



HAL
open science

Caractère bien posé probabiliste pour une équation non linéaire faiblement dispersive

Houda Abdelkaled

► **To cite this version:**

Houda Abdelkaled. Caractère bien posé probabiliste pour une équation non linéaire faiblement dispersive. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. CY Cergy Paris Université, 2020. Français. NNT : 2020CYUN1075 . tel-03209376

HAL Id: tel-03209376

<https://theses.hal.science/tel-03209376>

Submitted on 27 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

présentée et soutenue par

ABDELKALED HOUDA SALIMA

Caractère bien posé probabiliste pour une équation non linéaire faiblement dispersive

En vue d'obtenir le grade de docteur délivré par

CY CERGY-PARIS UNIVERSITÉ

Dirigé par : **Nikolay TZVETKOV**

Président du jury : **Philippe GRAVEJAT**

Date de soutenance : **14 décembre 2020**

Jury de soutenance :

<i>Mme. Valeria Banica,</i>	Professeur, Université de Sorbonne	Examineur
<i>M. Philippe Gravejat,</i>	Professeur, Université CY Cergy-Paris	Examineur
<i>M. Sahbi Keraani,</i>	Professeur, Université de Lille	Rapporteur
<i>Mme. Elisabeth Logak,</i>	Professeur, Université CY Cergy-Paris	Examineur
<i>M. Frédéric Rousset,</i>	Professeur, Université Paris Saclay	Rapporteur
<i>M. Nikolay Tzvetkov,</i>	Professeur, Université CY Cergy-Paris	Examineur

**École Doctorale Economie, Management, Mathématiques, Physique et
Sciences informatiques**

Table des matières

1	Remerciements	3
2	Résumé	4
3	Préliminaires	5
3.1	Analyse de Fourier	5
3.1.1	Séries de Fourier	5
3.1.2	Noyaux de Dirichlet	7
3.1.3	Noyaux de Fejér	9
3.1.4	Convergence dans $L^2(\mathbb{T}^3)$	16
3.1.5	Convergence dans $L^\infty(\mathbb{T}^3)$	20
3.2	Espaces de Sobolev	21
3.2.1	Définitions	21
3.2.2	Propriétés	23
3.3	Inégalités sur l'espace $L^p(\mathbb{T}^3)$	25
3.3.1	Inégalité de Hölder et ses variantes	26
3.3.2	Inégalité intégrale de Minkowski	27
4	Présentation des résultats	29
4.1	Énoncés des résultats	29
5	Étude déterministe du problème fractionnaire	37
5.1	Le problème linéaire	37
5.2	Preuve du théorème 4.1.3	42
5.3	Preuve du théorème 4.1.5	48

5.4	Preuve du théorème 4.1.6	51
6	Problème fractionnaire sur $H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$, $s < s_c$	55
6.1	Lemmes et propositions	55
6.2	Preuve du théorème 4.1.7	69
6.3	Preuve du théorème 4.1.8	71
7	Partie probabiliste	73
7.1	Solutions probabilistes	73
7.2	Preuve du théorème 4.1.10	84
7.3	Construstion d'ensemble invariant	86
7.4	Preuve du théorème 4.1.12	88

1. Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Monsieur N. Tzvetkov, professeur à l'université de CY Cergy-Paris. En effet, il a été d'une grande aide, notamment en partageant ses brillantes intuitions. Il a également été d'un soutien sans faille et il m'a conseillée tout au long de l'élaboration de cette thèse. Je tiens particulièrement à le remercier pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie.

Je tiens à témoigner de ma reconnaissance à monsieur S. Keraani, professeur à l'université de Lille, ainsi qu'à monsieur F. Rousset, professeur à l'université Paris Saclay, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette modeste thèse. Un grand merci à madame V. Banica, à monsieur P. Gravejat, à madame E. Logak et à monsieur N. Tzvetkov pour avoir accepté d'être mes examinateurs.

Je veux exprimer ma gratitude à mes collègues et amies Hajer Ben Abdallah et Najet Benabdallah pour leur soutien et encouragements, en particulier à Najet qui m'a aidée dans la correction et la relecture du manuscrit.

Enfin, je dédie cette thèse à mes très chers parents, Abdelkalek Abdel-Hafid et Antar-Antar Fatima. Les paroles et les écrits ne peuvent guère égaler mes sentiments et ma gratitude envers eux, pour m'avoir éduquée et permis de trouver ma voie en mettant à ma disposition toutes les clés de la réussite mais aussi pour les innombrables choses qu'ils ont pu faire pour moi. Je les remercie pour m'avoir épaulée et soutenue dans ce parcours, pour leur patience et leur confiance en moi. Ils sont la plus belle chose qui me soit arrivée dans ce bas monde, ils sont ma fierté.

2. Résumé

Nous nous proposons dans cette thèse d'étudier la propagation d'ondes non-linéaires dans le régime haute fréquence par des méthodes provenant de la théorie des probabilités et de la théorie des équations aux dérivées partielles. On considère l'équation d'onde fractionnaire cubique, posée sur un domaine borné de l'espace euclidien, avec des conditions au bord périodiques. On montrera pour commencer, sur quels espaces ce problème est bien-posé au sens d'Hadamard à l'aide de méthodes de point fixe. Dans un deuxième temps, on va démontrer des résultats d'instabilité à haute fréquence qui montrent les limites des méthodes standards. Pour finir, on envisagera de construire des mesures de probabilité sur l'espace des données initiales telles que dans le contexte des résultats d'instabilité, une forme de caractère bien-posé persiste, presque sûrement.

3. Préliminaires

Nous rappelons dans ce chapitre quelques notions de base fondamentales qui nous serviront tout au long de ce document. Notamment, la théorie de Fourier sur l'espace quotient $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$. Cet outil est essentiel dans la plupart des branches de l'analyse mais aussi dans l'étude des équations aux dérivées partielles. On pourra par le biais de cet outil passer d'un domaine spatial à un domaine fréquentiel discret, dans le but de simplifier certaines équations aux dérivées partielles. La convergence des séries de Fourier est le sujet principal traité dans cette première partie. Nous introduirons dans un second temps les espaces fonctionnels les plus adaptés à l'étude des équations aux dérivées partielles dispersives, les espaces de Sobolev. On finira ce chapitre, par quelques rappels sur la théorie d'interpolation et des inégalités mettant en lien les différents espaces fonctionnels de Sobolev et les espaces L^p . Les références liées à la discussion de ce chapitre sont [10, 13, 9, 8].

3.1 Analyse de Fourier

3.1.1 Séries de Fourier

Définition 3.1.1. Soit $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On définit sa transformée de Fourier, notée \widehat{f} , par l'application :

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^3} f(x) e^{-in \cdot x} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^3,$$

où $n \cdot x = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3$.

La transformée de Fourier est une application uniformément bornée, i.e. pour tout

3.1. Analyse de Fourier

$n \in \mathbb{Z}^3$,

$$|\widehat{f}(n)| \leq \int_{\mathbb{T}^3} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}.$$

De plus, il vient directement de la définition que, l'application qui associe à toute fonction f la fonction \widehat{f} est linéaire, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^3$ et $f, g \in L^1(\mathbb{T}^3)$, on a :

$$(3.1.1) \quad \widehat{(f + \lambda g)}(n) = \widehat{f}(n) + \lambda \widehat{g}(n).$$

Si $f \in C^{2k}(\mathbb{T}^3)$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors il existe une constante $C_k > 0$ telle que :

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_k}{(1 + |n|^2)^k}, \quad \text{où } |n|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

En effet, cela vient du fait que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}^3$,

$$(3.1.2) \quad \widehat{(1 - \Delta)^k f}(n) = (1 + |n|^2)^k \widehat{f}(n).$$

Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &\leq \frac{1}{(1 + |n|^2)^k} \int_{\mathbb{T}^3} |(1 - \Delta)^k f(x)| dx \\ &\leq \frac{C_k}{(1 + |n|^2)^k}. \end{aligned}$$

Définition 3.1.2 (Formelle). On appelle série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}^3)$, la série donnée par :

$$(2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{f}(n) e^{in \cdot x}, \quad x \in \mathbb{T}^3.$$

Nous ferons remarquer que cette définition est "*formelle*" c'est-à-dire qu'elle ne tient pas compte de la convergence de la série, à ce stade nous ne savons pas si elle converge ou pas ; et si elle converge dans quel sens.

Définition 3.1.3. On définit pour tout $N \in \mathbb{N}$, la N -ième somme de la série ou encore la série des sommes partielles, notée $S_N f$, par :

$$S_N f(x) = (2\pi)^{-3} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \sum_{n_3=-N}^N e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3)} \widehat{f}(n),$$

où $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$.

3.1. Analyse de Fourier

Théorème 3.1.4. Soient $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ et $S_N f$ la N -ième somme associée à sa série de Fourier. Alors cette somme converge uniformément sur \mathbb{T}^3 vers f quand N tend vers l'infini i.e.

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^3} |(S_N f - f)(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$,

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^3} |\partial^\alpha (S_N f(x) - f(x))| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

Afin de démontrer ce théorème, nous aurons besoin de certains lemmes et théorèmes que nous énoncerons dans la section suivante.

3.1.2 Noyaux de Dirichlet

On considère $S_N f$ la N -ième somme associée à la série de Fourier de f :

$$S_N f(x) = (2\pi)^{-3} \sum_{n_1=-N}^N e^{in_1 x_1} \sum_{n_2=-N}^N e^{in_2 x_2} \sum_{n_3=-N}^N e^{in_3 x_3} \int_{\mathbb{T}^3} f(y) e^{-in \cdot y} dy.$$

Alors, par commutativité des signes intégrale et somme, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} \left(\sum_{n_1=-N}^N e^{in_1(x_1-y_1)} \right) \left(\sum_{n_2=-N}^N e^{in_2(x_2-y_2)} \right) \left(\sum_{n_3=-N}^N e^{in_3(x_3-y_3)} \right) f(y) dy \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} \prod_{j=1}^3 \left(\sum_{|n_j| \leq N} e^{in_j(x_j-y_j)} \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Définition 3.1.5. On appelle noyau de Dirichlet, noté D_N , l'application donnée pour tout $x \in \mathbb{T}^3$ par :

$$(3.1.3) \quad D_N(x) = \prod_{j=1}^3 \left(\sum_{n_j=-N}^N e^{in_j x_j} \right).$$

Par cette définition, on voit que

$$(3.1.4) \quad S_N f(x) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} D_N(x-y) f(y) dy.$$

3.1. Analyse de Fourier

On pourra aussi remarquer que, le noyau de Dirichlet est en fait un produit de suites géométriques de raison e^{ix_j} avec $j = \{1, 2, 3\}$, dont la somme peut être calculée au cas $x_j \neq 0$, $j = \{1, 2, 3\}$, en écrivant

$$(3.1.5) \quad D_N(x) = \prod_{j=1}^3 \left(\sum_{|n_j| \leq N} e^{in_j x_j} \right) = \prod_{j=1}^3 \left(e^{-ix_j N} \frac{1 - e^{ix_j(2N+1)}}{1 - e^{ix_j}} \right).$$

Puis, en multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $e^{-i\frac{x_j}{2}}$, on obtient

$$D_N(x) = \prod_{j=1}^3 \left(\frac{e^{-i\frac{x_j}{2}(2N+1)} - e^{i\frac{x_j}{2}(2N+1)}}{e^{-i\frac{x_j}{2}} - e^{i\frac{x_j}{2}}} \right).$$

Sachant que l'exponentielle peut s'exprimer par des fonctions trigonométriques, il résulte finalement une deuxième formulation du noyau de Dirichlet,

$$(3.1.6) \quad D_N(x) = \prod_{j=1}^3 D_N^j(x_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3,$$

où

$$(3.1.7) \quad D_N^j(x_j) = \begin{cases} \frac{\sin((2N+1)\frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} & x_j \neq 0, \\ 2N + 1 & x_j = 0. \end{cases}$$

Notons que D_N^j sont des fonctions à une variable alors que D_N est une fonction à trois variables. Nous avons que $D_N^1 = D_N^2 = D_N^3$.

Remarque 3.1.6. Cette deuxième formulation nous permet de remarquer que l'une des propriétés du noyau de Dirichlet est qu'il n'est pas de signe constant. On peut aussi voir, par identification de (3.1.5) et (3.1.7) que :

$$(3.1.8) \quad D_N^j(x_j) = \sum_{|n_j| \leq N} e^{in_j x_j}, \quad x_j \in \mathbb{T}, \quad j = 1, 2, 3.$$

De retour sur la série des sommes partielles $S_N f$, la formulation (3.1.6) nous permet

3.1. Analyse de Fourier

d'écrire

$$(3.1.9) \quad S_N(f) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{T}^3} \prod_{j=1}^3 \left(\frac{\sin((2N+1)\frac{x_j-y_j}{2})}{\sin(\frac{x_j-y_j}{2})} \right) f(y) dy.$$

On serait alors tenté d'essayer de démontrer la convergence simple de la série $S_N f$ vers f en effectuant un changement de variable comme ceci :

$$S_N(f) = \pi^{-3} \int_{I_N^1 \times I_N^2 \times I_N^3} \prod_{j=1}^3 \left(\frac{\sin(y_j)}{(2N+1) \sin(\frac{y_j}{2N+1})} \right) f\left(x - \frac{2y}{2N+1}\right) dy,$$

où $I_N^j = [(\frac{2N+1}{2})(\pi + x_j), -(\frac{2N+1}{2})(\pi + x_j)]^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $j = 1, 2, 3$, puis de faire tendre N vers l'infini sous le signe intégrale. Or, dans ce cas, il ne nous est pas permis d'appliquer le théorème de Lebesgue du fait que les noyaux de Dirichlet soient de signe non constant, comme nous l'avons vu dans la remarque précédente. D'où l'intérêt de la section suivante.

3.1.3 Noyaux de Fejér

On pose pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$ et $j = 1, 2, 3$,

$$(3.1.10) \quad F_N^j(x_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k^j(x_j), \quad N \in \mathbb{N}.$$

avec $F_N^j(0) = 2N + 1$ pour $j = 1, 2, 3$.

Définition 3.1.7. On définit le noyau de Fejér, noté F_N par :

$$F_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{j=1}^3 F_N^j(x_j), \quad x \in \mathbb{T}^3.$$

Ou encore

$$F_N(x) = \frac{1}{(2\pi N)^3} \prod_{j=1}^3 \left(\sum_{k=0}^{N-1} D_k^j(x_j) \right).$$

Lemme 3.1.8. La suite $\{F_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité. Plus précisément, la suite vérifie les propriétés suivantes :

3.1. Analyse de Fourier

P1. Pour tout $x \in \mathbb{T}^3$, on a :

$$\int_{\mathbb{T}^3} F_N(x) dx = 1.$$

P2. En tout point $x \in \mathbb{T}^3$, $F_N(x)$ est positif et satisfait donc :

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}^3} |F_N(x)| dx < \infty.$$

P3. Pour tout $\delta > 0$,

$$\int_{[-\pi, \pi]^3 / ([-\delta, \delta]^3)} |F_N(x)| dx \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

(ici on identifie \mathbb{T}^3 avec $[-\pi, \pi]^3$).

Démonstration. P1. Par définition, on écrit pour tout $x \in \mathbb{T}^3$,

$$\int_{\mathbb{T}^3} F_N(x) dx = \frac{1}{(2\pi N)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \prod_{j=1}^3 \left(\sum_{k=0}^{N-1} D_k^j(x_j) \right) dx.$$

Puisque $D_k^j(x_j)$ ne dépend que de x_j , la précédente égalité peut être reformuler par :

$$\int_{\mathbb{T}^3} F_N(x) dx = \frac{1}{(2\pi N)^3} \prod_{j=1}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{\mathbb{T}} D_k^j(x_j) dx_j \right).$$

Il s'en suit, par la relation (3.1.3), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} F_N(x) dx &= \frac{1}{(2\pi N)^3} \prod_{j=1}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n_j=-k}^k e^{in_j x_j} dx_j \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi N)^3} \prod_{j=1}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n_j=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_j x_j} dx_j \right). \end{aligned}$$

On remarquera, que pour tout $j = \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in_j x_j} dx_j = \begin{cases} 0 & n_j \neq 0, \\ 2\pi & n_j = 0. \end{cases}$$

3.1. Analyse de Fourier

En conséquence,

$$\int_{\mathbb{T}^3} F_N(x) dx = \frac{1}{(2\pi N)^3} (N2\pi)^3 = 1.$$

D'où la propriété P1.

P2. Pour $j = 1$ et $x_1 \neq 0$, dans les définitions (3.1.6) et (3.1.10), on écrit

$$\begin{aligned} F_N^1(x_1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\sin\left((2k+1)\frac{x_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\Im\left(e^{i(2k+1)\frac{x_1}{2}}\right)}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} \right), \end{aligned}$$

où $\Im(\cdot)$ désigne la partie imaginaire. On peut alors écrire par équivalence,

$$(3.1.11) \quad F_N^1(x_1) = \frac{1}{N \sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} \left(\Im \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x_1}{2}} \right) \right).$$

On observera que le membre de droite est une suite géométrique dont la somme est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x_1}{2}} = e^{i\frac{x_1}{2}} \frac{1 - e^{iNx_1}}{1 - e^{ix_1}}.$$

Puis en factorisant par $e^{iN\frac{x_1}{2}}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x_1}{2}} = e^{iN\frac{x_1}{2}} \frac{\sin\left(N\frac{x_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)}.$$

dont la partie imaginaire de cette dernière égalité est donnée par :

$$\Im \left(e^{iN\frac{x_1}{2}} \frac{\sin\left(N\frac{x_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} \right) = \frac{(\sin\left(N\frac{x_1}{2}\right))^2}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)}.$$

La relation (3.1.11) s'écrit alors pour tout $x_1 \neq 0$,

$$(3.1.12) \quad F_N^1(x_1) = \frac{1}{N \sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} \frac{(\sin\left(N\frac{x_1}{2}\right))^2}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(N\frac{x_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)} \right)^2.$$

3.1. Analyse de Fourier

De ce fait, par la définition (3.1.7) de F_N , on déduit que,

$$(3.1.13) \quad F_N(x) = \frac{1}{(2\pi N)^3} \prod_{j=1}^3 \left(\frac{\sin(N \frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right)^2 \quad x_j \neq 0, j = 1, 2, 3.$$

Ce qui nous permet de voir que le noyau de Fejér est positif pour tout $x \in \mathbb{T}^3$ et que par conséquent, à l'aide de la propriété *P1.* précédente, on peut écrire pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{T}^3} |F_N(x)| dx = \int_{\mathbb{T}^3} F_N(x) dx < \infty.$$

P3. La preuve du dernier point tient du fait que l'on ait :

$$\forall j = 1, 2, 3, \quad \exists c > 0 \quad : \quad \left| \left(\frac{\sin(N \frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right)^2 \right| \leq c \min \left(N, \frac{1}{|x_j|} \right)^2.$$

En particulier, pour $\delta > 0$ telle que $|x| \geq \delta$, il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ pour lequel $|x_j| \geq \frac{\delta}{\sqrt{3}}$ et

$$(3.1.14) \quad \int_{\frac{\delta}{\sqrt{3}} \leq |x_j| \leq \pi} \frac{1}{N} \left| \left(\frac{\sin(N \frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right)^2 \right| dx_j \leq \frac{C}{N} \cdot \frac{1}{\delta^2} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

Riche de ces observations, on écrit d'abord à l'aide la relation (3.1.13),

$$\int_{\{x \in \mathbb{T}^3, |x| \geq \delta\}} F_N(x) dx = \frac{1}{(2\pi N)^3} \int_{\{x \in \mathbb{T}^3, |x| \geq \delta\}} \prod_{j=1}^3 \left(\frac{\sin(N \frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right)^2 dx.$$

On va essayer par la suite de majorer cette intégrale par d'autres intégrales du type (3.1.14) de la manière suivante :

$$\int_{\{x \in \mathbb{T}^3, |x| \geq \delta\}} F_N(x) dx \leq \frac{1}{(2\pi N)^3} \sum_{j=1}^3 \int_{I_\delta} \left(\frac{\sin(N \frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right)^2 dx_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(N \frac{x_k}{2})}{\sin(\frac{x_k}{2})} \right)^2 dx_k.$$

avec $I_\delta = \{ \frac{\delta}{\sqrt{3}} \leq |x_j| \leq \pi \}$.

3.1. Analyse de Fourier

On sait que pour tout $k = \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(N \frac{x_k}{2})}{\sin(\frac{x_k}{2})} \right)^2 dx_k = 2\pi N$$

(une conséquence de la preuve de la propriété $P1$). Cela nous amène à écrire que,

$$\int_{\{x \in \mathbb{T}^3, |x| \geq \delta\}} F_N(x) dx \leq \frac{(2\pi N)^2}{N^3} \sum_{j=1}^3 \int_{\{\frac{\delta}{\sqrt{3}} \leq |x_j| \leq \pi\}} \left(\frac{\sin(N \frac{x_j}{2})}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right)^2 dx_j.$$

En appliquant (3.1.14), on déduit directement que,

$$\int_{\{x \in \mathbb{T}^3, |x| \geq \delta\}} F_N(x) dx \leq \frac{C}{N} \cdot \frac{1}{\delta^2} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

Ce qui termine la preuve du lemme 3.1.8. □

Définition 3.1.9. On dit qu'une fonction P est un polynôme trigonométrique sur \mathbb{T}^3 si la fonction P est défini par une somme d'exponentielles. Plus précisément, s'il existe $M \geq 0$ et $c_{n_1, n_2, n_3} \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{|n_1| \leq M} \sum_{|n_2| \leq M} \sum_{|n_3| \leq M} c_{n_1, n_2, n_3} e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3)}.$$

Proposition 3.1.10. *L'ensemble des polynômes trigonométriques \mathcal{P} est dense dans l'espace des fonctions continues sur \mathbb{T}^3 i.e.*

$$\forall f \in C(\mathbb{T}^3) \quad , \exists P_N \in \mathcal{P} \quad \text{tel que} \quad \|P_N - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. On considère la fonction $F_N * f$ où " $*$ " désigne le produit de convolution. Par définition, on a :

$$F_N * f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left(\widehat{F_N}(n) \widehat{f}(n) \right) e^{in \cdot x},$$

où $n \cdot x = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3$. Montrons que $F_N * f$ est un polynôme trigonométrique. On

3.1. Analyse de Fourier

écrit pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$,

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{(2\pi N)^3} \prod_{j=1}^3 \left(\sum_{|n_j| \leq N} e^{in_j x_j} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi N)^3} \sum_{|n_1| \leq N} \sum_{|n_2| \leq N} \sum_{|n_3| \leq N} e^{in \cdot x}. \end{aligned}$$

Autrement dit, F_N est un polynôme trigonométrique (par définition). En particulier,

$$\widehat{F}_N(n) = \frac{1}{(2\pi N)^3}, \quad n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3, \quad |n_j| \leq N, \quad j = 1, 2, 3, \quad N \in \mathbb{N}.$$

De plus, d'après la première section on sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}^3$, l'application \widehat{f} est bornée. On peut alors conclure qu'il existe M et $C_n \in \mathbb{C}$ telles que

$$F_N * f = \sum_{\substack{|n_j| \leq M \\ j=1,2,3}} C_n e^{in \cdot x}.$$

On pose $P_N = F_N * f$. Montrons que pour $f \in C(\mathbb{T}^3)$ on a

$$\|P_N(x) - f(x)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad N \rightarrow +\infty.$$

On considère

$$|P_N(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{T}^3} (f(x-y) - f(x)) F_N(y) dy \right|.$$

A l'aide de l'inégalité triangulaire, on écrit que

$$\begin{aligned} |P_N(x) - f(x)| &\leq \left| \int_{y \in [-\delta, \delta]^3} (f(x-y) - f(x)) F_N(y) dy \right| + \\ &\qquad \qquad \qquad \left| \int_{y \notin [-\delta, \delta]^3} (f(x-y) - f(x)) F_N(y) dy \right| \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

3.1. Analyse de Fourier

où

$$I_1 = \left| \int_{y \in ([-\delta, \delta])^3} (f(x-y) - f(x)) F_N(y) dy \right|,$$

et

$$I_2 = \left| \int_{y \notin ([-\delta, \delta])^3} (f(x-y) - f(x)) F_N(y) dy \right|.$$

Contrairement au noyau de Dirichlet, on a vu que le noyau de Fejér était de signe constant positif, ce qui va nous permettre de facilement majorer les intégrales I_1 et I_2 . En effet, par les propriétés $P1.$ et $P2.$ du lemme précédent, on sait que :

$$\int_{y \in ([-\delta, \delta])^3} |F_N(y)| dy = \int_{y \in ([-\delta, \delta])^3} F_N(y) dy \leq \int_{\mathbb{T}^3} F_N(y) dy = 1.$$

De plus, par continuité uniforme, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x, y \in \mathbb{T}^3, \quad |x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On conclut alors, que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{y \in ([-\delta, \delta])^3} |f(x-y) - f(x)| |F_N(y)| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{T}^3} F_N(y) dy = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, f est continue sur un compact, et donc :

$$\exists M > 0, \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{T}^3.$$

On sait aussi, par la propriété $P3.$ du lemme 3.1.8, que pour N suffisamment grand, on a :

$$\int_{y \notin ([-\delta, \delta])^3} |F_N(y)| dy \leq \frac{\epsilon}{4M}.$$

3.1. Analyse de Fourier

Il s'en suit alors, d'après ces deux remarques que,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{y \notin ([-\delta, \delta])^3} (|f(x-y)| + |f(x)|) |F_N(y)| dy \\ &\leq 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$|P_N(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 = \epsilon.$$

□

Remarque 3.1.11. *Si de plus, $f \in C^k(\mathbb{T}^3)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tels que $|\alpha| \leq k$, on a :*

$$(3.1.15) \quad \|\partial^\alpha (P_N - f)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty,$$

où

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

En effet, on peut voir que

$$\partial^\alpha (F_N * f) = F_N * (\partial^\alpha f),$$

où $\partial^\alpha f \in C(\mathbb{T}^3)$ et donc d'après la proposition précédente, ce polynôme converge uniformément vers f , d'où (3.1.15).

3.1.4 Convergence dans $L^2(\mathbb{T}^3)$

Notre but dans cette section sera de démontrer l'égalité de Parseval qui va être un outil clé pour montrer la convergence uniforme de la série des sommes partielles du théorème 3.1.4.

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien sur $L^2(\mathbb{T}^3)$, donné par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^3} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Théorème 3.1.12. *Soient $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ et $S_N f$ la série des sommes partielles associée à*

3.1. Analyse de Fourier

f. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Démonstration. On observera que l'application S_N est une projection orthogonale sur le sous espace $\{e^{in \cdot x}, |n_1| \leq N, |n_2| \leq N, |n_3| \leq N\}$. En particulier, l'application S_N vérifie pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{T}^3)$,

$$(3.1.16) \quad \langle S_N f, g \rangle = \langle f, S_N g \rangle, \quad \text{et} \quad \langle f, S_N f \rangle = \langle S_N f, S_N f \rangle.$$

On considère

$$\begin{aligned} \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 &= \langle f - S_N f, f - S_N f \rangle \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 - \langle f, S_N f \rangle - \langle S_N f, f \rangle + \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

D'après l'observation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 &= \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 - 2\langle f, S_N f \rangle + \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 - 2\langle S_N f, S_N f \rangle + \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 - 2\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

On a bien alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 - \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \geq 0.$$

D'où

$$\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

□

Théorème 3.1.13. Soient $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ et $S_N f$ la série des sommes partielles associée à f . Alors,

$$\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par densité des fonctions continues sur \mathbb{T}^3 dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ il existe une fonction $g \in C(\mathbb{T}^3)$ telle que

$$\|f - g\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

3.1. Analyse de Fourier

De plus, la Proposition 3.1.10 dit qu'il existe un polynôme trigonométrique $P \in \mathcal{P}_N$ tel que

$$\|P - g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{\epsilon}{4(2\pi)^{3/2}},$$

autrement dit, on a aussi

$$\|P - g\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

(ici on a utilisé la décroissance des espaces L^p de mesures finies). En combinant ces deux inégalités, on obtient que

$$(3.1.17) \quad \|P - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|P - g\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|g - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On considère ensuite

$$\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \|S_N f - S_N P + S_N P - P + P - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Par inégalité triangulaire, on écrit

$$\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|S_N f - S_N P\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|S_N P - P\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|P - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Or, par définition, pour N suffisamment grand, on a $S_N P = P$ et donc

$$\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|S_N f - S_N P\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|P - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

De plus, par le théorème précédent, on sait que

$$\|S_N(f - P)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|f - P\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Il vient alors, par (3.1.17) que

$$\begin{aligned} \|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq \|f - P\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|P - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 3.1.13. □

Théorème 3.1.14. [*Égalité de Parseval*] Soient $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ et \hat{f} sa transformée de

3.1. Analyse de Fourier

Fourier. Alors,

$$(3.1.18) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Démonstration. Soit $S_N f$ la série des sommes partielles associée à f . Montrons que

$$(*) \quad \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{\substack{|n_1| \leq N, |n_2| \leq N \\ |n_3| \leq N}} |\widehat{f}(n)|^2.$$

A l'aide de la relation (3.1.16), on écrit

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 &= \langle S_N f, S_N f \rangle = \langle S_N f, f \rangle \\ &= \left\langle (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \Lambda} \widehat{f}(n) e^{in \cdot x}, f \right\rangle \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \Lambda} \widehat{f}(n) \langle e^{in \cdot x}, f \rangle, \end{aligned}$$

où

$$\Lambda = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : |n_1| \leq N, |n_2| \leq N, |n_3| \leq N\}.$$

Or, on remarquera que $\langle e^{in \cdot x}, f \rangle = \overline{\widehat{f}(n)}$ et que donc

$$\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{\substack{|n_1| \leq N, |n_2| \leq N \\ |n_3| \leq N}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(n)} = (2\pi)^{-3} \sum_{\substack{|n_1| \leq N, |n_2| \leq N \\ |n_3| \leq N}} |\widehat{f}(n)|^2.$$

On écrit maintenant, à l'aide de la seconde inégalité triangulaire que

$$\left| \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right| \leq \|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

De plus, par le théorème 3.1.13 précédent, on sait que

$$\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

3.1. Analyse de Fourier

Enfin, à l'aide de la relation (*), on déduit que :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 3.1.14. \square

3.1.5 Convergence dans $L^\infty(\mathbb{T}^3)$

Muni de ces résultats, nous pouvons dès à présent démontrer le théorème 3.1.4.

Démonstration du théorème 3.1.4. Soient $N, M \in \mathbb{N}$ avec $N > M$. Montrons que la suite $S_N f$ des sommes partielles associée à f est de Cauchy. On considère

$$\begin{aligned} (S_N f - S_M f)(x) &= (2\pi)^{-3} \sum_{\substack{|n_j| \leq N \\ j=1,2,3}} \widehat{f}(n) e^{in \cdot x} - (2\pi)^{-3} \sum_{\substack{|n_j| \leq M \\ j=1,2,3}} \widehat{f}(n) e^{in \cdot x} \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_{\substack{\max |n_j| > M \\ |n_j| \leq N, j=1,2,3}} \widehat{f}(n) e^{in \cdot x}. \end{aligned}$$

Alors, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on écrit

$$\begin{aligned} \|S_N f - S_M f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} &\leq (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \Lambda'} |\widehat{f}(n)| \frac{(1 + |n|^2)^{50}}{(1 + |n|^2)^{50}} \\ &\leq (2\pi)^{-3} \left(\sum_{n \in \Lambda'} |\widehat{f}(n)|^2 (1 + |n|^2)^{100} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \Lambda'} \frac{1}{(1 + |n|^2)^{100}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2\pi)^{-3} \left(\sum_{n \in \Lambda'} |\widehat{f}(n)|^2 (1 + |n|^2)^{100} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \Lambda'} \frac{1}{(1 + |n|^2)^{99}} \frac{1}{(1 + M^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0; \end{aligned}$$

avec

$$\Lambda' = \{n \in \mathbb{Z}^3 : |n_j| \leq N, \max |n_j| > M, j = 1, 2, 3\}.$$

On peut alors conclure que la suite des sommes partielles $S_N f$ est de Cauchy et donc, qu'elle est convergente. De plus, grâce au théorème 3.1.13, on peut dire que la suite $S_N f$

3.2. Espaces de Sobolev

converge vers f dans L^∞ par unicité de limite i.e.

$$\|S_N f - f\|_{L^\infty} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème, il suffit d'observer que pour $\alpha \in \mathbb{N}^3$, on a :

$$\partial^\alpha S_N f(x) = \partial^\alpha (D_N * f)(x) = D_N * \partial^\alpha f(x) = S_N(\partial^\alpha f)(x),$$

En effet, en notant $\partial^\alpha f = g \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, on se retrouve dans le cas où il faudrait démontrer que $S_N g$ converge uniformément vers g quand N tend vers l'infini, ce qui est démontré ci-dessus. □

Une conséquence directe de ce théorème est l'existence de la transformée de Fourier inverse pour $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, donnée par :

$$(3.1.19) \quad f(x) = (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{f}(n) e^{in \cdot x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}^3,$$

et

$$(3.1.20) \quad \partial^\alpha f(x) = (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{\partial^\alpha f}(n) e^{in \cdot x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}^3,$$

où

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

3.2 Espaces de Sobolev

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev sur \mathbb{T}^3 à indice entier k , noté par $\tilde{H}^k(\mathbb{T}^3)$, par :

$$\tilde{H}^k(\mathbb{T}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^3) : \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{T}^3), \forall \alpha \in \mathbb{N}^3 : |\alpha| \leq k\},$$

3.2. Espaces de Sobolev

où $\partial^\alpha f$ est défini par :

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^3} f(x) \partial^\alpha \varphi(x), \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^3).$$

On le muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{T}^3} (\partial^\alpha f)(x) \overline{(\partial^\alpha g)(x)} dx$$

qui induit sur cet espace la norme

$$\|f\|_{\tilde{H}^k(\mathbb{T}^3)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 3.2.2. Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev sur \mathbb{T}^3 à indice réel s , noté $H^s(\mathbb{T}^3)$, par :

$$H^s(\mathbb{T}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^3) : \forall n \in \mathbb{Z}^3 \ (1 + |n|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(n) \in l^2(\mathbb{Z}^3)\},$$

où $|n|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. On le muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^s \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}$$

qui induit la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} &= \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\cdot)\|_{l^2(\mathbb{Z}^3)} \\ &:= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^s |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.3. On observera alors, qu'il est possible de voir les espaces de Sobolev de deux manières différentes, soit via les dérivées au sens des distributions ou bien alors via la transformée de Fourier. De plus, cet espace a la particularité d'apparaître naturellement dans les estimations d'énergie, généralement sous sa première forme.

Proposition 3.2.4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\tilde{H}^k(\mathbb{T}^3) = H^k(\mathbb{T}^3)$ et $\|f\|_{\tilde{H}^k(\mathbb{T}^3)} \approx \|f\|_{H^k(\mathbb{T}^3)}$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est une conséquence directe de l'équiva-

3.2. Espaces de Sobolev

lence suivante :

$$(3.2.1) \quad \exists c > 0 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{Z}^3, \quad \frac{1}{c} \sum_{|\alpha| \leq k} |n^\alpha|^2 \leq (1 + |n|^2)^k \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |n^\alpha|^2,$$

où $n^\alpha = n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3}$. Montrons à l'aide de cette relation, l'équivalence des espaces \tilde{H}^k et H^k . On considère

$$\|f\|_{\tilde{H}^k}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{|\alpha| \leq k} \|\widehat{\partial^\alpha f}\|_{l^2(\mathbb{Z}^3)}^2,$$

où la seconde égalité est donnée par (3.1.18). On sait aussi que :

$$\widehat{\partial^\alpha f}(n) = i^{|\alpha|} n^\alpha \hat{f}(n).$$

Il vient donc,

$$\|f\|_{\tilde{H}^k(\mathbb{T}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{|\alpha| \leq k} \|n^\alpha \hat{f}\|_{l^2(\mathbb{Z}^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \sum_{|\alpha| \leq k} |n^\alpha|^2 |\hat{f}(n)|^2.$$

Enfin, d'après la relation (3.2.1), on obtient :

$$\|f\|_{\tilde{H}^k}^2 \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^k |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_{H^k(\mathbb{T}^3)}^2.$$

□

Proposition 3.2.5. *Les espaces de Sobolev forment une chaîne décroissante i.e. pour tout $s, s' \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq s < s'$ on a $H^{s'}(\mathbb{T}^3) \subset H^s(\mathbb{T}^3)$.*

Cela se déduit directement du fait que pour $0 \leq s < s'$, on a :

$$(1 + |n|^2)^s \leq (1 + |n|^2)^{s'}.$$

3.2.2 Propriétés

L'importance des espaces de Sobolev réside non seulement dans les fonctionnelles d'énergie, mais surtout dans le théorème de plongement qui réunit toutes les injections de ces derniers espaces. Dans cette partie, nous citons quelques unes de ces injections qui nous seront très utiles pour le reste du document.

3.2. Espaces de Sobolev

Théorème 3.2.6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{3}{2} + k$. Alors toute fonction $f \in H^s(\mathbb{T}^3)$ est une fonction de classe $C^k(\mathbb{T}^3)$. De plus, il existe une constante $C_s > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ avec $|\alpha| \leq k$, on a :

$$(3.2.2) \quad \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}.$$

Démonstration. On considère $f \in H^s(\mathbb{T}^3)$. Alors, pour tout $|\alpha| \leq k$ nous avons vu dans la proposition 3.2.4, que

$$|\widehat{\partial^\alpha f}(n)| = |n^\alpha \widehat{f}(n)| \leq (1 + |n|^2)^{\frac{k}{2}} |\widehat{f}(n)|.$$

En remplaçant $\frac{k}{2}$ par $\frac{k-s}{2} + \frac{s}{2}$, le membre de droite se réécrit

$$(3.2.3) \quad |\widehat{\partial^\alpha f}(n)| \leq (1 + |n|^2)^{\frac{k-s}{2}} (1 + |n|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(n)| \in l^1(\mathbb{Z}^3)$$

puisque $k - s < -\frac{3}{2}$ (voir ci-dessous). Alors, la fonction $\partial^\alpha f$ est continue pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ avec $|\alpha| \leq k$ i.e. $f \in C^k(\mathbb{T}^3)$.

Montrons l'inégalité (3.2.2). A l'aide de la relation (3.1.20) on écrit, pour tout $x \in \mathbb{T}^3$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ telle que $|\alpha| \leq k$,

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left| \widehat{\partial^\alpha f}(n) \right|.$$

Il s'en suit, en majorant le membre de droite comme dans l'inégalité (3.2.3) que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq (2\pi)^{-3} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^{\frac{k-s}{2}} (1 + |n|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \widehat{f}(n) \right|.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'espace $l^2(\mathbb{Z}^3)$, on obtient :

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq (2\pi)^{-3} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^{k-s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^s |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, puisque $2(s - k) > 3$, on sait que

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^2)^{k-s} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

3.3. Inégalités sur l'espace $L^p(\mathbb{T}^3)$

En conclusion, on a :

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, \quad |\alpha| \leq k.$$

□

Théorème 3.2.7. *Soit $s \geq 0$. Alors, il existe $C > 0$ une constante, telle que pour tout $f, g \in H^s(\mathbb{T}^3)$, on a :*

$$(3.2.4) \quad \|fg\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq C (\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|g\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}).$$

Ce théorème est en fait un cas particulier de l'inégalité de Kato-Ponce aussi appelée la règle fractionnaire de Leibniz (*fractional Leibniz rule*) qui s'écrit :

$$(3.2.5) \quad \|\Lambda^s(fg)\|_{L^r(\mathbb{T}^3)} \leq C (\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{T}^3)} \|\Lambda^s g\|_{L^{q_1}(\mathbb{T}^3)} + \|\Lambda^s f\|_{L^{p_2}(\mathbb{T}^3)} \|g\|_{L^{q_2}(\mathbb{T}^3)}),$$

où

$$\Lambda^s = (1 - \Delta)^{\frac{s}{2}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$$

avec $1 < r < +\infty$ et $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 \leq +\infty$. Pour le cas s entier, il est possible de déduire l'inégalité (3.2.5) directement des estimations de Gagliardo-Nirenberg.

Théorème 3.2.8. *Soient $s \in]0, \frac{3}{2}[$ et $p = \frac{6}{3-2s}$. Alors toute fonction $f \in H^s(\mathbb{T}^3)$ est une fonction de $L^p(\mathbb{T}^3)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^s(\mathbb{T}^3)$,*

$$(3.2.6) \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^3)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}.$$

Ce théorème énonce l'injection de Sobolev la plus utilisée dans ce document, en particulier dans le chapitre bien-posé du problème fractionnaire. On peut consulter [9, 3] pour la preuve des théorèmes 3.2.7, 3.2.8.

3.3 Inégalités sur l'espace $L^p(\mathbb{T}^3)$

On présente dans cette section quelques bases des normes L^p , autres outils clés dans les prochains chapitres.

3.3. Inégalités sur l'espace $L^p(\mathbb{T}^3)$

3.3.1 Inégalité de Hölder et ses variantes

Soient $(p, q) \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Et soient deux fonctions $f \in L^p(\mathbb{T}^3)$ et $g \in L^q(\mathbb{T}^3)$. Alors,

$$\int_{\mathbb{T}^3} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{T}^3} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{T}^3} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dans le cas $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Proposition 3.3.1. *Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Et soit $f \in L^p(\mathbb{T}^3) \cap L^q(\mathbb{T}^3)$. Alors, $f \in L^r(\mathbb{T}^3)$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ pour tout $0 \leq \theta \leq 1$. De plus, on a :*

$$(3.3.1) \quad \|f\|_{L^r(\mathbb{T}^3)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^3)}^{1-\theta} \|f\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}^{\theta}.$$

Démonstration. On considère

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{T}^3)}^r = \int_{\mathbb{T}^3} |f(x)|^{(1-\theta)r} |f(x)|^{\theta r} dx.$$

Alors, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{T}^3)}^r \leq \| |f|^{(1-\theta)r} \|_{L^{\frac{p}{(1-\theta)r}}(\mathbb{T}^3)} \| |f|^{\theta r} \|_{L^{\frac{q}{\theta r}}(\mathbb{T}^3)}$$

car $\frac{(1-\theta)r}{p} + \frac{\theta r}{q} = 1$. Autrement dit, on a :

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{T}^3)}^r \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^3)}^{(1-\theta)r} \|f\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}^{\theta r}.$$

En conclusion,

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{T}^3)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^3)}^{1-\theta} \|f\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}^{\theta}.$$

□

Remarque 3.3.2. *De manière identique, c'est-à-dire à l'aide de l'inégalité de Hölder, on peut montrer que pour tout $\theta \in [0, 1]$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que $\sigma = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$, on a :*

$$(3.3.2) \quad \|f\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq \|f\|_{H^{s_1}(\mathbb{T}^3)}^{(1-\theta)} \|f\|_{H^{s_2}(\mathbb{T}^3)}^{\theta}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3. Inégalités sur l'espace $L^p(\mathbb{T}^3)$

3.3.2 Inégalité intégrale de Minkowski

Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurés. Soit h une fonction mesurable positive sur $X \times Y$. Alors,

$$\left(\int_X \left(\int_Y h(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X h(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. On pose

$$f(x) = \int_Y h(x, y) d\nu(y), \quad M = \int_Y \left(\int_X h(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

Par dualité, il suffit de montrer que pour toute fonction $g \in L^q(\mu)$, $g \geq 0$ on a :

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \leq M\|g\|_{L^q(\mu)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On considère

$$\int_X f(x)g(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y h(x, y) d\nu(y) g(x) \right) d\mu(x).$$

Alors, par le théorème de Fubini, on écrit

$$\int_X f(x)g(x) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X h(x, y)g(x) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Hölder sur l'espace X , on obtient

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) &\leq \int_Y \left(\int_X h(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g(x)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} d\nu(y) \\ &= \int_Y \left(\int_X h(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \left(\int_X g(x)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \leq M\|g\|_{L^q(\nu)}.$$

3.3. Inégalités sur l'espace $L^p(\mathbb{T}^3)$

□

Remarque 3.3.3. *De façon générale, pour $1 \leq q \leq p < +\infty$, on a*

$$(3.3.3) \quad \|h\|_{L_x^p L_y^q} \leq \|h\|_{L_y^q L_x^p}.$$

4. Présentation des résultats

4.1 Énoncés des résultats

Soient $0 < \alpha < 3$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)u(t, x) + u^3(t, x) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3, \\ (u, \partial_t u)(0, x) = (u_0, u_1)(x) \end{cases}$$

où (u_0, u_1) sont les données initiales au temps $t = 0$ et $D^\alpha = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ est un opérateur pseudo-différentiel défini comme suit.

Définition 4.1.1. On définit la dérivée fractionnaire D^α avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$, par :

$$\widehat{D^\alpha u}(n) = |n|^\alpha \widehat{u}(n), \quad n \in \mathbb{Z}^3.$$

Le terme *fractionnaire* est utilisé de façon impropre, puisque α n'est pas forcément un rationnel. L'équation (4.1.1) est une équation d'évolution dispersive non-linéaire c'est-à-dire que cette équation à deux variables (une variable d'espace et une variable de temps) et admet des solutions sous forme d'ondes qui se propagent dans l'espace.

De manière générale, on dit qu'une équation est dispersive si les ondes de fréquences différentes se propagent avec des vitesses différentes.

Cette équation vérifie des lois de conservations telles que l'énergie :

$$(4.1.2) \quad E(u(t)) = \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^2.$$

Si elle est posée sur \mathbb{R}^3 , elle satisfait certaines propriétés de symétrie telles que l'invariance

4.1. Énoncés des résultats

par changement d'échelle. Plus précisément, si $u(t, x)$ est solution de (4.1.1) sur \mathbb{R}^3 alors

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{\alpha}{2}} u(\lambda^{\frac{\alpha}{2}} t, \lambda x), \quad \lambda > 0,$$

est aussi une solution. De plus,

$$\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{s + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2}} \|u(\lambda^{\frac{\alpha}{2}} t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}.$$

L'exposant critique de régularité de l'équation (4.1.1) est alors donné par la formule précédente comme étant :

$$s_c = \frac{3 - \alpha}{2}.$$

Au delà de cet exposant, le problème (4.1.1) est bien posé au sens d'Hadamard sur $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $s \geq s_c$. Plus précisément, on dira qu'un problème est bien posé au sens d'Hadamard si :

- le problème possède une solution.
- la solution est unique.
- la solution dépend continument des données initiales.

On dira qu'un problème est mal posé si l'une de ces trois conditions n'est pas satisfaite.

On dira qu'un problème est localement bien posé si le temps d'existence de sa solution est fini et on dira que le problème est globalement bien posé si le temps d'existence de la solution est infini.

Définition 4.1.2. On définit un couple $(p, q) \in [2, +\infty]^2$ comme étant un couple admissible s'il vérifie :

$$\frac{1}{p} + \frac{3}{q} \leq \frac{3}{2}.$$

On peut maintenant énoncer notre premier résultat de bien posé de l'équation (4.1.1) sur l'espace $H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ avec $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$.

Théorème 4.1.3. Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$ et $(u_0, u_1) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ les données initiales associées au problème (4.1.1) telles que

$$(4.1.3) \quad \|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \Lambda, \quad \Lambda \geq 1.$$

4.1. Énoncés des résultats

Alors, le problème (4.1.1) admet une unique solution dans

$$C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3)),$$

où $T = T(\Lambda)$, $p = p(\alpha)$ et (p, q) un couple admissible qui satisfait :

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{\alpha}{2p} = \frac{\alpha}{2}. \quad (*)$$

Si de plus, $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $s \geq \frac{\alpha}{2}$, alors u appartient à

$$C([0, T], H^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^{p'}([0, T], L^{q'}(\mathbb{T}^3)),$$

où $T = T(\Lambda)$ et (p', q') est aussi un couple admissible qui vérifie $(*)$ et qui dépend de α .

Remarque 4.1.4. Pour $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$, on peut prendre p unique à partir d'un $p = p(\alpha)$ avec $p(\alpha) \rightarrow \infty$ si $\alpha \rightarrow 2$.

Pour $\alpha \geq 2$, la démonstration du théorème 4.1.3 fait appel uniquement aux injections de Sobolev. En revanche, pour $\alpha < 2$ l'utilisation des estimées de Strichartz est essentielle.

Le théorème suivant énonce un résultat de prolongement du temps d'existence de la solution donnée dans le théorème précédent. Nous verrons alors que le problème (4.1.1) est globalement bien posé sur $H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ avec $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$.

Théorème 4.1.5. Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$ et $(u_0, u_1) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$. Alors, le problème (4.1.1) possède une unique solution globale u qui appartient, pour tout $T > 0$, à l'espace

$$C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))$$

où $p = p(\alpha)$ et (p, q) un couple admissible qui vérifie

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{\alpha}{2p} = \frac{\alpha}{2}. \quad (*)$$

De plus, si $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $s \geq \frac{\alpha}{2}$ alors, pour tout $T > 0$,

$$u \in C([0, T], H^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^{p'}([0, T], L^{q'}(\mathbb{T}^3)),$$

où (p', q') est un couple admissible qui vérifie $(*)$.

4.1. Énoncés des résultats

Nous verrons aussi que le théorème 4.1.3 peut être amélioré. Plus précisément, nous montrerons que le problème (4.1.1), posé sur l'espace $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $s \in]\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$, est localement bien posé au sens d'Hadamard, comme l'énonce le théorème ci-dessous.

Théorème 4.1.6. *Soit $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$. Soit s tels que $s \in]\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$ si $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$ et $s \in]1 - \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{2}[$ si $\alpha \in]2, 3[$. Alors, pour $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ telles que*

$$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq \Lambda, \quad \Lambda \geq 1,$$

le problème (4.1.1) admet une unique solution dans

$$C([0, T], H^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3)),$$

où $T = T(\Lambda)$ et $(p, q) = (p(\alpha), q(\alpha))$ est un couple admissible qui vérifie :

$$(4.1.4) \quad (**) \quad \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{\alpha}{2p} = s, & \text{si } \alpha \in]\frac{3}{2}, 2[, s \in]\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[. \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{1}{p} = s, & \text{si } \alpha \in]2, 3[, s \in]1 - \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{2}[. \end{cases}$$

Remarquons que pour $s \in]\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$, nous avons seulement obtenu des solutions locales en temps. On remarque aussi que pour $\alpha \in]2, 3[$ l'existence de solution du problème (4.1.1) reste un problème ouvert sur $H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$ avec $s \in]\frac{3-\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{4}[$.

Enfin, pour conclure la partie déterministe, le troisième théorème énonce un résultat de mal posé du problème fractionnaire dans le cas sur-critique i.e. $s < s_c$.

Théorème 4.1.7. *Soient $\alpha \in]0, 3[$, $0 < s < \frac{3-\alpha}{2}$ et $(u_0, u_1) \in C^\infty(\mathbb{T}^3) \times C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Alors il existe $\delta > 0$, une suite de nombres positifs $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers zéro et une suite de fonctions $(u_n(t, x))_{n \in \mathbb{N}}$ de $C(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{T}^3))$ solutions de (4.1.1) telles que*

$$\|(u_n(0) - u_0, \partial_t u_n(0) - u_1)\|_{H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}} \leq C[\log(n)]^{-\delta} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow +\infty,$$

mais

$$\|(u_n(t_n), \partial_t u_n(t_n))\|_{H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}} \geq C[\log(n)]^\delta \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

La preuve de ce dernier théorème se base sur la comparaison d'énergie, à un terme borné près, de la solution u_n et la solution v_n du problème (4.1.1) sans le terme linéaire. Cette preuve s'inspire des travaux de N. Burq et N. Tzvetkov effectués sur l'équation

4.1. Énoncés des résultats

des ondes cubiques i.e. $\alpha = 2$. La différence majeure sera la définition de l'énergie semi-classique, qui dépendra des valeurs de α .

Une conséquence directe de ce théorème est donnée dans ce qui suit.

Théorème 4.1.8. *Soient $0 < s < \frac{3-\alpha}{2}$, $T > 0$ et $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$. Alors il existe une suite de fonctions $(u_n(t, x))_{n \in \mathbb{N}}$ de $C(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{T}^3))$ solutions de (4.1.1) telles que*

$$\|(u_n(0) - u_0, \partial_t u_n(0) - u_1)\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow +\infty,$$

mais pour tout $T > 0$,

$$\|(u_n(t), \partial_t u_n(t))\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

La seconde partie de ce chapitre énonce des résultats probabilistes pour ce même problème fractionnaire, dans le régime où le théorème 4.1.8 s'applique.

On considère $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $0 < s < s_c$, les données initiales associées au problème (4.1.1), données par leurs séries de Fourier comme suit :

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} b_0^n \cos(nx) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} c_0^n \sin(nx),$$

et

$$u_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} b_1^n \cos(nx) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} c_1^n \sin(nx).$$

On définit les variables aléatoires associées à ces dernières respectivement par :

$$u_0^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \beta_0^n(\omega) b_0^n \cos(nx) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \gamma_0^n(\omega) c_0^n \sin(nx),$$

et

$$u_1^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \beta_1^n(\omega) b_1^n \cos(nx) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \gamma_1^n(\omega) c_1^n \sin(nx),$$

où $(\beta_j^n(\omega), \gamma_j^n(\omega))_{j=0,1}$ est une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la loi θ satisfait la propriété suivante

$$\exists c > 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} d\theta(x) \right| \leq e^{c\gamma^2}. \quad (\star)$$

4.1. Énoncés des résultats

On pose

$$\begin{aligned}\Lambda : \Omega &\longrightarrow H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \\ \omega &\longmapsto \Lambda(\omega) = (u_0^\omega, u_1^\omega).\end{aligned}$$

L'application Λ induit une mesure de probabilité sur l'espace $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$, notée

$$\mu_{(u_0, u_1)} = \mathbb{P} \circ \Lambda^{-1}.$$

On note

$$\mathcal{M}^s = \bigcup_{(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}} \{\mu_{(u_0, u_1)}\}.$$

Bien que le théorème 4.1.8 nous permette de conclure que le problème (4.1.1) est mal posé sur l'espace $H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$ avec $0 < s < s_c$, il nous est toutefois possible de trouver des solutions probabilistes au problème fractionnaire sur ce même espace. Plus précisément, nous verrons qu'étant donné des données initiales dans $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ ainsi que les variables aléatoires associées à ces dernières, le problème fractionnaire (4.1.1) est presque sûrement bien posé pour $s \in]0, \frac{3-\alpha}{2}[$. Mais avant cela, nous énonçons un résultat déterministe bien adapté pour le théorème probabiliste.

Le résultat qui suit, énonce l'existence d'une solution locale en temps au problème (4.1.1), où l'on a séparé la partie linéaire et la partie non linéaire de la solution u .

Proposition 4.1.9. *Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$. On considère le problème*

$$(4.1.5) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)v + (f + v)^3 = 0 & f \in L^3([0, 1], L^6(\mathbb{T}^3)), \\ (v, \partial_t v)(0) = (v_0, v_1) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3), \end{cases}$$

tels que

$$\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0, 1], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 \leq \Lambda, \quad \Lambda \geq 1.$$

Alors, il existe $c > 0$ et $\gamma > 0$ (indépendants de Λ) telles que le problème (4.1.5) possède une unique solution v sur $[0, c\Lambda^{-\gamma}]$. Cette solution est unique dans la classe

$$L^\infty([0, c\Lambda^{-\gamma}], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, c\Lambda^{-\gamma}], L^6(\mathbb{T}^3)),$$

avec $p = \frac{\alpha}{2-\alpha}$ et la dépendance en temps de la solution est continue.

Une fois ce théorème établi, on peut énoncer notre premier résultat probabiliste.

4.1. Énoncés des résultats

Théorème 4.1.10. *Soient $s \in]0, \frac{\alpha}{2}[$, $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$ et soit $\mu \in \mathcal{M}^s$. Alors, il existe un ensemble $\Sigma \subset H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$, μ -mesurable avec $\mu(\Sigma) = 1$ tels que pour tout $(v_0, v_1) \in \Sigma$, il existe une unique solution v globale du problème non linéaire :*

$$(4.1.6) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)v + v^3 = 0. \\ (v, \partial_t v)(0, x) = (v_0, v_1)(x) \end{cases}$$

qui vérifie :

$$(v(t), \partial_t v(t)) \in (S(t)(v_0, v_1), \partial_t S(t)(v_0, v_1)) + C(\mathbb{R}, H^{\frac{\alpha}{2}} \times L^2).$$

Dans l'énoncé du théorème 4.1.10, $S(t)(v_0, v_1)$ représente l'évolution libre, avec pour données initiales (v_0, v_1) (voir le chapitre suivant).

Pour avoir un ensemble invariant par la dynamique, on définit

$$\Theta \equiv \left\{ (v_0, v_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) : \right. \\ \left. \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t), \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t) \right\}.$$

On pose $\Sigma' \equiv \Theta + (H^{\frac{\alpha}{2}} \times L^2)$.

Proposition 4.1.11. *Pour tout $(v_0, v_1) \in \Sigma'$, il existe une unique solution v globale du problème (4.1.6) qui vérifie :*

$$(v(t), \partial_t v(t)) \in (S(t)(v_0, v_1), \partial_t S(t)(v_0, v_1)) + C(\mathbb{R}, H^{\frac{\alpha}{2}} \times L^2)$$

telle que $(v(t), \partial_t v(t)) \in \Sigma'$.

Nous montrerons également que nous avons l'unicité de limite, pour les approximations par des solutions régulières.

Théorème 4.1.12. *Soient $s \in]0, \frac{\alpha}{2}[$, $\alpha \in [2, 3[$ et $(v_0, v_1) \in \Sigma'$ les données initiales associées à la solution globale $v(t)$ défini dans la proposition 4.1.11. Soient les suites $(v_{n,0}, v_{n,1})_{n \geq 1} \in C^\infty(\mathbb{T}^3) \times C^\infty(\mathbb{T}^3)$ donnant les régularisations par convolution de (v_0, v_1) . On note par $v_n(t)$ la solution du problème (4.1.1) associée aux données initiales $(v_{n,0}, v_{n,1})$. Alors, pour $T > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(v_n(t) - v(t), \partial v_n(t) - \partial_t v(t))\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

4.1. Énoncés des résultats

Théorème 4.1.8 et théorème 4.1.12 montrent l'importance du choix de la régularisation des données initiales.

5. Étude déterministe du problème fractionnaire

Dans ce chapitre, on démontre que le problème de Cauchy associé à l'équation des ondes fractionnaires est bien posé au sens d'Hadamard sur $H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ pour tout $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$ de façon locale puis globale en temps. Des méthodes standards de point fixe seront utilisées pour démontrer ces résultats. On utilisera d'une part les injections de Sobolev, dans le cas $\alpha \in [2, 3[$ et d'autre part les estimées déterministes de Strichartz pour $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$. Dans un second temps, nous montrerons qu'il est possible d'étendre ces résultats de bien posé, localement en temps, sur l'espace $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $s > \frac{3-\alpha}{2}$ si $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2]$ et $s > 1 - \frac{\alpha}{4}$ si $\alpha \in]2, 3[$. Les références utilisées dans ce chapitre sont [10, 13, 11, 7, 6, 17].

5.1 Le problème linéaire

Afin de résoudre l'équation (4.1.1) on va dans un premier temps négliger le terme non-linéaire u^3 pour ne considérer que la partie linéaire de l'équation. Ensuite, il nous suffira de considérer l'équation (4.1.1) comme une perturbation de l'équation linéaire.

Cette méthode est permise lorsque les solutions sont petites ou si l'étude se fait sur des temps petits, autrement cette méthode ne pourrait pas aboutir.

Proposition 5.1.1. *Soit le problème homogène (1)' associé au problème (4.1.1) donné par :*

$$(1)' \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3. \\ (u, \partial_t u)(0, x) = (u_0, u_1)(x). \end{cases}$$

5.1. Le problème linéaire

avec $\alpha \in]0, 3[$. Alors pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$,

$$u(t, x) = (2\pi)^{-3} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \widehat{u}_0(n) e^{in \cdot x} + t \widehat{u}_1(0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{\sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{u}_1(n) e^{in \cdot x} \right)$$

est l'unique solution du problème (1)'.

Démonstration. Soit le problème

$$(*) \quad \begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t, n) + |n|^\alpha \widehat{u}(t, n) = 0 & (t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^3, \\ (\widehat{u}, \partial_t \widehat{u})(0, n) = (\widehat{u}_0, \widehat{u}_1)(n), \end{cases}$$

avec $|n| = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{1}{2}}$, donné par passage à la transformée de Fourier dans le problème (1)'. On distingue alors deux cas ; le cas $n = 0$, revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ (\widehat{u}, \partial_t \widehat{u})(0, 0) = (\widehat{u}_0, \widehat{u}_1)(0). \end{cases}$$

Par simple intégration, on conclut que la solution vaut

$$\widehat{u}(t, 0) = t \widehat{u}_1(0) + \widehat{u}_0(0).$$

Dans le cas $n \neq 0$, pour résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre deux, on se reporte à son équation caractéristique qui possède deux solutions complexes conjuguées distinctes. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\widehat{u}(t, n) = A(n) \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) + B(n) \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}).$$

En tenant compte des données initiales, on obtient finalement que pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_*^3$,

$$\widehat{u}(t, n) = \widehat{u}_0(n) \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) + \frac{\widehat{u}_1(n)}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}).$$

Ensuite, en utilisant la transformée de Fourier inverse, donnée par la formule (3.1.19), on peut conclure que les solutions du problème (1)' sont données pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ par :

$$u(t, x) = (2\pi)^{-3} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \widehat{u}_0(n) e^{in \cdot x} + t \widehat{u}_1(0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{\sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{u}_1(n) e^{in \cdot x} \right).$$

5.1. Le problème linéaire

□

Notation. Afin d'alléger l'écriture, on notera la solution du problème homogène par :

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= (2\pi)^{-3} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \widehat{u}_0(n) e^{in \cdot x} + t \widehat{u}_1(0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{\sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{u}_1(n) e^{in \cdot x} \right) \\
 (5.1.1) \quad &= \cos(tD^{\frac{\alpha}{2}})(u_0) + \frac{\sin(tD^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}}(u_1) := S(t)(u_0, u_1).
 \end{aligned}$$

Remarque 5.1.2. $S(t)(u_0, u_1)$ représente le flot des solutions de l'équation des ondes fractionnaires linéaire. Elle vérifie pour tout $s > 0$ et $\alpha \geq 2$,

$$(5.1.2) \quad \|(S(t)(u_0, u_1), \partial_t(S(t)(u_0, u_1)))\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right).$$

La solution $S(t)(u_0, u_1)$ est aussi appelée solution libre.

Proposition 5.1.3. Soient F une fonction régulière de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ à valeurs dans \mathbb{C} et \widehat{F} la transformée de Fourier en x de F . On considère le problème non-homogène associé au problème (1)' donné par :

$$(1)'' \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)u(t, x) = F(t, x) & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3, \\ (u, \partial_t u)(0, x) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$,

$$u(t, x) = -(2\pi)^{-3} \left(\int_0^t (t-\tau) \widehat{F}(\tau, 0) d\tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} e^{in \cdot x} \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{F}(\tau, n) d\tau \right)$$

est l'unique solution du problème (1)''.

Démonstration. Soit le problème

$$(*)'' \quad \begin{cases} (\partial_t^2 \widehat{u} + |n|^\alpha \widehat{u})(t, n) = \widehat{F}(t, n), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3, \\ (\widehat{u}, \partial_t \widehat{u})(0, n) = (0, 0), \end{cases}$$

donné par passage à la transformée de Fourier dans le problème (1)''. Alors, si $n = 0$, en intégrant deux fois de suite l'équation

$$\partial_t^2 \widehat{u}(t, 0) = \widehat{F}(t, 0) \quad t \in \mathbb{R},$$

5.1. Le problème linéaire

on obtient que

$$\widehat{u}(t, 0) = \int_0^t (t - \tau) \widehat{F}(\tau, 0) d\tau.$$

Sinon si $n \neq 0$, par la méthode de variation des constantes, on cherche une solution de la forme :

$$\widehat{u}(t, n) = \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \lambda_{1,n}(t) + \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \lambda_{2,n}(t), \quad (\dagger)$$

pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_*^3$, avec $\lambda_{1,n}(0) = \lambda_{2,n}(0) = 0$ et qui de plus, vérifie :

$$\begin{cases} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \lambda'_{1,n}(t) + \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \lambda'_{2,n}(t) = 0, \\ -|n|^{\frac{\alpha}{2}} \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \lambda'_{1,n}(t) + |n|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \lambda'_{2,n}(t) = -\widehat{F}(t, n), \end{cases}$$

ou encore (sous forme matricielle),

$$\begin{pmatrix} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \\ -|n|^{\frac{\alpha}{2}} \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & |n|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_{1,n}(t) \\ \lambda'_{2,n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\widehat{F}(t, n) \end{pmatrix}$$

On peut alors, en utilisant la règle de Cramer, obtenir $\lambda'_{1,n}$ et $\lambda'_{2,n}$ comme suit :

$$\lambda'_{1,n}(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \\ -\widehat{F}(t, n) & |n|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \\ -|n|^{\frac{\alpha}{2}} \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & |n|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \end{vmatrix}} = \frac{\sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \widehat{F}(t, n)}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}}$$

et

$$\lambda'_{2,n}(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & 0 \\ -|n|^{\frac{\alpha}{2}} \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & -\widehat{F}(t, n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \\ -|n|^{\frac{\alpha}{2}} \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) & |n|^{\frac{\alpha}{2}} \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \end{vmatrix}} = -\frac{\cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \widehat{F}(t, n)}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

En intégrant par la suite ces deux expressions sur $[0, t]$, puis en les injectant dans la

5.1. Le problème linéaire

formule (‡), on trouve

$$\widehat{u}(t, n) = - \int_0^t \frac{-\cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \sin(\tau|n|^{\frac{\alpha}{2}}) + \sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}}) \cos(\tau|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{F}(\tau, n) d\tau.$$

Soit, par la formule :

$$\sin(A) \cos(B) - \sin(B) \cos(A) = \sin(A - B),$$

on conclut que

$$\widehat{u}(t, n) = - \int_0^t \frac{\sin((t - \tau)|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{F}(\tau, n) d\tau.$$

En appliquant la formule d'inversion de Fourier, donnée par la formule (3.1.19), on obtient finalement que la solution du problème non-homogène (1)'' est donnée par :

$$u(t, x) = -(2\pi)^{-3} \left(\int_0^t (t - \tau) \widehat{F}(\tau, 0) d\tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \int_0^t \frac{\sin((t - \tau)|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \widehat{F}(\tau, n) d\tau e^{in \cdot x} \right).$$

□

Notation. Dans le but d'alléger l'écriture et tout en restant cohérent avec la notation précédente, on notera la solution du problème non-homogène par :

$$u(t, x) := - \int_0^t \frac{\sin((t - \tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} (F(\tau)) d\tau.$$

On remarquera que cette solution vérifie pour tout $s > 0$ et $\alpha \geq 2$,

$$(5.1.3) \quad \left\| \int_0^t \frac{\sin((t - \tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} (F(\tau)) d\tau \right\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3))} \lesssim \|F\|_{L^1([0, T], H^{s - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}.$$

En remplaçant la fonction F par u^3 , le terme non-linéaire cubique de l'équation du problème (4.1.1), on déduit que

$$u(t, x) = S(t)(u_0, u_1) - \int_0^t \frac{\sin((t - \tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} (u^3(\tau)) d\tau,$$

(où $S(t)(u_0, u_1) = \cos(tD^{\frac{\alpha}{2}})(u_0) + \frac{\sin(tD^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}}(u_1)$) est solution du problème (4.1.1).

5.2. Preuve du théorème 4.1.3

Proposition 5.1.4 (Les Inégalités de Strichartz [7]). *Soit $\alpha \in]0, 3[$. Si $\alpha \in [2, 3[$, alors il existe $c > 0$ tel que pour tout couple (p, q) admissible et pour tout $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ avec $s \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{1}{p}$, on a :*

$$\|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq c \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right),$$

et

$$\left\| \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} (F(\tau)) d\tau \right\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq c \|F\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}.$$

Si $\alpha \in]0, 2[$, alors

$$\|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq c \left(\|u_0\|_{H^{s-\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{2}-1)}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{2}-1)}(\mathbb{T}^3)} \right),$$

et

$$\left\| \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} (F(\tau)) d\tau \right\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq c \|F\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{2}-1)}(\mathbb{T}^3))}.$$

Remarque 5.1.5. *On remarquera que dans le cas $\alpha \in [2, 3[$, nous avons une perte de dérivées.*

5.2 Preuve du théorème 4.1.3

Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$ et $(u_0, u_1) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ telles que

$$(5.2.1) \quad \|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \Lambda, \quad \Lambda \geq 1.$$

On pose :

$$X_T \equiv C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3)),$$

où $T = T(\Lambda)$ et (p, q) -admissible qui vérifie :

$$(5.2.2) \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{\alpha}{2p} = \frac{\alpha}{2}.$$

On muni cet espace de la norme :

$$\|u\|_{X_T} := \|u\|_{L^\infty([0, T], H^{\alpha/2}(\mathbb{T}^3))} + \|u\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))}.$$

5.2. Preuve du théorème 4.1.3

On définit :

$$B_{X_T} \equiv \{u \in X_T : \|u\|_{X_T} \leq 2C\Lambda\}.$$

Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $T = (c\Lambda^{-2})^\delta$, $c \ll 1$, l'application

$$\Phi_{u_0, u_1}(u) = S(t)(u_0, u_1) - \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}}(u^3(\tau)) d\tau,$$

est une contraction dans B_{X_T} .

On considère le cas $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$. D'après l'inégalité de Strichartz, si un couple admissible (p, q) satisfait (5.2.2) alors

$$(5.2.3) \quad \|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq C \left(\|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right).$$

En particulier, le couple $(p, q) = (\frac{\alpha}{2-\alpha}, 6)$ vérifie (5.2.2). Donc,

$$(5.2.4) \quad \|S(t)(u_0, u_1)\|_{X_T} \leq C \left(\|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right).$$

Une autre application de Strichartz (la non-homogène) donne :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T \frac{\sin((T-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}}(u^3(\tau)) d\tau \right\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} &\leq c \|u^3\|_{L^1([0, T], L^2(\mathbb{T}^3))} \\ &\leq c \|u\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3. \end{aligned}$$

Ensuite, à l'aide de l'inégalité de Hölder, avec $p = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, on obtient :

$$(5.2.5) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 &\leq T^{(1-\frac{3}{p})} \left(\int_0^T \|u\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{\frac{3p}{3}} d\tau \right)^{\frac{3}{p}} \\ &= T^{(1-\frac{3}{p})} \|u\|_{L^p([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3. \end{aligned}$$

On observera que l'inégalité (5.2.5) est vraie pour tout $p > 3$ autrement dit, il faudrait avoir $\frac{\alpha}{2-\alpha} > 3$, soit $\alpha > \frac{3}{2}$, ce qui est en accord avec l'hypothèse.

On déduit finalement, de la relation (5.2.5), que

$$(5.2.6) \quad \begin{aligned} \left\| \int_0^T \frac{\sin((T-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}}(u^3(\tau)) d\tau \right\|_{X_T} &\leq c T^{(1-\frac{3}{p})} \|u\|_{L^p([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 \\ &\leq c T^{(1-\frac{3}{p})} \|u\|_{X_T}^3. \end{aligned}$$

5.2. Preuve du théorème 4.1.3

Par conséquence, de (5.2.4) et (5.2.6), on a :

$$(5.2.7) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T} \leq C \left(\|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + T^{(1-\frac{3}{p})} \|u\|_{X_T}^3 \right).$$

On peut voir qu'il suffit de choisir

$$T^{(1-\frac{3}{p})} = c\Lambda^{-2} \iff T = (c\Lambda^{-2})^{\frac{p}{p-3}}, \quad c \ll 1,$$

(avec $c \leq \frac{1}{8C^2}$) pour que l'application Φ_{u_0, u_1} envoie B_{X_T} dans B_{X_T} .

De plus, on sait que pour tout (u, \tilde{u}) , on a :

$$(5.2.8) \quad |u^3 - \tilde{u}^3| \leq c |u - \tilde{u}| (|u|^2 + |\tilde{u}|^2).$$

Alors, d'après les inégalités (5.2.7) et (5.2.8), on a pour $(u, \tilde{u}) \in B_{X_T}$,

$$(5.2.9) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T} \leq C T^{(1-\frac{3}{p})} (\|u\|_{X_T}^2 + \|\tilde{u}\|_{X_T}^2) \|u - \tilde{u}\|_{X_T}.$$

Autrement dit, par notre choix de T on obtient,

$$\|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T} \leq \frac{1}{2} \|u - \tilde{u}\|_{X_T}, \quad u, \tilde{u} \in B_{X_T}.$$

En conséquence, l'application Φ_{u_0, u_1} est une application $\frac{1}{2}$ -contractante de B_{X_T} dont le point fixe définit la solution unique sur $[0, T]$. L'unicité étant donnée par la relation (5.2.9). En effet, soient $u, v \in C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))$ avec $(p, q) = (\frac{\alpha}{2-\alpha}, 6)$, deux solutions de (4.1.1). Comme l'unicité est une propriété locale et d'après (5.2.9), pour $T = (c\Lambda^{-2})^{\frac{p}{p-3}}$ et $c \ll 1$, on a

$$\|u - v\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \leq c \|u - v\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}, \quad c \ll 1;$$

d'où l'unicité.

On considère maintenant $\alpha \in [2, 3[$. Dans ce cas nous n'aurons pas besoin des estimées de Strichartz. Par les inégalités (5.1.2) et (5.1.3), on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \leq C \left(\|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^T \|u^3(\tau)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\tau \right).$$

5.2. Preuve du théorème 4.1.3

En majorant le dernier terme du membre de droite comme suit :

$$(5.2.10) \quad \int_0^T \|u^3(\tau)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\tau \leq cT \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3.$$

Puis, en utilisant l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \subset H^1 \subset L^6$ avec $\alpha \geq 2$, on obtient :

$$(5.2.11) \quad \|u(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \leq c\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^3 \leq c\|u(t)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^3.$$

En combinant les inégalités (5.2.10) et (5.2.11), on conclut que

$$(5.2.12) \quad \begin{aligned} \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T} &\leq C \left(\|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + T\|u\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}^3 \right) \\ &\leq C \left(\|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + T\|u\|_{X_T}^3 \right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir

$$T = c\Lambda^{-2}$$

avec $c = \frac{1}{8C^2}$ pour que l'application Φ_{u_0, u_1} envoie B_{X_T} dans B_{X_T} . De plus, d'après les inégalités (5.2.8) et (5.2.12) pour $(u, \tilde{u}) \in B_{X_T}$,

$$(5.2.13) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T} \leq CT (\|u\|_{X_T}^2 + \|\tilde{u}\|_{X_T}^2) \|u - \tilde{u}\|_{X_T}.$$

Alors, par notre choix de T , on obtient

$$\|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T} \leq \frac{1}{2} \|u - \tilde{u}\|_{X_T}, \quad u, \tilde{u} \in B_{X_T}.$$

On conclut que l'application Φ_{u_0, u_1} est une contraction sur B_{X_T} dont le point fixe est l'unique solution de (4.1.1) sur $[0, T]$. L'unicité étant démontrée comme dans le premier cas.

On remarquera que dans le cas $\alpha \in [2, 3[$ la solution u est unique dans un espace plus grand : $C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))$.

Si de plus, $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$ avec $s \geq \frac{\alpha}{2}$ l'existence et la régularité de solution du problème (4.1.1) est démontrée de manière identique (par le théorème du point fixe) sur un temps de taille $(1 + \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}})^{-\delta}$. Tout l'enjeu réside dans le fait de montrer que la régularité est préservée sur un intervalle de temps (plus grand) de taille $(1 + \|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}} + \|u_1\|_{L^2})^{-\delta'}$.

5.2. Preuve du théorème 4.1.3

Soit $s \geq \frac{\alpha}{2}$, on définit l'espace X_T^s par :

$$X_T^s \equiv C([0, T], H^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^{p'}([0, T], L^{q'}(\mathbb{T}^3))$$

avec (p', q') un couple admissible qui vérifie (5.2.2). On le muni de la norme

$$\|u\|_{X_T^s} := \|u\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3))} + \|u\|_{L^{p'}([0, T], L^{q'}(\mathbb{T}^3))}.$$

Soit $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$. Alors, à l'aide des estimées de Strichartz, on écrit que

$$(5.2.14) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u^3\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \right).$$

En appliquant l'inégalité de Kato-Ponce pour $s \geq \frac{\alpha}{2}$, on a :

$$(5.2.15) \quad \begin{aligned} \|u^3(t)\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} &= \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u^3(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C_s \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u(t))\|_{L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{T}^3)} \|u^2(t)\|_{L^{\frac{6}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C_s \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u(t))\|_{L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{6}{3-\alpha}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u^3(t)\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} &\leq C_s \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u(t))\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &= C_s \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a :

$$(5.2.16) \quad \begin{aligned} \|u^3\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}})} &\leq C_s \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|u\|_{L^2([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 \\ &= C_s \|u\|_{X_T^s} \|u\|_{L^2([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $(p', q') = (\frac{2\alpha}{6-3\alpha}, \frac{12}{\alpha})$, qui est un couple admissible et qui vérifie (5.2.2), on constate que l'on peut majorer le dernier terme de (5.2.16), en appliquant l'inégalité de Hölder comme ci-dessous :

$$(5.2.17) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 &\leq T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{L^{p'}([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 \\ &\leq T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{X_T}^2. \end{aligned}$$

On manquera pas de remarquer que l'inégalité (5.2.17) est vraie si et seulement si $p' > 2$,

5.2. Preuve du théorème 4.1.3

ce qui est équivalent à $\alpha > \frac{3}{2}$, ce qui est le cas. En conclusion, par (5.2.16) et (5.2.17), on obtient finalement que l'inégalité (5.2.14) est majorée par :

$$(5.2.18) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + C_s T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{X_T}^2 \|u\|_{X_T^s} \right).$$

De ce fait, par construction de la solution et d'après l'inégalité précédente, on observera qu'il suffit que

$$T \leq (c_s \Lambda^{-2})^{\frac{p}{p-2}}, \quad c_s \ll 1$$

pour que

$$\|u\|_{X_T^s} = \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right) + \frac{1}{2} \|u\|_{X_T^s}.$$

Soit,

$$\|u\|_{X_T^s} \leq 2C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right).$$

Ce qui complète la preuve de propagation de régularité pour le cas $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

On considère maintenant le cas $\alpha \in [2, 3[$. Par les propriétés de la solution libre (5.1.2) et (5.1.3), on sait que

$$(5.2.19) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u^3\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \right).$$

En appliquant l'inégalité de Kato-Ponce sur le dernier terme de la précédente inégalité, on obtient

$$\|u^3(t)\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq C_s \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u(t))\|_{L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2.$$

Puis à l'aide des injections de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{6}{3-\alpha}}$ et $H^{\frac{\alpha}{2}} \subset H^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{4}} \hookrightarrow L^{\frac{12}{\alpha}}$, pour $\alpha \geq 2$, on a :

$$(5.2.20) \quad \|u^3(t)\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq C_s \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2.$$

Il s'en suit

$$(5.2.21) \quad \begin{aligned} \|u^3\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} &\leq C_s T \|u\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3))} \|u\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}^2 \\ &\leq C_s T \|u\|_{X_T^s} \|u\|_{X_T}^2. \end{aligned}$$

5.3. Preuve du théorème 4.1.5

D'après l'inégalité (5.2.21), l'inégalité (5.4.8) se réécrit

$$\|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + C_s T \|u\|_{X_T^s} \|u\|_{X_T^s}^2 \right).$$

En conclusion, pour $T \leq c_s \Lambda^{-2}$ et c_s assez petit, on a :

$$\|u\|_{X_T^s} = \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right) + \frac{1}{2} \|u\|_{X_T^s}.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 4.1.3.

5.3 Preuve du théorème 4.1.5

Dans cette section nous allons montrer que la solution locale du problème (4.1.1), donnée par la section précédente, est en fait une solution globale. Pour cela, nous aurons recours à des lois de conservation de l'énergie. Plus précisément, nous allons utiliser le fait que le temps d'existence locale ne dépend que d'une borne sur l'énergie.

Démonstration. D'après le théorème 4.1.3, on sait que le problème (4.1.1) possède une unique solution sur $[0, T]$. Reste à montrer que cette solution est prolongeable en temps sur tout \mathbb{R} . La preuve de ce dernier point consiste à démontrer que pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$(5.3.1) \quad \int_{\mathbb{T}^3} \left(|\partial_t u|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u|^2 + \frac{1}{2} u^4 \right) dx = \int_{\mathbb{T}^3} \left(|u_1|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u_0|^2 + \frac{1}{2} u_0^4 \right) dx$$

et

$$(5.3.2) \quad \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|u(t)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq C \left(1 + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2 \right).$$

Soit $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de solutions du problème (4.1.1) associées aux données initiales $(u_{0,n}, u_{1,n}) \in H^{10}(\mathbb{T}^3) \times H^9(\mathbb{T}^3)$ qui vérifient

$$\|(u_{0,n}, u_{1,n}) - (u_0, u_1)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

et

$$\|u_{0,n}\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_{1,n}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

5.3. Preuve du théorème 4.1.5

On considère l'équation

$$(5.3.3) \quad (\partial_t^2 + D^\alpha)u_n + u_n^3 = 0$$

que l'on multiplie par $(\partial_t u_n)$ pour avoir

$$(5.3.4) \quad \partial_t^2 u_n \cdot \partial_t u_n + D^\alpha u_n \cdot \partial_t u_n + u_n^3 \cdot \partial_t u_n = 0.$$

Puis, on intègre cette dernière par rapport à la variable d'espace sur \mathbb{T}^3 . On remarquera que le premier terme et le dernier terme de (5.3.4) après intégration valent

$$(5.3.5) \quad \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t^2 u_n \cdot \partial_t u_n \, dx = \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}^3} |\partial_t u_n|^2 \, dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}^3} u_n^3 \cdot \partial_t u_n \, dx = \frac{1}{4} \partial_t \int_{\mathbb{T}^3} u_n^4 \, dx.$$

Le second terme de (5.3.4) après intégration est plus délicat. D'abord, on écrit que

$$\int_{\mathbb{T}^3} D^\alpha u_n \cdot \partial_t u_n \, dx = \int_{\mathbb{T}^3} D^\alpha u_n \cdot \overline{\partial_t u_n} \, dx.$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Parseval (3.1.18), on obtient

$$\int_{\mathbb{T}^3} D^\alpha u_n \cdot \overline{\partial_t u_n} \, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{D^\alpha u_n} \cdot \overline{\widehat{\partial_t u_n}}.$$

D'autre part, nous avons vu que $\widehat{D^\alpha u}(n) = |n|^\alpha \widehat{u}(n)$, il s'en suit alors que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{D^\alpha u_n} \cdot \overline{\widehat{\partial_t u_n}} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^\alpha \widehat{u}(n) \overline{\widehat{\partial_t u_n}(n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{u}(n) \overline{|n|^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{\partial_t u_n}(n)}, \end{aligned}$$

en utilisant, une seconde fois l'inégalité de Parseval (3.1.18), on retrouve

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{u}(n) \overline{|n|^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{\partial_t u_n}(n)} &= \int_{\mathbb{T}^3} D^{\frac{\alpha}{2}} u_n \cdot \overline{D^{\frac{\alpha}{2}} \partial_t u_n} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} D^{\frac{\alpha}{2}} u_n \cdot D^{\frac{\alpha}{2}} \partial_t u_n \, dx. \end{aligned}$$

5.3. Preuve du théorème 4.1.5

Finalement, il résulte que

$$\int_{\mathbb{T}^3} D^\alpha u_n \cdot \partial_t u_n dx = \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{T}^3} |D^{\frac{\alpha}{2}} u_n|^2 dx.$$

On obtient alors, par cette dernière relation ainsi que par (5.3.5) que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{T}^3} \left(|\partial_t u_n|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u_n|^2 + \frac{1}{2} u_n^4 \right) dx \right] = 0.$$

En intégrant une seconde fois l'équation (5.3.3), mais cette fois-ci par rapport à la variable de temps sur $[0, T]$, on retrouve l'identité (4.1.2) de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{T}^3} \left(|\partial_t u_n|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u_n|^2 + \frac{1}{2} u_n^4 \right) dx = \int_{\mathbb{T}^3} \left(|u_{1,n}|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u_{0,n}|^2 + \frac{1}{2} u_{0,n}^4 \right) dx.$$

Par dépendance continue, on peut, dans cette égalité, faire tendre n vers l'infini, en utilisant d'une part la continuité de la solution u_n donnée dans la section précédente et d'autre part, les hypothèses sur les données initiales $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$. On obtient alors la loi de conservation :

$$\int_{\mathbb{T}^3} \left(|\partial_t u|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u|^2 + \frac{1}{2} u^4 \right) dx = \int_{\mathbb{T}^3} \left(|u_1|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}} u_0|^2 + \frac{1}{2} u_0^4 \right) dx.$$

Pour montrer la seconde égalité (5.3.2), on utilise l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \subset H^{\frac{3}{4}} \hookrightarrow L^4$, puisque $\alpha > \frac{3}{2}$ et on écrit

$$\left(\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \leq C \left(1 + \left(\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2 + \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^4 \right) \right).$$

En conséquence, d'après la relation (5.3.1), on a :

$$\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2 \leq C \left(1 + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|u_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^4 \right).$$

Donc, $\|u(t)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}$ reste bornée pour tout $t \in [0, T]$, le domaine d'existence étant donné par le théorème 4.1.3. En ré-applicant le théorème 4.1.3 ainsi que les relations (5.3.1) et (5.3.2) sur $[T, 2T]$, on obtient alors une solution u du problème (4.1.1) sur $[0, 2T]$. En répétant ce processus sur tous les intervalles $[iT, (i+1)T]$ avec $i \in \mathbb{N}$, on parvient à prolonger la solution locale u donnée par le théorème 4.1.3 sur tout \mathbb{R}^+ et du fait que l'équation (4.1.1) soit réversible dans l'espace temporelle, on conclut à l'existence de

5.4. Preuve du théorème 4.1.6

solution globale sur tout \mathbb{R} . Similairement, par la propagation de régularité donnée par le théorème 4.1.3, on parvient à montrer la propagation de régularité globale en temps.

Ce qui conclut la preuve du théorème 4.1.5. \square

5.4 Preuve du théorème 4.1.6

Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$ et $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ telles que

$$(5.4.1) \quad \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq \Lambda, \quad \Lambda \geq 1.$$

On pose :

$$X_T^s \equiv C([0, T], H^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3)),$$

où $T = T(\Lambda)$ et (p, q) -admissible qui vérifie

$$(5.4.2) \quad \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{\alpha}{2p} = s, & \text{si } \alpha \in]\frac{3}{2}, 2[. \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{q} - \frac{1}{p} = s, & \text{si } \alpha \in [2, 3[. \end{cases}$$

On muni cet espace de la norme :

$$\|u\|_{X_T^s} := \|u\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3))} + \|u\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))}.$$

On définit

$$B_{X_T^s} \equiv \{u \in X_T^s : \|u\|_{X_T^s} \leq 2C\Lambda\}.$$

Montrons que pour $T = (c\Lambda^{-2})^\delta$, $c \ll 1$, l'application

$$\Phi_{u_0, u_1}(u) = S(t)(u_0, u_1) - \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}}(u^3(\tau)) d\tau,$$

est une contraction dans $B_{X_T^s}$.

On considère le cas $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$. D'après l'inégalité de Strichartz, si un couple (p, q) admissible vérifie (5.4.2) alors

$$\|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^p([0, T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right).$$

5.4. Preuve du théorème 4.1.6

En particulier, le couple $(p, q) = (\frac{2\alpha}{6-4s-\alpha}, \frac{12}{\alpha})$ est admissible et vérifie (5.4.2). Donc,

$$(5.4.3) \quad \|S(t)(u_0, u_1)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right).$$

Une autre application de Strichartz (la non-homogène) pour ce même couple donne :

$$\left\| \int_0^T \frac{\sin((T-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} (u^3(\tau)) d\tau \right\|_{L^p([0,T], L^q(\mathbb{T}^3))} \leq c \|u^3\|_{L^1([0,T], H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}.$$

En appliquant l'inégalité de Kato-Ponce ainsi que l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{6}{3-\alpha}}$, on a :

$$\begin{aligned} \|u^3(t)\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} &\leq C_s \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u(t))\|_{L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &\leq C_s \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(5.4.4) \quad \|u^3\|_{L^1([0,T], H^{s-\frac{\alpha}{2}})} \leq C_s \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|u\|_{L^2([0,T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, avec $(p, q) = (\frac{2\alpha}{6-4s-\alpha}, \frac{12}{\alpha})$ on obtient :

$$(5.4.5) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2([0,T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 &\leq T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{L^p([0,T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 \\ &\leq T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{X_T^s}^2. \end{aligned}$$

On remarquera que l'inégalité (5.4.5) est vraie si et seulement si $p > 2$, autrement dit si et seulement si $s > \frac{3-\alpha}{2}$, ce qui est le cas. En conclusion, par (5.4.4) et (5.4.5), on obtient finalement que

$$(5.4.6) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + C_s T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{X_T^s}^3 \right).$$

On peut voir qu'il suffit de choisir

$$T^{(1-\frac{2}{p})} = c_s \Lambda^{-2} \iff T = (c_s \Lambda^{-2})^{\frac{p}{p-2}}, \quad c_s \ll 1,$$

pour que l'application Φ_{u_0, u_1} envoie $B_{X_T^s}$ dans $B_{X_T^s}$. De plus, d'après l'inégalité (5.4.6) et

5.4. Preuve du théorème 4.1.6

par (5.2.8), on a pour $(u, \tilde{u}) \in B_{X_T^s}$,

$$(5.4.7) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T^s} \leq C T^{(1-\frac{2}{p})} \left(\|u\|_{X_T}^2 + \|\tilde{u}\|_{X_T^s}^2 \right) \|u - \tilde{u}\|_{X_T^s}.$$

Autrement dit, par notre choix de T , on obtient :

$$\|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T^s} \leq \frac{1}{2} \|u - \tilde{u}\|_{X_T^s}, \quad u, \tilde{u} \in B_{X_T^s}.$$

En conséquence, l'application Φ_{u_0, u_1} est une application $\frac{1}{2}$ -contractante de $B_{X_T^s}$ dont le point fixe définit la solution unique sur $[0, T]$. L'unicité étant donnée par la relation (5.4.7).

On considère maintenant le cas $\alpha \in [2, 3[$. Par les propriétés de la solution libre, (5.1.2) et (5.1.3), ainsi que les inégalités de Strichartz, on sait que :

$$(5.4.8) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|u^3\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \right).$$

En appliquant l'inégalité de Kato-Ponce ainsi l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{6}{3-\alpha}}$, on a :

$$\begin{aligned} \|u^3(t)\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} &\leq C_s \|D^{s-\frac{\alpha}{2}}(u(t))\|_{L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2 \\ &\leq C_s \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \|u(t)\|_{L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(5.4.9) \quad \|u^3\|_{L^1([0, T], H^{s-\frac{\alpha}{2}})} \leq C_s \|u\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3))} \|u\|_{L^2([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, avec $(p, q) = (\frac{4}{6-4s-\alpha}, \frac{12}{\alpha})$, on obtient

$$(5.4.10) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 &\leq T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{L^p([0, T], L^{\frac{12}{\alpha}}(\mathbb{T}^3))}^2 \\ &\leq T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{X_T^s}^2. \end{aligned}$$

On remarquera que l'inégalité (5.4.10) est vraie si $p > 2$ ce qui est équivalent à $s > 1 - \frac{\alpha}{4}$, c'est pourquoi, dans le cas $\alpha \geq 2$, on n'arrive pas à descendre s jusqu'à la borne $\frac{3-\alpha}{2}$.

En conclusion, par (5.4.9) et (5.4.10), on obtient finalement :

$$(5.4.11) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u)\|_{X_T^s} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + C_s T^{(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{X_T^s}^3 \right).$$

5.4. Preuve du théorème 4.1.6

On peut voir qu'il suffit de choisir

$$T^{(1-\frac{2}{p})} = c_s \Lambda^{-2} \iff T = (c_s \Lambda^{-2})^{\frac{p}{p-2}}, \quad c_s \ll 1,$$

pour que l'application Φ_{u_0, u_1} envoie $B_{X_T^s}$ dans $B_{X_T^s}$. De plus, d'après l'inégalité (5.4.11) et par (5.2.8), on a pour $(u, \tilde{u}) \in B_{X_T^s}$,

$$(5.4.12) \quad \|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T^s} \leq C T^{(1-\frac{2}{p})} \left(\|u\|_{X_T}^2 + \|\tilde{u}\|_{X_T^s}^2 \right) \|u - \tilde{u}\|_{X_T^s}.$$

Autrement dit, par notre choix de T , on obtient :

$$\|\Phi_{u_0, u_1}(u) - \Phi_{u_0, u_1}(\tilde{u})\|_{X_T^s} \leq \frac{1}{2} \|u - \tilde{u}\|_{X_T^s}, \quad u, \tilde{u} \in B_{X_T^s}.$$

En conséquence, l'application Φ_{u_0, u_1} est une application $\frac{1}{2}$ -contractante de $B_{X_T^s}$ dont le point fixe définit la solution unique sur $[0, T]$. L'unicité étant donnée par la relation (5.4.12).

Ce qui conclut la preuve du théorème 4.1.6.

6. Problème fractionnaire sur

$$H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}, s < s_c$$

Dans ce chapitre on démontre que le problème (4.1.1) est mal posé au sens de Hadamard dans l'espace fonctionnel $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$, où $s \in]0, \frac{3-\alpha}{2}[$ et $\alpha \in]0, 3[$. La méthode utilisée pour démontrer ce résultat s'inspire de celle utilisée dans les travaux de N. Burq et N. Tzvetkov. Les références utilisées dans ce chapitre sont [16, 12, 5, 4, 17].

Cette méthode consiste à démontrer que l'application, qui à toutes données initiales associe une solution, n'est pas continue de $H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$ dans $C([0, T], H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}})$, pour tout $T > 0$ et $0 < s < \frac{3-\alpha}{2}$. Cette discontinuité provient d'une propriété similaire à l'équation différentielle ordinaire obtenue en négligeant la dispersion D^α dans l'équation (4.1.1).

La difficulté principale est de démontrer que la dynamique de l'ODE et de la vraie solution (de l'équation (4.1.1)) restent proches sur des intervalles de temps suffisamment longs. La comparaison entre les deux dynamiques se fait par une méthode d'énergie basique avec des poids bien choisis. Un argument de bootstrap est essentiel dans l'analyse.

6.1 Lemmes et propositions

On considère le problème non linéaire associé au problème (4.1.1) où l'on a ignoré le terme linéaire de dispersion D^α ,

$$(6.1.1) \quad (\partial_t^2 v_n + v_n^3)(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3.$$

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, supportée dans $\{|x| < 1/4\}$. En identifiant \mathbb{T}^3 avec $[-\pi, \pi]^3$ on peut voir φ comme une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{T}^3 .

6.1. Lemmes et propositions

Lemme 6.1.1. *On considère le problème*

$$(6.1.2) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 v_n + v_n^3)(t, x) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3, \\ (v_n, \partial_t v_n)(0, x) = (\kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \varphi(nx), 0) & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec $\kappa_n = [\log(n)]^{-\delta_1}$, $\delta_1 > 0$. Alors, pour V une fonction périodique régulière solution de l'EDO

$$(6.1.3) \quad \begin{cases} V''(t) + V^3(t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ (V, V')(0) = (1, 0), \end{cases}$$

on a

$$v_n(t, x) = \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \varphi(nx) V(t \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \varphi(nx)), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$$

est une solution du problème (6.1.2).

Démonstration. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local, l'équation différentielle ordinaire (6.1.3) possède une unique solution locale régulière. Montrons qu'elle est globale.

On commence par multiplier l'équation (6.1.3) par V' :

$$V'' \cdot V' + V^3 \cdot V' = 0.$$

On observe alors que cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\left(\frac{1}{2}(V')^2\right)' + \left(\frac{1}{4}V^4\right)' = 0.$$

En intégrant cette équation sur $[0, t]$, on obtient :

$$(6.1.4) \quad \frac{1}{2} (V'(t))^2 + \frac{1}{4} V^4(t) = \frac{1}{4}.$$

D'après (6.1.4), on peut dire que le couple (V', V) ne peut pas tendre vers l'infini pour tout t fini. Autrement dit, la solution du problème (6.1.3) est globale. Montrons que cette solution est périodique.

Tout d'abord, on observera que $|V(t)| \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après l'équation (6.1.4). Autrement dit, $t = 0$ est un maximum local de $V(t)$ et pour tout $t_0 > 0$ on a $V'(t_0) \leq 0$. Nous affirmons qu'il existe $t_0 > 0$ tels que $V'(t_0) = 0$. En effet, si $V'(t) \leq 0$ pour $t > 0$,

6.1. Lemmes et propositions

alors d'après (6.1.4), on a :

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = -\sqrt{\frac{1 - |V(t)|^4}{2}},$$

soit encore,

$$dt = -\sqrt{\frac{2}{1 - |V(t)|^4}} dV.$$

En intégrant cette dernière relation entre 0 et $t_0 > 0$, on obtient

$$t_0 = \int_{V(t_0)}^{V(0)} \sqrt{\frac{2}{1 - |v|^4}} dv \leq \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2}{1 - |v|^4}} dv.$$

Ce qui n'est pas vrai pour $t_0 \gg 1$ (t_0 n'étant pas fixe). En conclusion, il existe $t_0 > 0$ tel que $V'(t) = 0$ et comme $V(t)$ est bornée par 1, d'après (6.1.4) on déduit que $V(t_0) = -1$ est un minimum local de V . Par la suite, on peut montrer de façon identique (par contradiction) qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $V'(t_1) = 0$ et $V(t_1) = 1$. Puis, par unicité de solution, donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut conclure que la fonction V est périodique de période t_1 .

Ce qui conclut la preuve du lemme 6.1.1. □

Lemme 6.1.2. *Soit $0 < \delta_1 < \delta_2$ à fixées. On pose*

$$t_n = [\log(n)]^{\delta_2} n^{-(\frac{3}{2}-s)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour tout $t \in [0, t_n]$, on a les inégalités suivantes :

$$(6.1.5) \quad \forall \sigma \geq 0, \quad \|v_n(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq C \kappa_n \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^\sigma n^{\sigma-s}.$$

$$(6.1.6) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla^k v_n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq C \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s+k} [\log(n)]^{k\delta_2}.$$

$$(6.1.7) \quad \exists n_0 \gg 1, \quad \|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \geq C \kappa_n \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^s, \quad \forall n \geq n_0.$$

Démonstration. Pour n assez grand, on a

$$(6.1.8) \quad \|\phi(n \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} = \|\phi(n \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas s fractionnaire, il est possible d'avoir le même résultat en utilisant la définition

6.1. Lemmes et propositions

de H^s par différence finie.

On considèrera alors deux cas pour la démonstration de l'inégalité (6.1.5), le cas σ entier positif et le cas σ fractionnaire.

Soit $\sigma \in \mathbb{N}$ et $n \gg 1$. Par définition de la norme H^s et en utilisant certaines propriétés de la transformée de Fourier, on écrit que

$$\begin{aligned} \|\phi(n \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)}^2 &= \|\phi(n \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |m|^2)^\sigma |\widehat{\phi}(nx)(m)|^2 dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |m|^2)^\sigma |n^{-3} \widehat{\phi}\left(\frac{m}{n}\right)|^2 dm. \end{aligned}$$

Par un changement de variable ($m/n \mapsto m$), on obtient finalement que

$$\begin{aligned} \|\phi(n \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)}^2 &= n^3 n^{-2 \times 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |nm|^2)^\sigma |\widehat{\phi}(m)|^2 dm \\ &\leq n^{2(\sigma - \frac{3}{2})} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |m|^2)^\sigma |\widehat{\phi}(m)|^2 dm \\ &= n^{2(\sigma - \frac{3}{2})} \|\phi\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Autrement dit, d'après (6.1.8), on a :

$$(6.1.9) \quad \|\phi(n \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq n^{\sigma - \frac{3}{2}} \|\phi(\cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{N}, n \gg 1.$$

On considère maintenant

$$v_n(t, x) = \kappa_n n^{\frac{3}{2} - s} \varphi(nx) V(t \kappa_n n^{\frac{3}{2} - s} \varphi(nx)).$$

Alors, en notant $g(x) = t \kappa_n n^{\frac{3}{2} - s} \varphi(x)$, d'après (6.1.9) on a

$$(6.1.10) \quad \|v_n(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq \kappa_n n^{\frac{3}{2} - s} n^{\sigma - \frac{3}{2}} \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)}.$$

Montrons que

$$\|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq C \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2} - s} \right)^\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathbb{N}.$$

6.1. Lemmes et propositions

En utilisant la définition des normes des espaces de Sobolev à exposant entier suivante :

$$(6.1.11) \quad \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \approx \sum_{|\alpha| \leq \sigma} \|\partial^\alpha(\varphi \times V \circ g)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

ainsi que la formule de Leibniz pour la dérivée du produit ci-dessous :

$$(6.1.12) \quad \partial^\alpha(\varphi \times V \circ g) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha, \beta} \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta}(V \circ g).$$

Mais aussi, la formule de Fàa di Bruno, pour la dérivée de la composée, qui suit :

$$(6.1.13) \quad \begin{aligned} \partial^{\alpha-\beta}(V \circ g)(x) &= \sum_{(*)} C_{k, \alpha-\beta} V^{|k|}(g(x)) \cdot (\partial^{\gamma_1} g)^{k_1} \times \dots \times (\partial^{\gamma_{\alpha-\beta}} g)^{k_{\alpha-\beta}} \\ &= \sum_{(*)} C_{k, \alpha-\beta} V^{|k|}(g(x)) \left(t \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^{\sum_{i=1}^{|\alpha-\beta|} |\gamma_i| k_i} (\partial^{\gamma_1} \varphi)^{k_1} \times \dots \times (\partial^{\gamma_{\alpha-\beta}} \varphi)^{k_{\alpha-\beta}} \end{aligned}$$

où la somme (*) se fait sur $k = k_1, \dots, k_{|\alpha-\beta|}$ tel que $\sum_{i=1}^{|\alpha-\beta|} |\gamma_i| k_i = |\alpha - \beta|$ et $\gamma_i \in \mathbb{R}^3$. En combinant les trois formules (6.1.11) (6.1.12) et (6.1.13), puis en majorant le résultat comme suit :

$$(6.1.14) \quad \begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq \sigma} \|\partial^\alpha(\varphi \times V \circ g)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq C \sum_{|\alpha| \leq \sigma} \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{(*)} \left(t \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^{\sum_{i=1}^{|\alpha-\beta|} |\gamma_i| k_i} \times \\ &\quad \|\partial^\beta \varphi \times V^{|k|}(g(x)) \cdot (\partial^{\gamma_1} \varphi)^{k_1} \times (\partial^{\gamma_{\alpha-\beta}} \varphi)^{k_{\alpha-\beta}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C \left(t \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^\sigma, \quad n \gg 1. \end{aligned}$$

On conclut à l'aide de l'inégalité (6.1.10) ainsi que (6.1.14) que l'on a :

$$\|v_n(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq C \kappa_n n^{\sigma-s} \left(t \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{N}, n \gg 1.$$

Soit maintenant $\sigma \notin \mathbb{N}$ positif. Alors, par interpolation, il existe $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 1[$ tels que $\sigma = \theta \sigma_1 + (1 - \theta) \sigma_2$ et

$$(6.1.15) \quad \|v_n(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq \|v_n(t, \cdot)\|_{H^{\sigma_1}(\mathbb{T}^3)}^\theta \|v_n(t, \cdot)\|_{H^{\sigma_2}(\mathbb{T}^3)}^{1-\theta}.$$

6.1. Lemmes et propositions

D'autre part, par l'inégalité (6.1.9) on sait que

$$\|v_n(t, \cdot)\|_{H^{\sigma_1}(\mathbb{T}^3)}^\theta \leq \kappa_n^\theta n^{\theta(\sigma-s)} \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^{\sigma_1}(\mathbb{T}^3)}^\theta,$$

et

$$\|v_n(t, \cdot)\|_{H^{\sigma_2}(\mathbb{T}^3)}^{(1-\theta)} \leq \kappa_n^{(1-\theta)} n^{(1-\theta)(\sigma-s)} \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^{\sigma_2}(\mathbb{T}^3)}^{1-\theta}.$$

Alors,

$$(6.1.16) \quad \|v_n(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq \kappa_n n^{(\sigma-s)} \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^{\sigma_1}(\mathbb{T}^3)}^\theta \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^{\sigma_2}(\mathbb{T}^3)}^{1-\theta}.$$

Or, d'après la première partie, on sait que pour $\sigma \in \mathbb{N}$ on a :

$$(6.1.17) \quad \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^{\sigma_1}(\mathbb{T}^3)} \leq C \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^{\sigma_1},$$

et

$$(6.1.18) \quad \|(\varphi \times V \circ g)(x)\|_{H^{\sigma_2}(\mathbb{T}^3)} \leq C \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^{\sigma_2}.$$

En conséquence, d'après (6.1.16), (6.1.17) et (6.1.18), on retrouve l'estimation recherchée :

$$\|v_n(t, \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)} \leq C \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} n^{\sigma-\frac{3}{2}} \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^\sigma.$$

La preuve de l'estimation (6.1.6) est très similaire à la précédente. Par l'inégalité (6.1.9), on écrit que :

$$|\partial^k v_n(t, \cdot)| \leq C \kappa_n n^{(\frac{3}{2}-s)} n^k |\partial^k(\varphi \times V \circ g)(x)|.$$

Ensuite, par la formule de Leibniz (6.1.12) ainsi que la formule de Fàa di Bruno (6.1.13), on sait que :

$$|\partial^k(\varphi \times V \circ g)(x)| \leq \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^k.$$

Autrement dit, en remplaçant t_n par sa valeur, on obtient l'estimation (6.1.6), soit

$$|\partial^k v_n(t, \cdot)| \leq C \kappa_n^{k+1} n^{(\frac{3}{2}-s+k)} [\log(n)]^{k\delta_2}.$$

Pour démontrer l'estimation (6.1.7) nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.1.3. *Soient V et ϕ deux fonctions régulières non nulles où V est périodique et*

6.1. Lemmes et propositions

ϕ à support compacte dans \mathbb{R}^d . Alors

$$\exists c > 0, \quad \exists \lambda_0 \geq 1 \quad \text{tel que} \quad \forall \lambda > \lambda_0 \quad \|\phi(x)V(\lambda\phi(x))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq c.$$

Démonstration. Comme V est une fonction périodique, par exemple de période $2\pi L$ avec $L > 0$, elle admet une décomposition en série de Fourier,

$$V(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{it \frac{n}{L}},$$

où les coefficients v_n sont à décroissance rapide ($|v_n| \leq C_N(1+n)^{-N}$).

D'après l'hypothèse, il existe une boule ouverte B de \mathbb{R}^d et une constante $c_0 > 0$ tel que $|\partial_{x_1}\phi| \geq c_0$ sur B . Soit $\psi \in C_0^\infty(B)$ une fonction non nulle tel que $0 \leq \psi \leq 1$. Alors, on peut écrire que

$$\|\phi(x)V(\lambda\phi(x))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \geq \|\psi(x)\phi(x)V(\lambda\phi(x))\|_{L^2(B)}^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\phi(x)V(\lambda\phi(x))\|_{L^2(B)}^2 &= \int_B |\psi(x)\phi(x)|^2 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{i\lambda \frac{n}{L} \phi(x)} \right|^2 dx \\ &= \int_B |\psi(x)\phi(x)|^2 \left(\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} v_{n_1} e^{i\lambda \frac{n_1}{L} \phi(x)} \right) \left(\sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \overline{v_{n_2}} e^{-i\lambda \frac{n_2}{L} \phi(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\phi(x)V(\lambda\phi(x))\|_{L^2(B)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_B |\psi(x)\phi(x)|^2 |v_n|^2 dx + \\ &\quad \int_B |\psi(x)\phi(x)|^2 \sum_{n_1 \neq n_2} v_{n_1} \overline{v_{n_2}} e^{i\lambda \frac{n_1 - n_2}{L} \phi(x)} dx. \end{aligned}$$

Il est clair que le premier terme du membre de droite est strictement positif et indépendant de λ . Sachant que :

$$e^{i\lambda \frac{n_1 - n_2}{L} \phi(x)} = \frac{L}{i\lambda(n_1 - n_2)} \frac{1}{\partial_{x_1}\phi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(e^{i\lambda \frac{n_1 - n_2}{L} \phi(x)} \right),$$

6.1. Lemmes et propositions

on peut, par intégration par partie, majorer le second terme du membre de droite de l'égalité précédente, noté I_2 , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |I_2| &\lesssim \sum_{n_1 \neq n_2} |v_{n_1}| |\overline{v_{n_2}}| \frac{L}{\lambda |n_1 - n_2| c_0} \int_B \left| \left(e^{i\lambda \frac{n_1 - n_2}{L} \phi(x)} \right) \partial_{x_1} \left((\psi(x)\phi(x))^2 \right) \right| dx \\ &\leq \sum_{n_1 \neq n_2} |v_{n_1}| |\overline{v_{n_2}}| \frac{L}{\lambda |n_1 - n_2| c_0} \int_B \left| \partial_{x_1} \left((\psi(x)\phi(x))^2 \right) \right| dx \leq C\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve du lemme 6.1.3. □

On peut, en appliquant le lemme précédent sur la dérivée de v_n , écrire que :

$$\|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{T}^3)} \geq C\kappa_n \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right) n^{(1-s)}.$$

Ensuite, à l'aide de l'interpolation suivante :

$$\|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{T}^3)} \leq \|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}^\theta \|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^2(\mathbb{T}^3)}^{(1-\theta)}$$

où $\theta = \frac{1}{2-s}$ et vérifie $\theta s + (1-\theta)2 = 1$, puis en utilisant l'inégalité (6.1.5), avec $\sigma = 2$, il vient que :

$$\kappa_n \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right) n^{(1-s)} \leq \|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}^\theta \kappa_n^{(1-\theta)} \left(t_n \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \right)^{2(1-\theta)} n^{(2-s)(1-\theta)}.$$

Par conséquent, après simplification, on a :

$$\|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}^\theta \geq C\kappa_n^{(s+1)\theta} [\log(n)]^{\theta s \delta_2}.$$

Enfin, en remplaçant κ_n par sa valeur, on obtient l'inégalité recherchée :

$$\|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \geq C[\log(n)]^{-\delta_1(s+1)+s\delta_2}.$$

□

Soit $(u_0, u_1) \in C^\infty(\mathbb{T}^3) \times C^\infty(\mathbb{T}^3)$. On considère le problème

$$(6.1.19) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 u_n + D^\alpha u_n + u_n^3)(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3. \\ (u_n, \partial_t u_n)(0, x) = (u_0(x) + \kappa_n n^{\frac{3}{2}-s} \varphi(nx), u_1(x)) & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

6.1. Lemmes et propositions

On considère l'énergie semi-classique :

$$E_n(u) \equiv n^{-(\frac{\alpha}{2}-s)} \left(\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + n^{-(\frac{\alpha}{2}+1-s)} \left(\|\partial_t u\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + n^{-(\frac{\alpha}{2}+2-s)} \left(\|\partial_t u\|_{H^2}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{H^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

On note :

$$e_n(u(t)) \equiv \sup_{0 \leq \tau \leq t} E_n(u(\tau)).$$

Dans de précédents travaux, sur l'équation des ondes cubiques ($\alpha = 2$), on retrouve cette définition d'énergie contenant seulement des termes de norme L^2 et de norme H^1 . Dans notre cas, une telle définition d'énergie n'est pas suffisante pour pouvoir avoir un contrôle sur les solutions de l'équation des ondes fractionnaires (et ses variantes). La nouvelle idée, dans ce document, a été d'ajouter un terme de plus, soit un degré de profondeur. Grâce à ce dernier terme, en norme H^2 , on retrouve le contrôle recherché sur les normes de la différence u_n et $(v_n + S(t)(u_0, u_1))$.

Proposition 6.1.4. *Soit $\alpha \in]0, 3[$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de solutions du problème (6.1.19), $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de solutions du problème (6.1.2) et $S(t)(u_0, u_1)$ la solution libre du problème (4.1.1). Alors, il existe $\epsilon > 0$, $\delta_2 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $n \gg 1$, on a :*

$$E_n \left(u_n(t) - v_n(t) - S(t)(u_0, u_1) \right) \leq C n^{-\epsilon}, \quad \forall t \in [0, t_n]$$

où $t_n = [\log(n)]^{\delta_2} n^{-(\frac{3}{2}-s)}$.

Démonstration. On note $S(t)(u_0, u_1) := S_{\{u_0, u_1\}}$. Sachant que u_n et v_n vérifient respectivement les problèmes (6.1.19) et (6.1.2), alors la différence $w_n = u_n - v_n - S_{\{u_0, u_1\}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + D^\alpha)w_n &= (\partial_t^2 + D^\alpha)u_n - (\partial_t^2 + D^\alpha)v_n - (\partial_t^2 + D^\alpha)S_{\{u_0, u_1\}} \\ &= -u_n^3 - \partial_t^2 v_n - D^\alpha v_n \\ &= -(w_n + v_n + S_{\{u_0, u_1\}})^3 + v_n^3 - D^\alpha v_n \\ &= -D^\alpha v_n - 3v_n^2(w_n + S_{\{u_0, u_1\}}) - 3v_n(w_n + S_{\{u_0, u_1\}})^2 - (w_n + S_{\{u_0, u_1\}})^3. \end{aligned}$$

6.1. Lemmes et propositions

On pose :

$$F = -D^\alpha v_n - 3v_n^2(w_n + S_{\{u_0, u_1\}}) - 3v_n(w_n + S_{\{u_0, u_1\}})^2 - (w_n + S_{\{u_0, u_1\}})^3.$$

Alors, w_n est solution du système :

$$(6.1.20) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)w_n(t, x) = F & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3, \\ (w_n, \partial_t w_n)(0, x) = (0, 0). \end{cases}$$

Afin de calculer l'énergie de w_n , on commence par multiplier l'équation du problème (6.1.20) par $\partial_t w_n$ puis, on considère son intégrale sur \mathbb{T}^3 pour avoir :

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t^2 w_n \cdot \partial_t w_n \, dx + \int_{\mathbb{T}^3} D^\alpha w_n \cdot \partial_t w_n \, dx = \int_{\mathbb{T}^3} F \cdot \partial_t w_n \, dx.$$

Ce qui revient à écrire :

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t w_n, \partial_t w_n) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t (D^{\frac{\alpha}{2}} w_n, D^{\frac{\alpha}{2}} w_n) \, dx = \int_{\mathbb{T}^3} F \cdot \partial_t w_n \, dx.$$

Ou encore

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right) = \int_{\mathbb{T}^3} F \cdot \partial_t w_n \, dx.$$

Ensuite, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on écrit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \leq \|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \cdot \|F\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Or, on remarquera que

$$\|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \left(\|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$(6.1.21) \quad \left| \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \|F\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

En répétant le même calcul mais cette fois-ci sur la dérivée de l'équation (6.1.20) par

6.1. Lemmes et propositions

rapport à la variable d'espace, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \leq \|\nabla \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \cdot \|\nabla F\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Une fois de plus, on remarquera que

$$\|\nabla \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \left(\|\nabla \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors,

$$(6.1.22) \quad \left| \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t w_n\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \|F\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}.$$

Enfin, on considère la seconde dérivée du problème (6.1.20) par rapport à la variable d'espace, que l'on multiplie par $\nabla^2 \partial_t w_n$, puis on intègre le résultat sur \mathbb{T}^3 pour obtenir à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla^2 \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla^2 D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \leq \|\nabla^2 F\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla^2 \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

On observera ensuite que,

$$\|\nabla^2 \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \left(\|\nabla^2 \partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\nabla^2 D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où,

$$(6.1.23) \quad \left| \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t w_n\|_{H^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{H^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \|F\|_{H^2(\mathbb{T}^3)}.$$

En combinant les relations (6.1.21), (6.1.22) et (6.1.23), on résulte que :

$$\left| \frac{d}{dt} (E_n(w_n)) \right| \leq n^{-(\frac{\alpha}{2}-s)} \|F\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + n^{-(\frac{\alpha}{2}+1-s)} \|F\|_{H^1(\mathbb{T}^3)} + n^{-(\frac{\alpha}{2}+2-s)} \|F\|_{H^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Par la suite, on pose :

$$(6.1.24) \quad F = -D^\alpha v_n + G_1(t) + G_2(t),$$

où

$$G_1(t) = -3v_n^2 S_{\{u_0, u_1\}} - 3v_n S_{\{u_0, u_1\}}^2 - S_{\{u_0, u_1\}}^3$$

6.1. Lemmes et propositions

et

$$G_2(t) = -3(v_n + S_{\{u_0, u_1\}})^2 w_n - 3(v_n + S_{\{u_0, u_1\}}) w_n^2 - w_n^3.$$

En outre, par la notation (6.1.24), on a

$$\left| \frac{d}{dt}(E_n(w_n)) \right| \leq \sum_{l=1}^3 n^{-(\frac{\alpha}{2} + (l-1) - s)} (\|D^\alpha v_n\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} + \|G_1(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} + \|G_2(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)}).$$

En utilisant l'inégalité (6.1.5) du lemme 6.1.2, on a :

$$\|D^\alpha v_n\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \leq C [\log(n)]^{(\alpha + (l-1))\delta_2} n^{(\alpha + (l-1) - s)}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Autrement dit, pour $l = 1, 2, 3$,

$$(6.1.25) \quad n^{-(\frac{\alpha}{2} + (l-1) - s)} \|D^\alpha v_n\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \leq C \log(n)^{(\alpha + (l-1))\delta_2} n^{\frac{\alpha}{2}} \leq C \log(n)^{(\alpha+2)\delta_2} n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

D'autre part, pour tout $r > 0$ et $f, g \in H^r(\mathbb{T}^3)$, on sait que :

$$(6.1.26) \quad \|f \cdot g\|_{H^r(\mathbb{T}^3)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|g\|_{H^r(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{H^r(\mathbb{T}^3)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)},$$

et sachant que $S_{\{u_0, u_1\}} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3)$, ne dépend pas de n , on parvient à montrer, à l'aide de (6.1.26), que

$$\|G_1(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \lesssim \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|v_n\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Soit, par les inégalités (6.1.6) et (6.1.5) du lemme 6.1.2, on a :

$$\|G_1(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \lesssim C \log(n)^{(l-1)\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} n^{(l-1)-s}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Donc, pour $l = 1, 2, 3$, on a :

$$(6.1.27) \quad n^{-(\frac{\alpha}{2} + (l-1) - s)} \|G_1(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \leq C \log(n)^{(l-1)\delta_2} n^{\frac{3-\alpha}{2}-s} \leq C \log(n)^{(\alpha+2)\delta_2} n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Enfin, par l'inégalité (6.1.26) ainsi que l'inégalité de Young, il résulte que pour tout $t \in [0, t_n]$, on a :

$$\|G_2(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \lesssim \left(\|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 + \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \|w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

6.1. Lemmes et propositions

et

$$\|G_2(t)\|_{H^1(\mathbb{T}^3)} \lesssim \|\nabla v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \left(\|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 + \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \|w_n\|_{H^1(\mathbb{T}^3)},$$

mais aussi,

$$\|G_2(t)\|_{H^2(\mathbb{T}^3)} \leq \sum_{k=0}^2 \|\nabla^k v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|w_n\|_{H^{2-k}(\mathbb{T}^3)} + \left(\|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 + \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \|w_n\|_{H^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Afin de calculer la norme H^k de $w_n(t)$, avec $k = 0, 1, 2$, on pose :

$$w_n(t) = \int_0^t \partial_t w_n(\tau) d\tau,$$

pour tout $t \in [0, t_n]$. Alors,

$$(6.1.28) \quad \|w_n(t)\|_{H^k(\mathbb{T}^3)} \leq t_n \sup_{\tau \in [0, t]} \|\partial_t w_n(\tau)\|_{H^k(\mathbb{T}^3)}.$$

Par définition de l'énergie semi classique E_n , on remarquera que

$$\|\partial_t w_n(t)\|_{H^k(\mathbb{T}^3)} \leq n^{(\frac{\alpha}{2} + k - s)} E_n(w_n(t)).$$

On peut à l'aide de cette remarque, majorer la norme de droite dans l'inégalité (6.1.28) pour obtenir :

$$(6.1.29) \quad \|w_n(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \leq C \log(n)^{\delta_2} n^{-(\frac{3}{2}-s)} n^{(\frac{\alpha}{2} + (l-1) - s)} e_n(w_n(t)).$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq c \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{1-\frac{3}{2\sigma}} \|f\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3)}^{\frac{3}{2\sigma}}, \quad \sigma > \frac{3}{2};$$

avec $\sigma = 2$, on obtient :

$$\|w_n\|_{L^\infty} \leq C \|w_n\|_{H^2}^{\frac{3}{4}} \|w_n\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}.$$

Ce qui revient à écrire, par la relation (6.1.29) (avec $l = 3$ pour majorer la norme H^2 et $l = 1$ pour majorer la norme L^2), que :

$$\|w_n\|_{L^\infty} \leq C \log(n)^{\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} n^{s-\frac{3-\alpha}{2}} e_n(w_n(t)).$$

6.1. Lemmes et propositions

Or, $\log(n)^{\delta_2} \leq C n^{\frac{3-\alpha}{2}-s}$ et donc,

$$(6.1.30) \quad \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq C n^{(\frac{3}{2}-s)} e_n(w_n(t)).$$

Il s'en suit, par les inégalités (6.1.29) et (6.1.30) ainsi que l'inégalité (6.1.6) du lemme 6.1.2, que pour $l = 1, 2, 3$, on a :

$$\|G_2(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} \leq C \log(n)^{l\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} n^{(\frac{\alpha}{2}+(l-1)-s)} (e_n(w_n(t)) + e_n^3(w_n(t))).$$

Tant bien que,

$$(6.1.31) \quad \begin{aligned} n^{-(\frac{\alpha}{2}+(l-1)-s)} \|G_2(t)\|_{H^{l-1}(\mathbb{T}^3)} &\leq C \log(n)^{l\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} (e_n(w_n(t)) + e_n^3(w_n(t))) \\ &\leq C \log(n)^{3\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} (e_n^3(w_n(t)) + e_n(w_n(t))). \end{aligned}$$

En réunissant les relations (6.1.25), (6.1.27) et (6.1.31), on obtient :

$$\left| \frac{d}{dt}(E_n(w_n(t))) \right| \leq C \log(n)^{(\alpha+2)\delta_2} n^{\frac{\alpha}{2}} + C \log(n)^{3\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} (e_n^3(w_n(t)) + e_n(w_n(t))).$$

On sait aussi, par définition, que la fonction e_n est croissante. De plus, pour $0 \leq t_1 \leq t_2$, on a :

$$0 \leq e_n(w_n(t_2)) - e_n(w_n(t_1)) \leq |E_n(w_n(t_2)) - E_n(w_n(t_1))|$$

car plus deux nombres sont grands, plus leur différence est petite. On peut alors déduire que :

$$(6.1.32) \quad 0 \leq \frac{d}{dt}(e_n(w_n(t))) \leq \left| \frac{d}{dt}(E_n(w_n(t))) \right|.$$

Autrement dit, on a :

$$\frac{d}{dt}(e_n(w_n(t))) \leq C \log(n)^{(\alpha+2)\delta_2} n^{\frac{\alpha}{2}} + C \log(n)^{3\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} (e_n^3(w_n(t)) + e_n(w_n(t))).$$

Sachant que notre but est de majorer l'énergie de la différence w_n par une quantité très petite, nous allons appliqué le principe du Boostrops, en supposant dans un premier temps que cette énergie est au plus majorée par 1, i.e.

$$e_n(w_n) \leq 1,$$

6.2. Preuve du théorème 4.1.7

c'est la borne supérieure, que nous sommes sûr de ne pas dépasser. Elle est aussi vérifiée pour t très petit, puisque

$$e_n(w_n(0)) \lesssim n^{-(\frac{\alpha}{2}-s)}.$$

Montrons que l'on a une meilleure majoration, i.e.

$$e_n(w_n) \ll 1.$$

Par majoration, on écrit que :

$$\frac{d}{dt}(e_n(w_n(t))) \leq C \log(n)^{(\alpha+2)\delta_2} n^{\frac{\alpha}{2}} + C \log(n)^{3\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)} e_n(w_n(t)).$$

Il vient alors, en utilisant le lemme de Gronwall, que pour tout $t \in [0, t_n]$, on a :

$$e_n(w_n(t)) \leq \left(\log(n)^{(\alpha-1)\delta_2} n^{(s-\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2})} + e_n(w_n(0)) \right) e^{C t \log(n)^{3\delta_2} n^{(\frac{3}{2}-s)}}.$$

Ou encore,

$$e_n(w_n(t)) \leq \left(\log(n)^{(\alpha-1)\delta_2} n^{(s-\frac{3-\alpha}{2})} + n^{-(\frac{\alpha}{2}-s)} \right) e^{C \log(n)^{4\delta_2}}.$$

On observera alors, que $s - \frac{3-\alpha}{2} < 0$ par hypothèse. De plus, en remplaçant $(\alpha-1)\delta_2$ par $(\alpha+3)\delta_2 - 4\delta_2$, on pourra voir qu'il suffirait de choisir $\delta_2 > 0$ telle que

$$(6.1.33) \quad \delta_2 < \frac{1}{\alpha+3},$$

pour pouvoir dire que

$$E_n(w_n(t)) \leq C n^{-\epsilon}, \quad \forall t \in [0, t_n].$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 6.1.4. □

6.2 Preuve du théorème 4.1.7

Corollaire 6.2.1. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]0, 3[$ et pour tout $t \in [0, t_n]$, on a :*

$$(6.2.1) \quad \|u_n(t) - v_n(t) - S(t)(u_0, u_1)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq c n^{-\epsilon},$$

où $t_n = [\log(n)]^{\delta_2} n^{-(\frac{3}{2}-s)}$.

6.2. Preuve du théorème 4.1.7

Démonstration. Par la relation (6.1.29) avec $l = 1$ et la proposition 6.1.4, on sait que

$$\|w_n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C \log(n)^{\delta_2} n^{-(\frac{3}{2}-s)} n^{(\frac{\alpha}{2}-s)} n^{-\epsilon}.$$

Soit,

$$\|w_n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C \log(n)^{\delta_2} n^{-\frac{3-\alpha}{2}} n^{-\epsilon}.$$

Cependant, on sait aussi que $s < \frac{3-\alpha}{2}$, et donc

$$(6.2.2) \quad \|w_n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq c n^{-s-\epsilon}.$$

De plus, par la définition de l'énergie semi classique, on a pour tout $t \in [0, t_n]$,

$$\|\partial_t w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w_n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq n^{\frac{\alpha}{2}-s} E_n(w_n(t)).$$

Il s'en suit, d'après la proposition 6.1.4, que

$$(6.2.3) \quad \|w_n(t)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq c n^{\frac{\alpha}{2}-s-\epsilon}, \quad \forall t \in [0, t_n].$$

On écrit, par interpolation, que :

$$\|w_n(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq C \|w_n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{(1-\theta)} \|w_n(t)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1,$$

où $\theta = \frac{2}{\alpha}s$. A l'aide des relations (6.2.2) et (6.2.3), l'inégalité d'interpolation s'écrit

$$\|w_n(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq C n^{(-s-\epsilon)(1-\theta)} n^{\theta(\frac{\alpha}{2}-s-\epsilon)} = n^{\frac{\alpha}{2}\theta-s-\epsilon}.$$

Enfin, en remplaçant θ par sa valeur, on obtient :

$$\|w_n(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq C n^{-\epsilon},$$

soit l'inégalité (6.2.1) recherchée. □

Muni de ces résultats, nous allons montrer que malgré le fait que les suites de solutions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n + S_{\{u_0, u_1\}})_{n \in \mathbb{N}}$ soient très proches, en terme d'énergie, sur de petits temps, on verra que ce temps est en faite suffisamment grand pour qu'on ait une explosion en norme H^s .

6.3. Preuve du théorème 4.1.8

Démonstration du théorème 4.1.7. Par la deuxième inégalité triangulaire, on écrit que :

$$\|u_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \geq \|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} - \|S(t)(u_0, u_1)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} - \|w_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}.$$

Or on sait, par l'estimation (6.1.7) du lemme 6.1.2, que

$$(6.2.4) \quad \|v_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \geq C[\log(n)]^{-(s+1)\delta_1+s\delta_2}, \quad n \gg 1.$$

On déduit alors, à l'aide de la proposition 6.1.4, que

$$\|u_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \geq C[\log(n)]^{-(s+1)\delta_1+s\delta_2} - C - n^{-\epsilon}.$$

Donc, il suffit de choisir $\delta_1 > 0$ tel que

$$\delta_1 < \frac{s\delta_2}{s+1},$$

où δ_2 est fixé dans la proposition 6.1.4, (par la relation (6.1.33)), pour avoir $\delta > 0$ tel que

$$\|u_n(t_n, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \geq C[\log(n)]^\delta.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 4.1.7. □

6.3 Preuve du théorème 4.1.8

Une conséquence directe du précédent théorème 4.1.7 est que le problème (4.1.1) est aussi mal posé sur $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$, pour toute donnée initiale dans $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$.

On considère $(u_{0,m}, u_{1,m})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction de $C^\infty(\mathbb{T}^3) \times C^\infty(\mathbb{T}^3)$ telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|(u_0 - u_{0,m}, u_1 - u_{1,m})\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} = 0.$$

Si l'on fixe m , on peut alors appliquer le théorème 4.1.7, pour obtenir l'existence d'une suite de solutions $(u_{m,n})_{n \in \mathbb{N}} \in C(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{T}^3))$ de (4.1.1) qui vérifie

$$(6.3.1) \quad \|(u_{m,n}(0) - u_{0,m}, \partial_t u_{m,n}(0) - u_{1,m})\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow +\infty,$$

6.3. Preuve du théorème 4.1.8

mais

$$(6.3.2) \quad \|(u_{m,n}(t), \partial_t u_{m,n}(t))\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Donc, par inégalité triangulaire, on écrit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $m \geq M$ il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$ on a :

$$\begin{aligned} \|u_{m,n}(0) - u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} &\leq \|u_{m,n}(0) - u_{0,m} + u_{0,m} - u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq \|u_{m,n}(0) - u_{0,m}\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|u_{0,m} - u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Identiquement, on obtient pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $m \geq M$ il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$ on a :

$$\|\partial_t u_{m,n}(0) - u_1\|_{H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq \epsilon.$$

Néanmoins, la relation (6.3.2) nous permet de dire que pour tout $m > 0$ il existe $N' \geq N$ tels que pour tout $n \geq N'$, on a :

$$\|(u_{m,n}(t), \partial_t u_{m,n}(t))\|_{L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \geq \epsilon^{-1}.$$

Autrement dit, la suite de solution $(u_{M,N'})$ vérifie le théorème 4.1.8.

7. Partie probabiliste

Bien que le problème (4.1.1) soit mal posé au sens de Hadamard sur $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ où $s \in]0, \frac{3-\alpha}{2}[$ avec $\alpha \in]0, 3[$, de récents résultats, donnés par les recherches de N. Burq et N. Tzvetkov, permettent d'espérer qu'il est néanmoins possible de trouver des solutions probabilistes sur cet espace, et cela en choisissant les bonnes approximations des données initiales. Les références utilisées dans ce chapitre sont [16, 2, 1].

7.1 Solutions probabilistes

On considère $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ les données initiales, associées au problème (4.1.1), données par leurs séries de Fourier comme suit :

$$u_0(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} (b_0^n \cos(n.x) + c_0^n \sin(n.x)),$$

et

$$u_1(x) = a_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} (b_1^n \cos(n.x) + c_1^n \sin(n.x)).$$

On définit les variables aléatoires associées à ces derniers, respectivement par :

$$u_0^\omega(x) = \alpha_0(\omega)a_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} (\beta_0^n(\omega)b_0^n \cos(n.x) + \gamma_0^n(\omega)c_0^n \sin(n.x)),$$

et

$$u_1^\omega(x) = \alpha_1(\omega)a_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} (\beta_1^n(\omega)b_1^n \cos(n.x) + \gamma_1^n(\omega)c_1^n \sin(n.x)),$$

où $(\alpha_j^n(\omega), \beta_j^n(\omega), \gamma_j^n(\omega))_{j=0,1}$ est une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont la loi $d\theta(x)$ satisfait

7.1. Solutions probabilistes

la propriété suivante :

$$\exists c > 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} d\theta(x) \right| \leq e^{c\gamma^2}. \quad (\star)$$

Proposition 7.1.1. *Les variables aléatoires gaussiennes centrées réduites ou les variables de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées vérifient aisément la propriété (\star) .*

Démonstration. En effet, pour les variables gaussiennes, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} d\theta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

En utilisant le cas générique de l'intégrale de Gauss, on obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} e^{\frac{\gamma^2}{4}} = e^{\frac{\gamma^2}{2}}.$$

De même, pour les variables de Bernoulli, on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} d\theta_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} d(x) \\ &= \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que l'on ait

$$\frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} \leq e^{\gamma^2/2}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

□

On pose :

$$\begin{aligned} \Lambda : \Omega &\longrightarrow H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \\ \omega &\longmapsto (u_0^\omega, u_1^\omega) \end{aligned}$$

Pour tout $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$, l'application Λ est mesurable. Cela est dû au fait que les sommes partielles forment une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}})$, qui

7.1. Solutions probabilistes

est un espace complet. En effet, soient $M > N$ deux entiers positifs et soit

$$u_{0,N}^\omega(x) = \alpha_0(\omega)a_0 + \sum_{|n| \leq N} (\beta_0^n(\omega)b_0^n \cos(nx) + \gamma_0^n(\omega)c_0^n \sin(nx)).$$

On considère

$$\begin{aligned} \|u_{0,N}^\omega - u_{0,M}^\omega\|_{L^2(\Omega; H^s(\mathbb{T}^3))}^2 &= \left\| \sum_{M < |n| \leq N} (\beta_0^n(\omega)b_0^n \cos(nx) + \gamma_0^n(\omega)c_0^n \sin(nx)) \right\|_{L^2(\Omega; H^s(\mathbb{T}^3))}^2 \\ &\simeq \left\| \sum_{M < |n| \leq N} (1 + |n|^2)^s (|\beta_0^n(\omega)|^2 |b_0^n|^2 + |\gamma_0^n(\omega)|^2 |c_0^n|^2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{M < |n| \leq N} (1 + |n|^2)^s (|b_0^n|^2 + |c_0^n|^2) \xrightarrow{N, M \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de dire que l'application Λ induit une mesure de probabilité sur l'espace $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$, notée

$$\mu_{(u_0, u_1)} := \mathbb{P} \circ \Lambda^{-1}$$

i.e. $\forall \mathcal{A} \subset H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$, on a :

$$\mu_{(u_0, u_1)}(\mathcal{A}) = \mathbb{P} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(\Lambda^{-1}(\mathcal{A})) = \mathbb{P}\{\Lambda \in \mathcal{A}\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : (u_0^\omega, u_1^\omega) \in \mathcal{A}\}.$$

On note :

$$\mathcal{M}^s = \bigcup_{(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}} \{\mu_{(u_0, u_1)}\}.$$

On remarquera que si $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$ alors (u_0^ω, u_1^ω) appartient aussi à l'espace $H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}$ presque sûrement. Plus précisément, en terme de différentiabilité, il n'y a pas de régularisation par passage aux variables aléatoires. De plus, on peut voir que si $u_0^\omega \in L^2$ alors $u_0^\omega \in L^p$ presque sûrement, pour tout $p \geq 2$ i.e. les variables aléatoires sont plus régulières que les données initiales elles mêmes, en terme d'intégrabilité.

Lemme 7.1.2. *Soit $\{g_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle de variables aléatoires, indépendantes, associées à la suite de lois $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui vérifie (\star) . Alors, il existe $C > 0$ tels que pour tout $p \geq 2$ et pour toute suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l^2$, on a :*

$$(7.1.1) \quad \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sqrt{p} \|r_n\|_{l^2(\mathbb{R})}.$$

7.1. Solutions probabilistes

Démonstration. A l'aide d'une dérivée de l'inégalité de Markov, on écrit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $t > 0$ à fixer, on a :

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right| > \lambda \right) \leq e^{-t\lambda} \int_{\Omega} e^{t \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n} dp(\omega).$$

Or, par indépendance des variables aléatoires, on peut écrire que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{t \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n} dp(\omega) &= \prod_{n \geq 1} \int_{\Omega} e^{t g_n(\omega) r_n} dp(\omega) \\ &= \prod_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} e^{t x r_n} d\theta_n(x). \end{aligned}$$

De plus, par la propriété (*), on obtient :

$$\int_{\Omega} e^{t \sum_{n \geq 1} g_n(\omega) r_n} dp(\omega) \leq \prod_{n \geq 1} e^{c(t r_n)^2} = e^{ct^2 \sum_{n \geq 1} r_n^2}.$$

Autrement dit, on a :

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right| > \lambda \right) \leq e^{-t\lambda} e^{ct^2 \sum_{n \geq 1} r_n^2}.$$

Ainsi, pour $t = \frac{\lambda}{2c \sum_{n \geq 1} r_n^2}$, on obtient l'estimation suivante :

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right| > \lambda \right) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{4c \sum_{n \geq 1} r_n^2}}.$$

Ensuite, on peut déduire la relation (7.1.1), comme suit :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right\|_{L^p(\Omega)}^p &= p \int_0^{+\infty} p \left(\omega : \left| \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\omega) r_n \right| > \lambda \right) \lambda^{p-1} d\lambda \\ &\leq C p \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4c \sum_{n \geq 1} r_n^2}} \lambda^{p-1} d\lambda. \end{aligned}$$

7.1. Solutions probabilistes

Par le changement de variable $\left(\frac{\lambda^2}{4c \sum_{n \geq 1} r_n^2} \mapsto \frac{u^2}{2}\right)$, on obtient :

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C p \left(\sum_{n \geq 1} r_n^2 \right)^{\frac{p}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u^{p-1} du.$$

Puis, afin de calculer l'intégrale du membre de droite, nous allons itérer "p/2" fois l'intégration par partie suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{p-2} \left(u e^{\frac{u^2}{2}} \right) du &= \frac{1}{2}(p-2) \int_0^{+\infty} u^{p-4} \left(u e^{\frac{u^2}{2}} \right) du \\ &= \frac{1}{4}(p-2)(p-4) \int_0^{+\infty} u^{p-6} \left(u e^{\frac{u^2}{2}} \right) du \\ &\vdots \end{aligned}$$

sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$. Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(\omega) r_n \right\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq C \left(\sum_{n \geq 1} r_n^2 \right)^{\frac{p}{2}} p \times (p-2) \times (p-4) \times \dots \times 1 \\ &\leq C \left(\sum_{n \geq 1} r_n^2 \right)^{\frac{p}{2}} (cp)^{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme 7.1.2. □

Proposition 7.1.3. [Strichartz probabiliste] Soient $s > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}^s$ une mesure induite par $(u_0^\omega, u_1^\omega) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)$ via l'application Λ . Soient $\sigma \in]0, s]$, $2 \leq p_1 < +\infty$, $2 \leq p_2 \leq \infty$ et $\delta > 1 + \frac{1}{p_1}$. Alors il existe une constante positive C telle que pour tout $p \geq 2$, on a :

$$(7.1.2) \quad \left\| \langle t \rangle^{-\delta} S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}_t), L^{p_2}(\mathbb{T}^3)} \left\|_{L_w^p} \leq C \sqrt{p} \|(u_0, u_1)\|_{H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}.$$

où $\langle t \rangle = (1 + |t|^2)^{\frac{1}{2}}$. De plus, il existe C et c deux constantes positives telles que pour tout

7.1. Solutions probabilistes

$\lambda > 0$, on a

$$(7.1.3) \quad \mu \left((v_0, v_1) \in H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}} : \|\langle t \rangle^{-\delta} S(t)(v_0, v_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}_t), L^{p_2}(\mathbb{T}^3)} > \lambda \right) \leq C \exp \left(-\frac{c\lambda^2}{\|(u_0, u_1)\|_{H^s \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2} \right).$$

Démonstration. On pose Π_0 la projection orthogonale sur les constantes et $\Pi_0^\perp = Id - \Pi_0$ sur l'espace perpendiculaire. Alors

$$S(t)(v_0, v_1) = \Pi_0 S(t)(v_0, v_1) + \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1).$$

Par définition de la solution libre, on a

$$\Pi_0 S(t)(u_0^\omega, u_1^\omega) = \alpha_0(\omega)a_0 + t\alpha_1(\omega)a_1.$$

Il vient alors, que

$$\begin{aligned} \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} \Pi_0 S(t)(v_0, v_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)} &= \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} (\alpha_0(\omega)a_0 + t\alpha_1(\omega)a_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p_\omega} \\ &= (2\pi)^{\frac{3}{p_2}} \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} (\alpha_0(\omega)a_0 + t\alpha_1(\omega)a_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \right\|_{L^p_\omega}. \end{aligned}$$

Or, comme $\delta > 1 + \frac{1}{p_1}$ alors cette dernière norme est finie en t . De plus, à l'aide de l'inégalité (7.1.1) du lemme 7.1.2 précédent, on obtient

$$(2\pi)^{\frac{3}{p_2}} \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} (\alpha_0(\omega)a_0 + t\alpha_1(\omega)a_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \right\|_{L^p_\omega} \leq c\sqrt{p}(|a_0| + |a_1|).$$

Autrement dit,

$$(7.1.4) \quad \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} \Pi_0 S(t)(v_0, v_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)} \leq c\sqrt{p}(|a_0| + |a_1|).$$

On considère maintenant

$$\left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)} \leq \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)},$$

par décroissance des espaces L^p en mesure finie. De plus, pour $q < \infty$ tel que $\sigma > 3/q$, par injection continue des espaces de Sobolev, on sait que

$$\|\Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \leq \|\langle D \rangle^\sigma \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}.$$

7.1. Solutions probabilistes

En conséquence, on a

$$\left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)} \leq \left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} \langle D \rangle^\sigma \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)}.$$

En appliquant l'inégalité intégrale de Minkowski, qui n'est vrai que si $p > \max(p_1, q)$ (voir (3.3.3)), il résulte que

$$\left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} \langle D \rangle^\sigma \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}^3))} \right\|_{L^p(\mu)} \leq \left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} \langle D \rangle^\sigma \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^p(\mu)} \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}^3))}.$$

D'un autre coté, par définition de la solution libre (voir (5.1.1)), on sait que

$$\begin{aligned} \Pi_0^\perp S(t)(u_0^\omega, u_1^\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \left(b_0^n \beta_0^n(\omega) \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}} + b_1^n \beta_1^n(\omega)) \frac{\sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \cos(n.x) + \\ &\quad \left(c_0^n \gamma_0^n(\omega) \cos(t|n|^{\frac{\alpha}{2}} + c_1^n \gamma_1^n(\omega)) \frac{\sin(t|n|^{\frac{\alpha}{2}})}{|n|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \sin(n.x) \end{aligned}$$

Il s'en suit alors, en utilisant le fait que les fonctions cosinus et sinus soient bornées ainsi que l'inégalité (7.1.1) du lemme précédent que,

$$\begin{aligned} \left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} \langle D \rangle^\sigma \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^p(\mu)} \right\|_{L_t^1 L_x^q} &\leq \left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} c\sqrt{p} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \langle n \rangle^{2\sigma} (|b_0^n| + |c_0^n| + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. |n|^{-\frac{\alpha}{2}} (|b_1^n| + |c_1^n|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}^3))} \right\| \\ (7.1.5) \quad &\leq \left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} c\sqrt{p} \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}} \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}^3))} \right\| \end{aligned}$$

car

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*^3} \langle n \rangle^{2\sigma} (|b_0^n|^2 + |c_0^n|^2 + |n|^{-\alpha} (|b_1^n|^2 + |c_1^n|^2)) \leq C \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2.$$

De plus, comme $\delta > 1 + 1/p_1$ la norme en t est finie dans (7.1.5) et on a

$$\left\| \left\| \langle t \rangle^{-\delta} \langle D \rangle^\sigma \Pi_0^\perp S(t)(v_0, v_1) \right\|_{L^p(\mu)} \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{T}^3))} \leq C\sqrt{p} \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}.$$

Ce qui complète la preuve de (7.1.2). On peut alors montrer que (7.1.3) est une consé-

7.1. Solutions probabilistes

quence de (7.1.2). En effet, par l'inégalité de Bienaimée-Chebychev, on écrit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\|\langle t \rangle^{-\delta} S(t)(u_0^\omega, u_1^\omega)\|_{L^{p_1}([0,T], L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} > \lambda \right) &\leq \lambda^{-p} \left\| \|\langle t \rangle^{-\delta} S(t)(u_0^\omega, u_1^\omega)\|_{L_t^{p_1} L_x^{p_2}} \right\|_{L_\omega^p}^p \\ &\leq \lambda^{-p} C^p p^{\frac{p}{2}} \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^p \\ &= \left(\frac{C p^{\frac{1}{2}} \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}}{\lambda} \right)^p. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prend,

$$p = \left(\frac{\lambda}{C e \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}} \right)^2.$$

Si $p \geq 2$, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\|\langle t \rangle^{-\delta} S(t)((u_0^\omega, u_1^\omega))\|_{L^{p_1}([0,T], L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} > \lambda \right) &\leq e^{-p} \\ &= \exp \left(-C \lambda^2 \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^{-2} \right). \end{aligned}$$

Sinon, si $p < 2$ on peut choisir c telle que $ce^{-2} \geq 1$, et avoir

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\|\langle t \rangle^{-\delta} S(t)((u_0^\omega, u_1^\omega))\|_{L^{p_1}([0,T], L^{p_2}(\mathbb{T}^3))} > \lambda \right) &\leq 1 \leq ce^{-2} \\ &\leq c \exp \left(-C \lambda^2 \|(u_0, u_1)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma - \frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^{-2} \right). \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 7.1.3. □

Proposition 7.1.4. *Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 3[$. On considère le problème :*

$$(7.1.6) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)v + (f + v)^3 = 0, & f \in L^3([0, 1], L^6(\mathbb{T}^3)), \\ (v, \partial_t v)(0) = (v_0, v_1) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3), \end{cases}$$

tels que

$$\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0,1], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 \leq \Lambda, \quad \Lambda \geq 1.$$

Alors, il existe $c > 0$ et $\gamma > 0$, deux constantes, pour lesquelles le problème (7.1.6) possède une unique solution v sur $[0, c\Lambda^{-\gamma}]$. De plus, cette solution est unique dans la classe :

$$L^\infty([0, c\Lambda^{-\gamma}], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, c\Lambda^{-\gamma}], L^6(\mathbb{T}^3)),$$

7.1. Solutions probabilistes

avec $p = \frac{\alpha}{2-\alpha}$.

Remarque 7.1.5. *Tout comme nous l'avons déjà vu dans l'étude déterministe du problème (4.1.1), nous aurons besoin des inégalités de Strichartz, pour démontrer cette proposition dans le cas $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$. Pour le cas $\alpha \in [2, 3[$, les propriétés de la solution libre ainsi que l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow L^6$ suffisent.*

Démonstration. On considère d'abord le cas $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$. On pose :

$$X_T \equiv C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)) \cap L^p([0, T], L^6(\mathbb{T}^3)),$$

où $T = T(\Lambda)$ et $p = \frac{\alpha}{2-\alpha}$. On muni cet espace de la norme :

$$\|v\|_{X_T} := \|v\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} + \|v\|_{L^p([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}, \quad p = \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

On définit :

$$B_{X_T} \equiv \{v \in X_T : \|v\|_{X_T} \leq 2C\Lambda\}.$$

Montrons que pour $T = (c\Lambda^{-2})^\delta$, $c \ll 1$, l'application :

$$\Phi_{v_0, v_1}(v) = S(t)(v_0, v_1) - \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)D^{\frac{\alpha}{2}})}{D^{\frac{\alpha}{2}}} ((f+v)^3(\tau)) d\tau,$$

est une contraction dans B_{X_T} . D'après les inégalités de Strichartz déterministe (voir proposition 5.1.4), comme le couple $(p, q) = (\frac{\alpha}{2-\alpha}, 6)$ vérifie la relation (5.2.2), on a :

$$(7.1.7) \quad \|\Phi_{v_0, v_1}(v)\|_{X_T} \lesssim \|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^T \|(f+v)^3(\tau)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\tau.$$

D'autre part, on sait que :

$$(7.1.8) \quad \|(f+v)^3\|_{L^1([0, T], L^2(\mathbb{T}^3))} \lesssim \|f\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 + \|v\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3.$$

Alors, l'inégalité (7.1.7) devient,

$$(7.1.9) \quad \|\Phi_{v_0, v_1}(v)\|_{X_T} \leq C \left(\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 \right) + C \|v\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3.$$

7.1. Solutions probabilistes

En utilisant l'inégalité de Hölder, avec $p = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^3([0,T],L^6(\mathbb{T}^3))}^3 &\leq T^{(1-\frac{3}{p})} \|v\|_{L^p([0,T],L^6(\mathbb{T}^3))}^3 \\ &\leq T^{(1-\frac{3}{p})} \|v\|_{X_T}^3 \\ &= T^{\frac{4\alpha-6}{\alpha}} \|v\|_{X_T}^3. \end{aligned}$$

En conséquence, on a :

$$(7.1.10) \quad \|\Phi_{v_0,v_1}(v)\|_{X_T} \leq C \left(\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0,T],L^6(\mathbb{T}^3))} + T^{(1-\frac{3}{p})} \|v\|_{X_T}^3 \right).$$

Il suffit alors de prendre, pour $c \ll 1$,

$$T^{(1-\frac{3}{p})} = c\Lambda^{-2} \iff T = (c\Lambda^{-2})^{\frac{p}{p-3}},$$

pour que l'application Φ_{v_0,v_1} envoie B_{X_T} dans B_{X_T} . De plus, d'après (5.2.8) et (7.1.10), on sait que pour tout autre solution $\tilde{v} \in B_{X_T}$, on a :

$$(7.1.11) \quad \|\Phi_{v_0,v_1}(v) - \Phi_{v_0,v_1}(\tilde{v})\|_{X_T} \lesssim T^{(1-\frac{3}{p})} (\|v\|_{X_T}^2 + \|\tilde{v}\|_{X_T}^2) \|v - \tilde{v}\|_{X_T}.$$

Autrement dit, par notre choix de T , on obtient que :

$$\|\Phi_{v_0,v_1}(v) - \Phi_{v_0,v_1}(\tilde{v})\|_{X_T} \lesssim \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{X_T}, \quad v, \tilde{v} \in B_{X_T}.$$

On déduit que, l'application Φ_{v_0,v_1} est une application 1/2-contractante sur B_{X_T} , dont le point fixe définit l'unique solution de (7.1.6) sur l'intervalle $[0, T]$, l'unicité étant donnée par (7.1.11).

On considère maintenant le cas $\alpha \in [2, 3[$. Dans ce cas, on pose

$$X_T \equiv C([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)).$$

D'après les propriétés de la solution libre (5.1.2) et (5.1.3), on a :

$$\|\Phi_{v_0,v_1}(v)\|_{L^\infty([0,T],H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} \lesssim \|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^T \|(f+v)^3(\tau)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\tau.$$

7.1. Solutions probabilistes

De plus, par (7.1.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Phi_{v_0, v_1}(v)\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} &\leq C \left(\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^T \|v(\tau)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 d\tau \right) \\ &\leq C \left(\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 + \right. \\ &\quad \left. T \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \right). \end{aligned}$$

Il s'en suit, à l'aide de l'injection $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow H^1 \hookrightarrow L^6$, que

$$\begin{aligned} \|\Phi_{v_0, v_1}(v)\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} &\leq C \left(\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 + \right. \\ &\quad \left. T \|v\|_{L^\infty([0, T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))}^3 \right). \end{aligned}$$

Soit,

$$\|\Phi_{v_0, v_1}(v)\|_{X_T} \leq C \left(\|v_0\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|f\|_{L^3([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}^3 + T \|v\|_{X_T}^3 \right).$$

Alors, si l'on prend $T = c\Lambda^{-2}$ avec $c = \frac{1}{8C^2}$, l'application Φ_{v_0, v_1} envoie B_{X_T} dans B_{X_T} . De plus, d'après l'inégalité précédente ainsi que (5.2.8), on sait que pour tout $\tilde{v}, v \in B_{X_T}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Phi_{v_0, v_1}(v) - \Phi_{v_0, v_1}(\tilde{v})\|_{X_T} &\lesssim T (\|v\|_{X_T}^2 + \|\tilde{v}\|_{X_T}^2) \|v - \tilde{v}\|_{X_T} \\ &\lesssim \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

On peut alors conclure que l'application Φ_{v_0, v_1} est une contraction sur B_{X_T} , dont le point fixe est l'unique solution de (7.1.6) sur $[0, T]$. Ce qui conclut la preuve de la proposition 7.1.4. □

7.2 Preuve du théorème 4.1.10

Démonstration. On cherche une solution de la forme $v(t) = S(t)(v_0, v_1) + w(t)$. Alors, w est solution de :

$$(7.2.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)w + (S(t)(v_0, v_1) + w)^3 = 0, \\ (w, \partial_t w)|_{t=0} = (0, 0). \end{cases}$$

Par la proposition 7.1.3, on sait que

$$(7.2.2) \quad \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}), \mu - \text{presque surement.}$$

On peut alors appliquer la proposition 7.1.4 et conclure à l'existence de solution unique, locale pour le problème (7.2.1). Montrons que la norme $H^{\frac{\alpha}{2}} \times L^2$ de $(w, \partial_t w)$ reste bornée sur $[0, T]$ pour aboutir à la globalité de la solution.

On pose :

$$E(w(t)) \equiv \frac{1}{2} \left(\|\partial_t w\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|D^{\frac{\alpha}{2}} w\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{1}{2} \|w\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^4 \right).$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} E(w(t)) = (\partial_t w, \partial_t^2 w) + (\partial_t w, D^\alpha w) + (\partial_t w, w^3),$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire sur L^2 . Ce qui est équivalent à :

$$\frac{d}{dt} E(w(t)) = \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t w (\partial_t^2 w + D^\alpha w + w^3) dx.$$

En utilisant l'équation (7.2.1) vérifiée par w , on écrit

$$\frac{d}{dt} E(w(t)) = \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t w (w^3 - (S(t)(v_0, v_1) + w)^3) dx.$$

Il vient donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$(7.2.3) \quad \frac{d}{dt} E(w(t)) \leq \|\partial_t w\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|w^3 - (S(t)(v_0, v_1) + w)^3\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

7.2. Preuve du théorème 4.1.10

Cependant, en développant la puissance, on obtient :

$$\|w^3 - (S(t)(v_0, v_1) + w)^3\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \|S(t)(v_0, v_1)^3 + 3S(t)(v_0, v_1)^2w + 3S(t)(v_0, v_1)w^2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

que l'on peut majorer par :

$$\begin{aligned} \|w^3 - (S(t)(v_0, v_1) + w)^3\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\lesssim \|S(t)(v_0, v_1)^3\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|S(t)(v_0, v_1)w^2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\lesssim \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 + \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|w\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

De plus, par la définition de $E(w(t))$, on a :

$$\|\partial_t w\|_{L^2} \leq c(E(w(t)))^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|w\|_{L^4}^2 \leq c(E(w(t)))^{\frac{1}{2}}.$$

Il résulte que, la relation (7.2.3) s'écrit,

$$(7.2.4) \quad \frac{d}{dt}E(w(t)) \leq c(E(w(t)))^{1/2} \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 + \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} (E(w(t)))^{1/2} \right).$$

Or, par la proposition 7.1.3 ainsi que l'injection de Sobolev $W^{\sigma,q} \hookrightarrow L^\infty$, avec $\sigma > 3/q$, on sait que :

$$(7.2.5) \quad \begin{cases} \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t), \\ \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t). \end{cases}$$

On peut alors appliquer le lemme de Gronwall sur l'inégalité (7.2.4).

En effet, on pose :

$$x(t) = (E(w(t)))^{1/2}, \quad f(t) = \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \quad \text{et} \quad g(t) = \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}.$$

Alors, l'inégalité (7.2.4) s'écrit,

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq c f(t) + c g(t) x(t).$$

En utilisant la méthode du facteur intégrant c'est-à-dire, en multipliant les deux cotés de

7.3. Construstion d'ensemble invariant

l'équation obtenue par $e^{-c \int_0^t g(\tau) d\tau}$, on obtient pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-c \int_0^t g(\tau) d\tau} x(t) \right) &\leq c f(t) e^{-c \int_0^t g(\tau) d\tau} \\ &\leq c f(t). \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et t et en sachant que $x(0) = 0$, il résulte finalement que,

$$e^{-c \int_0^t g(\tau) d\tau} x(t) \leq c \int_0^t f(s) ds.$$

Plus précisément, pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$x(t) \leq c \left(\int_0^T f(\tau) d\tau \right) e^{c \int_0^T g(\tau) d\tau}.$$

Soit encore,

$$(E(w(t)))^{1/2} \leq c \left(\int_0^T f(\tau) d\tau \right) e^{c \int_0^T g(\tau) d\tau}, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après cette dernière inégalité ainsi que (7.2.5), on peut conclure que la solution w reste bornée sur tout $[0, T]$, autrement dit, la solution du problème (7.2.1) est une solution globale. Ce qui conclut la preuve du théorème 4.1.10. \square

7.3 Construstion d'ensemble invariant

On définit l'ensemble :

$$\Theta \equiv \left\{ (v_0, v_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) : \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t), \right. \\ \left. \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t) \right\}.$$

On pose $\Sigma' \equiv \Theta + (H^{\frac{\alpha}{2}} \times L^2)$.

Démonstration de la proposition 4.1.11. Par hypothèse $(v_0, v_1) \in \Sigma'$, alors on peut écrire $(v_0, v_1) = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) + (w_0, w_1)$ où $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) \in \Theta$ et $(w_0, w_1) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$.

On cherche alors une solution v , de la forme $v(t) = S(t)(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) + w(t)$. Autrement dit,

7.3. Construstion d'ensemble invariant

résoudre le problème (4.1.6) revient à résoudre le problème :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + D^\alpha)w + (S(t)(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) + w)^3 = 0, \\ (w, \partial_t w)|_{t=0} = (w_0, w_1). \end{cases}$$

Or, par le théorème précédent, on sait qu'il existe une solution globale w de ce problème telle que $(w, \partial_t w) \in C(\mathbb{R}, H^{\frac{\alpha}{2}} \times L^2)$. De plus, par définition de la solution libre, on a directement que $S(t)(\Theta) = \Theta$, i.e. la solution v appartient à Σ' . \square

Théorème 7.3.1. *Soient $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2]$, $s \in]\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$ et $(v_0, v_1) \in \Sigma'$ les données initiales associées à la solution globale $v(t)$ donnée par le théorème 4.1.10. On considère la suite de données initiales $(v_{0,n}, v_{1,n}) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(v_{0,n} - v_0, v_{1,n} - v_1)\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} = 0.$$

On note par $v_n(t)$ la solution de l'équation des ondes fractionnaires associée aux données $(v_{0,n}, v_{1,n})$ définie comme dans la preuve du théorème 4.1.5. Alors, pour tout $T > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(v_n(t) - v(t), \partial_t v_n(t) - \partial_t v(t))\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe de la combinaison du théorème 4.1.6 avec le théorème 4.1.10.

En effet, par le théorème 4.1.10, on sait que

$$(v, \partial_t v) \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)).$$

Alors, pour $T > 0$ et $\Lambda > 1$, on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(v(t), \partial_t v(t))\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \leq \Lambda - 1.$$

Il suffit de prendre $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, donné dans le théorème 4.1.6, de sorte à couvrir l'intervalle $[0, T]$ par des intervalles de longueurs τ , de cette façon on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(v_n(t) - v(t), \partial_t v_n(t) - \partial_t v(t))\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

\square

7.4 Preuve du théorème 4.1.12

Soient $s \in]0, \frac{3-\alpha}{2}[$, $\alpha \in [2, 3[$ et $(v_0, v_1) \in \Sigma'$ les données initiales associées à la solution globale $v(t)$ (vu dans la proposition 4.1.11). Soit la suite $(v_{n,0}, v_{n,1})_{n \geq 1} \in C^\infty(\mathbb{T}^3) \times C^\infty(\mathbb{T}^3)$ donnée par convolution avec les données initiales i.e.

$$v_{n,0} = v_0 * \rho_n, \quad v_{n,1} = v_1 * \rho_n,$$

où $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'approximation de l'identité. On note par $v_n(t)$ la solution du problème (4.1.1) associée aux données initiales $(v_{n,0}, v_{n,1})$. Alors, pour $T > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(v_n(t) - v(t), \partial_t v_n(t) - \partial_t v(t))\|_{L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

Démonstration. Soit v_n une solution du problème (4.1.1) associée aux données initiales définies par convolution avec des éléments de Σ' . Alors, $v_n \in \Sigma'$ (d'après la section précédente) et

$$v_n(t) = S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n(t), \quad \text{avec } (w_n, \partial_t w_n)|_{t=0} = (0, 0).$$

Par (7.2.4), on sait que

$$\frac{d}{dt} E(w_n(t)) \leq c (E(w_n(t)))^{\frac{1}{2}} \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 + \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} (E(w_n(t)))^{\frac{1}{2}} \right).$$

Donc, après simplification, on obtient :

$$\frac{d}{dt} [E(w_n(t))]^{\frac{1}{2}} \lesssim \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 + \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} (E(w_n(t)))^{\frac{1}{2}}.$$

On peut alors, par le lemme de Gronwall, écrire que pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$[E(w_n(t))]^{\frac{1}{2}} \lesssim \int_0^t \|S(\tau)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 d\tau \exp \left(\int_0^t \|S(\tau)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} d\tau \right).$$

En utilisant le fait que

$$(7.4.1) \quad S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) = (S(t)(v_0, v_1)) * \rho_n$$

7.4. Preuve du théorème 4.1.12

ainsi que $(v_0, v_1) \in \Sigma'$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|S(\tau)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 d\tau = \int_0^t \|S(\tau)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^3 d\tau$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|S(\tau)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} d\tau = \int_0^t \|S(\tau)(v_0, v_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} d\tau.$$

On en déduit alors, que l'énergie $E(w_n(t))$ est finie. En particulier,

$$(7.4.2) \quad \|(w_n, \partial_t w_n)\|_{L^\infty([0,T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3))} < \infty.$$

D'autre part, la différence $(w - w_n)$ vérifie l'équation :

$$(\partial_t^2 + D^\alpha)(w - w_n) = - (S(t)(v_0, v_1) + w)^3 - (S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n)^3.$$

On multiplie cette dernière équation par $\partial_t(w - w_n)$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(|\partial_t(w - w_n)|^2 + |D^{\frac{\alpha}{2}}(w - w_n)|^2 \right) = \\ - \partial_t(w - w_n) \left((S(t)(v_0, v_1) + w)^3 - (S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n)^3 \right). \end{aligned}$$

En intégrant cette relation sur \mathbb{T}^3 , puis à l'aide de l'inégalité de Hölder, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t(w - w_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|(w - w_n)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \right) = \\ - \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t(w - w_n) \left((S(t)(v_0, v_1) + w)^3 - (S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n)^3 \right) dx \end{aligned}$$

que l'on peut majorer par :

$$(7.4.3) \quad \|\partial_t(w - w_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \left\| (S(t)(v_0, v_1) + w)^3 - (S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n)^3 \right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

D'autre part, on a :

$$\|\partial_t(w - w_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \left(\|\partial_t(w - w_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|w - w_n\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.4. Preuve du théorème 4.1.12

Il s'en suit, d'après cette remarque ainsi que la borne (7.4.3), que

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\|\partial_t(w - w_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|w - w_n\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left\| (S(t)(v_0, v_1) + w)^3 - (S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n)^3 \right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\
& \leq \left\| (S(t)(v_0, v_1) + w) - (S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n) \right\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} \times \\
& \quad \left(\|S(t)(v_0, v_1) + w\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}) + w_n\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \\
& \leq C \left(\|S(t)(v_0 - v_{n,0}, v_1 - v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} + \|w - w_n\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} \right) \times \\
& \quad \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \right. \\
& \quad \left. \|w\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|w_n\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'injection de Sobolev $H^{\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow L^6$ ainsi que l'affirmation (7.4.2), on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\| (w - w_n, \partial_t w - \partial_t w_n) \right\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)} \\
& \leq \left(\|S(t)(v_0 - v_{n,0}, v_1 - v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} + \|w - w_n\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right) \times \\
& \quad \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \right. \\
& \quad \left. \|w\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^2 + \|w_n\|_{H^1(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \\
& \leq C \left(\|S(t)(v_0 - v_{n,0}, v_1 - v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} + \|w - w_n\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3)} \right) \times \\
& \quad \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + C \right).
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, pour $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
\| (w - w_n, \partial_t w - \partial_t w_n) \|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)} & \leq C \int_0^t \left\| S(\tau)(v_0 - v_{n,0}, v_1 - v_{n,1}) \right\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} \times \\
& \quad \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + C \right) d\tau \times \\
& \quad \exp \left(\int_0^t \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + C \right) d\tau \right).
\end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder, on a :

$$\| (w - w_n, \partial_t w - \partial_t w_n) \|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C \left\| S(\tau)(v_0 - v_{n,0}, v_1 - v_{n,1}) \right\|_{L^2([0, T], L^6(\mathbb{T}^3))}$$

7.4. Preuve du théorème 4.1.12

$$\begin{aligned} & \times \left(\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^2([0,T],L^6(\mathbb{T}^3))}^2 + \|S(t)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^2([0,T],L^6(\mathbb{T}^3))}^2 + C \right) \\ & \exp \left(\int_0^t \left(\|S(\tau)(v_0, v_1)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + \|S(\tau)(v_{n,0}, v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 + C \right) d\tau \right) \end{aligned}$$

Par hypothèse de régularisation des données initiales (7.4.1), pour tout $1 < p < \infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|S(\tau)(v_0 - v_{n,0}, v_1 - v_{n,1})\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^p d\tau = 0.$$

Ce qui implique que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(w(t) - w_n(t), \partial_t w(t) - \partial_t w_n(t))\|_{L^\infty([0,T], H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

De plus, par cette même hypothèse (7.4.1), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(S(t)(v_0, v_1) - S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}), \partial_t S(t)(v_0, v_1) - \partial_t S(t)(v_{n,0}, v_{n,1}))\|_{L^\infty([0,T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

On conclut, de ces deux relations, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(v(t) - v_n(t), \partial_t v(t) - \partial_t v_n(t))\|_{L^\infty([0,T], H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 4.1.12. □

Bibliographie

- [1] A. Benyi, T. Oh, O. Pocovnicu, *Wiener randomization on unbounded domains and an application to almost sure well-posedness of NLS*, arXiv :1405.7326 [math.AP], 2014.
- [2] N. Burq, N. Tzvetkov, *Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation*, arXiv :1103.2222 [math.AP], 2011.
- [3] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds*, American Journal of Mathematics. Johns Hopkins University Press. Volume 126, October, 2004.
- [4] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *On non-linear Schrödinger boundary value problems*, <https://www.math.u-psud.fr/nb/articles/ext.pdf>. 2002.
- [5] R. Carles, *On the instability for the cubic nonlinear Schrödinger equation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 344, 8, 483-486. arXiv :math/0701858v1, 2007.
- [6] G. Chen, W. Schlag, *Dispersive estimates, Strichartz estimates and smoothing effects*, <https://pdfs.semanticscholar.org.pdf>, 2015.
- [7] V. D. Dinh, *Strichartz estimates for the fractional Schrödinger and wave equations on compact manifolds without boundary*, J. Differential Equations 263, No. 12, 8804-8837. arXiv :1609.07305 [math.AP], 2017.
- [8] F. Golse, *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, <https://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf>, 2012.
- [9] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer. Volume 249 de Graduate Texts in Mathematics, 173p-181p. 2014.
- [10] L. Grafakos, S. Oh, *The Kato-Ponce Inequality*, arXiv :1303.5144 [math.AP]. 2013.
- [11] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, American Journal of Mathematics. Johns Hopkins University Press. Volume 120, Number 5, October, 1998.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] G. Lebeau, *Perte de régularité pour les équations d'ondes sur-critiques*, Bull. Soc. math. France, 2005.
- [13] D. Li, *On Kato-Ponce and fraction Leibniz*, Revista Matematica Iberoamericana, Volume 35, Issue 1, 2019, pp. 23–100. arXiv :1609.01780 [math.AP], 2018.
- [14] L. Meas, *Dispersive and Strichartz estimates for the wave equation inside cylindrical convex domains*, Université Côte d'Azur, Mathematics [math.GM]. , tel-01597924, 2017.
- [15] T. Tao, *Finite time blowup for an averaged Navier-Stokes equations.*, J. Amer. Math. Soc. 29 , 601-674. arxiv.org/pdf/1402.0290.pdf, 2016.
- [16] N. Tzvetkov, *Random data wave equations* arxiv.org/abs/1704.01191v2, 2017.
- [17] B. Xia, *Equations aux dérivées partielles et aléas*, Université Paris Saclay, [https ://www.theses.fr/194659798](https://www.theses.fr/194659798), 2016.