(\pi / q_p)^2 \Omega^2 I_d . P , \quad (4.19)$$

où  $I_d$  est la matrice identité.

Les fréquences de résonance série sont obtenus lorsque les électrodes côté primaire et côté secondaire sont court-circuitées. Dans ce cas  $v_p = 0$  et la résistance de charge est nulle ( $R_L = 0$ ). Le système 4.14 devient :

$$EE^{-1}AA.P = -(\pi / q_p)^2 \Omega^2 I_d . P . \quad (4.20)$$

### 4.5. Résultats des simulations

La résolution polynomiale est une méthode semi-analytique. Elle tire à la fois les avantages de la méthode analytique et de la méthode numérique. Le calcul est commencé analytiquement avec une forme explicite des grandeurs caractérisant le transformateur en fonction des paramètres physiques et de la géométrie de la structure étudiée et aboutit à un système infini d'équations impossible à résoudre analytiquement. Cette résolution nécessite une technique de calcul numérique, c'est la simulation sur ordinateur. Les résultats de simulation numérique sont présentés dans cette section ; on va tester si le modèle fonctionne sur la modélisation du transformateur piézoélectrique.

#### 4.5.1. Comparaison des résultats de la méthode polynomiale 2D et de la méthode des éléments finis 2D.

La convergence de notre modèle est étudiée à travers une simulation numérique d'un TP fabriqué en céramique avec des propriétés physiques et géométriques listées dans le tableau 4.1. Cette convergence est atteinte à partir de la valeur des ordres de troncature  $M=9$  et  $N=5$ . Pour vérifier l'exactitude des résultats obtenus, une comparaison des fréquences de résonance, des fréquences d'antirésonance, de l'admittance d'entrée et du gain en tension calculés avec la méthode numérique bidimensionnelle, méthode des éléments finis, et la méthode polynomiale est faite.

Tableau 4.1 : Propriétés physiques et géométriques du transformateur piézoélectrique.

Rigidité $c$ (N/m <sup>2</sup> )	$\begin{bmatrix} 14,1 & 8,06 & 7,87 & 0 & 0 & 0 \\ 8,06 & 14,1 & 7,87 & 0 & 0 & 0 \\ 8,87 & 7,87 & 11,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,04 \end{bmatrix} \times 10^{10}$
Constante piézoélectrique $e$ (C m <sup>-2</sup> )	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 13,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13,3 & 0 & 0 \\ -5,16 & -5,16 & 15,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Permittivité relative $\epsilon_r$	$\begin{bmatrix} 820 & 0 & 0 \\ 0 & 820 & 0 \\ 0 & 0 & 759 \end{bmatrix}$
Masse volumique $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7600
$L_1$ (longueur du primaire), $L_2$ (longueur du secondaire)	$12 \times 10^{-3}$ m, $13 \times 10^{-3}$ m
$l$ (largeur), $h$ (hauteur)	$5 \times 10^{-3}$ m, $1,7 \times 10^{-3}$ m
$n$ (nombre de couches au primaire)	16

#### 4.5.1.1. Fréquences propres

Les fréquences propres du transformateur piézoélectrique sont calculées pour les deux cas : secondaire en court-circuit et secondaire en circuit ouvert. Ce sont les fréquences de résonance série et parallèle présentées respectivement dans les tableaux 4.2 et 4.3 et comparées avec les valeurs obtenues par la méthode des éléments finis.

Tableau 4.2 : Fréquence de résonance série: comparaison entre 2D FEA et polynomial.

Mode	2D POL (kHz)	2D FEA (kHz)	Erreur (10 <sup>-2</sup> %)
1	66,41	66,40	1,50
2	133,86	133,86	0
3	217,63	217,62	0,45
4	294,08	294,09	0,34

Tableau 4.3 : Fréquence de résonance parallèle: comparaison entre 2D FEA et polynomial.

Mode	2D POL(kHz)	2D FEA (kHz)	Erreur ( $10^{-2}\%$ )
1	73,84	73,82	2,71
2	148,30	148,31	0,67
3	220,19	220,17	0,90
4	294,09	294,09	0

Ces tableaux montrent un excellent accord entre nos résultats et ceux de la méthode éléments finis bidimensionnelle en prenant, pour les deux modélisations, l'hypothèse déformation plane ce qui signifie que notre modèle polynomial est validé pour le cas de l'analyse modale. Les erreurs relatives entre les deux méthodes pour les quatre premiers modes sont inférieures à  $10^{-2}$ . Nous abordons maintenant dans la suite le test de comparaison sur les résultats relatifs à l'analyse harmonique.

#### 4.5.1.2. Admittance d'entrée

La figure 4.1 présente l'admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique étudié pour le cas sortie ouverte. Ce résultat montre que nous retrouvons les fréquences de résonance calculées en analyse modale. Les résultats obtenus par le modèle polynomial proposé sont en bon accord avec les résultats obtenus par les éléments finis ce qui valide l'approche polynomiale sur le calcul de l'admittance d'entrée.

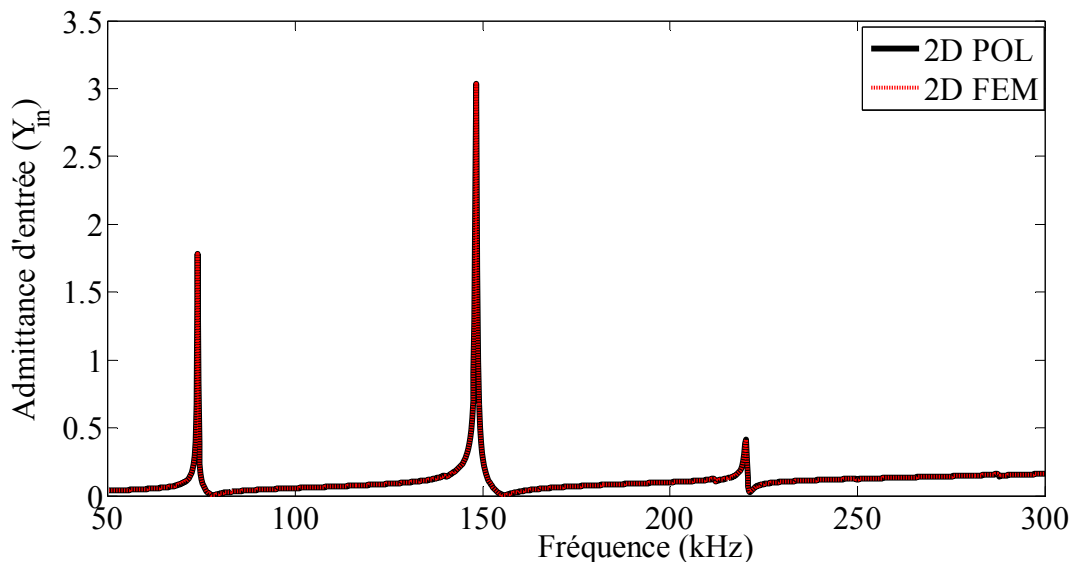


Figure 4.1: Admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert.

### 4.5.1.3. Gain en tension

On présente dans la figure 4.2 la courbe, en fonction de la fréquence, du gain en tension du transformateur piézoélectrique étudié pour le cas sortie ouverte calculé par la méthode polynomiale superposée avec la courbe du même gain calculé avec la méthode des éléments finis bidimensionnelle. Ce résultat montre que nous retrouvons là aussi les fréquences de résonance calculées en analyse modale. Comme observé sur le cas de l'admittance d'entrée électrique et des fréquences de résonance ci-dessus, un bon accord avec les deux méthodes est ici aussi observé.

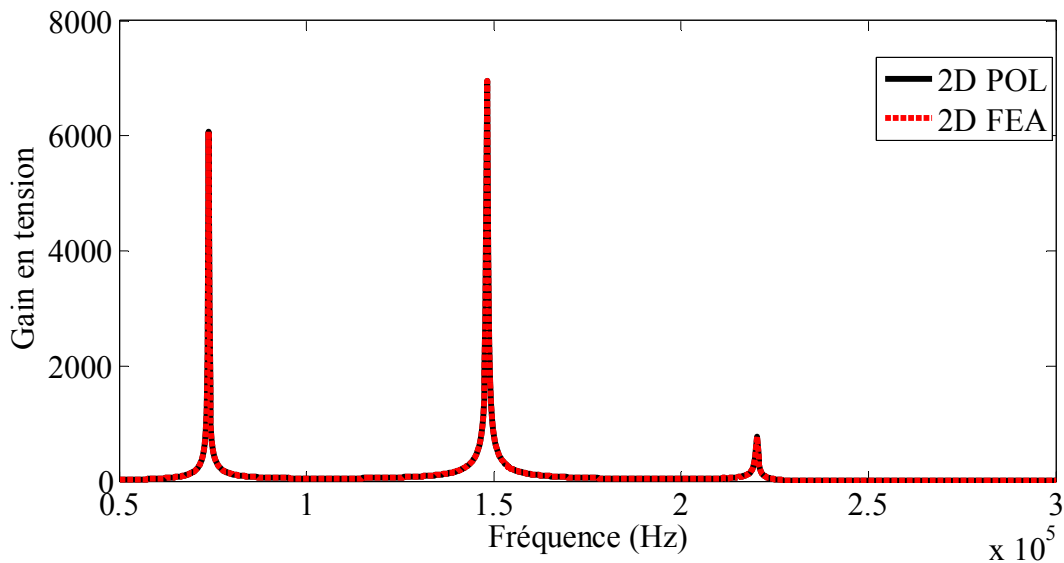


Figure 4.2: Gain à vide du transformateur piézoélectrique.

### 4.5.2. Profil des champs

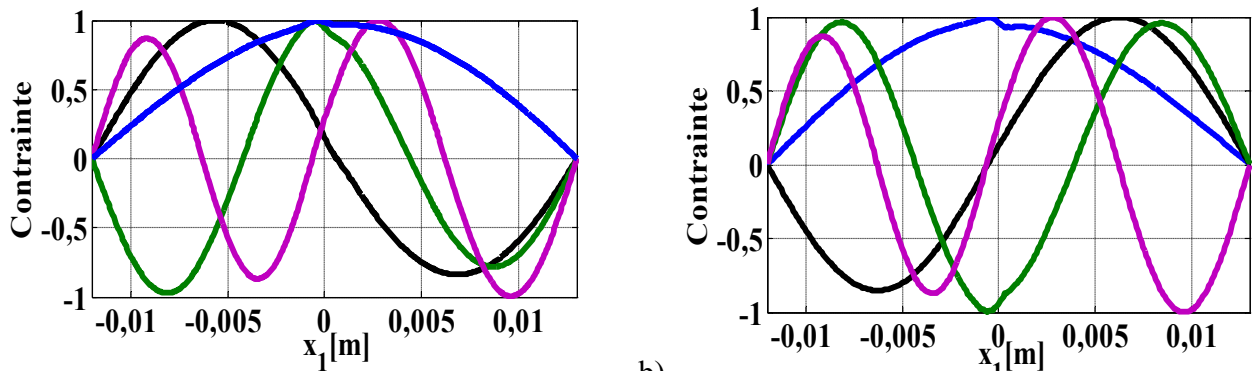
La figure 4.3 présente les profils des champs dans le transformateur piézoélectrique au voisinage des quatre premières fréquences de résonance et d'antirésonance trouvées ci-dessus. Dans cette figure 4.3, la contrainte mécanique est nulle sur les surfaces extrêmes  $q_1 = q_p$  et  $q_1 = q_s$  et continue à l'interface entre le primaire et le secondaire. Les conditions aux limites mécaniques et la continuité sont donc elles aussi vérifiées.

### 4.5.3. Limitations du modèle

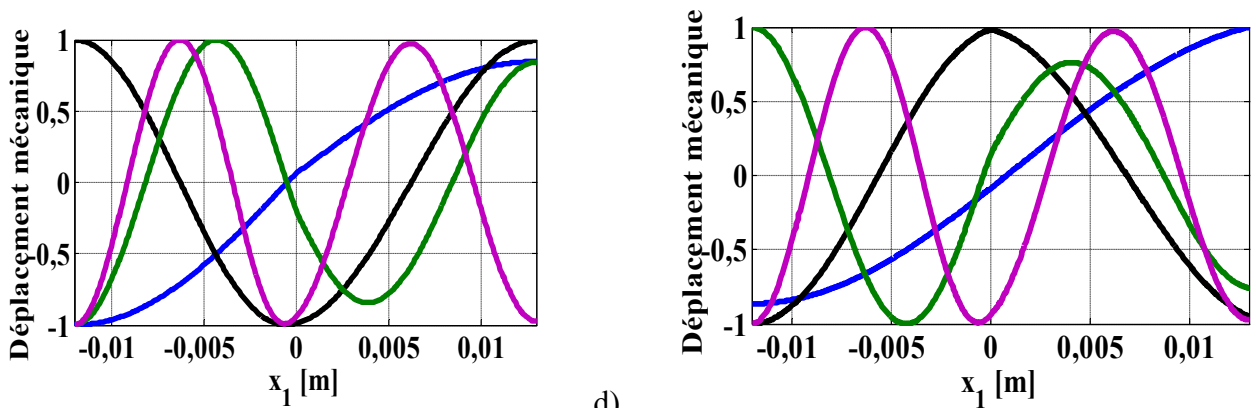
La méthode polynomiale 2D est utilisée pour modéliser un transformateur de tension de type Rosen. En supposant que le transformateur est invariant suivant la largeur, c'est-à-dire la largeur est considérée comme infinie, les équations constitutives se réduisent et la caractérisation du transformateur peut se faire en résolvant les équations de propagation avec ladite méthode et une convergence à été obtenue. Afin de savoir si le modèle déformation plane adopté reproduit



fidèlement le fonctionnement réel du TP, un modèle numérique éléments finis tridimensionnel est utilisé qui va permettre de confronter les résultats (2D polynomiaux déformation plane et 3D) obtenus.



a) Composante de contrainte mécanique suivant  $x_1$  cas secondaire en circuit ouvert (a) et court-circuit (b).



c) Déplacement mécanique suivant  $x_1$  cas secondaire en circuit ouvert (c) et court-circuit (d)

Figure 4.3 : Profil des champs.

Tableau 4.4. Fréquence de résonance série: comparaison entre 3D FEA et polynomial.

Mode	2D POL (kHz)	3D FEA (kHz)	Erreur (%)
1	66,41	61,81	6,92
2	133,86	124,78	6,78
3	217,63	203,54	6,47
4	294,08	265,26	9,80

Tableau 4.5. Fréquence de résonance parallèle: comparaison entre 3D FEA et polynomial.

Mode	2D POL(kHz)	3D FEA(kHz)	Erreur (%)
1	73,84	70,46	4,57
2	148,3	141,39	4,65
3	220,19	206,77	6,09
4	294,09	265,3	9,78

Les tableaux 4.4 et 4.5 présentent respectivement les fréquences de résonance et d'antirésonance d'un transformateur piézoélectrique étudié. Il y a une divergence nette entre les résultats 2D POL et 3D FEA. Cette différence est aussi vérifiée par le tracé fréquentiel du gain en tension du TP présenté dans la figure 4.4 tant sur l'amplitude que sur la fréquence de fonctionnement. Ceci signifie que l'hypothèse déformation plane n'est pas correcte, le modèle physique adopté ne respecte pas le fonctionnement réel du TP.

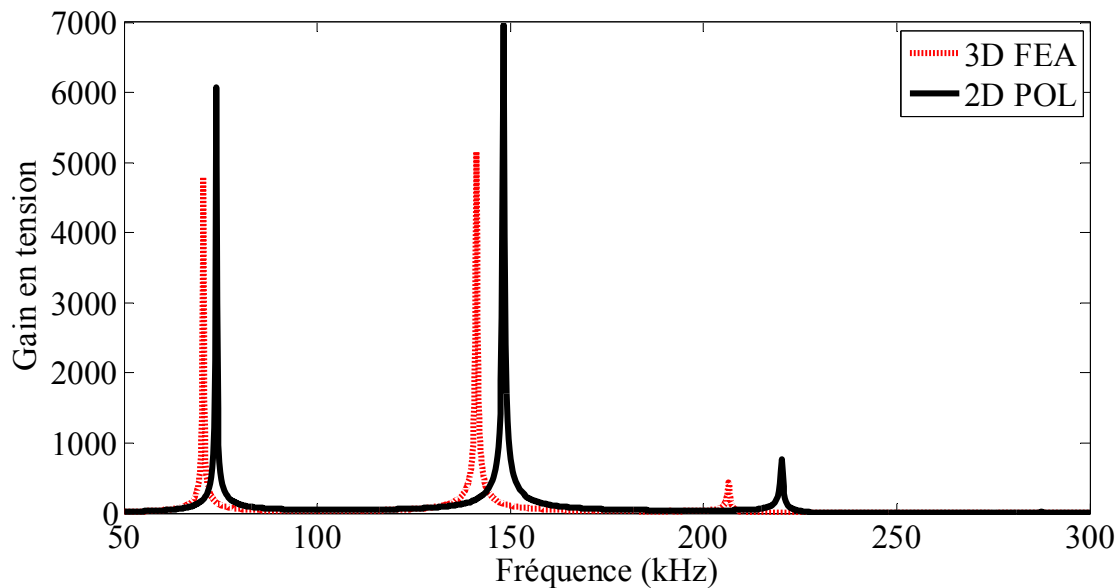


Figure 4.4 : Comparaison entre méthode polynomiale 2D et numérique 3D.

#### 4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la méthode polynomiale de Legendre à l'étude du transformateur piézoélectrique bidimensionnel afin de tenir compte des effets latéraux en adoptant une hypothèse déformation plane. Un très bon accord a été obtenu pour les résultats obtenus par la méthode des éléments finis avec la même hypothèse déformation plane à la fois sur l'analyse modale et sur l'analyse harmonique. Une comparaison avec des résultats FEA 3D a aussi été faite afin de statuer sur la validité du modèle physique déformation plane adopté. Les résultats permettent de conclure que l'hypothèse adoptée n'est pas valable pour le cas du transformateur de type Rosen dans le cadre de notre étude. La meilleure piste est alors de prendre l'hypothèse contrainte plane que nous présentons dans le chapitre suivant.

## Références bibliographiques

- [1]. S. Emmanuel, D. Vasic et C. François « Transformateurs statiques piézoélectriques », *Techniques de l'ingénieur*. D 3015, 2012.
- [2]. M. Thomas, « Contribution à l'étude des générateurs piézoélectriques pour la génération des décharges plasmas ». Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2015.
- [3]. D. Vasic, « Apports des matériaux piézoélectriques pour l'intégration hybride et monolithique des transformateurs ». Thèse de doctorat, E N S de Cachan, France, 2003.
- [4]. S. Bronstein, « Piezoelectric Transformers in Power Electronics ». Thèse de doctorat, Université de Negev. 2005
- [5]. H. H. Demarest, Jr., « Cube-resonance method to determine the elastic constants of solids », *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 49, no.3, pp. 768–775, 1971.
- [6]. D. J. Falimiarmanana, F. E. Ratolojanahary, J. E. Lefebvre, P. M. Rabotovao, L. Elmaimouni, I. Naciri, M. Rguiti and T. Gryba, « Modeling of Rosen-type piezoelectric transformer by means of a polynomial approach », in *ICMCS*, 2018.
- [7]. J.E. Lefebvre, J.G. Yu, F.E. Ratolojanahary, L. Elmaimouni, W.J. Xu and T.Gryba, « Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices », *AIP Advances*, Vol. 16, pp. 065307, 2016.
- [8]. P.M. Rabotovao, F.E. Ratolojanahary, J.E. Lefebvre, A. Raheison, L. Elmaimouni, T. Gryba, and J.G. Yu, « Modeling of high contrast partially electroded resonators by means of a polynomial approach », *J. Applied Physics*, Vol.114, no.12, pp.124502, 2013.
- [9]. G. Farid, G. M. Habibullah, « Extensions of Legendre Polynomials », *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, Vol. 9, no. 11, pp. 545 – 551, 2014,
- [10]. Y. Liu, « Application of Legendre Polynomials in Adomian Decomposition Method », *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 65 pp.567-571, 2012.

## **Chapitre 5**

---

---

# **METHODE POLYNOMIALE APPLIQUEE A L'ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE : HYPOTHESE CONTRAINTE PLANE**

---

---

## 5.1. Introduction

Le chapitre précédent a permis de proposer un modèle bidimensionnel avec l'hypothèse déformation plane appliquée à l'étude d'un transformateur piézoélectrique en utilisant les polynômes de Legendre. Toutefois, ce modèle n'a pas pu décrire fidèlement les mécanismes physiques en jeu dans les transformateurs de type Rosen. Des travaux théoriques pertinents permettant d'explicitier ces mécanismes sont nécessaires [1]. L'objectif de ce chapitre est de proposer un modèle semi-analytique 2D dans l'hypothèse contrainte plane où l'influence des effets de la largeur finie d'un transformateur sera étudiée à l'aide d'une approche polynomiale utilisant les polynômes de Legendre. Les hypothèses, les conditions aux limites et les conditions de continuité sont présentées avant de décrire le principe de la méthode qui aboutit à un système d'équations linéaires pour le cas de l'analyse harmonique et à une équation aux valeurs propres dans le cas de l'analyse modale. Ce système d'équations nous permet d'obtenir les fréquences propres, l'admittance d'entrée électrique et les autres grandeurs électromécaniques caractérisant le transformateur piézoélectrique. Ainsi l'analyse de sensibilité des paramètres dans ce dispositif avec des précisions satisfaisantes est effectuée.

## 5.2. Hypothèses

En modélisation bidimensionnelle d'un dispositif piézoélectrique, on trouve deux hypothèses: l'hypothèse déformation plane et l'hypothèse contrainte plane. Ce chapitre se propose de traiter la deuxième hypothèse c'est-à-dire celle appelée contrainte plane. Dans notre modèle le transformateur piézoélectrique de type Rosen présenté dans la figure 3.1 est considéré comme une plaque mince, c'est-à-dire d'épaisseur  $h$  négligeable devant la longueur  $L$  et la largeur  $l$ , en conséquence la contrainte normale suivant  $ox_3$  peut être considérée comme nulle ( $T_3=0$ ). En outre la structure est libre de toute contrainte de cisaillement sauf celle dans le plan ( $Ox_1, Ox_2$ ) ( $T_4=T_5=0$ ). Les épaisseurs des électrodes sont négligées et la dépendance temporelle est de la forme  $exp(j\omega t)$  où  $j^2=-1$ . Dans la résolution polynomiale utilisée dans ce chapitre tous les paramètres et les variables sont normalisés. Les changements de variables suivants sont appliqués :  $q_1 = x_1/L$ ,  $q_2 = 2x_2/l$ ,  $\xi = l/L$  et nous utilisons les contraintes et les déplacements électriques normalisés respectivement  $\bar{T}_{ij}^{(R)} = T_{ij}^{(R)} / \bar{c}_{11}^E$  et  $\bar{D}_i^{(R)} = D_i^{(R)} / \bar{\epsilon}_{33}^S$ . Du côté primaire, étant donné la géométrie des électrodes, on peut considérer que  $E_1^{(1)}=E_2^{(1)}=0$  et  $E_3^{(1)} = -nv_p / h$  tandis que du côté secondaire, étant donné la géométrie de l'électrode, avec de plus une permittivité diélectrique très grande, on peut considérer que  $D_3^{(2)}=0$ . On normalise aussi la vitesse angulaire.

En outre, les effets thermiques et les effets non linéaires, issus physiquement de contraintes mécaniques trop élevées ou d'un champ électrique appliqué trop important, ne sont pas pris en considération dans le modèle présenté. Les conditions aux limites et les continuités sont évoquées dans la section suivante.

### 5.3. Conditions aux limites et continuités

#### Conditions aux limites

Le transformateur est supposé ne subir aucune contrainte dans toutes les surfaces externes, c'est-à-dire la composante normale de la contrainte mécanique est nulle sur les surfaces mécaniquement libres :

$$\bar{T}_1^{(1)}(q_1 = q_p) = \bar{T}_6^{(1)}(q_1 = q_p) = 0 \quad (5.1a)$$

$$\bar{T}_1^{(2)}(q_1 = q_s) = \bar{T}_6^{(2)}(q_1 = q_s) = 0 \quad (5.1b)$$

$$\bar{T}_2^{(R)}(q_2 = \pm 1) = \bar{T}_6^{(R)}(q_2 = \pm 1) = 0 \quad (5.1c)$$

- la composante normale du déplacement électrique est nulle sur les surfaces latérales et non nulle sur les surfaces métallisées :

$$\bar{D}_2^{(2)}(q_2 = \pm 1) = 0 \quad (5.2a)$$

$$\Phi^{(2)}(q_1 = q_s) = v_s \quad (5.2b)$$

#### Conditions de continuité

$$\bar{T}_1^{(1)}(q_1 = 0) = \bar{T}_1^{(2)}(q_1 = 0) \quad (5.3a)$$

$$\bar{T}_6^{(1)}(q_1 = 0) = \bar{T}_6^{(2)}(q_1 = 0) \quad (5.3b)$$

$$\bar{D}_1^{(1)}(q_1 = 0) = \bar{D}_1^{(2)}(q_1 = 0) \quad (5.3c)$$

$$u_1^{(1)}(q_1 = 0) = u_1^{(2)}(q_1 = 0) \quad (5.3d)$$

$$u_2^{(1)}(q_1 = 0) = u_2^{(2)}(q_1 = 0) \quad (5.3e)$$

$$\Phi^{(1)}(q_1 = 0) = \Phi^{(2)}(q_1 = 0) \quad (5.3f)$$

### 5.4. Formulation mathématique

#### 5.4.1. Equations de propagation

Compte tenu de l'hypothèse contrainte plane citée ci-dessus, les équations constitutives de la structure se réduisent et sont détaillées dans l'annexe E. Pour décrire la structure et pour

incorporer automatiquement les conditions aux limites et les continuités, nous introduisons les fonctions portes et la fonction échelon dans les équations constitutives et nous obtenons les contraintes et les déplacements électriques globaux définis par [2-8]:

$$\bar{T}_{ij}^S = (\bar{T}_{ij}^{(1)} \Pi^{q_p, 0}(q_1) + \bar{T}_{ij}^{(2)} \Pi^{0, q_s}(q_1)) \Pi(q_2) \quad (5.4)$$

$$\bar{D}_i^S = (\bar{D}_i^{(1)} \Pi^{q_p, 0}(q_1) + \bar{D}_i^{(2)} H(q_1)) \Pi(q_2) \quad (5.5)$$

où  $\Pi^{q_p, 0}(q_1)$  et  $\Pi^{0, q_s}(q_1)$  sont définies dans l'équation 3.7,  $H(q_1)$  est définie dans l'équation 4.8

et

$$\Pi(q_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq q_2 \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.6)$$

En utilisant toujours les variables réduites sans dimension, la propagation des ondes dans la structure divisée en deux régions est régie par les équations 4.7 et l'injection des équations 5.4 et 5.5 dans ces équations nous donne:

$$\begin{cases} \left( \frac{2}{\xi} \delta_{i2} + \delta_{i1} \right) \sum_R \frac{\partial \bar{T}_{ij}^{(R)}}{\partial q_i} + \frac{2}{\xi} \delta_{2j} \sum_R \bar{T}_{ij}^{(R)} (\delta(q_j + 1) - \delta(q_j - 1)) \\ - \delta_{1j} [\bar{T}_{ij}^{(2)} \delta(q_j - q_s) - \bar{T}_{ij}^{(1)} \delta(q_j - q_p)] + \delta_{i1} [\bar{T}_{ij}^{(2)} - \bar{T}_{ij}^{(1)}] \delta(q_i) = (L\rho / \bar{c}_{11}^E) \omega^2 \sum_R u_j^{(R)} \\ \left( \frac{2}{\xi} \delta_{i2} + \delta_{i1} \right) \sum_R \frac{\partial \bar{D}_i^{(R)}}{\partial q_i} + \frac{2}{\xi} \delta_{i2} \sum_R \bar{D}_i^{(2)} (\delta(q_i + 1) - \delta(q_i - 1)) = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

La fonction  $\delta$  assure ici la nullité des contraintes mécaniques  $T$  normales sur les surfaces mécaniquement libres du TP et des composantes normales des déplacements électriques  $D$  sur les surfaces non métallisées. Elle assure aussi les continuités de ces variables sur les interfaces entre deux régions adjacentes.

#### 5.4.2. Recherche des solutions

La résolution consiste à calculer dans chaque région les variables indépendantes, déplacement mécanique et potentiel électrique. Ces variables sont décomposées sur une base d'un produit de polynômes de Legendre normalisés (voir annexe E). La résolution des équations de propagation nous conduit à un système d'équations linéaires permettant de déterminer les réponses fréquentielles des ondes dans la structure étudiée et de calculer l'admittance électrique, le coefficient de couplage électromécanique et les profils des champs dans le transformateur. La procédure est la suivante : en premier lieu, les expressions des déplacements mécaniques et des potentiels électriques sont injectées dans les équations constitutives, ensuite ces équations

constitutives sont elles-mêmes injectées dans les équations de propagation. Nous exploitons ensuite la propriété d'orthogonalité des polynômes en projetant les équations de propagation sur les bases correspondantes de chacune des deux régions dans la structure du transformateur : ceci se fait en multipliant les équations de propagation par les polynômes  $Q_j^{(R)}(q_1)$  et  $Q_k^{(R)}(q_2)$  en intégrant suivant  $q_2$  dans l'intervalle  $[-1,1]$  et suivant  $q_1$  dans l'intervalle  $[q_p, 0]$  pour la région 1 et dans l'intervalle  $[0, q_s]$  pour la région 2 [2-7].

Comme les ordres de troncature sont toujours définis par M et N, nous obtenons finalement un système de  $5 \times (M+1) \times (N+1)$  équations linéaires avec  $5 \times (M+1) \times (N+1)$  inconnues  $p_{a,mn}^{(R)}$ . Ce système d'équations linéaires est donné par les relations suivantes:

$$A.P + C.v_s = -(\pi / q_p)^2 \Omega^2 E.P + D.v_p . \quad (5.8)$$

avec  $P = [p_{1,mn}^{(1)} \quad p_{2,mn}^{(1)} \quad p_{1,mn}^{(2)} \quad p_{2,mn}^{(2)}]^T$ . Les composantes des matrices  $A$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont données dans l'Annexe E.

## 5.5. Résultats des simulations

Les résultats sont validés avec les résultats obtenus avec la méthode par éléments finis 3D calculés à l'aide du logiciel COMSOL. Pour caractériser le comportement du transformateur étudié, nous calculons en analyse modale ses fréquences de résonance et d'antirésonance, ensuite nous présentons, en analyse harmonique, les courbes de l'admittance électrique et du gain.

### 5.5.1. Convergence de la méthode

L'admittance d'entrée électrique, lorsque le secondaire est en circuit ouvert (SOC), est calculée pour différentes valeurs de troncature M et N. Les solutions à accepter dans le calcul sont celles pour lesquelles la convergence est obtenue lorsque M et N sont augmentés. Les résultats sont présentés sur la figure 5.1. La convergence de l'approche polynomiale pour calculer les fréquences de résonance et l'amplitude de l'admittance d'entrée électrique pour les quatre premiers modes est obtenue à partir de  $M = 7$  et  $N = 3$ . Pour valider notre modèle dont le détail est donné dans la sous section suivante, une comparaison avec d'autres modèles disponibles dans la littérature est effectuée. Dans cette thèse, nous choisissons le modèle 3D FEA car c'est un modèle fiable. Les erreurs relatives entre les deux modèles sont tracées dans la figure 5.2 pour différents ordres de troncature. Sur cette figure, les erreurs relatives diminuent lorsque M et N augmentent. A partir de  $M = 7$  et  $N = 3$ , des résultats indiscernables sont obtenus.



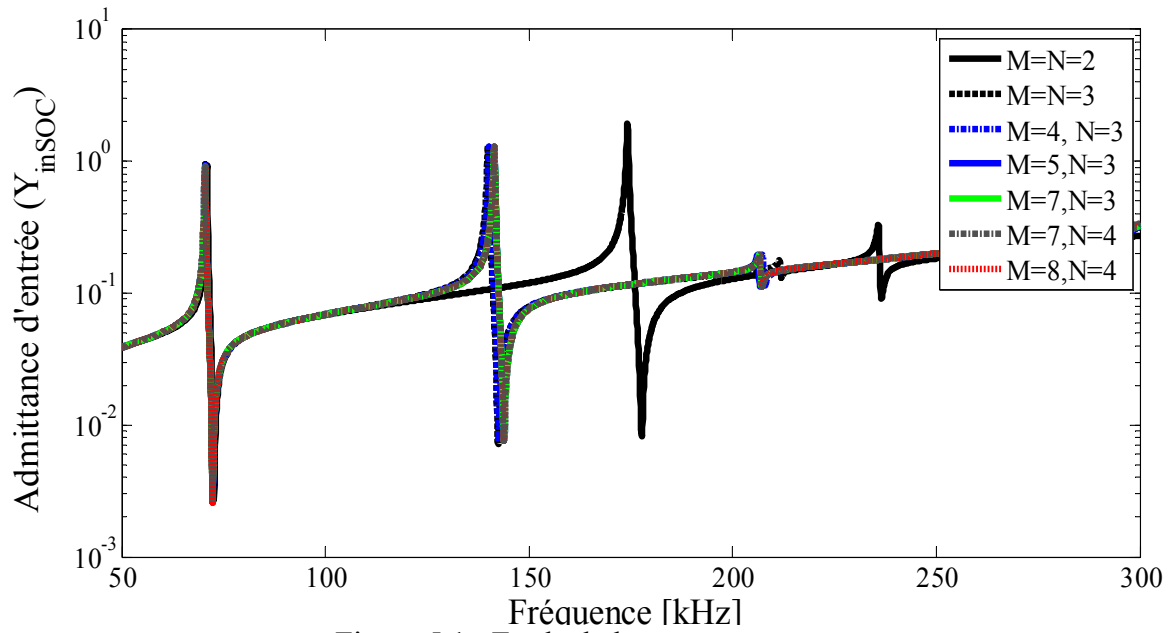


Figure 5.1 : Etude de la convergence.

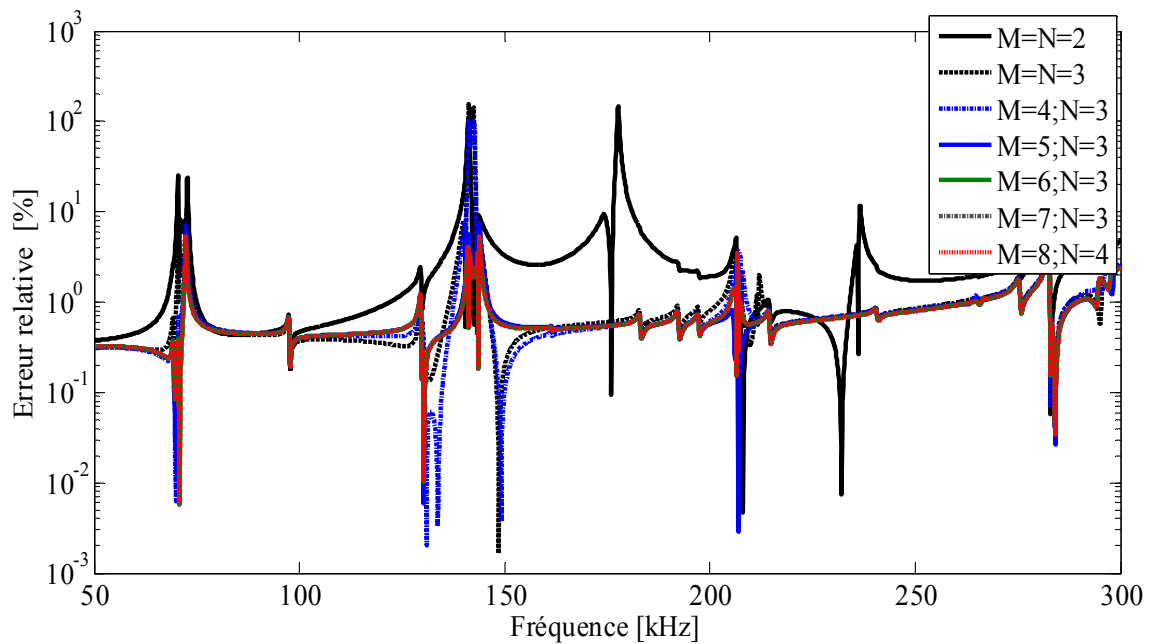


Figure 5.2 : Erreur relative.

### 5.5.2. Validations et limitations de la méthode

Afin de valider l'outil de simulation proposé, les fréquences de résonance, l'admittance d'entrée électrique et le gain en tension pour le TP décrit dans le tableau 4.1 sont calculés puis comparés aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis ainsi qu'aux résultats expérimentaux extraits de la littérature en commençant par le calcul des fréquences propres.

### 5.5.2.1. Fréquences propres

Les fréquences de résonance et d'antirésonance du TP étudié sont données respectivement dans les tableaux 5.1 et 5.2. On peut observer que l'accord est assez bon entre les résultats obtenus par l'approche polynomiale 2D, les résultats de la méthode des éléments finis 3D et les résultats expérimentaux. La méthode peut calculer les deux cas, sortie en circuit ouvert et en court-circuit, directement sans approximation. C'est l'un des principaux avantages de l'utilisation d'une approche polynomiale pour la modélisation de transformateurs piézoélectriques.

Tableau 5.1 : Fréquence de résonance série: comparaison entre 3D FEA, polynomial (M=7, N=3) et résultats expérimentaux.

Mode	Erreur (%)	3D FEA (kHz)	2D Pol (kHz)	Réel (kHz) [1]	Erreur (%)
1	0,29	61,81	61,63	63,55	3,02
2	0,09	124,78	124,67	128,30	2,83
3	0,11	203,54	203,79	204,09	0,15
4	0,02	265,26	265,31	265,91	0,23

Tableau 5.2 : Fréquence de résonance parallèle: comparaison entre 3D FEA, polynomial (M=7, N=3) et résultats expérimentaux.

Mode	Erreur(%)	3D FEA (kHz)	2D POL (kHz)	Réel (kHz) [1]	Erreur (%)
1	0,01	70,46	70,46	68,94	2,21
2	0,10	141,25	141,39	138,66	1,97
3	0,14	206,49	206,77	206,66	0,05
4	0,01	265,26	265,30	266,00	0,26

Pour répondre aux prescriptions du cahier des charges, représentant les besoins spécifiques du concepteur de composant, la connaissance de ces modes propres est nécessaire. Au voisinage de certaines fréquences, la structure offre une meilleure performance pour les modes mécaniquement excités. La détermination de ces modes conduit à effectuer une analyse dans le domaine fréquentiel en représentant dans une large bande de fréquence l'évolution d'une grandeur électrique.

### 5.5.2.2. Admittance d'entrée et gain en tension

La figure 5.3 donne l'amplitude de l'admittance d'entrée électrique. Les résultats via la méthode polynomiale représentés par une ligne continue sont en étroite concordance avec ceux

de la méthode des éléments finis. L'erreur relative prend respectivement les valeurs 2,85%, 2,13%, 5% et 8% pour les quatre premiers modes dans le cas du transformateur chargé avec une résistance de charge  $R_{ch}=10^9\Omega$  (simulation d'un TP à sortie en circuit ouvert). Les résultats sont en bon accord avec le cas réel présenté dans [1] (figure 3.10, page 138). Il est bien observé que la réponse en fréquence du système est constituée de résonances avec des hauteurs différentes et d'une amplitude de l'admittance d'entrée qui évolue linéairement avec la fréquence en dehors des résonances. Cela marque la nature capacitive de l'entrée de ce type de convertisseur d'énergie électrique en énergie électrique. Donc un transformateur piézoélectrique se comporte comme un résonateur multimode. Sa performance dépend du mode résonant choisi.

Le gain en tension  $G_v$  en fonction de la fréquence  $f$  avec une tension d'entrée d'amplitude  $v_p = 1V$  et une résistance de charge  $R_{ch} = 10^9 \Omega$  est tracé sur la figure 5.4 qui montre que la fonction de transfert du transformateur dépend fortement de la fréquence. Les modes longitudinaux au voisinage desquels les pics de gain sont les plus élevés sont principalement excités aux trois premières résonances. L'approche polynomiale et l'approche par éléments finis sont en bon accord sur le calcul de la tension de sortie avec une erreur relative respectivement, aux premier, deuxième, troisième et quatrième modes de résonance, de 0,23%, 0,52%, 6,15% et 3,37%. Le temps de calcul avec un ordinateur possédant un processeur de 2,9 GHz (Intel Core i7) et une RAM 4 Go est de 17 secondes pour la méthode polynomiale.

Les différences entre les résultats obtenus par ces deux méthodes peuvent s'expliquer par le fait que les formules utilisées pour le calcul 2D supposent que la contrainte le long de la direction  $x_3$  est infiniment petite. Aux modes d'ordre supérieur, les activités de toutes les directions sont comparables et ne doivent pas être négligées. Mais en général, les résultats obtenus par FEA 3D et ceux par l'approche polynomiale sont en bon accord, sauf pour les modes pour lesquels le modèle 2D avec l'hypothèse contrainte plane s'écarte du comportement physique réel du TP. Les profils de déplacement 3D tracés avec le logiciel COMSOL au voisinage de ces modes sont présentés sur la figure 5.5. Le premier mode présenté est une flexion du plan extérieur (à gauche) et le second est une vibration de cisaillement en épaisseur couplée à une flexion et à une extension (à droite). Ces modes apparaissent sur les courbes FEA 3D respectivement de l'amplitude de l'admittance d'entrée et du gain en tension comme indiqué sur la figure 5.6. Cela montre la limite du modèle bidimensionnel.

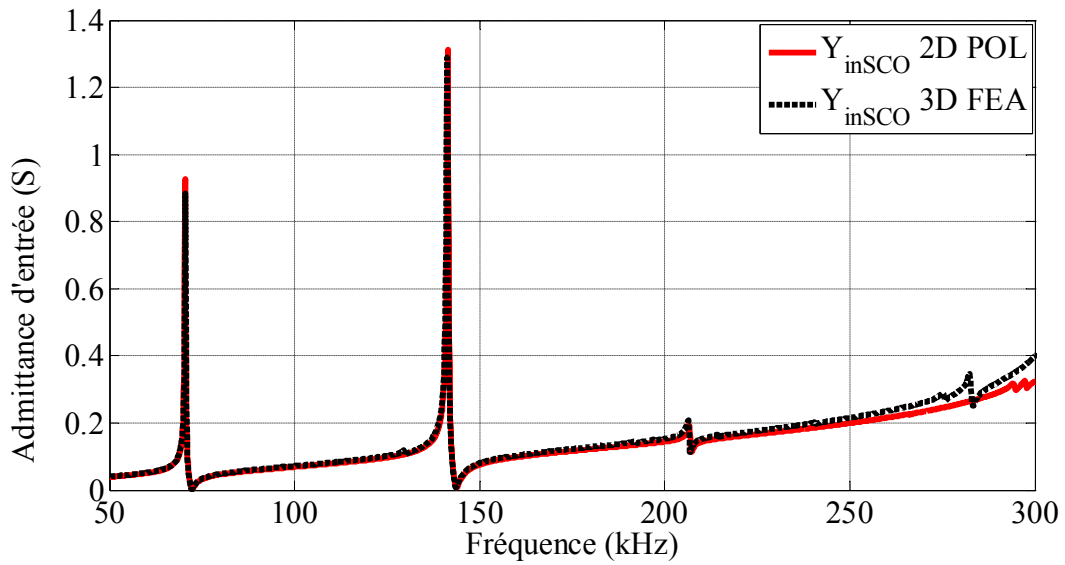


Figure 5.3 : Admittance d'entrée du transformateur piézoélectrique à sortie en circuit ouvert.

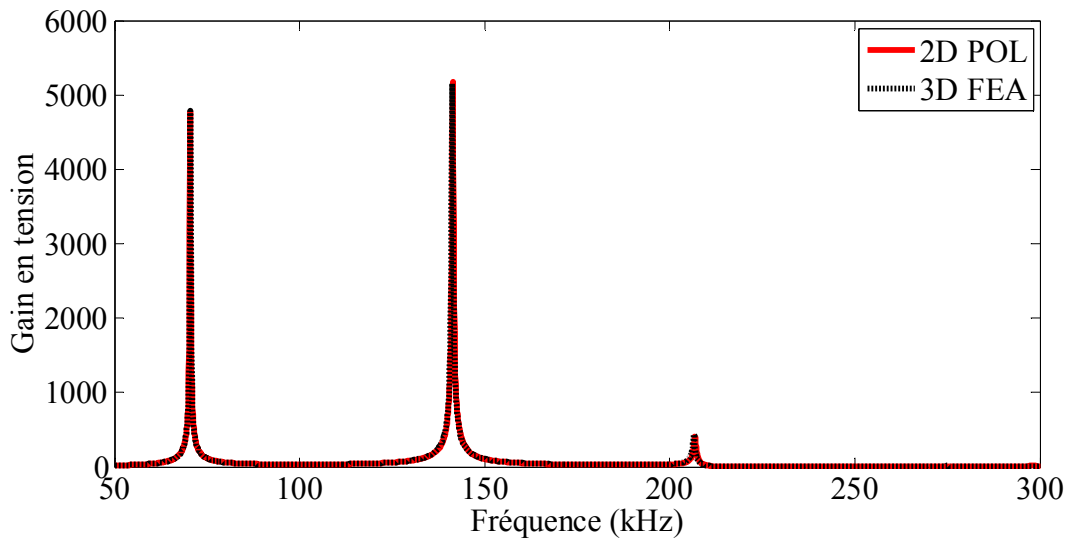


Figure 5.4 : Gain à vide du transformateur piézoélectrique.

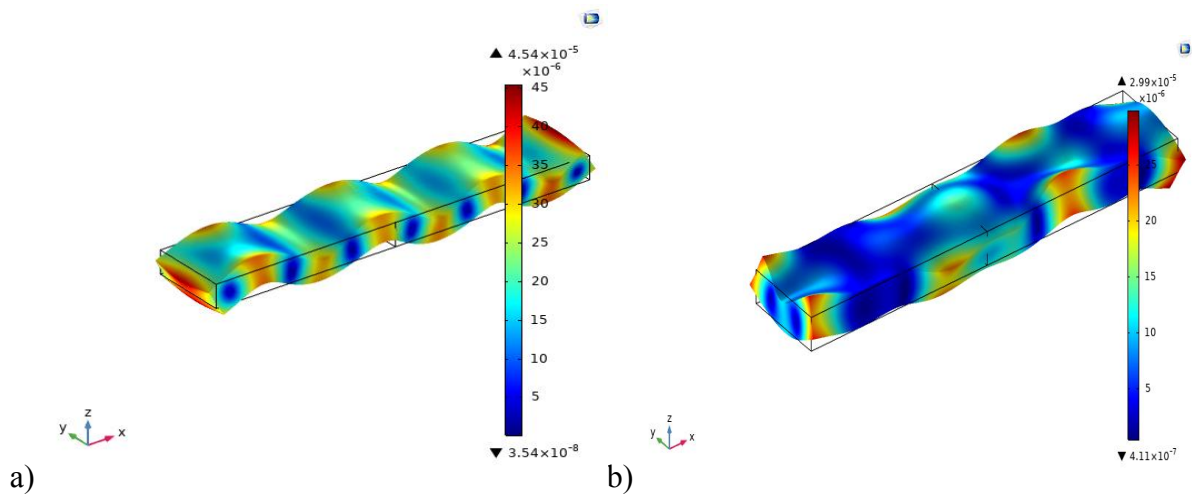


Figure 5.5. Profil de déplacement 3D pour a)  $f=129$  kHz b)  $f=214$  kHz.

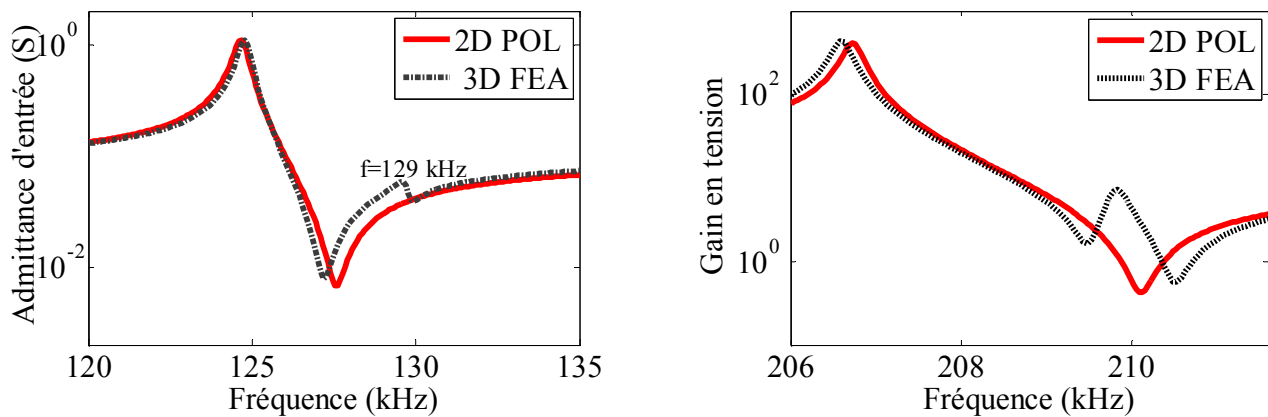


Figure 5.6 : Admittance d'entrée (à gauche) et gain en tension (à droite) au voisinage des fréquences parasites.

Tableau 5.3. Paramètres géométriques et propriétés du matériau pour TP2a et TP2b.

Rigidité $c$ (N/m <sup>2</sup> )	$\begin{bmatrix} 15,1 & 5 & 8,7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 15,1 & 8,7 & 0 & 0 & 0 \\ 8,7 & 13,2 & 13,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,1 \end{bmatrix} \times 10^{10}$
Constante piézoélectrique $e$ (C m <sup>-2</sup> )	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 13,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13,6 & 0 & 0 \\ -4,26 & -4,26 & 18,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Permittivité relative $\epsilon_r$	$\begin{bmatrix} 1650 & 0 & 0 \\ 0 & 1650 & 0 \\ 0 & 0 & 1580 \end{bmatrix}$
Masse volumique $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> ) ; $Q_m$	7800 ; 1800
Longueur du primaire, Longueur du secondaire, largeur, épaisseur Pour TP2a	$6 \times 10^{-3} \text{ m} ; 6 \times 10^{-3} \text{ m} ; 24 \times 10^{-3} \text{ m} ; 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$
Pour TP2b	$6 \times 10^{-3} \text{ m} ; 6 \times 10^{-3} \text{ m} ; 42 \times 10^{-3} \text{ m} ; 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$

### 5.5.3. Exploitation de la méthode

Trois TPs différents, un transformateur long étudié précédemment que l'on note dans la suite TP1 et deux TP larges monocouche notés TP2a et TP2b, sont traités dans ce paragraphe pour illustrer à la fois les capacités de notre approche polynomiale et les conditions d'utilisation de ce type de transformateur. Leurs paramètres géométriques et leurs propriétés sont indiqués dans le tableau 4.1 pour TP1 et dans le tableau 5.3 pour TP2a et TP2b.

#### 5.5.3.1. Profils des champs

Au voisinage des fréquences de résonance de TP1 calculées antérieurement (chapitre 5, section 5, paragraphe 2), on peut obtenir les expressions de chaque champ, déplacement mécanique, contrainte mécanique, potentiel électrique, champ électrique, déplacement électrique... à partir des coefficients du développement polynomial  $p_{k,mn}$  calculés pendant la résolution du problème aux valeurs propres. L'amplitude du déplacement mécanique est calculée pour identifier les modes de vibration et les points nodaux.

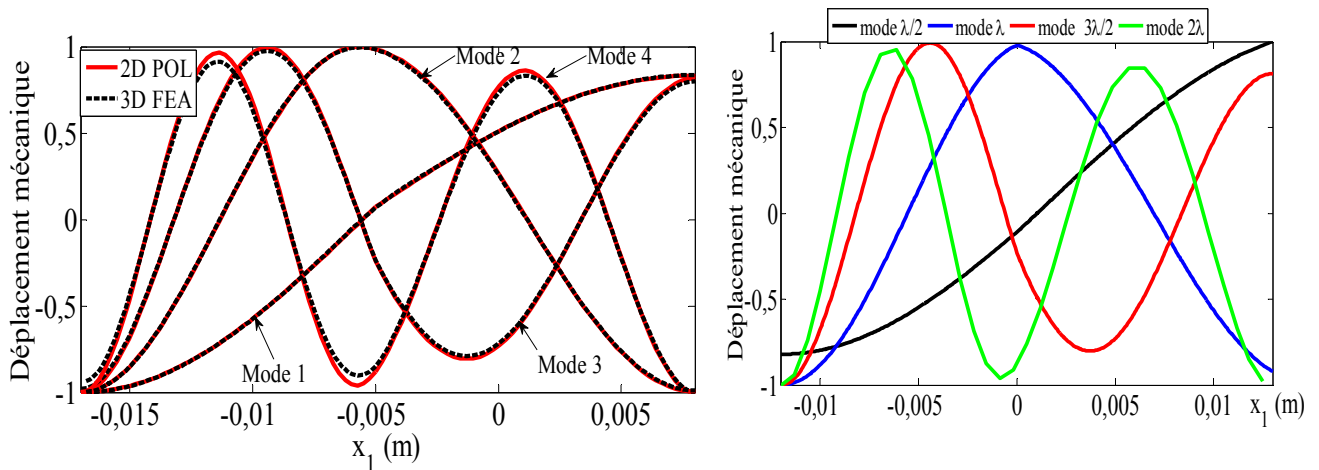


Figure 5.7 : Profil, pour TP1, des déplacements mécaniques des quatre premiers modes longitudinaux cas secondaire en circuit ouvert (à gauche) et secondaire court-circuité (à droite).

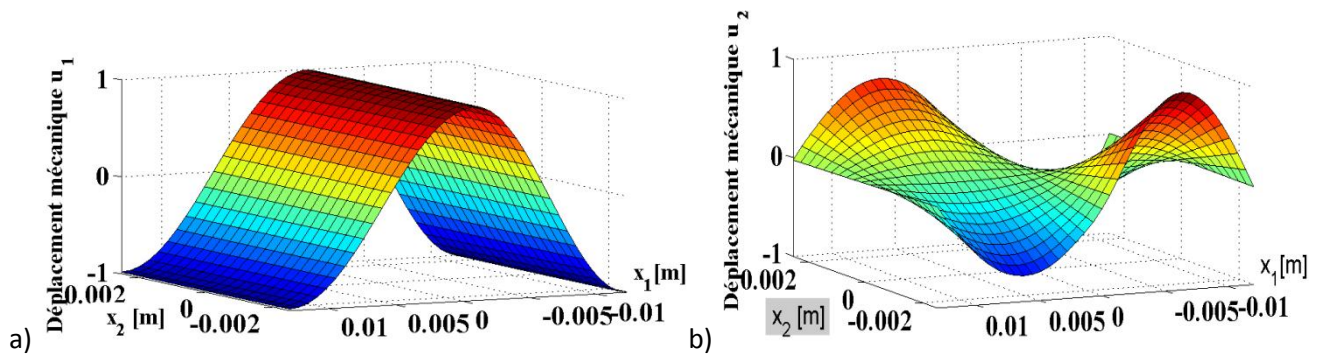


Figure 5.8 : Composantes longitudinale (a) et transversale (b) du déplacement mécanique pour TP1,  $f=141,39$  kHz.

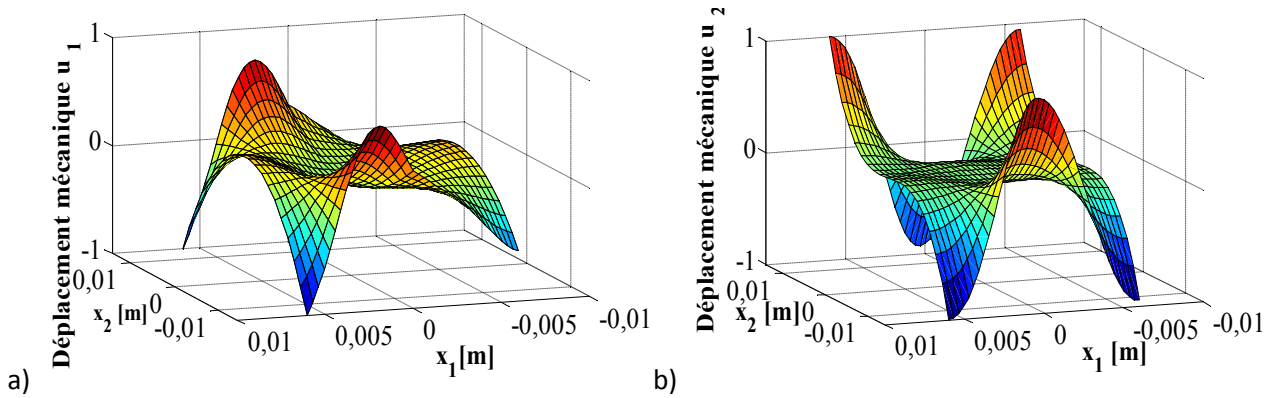


Figure 5.9 : Composantes longitudinale (a) et transversale (b) du déplacement mécanique pour TP2a,  $f=303,40\text{kHz}$ .

En effet, il est très important de les prédire car le TP de type Rosen doit être en contact avec son support essentiellement au niveau de ses points nodaux, points d'annulation du déplacement mécanique, afin que le support n'ait pas d'effet sur la vibration et la performance du TP. Les figures 5.7 montrent les profils du déplacement mécanique  $u_1$  des quatre premiers modes, modes  $\lambda/2$ ,  $\lambda$ ,  $3\lambda/2$  et  $2\lambda$ , le long de l'axe  $x_1$  à  $x_2=0$  pour le transformateur piézoélectrique TP1 dans les deux configurations sortie en circuit ouvert (à gauche) et sortie court-circuitée (à droite). On compare, pour la sortie circuit ouvert, les résultats obtenus par les deux méthodes, polynomiale et FEA. Pour les quatre premiers modes, l'erreur relative sur la courbe de déplacement ne dépasse pas 5%. Dans le deuxième mode, le mode de fonctionnement du TP de type Rosen, l'erreur est inférieure à  $10^{-2}$  pour cent. Au voisinage du deuxième mode le profil des déplacements mécaniques  $u_1$  et  $u_2$  suivant les deux axes  $x_1$  et  $x_2$  sont présentés dans les figures 5.8 pour TP1 et dans la figure 5.9 pour TP2a [3].

La figure 5.10 donne les profils des potentiels électriques suivant l'axe  $x_1$  pour les quatre premiers modes de vibration longitudinale du transformateur piézoélectrique étudié dans les deux cas, secondaire court-circuité et secondaire en circuit ouvert pour  $x_2=0$ . Les conditions aux limites imposées dans l'expression du potentiel électrique, potentiel nul pour  $x_1=L_2$  dans le cas du transformateur à sortie court-circuité par exemple et potentiel continu pour  $x_1=0$ , sont respectées.

Les calculs des déplacements mécaniques et des potentiels électriques étant établis et validés, nous pouvons maintenant calculer les autres grandeurs. La plus intéressante est la contrainte mécanique pour vérifier la condition aux limites libre-libre. On observe bien sur la figure 5.11 que les contraintes normales sont nulles aux extrémités de la structure et que la continuité de contrainte normale à l'interface entre la partie primaire et la partie secondaire est respectée. Ceci met en évidence que l'utilisation de fonctions spécifiques pour, dans la méthode polynomiale, décrire une structure et incorporer automatiquement les conditions aux limites et de

continuité dans l'équation de propagation est entièrement adéquate pour les TPs dans l'hypothèse 2D contrainte plane.

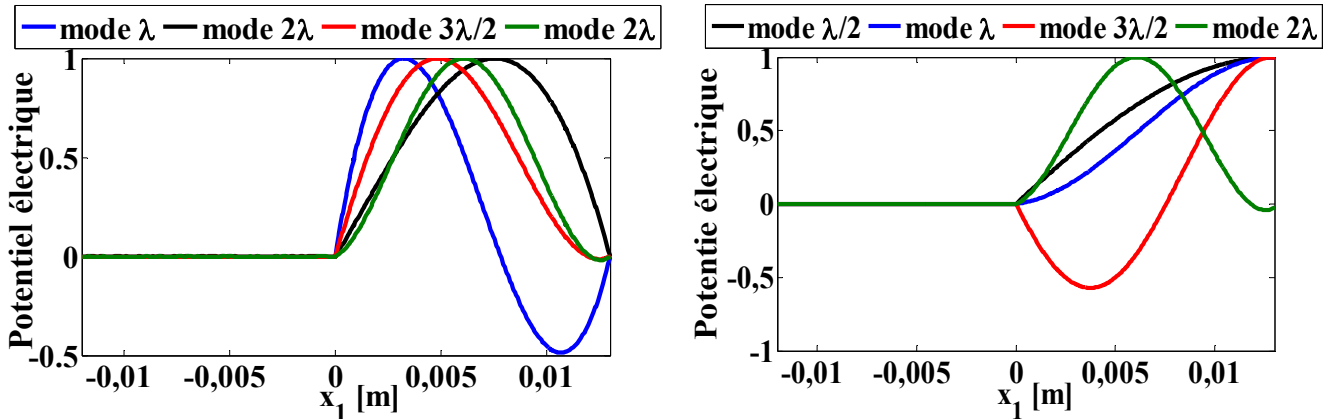


Figure 5.10 : Profils des potentiels électriques suivant l'axe  $x_1$ , secondaire court-circuité (à gauche) et secondaire en circuit ouvert (à droite) pour TP1.

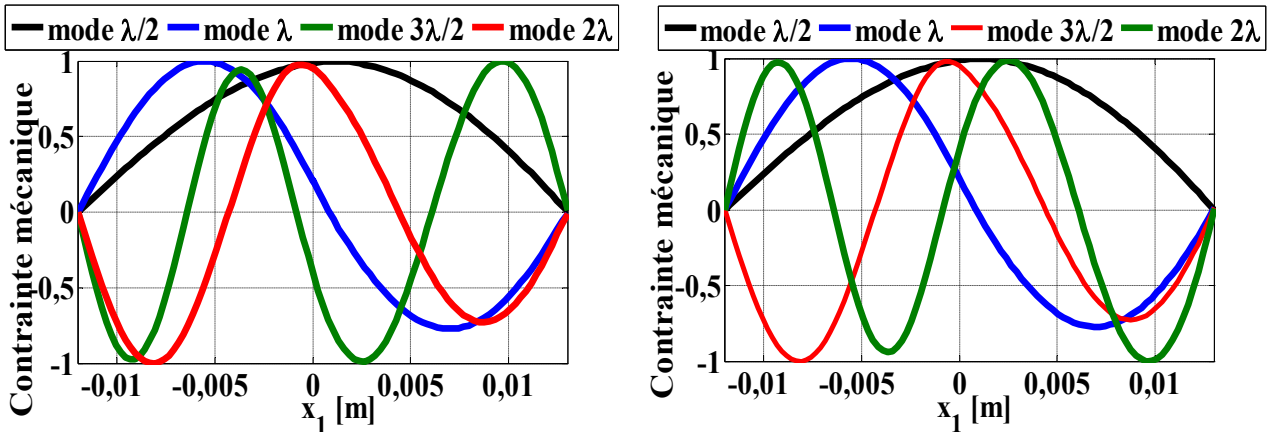


Figure 5.11 : Composante suivant  $x_1$  de la contrainte mécanique pour chaque mode de transformateur TP1.

Par ailleurs, pour éviter le risque de fatigue prématurée du TP la limitation des contraintes est très importante. Or, la contrainte mécanique est un tenseur et la manière de la représenter sur une figure est fastidieuse. L'une des méthodes, afin de prédire le point de fracture du matériau, est de comparer la contrainte totale dans les trois directions principales avec le critère de Von Mises qui est le point où la contrainte de Von Mises dépasse sa valeur maximale pour un matériau donné. Elle est calculée à partir des contraintes principales  $T_1$  et  $T_2$  et de la contrainte tangentielle  $T_6$  pour notre approximation 2D contrainte plane comme indiquée dans l'équation 5.9 [9,10] et tracée dans la figure 5.12.

$$T_{vms} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_6^2 - T_1T_2} . \quad (5.9)$$



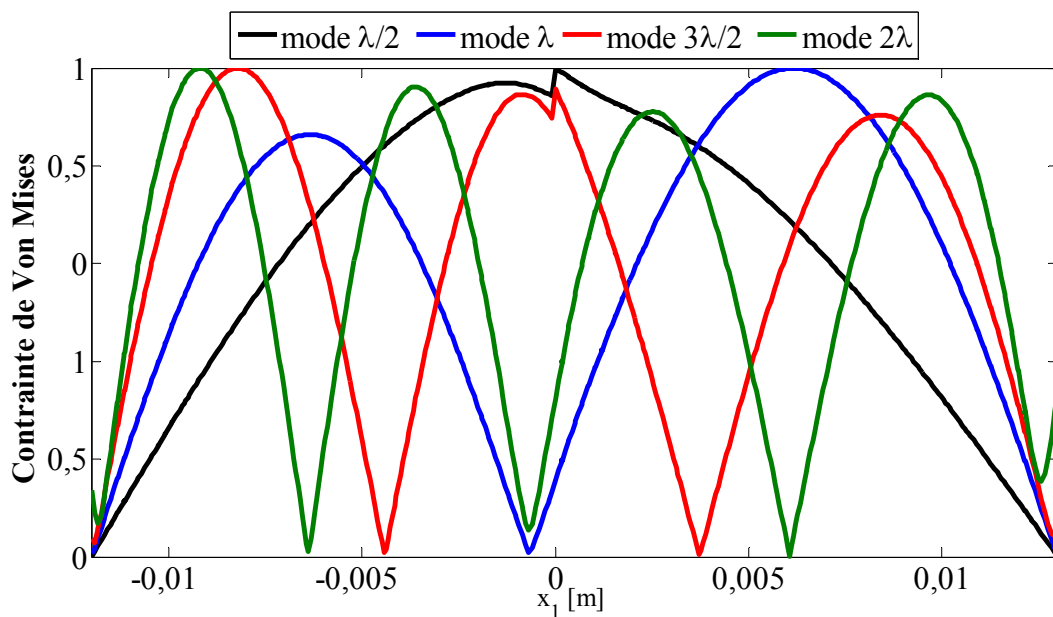


Figure 5.12 : Contrainte de Von Mises.

Bref, la répartition de la contrainte est très importante pour la sélection du mode de résonance et pour la position des électrodes. En effet, l'énergie récupérée étant proportionnelle à l'intégrale de la contrainte, les électrodes secondaires doivent être positionnées de telles sortes à englober le maximum de contrainte. En plus, l'exploitation simultanée de deux modes différents (transversal et longitudinal) fragilise le transformateur particulièrement à l'interface primaire/secondaire. Une fatigue prématurée de la céramique couplée à des sollicitations mécaniques trop importantes peut entraîner une rupture de la structure. Donc, il faut choisir un mode dont la contrainte à l'interface est nulle. Pour le cas du transformateur de type Rosen, le deuxième mode longitudinal respecte cette condition au voisinage de l'interface. Nous effectuons donc pour ce mode l'étude de la dépendance de la charge et l'analyse de sensibilité des paramètres sur les caractéristiques du transformateur.

### 5.5.3.2. Dépendance avec la résistance de charge

Le rapport du transformateur et la fréquence de résonance dépendent fortement de la valeur de la charge. Le gain en tension et la fréquence de résonance en fonction de la résistance de charge  $R_{ch}$  du TP1 sont représentés respectivement sur la figure 5.13 et sur la figure 5.14 pour le deuxième mode longitudinal. Les valeurs obtenues par la méthode éléments finis 3D et celles obtenues par la méthode polynomiale s'accordent de manière satisfaisante, sauf lorsque  $R_{ch}$  est dans la plage,  $1,3 \times 10^5 \Omega \leq R_{ch} \leq 2 \times 10^5 \Omega$ , où apparaît un mode parasite avec un maximum de gain en tension en fonction de la fréquence comme le montre la figure 5.15. En effet, il est très difficile de localiser la fréquence de résonance longitudinale 3D à cause du maximum parasite.

L'existence de ce mode parasite n'a que peu d'effet sur la courbe de gain en tension en fonction de la résistance de charge [3].

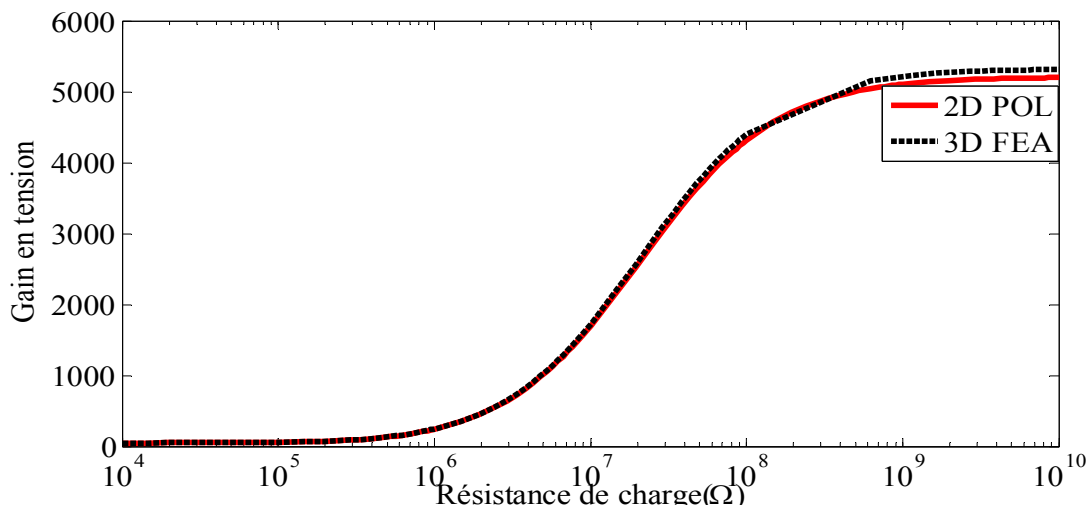


Figure 5.13 : Gain en tension en fonction de la résistance de charge.

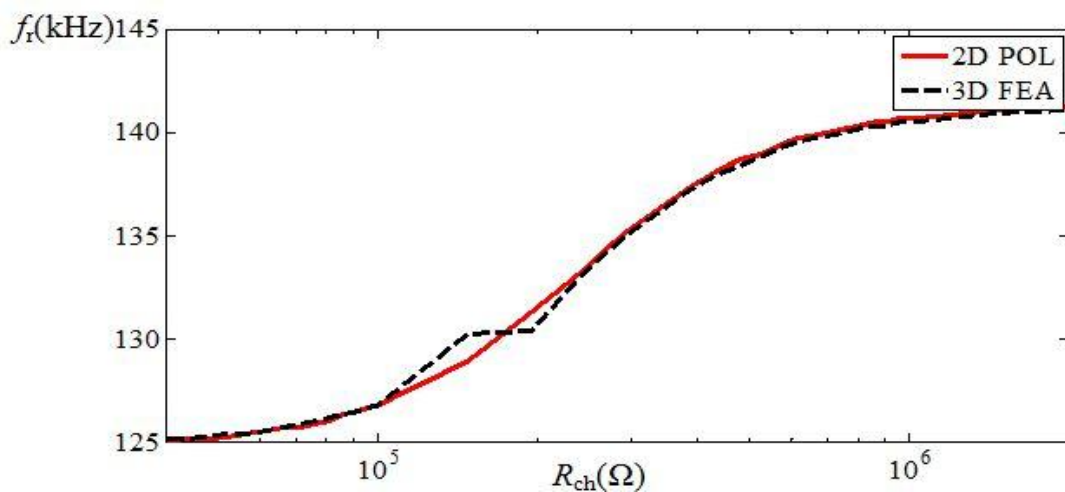


Figure 5.14 : Fréquence de résonance en fonction de la résistance de charge.

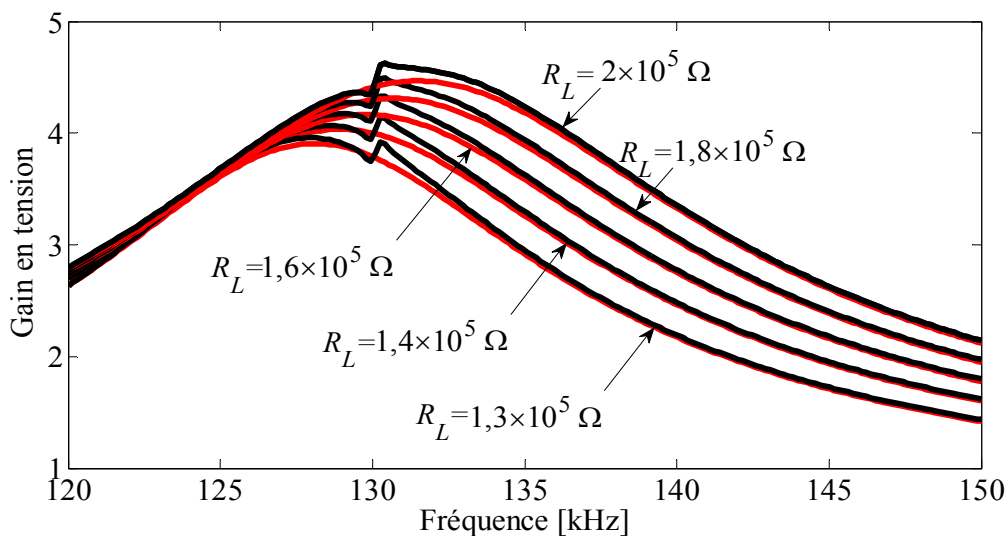


Figure 5.15 : Gain en tension en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de la résistance de charge au voisinage du second mode longitudinal.

Il est confirmé que ce type de TP ne convient pas dans une application avec une faible valeur de résistance de charge. Une étude de dépendance de charge des deux transformateurs larges est faite. Les figures 5.16.a et 5.16.b montrent respectivement le gain en tension et la puissance de sortie en fonction de la résistance de charge pour TP2a et TP2b au voisinage de la deuxième fréquence de résonance longitudinale. L'augmentation de la largeur se traduit par des augmentations de gain en tension  $G_v$  et de puissance de sortie  $P_s = v_s i_s$  ce qui est l'intérêt d'utiliser le transformateur avec un rapport  $L/l$  petit.

Une diminution du rapport  $L/l$  améliore les rendements en puissance du TP pour des valeurs de  $R_{ch}$  petites. En effet, un transformateur piézoélectrique TP1 a un rendement élevé pour une grande valeur de  $R_{ch}$  tandis qu'un transformateur piézoélectrique TP2a a un rendement élevé pour une petite valeur de  $R_{ch}$  comme le montre la figure 5.17 [11]. On peut dire alors que le modèle polynomiale permet, pour une valeur de charge  $R_{ch}$  donnée, de choisir le point de fonctionnement souhaité.

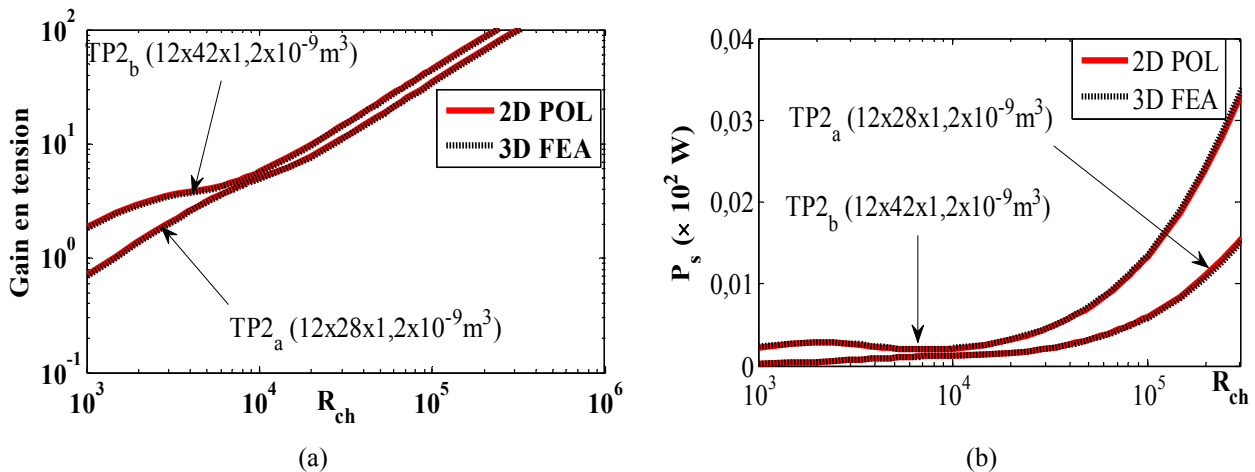


Figure 5.16 : Dépendance, avec la valeur de la charge, du gain en tension et de la puissance pour un transformateur large fonctionnant sur le second mode longitudinal pour deux largeurs différentes.

Pour les courbes de gain de tension en fonction de la résistance de charge  $R_{ch}$  pour le transformateur large TP2a représentées sur la figure 5.16 dans la région  $R_{ch} < 5k\Omega$ , le gain diminue rapidement avec la diminution de  $R_{ch}$ . Les résultats polynomiaux, validés par ceux de la FEA, se comportent comme prévu par l'expérience [11]. Ce comportement n'est pas restitué par un modèle unidimensionnel [11]. Cela montre que le modèle de contrainte plane polynomiale 2D peut estimer l'effet de la dimension latérale d'un transformateur piézoélectrique en décomposant chaque composante de déplacement mécanique et de potentiel électrique dans une double série de produits de polynômes de Legendre (voir annexe E).

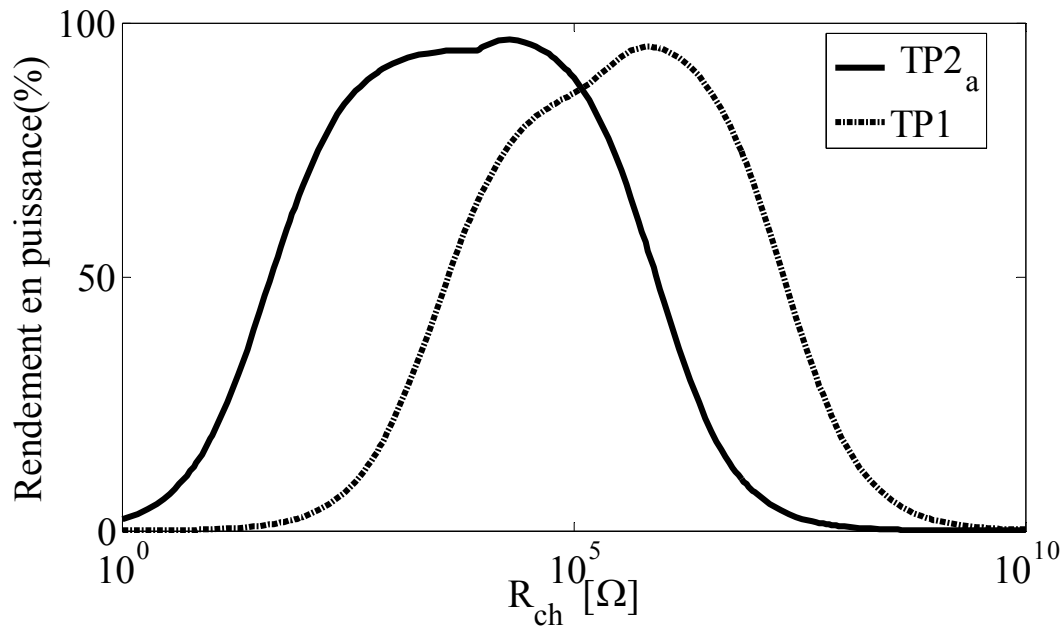


Figure 5.17. Rendement en puissance vs charge.

### 5.5.3.3. Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité permet d'évaluer l'impact de la variation des facteurs d'entrée d'un modèle sur les variables de sortie. Elle est largement utilisée pour les indentifications des paramètres. Ainsi, dans notre cas, on peut trouver les variables les plus sensibles quant aux performances du TP [12-13]. Les paramètres étudiés sont les constantes diélectriques, mécaniques et piézoélectriques du matériau, ainsi que ses dimensions. Nous allons étudier leur influence sur les grandeurs de sortie que sont le gain en tension et la fréquence de résonance.

#### 5.5.3.3.1. Influence des dimensions

Les dimensions  $L$ ,  $l$  et  $h$  sont mesurées avec une précision de  $10^{-4}$ m. L'étude de l'impact des dimensions sur les grandeurs de sortie est faite en faisant varier la taille du transformateur de  $10^{-4}$ m autour de la taille nominale. La figure 5.18 représente l'effet de la variation des dimensions ( $L$ ,  $l$ , et  $h$ ) intervenant dans le modèle polynomial bidimensionnel sur le gain et la fréquence de résonance du second mode du transformateur. On remarque que l'influence de la variation de chacune des trois dimensions sur la fréquence de résonance et sur le gain en tension est peu significative. L'épaisseur agit seulement sur le gain en tension. Quant à la longueur du transformateur, elle modifie de façon significative la fréquence de résonance mais son effet sur le

gain en tension est minime. On résume l'effet des variations de taille de transformateur sur son gain en tension et sur sa fréquence de résonance dans le tableau 5.4.

Tableau 5.4 : Effet en pourcentage de la variation de chaque dimension sur le gain en tension et la fréquence de résonance.

Variation des dimensions :	Effet sur le gain en tension	Effet sur la fréquence de résonance
$L(\pm 10^{-4}\text{m})l(\pm 10^{-4}\text{m})h(\pm 10^{-4}\text{m})$	Entre -5,5% et 6,4%	$\pm 0,4\%$
$L l(\pm 10^{-4}\text{m}) h$	Entre -0,02% et 0,61%	Entre -0,04% et 0,02%
$L(\pm 10^{-4}\text{m}) l h$	Entre -0,23% et 0,72%	Entre -0,40% et 0,38%
$L l h(\pm 10^{-4}\text{m})$	Entre -5,55% et 6,25%	Aucun

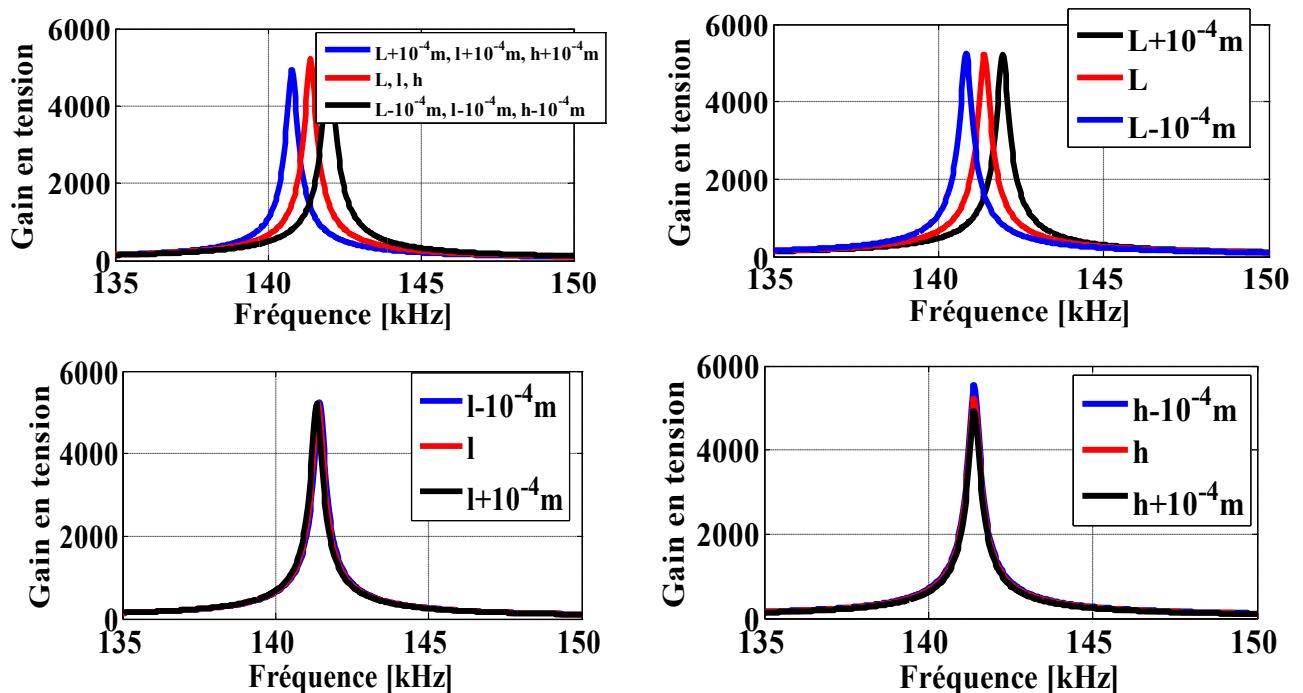


Figure 5.18 : Effet de la variation des dimensions du transformateur sur le gain en tension et la fréquence de résonance (mode 2).

### 5.5.3.3.2. Influence des constantes de rigidité

L'analyse de sensibilité des grandeurs de sortie est réalisée en faisant varier, tour à tour, chaque paramètre de rigidité d'un pourcentage donné. Nous adoptons une variation de rigidité de  $\pm 20\%$  par rapport aux valeurs nominales. Son impact sur la fonction de transfert et la fréquence de fonctionnement du transformateur est présenté sur la figure 5.19. Le tableau.5.5 résume le pourcentage de cet impact. L'analyse est faite sur le deuxième mode de fonctionnement.

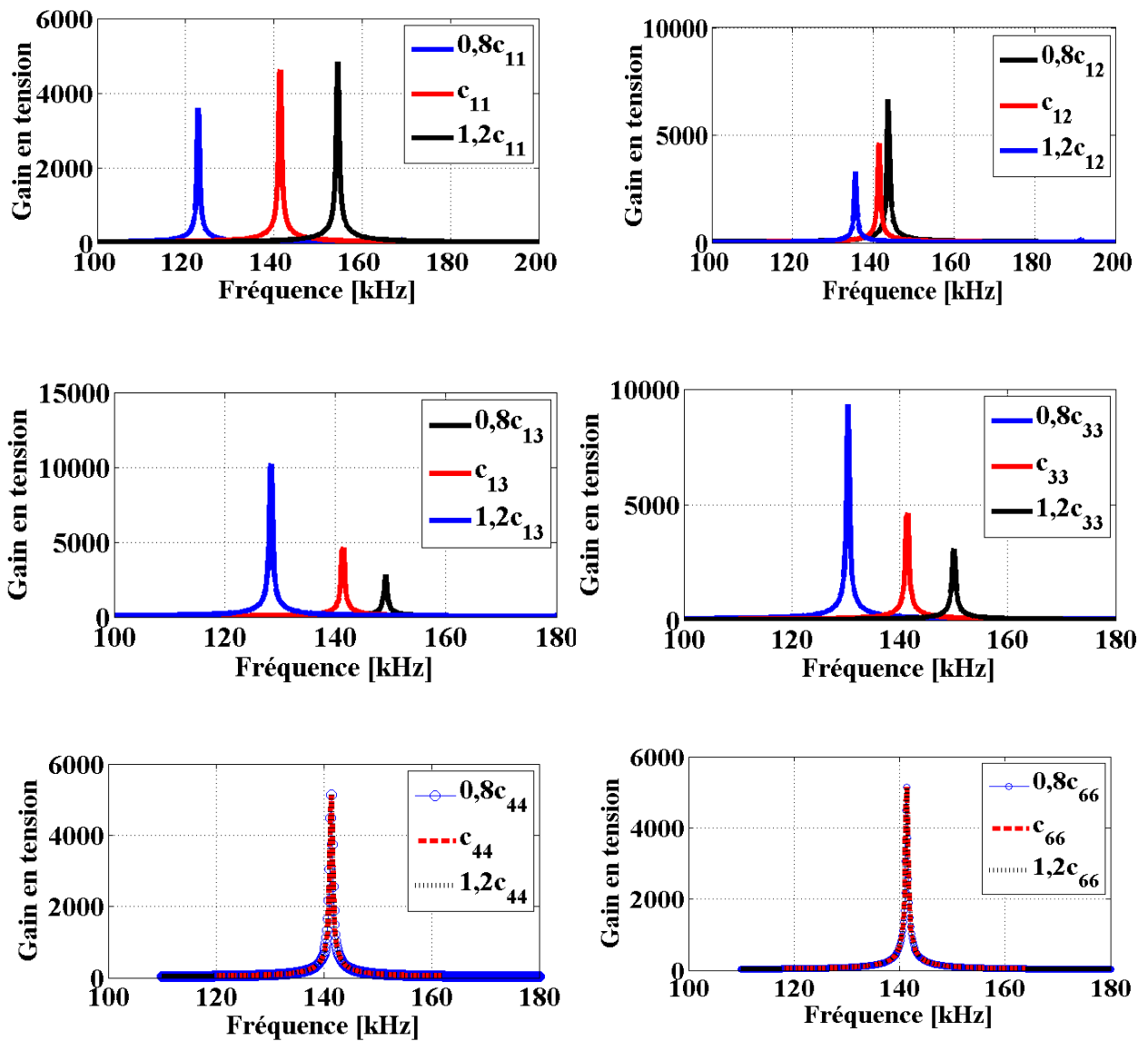


Figure 5.19 : Effet de variabilité de la variation des constantes de rigidité sur le gain et la fréquence de résonance.

Tableau 5.5 : Effet en pourcentage de la variation des constantes de rigidité sur le gain en tension et la fréquence de résonance.

Variation des constantes de rigidité.	Effet sur le gain	Effet sur la fréquence de résonance
$C_{11}(\pm 20 \%)$	Entre -22% et 4%	Entre -13% et 9%
$C_{12}(\pm 20 \%)$	Entre -28% et 44%	Entre -4% et 1,6%
$C_{13}(\pm 20 \%)$	Entre -38,91% et 120,90%	Entre -9,15% et 5,44%
$C_{33}(\pm 20 \%)$	Entre -33,41% et 101,96%	Entre -7,73% et 6,15%
$C_{44}(\pm 20 \%), C_{66}(\pm 20 \%)$	Aucun	Aucun

La figure 5.19 met en évidence un effet très important des paramètres de rigidité du matériau utilisé pour la conception du transformateur piézoélectrique sur la caractéristique dudit transformateur. On constate que toutes les constantes de rigidité agissent sur les grandeurs de sortie considérées dans notre analyse sauf les deux paramètres  $c_{44}$  et  $c_{66}$ .  $c_{11}$  a l'influence la plus importante sur la fréquence de résonance et  $c_{13}$  et  $c_{33}$  sur le gain en tension.

### 5.5.3.3. Influence des constantes piézoélectriques et des constantes diélectriques

Les constantes piézoélectriques et le facteur de qualité sont habituellement déterminés expérimentalement à partir de la différence relative entre les fréquences de résonance et d'antirésonance d'un barreau piézoélectrique. Cette méthode est en principe très précise car elle repose sur une mesure de fréquences, la précision des mesures est de l'ordre de 5 %. Le calcul de ces constantes ( $d$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $e$ ) nécessite aussi la connaissance des constantes diélectriques qui, elles, diminuent de +0,5 % par décennie (du fait du vieillissement) [12].

Nous adoptons une variation de  $\pm 20$  % autour de chaque paramètre. La figure 5.20 représente respectivement les impacts des constantes piézoélectriques et diélectriques sur le gain en tension et sur la fréquence de résonance autour du deuxième mode de la fréquence de fonctionnement du transformateur. Le tableau 5.6 donne l'effet en pourcentage de la variation des différents paramètres d'entrée étudiés : on remarque que les trois paramètres  $e_{33}$ ,  $e_{31}$  et  $\epsilon_{33}$  influent sur le gain et la fréquence de résonance tandis que les deux paramètres  $e_{15}$  et  $\epsilon_{11}$  n'agissent aucunement.

Tableau 5.6 : Pourcentage de l'effet de variation des constantes piézoélectriques et des constantes diélectriques.

Variation des constantes	Effet sur le gain en tension	Effet sur la fréquence de résonance
$e_{33}(\pm 20 \%)$	Entre -19,34% et 39,23%	Entre -3,91% et 4,16%
$e_{31}(\pm 20 \%)$	Entre -0,99% et 21,22%	Entre -0,79% et 0,76%
$e_{15}(\pm 20 \%)$	Aucun	Aucun
$\epsilon_{11}(\pm 20 \%)$	Aucun	Aucun
$\epsilon_{33}(\pm 20 \%)$	Entre -3,73% et 34,54%	Entre -2,06% 2,89%

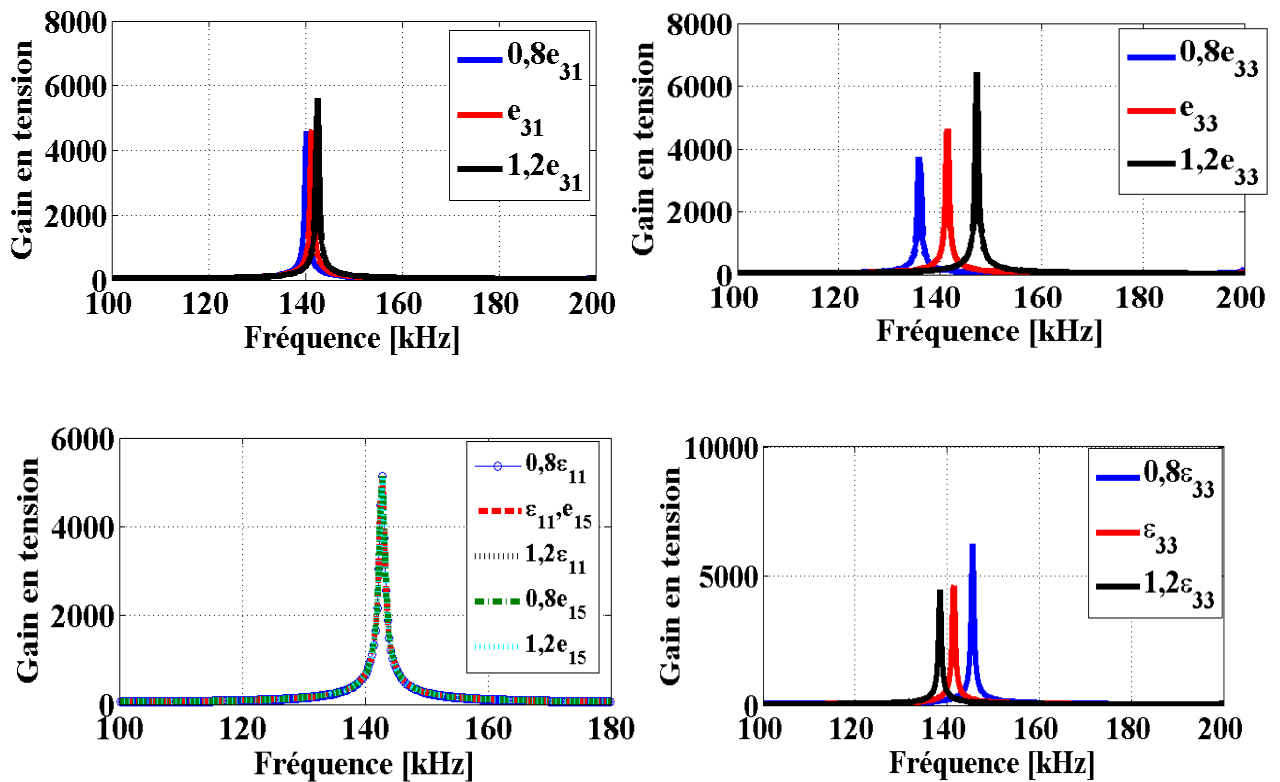


Figure 5.20 : Effet de la variation des constantes piézoélectriques et des constantes diélectriques.

#### 5.5.3.3.4. Influence de la masse volumique et du facteur de qualité

Les figures 5.21.a et 5.21.b représentent l'effet de la variation du facteur de qualité mécanique  $Q_m$  et de la masse volumique  $\rho$  du matériau PZT intervenant dans le modèle bidimensionnel sur le gain en tension et la fréquence de résonance du second mode du transformateur. Le tableau 5.7 résume, en pourcentage, l'effet de la variation de ces paramètres d'entrée sur les caractéristiques du transformateur. On remarque que la variation de  $Q_m$  agit sur le gain en tension seulement tandis que la variation de  $\rho$  agit à la fois sur la fréquence de résonance et le gain en tension.

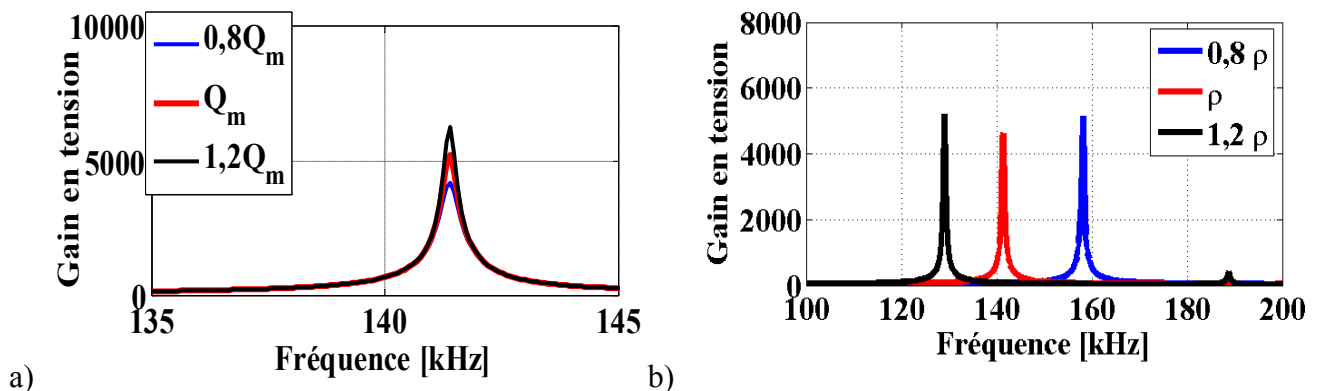


Figure 5.21 : Effet de la variation du facteur de qualité (a) et de la masse volumique (b).



Tableau 5.7 : Effet de la variation de la masse volumique et du facteur de qualité.

Variation des constantes	Effet sur le gain en tension	Effet sur la fréquence de résonance
$Q_m(\pm 20 \%)$	Entre -19,91% et 19,84%	Aucun
$\rho(\pm 20 \%)$	Entre 11,04% et 12,73%	Entre -8,78% et 11,75%

## 5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle 2D avec l'hypothèse contrainte plane pour un TP de type Rosen est présenté. Cette étude est utile pour concevoir et optimiser des transformateurs piézoélectriques larges et longs. Le modèle utilise des polynômes de Legendre comme fonctions de base bien adaptées à la géométrie du TP à l'étude. Avec la méthode adoptée, il est facile d'examiner les effets de différents paramètres telles que la fréquence et la charge sur le comportement du TP. Les résultats sont en excellent accord avec les résultats dans la littérature.

## *Références bibliographiques*

- [1]. C. Nadal. « *Contribution à la conception et la modélisation transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma* », thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2011.
- [2]. D. J. Falimiarmanana, F. E. Ratolojanahary, J. E. Lefebvre, P. M. Rabotovao, L. Elmaimouni, I. Naciri, M. Rguiti and T. Gryba, «Modeling of Rosen-type piezoelectric transformer by means of a polynomial approach» in *ICMCS*, 2018.
- [3]. D. J. Falimiarmanana, F. E. Ratolojanahary, J. E. Lefebvre, L. Elmaimouni, M. Rguiti, «2D Modeling of Rosen-type piezoelectric transformer by means of a polynomial approach», *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, Vol. 67, no. 8, pp. 1701-1720, august 2020.
- [4]. J.E. Lefebvre, J.G. Yu, F.E. Ratolojanahary, L. Elmaimouni, W.J. Xu and T.Gryba, «Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices», *AIP Advances*, Vol. 16, pp. 065307, 2016.
- [5]. P.M. Rabotovao, F.E. Ratolojanahary, J.E. Lefebvre, A. Raherison, L. Elmaimouni, T. Gryba, and J.G. Yu, «Modeling of high contrast partially electroded resonators by means of a polynomial approach», *J. Applied Physics*, Vol.114, no.12, pp.124502, 2013.
- [6]. P.M. Rabotovao, «*Modélisation d'un résonateur MEMS à métallisation partielle par l'approche polynomiale*», thèse de Doctorat de l'Université de Fianarantsoa, 2014 .
- [7]. A. Raherison, F. E. Ratolojanahary, J. E. Lefebvre, T. Gryba, «Extension of the Legendre Polynomial Approach for Analyzing Composite BAW Resonators», in *IEEE Ultrasonics Symposium I*, Geneva Switzerland, 2007, pp. 216-219.
- [8]. A. Raherison, F. E. Ratolojanahary, J. E. Lefebvre, L. Elmaimouni, T. Gryba, «Legendre Polynomial Modeling of Composite Bulk Acoustic Wave Resonators», *J. Appl. Phys.*, pp.14508-1 -14508-8, 2008.
- [9]. A. L. Benwell,«*A high voltage piezoelectric transformer for active interrogation*», Thèse de doctorat, University of Missouri-Columbia, 2009.
- [10]. A. Bertram and R. Glüge, «Solid mechanics: Theory, modeling, and problems», First German edition, 2013.
- [11]. H. Fukunaga, H. Kakehashi, H. Ogasawara and Y. Ohta, «Effect of Dimension on Characteristics of Rosen-Type piezoelectric Transformer» in *Proc. 29th Annu. IEEE Power Electron. Spec. Conf.*, May 1998, pp. 1504–1510.

- [12]. F. Boukazouha, «*Conception, Réalisation, Modélisation et Caractérisation Expérimentale d'un Transformateur de Tension de Type Rosen*», thèse de Doctorat de Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Algérie, 2016.
- [13]. Hyun-Woo Joo, Chang -Hwan Lee, Jong-Seok Rho and Hyun-Kyo Jung, «Three-Dimensional, Finite-Element Method and a Design-Sensitivity Method», *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, Vol. 50, no. 8, pp. 965-971, august 2003.

---

---

## **CONCLUSION GENERALE**

---

---

Le travail de recherche dont la présente thèse a fait l'objet a consisté en des études unidimensionnelle et bidimensionnelle du comportement d'un transformateur piézoélectrique plus particulièrement le transformateur élévateur de tension de type Rosen. L'objectif qui avait été fixé initialement, à savoir étude des modes libres et de la réponse harmonique du transformateur piézoélectrique avec un nouvel outil de modélisation, est atteint. Les résultats obtenus ont permis une meilleure compréhension des phénomènes de couplage électromécanique dans les transformateurs piézoélectriques. Dans le modèle proposé, les écritures des équations physiques, les hypothèses effectuées sur le comportement physique de la structure étudiée ainsi que les conditions aux limites et de continuité sont importantes afin d'obtenir un résultat fiable. La présence de la fonction delta dans les équations de propagation des ondes a permis de respecter les conditions aux limites et de continuité pour les variables déplacement électrique et contrainte mécanique dans la structure. La décomposition des variables déplacement mécanique et potentiel électrique, dans chacune des régions de la structure, sur une base d'un produit de polynômes de Legendre spécifiques à chaque région a permis d'inclure automatiquement les conditions de continuité requises pour ces variables entre la partie primaire et la partie secondaire du transformateur.

Dans le premier chapitre de notre mémoire, nous avons présenté quelques notions concernant la piézoélectricité. Différents types de matériaux piézoélectriques sont rappelés y compris les céramiques qui ont le plus fort coefficient de couplage électromécanique. Les modes de fabrication des céramiques sont donnés avant de décrire mathématiquement les propriétés du matériau piézoélectrique en introduisant les notions sur l'élasticité linéaire.

Le deuxième chapitre rappelle les principes de fonctionnement et les types de transformateurs piézoélectriques, les modèles existants utilisés pour étudier ce composant comme le modèle de Mason fournissant un circuit équivalent décrivant le comportement acousto-électrique d'un dispositif, la méthode analytique 1D capable de couvrir toutes les fréquences pour les structures latéralement infinies et la méthode des éléments finis basée sur un maillage de la structure considérée et qui sont opérationnelles en modélisation bidimensionnelle.

Dans le troisième chapitre, nous avons étendu la méthode polynomiale afin de modéliser les dispositifs composés à la fois d'un actionneur et d'un transducteur. Nous avons calculé les fréquences propres, le coefficient de couplage et les profils des champs dans le transformateur à sortie en circuit ouvert et en court-circuit. Nous avons confronté nos résultats avec les résultats théoriques de la méthode analytique 1D et nous avons constaté un excellent accord entre ces résultats.

Dans le quatrième chapitre, nous avons proposé un modèle bidimensionnel, avec l'hypothèse déformation plane, appliqué à l'étude d'un transformateur à dimension latérale finie avec électrodes minces. La validation de la méthode a été faite en confrontant les résultats obtenus par la nouvelle approche présentée dans cette thèse avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis en gardant la même hypothèse de déformation plane tant sur l'analyse modale que sur l'analyse harmonique. L'accord obtenu est tout à fait satisfaisant. Cependant, la comparaison avec les résultats du modèle éléments finis 3D nous montre la défaillance du modèle 2D avec l'hypothèse déformation plane qui ne peut pas être utilisé dans l'étude de notre transformateur piézoélectrique de type Rosen.

Le cinquième chapitre présente le modèle polynomial bidimensionnel avec l'hypothèse contrainte plane en supposant que le transformateur se comporte comme une plaque mince. Les fréquences de résonance et d'antirésonance du transformateur sont calculées en analyse modale. L'étude en analyse harmonique a permis de tracer les courbes de l'admittance électrique pour le cas du secondaire en circuit ouvert et en court-circuit, le gain en tension, la puissance et le rendement en puissance du transformateur chargé. La convergence de la méthode polynomiale a été présentée. La comparaison des résultats obtenus avec ceux de la méthode éléments finis 3D et les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature montre un bon accord ce qui a permis de valider le modèle. Une fois ces vérifications faites, nous avons exploité le modèle pour illustrer les potentialités offertes en présentant les profils des déplacements mécaniques dans la structure à la fréquence de résonance longitudinale et la dépendance avec la charge placée au secondaire. Le modèle est intéressant car il permet d'effectuer l'analyse de sensibilité de tous les paramètres d'entrée sur les caractéristiques de la structure.

En perspective, notre étude pourrait se poursuivre:

- sur la modélisation du transformateur en considérant les effets des électrodes, des soudures métalliques, des températures et les effets de non linéarité.
- sur la modélisation des filtres RF composés simultanément d'un actionneur et d'un transducteur.

---

---

## **ANNEXES**

---

---

# ANNEXE A : GRANDEURS ELECTRIQUES ET MECANIQUES [A1]

## A.1. Champ électrique dans le vide

Dans le cas de deux particules immobiles chargées  $A$  et  $B$ , de charge  $q_A$  et  $q_B$ , la force de Coulomb qui est exercée sur  $B$  par  $A$  est:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_{A \rightarrow B} \quad (\text{A.1})$$

où  $r$  est la distance entre les particules,  $\vec{u}_{A \rightarrow B}$  le vecteur unitaire allant de  $A$  à  $B$  et  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide, constante égale à  $8,854 \times 10^{-12}$  F/m. On définit alors le champ électrique en tout point de l'espace ; ce champ  $E$  permet de rendre compte de la force de Coulomb par la relation suivante :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (\text{A.2})$$

Pour représenter l'interaction entre les particules  $A$  et  $B$ , d'après (A.1) et (A.2), le champ créé par chaque particule est un champ à symétrie sphérique; ainsi le champ créé par  $A$  en un point  $M$  est

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r^2} \vec{u}_{A \rightarrow M} \quad (\text{A.3})$$

où dans ce cas  $r$  est la distance  $AM$ .

## A.2. Théorème de Gauss

Si l'on considère maintenant une densité volumique de charges, notée  $\rho_v$ , on peut écrire le champ électrique produit par cette densité en tenant compte des versions locale ou intégrale du théorème de Gauss:

– En tout point de l'espace où la densité volumique de charge est  $\rho_v$ , le champ électrique vérifie :

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_v \quad (\text{A.4})$$



– Pour tout volume  $V$  à l'intérieur duquel la densité volumique de charge est  $\rho_v$ , on a :

$$\oiint_{\partial V} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \rho_v dV = Q_v \quad (\text{A.5})$$

avec  $Q_v$  la charge contenue dans  $V$ .

### A.3. Conduction et charges libres dans un matériau

Les propriétés électriques et magnétiques d'une région matérielle sont caractérisées par trois phénomènes : la conduction électrique, représentée par le paramètre  $\sigma$ , conductivité du matériau ; la polarisation électrique, représentée par le paramètre  $\epsilon$ , permittivité du matériau et la polarisation magnétique, représentée par le paramètre  $\mu$ , perméabilité du matériau. Comme on s'intéresse aux matériaux piézoélectriques soumis à des champs magnétiques négligeables, la suite évoquera simplement les deux premiers points.

La conductivité d'un matériau est liée à la présence d'électrons libres dans ce matériau, qui sont capables de se déplacer d'une orbite atomique à une autre et de créer des courants électriques; les atomes qui constituent le matériau restent eux immobiles. On représente les courants par une densité volumique de courant électrique, définie par :

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}_m \quad (\text{A.6})$$

où  $\rho_v$  est la densité volumique de charges libres et  $v_m$  la vitesse moyenne de ces charges. Comme ces électrons libres (qui sont des charges négatives) se déplacent lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique  $E$ , on a la relation suivante, appelée loi d'Ohm locale :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{A.7})$$

où  $\sigma$  est la conductivité du matériau, exprimée en A/V/m ou Siemens par mètre (S/m). Selon la valeur de la conductivité  $\sigma$  d'un matériau donné, celui-ci est plus ou moins conducteur. Les matériaux isolants (ou diélectriques) ne possèdent pas d'électrons libre en leur sein, si bien qu'aucun courant électrique ne peut y prendre naissance. Ils sont caractérisés par des valeurs très faibles de  $\sigma$ , de l'ordre de  $10^{-16}$  S/m pour les meilleurs isolants. Les matériaux piézoélectriques font partie de cette famille.

#### A.4. Polarisation d'un diélectrique et charges liées

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique, les charges positives et négatives le constituant sont soumises à des forces de Coulomb et se déplacent légèrement par rapport à leur position d'équilibre moyenne, sans pouvoir circuler sur de grandes distances. Même si ces déplacements sont de l'ordre de quelques fractions des diamètres moléculaires, le cumul des charges déplacés peut causer un changement significatif de l'état électrique du milieu. Ce phénomène est la polarisation. Les charges électriques dans un diélectrique sont organisées par paires de charge positives et négatives, chaque paire étant appelée un dipôle, de charge globale nulle. Chaque dipôle, est caractérisée par son moment  $\vec{p}_i$  défini par :

$$\vec{p}_i = q_i \vec{d}_i \quad (\text{A.8})$$

où  $q_i$  est la charge positive du  $i^{\text{ième}}$  dipôle et  $\vec{d}_i$  le vecteur représentant la distance de la charge négative vers la charge positive.

Le champ de polarisation électrique  $\vec{P}$  du milieu est alors défini comme la densité volumique de dipôles. Elle caractérise un déplacement de charges positives par rapport aux charges négatives.

#### A.5. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell pour un milieu matériel donné sont, dans le cas général

$$\text{div} \vec{D} = \rho_v, \quad (\text{A.9a})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{A.9b})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}, \quad (\text{A.9c})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.9d})$$

où  $B$  est le champ (ou induction) magnétique et  $H$  est l'excitation (ou champ) magnétique. En prenant la divergence de l'équation (A.9c) et en utilisant (A.9a), on retrouve l'équation de conservation des charges électriques :

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.10a})$$

Le respect de la conservation de la charge impose de modifier l'équation de Maxwell-Ampère (A.9c), en y ajoutant à droite un terme dont la divergence vaut  $\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$ . D'après Maxwell-Gauss (A.9a), ce terme nommé « courant de déplacement », qui est en général négligeable dans les conducteurs et dominant dans les isolants, vaut

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.10a})$$

L'hypothèse électrostatique stipule que les répartitions de charge et les densités de courant sont quasi-stationnaires, ce qui conduit à éliminer les dérivées temporelles des équations (A.9 a-d). Dans ce cas, le couplage entre les quantités électriques  $E$  et  $D$  et magnétiques  $B$  et  $H$  n'a donc plus lieu et l'état électrostatique (les vecteurs  $E, D$ ) ne dépend donc que :

– des équations locales (A.9a) et (A.9d), cette dernière devenant :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{A.11})$$

– de la relation de comportement électrique du milieu

– des conditions aux limites

### A.6. Potentiel électrique

L'équation (A.11) montre que le champ électrique  $E$  est irrotationnel dans le cas électrostatique, ce qui signifie qu'il existe un potentiel électrique  $\Phi$  tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (\text{A.12})$$

### A.7. Déformations mécaniques

Lorsque le solide est soumis à des contraintes extérieures, il se déforme et le point  $M$  de ce solide, de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  définies dans un repère orthonormé  $(O, x_1, x_2, x_3)$  par le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  se déplace en  $M'$  de coordonnées  $x'_1, x'_2, x'_3$ .

Ainsi le déplacement du point  $M$  sera défini par le vecteur  $\vec{u}$  reliant  $\overrightarrow{OM}$  et,  $\overrightarrow{OM'}$  soit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}, \quad (\text{A.13})$$

ou encore en projection

$$u_i = x_i' - x_i, \quad (\text{A.14})$$

avec  $i = 1, 2, 3$ .

Les déformations, à l'intérieur du corps, sont définies par le tenseur de rang deux, symétrique, appelé tenseur des déformations :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right), \quad (\text{A.15})$$

avec  $i, j, l = 1, 2, 3$ .

Les déplacements étant supposés infiniment petits, les termes produits d'un ordre supérieur à un sont négligés. Dans ces conditions, le tenseur des déformations devient :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{A.16})$$

En l'absence de déformation initiale, ce tenseur de rang deux est symétrique ( $S_{ij} = S_{ji}$ ). La paire d'indice  $(ij)$  où  $i$  et  $j$  varient de 1 à 3 peut être remplacée par un seul indice  $\alpha$  variant de 1 à 6 en utilisant la règle de contraction des indices due à Voigt :

$$(ij) \leftrightarrow \alpha$$

$$(11) \leftrightarrow (1) ; (22) \leftrightarrow (2) ; (33) \leftrightarrow (3) ; (23) = (32) \leftrightarrow (4) ; (31) = (13) \leftrightarrow (5) ; (12) = (21) \leftrightarrow (6).$$

donc sous ces notations :

$$S_\alpha = S_{ij} \text{ si } i = j \text{ ou } \alpha \in \{1, 2, 3\}, S_\alpha = 2S_{ij} \text{ si } i \neq j \text{ ou } \alpha \in \{4, 5, 6\}.$$

### A.8. Contraintes mécaniques

Les contraintes qui agissent sur la surface extérieure d'un solide entraînent des déformations qui créent des tensions mécaniques (contraintes). La tension mécanique  $T$  est définie comme la densité surfacique de force sur une facette d'orientation  $\vec{n}$ . Elle évalue les efforts de contact des particules d'un côté de la surface sur les particules situées de l'autre côté de cette même surface :

$$\left( T = \lim_{ds \rightarrow 0} \left( \frac{dF}{ds} \right) \right) \quad (\text{A.17})$$

Afin d'exprimer l'ensemble des contraintes engendrées par un champ de force sur un élément de volume, un tenseur d'ordre deux est utilisé :

$$\left( T_{ij} = \lim_{ds_j \rightarrow 0} \left( \frac{dF_i}{ds_j} \right) \right) \quad (\text{A.18})$$

avec  $i, j = 1, 2, 3$ , et  $ds_j$  représentant l'élément de surface élémentaire de normale  $x_j$ .  $T_{ij}$  correspond à la composante selon  $x_i$  de la force s'exerçant sur la surface de normale  $x_j$ . Chacune des composantes  $T_{ij}$  du tenseur de contrainte  $T$  est la contrainte exercée parallèlement à l'axe  $x_i$  sur la surface normale à l'axe  $x_j$ . Les neuf grandeurs  $T_{ij}$  qui définissent l'état de contrainte d'un milieu déformé constituent un tenseur de rang deux, appelé tenseur des contraintes. Ce tenseur est symétrique ( $T_{ij} = T_{ji}$ ), et ne comprend que six composantes indépendantes ( $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}$  et  $T_{23}$ ).

# ANNEXE B : MODELISATION ANALYTIQUE DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE DETYPE ROSEN [A2]

## B.1. Expression des champs, conditions aux limites et matrice caractérisant le système

À partir des conditions aux limites mécaniques et électriques, on obtient un système formé de six équations à six inconnues de la façon suivante :

les expressions des champs de déplacement, de potentiel électrique et de contrainte sont :

$$u_1(x_1) = \begin{cases} A_u \cos(k_1 x_1) + B_u \sin(k_1 x_1) & \text{si } -L_1 < x_1 < 0 \\ C_u \cos(k_1 x_1) + D_u \sin(k_1 x_1) & \text{si } 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\Phi_1(x_1) = \begin{cases} A_\phi x_3 + B_\phi & \text{si } -L_1 < x_1 < 0 \\ \bar{h}_{33} (C_u \cos(k_1 x_1) + D_u \sin(k_1 x_1) + C_\phi x_3 + D_\phi) & \text{si } 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$T_1(x_1) = \begin{cases} k_1 \bar{c}_{11} \bar{c}_{11}^E [-A_u \sin(k_1 x_1) + B_u \cos(k_1 x_1) + \frac{n \bar{e}_{31} v_p}{h}], -L_1 < x_1 < 0 \\ k_2 \bar{c}_{33}^D [-C_u \sin(k_2 x_1) + D_u \cos(k_2 x_1) - \frac{\bar{h}_{33}}{\bar{h}_{33}} C_\phi], 0 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

On utilise ces expressions dans la suite avec les conditions de raccordement en  $x_l=0$ ,

❖ Continuité de déplacement mécanique :  $u_l(x_l=0^-) = u_l(x_l=0^+)$

$$\Leftrightarrow Au - Cu = 0 \quad (\text{B.4a})$$

❖ Continuité de contrainte mécanique :  $T_l(x_l=0^-) = T_l(x_l=0^+)$

$$\Leftrightarrow \bar{c}_{11}^E k_1 B_u - \bar{c}_{33}^D k_2 D_u - (\bar{c}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S) C_\phi = -\frac{n \bar{e}_{31} v_p}{h} \quad (\text{B.4b})$$

❖ Continuité de potentiel électrique :  $\Phi_1(x_1 = 0^-) = \Phi_1(x_1 = 0^+)$

$$\Leftrightarrow \bar{h}_{33} C_u + D_\phi = 0 \quad (\text{B.4c})$$

et les conditions aux limites en  $x_l = -L_1$  et  $x_l = L_2$

❖  $T_1(x_1 = -L_1) = 0$

$$\Leftrightarrow \bar{c}_{11}^E k_1 (A_u \sin X_1 + B_u \cos X_1) = -\frac{n \bar{e}_{31} v_p}{h} \quad (\text{B.4d})$$

❖  $T_1(x_1 = L_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \bar{c}_{33}^D k_2 (-C_u \sin X_2 + D_u \cos X_2) + (\bar{h}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S) C_\phi = 0 \quad (\text{B.4e})$$

$$\diamond \Phi_1(x_1 = L_2) = v_s$$

$$\Leftrightarrow \bar{h}_{33} (C_u \cos X_2 + D_u \sin X_2) + C_\phi L_2 + D_\phi = v_s \quad (\text{B.4f})$$

où  $v_s$  est l'amplitude de la tension de sortie définie par la relation :

$$v_s = R_{ch} i_s \text{ avec } i_s = -j\omega q_s \quad (\text{B.5})$$

avec  $q_s$  quantité de charge du secondaire telle que :

$$\begin{aligned} q_s &= -\iint D_1 dS_s \\ &= C_s C_\phi L_2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

L'amplitude de la tension de sortie est donc :

$$v_s = -j\omega R_{ch} C_s C_\phi L_2 \quad (\text{B.7})$$

En remplaçant  $v_s$  par son expression, les relations (B.4) jusqu'à (B.7) forment un système d'équations que l'on peut écrire sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_1 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 & -l & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_1 \sin X_1 & \bar{c}_{11}^E k_1 \cos X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 \sin X_2 & \bar{c}_{33}^D k_2 \cos X_2 & l & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} \cos X_2 & \bar{h}_{33} \sin X_2 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_u \\ B_u \\ C_u \\ D_u \\ C_\phi \\ D_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-n\bar{e}_{31}}{h} v_p \\ 0 \\ \frac{-n\bar{e}_{31}}{h} v_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

en posant  $m = (1 + j\omega R_{ch} C_s) L_2$  et  $l = \frac{\bar{h}_{33}}{\bar{\beta}_{33}^S}$ .

C'est une équation de la forme  $[M(\omega)].[X]=[b]$  en posant :

$$X_1 = k_1 L_1, X_2 = k_2 L_2 \text{ et } C_s = \frac{lh}{L_2} \varepsilon_{33}^T (1 - \varepsilon_{33}^T) \quad (\text{B.9})$$

Les éléments de  $[X]$  sont obtenus par la résolution de l'équation matricielle précédente en procédant avec Matlab de la manière suivante :

$$[X] = [M(\omega)] \setminus [b] \quad (\text{B.10})$$

On peut tirer les expressions des fonctions de transfert du transformateur piézoélectrique considéré.

- ❖ Dans ce cas, le gain en tension est:  $G_v = \frac{v_s}{v_p}$ ,
- ❖ La puissance de sortie :  $P_s = v_s i_s = \frac{1}{2R_{ch}} v_s v_s^*$ ,
- ❖ Et le rendement en puissance:  $\eta = \frac{\text{Puissance de sortie } (P_s)}{\text{Puissance d'entrée } (P_e)}$

## B.2. Fréquence de résonance et fréquence d'antirésonance de la structure

### B.2.1. Etude du cas série : $v_p=0$ et $v_s=0 \Rightarrow R_{ch}=0$

En utilisant ces conditions, la matrice  $M(\omega)$  précédente se réduit à  $M_0(\omega)$  dont l'expression est:

$$M_0(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{10} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{20} & -\bar{h}_{33}/\bar{\beta}_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_{10} \sin X_{10} & \bar{c}_{11}^E k_{10} \cos X_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 \sin X_{20} & \bar{c}_{33}^D k_2 \cos X_{20} & \bar{h}_{33}/\bar{\beta}_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} \cos X_{20} & \bar{h}_{33} \sin X_{20} & L_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La nullité du déterminant de cette matrice donne les fréquences de résonance. On obtient une équation ( $E_0$ ) qui sera présentée dans le tableau suivant ainsi que les expressions des champs de déplacement et des contraintes.

### B.2.2. Etude du cas parallèle : $v_p \neq 0$ et $q_s = 0 \Rightarrow i_s = 0$ et $R_{ch} = \infty$

En utilisant ces conditions, la matrice  $M(\omega)$  précédente se réduit à  $M_\infty(\omega)$  dont l'expression est:

$$M_\infty(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \sin X_{1\infty} & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \cos X_{1\infty} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \sin X_{2\infty} & \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \cos X_{2\infty} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

La nullité du déterminant de cette matrice donne les fréquences d'antirésonance. On obtient une équation ( $E_\infty$ ) qui sera présentée dans le tableau suivant ainsi que les expressions des champs de déplacement et des contraintes.



Tableau A.1 : Paramètres du modèle analytique d'un transformateur piézoélectrique de type Rosen.

Cas série	
Relation fréquentielle	$E_0 = \eta \sin X_{10} \cos X_{20} + \cos X_{10} \sin X_{20} \frac{k_{33}^2}{X_{20}} [2 \cos X_{10} (1 - \cos X_{20})]$ $+ \eta \sin X_{10} \sin X_{20} = 0$
Déplacement mécanique	$u_{10}(x_1) = A_{u0} \begin{cases} \cos(k_{10}x_1) - \tan X_{10} \sin(k_{10}x_1) : \text{Primaire} \\ \cos(k_{20}x_1) + \alpha_0 \sin(k_{20}x_1) : \text{Secondaire} \end{cases}$
Contrainte mécanique	$T_{10}(x_1) = \begin{cases} \bar{c}_{11}^E k_{10} A_{u0} (-\sin k_{10}x_1 - \tan X_{10} \cos k_{10}x_1) : \text{Primaire} \\ \bar{c}_{33}^D k_{20} A_{u0} (-\sin k_{20}x_1 + \alpha_0 \cos k_{20}x_1) + (\bar{h}_{33} / \bar{\beta}_{33}^S) C_{\phi 0} : \text{Secondaire} \end{cases}$
Cas parallèle	
Relation fréquentielle	$E_{\infty} = \eta \sin X_{1\infty} \cos X_{2\infty} + \cos X_{1\infty} \sin X_{2\infty} = 0$
Déplacement mécanique	$u_{1\infty}(x_1) = A_{u\infty} \begin{cases} \cos(k_{1\infty}x_1) - \tan X_{1\infty} \sin(k_{1\infty}x_1) : \text{Primaire} \\ \cos(k_{2\infty}x_1) + \tan X_{2\infty} \sin(k_{2\infty}x_1) : \text{Secondaire} \end{cases}$
Contrainte mécanique	$T_{1\infty}(x_1) = \begin{cases} \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} A_{u\infty} (-\sin k_{1\infty}x_1 - \tan X_{1\infty} \cos k_{1\infty}x_1) : \text{Primaire} \\ \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} A_{u\infty} (-\sin k_{2\infty}x_1 + \tan X_{2\infty} \cos k_{2\infty}x_1) : \text{Secondaire} \end{cases}$

avec

$$\alpha_0 = \frac{\eta \tan X_{10} + \eta \sin X_{20}}{\cos X_{20} - 1}, \eta = \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}^E}{\bar{c}_{33}^D}} \text{ et } C_{\phi 0} = \frac{A_{u0} h_{33} X_{20} \eta \tan X_{10} \cos X_{20} + \sin X_{20}}{L_2 k_{33}^2 (\cos X_{20} - 1)}$$

### B.3. Admittance d'entrée

Par définition, l'admittance d'entrée est :

$$Y_p = \frac{i_p}{v_p} \quad (\text{B.13})$$

avec

$$i_p = j\omega \iint D_3 dS_p \quad (\text{B.14})$$

où  $D_3$  est la composante de déplacement électrique suivant ( $Ox_3$ ),  $S$  est la surface et  $dS = dx dy$

Par suite, la relation (B.14) devient :

$$i_p = j\omega l \int_{-L_1}^0 D_3 dx_1 = j\omega l \int_{-L_1}^0 (\bar{\epsilon}_{31} S_1 + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3) dx_1$$

Après calcul, nous obtenons :

$$i_p = -j\omega l L_1 \bar{\epsilon}_{33}^S E_3 + j\omega l \bar{\epsilon}_{31} [u_1(0) - u_1(-L_1)]. \quad (\text{B.15})$$

Or  $E_3$ , composante suivant ( $ox_3$ ) du champ électrique, est constant donc :

$$E_3 = -\frac{d\Phi}{dx_3}$$

$$E_3 dx_3 = -d\Phi \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_3 dx_3 = -\int_0^{v_p} d\Phi$$

$$E_3 = -\frac{v_p}{h} \quad (\text{B.16})$$

D'où l'expression de l'admittance d'entrée est donnée par la relation (B.17) en posant  $C_p = \frac{L_1 \bar{\epsilon}_{33}^S}{h}$ , capacité statique du primaire, pour une structure monocoucheet  $C_p = \frac{n^2 L_1 \bar{\epsilon}_{33}^S}{h}$  et  $E_3 = -\frac{nv_p}{h}$  si le primaire est constitué de  $n$  couches.

$$Y_p = j\omega C_p + j\omega l \bar{\epsilon}_{31} [A_{u0} - (A_u \cos(X_1) - B_u \sin(X_1))] \quad (\text{B.17a})$$

### Cas série

L'admittance correspondante est une admittance vue du primaire à secondaire court-circuité. On la note par  $Y_{p0}$  telle que :

$$Y_{p0} = \left. \frac{i_p}{v_p} \right|_{i_s=0} = j\omega C_p + j\omega l \bar{\epsilon}_{31} [A_{u0} - (A_{u0} \cos(X_1) - B_{u0} \sin(X_1))] \quad (\text{B.17b})$$

où  $X_1 = k_1 L_1$ .

L'équation matricielle ci-dessous est utilisée pour déterminer les constantes  $A_{u0}$  et  $B_{u0}$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{10} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_1 \sin X_1 & \bar{c}_{11}^E k_1 \cos X_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_2 \sin X_{20} & \bar{c}_{33}^D k_2 \cos X_{20} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} \cos X_{20} & \bar{h}_{33} \sin X_{20} & L_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{u0} \\ B_{u0} \\ C_{u0} \\ D_{u0} \\ C_{\Phi 0} \\ D_{\Phi 0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{n\bar{e}_{31}v_p}{h} \\ 0 \\ -\frac{n\bar{e}_{31}v_p}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

C'est une équation de la forme  $[M_0(\omega)].[X_{y0}]=[b]$  qu'on résout avec Matlab de la manière suivante :

$$[X_{y0}] = [M_0(\omega)] \setminus [b] ;$$

$$A_{u0} = X_{y0}(1, 1) ;$$

$$B_{u0} = X_{y0}(2, 1) ;$$

### Cas parallèle

C'est une admittance vue du primaire à secondaire en circuit ouvert notée par  $Y_{p\infty}$  telle que :

$$Y_{p\infty} = \left. \frac{i_p}{v_p} \right)_{i_s=0} = j\omega C_p + j\omega l \bar{e}_{31} [A_{u\infty} - (A_{u\infty} \cos(X_{1\infty}) - B_{u\infty} \sin(X_{1\infty}))] \quad (\text{B.19})$$

Pour déterminer  $A_{u\infty}$  et  $B_{u\infty}$ , on utilise l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}_{33} & 0 & 1 \\ \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \sin X_{1\infty} & \bar{c}_{11}^E k_{1\infty} \cos X_{1\infty} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \sin X_{2\infty} & \bar{c}_{33}^D k_{2\infty} \cos X_{2\infty} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{u\infty} \\ B_{u\infty} \\ C_{u\infty} \\ D_{u\infty} \\ C_{\phi\infty} \\ D_{\phi\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{n\bar{e}_{31}v_p}{h} \\ 0 \\ -\frac{n\bar{e}_{31}v_p}{h} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme  $[M_\infty(\omega)].[X_{y\infty}]=[b]$  que l'on peut résoudre avec Matlab de la manière suivante:

$$[X_{y\infty}] = [M_\infty(\omega)] \setminus [b] ; A_{u\infty} = X_{y\infty}(1, 1) ; B_{u\infty} = X_{y\infty}(2, 1) ;$$

# ANNEXE C : MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DU TRANSFORMATEUR PIEZOELECTRIQUE DE TYPE ROSEN UTILISANT LE LOGICIEL COMSOL

## C.1. Présentation du logiciel de simulation numérique COMSOL Multiphysics

Le logiciel COMSOL Multiphysics, créé en 2005 et anciennement appelé FEMLab, est avant tout un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles par éléments finis. Il a été développé au Royal Institute of Technology (Suède). Sa particularité est de mettre à la disposition de l'utilisateur une banque de données d'équations très variées permettant de modéliser une large gamme de phénomènes physiques, comme l'électromagnétisme, la corrosion, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des matériaux. Plusieurs types d'analyses sont proposés : analyse temporelle, fréquentielle, statique, quasi-statique [A3].

## C.2. Étapes de simulation du transformateur Rosen

Le processus de simulation sous COMSOL Multiphysics implique plusieurs étapes décrites ci-après :

- **Choix de la dimension : 3D**
- **Choix des modules physiques:** Pour notre étude, il s'agit du module «**acoustique**» suivi du sous-module «**déformations planes piézoélectriques**».
- **Choix du type d'analyse :** domaine fréquentiel ou analyse modale
- **Construction de la géométrie, dimensionnement et choix du matériau**

La structure étudiée ici est considérée comme l'association de deux blocs parallélépipédiques (sous-domaines) pour lesquels les matrices du matériau sont attribuées en respectant les directions de polarisation de chacun des sous domaines. La simulation sous COMSOL Multiphysics nécessite l'introduction pour chaque sous-domaine du tenseur des constantes élastiques  $c^E$ , du tenseur des constantes piézoélectriques  $e$ , du tenseur des constantes diélectriques  $\epsilon^S$ , de la densité volumique  $\rho$  et du facteur de pertes mécaniques  $1/Q_m$ .

### **Définir les paramètres de maillage, mailler la structure**

Le choix d'un maillage est une étape importante dans le déroulement d'un calcul numérique par éléments finis. Il s'agit d'un découpage de l'espace selon un maillage. Il est à noter que quelle que soit sa forme, plus le maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient sera précise mais le calcul numérique devient plus long. Un compromis entre la précision des

résultats et le temps de calcul doit donc être trouvé. Sur la figure A.2, on montre le maillage ainsi obtenu pour la structure étudiée.

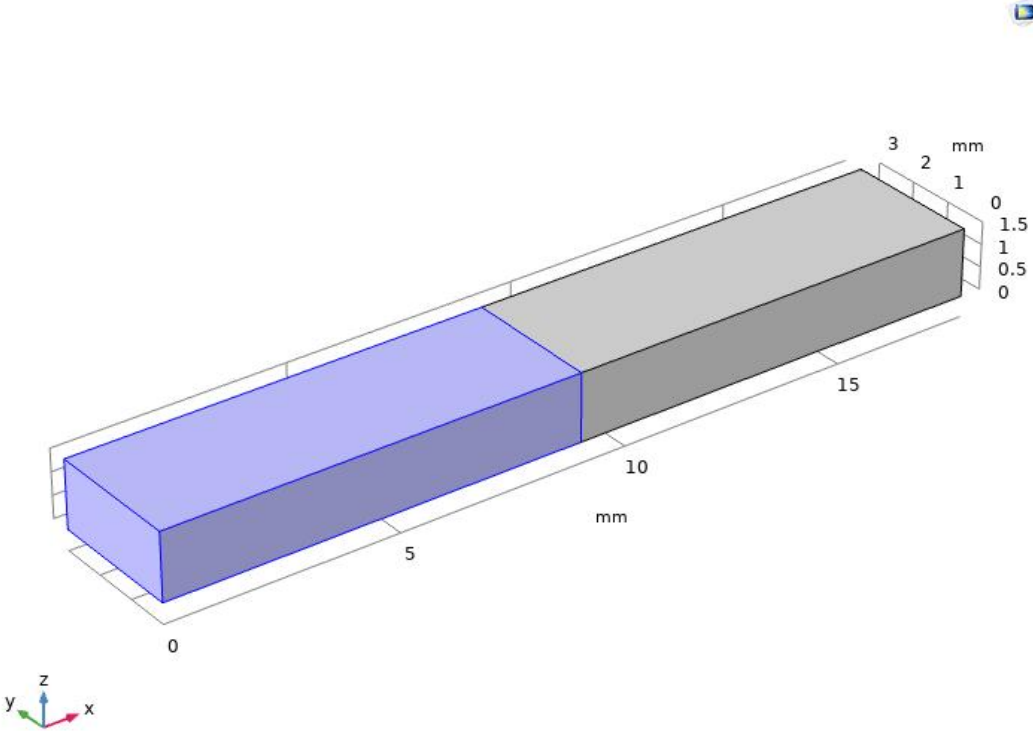


Figure A.1 : Géométrie de transformateur sous COMSOL.

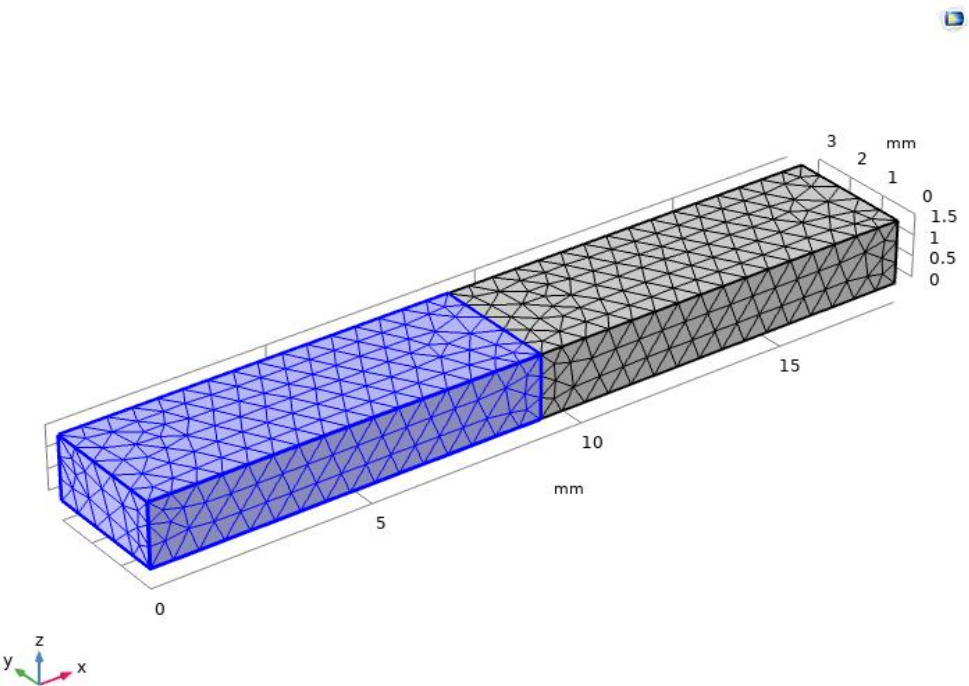


Figure A.2 : Maillage sous COMSOL.

- **Attribution à chaque face de la structure des conditions aux limites mécaniques et électriques**

Mécaniquement, les faces du transformateur sont libres, elles ne sont soumises à aucune force. Électriquement, elles peuvent être reliées à la masse ou à un potentiel électrique. Ainsi, l'électrode inférieure du primaire est reliée à la masse, l'électrode supérieure du primaire est reliée à un potentiel alternatif d'amplitude égale à 1 V et l'électrode du secondaire est reliée à la résistance de charge. Les faces restantes sont reliées à « zéro charge » (pas d'accumulation de charge). Enfin, on définit des points caractéristiques où des grandeurs physiques sont calculées (déplacement mécanique, potentiel électrique, admittance électrique, etc.).

- **Résolution des équations aux dérivées partielles**
- **Post-traitements des données, représentations graphiques des résultats et extraction des informations**

Cette dernière étape est cruciale car c'est elle qui permet de visualiser en 3D un grand nombre de caractéristiques du transformateur comme le potentiel électrique, le déplacement mécanique, etc, et de tracer les courbes caractéristiques à l'aide de fichiers de données, exportés par le logiciel

## ANNEXE D : DESCRIPTION DES MATRICES UTILISEES :

### cas déformation plane

La résolution polynomiale des équations de propagation présentée dans le chapitre 4 aboutit à un système infini d'équations que l'on peut écrire sous la forme :

$$AA_N \cdot P + BB_N \cdot r_{mn} + CC_N \cdot v_s = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 MMP + EE_N \cdot v_p ; \quad (D.1)$$

$$AA_G \cdot P + BB_G \cdot r_{mn} + CC_G \cdot v_s = -EE_G \cdot v_p \quad (D.2)$$

avec

$$AA_N = \begin{pmatrix} AA_{111} & AA_{311} & AA_{121} & AA_{321} \\ AA_{112} & AA_{312} & AA_{122} & AA_{322} \\ AA_{113} & AA_{313} & AA_{123} & AA_{323} \\ AA_{114} & AA_{314} & AA_{124} & AA_{324} \end{pmatrix}, \quad MM = \begin{pmatrix} MM_{111} & MM_{311} & MM_{121} & MM_{321} \\ MM_{112} & MM_{312} & MM_{122} & MM_{322} \\ MM_{113} & MM_{313} & MM_{123} & MM_{323} \\ MM_{114} & MM_{314} & MM_{124} & MM_{324} \end{pmatrix}$$

$$BB_N = \begin{pmatrix} BB_{11} & BB_{21} \\ BB_{12} & BB_{22} \\ BB_{13} & BB_{23} \\ BB_{14} & BB_{24} \end{pmatrix}, \quad CC_N = \begin{pmatrix} CC_1 \\ CC_2 \\ CC_3 \\ CC_4 \end{pmatrix}, \quad EE_N = \begin{pmatrix} EE_1 \\ EE_2 \\ EE_3 \\ EE_4 \end{pmatrix}$$

$$AA_G = \begin{pmatrix} AA_{115} & AA_{315} & AA_{125} & AA_{325} \\ AA_{116} & AA_{316} & AA_{126} & AA_{326} \end{pmatrix}, \quad BB_G = \begin{pmatrix} BB_{15} & BB_{25} \\ BB_{16} & BB_{26} \end{pmatrix}, \quad CC_G = \begin{pmatrix} CC_6 \\ CC_6 \end{pmatrix}, \quad EE_G = \begin{pmatrix} EE_1 \\ EE_2 \end{pmatrix},$$

où le calcul des composantes de chaque matrice se fait de la même manière qu'avec ce qui est présenté dans l'annexe suivante.

**ANNEXE E : RESOLUTION DES EQUATIONS DE PROPAGATION  
DES ONDES, DESCRIPTION DES MATRICES UTILISEES ET  
CALCUL DE L'ADMITTANCE ELECTRIQUE DU TP :**

**cas contrainte plane**

**E.1. Equations constitutives**

A partir des hypothèses bidimensionnelles contrainte plane et en tenant compte de la forme géométrique du transformateur, les équations constitutives peuvent être écrites par:

Dans la région 1:

$$\bar{T}_1^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}_{11}^E \frac{\partial Q_m^{(1)}}{\partial q_1} Q_n p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{12}^E}{\xi} Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{3mn}^{(1)} + \frac{\tilde{e}_{31}}{r\xi} v_p \right]; \quad (E.1)$$

$$\bar{T}_2^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}_{12}^E \frac{\partial Q_m^{(1)}}{\partial q_1} Q_n p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{11}^E}{\xi} Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{2mn}^{(1)} + \frac{\tilde{e}_{31}}{r\xi} v_p \right]; \quad (E.2)$$

$$\bar{T}_6^{(1)} = \frac{1}{L} \left[ \frac{2\tilde{c}_{66}^E}{\xi} Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{1mn}^{(1)} + \tilde{c}_{66}^E \frac{\partial Q_m^{(1)}}{\partial q_1} Q_n p_{2mn}^{(1)} \right], \quad (E.3)$$

Dans la région 2:

$$\bar{T}_1^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}_{33}^E \frac{\partial(q_1 Q_m^{(1)})}{\partial q_1} Q_n p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{13}^E}{\xi} Q_m^{(1)}(0) \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{2mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{13}^E}{\xi} q_1 Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{2mn}^{(2)} + \frac{\tilde{e}_{33}}{r} \frac{\partial((q_1^2 - q_1 q_s) Q_m^{(1)})}{\partial q_1} r_{mn}^{(2)} + \frac{\tilde{e}_{33}}{r q_s} v_s - \frac{\tilde{e}_{33}}{r q_s} (q_3 + 1) \frac{v_p}{2} \right]; \quad (E.4)$$

$$\bar{T}_2^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{c}_{13}^E \frac{\partial(q_1 Q_m^{(1)})}{\partial q_1} Q_n p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{11}^{(2)}}{\xi} Q_m^{(1)}(0) \frac{\partial Q_n}{\partial q_3} p_{2mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{11}^{(2)}}{\xi} q_1 Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{2mn}^{(2)} + \frac{\tilde{e}_{31}^{(2)}}{r} \frac{\partial((q_1^2 - q_1 q_s) Q_m^{(1)})}{\partial q_1} r_{mn}^{(2)} + \frac{\tilde{e}_{31}^{(2)}}{r q_s} v_s - \frac{\tilde{e}_{31}^{(2)}}{r q_s} (q_3 + 1) \frac{v_p}{2} \right] \quad (E.5)$$

$$\bar{T}_6^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \frac{2\tilde{c}_{44}^E}{\xi} Q_m^{(1)}(0) \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{c}_{44}^E}{\xi} q_1 Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{1mn}^{(2)} + \tilde{c}_{44}^E \frac{\partial(q_1 Q_m^{(1)})}{\partial q_1} Q_n p_{2mn}^{(2)} - \frac{2\tilde{e}_{15}}{r\xi} ((q_1^2 - q_1 q_s) Q_m^{(2)}) \frac{\partial(Q_n)}{\partial q_1} r_{mn}^{(2)} + \frac{\tilde{e}_{15}}{r q_s} v_s - \frac{2\tilde{e}_{15}}{r\xi} \left(1 - \frac{q_1}{q_s}\right) \frac{v_p}{2} \right] \quad (E.6)$$

$$\bar{D}_1^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \tilde{e}_{33} r \frac{\partial(q_1 Q_m^{(1)})}{\partial q_1} Q_n p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{e}_{31}^{(2)} r}{\xi} Q_m^{(1)}(0) \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{2mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{e}_{31}^{(2)} r}{\xi} q_1 Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{2mn}^{(2)} - \frac{\tilde{e}_{33}^{(2)}}{q_s} \frac{\partial((q_1^2 - q_1 q_s) Q_m^{(1)})}{\partial q_1} r_{mn}^{(2)} - \frac{\tilde{e}_{33}^{(2)}}{q_s} v_s + \frac{\tilde{e}_{33}^{(2)}}{q_s} (q_3 + 1) \frac{v_p}{2} \right] \quad (E.7)$$

$$\bar{D}_2^{(2)} = \frac{1}{L} \left[ \frac{2\tilde{e}_{15} r}{\xi} Q_m^{(1)}(0) \frac{\partial Q_n}{\partial q_3} p_{1mn}^{(1)} + \frac{2\tilde{e}_{15} r}{\xi} q_1 Q_m^{(1)} \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} p_{1mn}^{(2)} + \tilde{e}_{15} r \frac{\partial(q_1 Q_m^{(1)})}{\partial q_1} Q_n p_{2mn}^{(2)} - \frac{2\tilde{e}_{11}^S}{\xi} ((q_1^2 - q_1 q_s) Q_m^{(2)}) \frac{\partial(Q_n)}{\partial q_2} r_{mn}^{(2)} + \frac{2\tilde{e}_{11}^S}{\xi} (q_3 + 1) \frac{v_p}{2} \right] \quad (E.8)$$

avec



$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{11}^E &= \bar{c}_{11}^{(1)} - \bar{c}_{13}^{(1)2} / \bar{c}_{33}^{(1)}, & \tilde{c}_{12}^E &= \bar{c}_{12}^{(1)} - \bar{c}_{13}^{(1)2} / \bar{c}_{33}^{(1)}, & \tilde{e}_{31} &= \bar{e}_{31} - \bar{c}_{13}^{(1)} \bar{e}_{33} / \bar{c}_{33}^{(1)}, & \tilde{c}_{13}^E &= \bar{c}_{13}^{(1)} - \bar{c}_{12}^{(1)} \bar{c}_{13}^{(1)} / \bar{c}_{11}^{(1)}, & \tilde{c}_{33}^E &= \bar{c}_{33}^{(1)} - \bar{c}_{13}^{(1)2} / \bar{c}_{11}^{(1)}, \\
\tilde{e}_{33} &= \bar{e}_{33} - \bar{c}_{13}^{(1)} \bar{e}_{31} / \bar{c}_{11}^{(1)}, & \tilde{c}_{44}^E &= \bar{c}_{44}^{(1)}, & \tilde{c}_{66}^E &= \bar{c}_{66}^{(1)}, & \tilde{c}_{11}^{(2)} &= \bar{c}_{11}^{(1)} - \bar{c}_{12}^{(1)2} / \bar{c}_{11}^{(1)}, & \tilde{e}_{31}^{(2)} &= \bar{e}_{31} - \bar{c}_{12}^{(1)} \bar{e}_{31} / \bar{c}_{11}^{(1)}, & \tilde{\varepsilon}_{33} &= \bar{\varepsilon}_{33} + \bar{e}_{33}^2 / \bar{c}_{33}^{(1)}, & \tilde{\varepsilon}_{11} &= \bar{\varepsilon}_{11}, \\
\tilde{\varepsilon}_{33}^{(2)} &= \bar{\varepsilon}_{33} + \bar{e}_{33}^2 / \bar{c}_{11}^{(1)}, & \bar{c}_{ac}^{(R)} &= c_{ac}^{(R)} / c_{11}^E, & \bar{c}_{11}^E &= c_{11}^E + e_{31}^2 / \varepsilon_{33}^S, & \bar{\varepsilon}_{33}^{-S} &= \varepsilon_{33}^T + e_{31}^2 / c_{11}^E
\end{aligned}$$

## E.2. Résolution des équations de propagation

Les équations de propagation sont données par :

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{T}_1^{(i)} + \bar{T}_1^{(i)} \delta(q_1 - q_s) + (\bar{T}_1^{(2)} - \bar{T}_1^{(1)}) \delta(q_1) \right] + \left[ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial q_2} \bar{T}_6^{(i)} + \frac{1}{\xi} \bar{T}_6^{(i)} (\delta(q_2 + 1) - \delta(q_2 - 1)) \right] = -\Omega^2 \frac{\pi^2}{L_1^2} u_1^{(i)}; \quad (\text{E.9})$$

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{T}_1^{(i)} + \bar{T}_1^{(i)} \delta(q_1 - q_s) + (\bar{T}_1^{(2)} - \bar{T}_1^{(1)}) \delta(q_1) \right] + \left[ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial q_2} \bar{T}_2^{(i)} + \frac{1}{\xi} \bar{T}_2^{(i)} (\delta(q_2 + 1) - \delta(q_2 - 1)) \right] = -\Omega^2 \frac{\pi^2}{L_1^2} u_2^{(i)}; \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{T}_1^{(2)} - \bar{T}_1^{(2)} \delta(q_1 - q_s) + (\bar{T}_1^{(2)} - \bar{T}_1^{(1)}) \delta(q_1) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial q_2} \bar{T}_6^{(2)} + \frac{1}{\xi} \bar{T}_6^{(2)} (\delta(q_2 + 1) - \delta(q_2 - 1)) \right] = -\Omega^2 \frac{\pi^2}{L_1^2} u_1^{(2)}; (\text{E.11})$$

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{T}_6^{(2)} - \bar{T}_6^{(2)} \delta(q_1 - q_s) + (\bar{T}_6^{(2)} - \bar{T}_6^{(1)}) \delta(q_1) \right] + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial q_2} \bar{T}_2^{(2)} + \frac{1}{\xi} \bar{T}_2^{(2)} [\delta(q_2 + 1) - \delta(q_2 - 1)] = -\Omega^2 \frac{\pi^2}{L_1^2} u_2^{(2)}; \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial \bar{D}_1^{(2)}}{\partial q_1} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial \bar{D}_2^{(2)}}{\partial q_1} + \frac{2}{\xi} \bar{D}_2^{(2)} [\delta(q_2 + 1) - \delta(q_2 - 1)] = 0. \quad (\text{E.13})$$

En substituant les contraintes et les déplacements électriques dans les équations de propagation et en effectuant une projection dans la base  $Q_j^{(i)*}$  et  $Q_k^*$  pour éliminer les termes dans la région 2 à l'exception du terme de continuité pour  $q_l=0$ , et en projetant dans  $Q_j^{(2)*}$  et  $Q_k^*$  pour éliminer les termes dans la région 1 à l'exception du terme de continuité pour  $q_l=0$ , (E9)- (E.13) donnent

$$A_{111} p_{1mn}^{(1)} + A_{211} p_{2mn}^{(1)} + A_{121} p_{1mn}^{(2)} + A_{221} p_{2mn}^{(2)} + B_{11} r_{mn}^{(2)} + C_{11} v_s = -\pi^2 / q_1^2 \Omega E_{114} p_{1mn}^{(1)} + D_{11} v_p; \quad (\text{E.14})$$

$$A_{112} p_{1mn}^{(1)} + A_{212} p_{2mn}^{(1)} + A_{122} p_{1mn}^{(2)} + A_{222} p_{2mn}^{(2)} + B_{21} r_{mn}^{(2)} + C_{21} v_s = -\pi^2 / q_1^2 \Omega E_{212n} p_{2mn}^{(1)} + D_{21} v_p; \quad (\text{E.15})$$

$$A_{113} p_{1mn}^{(1)} + A_{213} p_{2mn}^{(1)} + A_{123} p_{1mn}^{(2)} + A_{223} p_{2mn}^{(2)} + B_{31} r_{mn}^{(2)} + C_{31} v_s = -\pi^2 / q_1^2 \Omega E_{113n} p_{1mn}^{(1)} + E_{123n} p_{1mn}^{(2)} + D_{31} v_p; \quad (\text{E.16})$$

$$A_{114} p_{1mn}^{(1)} + A_{214} p_{2mn}^{(1)} + A_{124} p_{1mn}^{(2)} + A_{224} p_{2mn}^{(2)} + B_{41} r_{mn}^{(2)} + C_{41} v_s = -\pi^2 / q_1^2 \Omega E_{214n} p_{2mn}^{(1)} + E_{224n} p_{2mn}^{(2)} + D_{41} v_p; \quad (\text{E.17})$$

$$A_{114} p_{1mn}^{(1)} + A_{214} p_{2mn}^{(1)} + A_{124} p_{1mn}^{(2)} + A_{224} p_{2mn}^{(2)} + B_{41} r_{mn}^{(2)} + C_{41} v_s = -\pi^2 / q_1^2 \Omega E_{214n} p_{2mn}^{(1)} + E_{224n} p_{2mn}^{(2)} + D_{41} v_p; \quad (\text{E.18})$$

$$A_{115} p_{1mn}^{(1)} + A_{215} p_{2mn}^{(1)} + A_{125} p_{1mn}^{(2)} + A_{225} p_{2mn}^{(2)} + B_{51} r_{mn}^{(2)} + C_{51} v_s = 0; \quad (\text{E.19})$$

que l'on peut écrire comme :

$$A_N \cdot P + B_N \cdot r_{mn}^{(2)} + C_N \cdot v_s = -(\pi/q_p)^2 \Omega^2 E \cdot P + D_N \cdot v_p; \quad (\text{E.20})$$

$$A_G \cdot P + B_G \cdot r_{mn}^{(2)} + C_G \cdot v_s = D_G \cdot v_p. \quad (\text{E.21})$$

Les matrices  $A_N, B_N, C_N, E, D_N, A_G, B_G, C_G$  sont données par:

$$A_N = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{211} & A_{121} & A_{221} \\ A_{112} & A_{212} & A_{122} & A_{222} \\ A_{113} & A_{213} & A_{123} & A_{223} \\ A_{114} & A_{214} & A_{124} & A_{224} \end{bmatrix}; B_N = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix}; C_N = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \end{bmatrix}; D_N = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \\ D_{41} \end{bmatrix};$$

$$A_G = [A_{115} \quad A_{215} \quad A_{125} \quad A_{225}]; B_G = B_{51}; C_G = C_{51}; D_G = D_{51},$$

avec

$$A_{111} = \tilde{c}_{11} J_{1kn}^{-1,1,0} (J_{3jm}^{q_p,0,0} + Q_j^{(1)}(q_p) dQ_m^{(1)}(q_p) - Q_j^{(1)}(0) dQ_m^{(1)}(0)) + \frac{4\tilde{c}_{66}}{\xi^2} J_{1jm}^{q_p,0,0} (J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) dQ_n(-1) - Q_k(1) dQ_n(1))$$

$$A_{211} = \frac{2}{\xi} \tilde{c}_{12} J_{2kn}^{-1,1,0} (J_{1jm}^{q_p,0,0} + Q_j^{(1)}(q_p) Q_m^{(1)}(q_p)) + \frac{2\tilde{c}_{66}}{\xi} J_{2jm}^{q_p,0,0} (J_{2kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) Q_n(-1) - Q_k(1) Q_n(1))$$

$$A_{121} = \tilde{c}_{33} J_{1kn}^{-1,1,0} Q_j^{(1)}(0) Q_m^{(2)}(0) \quad A_{221} = 0$$

$$B_{11} = \frac{-\tilde{e}_{33}}{r} q_s Q_j^{(1)}(0) Q_m^{(2)}(0) J_{1kn}^{-1,1,0} \quad C_{11} = \frac{\tilde{e}_{33}}{r q_s} \sqrt{2} Q_j^{(1)}(0) J_{1k0}^{-1,1,0}$$

$$D_{11} = \frac{\tilde{e}_{31}}{r \xi} \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0} (Q_j^{(1)}(q_p) - Q_j^{(1)}(0)) - \frac{\tilde{e}_{33}}{r q_s} \frac{\sqrt{2}}{2} Q_j^{(1)}(0) (J_{1k0}^{-1,1,1} - J_{1k0}^{-1,1,0}), \quad E_{111} = J_{1jm}^{q_p,0,0} J_{1kn}^{-1,1,0}$$

$$A_{112} = \frac{2\tilde{c}_{66}}{\xi} J_{2kn}^{-1,1,0} (J_{2jm}^{q_p,0,0} + Q_j^{(1)}(q_p) Q_m^{(1)}(q_p) - Q_j^{(1)}(0) Q_m^{(1)}(0)) + \frac{2\tilde{c}_{66}}{\xi} Q_j^{(1)}(0) Q_m^{(1)}(0) J_{2kn}^{-1,1,0} \\ + \frac{2\tilde{c}_{12}}{\xi} J_{2jm}^{q_p,0,0} (J_{2kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) Q_n(-1) - Q_k(1) Q_n(1))$$

$$A_{212} = \tilde{c}_{44} J_{1kn}^{-1,1,0} (J_{3jm}^{q_p,0,0} + Q_j^{(1)}(q_p) dQ_m^{(1)}(q_p)) + \frac{4\tilde{c}_{44}}{\xi^2} J_{1jm}^{q_p,0,0} (J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) dQ_n(-1) - Q_k(1) dQ_n(1))$$

$$A_{122} = 0, \quad A_{222} = \tilde{c}_{66} J_{1kn}^{-1,1,0} Q_m^{(2)}(0), \quad B_{21} = 0, \quad C_{21} = 0, \quad D_{21} = \frac{\tilde{e}_{31}}{r \xi} \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0} Q_j^{(1)}(0) - \frac{2\tilde{e}_{33}}{r \xi^2} \sqrt{q_s} J_{j0}^{-1,1,0} (Q_k(0) - Q_n(0))$$

$$E_{212} = J_{1jm}^{q_p,0,0} J_{1kn}^{-1,1,0}, \quad A_{113} = -\tilde{c}_{11} J_{1kn}^{-1,1,0} Q_j^{(2)}(0) dQ_m^{(1)}(0) + \frac{4\tilde{c}_{44}}{\xi^2} J_{1j0}^{0,q_s,0} Q_m^{(1)}(0) \sqrt{q_s} (J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) dQ_n(-1) - Q_k(1) dQ_n(1))$$

$$A_{213} = \frac{2}{\xi} \tilde{c}_{13} J_{2kn}^{-1,1,0} (Q_j^{(1)}(0) - Q_j^{(1)}(q_s)) Q_m^{(1)}(0) - \frac{2\tilde{c}_{12}}{\xi} J_{2kn}^{-1,1,0} (Q_j^{(1)}(0) Q_m^{(1)}(0))$$

$$A_{123} = \tilde{c}_{33} J_{1kn}^{-1,1,0} (J_{3jm}^{-0,q_s,1} - Q_j^{(2)}(q_s)) (Q_m^{(2)}(q_s) + q_s dQ_m^{(2)}(q_s)) + Q_j^{(2)}(0) Q_m^{(2)}(0)$$

$$A_{223} = 2 \frac{\tilde{c}_{13}}{\xi} J_{2kn}^{-1,1,0} (J_{2jm}^{-0,q_s,1} - q_s Q_j^{(2)}(q_s) Q_m^{(2)}(q_s)) + 2 \frac{c_{44}}{\xi} J_{2jm}^{-0,q_s,1} (J_{2kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) Q_n(-1) - Q_k(1) Q_n(1))$$

$$+ 4 \frac{c_{44}}{\xi^2} J_{1jm}^{-0,q_s,1} (J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k(-1) dQ_n(-1) - Q_k(1) dQ_n(1))$$

$$B_{31} = r \tilde{e}_{33} J_{1kn}^{-1,1,0} [J_{3jm}^{0,q_s,2} - q_s J_{3jm}^{0,q_s,1} - q_s Q_j^{(2)*}(0) Q_m^{(2)}(0) - q_s Q_j^{(2)*}(q_s) Q_m^{(2)}(q_s)] + \frac{r \tilde{c}_{15}}{\xi^2} (J_{1jm}^{0,q_s,2} - q_s J_{1jm}^{0,q_s,1}) [J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) dQ_n^*(-1) - Q_k^*(1) dQ_n^*(1)]$$

$$C_{31} = \frac{r \tilde{e}_{33}}{q_s} (Q_j^{(2)*}(0) - Q_j^{(2)*}(q_s)) \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0} \quad E_{113} = \sqrt{q_s} J_{1j0}^{0,q_s,0} Q_k^{(1)}(0) J_{1kn}^{-1,1,0}, \quad E_{123} = J_{1jm}^{0,q_s,1} J_{1kn}^{-1,1,0}$$

$$D_{31} = \frac{r \tilde{e}_{33}}{2 q_s} (Q_j^{(2)*}(0) - Q_j^{(2)*}(q_s)) \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0} - \frac{r \tilde{e}_{31}}{2 \xi} Q_j^{(2)*}(0) \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0}$$

$$\begin{aligned}
A_{114} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{c}_{44}^E}{\xi} Q_m^{(1)}(0) \left( Q_j^{(2)*}(0) - Q_j^{(2)*}(q_s) \right) J_{2km}^{-1,1,0} - \frac{\tilde{c}_{66}^E}{2\xi} Q_j^{(2)*}(0) Q_m^{(1)}(0) J_{2kn}^{-1,1,0} \\
A_{214} &= -\frac{\tilde{c}_{66}^E}{2} Q_j^{(2)*}(0) dQ_n(0) J_{kn}^{-1,1,0} + \frac{\tilde{c}_{11}^{(2)}}{\xi^2} Q_m^{(1)}(0) \sqrt{q_s} J_{150}^{q_s,0} \left[ J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) dQ_n(-1) - Q_k^*(1) dQ_n(1) \right] \\
A_{124} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{c}_{44}^E}{\xi} J_{2kn}^{-1,1,0} \left[ J_{2jn}^{0,q_s,1} - q_s Q_m^2(q_s) \right] + \frac{\tilde{c}_{13}^E}{\xi} J_{2kn}^{0,q_s,1} \left[ J_{2kn}^{0,q_s,1} + Q_k^*(-1) Q_n(-1) - Q_k^*(1) Q_n(1) \right] \\
A_{224} &= \frac{\tilde{c}_{11}^{(2)}}{\xi} J_{1jm}^{-0,q_s,1} \left[ J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) dQ_n(-1) - Q_k^*(1) dQ_n(1) \right] \\
B_{41} &= \frac{r\tilde{e}_{15}^{(2)}}{\xi} J_{2kn}^{-1,1,0} \left[ J_{2jn}^{0,q_s,1} - q_s J_{2jn}^{0,q_s,0} \right] + \frac{r\tilde{e}_{31}^{(2)}}{\xi} \left( J_{2jn}^{0,q_s,2} - q_s J_{2jn}^{0,q_s,1} \right) \left[ J_{2kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) Q_n(-1) - Q_k^*(1) Q_n(1) \right] \\
C_{41} &= \frac{r\tilde{e}_{31}^{(2)}}{\xi q_s} \sqrt{q_s} J_{150}^{-0,q_s,0} \left( Q_k^*(-1) - Q_k^*(1) \right); \quad D_{41} = \frac{r\tilde{e}_{31}^{(2)}}{2\xi q_s} \sqrt{q_s} J_{150}^{-0,q_s,0} \left( Q_k^*(-1) - Q_k^*(1) \right); \quad E_{214} = \sqrt{q_s} Q(0) J_{1j0}^{-0,q_s,0} J_{1kn}^{-1,1,0} \\
E_{224} &= J_{1jn}^{-0,q_s,0} J_{1kn}^{-1,1,0} \\
A_{115} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{e}_{15}^{(2)}}{r\xi} \sqrt{q_s} J_{1j0}^{0,q_s,0} Q_m^{(1)}(0) \left[ J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) dQ_n(-1) - Q_k^*(1) dQ_n(1) \right] \\
A_{115} &= 0 \\
A_{125} &= \frac{\tilde{e}_{33}^{(2)}}{r} J_{1kn}^{-1,1,0} Q_m^{(1)}(0) \left[ J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_j^{(2)*} Q_m^{(2)}(0) \right] + \frac{1}{2} \frac{\tilde{e}_{15}^{(2)}}{r\xi^2} J_{3kn}^{-1,1,0} \left[ J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) dQ_n(-1) - Q_k^*(1) dQ_n(1) \right] \\
A_{225} &= \frac{\tilde{e}_{31}^{(2)}}{r\xi} J_{2kn}^{-1,1,0} J_{2jn}^{0,q_s,1} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{e}_{15}^{(2)}}{r\xi} q_s J_{2jn}^{0,q_s,1} \left[ J_{2kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) Q_n(-1) - Q_k^*(1) Q_n(1) \right] \\
B_{51} &= \tilde{e}_{33}^{(2)} J_{1kn}^{-1,1,0} Q_m^{(1)}(0) \left[ \left( J_{3jn}^{0,q_s,1} - q_s J_{3kn}^{0,q_s,1} \right) - q_s Q_j^{(2)*}(0) Q_m^{(2)}(0) \right] - \frac{\tilde{e}_{11}^{(2)}}{\xi^2} \left( J_{1jn}^{0,q_s,2} - q_s J_{1jn}^{0,q_s,1} \right) \left[ J_{3kn}^{-1,1,0} + Q_k^*(-1) dQ_n(-1) - Q_k^*(1) dQ_n(1) \right] \\
C_{51} &= \frac{\tilde{e}_{33}^{(2)}}{q_s} Q_k^{(2)*}(0) \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0}; \quad D_{51} = \frac{\tilde{e}_{33}^{(2)}}{2q_s} Q_k^{(2)*}(0) \sqrt{2} J_{1k0}^{-1,1,0};
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
J_{1kn}^{-1,1,\gamma} &= \int_{-1}^1 Q_k^* q_2^\gamma Q_n dq_2 & J_{2kn}^{-1,1,\gamma} &= \int_{-1}^1 Q_k^* \frac{\partial(q_2^\gamma Q_n)}{\partial q_2} dq_2 & J_{3kn}^{-1,1,\gamma} &= \int_{-1}^1 Q_k^* \frac{\partial^2(q_2^\gamma Q_n)}{\partial q_2^2} dq_2 & J_{1jm}^{q_p,0,\gamma} &= \int_{q_p}^0 Q_j^{(1)*} q_1^\gamma Q_m^{(1)} dq_1 \\
J_{2jm}^{q_p,0,\gamma} &= \int_{q_p}^0 Q_j^{(1)*} \frac{\partial(q_1^\gamma Q_m^{(1)})}{\partial q_1} dq_1 & J_{3jm}^{q_p,0,\gamma} &= \int_{q_p}^0 Q_j^{(1)*} \frac{\partial^2(q_1^\gamma Q_m^{(1)})}{\partial q_1^2} dq_1 & J_{1jm}^{0,q_s,\gamma} &= \int_0^{q_s} Q_j^{(2)*} q_1^\gamma Q_m^{(2)} dq_1 \\
J_{2jm}^{0,q_s,\gamma} &= \int_0^{q_s} Q_j^{(2)*} \frac{\partial(q_1^\gamma Q_m^{(2)})}{\partial q_1} dq_1 & J_{3jm}^{0,q_s,\gamma} &= \int_0^{q_s} Q_j^{(2)*} \frac{\partial^2(q_1^\gamma Q_m^{(2)})}{\partial q_1^2} dq_1
\end{aligned}$$

### E.3. Admittance d'entrée et tension de sortie

L'admittance d'entrée électrique est définie par:

$$y_{in} = \frac{i_p}{v_p};$$

avec

$$i_p = -i\Omega \omega_p C_{sp} \iint_{-1}^1 D_3^{(0)-(1)} dq_1 dq_2,$$

$$i_p = -i\Omega\omega_p C_{sp} \int_{-1}^1 \int_{q_p}^0 \frac{1}{l} \left[ r\tilde{e}_{31} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial q_1} + r\tilde{e}_{31} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial q_2} - \left( \frac{2}{Z} \right) \tilde{\varepsilon}_{33} \frac{v_p}{2} \right] dq_1 dq_2;$$

$$i_p = -i\Omega\omega_p C_{sp} \frac{1}{l} \left[ r\tilde{e}_{31} \int_{-1}^1 [u_1^{(1)}(0) - u_1^{(1)}(q_p)] dq_2 + r\tilde{e}_{31} \int_{q_p}^0 [u_2^{(1)}(1) - u_2^{(1)}(-1)] dq_1 - \left( \frac{2}{\xi} \right) \tilde{\varepsilon}_{33} \frac{v_p}{2} \right]. \quad (E.22)$$

La substitution du déplacement mécanique dans (E.22) donne

$$y_{in} = -i\Omega\omega_p C_{sp} \left( \tilde{\varepsilon}_{33} - r\tilde{e}_{31} X_{1y} p_{1mn}^{(1)} - r\tilde{e}_{31} X_{2y} p_{2mn}^{(1)} \right). \quad (E.23)$$

où

$$X_{1y} = r\tilde{e}_{31} \sqrt{q_s} J_{10m}^{0,q_s,1} \frac{1}{\xi} [(Q_n(1) - Q_n(-1))];$$

$$X_{2y} = r\tilde{e}_{31} q_s \frac{1}{\xi} [Q_m^{(1)}(0)(Q_n(1) - Q_n(-1))].$$

La tension de sortie est donnée par la loi d'Ohm,  $v_s = R_{ch} i_s$  où  $i_s$  est donné par:

$$i_s = \frac{j\omega \tilde{\varepsilon}_{33}^s h}{L} \int_{-1}^1 \overline{D}_1^{(2)} dq_2. \quad (E.24)$$

$$v_s = \frac{1}{L_2} jR_L \omega \tilde{\varepsilon}_{33}^s w t \left[ \int_{-1}^1 r\tilde{e}_{33} [u_1^{(2)}(q_s) - u_1^{(2)}(0)] \frac{1}{2} dq_2 + \int_0^{q_s} r\tilde{e}_{31} [u_2^{(2)}(1) - u_2^{(2)}(-1)] \frac{1}{\xi} dq_1 - \int_{-1}^1 v_s \frac{1}{2} dq_3 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^s}{2} \right] \quad (E.25)$$

En remplaçant les déplacements mécaniques par leurs expressions, l'équation (E.25) devient

$$v_s = \frac{1}{\left( \tilde{\varepsilon}_{33}^s - \frac{jQ}{\Omega} \right)} \left[ A_{126} p_{1mn}^{(2)} + A_{226} p_{2mn}^{(2)} + A_{216} p_{2mn}^{(1)} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^s}{2} \right]; \quad (A26)$$

avec

$$A_{126mn} = q_s \frac{\sqrt{2}}{2} r\tilde{e}_{33} (q_s dQ_m^{(2)}(q_s) - Q_m^{(2)}(q_s)) J_{1n0}^{-1,1,0}; \quad A_{226mn} = q_s \frac{r\tilde{e}_{31}^{(2)}}{z} (q_1 Q_m^{(2)}(Q_n(1) - Q_n(-1)));$$

$$A_{216mn} = q_s \frac{r\tilde{e}_{31}^{(2)}}{\xi} (Q_m^{(1)}(0)(Q_n(1) - Q_n(-1))).$$

### *Références bibliographiques*

- [A1]. <https://perso.crans.org/ducarme/partie1.pdf>. consulté le 13 décembre 2020.
- [A2] C. Nadal. « *Contribution à la conception et la modélisation transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma* », thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2011.
- [A3] F. Boukazouha, « *Conception, Réalisation, Modélisation et Caractérisation Expérimentale d'un Transformateur de Tension de Type Rosen* », thèse de Doctorat de Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Algérie, 2016.