



HAL
open science

Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique

Claudia Gabriela Reyes Avendaño

► **To cite this version:**

Claudia Gabriela Reyes Avendaño. Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique. Education. Université Paris Cité, 2020. Français. NNT : 2020UNIP7072 . tel-03211997

HAL Id: tel-03211997

<https://theses.hal.science/tel-03211997>

Submitted on 29 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique

Par Claudia Gabriela REYES AVENDAÑO

Thèse de doctorat en didactique des disciplines : **Mathématiques**

Dirigée par LAURENT VIVIER

Présentée et soutenue publiquement le 23 juin 2020

Devant un jury composé de :

TRIGUEROS Maria, Professeur, ITAM, México, Rapporteur
DRIJVERS Paul, Professeur, Utrecht University, Rapporteur
GIBEL Patrick, Maître de conférence HDR, Université de Bordeaux, Examineur
OKTAÇ Asuman, Professeur, Cinvestav-IPN, México, Examinatrice
KUZNIAK Alain, Professeur des Universités Émérite, Université de Paris,
Président, Examineur
VIVIER Laurent, Maître de conférence HDR, Université de Paris, Directeur



Except where otherwise noted, this is work licensed under
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/>

Laboratoire de Didactique André
Revuz (LDAR)
Université de Paris
Bâtiment Sophie Germain
Case 7018
8 place Aurélie Nemours
75 205 Paris Cedex 13

ED 623
Université Paris Diderot
Site des Grands Moulins
Bureau 179C - 1er étage aile C
9-15 esplanade des grands Moulins
75013 PARIS

*La normalité est une route pavée : on y marche
aisément mais les fleurs n'y poussent pas.*

Vincent Willem van Gogh

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier deux personnes qui ont été à mes côtés tout au long de cette grande période d'apprentissage. Tout d'abord, mon directeur de thèse, Laurent. Merci pour tout le soutien apporté tout au long de ces 4 années (un pour le master et trois pour le doctorat). Ce n'était pas une période facile, mais votre soutien inconditionnel, vos conseils, vos orientations et votre amitié ont fait de cette étape de ma vie l'une des meilleures. Merci beaucoup, prof Laurent, pour tous les jours, week-ends et jours fériés investis dans ces travaux de recherche. Je n'ai pas de mots pour vous remercier de tout votre soutien et de la bonne volonté avec laquelle vous m'avez toujours reçu. Ensuite, et surtout, à vous, prof Alain, merci, car même si vous n'étiez pas officiellement mon directeur, vous étiez toujours là pour me conseiller, pour lire mon travail et pour me guider dans tout ce processus. Vous avez joué un rôle fondamental dans ce travail de recherche et je suis reconnaissant d'avoir partagé et appris tout au long de cette étape avec deux grands chercheurs. Merci!

Je souhaite remercier les membres du jury : María Trigueros et Paul Drijvers, merci d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je vous remercie d'avoir pris le temps et le dévouement nécessaires pour lire mon travail de recherche et l'enrichir de vos précieux commentaires. Je remercie également Patrick Gibel et Asuman Oktaç d'avoir accepté de faire partie de mon jury et d'avoir manifesté leur intérêt pour ma thèse.

Je voudrais remercier Avenilde Romo du fond du cœur, merci d'avoir réalisé un de mes plus grands rêves, merci de m'avoir mis en contact avec Laurent et Alain. Avenilde, merci pour tous les conseils, le soutien et l'amitié que tu m'as apportés pendant toutes ces années, je suis vraiment reconnaissante de t'avoir rencontrée, tu es une excellente chercheuse et amie.

Je souhaite remercier l'une des chercheuses que j'admire le plus, Mme Michèle Ar-tigue, qui a écouté toutes mes présentations et les a remplies de sa sagesse. Je vous suis sincèrement reconnaissant d'avoir eu la chance de recevoir vos commentaires, conseils et suggestions concernant mon travail de recherche. Je tiens également à re-

mercier Cécile De Hosson pour son soutien et sa générosité, Christophe Hache pour son immense gentillesse et ses suggestions pour améliorer mon travail de recherche. Un grand merci à Isabelle Kermen pour son soutien et sa générosité.

Je souhaite également remercier le groupe ETM. Assia, merci pour ta gentillesse, ton amitié et tout ton soutien; Laurent, merci pour ta sympathie et les discussions concernant la physique; Phillipe, pour ton soutien, tes conseils et pour la correction de mon français; Blandine, merci pour ta gentillesse et tout le soutien que tu m'as apporté; Elizabeth Montoya, merci pour tout ton soutien, tu es une femme admirable; Jean-Baptiste; Dominique; Bernard; Fabrice; Macarena et Jannick pour avoir écouté mes nombreuses présentations et m'avoir fait part de vos précieux commentaires. Je vous suis vraiment reconnaissant d'avoir partagé tout ce temps avec vous, vous êtes des gens extraordinaires.

Merci au groupe de jeunes chercheurs pour toutes les rencontres, les échanges académiques, mais surtout pour la bonne ambiance et le soutien.

Merci beaucoup à mes amis. Sole, merci d'être mon ami dans cette aventure, nous rions, pleurons, discutons, mais surtout nous nous soutenons mutuellement à tout moment, merci! Tu occuperas toujours une place très spéciale dans mon cœur; Leonard, Jorge, Luz, Paula, pour avoir partagé de bonnes discussions, pour m'avoir fait sentir proche de ma maison et pour avoir partagé l'heure du déjeuner. Vero, merci pour ton amitié qui m'a permis de me sentir proche du Mexique et de ne jamais m'oublier, merci d'être l'une de mes meilleures amies. Ma très chère et meilleure amie Martha, merci de me faire rire, de me soutenir et de ne jamais m'oublier malgré la distance, vous formez tous une partie très spéciale de ma vie. Ma chère amie Anna, je te remercie pour ton soutien pendant tout ce temps, merci d'avoir partagé tant d'aventures, de voyages et de rires. Pendant cette période, tu es devenu une amie très spéciale pour moi. Merci beaucoup, Anna, et je suis sûr que nous nous reverrons très bientôt.

Je voudrais également remercier Evelyne et Julie pour leur patience, leur travail et leur soutien constants. Merci à Jérôme pour sa disponibilité, sa joie et tout son travail, ce travail n'aurait été rien sans tous ces articles et ces livres que tu m'as gentiment apportés.

Je voudrais remercier tout particulièrement les étudiants de l'ENP6 pour avoir participé aux activités de modélisation que nous avons menées dans le cadre de cette thèse. Merci au professeur Sandra de m'avoir permis de travailler avec son groupe d'étudiants et de m'avoir fourni les installations de l'ENP6. Je voudrais surtout remer-

cier l'ENP et l'UNAM, qui m'ont soutenu tout au long de cette période.

Merci à mes parents, pour m'avoir soutenu sans condition dans chacune de mes décisions et pour m'avoir toujours fait confiance. Vous avez été ma plus grande inspiration. Je n'ai que de la gratitude pour tout le dévouement, l'amour et la confiance que vous m'avez toujours accordés. Merci maman de m'avoir inspiré à continuer à me battre pour mes rêves, même s'ils sont fous, tu as toujours été là pour m'encourager. Merci, papa, de m'avoir soutenu à chaque instant tout au long de cette thèse, de tes conseils, des relectures et, surtout, d'avoir été mon inspiration. Je vous aime et je me sens vraiment privilégiée d'être votre fille.

Ma petite sœur, je voudrais te remercier pour tout ton soutien tout au long de ma vie, tu es une grande inspiration. Merci de m'avoir encouragé, de m'avoir fait rire, de m'avoir conseillé et de m'avoir donné tout l'amour que tu m'as donné. Je serai toujours reconnaissante d'avoir une sœur comme toi. Notre voyage en Europe n'a pas pu avoir lieu cette année, mais nous aurons l'occasion de le faire.

Merci à toute ma famille, mes cousins, cousines, neveux et nièces qui sont toujours dans mes pensées. À ma nièce Sofi, que j'admire pour être une fille modèle. Je ne doute pas que tu réaliseras tous tes rêves, et quoi qu'il arrive, tu auras toujours en moi quelqu'un en qui tu peux avoir confiance.

Je voudrais remercier tout spécialement mes grands-parents, Carmelita, Lolita, Raúl Reyes et Raúl Avendaño, qui m'ont accompagné tout au long de ma vie. Merci de toujours m'écouter, de m'aider à avancer quand je sens que je ne peux plus, de me donner confiance et de me guider quand il fait sombre. Vous serez toujours mon inspiration.

Leo, je n'ai pas de mots pour te remercier, tu as été la première personne qui, sans me connaître autant, m'a apporté son soutien pour que ce rêve devienne réalité. Ces quatre années à ton côté, ont été parmi les meilleures que j'ai jamais vécues. Je te remercie pour ton soutien inconditionnel, pour les voyages, les appels, les relectures de ma thèse, les promenades, les appels vidéo, les cours de latex et pour chaque moment que nous avons vécu ensemble. Merci de faire partie de ma vie et de me permettre de faire partie de la tienne. Cette aventure ne fait que commencer et comme tu m'as dit un jour de juillet 2016 "Nous allons réaliser ce rêve ensemble", je t'aime!

Résumé

L'objectif principal de ce travail de recherche est de savoir, dans quelle mesure la modélisation mathématique des phénomènes de mouvement influence le développement et la signification de la notion de fonction. Dans ce sens, tout au long des six chapitres de cette thèse, nous avons traité le domaine de la cinématique comme une sorte de carrefour entre la physique et les mathématiques. Le but était d'aborder la notion de fonction à travers des cycles de modélisation de phénomènes de mouvement, ce qui a conduit les élèves non seulement aux notions de courbe, fonction, équations paramétriques et dérivées, mais aussi aux concepts de distance, trajectoire, vitesse tangentielle, vitesse angulaire, accélération, accélération centripète et de cadres de référence. Par le biais de Tracker (logiciel d'analyse des vidéos de mouvement) et de GeoGebra, cette approche de la notion de fonction a permis non seulement de déclencher une transition entre les différents registres de représentation (Duval, 1999) de fonctions, mais aussi une série de processus cognitifs que nous avons analysés avec le cadre théorico-méthodologique Espaces de Travail en Cinématiques (ETC), extension du cadre Espace de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2016a), que nous avons développé dans cette thèse pour caractériser le travail effectué par les élèves. Pour atteindre l'objectif de cette recherche, nous avons conçu quatre activités de modélisation (MRU, MRUA, MCU et la combinaison d'un MRU+MCU), pour les élèves en dernière année de lycée intéressés par une carrière scientifique ou d'ingénieur, en utilisant l'ETC, le cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007) et les registres de représentation. Le travail réalisé par les élèves a été caractérisé par l'observation de l'évolution de la notion de fonction à travers les registres de représentation sémiotique et les processus cognitifs déclenchés (ETC) au cours des cycles de modélisation. En bref, ce travail montre la coordination de différentes entités théoriques (cycle de modélisation, registres de représentation et l'ETC) dans la caractérisation du travail effectué par les élèves lors de la réalisation de processus de modélisation des phénomènes de mouvement.

Mots-clés

Modélisation mathématique, Espaces de Travail Mathématiques (ETM), Espaces de Travail en Cinématiques (ETC), cycle de modélisation, Registres de représentation.

Teaching and learning numerical functions in a context of mathematical work and modeling

Abstract

The main objective of this research work is to know to what extent the mathematical modeling of movement phenomena influences the development and significance of the notion of function. In this sense, throughout the six chapters of this thesis, we have treated the domain of kinematics as a kind of intersection between physics and mathematics. The objective was to approach the notion of function through modeling cycles of motion phenomena, which led students not only to the notions of curve, function, parametric equations and derivative, but also to the concepts of distance, trajectory, tangential velocity, angular velocity, acceleration, centripetal acceleration and frames of reference. By means of Tracker (software for the analysis of motion videos) and GeoGebra, approaching the notion of function in this way triggered not only a transition between different function registers of semiotic representation (Duvall, 1999), but also a series of cognitive processes that we analyzed with the theoretical-methodological framework Kinematic Working Space (KWS), an extension of the framework Mathematical Working Space (Kuzniak et al., 2016a), which we developed in this thesis to characterize the work done by the students. To achieve the main objective of this research, we designed 4 modeling activities (URM, RUAM, UCM and the combination of an URM+UCM), for students in their last year of high school interested in studying a scientific or engineering career, using the ETC, the modeling cycle (Blum et Leiss, 2007) and the registers of semiotic representation. The work carried out by the students was characterized by observing the evolution of the notion of function through the registers of semiotic representation and the cognitive processes triggered (KWS) during the modeling cycles. In summary, this work shows the coordination of different theoretical entities (modeling cycles, representation registers and the KWS) in the characterization of the work done by students when carrying out modeling processes of movement phenomena concerning the mathematical object, function.

Keywords

Mathematical Modeling, Mathematical Working Space (MWS), Kinematics Working Spaces (KWS), Modeling Cycle, Register of Semiotic Representation.

Table des matières

Table des matières	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xv
Introduction	1
1 Préliminaires et contextualisation	7
1.1 La fonction	9
1.1.1 Une brève récapitulation de l'évolution de la notion de fonction	11
1.1.2 L'influence de l'étude du mouvement sur le développement de la notion de fonction et de science	20
1.1.3 La fonction dans le domaine des mathématiques	27
1.1.4 Le rôle de la fonction dans la cinématique	44
1.2 L'École Nationale Préparatoire (ENP)	63
1.2.1 L'enseignement de la fonction dans l'ENP	63
1.2.2 Changements dans les programmes d'études	64
1.2.3 La fonction dans le cours d'Analyse, programme mis à jour	75
1.2.4 L'Enseignement de la cinématique dans l'ENP	79
1.2.5 La modélisation à l'ENP	83
1.3 Difficultés d'apprentissage et d'enseignement des fonctions numériques	86
1.3.1 Difficultés d'apprentissage du concept de variable	86
1.3.2 La non connexion des registres de représentation	89
1.3.3 Les questions de recherche	92
2 Cadre théorique	97
2.1 Espaces de Travail Mathématiques (ETM)	99
2.1.1 Plans verticaux des ETM	106
2.1.2 Différents types des ETM	108
2.1.3 Paradigme	111
2.1.4 Activation de l'ETM	116
2.1.5 De la nécessité d'étendre un ETM	116
2.2 L'Espace de Travail en Cinématique (ETC)	117
2.2.1 Les plans d'ETC	117

2.2.2	Les paradigmes et les genèses d'ETC	118
2.2.3	Cinématique : Le paradigme du réel (CI)	118
2.2.4	Cinématique : Le paradigme de la mesure et de la quantification (CII)	123
2.2.5	Cinématique : Le paradigme de la formalisation et de l'idéalisation (CIII)	127
2.3	Modélisation au sein de la recherche en didactique des mathématiques	130
2.3.1	Quelques perspectives de la modélisation mathématique	131
2.3.2	Le cycle de modélisation de Blum et Leiss	136
2.4	ETC et modélisation mathématique	139
2.5	Retour sur les questions de recherches	143
3	Méthodologie	145
3.1	Introduction	146
3.2	L'ingénierie didactique	146
3.2.1	Description des phases	147
3.3	Analyse préliminaire de la recherche	148
3.4	Méthodologie d'analyse des données	149
3.4.1	Les registres de représentation utilisés dans le cadre de la recherche	151
3.4.2	Rôle des artefacts technologiques dans les activités	154
3.4.3	Éléments épistémologiques et cognitifs	156
3.4.4	Les activités de modélisation	160
4	Analyse a priori des activités	165
4.1	Introduction	166
4.2	Analyse a priori des activités	166
4.2.1	L'organisation des activités de modélisation dans les phases du cycle de modélisation	167
4.2.2	Analyse de l'objet mathématique fonction par rapport les registres de représentation	176
4.2.3	Analyse des activités par rapport de l'ETC et au cycle de modélisation	185
5	Analyse des activités de modélisation	209
5.1	Introduction	210
5.2	Mise en œuvre	210
5.2.1	Le champ de contraintes	211
5.3	Données prises en compte	214
5.4	L'activité 1, MRU	215
5.4.1	Groupe 1	215
5.4.2	Groupe 2	231
5.4.3	Groupe 3	247
5.4.4	Conclusion générale activité 1	258
5.5	L'activité 3, MCU	260

5.5.1	Groupe 1	260
5.5.2	Groupe 2	275
5.5.3	Groupe 3	292
5.5.4	Conclusion générale activité 3	304
5.6	L'activité 4, MRU+ MCU	305
5.6.1	Groupe 1	305
5.6.2	Groupe 2	321
5.6.3	Groupe 3	334
5.6.4	Conclusion générale activité 4	348
6	Conclusion	351
6.1	Retour sur les chapitres	352
6.2	Réponses aux questions de recherche	357
6.2.1	Réponse à la question QRa	358
6.2.2	Réponse à la question QRb	360
6.2.3	Réponse à la question QRc	362
6.2.4	Réponse à la question QR	364
6.3	Résumé des contributions de la recherche	367
6.4	Les limites de la recherche	369
6.5	Les perspectives de l'avenir	370
	Bibliographie	373
A	Les guides de travail	385
A.1	Activité MRU	385
A.2	Activité MRUA	387
A.3	Activité MCU	388
A.4	Activité MRU+MCU	391
B	Réponses aux guides de travail	393
B.1	Réponses de l'activité 1 (MRU)	393
B.1.1	Activité MRU, groupe 1	393
B.1.2	Activité MRU, groupe 2	399
B.1.3	Activité MRU, groupe 3	404
B.2	Réponses de l'activité 3 (MCU)	409
B.2.1	Activité MCU, groupe 1	409
B.2.2	Activité MCU, groupe 2	418
B.2.3	Activité MCU, groupe 3	427
B.3	Réponses de l'activité 4 (MRU+MCU)	438
B.3.1	Activité MRU+MCU, groupe 1	438
B.3.2	Activité MRU+MCU, groupe 2	448
B.3.3	Activité MRU+MCU, groupe 3	455
C	Article ETM6	467

Table des figures

1.1	Représentation géométrique de vitesse moyenne, effectuée par Oresme . . .	14
1.2	Définition de « mécanique », dictionnaire Richelet (1680)	22
1.3	Exemple du graphique $f(x) = x$ (Apostol,1977, p.63)	30
1.4	Exemple du représentation table de valeurs (Apostol,1977, p.64)	30
1.5	Représentation schématique du concept de fonction (Apostol,1977,p.63) . .	31
1.6	Exemple du représentation table de valeurs de $f(x) = x^2$ (Spivak, 1988, p.59)	34
1.7	Exemple de représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2$ dans sa forme discrète et continue (Thomas et Weir, 2005, p.22)	38
1.8	Pourquoi l'union des points ne peut pas être comme ça? (Thomas et Weir, 2005, p.22)	38
1.9	Représentation table de valeurs et graphique donnée par un logiciel infor- matique (Thomas et Weir, 2005, p.23)	39
1.10	Diagramme montrant une fonction en tant que machine, (Thomas et Weir, 2005, p.19)	39
1.11	Diagramme d'une fonction de l'ensemble D à l'ensemble Y qui attribue un seul élément de Y à chaque élément de D (Thomas et Weir, 2005, p.19) . . .	40
1.12	Exemplification de Stewart d'un représentation graphique d'une fonction (Stewart, 2008, p. 10)	41
2.1	Le modèle des ETM	101
2.2	Plans verticaux ETM	106
2.3	Schéma des types de l'ETM	110
2.4	Le paradigme de Kuhn	113
2.5	Schéma d'ETC en CI	120
2.6	Schéma d'ETC en CII	124
2.7	Schéma d'ETC en CIII	128
2.8	Diagramme présenté par Pollak pour visualiser les 4 définitions (Pollak, 1979, p.245)	133
2.9	Diagramme du cycle de modélisation (Galbraith et al. 2003, p.4)	135
2.10	Diagramme du cycle de modélisation (Geiger, 2011, p.313)	135
2.11	Diagramme du cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007, p.225)	136
2.12	Dynamique complète et désordonnée dans le cycle de modélisation	138
2.13	Condition pour considérer une tâche comme une tâche de modélisation . .	139
2.14	MCU divisé en phases du cycle de modélisation (Blum et Leiss (2007)	140
2.15	ETC dans le cycle de modélisation (Blum et Leiss (2007)	141

2.16	Analyse globale avec le cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007)+ ETC et paradigmes	142
3.1	Interface Tracker (activité 3)	155
3.2	Interface GeoGebra (activité 3)	156
4.1	Réalisation du Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)	178
4.2	Registres TV et GT attendu du MRU	179
4.3	Registres GG et AS attendu du MRU	179
4.4	Réalisation du Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)	180
4.5	registres TV et GT attendu du MCU	181
4.6	Registres GG et AS attendu du MCU	182
4.7	Réalisation de la combinaisons du MRU+MCU	183
4.8	Registres TV et GT attendu, MRU+MCU	183
4.9	Registres GG et AS attendu, MRU+MCU	184
4.10	Recréation du MRU	187
4.11	Tracker, partie 1	187
4.12	Tracker, partie 2	188
4.13	GeoGebra	189
4.14	Traitement Mathématique, partie 1	190
4.15	Traitement Mathématique, partie 2	191
4.16	Validation du cycle de modélisation	192
4.17	La fonction dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MRU (analyse a priori)	193
4.18	Éléments de l'ETC activés dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MRU (analyse a priori)	193
4.19	Réalisation du MCU	195
4.20	Tracker (partie 1), MCU	195
4.21	Tracker (partie 2), MCU	196
4.22	GeoGebra, MCU	197
4.23	Traitement Mathématique, MCU	198
4.24	Validation du Cycle de modélisation, MCU	199
4.25	Éléments de l'ETC activés dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MCU (analyse a priori)	199
4.26	La fonction dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MCU (analyse a priori), activité MCU (analyse a priori)	200
4.27	Illustration de la combinaison des mouvements, MRU+MCU	202
4.28	Phases 1 et 2, MRU+MCU	202
4.29	Tracker (partie 2), MRU+MCU	203
4.30	GeoGebra, MRU+MCU	204
4.31	Phases 4 et 5, MRU+MCU	205
4.32	Validation du Cycle de modélisation, MRU+MCU	205
4.33	Éléments de l'ETC activés dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MRU+MCU (analyse a priori)	206

4.34	La fonction dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MCU (analyse a priori), activité MRU+MCU (analyse a priori)	207
5.1	Laboratoire des sciences de la ENP 6	212
5.2	Réalisation du mouvement, groupe 1	216
5.3	Essai ruban adhésif, MRU, groupe 1	217
5.4	Phases 1 et 2, ETC, groupe 1	218
5.5	Réponse 2a et 2b, MRU, groupe 1	219
5.6	Réponses 2a et 2b, ETC, groupe 1	221
5.7	Réponse I, II et III, MRU, groupe 1	222
5.8	Réponses I, II et III, ETC, groupe 1	223
5.9	Réponse 3 et 4, MRU, groupe 1	224
5.10	Validation eq. de la trajectoire, groupe 1	226
5.11	Réponses 3 et 4, ETC, groupe 1	227
5.12	Réponses 5 et 6, MRU, groupe 1	227
5.13	Réponses 5 et 6, MRU, groupe 1	228
5.14	La fonction autour du cycle de modélisation, activité MRU (groupe 1)	229
5.15	Analyse globale, activité 1 (groupe 1)	230
5.16	Réalisation du mouvement, groupe 1	231
5.17	Phases 1 et 2, ETC, groupe 2	232
5.18	Réponses 2a et 2b, MRU, groupe 2	233
5.19	Réponses 2a et 2b, ETC, groupe 2	236
5.20	Réponses I, II et II, MRU, groupe 2	237
5.21	Réponses I, II et III, ETC, groupe 2	239
5.22	Réponses 3 et 4, MRU, groupe 2	240
5.23	Réponses 3 et 4, ETC, groupe 2	241
5.24	Réponses 5 et 6, MRU, groupe 2	242
5.25	Réponses 5 et 6, ETC, groupe 2	244
5.26	La fonction autour du cycle de modélisation, activité MRU (groupe 2)	245
5.27	Analyse globale, activité 1 (groupe 2)	246
5.28	Réalisation du mouvement, groupe 3	247
5.29	Phases 1 et 2, ETC, groupe 3	249
5.30	Réponse 2a et 2b, MRU, groupe 3	250
5.31	Réponses 2a et 2b, ETC, groupe 3	253
5.32	Réponses I, II et II, MRU, groupe 3	253
5.33	Réponses I, II et III, ETC, groupe 3	254
5.34	Réponse 3 et 4, MRU, groupe 3	255
5.35	Réponse 3 et 4, MRU, groupe 3	256
5.36	La fonction autour du cycle de modélisation, activité MRU (groupe 3)	258
5.37	Analyse globale, activité 1 (groupe 3)	258
5.38	Réalisation du MCU, groupe 1	260
5.39	Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 1	262
5.40	Réponses 3, 4 et 5 (MCU), groupe 1	263
5.41	Réponses 3, 4 et 5 (MCU),ETC, groupe 1	264
5.42	Réponses 6 et 7, MCU, groupe 1	266

5.43 Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 1	268
5.44 Réponses 8, 9 et 10, MCU, groupe 1	269
5.45 Réponses 8,9 et 10 (MCU), ETC, groupe 1	270
5.46 Réponse 11, MCU, groupe 1	271
5.47 Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 1	272
5.48 La fonction autour du cycle de modernisation, activité MCU (groupe 1)	273
5.49 Analyse globale, activité 3 (groupe 1)	274
5.50 Réalisation du MCU, groupe 2	275
5.51 Diabolo chinois, ETC	276
5.52 Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 2	277
5.53 Réponses 3, 4 et 5 (MCU), groupe 2	280
5.54 Réponses 3, 4 et 5 (MCU), ETC, groupe 2	281
5.55 Réponses 6 et 7, MCU, groupe 2	282
5.56 Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 2	284
5.57 Réponses 8, 9, 10 et 11, MCU, groupe 2	285
5.58 Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 2	287
5.59 Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 2	288
5.60 Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 2	289
5.61 La fonction autour du cycle de modernisation, activité MCU (groupe 2)	290
5.62 Analyse globale, activité 3 (groupe 2)	291
5.63 Réalisation du MCU, groupe 3	292
5.64 Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 3	293
5.65 Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 3	294
5.66 Réponses 3, 4 et 5 (MCU), groupe 3	295
5.67 Réponse 3, 4 et 5 (MCU), ETC, groupe 3	296
5.68 Réponses 6 et 7, MCU, groupe 3	297
5.69 Réponses 6 et 7, MCU, groupe 3	299
5.70 Réponses 8, 9 et 10, MCU, groupe 3	300
5.71 Réponses 8,9 et 10 (MCU), ETC, groupe 3	301
5.72 Réponse 11, MCU, groupe 3	301
5.73 Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 3	302
5.74 La fonction autour du cycle de modernisation, activité MCU (groupe 3)	303
5.75 Analyse globale, activité 3 (groupe 3)	303
5.76 Réponses 1, 2, 3 et 4, MRU+MCU, groupe 1	305
5.77 Analyse des réponses 1, 2, 3 et 4 (MRU+MCU), ETC, groupe 1	307
5.78 Les trois variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 1	309
5.79 Deux variantes des vitesses (MRU+MCU), ETC, groupe 1	310
5.80 Réalisation du mouvement, $V_{MRU} = V_{MCU}$, ETC, groupe 1	312
5.81 Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 1	313
5.82 Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 1	314
5.83 Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 1	315
5.84 Réponses 8 et 9 (MRU+MCU), ETC, groupe 1	316
5.85 Réponses 10 et 11, MRU+MCU, groupe 1	317
5.86 Réponses 10 et 11 (MRU+MCU), ETC, groupe 1	318

5.87	La fonction autour du cycle de modernisation, activité MRU+MCU (groupe 1)	319
5.88	Analyse globale, activité 4 (MRU+MCU), groupe 1	320
5.89	Réponses 1, 2, 3 et 4, MRU+MCU, groupe 2	321
5.90	Réponses 1, 2, 3 et 4 (MRU+MCU), ETC, groupe 2	323
5.91	Les trois variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 2	324
5.92	Deux variantes des vitesses (MRU+MCU), ETC, groupe 2	325
5.93	MRU=MCU, ETC, groupe 2	325
5.94	Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 2	326
5.95	Réponses 5,6 et 7 (MRU+MCU), groupe 2	327
5.96	Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 2	328
5.97	Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 2	329
5.98	Réponses 10 et 11, MRU+MCU, groupe 2	330
5.99	Réponses 10 et 11 (MRU+MCU), ETC, groupe 2	331
5.100	La fonction autour du cycle de modernisation, activité MRU+MCU (groupe 2)	332
5.101	Analyse globale, activité 4 (MRU+MCU), groupe 2	333
5.102	Réponses 1, 2, 3 et 4, MRU+MCU, groupe 3	334
5.103	Réponses 1, 2, 3, et 4 (MRU+MCU), ETC, groupe 3	336
5.104	Les trois variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 3	337
5.105	Les deux variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 3	338
5.106	$V_{MRU} = V_{MCU}$, groupe 3	339
5.107	Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 3	340
5.108	Réponses 5, 6 et 7 (MRU+MCU), ETC, groupe 3	341
5.109	Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 3	342
5.110	Réponses 8 et 9 (MRU+MCU), ETC, groupe 3	343
5.111	Réponses 10 et 11, MRU+MCU, groupe 3	344
5.112	Réponses 10 et 11, ETC, groupe 3	345
5.113	La fonction autour du cycle de modernisation, activité MRU+MCU (groupe 3)	347
5.114	Analyse globale, activité 4 (MRU+MCU), groupe 3	347

Liste des tableaux

1.1	Exemples introduction de fonction	42
1.2	Analyse du livre de Giancoli (2006) sur le MRU	46
1.3	Analyse du livre de Serway et al. (2005) sur le MRU	47
1.4	Analyse du livre de Halliday et al. (2010) sur le MRU	48
1.5	Analyse du livre de Sears et al. (2012) sur le MRU	49
1.6	Analyse du livre de Giancoli (2006) sur le MRUA	51
1.7	Analyse du livre de Serway et al. (2005) sur le MRUA	53
1.8	Analyse du livre de Halliday et al. (2010) sur le MRUA	55
1.9	Analyse du livre de Sears et al. (2012) sur le MRUA	57
1.10	Analyse du livre de Giancoli (2006) sur le MCU	59
1.11	Analyse du livre de Serway et al. (2005) sur le MCU	60
1.12	Analyse du livre de Halliday et al. (2010) sur le MCU	61
1.13	Analyse du livre de Sears et al. (2012) sur le MCU	62
1.14	Objectif général, mathématiques V et VI	64
1.15	Contenu programmatique par unité, mathématiques V et VI	68
1.16	Notion de la fonction	70
1.17	Notion de la fonction	73
1.18	Éléments proposés par Ursini et Trigueros (1998) pour une conceptualisation adéquate de la variable (traduction personnelle de l'espagnol vers le français)	90
2.1	Table comparatif des éléments du paradigme, Kuhn avec ETM	115
3.1	Importance des 4 aspects considérés dans les activités de modélisation . . .	161
3.2	Éléments de compréhension de la méthodologie d'analyse des données . . .	163
4.1	Question(s) et consigne(s), des activités proposées, qui activent les phases 1 et 2 du cycle de modélisation	168
4.2	Question(s) et consigne(s) , des activités proposées, qui activent la phase 3 du cycle de modélisation	170
4.3	Question(s) et consigne(s), des activités proposées, qui activent les phases 4 et 5 du cycle de modélisation	172
4.4	Question(s) et consigne(s), des activités proposées, qui activent les phases 6 et 7 du cycle de modélisation	175

5.1	Artefacts et phénomène de mouvement exécutés par chacune des groupes	. 213
6.1	Les registres de représentation et les artefacts qui les font émerger 358
A.1	Ecuaciones paramétricas (t y θ) 390
A.2	Valores de la velocidad angular, velocidad tangencial y aceleración centrípeta	390

Introduction

Ce travail de recherche trouve son origine, premièrement, dans mon expérience en tant qu'enseignante de mathématiques et de physique à l'École Nationale Préparatoire (ENP)¹. En tant qu'enseignante de ces deux disciplines, j'ai été témoin, non seulement du manque de liens qui existe lorsque ces disciplines sont enseignées, mais aussi de la faible, ou souvent de l'absence, signification des objets mathématiques chez les élèves. Deuxièmement, et en se basant sur le faible lien entre les disciplines et le manque de sens que les élèves donnent aux objets mathématiques, nous nous intéresserons à l'étude de ces situations du point de vue de la recherche pour les comprendre et, à partir de cette compréhension, proposer des activités qui cherchent à contribuer en vue de surmonter ces difficultés.

Du point de vue de l'enseignement, il est évident que l'un des objets mathématiques qui, historiquement, a présenté des difficultés tant pour l'enseignement que pour la compréhension et l'apprentissage, c'est le concept de fonction. Cette difficulté est immergée dans la problématique générale de l'enseignement de l'analyse. Un bon nombre d'enseignants considèrent qu'il vaut mieux l'enseigner dans une perspective basée sur l'intuition et, d'autres, que le plus pratique est de lui donner un traitement formel. Les enseignants qui préfèrent traiter la notion fonction de manière formelle partent du principe qu'il suffit de la définir très précisément pour que l'élève la comprenne et l'intègre dans le cadre d'une connaissance solide. Nous considérons que, comme le mentionne [Artigue \(1998\)](#), les mathématiques doivent être conçues comme une science construite dans des contextes historiques et culturels, de telle sorte qu'en enseignant les mathématiques un équilibre soit trouvé entre la logique de la connaissance mathématique et celle du développement cognitif des élèves.

Les difficultés qui sont générées lors de l'apprentissage du concept de fonction est un sujet de recherche qui a été largement discuté dans la didactique des mathé-

1. L'École Nationale Préparatoire est un établissement d'enseignement similaire au lycée français (élèves de 16 à 18 ans environ), voir section [1.2](#) pour une explication plus détaillée.

matiques au cours des 30 dernières années. Pendant cette période, d'importantes recherches ont été menées qui ont contribué à la compréhension de certains phénomènes qui se déclenchent dans le processus d'enseignement-apprentissage de la notion de fonction. Par exemple, [Orton \(1983\)](#) souligne que l'un des principaux problèmes que rencontrent les étudiants face à la différenciation, est qu'ils n'ont pas une réelle compréhension de la notion de fonction. [Selden et al. \(1989\)](#) ont noté que les élèves qui avaient de bons résultats dans les cours traditionnels d'analyse avaient plus de difficultés à résoudre des problèmes non routiniers que les élèves ayant de faibles notes. Dans [Selden et al. \(1994\)](#), les auteurs complètent l'étude précédente en mentionnant que le fait de travailler avec différentes représentations de la fonction, dans la résolution des problèmes, génère des confusions chez les étudiants. [Artigue et al. \(1995b\)](#) souligne que les élèves montrent des conflits autour de la notion de fonction. C'est-à-dire, l'auteur indique que, généralement, les élèves se font une image de la notion de fonction qui est loin de la définition formelle mais proche des prototypes communs qui émergent de l'association entre la fonction et la formule ou la fonction et la courbe régulière, ce qui les amène à rejeter les fonctions et à admettre les objets non fonctionnels. [Artigue et al. \(1995b\)](#) parle également de l'impact des différentes représentations de la fonction, généralement dissociées les unes des autres, et de leur influence sur les réponses des élèves. Dans le spectre des recherches qui ont été menées, il y a non seulement celles qui mettent en évidence les difficultés des élèves, mais aussi celles qui proposent des stratégies qui peuvent aider le processus d'enseignement et d'apprentissage, par exemple, [Tall \(2010\)](#) souligne l'importance d'utiliser l'analyse à partir des expériences faites par les étudiants, de manière à ce qu'ils transforment l'expérience naturelle en définitions mathématiques; [Ramírez-Leal et al. \(2016\)](#) abordent la notion de fonction et l'importance de transiter ses différents registres de représentation; [Eisenberg \(2002\)](#) traite des difficultés d'apprentissage de la notion de fonction d'un point de vue historique et psychologique, etc.

En ce qui concerne la modélisation mathématique, de nombreuses recherches dans le monde entier ont montré que ce type d'activité, qui provient de situations contextualisées, aide les élèves à comprendre les objets mathématiques traités. Par exemple, [Blum et al. \(2007\)](#) mentionnent qu'en tant que stratégie didactique, la modélisation mathématique émerge comme une ressource qui permet non seulement la signification des objets mathématiques par la construction de modèles, lors de la résolution de problèmes contextualisés, mais elle génère également un intérêt envers la discipline.

Au Mexique, la réforme intégrale de l'éducation de base exprime la nécessité, pour les élèves de ces niveaux d'éducation (de la maternelle au lycée), de modéliser des situations de la vie quotidienne (SEP, 2011) et dans le monde entier, l'OCDE considère la modélisation comme faisant partie des critères d'évaluation dans le test PISA (Pisa, 2010). L'ENP² ne fait pas exception, puisque dans la mise à jour du programme scolaire de 2017³, la modélisation mathématique fait partie des stratégies d'enseignement recommandées.

En ce sens, nous pensons qu'il est nécessaire que la modélisation mathématique soit intégrée dans le programme d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques et ne soit pas seulement une ressource didactique. En particulier, nous pensons qu'un atelier de modélisation serait une option souhaitable. C'est pourquoi ce travail de recherche vise à analyser et à déterminer l'influence de la modélisation, de phénomènes de mouvement (cinématique), et du travail mathématique sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions numériques d'un atelier de modélisation de 3 mois. En ce sens, tout au long de ce travail de recherche, nous essayons d'apporter un équilibre, tant dans les disciplines concernées (mathématiques et physique) que dans les éléments théoriques de la didactique (ETC, cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007) et registres de représentation (Duval, 2006)) qui soutiennent cette recherche. Nous considérons qu'il est nécessaire que les équations de mouvement puissent être traitées dans leur statut de relations fonctionnelles, de telle sorte que la notion de fonction émerge des phénomènes de mouvement et non, comme le résultat d'une définition purement mathématique axée sur le développement des compétences opérationnelles (Artigue et al., 1995a, Hitt, 1998, 2003, Ramírez-Leal et al., 2016).

Ci-dessous, et afin de comprendre ce travail, nous présentons l'une des questions génératrices de la recherche :

Dans quelle mesure le travail sur les phénomènes de mouvement, à travers des processus de modélisation, aide-t-il à développer la notion de fonction chez les élèves en dernière année de lycée ?

La signification de l'expression "dernière année de lycée" est directement lié aux élèves avec lesquels nous avons travaillé pour cette recherche, qui s'est déroulée dans la ville du Mexico. Il s'agit d'étudiants, entre 17 et 18 ans, intéressés par l'obtention d'un diplôme scientifique ou d'ingénieur (des étudiants ayant un bon niveau scolaire)⁴.

2. l'institution où a été effectuée, la mise en œuvre de cette recherche, section 1.2

3. 1.2.2

4. La ENP compte 4 spécialités : sciences exactes et ingénierie (nom donné à l'UNAM à cette année,

Pour des raisons pratiques de notation, et afin de rendre plus claire la référence à ce niveau d'enseignement, nous l'appellerons « classe préparatoire de terminale scientifique » (PTS).

Pour en revenir à notre question, nous pouvons mentionner que lui apporter une réponse n'est pas évident car il y a beaucoup d'éléments qui interagissent. Cependant, dans cette recherche, nous essayons d'y répondre par des composantes théoriques de la didactique. Le choix du cadre théorique a été fait parce que, dans cette recherche, nous avons 3 éléments de base, **(i)** nous travaillons avec : la notion de fonction (mathématiques), la cinématique (physique), la modélisation mathématique et les élèves. Aussi, nous nous sommes intéressés **(ii)** aux processus cognitifs que nous voulions générer chez les élèves, à partir des objets mathématiques et physiques, quand nous faisons émerger la notion de fonction (lorsque les activités de modélisation sont conçues) et, **(iii)** de caractériser le travail des élèves (quand ils font face aux activités). Tout cela afin de savoir dans quelle mesure ces activités (en utilisant le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#) comme cadre d'organisation des tâches qui sont élaborer dans cette thèse) amènent les élèves à développer la notion de fonction. Conformément à ce qui précède il est naturel d'utiliser de la théorie des Espaces de Travail Mathématiques (ETM), qui est un cadre théorique et méthodologique axé sur la partie épistémologique et cognitive du travail mathématique (section 2.1), et de faire évoluer cette théorie vers le domaine de la cinématique (ETC), cadre que nous avons proposé dans ce travail de recherche (section 2.2).

À cette fin, nous organisons notre travail de recherche dans les chapitres suivants : Le chapitre 1 nous permet de contextualiser les difficultés d'enseignement et d'apprentissage du concept de fonction. C'est-à-dire, nous faisons un bref parcours historico-épistémologique, pour voir l'évolution de ce concept, d'un point de vue mathématique, mais aussi physique. Nous avons analysé quatre livres d'analyse, sur le thème de fonction, et quatre livres de physique générale, sur le thème de la cinématique, afin de voir comment la notion de la fonction est abordée dans ces deux disciplines. Nous présentons une analyse des différences entre les programmes d'études, 1996 et de 2017, de l'École National Préparatoire (établissement d'enseignement où nous effectuons la mise en œuvre) et nous montrons la dissociation entre les programmes en ce qui concerne l'importance de la fonction considérée comme une équation de mou-

Área 1), sciences de la santé et biologie (Área 2), administration et sciences sociales (Área 3), et arts et sciences humaines (Área 4). Les étudiants doivent choisir l'une de ces 4 spécialités lorsqu'ils passent en dernière année du lycée (pour voir plus de détails allez à la section 1.2).

vement. À partir de toute cette étude, nous posons nos questions de recherche. Dans le chapitre 2, nous présentons et décrivons, en détail, le cadre théorique sur lequel repose notre recherche. La théorie sous-jacente est la théorie de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) [Kuzniak \(2011\)](#) créée à l'origine pour caractériser le travail en géométrie (ETM_G), mais qui s'est maintenant diversifié dans d'autres domaines des mathématiques. Dans notre cas, nous avons proposé la théorie Espaces de Travail en Cinématique avec les paradigmes CI, CII et CIII (mentionné pour la première fois dans [Reyes-Avenidaño \(2018\)](#), C) que nous considérons comme important puisque nous apportons une contribution théorique pour caractériser le travail effectué dans la modélisation mathématique des phénomènes cinématiques. Finalement, comme nous souhaitons connaître l'effet de la modélisation sur l'enseignement et l'apprentissage, nous considérons le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#). Dans le chapitre 3, nous décrivons la méthodologie que nous avons suivie dans nos recherches. Nous nous sommes appuyés sur l'ingénierie didactique ([Artigue, 2002a](#)) pour le développement intégral de notre travail. Dans ce chapitre, nous présentons également la méthodologie d'analyse des données que nous avons obtenues dans le cadre de notre mise en œuvre. Dans le chapitre 4, nous avons effectué une analyse a priori (en utilisant nos 3 principaux éléments théoriques, le cycle de modélisation ([Blum et Leiss, 2007](#)), les registres de représentation [Duval \(1999\)](#) et l'ETC) pour établir les comportements et les résultats attendus des élèves dans l'expérimentation. Nous avons également mentionné les caractéristiques physiques du terrain où nous avons réalisé l'atelier de modélisation, les matériaux utilisés par les étudiants et par nous (chercheurs). Au chapitre 5, nous présentons l'analyse des résultats obtenus dans l'atelier de modélisation, que nous avons analysés avec le cycle de modélisation ([Blum et Leiss, 2007](#)), les registres de représentation ([Duval, 1999](#)) et l'ETC (cadre théorique proposé dans ce travail de recherche). Finalement, nous présentons la conclusion (chapitre 6), qui nous amènent à donner des réponses aux questions de recherche. Nous montrons les limites que notre travail avait et mentionnons les perspectives que notre travail peut avoir pour de nouvelles recherches

Chapitre 1

Préliminaires et contextualisation

Sommaire

1.1	La fonction	9
1.1.1	Une brève récapitulation de l'évolution de la notion de fonction	11
1.1.2	L'influence de l'étude du mouvement sur le développement de la notion de fonction et de science	20
1.1.3	La fonction dans le domaine des mathématiques	27
1.1.4	Le rôle de la fonction dans la cinématique	44
1.2	L'École Nationale Préparatoire (ENP)	63
1.2.1	L'enseignement de la fonction dans l'ENP	63
1.2.2	Changements dans les programmes d'études	64
1.2.3	La fonction dans le cours d'Analyse, programme mis à jour	75
1.2.4	L'Enseignement de la cinématique dans l'ENP	79
1.2.5	La modélisation à l'ENP	83
1.3	Difficultés d'apprentissage et d'enseignement des fonctions numériques	86
1.3.1	Difficultés d'apprentissage du concept de variable	86
1.3.2	La non connexion des registres de représentation	89
1.3.3	Les questions de recherche	92

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous présentons les trois sections qui menant à la problématique de notre travail de recherche et les questions qui le guide. Avant d'expliquer chacune des sections, il est important de garder à l'esprit que, bien que ce travail se concentre sur l'objet mathématique fonction, la cinématique est, aussi, un élément très important. En ce sens, tout au long de la thèse, nous observerons plusieurs sections consacrées à la cinématique mais sans perdre de vue l'objet fonction.

Dans la première section 1.1, nous parlons de la fonction : nous mentionnons et nous expliquons quelques éléments appartenant à la didactique, mais contextualisés à l'objet mathématique fonction ; nous faisons un historique de cette notion au fil du temps, d'un point de vue des mathématiques et, aussi, de la cinématique (dans le but de trouver des obstacles épistémologiques). Également, dans cette section, nous avons analysé quatre livres d'analyse, sur le sujet de la fonction, et quatre livres de physique générale, au sujet de la cinématique (tous les livres sont des classiques de l'enseignement de la classe préparatoire du terminal scientifique et des premiers semestres de l'université au Mexique¹) pour observer l'institutionnalisation de ces sujets, les obstacles et les réussites possibles qui découlent de l'enseignement. Les huit livres que nous avons choisi figurent dans la bibliographie recommandée, tant dans les programmes des lycées comme dans les premiers semestres des licences en mathématiques pures et en physique. Ces livres font partie des connaissances des enseignants (puisqu'ils les utilisaient lorsqu'ils étaient étudiants) et, les livres font également partie des livres recommandés par l'institution (UNAM) pour la planification de leurs cours. La deuxième partie (section 1.2) est consacrée au contexte de l'institution dans laquelle l'expérimentation a été menée, l'ENP. Nous étudions les programmes d'analyse, de physique et le rôle de la modélisation mathématique dans ces disciplines. Le but était de trouver des éléments qui pourraient être des facteurs, positifs ou négatifs, dans l'apprentissage des fonctions. Également, nous avons voulu compléter l'étude, épistémologique et didactique, réalisée dans les sections précédentes. Dans la troisième section (1.3), nous analysons quelques difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage des fonctions depuis les parties 1.1 et 1.2. La dernière partie (1.3.3), de ce premier chapitre, est consacrée à la problématique et aux questions de recherche.

1. Il est important de mentionner que, contrairement à la France, il n'existe pas de manuels au Mexique et que la bibliographie recommandée par les institutions est facultative. En d'autres termes, les enseignants peuvent se baser sur les livres qu'ils préfèrent.

1.1 La fonction

La fonction est le principal objet mathématique de cette recherche. Pour cette raison, nous parlons de certains des termes, dans le contexte de la didactique des mathématiques, que nous utilisons lorsque nous nous y référons. Tout d'abord, nous abordons la signification *d'objet mathématique*. [Pecharromán \(2014\)](#) mentionne qu'un *objet mathématique* peut représenter une qualité, une action ou une fonction dans un contexte. Cela veut dire que les objets mathématiques sont des éléments qui sont définis, en principe, dans le domaine des mathématiques; chaque objet a ses propres représentations, propriétés, fonctions, caractéristiques et règles de fonctionnement bien définies. Cependant, ces objets peuvent aussi être utilisés en dehors de contextes purement mathématiques, en assumant différentes représentations, fonctions et significations tout en conservant leurs règles d'utilisation (réification²). Dans notre cas, l'objet mathématique d'intérêt est la fonction qui est d'une grande importance non seulement en mathématiques mais aussi dans d'autres disciplines, en particulier celle qui nous intéresse dans cette recherche : la cinématique. Les représentations, propriétés, fonctions, caractéristiques et règles d'opération de ce objet mathématique dans le domaine des mathématiques, comme dans celui de la cinématique (en considérant le mouvement en termes de ses variables physiques), sont mentionnées tout au long de ce travail dans le but d'observer les différences et les similitudes qui existent entre elles. Cette étude nous a aidés à comprendre le rôle de la fonction dans chacun de ces domaines et le rôle que joue la modélisation.

Le *representamen* est un autre terme important à considérer. Assigner des représentations à des objets mathématiques nous permet de les exprimer et de les utiliser dans des situations et des contextes différents –de quelque chose de très abstrait au sein des mathématiques, à une situation contextualisée dans une autre discipline– ces représentations sont fortement liées à la signification ou aux caractéristiques qui leur ont été attribuées. Cependant, ces représentations ne se réfèrent pas toujours aux mêmes objets. Par exemple, nous considérons qu'une expression comme $A\cos(\omega t)$ est davantage considérée en cinématique (du côté physique) comme un mouvement périodique que comme une fonction.

Dans le sens de [Peirce \(1931\)](#), le *representamen* constitue des signes qui sont attribués par les caractéristiques et/ou fonctions de l'objet mathématique. La relation

2. La réification est la dernière des trois étapes (l'intériorisation, la condensation et la réification) du développement d'un concept mathématique qui propose [Sfard \(1991\)](#)

entre les représentations (ou les signes), et l'objet peut se manifester sous trois formes, à travers (i) les icônes lorsqu'il existe une similitude de forme avec l'objet, par exemple, les orbites des planètes, capturées dans une image, nous conduisent à penser aux ellipses; (ii) les indices lorsqu'il existe des indications ou des indices, par exemple, la dérivée des fonctions nous font penser, dans un contexte géométrique, à des droites tangentes, mais ils peuvent également indiquer les vitesses et l'accélération dans le domaine de la physique; et/ou (iii) des symboles lorsqu'il existe une convention ou une loi selon laquelle une certaine représentation signifie quelque chose dans certains contextes, par exemple, la lettre x est une lettre alphabétique mais, dans le contexte des mathématiques, lorsque nous voyons un x , nous la relierons à une inconnue ou à une variable si nous travaillons en algèbre, ou à l'axe horizontal si nous sommes en géométrie. En ce sens, nous pouvons dire que la fonction a différentes représentations (à l'intérieur et à l'extérieur des mathématiques) auxquelles nous pouvons accéder par des icônes, indices ou symboles.

D'autre part, une fonction peut être représentée graphiquement, algébriquement ($f(x)$, $f \circ g$, $f'(x)$...), arithmétiquement, comme une formule (en physique), etc. et chacune de ces représentations peut générer des significations différentes selon le contexte dans lequel nous travaillons³. Duval (1999) parle des différents registres de représentation sémiotique qui sont générés en mathématiques. Dans cette recherche, nous utilisons la distinction entre l'objet mathématique et sa représentation au sens de Duval (1999), qui mentionne que les objets mathématiques sont des abstractions de la pensée à laquelle des représentations sont assignées afin de pouvoir les expliquer, les travailler et les communiquer.

Duval (1999) souligne que les représentations sémiotiques ne sont pas seulement des éléments essentiels pour l'activation des processus cognitifs de la pensée, mais jouent également un rôle important dans (i) le développement des représentations mentales, (ii) l'accomplissement des différentes fonctions cognitives, et (iii) la production des connaissances. Il est important de mentionner que le traitement de ces représentations dépend du système sémiotique auquel elles appartiennent.

Les représentations sémiotiques sont de productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentations qui a ses contraintes

3. Dans les sections 1.1.3 et 1.1.4, nous parlons plus en détail de ces représentations, dans le domaine de l'analyse et de la cinématique.

propres de signification et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. (Duval, 1993, p.39)

Dans notre cas, nous travaillons avec quatre registres de représentation de la notion de fonction : mouvement physique dans le monde réel, table des valeurs, graphique et algébrique (qui sont développés et expliqués plus en détail au chapitre 3, méthodologie). Ces quatre systèmes sémiotiques permettent les trois activités cognitives fondamentales données par Duval (1993)⁴, de cette façon nous pouvons les considérer comme des registres de représentation.

Les éléments mentionnés ci-dessus sont importants, dans cette recherche, pour comprendre la problématique abordée dans ce travail, qui concerne l'apprentissage de l'objet mathématique fonction, à travers ses différentes représentations (dans les domaines des mathématiques et de la cinématique) qui émergent au cours du processus de modélisation.

1.1.1 Une brève récapitulation de l'évolution de la notion de fonction

Dans son ouvrage classique *Calcul Infinitésimal*, version espagnole, Spivak affirme que : « el concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función : en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. » (Spivak, 1988, p.49). Bien que nous pensons que cette affirmation est un peu exagérée, nous considérons que la fonction est un objet mathématique très important non seulement en mathématiques mais dans d'autres domaines aussi. Spivak, lors de l'introduction du thème de fonction, mentionne qu'il ne peut pas commencer par donner une définition précise de fonction. Ces mots suggèrent à quel point il a été difficile d'établir le concept de fonction à travers l'histoire. Pour cette raison, nous considérons qu'il est fondamental de faire une revue du développement de la notion de fonction, non seulement pour comprendre leur évolution à travers l'histoire, mais aussi pour prendre conscience des obstacles épistémologiques⁵

4. Les trois activités cognitives fondamentales : [1] La formation d'une représentation identifiable; [2] La transformation ou traitement interne; [3] La conversion à un autre registre.

5. Le terme d'obstacle épistémologique a été introduit par Bachelard (1993), cependant, Brousseau (2011) l'a repris et l'a orienté vers le domaine de la didactique des mathématiques.

(Brousseau, 2011) qu'il a fallu surmonter pour arriver au concept actuel de fonction. Cette étude, que nous présentons ci-dessous, nous a permis, entre autres, d'envisager sous un regard différent, la transposition didactique (Chevallard, 2004) –qui joue un rôle important dans la conception de la notion de fonction, dans le contexte de l'enseignement et l'apprentissage– (i) dans les livres que nous avons analysés dans le cadre de ce travail de recherche (section 1.1.3 et 1.1.4) et (ii) dans les activités de modélisation que nous proposons (section 4.2).

Il a été constaté que les civilisations anciennes, comme Babylone, avaient déjà une idée, mais pas explicite, de la notion de fonction. Youschkevitch (1976) mentionne que, l'une des méthodes que les babyloniens avaient pour effectuer des calculs était de créer des tables (sexagésimales de réciproques, carrées et racines carrées, cubes et racines cubiques, etc). Dans ce sens, Petersen (1974) affirme que la façon dont les mathématiciens babyloniens ordonnaient les nombres sur leurs tablettes d'argile, sous forme de colonnes en reliant les ensembles numériques, pourrait être la manifestation d'une pensée fonctionnelle. Youschkevitch (1976) mentionne également que dans cette civilisation ont été trouvées des tables qui ont rassemblé des éphémérides du soleil, de la lune et des planètes, qui ont servi de base à un développement astronomique postérieur.

Dans la culture grecque, il existe deux postures dans lesquelles l'idée de fonction est appréciée. La première est liée aux *Éléments* d'Euclide (Euclides, 1991, 1994, 1996, traduction espagnole), dans cette posture, l'idée de variabilité n'est pas présente, c'est-à-dire que les objets mathématiques sont considérés statiques. Pour Euclide, les nombres sont différents des grandeurs. Il considère les nombres comme entiers et discrets; et les grandeurs comme continues. Cela a conduit à l'idée de proportions et d'équations, mais pas à l'idée de fonction. D'autre part, pour Heraclitus et Zenon, les idées de changement et de quantité variable ont été présentées dans l'étude du mouvement, de la continuité et de l'infini, mais la plupart des philosophes grecs ont affirmé que le changement et le mouvement étaient en dehors des mathématiques. C'est ce qu'Aristote disait au chapitre VII, livre XI (K) de *la Métaphysique* : « Physics deals with the things that have a principle of movement in themselves; mathematics is theoretical, and is a science that deals with things that are at rest. »(Ross, 1925, p.1064).

Aristote croyait que les nombres et les figures géométriques ont été également des propriétés des objets réels, c'est-à-dire, ils ont été reconnus par l'abstraction, mais en réalité ils faisaient partie des objets eux-mêmes. Par conséquent, les mathématiques,

dans ce sens, ont travaillé avec des concepts abstraits dérivés de corps physiques (Kline et al., 1999).

Le fait que les Grecs considéraient les objets mathématiques comme statiques, puisque la variabilité ne la situait qu'en grandeurs, nous permet d'identifier un obstacle épistémologique dans le développement du concept de la fonction. Cette posture est restée longtemps, même jusqu'au Moyen-Âge, où l'accent était mis sur l'étude du changement et du mouvement. A cet égard, De Cotret (1988) affirme que, dès l'époque grecque, la notion qui a eu une influence négative sur l'évolution de la fonction était la proportionnalité : « esta costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo de la noción de función. » (De Cotret, 1988, p.35).

Au Moyen Âge, deux contributions importantes des mathématiques arabes doivent être reconnues du fait de la séparation de l'algèbre et la trigonométrie comme sciences particulières des mathématiques (Ruiz Higuera, 1994). D'une part, une classification exhaustive des toutes type des équations a été faite et les bases d'une théorie générale des équations ont été établies. D'autre part, en trigonométrie, il y a eu une transition d'un ensemble de méthodes auxiliaires, utilisées en astronomie, à l'étude de toutes sortes de triangles, de plans et de sphères.

Dans l'Europe médiévale, l'idée était que les phénomènes devaient être expliqués de manière de manière précise et rationnelle. Dans ce contexte, les mathématiques ont pris le statut de science rationnelle. Les scientifiques, à partir de la posture de Platon, ont soutenu que les sens étaient trompeurs et que la vérité ne pouvait être atteinte que par la raison (Ruiz Higuera, 1994). L'étude du monde réel est devenue l'une des plus grandes préoccupations de l'époque. En particulier, l'étude des phénomènes sujets au changement et au mouvement.

Pour Crombie (1979), l'histoire des sciences européennes du XIIIe au XVIIe siècle a été marquée par l'influence progressive des mathématiques et, avec la méthode expérimentale, ont été intégrées aux sciences physiques :

Así, el movimiento, respecto del cual había sido impotente la geometría griega – concebida estáticamente – era estudiado por vez primera matemáticamente, conduciendo así a la fundación a la ciencia de la cinemática, esto es al análisis del movimiento en términos de distancia y tiempo. (Crombie, 1979, p.85)

Au XIV^e siècle, l'idée de relation fonctionnelle était traitée de deux façons : la première était « l'algèbre des mots » utilisée par Bradwardino d'Oxford dans laquelle il faisait des généralisations en utilisant des lettres au lieu de chiffres pour représenter des quantités variables, tandis que les opérations entre ces quantités étaient décrites par des mots plutôt que des symboles, comme nous le faisons actuellement. La deuxième méthode était une méthode géométrique utilisant des graphiques (Ruiz Higuera, 1994).

Un pratiquant de la méthode géométrique était Nicole Oresme (1320-1382). Dans son ouvrage *Tractatus de latitudinibus formum* (Oresme, 1482), Oresme donne des indices sur ce que nous pouvons considérer comme des graphiques de fonctions, associant le changement physique aux figures géométriques. De la même manière que les géographes l'avaient fait, en projetant la sphère sur un plan, Oresme l'avait fait sur l'idée de fonction qu'il assumait à ce moment-là, en conservant les noms de longitude et de latitude qui ont respectivement (l'équivalent actuel des abscisses et des ordonnées). Par exemple, lorsqu'il représente le graphique du changement de vitesse dans le temps, Oresme dessine un graphique dans lequel les points d'une ligne horizontale représentent les instants successifs du temps (longitudes) et sur une ligne perpendiculaire chaque point représente la vitesse (latitude) dans cet instant. Si la vitesse était constante, elle serait représentée par le rectangle, et si elle était variable, par le trapèze, Fig. 1.1.

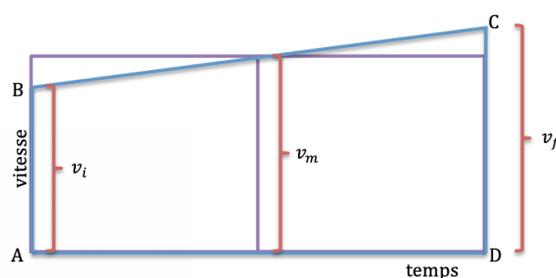


FIGURE 1.1 – Représentation géométrique de vitesse moyenne, effectuée par Oresme

Bien que nous ayons, antérieurement, associé les termes longitude et latitude utilisés par Oresme avec les concepts actuels d'abscisse et d'ordonnée, en réalité, Oresme n'était pas intéressé à établir la relation de la position des points algébriquement. En fait, dans son travail, il n'y a pas de relation systématique entre la représentation gra-

phique et la représentation algébrique. Pour [Oresme \(1482\)](#), l'important était la figure elle-même, privilégiant l'aspect qualitatif plutôt que quantitatif. Cela nous montre qu'il a visualisé l'idée essentielle de ce qu'est, actuellement, la notion de fonction dans le sens de sa représentation par une courbe.

Entre 1450 et 1650, il y a eu des progrès dans le développement des mathématiques qui ont marqué l'évolution du concept de fonction, [Kleiner \(1989\)](#) mentionne ce qui suit :

- Extension of the concept of number to embrace real and (to some extent) even complex numbers (Bombelli, Stifel, et al.);
- The creation of a symbolic algebra (Viète, Descartes, et al.);
- The study of motion as a central problem of science (Kepler, Galileo, et al.);
- The wedding of algebra and geometry (Fermat, Descartes, et al.) ([Kleiner, 1989, p.2](#))

Jusqu'au début du XVIIe siècle, il y avait une dépendance de l'algèbre sur la géométrie. Cette situation a été inversée lorsque Viète (1540-1603) et, plus tard, Descartes (1596-1650) ont utilisé l'algèbre pour résoudre des problèmes sur les constructions géométriques. En outre, c'est Viète qui a proposé l'utilisation de lettres pour représenter les variables. Il utilisait, régulièrement, des consonnes pour représenter des quantités connues et des voyelles pour des quantités inconnues. Pour Viète, l'étude des équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (en notation moderne) signifiait que cette équation représentait toute une classe d'expressions. En fait, pour Viète, l'algèbre était une méthode pour travailler avec des espèces ou des formes de choses, tandis que l'arithmétique traitait des nombres ([Kline et al., 1999](#)).

Galilée (1564-1642) a également contribué à la construction de l'idée de fonction, car il a introduit le numérique dans les représentations graphiques et, surtout, a exprimé les lois du mouvement en incorporant des idées de variation directe et indirectement proportionnelle. Nous pouvons dire que, l'une des contributions de Galilée est que dans une partie de ses recherches, il a incorporé l'expérimentation et l'idée d'expériences réfléchies qui ont contribué au développement de la physique et à l'évolution

du concept de fonction⁶. D'autre part et contrairement à Oresme, les graphiques de Galilée sont exprimés quantitativement et sont le produit de la mesure et des relations de cause-effet du mouvement (Ruiz Higuera, 1994).

Kline et al. (1999) mentionne que dans l'ouvrage de Galilée, *Deux nouvelles sciences*, la notion de fonction est présente parce que, par exemple, dans son travail sur le mouvement, il affirme que :

Los espacios descritos por un cuerpo que cae desde el reposo con un movimiento uniformemente acelerado están, unos con respecto a otros en la relación de los cuadrados de los intervalos de tiempo empleados en atravesar esas distancias. (Kline et al., 1999, p.447)

Ce type d'affirmation est un exemple du fait que, jusqu'au XVI^e siècle, une grande partie du langage mathématique était donnée sous une forme descriptive en utilisant la loi de dépendance, comme dans les travaux d'Oresme et de Galilée, qui entrave l'émergence de la notion de fonction, en générant un obstacle épistémologique. C'est-à-dire, dans ce contexte, le fait de ne pas avoir un langage symbolique constituait un obstacle au développement de la notion de fonction.

Chez Descartes (1596-1650), les mathématiques font un saut qualitatif. Descartes (1637) a travaillé de sorte que la géométrie n'avait pas un excès de figures, au lieu de cela, il a voulu le doter d'une notation algébrique, en établissant qu'une courbe est construite à partir d'une équation algébrique (Sastre et al., 2008). Aussi, pour Descartes, les courbes géométriques sont celles qui peuvent être exprimées par une seule expression algébrique finie en x et y , alors qu'il appelle toutes les autres courbes des courbes mécaniques (Kline et al., 1999).

La Géométrie Analytique devient ainsi le support qui permettrait le développement de l'analyse –c'est pourquoi, il est nécessaire de parler des travaux de Newton et Leibniz, mais pas de manière exhaustive, puisque nous sommes seulement intéressés à identifier comment la notion de fonction a évolué-. La création d'un nouvel outil mathématique donne naissance à une nouvelle vision du monde : la nature peut être conçue comme des processus de changement, ce qui conduit à une considération

6. Il est important de mentionner que dans ce travail de recherche, nous n'avons pas pour objectif de faire une étude historique exhaustive, mais de donner un panorama global dont nous nous sommes inspirés

continue et dynamique des relations fonctionnelles au contraire des considérations discrètes et statiques qui ont prévalu jusque là (Sastre et al., 2008).

Actuellement, Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716) sont reconnus comme les créateurs de l'analyse, bien que le travail qui les a menés à leur invention présente quelques différences. Au XVIIe siècle, il y avait quatre problèmes qui, en raison de leur importance, étaient ceux qui ont donné lieu à l'analyse et qui ont été abordés par les prédécesseurs de Newton et Leibniz : (i) l'étude du mouvement pour déterminer la vitesse et l'accélération dans n'importe quel instants; (ii) la recherche de la tangente à une courbe, motivé par l'optique; (iii) la recherche des valeurs maximale et minimale d'une fonction; (iv) la détermination de longueur d'une courbe, des aires délimitées par de courbes et des volumes délimités par des surfaces, la longueur d'un arc de la cycloïde ainsi que son centre de gravité (défi lancé par Pascal aux mathématiciens de l'époque) (Kline et al., 1999).

Chez Newton, l'accent était davantage mis sur les sciences en général que sur les mathématiques elles-mêmes. Son travail montre une orientation physique, dans laquelle le concept de vitesse est fondamental. C'est-à-dire, Newton avait une vision mécaniste, en considérant le temps comme une notion universelle et les variables qui en dépendent comme des quantités qui « coulent » de façon continue et possèdent une vitesse de changement (Ruiz Higuera, 1994). Dans cette perspective, la fonction est une quantité qui s'écoule dans le temps et la dérivée est le *fluxion* et détermine les variations de la *fluente*.

Dans le développement de Newton, un autre obstacle est identifié dans la conception dynamique de la fonction. Pour Newton, le graphique représentait la trajectoire des points mobiles, mais la courbe elle-même n'était pas considérée comme le graphique de la fonction.

Leibniz a travaillé avec une perspective géométrique car il a toujours considéré que les éléments géométriques ont été associés à une courbe, bien qu'il n'utilise pas le terme fonction pour indiquer la relation formelle entre les points d'une courbe et son abscisse dans le sens actuel. Leibniz a été le premier mathématicien à utiliser le mot fonction (à notre connaissance). De plus, l'une de ses préoccupations était la notation, Leibniz passait beaucoup de temps à chercher une écriture générale et suggestive.

Quelques temps plus tard, Johann Bernoulli (1667-1748) a écrit la première définition de la fonction comme expression analytique dans son article *De solutionibus quae extant problematum isoperimetricorum ejusque nova earundem problematum*, publié

en 1718 :« Définition : On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ... » (Bernoulli, 1718, p.241)

En 1748, Euler (1707-1783) en prenant comme référence la définition de son professeur Bernoulli, considère que :« Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. » (Euler, 1748, p.2)

Bien que Euler ne précise pas ce qu'est une expression analytique, il inclut les polynômes, les séries de puissance, les expressions trigonométriques et logarithmiques. Subséquemment, Euler a donné une nouvelle définition de fonction où il a, apparemment, examiné les arguments physiques liés à le problème de la corde vibrante : « Si unas cantidades dependen de otras, de tal modo que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas ». (Kline et al., 1999, p.672)

La notion de fonction en tant qu'expression analytique unique, finie ou infinie, a prédominé tout au long du XVIIIe siècle. En 1797, Lagrange (1736-1813), dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, a défini une fonction d'une ou plusieurs variables comme toute expression utile pour le calcul dans laquelle ces variables interviennent de quelque manière. Et en 1806, il déclare que les fonctions représentent différentes opérations à effectuer sur des quantités connues pour obtenir les valeurs de quantités inconnues. En d'autres termes, pour Lagrange, une fonction est une combinaison d'opérations.

Au XIXe siècle, le concept de fonction était considéré comme l'idée principale de l'analyse et les conditions nécessaires pour l'étude des fonctions comme des correspondances, dans un sens général, étaient données. De cette façon, Cauchy donne la définition suivante :

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indé-

pendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. (Cauchy, 1884, p.5)

En 1829, Dirichlet établit, pour la première fois, l'idée moderne de fonction $y = f(x)$ d'une variable indépendante dans un intervalle $a < x < b$.

y is a function of a variable *x*, defined on the interval $a < x < b$, if to every value of the variable *x* in this interval there corresponds a definite value of the variable *y*. Also, it is irrelevant in what way this correspondence is established. (Kleiner, 1989, p.10)

Pour montrer que ce n'est pas pertinent la façon dont cette correspondance est établie, Dirichlet a exemplifié avec la fonction :

Soit c et d deux nombres réels différents

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \text{ irrationnel} \\ d, & \text{si } x \text{ rationnel} \end{cases} \quad (1.1)$$

Au XXe siècle, des définitions ont été établies et elles le sont encore aujourd'hui. Celles-ci sont fondées sur la notion générale établie par Dirichlet, mais aussi sur le développement, à la fin du XIXe siècle, de la théorie des fonctions de Weierstrass et la théorie des ensembles de Cantor. En particulier, Cantor (1845-1918) exprime que la notion de fonction doit inclure : toute correspondance arbitraire qui satisfait la condition d'unicité entre les ensembles numériques ou non numériques. D'autres définitions tiennent en compte le caractère arbitraire des ensembles de nombres dans lesquels la fonction est définie. En 1939, Bourbaki a donné une définition comme une règle de correspondance entre deux ensembles :

Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y , si, quel que soit $x \in E$, il existe un élément y de F et un seul, qui soit dans la relation considérée avec x (Bourbaki, 2006, E.R.5)

Actuellement, il existe une diversité de définitions mathématiques avec des caractéristiques différentes. Par exemple, ceux qui sont présentés dans la section 1.1.3.

D'après les définitions de Dirichlet et de Bourbaki, nous pouvons observer un dernier obstacle épistémologique qui concerne la symbolisation algébrique. Il semble que seules les relations qui sont représentées par une expression algébrique ou analytique peuvent être considérées comme des fonctions. Comme nous l'avons montré dans les deux premiers livres analysés dans la section 1.1.3.

Dans cette section, nous avons fait un rapide parcours de plus de trois mille ans, en montrant comment a évolué le concept de fonction, en partant d'idées très intuitives, associées avec des graphiques jusqu'à la formulation et le développement du concept qui est, actuellement, accepté dans plusieurs versions. Pour [Sastre et al. \(2008\)](#), tout au long de l'histoire, la connaissance des fonctions s'est construite sur des idées précédentes ou même contre elles, en considérant les intérêts, problèmes, possibilités et limitations de chaque culture, dans le contexte de chaque époque. Nous avons également vu certains des obstacles épistémologiques qui sont apparus tout au long de cette évolution (i) la loi de dépendance et l'utilisation du langage descriptif (puisque le langage symbolique était précaire) d'Oresme et de Galilée, (ii) la conception dynamique de la fonction de Newton, dans laquelle le graphique représentait la trajectoire de points en mouvement mais n'était pas considéré comme le graphique d'une fonction et (iii) la symbolisation algébrique de Dirichlet et Bourbaki qui donne l'impression que seules les relations algébriques ou analytiques peuvent être considérées comme des fonctions.

À partir de ce qui précède, la conceptualisation actuelle de la fonction permet différents registres de représentation, qui ont des portées et des limites différentes, comme nous l'avons vu dans son évolution historique.

1.1.2 L'influence de l'étude du mouvement sur le développement de la notion de fonction et de science

Dans la section précédente, nous avons développé une brève étude historico - épistémologique sur le concept de fonction. Cependant, pour compléter ce parcours, il est nécessaire de le regarder aussi du point de vue de l'évolution de la science, en ce cas et par la nature de notre travail, de la perspective de la cinématique. Contrairement à la vision mathématique, dans laquelle nous pouvons observer l'évolution de l'objet mathématique, fonction, du point de vue de la physique sont plus visibles les types de pensées qui sont impliquées. C'est-à-dire, l'influence du contexte, de la vie quotidienne, des croyances, des phénomènes naturels, etc. sur l'évolution de la pensée dans

le domaine de la cinématique, où la notion de fonction est inhérente. En ce sens, nous distinguons trois types de pensée :

La première apparaît dans la physique aristotélicienne (384 av. J.-C.). La pensée de cette période était caractérisée par l'explication des phénomènes à partir de la raison. C'est-à-dire, la raison fait appel à la conscience et au « bon sens » -qui dépend des croyances, des connaissances et du contexte qui entourent le sujet-. En conséquence, Aristote croyait que les corps plus lourds tombaient vers le centre de l'Univers (la Terre) plus vite que les corps légers.

La philosophie aristotélicienne est présente depuis près de 2000 ans. Cette période, si longue, a enraciné des types de pensées qui ont entravé le progrès scientifique, comme nous avons pu l'observer dans la section précédente. Aristote pensait que le changement et le mouvement observés dans la vie quotidienne n'étaient pas liés aux mathématiques, en conséquence, la physique aristotélicienne est une physique non quantitative. Le type de pensée d'Aristote s'observe dans le fragment suivant, où il parle de mouvement de manière qualitative :

Again, there is no such thing as motion over and above the things. It is always with respect to substance or to quantity or to quality or to place that what changes changes. But it is impossible, as we assert, to find anything common to these, which is neither 'this' nor quantum nor quale nor any of the other predicates. Hence neither will motion and change have reference to something over and above the things mentioned, for there is nothing over and above them. Now each of these belongs to all its subjects in either of two ways : namely (1) substance-the one is positive form, the other privation; (2) in quality, white and black; (3) in quantity, complete and incomplete; (4) in respect of locomotion, upwards and downwards or light and heavy. Hence there are as many types of motion or change as there are meanings of the word "is". ([Hardie et Gaye, 1994](#), Book III, Cap I)

La physique aristotélicienne, bien que liée au bon sens, était une physique non expérimentale, le raisonnement est né de la connaissance des phénomènes et de la raison, mais pas de la recreation, de l'expérimentation ou des mesures.

Rossi (1998) mentionne que pour surmonter cette philosophie, de nombreuses idées qui ne permettaient pas le progrès scientifique ont dû être abandonnées. C'est-à-dire qu'un changement des schémas mentaux était nécessaire : arrêter de croire que la terre était immobile et qu'elle était au centre de l'univers, même lorsque l'intuition et la perception l'indiquaient; la distinction entre mouvements naturels et violents, que Aristote affirmait dépendait de la forme, de la nature du corps ou de l'existence d'un moteur; la conviction dans la finitude de l'univers, etc.

Maintenant, avec l'aide de l'histoire, nous savons que l'idéologie et les croyances de la société jouent un rôle important dans le développement humain. Pour cette raison, nous mentionnons une des conceptions, sur les arts mécaniques, que nous considérons qui a défini cette étape (d'Aristote jusqu'avant le XVIIe siècle). Rossi (1998) parle de la conception que la société et de nombreux penseurs de l'époque avaient des arts mécaniques. Ils les pensaient inférieurs et directement liés à la matière, à la pratique et au travail manuel qui n'était pas bien vu. Même dans le dictionnaire français de Richelet (1680), la définition de « mécanique » est la suivante, Fig. 1.2 : « Ce mot en parlant de certains arts signifie ce qui est opposé à libéral et honorable... Bas, vilain et peu digne d'une personne honnête et libérale. » (Richelet, 1680, lettre M p.24)

Mécanique, adj. Ce mot en parlant de certains arts signifie ce qui est opposé à libéral & honorable. [Les arts se divisent en arts libéraux, & en arts mécaniques.]
 † * *Mécanique, adj.* Bas, vilain & peu digne d'une personne honnête & libérale. [Cela est mécanique. Esprit mécanique.]

FIGURE 1.2 – Définition de « mécanique », dictionnaire Richelet (1680)

Ce type de pensée aurait pu être un obstacle épistémologique. Aujourd'hui, il est évident que les arts mécaniques (comme il était appelé à l'époque), les instruments matériels, les mesures, l'expérimentation, ce qui était considéré comme "deshonorant", étaient nécessaires pour avancer.

La deuxième étape est liée au changement des schémas mentaux qui ont eu lieu dans la période précédente, ce changement est représenté (en cinématique), principalement, par Galilée (1564-1642). Cependant, le changement de schémas a commencé à la fin de l'année 1300 avec les travaux d'ingénieurs, d'artistes et d'artisans de

haut niveau comme : Filippo Brunelleschi (1377-1446), qui avait de profondes connaissances mathématiques qu'il utilisait pour l'architecture (il travaillait dans la cathédrale de Santa Maria del Fiore) ; Leonardo da Vinci (1452-1519) qui était philosophe, ingénieur, inventeur, peintre, anatomiste, architecte, paléontologue, artiste, botaniste, écrivain, sculpteur, musicien, poète et urbaniste ; Giorgio Agricola (1494-1555) alchimiste, chimiste et minéralogiste allemand ; Jacques Besson (1530-1572) mathématicien, ingénieur et rédacteur technique, français ; Robert Hues (1553-1632) mathématicien et géographe, anglais, entre autres. Dans ce contexte s'observe la transition vers une pensée où, l'utilisation d'outils, de mesures et de travaux pluridisciplinaires, a généré une vision plus large de ce qui a été pensé à l'étape précédente. Il est importante de dire que l'utilisation d'instruments, d'expériences et de mesures n'a pas remplacé le raisonnement logique, mais l'a plutôt complété. C'est-à-dire que des expérimentations, des mesures, des constructions, etc. ont été réalisées, mais l'explication du phénomène a également été recherchée sur la base de l'abstraction, bien qu'à ce moment-là celle-ci soit encore très proche du tangible.

Galilée, qui avait déjà une vision plus large héritée de ses prédécesseurs, se caractérisait par le fait qu'il fondait certains de ses travaux scientifiques sur les mesures et les observations résultant des expériences qu'il effectuait —il construit souvent ses propres instruments—. Galilée a été capable de modéliser et d'expliquer des phénomènes physiques et astronomiques à partir de données expérimentales concrètes, et pas seulement abstraites⁷.

[Kline et al. \(1999\)](#) mentionnent que Galilée a généré un changement de pensée où il remplace les spéculations et le mysticisme, qu'il avait dans le courant aristotélien, par une vision de la nature qui favorise un travail commun de la mécanique et de la mathématique. Cette vision de Galilée l'exprime dans son oeuvre *Il Saggiatore* :

La filosofía [naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos – quiero significar el universo– pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje, y comprendemos los símbolos, en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas,

7. Bien que nous soyons conscients qu'une partie de la recherche de Galilée repose également sur des développements abstraits, nous souhaitons mettre l'accent sur les travaux expérimentaux car c'est de cette idée que nous parlerons dans le chapitre 2 lorsque nous présenterons les éléments théoriques qui soutiennent ces travaux

sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto. (Galilei, 1981, p.63)

Aussi, pour Galilée, les descriptions qualitatives par les sens étaient, sans aucun doute, importantes « Si las orejas, lenguas y narices se suprimieran soy de la opinión de que la forma, cantidad (tamaño) y movimiento permanecerían, pero se terminarían los olores, sabores y sonidos, los cuales, abstraídos de la criatura viviente, solo son palabras. » (Galilei, 1981, p.297). En ce sens, pour Galilée, la capacité de l'esprit à fournir des fondements n'est pas une action qui exclut les observations, mais les considère plutôt comme un premier pas. C'est-à-dire que l'expérimentation et l'expérience doivent fournir les premiers principes en physique, par opposition aux mathématiques, où les principes étaient le produit de la raison. Bien que Galilée ait pris en compte des éléments qualitatifs, pour lui, la chose la plus importante était de travailler avec des concepts tels que : vitesse, accélération, masse, etc. C'est un mode de pensée totalement nouveau qui a induit l'utilisation de formules et le passage du qualitatif au quantitatif. Un aspect important à considérer est que pour Galilée les causes des phénomènes n'étaient pas importants, il s'est concentré sur les propriétés et la quantification du mouvement.

Le troisième type de pensée que nous distinguons est celle avec Newton, dans un premier temps et avec Einstein, dans un second. La façon dont Newton fait la science n'est pas très différente de celle de Galilée. Les deux font des expériences, bien que peu nombreuses, et utilisent les mathématiques pour confirmer ou soutenir leurs théories. Bien que pour Galilée et Newton, les mathématiques déductives ont beaucoup plus de poids que l'expérimentation, les processus mathématiques de Newton sont plus formels, ils ont une charge symbolique significative, typique des mathématiques, contrairement à Galilée qui a davantage recours au langage naturel pour expliquer ses principes. Kline et al. (1999) mentionnent qu'une grande partie du développement scientifique des XVIe et XVIIe siècles n'est pas due à l'observation ou à l'expérimentation, mais à des développements abstraits soutenus par les mathématiques qui ont atteint un haut degré de compression et de perfection. Pour Newton, contrairement à Galilée, les causes du mouvement étaient importantes, mais seulement d'une manière abstraite (il considérait le mouvement d'une manière générale). C'est-à-dire, bien qu'il ait considéré les causes du mouvement, il ne l'a pas fait en prêtant attention à la source physique spécifique ni à l'endroit où les mouvements ont été produits. Cette pensée l'amène à la déduction mathématique du comportement de la gravité dans son œuvre

Principia Mathematica où il exprime :

Mathematics requires an investigation of those quantities of forces and their proportions that follow from any conditions that may be supposed. Then, coming down to physics, these proportions must be compared with the phenomena, so that it may be found out which conditions of forces apply to each kind of attracting bodies. And then, finally, it will be possible to argue more securely concerning the physical species, physical causes, and physical proportions of these forces. (Newton, 1802, Book 1, section 11, p.302)

De nombreux scientifiques contemporains de Newton lui reprochaient de donner un principe dans le domaine de la physique qui n'avait aucune compréhension physique. En d'autres termes, son développement mathématique a modélisé quelque chose qui ne pouvait pas être vérifié au premier abord, mais que les mathématiques lui ont donné la sustentation nécessaire.

La création de l'analyse a conduit Newton à rejeter la croyance cartésienne, basée sur la mystique pythagoricienne, que l'univers était fondamentalement géométrique. [Christianson et Westfall \(1984\)](#) affirment que Newton s'est rendu compte que, derrière les formes géométriques que Copernic, Kepler et Descartes aimaient tant, se cachaient des concepts assez dynamiques, mais pas entièrement articulés, comme la masse, la force et l'accélération, qui ne pouvaient être représentés sous forme géométrique. La cinématique (l'étude du mouvement séparée de l'influence de la masse et de la force) des mouvements rectilignes et paraboliques, qui sont produits par l'influence de la gravité, ont été étudiée de manière exhaustive par Galilée et concrétisée dans : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* [Galilei \(1632\)](#). Ce travail a été d'un grand bénéfice pour Newton, en particulier en introduisant l'idée du concept de l'inertie. Cela se reflète dans les énoncés des deux premiers axiomes, mentionné dans [Christianson et Westfall \(1984\)](#) :

— Si un elemento se mueve una vez, nunca se parará a menos que sea obstaculizado por alguna causa externa.

- Un elemento siempre se moverá siguiendo la misma línea recta (sin cambiar la dirección o la celeridad de su movimiento) a menos que alguna causa externa lo desvíe. ([Christianson et Westfall, 1984](#), p.96)

Le génie de Newton se reflète dans ses lois qui sont brèves et peu nombreuses : trois lois du mouvement et une de la gravité. [Hoffmann \(1985\)](#) dit, qu'en les formulant, Newton a dû parler de repos et de mouvement mais, de repos et de mouvement, par rapport à quoi? Newton proposait des lois cosmiques (pas seulement terrestres) donc il ne pouvait pas faire une proposition concernant la Terre lancée dans l'espace, il devait proposer une loi dans un cadre de référence cosmique qui pourrait fonctionner bien sur elle.

Newton a conçu un espace absolu, illimité, sans caractéristiques distinctives et immobile. Il a également introduit l'idée d'un temps absolu qui coulait uniformément : Avec un espace absolu immobile, il pouvait parler de repos et de mouvement absolus; avec un temps absolu et constant, il pourrait parler de mouvement uniforme et non uniforme. Grâce à ces idées, il a été possible de répondre aux questions Où suis-je? et Comment puis-je me déplacer? L'idée de l'espace et du temps absolus, qui fonctionnait bien jusque-là, est restée en physique pendant plus de 200 ans.

Avant Einstein, des personnages tels que Lorentz, Maxwell, Poincaré et d'autres avaient considéré, sans être concluants, que le repos absolu et le mouvement uniforme ne pouvaient être déterminés. Cependant, il est reconnu que les idées d'Einstein sont celles qui représentent une vision différente de la nature. Il énonce deux principes sur lesquels il construit sa théorie de la relativité : le premier affirme qu'il n'existe aucune expérience possible qui puisse détecter le repos absolu, ni le mouvement uniforme. Le deuxième principe stipule que, dans un espace vide, la lumière se déplace avec une certaine vitesse qui ne dépend pas du mouvement de sa source.

La génie de la pensée d'Einstein réside dans sa capacité à entrevoir qu'il a dû abandonner l'une des idées les plus ancrées dans la science, le temps absolu. C'est-à-dire, la conception newtonienne et kantienne, basée sur le bon sens, d'un temps universel qui permettait une simultanéité universelle, s'est effondrée. Le temps, selon Einstein, est d'une nature telle que la simultanéité des faits indépendants est relative ([Hoffmann, 1985](#)) et comme le temps étant une quantité fondamentale, le changement radical de sa conception a fait tomber toute la structure de la physique théorique. Puisque, si la simultanéité et la distance sont relatives, en conséquence, la structure de la physique

change, car d'autres notions dépendent du temps et de la distance : vitesse, accélération, force, énergie, etc. Il convient de mentionner que Poincaré (1854-1912) un mathématicien, d'une intuition philosophique aigüe, avait déjà (vers 1905), une structure mathématique de la théorie de la relativité et il a eu une intuition de sa probable validité, cependant, il ne pouvait pas se libérer des habitudes traditionnelles de pensée et des idées conventionnelles sur l'espace et le temps, et il ne pouvait pas prendre le pas décisif dans le changement des concepts physiques (Hoffmann, 1985).

1.1.3 La fonction dans le domaine des mathématiques

Dans cette section, nous présentons l'analyse de quatre livres qui sont largement utilisés (au Mexique) dans le terminal scientifique et dans les premiers semestres de la licence de mathématiques pures, dans le cours d'analyse : Calculus (Apostol, 1977, volume I); Cálculo infinitesimal par Spivak (1988); Cálculo una variable par Thomas et Weir (2005) et Cálculo de una variable, trascendentes tempranas par Stewart (2008). L'analyse avait deux objectifs : (i) disposer d'un référentiel théorique mathématique de la fonction, qui nous a servi tout au long de cette recherche et (ii) montrer les différents registres de représentation et symboles utilisés (ces données ont été comparées à celles de la section 1.1.4) afin de repérer les obstacles à son utilisation dans des situations de modélisation mathématique. Pour cette analyse, nous nous concentrons sur quatre aspects :

1. L'introduction à la fonction; Quelles situations, phénomènes, activités les auteurs utilisent-ils pour introduire le concept de fonction?
2. La notation; Quels symboles les auteurs utilisent-ils et favorisent-ils?
3. Les registres de représentation; Quels sont les registres de représentation utilisés par les auteurs?
4. Les Définitions; Combien de définitions de la fonction les auteurs donnent et lesquelles?

Livre 1 : Calculus (Apostol, 1977, volume I)

Le thème de la fonction se trouve dans le chapitre 1, section II, « les concepts du calcul intégral ». Ce livre est particulier parce que dans la section I, consacrée à l'introduction (qui est assez vaste), l'auteur fait une introduction historique, donne les concepts de base de la théorie des ensembles, fournit une série d'axiomes pour le système de nombres réels, et donne une introduction mathématique aux symboles de sommation

et autres sujets connexes. Ensuite, dans la deuxième section (les concepts du calcul intégral) il parle des idées générales et des exemples de fonctions. Après, Apóstol donne la définition formelle comme un ensemble de paires ordonnées. Il est important de mentionner que Apóstol, dans son livre, traite d'abord le calcul intégral et ensuite le calcul différentiel.

L'approche de ce livre est très formelle et ne consacre aucune section à la modélisation ou à des modèles mathématiques.

Introduction à la fonction

La section consacrée à ce sujet commence par une brève description de la façon dont l'idée de fonction est présente dans divers domaines de l'activité humaine. [Apostol \(1977\)](#), affirme que les relations entre deux ensembles d'objets sont, souvent, présentées sous forme de graphiques, tables, formules, sondages d'opinion publique, etc. et que certaines de ces relations sont considérées comme des fonctions par les mathématiciens. Il illustre avec les situations suivantes : la relation de la force nécessaire pour allonger un ressort d'une longueur x , $F = cx$; la relation du volume d'un cube avec la longueur de ses bords x , $V = x^3$; etc.

Notation

Après les exemples, Apóstol mentionne que les représentations symboliques qui, la plupart du temps, sont associées à la fonction sont :

Las letras de los alfabetos español y griego, se utilizan frecuentemente para designar funciones. En particular se usan mucho las letras f, g, h, G, H , y φ . Si f es una función dada y x es un objeto de su dominio, la notación $f(x)$ se utiliza para designar el objeto que en el recorrido corresponde a x , en la función f , y se denomina el valor de la función f en x o la imagen de x por f . El símbolo $f(x)$ se lee, f de x . ([Apostol, 1977](#), p.62)

Aussi, implicitement, Apóstol utilise x et y comme variables. L'auteur désigne la lettre y comme symbole d'une fonction ou d'image, mais il ne mentionne pas la possibilité d'utiliser x dans le même but. En ce qui concerne la notation des ensembles, il le fait avec X, Y , etc.

Registres de représentation

Dans l'introduction du sujet, nous avons pu constater qu'Apóstol, sous forme écrite, mentionne qu'il existe des relations qui sont considérées comme des fonctions : graphiques, tables, formules, sondages d'opinion publique, etc. Avec cette phrase, Apóstol indique les multiples représentations qui ont les fonctions. Par la suite, et avec la notation établie, il rend explicites les registres de représentation suivants :

— **Langage naturel**

Des exemples sont donnés en langage naturel comme nous le montrons ci-dessous :

La función identidad. Su dominio es el eje real, esto es, el conjunto de todos los números reales. Para cada punto (x, y) de la gráfica es $x = y$.

La gráfica es una recta que forma ángulos iguales con los ejes coordenados. El recorrido de f es el conjunto de todos los números reales.

([Apostol, 1977](#), p.63)

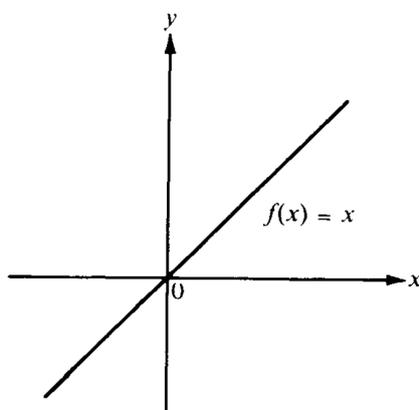
— **Algébrique**

Ensuite, l'exemple qu'il a donné précédemment il est transformé dans le registre algébrique : « Supongamos que $f(x) = x$ para todo real x . ([Apostol, 1977](#), p.63)

— **Graphique**

Apóstol affirme que les fonctions peuvent être représentées géométriquement dans le plan xy . L'axe des x représente le domaine X , et à partir de chaque point x de X est représenté le point (x, y) où $y = f(x)$, et que l'ensemble des points (x, y) est appelé graphique de la fonction.

Il illustre ensuite quelques fonctions qu'il a donné dans sa forme algébrique, un exemple est la Fig. 1.3

FIGURE 1.3 – Exemple du graphique $f(x) = x$ (Apostol,1977, p.63)— **Table de valeurs**

La seule mention et le seul exemple donné de la représentation table de valeurs (tout au long de la section consacrée au thème de la fonction) est celui de la fonction factorielle, Fig. 1.4

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

FIGURE 1.4 – Exemple du représentation table de valeurs (Apostol,1977, p.64)

Les deux registres de représentation privilégiés par Apóstol sont, le langage naturel et l'algébrique. Les représentations graphiques sont également utilisées mais en moindre fréquence et celle qui est pratiquement nulle, puisqu'elle n'est mentionnée et illustrée qu'une seule fois, est celle de la table de valeurs. Nous pensons qu'il est étrange que l'auteur ne donne pas la table des valeurs de l'exemple central $f(x) = x$ et que, probablement, cela pourrait être une sorte de méfiance ou même de rejet envers cette registre de représentation, car il est possible que le considère comme non-formel.

Définitions

Apóstol donne 2 définitions et une schématisation de la notion de fonction. La première définition est donnée juste avant d'indiquer la notation formelle :

Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y , una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y solo un objeto en Y . El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función. (Éste puede ser todo el conjunto Y , pero no es necesario).

(Apostol, 1977, p.62)

Nous observons que la définition de fonction qu'il considère a une approche ensembliste et générale (définition de Bourbaki), puisqu'à aucun moment il ne parle d'ensembles numériques et il ne précise pas non plus les caractéristiques de la relation. Dans cette première définition, il établit, implicitement, la distinction entre ce que nous connaissons comme domaine de définition et image.

Ensuite, il mentionne que l'idée de fonction peut être illustrée schématiquement et montre deux représentations schématique du concept, Fig. 1.5

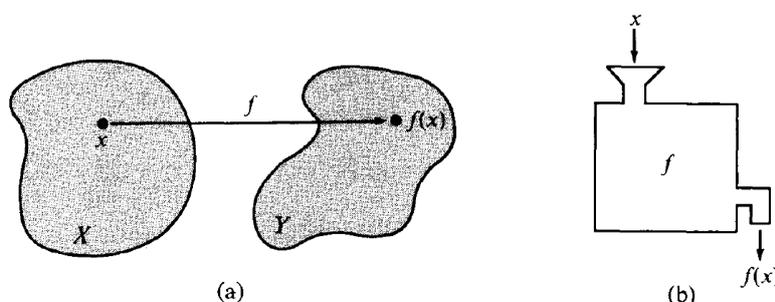


FIGURE 1.5 – Représentation schématique du concept de fonction (Apostol,1977,p.63)

La dernière définition, et celle que Apóstol considère comme formelle, est : « una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento (Apostol, 1977, p.65).

Dans la première partie de la définition, nous retrouvons l'idée de Dirichlet de la fonction (section 1.1.3), puisqu'elle se réfère, implicitement, à des paires ordonnées : « ... a todo valor de la variable x le corresponde un valor definido de la variable y ... »

Livre 2 : Cálculo infinitesimal (Spivak, 1988)

Le thème des fonctions se trouve au chapitre 3 de la Partie II, « Principes fondamentaux ». Dans ce livre, aucune mention n'est faite des modèles ou de la modélisation mathématique. L'approche de ce livre est celle d'une mathématique formelle, déductive-axiomatique, qui privilégie les représentations algébriques.

Introduction à la fonction

Spivak (1988) introduit le sujet en parlant de l'importance de l'objet mathématique fonction, car il est utilisé dans presque toutes les branches des mathématiques modernes. Dans le chapitre consacré à la fonction, il n'est fait référence qu'à des exemples dans le domaine des mathématiques, en laissant de côté les exemples dans les autres disciplines.

Notation

Comme Apóstol, Spivak introduit une notation et mentionne l'importance de cette notation pour continuer à avancer dans l'étude des fonctions. Ces deux auteurs nous montrent la valeur de la partie symbolique en mathématiques.

La práctica corriente consiste en designar una función mediante una letra. Por razones obvias se emplea preferentemente la letra « f », lo cual hace que sigan en orden de preferencia las letras « g » y « h », pero en fin de cuentas puede servir cualquier letra (e incluso cualquier símbolo razonable) sin excluir la « x » y la « y », si bien estas letras suelen reservarse para designar números. Si f es la función, entonces el número que f asocia con x se designa por $f(x)$; este símbolo se lee « f de x » y se da con frecuencia el nombre de valor de f en x . (Spivak, 1988, p.51)

Comme nous pouvons le constater, la symbolisation utilisée par Spivak est très similaire à celle d'Apóstol, cependant, nous pouvons observer que Spivak rend évident que les lettres x et y (ou tout autre symbole raisonnable) peuvent aussi représenter une fonction, en soulignant que le x et y , en général, sont utilisés pour le faire. Enfin, Spivak revient sur les exemples avec lesquels il a illustré certaines fonctions (en langage naturel) et les réécrit avec la symbologie qu'il a introduite (voir un exemple dans les registres de représentation). Spivak rend explicite que les lettres x et y représentent couramment des nombres ou des variables et, pour les ensembles il utilise des lettres majuscules, A, B , etc.

Registres de représentation

— **Langage naturel**

Des exemples sont donnés en langage naturel comme nous le montrons ci-dessous : « *la regla que asigna a todo número su cuadrado* ». (Spivak, 1988, p.49).

— **Algébrique**

Après avoir introduit la notation symbolique, il illustre comme suit :

« $f(x) = x^2$ » (Spivak, 1988, p.52)

— **Graphique**

La représentation graphique est donnée dans un chapitre différent de celui de la fonction. Il n'est pas perçu que Spivak veut montrer cette représentation comme un registre différent, mais lié à la table de valeurs et algébrique, puisque dans le chapitre désigné aux graphiques, Spivak ne donne pas la continuité avec les graphiques des fonctions qu'il a montré dans ce chapitre. Il commence par le graphique des nombres réels, puis avec les intervalles ouverts et fermés, la distance entre les points et, jusqu'au milieu du chapitre, il montre la représentation graphique des fonctions. Nous pensons que Spivak, en mettant les graphiques dans un autre chapitre pourrait générer l'impression que la fonction dans sa forme algébrique et graphique sont deux représentations indépendantes l'une de l'autre.

— **Table de valeurs**

Spivak entre dans la représentation table de valeurs comme suit : « Para todo número x hace falta saber cuál es el número $f(x)$; podemos imaginarnos una tabla que reúna toda la información que se puede desear acerca de la función $f(x) = x^2$ ». (Spivak, 1988, p.59), et il présente la table pour certaines valeurs, Fig. 1.6.

x	$f(x)$
1	1
-1	1
2	4
-2	4
$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}$	2
π	π^2
$-\pi$	π^2

FIGURE 1.6 – Exemple du représentation table de valeurs de $f(x) = x^2$ (Spivak, 1988, p.59)

Définitions

Spivak donne trois définitions de la fonction. Le premier est donné juste après l'introduction : « una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real ». (Spivak, 1988, p.49)

Puis, il montre une série d'exemples sous forme de règles de correspondance : la règle qui attribue à chaque nombre son carré, la règle qui attribue à chaque nombre y le nombre $\frac{y^3+3y+5}{y^2+1}$, la règle qui attribue à chaque nombre $c \neq 1, -1$ le nombre $\frac{c^3+3c+5}{c^2+1}$, etc.

Les deuxième et troisième définitions sont suivies l'une par l'autre, et sont situés presque à la fin du chapitre, Spivak avait déjà défini la notation, les représentations algébriques, table de valeurs, et les opérations avec fonctions :

Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad : Si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento. (Spivak, 1988, p.60)

Si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f . Si a está en el dominio de f , se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a, b) está en f . Este b único se designa por $f(a)$. (Spivak, 1988, p.60)

Nous considérons que la première définition est très générale puisque Spivak ne précise pas la nature de la règle de correspondance. La deuxième définition est présentée comme une définition mathématique formelle, et dans la troisième définition, nous observons l'idée de fonction de Bourbaki en termes d'unicité de y pour chaque x .

L'approche ensembliste de la fonction d'Apóstol est également partagée par Spivak comme nous pouvons l'observer dans les deux définitions.

Livre 3 : Cálculo una variable (Thomas et Weir, 2005)

La section traitant de la fonction se trouve dans la partie « fonctions et leurs graphiques » et « identification des fonctions : modèles mathématiques », les deux dans la section préliminaire.

En première instance, nous pouvons observer la différence de ce livre avec les deux précédents, qui ne destine aucune section à parler de modèles et de modélisation mathématique. Dans ce livre, une section est consacrée à l'importance des modèles mathématiques pour comprendre le monde dans lequel nous vivons. Nous pouvons également observer l'utilisation d'outils tels que des calculatrices pour faire des graphiques. Ces deux éléments, selon nous, sont d'une grande importance, car ils intègrent non seulement des outils technologiques pour la compréhension de la notion de fonction, mais reconnaissent également la valeur de la modélisation mathématique. Nous pensons que, d'une certaine manière, les livres, les plus anciens, ont privilégié la partie algébrique et formelle car celle-ci est plus proche des mathématiques « contemporaines » dans lesquelles les représentations graphiques, les tables de valeurs et les problèmes de la vie quotidienne ont été relégués au second plan. D'autre part, avec les livres les plus récents, il est possible de constater une sorte de prise de conscience des problèmes qui découlent d'une présentation très abstraite des mathématiques dans le cadre de l'éducation de base en intégrant la modélisation mathématique et les nouvelles technologies.

Introduction à la notion de fonction

Ces auteurs commencent le sujet en indiquant que la notion de fonction est l'objet principal dans l'analyse, car les fonctions constituent la clé pour décrire le monde réel en termes mathématiques. Dans une tentative de motiver l'idée de fonction, ils décrivent les situations suivantes :

La temperatura a la que hierve el agua depende de la altura sobre el nivel del mar (el punto de ebullición disminuye conforme se asciende). La tasa de interés que se paga por una inversión monetaria depende de cuánto tiempo dure invertido el dinero. El área del círculo depende de su radio. La distancia que viaja un objeto desde un punto inicial a lo largo de una trayectoria recta depende de su velocidad. (Thomas et Weir, 2005, p.19)

Bien que les auteurs citent quelques exemples où il existe une dépendance d'une variable avec une autre, ils ne les reprennent pas pour les réécrire en représentation algébrique, table de valeurs ou graphique. Cependant, ils s'en servent pour introduire la notation.

Notation

Les auteurs reprennent les exemples avec lesquels ils ont introduit l'idée de fonction et mentionnent que dans tous les cas présentés, il existe la valeur d'une grandeur variable appelée y qui dépend d'une autre valeur variable appelée x . C'est-à-dire y est fonction de x . Les auteurs généralisent aussi qu'une façon symbolique de dire que y est une fonction de x :

$$y = f(x) \text{ (} y \text{ est égal à } f \text{ de } x \text{)}$$

Thomas et Weir expliquent que dans cette notation, le symbole f représente la fonction. La lettre x , appelée variable indépendante, représente la valeur d'entrée de f , et la lettre y , la variable dépendante, représente la valeur résultante de f dans x .

Registres de représentation

— Langage naturel

Au début de la section des fonctions, et avant de définir la notation mathématique, le langage naturel est utilisé pour donner quelques exemples. Il n'y a aucun intérêt du côté des auteurs à montrer que le langage naturel peut être un registre de représentation viable pour comprendre le concept de fonction, puisqu'ils ne l'utilisent plus.

— Algébrique

Les représentations algébriques sont celles privilégiées par les auteurs. Cependant, Thomas et Weir ne le font pas de la même manière qu'Apóstol et Spivak qui, après avoir introduit la notation, s'en servent pour montrer une grande liste de

fonctions. Thomas et Weir, au contraire, et sans doute parce qu'il s'agit d'un livre plus actuel que les deux premiers, donne un exemple dans lequel les élèves devraient utiliser la calculatrice en s'appuyant sur la touche \sqrt{x} . Dans cet exemple, ils montrent la relation de n'importe quel nombre positif avant et après avoir appuyé la touche (sans oublier l'action effectuée par la calculatrice). Avec le même exemple les auteurs mettent en évidence la signification du domaine et l'ensemble image d'une fonction. Bien que les auteurs utilisent les représentations symboliques des fonctions, nous pouvons voir qu'ils ne se concentrent pas sur la notation de la fonction elle-même, mais ils donnent des exemples de ce que le domaine et l'ensemble image d'une fonction signifie, en utilisant les symboles mathématique.

— Graphique

Thomas et Weir mettent, également, l'accent sur la représentation graphique des fonctions, ils mentionnent qu'une autre façon dont une fonction peut être visualisée est au moyen d'un graphique. Ils affirment que le graphique d'une fonction f est une représentation visuelle de son comportement et se compose de l'ensemble des points du plan cartésien dont les coordonnées sont les paires ordonnées entrées-sorties. C'est-à-dire, le graphique en notation d'ensembles est :

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Thomas et Weir expliquent, à l'aide d'une variété de graphiques, la transition de discret au continu lorsqu'ils parlent de graphiques, Fig. 1.7. Ils mentionnent que pour avoir une idée de la façon de relier les points et s'assurer que la Fig. 1.8 ne se produise pas, il est nécessaire de représenter graphiquement un plus grand nombre de paires ordonnées ou d'utiliser la dérivée (sujet vu plus loin dans le livre).

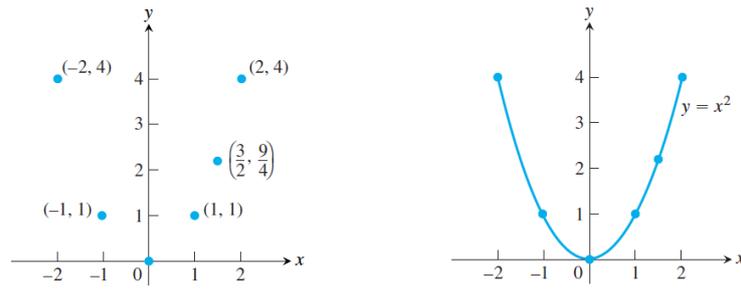


FIGURE 1.7 – Exemple de représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2$ dans sa forme discrète et continue (Thomas et Weir, 2005, p.22)

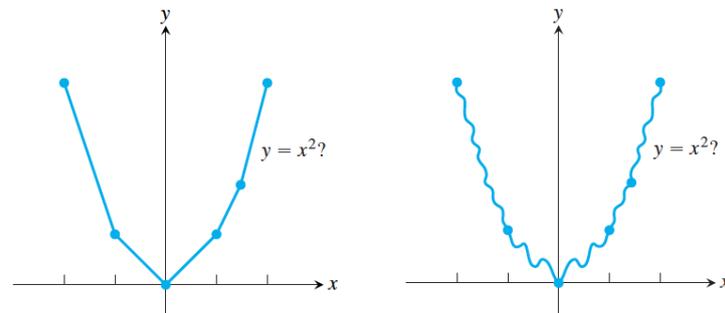


FIGURE 1.8 – Pourquoi l'union des points ne peut pas être comme ça ? (Thomas et Weir, 2005, p.22)

— Table de valeurs

Les auteurs appellent la représentation table de valeurs comme la représentation numérique de la fonction. Ils soulignent que de même qu'une fonction peut être représentée algébriquement par une formule ou visuellement par un graphique, elle peut aussi être représentée numériquement par une table de valeurs, et que, ce sont surtout, les ingénieurs et les professionnels des sciences appliquées qui utilisent habituellement ce type de représentation. Thomas et Weir mentionnent, également, que l'utilisation de l'ordinateur permet de passer plus facilement de la représentation table de valeurs à la représentation graphique, Fig. 1.9.

TABLA 1.2 Datos del diapasón

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	-0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	-0.164
0.00271	-0.141	0.00543	-0.320
0.00289	-0.309	0.00562	-0.354
0.00307	-0.348	0.00579	-0.248
0.00325	-0.248	0.00598	-0.035
0.00344	-0.041		

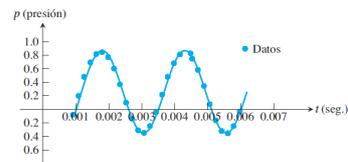


FIGURA 1.27 Curva suave que pasa por los puntos trazados da una gráfica de la función presión representada por la tabla 1.2.

FIGURE 1.9 – Représentation table de valeurs et graphique donnée par un logiciel informatique (Thomas et Weir, 2005, p.23)

Définitions

La definición qu'ils donnent est de nature ensembliste et elle est inspirée dans la définition de Bourbaki : « Una función de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna un elemento único $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$ ». (Thomas et Weir, 2005, p.19). Puis les auteurs précisent que l'ensemble D de toutes les valeurs d'entrée possibles est appelé le domaine de la fonction et l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ quand x varie dans tout D est appelé l'ensemble image de la fonction. L'ensemble image peut ou non inclure tous les éléments de l'ensemble Y . Comme d'autres auteurs, Thomas et Weir se réfèrent également au fait que la fonction peut être conçue comme une sorte de machine, Fig. 1.10, qui produit des valeurs de $f(x)$ tant qu'elle est « alimentée » avec une valeur d'entrée x de son domaine.



FIGURE 1.10 – Diagramme montrant une fonction en tant que machine, (Thomas et Weir, 2005, p.19)

L'auteur présente également un diagramme en flèches pour illustrer la notion de fonction, Fig. 1.11.

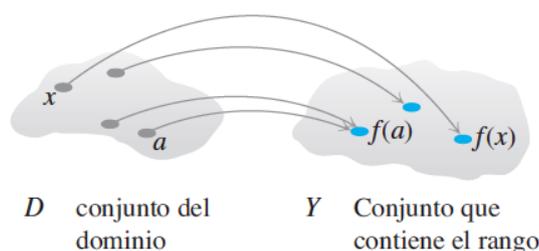


FIGURE 1.11 – Diagramme d’une fonction de l’ensemble D à l’ensemble Y qui attribue un seul élément de Y à chaque élément de D (Thomas et Weir, 2005, p.19)

Livre 4 : Cálculo de una variable, trascendentes tempranas (Stewart, 2008)

Le thème des fonctions, dans ce livre, se trouve dans le premier chapitre (avant le chapitre sur les limites et les dérivés). Les sous-thèmes du chapitre sur la fonction sont : « Quatre façons de représenter une fonction », « Modèles mathématiques : un catalogue de fonctions de base », « Nouvelles fonctions à partir d’anciennes fonctions », « Calculatrices graphiques et ordinateurs », « fonctions exponentielles », « fonctions inverse et logarithmes ». En regardant la table des matières de ce livre, nous pouvons voir que l’auteur développe ce chapitre en pensant aborder les différents registres de représentation (en leur donnant la même importance) de manière à ce que les élèves puissent appréhender l’objet mathématique fonction de différentes perspectives. D’autres éléments importants sont l’attribution d’une section aux modèles mathématiques et l’utilisation d’artefacts technologiques comme les calculatrices graphiques et les ordinateurs.

Introduction à la fonction et registres de représentation

Avant de commencer cette section, il est important de mentionner qu’en raison du développement du sujet fait par cet auteur, il est plus commode d’aborder la manière dont il introduit la fonction et les registres de représentation en même temps, et non en deux parties comme dans les cas précédents.

Stewart (2008) introduit l’idée de fonction, à travers un exemple qui est lié à une situation dans un contexte réel. Il mentionne que, souvent, la représentation graphique d’une fonction aide et est la façon, la plus naturelle et pratique, de décrire et d’illustrer cette fonction. Dans l’exemple, il établit le nombre d’heures de Soleil en fonction de la période de l’année, sous plusieurs latitudes et il montre le graphique qui le représente, Fig. 1.12.

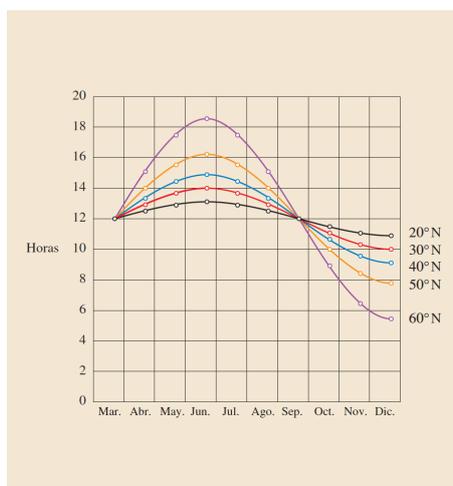


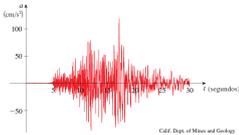
FIGURE 1.12 – Exemplification de Stewart d’une représentation graphique d’une fonction (Stewart, 2008, p. 10)

Par la suite, Stewart mentionne que le but fondamental du calcul est l’étude des fonctions et souligne que, dans le chapitre consacré à ce sujet, il analyse les idées de base concernant à la fonction, ses graphiques et la façon dont les fonctions peuvent être transformés et combinés. Il précise, également, que tout au long du chapitre, il utilisera différentes représentations de la fonction : équations (registre algébrique), table de valeurs (registre table de valeur), graphiques (registre graphique) et mots (langage naturel). Entre parenthèses, nous avons mis le nom du registre de représentation que nous avons utilisée dans cette recherche (chapitre 3).

Stewart est le seul des quatre auteurs à rendre explicites les différents registres de représentation. De même, Stewart assigne une section pour parler de la modélisation des phénomènes du monde réel comme Thomas l’a fait.

Stewart donne quatre exemples où il illustre les quatre façons de représenter une fonction (table 1.1), dans chacun des exemples il montre la représentation en langage naturel (où il explique la relation qui existe entre les variables) et puis il donne une autre des représentations (algébrique, table de valeurs ou graphique). De notre point de vue, cette approche de la notion de fonction permet aux élèves d’identifier que (i) les fonctions sont un cas particulier de relation entre deux choses, de sorte que l’une dépend de l’autre et que (ii) il existe différentes façons de l’exprimer, sans que la représentation soit, nécessairement, une expression algébrique. Stewart renforce le point (ii) en mentionnant qu’il y a quatre façons de représenter une fonction : « Verbalement (mediante una descripción en palabras), Numéricamente (con una tabla de valores),

TABLE 1.1 – Exemples donnés par Stewart pour introduire la fonction dans ses quatre registres de représentations

Registre Exemple	Langue naturelle	Algébrique	Table de valeurs	Graphique																								
A	La aire A d'un cercle dépend de son rayon r . A chaque nombre positif r est associée une valeur de A , donc A est fonction de r	$A = \pi r^2$	—	—																								
B	La population humaine du monde, P , dépend du temps t . La table donne des estimations de la population mondiale, $P(t)$, au moment t , pour certaines années	—	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Año</th> <th>Población (en millones)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1900</td><td>1 650</td></tr> <tr><td>1910</td><td>1 750</td></tr> <tr><td>1920</td><td>1 860</td></tr> <tr><td>1930</td><td>2 070</td></tr> <tr><td>1940</td><td>2 300</td></tr> <tr><td>1950</td><td>2 560</td></tr> <tr><td>1960</td><td>3 040</td></tr> <tr><td>1970</td><td>3 710</td></tr> <tr><td>1980</td><td>4 450</td></tr> <tr><td>1990</td><td>5 280</td></tr> <tr><td>2000</td><td>6 080</td></tr> </tbody> </table>	Año	Población (en millones)	1900	1 650	1910	1 750	1920	1 860	1930	2 070	1940	2 300	1950	2 560	1960	3 040	1970	3 710	1980	4 450	1990	5 280	2000	6 080	—
Año	Población (en millones)																											
1900	1 650																											
1910	1 750																											
1920	1 860																											
1930	2 070																											
1940	2 300																											
1950	2 560																											
1960	3 040																											
1970	3 710																											
1980	4 450																											
1990	5 280																											
2000	6 080																											
C	Le coût C d'envoi une lettre de première classe dépend de son poids w	—	—	—																								
D	L'accélération verticale du sol a , mesurée par un sismographe lors d'un séisme, est fonction du temps écoulé t	—	—																									

Visuellement (mediante una gráfica), Algebraicamente (por medio de una fórmula explícita) ». (Stewart, 2008, p.13).

Plus tard, l'auteur souligne que si la fonction peut être représentée sous ses quatre formes, il est fortement recommandé de passer par chacune d'elles afin d'acquérir une connaissance plus approfondie de la fonction étudiée. En accord avec ce qui précède, Stewart revient sur les exemples précédents pour encourager et montrer au lecteur comment faire les représentations manquantes.

Notation

la notation utilisée par l'auteur est congruente avec la manière dont il introduit l'idée de fonction, puisqu'il mentionne que dans chacun des exemples précédents (table 1.1), une règle est décrite par laquelle, étant donné un nombre (r , t , w , t), un autre nombre est attribué (A , P , C , a , respectivement) et que dans chaque cas, le se-

cond nombre est en fonction du premier. Il précise ensuite que les fonctions d'intérêt sont celles dans lesquelles les valeurs qui prennent les quantités correspondants appartiennent à l'ensemble de nombres réels. C'est à ce moment qu'il fait la transition vers le langage mathématique, le plus utilisé en analyse :

Existe un conjunto D , de números reales, que se llama dominio de la función. El número $f(x)$ es el valor de f en x y se lee « f de x ». El intervalo de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función se llama variable independiente. Un símbolo que representa un número en el intervalo de f se llama variable dependiente.

(Stewart, 2008, p.11)

Définitions

Stewart ne donne qu'une seule définition de la fonction, qui est plus proche de l'idée de Dirichlet puisqu'elle fait référence à la correspondance des valeurs de la variable x avec les valeurs respectives de y :

« Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E »

(Stewart, 2008, p. 11)

Puis il fait remarquer que D et E sont des ensembles de nombres réels. Pour visualiser sa définition, Stewart déclare qu'il est utile de concevoir une fonction comme une machine ou aussi comme un diagramme en flèche et présente presque les mêmes figures que Thomas et Wier, Fig. 1.10 et Fig. 1.11.

En conclusion, nous pouvons observer que les deux premiers livres privilégient les registres, langage naturel et algébrique et, le registre de représentation graphique n'est pas tellement utilisé et même, Spivak (1988) le place dans un autre chapitre. En ce qui concerne le registre table des valeurs, aucun des deux auteurs ne travaille avec lui, même, il semble que les auteurs ne le considèrent pas comme un registre formel et important. Les deux livres suivants (Thomas et Weir, 2005, Stewart, 2008), qui sont

plus récents, mentionnent la modélisation mathématique et l'utilisent. De plus, les auteurs travaillent avec les quatre registres de représentation (en essayant de leur donner un poids égal). En ce qui concerne la notation, les quatre livres utilisent une notation similaire, tel qu'elle est couramment utilisée en mathématiques. Finalement, les définitions qu'ils donnent sont, avant tout, ensembliste au sens de Bourbaki et certains mentionnent la définition de Dirichlet.

1.1.4 Le rôle de la fonction dans la cinématique

Dans cette section nous analysons quatre livres de physique générale qui sont, fréquemment, utilisés dans le terminal scientifique et dans les premiers semestres de la licence de physique au Mexique : [Giancoli \(2006\)](#), [Serway et al. \(2005\)](#), [Halliday et al. \(2010\)](#) et [Sears et al. \(2012\)](#). Deux des ces quatre livres analysés sont en anglais puisque, généralement, au sein de l'UNAM (l'institution où l'expérimentation a eu lieu), les livres sont utilisés dans leur version anglaise. L'analyse de ces livres avait deux objectifs : (i) avoir une référence théorique du Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU), Mouvement Rectiligne Uniforme Accéléré (MRUA) et Mouvement Circulaire Uniforme (MCU), que nous avons utilisés tout au long de cette recherche, et (ii) montrer la notation utilisée, les sens des équations de mouvement et le rôle de la fonction dans la cinématique. Cette analyse a été comparée à celle de la section [1.1.3](#) afin de confronter la différence entre la notation, l'utilisation des variables et leur signification, et la façon d'utiliser la notion de fonction. L'analyse a été divisée par mouvement, c'est-à-dire, nous avons, d'abord, analysé le MRU, dans chacun des livres, en considérant (i) la notation utilisée (variables et leur signification) et (ii) les équations et les registres de représentations utilisés. Ensuite, la même analyse a été effectuée par le MRUA et le MCU.

Avant de présenter l'étude des livres, en considérant chaque mouvement, il est important de mentionner que, les quatre livres désignent les premières sections pour traiter les unités de mesure, les grandeurs physiques et les vecteurs (usages, composants et opérations), ce dernier avec une approche mathématique. Puis, lorsqu'ils introduisent le sujet de la cinématique, tous les livres mettent un accent particulier sur l'utilisation des systèmes de référence et aux directions du mouvement. A partir de ce moment, nous observons l'importance, dans le domaine de la physique, de percevoir des aspects tels que les directions de mouvement, les grandeurs, les distances, les déplacements, les systèmes de référence, les unités de mesure, etc. Ces aspects, qui ne sont pas sou-

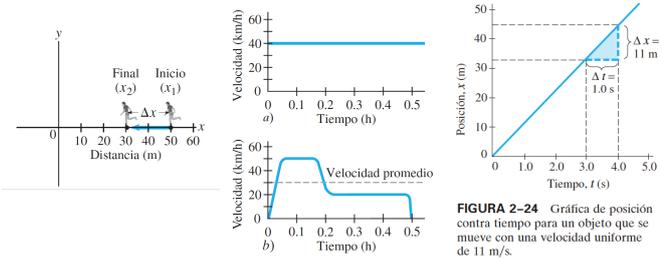
vent pris en compte en mathématiques, conduisent au traitement des fonctions avec d'autres perspectives (certaines d'entre elles sont abordées dans la section de l'analyse a priori des activités, 4.2).

1.1.4.1 Le Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

— **Principios con aplicaciones de física** Giancoli (2006)

Giancoli (2006), dans le sujet MRU, utilise une notation plus proche de la notation mathématique (table 1.2). Il est observé que l'auteur emploie x_1 , x_2 pour indiquer les positions horizontales de l'objet, comme il est couramment utilisé en géométrie, aussi il se sert de l'objet mathématique, limite. L'auteur utilise, de la même façon, 3 registres de représentation de la fonction (dans ce cas, comme il s'agit d'un MRU, toutes les représentations sont des fonctions) : le **langage naturel**, dans lequel il écrit la relation qui existe entre les variables impliquées dans le MRU ; le **registre algébrique**, en utilisant les variables définies dans la première colonne et ; le **registre graphique**, cet auteur présente des graphiques de trajectoire (y vs x), de position en x en fonction du temps et de vitesse en fonction du temps. Cependant, il n'utilise pas le registre, table des valeurs.

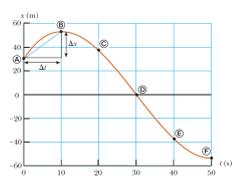
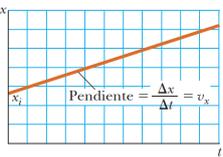
TABLE 1.2 – Analyse du livre de Giancoli (2006) sur le MRU

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)	
Giancoli (2006)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>x : Position horizontale x_1 : Position horizontale 1 x_2 : Position horizontale 2 Δ : Le changement Δx : Déplacement horizontal y : Position verticale t : Temps t_1 : Temps en x_1 t_2 : Temps en x_2 Δt : Intervalle de temps rapidez promedio : Composant de la vitesse v : Vitesse instantanée \bar{v} : Vitesse moyenne (+) : Mouvement à droite (-) : Mouvement à gauche</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel</p> <p style="text-align: center;">rapidez promedio = $\frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$</p> <p style="text-align: center;">velocidad promedio = $\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\text{posición final} - \text{posición inicial}}{\text{tiempo transcurrido}}$</p> <p style="text-align: center;">Algébrique</p> <p style="text-align: center;">$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$</p> <p style="text-align: center;">Graphiques</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <p style="font-size: small;">FIGURA 2-24 Gráfica de posición contra tiempo para un objeto que se mueve con una velocidad uniforme de 11 m/s.</p>

— **Física para ciencias e ingeniería Serway et al. (2005)**

Serway et al. (2005) (table 1.3), Les auteurs de ce livre utilisent une notation différente de celle de Giancoli (2006), ils utilisent x_i, x_f qui ont une connotation plus proche de la physique, car ils font référence à la position initiale et finale d'un objet. Comme dans le livre précédent, Serway et al. (2005) utilise l'objet mathématique, limite. Les auteurs utilisent quatre registres de représentation de la fonction : **Langage naturel**; **Algébrique**; **table de valeurs** et; **graphique**, mais, dans le registre graphique, ils ne montrent que les graphiques de la position en x en fonction du temps t . En laissant de côté le graphique de la trajectoire et de la vitesse en fonction du temps.

TABLE 1.3 – Analyse du livre de Serway et al. (2005) sur le MRU

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)																									
Serway et al. (2005)																									
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation																								
<p>x : Position horizontale x_i : Position horizontale initial x_f : Position horizontale final Δ : Le changement Δx : Déplacement horizontal t : Temps t_i : Temps en x_i t_f : Temps en x_f Δt : Intervalle de temps d : Distance v_{prom} : Vitesse moyenne $v_{x,prom}$: Composante de la vitesse moyenne v_x : Vitesse instantanée (+) : Mouvement à droite (-) : Mouvement à gauche</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel</p> <p style="text-align: right;">la velocidad instantánea v_x es igual al valor límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:¹</p> <p style="text-align: center;">La rapidez promedio v_{prom} de una partícula, una cantidad escalar, se define como la distancia total recorrida dividida entre el intervalo de tiempo total requerido para recorrer dicha distancia:</p> <p style="text-align: center;">Algébrique</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="background-color: #fff9c4; padding: 5px;">$v_{x,prom} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$</div> <div style="background-color: #fff9c4; padding: 5px;">$v_{prom} \equiv \frac{d}{\Delta t}$</div> <div style="background-color: #fff9c4; padding: 5px;">$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$</div> </div> <div style="background-color: #fff9c4; padding: 5px; text-align: center; margin: 5px 0;">$x_f = x_i + v_x t$ (para v_x constante)</div> <p style="text-align: center;">Table des valeurs et Graphiques</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="3" style="text-align: left;">Posición del automóvil en varios tiempos</th> </tr> <tr> <th>Posición</th> <th>t (s)</th> <th>x (m)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Ⓐ</td><td>0</td><td>30</td></tr> <tr><td>Ⓑ</td><td>10</td><td>52</td></tr> <tr><td>Ⓒ</td><td>20</td><td>38</td></tr> <tr><td>Ⓓ</td><td>30</td><td>0</td></tr> <tr><td>Ⓔ</td><td>40</td><td>-37</td></tr> <tr><td>Ⓕ</td><td>50</td><td>-53</td></tr> </tbody> </table> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;">   </div>	Posición del automóvil en varios tiempos			Posición	t (s)	x (m)	Ⓐ	0	30	Ⓑ	10	52	Ⓒ	20	38	Ⓓ	30	0	Ⓔ	40	-37	Ⓕ	50	-53
Posición del automóvil en varios tiempos																									
Posición	t (s)	x (m)																							
Ⓐ	0	30																							
Ⓑ	10	52																							
Ⓒ	20	38																							
Ⓓ	30	0																							
Ⓔ	40	-37																							
Ⓕ	50	-53																							

— **Fundamentals of Physics Halliday et al. (2010)**

Halliday et al. (2010) (table 1.4), comme Giancoli (2006), utilisent une notation plus proche de la géométrie et aussi, les auteurs emploient l'objet mathématique, limite. Ils utilisent 3 registres de représentation des fonctions : **Langage naturel**, **algébrique** et **graphique** (ils n'affichent que les graphiques de position en x en fonction du temps). De plus, nous pouvons remarquer que les graphiques sont accompagnés de la situation physique pour qu'ils puissent être compris plus facilement.

TABLE 1.4 – Analyse du livre de Halliday et al. (2010) sur le MRU

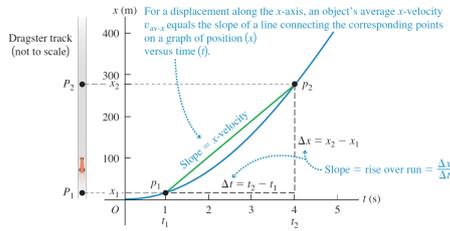
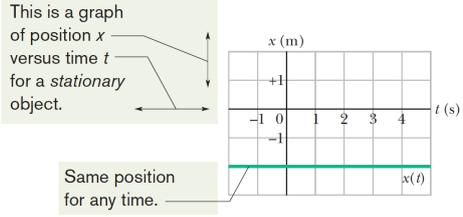
Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)	
Halliday et al. (2010)	
Variables et signification	Équations du mouvement et représentations
<p>x : Position horizontale x_1 : Position horizontale 1 x_2 : Position horizontale 2 Δ : Le changement Δx : Déplacement horizontal y : Position vertical t : Temps t_1 : Temps en x_1 t_2 : Temps en x_2 Δt : Intervalle de temps s_{avg} : Composant de la vitesse moyenne v_{avg} : La vitesse moyenne $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$: Vitesse instantanée (+) : Mouvement à droite (-) : Mouvement à gauche</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel</p> <p style="text-align: right;">One of</p> <p>them is the average velocity v_{avg}, which is the ratio of the displacement Δx that occurs during a particular time interval Δt to that interval:</p> <p>Average speed s_{avg} is a different way of describing “how fast” a particle moves. Whereas the average velocity involves the particle’s displacement Δx, the average speed involves the total distance covered (for example, the number of meters moved), independent of direction; that is,</p> $s_{avg} = \frac{\text{total distance}}{\Delta t}$ <p>The velocity at any instant is obtained from the average velocity by shrinking the time interval Δt closer and closer to 0. As Δt dwindles, the average velocity approaches a limiting value, which is the velocity at that instant:</p> <p style="text-align: center;">Algébrique</p> $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ <p style="text-align: center;">Graphiques</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="width: 45%;"> <p>This is a graph of position x versus time t for a stationary object.</p> <p>Fig. 2-2 The graph of $x(t)$ for an armadillo that is stationary at $x = -2$ m. The value of x is -2 m for all times t.</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>Same position for any time.</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="width: 45%;"> <p>This is a graph of position x versus time t for a moving object.</p> <p>At $x = 2$ m when $t = 4$ s. Plotted here.</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>It is at position $x = -5$ m when time $t = 0$ s. That data is plotted here.</p> <p>At $x = 0$ m when $t = 3$ s. Plotted here.</p> </div> </div> <p>Fig. 2-3 The graph of $x(t)$ for a moving armadillo. The path associated with the graph is also shown, at three times.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="width: 45%;"> <p>This is a graph of position x versus time t.</p> <p>To find average velocity, first draw a straight line, start to end, and then find the slope of the line.</p> <p>$v_{avg} = \text{slope of this line} = \frac{\text{rise, } \Delta x}{\text{run, } \Delta t}$</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>This vertical distance is how far it moved, start to end: $\Delta x = 2 \text{ m} - (-4 \text{ m}) = 6 \text{ m}$</p> <p>This horizontal distance is how long it took, start to end: $\Delta t = 4 \text{ s} - 1 \text{ s} = 3 \text{ s}$</p> </div> </div> <p>Fig. 2-4 Calculation of the average velocity between $t = 1$ s and $t = 4$ s as the slope of the line that connects the points on the $x(t)$ curve representing those times.</p>

— **University Physics : With Modern Physics** Sears et al. (2012)

Sears et al. (2012) (table 1.5), utilisent également une notation proche de la géométrie lorsqu'ils se réfèrent à la position de l'objet. Aussi, et comme les autres livres, ils travaillent 3 registres de représentation : **langage naturel**, **algébrique**, et **graphique**

(seulement la position en x en fonction du temps t). De la même manière, ils utilisent l'objet mathématique, limite.

TABLE 1.5 – Analyse du livre de Sears et al. (2012) sur le MRU

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)	
Sears et al. (2012)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>x_1 : Position horizontale 1 x_2 : Position horizontale 2 Δ : Le changement Δx : Déplacement horizontal t : Temps t_1 : Temps en x_1 t_2 : Temps en x_2 Δt : Intervalle de temps v_{av-x} : Vitesse moyenne v_x : Vitesse instantanée (+) : Mouvement à droite (-) : Mouvement à gauche</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel</p> <p>The x-component of average velocity, or average x-velocity, is the x-component of displacement, Δx, divided by the time interval Δt during which the displacement occurs. We use the symbol v_{av-x} for average x-velocity (the subscript “av” signifies average value and the subscript x indicates that this is the x-component):</p> <p>In the language of calculus, the limit of $\Delta x/\Delta t$ as Δt approaches zero is called the derivative of x with respect to t and is written dx/dt. <u>The instantaneous velocity is the limit of the average velocity as the time interval approaches zero; it equals the instantaneous rate of change of position with time.</u> We use the symbol v_x, with no “av” subscript, for the instantaneous velocity along the x-axis, or the instantaneous x-velocity:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Algébrique</p> $v_{av-x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ </div> <div style="text-align: center;"> $v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ </div> </div> <p style="text-align: center;">Graphiques</p>  <p>Fig. 2-2 The graph of $x(t)$ for an armadillo that is stationary at $x = -2$ m. The value of x is -2 m for all times t.</p> 

En conclusion de l'analyse du MRU dans les quatre livres, nous pouvons dire qu'il existe certaines différences dans la notation des variables qui représentent les concepts physiques, surtout, quand ils se réfèrent aux différents types de vitesses. Aussi, nous avons pu observer que le seul qui travaille avec le registre table des valeurs numé-

riques (et ne le mentionne qu'une seule fois) est le livre de [Serway et al. \(2005\)](#). Un élément important que nous considérons comme manquant dans trois des quatre livres (puisque seulement [Giancoli \(2006\)](#) le mentionne) est la représentation graphique de la trajectoire (y vs x), et de la vitesse (v) en fonction du temps (t). Bien que ces graphiques puissent être évidents, puisqu'il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme, ne pas les présenter peut être source de confusion en pensant que le graphique de la position en fonction du temps fait référence à la position de l'objet dans l'espace ([McDermott et al., 1987](#), [Clement, 1985](#)).

1.1.4.2 Le Mouvement Rectiligne Uniforme Accéléré (MRUA)

— **Principios con aplicaciones de física** [Giancoli \(2006\)](#)

Nous observons que [Giancoli \(2006\)](#) (table 1.6) dans le sujet du MRUA fait un changement de notation (il n'utilise plus les coefficients 1 et 2) et il se sert du coefficient 0 pour désigner la position en temps égale à zéro; nous constatons aussi que parmi les équations du mouvement qu'il traite, seules deux sont des fonctions (position x en fonction du temps t et, vitesse v en fonction du temps t). Contrairement à le sujet du MRU où [Giancoli](#) donne un graphique de trajectoire (y vs x), dans le sujet du MRUA il ne fait aucun graphique de trajectoire, ce qui, à notre avis, peut prêter à confusion (comme nous l'avons mentionné plus haut)

TABLE 1.6 – Analyse du livre de Giancoli (2006) sur le MRUA

Mouvement Rectiligne Uniformément Accélééré (MRUA)	
Giancoli (2006)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>$t_2 = t$: Temps</p> <p>$t_1 = t_0$: Temps en $t = 0$</p> <p>x : Position horizontale en t</p> <p>x_0 : Position horizontale en $t = 0$</p> <p>y : Position vertical en t</p> <p>y_0 : Position vertical en $t = 0$</p> <p>v_0 : Vitesse en $t = 0$</p> <p>v : Vitesse en t</p> <p>\bar{a} : Composante de l'accélération moyenne</p> <p>a : Composante sw l'accélération instantanée</p> <p>$v(+)$: Mouvement vers la droite</p> <p>$v(-)$: Mouvement vers la gauche</p> <p>a est de même signe que v la grandeur de la vitesse augmente a es de signe contraire que v la grandeur de la vitesse diminue</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel</p> <p style="text-align: center;">aceleración promedio = $\frac{\text{cambio de velocidad}}{\text{tiempo transcurrido}}$</p> <p style="text-align: center;">Algébrique</p> $\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ $\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$ </div> <p style="text-align: center;">$v = v_0 + at$</p> <p style="text-align: center;">$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$</p> <p style="text-align: center;">$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$</p> <p style="text-align: center;">$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$</p> <p style="text-align: center;">Graphiques</p> <p>FIGURA 2-25 a) Velocidad contra tiempo y b) desplazamiento contra tiempo para un objeto con velocidad variable. (Lea el texto).</p> <p>FIGURA 2-23 Gráficas de a) y contra t, b) y contra t para una bola lanzada hacia arriba. Ejemplos 2-12, 2-14 y 2-15.</p>

— **Física para ciencias e ingeniería Serway et al. (2005)**

Serway et al. (2005) (table 1.7) sont toujours cohérent avec la notation qu'ils ont donnée dans le MRU. Ils utilisent i et f pour indiquer si la position ou la vitesse est initiale ou finale. De plus, les auteurs placent un sous-indice x dans la vitesse afin d'indiquer qu'il s'agit d'un mouvement dans la dimension horizontale (les auteurs pré-

parent le lecteur pour les mouvements en deux dimensions). Comme dans le MRU, ces auteurs traitent une notation plus proche du phénomène physique. Les représentations continuent d'être en : **langage naturel**, **algébrique** et **graphique**. Un autre aspect important est que quand les auteurs présentent les équations, d'un côté ils écrivent la relation entre les variables, ce qui conduit le lecteur à l'idée de fonction. Ils introduisent, également, l'idée de la première dérivée comme vitesse et de la seconde comme accélération. En ce qui concerne le registre graphique, les auteurs présentent des graphiques de position en fonction du temps, de vitesse en fonction du temps et d'accélération en fonction du temps d'une MRUA, et un mouvement avec accélération variable. Ces représentations graphiques nous semblent importantes, car il est possible d'observer non seulement la représentation des variables en fonction du temps de manière globale, mais aussi le comportement de chacune des variables dans un temps déterminé.

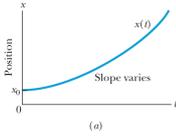
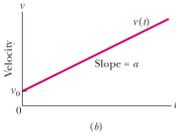
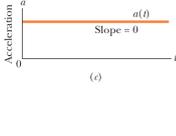
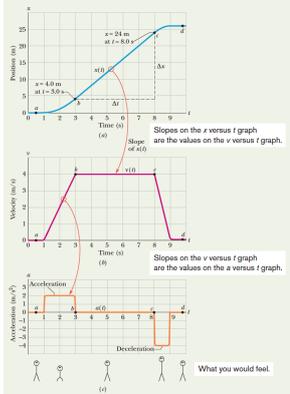
TABLE 1.7 – Analyse du livre de Serway et al. (2005) sur le MRUA

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRUA)																
Serway et al. (2005)																
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation															
<p>$t_f = t$: Temps en x_f t_i : Temps $t = 0$ x : Position horizontale x_i : Position horizontale initial x_f : Position horizontale final Δ : Le changement y : Position vertical y_i : Position vertical initial y_f : Position vertical final $a_{x,prom}$: Accélération moyenne (velocidad promedio) $a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$: Accélération instantanée v_{xi} : Vitesse horizontale initial v_{xf} : Vitesse horizontale final (+) : Mouvement à droite (-) : Mouvement à gauche a est de même signe que v la grandeur de la vitesse augmente a es de signe contraire à v la grandeur de la vitesse diminue</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel</p> <p>La accélération promedio $a_{x,prom}$ de la partícula se define como el cambio en velocidad Δv_x dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre el cambio:</p> <p>Por lo tanto, es útil definir la accélération instantánea como el límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero.</p> <p style="text-align: center;">Algébrique et graphique</p> <div style="background-color: #fff9c4; padding: 5px; display: flex; justify-content: space-around;"> $a_{x,prom} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$ $a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$ </div> $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$ <hr/> <p style="text-align: center;">Ecuaiones cinemáticas para movimiento de una partícula bajo aceleración constante</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Número de ecuación</th> <th style="text-align: left;">Ecuación</th> <th style="text-align: left;">Información que se conoce por la ecuación</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2.13</td> <td>$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$</td> <td>Velocidad como función del tiempo</td> </tr> <tr> <td>2.15</td> <td>$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$</td> <td>Posición como función de velocidad y tiempo</td> </tr> <tr> <td>2.16</td> <td>$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$</td> <td>Posición como función del tiempo</td> </tr> <tr> <td>2.17</td> <td>$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$</td> <td>Velocidad como función de la posición</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center; font-size: small;">Nota: El movimiento es a lo largo del eje x.</p> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 2.8 (Ejemplo 2.5) a) Gráfica posición-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje x. b) La gráfica velocidad-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica posición-tiempo en cada instante. c) La gráfica aceleración-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en cada instante.</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 2.11 Una partícula bajo aceleración constante a_x que se mueve a lo largo del eje x: a) gráfica posición-tiempo, b) gráfica velocidad-tiempo y c) gráfica aceleración-tiempo.</p> </div> </div>	Número de ecuación	Ecuación	Información que se conoce por la ecuación	2.13	$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocidad como función del tiempo	2.15	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Posición como función de velocidad y tiempo	2.16	$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición como función del tiempo	2.17	$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Velocidad como función de la posición
Número de ecuación	Ecuación	Información que se conoce por la ecuación														
2.13	$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocidad como función del tiempo														
2.15	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Posición como función de velocidad y tiempo														
2.16	$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición como función del tiempo														
2.17	$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Velocidad como función de la posición														

— **Fundamentals of Physics** [Halliday et al. \(2010\)](#)

[Halliday et al. \(2010\)](#) (table 1.8), comme [Giancoli \(2006\)](#), changent le sous-indice de 1 à 0 pour indiquer la position et la vitesse lorsque le temps est de 0. Aussi, dans ce livre, ils introduisent l'accélération comme dérivée de la vitesse par rapport au temps. Les auteurs utilisent les représentations en : **langage naturel**, **algébrique** et **graphique**. En ce qui concerne les équations du mouvement, les auteurs, les présentent sans rien dire sur la relation entre les variables en langage naturel, contrairement à [Serway et al. \(2005\)](#). Enfin, les auteurs présentent les graphiques de la même manière que Serway (position en fonction du temps, vitesse en fonction du temps et accélération en fonction du temps).

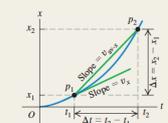
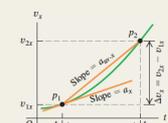
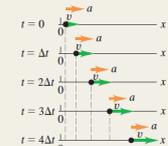
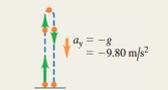
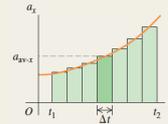
TABLE 1.8 – Analyse du livre de Halliday et al. (2010) sur le MRUA

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRUA)	
Halliday et al. (2010)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p> $t_2 = t$: Temps $t_1 = t_0$: Temps en $t = 0$ x : Position horizontale en t x_0 : Position horizontale en $t = 0$ y : Position vertical en t y_0 : Position vertical en $t = 0$ v_0 : Vitesse en $t = 0$ v : Vitesse en t a_{avg} : Accélération moyenne $a = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = \frac{d^2x}{dt^2}$: Accélération instantanée $v(+)$: Mouvement vers la droite $v(-)$: Mouvement vers la gauche Lorsque la vitesse et l'accélération de l'objet sont dans la même direction, l'objet augmente sa vitesse. Par contre, lorsque la vitesse et l'accélération sont dans des directions opposées, l'objet ralentit. </p> <p> Free-Fall Acceleration An important example of straight-line motion with constant acceleration is that of an object rising or falling freely near Earth's surface. The constant acceleration equations describe this motion, but we make two changes in notation: (1) we refer the motion to the vertical y axis with $+y$ vertically <i>up</i>; (2) we replace a with $-g$, where g is the magnitude of the free-fall acceleration. Near Earth's surface, $g = 9.8 \text{ m/s}^2 (= 32 \text{ ft/s}^2)$. </p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel et algébrique</p> <p> Average Acceleration <i>Average acceleration</i> is the ratio of a change in velocity Δv to the time interval Δt in which the change occurs: $a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$ The algebraic sign indicates the direction of a_{avg}. </p> <p> Instantaneous Acceleration <i>Instantaneous acceleration</i> (or simply acceleration) a is the first time derivative of velocity $v(t)$ and the second time derivative of position $x(t)$: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$ On a graph of v versus t, the acceleration a at any time t is the slope of the curve at the point that represents t. </p> <p> Constant Acceleration The five equations in Table 2-1 describe the motion of a particle with constant acceleration: $v = v_0 + at,$ $x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2,$ $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$ $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t,$ $x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2.$ These are <i>not</i> valid when the acceleration is not constant. </p> <p style="text-align: center;">Graphiques</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>(a)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(b)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(c)</p> </div> </div> <div style="margin-top: 10px;">  </div>

— **University Physics : With Modern Physics** [Sears et al. \(2012\)](#)

Dans le livre écrit par [Sears et al. \(2012\)](#) (1.9), dans la section consacrée au résumé du sujet MRUA, les auteurs donnent au lecteur, la relation entre les variables dans trois registres de représentation : **langage naturel**, **algébrique** et **graphique**. La notation qu'ils utilisent est composée des sous-indices 0 et x pour indiquer que le mouvement commence lorsque $t = 0$ et que c 'est un mouvement horizontal (respectivement). De plus, nous observons que les auteurs introduisent l'accélération comme dérivée de la vitesse. Aussi et contrairement aux autres livres, nous observons que les auteurs utilisent l'intégrale pour montrer qu'en intégrant l'accélération il est possible d'obtenir la vitesse et, de la même manière, en intégrant une vitesse il est possible de déterminer une position. C'est le seul des quatre livres qui aborde l'intégrale en traitant le sujet du MRUA.

TABLE 1.9 – Analyse du livre de Sears et al. (2012) sur le MRUA

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRUA)	
Sears et al. (2012)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>$t_2 = t$: Temps</p> <p>$t_1 = t_0$: Temps en $t = 0$</p> <p>x : Position horizontale en t</p> <p>x_0 : Position horizontale en $t = 0$</p> <p>y : Position vertical en t</p> <p>y_0 : Position vertical en $t = 0$</p> <p>v_{0x} : Vitesse en $t = 0$</p> <p>v_x : Vitesse en t</p> <p>a_{av-x} : Accélération moyenne</p> <p>$a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$: Accélération instantanée</p> <p>$v(+)$: Mouvement vers la droite</p> <p>$v(-)$: Mouvement vers la gauche</p> <p>Lorsque la vitesse et l'accélération de l'objet sont dans la même direction, l'objet augmente sa vitesse. Par contre, lorsque la vitesse et l'accélération sont dans des directions opposées, l'objet ralentit.</p>	<p>Langage naturel, algébrique et graphique</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Straight-line motion, average and instantaneous x-velocity: When a particle moves along a straight line, we describe its position with respect to an origin O by means of a coordinate such as x. The particle's average x-velocity v_{av-x} during a time interval $\Delta t = t_2 - t_1$ is equal to its displacement $\Delta x = x_2 - x_1$ divided by Δt. The instantaneous x-velocity v_x at any time t is equal to the average x-velocity for the time interval from t to $t + \Delta t$ in the limit that Δt goes to zero. Equivalently, v_x is the derivative of the position function with respect to time.</p> $v_{av-x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ </div> <div style="width: 45%; text-align: right;">  </div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Average and instantaneous x-acceleration: The average x-acceleration a_{av-x} during a time interval Δt is equal to the change in velocity $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ during that time interval divided by Δt. The instantaneous x-acceleration a_x is the limit of a_{av-x} as Δt goes to zero, or the derivative of v_x with respect to t.</p> $a_{av-x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ $a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$ </div> <div style="width: 45%; text-align: right;">  </div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Straight-line motion with constant acceleration: When the x-acceleration is constant, four equations relate the position x and the x-velocity v_x at any time t to the initial position x_0, the initial x-velocity v_{0x} (both measured at time $t = 0$), and the x-acceleration a_x.</p> <p>Constant x-acceleration only:</p> $v_x = v_{0x} + a_x t$ $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$ $x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2} \right) t$ </div> <div style="width: 45%; text-align: right;">  </div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Freely falling bodies: Free fall is a case of motion with constant acceleration. The magnitude of the acceleration due to gravity is a positive quantity, g. The acceleration of a body in free fall is always downward.</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: right;">  </div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Straight-line motion with varying acceleration: When the acceleration is not constant but is a known function of time, we can find the velocity and position as functions of time by integrating the acceleration function.</p> $v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt$ $x = x_0 + \int_0^t v_x dt$ </div> <div style="width: 45%; text-align: right;">  </div> </div>

En ce qui concerne l'analyse des quatre livres de physique générale sur le sujet du MRUA, les quatre utilisent les registres de représentation : **Langage naturel, algébrique** et **graphique** (Aucun n'utilise les tables de valeurs). D'autre part, [Giancoli \(2006\)](#) est le seul qui n'utilise ni la première ni la seconde dérivée pour calculer la vitesse et l'accélération. En ce qui concerne les représentations algébriques, seulement [Serway et al. \(2005\)](#) rend explicite (en langage naturel) la relation entre les variables dans chacune des équations en mettant en évidence les fonctions. L'utilisation des graphiques de [Giancoli \(2006\)](#) n'est pas très large, il ne montre pas les graphiques de vitesse et accélé-

ration en fonction du temps ni de trajectoire. D'autre part, les 3 livres restants montrent les graphiques de position, de vitesse et d'accélération en fonction du temps, mais pas de trajectoire (une explication possible est que c'est un mouvement rectiligne et les auteurs prennent pour évident que le lecteur le saura). Un aspect important que nous pouvons souligner est que dans aucun des livres, dans les sujets de MRU et MRUA, ne mentionne explicitement ce que les fonctions paramétriques signifient. C'est-à-dire, bien qu'ils les utilisent puisque le paramètre temps est fondamental en physique, il n'y a aucune intention de mettre en évidence leur utilisation pour atteindre l'équation de trajectoire, ni de faire savoir au lecteur ce que les paramètres signifient. Nous pensons qu'il est important de mentionner ce qui se passe dans les deux dimensions même dans le MRU où, idéalement, la dimension y n'influence pas. La raison principale est que dans les phénomènes physiques, les mouvements idéaux sont rares et la dimension y émerge naturellement et, ne pas le mentionner peut générer de la confusion.

1.1.4.3 Le Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

L'analyse du MCU, nous le présentons en considérant les quatre livres dans leur ensemble (dans les tables 1.10, 1.11, 1.12 et 1.13, il est possible de voir comment les auteurs traitent le sujet du Mouvement Circulaire Uniforme). La raison de cette façon de le faire est que, les auteurs abordent le sujet d'une manière très similaire. En premier lieu, nous pouvons dire que, les quatre livres privilégient la représentation algébrique en oubliant, complètement, les représentations graphiques et les tables de valeurs. D'autre part, bien que le MCU soit un mouvement en deux dimensions, les auteurs ne travaillent qu'avec les grandeurs des variables, en laissant de côté les travaux avec les composantes vectorielles. Les livres : [Serway et al. \(2005\)](#), [Halliday et al. \(2010\)](#) et [Sears et al. \(2012\)](#) utilisent le langage naturel pour expliquer certaines des équations, bien qu'ils ne soient pas très détaillés.

Nous pensons que cette manière de présenter le MCU est une conséquence de la façon dont le MRU et le MRUA ont été abordés. En d'autres termes, il n'existe pas d'étude vectorielle bidimensionnelle du MRU et MRUA. Bien que nous comprenions qu'il s'agit de mouvements dans une dimension (et que dans les livres, les auteurs privilégient les mouvements horizontaux, sur x), nous pensons que mentionner ce qui se passe avec l'autre dimension (y) est un élément nécessaire, non seulement pour montrer ce qui se passe mathématiquement dans le développement vectoriel, mais pour montrer au lecteur que, dans la vie réelle, il est difficile de trouver des mouvements idéaux et que,

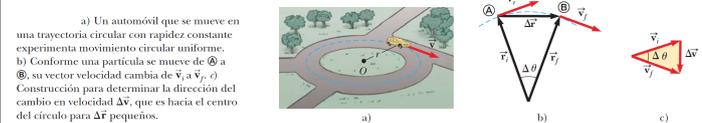
ce qui est présenté dans les livres est une idéalisation du phénomène. Donc, si le MRU et le MRUA étaient présentées en considérant les dimensions x et y par rapport au paramètre t contribuerait, également, à introduire l'importance des paramètres dans la physique et la relation entre les fonctions paramétriques du mouvement et l'équation de la trajectoire (équation rectangulaire) et, par conséquent, aborder le MCU serait beaucoup plus riche en mettant en évidence la relation entre les mathématiques et la physique. Cette façon de présenter le MRU et le MRUA est celle que nous suivons dans les activités de modélisation proposées (section 4.2).

— **Principios con aplicaciones de física Giancoli (2006)**

TABLE 1.10 – Analyse du livre de Giancoli (2006) sur le MCU

Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)	
Giancoli (2006)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>$v = v_1 = v_2$: La vitesse à n'importe quel moment</p> <p>\vec{v}_1 : Vecteur vitesse 1</p> <p>\vec{v}_2 : Vecteur vitesse 2</p> <p>r : Rayon</p> <p>Δl : Distance de A à B sur l'arc de circonférence $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$: Changement du vecteur vitesse</p> <p>$\Delta \theta$: Angle entre deux vecteurs</p> <p>a_R : L'accélération centripète radiale</p> <p>T : Période</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel et algébrique</p> <p>FIGURA 5-2 Determinación del cambio en velocidad, $\Delta \vec{v}$, para una partícula que se mueve en una trayectoria circular. La longitud Δl es la distancia a lo largo del arco, desde A hasta B.</p> <p style="text-align: center;"> $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \Delta v = \frac{v}{r} \Delta l.$ $a_R = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad \boxed{a_R = \frac{v^2}{r}} \quad T = \frac{1}{f}.$ $v = \frac{2\pi r}{T},$ </p>

TABLE 1.11 – Analyse du livre de Serway et al. (2005) sur le MCU

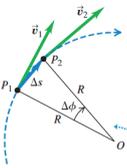
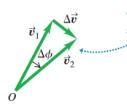
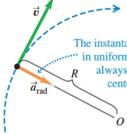
Movimiento Circular Uniforme (MCU)	
Serway et al. (2005)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>$v = v_i = v_f$: La vitesse à n'importe quel moment</p> <p>\vec{v}_i : Vecteur vitesse initiale</p> <p>\vec{v}_f : Vecteur vitesse finale</p> <p>$r = r_i = r_f$: Rayon</p> <p>$\Delta \vec{r}$: Vecteur qui représente le changement de position</p> <p>$\Delta \vec{v}$: Changement du vecteur vitesse</p> <p>$\Delta \theta$: Angle entre deux vecteurs</p> <p>\vec{a}_{prom} : Magnitude de l'accélération moyenne</p> <p>$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$: Le vecteur accélération instantanée</p> <p>a_c : L'accélération centripète</p> <p>T : Période</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel et algébrique</p> <p>a) Un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante experimenta movimiento circular uniforme. b) Conforme una partícula se mueve de \textcircled{A} a \textcircled{B}, su vector velocidad cambia de \vec{v}_i a \vec{v}_f. c) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta \vec{v}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta \vec{r}$ pequeños.</p>  $\frac{ \Delta \vec{v} }{v} = \frac{ \Delta \vec{r} }{r} \quad \vec{a}_{prom} = \frac{ \Delta \vec{v} }{ \Delta t } = \frac{v}{r} \frac{ \Delta \vec{r} }{\Delta t}$ $a_c = \frac{v^2}{r} \quad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$ <p>La componente de aceleración tangencial causa un cambio en la rapidez v de la partícula. Esta componente es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud se conoce por</p> $a_t = \left \frac{dv}{dt} \right $ <p>La componente de aceleración radial surge de un cambio en dirección del vector velocidad y se proporciona por</p> $a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$

— **Fundamentals of Physics** Halliday et al. (2010)

TABLE 1.12 – Analyse du livre de Halliday et al. (2010) sur le MCU

Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)	
Halliday et al. (2010)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>v : La vitesse de la particule \vec{v} : Le vecteur vitesse r : Rayon a : L'accélération centripète T : Période</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel et algébrique</p> <p>Uniform Circular Motion If a particle travels along a circle or circular arc of radius r at constant speed v, it is said to be in <i>uniform circular motion</i> and has an acceleration \vec{a} of constant magnitude</p> $a = \frac{v^2}{r}.$ <p>The direction of \vec{a} is toward the center of the circle or circular arc, and \vec{a} is said to be <i>centripetal</i>. The time for the particle to complete a circle is</p> $T = \frac{2\pi r}{v}.$ <p>T is called the <i>period of revolution</i>, or simply the <i>period</i>, of the motion.</p>

TABLE 1.13 – Analyse du livre de Sears et al. (2012) sur le MCU

Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)	
Sears et al. (2012)	
Variables et signification	Équations du mouvement et Représentation
<p>v : La vitesse à n'importe quel moment</p> <p>$v_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$: La vitesse à P_1</p> <p>$\Delta \vec{v}$: Changement du vecteur vitesse</p> <p>Δs : La distance à laquelle la particule se déplace dans la courbe.</p> <p>Δt : Intervalle de temps</p> <p>R : Rayon</p> <p>a_{av} : La magnitude de l'accélération moyenne</p> <p>a : La magnitude de l'accélération instantanée \vec{a} en P_1</p> <p>a_{rad} : L'accélération radiale ou l'accélération centripète</p> <p>T : Période</p>	<p style="text-align: center;">Langage naturel et algébrique</p> <p>3.28 Finding the velocity change $\Delta \vec{v}$, average acceleration \vec{a}_{av}, and instantaneous acceleration \vec{a}_{rad} for a particle moving in a circle with constant speed.</p> <p>(a) A particle moves a distance Δs at constant speed along a circular path.</p>  <p>(b) The corresponding change in velocity and average acceleration</p>  <p style="text-align: center;">These two triangles are similar.</p> $\frac{ \Delta \vec{v} }{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \quad \text{or} \quad \Delta \vec{v} = \frac{v_1}{R} \Delta s$ <p>The magnitude a_{av} of the average acceleration during Δt is therefore</p> $a_{av} = \frac{ \Delta \vec{v} }{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ <p>The magnitude a of the instantaneous acceleration \vec{a} at point P_1 is the limit of this expression as we take point P_2 closer and closer to point P_1:</p> $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ <p>If the time interval Δt is short, Δs is the distance the particle moves along its curved path. So the limit of $\Delta s/\Delta t$ is the speed v_1 at point P_1. Also, P_1 can be any point on the path, so we can drop the subscript and let v represent the speed at any point. Then</p> $a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{uniform circular motion})$ <p>(c) The instantaneous acceleration</p>  <p style="text-align: center;">The instantaneous acceleration in uniform circular motion always points toward the center of the circle.</p> <p>We can also express the magnitude of the acceleration in uniform circular motion in terms of the period T of the motion, the time for one revolution (one complete trip around the circle). In a time T the particle travels a distance equal to the circumference $2\pi R$ of the circle, so its speed is</p> $v = \frac{2\pi R}{T}$ <p>When we substitute this into Eq. (3.28), we obtain the alternative expression</p> $a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (\text{uniform circular motion})$

1.2 L'École Nationale Préparatoire (ENP)

L'ENP est une institution éducative de seconde cycle des études (Lycée) qui appartient à l'Université National Autonome du Mexique (UNAM). Cela signifie que, bien qu'au Mexique, l'enseignement de base et de seconde cycle - primaire, 6 ans (élèves de 6 à 12 ans) ; secondaire, 3 ans (élèves de 13 à 15 ans) et lycée 3 ans (élèves de 16 à 18 ans) - est régi par des normes éducatives au niveau national, l'ENP, en raison de son autonomie, ne suit pas les mêmes normes éducatives. L'UNAM est chargée de concevoir et de réglementer les programmes d'études qui sont utilisés dans tous ses établissements d'enseignement (secondaire, lycée et supérieure). L'UNAM compte avec neuf lycées. Les élèves qui étudient dans les différentes lycées de l'UNAM ont été choisis à l'issue d'un concours de sélection dans la région métropolitaine du Mexique, où les meilleurs scores sont acceptés. Ainsi, les élèves qui ont participé à cette recherche, les étudiants de l'ENP 6, sont ceux qu'ont obtenu les meilleures notes au concours de sélection. Comme nous l'avons mentionné plus haut, les élèves passent 3 ans à l'ENP ; la première année s'appelle la quatrième année du lycée et elle comprend les élèves de 16 ans. En ce sens, les années suivantes sont le cinquième et le sixième année du lycée.

Lorsque les étudiants arrivent en dernière année du lycée, ils doivent choisir une des quatre spécialités en fonction de leur intérêt : dans la spécialité I, sont tous les étudiants qui souhaitent poursuivre leurs études dans un certain degré en sciences exactes ou en ingénierie ; dans la spécialité II, sont ceux qui s'intéressent aux degrés en sciences de la santé et biologie ; dans la spécialité III, il y a des élèves qui souhaitent étudier un certain degré en administration ou en sciences sociales et ; enfin, ceux de la spécialité IV qui veulent étudier un certain degré dans le domaine artistique ou humaniste.

1.2.1 L'enseignement de la fonction dans l'ENP

Cette section montre les changements qui ont eu lieu dans les programmes d'études des domaines de mathématiques V et VI dans les programmes de 1996 (précédents) et 2016 (actuels). Notre intérêt n'était pas seulement de situer le sujet de la fonction dans les deux programmes d'études de l'ENP, mais aussi de montrer comment ils l'abordent : type de notation, registres de représentation utilisés et les liens avec la cinématique. L'objectif était de repérer les obstacles possibles à l'apprentissage en ce qui concerne la façon d'aborder la notion de fonction. A cette fin, une analyse est faite ci-dessous, du

contenu mathématique traité et des buts et des stratégies didactiques recommandés dans l'enseignement des fonctions numériques.

1.2.2 Changements dans les programmes d'études

L'UNAM, dans le cadre de son programme d'amélioration continue, a procédé à une restructuration des programmes d'études des Mathématiques IV, V et VI dans les années 2016, 2017 et 2018 respectivement. Cette restructuration découle des résultats de l'étude sur performance académiques en mathématiques des élèves de l'ENP. Dans le rapport de gestion pour la période 2014-2018, il est indiqué que l'échec global en mathématiques est de 18% pour l'année scolaire 2014-2015, 18% pour l'année scolaire 2015-2016 et 17% pour l'année scolaire 2016-2017 (Informe de gestión, ENP, 2014-2018. p. 41).

Ensuite, nous présentons une comparaison de la structure des programmes des matières Mathématiques V et VI, précédentes (Programa de Matemáticas V y VI, ENP, 1996) et actuelles (Programa de Matemáticas V y VI, ENP, 2017 y 2018).

TABLE 1.14 – Objectif général, mathématiques V et VI

Objectif général		
Matière	Programme de 1996	Programme de 2017
Maths V	« El propósito es iniciar a los alumnos en el conocimiento, la comprensión y las aplicaciones de la Geometría Analítica. El enfoque que se propone se orienta hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas » Traduction en français : Le but est d'initier les élèves aux connaissances, à la compréhension et aux applications de la géométrie analytique. L'approche proposée est orientée vers l'apprentissage basé sur la résolution de problèmes.	« El propósito es impulsar la realización de procesos como la visualización, la abstracción, la generalización, el análisis, la síntesis y la argumentación, a través del estudio de problemas que promuevan el pensamiento y análisis de modelos geométricos, analíticos y estadísticos. » Traduction en français : Le but est de promouvoir la réalisation de processus tels que la visualisation, l'abstraction, la généralisation, l'analyse, la synthèse et l'argumentation, à travers l'étude des problèmes qui favorisent la réflexion et l'analyse des modèles géométriques, analytiques et statistiques.

<p>Maths VI</p>	<p>« Iniciar a los alumnos en el conocimiento, la comprensión y las aplicaciones del Cálculo diferencial e integral, fomentando en los educandos su capacidad de razonamiento lógico, su espíritu crítico y su deseo de investigar y adquirir nuevos conocimientos para plantear, resolver e interpretar numerosos problemas de aplicación en la misma matemática y en otras disciplinas. » Traduction en français : Initier les élèves aux connaissances, à la compréhension et aux applications du calcul différentiel et intégral, en promouvant chez les élèves leur capacité de raisonnement logique, leur esprit critique et leur désir d'étudier et d'acquérir de nouvelles connaissances afin de poser, résoudre et interpréter de nombreux problèmes d'application en mathématiques elles-mêmes et dans d'autres disciplines.</p>	<p>« El propósito es que los alumnos apliquen los conceptos básicos del Cálculo (diferencial e integral) para estudiar y modelar el movimiento, el cambio y la medida, mediante el análisis de procesos infinitos. Así como, fomentar el uso de la tecnología digital como herramientas para representar, analizar y resolver problemas en diferentes contextos. Se presenta como un primer acercamiento formal de los contenidos como una preparación propedéutica para sus estudios de nivel superior. »</p> <p>Traduction en français : L'objectif est d'appliquer les concepts de base du calcul (différentiel et intégral) à l'étude et à la modélisation du mouvement, du changement et de la mesure, à travers l'analyse de processus infinis, et de promouvoir l'utilisation de la technologie numérique comme outil pour représenter, analyser et résoudre des problèmes dans différents contextes. Le cours est présenté comme une première approche formelle des contenus comme une préparation préparatoire à leurs études supérieures.</p>
-----------------------------------	---	--

En matemáticas V, nous observons que le programme de 1996 privilégie la résolution de problèmes comme approche méthodologique à l'apprentissage de la géométrie analytique, qui est le contenu principal du programme. [Krulik et Rudnick \(1987\)](#) définissent la résolution de problèmes comme suit :

the means by which an individual uses previously acquired knowledge, skills, and understanding to satisfy the demands of an unfamiliar situation. The student must synthesize what he or she has learned, and apply it to a new and different situation. (p.4)

De plus, les auteurs mentionnent que la résolution de problèmes n'est pas seulement un algorithme :

The existence of a problem implies that the individual is confronted by something he or she does not recognize, and to which he or she cannot merely apply a model. A problem will no longer be considered a problem once it can easily be solved by algorithms that have been previously learned. (Krulik et Rudnick, 1987, p.3)

Cependant, bien que la résolution de problèmes est une méthode qui peut être utile dans l'enseignement des mathématiques, il a été constaté que, généralement, dans la pratique, elle ne se fait pas correctement, puisque l'expression « résolution de problèmes » est interprétée différemment par les enseignants et les élèves. Dans l'article de [del Valle Coronel et Curotto \(2008\)](#), une recherche est menée pour essayer de montrer les conceptions des enseignants et des élèves sur la résolution de problèmes. Les auteurs ont constaté qu'il y avait confusion entre la résolution de problèmes et la résolution d'exercices. Pour [Gaulin \(2001\)](#) résoudre un problème signifie qu'il faut tenir compte des situations qui exigent une réflexion, une exploration et une recherche, et il est, également, important de définir une stratégie de résolution qui ne mène pas nécessairement à une réponse immédiate. D'autre part, les exercices sont considérés comme quelque chose de moins compliqué, où le résultat peut être obtenu par des calculs plus immédiats.

Cette confusion est également présente dans la pratique éducative quotidienne de l'ENP. Un exemple est donné dans l'activité d'apprentissage proposée dans le programme de mathématiques V : « Résoudre le problème d'application suivant : si 5 000 pesos sont investis à 18% d'intérêts composés capitalisables semestriellement, quel sera le montant de l'investissement dans les 12 ans? » Bien qu'il soit présenté comme un problème contextualisé dans une certaine discipline, il s'agit en réalité d'un exercice, car il ne représente pas une difficulté cognitive majeure pour sa solution.

Contrairement à ce qui précède, le programme de 2017 proposent explicitement le développement de compétences de réflexion qui permettent à l'étudiant d'aborder, d'une manière différente, des problèmes contextualisés par des processus de raisonnement et d'analyse. L'une de ces compétences est la visualisation. Pour (Zazkis et al., 1996, p.441), la visualisation est l'acte par lequel un individu établit le lien entre une construction interne et quelque chose qu'il perçoit par les sens. Duval (1999) le présente, en revanche, centré sur l'idée de processus, c'est-à-dire, il la définit comme l'un des trois processus cognitifs (visualisation, construction et raisonnement). Avec cette approche, le programme présente la résolution de problèmes et la modélisation mathématique comme des processus d'intégration. Cela permet aux élèves de visualiser différentes représentations d'objets mathématiques, comme la fonction, entre autres, dans le but de les amener à faire des conjectures, à analyser et à développer un langage pour communiquer leurs résultats.

Dans le programme Mathématiques VI de 1996, l'idée que les étudiants doivent progressivement passer d'un enseignement algorithmique à un enseignement constructif est présente, puisque dans les stratégies didactiques, le programme suggère d'augmenter le degré de difficulté des problèmes posés par l'enseignant, principalement, dans les disciplines de la physique et de la chimie. Nous pouvons également observer que le programme incite les enseignants à résoudre les problèmes d'application, mais ne mentionne pas la modélisation comme stratégie d'enseignement. D'autre part, le plan de mathématiques VI actualisé indique explicitement que l'un des objectifs du cours est d'inciter les élèves à modéliser le mouvement, le changement et la mesure par des processus infinis. Et il mentionne qu'il est nécessaire d'encourager l'utilisation des technologies numériques pour résoudre ce genre de problèmes.

TABLE 1.15 – Contenu programmatique par unité, mathématiques V et VI

Contenu programmatique par unité		
Matière	Programme de 1996	Programme de 2017
Maths V	1 Relations et fonctions 2 Fonctions trigonométriques 3 Fonctions exponentielles et logarithme 4 Systèmes de coordonnées 5 Discussion des équations algébriques 6 Équation du premier degré 7 Équation générale du deuxième degré 8 Circonférence 9 Parabole 10 Ellipse 11 Hyperbole	1 La pensée géométrique pour visualiser et argumenter 2 Algèbre pour l'analyse d'objets géométriques 3 La fonctions pour modéliser la relation entre les variables 4 La statistiques pour l'interprétation de grandes quantités de données 5 Thème optionnel
Maths VI	1 Fonctions 2 Les limite de fonctions 3 La dérivé 4 Applications de la dérivé 5 L'intégrale 6 Applications de l'intégrale	1 Les concepts essentiels des fonctions 2 Les limites d'une fonction pour analyser son comportement 3 La dérivée d'une fonction pour modéliser le changement 4 L'intégrale d'une fonction pour mesurer

De notre point de vue, il y a une difficulté dans le contenu du programme de Mathématiques V de 1996. Les trois premiers sujets traitent des concepts de relation et de fonction, à la fois algébriques et transcendantes, et de leur représentation graphique. Cela implique l'utilisation du plan cartésien à cette fin. Cependant, c'est jusqu'à l'unité quatre que le système de coordonnées est défini pour contextualiser l'étude de la géo-

métrie analytique. Il semble également pertinent de souligner que les unités : relations et fonctions, fonctions trigonométriques et fonctions exponentielles et logarithmiques, disposent respectivement de 10, 20 et 10 heures, alors que pour la géométrie analytique, 110 heures sont prises en compte. Nous pensons que le fait d'attribuer un peu plus d'un tiers du total des heures de cours indique que le traitement du contenu des trois premières unités a un caractère introductif. Nous observons, aussi, que les stratégies didactiques proposées dans le programme pour le développement des trois premières unités traitent le langage propre de l'analyse, c'est-à-dire qu'il faut parler de variable dépendante, variable indépendante, domaine, domaine de définition, image, fonction injective, surjective, bijective, inverse, etc. Mais, à partir de la quatrième unité, dans le traitement de la géométrie analytique, ils abandonnent ces concepts et ils proposent d'utiliser le langage propre à ce sujet : abscisse au lieu de variable indépendante, ordonnée au lieu de variable dépendante, équation au lieu de fonction. Nous pensons que cela a sûrement provoqué chez, un bon nombre, d'élèves une confusion dans la compréhension des objets mathématiques. Dans le programme actualisé de Mathématiques V, cette situation est corrigée puisque, non seulement l'ordre dans lequel les sujets sont présentés est modifié mais, comme déjà mentionné, une plus grande importance est accordée au développement des capacités de réflexion par la visualisation, l'analyse, la synthèse et l'abstraction de situations où il existe des relations de dépendance et qui peuvent être modélisées dans un système de référence.

La visualisation, en tant qu'activité favorisant l'apprentissage d'objets mathématiques, est explicite dans le programme scolaire de 2017. En ce sens, [Duval \(2004\)](#) établit que la vision donne un accès direct à l'objet et que la visualisation est basée sur la production d'une représentation sémiotique. D'autre part, [Hitt \(1998\)](#) affirme que depuis plus de 30 ans, une plus grande importance a été accordée au processus de génération d'images mentales qui permettent le développement de compétences telles que la visualisation mathématique, dans le but de résoudre des problèmes et, en général, pour l'apprentissage des mathématiques.

L'approche présentée dans le programme Mathématiques VI de 1996 est essentiellement opérationnelle. La manière dont les unités d'apprentissage sont décrites montre l'intérêt de traiter les objets mathématiques avec une approche abstraite, qui privilégie leur manipulation symbolique et algébrique, tandis que dans le programme de 2017 est explicite que l'approche consistant à les relier à d'autres processus cognitifs. Par exemple, lors que dans l'unité 3 de l'ancien programme la dérivée est détermi-

née comme objet d'étude, l'accent est mis sur le traitement opérationnel de celle-ci, dans le programme actuel il est établi que la dérivée d'une fonction doit être étudiée afin de modéliser le changement. En outre, il suggère que les enseignants utilisent la modélisation comme ressource didactique pour l'enseignement de l'objet mathématique dérivé.

TABLE 1.16 – Notion de la fonction

Notion de la fonction		
Matière	Programme de 1996	Programme de 2017
Maths V	<ul style="list-style-type: none"> -Définition, du produit cartésien de deux ensembles -Définition de la notion de relation : algébrique, non algébrique, implicite, explicite, croissante, décroissante, continue et discontinue à un moment -Concept de fonction : domaine et domaine de définition, injectives, surjectives et bijectives, graphiques et fonction inverse 	<ul style="list-style-type: none"> -Concept de fonction réelle de la variable réelle : variables indépendantes et dépendantes, domaine, domaine de définition, chemin et règle de correspondance -Types de fonctions : polynomiale, trigonométrique, exponentielle et logarithmique
Maths VI	<ul style="list-style-type: none"> -Relations et fonctions -Domaine et domaine de définition -Graphique de $y = f(x)$ -Fonction : injectives, surjectives et bijectives, continu et discontinu -Fonction croissante et décroissante -Fonctions : algébrique et transcendantes -Algèbre de fonctions 	<ul style="list-style-type: none"> -Concepts fondamentaux qui déterminent une fonction -Nomenclature et notation ($f : Dmf \rightarrow Cdf$) -Fonctions réelles de la variable réelle : graphique (algébrique et transcendant), explicite ou implicite, injectives, surjectives, bijectives, fonction inverse

Avant d'établir la notion de fonction, le programme de 1996 aborde la définition d'un produit cartésien entre deux ensembles, pas nécessairement numérique. Par exemple, ils définissent les ensembles : $A = \{\text{Ana, Fabiola, Tania}\}$ et $B = \{\text{Hernández, López, Pérez, Sánchez}\}$ et le produit cartésien

$$\begin{aligned} AXB = & \{(\text{Ana, Hernández}), (\text{Ana, López}), (\text{Ana, Pérez}), (\text{Ana, Sánchez}), \\ & (\text{Fabiola, Hernández}), (\text{Fabiola, López}), (\text{Fabiola, Pérez}), (\text{Fabiola, Sánchez}), \\ & (\text{Tania, Hernández}), (\text{Tania, López}), (\text{Tania, Pérez}), (\text{Tania, Sánchez})\} \end{aligned}$$

Par la suite, le programme suggère que la relation entre les ensembles soit établie comme un ensemble de paires ordonnées qui remplissent une certaine condition et, le concept de fonction soit défini comme une relation avec la caractéristique que, à chaque élément du premier ensemble correspond un élément et, seulement un élément du second ensemble, à la condition nécessaire qu'ils existent : « un ensemble X appelé domaine de la fonction, un ensemble Y appelé domaine de définition de la fonction et une règle de correspondance entre les ensembles, de telle sorte qu'aux éléments du domaine il fasse correspondre un et un seul des éléments du domaine de définition ». Nous considérons que cette présentation correspond au traitement traditionnel dans lequel la définition d'une fonction est abordée avec une séquence mathématique formelle : Produit cartésien \rightarrow relation \rightarrow fonction. Nous observons également que, en continuant avec le formalisme mathématique, le programme de 1996 aborde la classification des fonctions en : injectives, surjectives et bijectives.

D'autre part, le programme 2017 suggère que les enseignants décrivent la relation fonctionnelle, qui impliquent deux variables, de situations dans l'environnement quotidien des élèves. Nous pensons que cette présentation est en accord avec l'objectif du programme de développer des processus cognitifs de visualisation et d'analyse de situations qui présentent des relations de dépendance. Une autre différence consiste à obtenir une fonction à partir de son graphique ou d'un table de valeurs, ce qui correspond à ce que [Duval \(1995\)](#) appelle la manipulation ou la coordination de différents registres de représentation qui favorise l'apprentissage des objets mathématiques. Nous considérons que la manière de présenter la fonction à partir de l'idée que deux quantités qui sont liées, de telle sorte que la valeur numérique de l'une dépend de la valeur numérique de l'autre, peut générer chez les élèves une approche naturelle de l'idée d'une fonction.

Pour le cours des Mathématiques VI, le programme de 1996 encourage un travail algébrique plus opérationnel sur les fonctions. Il propose un travail complet sur la détermination du domaine et l'ensemble image, la détermination des conditions pour que les fonctions soient injectives, surjectives, bijectives, continues et discontinues. Enfin, les opérations avec fonctions : addition, soustraction, multiplication, division et composition, tant analytiquement que graphiquement, sont abordées. Cette présentation du contenu mathématique suggère que la pratique de l'enseignement s'inscrit dans un schéma classique de transmission des connaissances.

D'autre part, le programme 2017 établit que les caractéristiques particulières des fonctions doivent être approfondies lors de la modélisation de divers phénomènes ou situations, afin de reconnaître leur importance en tant qu'instruments de représentation mathématique. En ce sens, un développement plus précis du contenu mathématique est effectué sans abandonner l'idée de présenter les fonctions dans le contexte de la modélisation de situations réelles, en utilisant la technologie comme outil pour explorer les fonctions, mais aussi pour générer ou réfuter des conjectures et visualiser leurs propriétés.

TABLE 1.17 – Notion de la fonction

Notion de la fonction		
Matière	Programme de 1996	Programme de 2017
Maths V	<p>-L'enseignant, à partir de problèmes de la réalité et d'autres disciplines, discutera avec le groupe de l'utilité du concept de relation, en mathématiques. A partir de là, il définira la fonction pour que l'élève puisse exprimer en tant que fonction les problèmes de la vie quotidienne.</p> <p>-Il définira l'ensemble des points qui déterminent le graphique de la fonction et déterminera si elle augmente ou diminue d'un point de manière analytique et graphique. Si elle existe, elle déterminera la fonction inverse</p>	<p>-Concevoir des activités qui se déroulent dans des environnements de travail collaboratifs pour encourager l'échange d'opinions</p> <p>-Promouvoir un apprentissage significatif dans des contextes réels, en abordant les questions pertinentes de l'époque (innovation technologique, développement économique, santé, énergie, entre autres)</p> <p>-Motiver les élèves à apprécier les avantages de représenter un problème ou un phénomène par un modèle afin d'en réduire la complexité, de le visualiser et de le comprendre</p> <p>-Intégrer l'utilisation d'outils technologique pour que les étudiants développent des compétences dans les domaines suivants : recherche d'informations, manipulation de logiciels spécialisés, utilisation de simulateurs.</p>

<p>Maths VI</p>	<p>-Il est suggéré que l'enseignant adopte une approche méthodologique orientée vers l'apprentissage par problème</p> <p>-Cette méthodologie est basée sur l'approche de problèmes simples qui vont augmenter leur complexité dans le traitement d'un même sujet, de telle sorte qu'il y a une transition progressive d'un enseignement linéaire et algorithmique vers un enseignement de la construction</p>	<p>-Il est suggéré à l'enseignant d'utiliser et de promouvoir l'utilisation correcte du langage mathématique, écrit et verbal</p> <p>-Il est recommandé à l'enseignant d'utiliser la méthode graphique comme outil supplémentaire pour obtenir et visualiser, de manière qualitative, les graphiques des fonctions et des opérations entre elles</p> <p>-Effectuer une modélisation de situation authentique à l'aide de fonctions</p> <p>-Il leur est recommandé d'intégrer l'utilisation de logiciels spécialisés qui leur permettent de visualiser, d'expérimenter et de manipuler différentes représentations d'un objet mathématique pour formuler et valider leurs conjectures</p>
-----------------------------------	---	--

Avec l'analyse précédente, nous pouvons observer que dans les deux programmes, les suggestions didactiques tendent à favoriser les activités qui encouragent l'approche de l'objet mathématique, fonction, avec des situations qui appartiennent à l'environnement immédiat de l'élève. Cependant, les programmes ne guident pas l'enseignant dans la façon de le faire, c'est-à-dire qu'ils lui donnent la liberté de réaliser la transposition didactique (Chevallard, 1978). Néanmoins, les suggestions du développement procédural, en Mathématiques V, du programme de 1996, sont de caractère opératoire-algébrique. D'autre part, le programme 2017 indique explicitement qu'il devrait aborder des questions d'actualité, telles que : l'innovation technologique, le développement économique, la santé, l'énergie, entre autres, afin d'identifier la notion de fonction, comme la relation entre deux quantités. Un autre élément important est la recommandation d'utiliser des outils technologique, afin que les élèves développent des compétences dans les domaines suivants : recherche d'informations, manipulation de logiciels spécialisés et utilisation de simulateurs.

1.2.3 La fonction dans le cours d'Analyse, programme mis à jour

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, le thème des fonctions est abordé, dans un premier temps, dans le cours de mathématiques V (l'unité III) « Fonctions pour modéliser la relation entre les variables ». L'objectif spécifique de cette unité établit que l'élève doit développer différentes compétences telles que : visualisation, représentation, abstraction et généralisation, de telle sorte qu'il soit capable d'identifier et d'analyser des situations ou des phénomènes dans différents domaines de la connaissance à travers des fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles ou logarithmiques (ENP, 2017c, p.7). Dans cette unité, il est privilégié et recommandé que l'approche du contenu mathématique soit, en premier lieu, de nature graphique afin de développer les compétences de visualisation chez les élèves. En outre, le langage naturel est également proposé comme moyen de communication qui enrichit leur vocabulaire pour exprimer des idées. De cette façon, la construction de graphes de fonctions polynomiales du type $f(x) = mx + b$ et $f(x) = ax^2 + bx + c$ est demandée et aussi $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \tan(x)$.

En prenant comme référence les idées abordées dans le programme de Mathématiques V ENP (2017c), l'approche du cours d'analyse (Mathématiques VI) propose, dans l'unité 1, d'enrichir le concept de fonction, par des méthodes numériques, graphiques et analytiques. De plus, il est prévu que les étudiants donnent à la fonction le statut d'un instrument qui leur permet de modéliser des phénomènes ou des situations dans diverses disciplines (ENP, 2017d, p.2). En plus d'aborder les concepts fondamentaux associés à la fonction : domaine, domaine de définition, ensemble d'images et règle de correspondance, la première unité met davantage l'accent sur le registre graphique de fonctions réelles de variables réelles, tant algébriques que transcendentes. Les étudiants doivent représenter graphiquement, au moins, les fonctions de ce type : $f(x) = x^n$ et $f(x) = 1/x^n$ avec n naturel, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$, $f(x) = \cot(x)$, $f(x) = \sec(x)$, $f(x) = \csc(x)$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$. De plus, les étudiants devraient être capables de déterminer le domaine et le domaine de définition, en considérant le domaine de définition maximum de chacun, ainsi que la détermination de leurs fonctions inverses respectives. Nous observons que dans cette section, l'importance est donnée aux registres de représentation numérique et graphique de la fonction à partir des expressions algébriques.

Actuellement, une section de professeurs de mathématiques, de l'ENP, est en train de préparer le guide didactique qui est mis à disposition des tous les enseignants,

comme support à leur travail en classe. Cependant, le guide didactique du programme de 1996 (qui est actuellement utilisé jusqu'à la nouvelle), propose l'exemple suivant pour montrer les éléments associés au concept de fonction : Étant donné la fonction $y = x^2$, $x \in \mathbb{N}$, $2 \leq x \leq 6$ identifier ses caractéristiques. Dans laquelle il est suggéré la solution suivante :

- Le domaine est le premier ensemble de la fonction : $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- Le domaine de définition est le deuxième ensemble de la fonction :
 $Y = \{4, 9, 16, 25, 36\}$
- L'image de 2 est 4; de 3 est 9; de 4 est 16; de 5 est 25; de 6 est 36
- L'ensemble des images : $R = \{4, 9, 16, 25, 36\}$

Nous pensons que ce premier exemple est conçu pour montrer aux élèves l'idée de la fonction comme une relation entre deux ensembles de nombres. Le fait de la définir de manière discrète, pour un ensemble fini de nombres naturels, nous indique, en principe, que l'intention n'est pas de présenter le concept formel de fonction, mais que les étudiants doivent identifier des éléments liés à la fonction. La table des valeurs n'est pas identifiée comme un registre de représentation, mais comme un moyen de visualiser la correspondance de chaque valeur du domaine avec la valeur respective obtenue en effectuant l'opération indiquée par l'expression algébrique. Dans ce premier exemple, il n'est pas fait mention du graphique de la fonction.

En suivant cette approche, le guide de travail propose quelques exemples supplémentaires, où l'accent est mis sur l'identification des éléments associés à la fonction. Nous pensons qu'un aspect important de cette présentation est que les exemples vont du discret au continu et des ensembles finis aux ensembles infinis. Cependant, il semblerait que ce qui est attendu à ce que les étudiants se déplacent simplement et en douceur à travers ces aspects, ce qu'ils ne sont pas nécessairement capables de faire. C'est ce que l'on peut constater dans les exemples suivants : « Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{Z}$, $-3 \leq x \leq 3$ déterminer : le domaine, domaine de définition, l'ensemble image ». Ici, le discret et le fini sont présents. Mais dans l'exemple : « Trouver le domaine de la fonction $f(x) = \frac{-2}{x-3}$ » les étudiants doivent faire un saut, en devant déterminer la restriction de la variable indépendante qui est présentée dans le quotient et réfléchir à des ensembles infinis et aux concepts de continuité et de discontinuité. En outre, il leur est demandé de travailler sur un travail discret et fini qui ne sera pas celui demandé plus tard dans les intervalles.

Un aspect qu'il nous semble important de souligner, dans le programme de Mathématiques VI de 2017, est que l'utilisation de la technologie, par exemple GeoGebra, est suggérée pour visualiser et explorer le comportement des fonctions. Nous pensons que cette façon de les aborder peut favoriser la coordination des registres de représentation au sein de l'activité conceptuelle (Duval, 1995). Nous pensons que l'utilisation de la technologie devrait passer d'une position de "dispositif mécanique", dans laquelle elle produit un effet immédiat sur les étudiants, à un contexte où son utilisation obéit à un but formateur.

Gaona (2018) souligne que l'intégration de la technologie dans l'éducation est une question promue par les entités internationales et les gouvernements du monde entier. Dans ce sens, il souligne que le terme technologie, bien que polysémique, peut être limité aux technologies numériques telles que les ordinateurs et les appareils mobiles qui peuvent être utilisés comme outils de médiation dans un but d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (Gaona, 2018, p.28). Pour Artigue (2002b), ce qu'il faut demander, en premier lieu, aux programmes et outils informatiques, c'est qu'ils soient des instruments pédagogiques pour l'apprentissage de connaissances et de valeurs mathématiques définies avant même que ces outils n'existent. Dans la même étude réalisée par Artigue (2002b), sur l'apprentissage des mathématiques dans un environnement de système d'algèbre informatique (CAS), elle fait référence au terme technique, dans un sens plus large, comme étant la manière dont une tâche est résolue, et que celles-ci sont souvent évaluées en fonction de leur valeur pragmatique ou de leur valeur épistémique. Artigue (2002b) stipule que la valeur pragmatique d'une technique est déterminée par son potentiel productif (efficacité, coût, champ de validité) et que la valeur épistémique est déterminée par la façon dont elle contribue à la compréhension des objets concernés. Dans ce même contexte, Artigue (2011) mentionne que l'évolution technologique ouvre de nouvelles perspectives et de nouvelles formes d'interactions sociales et didactiques, de telle sorte qu'elle permet de transformer des objets mathématiques en formes concrètes qui peuvent être visibles - dans leurs différentes représentations - et manipulées. Toutefois, elle mentionne également que la technologie est généralement considérée comme quelque chose qui nous permet d'apprendre plus vite et mieux, c'est-à-dire qu'elle n'est considérée qu'en fonction de sa valeur pragmatique, en laissant de côté sa valeur épistémique.

Comme nous l'avons mentionné, l'utilisation de la technologie est recommandée dans la classe de mathématiques de l'ENP où la valeur pragmatique et épistémique de

la technologie est implicite, mais il n'y a aucune suggestion explicite d'activités ou de tâches à réaliser par les élèves. Les différents campus de l'ENP disposent de laboratoires informatiques qui sont principalement utilisés dans les disciplines scientifiques expérimentales. Bien que les professeurs de mathématiques puissent y avoir recours, ils ne sont pas prioritaires et sont soumis à la disponibilité d'un laboratoire. En outre, un bon nombre d'enseignants préfèrent le travail papier-crayon, auquel ils sont habitués, avec lequel ils sont à l'aise, et ne considèrent généralement pas l'utilisation de la technologie dans les tâches de routine. D'autre part, les enseignants qui utilisent l'outil technologique le font généralement dans le but de faciliter et d'accélérer la partie numérique et opérationnelle, et dans le meilleur des cas comme un facilitateur qui leur permet de visualiser le registre de représentation graphique des fonctions. En ce sens, [Gaona \(2018\)](#) affirme que, bien que les tâches proposées dans un environnement informatique peuvent avoir une grande valeur épistémique, les enseignants ont tendance à les rejeter parce qu'ils considèrent qu'elles sont très éloignées de ce qu'ils font quotidiennement en classe.

Dans l'unité 2 « Les limites d'une fonction pour analyser son comportement », les élèves sont supposés comprendre la notion de limite à travers l'analyse des processus infinis comme base pour comprendre les concepts de dérivé et d'intégral. Le contenu procédural de l'unité suggère que l'obtention des limites des fonctions se fait sur la base des théorèmes respectifs; lorsque x tend vers un nombre réel ou lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini. Cela signifie que l'enseignement des limites suit la tendance traditionnelle qui consiste à les présenter à travers le registre de la représentation numérique et graphique, avec une approche opérationnelle. Il est important de noter que l'existence de limites n'est pas un sujet d'étude dans ce cours. En particulier, il est proposé d'obtenir, au moyen de graphiques ou de tables et avec l'aide de la technologie numérique, les limites $(1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Dans le cadre de cette unité, les enseignants sont encouragés à analyser l'évolution d'une fonction dans le contexte d'un problème. Comme il n'est pas précisé quel type de problème doit être abordé dans la pratique, les enseignants choisissent régulièrement des problèmes classiques. Dans l'unité 3, « la dérivée d'une fonction pour modéliser le changement » a pour but spécifique que l'étudiant développe des compétences pour visualiser, analyser, généraliser et synthétiser le changement par l'étude des concepts de base de l'analyse qui lui permettront de décrire analytiquement le comportement des fonctions et leurs changements afin de les appliquer dans la modélisation de problèmes qui surviennent dans

différentes disciplines. Contrairement à une présentation traditionnelle, la notion de dérivée est d'abord abordée à partir de son interprétation géométrique et physique. Autrement dit, il est suggéré que les enseignants montrent aux élèves la relation entre la pente de la ligne tangente à une courbe et l'idée de dérivée, dans un contexte géométrique, puis la mettent en relation avec la vitesse instantanée d'un objet dans un contexte physique.

Tout au long de cette analyse, nous avons pu trouver des éléments importants pour notre recherche, en particulier, sur le traitement des objets mathématiques. Mais nous avons également observé que l'un des problèmes qui subsistent est l'approche traditionnelle des objets mathématiques, en particulier dans nos recherches, celle de la fonction. Même si dans les nouveaux programmes, la modélisation est présente, ils laissent toujours le choix à l'enseignant de réaliser, ou non, ce type d'activité. Nous ne trouvons pas non plus des propositions explicites de tâches, d'exercices ou d'activités de ce type dont les enseignants peuvent s'inspirer. En ce sens, cette recherche peut être intéressante puisque nous présentons non seulement un modèle théorique pour l'analyse et la conception des activités de modélisation mathématique des phénomènes cinématiques, mais nous proposons également quatre activités de modélisation.

1.2.4 L'Enseignement de la cinématique dans l'ENP

Contrairement à l'analyse des programmes mathématiques V et VI (ancien et nouveau), l'analyse des programmes de physique est plus concrète, puisque notre intérêt est de faire une analyse de la manière dont le sujet de la cinématique est présenté dans les programmes d'études de Physique III et IV de l'ENP, en contrastant la version de 1996 et la réforme de 2017. Nous considérons que la manière dont le sujet est traité peut ou non favoriser l'émergence de la notion de fonction, et qu'en définitive, les élèves peuvent la relier au concept défini dans leur cours d'analyse.

Le cours de physique III est enseigné en quatrième année de l'ENP. Dans le programme de 1996 (ENP, 1996b, p.2), l'objectif fondamental est basé sur «...la participation active des étudiants ... afin qu'ils modifient leurs schémas conceptuels par des activités d'apprentissage ... en mettant l'accent sur l'aspect qualitatif plus que sur l'aspect quantitatif ... ». Dans ce contexte, le programme précise qu'il ne s'agit pas d'écarter les mathématiques, mais « de les utiliser après avoir compris les idées physiques en jeu... comme un langage sténographique nécessaire pour résumer les connaissances ac-

quises par les expériences...». L'ancien programme nous montre que l'objectif du cours de physique n'est pas d'introduire les objets mathématiques avec les objets physiques de manière à ce que les deux se complètent afin d'avoir une compréhension dans les deux domaines. Il s'agit plutôt d'utiliser les mathématiques, uniquement, comme un outil symbolique, sans l'approfondir.

Dans ce programme, la cinématique est incluse dans la deuxième unité : « les interactions mécaniques. Force et mouvement ». L'objectif est que les étudiants construisent des modèles qualitatifs de la mécanique newtonienne et les appliquent à l'analyse et à la description de certains mouvements dans leur environnement. En particulier, dans le programme, il est proposé de caractériser le MRU et d'établir l'équation de position. Comme stratégie didactique, il est suggéré de réaliser des expériences de déplacement d'objets que les élèves peuvent situer dans leur environnement, par exemple une voiture jouet à friction. Nous considérons que cette stratégie favorise la visualisation et l'identification des variables physiques, mais pas nécessairement explicite la relation fonctionnelle entre elles, puisque la plupart des expériences qui sont réalisées, bien que ce soit par la mesure de la distance et du temps, sont réduites à l'utilisation des équations du mouvement d'une manière opérationnelle.

Il n'y a aucune suggestion explicite qui lie les équations de mouvement à un objet mathématique quelconque, tel qu'une fonction ou une dérivée, bien qu'il fasse implicitement référence à ces objets en déclarant que : « avec l'équation de position, (ils doivent) prédire leur comportement à un instant futur ». En revanche, l'utilisation du registre de représentation graphique est proposée pour interpréter la vitesse et sa variation, des objets en mouvement, en fonction du temps. Bien que le programme ne le suggère pas explicitement, nous pouvons supposer que les enseignants ont la possibilité de promouvoir chez les étudiants un travail qui réalise la transition du registre de représentation table de valeurs à celui de représentation graphique. Nous considérons que cette présentation de la cinématique, favorise l'utilisation des mathématiques comme outil de quantification des concepts physiques, mais qu'elle contribue peu à l'identification et à la mise en relation des registres de représentation équation de mouvement - équation fonctionnelle, obtenus par un processus de modélisation.

Lors de la réforme de 2017, le programme Physique III a changé radicalement. Dans sa présentation, il déclare que : « la modification proposée vise à changer l'approche et la méthodologie habituelles de la classe de physique... » (ENP, 2017a, p.2) Pour ce faire, il propose de partir de deux sujets spécifiques : le mouvement des sa-

tellites et la production d'énergie électrique en proposant à l'enseignant de fournir les principes physiques contextualisés dans les sujets, afin de résoudre des problèmes qui impliquent des inconnues, des dilemmes et des défis concrets, ce qui requiert la création de modèles, tant physique que mathématique. Dans ce programme, le MRU et le MCU sont situés dans la première unité « Mouvement des satellites », mais il n'y a pas de suggestion didactique spécifique pour le traitement des sujets. Le programme recommande seulement « de réaliser différents types d'activités expérimentales pour développer des compétences d'investigation scientifique permettant de mettre en pratique des concepts physiques » (ENP, 2017a, 6). Il ne propose pas non plus d'activités spécifiques impliquant un registre graphique, bien qu'il propose de travailler sur des problèmes de papier-crayon pour favoriser l'utilisation de différentes représentations symboliques utilisées en physique. À cette fin, il est recommandé de mener des pratiques dans lesquelles les élèves ont la possibilité d'utiliser des artefacts de mesure, de collecter des données (représentation sous forme de table), de les traiter (représentation graphique) et de les analyser (interprétation). Comme nous pouvons le voir, dans la réforme de 2017 du cours de physique III, bien qu'elle mentionne les processus de modélisation, elle commence par le mouvement des satellites, sans mentionner le MRU et le MRUA (ni en une ni en deux dimensions) qui, selon nous, peuvent provoquer un problème d'apprentissage chez les étudiants. C'est-à-dire que vouloir enseigner le mouvement des satellites (mouvement en deux dimensions) nécessite de nombreux éléments mathématiques, si un élève ne commence pas progressivement par des mouvements unidimensionnels : l'introduction d'équations paramétriques, l'étude de représentations graphiques, table de valeurs, etc., même s'il comprend des concepts physiques, il ne pourra pas comprendre ce type de phénomènes et ne pourra pas, non plus, les décrire à l'aide d'objets mathématiques.

D'autre part, le cours de physique IV est enseignée en sixième année de l'ENP. Dans le programme de 1996 (ENP, 1996c), la première unité, la Mécanique, considère la description du mouvement comme une sous-unité. Le programme établit que l'étudiant ait les connaissances et les compétences algébriques nécessaires sur les fonctions linéaires et circulaires. La suggestion didactique est « Analyser les données expérimentales de certains mouvements (tir parabolique, mouvement circulaire) pour obtenir les graphiques respectifs et en déduire les équations correspondantes à l'aide du cours d'analyse » (ENP, 1996c, 6). Nous pouvons dire que cette suggestion a donné aux enseignants la possibilité de réaliser des activités de modélisation, de sorte qu'à travers

elles, les étudiants aient la possibilité d'utiliser l'analyse comme une référence théorique et non comme un simple outil opérationnel. De même, ce programme a favorisé la possibilité de relier les équations du mouvement en tant que relations fonctionnelles et, en fin, de leur donner le statut de fonction d'objet mathématique.

En revanche, dans la réforme de 2017, bien que le sujet ait un caractère propédeutique, il ne considère pas la Mécanique comme une unité. En bref, il ne propose que « l'élaboration de graphiques, l'analyse et l'interprétation physique de courbes, dans la résolution de problèmes numériques de mécanique » (ENP, 2017b, p.6), sans préciser à quel type de problèmes il se réfère. De manière à ce que les enseignants aient la liberté de choisir le type de phénomènes de mouvement qu'ils souhaitent analyser, sur la base de leur représentation graphique.

En conclusion, nous pensons que les programmes de 1996 induisaient davantage l'utilisation conjointe des mathématiques et de la physique, afin qu'ils puissent constituer un véritable instrument de résolution et de compréhension des phénomènes physiques mais aussi des objets mathématiques. Cependant, le plan actualisé n'est pas clair sur l'objectif et l'ordre des sujets à enseigner. Cette étude nous a permis de considérer les éléments qui nous semblent importants pour la réalisation de nos activités de modélisation mathématique des phénomènes de mouvement.

1.2.4.1 Quelques recherches de l'enseignement de la cinématique

Nous pensons qu'avant de continuer il convient de mentionner que diverses études montrent différentes façons d'aborder le problème de l'enseignement et de l'apprentissage de la physique, en particulier de la cinématique. Il existe des études qui mettent l'accent sur l'utilisation des technologies numériques comme outil important dans le processus d'enseignement, dans un environnement expérimental ou de laboratoire (Hernández, 2013, Yanitelli Ruiz, 2011, Enrique et Alzugaray, 2013), où le centre de ces travaux réside dans l'utilisation d'ordinateurs et de logiciels spécialisés, comme des ressources didactiques qui permettent d'introduire les élèves dans des contextes de résolution de problèmes ou dans la simulation et la modélisation de phénomènes de mouvement, sans que cela n'implique, nécessairement, un lien significatif entre les objets mathématiques et les concepts physiques respectifs, au-delà de leur utilisation comme outil opérationnel. Nous observons que cette recherche ont pour objectif fondamental de traiter les difficultés d'apprentissage et d'évaluation des concepts et des lois de la physique, où les outils technologiques jouent un rôle de médiation entre l'en-

seignement et l'apprentissage. Dans ce contexte, les équations du mouvement n'ont pas le statut d'objets mathématiques qui peuvent être liés, à partir de leur signification physique, aux phénomènes de mouvement étudiés. [Sánchez Soto et al. \(2009\)](#) dans leur travail de recherche sur l'apprentissage significatif par la résolution de problèmes chez les étudiants universitaires, proposent l'utilisation du calcul différentiel comme méthode de résolution d'exercices, au lieu de l'utilisation aveugle de formules, éliminant ainsi la correspondance mécanique entre l'exercice et la formule. Pour cela, il conçoit et applique une séquence didactique aux étudiants universitaires de première année. Dans cette approche, il est apprécié que le calcul remplace les équations du mouvement, en tant qu'outil mathématique nécessaire pour résoudre les problèmes, qui sont posés à partir d'énoncés.

1.2.5 La modélisation à l'ENP

Plusieurs recherches menées depuis les années 80 montrent l'importance des processus de modélisation mathématique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il est considéré, depuis longtemps, que la modélisation consiste en l'utilisation ou l'application de connaissances mathématiques pour résoudre un problème ou une situation réelle, c'est-à-dire que, la modélisation est présentée comme un outil efficace dans la résolution de problèmes. Mais, aujourd'hui, le terme de modélisation a une connotation plus large. Il existe deux postures du point de vue didactique : celle qui considère la modélisation comme un outil important permettant d'appliquer les connaissances mathématiques à la résolution de problèmes et celle qui considère la nécessité de placer la modélisation dans le cadre de l'enseignement explicite, c'est-à-dire comme un contenu de plus qui relie les mathématiques à d'autres disciplines [Bosch et al. \(2006\)](#). La modélisation dans l'ENP prend la première posture, c'est-à-dire qu'elle considère à la modélisation comme un outil qui permet de résoudre un problème contextualisé. En principe, nous trouvons cette position adéquate car l'intention est d'initier les étudiants à l'interprétation des fonctions comme la représentation de situations proches à eux. Mais nous considérons qu'il est nécessaire de dépasser la simple interprétation et de considérer la modélisation comme un sujet d'enseignement en soi. Dans le guide de travail (que l'ENP met à la disposition des enseignants), un modèle est défini comme la description, d'un point de vue mathématique, d'un fait ou d'un phénomène du monde réel, dont l'objectif est de le comprendre largement ([ENP, 1996a](#), p.11). Cette approche explique que la plupart des fonctions décrivent le

comportement de situations ou de phénomènes qui impliquent plusieurs variables, et qu'il est possible d'exprimer ces variables en une seule représentation. À cette fin, dans le guide de travail il est proposé un mécanisme de modélisation :

- 1 Lire clairement le problème et identifier la fonction recherchée
- 2 Faire un dessin montrant les caractéristiques à modéliser
- 3 Noter les données du problème et établissez les formules connues
- 4 Exprimer toutes les variables en fonction de la variable demandée, par le biais d'une gestion algébrique
- 5 Exprimer le comportement de la fonction en fonction de la variable demandée

(ENP, 1996a, p.11)

Nous constatons que ce mécanisme de modélisation repose sur l'hypothèse d'un énoncé du problème à résoudre. C'est-à-dire qu'il y a un problème décrit en langage naturel, qui présente certaines conditions restrictives. Cette limitation est d'ailleurs prise en compte dans le guide de travail, puisqu'il y est noté que : « un modèle mathématique n'est pas tout à fait exact avec les problèmes de la vie réelle, c'est en fait une idéalisation » (ENP, 1996a, p. 11). Un des exemples proposés par le guide, à traiter en classe est : Exprimer le volume V d'un cylindre en fonction du rayon r si sa hauteur est le double de son rayon.

Solution : nous dessinons le cylindre; Le volume d'un cylindre est : $V = \pi r^2 h$; La hauteur est égale à deux fois le rayon, donc : $h = 2r$; En substituant dans la formule de volume, on obtient l'expression; demandée : $V(r) = 2r\pi r^2 = 2\pi r^3$;

Une fois que tous les sujets du programme d'études ont été travaillés, les applications de la dérivée dans d'autres disciplines sont considérées, dans lesquelles apparaît la raison instantanée du changement d'une variable par rapport à une autre. En particulier, ils proposent à titre d'exemple de considérer que la vitesse d'une voiture représente un changement de position par rapport au temps. Nous pensons qu'il est important de réfléchir à la manière dont cet exemple est présenté, car il se réfère à une situation que les élèves analyseront, dans le cadre des activités conçues dans notre recherche, de sorte qu'en temps voulu, les deux approches soient contrastées (l'exemple théorique et celui de notre activité).

Ils définissent d'abord la vitesse moyenne d'une particule, qui se déplace d'une position de départ x_1 à l'instant t_1 à une autre position finale x_2 à l'instant t_2 comme :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Dans cette définition classique de la vitesse moyenne, nous voyons qu'elle se fait en considérant une particule. Cela peut représenter un obstacle, car les élèves associent, généralement, une particule à un point, à moins qu'il ne leur soit clairement indiqué qu'en physique, tout objet peut être considéré comme une particule. Ensuite, il est dit que si la particule se déplace de telle manière que sa vitesse moyenne, dans un grand nombre d'intervalles différents, n'est pas constante, alors la particule se déplace avec une vitesse variable. Ainsi, pour déterminer la vitesse de la particule à un instant donné, il faut considérer le concept de vitesse instantanée.

$v_i = \lim(\frac{\Delta x}{\Delta t})$ mais que selon la définition de dérivé $v_i = \frac{dx}{dt}$. Puis l'accélération moyenne est définie comme $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ et l'accélération instantanée comme $a_i = \lim(\frac{\Delta v}{\Delta t})$ mais que selon la définition de dérivé $a_i = \frac{dv}{dt}$

Pour clarifier les définitions précédentes, dans le guide de travail, il est proposé l'exemple : soit la fonction $x(t) = t^3 - 3t^2 + 10t + 8$ qui définit la trajectoire, en mètres, d'une particule. Si $t_1 = 5s$ et $t_2 = 8s$ Déterminer a) sa position pour t_1 ; b) sa position pour t_2 ; c) sa vitesse entre t_1 et t_2 ; d) la vitesse instantanée pour $t = 6s$; e) l'accélération moyenne entre t_1 et t_2 f); l'accélération instantanée pour $t = 7s$.

La façon dont cet exemple est présenté est celle dont il est, généralement, traité par un bon nombre d'enseignants. La fonction de position de la particule $x(t)$ est simplement donnée. Il est entendu qu'il n'est pas nécessaire d'expliquer comment il est obtenu, puisque le problème n'est pas contextualisé. L'activité des élèves, en tout cas, se limite à la partie opérationnelle, qu'ils peuvent faire avec crayon-papier. Il est certain que quelques enseignants demanderont à leurs élèves de tracer un graphique de la fonction de position pour explorer le comportement de la particule en mouvement, mais nous pensons que puisqu'il s'agit d'un cours d'analyse, dans lequel les développements algébriques sont privilégiés (comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1 dans le programme de 1996 où le changement dans les différents registres de représentation ne sont pas privilégiés) les enseignants ne le feront pas. Par le même fait, nous ne pensons pas, non plus, qu'il leur sera demandé de construire la table des valeurs de la fonction de la position. Il semble que l'intention de cette application soit que les étudiants travaillent de manière opérationnelle avec la fonction afin d'obtenir la vitesse et l'accélération instantanées de la particule, au moyen de la quantification de la dérivée.

Cette analyse montre que, bien au départ, il y a l'intention de travailler avec des problèmes contextualisés et avec la modélisation est rarement réalisée. La plupart des problèmes sont encore, essentiellement, pour développer des processus opérationnels qui deviennent très rapidement mécaniques. Ils ne peuvent pas non plus être considérées comme de véritables activités de modélisation, puisqu'elles partent de problèmes qui sont déjà en langage mathématique et qui ont déjà traversé un processus d'abstraction et d'idéalisation. En ce sens, l'un des objectifs de notre recherche est de fournir de véritables activités de modélisation mathématique des phénomènes de mouvement.

1.3 Difficultés d'apprentissage et d'enseignement des fonctions numériques

Comme nous l'avons observé dans les sections précédentes, l'apprentissage de la notion de fonction est un élément fondamental, non seulement en mathématiques mais aussi dans la cinématique (entre autres disciplines). Malgré l'importance de la notion de fonction et l'effort constant qui a été consacré aux programmes d'études, dans plusieurs régions du monde (depuis plusieurs années), nous continuons à observer que, généralement, les élèves entrent à l'université avec une faible connaissance de la notion de fonction (Carlson, 1998, Carlson et al., 2002, Cooney, 2012, Monk et Nemirovsky, 1994). Les recherches montrent que diverses difficultés auxquelles les élèves font face sont propres à la nature même du concept ou à les différents facettes que le concept fonction a pour les étudiants (Doorman et al., 2012, López et Sosa, 2008) mais aussi à la manière dont il est régulièrement enseigné (obstacles épistémologiques et didactiques). Nous pouvons mentionner, entre autres, les difficultés à comprendre le concept de variable et le peu ou l'absence de liens et de coordination entre les différents registres de représentation. Dans cette section, nous examinerons ces difficultés que nous considérons comme fondamentales lorsque les élèves apprennent le sujet de la fonction et qui s'appuie sur les études que nous avons réalisées dans la section 1.1.

1.3.1 Difficultés d'apprentissage du concept de variable

Il existe plusieurs études relatives aux difficultés que rencontrent les élèves lors de la transition du lycée à l'université dans le cours de de l'analyse, telles que Robert (1998) dans laquelle il est mentionné que les mathématiques au lycée (analyse) commencent à ressembler un peu plus aux mathématiques « professionnelles » et que

cette transition peut causer des difficultés aux élèves. Aussi, [Gueudet \(2008\)](#) parle des problèmes qui surviennent lors du passage du lycée à l'université. Dans cette étude il analyse plusieurs recherches, dont l'une d'entre elles ([Moore, 1994](#)) mentionne que les élèves ont des problèmes pour énoncer les définitions des objets mathématiques traités, ils n'ont pas non plus de sens, les concepts images des objets étaient souvent inadéquates, les élèves ne comprennent pas et n'utilisent pas la plupart des notations utilisées, etc. Dans une autre recherche, menée par [Vandebrouck \(2011\)](#) qui est axée sur l'intégration de la technologie pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions de l'école secondaire à l'université, mentionne que les étudiants qui entrent régulièrement à l'université ne savent pas comment manipuler les fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique. Par conséquent, [Vandebrouck \(2011\)](#) envisage une approche qui permet le développement de pratiques d'enseignement par la conceptualisation des mathématiques. Cet apprentissage fait référence à une conceptualisation dirigée, définie par la spécificité des concepts mathématiques, des programmes d'études et des difficultés présentées aux élèves. Dans ce contexte, l'intervention des enseignants s'inscrit dans l'analyse des situations car elle permet d'identifier leurs marges de manœuvre et leurs limites. Pour [Robert et Rogalski \(2002\)](#), les pratiques des enseignants sont étudiées en fonction de leur objectif, l'apprentissage mathématique que les élèves réalisent, mais aussi en fonction de leur comportement dans l'exercice de leur profession. Au cours de l'étude de [Vandebrouck \(2011\)](#) il a été observé que les élèves ne construisent des représentations graphiques des fonctions que lorsque l'enseignant le leur demande et ne les utilisent pas spontanément pour faire le raisonnement local attendu d'eux. La recherche se concentre sur le rôle de la perspective dans la conceptualisation et son lien avec les représentations.

Des recherches ont également été menées sur les difficultés d'apprentissage du concept de fonction, chez les étudiants en ingénierie [García et al. \(2004\)](#). Dans cette étude, il est mentionné qu'en général, le contenu des programmes de mathématiques dans les différentes ingénieries, privilégie l'abstraction et la généralisation. En particulier, le concept de fonction est essentiellement abordé à travers sa représentation algébrique et, éventuellement, son graphique comme moyen de visualiser son comportement. Les auteurs proposent, comme stratégie didactique, la confrontation entre les différents registres de la représentation sémiotique, principalement algébrique et graphique. Ainsi, ils proposent une fonction dans leur représentation algébrique et demandent aux élèves de la comparer à plusieurs graphiques afin de déterminer laquelle

correspond à la relation fonctionnelle proposée. Dans l'autre sens, ils fournissent aux élèves le registre graphique d'une fonction et leur demandent d'identifier quelle expression algébrique la représente parmi cinq options possibles. Les résultats de la recherche indiquent que les étudiants ont plus de difficultés dans les tâches de transition du registre graphique au registre algébrique.

Dans cette ligne de recherche, une autre étude ([Guerra et al., 2015](#)) aborde les difficultés d'apprentissage avec des fonctions chez les élèves du secondaire. En particulier, les difficultés qui surgissent lorsque les élèves doivent effectuer des transformations de type conversion et de type traitement avec les éléments d'une fonction. Les auteurs établissent un ensemble de catégories pour l'analyse des réponses aux questionnaires destinés aux étudiants : Identification des éléments d'une fonction, relation entre eux, modélisation d'une situation fonctionnelle, description des processus effectués, utilisation du concept d'équation pour déterminer l'inconnu, identification et utilisation du modèle de régularité et de croissance de la fonction, passage à l'enregistrement graphique. Les résultats de la recherche montrent une plus grande difficulté dans l'identification et la relation des éléments de la fonction, dans l'identification et l'utilisation du modèle de régularité.

Les recherches menées par [Ainley et al. \(2004\)](#) et [Ursini et Trigueros \(2004\)](#) sur la compréhension du concept de variable montrent qu'en général, les étudiants du secondaire, du baccalauréat et même du premier cycle universitaire n'acquièrent pas une connaissance acceptable du concept de variable et qu'en conséquence, des difficultés sont générées lorsqu'ils travaillent avec ses différents usages, en particulier, dans les cours d'algèbre élémentaire où il y a, fondamentalement, trois utilisations de la variable (i) comme un nombre général, (ii) comme un inconnu spécifique et (iii) comme une variable dans une relation fonctionnelle. La distinction entre ces trois usages, qui correspondent à différents niveaux d'abstraction, et la reconnaissance d'une série d'aspects qui les caractérisent, permettent aux élèves de résoudre, avec efficacité, exercices et problèmes ([Ursini et al., 2005](#)). Cependant, tout au long de notre expérience d'enseignement et de recherche, nous avons observé la difficulté que, le concept de variable génère chez plusieurs étudiants. Bien que dans leur cours d'algèbre, ils apprennent à manipuler et à opérer, dans de nombreux cas efficacement, avec des termes qui impliquent l'idée de variable, ils n'atteignent pas, nécessairement, une compréhension acceptable du concept. En d'autres termes, il est très fréquent que les élèves soient incapables de distinguer le rôle de la variable dans une expression. Par exemple, lorsque

nous présentons aux élèves les expressions (i) $3x + 6$, (ii) $3x + 6 = 12$ et (iii) $y = 3x + 6$, les élèves ne distinguent généralement pas la différence de statut prise par x dans chacune des expressions (i) d'un nombre général (ii) d'un nombre spécifique à déterminer (inconnu) et (iii) de l'idée de correspondance et variation (relation fonctionnelle).

Pour nos travaux de recherche, cet aspect est important car, comme le mentionnent [Ursini et Trigueros \(1998\)](#), la compréhension du concept de variable implique la possibilité d'aller au-delà de la simple réalisation de calculs et d'opérations avec des lettres. En d'autres termes, il s'agit que les élèves, comprennent les raisons pour lesquelles ces procédures fonctionnent, qu'ils peuvent développer la capacité de visualiser où chaque statut conduit, et, aussi, qu'ils peuvent établir des relations entre les différentes formes que la variable revêt. En ce sens, pour [Ursini et al. \(2005\)](#), la solution compétente des problèmes algébriques doit être caractérisée par une gestion souple de l'utilisation de la variable dans ses trois statuts. Pour y parvenir, [Ursini et Trigueros \(1998\)](#) présentent un ensemble d'aspects, relatifs aux différentes utilisations de la variable qui doit avoir un travail algébrique pour être considéré comme performant, table 1.18.

Dans ce travail de recherche, nous pensons que les différentes attributions de la variable, en mathématiques, jouent un rôle important dans l'apprentissage de la notion de fonction. C'est pourquoi les difficultés liées à l'utilisation des variables font partie des obstacles qui ont donné lieu à la problématique de notre travail de recherche. Dans les activités de modélisation (Chapitre 4) et dans l'analyse des résultats (Chapitre 5), cette section est présente dans (i) la façon dont les différents rôles des variables affectent les développements (dans le domaine des mathématiques et de la physique) des élèves et (ii) au niveau auquel les activités de modélisation permettent de comprendre le rôle de la variable dans une relation fonctionnelle.

1.3.2 La non connexion des registres de représentation

Un autre des problèmes que rencontrent les élèves et même certains enseignants du lycée est lié à la façon dont le concept de fonction est limité à une simple manipulation algébrique ([Hitt, 2003](#)). En général, un nombre considérable d'enseignants se limitent au développement de la partie algébrique-opérationnelle et ils accordent peu d'importance aux tâches de conversion des registres de représentation associés à la fonction. C'est-à-dire, la pratique de l'enseignement, en général, tend à privilégier les activités qui ont trait à la manière où il s'agit de déterminer si une expression est fonction ou non, en utilisant le critère de la ligne verticale; la détermination de la li-

TABLE 1.18 – Éléments proposés par Ursini et Trigueros (1998) pour une conceptualisation adéquate de la variable (traduction personnelle de l'espagnol vers le français)

Utilisation de la variable	1	2	3	4	5	6
En tant que numéro général	Reconnaître les tendances, percevoir les règles et les méthodes dans les séquences et dans les familles de problèmes	Interpréter un symbole comme représentant d'une entité générale indéterminée qui peut assumer n'importe quelle valeur	Déduire les règles et méthodes générales dans les séquences et les familles de problèmes	Manipuler (simplifier, développer) la variable symbolique	Symboliser des énoncés, des règles ou des méthodes généraux	—
En tant qu'inconnu	Reconnaître et identifier dans une situation problématique la présence de quelque chose d'inconnu qui peut être déterminé en considérant les contraintes du problème	Interpréter les symboles qui apparaissent dans une équation comme la représentation de valeurs spécifiques	Remplacer la variable par la ou les valeurs qui font de l'équation un véritable énoncé	Déterminer la quantité inconnue qui apparaît dans des équations ou des problèmes inconnus en effectuant des opérations algébriques ou arithmétiques	Symboliser les quantités inconnues identifiées dans une situation spécifique et les utiliser pour poser des équations	—
Dans une relation fonctionnelle	Reconnaître la correspondance entre les variables liées, quelle que soit la représentation utilisée (tables, graphiques, problèmes verbaux, expressions analytiques)	Déterminer les valeurs de la variable dépendante, étant donné les valeurs de la variable indépendante	Déterminer les valeurs de la variable indépendante, étant donné les valeurs de la variable dépendante	Reconnaître la variation conjointe des variables impliquées dans une relation fonctionnelle, quelle que soit la représentation utilisée	Déterminer les intervalles de variation d'une variable en fonction de l'intervalle de variation de l'autre	Symboliser une relation fonctionnelle, basée sur l'analyse des données du problème

mite d'une fonction, au moyen des théorèmes respectifs; l'obtention de la dérivée, en utilisant les règles de dérivation; etc. Cependant, le fait que les élèves soient capables d'effectuer les activités ci-dessus, avec un bon niveau d'efficacité, ne signifie pas qu'ils ont pleinement compris le concept de fonction.

La déconnexion entre les registres de représentation des fonctions, au sein des mathématiques et de la cinématique, peut également être observée dans les sections 1.1.3 et 1.1.4, dans l'étude de quatre livres classiques dans l'enseignement de l'analyse et quatre livres dans l'enseignement de la cinématique au Mexique. Dans les deux premiers livres d'analyse (Apostol, 1977, Spivak, 1988), qui sont les plus anciens, il n'y a pas vraiment d'intention de travailler avec les différents registres de représentation.

C'est-à-dire, bien que dans ces deux livres, les quatre registres de représentation soient mentionnés, au moment de travailler avec la fonction, la représentation algébrique est privilégiée, en laissant de côté les 3 autres représentations. Ces livres, bien qu'anciens, continuent de servir de base à l'enseignement de l'analyse au Mexique, non seulement parce qu'ils continuent d'être présents dans la bibliographie recommandée dans les programmes d'étude, mais aussi parce que ce type d'enseignement a été celui reçu par de nombreux enseignants. Dans les deux autres livres d'analyse (Thomas et Weir, 2005, Stewart, 2008), qui sont plus actuels, nous constatons que, les auteurs utilisent davantage les quatre registres de représentation, de même, Stewart (2008) mentionne l'importance de travailler sur les quatre registres de représentation. Bien qu'à priori, un changement important est observé dans le traitement de la fonction dans ces deux livres qui sont plus actuels. Dans la partie des exercices, nous pouvons observer que la plupart des exercices sont réduits à un travail algébrique et graphique, en oubliant les tables de valeurs et le langage naturel.

En ce qui concerne les quatre livres de physique générale, analysés dans la section 1.1.4, nous pouvons observer qu'en cinématique le travail en les registres de représentation de la fonction est plus fort. C'est-à-dire, dans les trois sujets analysés (MRU, MRUA et MCU), il est utilisé les registres de représentations : **langage naturel, table des valeurs, graphique** et **algébrique**. Cependant, la liaison de l'objet mathématique, fonction, avec les équations de mouvement est implicite.

En nous appuyant sur recherches précédentes, sur notre expérience d'enseignante et cette analyse, nous pensons que travailler avec les différents registres de représentation de la fonction est important pour la comprendre. La coordination entre les différents registres disponibles d'un objet mathématique est considérée comme fondamentale pour la compréhension d'un concept (Duval, 1999). Il est important de dire que lorsque nous parlons de registre de représentation, ce n'est pas seulement aux sens de Duval (1999), qui se limite aux registres mathématiques, mais aussi aux registres de représentation au sens d'Arzarello (2006) qui adopte une notion plus large des systèmes sémiotiques impliqués dans le processus d'apprentissage. À partir de là, une posture intéressante est celle de Janvier (1987), qui mentionne que l'élève n'a pas réussi à intégrer le concept de fonction, tant qu'il n'est pas capable de passer d'une des représentations à toutes les autres. C'est-à-dire qu'il est, non seulement, important de s'occuper des difficultés qui surgissent dans le traitement de chaque représentation, mais il est également nécessaire de déterminer les tâches de transformation entre les

différentes représentations en donnant la même importance à toutes. En outre, [Duval \(1999\)](#) affirme que la transformation des représentations est indispensable pour qu'un objet puisse être codifié/décodé pour augmenter la possibilité d'être compris. Aussi, et à l'instar de [Dolores et Valero \(2004\)](#), nous considérons que l'analyse du comportement des fonctions est l'une des compétences de base que les étudiants devraient promouvoir pour le développement de la pensée et du langage variationnels.

1.3.3 Les questions de recherche

Notre recherche a pour point de départ l'intérêt généré, sur la base de notre expérience, par les problèmes rencontrés par les enseignants lorsqu'ils doivent enseigner le concept de fonction, en tant qu'objet mathématique, et par les étudiants lorsqu'ils essaient de le comprendre. Dans cette perspective, nous reconnaissons que ces difficultés ont leur origine dans différents cas : l'institution, à travers les programmes d'études; les enseignants, car ils participent à la transposition didactique des contenus mathématiques ([Chevallard, 1978](#)) et le travail que les étudiants doivent faire pour s'approprier des connaissances.

Dans les sections [1.1.1](#) et [1.1.2](#), nous avons réalisé un développement historico-épistémologique où nous observons le long chemin qui a dû être parcouru pour arriver à la notion de fonction, tant des mathématiciens que des physiciens. En ce sens, nous rendons tangible l'importance que les mathématiques ont dans la description quantitative de la nature et vice versa. Ainsi, nous pensons que, dans le contexte de l'institutionnalisation du concept de fonction, la description des phénomènes de mouvement en fonction de leurs équations (vues comme des relations fonctionnelles), peut aider à leur compréhension.

L'institutionnalisation des connaissances, dans les livres, a une première référence didactique. Dans les sections [1.1.3](#) et [1.1.4](#), nous examinons comment la fonction est traitée par différents auteurs. Ils la définissent selon différentes approches : relation entre les ensembles, en tant que paires ordonnées, etc. Nous pensons que cette diversité de définitions donne la possibilité aux élèves de visualiser différentes formes de représentation de la fonction, mais nous pensons aussi que cela peut devenir une difficulté d'apprentissage, car la transformation entre les représentations n'est pas encouragée de manière exhaustive, de sorte que l'objet mathématique puisse être codé/décodé, pour être compris [Duval \(1999\)](#).

Dans les sections 1.2.1 et 1.2.4, nous avons discuté de la réforme du programme d'études de l'ENP. Nous avons constaté que, pour l'essentiel, les programmes de 1996 proposent la résolution de problèmes comme approche méthodologique, mais nous considérons que cette perspective manque d'objectivité, car les problèmes soulevés reposent sur des énoncés faits dans des conditions idéales et non sur un processus de modélisation de situations réelles. En particulier, cette approche privilégie le travail algébrique opérationnel par rapport à l'objet mathématique fonction. En revanche, le programme de 2017 propose aux enseignants de décrire la relation fonctionnelle des situations dans des situations proches des élèves, en faisant intervenir deux variables et en travaillant davantage sur la coordination des différents registres de représentation. En ce qui concerne le cours de physique, dans le programme de 1996, l'utilisation des mathématiques est observée comme un outil opérationnel, mais pas comme une discipline qui peut favoriser l'apprentissage de la physique et, dans la réforme de 2017, il n'y a pas d'intérêt explicite à aborder les phénomènes cinématiques tels que le MRU et le MRUA. En bref, nous ne trouvons pas de lien réel entre ces deux disciplines dans les programmes d'études.

En ce qui concerne les problèmes d'apprentissage du concept de fonction, nous avons vu dans la section 1.3.1 que la première difficulté apparaît lorsque les élèves doivent déterminer, dans une expression mathématique, si les lettres qui apparaissent ont le statut d'inconnues ou de variables. Les études menées par Ursini (1996) établissent que cette difficulté est liée au caractère multidimensionnel de la variable et que c'est le contexte d'utilisation qui détermine sa signification, soit comme une inconnue, soit comme une relation fonctionnelle entre les variables.

En ce qui concerne l'activité des enseignants, nous constatons qu'un bon nombre d'entre eux, peut-être en raison de l'inertie de nombreuses années de travail pédagogique, préfèrent enseigner de manière traditionnelle et planifier leurs cours avec des activités qui encouragent et surestiment, dans une large mesure, la manipulation de la représentation algébrique des fonctions, ce qui n'aide pas nécessairement à la compréhension du concept. En revanche, et comme le suggère le programme de 2017, il existe des enseignants qui utilisent les outils technologiques pour encourager les élèves à développer des compétences dans la manipulation de logiciels spécialisés et dans l'utilisation de simulateurs. Pour Gaona (2018), l'intégration de la technologie dans l'éducation est inévitable. Cette intégration technologique doit tenir compte de sa valeur pragmatique et épistémique (Artigue, 2002a).

Un autre aspect qui est peu pris en compte par les enseignants est le lien de l'objet mathématique, fonction, avec d'autres domaines de la connaissance, en particulier avec les concepts physiques. S'il est vrai que les programmes d'études proposent d'appliquer les mathématiques à la résolution de divers problèmes, certains enseignants comprennent que cela implique de résoudre des situations, en se basant sur des énoncés aux conditions idéales, mais n'établissent pas de liens et d'interprétation des objets mathématiques impliqués avec les concepts respectifs du domaine d'application. En utilisant les mathématiques uniquement comme un outil de quantification des concepts physiques, elle limite la possibilité de les relier à leurs objets mathématiques respectifs. En particulier, nous considérons qu'un travail de modélisation des phénomènes de mouvement en cinématique, vécus par les élèves à partir de leur recreation, peut contribuer à la construction de la notion de fonction. Nous pensons que la modélisation devrait être considérée, comme l'ont indiqué [Bosch et al. \(2006\)](#), comme faisant partie de l'enseignement explicite qui relie les mathématiques aux autres disciplines.

Tous ces éléments ont déterminé la question de recherche principale :

QR Dans quelle mesure le travail sur les phénomènes de mouvement, à travers les processus de modélisation, permet-il de développer la notion de fonction ?

Comme nous l'avons montré tout au long de ce premier chapitre et dans notre question de recherche, l'objet mathématique central est la fonction. Nous pensons que le fait d'aborder ce concept, en partant des phénomènes de mouvement, peut aider les élèves non seulement à explorer une méthode différente d'apprentissage de la fonction, mais aussi à donner une signification physique aux objets mathématiques concernés. Comme nous pouvons le voir dans QR, et parce que nous proposons de travailler avec la notion de fonction et avec les phénomènes de mouvement, l'utilisation de processus de modélisation arrive naturellement. En ce sens, tout au long de cette recherche, nous travaillons avec trois éléments principaux : (i) **la notion de fonction** (mathématiques); (ii) **les phénomènes de mouvement** (cinématique); et (iii) **le processus de modélisation** (les moyens qui nous aidera à relier i et ii).

Répondre à la question QR n'est pas simple, car plusieurs éléments interagissent entre eux, comme les représentations que la fonction peut avoir au sein des mathématiques et de la physique, l'effet des interactions de ces représentations sur le travail des élèves, et la façon dont nous pouvons caractériser ce travail dans le domaine de la cinématique. En ce sens, trois sous-questions se posent :

- QRa Quel jeu entre les représentations des fonctions est mis en place dans le processus de modélisation que nous avons développé?**
- QRb Quel est l'effet du jeu entre représentations sur le travail personnel des étudiants autour de la fonction?**
- QRc Comment caractériser, dans le domaine de la cinématique, l'espace de travail élaboré pour ce jeu entre les représentations des fonctions et les évolutions de cet espace pour les élèves?**

Ces trois sous-questions seront explicitées dans la section [2.5](#) après avoir présenté le cadre théorique qui soutient ce travail de recherche.

Chapitre 2

Cadre théorique

Sommaire

2.1	Espaces de Travail Mathématiques (ETM)	99
2.1.1	Plans verticaux des ETM	106
2.1.2	Différents types des ETM	108
2.1.3	Paradigme	111
2.1.4	Activation de l'ETM	116
2.1.5	De la nécessité d'étendre un ETM	116
2.2	L'Espace de Travail en Cinématique (ETC)	117
2.2.1	Les plans d'ETC	117
2.2.2	Les paradigmes et les genèses d'ETC	118
2.2.3	Cinématique : Le paradigme du réel (CI)	118
2.2.4	Cinématique : Le paradigme de la mesure et de la quantification (CII)	123
2.2.5	Cinématique : Le paradigme de la formalisation et de l'idéalisation (CIII)	127
2.3	Modélisation au sein de la recherche en didactique des mathématiques	130
2.3.1	Quelques perspectives de la modélisation mathématique	131
2.3.2	Le cycle de modélisation de Blum et Leiss	136
2.4	ETC et modélisation mathématique	139
2.5	Retour sur les questions de recherches	143

Introduction

Pour atteindre notre objectif principal qui est de savoir dans quelle mesure les phénomènes de mouvement, à travers des processus de modélisation, permettent le développement de la notion de fonction, nous devons être capables de caractériser le travail que les élèves effectuent dans le cadre des activités de modélisation que nous avons créées. En particulier, nous nous concentrons sur la façon dont les élèves (de l'École Nationale Préparatoire), qui veulent faire des études d'ingénierie ou scientifique, développe et intériorisent le concept de fonction à travers 4 activités de modélisation, que nous avons conçues : Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU), Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA), Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) et la combinaison entre un MRU avec un MCU (cycloïde). Le choix des activités est justifié dans la section 3.4.4 Les activités de modélisation ont fait ressortir le besoin de s'appuyer en plusieurs constructions théoriques : les Espaces de Travail Mathématiques (ETM) de [Kuzniak \(2011\)](#), section 2.1; l'Espace de Travail en Cinématique (ETC), proposé dans cette thèse, section 2.2; et le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#), section 2.3.2.

L'utilisation et la dialectique qui a été générée entre les entités théoriques nous a permis, non seulement de concevoir les activités de modélisation, mais aussi de caractériser le travail des élèves en coordonnant le monde réel et le monde mathématique. D'une part, l'ETC nous a permis de considérer et de caractériser les phénomènes de mouvement et les réalisations des élèves durant le processus de modélisation. D'autre part, l'ETM, qui est conçu pour décrire et caractériser le travail mathématique généré dans un contexte d'enseignement et d'apprentissage, nous a aidé à établir les développements mathématiques des activités et à caractériser les processus de solution des élèves dans cette discipline. Enfin, le cycle de modélisation, qui divise la modélisation en 7 phases et opère entre le monde réel et le mathématicien, nous a permis de concevoir les activités et de distinguer la transition entre les phases dans les reproductions écrites des élèves. Par ailleurs, nous ne pouvons pas oublier de dire que la proposition d'étendre le cadre théorique de l'ETM, dans notre cas au domaine de la cinématique (ETC), n'est pas étrangère à cette théorie. En elle, l'idée d'évolution, à l'intérieur et à l'extérieur des mathématiques, est présente et s'observe dans les travaux réalisés par différents auteurs : Espace de travail mathématique en Géométrie [Houdement et Kuzniak \(2006\)](#), Espace de travail mathématique de l'analyse [Montoya-](#)

Delgadillo et Vivier (2016), Espace de travail mathématique en probabilité (Nechache, 2016, Derouet, 2016); ETM dans le contexte de la physique relativiste ((Moutet, 2016); Espace de travail algorithmique (Laval, 2018); etc. À cet égard, il est important de mentionner que la cinématique a été considérée comme une branche des mathématiques (et il est probable que certaines parties de celle-ci le soient encore). Cependant, la cinématique est, pour l'essentiel, un domaine qui appartient à la physique, car bien que les mathématiques en fassent partie, le phénomène lui-même, les variables, les unités et les processus qui sont suivis font partie de la physique. La raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé le modèle de Moutet (2016), qui utilise des éléments appartenant à la physique et aux mathématiques, est que ce modèle est conçu pour fonctionner avec les activités de la physique relativiste, où, essentiellement, il utilise des objets appartenant à la géométrie, et bien qu'il propose des problèmes contextualisés dans la physique, ils continuent d'être de nature théorique. Autrement dit, les processus cognitifs sont différents de ceux sur lesquels nous travaillons dans le cadre de cette recherche. Nous proposons des activités de modélisation mathématique dans lesquelles les processus cognitifs liés à la perception et à la manipulation d'artefacts matériels pour la recréation de phénomènes de mouvement sont réellement impliqués, ce qui génère des processus cognitifs différents de ceux qui sont produits lors du travail théorique. Ensuite, nos activités conduisent les étudiants à une évolution, jusqu'à ce qu'ils atteignent les modèles théoriques. C'est pourquoi nous avons dû étendre le cadre de l'ETM au domaine de la cinématique (ETC), ce qui nous a permis de caractériser précisément ce type d'activités de modélisation.

Dans ce chapitre, nous présentons les bases théoriques qui soutiennent la recherche : L'ETM, le développement d'ETC et, la modélisation mathématique et la dialectique générée entre les entités théoriques utilisées.

2.1 Espaces de Travail Mathématiques (ETM)

L'une des grandes questionnements concernant l'enseignement des mathématiques, au niveau mondial, s'est posée dans les années 1960 lors de la réforme des mathématiques modernes. Au cours de cette période, la manière dont les objets mathématiques étaient enseignés, et les effets de l'enseignement et de l'apprentissage sur le développement scientifique et technologique des pays ont été repensés. L'objectif principal de la réforme était de changer le rôle de l'élève. Il était prévu que les élèves soient im-

pliqués dans la construction de leur propre savoir et qu'ils abandonneraient le rôle de « récepteurs d'information ». A cette fin, il a été proposé de promouvoir un raisonnement plus approfondi des mathématiques abstraites, en laissant de côté les développements mécaniques. Dans le même ordre d'idées, l'activité du mathématicien expert a été considérée comme un modèle à suivre dans le processus d'enseignement, en considérant les élèves comme des « mathématiciens débutants ». Plus récemment, [Giaquinto \(2005\)](#), en observant l'activité globale du mathématicien, distingue 4 phases qui décrivent le travail mathématique : le découverte, l'explication, la justification et l'application. Pour Giaquinto, ces phases permettent non seulement le développement de la connaissance mathématique elle-même, mais aussi de faciliter sa diffusion, à l'intérieur et à l'extérieur de la communauté mathématique, atteignant également les enseignants et les élèves. En partant de ces principes, [Kuzniak \(2011\)](#) propose le cadre théorique et méthodologique des Espaces de Travail Mathématique qui vise à décrire et caractériser la nature du travail mathématique qui se déroule dans une institution scolaire. Pour [Kuzniak \(2011\)](#), il y a deux aspects importants et complémentaires qui sont considérés dans l'ETM (i) le travail de l'apprenti dans un contexte scolaire avec les enseignants (tâches et évaluations dans un contexte social) et (ii) le développement du travail, de nature mathématique, effectivement réalisé par l'élève. De plus, dans le modèle des ETM, la conceptualisation est considérée comme le fruit de l'interaction entre le sujet et les problèmes mathématiques, dans un environnement organisé :

Dans le modèle des ETM, on conçoit la conceptualisation comme le fruit d'une interaction entre un individu et des problèmes mathématiques (géométriques, algébriques, etc.), dans un environnement organisé pour et par le mathématicien (géomètre, algébriste, etc.) articulant deux plans. ([Montoya-Delgadillo et Vivier, 2014](#), p.75)

En considérant ce qui précède, le modèle proposé par [Kuzniak \(2011\)](#) intègre deux plans, (i) *le plan épistémologique* où les objets des mathématiques sont contenus et structurés, et (ii) *le plan cognitif* qui implique le sujet et les usages et processus qu'il donne à ces objets, lorsqu'il effectue un travail mathématique. L'articulation de ces plans se fait à travers trois genèses : sémiotique, instrumentale et discursive, Fig. 2.1

Afin de mieux comprendre le modèle théorique-méthodologique de l'ETM, les élé-

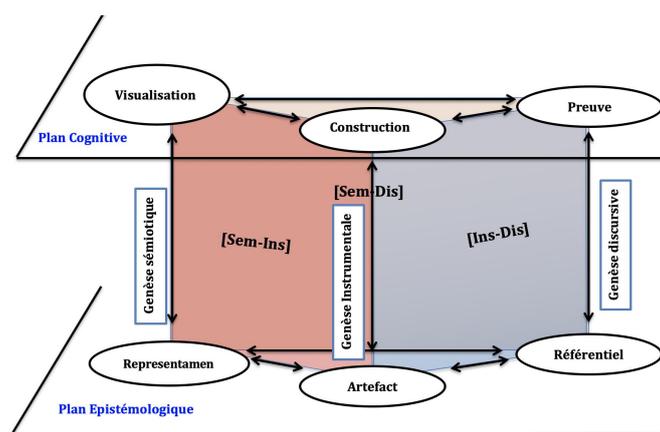


FIGURE 2.1 – Le modèle des ETM

ments, notions, idées, concepts et processus impliqués dans chacune des genèses sont présentés ci-dessous :

1. La *genèse sémiotique* est basée sur le fait que les mathématiques sont données par des représentations sémiotiques fortement liées aux processus de visualisation. En ce sens, [Kuzniak et al. \(2016b\)](#) affirment que la genèse sémiotique fait référence au processus associé aux signes et est chargée d'expliquer la dialectique entre la syntactique et la sémantique des objets mathématiques, lesquels sont présentés et organisés par des systèmes sémiotiques de représentation. Cette genèse est représentée, dans le modèle, comme l'interaction du *representamen*, situé dans le plan épistémologique, avec le processus *visualisation*, dans le plan cognitif.
 - a. Quand on parle de *Representamen* ou de *Signe* dans l'ETM, cela se fait au sens de [Peirce \(1931\)](#)

A sign, or representamen, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the interpretant of the first sign. The sign stands for something, its object. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the

representamen. "Idea" is here to be understood in a sort of Platonic sense, very familiar in everyday talk. (2.228; Echo 1988)

En d'autres termes, le signe ou representamen dans l'ETM dépend du domaine dans lequel le travail est effectué. Les signes peuvent être numériques, géométriques, algébriques, graphiques, photos, parmi d'autres (voir section 1.1 pour plus de détails). De même, les representamen sont associées à des idées qui sont issues d'expériences et d'apprentissages antérieurs de l'individu.

- b.** D'autre part, la *visualisation* est liée au développement cognitif qui est généré dans différents domaines des mathématiques, à partir de différents registres de représentation. Autrement dit, la visualisation peut provenir non seulement des diagrammes et des opérations liées à l'utilisation des signes et à leur interprétation, mais aussi des images qui sont générées dans l'esprit du sujet par la communication orale. Par conséquent, pour [Kuzniak et Richard \(2014\)](#), la visualisation peut être considérée comme un processus structurant de l'information :

Ce processus de visualisation « extensif » doit être distingué de la simple vision ou perception d'objets et peut être considéré comme un processus de structuration des informations apportées par les diagrammes et les signes. Il nourrit l'intuition des propriétés et il contribue parfois à fonder cognitivement la validité de ces propriétés. Sous certaines conditions, il peut s'apparenter à un raisonnement de type discursivo-graphique ([Richard, 2004](#)) et pourra s'exprimer à l'intérieur de registres de représentation sémiotique déterminés. ([Kuzniak et Richard, 2014](#), p.6)

Ainsi, [Kuzniak et al. \(2016b\)](#) expliquent que le travail avec des ensembles de signes, qui peuvent être organisés en registres sémiotiques de représentation

(Duval, 1993), peut produire des processus cognitifs liés à la visualisation, en générant ainsi une genèse sémiotique. Un élément important de l'ETM est que, la genèse sémiotique considère non seulement la vision de Duval (1993), mais aussi l'approche d'Arzarello (2006) avec les *semiotic bundle* :

A semiotic bundle is a dynamic structure which can change in time because of the semiotic activities of the subject : for example, the collection of semiotic sets that constitute it may change; as well, the relationships between its components may vary in time; sometimes the conversion rules have a genetic nature, namely, one semiotic set is generated by another one, enlarging the bundle itself (we speak of genetic conversions). Semiotic bundles are semiotic representations, provided one considers the intentionality as a relative feature. (Arzarello, 2006, p.15)

Kuzniak et al. (2016b) considèrent deux processus possibles dans cette genèse. La première distingue un (i) *décodage* et une *interprétation* des signes dans un développement qui trouve son origine dans le representamen et se dirige vers la visualisation. Cela pourrait être interprété comme une sorte de « conscience cognitive visuelle » qui émerge d'un certain representamen. Dans la seconde est visible une (ii) *codification* ou « *instanciation* » qui commence dans l'esprit d'un « sujet conscient » et va vers une representamen qui le représente.

2. La *genèse instrumentale* est considérée, dans l'ETM, comme celle qui permet de rendre opérationnels les artefacts utilisés dans le processus de résolution de problèmes. Cette genèse engage l'artefact, situé dans le plan épistémologique, et la construction dans le plan cognitif. Pour mieux comprendre cette genèse, il est important d'expliquer la différence entre artefact, outil et instrument. Kuzniak et al. (2016a) expliquent que : (i) l'*artefact* est un objet matériel qui est transformé par l'être humain dans un but précis; cependant, lorsque nous en parlons, nous ne savons pas quel est son but ou son utilité et, en particulier, s'il peut être utilisé pour accomplir une tâche ou non. Les mêmes auteurs mentionnent que (ii) les *outils* sont des objets qui servent à accomplir certaines tâches, mais ils

expliquent que les artefacts peuvent être des outils lorsqu'ils sont utilisés dans un but précis, mais ils soulignent que tous les artefacts ne sont pas des outils (un gâteau est un artefact mais pas un outil) ni tous les outils sont des artefacts (une pierre, sans aucun traitement, peut être utilisée pour broyer les objets). Ainsi, dans ce travail de recherche, nous utiliserons ces deux mots avec leur signification correspondante ainsi que celle d'artefact symbolique (Rabardel, 1995), qui se réfère à des objets, principalement mathématiques, qui peuvent être utilisés comme instruments pour la détermination de quelque chose de spécifique, par exemple, la dérivée dans son statut d'artefact symbolique permet de déterminer la vitesse d'un objet ou la pente de la ligne tangente à une courbe. Par ailleurs, ces auteurs mentionnent que (iii) les *instruments*, généralement, dans le monde scientifique sont des objets faits pour effectuer des travaux techniques ou spécialisés (scalpel, télescope, laser...), cependant, dans le domaine des didactique des mathématiques l'instrument a une signification particulière influencée par Rabardel (1995) :

est une entité mixte qui comprend d'une part, l'artefact matériel ou symbolique et d'autre part, les schèmes d'utilisation, les représentations qui font partie des compétences de l'utilisateur et sont nécessaires à l'utilisation de l'artefact. (p.64)

- a. L'*artefact* est pris dans le sens de Rabardel (1995) qui mentionne que les artefacts ne se limitent pas au matériel (calculatrices, ordinateurs, équerres, boussoles...) mais qu'ils peuvent aussi être symboliques (graphiques, méthodes, tables de multiplication, etc). Rabardel (1995) lui-même mentionne que lorsque l'utilisation d'artefacts implique des processus cognitifs qui attribuent une certaine valeur ou utilisation (schémas d'utilisation), il prend le statut d'instrument. C'est-à-dire, que l'instrument est composé de deux éléments : un artefact (ou outil), matériel ou symbolique, et un schéma d'utilisation associé, comme il est mentionné dans le paragraphe précédent.

Dans l'ETM, l'artefact est, généralement, utilisé dans le sens d'un outil. C'est-à-dire qu'il est considéré comme un outil lorsque l'artefact a un but lié à la solution d'une tâche ou d'un problème. C'est pourquoi, dans cette re-

cherche, nous utilisons le mot outil (matériel ou symbolique) plus fréquemment, car comme [Kuzniak et al. \(2016a\)](#) nous le considérons plus approprié.

- b.** La *construction*, dans l'ETM, est considérée comme un processus cognitif lié à l'utilisation d'outils (matériels et/ou symboliques) dans leur statut d'instruments. Ce processus cognitif se réfère essentiellement à la construction des : idées, notions, types de solutions, dessins, écrits, expériences, etc. au sein de des mathématiques.

Dans cette genèse, [Kuzniak et al. \(2016b\)](#) fait usage de deux processus proposé par [Rabardel \(1995\)](#) (i) l'*instrumentation*, lorsqu'un mouvement ascendant est généré (artefact à la construction) caractérisé par l'adaptation des schémas d'utilisation assignés aux outils; et (ii) l'*instrumentalisation* (construction à artefact) qui provient de la réalisation possible de l'objectif du sujet au choix adéquat de l'outil. Dans ce dernier processus sont incluses les adaptations possibles qui peuvent être produites au niveau de l'outil pour générer des actions spécifiques si nécessaire. [Kuzniak et al. \(2016b\)](#) mentionnent également que dans le processus (ii) des objets et des processus mathématiques plus formels sont susceptibles d'être impliqués et développés, comparativement au processus (i) qui est plus lié au pragmatisme de l'utilisation des artefacts.

3. La *genèse discursive* est générée par la dialectique entre le référentiel théorique, sur le plan épistémologique, et la preuve, sur le plan cognitif. Cette genèse est directement liée aux savoir savant et aux processus cognitifs impliqués dans les types de preuve qui sont générés dans la résolution d'une tâche.
 - a.** Dans le Référentiel Théorique, les définitions, théorèmes et axiomes impliqués dans le travail mathématique sont considérés. Cet élément, au sein de l'ETM, soutient le discours déductif qui est généré dans le développement mathématique produit dans la solution d'une tâche.
 - b.** La preuve au sein de l'ETM est étroitement lié aux processus déductifs inhérents aux mathématiques, qui doivent conduire à des définitions, hypothèses, conjectures avec une rigueur axiomatique au sens de [Lakatos \(1963\)](#).

En considérant ce qui précède, on peut dire que dans la genèse discursive sont générés des processus d'organisation d'éléments, qui appartiennent au référentiel théorique, dans le but de produire des preuves qui satisfassent une raisonnement axiomatique et ainsi générer des validations qui dépassent les vérifications

graphiques, empiriques ou instrumentales mais qui peuvent être déclenchées par eux.

Dans cette genèse, deux processus possibles sont également considérés (i) l'ascendant (du référentiel à la preuve) qui est généré à partir de propriétés et d'éléments situés à l'intérieur du référentiel théorique (le savoir savant) et qui sont utilisés pour générer un discours cohérent, axiomatique et formel, dans le but de valider les travaux mathématiques qui se développent. et (ii) le processus descendant (de la preuve au référentiel) lorsque des propriétés ou des définitions qui doivent être incluses dans le référentiel théorique sont identifiées. Ce processus peut être obtenu par des traitements instrumentaux, informatiques, visuels entre autres.

2.1.1 Plans verticaux des ETM

A partir des genèses décrites ci-dessus, [Kuzniak et Richard \(2014\)](#) définissent trois plans verticaux générés par l'interaction des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) associées à chaque genèse. Les plans (i) Sémiotique - Instrumental [Sem-Ins], (ii) Instrumental - Discursif [Ins-Dis] et, (iii) Sémiotique - Discursif [Sem-Dis], fig. 2.2

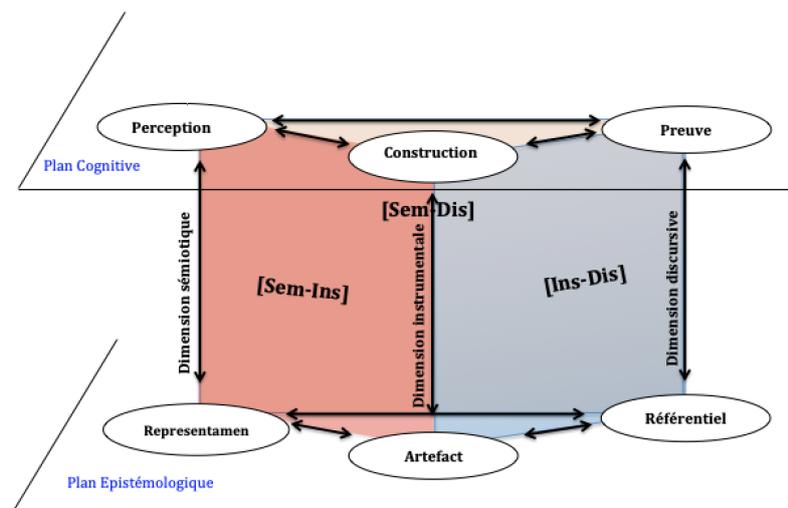


FIGURE 2.2 – Plans verticaux ETM

2.1.1.1 Sémiotique-Instrumental [Sem-Ins]

L'activation de ce plan peut être générée à partir de la dimension Sémiotique ou Instrumentale. C'est-à-dire, lorsque dans le travail mathématique des interactions sont générées entre des éléments ou des processus cognitifs qui appartiennent à : le representamen, la visualisation, les artefacts et/ou la construction, on peut dire que le travail est situé dans le plan [Sem-Ins].

Pour assurer l'activation d'un plan, il n'est pas indispensable d'activer chacun des éléments qui le composent, mais il est nécessaire de distinguer les dimensions qui interagissent. Dans ce cas l'activation peut être plus proche de la dimension sémiotique, si le travail mathématique effectué fait intervenir des éléments plus sémiotiques ou visuels, ou plus proche de la dimension instrumentale si les processus déclenchés sont issus des instruments utilisés ou des constructions réalisées.

2.1.1.2 Instrumental-Discursif [Ins-Dis]

L'entrée au plan Instrumental-Discursif se produit, généralement, lors de processus d'exploration ou d'expérimentation. Dans ce plan, une attention particulière doit être portée, car, comme nous l'avons déjà mentionné, la dimension discursive est soutenue par des validations et déductions issues d'une pensée abstraite, analytique et axiomatique. Ainsi [Kuzniak et al. \(2016b\)](#) affirment que si les conclusions ou le discours, qui est généré, proviennent de résultats empiriques et d'une pensée inductive (preuve expérimentale) alors le travail mathématique est situé dans le plan [Ins-Dis] avec une polarisation plus forte vers la dimension instrumentale. Sinon, lorsque le travail mathématique généré considère un véritable raisonnement déductif qui est fortement basé sur la dimension discursive, soutenue par une construction progressive suggérée ou vérifiée par des exemples instrumentés, alors, le travail mathématique est placé sur le plan [Ins-Dis] avec une forte inclinaison vers le discursif. Dans ce plan, il faut aussi considérer le travail mathématique qui ne provient pas d'expérimentations, mais qui utilise des outils (matériels et/ou symboliques), avec le statut d'instrument, pour produire des validations ou des discours dans les travaux mathématiques réalisés.

2.1.1.3 Sémiotique-Discursif [Sémi-Dis]

L'activation de ce plan se produit, soit à partir de la dimension sémiotique, soit à partir de la dimension discursive. Suivant le même principe que le plan [Ins-Dis]

dans celui-ci, il est possible de générer deux tendances, l'une d'entre elles était axée sur (i) la dimension discursive qui dépasse la simple vision iconique des objets traités et qui est basée sur des propriétés et théorèmes explicitement identifiés qui peuvent être déduits avec l'aide heuristique de la codification des signes ; et l'autre est centré (ii) sur la dimension sémiotique ; qui est soutenue, surtout, dans un raisonnement perceptif visuel.

2.1.1.4 Circulation entre les plans

Comme nous l'avons observé, dans l'explication des plans verticaux, le modèle ETM s'enrichit puisque les travaux mathématiques, la plupart du temps, se déroulent sur plus d'une dimension. C'est pour cette raison que, l'idée de plans qui sont générés à partir de deux dimensions qui sont imbriquées, nous permet non seulement de voir ce qui se passe dans chacun des éléments des plans, ou le mouvement qui émerge dans chaque genèse, mais aussi l'interaction qui peut se produire entre eux, de sorte que, la caractérisation des travaux mathématiques est plus riche et plus précis. De cette façon, [Kuzniak et al. \(2016a\)](#) proposent l'idée d'un travail mathématique complet au sein de l'ETM : « The Mathematical work is considered complete when a genuine relationship exists between epistemological and cognitive aspects, and when the three dimensions of the model are appropriately articulated. » ([Kuzniak et al., 2016a](#), p.861). C'est-à-dire que le travail avec l'ETM cherche à être complet, puisque de cette façon nous pourrions garantir, d'une certaine manière, qui est motivé par : le passage en différents registres de représentation ; l'utilisation des outils, dans leur statut d'instruments et ; les processus de validation, d'une pensée pragmatique ou axiomatique-déductive. Déclenchant ainsi des circulations entre les composantes de l'ETM, de telle sorte que la dialectique entre le plan épistémologique et le plan cognitif soit renforcée.

2.1.2 Différents types des ETM

Afin de comprendre les types de l'ETM, nous présentons un bref résumé des éléments que nous avons décrits jusqu'à présent :

(i) Deux plans horizontaux : le *plan épistémologique* qui comprend des éléments caractéristiques des mathématiques et ; le *plan cognitif* lié à la capacité de l'individu à traiter l'information contenue dans le plan épistémologique à travers de ses : perceptions, connaissances antérieures, expériences, etc. (ii) Trois genèses (*sémiotique, instrumentale* et *discursive*) qui relient les plans horizontaux au moyen de trois éléments

dans le plan épistémologique (*representamen, artefact et référentiel*) et trois dans le plan cognitif (*visualisation, construction et preuve*). Et finalement (iii) trois plans verticaux, qui sont générés par l'union des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) : [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis].

L'ensemble et l'interaction de ces éléments de l'ETM nous permettent de caractériser le travail mathématique en observant la corrélation générée entre eux. Cependant, l'une des questions qui se posent est de savoir où cette caractérisation peut être effectuée. Pour répondre à cette question, [Kuzniak \(2011\)](#) définit trois types de l'ETM dans lesquels il considère les institutions, le professeur et l'étudiant :

I ETM de référence

Les connaissances mathématiques, dans un environnement éducatif, sont influencées par le contexte social, économique et politique de chaque pays. C'est pourquoi, au sein de l'ETM de référence, les connaissances sont considérées non seulement à partir des savoirs savants mais aussi des documents officiels délivrés par le ministère de l'éducation de chaque pays (programmes d'études, documents officiels d'accompagnement, articles des enseignants en mathématiques,...). Ainsi, l'ETM de référence peut permettre, en général, une organisation cohérente et bien définie des connaissances mathématiques qui seront enseignées. En ce qui concerne le travail effectué dans l'ETM de référence, il est important de noter que la caractérisation qui produit est partielle, puisque l'un des éléments importants à considérer est l'enseignant, qui est considéré dans le ETM idoine.

II ETM idoine

L'ETM idoine concerne la façon dont l'enseignant prend l'information qui se trouve dans l'ETM de référence et l'adapte pour être enseignée. [Derouet \(2016\)](#) s'appuie sur la définition en ligne (du dictionnaire Larousse) du mot idoine « qui convient exactement à la situation » et la transpose dans le contexte scolaire, où elle dit que l'enseignant prend toutes les informations qu'il juge importantes pour concevoir un ETM qu'il considère idoine. D'autre part, et considérant le travail de [Derouet \(2016\)](#), [Nechache \(2017\)](#) propose deux types de ETM idoine :

- (i) *L'ETM idoine potentiel* conçu pour être mis en œuvre en classe comme : les manuels scolaires, les suggestions de programmes d'études, la planification de la classe de l'enseignante etc.

- (ii) *L'ETM idoine effectif* qui sont tous les ETM idoine potentiels qui sont effectivement mises en œuvre dans la salles de classe, dans un travail conjoint entre l'enseignant et les élèves.

III ETM Personnel

L'ETM personnel est celui qui montre les connaissances, les expériences et les processus cognitifs du sujet dans la résolution ou la conception d'une tâche. C'est-à-dire, cela peut l'être :

- (i) *L'ETM personnel de l'élève* peut être observé dans la mise en œuvre de l'ETM idoine. A ce niveau, les élèves doivent mettre en jeu leurs connaissances, leurs conceptions et leurs expériences afin de faire face aux tâches fournies par l'enseignant.
- (ii) *L'ETM personnel de l'enseignant*, qui est principalement observé dans la conception de l'ETM idoine potentiel. C'est-à-dire que lorsque l'enseignant effectue la transposition didactique du contenu mathématique à enseigner, il mobilise fortement ses idées, conceptions, connaissances et expériences pour ce faire. L'ETM personnel de l'enseignant est également observable dans la mise en œuvre quand, il utilise ses conceptions pour expliquer et guider les élèves pendant le cours.

Afin de comprendre, de manière globale, les trois types de l'ETM et leur interaction, nous présentons le schéma suivant, Fig. 2.3.

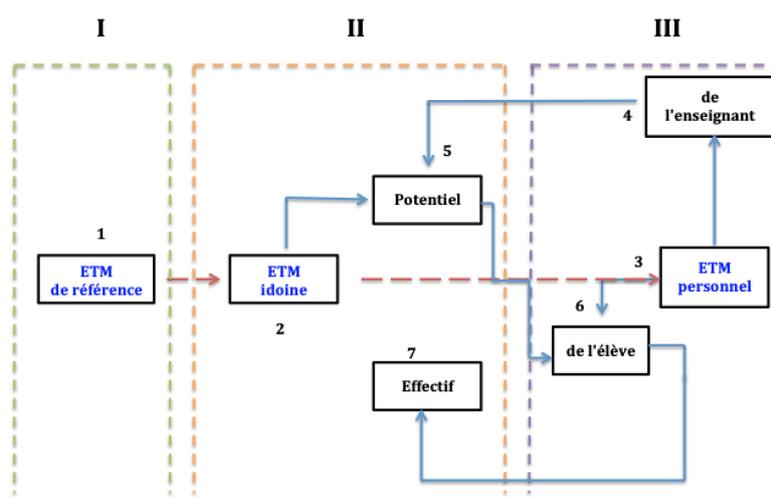


FIGURE 2.3 – Schéma des types de l'ETM

Dans la figure 2.3, il est possible d'observer les trois types de l'ETM : référence, idoine et personnel. Globalement, une connexion cohérente et efficace est cherchée entre l'ETM de référence (1) et le ETM personnel (3) via l'ETM idoine (2). Pour réaliser ce lien, il est nécessaire d'atteindre l'ETM idoine potentiel (5) qui n'est pas plus que la transposition didactique (Chevallard, 1980) du contenu trouvé dans l'ETM de référence (1) influencée par l'ETM personnel de l'enseignant (4). De cette façon, après avoir effectivement mis en œuvre l'ETM idoine potentiel (5) avec les étudiants, il sera en mesure de prendre le statut d'ETM idoine effectif (7). Il est important de noter que la mise en œuvre peut être envisagée en observant le travail individuel de l'élève (ETM personnel) ou l'interaction de plusieurs ETM personnels. Pour ce dernier cas, nous définissons une méthodologie que nous utilisons dans ce travail de recherche (chapitre 3).

2.1.3 Paradigme

Le concept de paradigme est utilisé dans différentes branches de la connaissance et il a acquis plusieurs sens selon le contexte dans lequel il est utilisé. La théorie des ETM ne fait pas l'exception, elle prend le concept et le transfère au domaine de la didactique des mathématiques. Pour comprendre le sens dans lequel il est utilisé dans cette théorie, nous expliquons d'abord, le concept de paradigme donné par Kuhn (1971) et ensuite comment il est pris dans l'ETM.

2.1.3.1 Au sens de Kuhn

La définition des paradigmes de Kuhn comprend divers éléments et réflexions complexes qui se produisent entre eux. Comme nous l'avons déjà dit, il ne s'agit pas ici d'analyser toute la philosophie de Kuhn sur les paradigmes, mais de prendre les éléments qui nous aideront à comprendre ce qu'est un paradigme et à clarifier le sens dans lequel la théorie des ETM utilise ce terme. De cette façon, nous commençons par donner les définitions de certaines de ces composantes, l'interaction qu'elles ont et, enfin, comment nous les contextualisons dans un milieu éducatif.

Dans son œuvre « la estructura de las revoluciones científicas » - une version en espagnole qui inclut la postdate écrite 7 ans après la publication du livre - Kuhn définit trois éléments qui sont importants pour nous : *communauté scientifique*, *paradigme* et *science normale* :

una comunidad científica consiste en quienes practican una especialidad científica. Hasta un grado no igualado en la mayoría de los otros ámbitos, han tenido una educación y una iniciación profesional similares. En el proceso, han absorbido la misma bibliografía técnica y sacado muchas lecciones idénticas de ella. (Kuhn, 1971, p.272)

Kuhn utilise le mot paradigme en deux sens :

Por una parte, significa toda la constelación de creencias, valores, técnicas, etc., que comparten los miembros de una comunidad dada. Por otra parte, denota una especie de elemento de tal constelación, las concretas soluciones de problemas que, empleadas como modelos o ejemplos, pueden remplazar reglas explícitas como base de la solución de los restantes problemas de la ciencia normal. (Kuhn, 1971, p.269)

Il mentionne également que la science normale fait référence au développement scientifique produit au sein du paradigme. C'est-à-dire qu'une communauté scientifique est à l'intérieur d'un paradigme puisqu'elle en assume les croyances, les valeurs, les techniques, etc. et les utilise pour formuler et résoudre des problèmes et des énigmes dans ce milieu.

hemos visto ya que una de las cosas que adquiere una comunidad científica con un paradigma, es un criterio para seleccionar problemas que, mientras se dé por sentado el paradigma, puede suponerse que tienen soluciones. Hasta un punto muy elevado, esos son los únicos problemas que la comunidad admitirá como científicos o que animará a sus miembros a tratar de resolver. (Kuhn, 1971, p.71)

Dans la période de la *science normale*, le développement de la science se produit cumulativement jusqu'à ce que ces croyances, valeurs, techniques, etc. (le paradigme) ne soient plus suffisantes pour répondre aux nouvelles énigmes. C'est-à-dire, que cette période de la *science normale* entre en « crise » conjointement avec le paradigme. Dans cette phase de « crise », de *nouvelles écoles* sont produites, qui, en général, sont formées par des communautés scientifiques qui sortent du paradigme « en crise » à la

recherche de réponses à travers des éléments et des processus qui ne sont pas bien définis, faisant ce que Kuhn appelle une « science extraordinaire ». Dans ce processus, certaines ou toutes les nouvelles écoles génèrent des croyances, des valeurs, des techniques, etc. différentes du paradigme en crise. De telle sorte qu'une transition vers un nouveau paradigme s'opère -ce processus s'appelle *la révolution scientifique* de Kuhn-. Le changement total de paradigme se produit lorsque de nouvelles croyances, valeurs, techniques, etc. sont institutionnalisées. Et le nouveau paradigme finit par remplacer l'ancien.

Después del período anterior al paradigma, la asimilación de todas las nuevas teorías y de casi todos los tipos nuevos de fenómenos ha exigido, en realidad, la destrucción de un paradigma anterior y un conflicto consiguiente entre escuelas competitivas de pensamiento científico. (Kuhn, 1971, p.155)

Il est important d'accorder une attention particulière à cette section, car c'est ici que se produit une des grandes différences entre la notion de paradigme de Kuhn et celle d'ETM, qui est expliquée dans la section suivante (2.1.1).

Ci-dessous se trouvent un schéma (Fig. 2.4) et un résumé du fonctionnement de ces éléments.

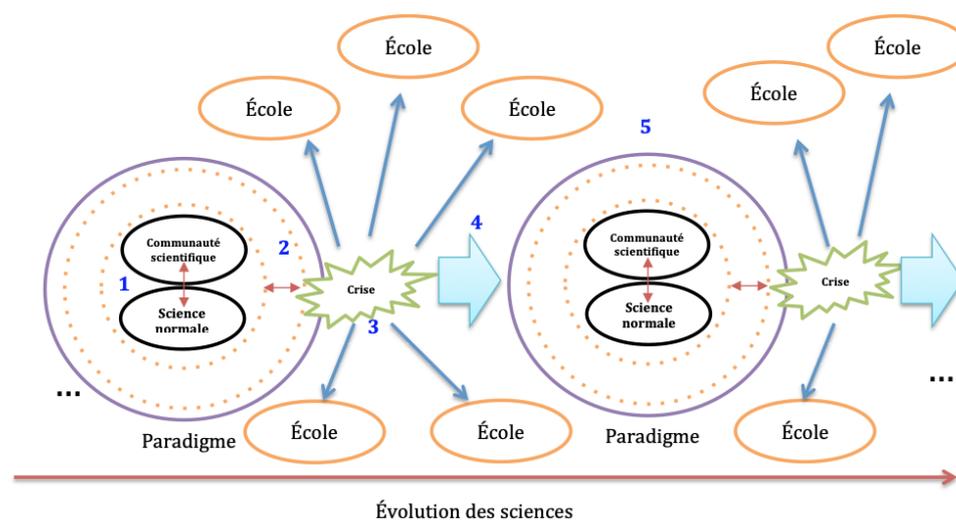


FIGURE 2.4 – Le paradigme de Kuhn

En résumé, La communauté scientifique et la science normale se situent dans un paradigme (1). L'interaction entre les deux produit un développement scientifique par accumulation de connaissances (2), jusqu'à ce que la croissance soit telle que le paradigme ne génère plus de connaissances et ne contribue plus à la solution de nouvelles énigmes. Cela génère une crise (3) qui permet à plusieurs écoles d'émerger avec de nouvelles idées, processus, techniques (révolution scientifique) et celles qui sont approuvées par la communauté scientifique vont générer le pas vers un nouveau paradigme (4) laissant le paradigme précédent inutilisable.

2.1.3.2 Au sens des ETM

Pour comprendre le rôle du paradigme dans l'ETM, il faut d'abord préciser que l'objectif du développement scientifique et éducatif n'est pas le même. En ce sens, le paradigme de Kuhn se concentre sur l'évolution de la science, comme nous l'avons expliqué ci-dessus et, de cette façon, le changement de paradigme provoque la désuétude du précédent. D'autre part, dans le contexte scolaire, nous observons l'évolution des connaissances pour l'enseignement. Dans ce contexte, il ne s'agit pas de faire de nouvelles découvertes scientifiques ou de révolutionner les croyances, les idées, les techniques... de la communauté scientifique, mais plutôt de travailler avec des connaissances déjà institutionnalisées au fil du temps, afin de pouvoir les enseigner. C'est pourquoi que les paradigmes de l'ETM proviennent d'une étude épistémologique de chacun des domaines (Géométrie, Analyse, Probabilité...) dans laquelle il est important de distinguer des étapes qui peuvent être liées à différents types de pensée, de croyance, idées, etc. pour faire émerger les paradigmes qui définissent, dans l'ETM, les types des validations, représentations et preuves attendus chez les élèves, afin de mieux caractériser et comprendre le travail mathématique. Dans l'ETM, les étudiants peuvent passer par tous les paradigmes sans aucune restriction et ceux-ci ne sont pas éliminés lorsqu'ils passent d'un paradigme à un autre.

Nous présentons une table qui facilite la compréhension du rôle du paradigme dans le cadre théorique et méthodologique ETM. L'intention n'est pas d'ajouter plus de termes à l'ETM mais de clarifier l'utilisation du paradigme dans ce cadre théorique, de telle sorte que lorsqu'on envisage une extension de l'ETM à d'autres domaines, les paradigmes peuvent être définis en considérant ces éléments. Dans notre cas, nous l'avons fait dans le domaine de la cinématique, pour cette raison, il est important pour nous de montrer cette table comparative [2.1](#).

TABLE 2.1 – Table comparatif des éléments du paradigme, Kuhn avec ETM

Kuhn	ETM
<p>Paradigme (Kuhn, 1971, 269). Por una parte, significa toda la constelación de creencias, valores, técnicas, etc., que comparten los miembros de una comunidad dada.</p> <p>Por otra parte, denota una especie de elemento de tal constelación, las concretas soluciones de problemas que, empleadas como modelos o ejemplos, pueden remplazar reglas explícitas como base de la solución de los restantes problemas de la ciencia normal¹</p>	<p>Le paradigme de l'ETM peut être vu comme suit :</p> <p><i>L'ensemble des idées, valeurs, types de pensée, techniques, etc., qui déterminent une certaine étape du domaine en question.</i></p> <p>Il est important de noter que toutes les connaissances impliquées dans les paradigmes ont été institutionnalisées par la communauté scientifique de la discipline et sont utilisées pour l'enseignement. En outre, l'ETM considère le second sens du paradigme donné par Kuhn et le fait de la même manière en prenant des solutions concrètes qui peuvent être utilisées comme modèles ou exemples et qui peuvent remplacer des règles explicites pour donner une solution aux problèmes qui peuvent survenir dans le paradigme.</p>
<p>Science normale. Il fait référence au développement scientifique produit dans le cadre du paradigme.</p> <p>C'est-à-dire qu'une communauté scientifique se situe à l'intérieur d'un paradigme puisqu'elle en assume les croyances, les valeurs, les techniques, etc. et les utilise pour formuler et résoudre des problèmes et des énigmes dans ce milieu.</p>	<p>Dans le cas de l'ETM, nous pouvons voir comment le développement des savoirs savants générés au sein du paradigme et qui peut être utilisé par les enseignants et les étudiants dans un contexte d'enseignement et d'apprentissage.</p>
<p>Communauté scientifique (Kuhn, 1971, p.272). Una comunidad científica consiste en quienes practican una especialidad científica. Hasta un grado no igualado en la mayoría de los otros ámbitos, han tenido una educación y una iniciación profesional similares. En el proceso, han absorbido la misma bibliografía técnica y sacado muchas lecciones idénticas de ella².</p>	<p>Il faut faire la distinction :</p> <ul style="list-style-type: none"> -D'une part, il y a la communauté scientifique à laquelle Kuhn fait référence et qui a été le générateur de connaissances (sur laquelle reposent les paradigmes de l'ETM). -D'autre part, nous avons la communauté d'étudiants et/ou d'enseignants qui, au sein de l'ETM, utilisent l'information contenue dans le paradigme à des fins éducatives (apprentissage, création de tâches,...).

2.1.4 Activation de l'ETM

Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.1.2 avec l'ETM, nous pouvons travailler avec le : ETM de référence, ETM idoine et ETM personnel (d'un sujet). De cette façon, l'analyse, par l'observation des circulations qui sont générées entre les composants et les plans, peut être effectuée à chacun de ces types de l'ETM. C'est-à-dire, lors de l'analyse de la conception ou de la résolution d'une tâche (effectuée par un élève ou un enseignant) et lors de l'étude d'un contenu ou d'un objet mathématique.

2.1.5 De la nécessité d'étendre un ETM

L'interaction des mathématiques avec d'autres disciplines se produit naturellement tout au long de l'évolution des autres domaines d'études. Cependant, dans le processus d'institutionnalisation, tant des mathématiques que des autres disciplines (dans notre cas la cinématique), l'interaction se limite, généralement, à l'utilisation des mathématiques comme artefact symbolique avec des objectifs de calcul, dans le cas de la cinématique, et à l'utilisation d'exemples de mouvements, totalement idéalisés, dans le cas de l'analyse, comme nous l'avons vu tout au long du chapitre 1. À partir de là, nous reconnaissons deux approches qui peuvent rendre l'apprentissage difficile : (i) enseigner les objets mathématique de manière sommaire, en mettant l'accent sur l'apprentissage technique et mécanique, ou (ii) les enseigner avec une approche très abstraite et formelle. En conséquence de ce qui précède, nous pensons que, les élèves ne trouvent pas, généralement, de sens au contenu mathématique. Pour cette raison, il y a eu un besoin de travailler avec d'autres disciplines, en favorisant des éléments importants des deux disciplines, pour améliorer la compréhension et la signification que les objets mathématiques traités peuvent avoir. De ce fait, il a fallu étendre l'ETM à des disciplines qui sont liées aux mathématiques mais qui ne peuvent pas être conçues comme propres à celles-ci. Par exemple, [Laval \(2018\)](#), dans sa thèse de doctorat, propose un ETA (Espace de Travail Algorithmique) qui interagit avec d'autres ETMs à la recherche de la caractérisation du travail qui implique des connaissances algorithmiques.

1. D'une part, il s'agit de l'ensemble des croyances, valeurs, techniques, etc. partagées par les membres d'une communauté donnée. D'autre part, il désigne une sorte d'élément d'une telle constellation, les solutions concrètes de problèmes qui, utilisées comme modèles ou exemples, peuvent remplacer les règles explicites comme base pour la solution des problèmes restants de la science normale.

2. Une communauté scientifique est constituée de ceux qui pratiquent une spécialité scientifique. À un degré inégalé dans la plupart des autres domaines, ils ont reçu une éducation et une initiation professionnelle similaires. Dans le processus, ils ont absorbé la même littérature technique et en ont tiré de nombreux enseignements identiques.

miques et mathématiques. Dans ce même sens, nous pensons que la cinématique est un domaine qui, en partageant un grand nombre d'objets avec les mathématiques, nous permet d'aborder la notion de la fonction par des activités de modélisation. Par conséquent, pour ce travail de recherche, il est nécessaire de proposer un Espace de Travail en Cinématique (ETC).

2.2 L'Espace de Travail en Cinématique (ETC)

La raison pour laquelle nous avons considéré un Espace de Travail en Cinématique (ETC) et non un Espace de Travail Mathématique en Cinématique (ETMc), c'est que, bien que dans le domaine de la cinématique nous trouvons de nombreux éléments qui appartiennent aux mathématiques (même en France, la cinématique était traitée dans les cours de mathématiques, (Lelong-Ferrand et Arnaudès, 1991)), il existe aussi des idées, concepts et processus cognitifs spécifiques à la physique (mouvement, temps, vitesse, accélération, force, processus cognitifs liés aux perceptions par différents sens, etc.) Pour cette raison nous proposons un Espace de Travail en Cinématique où tous ces éléments qui n'appartiennent pas aux mathématiques peuvent être visibles de sorte qu'ils complètent la signification de la fonction. Également, l'utilisation d'ETC n'exclut pas les objets et processus cognitifs spécifiques à chacune des disciplines (mathématiques et physiques).

2.2.1 Les plans d'ETC

Comme nous l'avons observé dans la section précédente, l'ETM est composé de deux plans horizontaux, le plan **épistémologique** (representamen, artefact et référentiel théorique) et le plan **cognitif** (visualisation, construction et preuve). L'ETC est également composé des deux plans horizontal, épistémologique et cognitif. Cependant, les éléments du plan cognitif varient en fonction des paradigmes (qui seront expliqués plus en détail dans la section 2.2.2) :

- Le plan **épistémologique** est composé des mêmes éléments que l'ETM dans les trois paradigmes : representamen, artefact et référentiel théorique.
- Le plan **cognitif** change par rapport à la ETM. Dans le paradigme CI, les processus cognitifs sont : la perception, la construction et la preuve. Dans CII, nous considérons une transition de la perception à la visualisation, la construction et la preuve et, dans CIII, la visualisation, la construction et la preuve.

Au sein de l'ETC, le modèle avec les éléments du plan épistémologique (*représentation, artefacts et référentiel théorique*) et les processus cognitifs associés (*perception->visualisation, construction et preuve*) sont donnés selon chaque paradigme. En d'autres termes, le paradigme définit quels types d'éléments, processus cognitifs, types de pensée, etc., sont impliqués. Dans la section 2.2.2, nous présentons la description des éléments qui composent le modèle ETC.

En ce qui concerne les plans verticaux, ils restent les mêmes que dans l'ETM : [Sem-Dis], [Sem-Ins] et [Ins-Dis]

2.2.2 Les paradigmes et les genèses d'ETC

Dans la conception des paradigmes, nous considérons une de l'expérimentation pilote (annexe C) que nous avons menée (Reyes-Avenidaño, 2018) et trois éléments :

1. La notion de paradigme, dans le contexte de l'ETM, que nous avons décrite dans la section 2.1.3.2.
2. La révision de l'évolution de la notion de fonction au fil du temps, section 1.1.1, en particulier les obstacles épistémologiques qui ont surgi autour du concept de fonction.
3. Et les types de pensées et de contextes impliqués dans le développement de la notion de fonction dans l'étude du mouvement des objets (cinématique) au fil du temps, section 1.1.2

Nous présentons ci-dessous les trois paradigmes de la cinématique (CI, CII et CIII) ainsi que les éléments qui sont considérés dans les plans épistémologique et cognitif.

2.2.3 Cinématique : Le paradigme du réel (CI)

Le paradigme CI s'inspire de la philosophie aristotélicienne (section 1.1.1), qui, entre autres choses, fait appel aux perceptions et au bon sens pour expliquer les phénomènes - quand nous parlons de bon sens, il est important de considérer que cela dépend des convictions, expériences, contextes et connaissances antérieures dont le sujet possède. Dans CI, nous pouvons commencer de deux façons : (i) par l'observation d'un phénomène du mouvement dans : la nature, des vidéos, des séquences des photos, etc. ou (ii) par l'expérimentation du mouvement. Le travail dans ce paradigme est directement lié aux connaissances, expériences, croyances, contextes et, surtout,

à la perception qui est générée pendant et après l'observation et/ou la réalisation du phénomène de mouvement.

Genèse sémiotique dans CI

Dans CI, la genèse sémiotique est prise dans un sens plus large que ce qui est, généralement, considéré en mathématiques. C'est-à-dire, en considérant que le premier paradigme est lié à des éléments qui appartiennent à la vie réelle, il manque, la plupart du temps, des symboles écrits. Cependant, il existe des ressources sémiotiques, telles que les gestes, les regards, le langage corporel, le mouvement lui-même, mentionnées par [Arzarello \(2006\)](#), qui n'appartiennent pas à un système mathématique sémiotique formel, tel que décrit [Duval \(2004\)](#), mais ils appartiennent à un système sémiotique généré dans un contexte d'enseignement et d'apprentissage – que nous considérons dans cette genèse – Ces systèmes sémiotiques, comme ceux définis en mathématiques, satisfont deux propriétés (i) ils peuvent être transformés en d'autres registres de représentation ([Duval, 2004](#)) et (ii) l'interprétation des signes peut être diverse dans un même registre ([Peirce, 1931](#)).

La genèse sémiotique dans CI est composée du *representamen*, dans le plan épistémologique et de la *perception*, dans le plan cognitif :

- a** Le *representamen* dans CI continue d'être au sens de [Peirce \(1931\)](#). C'est-à-dire, les élèves observent ou recréent des signes qui peuvent être liés à "quelque chose" (objets, idées, notions dans la physique) à travers des schémas, des icônes, des indices ou des symboles (section 1.1). De ce qui précède, le *representamen* dans CI se réfère à des signes tangibles de mouvement qui peuvent être perçus par les sens et qui sont liés aux caractéristiques de celui-ci. Quelques exemples sont donnés dans la représentation de : changement de position d'un objet en termes de trajectoire et de direction (haut, bas, un côté, en cercle, droite...); rythme du mouvement (rapide, lent); distance (proche, loin); etc. De même, des représentations peuvent être générées par des comparaisons (plus rapide, plus lent, moins lourd...). Aussi, dans CI, nous considérons l'information qualitative des représentations graphiques dans le sens que [Oresme \(1482\)](#) leur donne dans son oeuvre *Tractatus de configurationibus qualitatum* où il réfléchit sur les variations des magnitudes par la visualisation du graphique du mouvement, en privilégiant la partie qualitative (section 1.1.1).

b Le processus cognitif que nous associons au *representamen*, dans CI, est la *perception* (c'est une perception activée liée à tous les sens et pas seulement à la vision), Fig. 2.5. La raison du changement (de la visualisation par la perception) réside dans le besoin ou le désir d'expliquer un phénomène ou des phénomènes, au moyen de ce qui est perçu d'eux par les sens. En physique, en particulier en cinématique expérimentale, des éléments plus sensoriels sont régulièrement engagés - en physique, il existe des phénomènes qui ne sont pas perceptibles à la vue (la chaleur, le bruit, etc.) mais ils peuvent être détectés par les autres sens (toucher, ouïe, odeur) ou à l'aide d'instruments spécialisés. Par exemple, alors que la visualisation peut conduire à percevoir un mouvement d'une certaine manière, sa manipulation (travailler avec différents artefacts) peut conduire à différents processus cognitifs liés aux autres sens. L'ouïe peut être un indicateur de vitesses élevées, de pannes d'appareils expérimentaux, etc. D'un autre côté, bien que cela soit un peu moins courant, même l'odeur peut indiquer qu'un phénomène de mouvement est affecté par la friction (conversion d'une partie de l'énergie de l'objet en chaleur). C'est-à-dire qu'en physique, les sens sont étroitement liés à certaines variables et concepts avec lesquels il est nécessaire de travailler, surtout dans CI car c'est un paradigme immédiatement lié à la réalité.

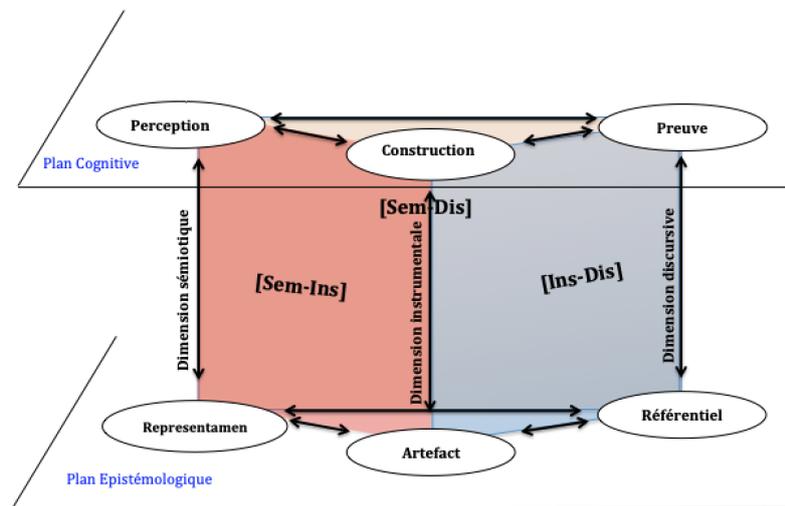


FIGURE 2.5 – Schéma d'ETC en CI

De la même manière que dans un ETM, la genèse sémiotique de l'ETC considère deux processus, le premier est le (i) *décodage et interprétation* des signes (du *representamen* à la *perception*) qui est généré quand nous souhaitons décrire et/ou interpréter

le signes par « la conscience » de ce qui est perçu. Par exemple, dans CI, il est possible de démarrer ce processus lors de l'assignation de caractéristiques aux signes qui émergent du mouvement. Le second processus (de la perception au representamen) est une sorte de (ii) *codification* ou « *instanciation* ». Ce processus commence dans l'esprit du sujet dans le but d'assigner un signe qui représente ce qui est perçu. Un exemple dans CI peut être quand à partir des caractéristiques perceptible du mouvement une représentation graphique qualitative peut être générée (dans le sens de [Oresme \(1482\)](#)).

Genèse instrumentale dans CI

Dans CI, la genèse instrumentale est composée de l'*artefact* dans le plan épistémologique et, du processus de *construction* dans le plan cognitif. Dans ce paradigme, la genèse instrumentale se distingue, principalement, par la manipulation d'artefacts et de constructions, tangibles, étroitement liés au phénomène physique.

- a** Les *artefacts* fréquemment utilisés dans ce paradigme sont des objets matériels qui prennent le statut d'instruments en recréant des mouvements ou des situations qui appartiennent à la cinématique. Il est également possible d'utiliser des artefacts technologiques (ordinateurs, logiciels, etc.) dans la mesure où leur utilisation conduit à une réflexion liée à une perception tangible du phénomène du mouvement. L'utilisation d'artefacts symboliques n'est pas courante dans CI, car il est nécessaire de faire une abstraction du phénomène qui n'est pas considéré dans ce paradigme.
- b** La *construction* est le processus cognitif immédiat lié à l'utilisation des artefacts. Dans CI, les constructions sont fondamentalement liées à l'utilisation d'artefacts concrets ou technologiques dans le but de recréer des phénomènes de mouvement, des graphiques, des représentations numériques, etc., mais toujours de manière qualitative, en mettant en évidence les aspects physiques et les caractéristiques du phénomène.

Le processus de (i) l'*instrumentation* (de l'artefact à la construction), dans CI, est directement lié au pragmatisme, c'est-à-dire à l'utilisation d'artefacts pour recréer le phénomène du mouvement ou une représentation de celui-ci en fonction de ses caractéristiques. D'autre part, (ii) l'*instrumentalisation* (de la construction à l'artefact) est générée lorsque le sujet a en tête le type de construction qu'il veut ou qu'il exige (type de mouvement, caractéristiques, représentation, etc.) et c'est à partir d'eux qu'il

choisit consciemment le type d'artefacts dont il a besoin pour arriver à la représentation ou à la recréation du mouvement désiré.

Genèse discursive dans CI

Des la genèses sémiotique et la genèses instrumentale de CI, nous attendons dans celle-ci un discours basé sur l'observation ou la recréation du phénomène physique. C'est-à-dire, ces discours sont donnés sous une structure cognitive qui n'a pas comme support une connaissance mathématique profonde de la situation ou qui en manque. En d'autres termes, le raisonnement repose sur des aspects essentiellement sensoriels : intuition, perception, manipulation, etc. qui découlent de l'expérimentation, de l'observation momentanée ou des expériences passées. Dans cette genèse, des descriptions, des explications et des inférences qualitatives basées sur l'empirisme et le pragmatisme, qui découlent de l'expérimentation et des bagages antérieurs, sont régulièrement faites.

- a** Le *référentiel théorique*, dans CI, est composé, principalement, de notions de base de concepts, caractéristiques et propriétés de mouvements bien définis en physique. Le référentiel théorique dans CI émerge généralement des connaissances institutionnelles antérieures des étudiants.
- b** La *preuve*, dans CI, est au sens de la preuve pragmatique de [Balacheff \(1987\)](#). Dans ce processus, une confrontation d'arguments et de raisonnements est déclenchée par l'observation et/ou l'expérimentation. La validation est liée à l'action et à l'expérience, contient une charge importante de connaissances pratiques et les justifications sont données à travers le matériel concret ou la représentation de l'objet d'étude. En ce sens, le discours attendu est le produit d'intuitions, d'expériences et de connaissances personnelles.

Dans cette genèse il y a aussi deux processus, (i) celui qui commence dans le référentiel théorique et va vers la preuve et, l'inverse (ii) qui émerge de la preuve et atteint le référentiel théorique. Le cas (i), dans le paradigme CI, peut être illustré lorsque les élèves utilisent leurs connaissances préalables en physique pour réaliser le phénomène du mouvement avec les caractéristiques appropriées (vers la genèse instrumentale) ou pour justifier ou valider des représentations ou des caractéristiques qui surviennent de l'expérience elle-même (genèse sémiotique). Le cas (ii) est plus compliqué à générer dans CI, car il s'agirait d'un processus dans lequel, à partir de la preuve (soit issue de la genèse instrumentale ou sémiotique) soit possible d'incorporer une

nouvelle connaissance dans le référentiel théorique (en générant de nouveaux savoirs scientifiques). Ce dernier processus peut être très compliqué en raison de la nature du paradigme et du contexte éducatif, dans lequel l'objectif principal n'est pas de concevoir des progrès scientifiques. Cependant, il est possible de distinguer cet aspect lorsque, sur la base des expérimentations et des preuves pragmatiques (issus de la genèse instrumentale ou sémiotique), les étudiants peuvent acquérir de nouvelles connaissances (savoir qui est déjà institutionnalisés).

Le passage de CI à CII émerge lorsqu'il est nécessaire de mesurer ce qui est observé. A ce point, les aspects sensoriels, qui guident la recréation de la situation, ne sont plus suffisants. L'aspect qualitatif cède la place, non seulement à la quantification des variables, mais aussi à l'interprétation de l'ensemble numérique que cette quantification donne.

2.2.4 Cinématique : Le paradigme de la mesure et de la quantification (CII)

Le deuxième paradigme est inspiré du type de pensée du Moyen Âge en Europe et des études de Galileo dans le domaine de la cinématique (sections 1.1.1 et 1.1.2).

Contrairement au premier paradigme, dans CII, il n'y a pas seulement observation et manipulation du mouvement, il faut quantifier ce qui est perçu. C'est possible à cette fin de : (i) fournir des données sur le phénomène observé; (ii) utiliser des logiciels spécialisés dans l'analyse de : vidéo, séquence de photos, animations, etc. ou (iii) recommencer l'expérimentation afin d'inclure des mesures. L'un ou l'autre de ces processus doit être effectué afin d'obtenir les données nécessaires pour quantifier le mouvement. En CII, nous voulons exprimer le phénomène du mouvement en termes d'éléments, de variables, de concepts, de propriétés, de lois, etc. qui appartiennent au domaine de la physique et des mathématiques, afin d'obtenir des données quantitatives sur le mouvement, telles que : vitesse, accélération, trajectoire, etc. Par conséquent, dans CII, l'utilisation d'objets mathématiques est inévitable; cependant, leur utilisation ne se fait pas dans un sens formel, axiomatique-déductif, mais dans le but de quantifier le phénomène. Dans ce paradigme, la genèse est définie comme suit.

Genèse sémiotique dans CII

La genèse sémiotique de CII, contrairement à CI, n'est plus totalement centrée sur les perceptions. Dans CII, un processus d'abstraction du phénomène physique commence, c'est-à-dire que la sémiotique passe d'être le mouvement lui-même et ses caractéristiques à des représentations symboliques de celui-ci (ces représentations continuent à avoir une forte influence du phénomène réel).

- a** Dans CII, le *representamen* prend le statut d'objet conceptuel, au sens de Bunge (1976), c'est-à-dire que ces objets existent dans certains contextes. Tandis que dans CI nous parlons des caractéristiques du mouvement des objets matériels en fonction de la perception que nous en avons. Dans CII il y a un changement de signes qui cessent d'être liés aux sens (directement liés à la manipulation) et sont transformés en variables représentées symboliquement. Ce processus fait place à une intériorisation des objets conceptuels afin de les utiliser pour quantifier les variables associées au mouvement, sans nécessairement réfléchir sur la nature des de ces objets. Dans CII, nous travaillons généralement avec des représentations numériques, graphiques et fonctionnelles (formules de mouvement) liées à la mesure et à la quantification du mouvement.
- b** *Perception->Visualisation*, Fig. 2.6 le processus de perception en CII tend vers la visualisation (comme dans un ETM). Cependant, dans le deuxième paradigme, la visualisation est encore très proche du phénomène réel et des perceptions de CI.

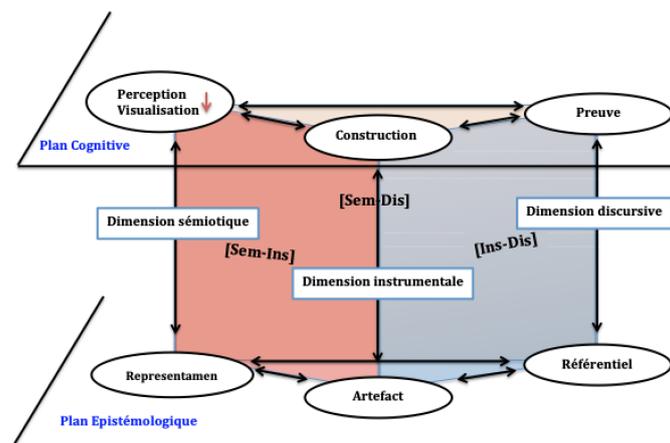


FIGURE 2.6 – Schéma d'ETC en CII

(i) Le *décodage* et l'*interprétation* dans CII sont liés aux représentations symboliques, numériques et graphiques, qui ont émergé des signes du mouvement dans CI et qui, par la visualisation, principalement, de ces nouvelles représentations, conduisent à des interprétations qui peuvent être le produit de l'expérimentation dans CI ou des connaissances antérieures. ii) Le *codage* ou *instanciation* peut se produire, par exemple, lorsque des graphiques quantitatifs des mouvements sont produits. C'est-à-dire lorsque les perceptions (sous forme de variables) conduisent à un changement de registre de représentation (graphique ou fonctionnel) qui favorise ou conduit à la mesure ou à la quantification du mouvement.

Genèse instrumentale dans CII

Cette genèse, dans CII, a une charge significative du phénomène réel mais aussi du phénomène dans sa représentation abstraite initiale. C'est-à-dire que le paradigme de mesure et de quantification est un paradigme qui se situe entre le phénomène physique (positions des objets, formules de mouvement, variables physiques, etc.), dans le monde réel, et une sorte d'abstraction initiale, avec des éléments mathématiques (tableaux numériques, graphiques, fonctions). Par conséquent, la genèse instrumentale implique des artefacts qui visent à conduire à un processus cognitif de construction d'éléments étroitement liés à l'apprentissage des concepts.

a Les *artefacts*, dans ce paradigme, peuvent être matériels, symboliques ou technologiques. C'est-à-dire des artefacts pour l'expérimentation, des instruments de mesure, des schémas, des formules, des graphiques, etc. Il est important de mentionner que le simple fait de travailler avec des artefacts ne produit pas automatiquement la transition entre les paradigmes. C'est le travail et l'intentionnalité avec lesquels les éléments de l'ETC sont utilisés (artefacts, référentiels théoriques, représentamen, preuves, etc.) qui déterminent le changement. Dans ce cas, l'intentionnalité doit être axée sur la mesure, la quantification du mouvement et la signification.

b Le type de *constructions* attendues dans CII fait référence aux processus cognitifs liés à l'obtention de données, dans n'importe quel registre de représentation, qui permettent de comprendre le mouvement en des termes quantifiables.

(i) L'*instrumentation*, dans CII, est générée par l'utilisation de tout type d'artefacts dans le but d'obtenir des données quantitatives du mouvement qui conduisent à une connaissance de celui-ci. (ii) L'*instrumentalisation*, dans ce paradigme, fait référence

au choix conscient de tout type d'instrument qui mènent à la mesure et/ou à la quantification du phénomène.

Genèse discursive dans CII

La *genèse discursive*, dans le second paradigme, est basée sur les données numériques du phénomène qui émergent de la mesure et de la quantification. C'est-à-dire que les discours et les justifications doivent être soutenus dans les valeurs numériques, l'utilisation de formules, de graphiques avec des données quantitatives et la congruence qu'ils ont avec le phénomène du mouvement.

- a** Dans le *référentiel théorique*, le type de savoirs qui est nécessaire exige le développement de compétences algébriques et arithmétiques dans l'utilisation des équations de mouvement; l'interprétation des graphiques de manière quantitative; les changements dans les registres de représentation, etc.
- b** Le type de preuve attendu dans CII est basé sur les mesures, les calculs effectués et sur la congruence qu'ils ont avec le phénomène de mouvement. La preuve peut provenir de la genèse instrumentale lorsque le support des affirmations émerge des artefacts utilisés (matériels, symboliques ou technologiques) ou de la genèse sémiotique lorsque l'utilisation des processus sémiotiques est privilégiée.

(i) Le processus qui va du référentiel théorique à la preuve est celui qui émerge des connaissances formelles, soit des artefacts, soit de l'utilisation de représentations appartenant au domaine de la physique ou des mathématiques qui conduit à des preuves visant à valider les résultats liés à la mesure et à la quantification du phénomène. (ii) Le processus inverse, de la preuve au référentiel théorique, de la même manière que dans CI, dans CII n'est pas non plus très habituel quand il s'agit de créer de nouvelles connaissances scientifiques, en raison de la nature du paradigme et contexte. Cependant, ce processus, dans le contexte de la formation de nouvelles connaissances pour les étudiants, peut être observé lorsque la circulation dans l'ETC conduit à l'apprentissage d'éléments théoriques bien définis dans les savoirs savants, que dans ce paradigme sont liés à l'arithmétique, l'utilisation correcte des équations du mouvement, la compréhension des concepts physiques, etc.

Le passage à CIII se produit lorsqu'il est nécessaire de raisonner sur la nature des objets conceptuels et que le travail mathématique formel devient fondamental.

2.2.5 Cinématique : Le paradigme de la formalisation et de l'idéalisation (CIII)

Le troisième paradigme est inspiré par le type de pensée de : Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Leibniz (1646-1716), Johann Bernoulli (1667-1748), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), en termes de fonction, mais surtout de Newton (1642-1727), qui concentre son travail sur l'étude du mouvement à partir de l'abstraction et de l'idéalisation, et de Einstein (1879-1955) avec sa façon de penser (sections 1.1.1 et 1.1.2).

Le savoir savant dirige CIII, dans le troisième paradigme le mouvement n'est plus considéré comme un cas particulier, comme c'est le fait dans les deux premiers paradigmes. Dans CIII, il est voulu, à travers d'une pensée abstraite, arriver à l'idéalisation et à la généralisation de celle-ci. En d'autres termes, un formalisme mathématique de la situation est recherché en termes d'objets mathématiques qui représentent des concepts et des situations physiques, mais sans que le mouvement perceptible soit directement lié. Dans ce paradigme, la relation entre la connaissance mathématique formelle et les lois et concepts physiques impliqués est évidente. Par exemple : dans la déduction des équations du mouvement; dans l'utilisation d'objets tels que la dérivé d'une fonction R dans R^2 ou R^3 , qui est interprétée comme une vitesse (ou vecteur vitesse); intégrales, etc.

Genèse sémiotique dans CIII

Dans le paradigme de la formalisation et de l'idéalisation, la *genèse sémiotique* est considérée dans un sens axiomatique, c'est-à-dire que les représentations symboliques sont dirigées par des connaissances solides en mathématiques et en physique.

- a** Le *representamen*, en CIII, n'est pas directement liée à la récréation ou à l'observation du mouvement, mais plutôt à son idéalisation. L'idéalisation peut se faire de deux façons (i) après avoir passé par les paradigmes CI et CII, le mouvement n'est plus proche de sa version physique, mais plutôt de représentations symboliques et idéalisées, qui ne décrivent pas seulement le mouvement particulier qui a été fait dans CI ou mesuré dans CII. C'est-à-dire que le mouvement est en termes de variables et concepts généraux qui décrivent le phénomène lui-même. (ii) Ou l'idéalisation peut aussi être réalisée par ce qu'Einstein

appelle « Gedankenexperimente » (expérimentation de la pensée), Dans lequel Einstein imaginait le phénomène et il faisait des développements théoriques formelle, mathématique et physique, pour décrire le comportement. Ainsi, les travaux sur les registres de représentation dans CIII et les changements entre eux contiennent une charge importante de représentations symboliques et de procédures axiomatiques-déductives.

- b** Dans CIII, la *visualisation* (Fig. 2.7) est le processus cognitif lié à la *représentation*. Dans ce paradigme, les perceptions sensorielles du mouvement ne sont plus impliquées, mais plutôt des représentations symboliques et idéalisées du mouvement qui, par des processus de visualisation, cèdent la place au développement et à l'interprétation des systèmes sémiotiques générés.

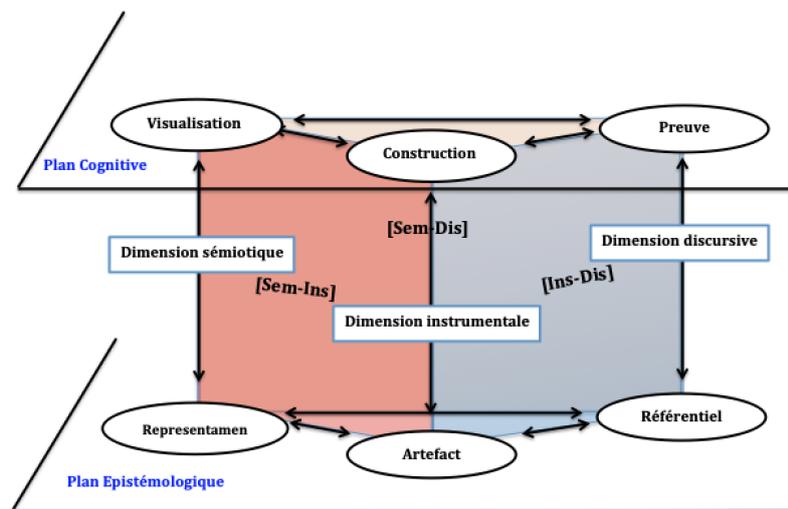


FIGURE 2.7 – Schéma d'ETC en CIII

(i) Le *décodage* et l'*interprétation*, dans CIII, consistent à contextualiser et/ou à donner du sens à des représentations qui, généralement, sont des représentations fonctionnelles ou géométriques où des connaissances mathématiques et physiques sont mises en jeu, par exemple : au Calcul, avec des développements fonctionnels loin de l'expérimentation mais proches de l'idéalisation du mouvement; géométrie et trigonométrie, avec la représentation abstraite du mouvement sans finalité qualitative ou quantitative mais plutôt de la théorisation du mouvement; les lois de Newton dans leur représentation axiomatique avec un but prédictif; etc. (ii) La *codification* ou

l'*instanciation*, en CIII, est générée lorsqu'on veut changer le registre de représentation. Pour ce processus, il est nécessaire de faire une sorte de *codification* du registre avec lequel on travaille à un autre, en utilisant ses règles et sémiotiques. Nous savons que nous sommes en CIII puisque le travail effectué est généré dans des entités théoriques et idéalisées du phénomène. En d'autres termes, il n'y a pas de but descriptif en termes de perceptions, ni un besoin de quantifier le mouvement, mais plutôt de généraliser le phénomène en utilisant des connaissances profondes et bien établies en mathématiques et en physique.

Genèse instrumentale dans CIII

Dans le paradigme CIII, la genèse instrumentale tourne généralement autour d'artefacts et de constructions symboliques fondés sur des processus théoriques bien définis.

- a** Les *artefacts* dans CIII sont des artefacts symboliques et technologiques qui encouragent et dirigent les processus axiomatiques-déductifs. Dans ce paradigme, les objets matériels et l'expérimentation physique sont supprimés; dans tous les cas, l'expérimentation mentale est utilisée. Quelques exemples sont l'utilisation de logiciels spécialisés tels que GeoGebra, Wolfram Alpha, Matlab, etc. en tant que leur utilisation conduit à une pensée abstraite et bien définie basée sur des éléments théoriques mathématiques et physiques.
- b** La *construction*, dans le paradigme CIII, est basée sur des éléments mathématiques et physiques théoriques qui émergent, généralement, des artefacts symboliques mentionnés ci-dessus et qui sont fortement liés au mouvement idéalisé par des constructions mathématiques théoriques bien développées .

(i) L'*instrumentation*, est donnée à l'aide d'artefacts symboliques ou technologiques dans le but de réaliser des constructions et des développements qui contiennent une quantité significative de connaissances mathématiques et physiques autour du mouvement dans sa représentation idéalisée. (ii) L'*instrumentalisation* se produit lorsque le sujet est conscient des artefacts symboliques ou technologiques dont il a besoin pour progresser dans l'étude du mouvement idéalisé qu'il étudie.

Genèse discursive dans CIII

Dans CIII, le discours est fondé sur des principes, des lois, des théorèmes, etc. de la physique et des mathématiques. Un élément fondamental du discours dans ce paradigme est le raisonnement hypothétique déductif, dont le but est de diriger une démonstration formelle de ce qui est dit.

- a Le *référentiel théorique* de CIII est le savoir savant des deux domaines (physique et mathématiques).
- b Dans CIII, des *preuves* intellectuels sont formulés (Balacheff, 1987) caractérisés par un raisonnement qui inclut des chaînes d'arguments en langage symbolique dans le but de produire plus de connaissances scientifiques.

(i) Le processus qui émerge du référentiel théorique vers la preuve est fréquent dans CIII puisque l'une des caractéristiques de ce paradigme est de réaliser un travail abstrait et bien justifié en utilisant le référentiel théorique (savoir savant) dans le but de réaliser des preuve intellectuelles. (ii) Le processus inverse dans ce paradigme (création de nouvelles connaissances scientifiques), contrairement à CI et CII, est beaucoup plus susceptible de se produire à un niveau d'enseignement supérieur ou dans la recherche. Cependant, le processus est encore très compliquée ou impossible à voire au niveau de l'enseignement de base, intermédiaire et même supérieur. C'est pourquoi le travail attendu dans ce processus, dans un contexte éducatif, a une charge importante de connaissances approfondies en mathématiques et en physique, ce qui conduit à la découverte, par les élèves, d'éléments situés dans le référentiel théorique qui les amènent à un apprentissage dans le cadre de démonstrations formelles et d'u travail hypothétique-déductif.

2.3 Modélisation au sein de la recherche en didactique des mathématiques

La modélisation mathématique au sein de la didactique des mathématiques s'est renforcée ces dernières années. De nombreux chercheurs comme : Pollak (1969, 1979), Blum et Niss (1991), Blum (1993), Blum et Leiss (2005), Blum et al. (2007), Blum et Leiss (2007), Borromeo-Ferri (2004, 2003, 2006), Lesh et Doerr (2003), Kaiser (2005, 2006), Kaiser et Sriraman (2006), Kaiser et al. (2011) ont orienté leurs travaux dans ce domaine en partant de l'hypothèse que la modélisation dans des contextes éducatifs conduit, d'une part, à des processus cognitifs intéressants à étudier et, d'autre part à des types de pensées non mécaniques qui peuvent générer un apprentissage significatif. Dans cette section, nous analysons certains types de cycles de modélisation mathématique qui ont émergé au fil du temps et son fonctionnement. Nous expliquons également l'utilisation du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007) et pourquoi nous avons travaillé avec lui dans ce travail de recherche.

2.3.1 Quelques perspectives de la modélisation mathématique

Depuis plus de 40 ans, l'idée de présenter les mathématiques contextualisées dans la vie réelle est présente dans le domaine de la didactique. Cependant, des difficultés sont apparues en raison des différents sens pris par la définition des « applications of mathematics ». Par exemple, Pollak (1969) présente une discussion et une caractérisation des types de problèmes présentés comme applications des mathématiques dans un contexte éducatif. Ce travail nous a permis, non seulement de catégoriser nos activités de modélisation mathématique, mais aussi d'observer le point de départ des différents cycles de modélisation, puisque le travail de Pollak est l'un des premiers. Les catégories considérées par Pollak sont les suivantes :

- (i) *l'utilisation immédiate des mathématiques dans la vie quotidienne* (immediate use of mathematics in everyday life), est liée à l'utilisation des mathématiques apprises, principalement, dans l'enseignement de base (arithmétique, algèbre, géométrie, probabilité et statistiques) pour résoudre des problèmes communs de calcul : taxes sur les achats effectués, peinture nécessaire pour peindre la pièce, ingrédients pour une recette, etc.
- (ii) *Des problèmes qui utilisent des mots de la vie quotidienne et font semblant, à des degrés divers, d'être des applications* (problems that use words from everyday life and pretend, in varying degrees to be applications) sont les problèmes qui se retrouvent généralement dans les manuels scolaires, ceux qui utilisent des mots qui sont utilisés dans la vie quotidienne pour les rendre plus attrayants, mais qui, de fait, remettent rarement en question leur congruence avec la réalité du phénomène.
- (iii) *Les problèmes qui utilisent des mots d'autres disciplines* (problems that use words from other disciplines), cette catégorie est très semblable à la précédente, mais au lieu d'utiliser des mots du quotidien, sont utilisés des mots et des contextes qui appartiennent à d'autres disciplines (scientifiques, des ingénieries, etc). C'est-à-dire que les problèmes posés sont considérés comme des traductions superficielles des autres domaines où la réalité des applications est négligée.
- (iv) *Problèmes imaginaires* (problems of whimsy) sont des problèmes qui utilisent des mots du quotidien, mais il est évident qu'en réalité, ils ne sont pas considérés comme des applications réelles. Ces problèmes cherchent à amuser ou à rendre

plus agréables les leçons de mathématique (en général d'algèbre simple) plutôt que de montrer une véritable application.

- (v) *De véritables applications dans la vie réelle* (Genuine applications in real life) Ces types de problèmes sont ceux qui appartiennent vraiment à la vie réelle et qui ont de nombreuses variables dont il faut tenir compte. Il s'agit de situations du quotidien et non d'une simple traduction afin de contextualiser un problème. Par exemple, lorsque nous nous demandons quel est le meilleur itinéraire pour nous rendre à un certain lieu, il est nécessaire de nous poser beaucoup d'autres questions qui affectent la réponse finale (circulation, rues fermées, manifestations possibles, distances, etc). Pour résoudre ces problèmes, il faut connaître non seulement les mathématiques, mais aussi d'autres disciplines et des éléments de la vie réelle.
- (vi) *De véritables applications à d'autres disciplines* (Genuine applications to other disciplines) sont des problèmes qui appartiennent vraiment à d'autres disciplines. Par exemple, les problèmes qui sont résolus en physique, biologie, économie, etc. et qui font appel aux connaissances mathématiques.

Dix ans plus tard, [Pollak \(1979\)](#) compare quatre définitions de « mathématiques applicatives » dans le but de les organiser et de les rendre fonctionnelles et présenter l'un des premiers modèles de modélisation mathématique :

- (i) Pour Pollak, les « mathématiques appliquées » dans un sens classique se présentent dans l'utilisation de branches classiques de l'analyse; le calcul différentiel et intégral, les équations différentielles, la théorie des fonctions, la trigonométrie et certains aspects de la géométrie. Pollak explique que ces branches des mathématiques peuvent être considérées dans les mathématiques appliquées en raison de leur utilisation dans le domaine de la physique, néanmoins, cela n'implique pas nécessairement de relation tangible avec les problèmes de physique.
- (ii) Puis, Pollak mentionne la deuxième définition « Les mathématiques appliquées englobent toutes les mathématiques ayant une application pratique significative » ([Pollak, 1979](#), p.245). Il mentionne que cette définition n'est pas aussi rigide que la précédente et inclut toutes les branches des mathématiques qui sont en dehors de la première. Par exemple, les ensembles, la logique, les inégalités, la probabilité, les statistiques, etc. et le terme « application » n'est pas donné seulement parce qu'ils sont utilisés en physique, mais aussi dans des autres domaines.

Cependant, également que en la définition (i) seules les mathématiques sont prises en considération.

(iii) La troisième définition est :

Les mathématiques appliquées reviennent à élaborer, à partir d'une situation appartenant à un domaine non mathématique, ou tirée de la vie réelle, une interprétation ou un modèle mathématique; à effectuer un travail mathématique sur ce modèle et à en appliquer les résultats à la situation initiale. (Pollak, 1979, p.245)

Pollak mentionne également que le domaine de départ n'est pas seulement la physique, mais aussi la biologie, les sciences sociales, gestion, etc.

(iv) La quatrième définition qu'évoque Pollak est « Les mathématiques appliquées sont celles que les gens utilisent effectivement dans leur travail. » (Pollak, 1979, p.245) Il mentionne que cette définition est similaire à la troisième (iii) et qu'elle admet des allées et retours fréquents entre les mathématiques et le monde réel.

Afin de comprendre l'évolution de ces 4 définitions, Pollak présente un schéma dans lequel il les organise, Fig. 2.8. Le modèle se compose de deux ensembles principaux, l'un, où les mathématiques sont contenues et l'autre, qui représente le reste du monde.

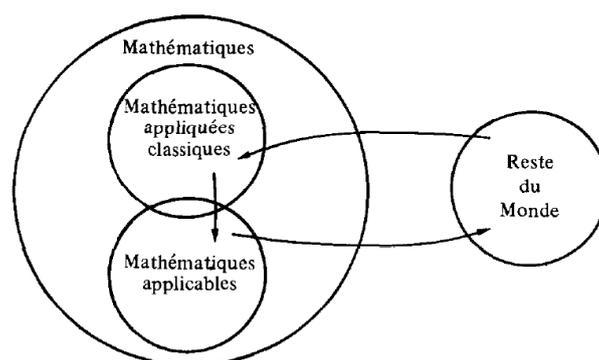


FIGURE 2.8 – Diagramme présenté par Pollak pour visualiser les 4 définitions (Pollak, 1979, p.245)

Pour nous, cette vision de Pollak est importante car nous pouvons observer l'un des premiers schémas de modélisation mathématique. Pollak montre deux ensembles

principaux, l'un contenant la définition des mathématiques appliquées classique (i) et celle des mathématiques appliquées (ii). Pollak explique que dans la définition (i) se trouve les mathématiques, cependant, pas tous ses éléments ont des applications et pour cette raison représente la définition (ii) comme un sous-ensemble. Pollak justifie ces deux sous-ensembles, situés dans l'ensemble principal (mathématiques), en disant qu'il existe des branches des mathématiques qui ne sont pas applicables et il illustre avec la théorie des équations différentielles, dont il mentionne n'a aucune application visible jusqu'à ce moment (ce qui a maintenant changé puisque les équations différentielles sont largement utilisées dans les modèles dynamiques des phénomènes qui surviennent dans la vie réelle). Plus tard, Pollak mentionne que les définitions (iii) et (iv) sont liées à l'aller et retour d'ensemble reste du monde (« Le reste du monde comprend toutes les autres disciplines de la recherche humaine, ainsi que la vie quotidienne »(Pollak, 1979, p.246)), et l'ensemble des mathématiques.

Du travail de Pollak, il devient évident comment la nécessité d'utiliser les mathématiques, dans des contextes scientifiques et éducatifs, a généré ce type de discussions encourageant la création d'autres cycles de modélisation. D'autres modèles qui ont émergé sont les suivants.

Celui de Galbraith et al. (2003) qui voient le processus de modélisation dans un contexte d'apprentissage. Dans le modèle qu'ils proposent, Fig. 2.9, il est possible d'observer un ensemble qui contient le cycle de modélisation et les processus et routines mathématiques qui ont été accumulés par les élèves tout au long de leur vie scolaire. En dehors de cet ensemble, les auteurs situent la technologie et mentionnent que pendant le processus de modélisation, des outils technologiques sont utilisés pour améliorer les solutions. Les flèches qui relient ces éléments indiquent que l'utilisation de la technologie peut générer l'apprentissage de nouveaux processus et routines mathématiques qui contribueront à la solution de nouveaux problèmes de modélisation.

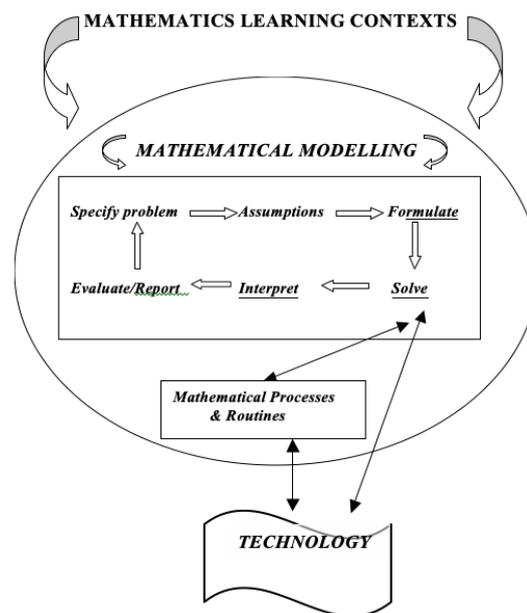


FIGURE 2.9 – Diagramme du cycle de modélisation (Galbraith et al. 2003, p.4)

Le cycle suivant est celui de [Geiger \(2011\)](#) qui apporte une modification à celui de [Galbraith et al. \(2003\)](#) en incluant l'utilisation de la technologie non seulement dans la phase de solution mais dans les différentes phases du processus de modélisation, [Fig. 2.10](#) .

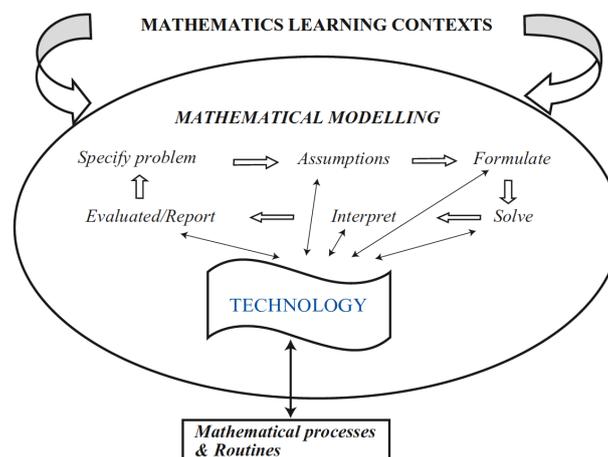


FIGURE 2.10 – Diagramme du cycle de modélisation (Geiger, 2011, p.313)

L'un des plus utilisés à ce jour, ou qui sont apparentés à celui-ci, et celui que nous utilisons dans ce travail de recherche, est le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#) qui est expliqué dans la section suivante.

2.3.2 Le cycle de modélisation de Blum et Leiss

Le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#) est ce que nous considérons approprié pour ce travail de recherche, parce qu'il s'agit d'une approche cognitive de la modélisation pour l'enseignement et il est possible d'observer, clairement, chacune des phases et le passage de l'ensemble « reste du monde » (dans lequel toutes les autres disciplines et situations réelles sont contenues) à l'ensemble mathématique. Comme nous l'avons observé dans les autres modèles et dans celui-ci, leur comportement est cyclique. C'est-à-dire que, le passage par chacune des phases produit différents types de pensées qui peuvent être génératrices de nouveaux apprentissages, de cette façon, chaque cycle réalisé porte un ensemble d'apprentissages observables dans l'amélioration du modèle recherché. Pour notre travail de recherche, nous avons ajouté quelques changements dans les dynamiques qui peuvent se produire entre les phases du modèle de [Blum et Leiss \(2007\)](#). Cependant, nous allons d'abord expliquer le fonctionnement et la signification des phases du modèle original.

Le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#), Fig. 2.11, est composé de 7 phases qui relient le « reste du monde » avec les mathématiques, les phases sont :

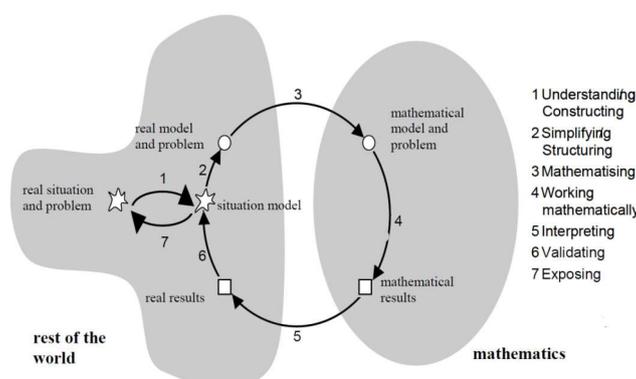


FIGURE 2.11 – Diagramme du cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007, p.225)

Phase 1 : Comprendre/Construire

Le problème doit être compris par la personne qui va le résoudre. C'est-à-dire que, le sujet doit être clair qu'il doit construire une situation modèle du problème posé et penser à une expérimentation, simulation, représentation, etc. Cela l'aide à prendre conscience des facteurs impliqués, des restrictions possibles, entre autres, de sorte que, éventuellement, le sujet peut proposer un modèle mathématique de la situation.

Phase 2 : simplifier/structurer

Dans cette phase, l'organisation de l'information, des dessins, de l'expérimentation, de la simulation, des données, etc. est effectuée. L'objectif est de simplifier le problème de telle sorte qu'un modèle réel de la situation puisse être structuré. Ce modèle réel pourrait être utilisé dans la phase suivante pour proposer un modèle mathématique.

Phase 3 : Mathématiser

La troisième phase se situe entre le reste du monde et les mathématiques, par conséquent, le travail qui est généré a des éléments de la situation réelle et des éléments mathématiques. C'est-à-dire, dans cette phase, l'objectif est de commencer la mathématisation de la situation qui appartient au monde réel.

Phase 4 : Traitement mathématique

Dans cette phase est considéré tout le travail qui est généré à partir du modèle mathématique, ce qui comprend : calculs, solutions, équations, etc.

Phase 5 : Interprétation

Dans la phase 5, le travail se fait avec les résultats mathématiques obtenus dans la phase précédente et le but est de leur donner une interprétation par rapport au problème réel.

Phase 6 : Validation

La validation du modèle mathématique est donnée après l'interprétation des données, puisque c'est à ce moment qu'il est possible de dire la pertinence des résultats qui ont été obtenus. Dans cette phase, il est possible de prendre la décision de revenir pour effectuer le cycle une deuxième fois, en fonction de la congruence des résultats obtenus (en considérant plus, ou moins, de facteurs, en accordant plus d'attention à certaines phases, en changeant le modèle réel, etc.)

Phase 7 : Exposition

La dernière phase concerne la communication de tout le processus de modélisation qui a été suivi et la présentation des résultats obtenus ainsi que des observations, conclusions, etc.

La majorité des cycles de modélisation existants donnent l'impression que le passage entre phases est « linéaire ». C'est-à-dire, qu'après la première phase, il y a ensuite la deuxième phase, puis la troisième phase et ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils soient tous transités et que le cycle soit terminé. En général, cela est visible parce que la direction des flèches qui relient les phases, la plupart du temps, vont dans un sens. Dans

nos travaux de recherche, comme d'autres recherches (Haines et Crouch, 2010, Doerr, 2007, Borromeo-Ferri, 2007), nous pensons qu'il est difficile que le processus de modélisation se déroule de cette manière et que, bien que le mouvement « linéaire » soit souvent considéré comme « optimal », d'autres dynamiques à l'intérieur du modèle peuvent déclencher des processus intéressants. C'est pourquoi, dans cette thèse, nous considérons que le mouvement entre les phases peut se produire de 3 façons :

- De façon linéaire et complète, cela signifie que toutes les phases du modèle sont transitées de façon ordonnée.
- De manière complète mais désordonnée, toutes les phases du modèle sont abordées mais de manière non linéaire. C'est-à-dire que pendant le processus de modélisation, les dynamiques suivantes peuvent se produire entre les phases : (i) régressions (ii) omissions temporelles (iii) petits cycles entre elles (allers-retours), mais toujours en passant à travers toutes les phases, Fig. 2.12

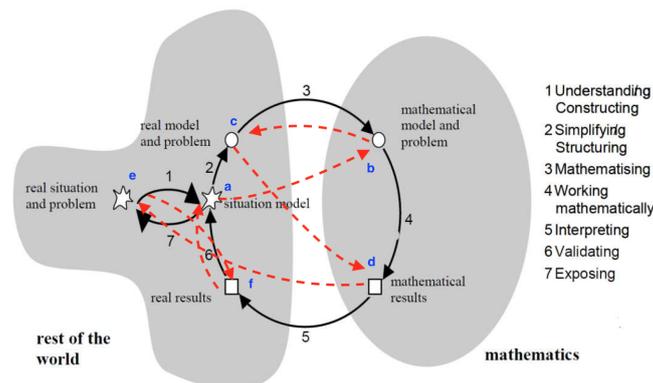


FIGURE 2.12 – Dynamique complète et désordonnée dans le cycle de modélisation

- Partiellement, mais en réalisant l'objectif de valider le modèle (réel ou mathématique) d'une situation. En d'autres termes, il est possible d'arriver à un modèle mathématique et de le valider sans nécessairement passer par chacune des phases. Le passage des phases peut être ordonné ou il peut y avoir des retours ou des sauts entre elles.

Les dynamiques présentées ci-dessus peuvent commencer à n'importe quel processus. C'est-à-dire qu'une tâche de modélisation peut commencer par : l'observation d'une situation ou d'un phénomène, des données numériques, le modèle mathématique, etc. Par exemple, si le départ est par le modèle d'un phénomène, sous la forme d'une fonction, il est possible de prouver expérimentalement sa validité en passant

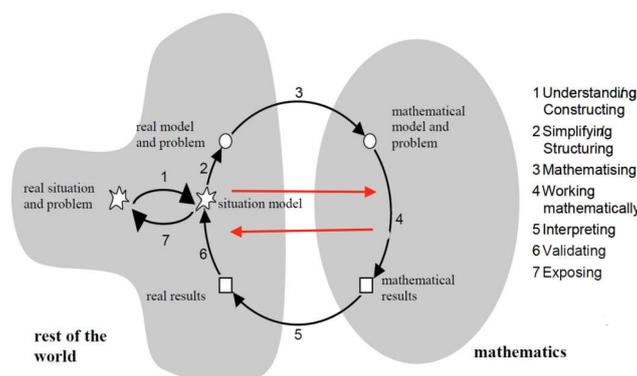


FIGURE 2.13 – Condition pour considérer une tâche comme une tâche de modélisation

par les phases du cycle de modélisation. Par cela nous entendons que la modélisation peut être polyvalente. Cependant, pour la considérer comme un travail de modélisation (soit pour arriver à un modèle mathématique à partir d'un phénomène du monde réel, soit à partir d'un modèle mathématique pour arriver à un modèle ou phénomène du monde réel) il doit, nécessairement, y avoir une transition du « reste du monde » au mathématique ou vice versa (en passant par toutes ou quelques phases du cycle de modélisation). Autrement, si le travail est développé que dans l'ensemble du « reste du monde » il est possible de parler d'un modèle réel mais pas mathématique et si le travail est effectué uniquement dans l'ensemble des mathématiques il est considéré comme un travail mathématique, Fig. 2.13.

2.4 ETC et modélisation mathématique

Dans cette section, nous expliquons comment l'utilisation de l'ETC et le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#) se complètent pour la création et l'analyse des activités de modélisation (analyse à priori et analyses à posteriori).

Premièrement, le cycle de modélisation, comme nous l'avons vu dans la section précédente, nous permet de passer plus facilement, à travers les phases, d'un phénomène ou d'une situation, qui appartient au monde réel, au mathématicien, ou vice versa. De cette façon, une première proposition d'activité de modélisation peut être faite en tenant compte des phases du cycle décrit ci-dessus. Par exemple, l'une des activités de modélisation que nous avons menées dans ce travail de recherche était celle d'un Mouvement Circulaire Uniforme (MCU), qui est un problème d'application réelle en physique, plus spécifiquement en cinématique (point « vi » de la classification

de Pollak 2.3.1). Bien que, comme nous l'avons déjà mentionné, les problèmes de cinématique puissent être importés dans les mathématiques, mais avec cette approche de nombreux éléments qui appartiennent à la physique sont perdus, et qui placerait ce travail dans une autre classification de Pollak, par exemple le « i ». Comme dans notre cas, nous voulons préserver et mettre en valeur les aspects de ces deux disciplines, car nous pensons qu'ils nous conduiront à des approches différentes (des mathématiques classiques) de la notion de fonction, la nécessité de proposer le ETC se fait pressante, ce qui, avec le cycle de modélisation, nous donnera la base théorique pour traiter ce type de situation. C'est-à-dire, bien qu'à partir du cycle de modélisation de Blum et Leiss nous puissions proposer et analyser l'activité selon les phases, nous avons moins de contrôle sur les artefacts (matériels ou symboliques) qui peuvent être utilisés, le type de constructions que nous voulons atteindre, le contenu curriculaire, les processus cognitifs que nous voulons provoquer, etc. Fig. 2.14

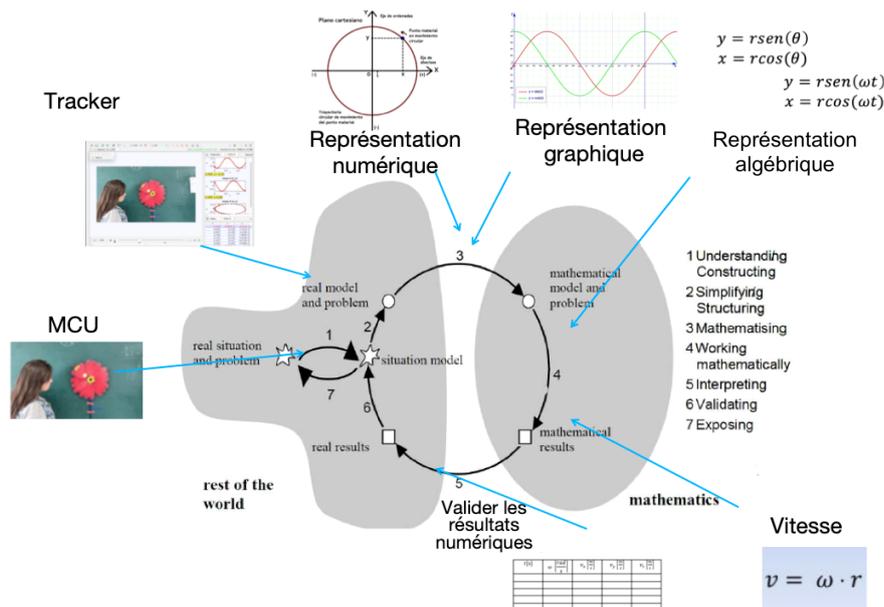


FIGURE 2.14 – MCU divisé en phases du cycle de modélisation (Blum et Leiss (2007))

D'autre part, si nous utilisons l'ETC au même temps que le cycle de modélisation. C'est-à-dire, réaliser dans chaque phase une analyse des circulations attendues (ou qui ont été déclenchées) dans une activité de modélisation, Fig. 2.15. Il est possible de contrôler les activités, sans omettre les objets des disciplines avec lesquelles nous travaillons et les processus cognitifs (dans le processus de création des activités de modélisation ou dans l'analyse des données).

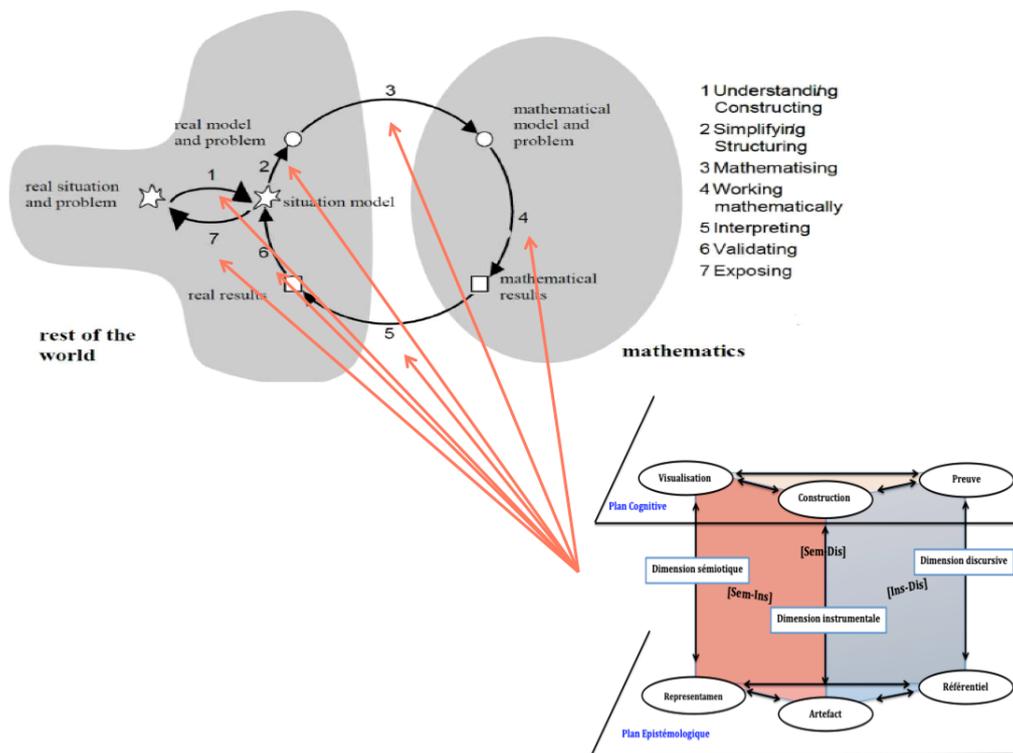


FIGURE 2.15 – ETC dans le cycle de modélisation (Blum et Leiss (2007))

Il n'est même pas nécessaire d'ajouter d'autres éléments au cycle de modélisation dans le cas du travail avec la technologie, car les artefacts matériels, symboliques ou technologiques sont considérés dans les différents ETM et dans l'ETC. Ainsi, en utilisant ces deux entités théoriques, il est possible, d'une part, de créer de véritables activités de modélisation et, d'autre part, de gérer avec plus de précision les éléments du plan épistémologique (sections 2.1 et 2.2) et les processus cognitifs associés en observant l'activation des genèses et, des plans de l'ETM ou de l'ETC, ainsi qu'en caractérisant le travail au moyen des paradigmes (section 2.2.2). La Fig. 2.16 montre, de manière globale, comment ces deux théories se complètent.

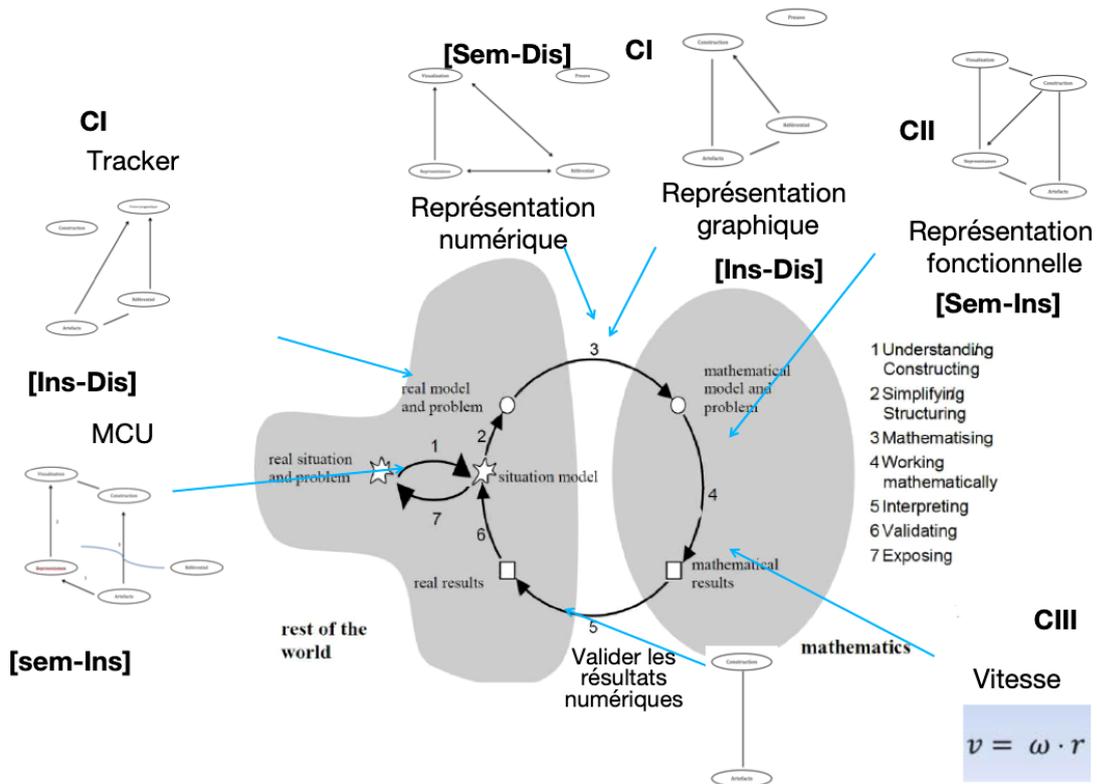


FIGURE 2.16 – Analyse globale avec le cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007)+ ETC et paradigmes

En résumé, ce que nous voulons obtenir avec l'utilisation de l'ETC et du cycle de modélisation est une méthodologie pour (i) le développement d'activités de modélisation mathématique, où il est possible d'avoir un meilleur contrôle des éléments qui appartiennent au plan épistémologique (représentations, artefacts, référence théorique) dans le but d'avoir une meilleure gestion des processus cognitifs que nous voulons privilégier, comme nous pouvons le voir dans les figures (2.15 et 2.16). (ii) et de disposer d'éléments théoriques qui nous aident à analyser les processus cognitifs, et leur nature, des sujets lorsqu'ils sont confrontés à des activités de modélisation mathématique dans le domaine de la cinématique.

2.5 Retour sur les questions de recherches

Après le développement du cadre théorique, nous revenons sur les sous-questions de recherche qui seront les bases de la méthodologie (voir chapitre 3). En ce sens, nos questions de recherche, en utilisant nos éléments théoriques, nous les reformulons comme suit :

QR Dans quelle mesure le travail sur les phénomènes de mouvement, à travers les processus de modélisation, permet-il de développer la notion de fonction ?

QRa Quel jeu entre les registres de représentation des fonctions est mis en place dans le processus de modélisation que nous avons développé ?

QRb Quel est l'effet du jeu entre registres sur le travail personnel des étudiants autour de la fonction ?

QRc Quel est l'ETC mis en place à l'issue de ces différentes expérimentation ?

Dans la question de recherche QR (qui reste la même que celle présentée dans la section 1.3.3), nous observons que l'élément principal est la fonction. Cependant, notre but est de savoir si le fait de travailler sur les phénomènes de mouvement peut aider à le comprendre. Dans ce sens, et conscients que les phénomènes de mouvement appartiennent au monde réel, nous avons décidé d'utiliser le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#). Ce cycle, a priori, nous aide à passer du phénomène physique aux modèles mathématiques qui le représentent (dont certains sont, dans notre cas, des fonctions). Cependant, le simple fait d'utiliser le cycle de modélisation ne suffit pas pour répondre à notre question principale. C'est pourquoi nous avons ajouté l'utilisation des registres de représentation de [Duvall \(1999\)](#), afin de pouvoir observer à partir d'eux les différentes représentations de la fonction qui peuvent être données dans le processus de modélisation (QRa et QRb). Il est pertinent de dire que parce que nous travaillons dans le domaine de la cinématique où ils interagissent des représentations qui appartiennent à la physique et aux mathématiques, le besoin de bien définir ces représentations a surgi (section 3.4.1). D'une part, avec la **QRa**, nous sommes intéressés de voir quel est le jeu entre les registres de représentation de la fonction qui émerge dans le processus de modélisation développé et qui relève des mathématiques et de la physique. D'autre part, avec la **QRb**, nous voulons observer l'effet du jeu entre registres de représentation sur le travail personnel des étudiants autour de la fonction. Cependant, pour répondre la QRb, il ne suffit pas de connaître les registres de représentation

privilegiés dans les phases du cycle de modélisation, il faut aussi observer les processus cognitifs et la nature du travail (paradigmes CI, CII et CIII) mathématique effectué dans les phases du cycle et dans les enregistrements de représentation. C'est pourquoi nous posons la question **QRc** impliquant des ETC, qui nous aidera à observer l'évolution de l'objet mathématique, fonction, à travers les : registres de représentation ; artefacts symboliques, matériels et technologiques ; référentiel théorique et processus cognitifs qui sont déclenchés au cours de la modélisation mathématique.

Chapitre 3

Méthodologie

Sommaire

3.1	Introduction	146
3.2	L'ingénierie didactique	146
3.2.1	Description des phases	147
3.3	Analyse préliminaire de la recherche	148
3.4	Méthodologie d'analyse des données	149
3.4.1	Les registres de représentation utilisés dans le cadre de la recherche	151
3.4.2	Rôle des artefacts technologiques dans les activités	154
3.4.3	Éléments épistémologiques et cognitifs	156
3.4.4	Les activités de modélisation	160

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons (i) la méthodologie que nous avons suivie tout au long de cette recherche et (ii) la méthodologie d'analyse des données. Tout d'abord, nous décrivons l'ingénierie didactique proposée par [Artigue \(2002a\)](#), avec les étapes que nous avons envisagées. De même, nous expliquons comment nous avons développé les phases de l'ingénierie didactique dans nos recherches. Ensuite, nous présentons la méthodologie d'analyse des données de la mise en œuvre. Nous considérons que cette section est très importante car notre expérimentation a produit une grande quantité de données que nous avons essayé d'analyser de manière à ce que l'analyse puisse nous conduire aux réponses de nos questions de recherche.

3.2 L'ingénierie didactique

Dans le monde académique, la recherche en didactique des mathématiques a gagné en importance au cours des trois dernières décennies. Actuellement, son statut scientifique a conduit à la création de différentes méthodologies de recherche. L'une de ces méthodologies est l'ingénierie didactique apparue au début des années 80 en France. [Artigue \(2002a\)](#) mentionne que le terme « ingénierie didactique » apparaît en didactique pour répondre à deux questions fondamentales que se pose [Chevallard \(1982\)](#) : « comment prendre en compte la complexité de la classe dans les méthodologies de recherche? » et « comment penser les relations entre recherche et action sur le système d'enseignement? » ([Artigue, 2002a](#), p.60).

[Artigue \(2002a\)](#) assure que l'ingénierie didactique est une bonne méthode pour établir le contraste entre les postures théoriques et ce qui se passe réellement dans les classes. Une différence fondamentale entre cette méthodologie et les processus expérimentaux habituels est **le mode de validation, qui repose sur la comparaison entre l'analyse a priori**, dans laquelle les hypothèses sont présentes, **et l'analyse a posteriori**, basée sur les données obtenues dans la situation réelle. Comme tout processus évolutif, à ce jour, l'ingénierie didactique permet non seulement la comparaison mentionnée ci-dessus, mais maintenant, dans un environnement d'utilisation de la technologie en classe où elle peut être employée comme une ingénierie dont le but fondamental est l'exploration et le diagnostic ([Artigue, 2002a](#)).

3.2.1 Description des phases

Dans le cas de notre recherche, nous avons utilisé l'ingénierie didactique (Artigue, 2002a) non seulement comme méthode de contraste entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori, mais aussi pour établir la séquence des étapes du développement de la recherche. Pour cette raison, nous avons fait une brève description des quatre phases définies dans la méthodologie.

Phase I, les analyses préalables

L'analyse préalable sert de base à la conception de l'ingénierie didactique. elle comprend généralement quatre composantes fondamentales : la *composante épistémologique* qui justifie le contenu mathématique à enseigner, ainsi que son fonctionnement ; la *composante didactique* qui a trait à la situation de l'enseignement habituel et à ses effets ; la *composante cognitive* qui est liée à la conception des élèves, leurs difficultés et les obstacles présents dans leur évolution ; et le *champ des restrictions* dans lequel une réalisation didactique efficace sera placée.

Phase II, la conception et l'analyse a priori des situations d'enseignement

Cette phase vise à identifier les variables macro et micro didactiques liées à l'étude et le type d'activité que les élèves vont développer. **Les variables macrodidactiques ou globales se réfèrent à la conception technique. Par exemple, le traitement du contenu mathématique, les stratégies, l'utilisation de la technologie, etc. Les variables microdidactiques sont liées à l'organisation locale. Par exemple, l'analyse des activités ou des tâches d'une session donnée.** L'analyse a priori comprend une partie descriptive et une partie prédictive : les sélections au niveau local sont décrites, en les reliant, si nécessaire, aux sélections globales ; ce que l'élève pourrait mettre en jeu dans cette situation est analysé, en fonction des moyens d'action, décision et validation disponibles dans le cadre de la réalisation de l'expérience. Dans la partie prédictive nous prévoyons les champs possibles de comportement, de telle manière que les façons possibles de réagir soient le résultat de la mise en pratique de la connaissance envisagée pour l'apprentissage (Artigue et al., 1995b).

Phase III, l'expérimentation

Cette phase concerne la mise en œuvre de la conception de l'ingénierie didactique. Les activités proposées y sont développées et les données qui permettront d'effectuer l'analyse a posteriori y sont recueillies.

Phase IV, l'analyse a posteriori et validation

L'analyse a posteriori prend en compte l'ensemble des données et observations obtenues dans l'expérimentation et permet la comparaison avec l'analyse a priori, qui est à la base de la validation des hypothèses formulées dans la recherche.

3.3 Analyse préliminaire de la recherche

La disposition des chapitres et des sections de cette thèse est cohérent avec celui de l'ingénierie didactique [Artigue \(2002a\)](#). C'est la raison pour laquelle l'essentiel de l'analyse préliminaire a été réalisé dans le chapitre 1 de ce travail. Dans ce qui suit, nous expliquons plus en détail chacune des composantes de l'analyse préalable de la recherche.

— La composante épistémologique

La composante épistémologique de la recherche se trouve dans la première partie de la section 1.1. Nous faisons un court parcours historique-épistémologique, dans le domaine des mathématiques (section 1.1.1) et dans celui de la cinématique (section 1.1.2), de la notion de fonction. Cette analyse avait pour but, d'une part, de justifier l'enseignement de la notion fonction dans les deux domaines traités dans ce travail et, d'autre part, d'identifier des obstacles épistémologiques et des réussites qui se sont produites tout au long de l'histoire dans l'évolution de la notion de fonction.

— La composante didactique

La composante didactique se trouve dans la deuxième partie de la section 1.1 et dans la section 1.2. Nous avons analysé 8 livres, 4 livres d'analyse sur le thème de la fonction et 4 livres de physique générale sur les thèmes : MRU, MRUA et MCU. L'objectif de cette étude était d'observer comment la notion de fonction était traitée (types de registres de représentation utilisés, notations, définitions, etc.) dans les livres recommandés dans la bibliographie des programmes de la classe PTS¹ et des premiers semestres de la licence de mathématiques pures et de physique. Nous avons ainsi analysé, les programmes d'études de l'ENP (mathématiques et physique) pour observer comment la fonction était enseignée et le rôle de la modélisation dans ces deux domaines.

1. Classe préparatoire terminale scientifique.

— **La composante cognitive**

La composante cognitive a émergé naturellement des deux sections précédentes et se situe dans la section 1.3. Nous montrons les difficultés d'enseignement et d'apprentissage de la notion de fonction à partir du petit parcours historico-épistémologique et de l'analyse des programmes d'études.

Ces trois composantes nous ont conduits, d'une part, vers la problématique et, d'autre part, ont renforcé les activités de modélisation que nous avons conçues dans cette recherche.

— **Le champ de contraintes**

Le champ de contraintes est présenté dans le chapitre consacré à l'expérimentation (chapitre 4) où nous nous y présentons les éléments directement liés à la mise en œuvre : les caractéristiques des élèves, les restrictions et les libertés de l'institution scolaire, le lieu physique et les ressources matérielles et technologiques utilisées par les élèves et par l'enseignant.

3.4 Méthodologie d'analyse des données

Pour comprendre la méthodologie que nous suivons dans l'analyse des données, nous allons, d'abord, rappeler les questions de recherche et leur raison d'être dans le présent travail. La question principale de cette thèse est de savoir si le fait de travailler avec des phénomènes de mouvement, à travers des processus de modélisation mathématique, aide à comprendre la notion de fonction. Répondre à cette question n'est pas facile et, probablement, ne peut pas être fait directement. Pour cette raison, nous posons 3 questions supplémentaires afin d'y répondre avec plus de précision. Nous présentons, ci-dessous, la question de recherche ainsi que les sous-questions qui nous ont aidés à y répondre :

QR Dans quelle mesure le travail sur les phénomènes de mouvement, à travers les processus de modélisation, permet-il de développer la notion de fonction ?

QRa Quel jeu entre les registres de représentation des fonctions est mis en place dans les processus de modélisation que nous avons développé ?

QRb Quel est l'effet du jeu entre registres sur le travail personnel des étudiants autour de la fonction ?

QRc Quel est l'ETC mis en place à l'issue de ces différentes expérimentation ?

Afin de comprendre les questions et comment nous y avons répondu, une explication est fournie ci-dessous. Dans la question principale, nous observons que l'élément principal, dans ce travail de recherche, est la notion de fonction. Cependant, notre but est de savoir si le fait de travailler avec des phénomènes de mouvement peut aider à développer et la comprendre (QR).

En ce sens, dans notre travail de recherche, il est nécessaire de considérer 3 éléments fondamentaux qui correspondent à chacune des sous-questions de recherche :

- i **Le cycle de modélisation** (Blum et Leiss, 2007) qui nous aide à passer par : les phénomènes physiques, les modèles expérimentaux et les modèles mathématiques (beaucoup de ces modèles mathématiques sont des fonctions)
- ii **Les registres de représentation** (Duval, 1996) , qui permettent d'observer les différentes représentations de la fonction et, à partir de celles-ci, d'observer l'évolution et les propriétés qui sont mises en jeu autour de la notion de fonction. Il est important de mentionner que bien que les registres de représentation fassent partie de l'ETC, dans ce travail de recherche, en raison de la quantité de données dont nous disposons, nous avons fait une analyse en nous concentrant sur les changements des registres de représentation de la fonction afin de ne pas perdre le développement et les transformations qu'elle suit tout au long des activités.
- iii **L'ETC**, qui nous aide en tant que chercheurs à avoir une idée des processus cognitifs qui sont générés chez les élèves lorsqu'ils utilisent des représentations, des artefacts (symboliques ou matériels) et des connaissances. Ces processus nous donnent des indices sur le sens que les élèves donnent à la notion de fonction et à ses propriétés.

Comme nous l'avons constaté, nous disposons d'un grand nombre d'éléments théoriques, à la fois de didactique et des disciplines considérées, qui interagissent les uns avec les autres. C'est pourquoi il est important de préciser, le plus clairement possible, la manière dont nous procédons à l'analyse des données. Cette section est composée de 4 parties élémentaires (i) **les registres de représentation** que nous utilisons pour observer la connaissance et le processus d'apprentissage de la notion fonction, (ii) **le rôle des objets technologiques**, (iii) **les éléments épistémologiques et cognitifs** pris en compte et comment ils sont utilisés pour justifier les décisions et les développements des activités et, (iv) **les objectifs et la raison d'être de chaque activité de modélisation**.

3.4.1 Les registres de représentation utilisés dans le cadre de la recherche

Duval (2004) mentionne qu'il n'est pas possible de réaliser des études de phénomènes liés au savoir sans recourir à la notion de représentation. C'est pourquoi, dans cette recherche, nous considérons les registres de représentation comme des éléments théoriques qui sont importants. D'une part, parce que nous nous intéressons aux phénomènes liés à la connaissance de l'objet mathématique fonction et, d'autre part, parce que nous travaillons avec cet objet vu de deux domaines différents, la cinématique et les mathématiques, qui ont leurs propres systèmes sémiotiques de représentation. Dans ce sens, dans cette recherche, nous partons de deux prémisses :

- (i) La compréhension n'émergeant chez les sujets qu'avec la coordination d'au moins deux registres de représentation, celle-ci devient un enjeu essentiel pour l'apprentissage des mathématiques. (Duval, 2002, p.83).
- (ii) La spécificité des représentations sémiotiques consiste dans ce qu'elles sont relatives à un système particulier de signes... et qu'elles peuvent être converties en des représentations "équivalentes" dans un autre système sémiotique, mais pouvant prendre des significations différentes pour le sujet qui les utilise. La notion de représentation sémiotique présuppose donc la prise en compte de systèmes sémiotiques différents et celle d'une opération cognitive de conversion des représentations d'un système sémiotique à l'autre (Duval, 1995, p.17)

C'est-à-dire, la connaissance et l'apprentissage de la notion de fonction chez les élèves, nous l'avons observée à partir de la mobilité qui a été générée entre les registres de représentation que nous présentons et expliquons plus loin, dans cette section. Pour avoir une idée claire de la production des registres de représentation sémiotique, avant de les présenter, il est nécessaire de mentionner que trois aspects fondamentaux doivent être considérés (Duval, 1996, p.356) :

- **L'aspect structurel** qui concerne, d'une part, la nature des signes, les multiples possibilités de représentation qu'ils offrent et la détermination de leur signification et, d'autre part, le type d'opération, c'est-à-dire, les règles de formation qui

permettent les combinaisons entre signes pour générer des unités de représentation (Benveniste, 1974, pp.51-52) et le nombre de dimensions (1 ou 2) auxquelles les signes peuvent être associés (Bresson, 1987, pp.943-944).

- **L'aspect phénoménologique** qui a trait aux limites psychologiques de la production ou de l'appréhension des signes. D'une part, le mode de production qui peut être externe ou interne (physique ou mental) (Vygotsky, 1962) et, d'autre part, le mode sensoriel demandé pour l'appréhension (vue, audition...).
- **L'aspect fonctionnel** est lié au type d'activités cognitives que les signes permettent d'accomplir (Duval, 1993, pp. 41-42) :

- 1 La **formation** d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné.
- 2 Le **traitement** d'une représentation, est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre.
- 3 La **conversion** d'une représentation, est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation.

Tous les systèmes sémiotiques qui permettent l'accomplissement de ces 3 activités cognitives forment des registres de représentation sémiotique.

Dans ce travail de recherche, nous allons considérer 5 registres de représentation (1 que nous allons définir et 4 qui sont bien connus en mathématiques) :

- **Mouvement physique (MP)** : système sémiotique, généralement, utilisé dans le domaine de la physique et non en mathématiques. Ce système sémiotique peut être considéré comme un registre de représentation puisqu'il répond aux trois activités cognitives fondamentales.

1. La **formation** est donnée puisque nous pouvons avoir une représentation identifiable. Par exemple, dans notre cas, la reconstitution d'un MRU à l'aide d'artefacts matériels.
2. Le **traitement**, dans le cas du MRU, la transformation interne du même registre nous pouvons l'envisager comme (i) la reconstitution de ce mouvement de différentes manières, par exemple, en représentant le MRU avec :

une balle roulant sur une surface, la marche d'une personne, le mouvement d'une voiture, le vol d'un avion, etc. Tous ces mouvements représentent un MRU et se situent dans le même registre, cependant, chacun d'entre eux a des éléments qui le caractérisent et, dans un contexte physique peut être traité différemment en raison des variables qui interagissent en eux. (ii) Nous pouvons aussi agir sur les représentations en provoquant, par exemple, des mouvements plus ou moins rapides ou (iii) en comparant deux mouvements.

3. La **conversion** est donnée parce que la représentation d'un MP, par exemple, d'un MRU peut être convertie en différents registres : en registre graphique, tableau de valeurs, algébrique, etc.

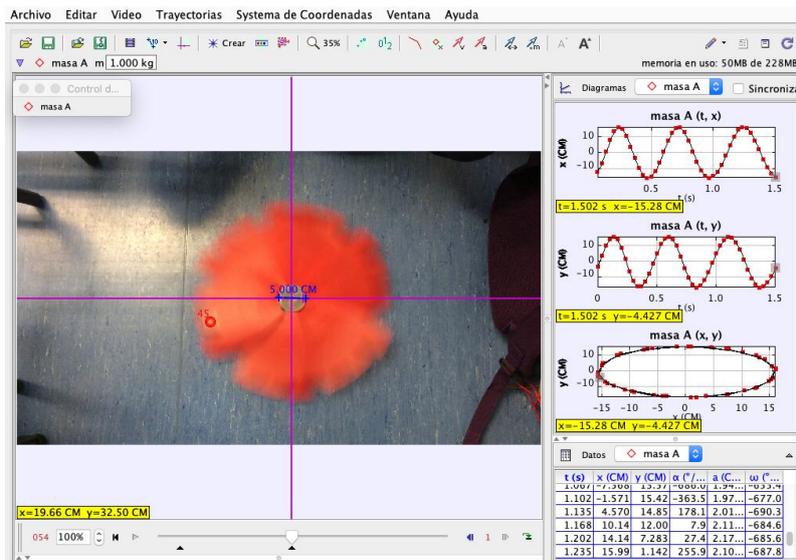
Dans ce travail de recherche, ce registre de représentation est fondamental puisqu'à partir de là, nous amenons les élèves à une série de processus avec l'objet mathématique fonction qui, généralement, ne sont pas réalisés dans le domaine des mathématiques.

- **Langage naturel (LN)** : ce registre de représentation est connu et utilisé dans le domaine des mathématiques. Dans notre recherche, il peut être présent à l'oral (LNo) dans les vidéos qui ont été enregistrées pendant l'expérimentation, ou à l'écrit (LNe) dans les guides de travail.
- **Tableau des valeurs (TV)** : c'est aussi un registre classique et, fréquemment, utilisé en mathématiques. Ce registre est généré par l'utilisation du logiciel Tracker qui, d'après l'analyse de l'enregistrement du mouvement, fait un changement du registre de représentation MP vers TV.
- **Graphique** : dans cette recherche, la représentation graphique provient de deux environnements. (i) de Tracker (**Graphique Tracker, GT**) qui est un logiciel plus proche de la physique et qui, par conséquent, utilise la notation de ce domaine et la contextualise au mouvement effectué; et (ii) de GeoGebra (**Graphique GeoGebra, GG**) qui est un logiciel plus proche des mathématiques, lequel génère des graphiques avec notation mathématique (y sur l'axe vertical et x sur l'axe horizontal). Dans la section 3.4.2, nous expliquons plus en détail la nature de chacune des représentations à partir des caractéristiques des artefacts technologiques.

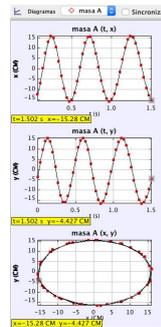
- **Algèbre** : dans ce registre, nous distinguons également deux variantes, (i) **l'algébrique spécifique (AS)** qui est obtenue à partir de l'ajustement de données expérimentales (au moyen de GeoGebra) et correspond à la représentation fonctionnelle du mouvement spécifique effectué, et (ii) **l'algébrique général (AG)** qui correspond à la représentation fonctionnelle générale avec les paramètres du mouvement (les équations du mouvement).

3.4.2 Rôle des artefacts technologiques dans les activités

Pour comprendre l'analyse des données, il est important de parler du rôle des artefacts technologiques, Tracker et GeoGebra. Bien que cette recherche ne porte pas sur les artefacts technologiques, l'utilisation de ces logiciels est importante car ils permettent la transition vers différents types de notation et registres de représentation. D'une part, Tracker est un logiciel qui, dans ce travail, pouvait induire un processus d'*instrumentation*, en particulier dans CI-CII, en établissant des relations entre le mouvement réel et les variables liées à la distance et au temps (comme la vitesse et l'accélération). Ces relations déclenchent un processus de *codage* du mouvement qui génère des *représentations* symboliques et graphiques étroitement liées aux perceptions physiques du mouvement. Plus précisément, avec Tracker il est possible de faire l'analyse de vidéos de mouvement, avec l'objectif d'obtenir des données à ce sujet. Pour utiliser Tracker, il est nécessaire d'introduire une vidéo avec certaines caractéristiques : la prise de vue doit être fixe, le plan du mouvement doit être perpendiculaire à la prise de vue et, à l'intérieur de la vidéo il est nécessaire de connaître la longueur d'un élément (afin que le logiciel puisse faire la conversion des pixels en une unité de longueur). La figure. 3.1a montre l'interface complet du logiciel. Ce logiciel est important parce qu'il est capable de passer des registres MP aux registres de représentation GT (Fig. 3.1b) et TV (Fig. 3.1c). Ces deux registres sont donnés avec des variables physiques (vitesse, accélération, vitesse angulaire, temps, etc.). Un élément qui peut provoquer certaines variations dans l'analyse des vidéos, peut être le pointeur avec lequel il faut aller sélectionnant l'objet en mouvement que se veut analyser. C'est-à-dire qu'il n'est généralement pas possible d'adapter la taille du pointeur à la taille de l'objet étudié, ce qui génère de légères variations (Les élèves doivent également être capables de percevoir ces types de variables et de comprendre qu'elles font partie des erreurs qui existent lors de ce type d'activité). L'interface permet, également, d'observer la séquence vidéo en même temps que les valeurs du tableau et la représentation graphique, Fig. 3.1a.



(a) Interface complet



(b) Graphiques

t (s)	x (CM)	y (CM)	θ
0.733	15.57	-4.141	-734.9°
0.767	12.71	-10.28	-759.0°
0.800	7.426	-14.71	-783.2°
0.833	0.857	-16.42	-807.0°
0.867	-5.712	-15.28	-830.5°
0.900	-10.85	-11.71	-852.8°
0.933	-14.42	-6.854	-874.6°
0.967	-15.71	-1.000	-896.4°
1.000	-14.71	4.855	-918.3°
1.033	-12.00	9.853	-939.4°
1.067	-7.568	13.57	-960.8°
1.102	-1.571	15.42	-984.2°
1.135	4.570	14.85	-1007.1°
1.168	10.14	12.00	-1030.2°
1.202	14.14	7.283	-1052.7°
1.235	15.99	1.142	-1075.9°
1.268	15.28	-5.141	-1098.6°
1.302	12.42	-10.57	-1120.4°
1.335	7.568	-14.57	-1142.5°
1.368	1.856	-16.42	-1163.6°
1.402	-4.141	-15.85	-1184.6°
1.435	-9.139	-13.14	-1204.8°
1.468	-12.85	-9.425	-1223.7°
1.502	-15.28	-4.427	-1243.8°

(c) Tableau de valeurs

FIGURE 3.1 – Interface Tracker (activité 3)

D'autre part, GeoGebra est un logiciel plus proche des mathématiques. C'est-à-dire que les représentations et le travail qui peut être fait avec lui est beaucoup plus mathématique. Nous utilisons GeoGebra, dans les activités, pour générer un processus d'*instrumentation* au sein de CII-CIII. GeoGebra permet de construire un ajustement de points expérimentaux en faisant émerger un processus de *codage* qui amène les élèves à des représentation GG (d'une autre nature que celle qui est donnée par Tracker) et AS (Fig. 3.2).

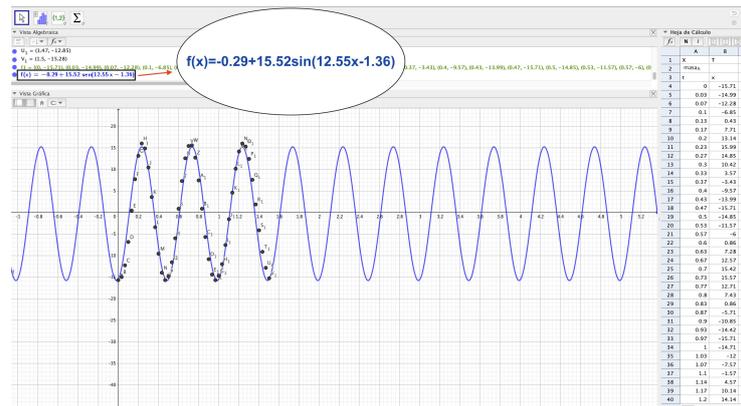


FIGURE 3.2 – Interface GeoGebra (activité 3)

En conclusion, le rôle de ces deux outils technologiques est de faciliter la transition entre les registres de représentation de nature différente (une plus proche du phénomène physique (cinématique) et une autre plus proche des mathématiques).

3.4.3 Éléments épistémologiques et cognitifs

Afin de présenter l'analyse des données aussi clairement que possible, nous montrons les éléments d'intérêt de cette recherche. D'abord, et en accord avec l'analyse préliminaire et avec notre cadre théorique, nous indiquons (i) les éléments qui appartiennent au plan épistémologique de l'ETC et, ensuite, (ii) les éléments théoriques que nous utilisons pour observer les processus cognitifs.

- (i) Les éléments d'intérêt appartenant au domaine de la physique et des mathématiques.
 - **Notation.** Nous voulons voir si les élèves sont capables de travailler avec différentes notations des variables (données par Tracker et GeoGebra) d'une manière cohérente. De plus, nous prenons soin d'observer la nature du travail qui émerge lorsque les élèves utilisent deux logiciels (Tracker et GeoGebra) qui ont un environnement différent. D'une part, Tracker est un logiciel plus proche du domaine de la physique et, d'autre part, GeoGebra est plus proche des mathématiques, comme nous l'avons expliqué dans la section antérieure.
 - **Registres de représentation.** Nous sommes intéressés pour l'observation des différents registres de représentation de l'objet mathématique fonction, et la coordination entre eux : Mouvement physique (MP), langage naturel

(LNo et LNe), tableau des valeurs (TV), graphique (GT et GG) et algébrique (AS et AG).

- **La fonction.** Enfin, l'élément, le plus important de cette recherche, est l'utilisation des fonctions. Dans ce cas, nous nous intéressons à l'évolution de la notion de fonction dans l'ensemble des activités de modélisation : Quels types de notions émergent dans le processus de modélisation ? Quelles sont les notions qui appartiennent au monde réel et quelles sont celles qui appartiennent aux mathématiques ? Pour cela nous allons distinguer quatre moments clés dans les activités de modélisation où nous pouvons observer, avec plus de précision, l'évolution de la notion de fonction en termes de changements des registres de représentation et des paradigmes.

1. **La réalisation du mouvement.** Dans cette étape, nous attendons, en principe, un registre de représentation :

- » **Représentation mouvement physique²** : nous avons considéré le registre de représentation MP parce que les mouvements que nous considérons (MRU, MRUA, MCU et MRU + MCU) contiennent, implicitement, la notion de fonction. C'est-à-dire, pour produire les caractéristiques de chaque mouvement, il doit exister une relation adéquate entre les variables correspondantes. Bien que pour réaliser les mouvements, les élèves puissent ne pas connaître le type de relation, de manière formelle, ils doivent, au moins, les identifier au niveau sensoriel (ce que nous cherchons dans ce registre). Nous voulons que les élèves soient capables de produire des signes (mouvement) de la relation entre les variables. Ce registre de représentation se caractérise par l'utilisation d'artefacts matériels qui aident à générer des signes des différents mouvements. De ce qui précède, *la notion de fonction dans le MP est une idée intuitive de la relation entre des variables dans chacun des mouvements qui est dirigé par les aspects sensoriels (CI).*

Avant de continuer avec les autres registres, il est important de mentionner que toutes les relations entre les variables qui sont générées dans le mouvement ne sont pas des fonctions. Par exemple, la trajectoire d'un MCU est une équation. C'est pourquoi, tout au

2. section 3.4.1

long de l'analyse, nous distinguerons les fonctions et les équations, sans perdre de vue le fait que l'objet mathématique d'intérêt dans cette recherche est la fonction.

2. **Le travail avec Tracker.** En utilisant cet artefact technologique, nous voulons induire le changement de registre, de la représentation MP à :
 - » **Représentation tableau des valeurs** (TV), ce registre est étroitement lié au mouvement puisque Tracker génère les tableaux de valeurs en accord avec le mouvement et avec des unités de mesure choisies par l'utilisateur (par exemple : $t[s]$, $x[cm]$, $y[cm]$, $v[m/s]$...). Lorsque cette première abstraction du mouvement est générée, *la notion de fonction cesse d'être totalement sensorielle et devient quantifiable grâce à l'utilisation de Tracker*. Le travail sur cette représentation est susceptible de contenir des éléments de CI et/ou de CII.
 - » **Représentation graphique Tracker** (GT), la représentation graphique donnée par Tracker est également étroitement liée aux variables de mouvement physique et aux unités de mesure mentionnées au point précédent. *La notion de fonction générée dans le TV se transforme dans un élément visuel qui complète la notion de fonction par des éléments géométriques et quantitatifs* (CI-CII).
3. **Le travail avec GeoGebra.** En utilisant ce logiciel, nous voulons générer une deuxième étape d'abstraction. La notation utilisée par ce logiciel appartient aux mathématiques et, elle est plus éloignée du mouvement physique. Avec ce logiciel, nous voulons induire le changement du registre de représentation TV vers :
 - » **Représentation graphique GeoGebra** (GG), la nature de cette représentation graphique est différente de celle de Tracker, d'abord, parce que la représentation GG ne vient plus du mouvement lui-même, mais du codage qu'a fait Tracker et, ensuite, parce que lors du traitement des données avec GeoGebra, la notation physique est perdue, les axes de coordonnées dans GeoGebra sont toujours donnés par x et y , il n'y a aucune notation du temps, vitesses, positions etc.

L'objectif de l'utilisation de GeoGebra n'est pas seulement de changer vers le domaine des mathématiques, mais de voir dans quelle mesure les élèves peuvent maintenir la signification physique des variables et la cohérence avec le mouvement. *La notion de fonction évolue vers un objet mathématique plus abstrait qui contient des informations quantifiables sur le mouvement effectué* (CII-CIII).

- » **Représentation algébrique spécifique** (AS). Ce registre de représentation est la fonction qui modélise, spécifiquement, le phénomène expérimenté et il est obtenu à partir de l'ajustement effectué par GeoGebra. *La notion de fonction acquiert des propriétés algébriques où les paramètres sont présents* (CII-CIII).

4. **Le traitement mathématique dans les guides de travail.** Nous demandons aux élèves de passer du registre algébrique spécifique à :

- » **Registre algébrique général** (AG). Ce registre est le modèle mathématique général qui décrit non seulement le mouvement effectué, mais aussi d'autres mouvements ayant des caractéristiques similaires. C'est le modèle de mouvement le plus abstrait. *La notion de fonction dans cet registre est celle de fonction algébrique qui porte toutes les informations des registres précédents. les paramètres sont présents* (CIII).

En ce qui concerne la **représentation Langage naturel** (LN), nous pensons qu'il est possible de la trouver tout au long du processus de modélisation, à l'oral ou à l'écrit, parce que nous avons deux types de données (i) les enregistrements de session où nous pouvons écouter les étudiants lorsqu'ils échangent des idées (LNo) et les guides de travail (LNe). La nature de cette représentation (CI, CII ou CIII) sera donnée en fonction de l'utilisation des éléments épistémologiques et cognitifs utilisés par les élèves.

- (ii) Les processus cognitifs importants pour la recherche et les éléments théoriques que nous utilisons dans l'analyse.

Dans ce travail, nous nous intéressons, aussi, aux processus cognitifs décrits dans l'ETC (perceptions-visualisation, constructions et preuves) qui émergent du processus de modélisation et qui sont décrits et classés selon chacun des paradigmes (section 2.2). Pour être plus précis, les éléments

mentionnés au point (i) seront analysés avec les éléments théoriques suivants.

- Les différentes notations des variables et leurs utilisations sont directement influencés par Tracker et GeoGebra (genèse instrumentale) qui conduisent les élèves aux différentes manières de les représenter (genèse sémiotique). C'est-à-dire, nous analysons les notations à partir de la genèse instrumentale, pour savoir d'où elles viennent, puis, avec la genèse sémiotique et, enfin, avec la genèse discursive s'il y a une justification. La nature des genèses est donnée par les paradigmes³.
- Les registres de représentation sont attendus aux étapes que nous avons décrites ci-dessus et ceux-ci seront donnés, principalement, par l'utilisation des artefacts matériels, technologiques ou symboliques (genèse instrumentale) qui conduisent les élèves à différentes registres de représentations (genèse sémiotique) et justifications (genèse discursive).
- Nous analysons l'évolution de la fonction à partir des changements dans les registres de représentation, de la nature du travail effectué et des justifications générées en observant les trois genèses.

Le rôle du cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#), pour l'analyse a priori et a posteriori, est organisationnel. C'est-à-dire, faire l'analyse par rapport aux phases du cycle permet d'avoir une vision plus complète du processus de modélisation, des éléments épistémologiques et des processus cognitifs qui ont été donnés tout au long de chacune des activités. De cette façon, la comparaison entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori est plus simple.

3.4.4 Les activités de modélisation

Une fois décrits les objets d'intérêt, dans cette recherche, et les éléments théoriques avec lesquels nous travaillons. Nous présentons l'objectif et le rôle de chacune des activités de modélisation, puisque, c'est à partir de celles-ci que nous décidons le type d'analyse et la profondeur des observations faites.

Comme nous l'avons déjà dit, nous réalisons quatre activités de modélisation, mais chacune d'entre elles a un but différent en considérant quatre aspects fondamentaux

3. Il ne faut pas oublier que la nature du modèle ETC dans cette recherche est donnée par les paradigmes. C'est pour cette raison que chaque fois que nous parlons de genèse, les paradigmes sont implicitement présents (section 2.2).

pour cette recherche (i) le contenu mathématique (fonction); (ii) le contenu physique (la cinématique); (iii) les questions axées sur l'apprentissage des artefacts technologiques, dans le contexte des activités, et (iv) l'importance que chaque activité avait, dans la familiarisation du processus de modélisation, table 3.1. Les signes + attribués font référence à l'importance que nous accordons à chaque aspect de l'activité, où : + est peu important, ++++ est très important et / n'est pas considéré.

TABLE 3.1 – Importance des 4 aspects considérés dans les activités de modélisation

Activité	Contenu mathématique	Contenu physique	L'apprentissage de l'utilisation des outils technologiques	Familiarisation avec le processus de modélisation
1	+	+	++	+++
2	+	+	+++	++
3	+++	++	+	+
4	++++	+++	/	/

Nous présentons ci-dessous quelques détails sur les activités réalisées et la justification du type d'analyse effectuée dans chacun d'eux dans le Chapitre 5. Le rôle et l'évolution de la fonction, dans chaque activité, peuvent être observés dans l'analyse a priori (section 4.2).

Activité 1 (MRU) : Le Mouvement Rectiligne Uniforme est un mouvement très étudié par les étudiants. Cependant, dans les livres (section 1.1.4) et dans la classe de physique (section 1.2.4), en général, ce mouvement n'est abordé qu'en considérant la position en x par rapport au temps et, aucune référence explicite n'est faite à l'utilisation des équations paramétriques. En ce sens, cette activité (Annexe A.1) a trois objectifs (i) initier les élèves à un processus de modélisation et à l'utilisation des outils technologiques, (ii) introduire l'étude du mouvement en observant les deux dimensions (position en x et position en y) par rapport au temps. C'est-à-dire, en utilisant les équations paramétriques pour les conduire à l'équation de position (équation rectangulaire) et, (iii) permettre aux élèves de faire face à l'activité 4 (combinaison d'un MRU et d'un MCU). Une analyse a priori et a posteriori de cette activité a été réalisée.

Activité 2 (MRUA) : L'activité de Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (Annexe A.2) partage les deux premiers objectifs de l'activité 1, (i) travailler avec le processus de modélisation et les artefacts technologiques (en mettant davantage l'accent sur le second) et (ii) travailler avec les fonctions paramétriques pour obtenir l'équation

rectangulaire. Cependant, cette activité n'a pas une influence directe sur l'activité 4, c'est pourquoi, bien qu'il ait été important de la réaliser avec l'ensemble des activités, nous n'avons effectué ni son analyse a priori ni son analyse a posteriori.

Activité 3 (MCU) : Le Mouvement Circulaire Uniforme est un mouvement que les élèves connaissent aussi. Cependant, c'est un sujet compliqué pour beaucoup d'entre eux (comme nous avons indiqué dans [Reyes-Avenidaño \(2018\)](#)). Parce que, d'une part, il s'agit d'un mouvement en deux dimensions et, d'autre part, généralement, dans les cours de cinématique (sections 1.1.4 et 1.2.4), le sujet est traité de manière superficielle, par l'utilisation de formules, sans se plonger dans les éléments mathématiques et physiques du mouvement. Pour cette raison, cette activité (Annexe A.3) se concentre, davantage, sur le travail des notions et concepts au sein de la cinématique et des mathématiques impliqués dans le mouvement. C'est-à-dire, le travail se concentre principalement sur (i) les équations paramétriques, en considérant le paramètre angle (θ), en plus du temps. En ce qui concerne les artefacts technologiques et le processus de modélisation, nous nous concentrons sur (ii) les connaissances et les processus cognitifs qui émergent de leur utilisation et non sur l'apprentissage de la manipulation des logiciels ou sur la familiarisation du processus de modélisation. Nous effectuons l'analyse a priori et a posteriori de cette activité car, de la même manière que l'activité 1, l'activité 3 est fondamentale pour l'activité 4.

Activité 4 (MRU+MCU) : Cette activité (Annexe A.4) est la plus importante dans ce travail de recherche. L'union de ces deux mouvements, pour en produire un nouveau, est un phénomène inconnu des étudiants (comme il est observé dans l'analyse des programmes scolaires, section 1.2.4). Cette activité vise à (i) observer dans quelle mesure les élèves sont capables de faire émerger de nouvelles connaissances en mettant en pratique ce qu'ils ont déjà appris, en utilisant des outils technologiques et des processus de modélisation. En ce sens, dans cette activité, les éléments, les plus importants et les plus travaillés, sont les objets mathématiques et les concepts physiques qui existent dans ce phénomène de mouvement. Pour cette activité, nous effectuons également des analyses a priori et a posteriori.

En résumé

Nous avons les sept phases du cycle de modélisation (pour chacune des 4 activités) qui, pour l'analyse a priori et a posteriori, ont un rôle organisationnel. Dans les 7 phases, nous distinguons 4 moments clés où nous prévoyons qu'il y aura des changements dans les registres de représentation (Il ne faut pas oublier que le registre de

représentation LN, peut apparaître à tout moment, à l’oral ou à l’écrit) qui, en raison de la nature du travail à chaque moment, sont plus susceptibles d’être dans certains paradigmes (Table 3.2). Dans cette même table, nous ne présentons pas les phases 6 et 7, car ce sont des phases qui valident le processus de modélisation qui a été réalisé. En d’autres termes, les guides de travail ne demandent qu’un bref résumé de l’ensemble du processus qui a été suivi (les éléments qui y figurent sont déjà pris en compte dans les autres phases). Cependant, dans les analyses toutes les phases sont prises en compte.

TABLE 3.2 – Éléments de compréhension de la méthodologie d’analyse des données

Phase	1 et 2		3		4 et 5	
Moments clés	Réalisation du mouvement	Tracker		GeoGebra		Traitement Mathématique (guide de travail)
Registres de représentation attendue	MP LN	TV LN	GT LN	GG LN	AS LN	AG LN
Paradigme attendu	CI	CI-CII		CII-CIII		CIII

En ce qui concerne les 4 activités qui ont été réalisées (MRU, MRUA, MCU et MRU + MCU), elles ont été analysées de la manière suivante :

- Tout d’abord, nous avons effectué une analyse par rapport au cycle de modélisation (des 4 activités), dans laquelle (i) nous avons classé les questions en quatre tableaux (un pour les phases 1 et 2 (Table 4.1), un pour la phase 3 (Table 4.2), un pour les phases 4 et 5 (Table 4.4), et enfin pour les phases 6 et 7 (Table 4.4)). Dans ces tableaux, il est possible d’observer, clairement, ce qui est requis dans les phases de chacune des activités. Aussi, (ii) nous expliquons l’objectif et l’évolution des questions d’une manière générale.
- Nous présentons ensuite une analyse par rapport à l’objet mathématique fonction des activités 1, 3 et 4. Dans cette analyse nous montrons 3 tableaux (un pour chaque activité) où nous exposons la fonction dans les 5 registres de représentation que nous travaillons dans cette recherche. L’objectif est de clarifier comment cette notion évolue dans les activités.
- Finalement, nous considérons les deux points ci-dessus et, nous présentons l’analyse en ce qui concerne les paradigmes et les éléments de l’ETC, nous n’avons pas considéré l’activité 2 car elle n’influence pas directement l’activité 4 (MRU + MCU) qui est la plus importante, comme nous l’avons mentionné précédemment. En ce qui concerne l’analyse des 3 autres activités, chacun d’eux comprend

4 tableaux (correspondant à la division précédente des phases du cycle de modélisation) en expliquant ce que nous attendons avec chacune des questions (en ce qui concerne l'objet mathématique fonction par rapport aux registres de représentation et sa nature avec les paradigmes et les éléments de l'ETC).

Chapitre 4

Analyse a priori des activités

Sommaire

4.1	Introduction	166
4.2	Analyse a priori des activités	166
4.2.1	L'organisation des activités de modélisation dans les phases du cycle de modélisation	167
4.2.2	Analyse de l'objet mathématique fonction par rapport les re- gistres de représentation	176
4.2.3	Analyse des activités par rapport de l'ETC et au cycle de mo- délisation	185

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse a priori des activités de modélisation mathématique. Tout d'abord, nous présentons l'organisation des activités par rapport aux phases du cycle de modélisation. Ensuite, nous nous concentrons sur l'objet mathématique, fonction, en ce qui concerne les registres de représentation et, enfin, le travail attendu des étudiants par rapport l'ETC et le cycle de modélisation

4.2 Analyse a priori des activités

Avant de commencer, il est important de mentionner que dans l'analyse a priori, nous ne présentons que le travail attendu des élèves dans chacune des activités. Nous avons divisé le travail attendu en trois sections –les deux premières sections sont des analyses générales (4.2.1 et 4.2.2) et la troisième section (4.2.3) est l'analyse complète– (i) l'analyse relative au cycle de modélisation, dans laquelle nous présentons les questions destinées à l'activation de chacune des phases du cycle (l'activité 2, MRUA, est également considérée, pour avoir une idée de ce qui a été demandé dans cette activité, cependant, dans l'analyse concernant à la fonction et à l'ETC, nous ne le faisons plus), (ii) l'analyse par rapport à l'objet mathématique fonction en considérant les registres de représentation et (iii) l'analyse par rapport aux ETC, avec les paradigmes de la cinématique, les éléments du plan épistémologique (principalement la notion de fonction), les processus cognitifs, les genèses et le schéma du cycle de modélisation en indiquant la phase où les questions sont placées. La section (i) a un objectif organisationnel, c'est-à-dire, l'analyse des phases nous permet d'observer, de façon globale, où nous voulons placer les élèves (dans le monde réel, dans le domaine des mathématiques ou dans une transition entre les deux) dans la conception des activités et dans l'analyse a priori, et où les étudiants ont été placés dans l'analyse a posteriori de la mise en œuvre. Aussi, la section (i) ainsi que la section (ii) nous ont donné les éléments nécessaires pour répondre à la question **QRa**. La section (iii), qui fait appel aux connaissances données par les sections (i) et (ii) et les complète avec l'ETC nous ont aidés à répondre aux questions **QRb** et **QRc**. L'ensemble de ces trois réponses nous a fourni les éléments nécessaires pour aborder la question principale **QR**.

4.2.1 L'organisation des activités de modélisation dans les phases du cycle de modélisation

Dans la section 2.3.2, nous avons décrit le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007) et chacune des phases que nous utilisons dans cette section. La circulation dans le cycle de modélisation que nous attendons des élèves (dans toutes les activités) est, principalement, une circulation linéaire et complète (section 2.3.2). Cependant, nous sommes conscients que ce n'est souvent pas le cas dans les processus de modélisation, c'est pourquoi nous pensons aussi que les élèves peuvent faire des circulations complètes mais désordonnées ou partielles (section 2.3.2). Nous présentons ci-dessous la classification des questions posées dans les activités de modélisation, de telle sorte que nous montrons, de manière globale, comment elles devraient guider les élèves au cours du cycle de modélisation –Tous les guides de travail (dans leur version en espagnole) se trouvent dans les annexes A–.

4.2.1.1 Phase 1 (Compréhension/Construction) et Phase 2 (Simplification/Structuration)

Lors de la session d'introduction à l'atelier, il a été expliqué aux étudiants que, tout au long des sessions, quatre activités de modélisation mathématique seraient réalisées. L'objectif était pour eux de construire le modèle mathématique des situations, à partir de la réalisation et de l'analyse de phénomènes de mouvement expérimentés. Cette introduction est conforme à la phase 1 du cycle de modélisation dans chacune des quatre activités. Les éléments qui sont considérés dans la phase 2 sont : la réalisation du phénomène et la réflexion sur le phénomène, le choix et l'utilisation de différents matériaux pour réaliser le mouvement, l'organisation de l'information, l'enregistrement et l'analyse avec Tracker. Nous présentons ci-dessous la table 4.1 avec les consignes et les questions qui devaient activer et conduire la phase 2 du cycle de modélisation dans chaque activité.

TABLE 4.1 – Question(s) et consigne(s), des activités proposées, qui activent les phases 1 et 2 du cycle de modélisation

Question(s) et consigne(s) des activités correspondant à les phases 1 et 2 du cycle	
Activité 1	1. Réaliser l'enregistrement du MRU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...
Activité 2	1. Réaliser l'enregistrement du MRUA que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...
Activité 3	1. Réaliser l'enregistrement du MCU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations... 2. Pensez-vous que le sens du mouvement sera un élément pertinent dans votre analyse? Argumenter votre réponse
Activité 4	1. Comment exécuteriez-vous un mouvement qui combine MRU et MCU? 2. Quels sont les phénomènes que vous identifiez qui présentent cette combinaison de mouvements? 3. Notez tout ce que vous savez sur le MRU et le MCU (équations, caractéristiques, diagrammes....) Aide : tirez parti de données que vous avez obtenues lors d'activités précédentes. 4. Considérant que vous avez une composition d'une MRU et d'une MCU, quelles variantes possibles peuvent avoir les vitesses du phénomène global? Expliquez comment vous obtiendriez chacune des combinaisons suivantes

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les première et deuxième activités correspondent à des mouvements bien connus des élèves. Pour cette raison, dans les deux premières phases, nous avons seulement demandé aux élèves de filmer le mouvement choisi. Ils doivent justifier la raison du choix des artefacts matériels, les observations, les difficultés et les considérations qui pouvaient survenir pendant la réalisation du mouvement. L'objectif de la réalisation du mouvement était d'identifier et de réfléchir sur les variables impliquées.

Dans la troisième activité deux questions ont été posées : la première est la même que dans les activités 1 et 2 et a le même objectif; tandis que la deuxième a pour but de faire réfléchir les élèves sur les conséquences que la direction du mouvement peut avoir sur le modèle mathématique qu'ils doivent construire. L'objectif est de les sensibiliser aux implications des caractéristiques du mouvement dans le processus de mathématisation.

Dans la quatrième activité, et parce qu'il s'agit d'un nouveau mouvement pour les élèves, les questions sont conçues pour que les élèves réfléchissent aux aspects liés à la combinaison de ces deux phénomènes de mouvement : comment ils peuvent effectuer la combinaison d'un MRU avec un MCU, phénomènes dans l'environnement avec ce comportement, collecte de toutes les connaissances acquises de chaque mouvement séparément, et les variantes possibles dans la vitesse de chaque mouvement. Avec ces questions, nous voulions que les élèves puissent avoir une vision plus large de la combinaison de mouvements qui les aiderait à concevoir le modèle mathématique.

4.2.1.2 Phase 3 (Mathématisation)

Dans la phase trois, nous considérons le travail dérivé des données obtenues avec Tracker, principalement, et dans certaines activités, des parties du travail avec GeoGebra. Tracker est conçu pour transiter du phénomène du mouvement vers sa représentation graphique et numérique. C'est à dire, Tracker par son interface et sa conception met en évidence la relation entre le phénomène physique, le tableau des valeurs et les graphiques. Dans cette phase, nous situons, aussi, une partie du travail avec GeoGebra. Bien que GeoGebra induise un travail plus proche des mathématiques, nous ne considérons que les travaux qui demandent aux élèves de relier des objets mathématiques à des phénomènes physiques. En considérant ce qui précède, les questions qui activent la phase 3 sont contenues dans la table [4.2](#).

TABLE 4.2 – Question(s) et consigne(s) , des activités proposées, qui activent la phase 3 du cycle de modélisation

	Question(s) et consigne(s) des activités correspondant à la phase 3 du cycle
Activité 1	<p>2. Regardez le tableau des valeurs que vous avez avec Tracker :</p> <p>a) Il y a trois variables t, x et y. Quelle est leur signification physique?</p> <p>b) Observez, dans Tracker, et tracez les graphiques suivants et écrivez leur signification : x vs t, y vs t et y vs x</p> <p>Construisez les graphiques en GeoGebra de x vs t, y vs t et y vs x avec les données du Tracker, et faites l'ajustement linéaire.</p> <p>I GeoGebra donne les équations avec les variables x et y. Réécrivez-les avec les variables appropriées pour le mouvement effectué. Nommer également les axes de coordonnées avec la variable physique correspondante.</p> <p>II Expliquer la signification de chacun des graphiques obtenus par rapport au mouvement.</p> <p>III Lequel des trois graphiques modélise le mouvement de l'objet? pourquoi?</p>
Activité 2	<p>2. Avec les données du mouvement que Tracker génère par défaut, explorez d'autres variables et graphiques en appuyant respectivement sur le bouton de données et sur diagrammes, considérez-vous important d'en ajouter quelques-uns dans votre analyse, lesquels et pourquoi?</p> <p>3. Construisez les graphiques en GeoGebra de x vs t, y vs t et y vs x avec les données de Tracker, et faites l'ajustement linéaire.</p> <p>Sur un côté de chaque graphique :</p> <p>I GeoGebra donne les équations avec les variables x et y. Réécrivez-les avec les variables appropriées pour le mouvement effectué. Nommer également les axes de coordonnées avec la variable physique correspondante.</p> <p>II Expliquer la signification de chacun des graphiques obtenus par rapport au mouvement.</p> <p>III Lequel des trois graphiques modélise le mouvement de l'objet? pourquoi?</p>

Activité 3	<p>3. Identifier les variables impliquées dans le MCU et écrire la signification</p> <p>4. Pourquoi x et y changent-ils de signe à intervalles?</p> <p>5. Regardez les graphiques :</p> <p>a) x vs t et y vs t Quelles sont les différences entre eux?</p> <p>b) x vs θ et y vs θ quelle différence trouvez-vous avec les graphiques précédents? pourquoi?</p>
Activité 4	<p>5. Quels graphiques devez-vous prendre en compte dans le MRU et le MCU? pourquoi?</p> <p>6. Faites les graphiques et les ajustements nécessaires dans GeoGebra, tracez les graphiques et copiez les équations que vous pouvez obtenir avec GeoGebra.</p> <p>7. quelle est la forme du graphique y vs t? pourquoi a-t-il cette forme?</p> <p>a) Quelles données sur les mouvements pouvez-vous obtenir grâce à l'ajustement que GeoGebra vous donne?</p>

Dans les activités 1 et 2, nous nous sommes intéressés au travail avec Tracker et GeoGebra. Le but de ces questions est d'amener les élèves à un travail plus proche du traitement mathématique, sans perdre de vue la signification physique. Nous nous sommes intéressés à observer comment les élèves mathématisent le mouvement à travers les variables qu'ils utilisent. Ces deux activités sont différentes, car dans la seconde, nous travaillons avec plus de fonctionnalités des logiciels.

En considérant ce que nous pensons qu'il faudrait faire dans les deux premières activités, dans la troisième, nous demandons aux élèves de mentionner les variables qui sont impliquées dans le mouvement et sa signification - basée sur la réalisation du mouvement et l'analyse par Tracker-. Ensuite, nous leur demandons d'expliquer le changement de signe qui est présenté répétitivement dans la table des valeurs. L'objectif est que les élèves associent la représentation numérique au mouvement et qu'ils ne voient pas seulement la table des valeurs comme de simples nombres. La question 5 vise à faire réfléchir les élèves, de façon qualitative, sur les graphiques de position en x et en y par rapport au temps et à l'angle de rotation, respectivement. L'utilisation de GeoGebra dans cette activité est envisagée jusqu'à la phase suivante.

Dans l'activité 4, et après avoir fait trois activités de modélisation, nous laissons les élèves plus libres et ne leur demandons que les graphiques qu'ils devraient considérer. Nous voulons observer leurs arguments et si, à partir des expériences précédentes, ils peuvent obtenir des informations utiles pour le modèle mathématique de la composition des mouvements.

4.2.1.3 Phase 4 (Traitement mathématique) et phase 5 (Interprétation)

Dans les guides de travail (annexe A), nous considérons les phases 4 et 5 de manière à ce qu'elles soient activées presque simultanément. C'est-à-dire, nous demandons aux élèves d'effectuer un traitement mathématique (calculatoire et/ou algébrique) et d'expliquer immédiatement leur réponse (dans le cadre de l'explication, l'interprétation des résultats est attendue). Le travail considéré, dans ce bloc, est celui qui est fait dans GeoGebra, et le travail a une nature plus proche des mathématiques, et vise à conduire les étudiants au travail algébrique, calculatoire (table 4.3).

TABLE 4.3 – Question(s) et consigne(s), des activités proposées, qui activent les phases 4 et 5 du cycle de modélisation

	Question(s) et consigne(s) des activités correspondant à les phase 4 et 5 du cycle
Activité 1	<p>3. Obtenez l'équation de la trajectoire $y(x)$ (équation rectangulaire) en utilisant $x(t)$ et $y(t)$ (équations paramétriques) - que se passe-t-il lorsque vous essayez de l'obtenir?</p> <p>4. Notez l'équation expérimentale qui modélise le mouvement et comparez-la à la formule théorique de la distance MRU ($d = vt$).</p> <p>Est-il possible de connaître la vitesse et l'accélération du mouvement et comment?</p>
Activité 2	<p>4. L'équation de la trajectoire peut-elle être obtenue à l'aide des équations de position (équations paramétriques)? que se passe-t-il, avec cette équation, si le mouvement est idéal?</p> <p>5. Comparez l'équation qui modélise le mouvement (équation de position) avec l'équation physique du MRUA ($d = d_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$). Déterminez la correspondance entre eux et écrivez la signification physique terme par terme.</p>

6. Importer le tableau des valeurs de Tracker dans GeoGebra, faire le graphique, faire le ajustement avec la fonction sinus et Compare :

a) x vs t et y vs t Écrivez la signification de chacun des termes des fonctions fournies par GeoGebra au moment où vous effectuez le ajustement.

I Écrivez une des fonctions en termes de cosinus (vous pouvez utiliser GeoGebra pour vérifier les différentes options)

Aide : N'oubliez pas de considérer que : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Recherchez des informations sur la translation des fonctions sin et cosinus (si nécessaire).

b) x vs θ et y vs θ comment sont-ils par rapport aux précédents? pourquoi? (convertir les degrés en radians)

I Observer les ajustements obtenus, simplifier les équations et compléter le tableau, voir annexe A.3

c) Si la vitesse angulaire est $\omega = \frac{\theta}{t}$ et donc $\theta = \omega t$, alors les équations paramétriques (avec le paramètre θ) peuvent être écrites comme : $x =$, $y =$

7. En considérant les équations avec le paramètre θ

a) Transformez les équations paramétriques en une équation rectangulaire correspondante $y(x)$. Rappelez-vous que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

b) Que représente mathématiquement cette équation? quelle est sa signification physique?

8. Dérivez par rapport à t les équations paramétriques respectives, que représentent ces dérivées, d'un point de vue physique?

9. La grandeur de la vitesse est $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$. Développez-le algébriquement jusqu'à son expression minimale. Comparez-le avec la formule de vitesse tangentielle qui apparaît dans les livres de physique.

10. Si, $a = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2}$ avec le même raisonnement algébrique de la question précédente, déterminer l'expression qui représente l'accélération. Comparez avec les formules qui apparaissent dans les livres de physique.

Activité 4	<p>8. Faites le graphique x vs t Pourquoi n'est-il pas linéaire? Essayez de faire l'ajustement</p> <p>a) Combien de mouvements faut-il prendre en compte sur l'axe des x?</p> <p>b) Si vous connaissez la distance qui avance en x dans le MRU et la distance qui avance (ou régresse) dans le MCU, quelle serait la fonction qui calcule la distance totale de déplacement du point que vous étudiez?</p> <p>c) Avec les connaissances dont vous disposez jusqu'à maintenant, pouvez-vous obtenir l'équation paramétrique de x? Ecrivez-le et faites l'ajustement dans GeoGebra pour vérifier s'il correspond bien à vos données expérimentales (esquissez le graphique et sauvegardez-le sous votre USB dans le dossier correspondant).</p> <p>9. Quelle est la grandeur de la vitesse tangentielle du point que vous analysez? (obtenir l'équation générale de la vitesse et la valeur de la vitesse)</p> <p>Analyser les autres cas. Procédez de la même manière que ci-dessus</p>
-------------------	--

Dans les activités 1 et 2, nous demandons aux élèves d'obtenir l'équation de trajectoire à partir des équations paramétriques. Avec ces questions, nous voulons induire un travail algébrique et opératoire, mais sans perdre de vue le sens physique. En d'autres termes, en demandant aux élèves de comparer le modèle mathématique obtenu avec l'une des équations du mouvement, en physique, nous voulons qu'ils interprètent les variables de la fonction obtenue dans GeoGebra. Comme nous l'avons déjà dit, l'activité 3 se concentre sur le travail des objets mathématiques et physiques. Pour cette raison, nous observons 4 questions qui demandent aux élèves de : passer du paramètre temps au paramètre angle; faire des développements algébriques pour déduire l'équation rectangulaire (trajectoire) des équations paramétriques et des expressions de vitesse et de accélération en utilisant les première et seconde dérivées de l'équation du mouvement. Dans chacune de ces questions, l'interprétation est fondamentale.

Dans l'activité 4, la question 8 vise à faire utiliser, aux élèves, les connaissances des activités précédentes, mais surtout de l'activité 3, pour proposer un modèle mathématique qui décrit le mouvement dans la dimension horizontale parce que GeoGebra n'est pas capable de le faire automatiquement. La question 9 vise à ce que, par un développement algébrique similaire à celui de l'activité 3, ils déduisent la grandeur de la vitesse du mouvement combiné.

4.2.1.4 Phase 6 (Validation) et phase 7 (Exposition)

Les deux dernières phases sont également considérées ensemble, car au cours du processus de préparation de l'exposition, nous nous attendons à ce qu'une réflexion sur la validité des résultats soit posée, tableau 4.4.

TABLE 4.4 – Question(s) et consigne(s), des activités proposées, qui activent les phases 6 et 7 du cycle de modélisation

	Question(s) et consigne(s) des activités correspondant à les phases 6 y 7 e du cycle
Activité 1	5. Que pouvez-vous dire du mouvement, en considérant tout ce que vous avez fait? 6. Si vous pouviez recommencer l'expérience, quelles améliorations apporteriez-vous? Devoir : Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.
Activité 2	6. Que pouvez-vous dire du mouvement à partir des résultats obtenus (graphiques, vitesse et accélération)? Devoir : Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.
Activité 3	11. Compléter le tableau suivant (voir annexe A.3) pour 5 valeurs de temps Les valeurs de ω , v_t et a_c sont-elles constantes? Donner une explication Devoir : Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.
Activité 4	10. A partir de toutes les analyses ci-dessus, pouvez-vous trouver les fonctions paramétriques générales d'une MRU+MCU (y compris les trois cas), quelles seraient-elles? 11. Pouvez-vous obtenir $y(x)$ ou $x(y)$? sont-ils des fonctions? Justifiez votre réponse

Dans les activités 1 et 2, nous demandons aux élèves de réfléchir à l'ensemble du processus de modélisation et de se demander comment ils pourraient améliorer le processus qu'ils ont suivi dans les activités suivantes.

Dans l'activité 3, nous demandons aux élèves de faire des calculs numériques pour obtenir vitesse angulaire, vitesse tangentielle et accélération centripète à différents moments. Aussi, nous demandons aux élèves de préparer l'exposition. Dans cette activité, aucune autre question n'est posée, car la phase précédente a été très exigeante et

le simple fait de réfléchir sur l'ensemble du processus de modélisation qu'ils ont suivi et les données obtenues, les fera réfléchir sur la validité de leurs résultats.

Enfin, dans l'activité 4, nous demandons aux élèves de valider leurs résultats en essayant d'arriver aux fonctions paramétriques générales des trois variantes du mouvement combiné. De plus, nous leur demandons d'obtenir $y(x)$ ou $x(y)$ et de dire s'il s'agit d'une fonction, afin d'observer dans quelle mesure ils peuvent répondre à une question complexe à partir de ce qu'ils ont appris dans l'atelier de modélisation.

4.2.2 Analyse de l'objet mathématique fonction par rapport les registres de représentation

Avec cette analyse, nous cherchons à montrer l'évolution de la notion de fonction qui, nous espérons, se produira tout au long des activités de modélisation. Pour rendre cette analyse plus compréhensible, nous avons divisé cette étude en 4 sections où mentionnons les registres de représentation attendu et les paradigmes :

- Réalisation du mouvement : nous voulons que les élèves soient capables de réaliser un MRU (registre Mouvement Physique, **MP**) et qu'à travers les perceptions, ils puissent découvrir, de manière sensorielle, l'interaction de variables telles que : friction, force, vitesse, position, trajectoire, temps, distance, etc. Les indices de la notion de fonction que nous souhaitons faire émerger dans la réalisation du mouvement sont intuitifs et liés aux perceptions (paradigme CI). Pour nos travaux de recherche, la récréation du mouvement est fondamentale pour amener les élèves à travailler avec la fonction à travers des processus non conventionnels en mathématiques afin de lui donner un sens physique et pour faire émerger certaines de ses propriétés.
- Tracker : ce logiciel nous aide à effectuer un processus de codification du **MP** (qui a été enregistré) vers les registres **TV** et **GT** (son interface permet d'observer, simultanément, les trois registres : mouvement physique, **MP**; table de valeurs, **TV** et graphique Tracker, **GT**). C'est-à-dire que Tracker génère une première abstraction du mouvement lors de la création de la table des valeurs et des graphiques ($xvst$, $yvst$ et $yvsx$). Un autre élément important est que dans la réalisation du **MP**, les élèves expérimentent des perceptions sensorielles directement liées à l'artefact matériel choisi, en utilisant Tracker, ces perceptions évoluent vers la visualisation du registre **MP** codée dans les registres **TV** et **GT** (les sens impliqués changent). La nature du travail que nous attendons à ce stade est, principale-

ment, au sein du paradigme CII, avec certains éléments du paradigme CI, car les élèves sont encore très conscients du MP.

- GeoGebra : cet artefact technologique travaille avec la représentation **TV** générée par Tracker et effectue un codage de ce registre pour obtenir les représentations **GG** (de nature différente à **GT**, section 3.4.1) et **AS** qui est obtenu par un ajustement. Dans l'utilisation du GeoGebra nous cherchons que le travail développé se trouve, principalement, dans le paradigme CII (bien qu'il puisse aussi être généré en CIII) puisque ce logiciel, facilite aux étudiants des registres de représentation plus abstraite (loin de la récréation du mouvement).
- Traitement mathématique : nous conduisons les étudiants à la généralisation du registre **AS**. Autrement dit, nous voulons que les étudiants soient capables de donner une équation générale du mouvement **AG**. La nature du travail que nous attendons est dans le paradigme CIII.

Pour être plus précis et pour observer l'évolution de la notion de fonction, nous présentons les registres de représentation que nous attendons dans chacune des activités

4.2.2.1 MRU

En ce qui concerne le travail avec la fonction, dans l'activité 1, c'est ce à quoi nous nous attendons.

1. Réalisation du mouvement (figure 4.1) : *nous attendons des réponses, en LN, telles que les suivantes : se déplace très rapidement (ou lentement), ce qui indique implicitement qu'il existe une relation entre les positions de l'objet et le temps; il ne suit pas une ligne droite, qui montre une relation entre la position x et y ; les caractéristiques de l'objet provoquent un mouvement étrange, qui peut indiquer que la physique de l'objet ne permet pas de bonnes conditions pour que les variables agissent de la manière souhaitée, etc..* Bien que ces réponses ne soient pas très précises, du point de vue mathématique, nous les avons classées dans le paradigme CI (section 2.2.2), car en cinématique elles peuvent être fondamentales pour une bonne étude du mouvement.

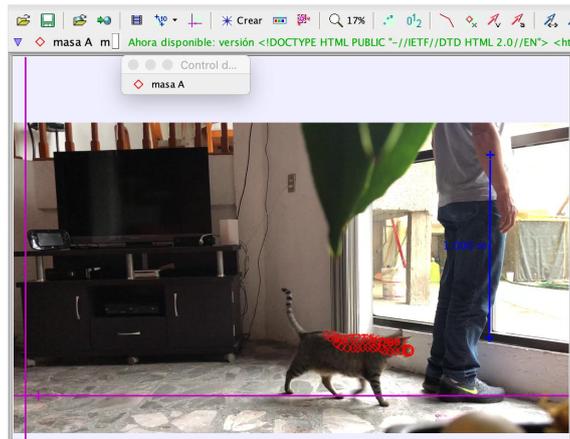


FIGURE 4.1 – Réalisation du Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

2. Tracker : Dans cette activité, nous voulons que les élèves voient le mouvement (enregistré) et, simultanément, observent ce qui se passe dans les registres **TV** et **GT** (figure 4.2). Dans les guides de travail, nous demandons aux élèves de tracer les graphiques fournis par Tracker et de donner leur signification, en attendant qu'il y ait des indices de la notion de fonction au sein de CI, si les indices sont encore fortement influencées par des perceptions et des éléments tangibles de la récréation du mouvement (comme nous l'avons montré au point 1) ou dans CII si la quantification ou la conceptualisation de certaines variables est déjà présente, *par exemple : on voit que la position de l'objet avance 0,03 m chaque 0,04s, il avance des distances égales en temps égales, le graphique montre la position de l'objet en y par rapport au temps, etc.*

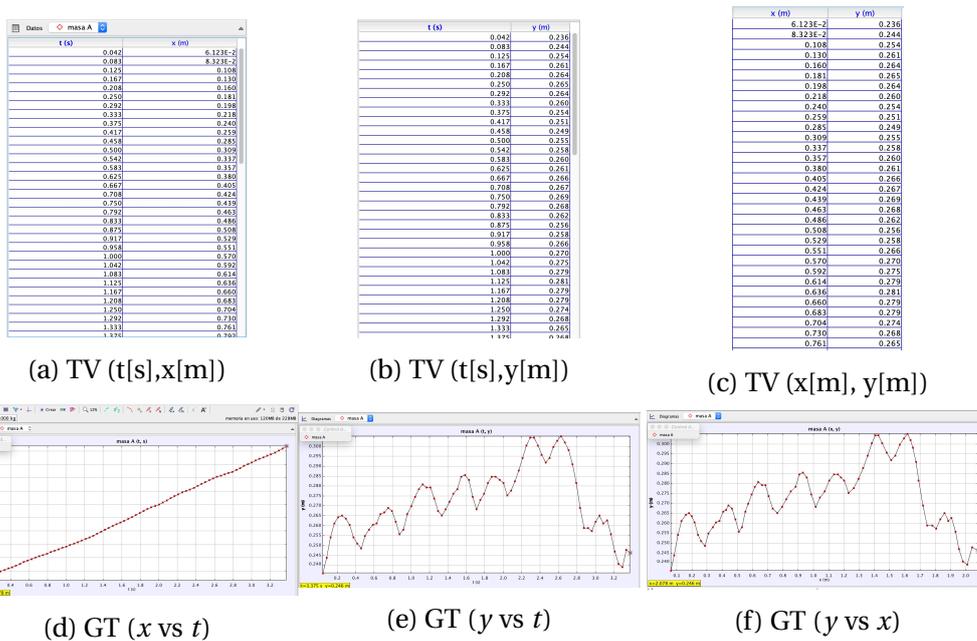


FIGURE 4.2 – Registres TV et GT attendu du MRU

3. GeoGebra : Les réponses que nous attendons à ce moment-là sont celles liées aux représentations **GG** ou **AS** (équations paramétriques, $x(t)$ et $y(t)$), comme nous le montrons dans la figure 4.3. Dans le guide de travail, nous demandons des développements algébriques pour obtenir l'équation de trajectoire $y(x)$ ¹ à partir des équations paramétriques, sans perdre son sens physique. La nature du travail que nous attendons des élèves est, principalement, en CII, puisque nous pensons qu'ils travailleront avec les équations paramétriques spécifiques. Nous attendons également qu'ils mentionnent des concepts tels que la position, la trajectoire et leur dépendance au temps.

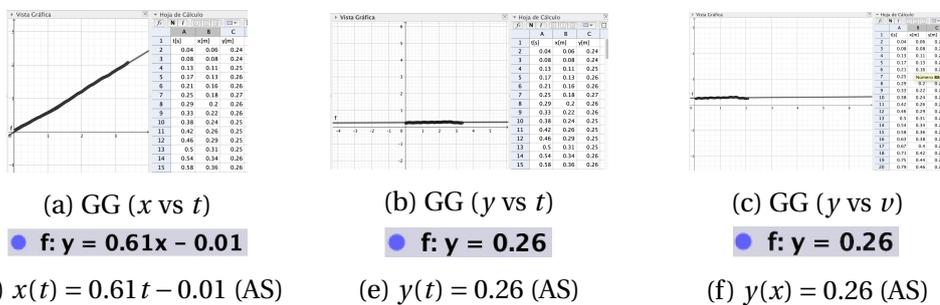


FIGURE 4.3 – Registres GG et AS attendu du MRU

1. Il faut faire particulièrement attention dans l'équation de trajectoire car elle n'est pas toujours une fonction, comme celle du MCU

4. Traitement mathématique : dans cette section, nous conduisons les élèves à la généralisation du registre **AS**. En d'autres termes, nous voulons que les élèves puissent passer du modèle mathématique spécifique du MRU, celui qu'ils ont décidé de faire, à un modèle qui représente n'importe quelle MRU. Le travail attendu peut se faire dans le cadre de CII ou de CIII, puisque le travail demandé va du modèle spécifique au modèle général ($x = vt + x_0$, $y = cte$ et $y = cte$).

4.2.2.2 MCU

En ce qui concerne le travail avec la fonction, dans l'activité 3, c'est ce à quoi nous nous attendons.

1. Réalisation du mouvement : De la même manière que dans le MRU, en effectuant le MCU, nous donnons aux étudiants la liberté d'utiliser les artefacts qu'ils jugent appropriés pour effectuer le MP, mais, pour illustrer le travail que nous espérons, nous montrons un artefact possible (deux bâtons de bois attachés à 90 degrés, 4.4). Dans la réalisation du mouvement, nous attendons des réponses, en LN, telles que les suivantes : la trajectoire n'est pas circulaire (ou s'il l'est), la vitesse n'est pas uniforme, le point de référence ne reste pas immobile. Nous pensons que nous pourrions observer une évolution par rapport à l'activité 1. Autrement dit, nous considérons que dans cette activité les réponses peuvent être plus précises et il est possible que des concepts déjà bien définis (trajectoire, position, temps) et leurs dépendances respectives émergent. Nous pensons que ces types de réponses peuvent permettre une transition beaucoup plus rapide de CI à CII.

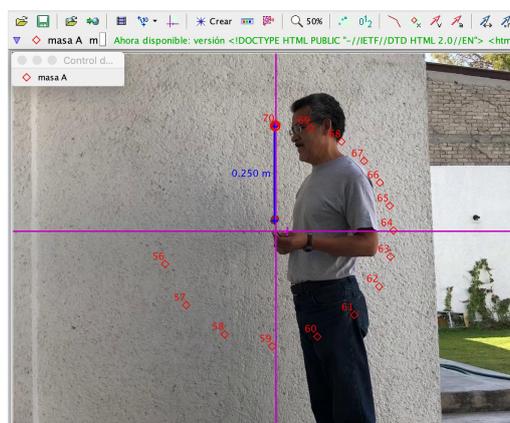


FIGURE 4.4 – Réalisation du Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

2. Tracker : l'utilisation de Tracker dans cette activité peut être plus enrichissante, puisque ce logiciel leur donne la possibilité de placer le système de référence où ils veulent, nous pensons que les étudiants pourront essayer de le situer dans différentes positions et, en se basant sur les registres de représentation TV et GT, ils décideront quelle position leur conviendrait le mieux. Les registres de représentation avec lesquels, nous pensons, ils travailleront sont TV et GT (x vs t , y vs t , y vs x , x vs θ et y vs θ , figure 4.5).

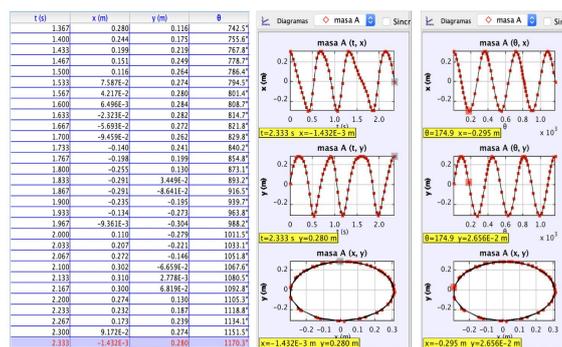
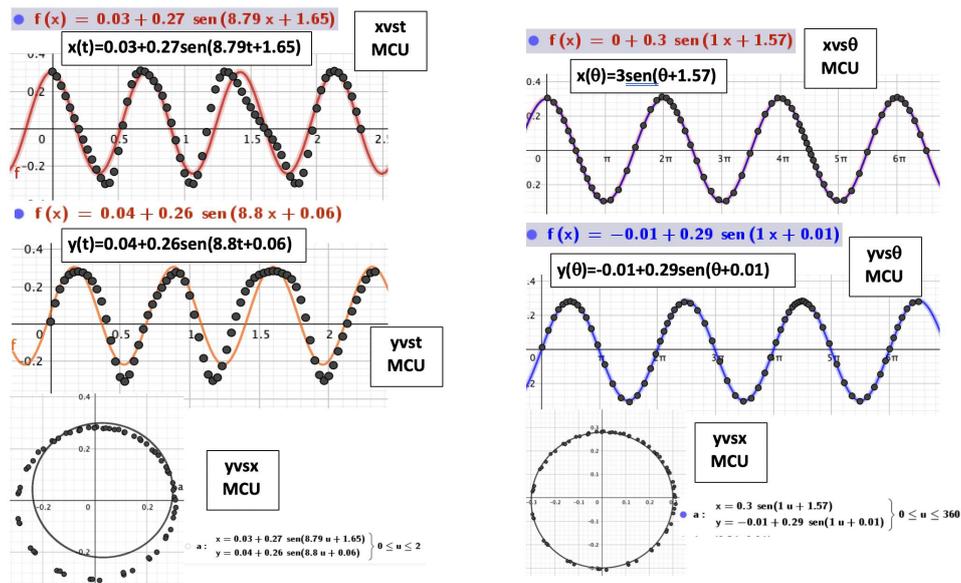


FIGURE 4.5 – registres TV et GT attendu du MCU

3. GeoGebra (figure 4.6a) : Le travail que nous pensons que les élèves peuvent faire avec GeoGebra, nous l'avons mis dans CII et peut-être dans CIII. En d'autres termes, nous avons demandé aux élèves d'obtenir les registres de représentations GG et AS qui les placeront dans CII. Lorsque les élèves travaillent avec les paramètres t et θ , ils peuvent avoir des variations qui dépendent de la nature de l'artefact matériel qu'ils utilisent pour effectuer le phénomène de mouvement. Dans le cas de notre exemple, les graphiques avec le paramètre temps ne s'adaptent pas bien aux fonctions données par GeoGebra, car la variation de la position par rapport au temps n'est pas uniforme (figure 4.6a). Cependant, nous pouvons voir sur la figure 4.6b que l'ajustement de GeoGebra est précis avec les données expérimentales, puisque le mouvement est réellement circulaire. Mais qu'en est-il des autres artefacts matériels tels qu'une balle attachée à une corde? Dans cet exemple, la trajectoire n'est très probablement pas un cercle exact et, en ce sens, les ajustements peuvent ne pas être très précis.



(a) Registres de représentation GG et AS (paramètre t) (b) Registres de représentation GG et AS (paramètre θ)

FIGURE 4.6 – Registres GG et AS attendu du MCU

4. Traitement mathématique : Nous attendons que les élèves utilisent les équations paramétriques (avec le paramètre θ) pour vérifier que la trajectoire est un cercle ($x^2 + y^2 = r^2$). Après, nous leur proposons d'effectuer des développements algébriques, en utilisant $v_t = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ et $a_c = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$, avec les dérivés des équations paramétriques (modèles AS) afin d'obtenir la vitesse tangentielle ($v_t = \omega * r$) et l'accélération centripète ($a_c = \omega^2 * r$).

4.2.2.3 MRU+MCU

- Réalisation du mouvement : En effectuant le mouvement combiné (MRU+MCU), nous incitons les élèves à effectuer les trois variantes du mouvement, (i) lorsque la vitesse du MRU et la vitesse tangentielle du MCU sont égales ($V_{MRU} = V_{MCU}$), figure 4.7a; (ii) lorsque la vitesse du MRU est supérieure à celle du MCU ($V_{MRU} > V_{MCU}$), figure 4.7b et, (iii) lorsque la vitesse du MRU est inférieure à celle du MCU ($V_{MRU} < V_{MCU}$), 4.7c. Nous illustrons ces trois mouvements avec un vélo, à laquelle nous plaçons trois points (i) un sur la roue, (ii) un à l'intérieur du pneu et (iii) un à l'extérieur du pneu. Bien que nous n'ayons envisagé qu'un seul dispositif matériel pour réaliser les trois variantes, nous pensons que les élèves peuvent utiliser plusieurs dispositifs, ce qui leur donnera la possibilité d'avoir des expériences et des perceptions différentes. Un aspect qu'il est important de mention-

ner à propos des vitesses angulaires et tangentielles, est que la vitesse angulaire peut être facilement perçue par les sens, c'est-à-dire que les processus cognitifs impliqués, en premier lieu, appartiennent au CI. Alors que la vitesse tangentielle (vecteur) fait ressortir des processus, dans une plus large mesure, au sein de CII ou CIII. Le type de réponses que nous attendons, bien qu'elles restent principalement perceptives en raison de la manipulation des artefacts matériels, devrait, selon nous, faire émerger des concepts et des idées abstraites du mouvement. Par exemple, des idées de représentations graphiques du mouvement, des fonctions bien définies, etc.

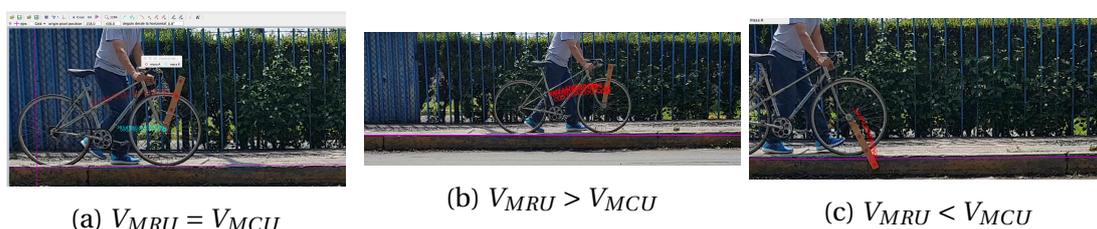


FIGURE 4.7 – Réalisation de la combinaison du MRU+MCU

2. Tracker : Dans cette activité, nous espérons que les élèves obtiendront les registres des représentations TV et GT des trois situations (figure 4.8). Nous pensons que pour cette étape, le passage par Tracker peut être rapide, puisqu'ils ont déjà réalisé 3 activités précédentes. Ainsi, bien qu'il s'agisse encore d'un dispositif technologique fondamental pour le développement de l'activité, nous pensons qu'ils ne passeront pas beaucoup de temps dans cette phase.

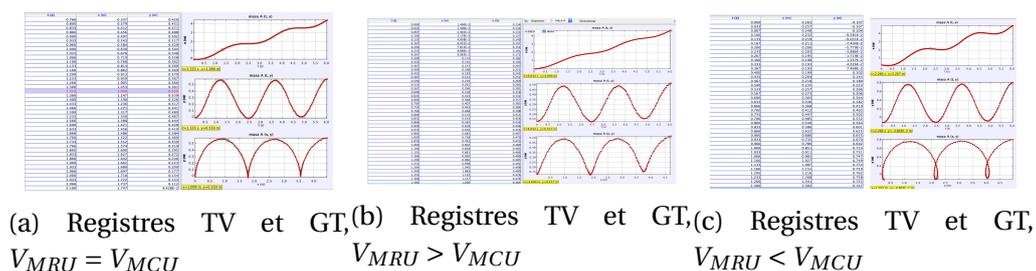
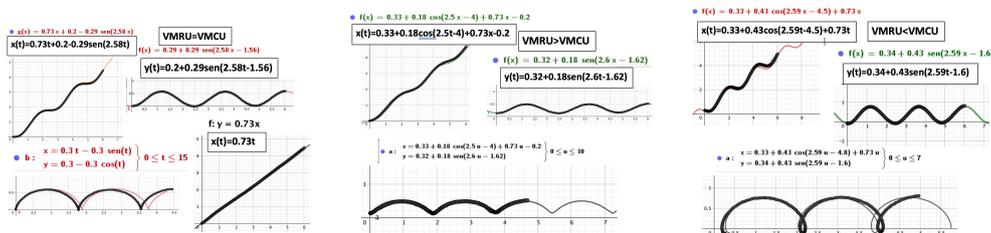


FIGURE 4.8 – Registres TV et GT attendu, MRU+MCU

3. GeoGebra : Le travail avec GeoGebra a une variante des autres activités, l'équation paramétrique $x(t)$ ne peut pas être obtenue automatiquement comme dans les cas précédents. Nous demandons aux étudiants d'obtenir l'équation en utilisant les connaissances acquises durant tout l'atelier de modélisation. Lorsque

nous sollicitons les élèves l'équation paramétrique $x(t)$, nous voulons savoir s'ils peuvent le faire. $x(t)$ du MRU+MCU peut être obtenue à travers des informations de l'équation $x(t)$ du MRU et de $y(t)$ de la combinaison du MRU+MCU. Autrement dit, avec $x(t)$ du MRU, ils peuvent savoir ce qui se déplace linéairement et avec $y(t)$ du MRU+MCU, qui est égal à $y(t)$ du MCU, ils peuvent obtenir $x(t)$ du MCU qui modélise le déplacement \cos sur l'axe horizontal. Ainsi, en additionnant (ou en soustrayant, selon la direction des mouvements) les élèves peuvent déduire $x(t)$ du MRU+MCU. Dans la figure 4.9, nous pouvons voir les registres de représentation GG et AS que nous attendons des étudiants.



(a) Registres GG et AS, $V_{MRU} = V_{MCU}$ (b) Registres GG et AS, $V_{MRU} > V_{MCU}$ (c) Registres GG et AS, $V_{MRU} < V_{MCU}$

FIGURE 4.9 – Registres GG et AS attendu, MRU+MCU

4. Traitement mathématique : Finalement, nous voulons que les élèves obtiennent (i) le registre AG à partir des équations paramétriques des trois variations des mouvements ($x(t) = v_0 t - r \sin(\omega t)$ et $y(t) = r - r \cos(\omega t)$), (ii) les équations générales pour calculer la vitesse tangentielle ($v_t = v_0 \sqrt{2(1 - \sin(\omega t))}$) et (iii) voir s'ils sont capables de calculer $y(x)$ et de dire s'il s'agit ou non d'une fonction. Nous pensons que le travail que les élèves peuvent développer dans cette section est un travail algébrique et, comme ils ont déjà fait les 3 activités précédentes, nous attendons un travail dans CIII, c'est-à-dire avec les équations paramétriques générales (AG). Nous attendons également que les élèves puissent dire si la courbe de trajectoire est la courbe d'une fonction ou non à partir d'une preuve pragmatique (avec l'utilisation des artefacts technologiques) ou d'une preuve plus formelle.

4.2.3 Analyse des activités par rapport de l'ETC et au cycle de modélisation

Dans cette section, nous présentons l'analyse a priori des activités, en considérant, en premier lieu, la ou les consigne(s). En second lieu, le paradigme CI, CII ou CIII (qui définit le type de pensée, les artefacts, la représentation et les processus cognitifs attendus, section 2.2.2), les éléments de l'ETC que nous avons voulu activer et le type de registre de représentation attendu (MP, LN, TV, GT, GG, AS et AG). Enfin, les diagrammes en montrant le ou les plans de l'ETC qui devaient être mobilisés et la phase du cycle de modélisation correspondant. Dans l'analyse des activités présentées ci-dessous, la partie des paradigmes ne sera pas expliquée en détail, car ils sont décrits dans la section (2.2.2). Cependant, pour faciliter la lecture, nous présentons une brève description de chacun des paradigmes :

- CI est le paradigme du réel. Dans ce paradigme, il y a des éléments et des processus liés au phénomène réel du mouvement ou au modèle réel du mouvement et les artefacts sont, généralement, matériels. Ce paradigme est étroitement lié aux perceptions sensorielles générées par l'observation ou la réalisation du mouvement du phénomène du mouvement et au sens qualitatif donné à certains objets mathématiques comme les graphiques ou les concepts physiques comme la vitesse, l'accélération, la force, etc. Les justifications peuvent être empiriques ou pragmatiques.
- CII est le paradigme de la mesure et de la quantification. Ce paradigme contient tous les éléments liés à la quantification du mouvement. Généralement, nous travaillons avec des artefacts matériels de mesure et/ou des artefacts symboliques qui conduisent à la quantification des variables impliquées dans le mouvement. Ce paradigme est caractérisé par des développements arithmétiques et algébriques avec le modèle mathématique expérimental et non avec le modèle idéalisé et général du mouvement. Les justifications et les preuves sont liées à des calculs numériques en accord avec la réalisation du mouvement ou le phénomène analysé.
- CIII est le paradigme de la formalisation et de l'idéalisation. Ce paradigme est caractérisé par un langage mathématique formel et par l'utilisation du modèle idéalisé du phénomène du mouvement. Les artefacts sont symboliques et les processus mathématiques sont axiomatiques-déductifs. Les justifications sont

données en langage mathématique formel et en concepts théoriques et éléments de physique.

4.2.3.1 Activité 1, MRU

Le MRU est bien connu des élèves, cependant, dans cette activité, nous introduisons des équations paramétriques (inconnues des élèves) afin de générer un travail bidimensionnel en utilisant le paramètre temps. Les équation paramétrique sont présentées d'une manière très simple étant donné la nature du mouvement. De la même manière, cette activité est pensée pour familiariser les élèves avec le processus de modélisation et les outils technologiques. L'activité, dans sa version espagnole, se trouve en annexe A.1.

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. Réaliser l'enregistrement du MRU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...

Dans **la réalisation du mouvement**, nous attendons, en général, un travail au sein de **CI**. En ce qui concerne la notion de **fonction**, nous souhaitons à ce qu'elle soit présentée dans les registres **MP** et, éventuellement, dans **LN**. En d'autres termes, nous espérons que les élèves soient en mesure de générer le MRU à partir d'artefacts matériels et, qu'ils soient, ensuite, capables d'écrire ou de dire en **LN**, la relation entre les variables qui émerge des perceptions qui sont générés lors de la réalisation du mouvement. En particulier, nous attendons l'activation du plan [**Sem-Ins**] puis le plan [**Sem-Dis**]. Bien que nous pensions que la *genèse instrumentale* sera activée par les processus (i) d'*instrumentalisation*, de l'idée d'un MRU (connue des étudiants) au choix conscient des artefacts matériels pour sa réalisation et (ii) d'une *instrumentation*, avec l'utilisation de ces artefacts pour *construire* le mouvement. Nous pensons que le processus qui dirige cette activation est celui d'*instrumentalisation* [1] (en raison du référentiel théorique derrière le choix), c'est pourquoi c'est celui que nous plaçons dans le diagramme (Figure 4.10). Chaque *artefact* matériel conduira les élèves vers la *genèse sémiotique* à travers différents *perceptions* du mouvement [2]. Ces perceptions doivent être *codées* de manière à ce que les élèves produisent des *représentations* du MRU (**MP**) [3] qui peuvent être comparées avec leur *référentiel théorique* pour une validation [4]. Nous pensons qu'après la validation du registre **MP**, les élèves peuvent faire un changement du registre de représentation au **LN** (oral ou écrit) [5].

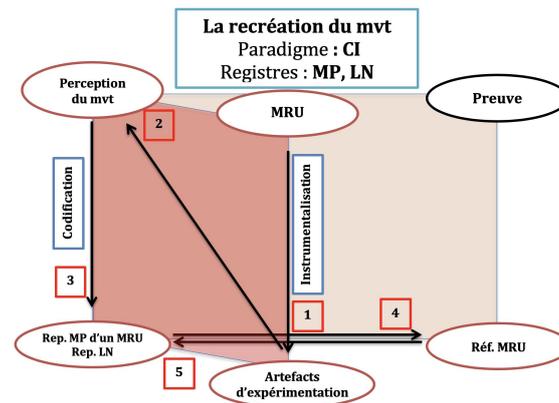


FIGURE 4.10 – Recréation du MRU

Après la validation du mouvement, il doit être analysé avec **Tracker** (4.11), nous pensons que cet artefact technologique déclenchera un processus d'*instrumentation*, peut être en CI ou en CII, afin du *construire* certaines relations entre les variables de mouvement [6]. Le même Tracker, avec la manipulation correcte des élèves, les mènera à la genèse sémiotique [7]. En produisant une *codification* du mouvement (enregistrement du Mouvement) à des représentations **TV** et **GT** [8].

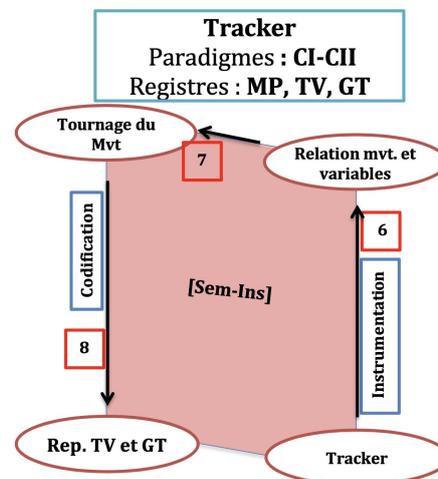


FIGURE 4.11 – Tracker, partie 1

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 2. *Regardez la table des valeurs que vous avez avec Tracker :*

a) *Il y a trois variables t , x et y . Quelle est leur signification physique ?*

b) *Observez, dans Tracker, et tracez les graphiques suivants et écrivez leur signification : x vs t , y vs t et y vs x*

Construisez les graphiques en GeoGebra de x vs t , y vs t et y vs x avec les données du Tracker, et faites l'ajustement linéaire.

I GeoGebra donne les équations avec les variables x et y . Réécrivez-les avec les variables appropriées pour le mouvement effectué. Nommer également les axes de coordonnées avec la variable physique correspondante.

II Expliquer la signification de chacun des graphiques obtenus par rapport au mouvement.

III Lequel des trois graphiques modélise le mouvement de l'objet ? pourquoi ?

Paradigme CI-CII. Dans la question 2 a et b, nous cherchons à ce que les élèves ne laissent pas la **codification** effectué par Tracker (dans la phase précédente[8]) comme un processus mécanique. En d'autres termes, cette question cherche à activer le plan [Sem-Dis] (4.12) en générant un processus de **décodage** et **interprétation** des représentations TV et GT. Nous pensons que le **décodage** commencera du **référentiel** [9] et il se comparera avec les **perceptions** du MP [10]. Simultanément, nous attendons un discours de la part des élèves, que nous pensons que pouvoir provenir des **perceptions** de la réalisation du mouvement mais aussi de leur **référentiel théorique** (parce que c'est un mouvement bien connu d'eux) [11].

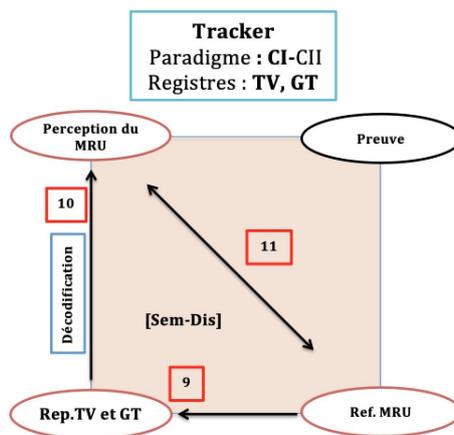


FIGURE 4.12 – Tracker, partie 2

La consigne suivante recherche à activer le plan [Sem-Ins] du paradigme CII à partir des processus d'*instrumentation*, codification et de décodage (4.13), à l'aide de GeoGebra, lors de la demande des ajustements. En d'autres termes, nous voulons que les élèves génèrent un processus cognitif de **construction**, à travers GeoGebra (ajustement linéaire), des données de la Table de Valeur (TV) [12]. L'ajustement linéaire contiendra des informations sur les MP (qui proviennent principalement des perceptions, dans la réalisation du mouvement et visualisation dans Tracker[13]), que nous voulons que les élèves découvrent. D'abord, GeoGebra va faire une *codification* instantanée pour obtenir les représentations GG et AS[14]. Après, les points I, II et III cherchent à *décoder, interpréter* [15] et *justifier* [16]. Nous nous attendons à ce que ces processus activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] au sein de CII (principalement), mais il est possible qu'également au sein de CIII.

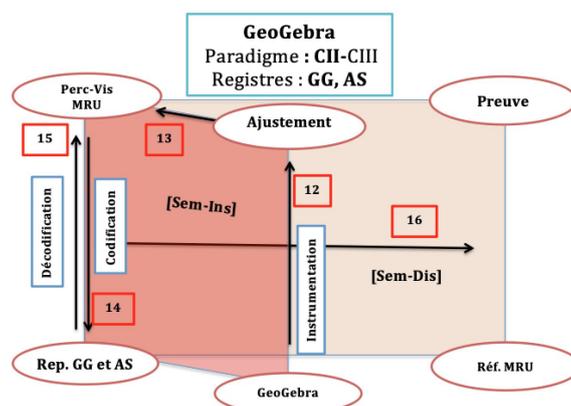


FIGURE 4.13 – GeoGebra

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Obtenez l'équation de la trajectoire $y(x)$ (équation rectangulaire) en utilisant $x(t)$ et $y(t)$ (équations paramétriques). Que se passe-t-il lorsque vous essayez de l'obtenir?

4. Notez l'équation expérimentale qui modélise le mouvement et comparez-la à la formule théorique de la distance MRU ($d = vt$).

Est-il possible de connaître la vitesse et l'accélération du mouvement et comment?

Dans le consigne 3, nous attendons un traitement algébrique, au sein de CII ou CIII, avec les équations paramétriques obtenues dans GeoGebra (AS) pour arriver à l'équation rectangulaire correspondant à la trajectoire (il est important de ne pas oublier que les représentations AS sont les modèles mathématiques expérimentaux, soit de la position en x ou y par rapport au temps, la position en y par rapport à la po-

sition en x ou de la vitesse en x ou y par rapport au temps). Alors, bien qu'aucune quantification explicite du mouvement ne soit faite, nous attendons un travail avec le modèle mathématique expérimental, qui est constitué de données quantitatives sur le phénomène réalisé.

La question 3 cherche, par un processus algébrique, à **prouver** que $y(x)$, obtenu avec GeoGebra dans la phase précédente, est correct avec un développement algébrique. Ce processus cherche à activer la *genèse discursive* du **référentiel théorique** (du MRU et de l'algèbre) à la **preuve** au sein de **CII** [17] (4.14).

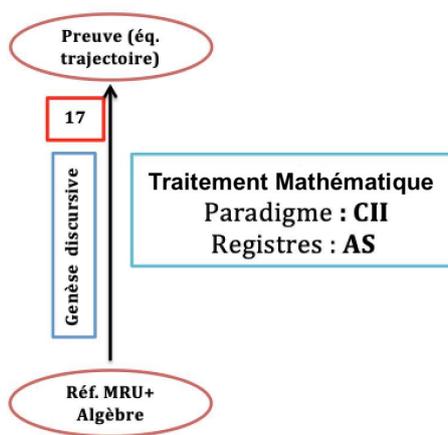


FIGURE 4.14 – Traitement Mathématique, partie 1

Avec la question 4, nous voulons induire une transition vers **CIII** et l'activation du plan **[Sem-Dis]** parce que nous demandons aux élèves de travailler avec la représentation AS et AG. C'est-à-dire, nous voulons générer un processus de **décodage** de la **représentation** AS ($x(t)$) en la comparant (par visualisation) avec la **représentation** AG ($d = vt$) [18]. Le pas vers **CIII**, ou la permanence en **CII**, peut être observé avec les réponses et justifications à les questions de la vitesse et de l'accélération du mouvement (nous pensons que ces questions peuvent diriger les élèves vers leur référentiel théorique) [19].

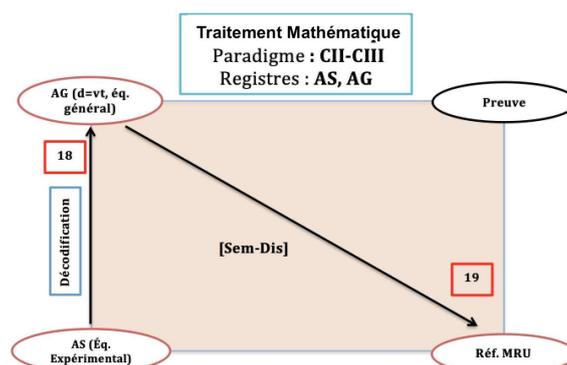


FIGURE 4.15 – Traitement Mathématique, partie 2

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. Que pouvez-vous dire du mouvement, en considérant tout ce que vous avez fait ?

6. Si vous pouviez recommencer l'expérience, quelles améliorations apporteriez-vous ?

Devoir : Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.

Avec ces questions, nous cherchons que les élèves génèrent un discours à partir du processus de modélisation (4.16). C'est-à-dire, nous voulons que les réponses activent les plans [Ins-Dis] et [Sem-Dis] afin de valider le processus de modélisation suivi tout au long de l'activité. Cette validation (*genèse discursive*) peut provenir : de la *genèse instrumentale*, à partir de l'utilisation de logiciels ou d'artefacts matériels; et/ou de la *genèse sémiotique* de la mention des différents registres de représentation par lesquels ils ont transité pendant l'activité. Selon le type de validation, les étudiants seront placés en CI, CII ou/et CIII [20]. Un élément important que nous recherchons avec ces questions ouvertes, dans notre recherche, est d'observer si un lien est généré entre les différents enregistrements de représentation, l'utilisation de la technologie et les domaines concernés.

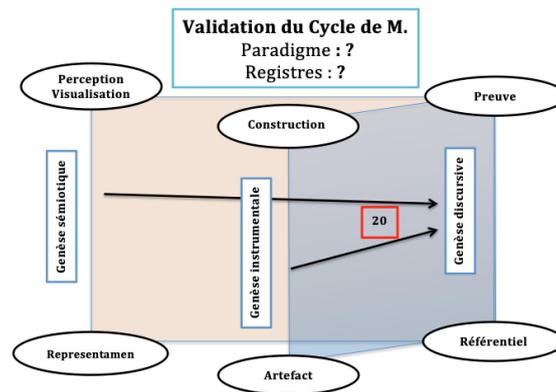


FIGURE 4.16 – Validation du cycle de modélisation

En résumé, nous présentons les figures 4.18 et 4.17 où nous montrons le développement que nous voulons générer de l'objet mathématique fonction et, des éléments ETC que nous voulons activer au cours du cycle de modélisation Blum et Leiss (2007). Comme nous pouvons le voir, nous désirons conduire les élèves à un travail qui passe par les trois paradigmes et qui transite par les registres de représentation de la fonction avec laquelle nous travaillons (MP, LN, TV, GT, GG, AS et AG). En raison de la nature du mouvement et du fait qu'il a été largement étudié par les élèves, nous pensons que la plupart des travaux seront effectués dans le paradigme CI et CII.

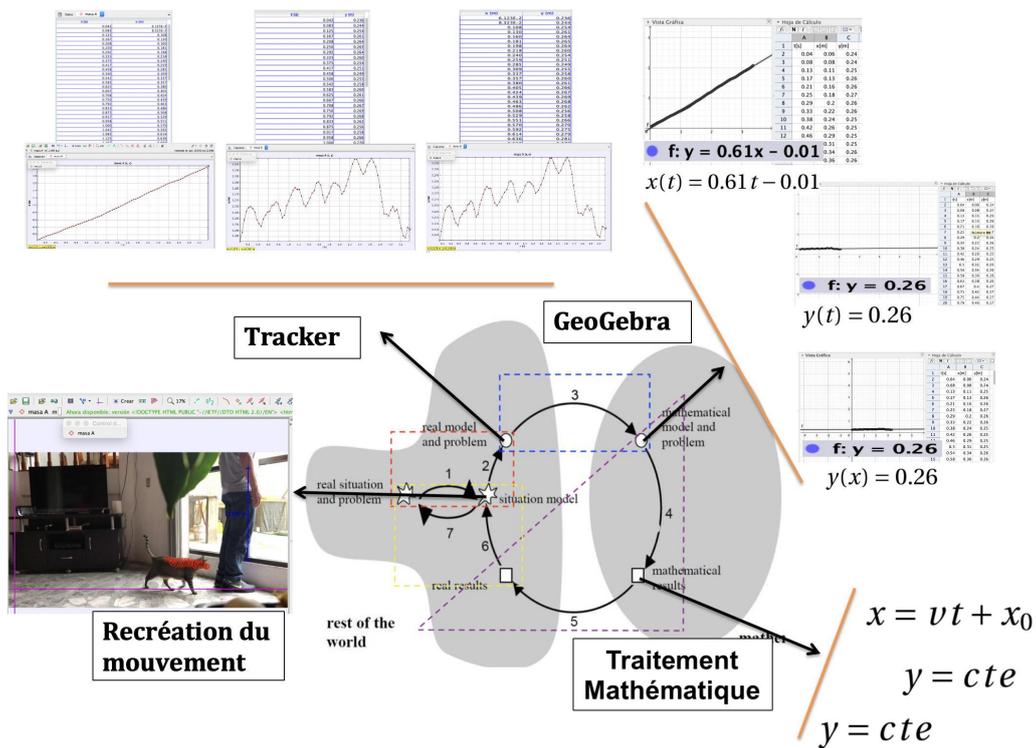


FIGURE 4.17 – La fonction dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MRU (analyse a priori)

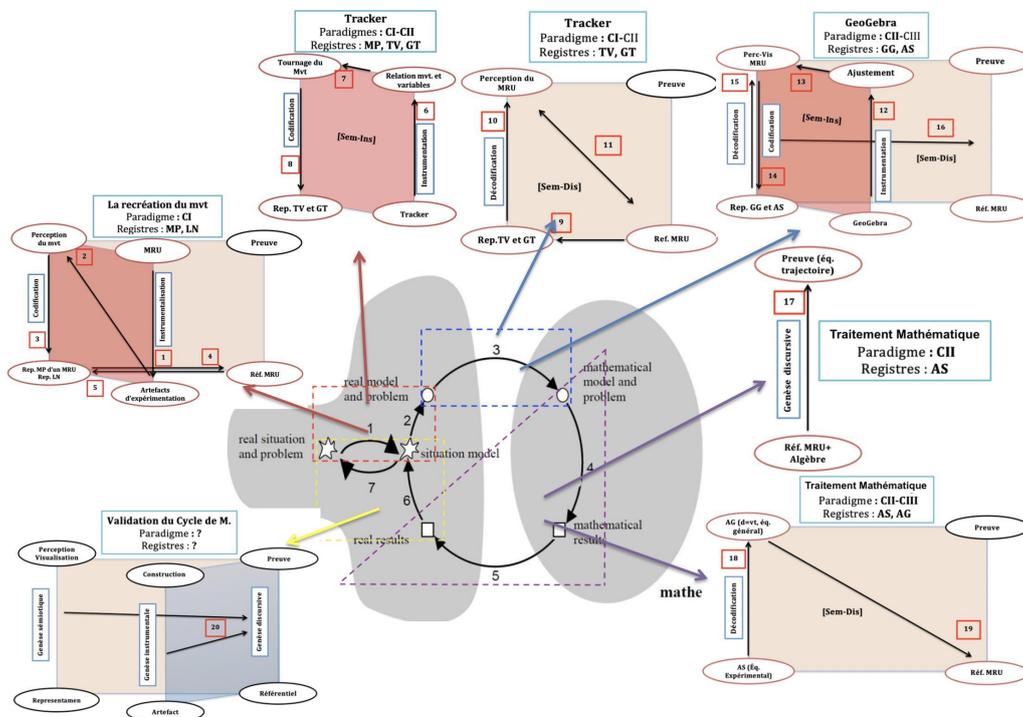


FIGURE 4.18 – Éléments de l'ETC activés dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MRU (analyse a priori)

4.2.3.2 Activité 3, MCU

Le MCU est un phénomène qui, en général, est compliqué pour les élèves car ils n'ont pas une grande connaissance de ce sujet, contrairement aux activités 1 et 2. Cette activité est la deuxième plus importante des quatre, car elle contient une grande quantité de nouvelles connaissances mathématiques et physiques pour les élèves de ce niveau scolaire. Cette activité se concentre sur le travail des objets mathématiques (dans deux dimensions) : fonctions paramétriques (avec le paramètre temps t et l'angle θ) ; fonctions sinus et cosinus ; identités trigonométriques ; développements algébriques ; dérivés ; représentations : numériques, graphiques et fonctionnelles. En physique : vitesse tangentielle et angulaire, accélération centripète, équation de trajectoire et équations de mouvement. L'activité, dans sa version espagnole, se trouve en annexe A.3.

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. Réaliser l'enregistrement du MCU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...

2. Pensez-vous que le sens du mouvement sera un élément pertinent dans votre analyse ? Argumenter votre réponse

Paradigme CI. Dans la première consigne, nous attendons que les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] du paradigme CI soient activés (figure 4.19). En d'autres termes, en choisissant consciemment les artefacts matériels, les élèves génèrent un processus d'*instrumentalisation* [1]. Chaque instrument conduirait les élèves à des *perceptions* différentes [2], qui seraient *codifiées* dans leur esprit² [3] afin qu'ils puissent les comparer avec leur référentiel (en validant le MP) [4]. Il est possible qu'après la validation des mouvements, la notion de fonction émerge dans LN [5]. Avec la question 2, nous voulons qu'avant de commencer l'analyse avec Tracker, les élèves puissent faire un processus de *décodage* pour les faire prendre conscience de ce qui peut générer, dans l'analyse qui suit, le sens de la rotation [6].

2. Les perceptions, dues à la réalisation du mouvement, sont codées dans le esprit des élèves puisque, les élèves perçoivent certains signes qu'ils interprètent dans leur esprit comme mouvement, vitesse, trajectoire, etc. et à partir de ce codage ils décident, si c'est ou non le mouvement qu'ils recherchent

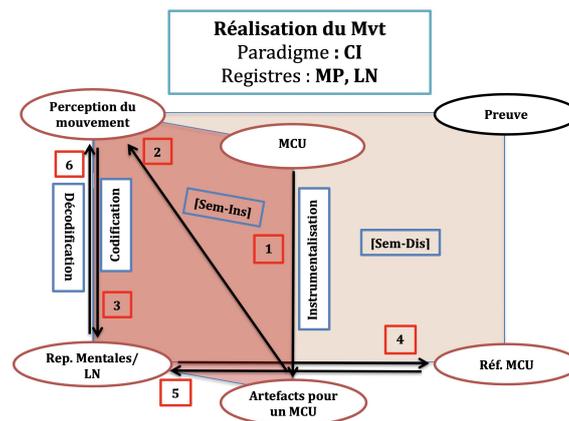


FIGURE 4.19 – Réalisation du MCU

Nous espérons qu'avec l'utilisation de Tracker, un processus d'*instrumentation* sera produit [7] qui établira une relation des variables du mouvement, ce qui générera une *codification* [8] du MP (enregistré en vidéo) aux registres TV et GT (en générant une transition de CI à CII), figure 4.20.

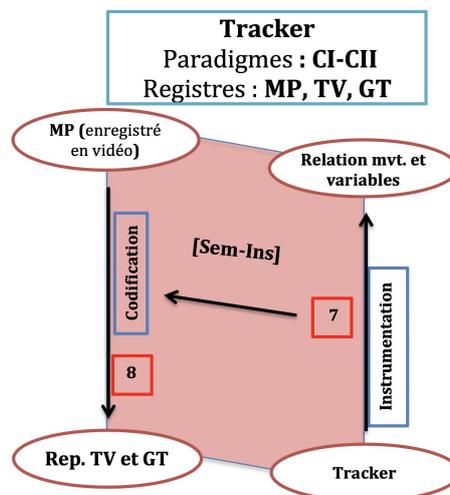


FIGURE 4.20 – Tracker (partie 1), MCU

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : **3. Identifier les variables impliquées dans le MCU et écrire la signification**

4. pourquoi x et y changent-ils de signe ?

5. Regardez les graphiques :

a) x vs t et y vs t Quelles sont les différences entre eux ?

b) x vs θ et y vs θ quelle différence trouvez-vous avec les graphiques précédents ? pourquoi ?

Avec les questions 3, 4 et 5, nous voulons activer le plan **[Sem-Dis]** de **CI** ou **CII** (4.21). C'est-à-dire que nous voulons amener les élèves à un processus de décodage [10], des registres **TV** et **GT**, qui émerge de leur référentiel [9] et que sur la base de ce processus, les étudiants peuvent générer un discours en répondant aux questions de cette phase [11] (en fonction des réponses données par les élèves, nous les placerons dans CI ou CII).

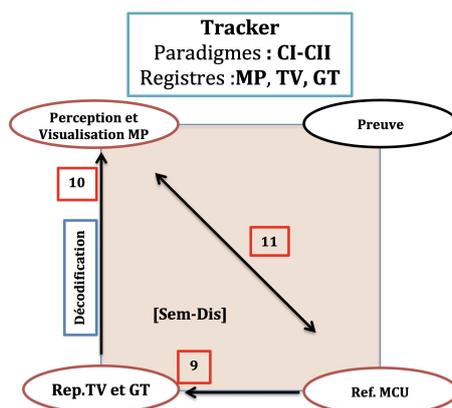


FIGURE 4.21 – Tracker (partie 2), MCU

Première partie. **Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 6. Importer le tableau des valeurs de Tracker dans GeoGebra, faire le graphique, faire l'ajustement avec la fonction sinus et Compare :**

a) x vs t et y vs t : Écrivez la signification de chacun des termes des fonctions fournies par GeoGebra au moment où vous effectuez l'ajustement.

I Écrivez une des fonctions en termes de cosinus (vous pouvez utiliser GeoGebra pour vérifier les différentes options)

Aide : N'oubliez pas de considérer que : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Recherchez des informations sur la translation des fonctions sine et cosinus (si nécessaire).

b) x vs θ et y vs θ : comment sont-ils par rapport aux précédents ? pourquoi ? (convertir les degrés en radians)

I Observer les ajustements obtenus, simplifier les équations et compléter le tableau, voir annexe A.3

c) Si la vitesse angulaire est $\omega = \frac{\theta}{t}$ et donc $\theta = \omega t$, alors les équations paramétriques (avec le paramètre θ) peuvent être écrites comme : $x =$, $y =$

7. En considérant les équations avec le paramètre θ

a) Transformez les équations paramétriques en une équation rectangulaire correspondante $y(x)$. Rappelez-vous que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

b) Que représente mathématiquement cette équation ? quelle est sa signification physique ?

Avec les questions 6 et 7, nous cherchons à faire un passage du paradigme **CII** vers **CIII** en activant les plans **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]**, figure 4.22. C'est-à-dire qu'avec l'utilisation de GeoGebra, nous voulons induire un processus d'*instrumentation* en effectuant un ajustement sinusoïdal aux données expérimentales (données par Tracker) [12]. Ce logiciel va générer un conversion du **TV** (Tracker) vers les registres **GG** et **AS** [13]. Puis, nous recherchons un processus de *décodage* [14] des registres **AS** (équations paramétriques $x(t)$, $y(t)$, $x(\theta)$ et $y(\theta)$) et **GG**. Avec la question 7, nous voulons qu'à partir du processus précédent et du référentiel théorique, ils puissent obtenir l'équation de trajectoire $x^2 + y^2 = r^2$ par un processus algébrique et *prouver* que la trajectoire est un cercle [15], ce qui les fera transiter vers **CIII**.

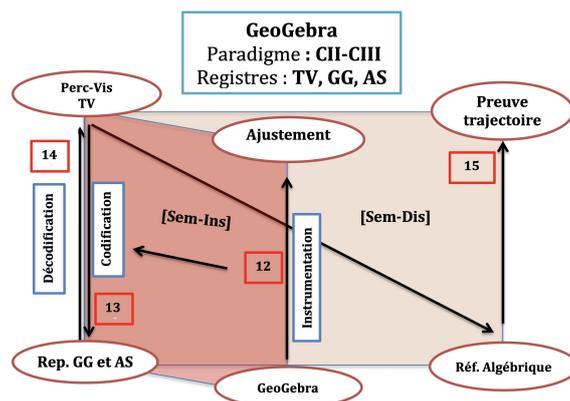


FIGURE 4.22 – GeoGebra, MCU

Deuxième partie. **Phases 4 et 5 8. Dérivez par rapport à t les équations paramétriques respectives, que représentent ces dérivées, d'un point de vue physique ?**

9. La magnitude de la vitesse est $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Développez-le algébriquement jusqu'à sa plus simple expression. Comparez-la avec la formule de vitesse tangentielle qui apparaît dans les livres de physique.

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{dt}\right)^2}$ avec le même raisonnement algébrique de la question précédente, déterminer l'expression qui représente l'accélération. Comparez avec les formules qui apparaissent dans les livres de physique.

Avec les questions 8, 9 et 10, nous voulons que les élèves activent le plan **[Sem-Dis]** de **CII** à **CIII** (figure 4.23). C'est-à-dire que nous voulons qu'à partir des représentations sémiotiques des dérivées paramétriques, que les élèves doit *décoder* en leur donnant

un sens physique [16], ils puissent obtenir les équations générales, de la vitesse tangentielle ($v_t = r\omega$) et de l'accélération centripète $a_c = r\omega^2$ dans le but de **prouver** [17] que leurs modèles les conduisent aux équations générales correctes.

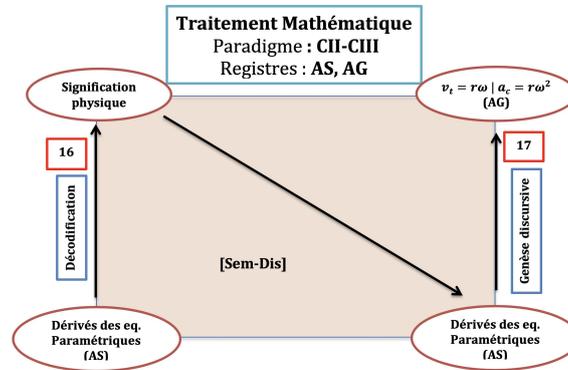


FIGURE 4.23 – Traitement Mathématique, MCU

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 11. Compléter le tableau suivant (annexe A.3) pour 5 valeurs de temps Les valeurs de ω , v_t et a_c sont-elles constantes? Donner une explication

Avec la question 11, nous voulons que les élèves fassent des calculs arithmétiques afin de montrer si leurs modèles mathématiques leur donnent des valeurs en accord avec le mouvement qu'ils ont fait. L'objectif de cette question est qu'ils réfléchissent à partir de leurs données et les **valident** à partir de l'ensemble du processus de modélisation qu'ils ont réalisé dans le cadre de cette activité. Avec cette question, nous voudrions activer les plans **[Sem-Dis]** et **[Ins-Dis]**, les deux dans le but de justifier leurs réponses [18]. Les paradigmes activités, nous les verrons dans les réponses des élèves, mais nous nous attendons à ce qu'ils soient les CII et CIII). Les registres de représentation attendus sont ceux par lesquels les élèves sont passés pendant l'activité de modélisation et ne seront visibles que dans les réponses des élèves (c'est pourquoi, dans la figure 4.24, nous l'avons laissé ouvert)

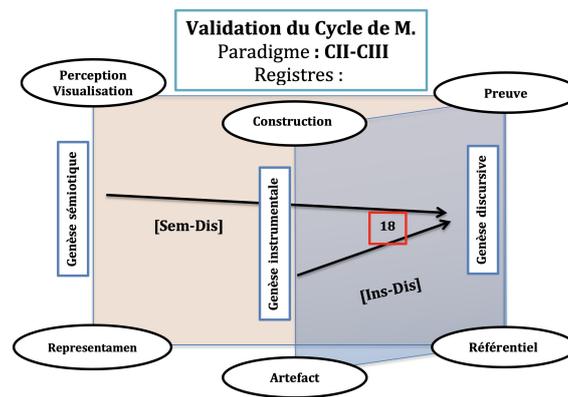


FIGURE 4.24 – Validation du Cycle de modélisation, MCU

En résumé, nous présentons les figures 4.25 et 4.26. Dans l’activité 3, comme nous le montrons dans les figures, nous voulons non seulement que les élèves travaillent avec un plus grand contenu d’objets mathématiques, mais aussi qu’ils travaillent en deux dimensions et avec deux paramètres (t et θ). Dans cette activité, nous leur demandons de prouver algébriquement la trajectoire du mouvement et d’en déduire les équations de la vitesse tangentielle et de l’accélération centripète. Comme l’activité précédente, nous voulons faire transiter les registres de représentation : MP, LN, TV, GT, GG, AS et AG ainsi que tous les plans d’ETC, surtout dans les paradigmes CII et CIII.

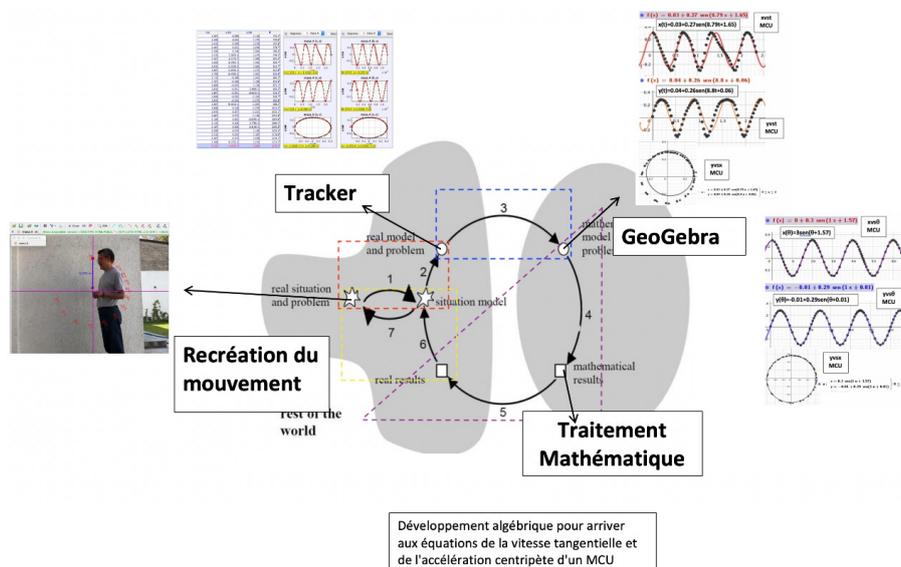


FIGURE 4.25 – Éléments de l’ETC activés dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MCU (analyse a priori)

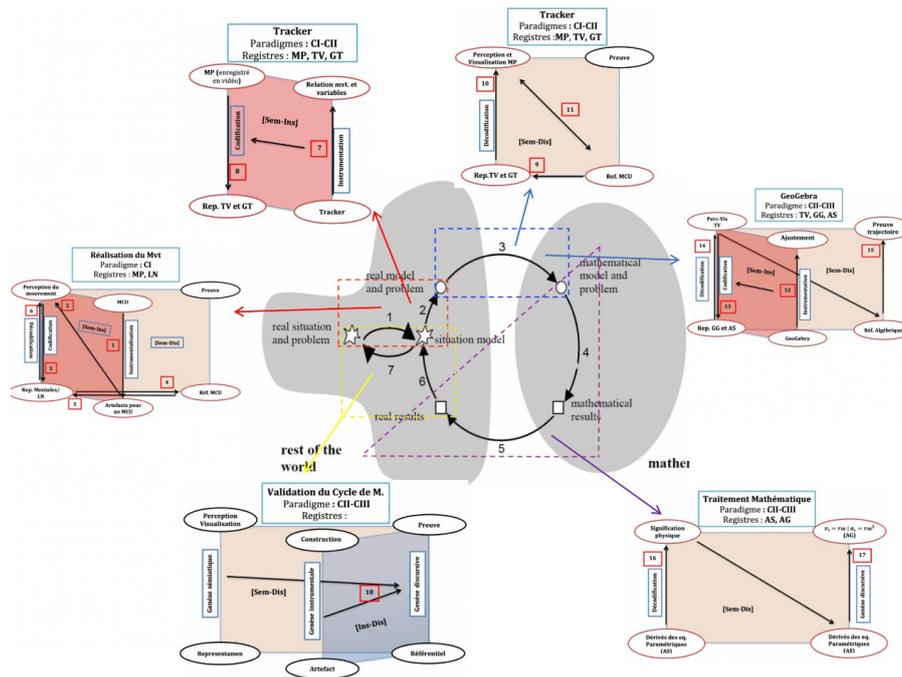


FIGURE 4.26 – La fonction dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MCU (analyse a priori), activité MCU (analyse a priori)

4.2.3.3 Activité 4, MRU+MCU (cycloïde)

Dans l'activité 4, nous devons considérer que les élèves connaissent déjà (i) le processus de modélisation (ii) l'utilisation du logiciel Tracker et GeoGebra (iii) le MRU et le MCU de façon individuelle. Sur la base de ce qui précède, la quatrième activité est conçue pour observer dans quelle mesure les élèves peuvent faire émerger de nouvelles connaissances autour des fonctions. Il est important de mentionner que dans cette activité, les élèves ont eu plus de liberté pour effectuer le processus de modélisation.

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : *1. Comment exécuteriez-vous un mouvement qui combine MRU et MCU?*

2. Quels sont les phénomènes que vous identifiez qui présentent cette combinaison de mouvements?

3. Notez tout ce que vous savez sur le MRU et le MCU (équations, caractéristiques, diagrammes....) Aide : tirez parti de données que vous avez obtenues lors d'activités précédentes.

4. Considérant que vous avez une composition d'un MRU et d'un MCU, quelles variantes possibles peuvent avoir les vitesses du phénomène global? Expliquez comment vous obtiendriez chacune des combinaisons suivantes

Avec les questions 1, 2, 3 et 4, nous cherchons à activer les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] des paradigmes CI et de CII, figure 4.27. Autrement dit, nous espérons que, grâce à leurs expériences antérieures, les élèves pourront imaginer comment ils pourraient réaliser le mouvement combiné. Nous pensons qu'en faisant cela, ils peuvent utiliser des artefacts matériels pour simuler le mouvement (MP). En ce sens, les élèves génèreraient un processus d'*instrumentalisation* [1] qui pourrait mener les étudiants à des perceptions qu'ils gardent dans leur mémoire et qui représentent ce mouvement. Ces représentations, dans leur mémoire, peut aider les élèves à donner des exemples des phénomènes qui ont ce genre de mouvement combiné [2]. À partir de là, les élèves pourront répondre à la question 3 et 4, en écrivant les caractéristiques de chaque mouvement et les éventuelles variations de vitesse que le mouvement combiné peut avoir [3]. Nous avons fait ce diagramme parce que nous considérons qu'avant de faire le mouvement qui sera enregistré et analysé avec Tracker, les élèves peuvent l'illustrer sans être très précis dans les variables. C'est-à-dire que nous pensons qu'ils feront le mouvement juste pour avoir une idée de ce qui peut arriver. Nous pensons que cela se

produira parce que, contrairement aux mouvements précédents, la combinaison d'un MRU avec un MCU est un phénomène nouveau pour eux.

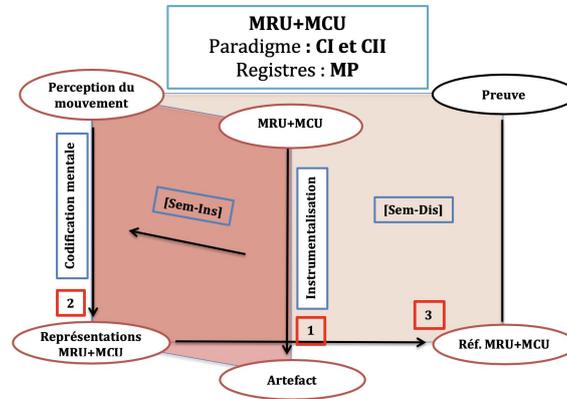


FIGURE 4.27 – Illustration de la combinaison des mouvements, MRU+MCU

Lors de l'exécution des trois variantes du mouvement, nous considérons que les élèves peuvent utiliser un ou plusieurs artefacts matériels, ce qui peut les amener à des perceptions différentes. L'activation que nous attendons est du plan **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]** de **CI** : un processus d'*instrumentalisation* avec l'utilisation de l'artefact matériel [4], une codification des variables du **MP** à des représentations de mouvement combiné [5] et la comparaison de ce dernier avec sa *référentiel théorique* pour valider ou recommencer le processus avec un autre artefact [6]. Avec l'utilisation de Tracker, nous avons pensé que les élèves effectueraient un processus d'*instrumentation* [7] qui générerait un *codage* du **MP** vers les enregistrements **TV** et **GT** [8] en déclenchant une transition de **CI** à **CII** (Figures 4.28a et 4.28b).

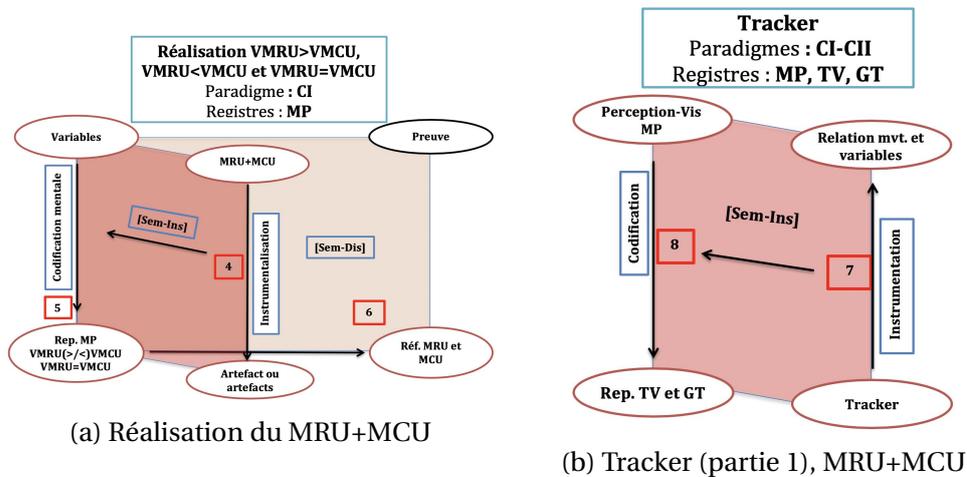


FIGURE 4.28 – Phases 1 et 2, MRU+MCU

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. Quels graphiques devez-vous prendre en compte dans le MRU et le MCU? pourquoi?

6. Faites les graphiques et les ajustements nécessaires dans GeoGebra, tracez les graphiques et copiez les équations que vous pouvez obtenir avec GeoGebra.

7. Quelle est la forme du graphique y vs t ? pourquoi il a cette forme?

a) Quelles données sur les mouvements pouvez-vous obtenir grâce à l'ajustement que GeoGebra vous donne?

Dans la question 5, nous attendons des étudiants qu'ils génèrent un processus de **décodage** des graphiques Tracker [9], afin de choisir ceux qui conviennent le mieux à leur processus de modélisation (en justifiant leurs réponses [10]), figure 4.29.

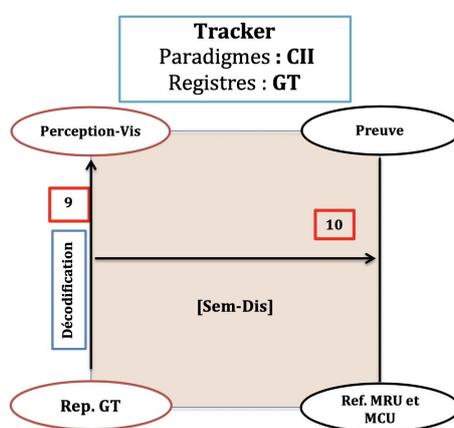


FIGURE 4.29 – Tracker (partie 2), MRU+MCU

Nous pensons que ces processus peuvent être générés dans CII, car ils sont capables d'utiliser des concepts bien définis et des éléments de mouvement qui sont déjà quantifiés. Avec les questions 6 et 7, nous pensons que les élèves peuvent activer le plan [Sem-Ins] et [Sem-Dis] du paradigme CII (figure 4.30). Avec l'utilisation de GeoGebra, il est possible qu'un processus d'**instrumentation** émerge [11], qui construit quelques ajustements aux données expérimentales. L'utilisation de cet artefact technologique produit un **codage** du registre TV vers le GG (tous les graphiques) et le AS (sauf l'équation $x(t)$) [12]. À partir des codages obtenus, nous attendons des élèves qu'ils activent la **dimension discursive** en répondant à la question 7 à partir de son référentiel [13].

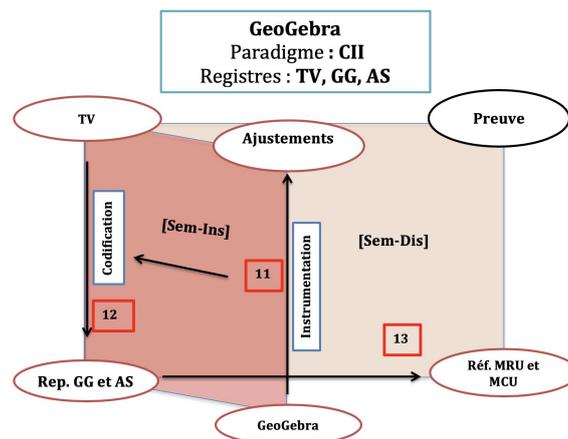


FIGURE 4.30 – GeoGebra, MRU+MCU

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 8. Faites le graphique x vs t Pourquoi n'est-il pas linéaire? Essayez de faire l'ajustement

a) Combien de mouvements faut-il prendre en compte sur l'axe des x ?

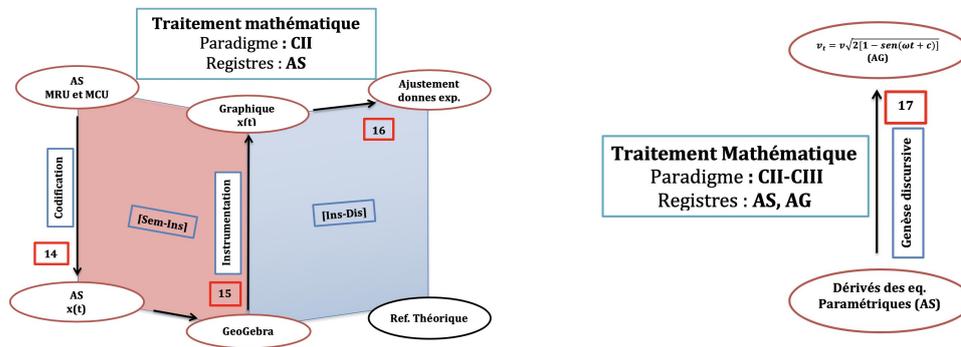
b) Si vous connaissez la distance qui avance en x dans le MRU et la distance qui avance (ou régresse) dans le MCU, quelle serait la fonction qui calcule la distance totale de déplacement du point que vous étudiez?

c) Avec les connaissances dont vous disposez jusqu'à maintenant, pouvez-vous obtenir l'équation paramétrique de x ? Écrivez-le et faites le ajustement dans GeoGebra pour vérifier s'il correspond bien à vos données expérimentales (esquissez le graphique et sauvegardez-le sous votre USB dans le dossier correspondant).

9. Quelle est la grandeur de la vitesse tangentielle du point que vous analysez? (obtenir l'équation générale de la vitesse et la valeur de la vitesse)

Avec la question 8, nous voulons activer le plan [Sem-Ins] et [Ins-Dis] de CII (figure 4.31). Autrement dit, nous voulons qu'à partir des informations dont ils disposent ($x(t)$, $y(t)$, v du MRU et $y(t)$, ω de le MCU), les élèves puissent effectuer un codage pour générer $x(t)$ du mouvement combiné (MRU+MCU) [14]. Nous voulons, ensuite, que les élèves génèrent un processus d'**instrumentation** avec GeoGebra en représentant graphiquement l'équation obtenue $x(t)$ (de la combinaisons du mouvement)[15] afin de **prouver** que ce modèle ($x(t)$) correspond aux points expérimentaux de Tracker [16]. Avec la question 9, nous voulons activer la **dimension discursive** de CIII. En d'autres termes, nous voulons que les élèves obtiennent l'équation générale de la vitesse tangentielle à partir de celles dérivées des équations paramétriques de manière à

vérifier que leurs modèles mathématiques sont corrects [17].



(a) Traitement mathématique, MRU+MCU (b) Traitement mathématique, MRU+MCU

FIGURE 4.31 – Phases 4 et 5, MRU+MCU

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 10. A partir de toutes les analyses ci-dessus, pouvez-vous trouver les fonctions paramétriques générales d'une MRU+MCU (y compris les trois cas), quelles seraient-elles ?

11. Pouvez-vous obtenir $y(x)$ ou $x(y)$? sont-ils des fonctions ? Justifiez votre réponse

Avec les questions 10, nous voulons que les élèves activent la **dimension sémiotique** avec la codification des représentations **GG** et **AS** des trois variantes du mouvement combiné pour obtenir les représentations générales des équations paramétriques du mouvement (**AG**) [18]. Et avec la question 11, nous voulons que les étudiants activent la **dimension discursive** de **CIII**, à travers d'un développement algébrique, avec lequel ils peuvent obtenir les équations de trajectoire $y(x)$ ou les inverses $x(y)$ et dire si ce sont des fonctions ou non [19] (Figure 4.32).

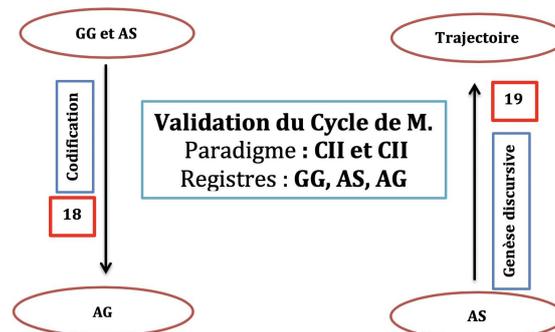


FIGURE 4.32 – Validation du Cycle de modélisation, MRU+MCU

En résumé, comme le montrent les figures 4.33 et 4.34, le travail que nous voulons induire dans cette activité s'inscrit avant tout dans le paradigme CII et CIII. De la même manière que dans les activités précédentes, et parce que nous pensons que l'activation de tous les plans de l'ETC favorise une meilleure compréhension des objets traités (hypothèse que nous allons essayer de prouver avec les activités de modélisation de cette recherche), nous voulons amener les élèves à générer une circulation à travers l'ETC dans les trois paradigmes, comme nous pouvons le voir dans la figure 4.34. En ce qui concerne les registres de représentation, nous souhaitons que les étudiants transitent par les registres : MP, LN, TV, GT, GG, AS et AG, mais nous attendons que ce transit ait une base mathématique et physique beaucoup plus élaborée.

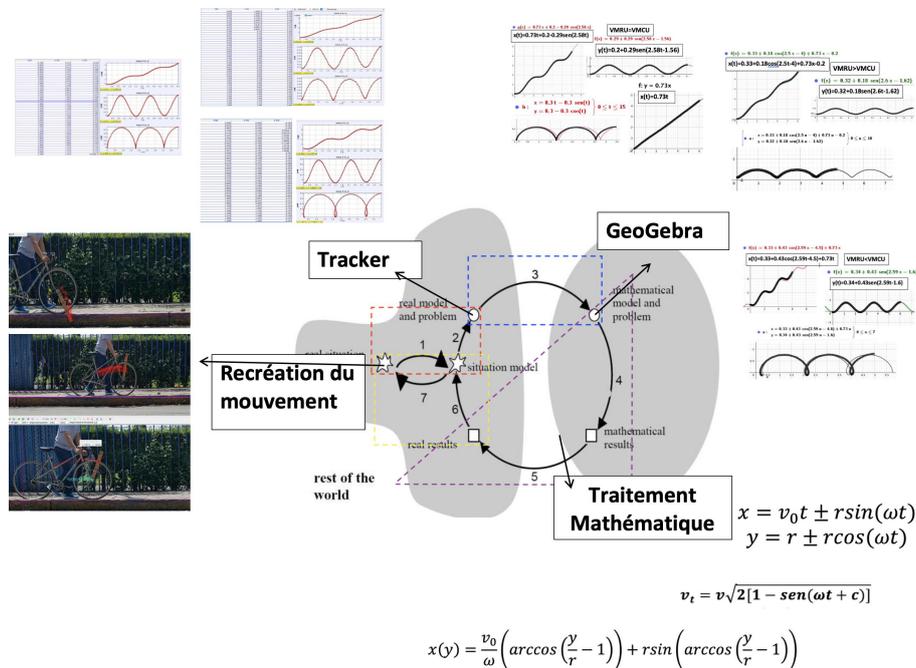


FIGURE 4.33 – Éléments de l'ETC activés dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MRU+MCU (analyse a priori)

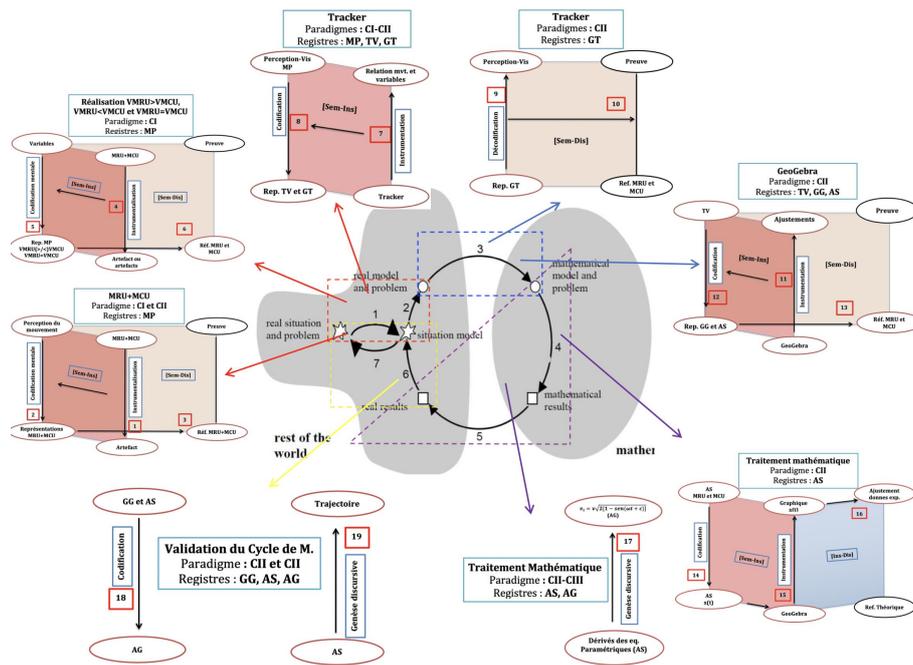


FIGURE 4.34 – La fonction dans chacune des phases du cycle de modélisation, activité MCU (analyse a priori), activité MRU+MCU (analyse a priori)

Chapitre 5

Analyse des activités de modélisation

Sommaire

5.1	Introduction	210
5.2	Mise en œuvre	210
5.2.1	Le champ de contraintes	211
5.3	Données prises en compte	214
5.4	L'activité 1, MRU	215
5.4.1	Groupe 1	215
5.4.2	Groupe 2	231
5.4.3	Groupe 3	247
5.4.4	Conclusion générale activité 1	258
5.5	L'activité 3, MCU	260
5.5.1	Groupe 1	260
5.5.2	Groupe 2	275
5.5.3	Groupe 3	292
5.5.4	Conclusion générale activité 3	304
5.6	L'activité 4, MRU+ MCU	305
5.6.1	Groupe 1	305
5.6.2	Groupe 2	321
5.6.3	Groupe 3	334
5.6.4	Conclusion générale activité 4	348

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le champ de contrainte, la mise en œuvre, les caractéristiques des étudiants avec lesquels nous avons travaillé, les restrictions et les libertés dont nous disposons de la part de l'école, les caractéristiques du laboratoire où nous travaillons, les ressources matérielles utilisées par les étudiants et par nous, pour la collecte des données, les données que nous avons analysées et l'analyse de 3 des 4 activités de modélisation. Comme nous l'avons dit dans la section 3.4.4, nous n'avons pas considéré l'activité 2 (MRUA), bien qu'elle soit une activité importante dans cette recherche, n'affecte pas directement l'activité 4 (combinaison d'une MRU+MCU, cycloïde) qui est la plus importante dans ce travail. D'autre part, dans cette expérimentation, nous avons travaillé avec 4 groupes de 4 étudiants chacun, mais nous n'avons analysé que 3 des 4 groupes car deux d'entre eux ont des résultats très similaires.

Ce chapitre est divisé en 3 sections : la section 5.4 où se trouve toute l'analyse concernant à l'activité 1, Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU) ; la section 5.5 contenant l'analyse de l'activité 3, Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) et la section 5.6 correspondant à l'analyse de l'activité 4, combinaison d'un MRU+MCU (cycloïde). Chacune de ces sections considère la transition entre les registres de représentation et les plans et paradigmes, de l'ETC, qui sont activés par les élèves. Il est important de mentionner que dans le travail attendu (analyse a priori, section 4.2.3) nous marquons l'ordre dans lequel nous attendons que les composants de l'ETC soient activés, cependant, lorsque les élèves effectuent les activités, il est très compliqué d'observer cet ordre avec une telle précision. **Néanmoins, bien qu'il y ait des moments où cet ordre n'est pas totalement clair ou, parfois, il y a des processus qui se produisent simultanément, nous donnons un ordre (basé sur leurs réponses et les enregistrements de chaque session) aux processus cognitifs afin de voir l'évolution et le développement de la notion de fonction.**

5.2 Mise en œuvre

Dans cette section, nous donnons les caractéristiques des élèves avec lesquels nous travaillons, les restrictions et les libertés de l'établissement d'enseignement, le type de lieu physique où nous travaillons et les matériaux utilisés par les étudiants et par nous pour la mise en œuvre.

5.2.1 Le champ de contraintes

Le but de cette section est de se faire une idée des conditions dans lesquelles s'est déroulée l'expérimentation de ce travail de recherche.

Les caractéristiques des élèves

D'une part, les étudiants avec lesquels nous travaillons sont les meilleurs scores au test de sélection de *La Comisión Metropolitana de Instituciones Públicas de Educación Media Superior*¹ (COMIPEMS) qui se déroule, chaque année, dans la zone métropolitaine de Mexico. Pour faire partie du campus 6 de l'ENP², les élèves devaient obtenir plus de 111 réponses correctes sur un total de 128 questions. Cela signifie que nous avons travaillé avec des étudiants qui ont un bon niveau académique. Aussi, les élèves étaient inscrits dans la classe PTS (dernière année de lycée) et avaient entre 17 et 18 ans. Lors de la réalisation de l'atelier de modélisation, du 21 janvier 2019 au 20 mars 2019, les étudiants avaient déjà suivi les cours suivants : algèbre (mathématiques IV), géométrie et trigonométrie (mathématiques V) et partiellement le cours d'analyse (mathématiques VI)³.

Les restrictions et les libertés de l'institution scolaire

La principale raison pour laquelle nous avons travaillé dans cette institution et avec ce type d'étudiants est que, je fais partie du personnel enseignant de l'établissement (ce qui a facilité les formalités administratives) et, également, parce que nous avons été autorisés à travailler avec les étudiants pendant 10 semaines (2 sessions, de 100 minutes chacune, par semaine) et nous avons disposé du matériel nécessaire dans une salle de classe qui était équipée. Bien que nous ayons eu beaucoup de facilités de l'institution, l'une des restrictions que nous avons était la taille de la salle de classe qui, même si elle est conçue pour 32 élèves, a été trop petite pour les activités de modélisation, ce qui nous a amenés à travailler avec seulement 16 élèves.

Laboratoire des sciences

Les 20 sessions de l'atelier de modélisation se sont déroulées dans le laboratoire scientifique du campus 6 de l'ENP. Le laboratoire a une capacité d'accueil de 32

1. C'est la commission chargée du processus de sélection des collégiens qui souhaitent poursuivre leurs études dans les lycées publics participants de Mexico et de sa région métropolitaine (22 municipalités de l'État du Mexique).

2. Institution où nous réalisons l'expérimentation, section 1.2

3. Pour plus de précisions consulter la section 1.2.

étudiants, organisés en équipes de 4 personnes. Il y a 8 tables de travail et chacune a un ordinateur, Fig. 5.1. De plus, il y a un projecteur dans le laboratoire et un ordinateur à l'usage de l'enseignant.



FIGURE 5.1 – Laboratoire des sciences de la ENP 6

Dans ce projet de recherche, nous avons travaillé avec 16 étudiants, organisés en 4 équipes, afin que chacun d'entre eux ait suffisamment d'espace pour réaliser les activités.

Les ressources matérielles utilisées par les élèves

Pour les 4 activités de modélisation (MRU, MRUA, MCU et MRU+MCU, annexe A), les étudiants ont utilisé différents matériaux. La table 5.1 montre les artefacts et les phénomènes de mouvement exécutés par chacune des équipes. Il est intéressant de noter que les 4 groupes d'élèves ont choisi de réaliser la quatrième activité avec un artefact matériel composé d'un bâton en bois et d'un spinner. C'est-à-dire que d'un côté il y a le bâton en bois, avec lequel les élèves peuvent contrôler le mouvement rectiligne (en essayant de faire le MRU); et de l'autre côté il y a le spinner, avec lequel ils effectuent le mouvement circulaire (en essayant de faire un MCU). Nous pensons que le choix de ce dispositif peut être dû à la manière dont nous avons abordé toutes les activités précédentes et, en particulier celle-ci, comme une combinaison des deux mouvements (MRU+MCU).

TABLE 5.1 – Artefacts et phénomène de mouvement exécutés par chacune des groupes

Activité Groupe	MRU	MRUA	MCU	MRU+MCU
1	Ils ont fait rouler une balle antistress sur la table	casque qui glissent sur un tube incliné	Ils ont fait tourner un petit moulin à vent	<ul style="list-style-type: none"> — Ils ont fait rouler une bouteille d'eau sur une table — Ils ont fait glisser un bâton de bois tout en faisant tourner un spinner qui y était attachée
2	Ils ont fait rouler une balle de tennis sur la table	Un étudiant a couru vite dans les installations sportives	Ils ont fait tourner une balle attachée à une corde	<ul style="list-style-type: none"> — roue d'un chariot en mouvement — Ils ont fait glisser un bâton de bois tout en faisant tourner un spinner qui y était attachée
3	Ils ont fait rouler une balle antistress sur la table	Ils ont donné un coup de pied dans une ballon	Ils ont fait tourner un disque vinyle	<ul style="list-style-type: none"> — Ils ont fait rouler une bouteille d'eau sur une table — Ils ont fait glisser un bâton de bois tout en faisant tourner un spinner qui y était attachée
4	Ils ont fait rouler une balle de tennis sur la table	Balle à la chute	Ils ont fait tourner une balle attachée à une corde	<ul style="list-style-type: none"> — Ils ont fait rouler un pot en carton sur une table — Ils ont fait glisser un bâton de bois tout en faisant tourner un spinner qui y était attachée

En plus des artefact pour faire le mouvement, les élèves ont utilisé :

- Une caméra vidéo ou mobile pour filmer les phénomènes du mouvement
- Un support de caméra ou mobile qui leur permet de faire des prises de vue fixes
- Ruban adhésif
- Règle de mesure
- Ordinateur avec les logiciels Tracker et GeoGebra installé
- Imprimante

Les ressources utilisées par le chercheur pour la collecte des données

Pour faire la collecte des données, qui sont analysées dans ce chapitre, nous utilisons :

- Guides de travail (annexe A), un pour chaque activité et pour chaque équipe
- 4 caméras vidéo pour le enregistrement du développement des activités. Le but était d'obtenir les dialogues, de visualiser les actions et la manière dont les élèves ont réfléchi, abordé et résolu les problèmes qui leur ont été présentés pendant le processus de modélisation (ETC personnel des élèves).

5.3 Données prises en compte

Dans cette recherche, nous avons pris en compte deux types de données :

- i Guide de travail (Annexe A : Les quatre groupes ont répondu à quatre guides (un pour chaque activité : MRU, MRUA, MCU et MRU+MCU). Au total, nous disposons de 16 guides, dont nous avons analysé neuf. Nous n'avons pas pris en compte l'activité du MRUA, car elle n'influence pas directement dans la combinaison des MRU+MCU. Il est important de mentionner que bien que le MRUA ait fait partie de l'ensemble des autres activités et ait influencé l'apprentissage de la gestion des logiciels et le processus de modélisation, elle ne contribue pas directement à l'activité quatre (MRU+MCU), qui est la plus importante pour notre travail de recherche. Nous n'avons pas, non plus, analysé les résultats d'un des groupes car leurs réponses sont similaires à celles d'une autre équipe. Les réponses aux guides de travail ont été la principale source d'information dans notre analyse des activités réalisées.

- ii Enregistrements de session : pendant l'atelier de modélisation, chaque groupe a réalisé l'enregistrements de session (environ 33,5 heures d'enregistrements pour chaque groupe). L'objectif était de compléter les informations exprimées dans les guides de travail. En particulier, nous avons observé l'échange d'idées, avant les réponses écrites, afin de compléter notre analyse.

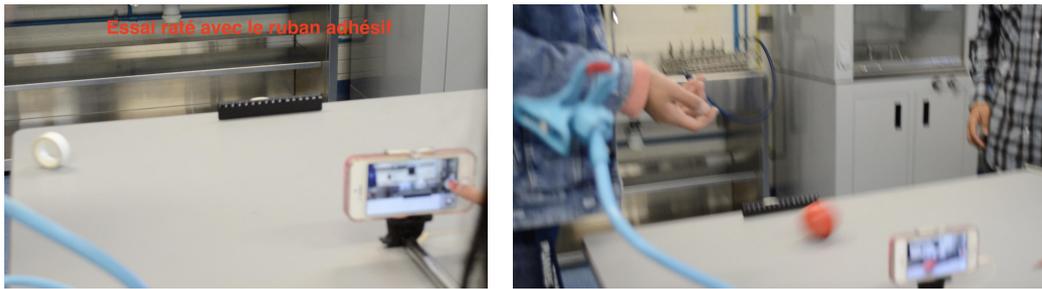
5.4 L'activité 1, MRU

Dans cette section, nous avons analysé les réponses obtenues, dans l'activité 1 (MRU), que chacun des 3 groupes a mis dans les guides de travail. Nous avons, également, complété ces analyses par les enregistrements que nous avons faits au cours des sessions.

5.4.1 Groupe 1

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : *1. Réaliser l'enregistrement du MRU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...*

Les élèves ont utilisé deux artefacts matériels pour réaliser la première consigne (réalisation du mouvements et analyse de la vidéo avec Tracker) : un ruban adhésif (figure 5.2a) et une balle anti-stress (figure 5.2b). La réponse donnée par les élèves est visible dans la figure 5.2c.



(a) Ruban adhésif

(b) balle anti-stress

Al inicio pensamos que una cinta adhesiva era una buena idea. Sin embargo tuvimos la dificultad de que la cinta no se iba recto entonces optamos por usar una pelota antiestres, en donde no presentamos esa misma dificultad; también utilizamos una regla como nuestra medida de referencia para el conteo de pixeles a la hora de graficar el movimiento en Tracker. Observamos que al pasar el video del movimiento a Tracker la regla no estaba 100% alineada por lo que creemos que nuestros resultados se podrían ver afectados, sin embargo decidimos continuar ya que el error de alineación era casi imperceptible 😊

(c) Réponse 1, groupe 1

FIGURE 5.2 – Réalisation du mouvement, groupe 1

Réponse en français : Au début, on pensait que le ruban adhésif était une bonne idée. Cependant, nous avons eu la difficulté que le ruban n'est pas allé tout droit. Nous avons donc choisi d'utiliser une balle anti-stress, où nous n'avions pas la même difficulté. Nous avons également utilisé une règle comme mesure de référence pour le nombre de pixels lorsque nous avons tracé le graphique du mouvement dans Tracker, nous avons observé que lorsque nous transférons la vidéo du mouvement à Tracker la règle n'était pas alignée à 100% et nous pensons que nos résultats pourraient être affectés, mais nous avons décidé de continuer car l'erreur était quasi imperceptible.

Analyse ruban adhésif :

En expérimentant avec le ruban adhésif, les élèves ne sont pas capables de le faire suivre une trajectoire droite. Dans l'enregistrement que nous avons fait de chaque session, nous entendons dire qu'ils mentionnent "eso se va chueco... no creo que esto funcione, hay que usar otra cosa... una pelota" ils mentionnent que l'objet ne suit pas une trajectoire droite et qu'ils pensent que cet artefact ne fonctionnera pas, pour cette raison ils proposent d'utiliser une balle. Nous pouvons observer qu'à travers les perceptions qu'ils ont du mouvement, ils sont conscients que la trajectoire et la vitesse ne

correspondent pas à ce qu'ils cherchent, c'est-à-dire que, implicitement, **la position de y par rapport à la position de x et celle de x par rapport au temps t (temps) respectivement, ne correspond pas à une MRU** (bien que nous ne sachions pas si les élèves sont conscients de ces relations entre les variables, nous souhaitons que, éventuellement, ils puissent les comprendre). Alors, comme les perceptions ne correspondent pas, les élèves décident donc de changer d'artefact.

Dans la **réalisation du mouvement**, la partie sensorielle et l'utilisation d'artefacts matériels, dans l'essai i , placent les élèves au sein du paradigme **CI** en activant les plans **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]**, figure 5.3. C'est-à-dire, [1i] nous observons que les élèves activent la **genèse instrumentale** par un processus d'*instrumentalisation* (de la connaissance d'un MRU au choix conscient du *ruban adhésif* pour le réaliser). [2i] L'activation de la **genèse sémiotique** émerge des *perceptions*, lors de l'exécution du mouvement avec le *ruban adhésif*. Ces perceptions sont *codées* et dirigent les élèves vers une série de *représentations* (MP). [3i] Ces *représentations* sont mises en contraste avec leur *référentiel théorique*, activant la **genèse discursive**, et en n'obtenant pas la relation des variables qui correspondent à celle du MRU, les élèves suggèrent un changement d'*artefact*.

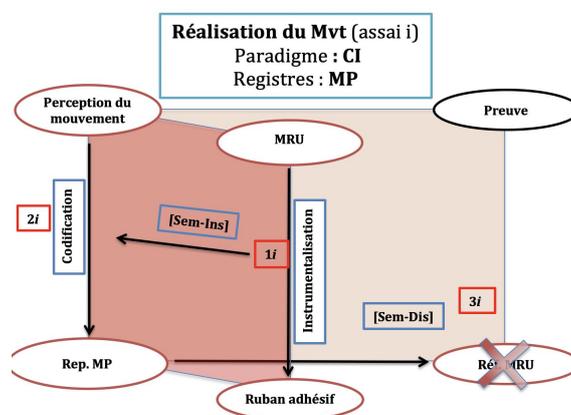


FIGURE 5.3 – Essai ruban adhésif, MRU, groupe 1

Analyse balle anti-stress :

En utilisant la balle anti-stress, après 2 essais les élèves obtiennent le mouvement qu'ils considèrent adéquat. C'est-à-dire que la relation des variables, mentionnée au point précédent, la considère comme adéquate.

Les élèves activent, à nouveau, les plans **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]** du paradigme **CI**, figure 5.4. [1] Encore une fois, ils effectuent un processus d'*instrumentalisation* avec

la *balle anti-stress*, en activant la **genèse instrumentale**. [2] Les *perceptions* générées par l'utilisation de la balle sont *codées* dans certaines *représentations* (MP) (**genèse sémiotique**). [3] Ces représentations, les élèves, les comparent avec leur *référentiel théorique* (**genèse discursive**) et ils considèrent qu'elles correspondent au MRU qu'ils recherchent, pour cette raison, ils décident de sauvegarder une des *représentations* (MP) pour l'analyser avec Tracker. En bref, l'utilisation de la balle les a conduits à obtenir les caractéristiques du MP qui ils considèrent comme correctes (après avoir validé le mouvement avec sa *référentiel théorique*) pour un MRU. [4] Puis, les élèves utilisent **Tracker** en générant un processus d'*instrumentation* qui construit des relations entre le mouvement et certaines variables (**genèse instrumental**). [5] Ceci génère un processus de *codification* de l'enregistrement du MP à des *représentations* TV et GT (**genèse sémiotique**), en initiant une transition vers CII.

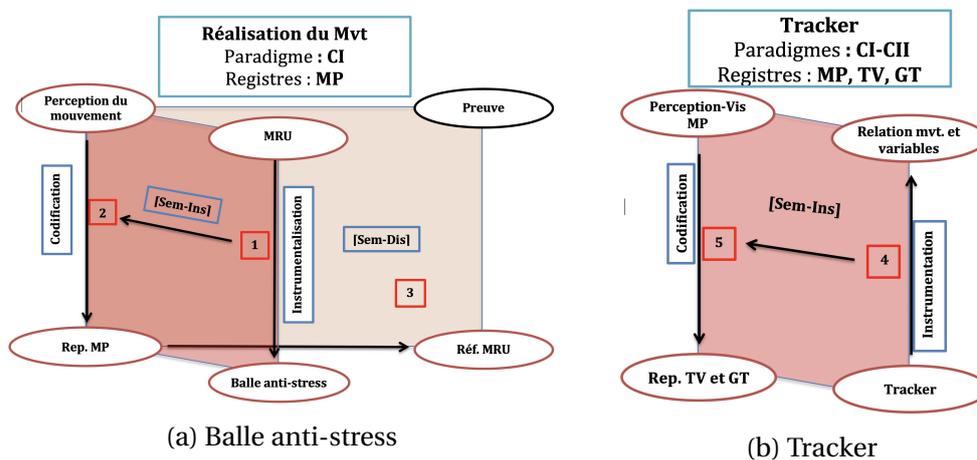


FIGURE 5.4 – Phases 1 et 2, ETC, groupe 1

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 2. *Regardez la table des valeurs que vous avez avec Tracker :*

a) *Il y a trois variables t , x et y . Quelle est leur signification physique ?*

b) *Observez, dans Tracker, et tracez les graphiques suivants et écrivez leur signification : x vs t , y vs t et y vs x*

Construisez les graphiques en GeoGebra de x vs t , y vs t et y vs x avec les données de Tracker, et faites l'ajustement linéaire.

I GeoGebra donne les équations avec les variables x et y . Réécrivez-les avec les variables appropriées pour le mouvement effectué. Nommez également les axes de coordonnées avec la variable physique correspondante.

II Expliquer la signification de chacun des graphiques obtenus par rapport au mou-

vement.

III Lequel des trois graphiques modélise le mouvement de l'objet? pourquoi?

La figure 5.5 montre les réponses données par les élèves aux questions 2a et 2b, suivies de la traduction française.

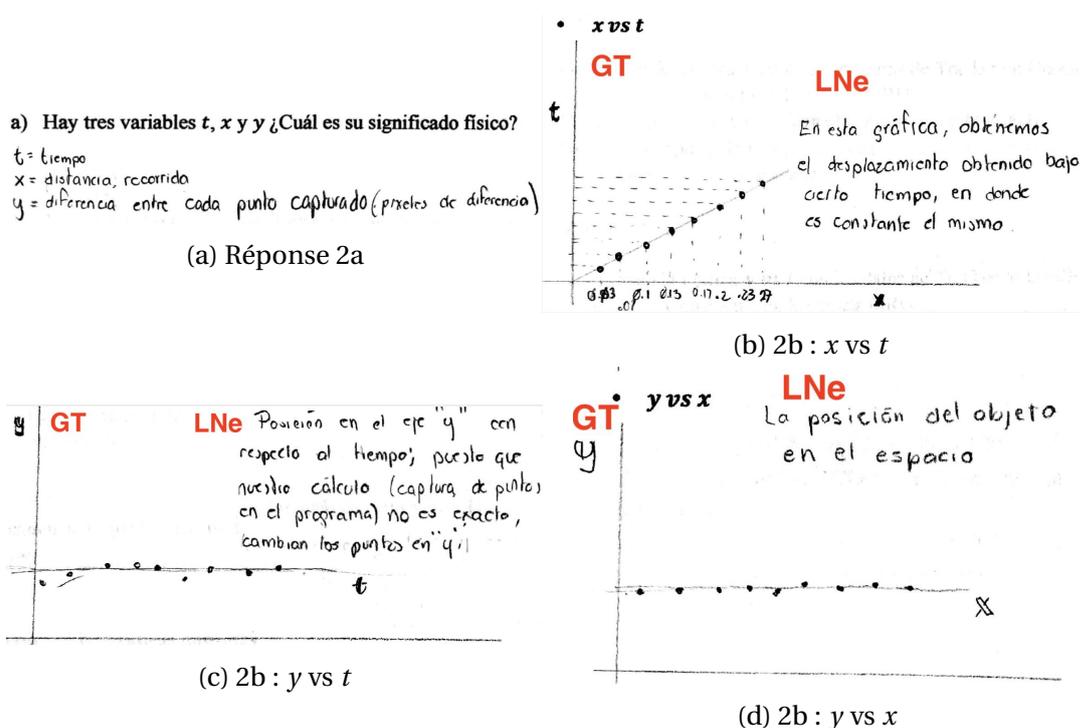


FIGURE 5.5 – Réponse 2a et 2b, MRU, groupe 1

Réponse en français : a) t = temps; x = distance parcourue; y = différence entre chaque point capturé (pixels de distance)

b) - x vs t : Dans ce graphique, nous obtenons le déplacement obtenu sous un certain temps, où il est constant lui-même.

- y vs t : Position sur l'axe "y" par rapport au temps; comme notre calcul (capture des points dans le programme) n'est pas exact, les points dans "y" changent.

- y vs x : La position de l'objet dans l'espace.

Analyse des réponses 2a et 2b :

- x vs t (figure 5.5b). Lorsque les élèves donnent la signification de ce graphique, ils écrivent : "En esta gráfica obtenemos el desplazamiento obtenido bajo cierto tiempo, en donde es constante el mismo". Dans la réponse, nous observons qu'ils confondent le concept de déplacement et de position (bien qu'il soit possible

d'obtenir le déplacement dans ce graphique, le graphique représente la position de l'objet par rapport au temps). Cette même confusion se retrouve dans l'enregistrement :

Espagnol	Français
E3 : ¿Cuál es la diferencia entre posición y desplazamiento? E4 : Posición es dónde se ubica E2 : Es una ubicación, y desplazamiento es el cambio de posición... bueno es lo que yo entiendo por desplazamiento el cambio de posición de un cuerpo y, posición pues nada más la ubicación de un punto en el espacio	E3 : Quelle est la différence entre la position et le déplacement? E4 : La position est l'endroit où il se trouve E2 : C'est un lieu, et le déplacement est le changement de position... c'est ce que je comprendre par déplacement le changement de position d'un corps et par position, la localisation d'un point dans l'espace

Cependant, bien qu'ils en discutent et ils semblent avoir trouvé une idée correcte de la différence, ils écrivent déplacement. Aussi, nous observons, dans l'esquisse du graphique, qu'ils mettent la variable du temps dans l'axe vertical et, la position horizontale de l'objet, dans l'axe x . Une forme qui n'est pas courante en physique mais, nous pensons que c'est influencé parce qu'en mathématiques, généralement, le x va sur l'axe horizontal.

- y vs t (figure 5.5c). Contrairement au graphique précédent, ils placent la position y sur l'axe vertical et le temps sur l'axe horizontal. Aussi, ils écrivent comme la signification du graphique « la posición en el eje “y” con respeto al tiempo; puesto que nuestro cálculo (captura de puntos en el programa) no es exacto cambian los puntos en “y” ». Nous observons, que dans la signification que les élèves donnent de ce graphique, ils corrigent les erreurs qu'ils avaient dans le précédent et, aussi, que les élèves sont conscients que la graphique doit être $y = cte$ mais qu'en raison du mouvement ou de l'imprécision de l'analyse en Tracker, y varie un peu.
- x vs y (figure 5.5d). Les élèves écrivent que ce graphique est « la posición del objeto en el espacio ». Ce qui est correct.

Nous pouvons observer que les élèves ont une idée correcte, en général, de la dépendance des variables, et bien qu'ils fassent une erreur dans le premier graphique, nous pensons qu'ils en étaient conscients parce qu'ils ne l'ont pas commise de nouveau. En ce qui concerne les registres de représentation, ils ont réussi à passer du **GT** vers **LNe** (langage naturel écrit), sans perdre le sens du mouvement. Ce qui nous indique que le fait d'avoir effectué le mouvement avec différents artefacts (ruban adhésif

et balle anti-stress) et l'utilisation de Tracker a aidé les élèves à se lancer dans un travail de plus en plus abstrait.

Dans la question 2a et 2b, les étudiants ont activé le **plan[Sem-Dis]** (figure 5.6). Ils ont effectué un *décodage*, de la représentation **TV** et **GT**, qui provient du *référentiel* [6] et est contrasté avec les *perceptions* de la réalisation du mouvement [7]. À partir de ce *décodage* en 2 b) apparaît l'**idée de fonction** (discours qui vient du référentiel et des perceptions) en **LNe**, lorsque les élèves relient des variables : « le déplacement par rapport au temps (bien qu'ils se trompent dans le sens de ce graphique) ; la position dans y par rapport au temps, et la position de l'objet dans l'espace » (même si elle est moins évidente dans la position de l'objet dans l'espace car il n'y a pas de variable privilégiée comme dans les deux précédentes) [8]. Cette idée apparaît parce qu'il y a une quantification, qui n'est pas dans CI, et que nous pouvons observer dans les points sur les graphiques et des valeurs. Les réponses de 2a et b sont données par les élèves au sein de **CII**, parce qu'ils utilisent déjà des concepts bien définis tels que le déplacement, la position, l'espace et l'intervalle de temps.

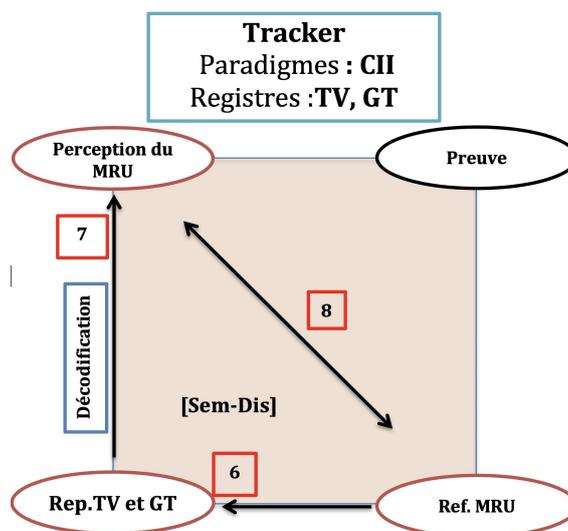


FIGURE 5.6 – Réponses 2a et 2b, ETC, groupe 1

La figure 5.7 montre les réponses données par les élèves aux questions I, II et III, suivies de la traduction française.

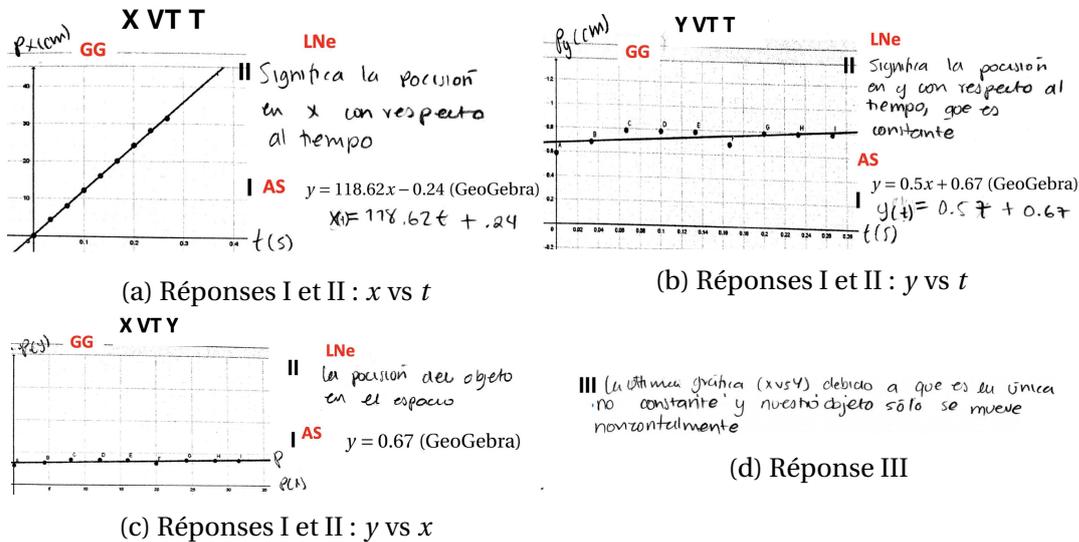


FIGURE 5.7 – Réponse I, II et III, MRU, groupe 1

Réponses en français :

II - x vs t désigne la position en x par rapport au temps

- y vs t désigne la position en y par rapport au temps, qui est constante

- y vs x la position de l'objet dans l'espace.

III le dernier graphique (x vs y) car c'est le seul non constant et notre objet ne se déplace qu'horizontalement.

Analyse des réponses I, II et III :

Dans la figure 5.7, il est possible d'observer que les trois graphiques (x vs t , y vs t et x vs y), sont corrects ainsi que leur signification. Nous pouvons également observer que la notation utilisée par les élèves, $x(t)$ et $y(t)$, reflète la dépendance des variables concernées (figures 5.7a et 5.7b). Dans le graphique de position de y par rapport à x , $y = 0,67$ est visible, c'est-à-dire qu'ils n'utilisent pas la même notation ($y(x)$). Nous pensons que cela peut être dû au fait que les étudiants ne sont pas sûrs de ce qui se passe. C'est-à-dire que, d'une part, ils savent que, théoriquement, il s'agit d'un mouvement dans une dimension et, d'autre part, ils observent que dans leurs données, il y a une variation en y . Nous pensons que le doute peut surgir parce qu'ils ne savent pas quelle variable dépend de l'autre ou si, en fait, une dépendance existe. Néanmoins, nous avons observé une transition effective du registre de représentation du TV vers les GG, LNe et AS. Dans les trois graphiques, les élèves ont pu réécrire les fonctions que

GeoGebra a données (ajustement linéaire) avec les variables impliquées (x , y et t) et l'unité de mesure sélectionné dans le mouvement (cm). Concernant la question III, les élèves écrivent que l'équation qui modélise le mouvement est y vs x , ce qui est incorrect. Nous pensons que cette erreur se produit parce que, comme il s'agit du graphique de position dans l'espace, ils pensent probablement qu'il indique le mouvement de l'objet.

Dans le consignes I, II et III (travail avec **GeoGebra**), les élèves du groupe1 ont activé les **plans**[Sem-Ins] et [Sem-Dis] (figure 5.8). Ils ont généré, avec l'utilisation de GeoGebra, un processus d'*instrumentation*, au moment de la *construction* des ajustements linéaires [9] (l'ajustement a des informations implicites provenant du **MP** et de l'utilisation de Tracker qui émergent plus tard dans le décodage [11]). L'ajustement génère un processus de *codification*, des **TV** vers **GG** et **AS**, en **CII** [10]. Immédiatement, quand les élèves donnent la signification des graphiques, nous observons un processus de *décodage* qui provient du *référentiel* et que les élèves contrastent avec les *perceptions* et les *visualisations* [11]. En répondant aux questions I, II et III, ils génèrent un discours, en **LNe**, pour justifier leurs résultats et donner un sens aux graphiques obtenus (**GG**) [12].

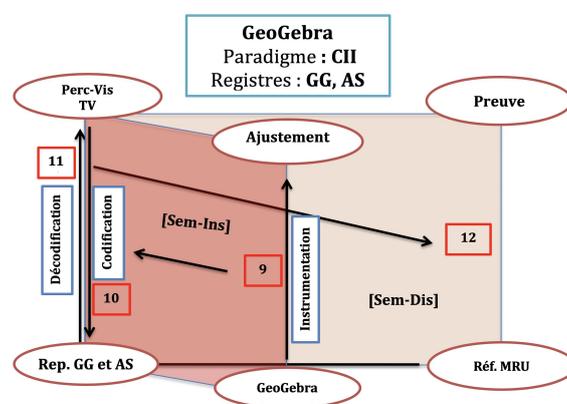


FIGURE 5.8 – Réponses I, II et III, ETC, groupe 1

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Obtenez l'équation de la trajectoire $y(x)$ (équation rectangulaire) en utilisant $x(t)$ et $y(t)$ (équations paramétriques). Que se passe-t-il lorsque vous essayez de l'obtenir?

4. Notez l'équation expérimentale qui modélise le mouvement et comparez-la à la formule théorique de la distance MRU ($d = vt$).

Est-il possible de connaître la vitesse et l'accélération du mouvement et comment?

La figure 5.9 montre les réponses données par les élèves aux questions 3 et 4, suivies de la traduction française.

3 $x(t) = 118.62t + .24 = 118t = x - 24 = t = \frac{x - 24}{118.62} = \frac{x - 24}{118}$
 $y(t) = 0.5t^2 + 0.6t = 0.56 = 4 - 0.67$
 $t = \frac{4 - 0.67}{0.5}$
 $y = \left(\frac{x}{118} + 67.9\right) \frac{1}{118.62}$

4 $x = 118.62t + 0.24$ — ecuación del movimiento
 $x - 24 = 118.62t$ cuando el tiempo era 0, el objeto distancia $v \cdot t$ ya había recorrido .24 cm
 ¿Es posible saber la velocidad y la aceleración del movimiento? ¿cómo?
 Sí, la velocidad es el cambio en la ecuación que modela el movimiento. Si derivamos la ecuación, obtenemos la velocidad: $x' = 118.62$. El cambio en la velocidad es la aceleración, por lo tanto, la derivada de la velocidad es la aceleración $v' = 0$. No hay aceleración

(a) Réponse 3

(b) Réponses 4

FIGURE 5.9 – Réponse 3 et 4, MRU, groupe 1

Réponses en français :

4. -Équation du mouvement.

-Quand le temps était 0 l'objet avait déjà parcouru 0.24 cm

-Oui, la vitesse est le changement dans l'équation qui modélise le mouvement. Si nous dérivons l'équation, nous obtenons la vitesse $x' = 118.62$. Le changement de vitesse est l'accélération, donc la dérivée de la vitesse est l'accélération $v' = 0$. Il n'y a pas d'accélération

Analyse des réponses 3 et 4 :

Pour obtenir le registre **AS** de la trajectoire (question 3), les élèves effectuent la procédure montrée dans la figure 5.9a. Lorsque les élèves répondent la question 3, le dialogue suivant se fait entendre :

Espagnol	Français
<p>E3 : yo digo que como esta es x de t y esta es y de t entonces necesitamos y de x ¡ah! Creo que es f compuesta. Si ponemos $y(x(t))$, [no saben qué más hacer y le preguntan a la profesora]</p> <p>E3 : o sea yo decía que tal vez podemos poner composición de funciones</p> <p>P : ¿una composición de funciones?</p> <p>E3 : porque aquí dice « funciones paramétricas » entonces supongo que deben entrar como parámetro, pero no sé o ¿solo las despejamos?</p> <p>E3 : porque aquí dice que debe ser $y(x)$ y si las despejamos solo sería, ¡ah! Sí [se dan cuenta de cómo lo deben hacer y continúan]</p> <p>E4 : Pues mira, la idea que yo te voy a decir es como le hacíamos al inicio en física que igualábamos las 2 ecuaciones y las íbamos eliminando porque esta es x y t, esta es y sobre t, al final se van a terminar eliminando las t's y van a quedar x y y.</p> <p>E2 : Sí, así va a quedar</p>	<p>E3 : Je dis que puisque c'est x par rapport à t et c'est y par rapport à t alors nous avons besoin de y par rapport à x ah! je pense que c'est une composition de fonctions. Si nous mettons $y(x(t))$...[ils ne savent pas quoi faire d'autre et demandent au professeur]</p> <p>E3 : Je veux dire qu'on pourrait peut-être faire la composition des fonctions</p> <p>P : Une composition de fonctions?</p> <p>E3 : parce qu'il est écrit ici « fonction paramétrique » alors je suppose qu'ils devraient être entrés comme paramètre, mais je ne sais pas ou, on devrait les isoler?</p> <p>E3 : parce qu'il est dit ici que ça doit être $y(x)$ et si on les isole [ils se réfèrent à la variable t des deux équations paramétriques], ce serait seulement. Ah! Oui [ils réalisent comment ils devraient le faire et continuent]</p> <p>E4 : Eh bien, l'idée que je vais te dire, c'est comment nous avons fait, au début, en physique, que nous avons égalé les 2 équations et que nous les éliminons parce que c'est x et t, c'est y sur t, finalement On va finir par éliminer les t et il y aura x et y.</p> <p>E2 : Oui, donc on peut y arriver.</p>

Dans cet échange d'idées, pour obtenir $y(x)$ à partir de $x(t)$ et $y(t)$, nous observons que l'idée de faire une composition de fonctions, des équations paramétriques, émerge. Les élèves n'en sont pas très sûrs et posent la question à l'enseignant. L'enseignant ne leur pose qu'une seule question : une composition de fonctions? et les laisse expliquer pourquoi. En essayant d'expliquer, les élèves se rendent compte qu'ils peuvent le faire en isolant le temps des deux équations et en les égalisant par la suite. Ensuite, la fonction que les élèves obtiennent (du processus algébrique précédent) est tracée sur le téléphone portable d'un élève du groupe (et plus tard dans GeoGebra) et ils observent que c'est pratiquement la même graphique que celle obtenue dans GeoGebra avec l'ajustement (ils contrôlent leur réponse), figure 5.10.

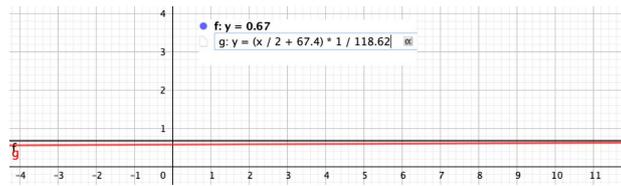


FIGURE 5.10 – Validation eq. de la trajectoire, groupe 1

Dans cette phase, nous pouvons dire que les élèves réussissent à faire passer des registres de représentation, des **TV** à **GG** et **AS**. Ils arrivent, également, à donner du sens aux registres de représentation, ainsi qu'à effectuer un processus algébrique correct pour obtenir l'équation de trajectoire. Dans la question 4, les élèves arrivent au registre de représentation **AG** en comparant la représentation **AS** avec l'équation du mouvement, figure 5.9b.

En ce qui concerne l'ETC, dans la question 3 (figure 5.11a), les élèves effectuent un développement algébrique avec les modèles **AS** (équations paramétriques), en **CII** pour prouver que l'équation de trajectoire (donnée par l'ajustement linéaire dans GeoGebra) peut, effectivement, être obtenue avec des équations paramétriques. Dans ce processus, ils activent la *genèse discursive*, du *référentiel* (en utilisant la connaissance de l'algèbre et du MRU) vers la *preuve* [13]. Une fois qu'ils obtiennent l'équation de trajectoire (qui dans ce cas est une fonction), ils la vérifient avec GeoGebra (en faisant une comparaison avec l'ajustement linéaire) ce qui complète la façon dont ils vérifient leur réponse au sein du paradigme de **CII**.

Dans la question 4 (figure 5.11b), les élèves activent le **plan[Sem-Dis]**. Avec la première consigne, ils génèrent un processus de *décodage* quand ils comparent l'équation expérimentale du mouvement obtenue (AS), avec la formule du mouvement utilisée en physique (AG)[14]. Puis, avec la question suivante, ils activent la *genèse discursive* (dans **CII**, les élèves expliquent d'abord comment ils ont pu obtenir la vitesse par le biais de la dérivée et ensuite ils calculent le dérivé pour prouver ce qu'ils ont dit [15].

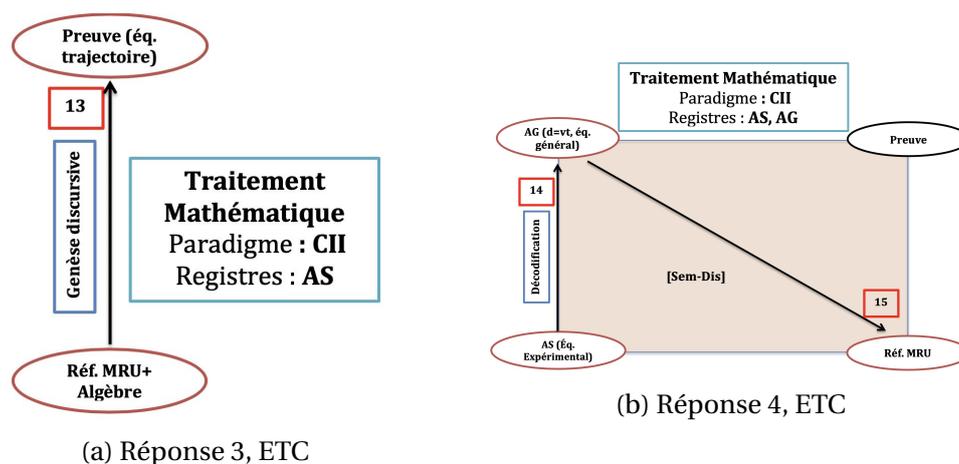


FIGURE 5.11 – Réponses 3 et 4, ETC, groupe 1

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. Que pouvez-vous dire du mouvement, en considérant tout ce que vous avez fait?

6. Si vous pouviez recommencer l'expérience, quelles améliorations apporteriez-vous?

Devoir : Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.

La figure 5.12 montre les réponses données par les élèves aux questions 5 et 6, suivies de la traduction française.

5. Comprobamos que el movimiento era un MRU, debido a que los datos obtenidos en el experimento coincidían con las características de este tipo de mov. Gracias al análisis de las gráficas, logramos entender la relación y la diferencia entre la posición, la distancia, el movimiento, la velocidad y la trayectoria.

6. Mejorar la captura de posición en el conjunto de puntos (tracker). - La precisión a la hora de realizar el experimento.

(a) Réponse 5, MRU, groupe 1

(b) Réponse 6, MRU, groupe 1

FIGURE 5.12 – Réponses 5 et 6, MRU, groupe 1

Réponses en Français :

5. Nous avons vérifié que le mouvement était une MRU, car les données obtenues dans l'expérience coïncidaient avec les caractéristiques de ce type de mouvement. Grâce à l'analyse des graphiques, nous avons pu comprendre la relation entre la position, la distance, le mouvement, la vitesse et la trajectoire.

6. -Améliorer la capture de position dans l'ensemble des points (Tracker).
-La précision au moment de la réalisation de l'expérience

Analyse des réponses 5 et 6 :

Dans les questions 5 et 6, les étudiants activent la *dimension discursive* (du *sémiotique* et de l'*instrumentale* puisqu'ils se réfèrent à l'ensemble du processus de modélisation) vers le *référentiel* du MRU, en validant leurs résultats quand ils mentionnent « les données obtenues dans l'expérience correspondent aux caractéristiques d'un MRU ». Ils indiquent aussi tous les concepts qu'ils ont appris [16]. Ces deux réponses sont basées sur l'ensemble du processus de modélisation dans lequel ils ont transité, entre **CI** et **CII**. En ce qui concerne les registres de représentation, ils ne mentionner que les représentations graphiques (**GT** et **GG**)

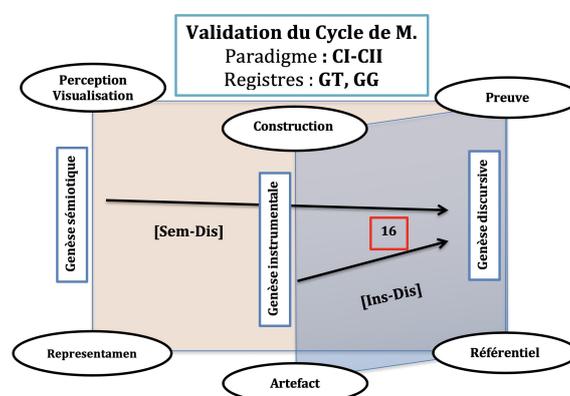


FIGURE 5.13 – Réponses 5 et 6, MRU, groupe 1

Résumé de l'activité 1, groupe 1 (figures 5.15 et 5.14). Lorsque nous observons le développement que les élèves, du groupe 1, ont fait par rapport à la notion de fonction et de l'ETC, nous pouvons constater qu'ils ont parcouru les différents registres de représentation comme nous l'avons dit dans le travail attendu (section 4.2). C'est-à-dire qu'ils commencent par le **MP** (ils utilisent deux artefacts matériels, *Instrumentalisation*, le ruban adhésif [1i] et la balle anti-stress [1]) et, sur la base de leurs perceptions (**CI**), ils décident que la balle est l'artefact avec lequel ils obtiennent la dépendance des variables qui décrit un MRU, à ce moment apparaît la première notion de fonction [3]. Plus tard, Tracker les a aidés à *coder* la représentation **MP** aux représentations **TV** et **GT** (**CII**) [5] à travers d'une *instrumentation* [4]. Les élèves ont pu *décoder* les représentations obtenues (avec quelques erreurs qu'ils ont ensuite rectifiées) en donnant un sens aux variables [6, 7 et 8] (**CI-CII**). Par la suite, le groupe 1 effectue une conversion du registre **TV** vers les registres **GG** et **AS** [10] à travers d'un processus d'*instrumentation* avec GeoGebra [9] ils génèrent, à nouveau, un processus de décodage correct pour ces registres de représentation [11 et 12] (**CII**). Avec les équations paramétriques obtenues

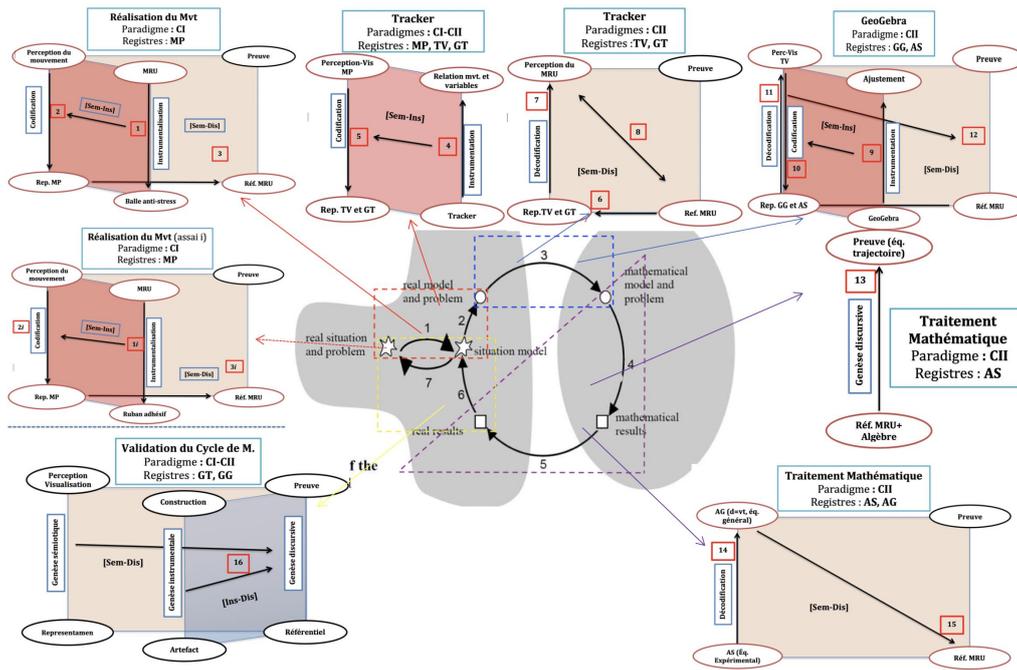
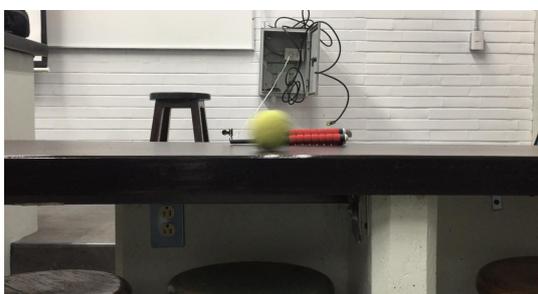


FIGURE 5.15 – Analyse globale, activité 1 (groupe 1)

5.4.2 Groupe 2

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : *1. Réaliser l'enregistrement du MRU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...*

Les élèves, du groupe 2, ont utilisé un seul artefact matériel pour réaliser la première consigne (réalisation du mouvement et analyse de vidéo avec Tracker) : une balle de tennis (figure 5.16a). La réponse donnée par les élèves est visible dans la figure 5.16b.



(a) Balle de tennis

Consideraciones : chequeamos que estuviera nivelada la mesa, para tener el más mínimo margen de error.

(b) Réponse 1, groupe 2

FIGURE 5.16 – Réalisation du mouvement, groupe 1

Réponse en français : Considérations : vérifier que le table est à niveau, pour avoir la moindre marge d'erreur

Analyse balle de tennis

Les membres du groupe 2 n'ont pas eu besoin d'expérimenter avec divers artefacts matériels. Comme il s'agissait d'un mouvement très simple, ils ont choisi une balle de tennis. Nous avons observé dans les enregistrements des sessions que les élèves font quelques essais et, immédiatement, tous les membres du groupe conviennent que le mouvement enregistré correspond à une MRU. C'est-à-dire que, de manière sensorielle, ils perçoivent que la relation entre les variables impliquées (position en x et y par rapport du temps t) dans le MP correspond à une MRU.

Les élèves activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] du paradigme CI, figure (5.17). [1] Ils effectuent un processus d'*instrumentalisation* avec la *balle de tennis*, en activant la *genèse instrumentale*. [2] Les *perceptions* générées par l'utilisation de la balle sont *codées* dans certaines *représentations* (MP) (*genèse sémiotique*). [3] Ces représentations, les élèves les comparent avec leur *référentiel théorique* (*genèse discursive*) et ils considèrent qu'elles correspondent à une relation adéquate entre les va-

variables impliquées, pour cette raison, ils décident de sauvegarder une des **représentations** (MP) pour l'analyser avec le Tracker. C'est-à-dire que l'utilisation de la balle les a conduits à obtenir la relation des variables qu'ils considèrent comme correctes (après avoir validé le mouvement avec leur **référence théorique**) pour un MRU. [4] Puis, les élèves utilisent **Tracker** en générant un processus d'**instrumentation** qui construit des relations entre le mouvement et certaines variables (**genèse instrumentale**). [5] Ceci génère un processus de **codification** de l'enregistrement du MP à des **représentations TV** et **GT** (**genèse sémiotique**), en initiant une transition vers **CII**.

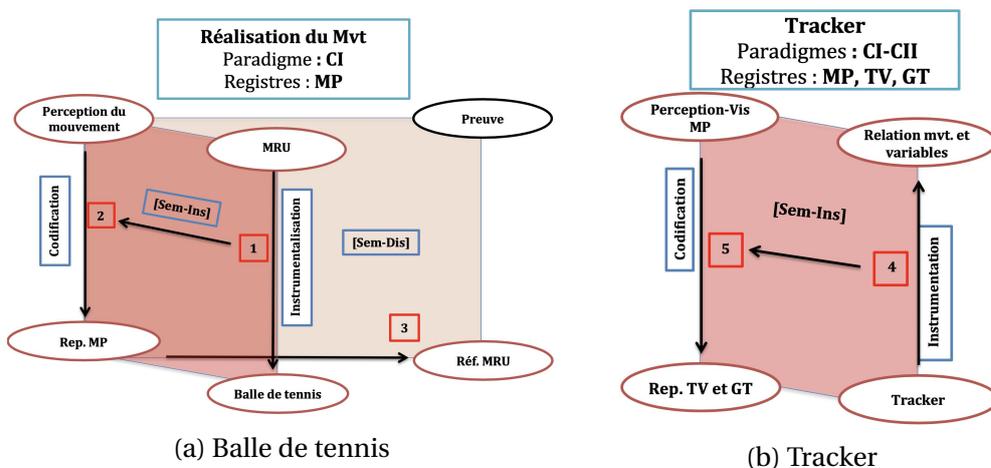


FIGURE 5.17 – Phases 1 et 2, ETC, groupe 2

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 2. *Regardez la table des valeurs que vous avez avec Tracker :*

a) *Il y a trois variables t , x et y . Quelle est leur signification physique?*

b) *Observez, dans Tracker, et tracez les graphiques suivants et écrivez leur signification : x vs t , y vs t et y vs x*

Construisez les graphiques en GeoGebra de x vs t , y vs t et y vs x avec les données de Tracker, et faites l'ajustement linéaire.

I GeoGebra donne les équations avec les variables x et y . Réécrivez-les avec les variables appropriées pour le mouvement effectué. Nommez également les axes de coordonnées avec la variable physique correspondante.

II Expliquer la signification de chacun des graphiques obtenus par rapport au mouvement.

III Lequel des trois graphiques modélise le mouvement de l'objet? pourquoi?

La figure(5.18) montre les réponses données par les élèves aux questions 2a et 2b, suivies de la traduction française.

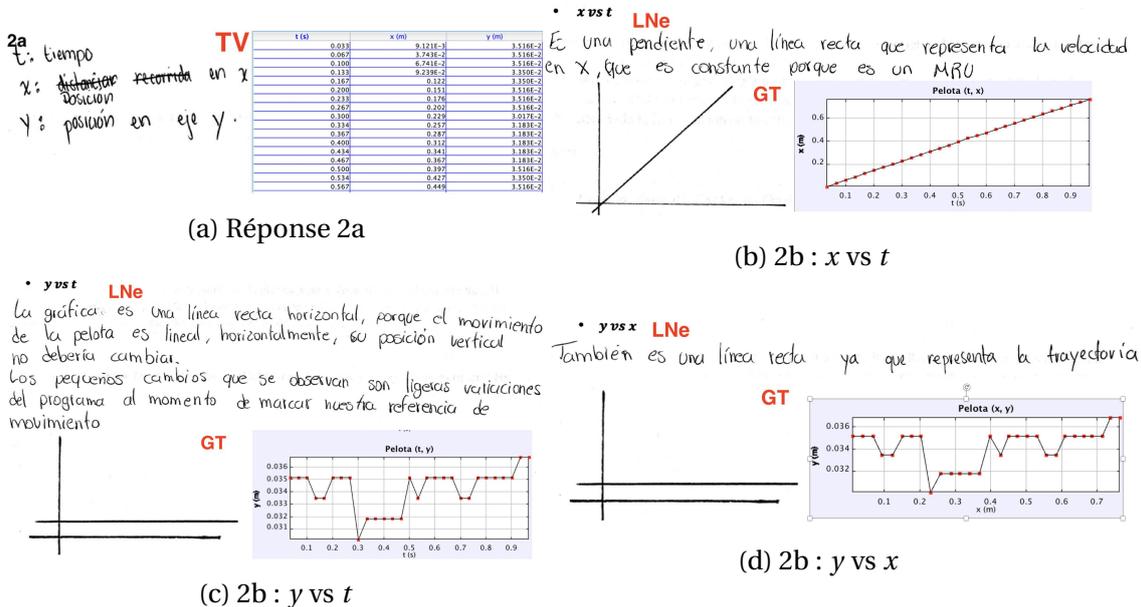


FIGURE 5.18 – Réponses 2a et 2b, MRU, groupe 2

Réponse en français :

2. *t* = temps

x = en position *x*

y = position de l'axe *y*

b) - *x* vs *t* : C'est une pente, une droite représentant la vitesse en *x* qui est constante parce que c'est une MRU

- *y* vs *t* : Le graphique est une ligne droite horizontale parce que le mouvement de la balle est linéaire, horizontalement sa position verticale ne doit pas changer. Les petits changements qui sont observés sont de légères variations du programme au moment du marquage de notre référence de mouvement (± 5 millimètres).

- *y* vs *x* : C'est aussi une ligne droite parce qu'elle représente la trajectoire

Analyse des réponses 2a et 2b :

Pour répondre à la partie a du point 2, du guide de travail, sur la signification physique des variables *t*, *x* et *y* qui apparaissent dans Tracker (5.18a), les élèves tiennent le dialogue suivant qui montre le référentiel théorique qu'ils ont du mouvement :

Espagnol	Français
<p>E4 : Bueno, la t es el tiempo, ¿no?, los segundos</p> <p>E3 : Si</p> <p>E1 : ¿Pero cuál es el significado gráfico de cada una de las gráficas que existen?</p> <p>...</p> <p>E2 : Pero t sí es el tiempo, x la distancia</p> <p>E4 : Es la posición del objeto, ¿no?</p> <p>E1 : ¿t contra x?</p> <p>E2 : No, no, no, es que aquí nada más pregunta qué es t, qué es x y qué es y</p> <p>...</p> <p>E2 : y y es la distancia que se movió en y</p> <p>E4 : Que, en teoría, no debería variar, ¿no?</p>	<p>E4 : Eh bien, le t est le temps, n'est-ce pas?, les secondes</p> <p>E3 : Oui</p> <p>E1 : Mais quelle est la signification graphique de chacun des graphiques existants?</p> <p>...</p> <p>E2 : Mais t est le temps, x est la distance</p> <p>E4 : C'est la position de l'objet, n'est-ce pas?</p> <p>E1 : t contre x?</p> <p>E2 : Non, non, non, c'est juste qu'ici on nous demande ce qu'est t, ce qu'est x et ce qu'est y</p> <p>...</p> <p>E2 : et y est la distance qui s'est déplacée dans y</p> <p>E4 : Ce qui en théorie ne devrait pas varier, n'est-ce pas?</p>

Nous observons que bien que E1 rend la question confuse, car il se réfère à la signification des graphiques générés par Tracker et non à la signification physique des variables, est le seul qui parle de deux variables en même temps et donc celui qui se rapproche un peu plus de la notion de fonction. L'intervention de E2, bien que pertinente car il focalise la discussion sur l'identification et la signification des variables impliquées dans le mouvement, nous observons qu'il fait référence à la variable x comme la distance, alors que E4 dit que x s'agit de la position de l'objet. Il semble que les membres du groupe 2 ne trouvent aucune différence entre la distance parcourue et la position de l'objet. Nous considérons que cela est dû à la façon dont ils abordent le sujet du mouvement dans leurs cours de physique et dans les manuels (section 1.1.4), où, généralement, la position initiale des objets est toujours considérée comme égale à zéro, ce qui ne se produit pas lorsqu'un mouvement est étudié expérimentalement, comme dans ce cas. Plus tard, un doute de E4 est généré par rapport à la signification de la variable y (qu'en théorie y ne devrait pas varier). L'affirmation-doute de E4 est raisonnable, si nous tenons compte du fait que les problèmes du MRU, qui sont traditionnellement résolus dans les cours de physique, considèrent des situations idéales dans lesquelles les objets se déplacent horizontalement sans composante verticale. À

ce moment de l'expérience, les élèves ne trouvent pas d'explication pour les valeurs obtenues pour la variable y et, plus tard, en répondant au point b de la deuxième question, qui concerne l'interprétation des graphiques générés par le Tracker (**GT**), Les élèves trouvent une interprétation pour les valeurs obtenues pour la variable y . L'échange d'idées suivant le montre :

Espagnol	Français
<p>E1 : La pendiente de la recta, tiempo t contra x, es la velocidad en x</p> <p>E2 : O sea ¿y de y contra t? ¿y la de y versus x, es la posición ¿no? De acuerdo al marco de referencia que...</p> <p>E1 : La trayectoria es como se está moviendo. Realmente no se está moviendo así [mueve el dedo índice ligeramente, de arriba hacia abajo, para indicar que la pelota no dio pequeños saltos]</p> <p>E4 : Si porque, como está muy grande la pelota, pues no podemos darle "clic" siempre en el centro [refiriéndose al análisis con Tracker]</p> <p>E3 : ¿Qué forma tiene la de y contra el tiempo t?</p> <p>E2 : Es una recta (mueve su mano horizontalmente), porque se supone que la pelota no se está moviendo verticalmente. Y la de x contra y, es la posición del objeto</p>	<p>E1 : La pente de la droite, temps t par apport x, est la vitesse en x</p> <p>E2 : Donc, y par apport t? et y par apport x, c'est la position, non? Selon le système de référence que...</p> <p>E1 : La trajectoire est la façon dont la balle se déplace. Elle ne bouge pas vraiment comme ça [E1 bouge légèrement son doigt, de haut en bas, pour indiquer que la balle n'a pas fait de petits sauts].</p> <p>E4 : Oui, parce que, comme la balle est très grosse, on ne peut pas toujours la "cliquer" au milieu [E4 se réfère à le point à suivre dans l'analyse avec Tracker⁴]</p> <p>E3 : Quelle est la forme de y par rapport au t?</p> <p>E2 : C'est une ligne droite (E2 déplace sa main horizontalement), car la balle ne se déplace pas verticalement. Et le x contre y, c'est la position de l'objet</p>

Comme nous pouvons le constater dans les réponses écrites (figure 5.18) et les dialogues du groupe 2 (i) les étudiants donnent leurs réponses principalement en **CI** puisqu'elles sont basées sur la perception des **MP** qu'ils ont réalisés. Cependant, nous pouvons observer qu'ils ont une connaissance un peu plus abstraite (**CII**), puisqu'ils mentionnent la pente et sa signification dans le graphique x vs t (la vitesse, figure 5.18b). C'est-à-dire, le groupe 2, contrairement au groupe 1 (qui perçoit le graphique x vs t de manière discrète, car ils se réfèrent à certaines positions de la balle par rapport au temps), n'écrit pas que la signification de x vs t est la position de la balle par rapport au temps, ce groupe écrit que la pente de la droite est la vitesse en x (le graphique est

4. Le logiciel Tracker, comme expliqué au chapitre 3, utilise un pointeur pour suivre l'objet en mouvement, ce pointeur, comme il n'a pas la taille de l'objet, il peut générer de petites variations. .

perçu de manière continue). (ii) En ce qui concerne les registres de représentation. Les étudiants du groupe 2 ont réussi à passer du registre **MP** aux registres **TV**, **GT**, **LNe** et **LNo**. Nous avons constaté que les étudiants ont eu des difficultés à travailler sur le registre **LNo** car ils ne pouvaient pas exprimer clairement leurs idées au début, mais ils ont réussi, par la suite, à les exprimer effectivement en **LNe**.

En ce sens, dans les questions 2a et 2b, les élèves activent le plan **[Sem-Dis]**, principalement, en **CI** (puisque les relations des variables données par les élèves pour la signification des graphiques sont données, dans leur quasi-totalité, par les perceptions du mouvement) avec quelques éléments de **CII** (comme l'utilisation de concepts tels que la pente, vitesse et la trajectoire), figure 5.19. En d'autres termes, afin de ne pas laisser le *codage* de Tracker (de la phase précédente [5]) comme un processus mécanique, les élèves sont amenés à effectuer un processus de *décodage* des registres **TV** et **GT**, qui se montre effectivement dans la signification des variables et des 3 graphiques (figure 5.18) donnés par les élèves. Il est important de dire que ce *décodage* provient de son *référentiel théorique* [6] et qu'il est contrasté avec les *perceptions* de la réalisation du mouvement [7] nous pensons que ces processus conduisent à un discours où la notion de fonction n'apparaît pas explicitement. Nous observons un discours qui contient la notion de pente liée au concept de vitesse et aux significations physiques des variables mais pas la notion de fonction, *dimension discursive* [8].

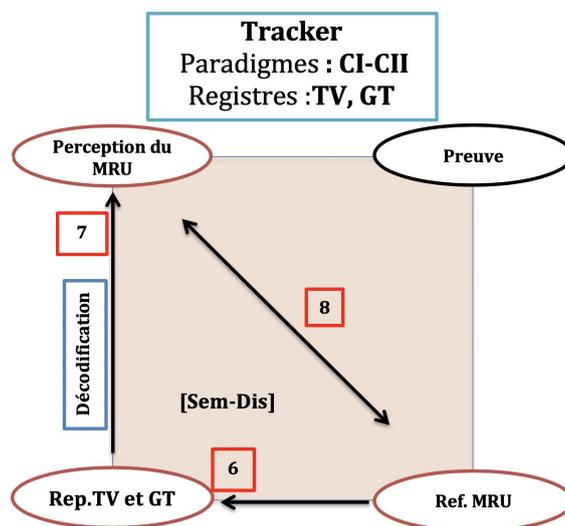


FIGURE 5.19 – Réponses 2a et 2b, ETC, groupe 2

La figure 5.20 montre les réponses données par les élèves aux questions I, II et III (travail avec GeoGebra), suivies de la traduction française.

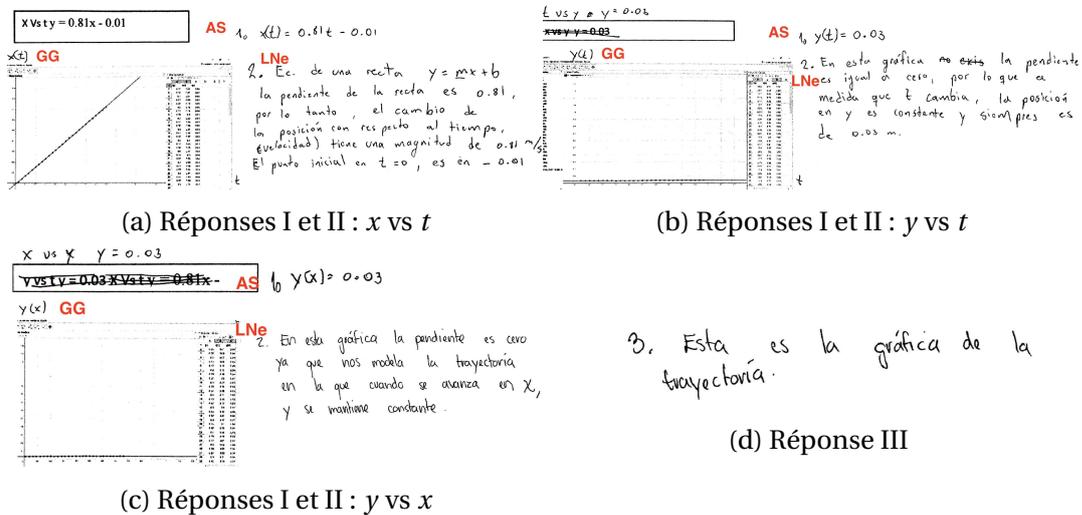


FIGURE 5.20 – Réponses I, II et II, MRU, groupe 2

Réponses en français :

II - x vs t 2. Equation d'une droite $y = mx + b$ la pente de la droite est de 0,81, donc le changement de position par rapport au temps (vitesse) a une magnitude de 0,81 m/s. Le point de départ est $t = 0$ est en -0.01 .

- y vs t 2. Dans ce graphique, la pente est nulle, ainsi, lorsque t change, la position en y est constante et est toujours de 0,03 m

- y vs x 2. Dans ce graphique, la pente est nulle car elle modélise la trajectoire dans laquelle, lorsque l'objet avance en x , y reste constant.

III 3. est le graphique de la trajectoire

Analyse des réponses I, II et III :

Lorsque les élèves veulent répondre aux questions I, II et III, ils génèrent le dialogue suivant :

Espagnol	Français
<p>E1 : Es que quedaron casi igualitas estas dos [refiriéndose a las gráficas y vs t, y vs x]</p> <p>E2 : Pues tiene sentido ¿no?, o sea, piénsalo; si la velocidad es constante y el tiempo es constante y son constantes a la par, o sea esta pendiente hace como cuarenta y cinco grados [señala la gráfica x vs t] eso dice que se mueve lo mismo en x que en t, lo que dice que estas dos gráficas son aproximadamente parecidas [señala las gráficas y vs t, y vs x]</p> <p>E1 : Existe una velocidad, ¿estás de acuerdo?</p> <p>E2 : Si</p> <p>E1 : O sea, existe un cambio gradual en x a medida que t cambia, eso implicaría que existe una velocidad. En este caso [señala la gráfica y vs t] la velocidad en y también es constante, pero es cero, porque no cambia</p> <p>E2 : ¿Y acá igual, la posición? [señala la gráfica y vs x]</p> <p>E1 : La trayectoria se está moviendo en x pero en y no se mueve</p>	<p>E1 : Ces deux sont presque identiques [en soulignant les graphiques y vs t, y vs x]</p> <p>E2 : C'est logique, n'est-ce pas? Je veux dire, pensez-y; si la vitesse est constante et le temps est constant et qu'ils sont constants en même temps, je veux dire que cette pente est d'environ quarante-cinq degrés [il souligne le graphique x vs t] qui dit que la balle se déplace de la même façon en x qu'en t, ce qui dit que, ces deux graphiques sont approximativement similaires [il souligne les graphiques y vs t, y vs x].</p> <p>E1 : Il y a une vitesse, es-tu d'accord?</p> <p>E2 : Oui</p> <p>E1 : C'est-à-dire qu'il y a un changement progressif de x au fur et à mesure que t change, ce qui impliquerait qu'il y a une vitesse. Dans ce cas [souligne le graphique y vs t], la vitesse en y est également constante, mais elle est nulle, car elle ne change pas</p> <p>E2 : Et là aussi, la position? [il souligne le graphique y vs x]</p> <p>E1 : La trajectoire se déplace en x mais en y elle ne se déplace pas</p>

Nous pouvons constater, avec les réponses données par le groupe 2 en travaillant avec GeoGebra, que cet outil technologique favorise un discours centré sur la covariation des variables impliquées, par exemple : « lorsque t change, la position en y est toujours de 0,03m constante », « lorsque l'objet avance en x , y reste constant » et l'utilisation de la notation $x(t)$, $y(t)$ et $y(x)$ (nous ne savons pas si cette notation est due à l'utilisation de GeoGebra ou au fait que les guides de travail utilisent cette notation). Il est également évident que le dialogue généré entre les étudiants E1 et E2 contient beaucoup d'éléments importants. Par exemple, lorsque E2 mentionne que la pente est d'environ 45 degrés et que cela est dû au fait que la valeur des intervalles de temps est similaire à la valeur du déplacement, cela montre que dans son esprit il a une idée correcte de ce qui se passe dans les registres **MP** et **GG**. Ensuite, E2 évoque la notion de fonction en mentionnant que dans le mouvement il y a une vitesse puisqu'il y a un changement progressif de x à mesure que t change. De la même manière, E2 mentionne que la vitesse en y est constante, mais que dans ce cas, elle est nulle. Nous

pouvons dire que E2 parvient effectivement à passer de registre **MP** à **LNo** et **LNe** en ce qui concerne la notion de fonction (la relation entre les variables x , y et t). Dans le dialogue, nous pouvons également percevoir que, bien que E1 montre un bon raisonnement, il dit aussi des choses fausses. Par exemple, en disant : que le temps est constant, que la balle se déplace de la même manière que le temps (le temps ne se déplace pas), que les deux graphiques (y vs t et y vs x) sont similaires (mathématiquement, ils le sont, mais en physique, ils signifient deux choses différentes) et que la trajectoire se déplace (même si nous pensons que dans ce cas, E1 a dit trajectoire au lieu d'objet inconsciemment).

Dans les dialogues et les réponses aux questions I, II et III du groupe 2, par rapport à la signification des graphiques de Tracker, il y a une évolution. Dans le **LNe** (figure 5.20), nous pouvons voir que les élèves utilisent les concepts de manière correcte (pente, position, trajectoire, changement de position, changement de temps, grandeur). De plus, dans le graphique x vs t , ils écrivent sous forme algébrique l'équation de la droite $y = mx + b$ (**AG**) pour donner un sens au registre **AS**. La nature des réponses I et II est principalement en **CII** avec quelques éléments de **CIII** et les élèves activent les plans **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]** (figure). En d'autres termes, les étudiants génèrent un processus d'*instrumentation* à l'aide de GeoGebra lors de la *construction* des ajustements [9]. Ce que fait GeoGebra est un *codage* du registre **TV** vers les registres **GG** et **AS** [10]. Les étudiants de l'équipe 2, lorsqu'ils rédigent la réponse de I, II et III, effectuent un processus de *décodage* qui provient de leur *référence théorique* et qui leur permet de comparer le registre **AS** ($x(t) = 0.81t - 0.01$) avec le registre **AG** ($y = mx + b$) pour obtenir des informations importantes sur le mouvement, telles que la vitesse et la position initiale du mouvement [11]. Pour enfin écrire en **LNe** la notion de fonction, en activant la *dimension discursive* [12] (figure 5.21).

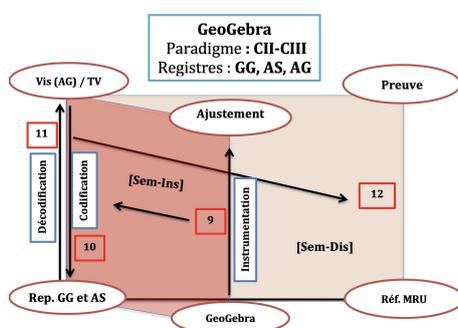


FIGURE 5.21 – Réponses I, II et III, ETC, groupe 2

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Obtenez l'équation de la trajectoire $y(x)$ (équation rectangulaire) en utilisant $x(t)$ et $y(t)$ (équations paramétriques). Que se passe-t-il lorsque vous essayez de l'obtenir?

4. Notez l'équation expérimentale qui modélise le mouvement et comparez-la à la formule théorique de la distance MRU ($d = vt$).

Est-il possible de connaître la vitesse et l'accélération du mouvement et comment?

La figure 5.22 montre les réponses données par les élèves aux questions 3 et 4, suivies de la traduction française.

(a) Réponse 3

(b) Réponse 4

FIGURE 5.22 – Réponses 3 et 4, MRU, groupe 2

Réponses en Français :

3. Étant donné que $y(t)$ est une constante, si elle est évaluée en $t = \frac{x+0.01}{0.81}$ serait la même que si elle était évaluée en x . Par conséquent, la trajectoire est constant en y et variable en x .

4. Car il s'agit d'un mouvement unidimensionnel, l'équation est $x(t) = 0.81t - 0.01$. Dans ce cas, la vitesse est égale à $0,81\text{ m/s}$ qui serait la pente du graphique et est multipliée par t qui est le temps et le $-0,01\text{ m}$ est un ajustement par la position initiale qui est $x = 0,01\text{ m}$.

Oui, puisque la pente est équivalente au changement de position en x par rapport au temps. Et comme c'est constant, l'accélération est nulle.

Analyse des réponses 3 et 4 :

Dans les enregistrements des sessions, nous n'avons pas le moment où ils répondent à la question 3, cependant, nous avons la réponse écrite (figure 5.22a). Nous pouvons observer que les étudiants, essayent d'argumenter mathématiquement le fait que $y(x) = 0,03$ (qui est la valeur qui génère Tracker). Au lieu de partir par un argument physique (en disant que c'est un mouvement qui ne varie que dans la composante x et que $y(x)$ étant la trajectoire indique seulement le rayon de la balle), ils effectuent un inversion de fonction $t(x)$, ce qui nous semble important pour les activités suivantes, et le

remplacent en $y(t)$ et disent que puisqu'il est constant alors $y(x)$ est 0,03. Dans cette question, les élèves activent la **genèse discursive** de **CII** [13] (figure 5.23a). C'est-à-dire, les élèves essaient de justifier, algébriquement, leur réponse, en regardant leur référence théorique pour prouver que la trajectoire est $y(x) = 0,03$ (résultat de GeoGebra). Toutefois, la réponse aurait pu être mieux justifiée si l'on avait utilisé les perceptions du **MP** dans **CII**.

Dans la question 4, les élèves activent le plan [Sem-Dis] (figure 5.23b) en générant un processus de **décodage** [14] du registre **AS** au registre **AG** par comparaison, mais en mentionnant la pente, nous pensons qu'ils pensaient à l'équation $y = mx + b$ plutôt que l'équation du mouvement $d = vt$ puisqu'ils l'avaient déjà mentionnée dans le travail de GeoGebra. En répondant correctement à la question, ils activent la genèse discursive des CII [15].

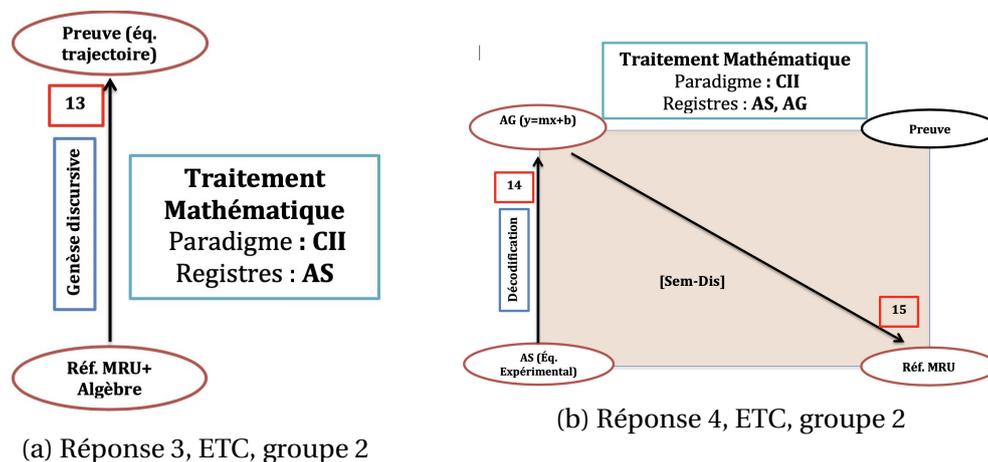


FIGURE 5.23 – Réponses 3 et 4, ETC, groupe 2

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. Que pouvez-vous dire du mouvement, en considérant tout ce que vous avez fait?

6. Si vous pouviez recommencer l'expérience, quelles améliorations apporteriez-vous?

Devoir : Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.

La figure 5.24 montre les réponses données par les élèves aux questions 5 et 6, suivies de la traduction française.

Que cumple con las características de un movimiento rectilíneo uniforme. A pesar de que el movimiento está en 2 dimensiones espaciales, una de ellas no existe un cambio de posición. Por lo tanto ajustar en la ecuación el movimiento sólo existe en el eje X.

(a) Réponse 3

(b) Réponse 4

FIGURE 5.24 – Réponses 5 et 6, MRU, groupe 2

Réponses en Français : 5. Le mouvement répond aux caractéristiques d'un mouvement rectiligne uniforme. Bien que le mouvement soit dans deux dimensions spatiales dans l'une d'elles, il n'y a pas de changement de position. Par conséquent, le déplacement n'existe que dans l'axe x .

6. Nous devons faire attention à la position initiale de l'objet de sorte que le réglage dans l'équation ne soit pas nécessaire.

Analyse des réponses 5 et 6 :

Lorsque les élèves répondent à la question 5, ils ont le dialogue suivant :

Espagnol	Français
<p>E1 : El movimiento cumple con las características de un movimiento rectilíneo uniforme.</p> <p>E4 : También podemos decir que se puede analizar únicamente en dos dimensiones</p> <p>E1 : A pesar de estar analizado en dos dimensiones, solo una cambia. En y no existe movimiento.</p> <p>E2 : Es que haces el ajuste lineal y quedó que era constante, pero según yo sí había algo.</p> <p>E1 : No, no existe</p> <p>E3 : ...pero realmente la mesa no está inclinada</p> <p>E4 : Ni va brincando [refiriéndose a la pelota], ni nada de eso</p> <p>E1 : ...Por lo tanto el movimiento solo existe en el eje x</p>	<p>E1 : Le mouvement répond aux caractéristiques d'un mouvement rectiligne uniforme.</p> <p>E4 : On peut aussi dire que le mouvement ne peut être analysé qu'en deux dimensions</p> <p>E1 : Bien qu'il soit analysé en deux dimensions, un seul change. En y, il n'y a pas de mouvement. [en se référant au mouvement idéal]</p> <p>E2 : Vous faites l'ajustement linéaire et il était constant, mais selon moi, il y avait quelque chose.</p> <p>. E1 : Non, elle n'existe pas</p> <p>E3 : ...mais la table n'est pas vraiment inclinée</p> <p>E4 : Il ne saute pas [en se référant à la balle] ou quoi que ce soit d'autre</p> <p>E1 : ...Le mouvement n'existe donc que sur l'axe x</p>

Ce dialogue est important parce que nous pouvons voir que E2 n'est pas convaincu que le mouvement est seulement dans l'axe x et il mentionne qu'il a vu quelque chose dans l'axe y même si GeoGebra a dit que le mouvement en y est constant. Les autres élèves lui disent qu'il n'y a rien d'autre, que la balle ne saute pas et que la table est bien alignée. Cet échange d'idées montre la confusion que peut avoir E2, car en classe de physique, en général, on traite de problèmes idéaux et face à un phénomène réel, il y a des variables qui interviennent (dans ce cas, l'analyse avec Tracker n'est pas si exacte car elle dépend de la précision de l'utilisateur lorsqu'il signale les points) et que selon l'influence de ces variables, elles peuvent être soit supprimées (comme le soutiennent les autres élèves), ou prises en compte. C'est ce genre de perceptions qui sont importantes dans ce travail de recherche, peuvent faire prendre conscience aux élèves de l'interaction des variables et observer la covariation entre elles, en ce sens, nous pensons que cela peut contribuer, petit à petit, à donner un sens à la notion de fonction. Par conséquent, la réponse à la question 6 est liée à l'amélioration de la collecte des données, afin d'éviter que ces variables n'interviennent et que leur mouvement soit aussi proche que possible d'un mouvement idéal. La réponse à ces deux questions amène les étudiants à activer la *dimension discursive* [16] de la *CI* à partir de la *genèse*

sémiotique (MP) et de l'*instrumentale* à l'aide de logiciels (figure 5.25)

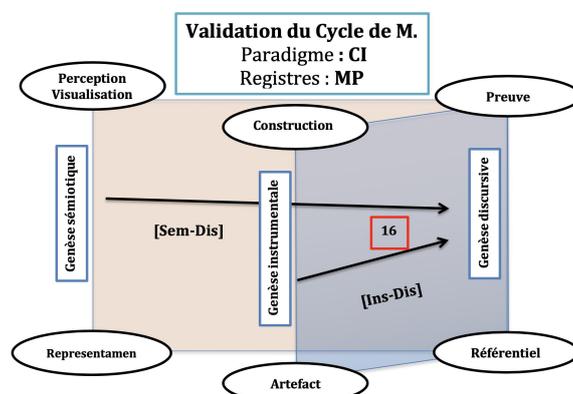


FIGURE 5.25 – Réponses 5 et 6, ETC, groupe 2

Résumé de l'activité 1, groupe 2 (figures 5.26 et 5.27). Comme l'équipe 1, le groupe 2 a parcouru les différents registres de représentation considérés dans le travail attendu (section 4.2). Les étudiants n'ont utilisé qu'un seul artefact matériel, une balle de tennis pour effectuer le MP [1] (CI). Avec cet artefact matériel, ils ont pu effectuer le mouvement conforme à la relation des variables d'un MRU (à travers de la *codification* des variables qu'ils avaient en tête pour les représenter dans une MP [2 et 3]). Avec l'aide de Tracker (*instrumentation* [4]), les étudiants ont réussi à codifier le MP vers les registres TV et GT [5] et plus tard, de manière appropriée, ils effectuent le *décodage* de ces registres [6, 7, 8] avec des éléments de CI et CII. Dans ces processus, travail avec Tracker, la notion de fonction n'émerge pas (figure 5.26) et nous pouvons également constater une difficulté dans l'interprétation et l'utilisation des concepts physiques. En utilisant GeoGebra, le groupe 2 génère un processus d'*instrumentation* [9] qui conduit à un *codage* (presque automatique) du registre TV vers les enregistrements GG et AS [10], mais les étudiants parviennent, de manière adéquate, à un *décodage* de ces registres [11 et 12] (où, il est déjà possible de voir la notion de fonction) dans CII et CIII puisqu'il utilise l'équation générale d'une droite (AG). Le groupe 2, est clair que la trajectoire du mouvement est constante, même dans l'ajustement avec GeoGebra, ils obtiennent $y = 0.03$ (CII). Cependant, lorsque nous leur demandons d'obtenir $y(x)$ avec les équations paramétriques, ils le faire mathématiquement (en effectuant une inversion d'une fonction) et ils ne donnent pas d'explication physique. Ils parvient à activer la *genèse discursive* [13] (CII). Plus tard, en comparant l'équation paramétrique du mouvement avec $d = vt$ (AS), ils parviennent à justifier les termes de leur équation expérimentale (AS) avec des éléments de CII [14 et 15]. Enfin, ils valident leurs données en disant qu'il

s'agit d'une MRU issue du processus de modélisation qu'ils ont effectué, mais dans leur réponse écrite, ils ne les ont validées qu'avec des éléments de CI [16].

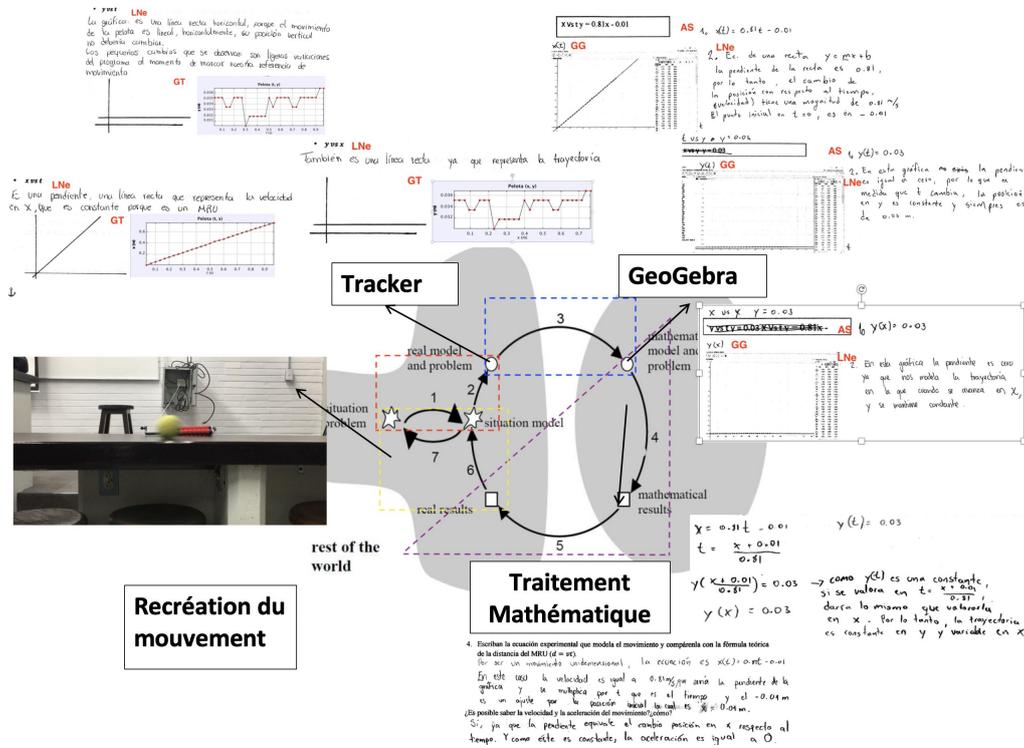


FIGURE 5.26 – La fonction autour du cycle de modélisation, activité MRU (groupe 2)

5.4.3 Groupe 3

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. Réaliser l'enregistrement du MRU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...

Les élèves, du groupe 3, ont utilisé un seul artefact matériel pour réaliser la première consigne (réalisation du mouvement et analyse de vidéo avec Tracker) : une balle anti-stress (figure 5.28a). La réponse donnée par les élèves est visible dans la figure 5.28b.



(a) Balle anti-stress

¿Usamos una pelota de un tamaño un poco más pequeño que el tamaño de una pelota de Tennis, con la ligereza de una pelota de espuma.
Además la elegimos por su tamaño, ligereza al manejarla, su color y que no se rompe.

• Observaciones del experimento: sencillo
• Porque solo se siguió una trayectoria y dicho trayectoria es lo más fácil que puede tener un objeto en línea recta.

• Observaciones de gráfica
la primera gráfica x vs t , muestra a ser una recta lo cual indica que es constante.
la segunda " y vs t " no es una línea recta porque es muy pequeña pero si estuviera en una escala más pequeña se vería constante, fue desordenado y el video fue el tercer momento x vs y .

• Dificultades
Intentamos un poco cumplir el poder graficar en geometría ya que al momento de querer hacer la recta lineal no encontramos la manera de como hacerlo.
Pusimos la distancia en cm y por eso no podemos entender los puntos de dicha gráfica.

• Geometría católicas
En la gráfica que hicimos de x vs t la pelota seguía una trayectoria que iba muy débilmente al plano con una inclinación que hacía que cambiaban todos nuestros resultados, tuvimos que calibrar y mover el plano y por ello nuestra gráfica se ve muy desproporcionada.
Como lo medimos en cm ha y una variación muy amplia, por eso la gráfica se ve muy desproporcionada.
Cambiamos la escala en 100 para que no fuera tan grande la variación en cm.

(b) Réponse 1, groupe 3

FIGURE 5.28 – Réalisation du mouvement, groupe 3

Réponse en français :

Nous avons choisi une balle plus petite qu'une balle de tennis et légère comme une balle en mousse. D'autre part, nous l'avons choisi pour sa légèreté, sa taille qui facilite les manœuvres, sa couleur et qu'elle ne se casse pas.

Observations de l'expérience

C'était simple parce qu'une seule trajectoire a été suivie et que cette trajectoire est la plus facile qu'un objet puisse suivre en ligne droite.

Remarques des graphiques

Le premier graphique x vs t tend à être une droite qui indique qu'elle est constante, le second y vs t n'est pas une droite parce qu'il est très petit mais s'il était à une échelle plus petite, il aurait l'air constant, il ralentissait et la vidéo était un peu inclinée. Le troisième graphique x vs y

Difficultés

Nous avons eu du mal à mettre le graphique dans GeoGebra parce que lorsque nous voulions faire la ligne linéaire, nous ne pouvions pas trouver un moyen de le faire.

Nous avons mis la distance en cm et c'est pourquoi nous n'avons pas pu trouver les points sur le graphique.

Graphiques GeoGebra

Dans le graphique que nous avons fait de y vs t la balle a suivi une trajectoire qui était très différente du plan, avec une inclinaison qui a fait tous nos résultats changer, nous avons dû calibrer et déplacer le plan et donc notre graphique est disproportionné.

Comme nous le mesurons en cm, il y a une très grande variation et le graphique semble très disproportionné. Nous avons changé l'échelle en 100 pour que la variation en cm ne soit pas si grande.

Analyse balle anti-stress

Tout d'abord, les membres du groupe 3 écrivent les difficultés et les observations qu'ils ont eu tout au long de l'activité et pas seulement sur le choix de l'artefact matériel et la réalisation du mouvement. Cependant, nous remarquons que les élèves du groupe 3 ne sont pas très concrets et précis. Les idées qui sont observées sont diffuses et souvent fausses.

Dans les enregistrements des sessions, nous avons constaté que les élèves du groupe 3, bien qu'ils n'utilisent qu'une balle anti-stress (**artefact matériel**), ils effectuent le mouvement environ 8 fois. La raison en est que, dans plusieurs des enregistrements du mouvement (**MP**), ils perçoivent que les variables (position en x et y par rapport au temps t) ne correspondent pas à un MRU. Cela se reflète également lorsque les étudiants mentionnent « pas si vite », « elle ne va pas tout droit », etc.

Les élèves activent les plans [**Sem-Ins**] et [**Sem-Dis**] du **CI**, figure 5.29. [1] Ils effectuent un processus d'*instrumentalisation* avec la *balle de tennis*, en activant la **genèse instrumentale**. [2] Les *perceptions* générées par l'utilisation de la balle sont *codées* dans certaines *représentations* (**MP**) (**genèse sémiotique**). [3] Ces représentations, les élèves les comparent avec leur *référentiel théorique* (**genèse discursive**) et ils considèrent qu'elles correspondent à une relation adéquate entre les variables impliquées, pour cette raison, ils décident de sauvegarder une des *représentations* (**MP**) pour l'analyser avec le Tracker. C'est-à-dire que l'utilisation de la balle les a conduits à obtenir la relation des variables qu'ils considèrent comme correctes (après avoir validé le mouvement avec sa *référence théorique*) pour un MRU. [4] Puis, les élèves utilisent

Tracker en générant un processus d'*instrumentation* qui construit des relations entre le mouvement et certaines variables (**genèse instrumental**). [5] Ceci génère un processus de *codification* du enregistrement du MP à des *représentations* TV et GT (**genèse sémiotique**), en initiant une transition vers CII.

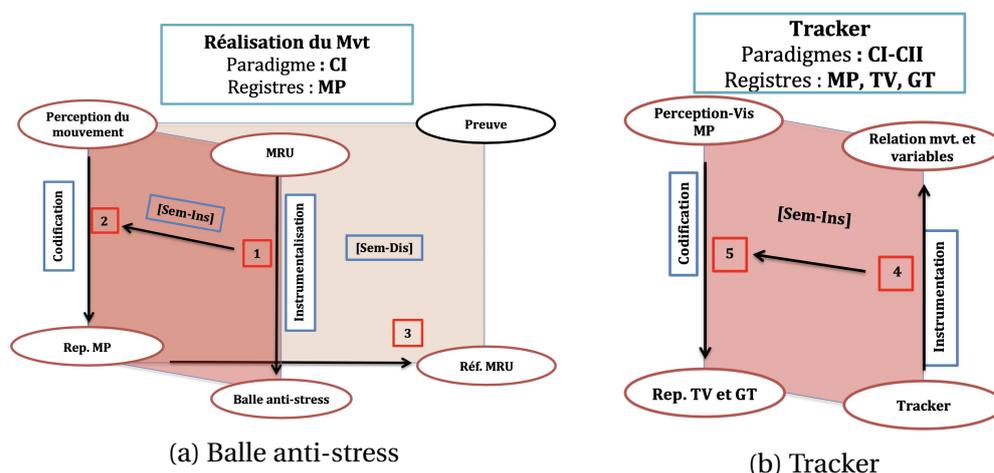


FIGURE 5.29 – Phases 1 et 2, ETC, groupe 3

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : **2. Regardez la table des valeurs que vous avez avec Tracker :**

- a) Il y a trois variables t , x et y . Quelle est leur signification physique ?
 b) Observez, dans Tracker, et tracez les graphiques suivants et écrivez leur signification : x vs t , y vs t et y vs x

Construisez les graphiques en GeoGebra de x vs t , y vs t et y vs x avec les données de Tracker, et faites l'ajustement linéaire.

I GeoGebra donne les équations avec les variables x et y . Réécrivez-les avec les variables appropriées pour le mouvement effectué. Nommer également les axes de coordonnées avec la variable physique correspondante.

II Expliquer la signification de chacun des graphiques obtenus par rapport au mouvement.

III Lequel des trois graphiques modélise le mouvement de l'objet ? pourquoi ?

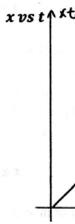
La figure(5.30) montre les réponses données par les élèves aux questions 2a et 2b, suivies de la traduction française.

t = tiempo medido en segundos

x = posición medida en cm, en dirección derecha o izquierda en el plano
 y = posición medida en cm, el recorrido de arriba a abajo en el plano

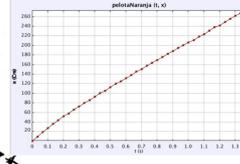
TV

t (s)	x (cm)	y (cm)
0.000	1.021	3.700
0.020	9.931	3.820
0.040	19.32	4.127
0.060	27.96	4.611
0.133	36.29	5.390
0.167	44.18	6.102
0.200	52.48	6.814
0.233	58.26	6.987
0.267	65.16	7.479
0.300	72.72	8.128
0.333	80.23	8.865
0.367	88.01	9.519
0.400	92.95	9.932
0.433	100.5	9.779
0.467	109.7	9.115
0.500	113.2	6.214
0.533	120.1	5.941
0.567	123.3	4.929
0.600	133.7	4.947



LNe La distancia que se recorrió en x es la misma en tiempos iguales, ya que aumenta de la misma manera en intervalos de tiempos iguales

GT



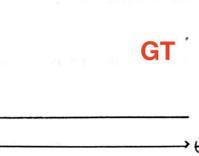
(a) Réponse 2a

(b) 2b : x vs t

y vs t y

(Y) casi no cambió, porque fue casi constante en cuanto a los intervalos de tiempo

LNe



GT

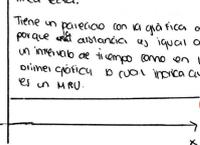


(c) 2b : y vs t

LNe

Representa la posición que tomó la pelota en la trayectoria que recorrió y en y n fue constante "y" fue avanzando en línea recta

GT



(d) 2b : y vs x

FIGURE 5.30 – Réponse 2a et 2b, MRU, groupe 3

Réponse en français

2. t = temps mesuré en secondes

x = position mesurée en cm, course à droite ou à gauche dans le plan

y = position mesurée en cm, le parcours de haut en bas dans le plan.

b) - x vs t : La distance parcourue en x est x et y en temps égaux car elle augmente de la même façon que dans l'intervalle de temps égaux.

- y vs t : (Y) à peine a changé parce qu'il était presque constant en termes d'intervalles de temps

- x vs y il représente la position que la balle a prise dans la trajectoire et en y il était constant et "x" avançait en ligne droite. il présente une similitude avec le graphique précédent parce que la distance est la même que l'intervalle de temps que dans le premier graphique qui indique qu'il s'agit d'une MRU.

Analyse des réponses 2a et 2b :

Le troisième groupe présente également quelques difficultés d'interprétation de la signification des variables x, y et t. Ceci peut être constaté dans le dialogue suivant :

Español	Français
E3 : t es tiempo, x es... ¿ x qué era? E1 : x es la posición... ¿verdad? E2 : x es la... E3 : ¿la trayectoria? E1 : x es la posición... ¿no? Es la posición medida en centímetros E3 : ¿y y qué era? E2 : Uno es cuánto sube y cuánto baja y el otro es cuánto va hacia la derecha o cuánto va hacia la izquierda E1 : En el plano cartesiano. Sí, ponle plano cartesiano, para vernos más formal	E3 : t est le temps, x est... x qu'est-ce que c'était? E1 : x est la position... n'est-ce pas? E2 : x est le... E3 : La trajectoire? E1 : x est la position...n'est-ce pas? C'est la position mesurée en centimètres E3 : Et y qu'est-ce que c'était? E2 : L'une est la quantité qui monte et la quantité qui descend, l'autre est la quantité qui va à droite ou à gauche E1 : Sur le plan cartésien. Oui, tu écris le plan cartésien, pour nous faire paraître plus formels

Dans le dialogue et dans la réponse écrite, nous pouvons observer que cette équipe est confrontée à plusieurs difficultés : il est évident qu'ils ont peu de facilité à exprimer ce qu'ils observent, ils utilisent des mots très descriptifs liés directement aux perceptions ("E2 : l'un est quand ça monte et quand ça descend et l'autre est quand ça va à droite ou quand ça va à gauche") et, de manière répétée, ils ne finissent pas les idées qu'ils commencent. Aussi, nous nous rendons compte de la difficulté qu'ont les élèves à interpréter les variables physiques impliquées dans le mouvement et, par conséquent, la difficulté à les relier aux variables mathématiques respectives, pour faire émerger la notion de fonction (qui n'a pas découlé du travail avec Tracker). Nous considérons que cela n'est pas nécessairement dû à une référentiel théorique déficiente, mais qu'ils n'ont pas l'habitude de modéliser des situations physiques, parce qu'ils ne le font pas régulièrement dans leurs cours. En ce qui concerne l'interprétation des graphiques (2b), les élèves ont le dialogue suivant :

Espagnol	Français
E2 : Que avanzó distancias iguales en tiempos iguales [E2 se refiere a la gráfica x vs t], porque es una recta ¿no? Porque si fuera una curva hubiera... [no completa la frase]	E2 : que la balle a avancé distances égales en temps égal [E2 se réfère au graphique x vs t], parce que c'est une droite, n'est-ce pas? Parce que si c'était une courbe, il y aurait... [ne complète pas la phrase]
E1 : Le puedes escribir que como que x y y son constantes	E1 : Tu peux écrire que comme x et y sont constants
E2 : No, x no es constante. La distancia que se recorrió en x fue en un tiempo igual, o sea ¿cómo diríamos esto?...Que en un tiempo igual, x recorre la misma cantidad de... O sea x aumenta la misma cantidad de... [no termina la idea]	E2 : Non, x n'est pas constant. La distance qui a été parcourue en x l'a été en un temps égal, comment dire ceci?...Que dans un temps égal, x parcourt la même quantité de... C'est-à-dire que x augmente la même quantité de... [ne termine pas l'idée]
E3 : La distancia que recorrió x es directamente proporcional a la... [no termina la frase]	E3 : La distance parcourue par x est directement proportionnelle à la ... [ne termine pas la phrase]
E2 : No, no, no. La distancia que se recorre en x es igual en tiempos iguales ¿no?	E2 : Non, non, non. La distance parcourue en x est égale à temps égal, n'est-ce pas?

Dans ce dialogue, nous continuons à observer les difficultés que les élèves rencontrent pour expliquer leurs idées. Cependant, à la fin du dialogue, E2 mentionne « La distance parcourue en x est égale en temps égal », phrase qui montre une première idée de covariation. La difficulté que les élèves ont à expliquer la dépendance de la variable physique, position, par rapport à la variable temporelle, est également présente lorsqu'ils effectuent l'analyse du graphique y vs t . Dans ce cas, ils ne donnent pas la signification physique de la variable y . Simplement, un des étudiants commente que comme les valeurs de y , obtenues dans la TV, ils ne changent pas beaucoup parce que « il n'a pas bougé ni vers le haut ni vers le bas⁵ ». Et dans le cas du graphique y vs x , les élèves seulement mentionnent que c'est constant. Ces réponses (2a et 2b) sont données au sein du paradigme CI (nous pourrions même dire un faible CI) et ils activent le plan [Sem-Dis] (figure 5.31). Les élèves commencent par un processus de *décodage* (les élèves utilisent, principalement, les perceptions qu'ils avaient dans le MP) [6] et comme toutes les significations ne sont pas claires ou correctes, nous pouvons dire que l'activation de la genèse discursive n'est pas complète [7].

5. Certains des dialogues que nous considérons comme importants, et qui d'une certaine manière sont isolés, nous les écrivons de cette façon, sans mettre les autres participations que nous ne considérons pas comme pertinentes

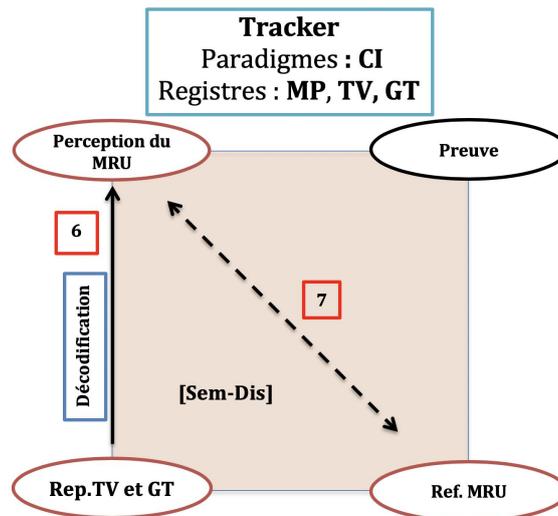


FIGURE 5.31 – Réponses 2a et 2b, ETC, groupe 3

La figure 5.32 montre les réponses données par les élèves aux questions I, II et III, suivies de la traduction française.

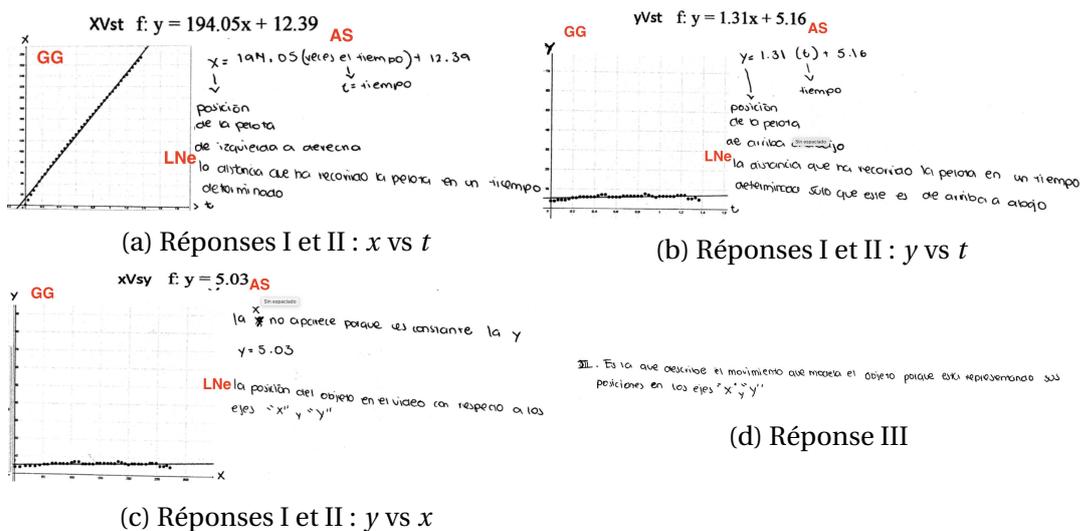


FIGURE 5.32 – Réponses I, II et II, MRU, groupe 3

Réponses en français :

II - x vs t : x -> Position de la balle de gauche à droite. La distance parcourue par la balle en un temps donné

- y vs t : y -> Position de la balle de haut en bas. La distance parcourue par la balle en un temps donné, seulement que c'est de haut en bas.

- y vs x : Le x n'apparaît pas parce que le y est constant $y = 5.03$. La position de l'objet

dans la vidéo par rapport aux axes x et y

III. C'est celui qui décrit le mouvement qui modélise l'objet car il représente les positions dans les axes x et y .

Analyse des réponses I, II et III :

Une fois de plus, nous constatons dans les réponses aux questions I, II et III sont encore très ancrées dans le réel non scientifique. Bien que des idées apparaissent qui pourraient être considérées comme proches de la notion de fonction « La distance parcourue par la balle en un temps donné », elle montre une idée de la fonction statique (ne présente pas de covariation) en disant « en un temps donné ».

Ensuite, le travail qu'ils effectuent dans GeoGebra leur permet, comme prévu, de passer du registre de représentation **TV** au registres **GG** et **AS** (déterminé par la fonction fournie par GeoGebra). Dans les réponses données par les élèves (figure 5.32), nous pouvons observer qu'ils confondent le concept de distance avec celui de position, que la description des variables continue à se faire en termes de perceptions (haut-bas et gauche-droite) et qu'il n'y a pas aucune idée précise sur la dépendance des variables. En ce qui concerne la consigne III, ils disent que le graphique qui modélise le mouvement est y vs x ce qui est incorrect, mais nous pensons que c'est parce qu'ils ne comprennent toujours pas quelle est la différence entre la position, la distance et la trajectoire. Dans l'ETC, les plans **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]** du **CI** sont activés. Les étudiants génèrent un processus d'*instrumentation* avec l'utilisation de GeoGebra [8]. GeoGebra effectue une *codification* du registre **TV** au **GG** et **AS** [9]. Le groupe 3 *décode* ensuite les registres **GG** et **AS** [10] et les compare avec les perceptions du mouvement. Cependant, au moment de générer un discours pour donner du sens, ils ne parviennent pas à manipuler les concepts de manière adéquate, en générant une activation incorrecte de la *genèse discursive* [11] (figure 5.33).

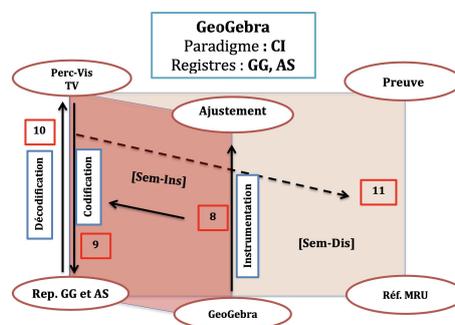


FIGURE 5.33 – Réponses I, II et III, ETC, groupe 3

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Obtenez l'équation de la trajectoire $y(x)$ (équation rectangulaire) en utilisant $x(t)$ et $y(t)$ (équations paramétriques). Que se passe-t-il lorsque vous essayez de l'obtenir?

4. Notez l'équation expérimentale qui modélise le mouvement et comparez-la à la formule théorique de la distance MRU ($d = vt$).

Est-il possible de connaître la vitesse et l'accélération du mouvement et comment?

La figure(5.34) montre les réponses données par les élèves aux questions 3 et 4 suivies de la traduction française.

Cuando tratamos de obtener "x" y "y" nos sale igual que en geogebra
(pero cuando queremos sacar "x" en "y")
Cuando despejamos "y" nos dimos cuenta que "x" no es constante ya
que la inclinación es mínima y geogebra no lo tomó en cuenta.
A partir de las ecuaciones de nuestros gráficos, obtuvimos las funciones de
"x" y "y" y de ahí despejamos "y"

(a) Réponse 3

4. Escriban la ecuación experimental que modela el movimiento y compárenla con la fórmula teórica de la distancia del MRU ($d = vt$).

$$1.31x - 194.05y + 985.0671 = 0$$

La velocidad es constante con respecto al intervalo de tiempo

¿Es posible saber la velocidad y la aceleración del movimiento? ¿cómo?

Si es posible saber, a partir de sacar la velocidad si lo medimos en un
intervalo de tiempo podemos sacar la aceleración; pero en este caso la
aceleración es 0.

(b) Réponse 4

FIGURE 5.34 – Réponse 3 et 4, MRU, groupe 3

Réponse en français

3. Lorsque nous essayons d'obtenir x et y , nous obtenons la même chose que dans GeoGebra. Lorsque nous avons isolé y , nous nous sommes rendu compte que x n'est pas constant car la pente est minimale et GeoGebra n'en a pas tenu compte.

A partir des équations de nos graphiques, nous avons obtenu les fonctions de x et y , puis nous avons isolé y .

4. La vitesse est constante par rapport à l'intervalle de temps.

Oui, il est possible de le dire en retirant la vitesse si on la mesure en centimètres. L'intervalle de temps nous pouvons obtenir l'accélération mais dans ce cas l'accélération est nulle

Analyse des réponses 3 et 4 :

Dans la réponse 3, le groupe 3 parle d'avoir fait un travail algébrique, mais nous ne pouvons le voir ni dans les enregistrements des sessions ni dans les guides de travail. Il semble que, comme les groupes précédents, ils ont inversé $y(t)$ pour obtenir $y(x)$ mais nous ne pouvons pas être sûrs. Nous observons également le mot fonction mais ils ne présentent aucune formalisation mathématique.

Comme nous pouvons le voir dans la réponse à la question 3, les élèves du groupe 3 n'ont pas compris l'instruction. Tant dans l'enregistrement de la séance que dans leur réponse écrite, il est clair que même si les élèves notent certaines choses, elles n'ont pas vraiment de sens. La même chose se produit avec la première partie de la question 4. La deuxième partie de la question 4 est correcte (mais cette question est seulement pour savoir s'ils connaissent la signification de la dérivée). Par conséquent et puisque nous ne pouvons pas être sûrs de ce qui s'est réellement passé (parce que nous ne voyons pas les développements algébriques), dans ces deux questions, nous pensons qu'il n'y a pas d'activation des plans du ETC.

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. *Que pouvez-vous dire du mouvement, en considérant tout ce que vous avez fait?*

6. *Si vous pouviez recommencer l'expérience, quelles améliorations apporteriez-vous?*

Devoir : *Préparer une présentation de 10 minutes dans laquelle vous expliquez aux autres groupes comment votre travail s'est déroulé dans le processus de modélisation que vous avez vécu, en ce qui concerne : le développement, les difficultés, les conclusions.*

La figure 5.35 montre les réponses données par les élèves aux questions 5 et 6 suivies de la traduction française.

In este caso la aceleración no cambia y la velocidad es igual porque recorre la misma distancia en un intervalo de tiempo que es constante.

(a) Réponse 5

Tener un mejor soporte para que el video sea más preciso
Tener en cuenta que en el marco de referencia cambia mucho la gráfica si lo dibujamos en cm

(b) Réponse 6

FIGURE 5.35 – Réponse 3 et 4, MRU, groupe 3

Réponse en français

5. Dans ce cas, l'accélération ne change pas et la vitesse est la même parce qu'il parcourt la même distance dans un intervalle de temps constant.

6. Pour avoir un meilleur support afin que la vidéo soit plus précise. Garder à l'esprit qu'avec le système de référence, le graphique change beaucoup si on le laisse en cm.

Analyse des réponses 5 et 6 : Dans les questions 5 et 6, nous pouvons observer que les élèves ne sont pas non plus en mesure de donner des réponses avec beaucoup d'informations sur le mouvement, nous pensons que c'est parce qu'ils n'ont pas pu répondre aux questions précédentes. Dans ce sens, nous considérons également qu'il n'y a pas eu une véritable activation des éléments de l'ETC.

Résumé de l'activité 1, groupe 3 (figures 5.36 et 5.37).

Les élèves du groupe 3 utilisent un seul artefact matériel (balle anti-stress) avec lequel ils génèrent un processus d'*instrumentalisation* [1] depuis l'idée et les caractéristiques qu'ils ont du MRU. Ce groupe a dû faire environ 8 fois le mouvement pour obtenir la codification des variables qu'ils avait en tête du MP qui représentait un MRU [2 et 3] (CI). L'utilisation de Tracker (*instrumentation* [4]) pour obtenir les registres TV et GT à partir du *codage* du MP [5] n'a pas posé de problème. Cependant, le *décodage*, de ces registres [6], a commencé à présenter des difficultés dans le discours, en particulier dans l'utilisation des concepts et de l'interprétation des graphiques générant une activation partielle de la *genèse discursive* [7]. Ensuite, le groupe 3 utilise GeoGebra (*instrumentation* [8]) et *code* le registre TV en GG et AS [9] sans aucun problème. Cependant, à nouveau, lors du *décodage*, ils montrent des problèmes, bien qu'ils y parviennent avec une certaine idée de ce qui se passe [10], le discours généré est souvent erroné [11]. En conséquence des difficultés que le groupe 3 a présentées, nous observons que les questions 3, 4, 5 et 6 reçoivent des réponses partiellement correctes ou incorrectes et n'activent donc aucun élément de l'ETC. Nous pensons que cela est dû au fait que dès les premières questions, ils ont commencé par des problèmes dans la partie discursive, en confondant des concepts tels que : la distance, la position et la trajectoire.

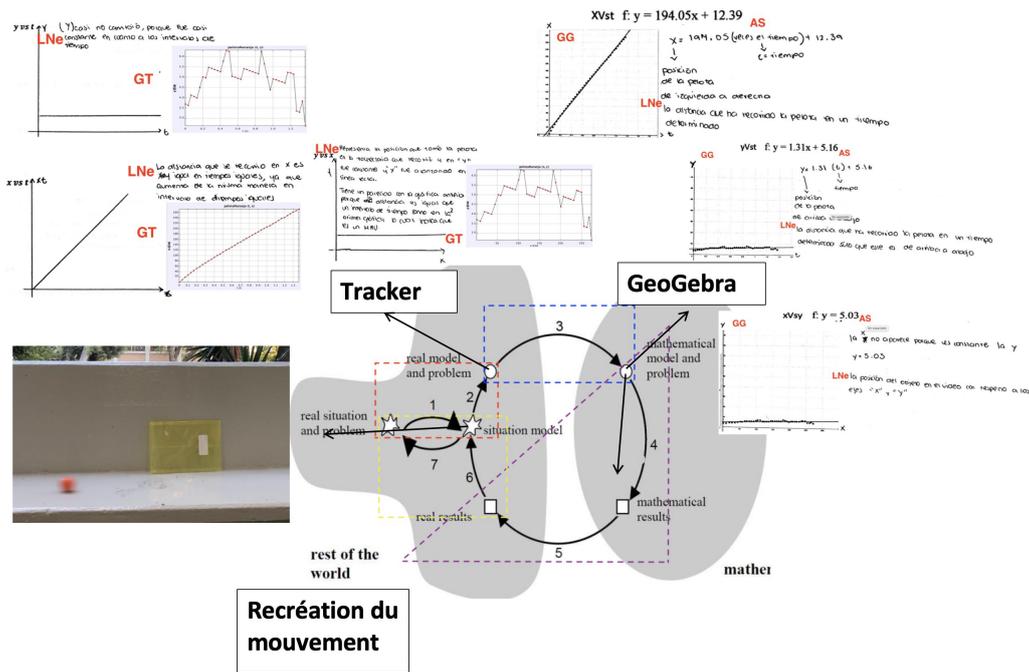


FIGURE 5.36 – La fonction autour du cycle de modélisation, activité MRU (groupe 3)

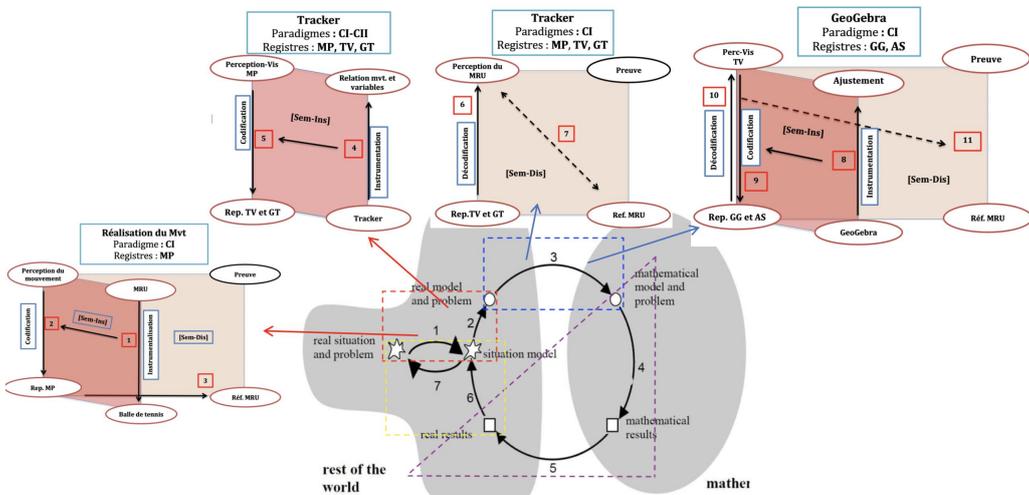


FIGURE 5.37 – Analyse globale, activité 1 (groupe 3)

5.4.4 Conclusion générale activité 1

Tout au long de l'activité de modélisation, les élèves des groupes 1 et 2 travaillent avec les différents registres de représentation : Mouvement physique (MP), Table des valeurs (TV), Graphique Tracker (GT), Graphique GeoGebra (GG), Algébrique spécifique (AS) et Algébrique générale (AG). Cependant, nous pensons que l'interaction

entre les registres n'est pas entièrement articulée. C'est-à-dire qu'en principe, les étudiants associent, par la perception, la courbe générée par Tracker au mouvement de la balle (CI) sans donner à la courbe le statut de relation fonctionnelle entre les variables physiques du mouvement. Plus tard, lorsqu'ils travaillent dans GeoGebra, les élèves génèrent la représentation GG et AS. Le passage de GT à GG produit la transition de la courbe, qui est de nature physique, à la représentation graphique, de nature mathématique, qui donne son origine à l'expression AS. La transition de la représentation AS à la GG est donnée au moyen d'un traitement mathématique dans lequel les groupes 1 et 2 font une inversion de la fonction ($t(x)$) pour obtenir $y(x)$ qui représente la trajectoire. Le groupe 3, mentionne avoir fait une inversion de la fonction ($t(x)$), mais il n'y a pas de développement explicite de celle-ci (ni dans le guide de travail ni dans les comptes rendus de séance).

En général dans cette activité, nous observons une idée fragmentée de la notion de fonction. En d'autres termes, bien que les étudiants travaillent avec les différents registres de représentation (au moyen de processus de codage) un décodage ou une signification partielle de ceux-ci est perçue. En d'autres termes, nous observons une connaissance dissociée entre les concepts physiques et les objets mathématiques. Bien que nous considérions cette dissociation comme naturelle (en raison de l'enseignement et de l'apprentissage classiques), nous pensons que le jeu entre les registres de représentation dans cette première activité les a conduits à une première approche de la notion de fonction à travers le processus de modélisation.

Suite à l'analyse des processus cognitifs et des éléments épistémologiques, nous observons que dans cette activité, les groupes 1 et 2, ont généré une activation complète des ETC principalement dans les paradigme CI et CII. Alors que le groupe 3, qui a montré des difficultés à articuler leurs idées (genèse discursive), n'a pas réussi à activer pleinement l'ETC et il est resté généralement au paradigme CI.

5.5 L'activité 3, MCU

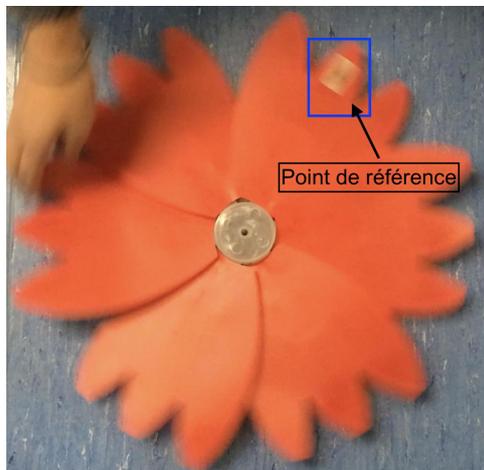
Dans cette section, nous présentons l'analyse, de chaque groupe, de la troisième activité qui correspond au mouvement circulaire uniforme (MCU). Il est important de mentionner qu'avant ce mouvement, les élèves ont effectué l'activité relative au mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA), où les élèves ont perfectionné l'utilisation des logiciels et le processus de modélisation

5.5.1 Groupe 1

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. Réaliser l'enregistrement du MCU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...

2. Pensez-vous que le sens du mouvement sera un élément pertinent dans votre analyse? Argumenter votre réponse

Les élèves ont choisi un moulin à vent pour la réalisation du Mouvement Circulaire Uniforme (MCU), figure 5.38a. La réponse donnée par les élèves est visible dans la figure 5.38b, suivi de la traduction en français.



(a) Moulin à vent

Escogimos el requilete de flor porque queríamos algo que otra equipo no hubiese escogido, aunque después de pasarlo a tracker nos dimos cuenta que el movimiento es bastante fácil aunque una dificultad es que no estábamos seguros de que el punto de referencia siempre estuviera en el mismo lugar.

2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis? Argumenten su respuesta

Sí, porque afecta el signo de los datos que obtengamos (positivos o negativos)

(b) Réponse 1 et 2, MCU, groupe 1

FIGURE 5.38 – Réalisation du MCU, groupe 1

Réponse en Français : Nous avons choisi les moulins à vent parce que nous voulions quelque chose qu'une autre équipe n'aurait pas choisi. Bien qu'après l'avoir passé à Tracker nous avons réalisé que le mouvement était assez facile. Une difficulté était que nous n'étions pas sûrs si le point de référence était au même point tout le temps.

Analyse moulins à vent

Les élèves du groupe 1 n'ont pas eu besoin d'utiliser plusieurs artefacts, puisqu'en choisissant le moulin à vent, ils ont obtenu la relation entre les variables qu'ils considéraient comme appropriées pour un MCU. Nous pensons que la perception des variables qui pourraient influencer la décision des élèves sont : la grandeur de la vitesse tangentielle et/ou la vitesse angulaire. C'est-à-dire que même si à ce moment de l'activité les élèves ne pensent probablement pas aux positions x et y par rapport au temps de manière ponctuelle, ils peuvent percevoir, visuellement, que le point jaune qu'ils ont mis comme référence, dans le moulin à vent, présente une vitesse angulaire plus ou moins constante (puisque cette vitesse est plus facilement perceptible par les sens). En ce qui concerne la trajectoire circulaire, ils n'ont pas non plus eu de problème en raison de la nature de l'artefact. Une fois de plus, nous pouvons dire que ce qui guide cette étape de l'activité sont les perceptions et les connaissances de base du MCU, c'est-à-dire que les élèves sont dans **CI**.

Dans la réalisation du mouvement, les élèves activent les plans [**Sem-Ins**] et [**Sem-Dis**] du paradigme CI (figure 5.39a). En d'autres termes, lorsque les étudiants sont conscients qu'ils veulent faire une MCU et qu'ils connaissent les caractéristiques que le mouvement devrait avoir (et les conséquences du sens de rotation, question 2), les élèves génèrent un processus d'*instrumentalisation* lors du choix d'un moulin à vent [1]. Ensuite, ils activent la *genèse sémiotique* en *codifiant* les *perceptions* du MP, c'est-à-dire en conservant la mémoire d'une partie de la représentation physique du mouvement qui vient de se réaliser [2]. Ensuite, ils rapprochent ce mouvement, avec ce qu'ils viennent de percevoir, avec leurs expériences passées et leur *référentiel théorique* d'un MCU [3]. À partir de ce qui précède, les élèves décident de conserver l'enregistrement du mouvement pour l'analyser avec Tracker. Avec l'utilisation de Tracker (figure 5.39b), les élèves génèrent un processus d'*instrumentation* [4]. Ce processus *codifie* de manière presque mécanique le registre **MP** vers les registres **TV** et **GT** [5], en générant une transition vers CII.

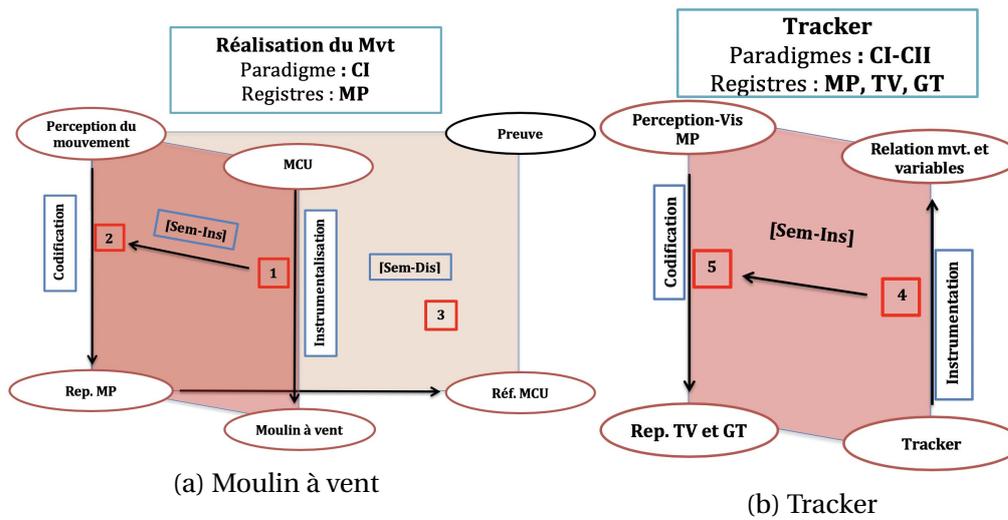


FIGURE 5.39 – Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 1

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Identifier les variables impliquées dans le MCU et écrire la signification

4. pourquoi x et y changent-ils de signe à intervalles ?

5. Regardez les graphiques :

a) x vs t et y vs t Quelles sont les différences entre eux ?

b) x vs θ et y vs θ quelle différence trouvez-vous avec les graphiques précédents ? pourquoi ?

La figure 5.40 montre les réponses donnés par les élèves aux question 3, 4 et 5, suivies de la traduction en français.

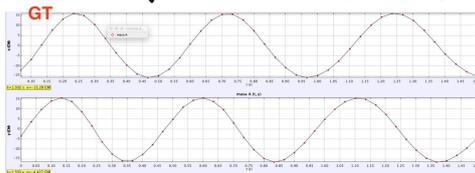
x = posición con respecto al eje x
 y = posición con respecto al eje y
 t = tiempo transcurrido

TV	t (s)	x (CM)	y (CM)
	0.733	15.57	-4.141
	0.767	12.71	-10.28
	0.800	7.426	-14.71
	0.833	0.857	-16.42
	0.867	-5.712	-15.28
	0.900	-10.85	-11.71
	0.933	-14.42	-6.854
	0.967	-15.71	-1.000
	1.000	-14.71	4.855
	1.033	-12.00	9.853
	1.067	-7.568	13.57
	1.102	-1.571	15.42
	1.135	4.570	14.85
	1.168	10.14	12.00
	1.202	14.14	7.283
	1.235	15.99	1.142
	1.268	15.28	-5.141
	1.302	12.42	-10.57
	1.335	7.568	-14.57
	1.368	1.856	-16.42
	1.402	-4.141	-15.85
	1.435	-9.139	-13.14
	1.468	-12.85	-9.425
	1.502	-15.28	-4.427

(a) Réponse 3, MCU, groupe 1

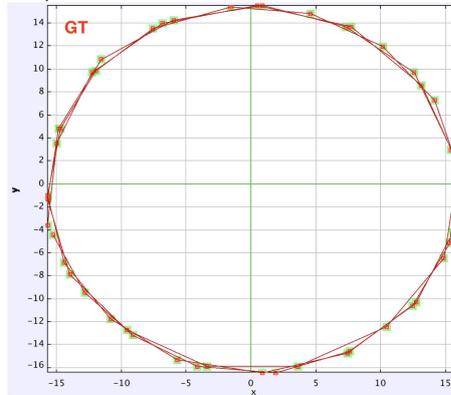
a) x Vs t & y Vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?

No son idénticas porque cuando inició el movimiento la coordenada x difiere de la coordenada y .



(c) Réponse 5a, MCU, groupe 1

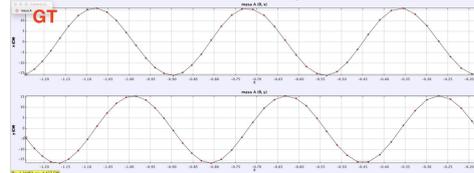
Por el tipo de movimiento y a que en la circunferencia el origen del marco de referencia se encontraba en el centro (bueno en realidad nosotros decidimos ponerlo así)



(b) Réponse 4, MCU, groupe 1

b) x Vs θ & y Vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

Ambas son similares a la gráfica de un seno pero difieren en la ordenada al origen y que los puntos en $x(\theta)$ son negativos porque nuestro movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj.



(d) Réponse 5b, MCU, groupe 1

FIGURE 5.40 – Réponses 3, 4 et 5 (MCU), groupe 1

Réponse en Français : 3. x = Position par rapport à l'axe x ; y = Position par rapport à l'axe y ; t = temps écoulé

4. Par le type de mouvement car dans la circonférence l'origine du plan cartésien était au centre (en fait nous avons décidé de le mettre là)

5. a) ils ne sont pas identiques car lorsque le mouvement a commencé, la coordonnée x a différé de la coordonnée y

b) Les deux sont similaires au graphique d'un sinus mais différent dans l'ordonnée à l'origine et que les points sur le $x(\theta)$ sont négatifs car le mouvement est dans le sens des aiguilles d'une montre.

Analyse réponse 3, 4 et 5

Dans les questions 3, 4 et 5, les élèves activent le plan [Sem-Dis] du paradigme CI (figure 5.41). En d'autres termes, les étudiants effectuent un *décodage* (qui provient du *référentiel théorique* enrichie par les activités précédentes [6]) des registres TV et

GT [7] qui conduit à la **dimension discursive** lors de l'écriture de la signification des éléments [8]. Dans ce processus, nous pouvons observer une évolution dans le discours des élèves, c'est-à-dire que, alors que dans l'activité 1, le **décodage** des registres **TV** et **GT** était principalement basé sur des éléments sensoriels, dans ces réponses, nous pouvons observer l'utilisation des concepts mathématiques de manière plus précise. Par exemple, à la question 3, les élèves savent déjà avec certitude que x et y sont les positions dans les axes horizontal et vertical, respectivement, et que t est le temps écoulé. À la question 4, les élèves utilisent le système cartésien et savent qu'ils peuvent le déplacer et le placer où il est le plus pratique pour leur analyse (Ils sont également conscients des changements qui peuvent être générés lorsque le système de référence est modifié). Dans la question 5, les étudiants manipulent correctement la notation algébrique $x(\theta)$. D'autre part, nous observons également que les étudiants, bien que leur processus de **décodage** soit un peu plus abstrait, ne laissent pas de côté la signification physique des éléments.

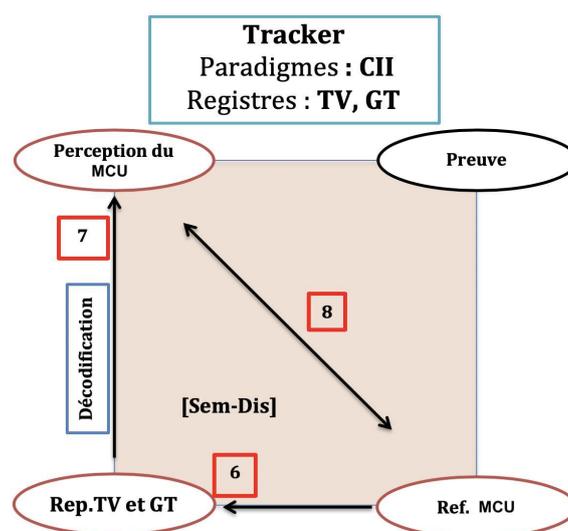


FIGURE 5.41 – Réponses 3, 4 et 5 (MCU),ETC, groupe 1

Les **Phases 4 et 5** se composent des questions 6, 7, 8, 9, 10 et 11. L'analyse est divisée en deux parties : la première partie contient les questions 6 et 7, et la deuxième partie, les questions 8, 9, 10 et 11.

Première partie. **Question(s) et/ou consigne(s) : 6. Importer le tableau des valeurs de Tracker dans GeoGebra, faire le graphique, faire le ajustement avec la fonction sinus et Compare :**

a) x vs t et y vs t Écrivez la signification de chacun des termes des fonctions fournies

par GeoGebra au moment où vous effectuez le ajustement.

I Ecrivez une des fonctions en termes de cosinus (vous pouvez utiliser GeoGebra pour vérifier les différentes options)

Aide : N'oubliez pas de considérer que : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Recherchez des informations sur la translation des fonctions sinus et cosinus (si nécessaire).

b) x vs θ et y vs θ comment sont-ils par rapport aux précédents ? pourquoi ? (convertir les degrés en radians)

I Observer les ajustements obtenus, simplifier les équations et compléter le tableau, voir annexe A.3

c) Si la vitesse angulaire est $\omega = \frac{\theta}{t}$ et donc $\theta = \omega t$, alors les équations paramétriques (avec le paramètre θ) peuvent être écrites comme : $x =$, $y =$

7. En considérant les équations avec le paramètre θ

a) Transformez les équations paramétriques en une équation rectangulaire correspondante $y(x)$. Rappelez-vous que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

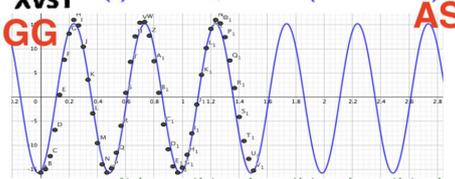
b) Que représente mathématiquement cette équation ? quelle est sa signification physique ?

La figure 5.42 montre les réponses donnés par les élèves aux question 6 et 7, suivies de la traduction en français.

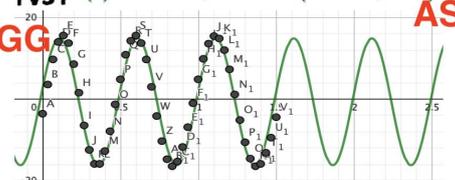
6a X vs t x = la posición con respecto al eje x
 t = tiempo transcurrido
 y vs t y = la posición con respecto al eje y
 t = tiempo transcurrido
 Ambas variables son en función del tiempo

LN e t = tiempo transcurrido
 Ambas variables son en función del tiempo

X vs T $f(x) = -0.29 + 15.52 \text{ sen}(12.55x - 1.36)$ **AS**
GG



T vs Y $f(x) = -0.65 + 15.52 \text{ sen}(12.51x + 0.22)$ **AS**
GG



6aI $f(x) = 15.52 \text{ sen}(12.55x - 1.36) - 0.29$ } Ecuación paramétrica de y vs t
 $f(x) = 15.52 \text{ cos}(12.55x) - 0.29$

(a) Réponses 6a et 6aI, MCU, groupe 1

AG
 $x = r \text{ Sen}(\omega t)$
 $x = 15.22 \text{ sen}(12.51t)$

AS
 $y = 15.22 \text{ cos}(\theta)$

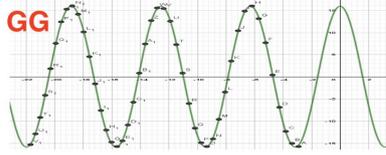
(c) Réponse 6c, MCU, groupe 1

b) x Vs θ y y Vs θ ¿cómo son con respecto a las anteriores? ¿por qué? (convertir los grados a radianes)

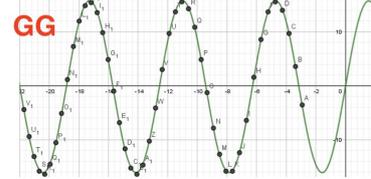
son las mismas gráficas pero los puntos están en el cuadrante negativo porque nuestro movimiento van en el sentido de las manecillas del reloj

Las gráficas de θ no están desfasadas

αVSx **AS** $f(x) = 0.07 + 15.9 \text{ sen}(1x + 1.57)$



αVSy $f(x) = -0.19 + 15.94 \text{ sen}(1x + 0)$ **AS**



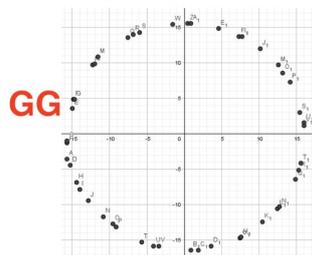
Con respecto al	Ecuación paramétrica de x	Ecuación paramétrica de y	Simplificación ecuación paramétrica de x	Simplificación ecuación paramétrica de y
Tiempo t	$x = 15.22 \text{ sen}(12.51t - 1.36)$ $(12.51t - 1.36)$	$y = 15.52 \text{ cos}(12.51t + 0.22)$ $(12.51t + 0.22)$	$x = 15.22 \text{ sen}(12.51t)$	$y = 15.52 \text{ cos}(12.51t)$
Angulo θ	$(12.51t - 1.36)$ $(12.51t - 1.36)$	$(12.51t + 0.22)$ $(12.51t + 0.22)$	$(12.51t)$	$(12.51t)$

Quitamos los términos que estaban fuera del seno que cambian el seno, porque lo único presentaban que nuestro movimiento no era

(b) Réponses 6b et 6bI, MCU, groupe 1

a) Transformen las ecuaciones paramétricas a una ecuación rectangular y(x) que corresponda. Recordando que $\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$

$(15.22 \text{ sen}(\theta))^2 + (\text{cos}(\theta)(15.22))^2 = 1^2$



b) ¿Qué representa matemáticamente esta ecuación? ¿cuál es el significado físico?

La ecuación de la circunferencia, matemáticamente y físicamente, representa la trayectoria

(d) Réponses 7a et 7b, MCU, groupe 1

FIGURE 5.42 – Réponses 6 et 7, MCU, groupe 1

Réponses en français :

6a y vs t y = la position par rapport à l'axe y

t = temps écoulé

les deux variables dépendent du temps

6aI Équation paramétrique de y vs t

6b Ce sont les mêmes graphiques mais les points sont dans le quadrant négatif car le mouvement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les graphiques de θ ne sont pas décalées

6bI Nous avons enlevé les termes qui étaient en dehors du terme qui contenait le sinus, parce qu'un représentait seulement ce que notre mouvement n'était pas précis.

7. b) En termes physiques et mathématiques, l'équation représente la trajectoire

Analyse des réponses 6 et 7 :

Les questions 6 et 7 sont principalement liées au travail dans GeoGebra. En essayant de générer la représentation GG et AS avec ce logiciel, les élèves génèrent le dialogue suivant :

Espagnol	Français
E3 : Maestra, aquí no es ajuste lineal, ¿o sí?	E3 : Professeur, ce n'est pas un ajustement linéaire, n'est-ce pas?
E2 : ¿Existe el ajuste circular?	E2 : Y a-t-il un ajustement circulaire?
P : ¿Ustedes qué gráfica creen que sea?	P : De quel graphique s'agit-il, selon vous?
E1 : Es que es un seno [hace un movimiento con su dedo trazando una curva sinusoidal en el aire]	E1 : C'est un sinus [fait un mouvement avec le doigt en traçant une courbe sinusoïdale dans l'air].
P : Pues entonces, hagan ese ajuste	P : Bien, alors, faites cet ajustement

Dans ce dialogue, nous pouvons observer que les élèves se trouvent face à un graphique sinusoïdal et un doute surgit dans le processus d'*instrumentation* avec GeoGebra (CII). Les étudiants ne sont pas sûrs de savoir comment ils peuvent générer un ajustement avec ces caractéristiques. E2 demande s'il y a un ajustement circulaire et comme réponse l'enseignant leur demande s'ils ont une idée de ce que pourrait être le graphique. E1 déclare que c'est un sinus, en montrant qu'il connaît ce type de graphique. Après cela, les élèves trouvent, immédiatement, dans GeoGebra l'option pour faire un ajustement sinus. Avec cette série d'événements, nous pouvons dire que les élèves activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de CII (figure 5.43). En d'autres termes, les participants génèrent un processus d'*instrumentation* avec GeoGebra [9]. Ce logiciel *codifie* le registre TV vers le GG et l'AS [10], même si pour l'AS ils avaient des doutes, ils ont pu l'obtenir. Dans les questions 6a, 6aI et 6b les étudiants *décodent* les variables en donnant la signification des variables et, c'est là qu'émerge la notion de fonction dans le registre LNe en mentionnant que « les deux variables sont en fonction du temps » (6a) [11]. Dans la réponse 6aI, qui fait également partie du processus de *décodage*, nous observons que la notation, même si elle est mathématiquement correcte, n'est pas liée au mouvement, puisqu'ils auraient dû écrire $y(t)$ et non $f(x)$.

Avec les questions 6c et 7, nous avons cherché à activer la *dimension discursive* du référentiel théorique à la preuve. C'est-à-dire, nous nous attendions à ce que, à partir des équations paramétriques $x(\theta)$ et $y(\theta)$, les élèves puissent prouver que la trajectoire était un cercle ($x^2 + y^2 = r^2$), par le biais d'un développement algébrique et en considérant l'identité trigonométrique $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Cependant, d'après les enregistrements des séances, nous avons pu constater que, bien que les élèves aient essayé, ils n'ont pas pu effectuer le processus algébrique nécessaire pour prouver algébriquement que la trajectoire était circulaire (puisque l'un des étudiants a élevé au carré les équations paramétriques $y = 15,52\sin(\theta)$ et $x = 15,52\cos(\theta)$)[12] Dans ce dernier processus nous considérons une activation du plan [Sem-Dis] parce que le groupe 1 cherche dans son référence théorique, à partir des représentations symboliques, et essaie de faire le développement algébrique correspondant, cependant, en ne pouvant pas le prouver, il ne parvient pas à activer la genèse discursive.

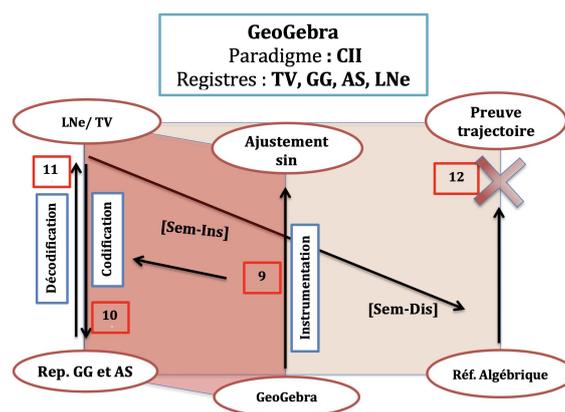


FIGURE 5.43 – Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 1

Deuxième partie. **Question(s) et/ou consigne(s) 8. Dérivez par rapport à t les équations paramétriques respectives, que représentent ces dérivées, d'un point de vue physique ?**

9. La magnitude de la vitesse est $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Développez-le algébriquement jusqu'à son expression minimale. Comparez-le avec la formule de vitesse tangentielle qui apparaît dans les livres de physique.

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{dt}\right)^2}$ avec le même raisonnement algébrique de la question précédente, déterminer l'expression qui représente l'accélération. Comparez avec les formules qui apparaissent dans les livres de physique.

La figure 5.44 montre les réponses donnés par les élèves aux question 8, 9, 10, et 11, suivies de la traduction en français.

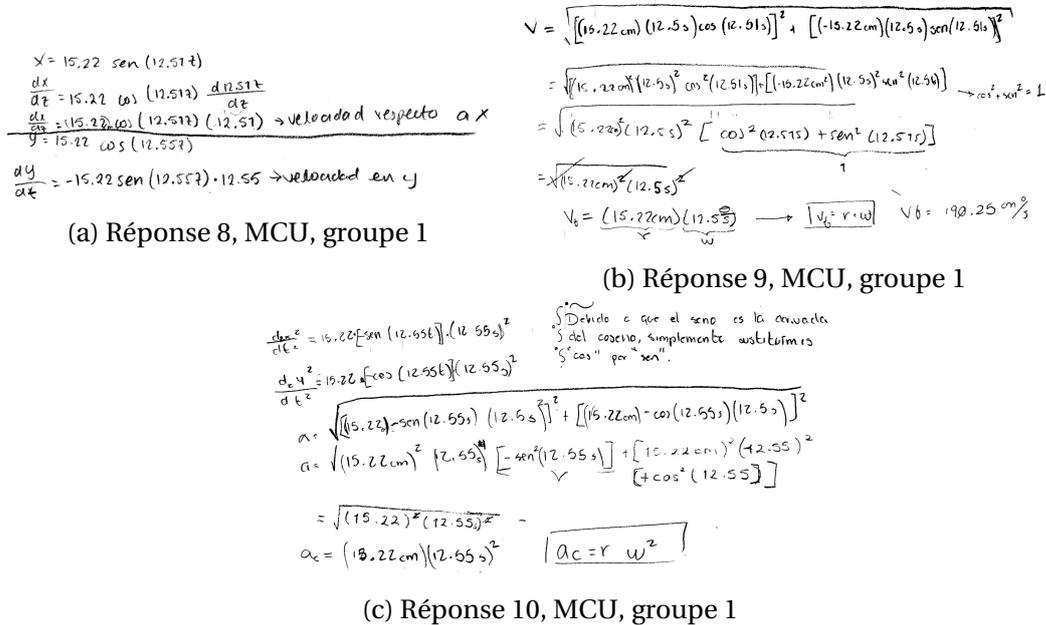


FIGURE 5.44 – Réponses 8, 9 et 10, MCU, groupe 1

Réponse en français :

10. Comme le sinus est la dérivée du cosinus, nous substituons simplement "cos" pour "sin".

Analyses des réponses 8, 9 et 10

Dans les questions 8, 9 et 10, nous observons que les élèves ont un bon niveau en arithmétique et en algèbre : ils obtiennent les dérivées et calculent sans problème la grandeur de la vitesse et de l'accélération. Cependant, dans les enregistrements des sessions, nous constatons que les élèves ont des difficultés lorsqu'il faut donner un sens physique à la dérivée. L'un des étudiants commente « Je n'ai aucune idée de ce qu'il représente physiquement », en faisant référence aux dérivées des fonctions paramétriques. Un autre élève dit « ... c'est le changement de... vitesse et accélération? ». Bien que le deuxième étudiant ne soit pas loin, il n'est pas sûr non plus. Ils passent environ 5 minutes à discuter, puis, avec l'aide de l'enseignant, ils arrivent à la conclusion que la première dérivée représente la vitesse et la seconde l'accélération. Nous pouvons également observer que ce groupe uniformise $\omega = 12,51$ pour les deux composantes, x et y , cela montre que les élèves savent que cela doit être la même chose mais que parce que leur mouvement n'est pas exact l'ajustement varie un peu, ce qui nous

indique que les élèves, de ce groupe, donnent déjà un sens aux variables impliquées dans le mouvement en articulant les objets mathématiques et les concepts physiques. Nous pouvons également observer, dans le développement algébrique, que bien que les élèves travaillent avec le registre AS (CII), ils ne réalisent pas de calculs. Autrement dit, le traitement mathématique est plus proche d'un traitement dans le paradigme CIII. C'est pourquoi nous pensons que dans ces trois questions, le groupe 3 active le plan [Sem-Dis] de CII à CIII (figure 5.45). C'est-à-dire que, les élèves **décodent** les représentations algébriques spécifiques des dérivés de position (en donnant leur signification physique) [13], et, ensuite, par un processus algébrique avec les mêmes représentations AS, ils réussissent à effectuer une vérification des équations générales de la vitesse tangentielle et de l'accélération centripète (AG) [14].

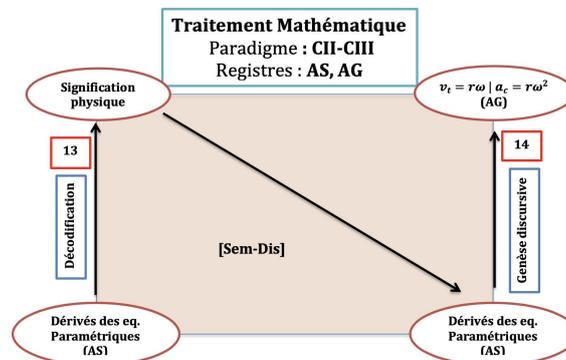


FIGURE 5.45 – Réponses 8,9 et 10 (MCU), ETC, groupe 1

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 11. Compléter le tableau suivant (voir annexe A.3) pour 5 valeurs de temps Les valeurs de ω , v_t et a_c sont-elles constantes? Donner une explication

$t[s]$	$\theta [\text{rad}]$	$\omega \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$	$v_t \left[\frac{m}{s} \right]$	$a_c \left[\frac{m}{s^2} \right]$
0.7 s	-12.37 rad	-17.67 rad/s	-268.93 $\frac{cm}{s}$	4752.12 $\frac{cm}{s^2}$
0.8 s	-13.67 rad	-17.08 rad/s	-259.95 $\frac{cm}{s}$	4448.07 $\frac{cm}{s^2}$
0.9 s	-14.88 rad	-16.53 rad/s	-251.58 $\frac{cm}{s}$	4158.72 $\frac{cm}{s^2}$
1.0 s	-16.03 rad	-16.03 rad/s	-243.47 $\frac{cm}{s}$	3918.94 $\frac{cm}{s^2}$
1.1 s	-17.18 rad	-15.58 rad/s	-235.91 $\frac{cm}{s}$	3656.6 $\frac{cm}{s^2}$

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

Para los valores de ω y v_t , van aumentando, aunque inician como un valor negativo debido a la dirección que toma nuestro movimiento, el cual va a favor de las manecillas del reloj.

También otra explicación a la desaceleración es la inconsistencia de velocidad; la aceleración va disminuyendo.

FIGURE 5.46 – Réponse 11, MCU, groupe 1

Réponse en français :

11. Pour les valeurs de $\omega * v_t$ elles augmentent bien qu'elles commencent comme une valeur négative en raison de la direction qui a pris le mouvement lequel suit le sens des aiguilles de l'horloge.

Une autre explication de la décélération est qu'elle ralentit

Analyses question 11

Avec la question 11, nous voulions que les élèves puissent valider les résultats numériques obtenus avec les modèles mathématiques généraux des questions 9 et 10 avec ceux obtenus dans le processus de modélisation. Autrement dit, nous attendions d'eux qu'ils soient capables de produire un discours bien argumenté pour justifier leurs résultats au niveau de la dimension **instrumentale** et **sémiotique**. Comme nous pouvons le voir, dans la réponse 11 de l'équipe 1, ils obtiennent des valeurs négatives pour la vitesse, qu'ils interprètent bien en disant que c'est la direction dans laquelle tourne le moulin à vent. Cependant, ils disent que les vitesses (angulaires et tangentielles) augmentent, ce qui est valable en mathématiques lorsqu'on travaille avec des nombres négatifs qui se rapprochent à zéro. mais en physique, lorsqu'il y a des vitesses négatives, le signe fait référence à la direction du mouvement, donc ici les vitesses n'augmentent pas mais diminuent, ce qui signifie qu'il perd de la vitesse à cause du frottement puisqu'il s'agit d'un mouvement non idéal. Ainsi, le discours [15] que les élèves tiennent

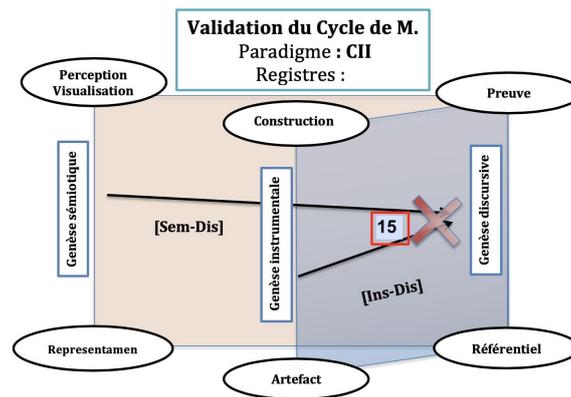


FIGURE 5.47 – Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 1

n'est pas cohérent avec le mouvement et les connaissances physiques, car dans leur réponse, ils ne tiennent pas en compte les éléments du processus de modélisation, ce qui signifie que, bien qu'ils aient réalisé un bon travail de modélisation au cours de l'activité, ils n'ont pas pu valider les valeurs numériques car ils n'ont pas pris en compte les dimensions instrumentale et sémiotique (figure 5.47)

Résumé de l'activité 3, groupe 1 (figures 5.48 et 5.49).

Le groupe 3 n'a eu aucune difficulté à exécuter le mouvement en choisissant un moulin à vent comme artefact matériel (*instrumentalisation* [1]). Avec cet artefact, les étudiants ont pu *coder* correctement les variables qu'ils avaient en tête pour les représenter dans un MP en représentant un MCU [2 et 3] (CI). Avec l'utilisation de Tracker, le groupe 1 génère un processus d'*instrumentation* [4] qui *code* la représentation MP (qu'ils ont faite avec le moulin à vent) dans les registres TV et GT [5]. Dans le *décodage* [6, 7 et 8] de ces registres, nous observons une évolution du discours généré, en utilisant correctement les concepts de position, de distance et de trajectoire. Les élèves utilisent également avec précision la notation $x(\theta)$ et ils savent ce qu'est le système cartésien et comment le déplacer pour obtenir une analyse moins compliquée (CII). Plus tard, lorsque les étudiants utilisent GeoGebra (*instrumentation* [9]), ils sont capables de *coder* la représentation TV en GG et AS [10]. Dans le processus de *décodage* de ces registres de représentation, les élèves le font correctement, ils montrent qu'ils sont conscients de la signification des représentations GG et AS et les écrivent correctement lorsqu'ils doivent les exprimer avec les paramètres t et θ [11] (CII). Cependant, lorsqu'ils doivent effectuer une procédure algébrique pour obtenir la trajectoire, ils ne le font pas [12]. Dans le traitement mathématique, le groupe 1 fait un bon développement algébrique, du *décodage* (signification des dérivés) [13] au développement al-

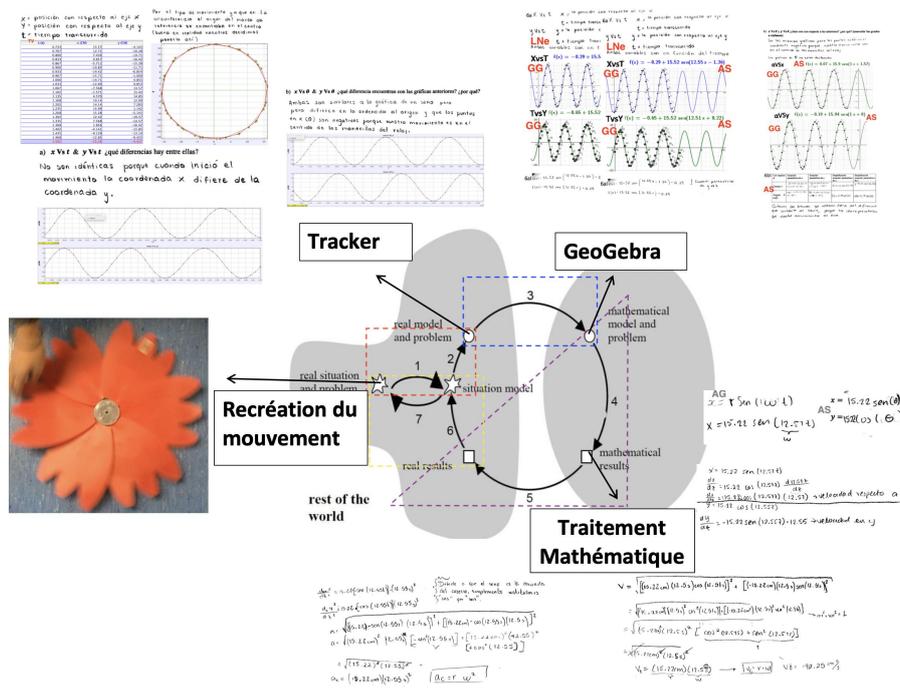


FIGURE 5.48 – La fonction autour du cycle de modernisation, activité MCU (groupe 1)

gébrique pour obtenir la vitesse tangentielle et l'accélération centripète sous sa forme générale (AG) [14] (CII-CIII). Enfin, ils ne parviennent pas à valider les résultats numériques concernant le mouvement qu'ils ont effectué [15].

En général, nous avons observé que le groupe 1 a réussi à faire évoluer son processus de modélisation, et nous avons constaté une amélioration de leurs réponses dans l'utilisation des concepts et des objets mathématiques.

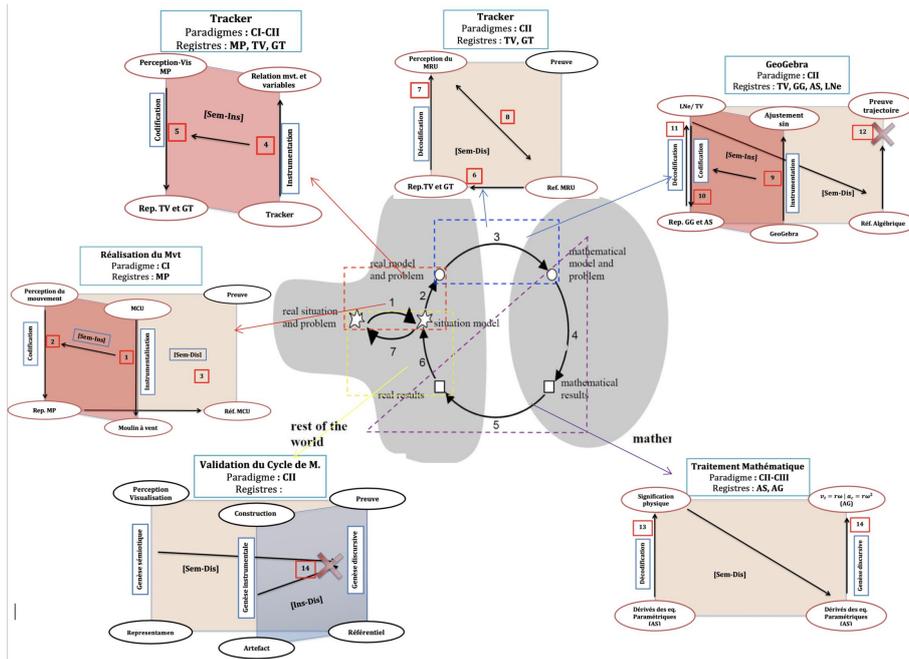


FIGURE 5.49 – Analyse globale, activité 3 (groupe 1)

5.5.2 Groupe 2

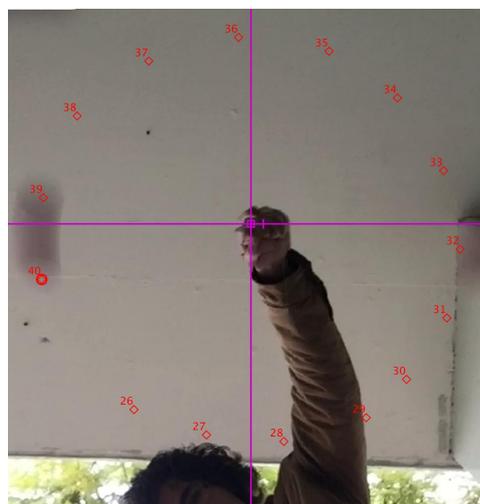
Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : *1. Réaliser l'enregistrement du MCU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...*

2. Pensez-vous que le sens du mouvement sera un élément pertinent dans votre analyse? Argumenter votre réponse

Les élèves ont choisi deux artefacts matériels pour la réalisation du Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) : un diabololo chinois figure 5.50a et une balle attachée à une corde 5.50b. La réponse donnée par les élèves est visible dans la figure 5.50c , suivi de la traduction en français.



(a) Diabololo Chinois



(b) Balle attachée à une corde

1. Realicen la filmación del MCU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones....

Mantener estable el centro de rotación. 
 Consideramos la posición de la cámara con respecto al movimiento, que fuera paralelo

2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis? Argumenten su respuesta

Sí, porque afecta el signo de los datos que obtengamos (positivos o negativos)

(c) Réponse 1 et 2, MCU, groupe 2

FIGURE 5.50 – Réalisation du MCU, groupe 2

Réponse en Français :

1. Maintenir le centre de rotation stable. Nous considérons la position de la caméra par rapport au mouvement pour qu'elle soit parallèle.

2. si nous faisons le mouvement dans le sens des aiguilles du montre serait négatif

Analyse diabolo chinois et balle attachée à une corde

Contrairement au groupe 1, le groupe 2 a exécuté le mouvement avec deux artefacts matériels : un **diabolo chinois** et une **balle attachée à une corde**. En utilisant le diabolo chinois (figure 5.51), les élèves n'ont pas réussi à enregistrer le mouvement qui les a convaincus, ils n'ont pas pu garder le centre fixe ni la vitesse de rotation adéquate. Bien que les élèves n'aient pas effectué la quantification du mouvement, ils ont pu se rendre compte, par leurs perceptions, que le MP ne coïncidait pas avec leur **référentiel théorique** qu'ils avaient d'un MCU. C'est-à-dire que les élèves ont généré un processus d'**instrumentalisation** avec le choix conscient du diabolo chinois [1i]. Les **perceptions** générées par le mouvement ont conduit les élèves à les **codifier** dans certaines **représentations** [2i]. Ces **représentations** ont été mises en contraste avec leur référentiel théorique et, comme elles ne correspondaient pas aux caractéristiques qu'ils avaient d'un MCU, ils ont changé l'artefact matériel [3i].

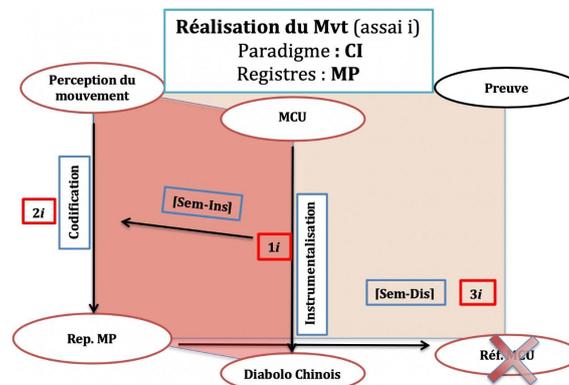


FIGURE 5.51 – Diabolo chinois, ETC

Le deuxième artefact matériel choisi par les élèves est une balle attachée à une corde, qu'ils font tourner comme le montre la figure 5.50b. Dans les enregistrements de la session, le dialogue suivant est entendu :

Espagnol	Français
P : ¿En qué sentido hicieron el giro? ¿Creen que el sentido de giro importa?	P : Dans quel sens avez-vous tourné votre artefact? Pensez-vous que le sens du virage est important?
E1 : Sí	E1 : Oui
P : ¿Cómo? ¿Por qué importa?	Q : Comment? Pourquoi est-ce important?
E3 : Por el ángulo, por convención matemática... hacia las manecillas del reloj son negativos (hace el movimiento con su brazo, en el sentido de las manecillas) y hacia el otro positivos	E3 : De l'angle, par convention mathématique...vers les aiguilles de l'horloge elles sont négatives (il fait le mouvement avec son bras, dans la direction des aiguilles) et vers l'autre positive

Avec ce dialogue, nous pouvons observer que les élèves sont conscients de ce que le sens du mouvement peut signifier lorsqu'il est placé dans un système de référence (une première abstraction). Cela nous indique que, d'une certaine manière, les élèves dans cette activité montrent une certaine facilité à passer du phénomène physique à sa représentation géométrique (au moins en ce qui concerne la trajectoire). Comme pour le diabolo chinois, les élèves activent le plan [Sem-Ins] (figure 5.52a).

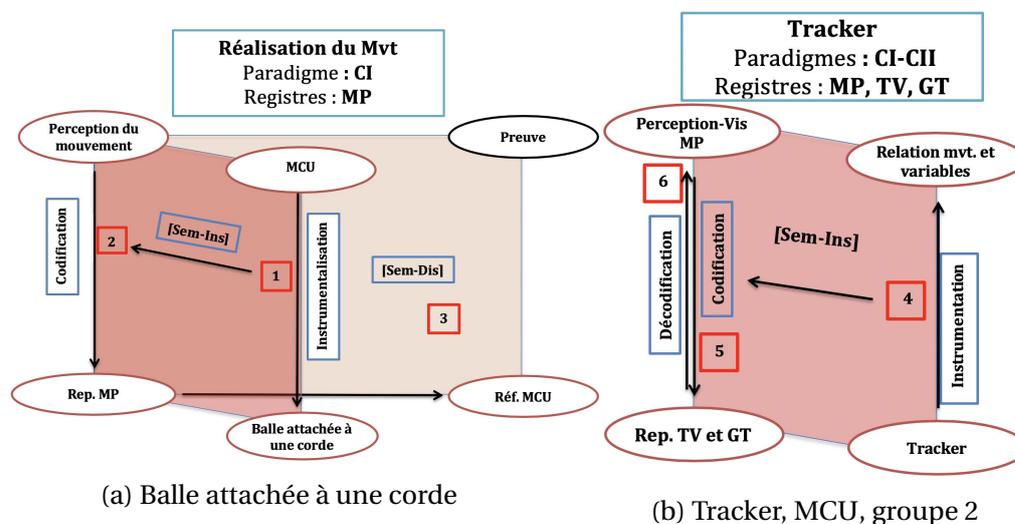


FIGURE 5.52 – Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 2

Les élèves génèrent un processus d'*instrumentalisation* [1] et une *codification* du mouvement à certaines représentations [2]. Ces *représentations* sont mises en contraste avec leur *référentiel théorique*. À partir de là, les élèves décident de conserver l'enregistrement du mouvement, parce que qu'ils sont d'accord sur le fait que les *perceptions* des variables générées concordent avec celles d'un MCU [3]. Ensuite, à l'aide de Tracker, les élèves activent le plan [Sem-Ins] pour initier une transition de CI vers CII.

Ils créent un processus d'*instrumentation* [4]. Dans ce développement, les membres du groupe 2 constatent (dans la *codification* du **MP** vers **TV** et **GT** [5]) que l'élève qui effectue le mouvement ne garde pas sa main fixe (c'est pourquoi ils écrivent dans la réponse de 1, qu'il est important de maintenir le centre aussi fixe que possible), et par conséquent, l'axe de rotation n'est pas stationnaire. Dans le même enregistrement de la session, nous observons que les membres du groupe 2 s'interrogent sur le déplacement du centre de référence, après avoir observé ce phénomène, ils remarquent que la variation de l'axe de rotation n'est pas très importante et que, probablement, ils peuvent s'en débarrasser en plaçant le plan cartésien en dehors du cercle. Le groupe 2 rejettent cette idée parce qu'ils ne peuvent pas tracer les graphiques de position, en x et y par rapport à l'angle de rotation (parce, avec la position du système cartésien hors de la trajectoire, ils n'obtiennent pas l'angle de rotation directement de Tracker). Pour cette raison, les élèves retournent le plan cartésien à celui qui, selon eux, pourrait représenter le meilleur endroit pour le centre de la trajectoire. Cet événement est important, car nous pouvons voir que le *codage*, bien que mécanique d'une certaine manière, génère un processus de *décodage*, presque immédiatement de la part des élèves, des représentations **TV** et **GT** [6] qui lui permet de changer le plan cartésien plusieurs fois jusqu'à ce qu'ils trouvent celui qui répond à leurs besoins. Puis, nous apprécions un échange d'idées intéressant que, bien que les étudiants aient toujours une connaissance fragmentée de la physique et des mathématiques et qu'ils présentent encore des difficultés en articulant le mouvement physique avec des objets mathématiques, ils identifient certaines coïncidences entre les différents mouvements et certains objets mathématiques que, éventuellement, les conduira à l'articulation des deux domaines :

Español	Français
<p>E3 : ...en el MCU...el ángulo es θ, es como el equivalente a la posición en x, tienes la velocidad angular, que es como (inaudible)...la velocidad angular es el cambio del ángulo con respecto al tiempo. Aquí la aceleración es el cambio (inaudible) respecto al tiempo... es que son derivadas...</p> <p>E4 : Pero, si era lo que vimos en clase, ¿no?</p> <p>E3 : La diferencia es, como a través de la experimentación podemos entender conceptos muy complejos de la física, que muchas veces solamente lo dejan a nuestra imaginación y quien puede imaginarlo y entenderlo, pues bien, y si no, solo te queda utilizar las fórmulas</p>	<p>E3 : ...dans le MCU...l'angle est θ, c'est comme l'équivalent de la position en x; la vitesse angulaire, qui est comme (inaudible)...la vitesse angulaire est la variation de l'angle par rapport au temps. Ici, l'accélération est le changement (inaudible) par rapport au temps... c'est qu'ils sont des dérivées...</p> <p>E4 : Mais c'est ce que nous avons vu en classe, non?</p> <p>E3 : La différence est de savoir comment, par l'expérimentation, nous pouvons comprendre des concepts physiques très complexes, qui souvent ne laissent place qu'à notre imagination et qui peuvent l'imaginer et la comprendre, bien, et sinon, il suffit d'utiliser les formules</p>

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Identifier les variables impliquées dans le MCU et écrire la signification

4. pourquoi x et y changent-ils de signe à intervalles?

5. Regardez les graphiques :

a) x vs t et y vs t Quelles sont les différences entre eux?

b) x vs θ et y vs θ quelle différence trouvez-vous avec les graphiques précédents? pourquoi?

La figure 5.53 montre les réponses donnés par les élèves aux question 3, 4 et 5, suivies de la traduction en français.

3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado

x → Posición horizontal
 y → Posición vertical
 θ → Ángulo con respecto al origen
 v → velocidad tangencial
 ω → velocidad angular

TV	t (s)	x (m)	y (m)	θ (rad)	v (m/s)	ω (rad/s)
0.006	0.232	-0.201	0.215	2.001	3.033	12.73
0.432	0.182	-0.283	0.207	3.089	3.613	14.45
0.861	0.232	-0.201	0.215	4.177	4.193	16.17
0.965	0.162	-0.286	0.203	5.265	4.773	17.89
0.966	0.206	-0.209	0.211	6.353	5.353	19.61
0.032	0.322	0.143	0.247	7.441	5.933	21.33
0.022	0.292	-0.173	0.280	8.529	6.513	23.05
0.365	4.286	-0.314	0.213	9.617	7.093	24.77
0.865	-0.182	-0.274	0.204	10.705	7.673	26.49
0.332	-0.148	-0.283	0.207	11.793	8.253	28.21
0.498	0.206	-0.188	0.247	12.881	8.833	29.93
0.832	-0.272	-0.194	0.253	13.969	9.413	31.65
0.886	-0.006	-0.188	0.247	15.057	9.993	33.37
1.065	0.322	-0.108	0.273	16.145	10.573	35.09
0.798	-0.194	-0.204	0.211	17.233	11.153	36.81
0.298	-0.240	-0.203	0.210	18.321	11.733	38.53
0.007	-0.272	-0.244	0.187	19.409	12.313	40.25
0.832	0.278	-0.124	0.277	20.497	12.893	41.97
0.332	0.312	0.066	0.261	21.585	13.473	43.69
0.865	0.282	-0.121	0.281	22.673	14.053	45.41
1.288	-0.113	-0.176	0.247	23.761	14.633	47.13
0.285	-0.315	-0.178	0.247	24.849	15.213	48.85
1.065	-0.286	-0.184	0.247	25.937	15.793	50.57
0.265	-0.308	-0.183	0.246	27.025	16.373	52.29
0.188	-0.318	-0.222	0.208	28.113	16.953	54.01
0.021	-0.348	-0.247	0.187	29.201	17.533	55.73
0.732	-0.278	-0.184	0.246	30.289	18.113	57.45

(a) Réponse 3, MCU, groupe 2

4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?

Porque el origen está en el centro del movimiento

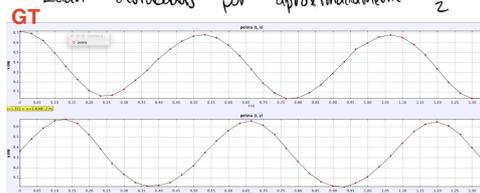


(b) Réponse 4, MCU, groupe 2

5. Observen las gráficas:

a) x Vs t & y Vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?

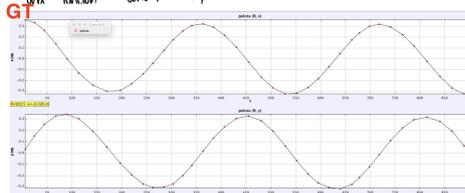
Están desfasadas por aproximadamente $\frac{\pi}{2}$



(c) Réponse 5a, MCU, groupe 2

b) x Vs θ & y Vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

La función x vs θ es una función coseno y y vs θ es una función seno. hay un desfase π



(d) Réponse 5b, MCU, groupe 2

FIGURE 5.53 – Réponses 3, 4 et 5 (MCU), groupe 2

Réponse en Français : 3. x =Position horizontale; y =Position verticale; θ =Angle par rapport à l'origine; v =Vitesse tangentielle; ω =Vitesse angulaire

4. Parce que l'origine est au centre du mouvement

5. a) Ils sont déphasés d'environ $\frac{\pi}{2}$

b) La fonction x vs θ est une fonction cosinus et y vs θ est une fonction sinusoïdale. Il y a un décalage.

Analyse réponses 3, 4 et 5

Dans les questions 3, 4 et 5, les élèves activent le plan [Sem-Dis] de CII (figure 5.54). En d'autres termes, les étudiants effectuent un **décodage** (qui provient du **référentiel théorique** [7] enrichie par les processus de visualisation et de perception des activités précédentes) des registres TV et GT [8] qui conduit à la **dimension discursive** lors de l'écriture de la signification des éléments [9]. Dans ce processus, nous pouvons observer une évolution dans le discours des élèves, c'est-à-dire que, alors que dans l'activité 1, le **décodage** des registres TV et GT était principalement basé sur des éléments sensoriels. Aussi, nous pouvons observer l'utilisation des concepts mathématiques et physique, avec notamment le déphasage, de manière plus précise. Par exemple, dans la réponse 3 ils font usage de concepts tels que la vitesse tangentielle et angulaire, en mentionnant également que θ est l'angle par rapport à l'origine. En 4, les élèves sont

conscients qu'il y a un changement de signe dû à la position du plan cartésien. Dans 5, ils mentionnent qu'il y a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ et ils reconnaissent que x vs θ est une fonction cosinus et y vs θ une fonction sinus, car ils remarquent un déphasage de $\frac{\pi}{2}$, avec l'idée d'une formule du type $\sin(x + \pi/2) = \cos(-x) = \cos(x)$.

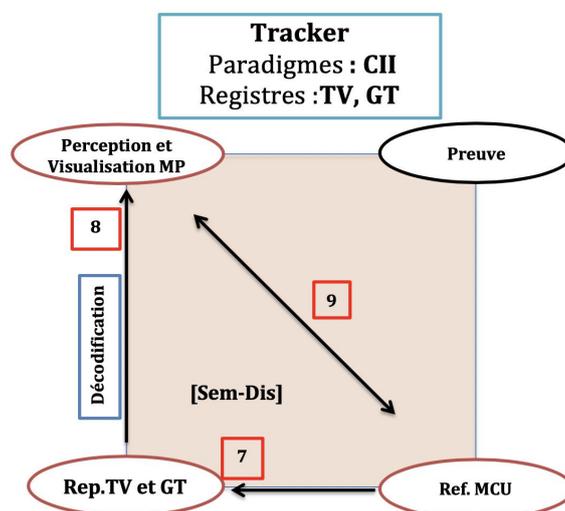


FIGURE 5.54 – Réponses 3, 4 et 5 (MCU), ETC, groupe 2

Première partie. **Phases 4 et 5.** Question(s) et/ou consigne(s) : **6. Importer le tableau des valeurs de Tracker dans GeoGebra, faire le graphique, faire l'ajustement avec la fonction sinus et Compare :**

a) x vs t et y vs t : Écrivez la signification de chacun des termes des fonctions fournies par GeoGebra au moment où vous effectuez l'ajustement.

I Écrivez une des fonctions en termes de cosinus (vous pouvez utiliser GeoGebra pour vérifier les différentes options)

Aide : N'oubliez pas de considérer que : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Recherchez des informations sur la translation des fonctions sine et cosinus (si nécessaire).

b) x vs θ et y vs θ : comment sont-ils par rapport aux précédents ? pourquoi ? (convertir les degrés en radians)

I Observer les ajustements obtenus, simplifier les équations et compléter le tableau, voir annexe A.3

c) Si la vitesse angulaire est $\omega = \frac{\theta}{t}$ et donc $\theta = \omega t$, alors les équations paramétriques (avec le paramètre θ) peuvent être écrites comme : $x =$, $y =$

7. En considérant les équations avec le paramètre θ

a) Transformez les équations paramétriques en une équation rectangulaire correspondante $y(x)$. Rappelez-vous que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

Vitesse angulaire en y

C'est un ajustement du sinus

6 b) x vs θ est une fonction cosinus et y vs θ une fonction sinus. Ils sont assimilés à x vs t et y vs t parce que la variation de θ et t est similaire, c'est-à-dire qu'il y avait une vitesse constante dans le mouvement, donc les réglages sont précis.

7 b) Mathématiquement, c'est l'équation d'une circonférence avec un rayon de $\sqrt{0.106}$

Représente physiquement la trajectoire du mouvement

Analyse des réponses 6 et 7 :

Dans les réponses présentées dans la figure 5.55 nous pouvons constater un grand changement. Les élèves identifient parfaitement les paramètres des représentations AS qu'ils ont obtenu de GeoGebra, ce que nous pouvons traduire par une transition vers la CIII. Également nous constatons que l'utilisation du logiciel est très bonne et les aide efficacement à faire ressortir la notion de fonction. Dans les mêmes questions, Lorsqu'ils observent les représentations **GG** et **AS**, le dialogue suivant est généré :

Espagnol	Français
E4 : ... ¿Qué diferencia hay entre ellas (las gráficas)? Una es de seno y otra de coseno ¿no?	E4 : ... Quelle est la différence entre eux (les graphiques)? L'un est le sinus et l'autre le cosinus, n'est-ce pas?
E3 : Es que ambas están hechas con función seno, pero hay un desfase de... aproximadamente de Pi medios... de hecho están desfasadas 1.35, "equis" está desfasada 1.35 y "ye" por (observa la gráfica en la computadora)... "ye" está desfasada por 2.93, y no debería estar desfasada	E3 : C'est que les deux sont faits avec une fonction sinusoïdale, mais il y a un décalage de... environ Pi sur deux... en fait ils sont décalés 1,35, x est décalé 1,35 et y de (il regarde le graphique sur l'ordinateur)... y est décalé 2,93, et il ne devrait pas être décalé
E1 : ¿Por qué no?	E1 : Pourquoi pas?
E3 : Porque se supone que este es el seno y en el ajuste pones el seno también E4 : La gráfica de "ye" empieza en cero, o sea la función sería seno...	E3 : Parce que ce doit être le sinus et que dans les ajustements, on met aussi le sinus E4 : Le graphique y commence en zéro, c'est-à-dire que la fonction serait sinusoïdale...

En observant le dialogue, les réponses au guide de travail et les représentations obtenues avec GeoGebra, nous pouvons dire que les élèves activent les plans [**Sem-Ins**] et [**Sem-Dis**] de CII (figure 5.56). Dans un premier temps avec les questions 6a, 6aI, 6b et

6bI et l'utilisation de GeoGebra, les élèves génèrent un processus d'*instrumentation* lors de l'ajustement sinusoïdal [10]. Ce processus effectue un *codage* presque automatique du registre de représentation TV vers les registres GG et AS [11]. Cependant, lorsque les étudiants du groupe 2 écrivent la signification de chacun des termes du registre AS émerge un processus de *décodage* qui contraste avec les processus de *perception-visualisation* qui ont été générés tout au long des activités précédentes [12]. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.55, le *décodage* ([12]) du groupe 2 se situe entre les paradigmes CII et CIII (parce qu'ils effectuent une identification verbale des paramètres, mais sans formalisation), puisque les élèves travaillent avec le registre AS et utilisent, de manière correcte, les notions : amplitude du rayon, fréquences (vitesse angulaire), décalage (ajustement sinusoïdal). Dans un deuxième temps, dans les questions 6c et 7, les élèves obtiennent l'équation de trajectoire $x^2 + y^2 = 0,106$ sous forme algébrique et la représentent graphiquement dans GeoGebra pour vérifier si l'équation obtenue correspond à celles de l'expérience. Avec ce processus, les étudiants activent la *dimension discursive* en utilisant leur *référentiel théorique* algébrique pour vérifier que l'équation de la trajectoire obtenue correspond aux points expérimentaux [13].

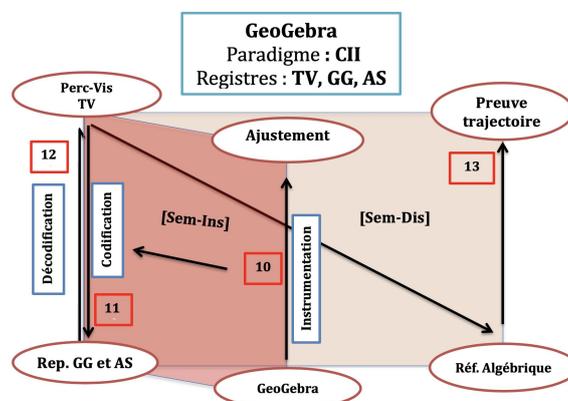


FIGURE 5.56 – Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 2

- Deuxième partie. **Phases 4 et 5 8.** *Dérivez par rapport à t les équations paramétriques respectives, que représentent ces dérivées, d'un point de vue physique?*
- 9.** *La magnitude de la vitesse est $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$. Développez-le algébriquement jusqu'à son expression minimale. Comparez-le avec la formule de vitesse tangentielle qui apparaît dans les livres de physique.*
- 10.** *Si, $a = \sqrt{(\frac{dx^2}{dt})^2 + (\frac{dy^2}{dt})^2}$ avec le même raisonnement algébrique de la question pré-*

cédente, déterminer l'expression qui représente l'accélération. Comparez avec les formules qui apparaissent dans les livres de physique.

8. Deriven con respecto a t las ecuaciones paramétricas respectivas. ¿Qué representan, desde un punto de vista físico, estas derivadas?

$x(t) = 0,325 \cos(11,83t + 0,11)$
 $x'(t) = -0,325 \cdot 11,83 \sin(11,83t + 0,11)$
 $y(t) = 0,325 \sin(11,83t + 0,11)$
 $y'(t) = 0,325 \cdot 11,83 \cos(11,83t + 0,11)$

Es la función de la velocidad tangencial en x y la velocidad tangencial en y.
 AS: Era 11,83 pero era 0,19 por lo tanto el tangencial en y.

(a) Réponse 8, MCU, groupe 2

9. La magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Desarrolléla algebraicamente hasta su mínima expresión. Compárenla con la fórmula de velocidad tangencial que aparece en los libros de física.

$v = \sqrt{[-0,325 \cdot 11,83 \sin(11,83t + 0,11)]^2 + [0,325 \cdot 11,83 \cos(11,83t + 0,11)]^2}$
 $v = \sqrt{0,106 \cdot 129,5 \sin^2(11,83t + 0,11) + 0,106 \cdot 129,5 \cos^2(11,83t + 0,11)}$
 $v = \sqrt{0,106 \cdot 129,5 (\sin^2(11,83t + 0,11) + \cos^2(11,83t + 0,11))}$
 $v = \sqrt{0,106 \cdot 129,5}$
 $v = \sqrt{13,71}$
 $v = 3,70 \frac{m}{s}$

Es similar a $v = r \omega$ AG debido a que el radio es $r = 0,325 m$ y la velocidad angular es $\omega = 11,83 \frac{rad}{s}$.

(b) Réponse 9, MCU, groupe 2

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ con el mismo razonamiento algebraico de la pregunta anterior, determinen la expresión que representa la aceleración. Compárenla con las formulas que aparecen en los libros de física.

$x''(t) = -0,325 \cdot 11,83^2 \cos(11,83t + 0,11)$
 $x''(t) = -0,325 \cdot 11,83^2 \cos(11,83t + 0,11)$
 $y''(t) = -0,325 \cdot 11,83^2 \sin(11,83t + 0,11)$
 $y''(t) = -0,325 \cdot 11,83^2 \sin(11,83t + 0,11)$

$a = \sqrt{[-0,325 \cdot 11,83^2 \cos(11,83t + 0,11)]^2 + [-0,325 \cdot 11,83^2 \sin(11,83t + 0,11)]^2}$
 $a = \sqrt{0,325^2 \cdot 11,83^4 \cos^2(11,83t + 0,11) + 0,325^2 \cdot 11,83^4 \sin^2(11,83t + 0,11)}$
 $a = \sqrt{0,325^2 \cdot 11,83^4 (\cos^2(11,83t + 0,11) + \sin^2(11,83t + 0,11))}$
 $a = \sqrt{0,325^2 \cdot 11,83^4}$
 $a = 0,325 \cdot 11,83^2$
 $a = 42,079 \frac{m}{s^2}$

Es similar a $a = r \omega^2$ debido a que el radio es $r = 0,325 m$ y la velocidad angular es $\omega = 11,83 \frac{rad}{s}$.

(c) Réponse 10, MCU, groupe 2

FIGURE 5.57 – Réponses 8, 9, 10 et 11, MCU, groupe 2

Réponse en français :

8. C'est la fonction de la vitesse tangentielle en x et de la vitesse tangentielle en y. C'était 11,73, mais c'était 11,83 pour faciliter les calculs. au lieu de 0,17, 0,11 a également été réglé pour faciliter l'analyse.

9. Il est similaire à $v = r\omega$ parce que le rayon est $r = 0,325m$ et la vitesse angulaire est $\omega = 11,83rad/s$

10. Il est similaire à $a = r(\omega)^2$ car le rayon est r. 0325 m et la vitesse angulaire est w= 11.38 rad/5

Analyses des réponses 8, 9 et 10

Avant que les élèves répondent aux questions, nous trouvons, dans l'enregistrement, comment les étudiants partagent, à leur manière, la connaissance de leur référentiel, avec des explications non formelles, mais qui ont un sens mathématique et physique, dans le contexte de la compréhension du phénomène du mouvement :

Espagnol	Français
<p>E4 : No le entiendo bien eso de las paramétricas</p> <p>E3 : Ah, lo que pasa es que es un concepto matemático. Imaginate que tienes una función muy compleja y no puedes entenderla. No puedes derivar esa función porque tiene una medida extraña, solo puedes derivar la trayectoria... entonces lo que puedes hacer es partirla en sus dimensiones, dimensión en x o dimensión en y, pero debes partirla en algo que las una, y lo único que las une es el tiempo... y lo que logramos aquí, es poder analizar cada dimensión por separado del movimiento y tener ecuaciones mucho más sencillas y mucha más información certera</p>	<p>E4 : Je ne comprends pas vraiment ce truc des paramétriques</p> <p>E3 : Ah, le fait est que c'est un concept mathématique. Imagine toi que tu aies une fonction très complexe et que vous ne puissiez pas la comprendre. Vous ne pouvez pas dériver cette fonction parce qu'elle a une mesure étrange, vous pouvez seulement dériver la trajectoire... alors ce que vous pouvez faire est de la diviser en ses dimensions, dimension x ou dimension y, mais vous devez la diviser en quelque chose qui les relie, et la seule chose qui les relie est le temps... et ce que nous réalisons ici, c'est de pouvoir analyser chaque dimension séparément du mouvement et d'avoir des équations beaucoup plus simples et des informations beaucoup plus précises</p>

Les réponses aux points 8, 9 et 10 du guide, montrent une très bonne manipulation des processus algébriques avec le registre **AS**. De plus, comme le groupe 1, les élèves du groupe 2 changent la valeur des paramètres car ils sont conscients que la vitesse angulaire ω devrait être la même s'ils avaient un phénomène idéalisé, cependant, ils ont obtenu deux valeurs différentes (pas très loin) car ils ont réalisé un phénomène réel. Cela nous indique que les élèves, dans cette activité et après avoir effectué deux activités précédentes, montrent une meilleure coordination des deux domaines et une bonne référentiel théorique concernant l'utilisation des vecteurs. Un exemple de cette compétence mathématique se manifeste lorsqu'un des élèves mentionne ce qu'il doit faire pour répondre le point 9 du guide de travail « ... vous dérivez la position y ... alors, nous aurions la vitesse en x et la vitesse en y ... nous pouvons travailler cela comme n'importe quel vecteur, parce que la vitesse est un vecteur que nous pouvons obtenir avec le théorème de Pythagore, les deux composantes, en x et y , nous les ajoutons et nous sortons l'hypoténuse, qui est comme ceci (il pointe l'expression écrite dans le guide, $v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$... et ensuite nous aurions le sinus carré de x plus le cosinus carré de x qu'est égal à 1... et tout ce qu'il nous reste est que la vitesse est égale au rayon multiplié par la vitesse angulaire ». Dans ce discours et dans les réponses écrites (figure 5.57) les élèves utilisent les registres AS, cependant, la procédure que les élèves effectuent est semblable aux registres AG, car aucun calcul n'est observé, au contraire,

ils gardent les valeurs bien identifiées. À partir de là, nous pouvons observer que les élèves activent le plan [Sem-Dis] de CII à CIII (figure, 5.58). D'abord avec le **décodage** des dérivées des équations paramétriques de position (AS) lors de l'attribution de la signification physique [14] et après dans le développement algébrique qu'ils travaillent avec les représentations AS. Dans le dialogue nous observons une abstraction du processus pour arriver à l'équation générale de la vitesse ($v = r\omega^2$). Ce développement génère la l'activation de la **genèse discursive** qui va du traitement mathématique des équations paramétriques à l'obtention des équations générales de la vitesse tangentielle et de l'accélération centripète [15].

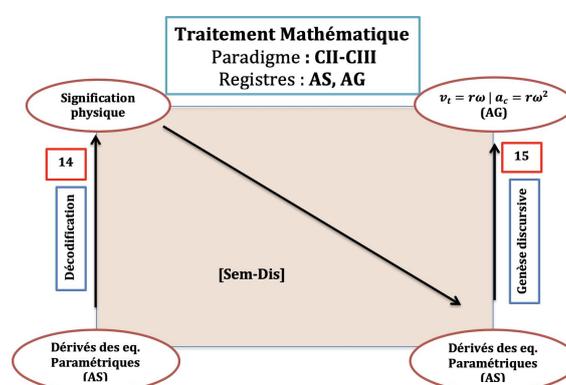


FIGURE 5.58 – Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 2

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 11. Compléter le tableau suivant (annexe A.3) pour 5 valeurs de temps Les valeurs de ω , v_t et a_c sont-elles constantes? Donner une explication

La figure 5.57 montre les réponses données par les élèves à la question 11, suivies de la traduction en français.

11. Completen la siguiente tabla para 5 valores del tiempo

$t[s]$	θ [rad]	ω $\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$	v_t $\left[\frac{m}{s}\right]$	a_c $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
0.13	1.56	12	3.9	46.8
0.33	4.26	12.91	4.19	54.167
0.6	7.07	11.78	3.82	45.1
0.83	11.16	12	3.9	46.8
1.23	19.46	11.92	3.87	46.18

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

No son constantes, más son similares, aproximadamente la velocidad angular (ω) es $11.38 \frac{\text{rad}}{s}$ de forma teórica, la velocidad tangencial (v_t) es $3.845 \frac{m}{s}$ y la aceleración centrípeta (a_c) es $42.089 \frac{m}{s^2}$.

Debido a tomar puntos al azar que no estaban sujetos a los ajustes correspondientes, los valores de ω son ligeramente mayores al obtenido mediante la modelización, por lo tanto v_t y a_c son mayores, sin embargo siguen dentro de un rango aceptable y congruente con los valores obtenidos del modelado.

FIGURE 5.59 – Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 2

Réponses en français :

11. Ils ne sont pas constants mais ils sont similaires, la vitesse angulaire ω est approximativement de 11,38 rad/s théoriquement, la vitesse tangentielle v_t est de 3,845 m/s et l'accélération centrifète (a_c) de 42.089 m/s^2 . En raison de la prise de points aléatoires qui n'ont pas fait l'objet des ajustements correspondants, les valeurs de ω sont légèrement supérieures à celles obtenues par modélisation et donc v_t et a_c sont plus élevées, mais elles restent dans une plage acceptable et congruent avec les valeurs obtenues par modélisation.

Analyses des réponse 11

Avec la question 11, nous voulions que les élèves puissent valider les résultats numériques obtenus avec les modèles mathématiques généraux des questions 9 et 10 avec ceux obtenus dans le processus de modélisation. Autrement dit, nous attendions d'eux qu'ils soient capables de produire un discours bien argumenté pour justifier leurs résultats au niveau de la dimension instrumentale et sémiotique. Comme nous pouvons le voir, la réponse 11 de l'équipe 2 est soutenue par l'ensemble des activités du processus de modélisation, tant la partie instrumentale que théorique, puisque les étudiants utilisent les données obtenues dans Tracker et GeoGebra et les comparent avec celles obtenues avec les équations générales (GA), en activant les plans [Sem-Dis] et [Ins-Dis] de CII [16] (figure 5.60).

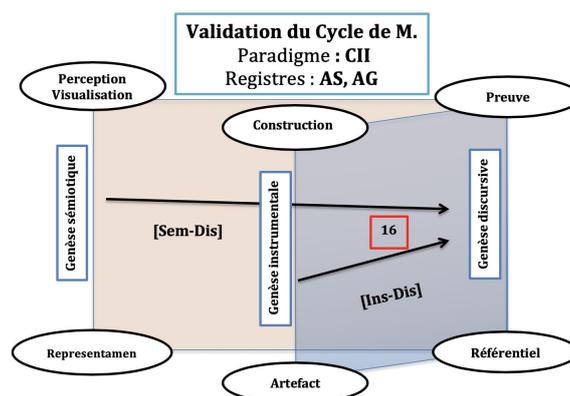


FIGURE 5.60 – Réponse 11 (MCU), ETC, groupe 2

Résumé de l'activité 3, groupe 2 (figures 5.61 et 5.62).

Le groupe 2 a réalisé le MP avec deux artefacts : un diabolo chinois et une balle attachée à une corde. Avec le diabolo chinois (*instrumentalisation* [1i]), ils ont réussi à *coder* certaines variables (qu'ils avaient en tête) pour arriver à une représentation [2i], cependant, la représentation ne remplissait pas les caractéristiques qu'ils considéraient comme un MCU [3i] (CI). Pour cette raison, ils ont changé l'artefact en une balle attachée à une corde. Avec cet artefact, bien qu'ils aient eu quelques problèmes pour maintenir le centre de rotation dans une position, ils ont obtenu les caractéristiques qu'ils considéraient comme nécessaires pour un MCU [1, 2 et 3] (CI). Grâce à l'utilisation de Tracker, ils ont pu changer de registre de représentation au moyen d'une *instrumentation* [4], qui les a fait passer du registre MP aux registres TV et GT [5]. Presque simultanément, le groupe 2 génère un décodage de ces registres [6] qui les amène à changer le plan cartésien du centre de la trajectoire vers l'extérieur de celui-ci, afin de voir quelles sont les données avec lesquelles il est préférable de travailler. Après avoir décidé la position du système de référence (dans le centre), les étudiants *décodent*, à nouveau, correctement les registres TV et GT [7, 8 et 9]. Comme le groupe 1, les élèves de l'équipe 3 montrent une évolution et plus de précision dans les réponses écrites, ce qui les fait passer à CII. En travaillant avec GeoGebra (*instrumentation* [10]), le groupe 2 a réussi à *coder* correctement le registre TV dans les registres GG et AS [11]. Les élèves transforment correctement les équations générées par GeoGebra en équations paramétriques (avec les variables t et θ) et parviennent également à donner un sens à chacun des termes de la fonction [12]. Ce groupe parvient à obtenir l'équation de la trajectoire à partir des équations paramétriques, ils obtiennent l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{0,106}$ [13]. Dans le traitement mathématique, les élèves montrent un bon

niveau d’algèbre et non seulement ils parviennent à calculer et à donner le sens des dérivées [14], mais aussi ils parviennent à déduire les équations générales de la vitesse tangentielle et de l’accélération centripète de manière correcte [15] (CII-CIII). Enfin, les étudiants parviennent à valider, de manière cohérente, leurs résultats numériques avec le mouvement effectué avec des éléments de CII [16].

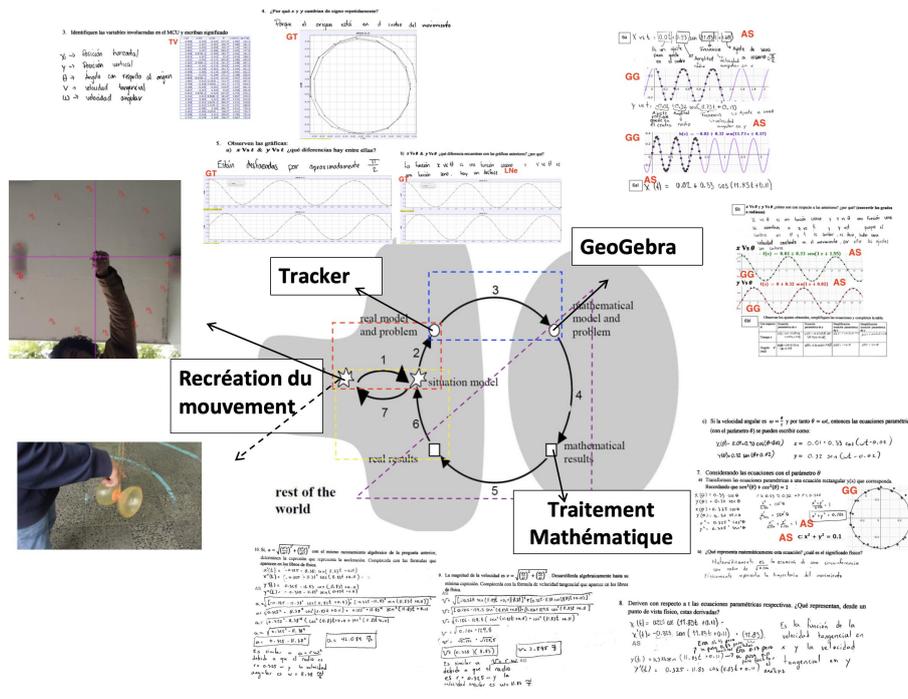


FIGURE 5.61 – La fonction autour du cycle de modernisation, activité MCU (groupe 2)

5.5.3 Groupe 3

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : *1. Réaliser l'enregistrement du MCU que vous avez choisi et noter, la raison du choix de ces matériaux, vos observations, difficultés, considérations...*

2. Pensez-vous que le sens du mouvement sera un élément pertinent dans votre analyse? Argumenter votre réponse

Les élèves ont choisi trois artefacts matériels pour la réalisation du Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) : un yoyo, figure 5.63a; un petit avion attaché à une corde et un bâton de bois, 5.63b et un disque vinyle, 5.63c. La réponse donnée par les élèves est visible dans la figure 5.63d, suivi de la traduction en français.



(a) Yo-yo



(b) Petit avion attaché à une corde et un bâton de bois



(c) Disque vinyle

1. Realicen la filmación del MCU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones....

Nosotros realizamos 3 videos, era un yo-yo un juguete y un disco de acetato, Escogimos este ultimo porque en las demos no teniamos una marca de referencia, además la rotación del disco se veía muy clara; y pusieron un masking para saber las vueltas que daba el disco en un cierto intervalo de tiempo pero la luz afecto interfirmo al momento de marcar la trayectoria

Para poner nuestro marca de referencia en tracker nos fijamos como salían las gráficas y vimos que cuando ponemos el marco en el centro, vimos que con el ángulo y el tiempo nos salta una recta

2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis? Argumenten su respuesta

Si, porque el ángulo irá cambiando y puede ser positivo o negativo. Así también podemos saber en que sentido esta girando

(d) Réponse 1 et 2, MCU, groupe 3

FIGURE 5.63 – Réalisation du MCU, groupe 3

Réponse en Français : 1. Nous avons choisi ce dernier parce que dans les autres nous n'avions pas de système de référence, aussi la rotation du disque était très claire et on a scotch pour savoir les tours que le disque était dans un certain intervalle de temps mais la lumière a interféré avec le temps pour marquer la trajectoire. Pour mettre notre plan cartésien dans Tracker, nous avons remarqué comment les graphiques sont sortis et nous avons vu qu'avec l'angle et le temps nous avons obtenu une ligne droite.

2 Oui, car l'angle change et peut être positif ou négatif. Ainsi, nous pouvons également savoir dans quelle direction s'oriente le changement.

Analyse réponses 1 et 2

Contrairement aux deux groupes précédents, l'équipe 3 a envisagé dès le départ trois artefacts matériels : un yo-yo (figure 5.63a), un petit avion attaché à une corde et un bâton de bois (figure 5.63b) et un disque vinyle (figure 5.63c). Les étudiants ont réalisé le MCU avec les trois artefacts et, une fois les mouvements enregistrés, ils ont analysé avec Tracker celui qui représentait le mieux le mouvement. Comme le montre la réponse à la consigne 1 (figure 5.63d) et d'après ce que nous avons pu observer dans les enregistrements des sessions. Les étudiants ont voulu générer un processus d'instrumentalisation avec les trois artefacts, cependant, avec deux d'entre eux (le yo-yo et le petit avion attaché à une corde et un bâton de bois), ils n'ont pas pu obtenir une bonne position du plan cartésien pour leur analyse, c'est-à-dire que le processus d'*instrumentalisation* a été invalidé (figures 5.64a et 5.64b).

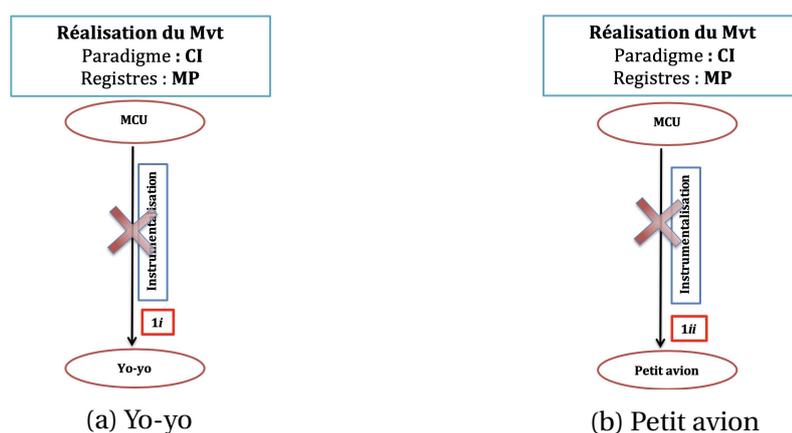


FIGURE 5.64 – Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 3

Les élèves analysent l'enregistrement du disque vinyle, et réalisent qu'il répond aux caractéristiques d'un MCU. C'est-à-dire que les élèves activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de CI (figure 5.65a). Ils génèrent un processus d'*instrumentalisation* [1].

Les *perceptions* qui émergent de la réalisation du mouvement sont *codés* par les élèves [2] et mises en contraste avec leurs *référentiel théorique* [3]. Lorsque le mouvement respecte les caractéristiques d'un MCU, les élèves sauvegardent l'enregistrement et ils commencent l'analyse avec Tracker, qui fait apparaître un processus d'*instrumentation* [4] qui *codifie* le MP dans les registres TV et GT [5] en incitant le transit vers CII.

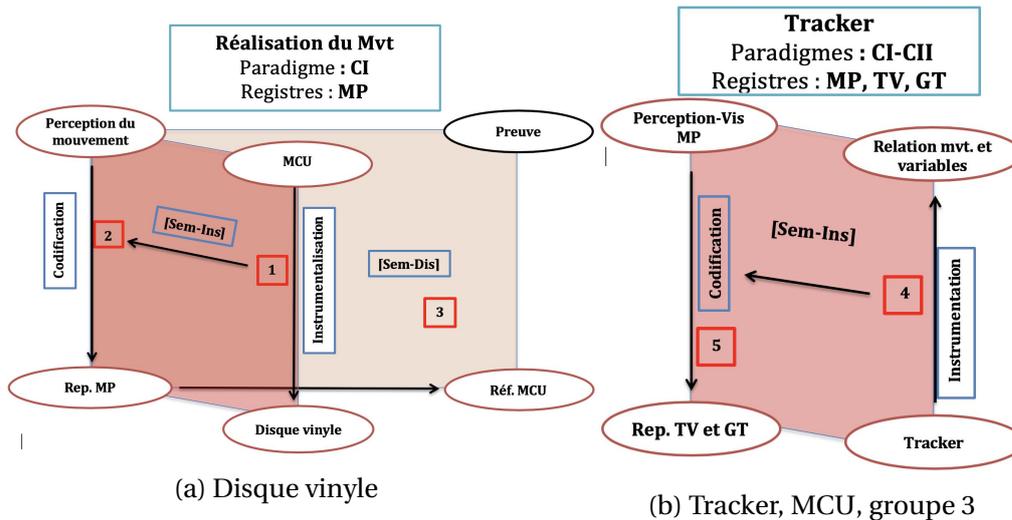


FIGURE 5.65 – Phases 1 et 2 (MCU), ETC, groupe 3

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 3. Identifier les variables impliquées dans le MCU et écrire la signification

4. pourquoi x et y changent-ils de signe à intervalles ?

5. Regardez les graphiques :

a) x vs t et y vs t Quelles sont les différences entre eux ?

b) x vs θ et y vs θ quelle différence trouvez-vous avec les graphiques précédents ? pourquoi ?

La figure 5.66 montre les réponses données par les élèves aux question 3, 4 et 5, suivies de la traduction en français.

3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado

x : posición en el eje x
 y : posición en el eje y
 t : tiempo en el cual recorre el objeto una posición determinada
 θ : el ángulo que forma el eje x con respecto al punto (x, y) , parte del punto $(0,0)$

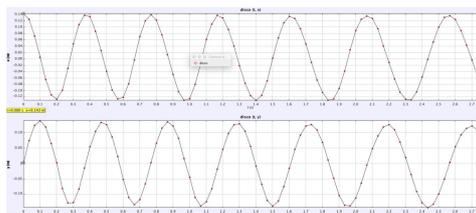
t	x	y	θ
0.000	1.000	0.000	0.000
0.063	0.992	0.039	0.039
0.126	0.970	0.077	0.077
0.188	0.935	0.113	0.113
0.251	0.887	0.147	0.147
0.314	0.827	0.178	0.178
0.377	0.755	0.206	0.206
0.440	0.672	0.231	0.231
0.503	0.579	0.253	0.253
0.566	0.477	0.271	0.271
0.629	0.367	0.286	0.286
0.692	0.251	0.297	0.297
0.755	0.130	0.305	0.305
0.818	0.005	0.309	0.309
0.881	-0.122	0.310	0.310
0.944	-0.242	0.308	0.308
1.007	-0.354	0.303	0.303
1.070	-0.458	0.295	0.295
1.133	-0.553	0.284	0.284
1.196	-0.639	0.270	0.270
1.259	-0.716	0.253	0.253
1.322	-0.783	0.233	0.233
1.385	-0.840	0.211	0.211
1.448	-0.887	0.186	0.186
1.511	-0.924	0.159	0.159
1.574	-0.951	0.130	0.130
1.637	-0.967	0.099	0.099
1.700	-0.972	0.066	0.066
1.763	-0.966	0.031	0.031
1.826	-0.949	-0.015	-0.015
1.889	-0.921	-0.052	-0.052
1.952	-0.872	-0.081	-0.081
2.015	-0.813	-0.111	-0.111
2.078	-0.744	-0.141	-0.141
2.141	-0.665	-0.170	-0.170
2.204	-0.577	-0.198	-0.198
2.267	-0.480	-0.224	-0.224
2.330	-0.375	-0.248	-0.248
2.393	-0.262	-0.269	-0.269
2.456	-0.142	-0.287	-0.287
2.519	-0.015	-0.299	-0.299
2.582	0.117	-0.305	-0.305
2.645	0.242	-0.305	-0.305
2.708	0.359	-0.299	-0.299
2.771	0.468	-0.287	-0.287
2.834	0.568	-0.269	-0.269
2.897	0.659	-0.248	-0.248
2.960	0.741	-0.224	-0.224
3.023	0.814	-0.198	-0.198
3.086	0.878	-0.170	-0.170
3.149	0.933	-0.141	-0.141
3.212	0.979	-0.111	-0.111
3.275	1.016	-0.081	-0.081
3.338	1.043	-0.052	-0.052
3.401	1.060	-0.023	-0.023
3.464	1.067	0.006	0.006
3.527	1.064	0.035	0.035
3.590	1.051	0.063	0.063
3.653	1.028	0.090	0.090
3.716	0.995	0.116	0.116
3.779	0.952	0.141	0.141
3.842	0.899	0.164	0.164
3.905	0.836	0.185	0.185
4.000	0.764	0.203	0.203

(a) Réponse 3, MCU, groupe 3

5. Observen las gráficas:

a) x vs t & y vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?

x vs t es el coseno mientras que y vs t es el seno, uno empieza desde 1 mientras que el otro comienza en 0



(c) Réponse 5a, MCU, groupe 3

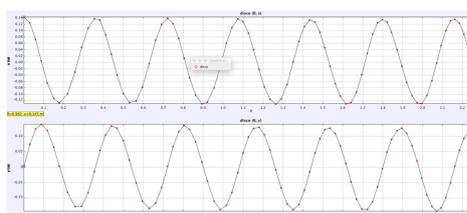
4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?

porque cuando gira nuestro punto de referencia va pasando por todos los cuadrantes y va regresando al mismo punto de donde empezó

(b) Réponse 4, MCU, groupe 3

b) x vs θ & y vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

La diferencia de estas 2 gráficas es que x vs θ empieza en 1 el cual es coseno y y vs θ es el seno que comienza en 0



(d) Réponse 5b, MCU, groupe 3

FIGURE 5.66 – Réponses 3, 4 et 5 (MCU), groupe 3

Réponse en Français : 3. Position x sur l'axe x y = Position de l'axe y t = temps dans lequel l'objet se déplace d'une certaine position θ = L'angle formé par l'axe x par rapport au point (x, y) partie du point $(0,0)$

4. parce que quand il tourne notre point de référence, il passe par tous les quadrants et revient au point de départ.

5a) x vs t est le cosinus tandis que y vs t est le sinus, l'un commence à 1 et l'autre à 0

5b) La différence entre ces deux graphiques est que x vs θ commence à 1 qui est le cosinus et y vs θ est le sinus qui commence à 0.

Analyse des réponse 3, 4 et 5

Avant de répondre aux questions 3, 4 et 5, les élèves changent le système de référence en dehors de la trajectoire et ils décident de le retourner au centre du cercle, car « les graphiques y sont plus jolis », les élèves s'y montrant dans CI puisque la perception était à la base de leur décision. Lorsqu'ils répondent aux questions 3, 4 et 5, ils le font de manière précise et concrète. Les élèves identifient correctement, à partir de l'observation du mouvement, les variables physiques du MCU et déterminent que les valeurs de x et y changent de signe en disant « ... lorsque notre point de référence tourne, il passe par tous les quadrants et revient au même point où il a commencé ». Aussi, dans la réponse 5b, nous observons qu'ils donnent un argument mathématique

en disant que « La différence entre ces deux graphiques est que x vs θ commence à 1 qui est le cosinus et y vs θ est le sinus qui commence à 0 ». Ces réponses indiquent que les étudiants passent à CII parce qu'ils montrent la manipulation d'objets mathématiques bien définis tels que le système de référence, les quadrants, les coordonnées, le sinus, le cosinus.... Avec ces questions, les élèves activent le plan [Sem-Dis] (figure 5.67) puisqu'avec leurs réponses ils **décodent** les variables du mouvement, les signes des valeurs du registre TV et les différences entre les graphiques (GT) [7] (le **décodage** vient du **référentiel théorique**[6]) et les amène à la **dimension discursive** lors de l'écriture des réponses aux questions [8].

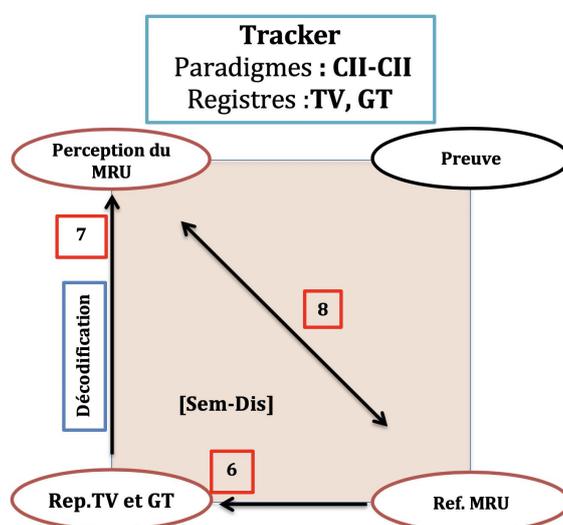


FIGURE 5.67 – Réponse 3, 4 et 5 (MCU), ETC, groupe 3

Première partie. **Phases 4 et 5.** Question(s) et/ou consigne(s) : 6. *Importer le tableau des valeurs de Tracker dans GeoGebra, faire le graphique, faire l'ajustement avec la fonction sinus et Compare :*

a) x vs t et y vs t *Écrivez la signification de chacun des termes des fonctions fournies par GeoGebra au moment où vous effectuez l'ajustement.*

Écrivez une des fonctions en termes de cosinus (vous pouvez utiliser GeoGebra pour vérifier les différentes options)

Aide : N'oubliez pas de considérer que : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Recherchez des informations sur la translation des fonctions sinus et cosinus (si nécessaire).

b) x vs θ et y vs θ *comment sont-ils par rapport aux précédents ? pourquoi ? (convertir les degrés en radians)*

Observer les ajustements obtenus, simplifier les équations et compléter le tableau,

voir annexe A.3

c) Si la vitesse angulaire est $\omega = \frac{\theta}{t}$ et donc $\theta = \omega t$, alors les équations paramétriques (avec le paramètre θ) peuvent être écrites comme : $x =$, $y =$

7. En considérant les équations avec le paramètre θ

a) Transformez les équations paramétriques en une équation rectangulaire correspondante $y(x)$. Rappelez-vous que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

b) Que représente mathématiquement cette équation? quelle est sa signification physique?

La figure 5.68 montre les réponses données par les élèves aux question 6 et 7, suivies de la traduction en français.

6. Importen la tabla de valores de Tracker en GeoGebra, grafiquen, hagan el ajuste con la función seno y Comparen:

a) x vs t & y vs t Escriban qué significa cada uno de los términos de las funciones que arroja GeoGebra cuando hacen el ajuste.

Al graficar estas funciones primero nos queda que x vs t se queda con un ajuste que muestra el coseno y cuando graficamos y vs t , nos muestra el seno

x vs t
 $0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 2.59)$ AS
 $f(x) = 0.01 + 0.11 \cos(14.63x + 2.59)$
 radio del disco, velocidad angular, desfase

y vs t
 $0.12 \sin(14.56t + 1.14)$ AS
 $f(x) = 0 + 0.12 \sin(14.56x + 1.14)$
 radio del disco, velocidad angular, desfase

1. Escriban una de las funciones en términos del coseno (pueden usar GeoGebra para verificar las diferentes opciones)

Ayuda: No olviden considerar que: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. Busquen información de traslación de funciones seno y coseno (si lo necesitan).

$x = 0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 2.59)$ AS
 $= 0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 2.59 - \frac{\pi}{2})$
 $= 0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 1.02)$

(a) Réponses 6a et 6aI, MCU, groupe 3

b) x vs θ y y vs θ ¿cómo son con respecto a las anteriores? ¿por qué? (convertir los grados a radianes)

x vs θ
 $0.13 \sin(x + 1.56) \rightarrow 0.13 \cos(x - 0.01)$
 $f(x) = 0 + 0.13 \sin(1x + 1.56)$ AS

y vs θ , $g(x) = 0 + 0.13 \sin(1x + 0.01)$ AS

I. Observen los ajustes obtenidos, simplifiquen las ecuaciones y completen la tabla

Con respecto al	Ecuación paramétrica de x	Ecuación paramétrica de y	Simplificación ecuación paramétrica de x	Simplificación ecuación paramétrica de y
Tiempo t	$0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 2.59)$	$0.12 \sin(14.56t + 1.14)$	$0.11 \cos(14.63t + 0.02)$	$0.12 \sin(14.56t + 1.14)$
Ángulo (rad)	$0.13 \cos(\theta - 0.01)$	$0.13 \sin(\theta + 0.01)$	$0.13 \cos \theta$	$0.13 \sin \theta$

(b) Réponses 6b et 6bI, MCU, groupe 3

7. Considerando las ecuaciones con el parámetro θ

a) Transformen las ecuaciones paramétricas a una ecuación rectangular $y(x)$ que corresponda. Recordando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

$\cos \theta = \frac{x}{0.13}$ $\sin \theta = \frac{y}{0.13}$ $(\frac{x}{0.13})^2 + (\frac{y}{0.13})^2 = 1$ AS
 $\cos^2 \theta = (\frac{x}{0.13})^2$ $\sin^2 \theta = (\frac{y}{0.13})^2$

$x = 0.13 \sin(0.02u + 1.56)$
 $y = 0.13 \sin(0.02u + 0.01)$ $0 \leq u \leq 2276.76$

b) ¿Qué representa matemáticamente esta ecuación? ¿cuál es el significado físico?
 Es la ecuación de una circunferencia que describe la trayectoria del disco

(c) Réponse 6c, MCU, groupe 3

FIGURE 5.68 – Réponses 6 et 7, MCU, groupe 3

Réponses en français :

6. Lorsque nous traçons le graphique de ces fonctions, nous obtenons d'abord que x vs t est à gauche avec un réglage qui montre le cosinus et que lorsque nous traçons le graphique, y vs t nous montre le sinus.

x vs t : rayon du disque; vitesse angulaire; décalage

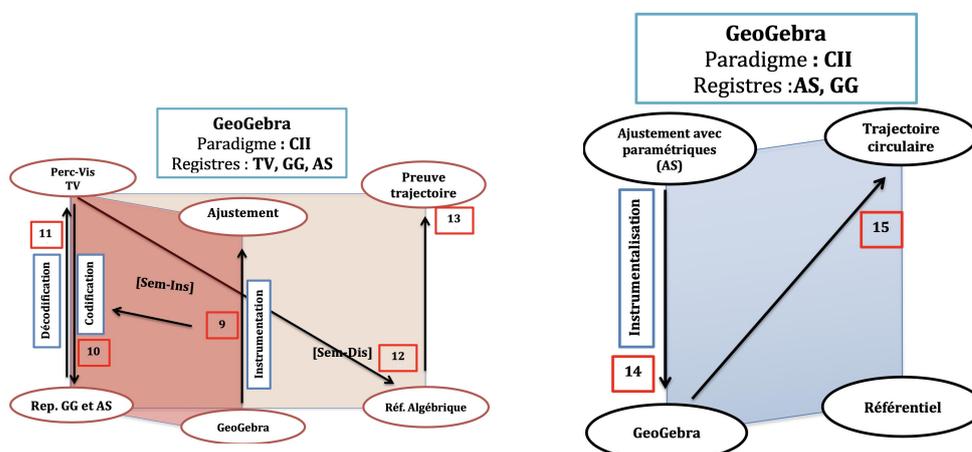
y vs t : rayon du disque; vitesse angulaire; décalage

7 b) C'est l'équation d'une circonférence qui décrit la trajectoire du disque.

Analyses des réponses 6 et 7

Dans les réponses, nous pouvons voir que l'équipe 3 identifie également les variables correctement, ce qui les fait basculer vers le paradigme CIII. Les élèves activent les plans [Sem-Ins], [Sem-dis] et [Ins-dis] du CII, figure 5.69. Nous pouvons observer que les élèves parviennent à générer un processus d'*instrumentation* avec GeoGebra [9]. Ce logiciel *codifie* le registre TV et génère les registres GG et AS [10]. En répondant à la question 6 avec toutes ses sous-questions, le groupe 3 *décode* les registres AS (équations paramétriques) avec la signification correcte des éléments des équations [11]. De plus, dans les enregistrements des sessions, nous pouvons observer que les élèves remarquent que les fonctions qui dépendent du temps n'ont pas un aussi bon ajustement que celles qui dépendent de l'angle. Le groupe 3, après une longue discussion qui conduit à la dimension sémiotique [12], conclut que cela peut être dû au fait que la vitesse du disque n'était pas si constante, alors que la forme du disque est complètement circulaire. Cet argument est très important car les élèves ont remarqué la différence entre les paramètres t et θ et la façon dont ils affectent la représentation graphique. Avec la question 7, les étudiants prouvent algébriquement, avec les équations paramétriques, que la trajectoire est un cercle activant la genèse discursive [13]. Une action importante est que, contrairement aux groupes précédents, les élèves du groupe 3 utilisent GeoGebra (processus d'*instrumentalisation* [14]) dans le but de prouver qu'avec des équations paramétriques, GeoGebra doit tracer un cercle qui est la trajectoire, bien qu'ils n'obtiennent pas l'équation résultante, ils obtiennent le graphique généré par les deux équations paramétriques et là, ils observent également qu'avec les équations avec le paramètre t l'ajustement n'est pas bon, alors que l'ajustement avec celles du paramètre angle est très bon (figure 5.68d), cela est dû au fait que les équations avec le paramètre t ont beaucoup de variation parce que leur mouvement n'est pas uniforme (il est observable dans la figure). Mais lorsqu'ils utilisent les équations avec le paramètre θ et parce qu'ils ont utilisé un artefact complètement circulaire, l'ajustement

que fait Tracker est très précis. Ce groupe a pu observer, de manière graphique, les différences que chaque paramètre génère et sa relation avec le phénomène physique en validant leurs réponses précédentes [15]. Tout le travail effectué dans les questions 6 et 7 se situe dans le paradigme CII.



(a) Réponses 6 et 7 (MCU), ETC, groupe 3

(b) Utilisation de GeoGebra pour vérifier la trajectoire avec des équations paramétriques, ETC, groupe 3

FIGURE 5.69 – Réponses 6 et 7, MCU, groupe 3

Deuxième partie. **Phases 4 et 5 8.** *Dérivez par rapport à t les équations paramétriques respectives, que représentent ces dérivées, d'un point de vue physique?*

9. *La magnitude de la vitesse est $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Développez-le algébriquement jusqu'à son expression minimale. Comparez-le avec la formule de vitesse tangentielle qui apparaît dans les livres de physique.*

10. *Si, $a = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{dt}\right)^2}$ avec le même raisonnement algébrique de la question précédente, déterminer l'expression qui représente l'accélération. Comparez avec les formules qui apparaissent dans les livres de physique.*

La figure 5.70 montre les réponses données par les élèves aux questions 8, 9 et 10, suivies de la traduction en français.

8. Deriven con respecto a t las ecuaciones paramétricas respectivas. ¿Qué representan, desde un punto de vista físico, estas derivadas?

y vs t : $y = 0.12 \sin(14.56t + 1.14)$
 x vs t : $x = 0.11 \cos(14.63t + 1.14)$
 y' : $0.12(14.56) \cos(14.56t + 1.14)$
 x' : $-(0.11)(14.63) \sin(14.63t + 1.14)$
 AS: $x' = 1.6093 \sin(14.63t + 1.14)$

(a) Réponse 8, MCU, groupe 3

9. La magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Desarrolléla algebraicamente hasta su mínima expresión. Compárala con la fórmula de velocidad tangencial que aparece en los libros de física.

AS

$$v = \sqrt{\left[1.7472 \cos(14.56t + 1.14)\right]^2 + \left[1.6093 \sin(14.63t + 1.14)\right]^2}$$

$$= \sqrt{(3.0527) \cos^2(14.56t + 1.14) + 2.5898 \sin^2(14.63t + 1.14)}$$

$$= \sqrt{(0.11)^2 (14.63)^2 \cos^2(14.63t + 1.14) + (0.12)^2 (14.56)^2 \sin^2(14.56t + 1.14)}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595) [\cos^2(14.595t + 1.14) + \sin^2(14.595t + 1.14)]}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^2 [1]} \quad \left[\begin{array}{l} \omega = r\omega \\ \text{AG} \end{array} \right]$$

$$v = (0.115)(14.595) \quad v = 1.678425$$

(b) Réponse 9, MCU, groupe 3

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ con el mismo razonamiento algebraico de la pregunta anterior, determina la expresión que representa la aceleración. Compárala con las formulas que aparecen en los libros de física.

AS

$$a = \sqrt{(0.115)(14.595)^4 \left[\cos^2(14.595t + 1.14) + \sin^2(14.595t + 1.14) \right]}$$

$$= \sqrt{(0.115)(14.595)^4 (1)}$$

$$= \sqrt{(0.115)^4 (14.595)^4 (1)}$$

$$= 0.115 (14.595)^2 \quad \left[a_n = \omega^2 r \right] \quad \text{AG}$$

$$= 24.496$$

(c) Réponse 10, MCU, groupe 3

FIGURE 5.70 – Réponses 8, 9 et 10, MCU, groupe 3

Réponse en français :

10. Ils sont presque constants, la vitesse tangentielle est uniforme et pour cette raison les valeurs ne changent pas beaucoup.

Analyses des réponses 8, 9 et 10

Les réponses du groupe 3, aux points 8, 9 et 10 du guide (figure 5.71), montrent une très bonne manipulation des processus algébriques avec le registre AS. Le développement réalisé par ce groupe est intéressant, car ils commencent à faire les calculs avec les valeurs qu'ils ont (figure 5.71). Ensuite, ils changent d'avis, autrement dit, ils reprennent les représentations AS et ils remarquent alors qu'il a des valeurs différentes de ω et du rayon et, contrairement aux deux équipes précédentes, le groupe 3 n'en prend pas une, mais il décide qu'il vaut mieux prendre la moyenne des deux valeurs car la meilleure valeur doit se situer entre les deux. Nous pensons que ce développement est très intéressant pour cette équipe qui a présenté de nombreuses difficultés lors de la première activité. Nous pensons que les membres du groupe 3 ont bien progressé. Dans le discours algébrique, nous pouvons observer que les élèves activent la dimension discursive de CII à CIII (figure 5.71) en faisant le développement algébrique avec les représentations AS (CII) jusqu'à les représentations AG ($v = r\omega^2$ et $a = r\omega^2$) (CIII). Ce développement génère la l'activation de la *genèse discursive* qui va

du traitement mathématique des équations paramétriques à l'obtention des équations générales de la vitesse tangentielle et de l'accélération centripète [16].

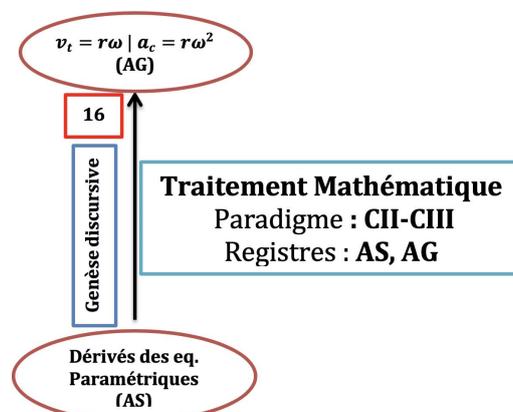


FIGURE 5.71 – Réponses 8,9 et 10 (MCU), ETC, groupe 3

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 11. Compléter le tableau suivant (voir annexe A.3) pour 5 valeurs de temps. ¿Les valeurs de ω , v_t et a_c sont-elles constantes? Donner une explication.

11. Completen la siguiente tabla para 5 valores del tiempo

t[s]	θ [rad]	ω $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	v_t $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	a_c $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
0.267	353.9°	14.814	1.211	25.476
0.4	362.1°	14.936	1.2176	25.6546
0.433	410.7°	14.80	1.202	25.1896
0.467	438.1°	14.75	1.6997	25.1215
0.5	467.3°	15.02	1.7273	25.944

$v = r\omega$ $a = r\omega^2$

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

Son casi constantes, la velocidad tangencial es uniforme y por eso los valores no cambian mucho.

FIGURE 5.72 – Réponse 11, MCU, groupe 3

Réponse en français :

11. Ils sont presque constants, la vitesse tangentielle est uniforme et donc les valeurs ne changent pas beaucoup.

Analyse de la réponse 11

Comme nous pouvons le voir dans la réponse 11 de l'équipe 3 (figure 5.72), la justification des petites différences des valeurs obtenues dans la vitesse tangentielle, angulaire et accélération centripète, est pragmatique mais insuffisante, car les élèves n'expliquent pas les facteurs qui, à leur avis, ont influencé ces différences. Nous pouvons

donc dire qu'il n'y a pas de réelle validation des données numériques, ni de la dimension *sémiotique* ni de la dimension *instrumentale* [17] (figure 5.73)

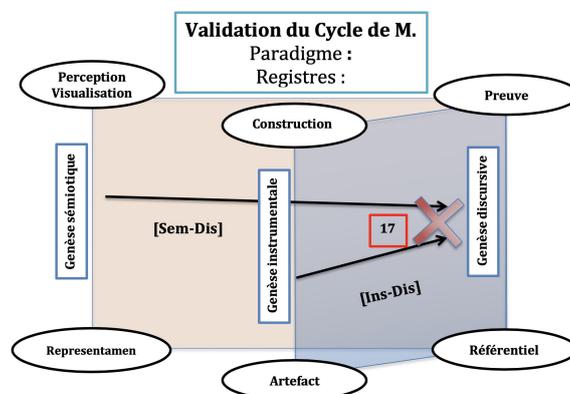


FIGURE 5.73 – Réponse 11(MCU), ETC, groupe 3

Résumé de l'activité 3, groupe 3 (figures 5.74 et 5.75).

Le groupe 3 a effectué le mouvement avec 3 artefacts matériels (Yo-yo, petit avion et un disque vinyle). Cependant, avec le yo-yo et le petit avion, ils n'ont pas réussi, dès le début, à avoir les conditions requises. Ce que nous interprétons comme un échec du processus d'*instrumentalisation* [1i et 1ii] (CI). Ensuite, avec le disque vinyle (*instrumentalisation* [1]), ils parviennent à *coder* les caractéristiques qu'ils ont en tête et ils génèrent la représentation **MP** d'un MCU [2 et 3] (CI). En utilisant le Tracker (*instrumentation* [4]), les élèves *encodent* le **MP** dans les registres **TV** et **GT** [5]. En ce qui concerne le *décodage* [6, 7 et 8] de ces registres de représentation, les élèves le font correctement et il montre une grande évolution par rapport à la première activité, ils n'ont plus la confusion entre les concepts de position, de distance et de trajectoire. Ils utilisent également des connaissances telles que le système de référence, les quadrants, les coordonnées, le sinus, le cosinus,... L'utilisation de GeoGebra (*instrumentation* [9]) génère un *codage* du registre **TV** vers les registres **GG** et **AS** [10]. Les élèves du groupe 3 montrent un énorme changement par rapport à la première activité. Lors du *décodage*, ils écrivent correctement les équations ainsi que la signification de chacun des termes (CII). Ils parviennent également à obtenir l'équation de la trajectoire à partir des équations paramétriques [12 et 13] et génèrent un processus de validation de cette équation par GeoGebra [14 et 15]. Dans le traitement mathématique, ils n'écrivent pas la signification des dérivés mais ils parviennent à effectuer le processus algébrique pour obtenir les équations générales de la vitesse tangentielle et

de l'accélération centripète [16] (CII-CII). Enfin, ils ne parviennent pas à justifier leurs résultats numériques par le mouvement effectué [17].

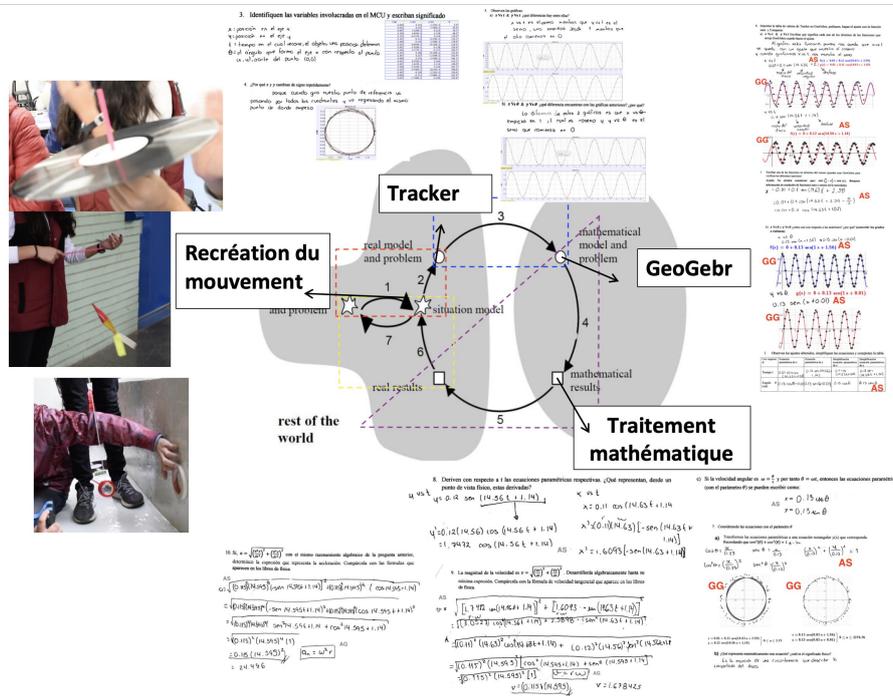


FIGURE 5.74 – La fonction autour du cycle de modernisation, activité MCU (groupe 3)

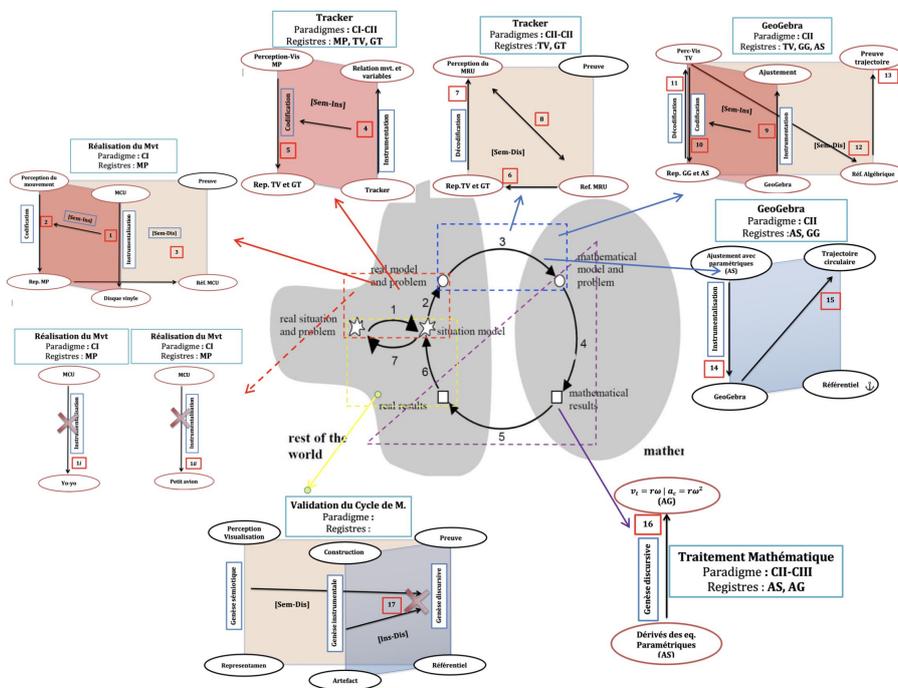


FIGURE 5.75 – Analyse globale, activité 3 (groupe 3)

5.5.4 Conclusion générale activité 3

La troisième activité a apporté des changements importants dans le travail des trois équipes. Nous avons observé que les élèves comprenaient correctement le mouvement physique par l'interaction et la coordination des registres de représentations : MP, TV et GT. En réfléchissant sur le sens du mouvement (MP) et en le comparant avec le signe des valeurs (TV), ils peuvent le relier à la courbe générée par le Tracker (GT). Cela signifie qu'ils perçoivent, même s'ils n'en sont pas pleinement conscients, la notion de fonction. Sur la base de leurs arguments, nous confirmons qu'ils comprennent que travailler avec GeoGebra leur permet de passer aux registres de représentation : GG, AS et AG. Dans cette activité, les élèves apprennent que le rôle de GeoGebra est de rendre explicites, algébriquement (AS), les fonctions qui ont été définies par les courbes générées par Tracker (GT). À ce moment du processus de modélisation, l'articulation des registres (GG) et (AS), faite par les élèves, commence à jouer un rôle important, entre le domaine de la connaissance et les différents concepts, objets et représentations sémiotiques. La modélisation des courbes génère des équations paramétriques qui, avant ce moment, étaient peu connues des étudiants, car il s'agit d'un sujet qui est vu de manière superficielle (comme nous l'avons vu dans la section 1.2.4). Il est important de souligner que l'équipe 3, qui avait eu certaines difficultés lors de la première activité, développe dans celle-ci un processus de modélisation du mouvement tout à fait remarquable.

Nous considérons que dans cette activité, l'effet produit, chez les élèves, par la coordination et la manipulation entre les différents registres de représentation est plus clairement apprécié. Les trois équipes effectuent un traitement mathématique correct avec le registre AS, en travaillant avec l'objet mathématique dérivé, en lui donnant un sens avec les concepts physiques respectifs de mouvement, tels que la vitesse angulaire et tangentielle. Nous observons également que le développement algébrique effectué par les trois équipes est mieux décrit par CIII puisqu'elles utilisent les représentations AS donnant le statut de variables bien définies (AG) aux valeurs numériques.

Contrairement à l'activité un, dans celle-ci, tous les groupes parviennent à une activation complète de l'ETC. Bien que le travail soit caractérisé par des éléments de CI, CII et CIII, nous pensons que le travail de coordination et de manipulation algébrique qu'ils réalisent avec la représentation AS et AG, les place fondamentalement dans le paradigmes CII et CIII. Cela montre un progrès chez les élèves dans la coordination des éléments épistémologiques et cognitifs.

5.6 L'activité 4, MRU+ MCU

5.6.1 Groupe 1

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. *Comment exécuteriez-vous un mouvement qui combine MRU et MCU?*

2. *Quels sont les phénomènes que vous identifiez qui présentent cette combinaison de mouvements?*

3. *Notez tout ce que vous savez sur le MRU et le MCU (équations, caractéristiques, diagrammes....) Aide : tirez parti de données que vous avez obtenues lors d'activités précédentes.*

4. *Considérant que vous avez une composition d'un MRU et d'un MCU, quelles variantes possibles peuvent avoir les vitesses du phénomène global? Expliquez comment vous obtiendriez chacune des combinaisons suivantes*

Les élèves ont répondu aux questions 1, 2, 3 et 4 (figure 5.76) avant d'effectuer le mouvement combiné (MRU+MCU).

1. ¿Cómo realizarían un movimiento que combine el MRU y el MCU?
Ayuda: apoyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores

1. Con el objeto del experimento pasado (regulito) lo deslizariamos sobre el contorno de una superficie plana (mesa), a la vez que este gira.

(a) Réponse 1, MRU+MCU, groupe 1

2. ¿Qué fenómenos identifican que presenten esta combinación de movimientos?
Cualquier objeto con ruedas en movimiento (Bicicleta)
Yoyo (Cuando sube y baja)
Decoración de un pastel cuadrado

(b) Réponse 2, MRU+MCU, groupe 1

3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas...)

Ayuda: apoyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores

MRU Tiene una velocidad constante (sin aceleración)
El movimiento es constante en uno de sus ejes (ya o z)
La trayectoria la podemos poner a través de la ecuación de la velocidad de los 2 ejes
La trayectoria sigue una línea recta

MCU El movimiento surge en dos ejes coordenados
La velocidad total del movimiento es uniforme pero si analizamos el movimiento por separado en cada eje nos percatamos de que la velocidad es circular y tiene un punto máximo y un mínimo por lo que va incrementando hasta llegar al máximo y decrece

$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $x^2 + y^2 = r^2$

(c) Réponse 3, MRU+MCU, groupe 1

4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones

• $V_{MRU} > V_{MCU}$

Tomaremos como referencia del MCU un punto más cercano al centro de la circunferencia para que así el movimiento circular sea más lento

• $V_{MRU} < V_{MCU}$

Tomaremos como referencia del MCU un punto más lejano al centro de la circunferencia para que así el movimiento circular sea más rápido

• $V_{MRU} = V_{MCU}$

Haremos rodar un objeto para que la distancia que recorra sea equivalente a las vueltas que da.

(d) Réponse 4, MRU+MCU, groupe 1

FIGURE 5.76 – Réponses 1, 2, 3 et 4, MRU+MCU, groupe 1

Réponse en français

1. Le moulin à vent utilisé lors de la dernière expérience, nous le ferions glisser sur une surface plane (table) en même temps qu'il tourne.

2. Tout objet dont les roues sont en mouvement ; (bicyclette) ; yo-yo (quand il monte et descend) ; décoration d'un gâteau carré (en décorant un gâteau en forme de spirale avec de la crème fouettée).

3. Le MRU a une vitesse constante (sans accélération) Le mouvement est constant dans un de ses axes (y ou z). La trajectoire peut être représentée par l'équation de vitesse des deux axes. La trajectoire suit une ligne droite.

Le MCU : Le mouvement s'effectue dans deux axes de coordonnées. La vitesse totale du mouvement est uniforme, mais si nous analysons le mouvement séparément dans chaque axe, nous nous rendons compte que la vitesse est cyclique et a un point maximum et un minimum afin qu'elle augmente pour atteindre le maximum et vice versa.

4. $V_{MRU} > V_{MCU}$: Nous prendrons comme référence du MCU un point plus proche du centre de la circonférence pour que le mouvement circulaire soit plus lent.

$V_{MRU} < V_{MCU}$: Nous prendrons comme référence du MCU un point plus éloigné du centre de la circonférence pour que le mouvement circulaire soit plus rapide.

$V_{MRU} = V_{MCU}$: Nous roulerons un objet de façon à ce que la distance parcourue soit équivalente aux virages qu'il effectue.

Analyse des réponses 1, 2, 3 et 4

Comme nous l'avons prévu dans les travaux attendus (4.2), dans les réponses aux questions 1, 2, 3 et 4, le groupe 1 active les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] avec des éléments provenant principalement de CI et CII mais nous observons également quelques objets de CIII (figure 5.77). C'est-à-dire, dans la question 1, les élèves se réfèrent à l'artefact matériel moulin à vent (qu'ils ont utilisé dans l'activité 3), même, nous observons (dans l'enregistrement de séance) qu'ils l'utilisent pour exemplifier le mouvement auquel ils pensent. Ainsi, le groupe 1 génère un processus d'*instrumentalisation* [1] qui les amène à visualiser le mouvement que nous leur demandons (MRU+MCU) et à le *coder* dans leur esprit pour fournir d'autres phénomènes possibles ayant les mêmes caractéristiques (mouvement d'un roue du vélo, un yo-yo et la décoration d'un gâteau carré) [2] (CI). Ces trois exemples sont intéressants car dans le cas de la roue d'une bicyclette et du mouvement d'un yo-yo, nous pensons que ce qu'ils peuvent imaginer sont les mouvements de l'artefact (d'une part, le mouvement rectiligne de la bicyclette et d'autre part, le mouvement circulaire de la roue) sans, nécessairement, imaginer la trajectoire d'un point sur la roue de la bicyclette (ou du yo-yo). Cependant, dans la décoration d'un gâteau, les élèves montrent qu'ils ne pensent pas seulement aux mou-

vements séparément, mais aussi qu'ils ont une idée de la trajectoire que cette combinaison de mouvements peut générer (cycloïde).

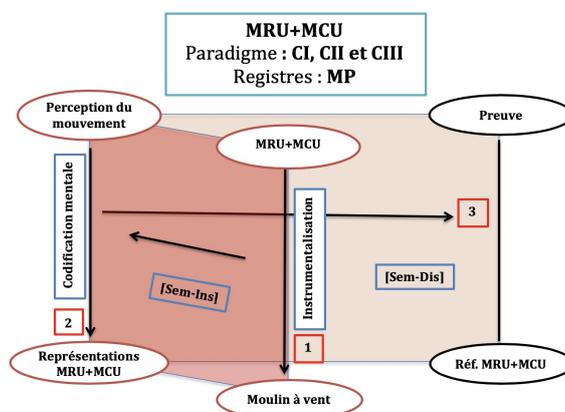


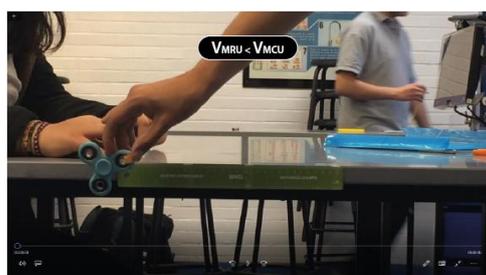
FIGURE 5.77 – Analyse des réponses 1, 2, 3 et 4 (MRU+MCU), ETC, groupe 1

À partir des questions 1 et 2 et des activités précédentes, aux questions 3 et 4, les élèves activent la *dimension discursive* [3] lorsqu'ils écrivent les caractéristiques et les éléments qu'ils se souviennent du MRU et du MCU, où, nous pouvons observer que, bien qu'ils fassent une erreur en disant qu'ils peuvent obtenir l'équation de trajectoire à partir des équations de vitesse (nous pensons que c'est accidentel, car ils ont toujours utilisé les équations paramétriques du mouvement et non les équations dérivées), ils montrent une bonne compréhension du mouvement et écrivent que $v = \frac{dx}{dt}$, ainsi que les caractéristiques et les équations qui modélisent le mouvement, avec des éléments appartenant à **CI**, **CII** et **CIII**. Il est important de mentionner que bien que les élèves aient fait des représentations graphiques et des formules écrites, la notion de fonction n'est pas très perceptible, nous pensons que cela peut être dû à la façon dont la question a été posée. Cependant, la réponse les amène à répondre correctement à la question 4 avec des éléments, avant tout, perceptifs mais bien réfléchis (**CI**) que nous pouvons constater dans le dialogue suivant :

Español	Français
<p>E1 : ¿qué pasaría si colocamos un punto cerca del centro de la botella? [artefacto que estaban usando para recrear el movimiento] ¿cómo sería su velocidad respecto a uno en la orilla de la botella?</p> <p>E2 : Es más rápido... porque alcanza a dar más vueltas en menos... [hace una expresión de duda]</p> <p>E1 : ... el de adentro es más rápido, por lo mismo que debe recorrer su diámetro en un segundo y entonces... en un segundo recorre menos...</p> <p>[El estudiante 2 intenta dar una explicación haciendo un giro con su brazo extendido, y refiriéndose a los dedos de su mano en movimiento]</p> <p>E2 : ... es como si quisieras dar la vuelta así, te tardas menos en dar la vuelta</p> <p>P : Pero el tiempo es el mismo. Observen el movimiento de los pétalos del molino de viento cuando está girando. ¿Cómo ven la parte externa y la interna?</p> <p>E4 : Esto va más rápido [refiriéndose a la parte externa del rehilete, porque ellos observan que la parte externa del molino de viento se ve difusa en comparación de la interna] porque tiene que recorrer mayor distancia.</p> <p>E2 : ¡Nunca lo había pensado así! Si quieres que tu movimiento circular sea más lento, debe estar un punto más cercano al centro. Entonces, para que la velocidad del MRU sea mayor que la del MCU tomaremos como punto de referencia, del MCU, un punto más cercano al centro de la circunferencia, para que el movimiento circular sea más lento. Para que la velocidad del MRU sea inferior a la del MCU, tomaremos como punto de referencia, en el MCU, un punto más alejado del centro de la circunferencia para que el movimiento circular sea más rápido y, finalmente, para que la velocidad del MRU sea igual a la velocidad del MCU, haremos rodar un objeto para que la distancia que recorra sea equivalente a las vueltas que realice.</p>	<p>E1 : Que se passerait-il si nous placions un point près du centre de la bouteille? Comment serait leur vitesse par rapport à un point situé sur le bord de la bouteille?</p> <p>E2 : C'est plus rapide... parce qu'il y a plus de tours en moins... [fait une expression douteuse]</p> <p>E1 : ... celui qui est à l'intérieur est plus rapide, il doit donc parcourir son diamètre en une seconde et ensuite... en une seconde il se déplace moins...</p> <p>E2 : ... c'est comme si vous vouliez faire un tour comme ceci, cela prend moins de temps pour faire un tour [L'élève 2 tente de donner une explication en tordant son bras tendu et en se référant aux doigts de sa main en mouvement]</p> <p>P : Mais le temps est le même. Regardez le mouvement des pétales du moulin à vent lorsqu'il tourne. Comment voyez-vous l'extérieur et l'intérieur?</p> <p>E4 : Il va plus vite [en se référant à la partie extérieure du moulin à vent, car [ils observent que la partie extérieure du moulin à vent semble diffuse par rapport à la partie intérieure] parce qu'il doit parcourir une plus grande distance.</p> <p>E2 : Je n'y avais jamais pensé de cette façon! Si nous voulons que notre mouvement circulaire soit plus lent, il doit être un point plus proche du centre. Donc, pour que la vitesse du MRU soit supérieure à celle du MCU nous prendrons comme point de référence, du MCU, un point plus proche du centre de la circonférence, de sorte que le mouvement circulaire soit plus lent. Pour que la vitesse du MRU soit inférieure à la vitesse du MCU, nous prendrons comme référence, du MCU, un point plus éloigné du centre de la circonférence de sorte que le mouvement circulaire sera plus rapide et enfin, pour que la vitesse du MRU soit égale à la vitesse du MC, nous ferons rouler un objet de sorte que la distance qu'il parcourt soit équivalente aux tours qu'il effectue.</p>

Le dialogue précédent a mis en évidence l'importance des perceptions sensorielles, dans ce cas l'observation, qui permettent, dans un premier temps, de déterminer et d'évaluer qualitativement les variables qui apparaissent dans une situation réelle et qui font partie du processus de modélisation.

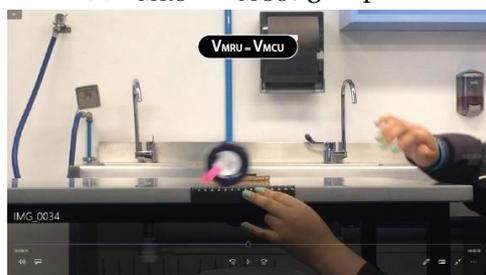
Pour la réalisation du mouvement, les élèves ont utilisé deux artefacts matériels différents, un spinner attaché à un bâton en bois (Ils ont changé le moulin à vent parce qu'il était trop grand et trop compliqué à manipuler pour faire la combinaison des mouvements) et une bouteille d'eau. Avec ces matériaux, ils ont réalisé les trois variantes du mouvement : $V_{MRU} < V_{MCU}$ (figure 5.78a), $V_{MRU} > V_{MCU}$ (figure 5.78b), $V_{MRU} = V_{MCU}$ (figure 5.78c). Les membres de ce groupe, avec le V de la notation V_{MCU} ils se réfèrent à la vitesse tangentielle (telle qu'observée dans le dialogue précédent). Nous pensons que cela peut également signifier un progrès, puisque dans l'activité trois les élèves ont perçu la vitesse angulaire plus facilement au début.



(a) $V_{MRU} < V_{MCU}$, groupe 1



(b) $V_{MRU} > V_{MCU}$, groupe 1



(c) $V_{MRU} = V_{MCU}$, groupe 1

FIGURE 5.78 – Les trois variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 1

Analyse des trois variantes des vitesses

Pour effectuer les mouvements où la vitesse du MRU est supérieure à celle du MCU et où la vitesse du MRU est inférieure à celle du MCU, les étudiants n'ont aucun problème à les réaliser car ils utilisent un spinner attaché à un bâton en bois (artefact matériel), qui, par nature, est facile à manipuler et génère les conditions de chacun des mouvements, qui peuvent être facilement vérifiées par le biais de perceptions.

Dans ces mouvements, les étudiants activent les plan **[Sem-Ins]** et **[Sem-Dis]** de **CI**, **CII** et même **CIII**, car la vitesse du MRU et la vitesse tangentielle du MCU sont perçues comme des paramètres qui vont engendrer des mouvements différents, (figure 5.79). Les élèves génèrent un processus d'*instrumentalisation* [4] et de *codification* des variables qu'ils ont à leur esprit [5] et lorsqu'ils obtiennent la représentation **MP**, ils la comparent avec leur *référentiel théorique* du mouvement MRU+MCU (qui naît des activités séparées, activité 1 et 3) [6]. Étant ce qu'ils attendaient, ils commencent l'analyse avec Tracker. L'utilisation de ce logiciel génère un processus d'*instrumentation* [7] lors du *codage* des registres **MP** à **TV** et **GT** [8].

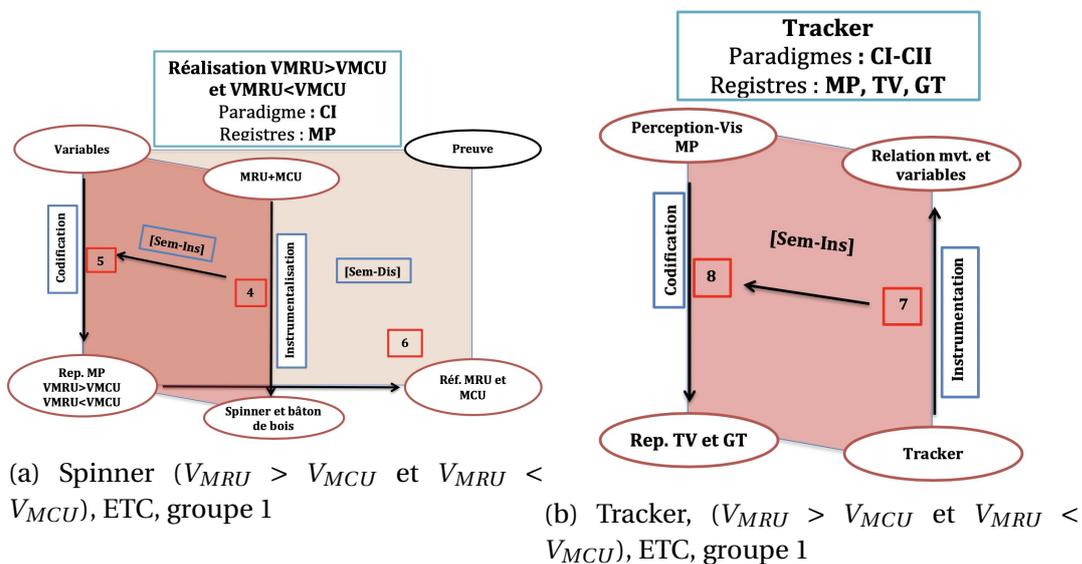


FIGURE 5.79 – Deux variantes des vitesses (MRU+MCU), ETC, groupe 1

Cependant, pour effectuer le mouvement où les vitesses sont égales, les élèves ont du mal à être certains que la distance parcourue linéairement est la même que la distance par rapport au point de référence dans le mouvement circulaire, et le dialogue suivant est généré :

Español	Français
<p>E1 : Medimos el radio. Después usamos la fórmula de dos pi por radio,... lo que nos da de distancia lo proyectamos en la mesa y debe de recorrer la misma distancia que debe conectar, desde un punto hasta el otro punto (refiriéndose al perímetro de la circunferencia), en un segundo.</p> <p>E3 : ¡Ya sé! Mejor utilizamos lo de velocidad igual a distancia sobre tiempo y luego tenemos la distancia.</p> <p>E1 : No, o sea... la distancia es igual a la circunferencia y la circunferencia es pi por diámetro</p>	<p>E1 : On mesure le rayon. Ensuite, on utilise la formule de deux pi par le rayon,... ce qui nous donne la distance que on lui projette sur la table et il doit parcourir la même distance qu'il doit relier, d'un point à l'autre [en se référant au périmètre de la circonférence], en une seconde.</p> <p>E3 : Je sais! Il vaut mieux utiliser la vitesse égale à la distance sur le temps et ensuite nous avons la distance.</p> <p>E1 : Non... la distance est égale à la circonférence et la circonférence est pi par diamètre</p>

Dans ce dialogue, dans la réalisation du mouvement et l'utilisation de Tracker, les élèves activent les plans **[Ins-Dis]** et **[Sem-Ins]** (Figure 5.80). C'est-à-dire que nous pouvons observer que les étudiants partent de leur référentiel théorique (de physique et de géométrie), ce qui les amène à mentionner la formule de $v = \frac{d}{t}$ et celle du périmètre d'un cercle $C = \pi * D$ et les amène à prouver, en **CII**, [4i] qu'en utilisant la bouteille d'eau et en analysant un point sur la circonférence du cercle, il parcourra la même distance que le centre de la bouteille dans le même temps (Cette action implique une supposition implicite : les étudiants prendront les deux mouvements séparément, le MRU pour le centre et le MCU pour le point de la circonférence). Cela les conduit à un processus d'*instrumentalisation* [5i] avec la bouteille d'eau et au codage des variables impliquées pour obtenir la représentation **MP** [6i] en **CI**. Et en ce qui concerne l'utilisation de Tracker, le groupe 1 génère un processus d'*instrumentation* [7i] qui *code* le registre **MP** dans les registres **TV** et **GT** [8i] qui les ramenant à **CII** de nouveau.

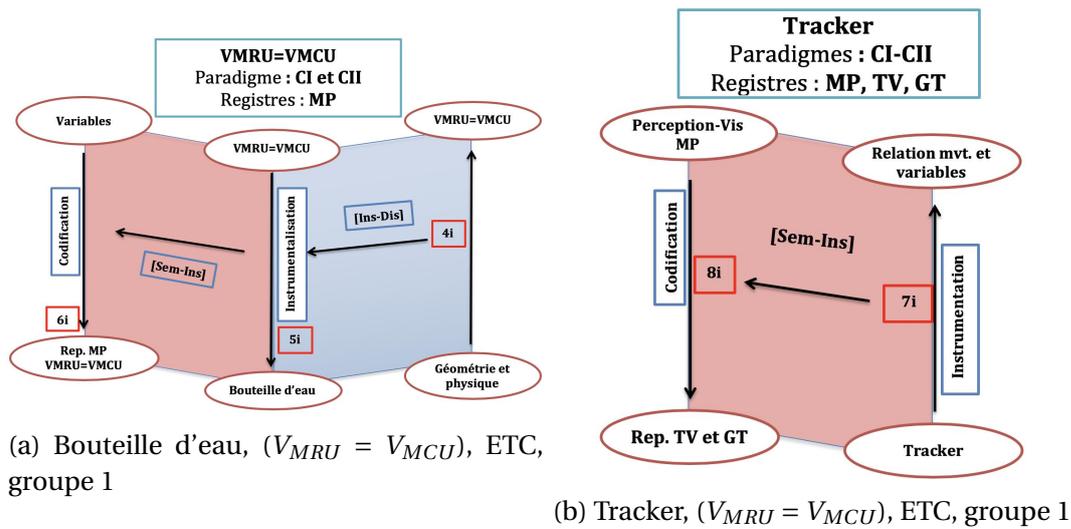


FIGURE 5.80 – Réalisation du mouvement, $V_{MRU} = V_{MCU}$, ETC, groupe 1

- Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. Quels graphiques devez-vous prendre en compte dans le MRU et le MCU? pourquoi?**
- 6. Faites les graphiques et les ajustements nécessaires dans GeoGebra, tracez les graphiques et copiez les équations que vous pouvez obtenir avec GeoGebra.**
- 7. Quelle est la forme du graphique y vs t ? pourquoi il a cette forme?**
- a) Quelles données sur les mouvements pouvez-vous obtenir grâce à l'ajustement que GeoGebra vous donne?** Les élèves ont répondu aux questions 5, 6 et 7 (figure 5.81).

Analicen los movimientos que sean más sencillos de realizar con el material proporcionado.

Trabajo en Tracker y GeoGebra

$$MRU < MCU$$

5. ¿Qué gráficas deben considerar en MRU y en MCU? ¿por qué?

$$MRU = x vs t, y vs t \text{ \& } x vs y$$

$$MCU = x vs t, y vs t, x vs y, t vs \theta \text{ \& } t vs \phi$$



(a) Réponse 5 (MRU+MCU) , groupe 1

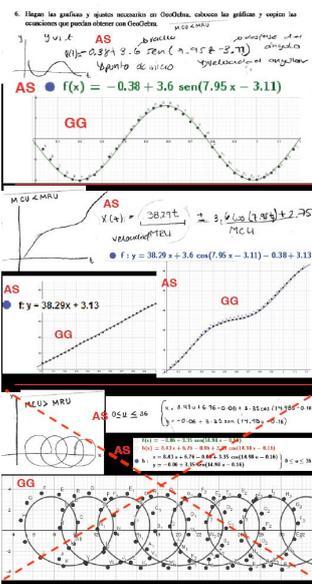
7. ¿Qué forma tiene la gráfica y vs t? ¿por qué es así?

La gráfica $y vs t$ es parecida a la de un seno, a diferencia de que la nuestra tiene algunos desfases debido a la inexactitud de nuestro video. Tiene esta forma ya que el movimiento ocurrido en el eje y es únicamente el circular y la gráfica de un MCU es un seno o coseno.

a) ¿Qué información del movimiento pueden obtener del ajuste que les da GeoGebra?

Podemos obtener la velocidad angular (ω) y la del MRU, el radio del círculo, el desfase que hubo tanto en el ángulo como en los dos ejes considerados.

(b) Réponse 7 (MRU+MCU) , groupe 1



(c) Réponse 6 (MRU+MCU) , groupe 1

FIGURE 5.81 – Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 1

Réponse en français

6. Point de départ; Rayon; Vitesse; Décalage angulaire; Vitesse

7. Le graphique $y vs t$ est similaire à celui d'un sinus, à différence que notre graphique a quelques retards dus à l'inexactitude de notre vidéo. Il a cette forme parce que le mouvement sur l'axe y est uniquement circulaire et le graphique d'une MCU est un sinus ou cosinus.

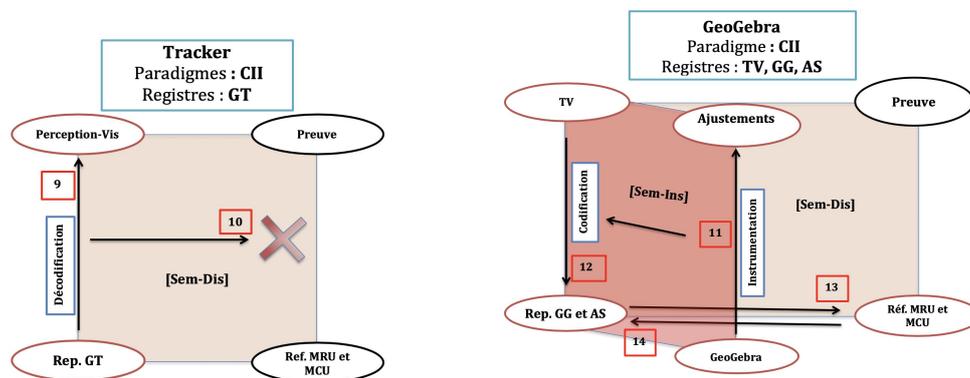
7a. On peut obtenir la vitesse angulaire (ω) et celle du MRU, le rayon du cercle, le décalage qu'il y avait dans l'angle et dans les deux axes de coordonnées.

Analyse des réponses 5, 6 et 7

Dans les réponses aux questions (figure 5.81), nous pouvons noter que, pour ce groupe, il semble encore nécessaire d'utiliser GeoGebra pour que la notation fonctionnelle $x(t)$, $y(t)$... émerge. De plus, nous observons qu'ils écrivent $MRU < MCU$ et omettent le V , nous pensons que c'est peut-être parce qu'ils voulaient simplement simplifier la notation.

Dans la question 5, les élèves génèrent un **décodage** (CII) [9] des graphiques que Tracker peut leur fournir et décident que les graphiques qu'ils doivent prendre en considération sont : du MRU $x vs t$, $y vs t$, $x vs y$; et du MCU $x vs t$, $y vs t$, $x vs y$, $t vs \theta$ (pour une raison que nous ignorons, ils répètent $t vs \theta$). Il est important de mentionner qu'ils

ne justifient pas leur choix et qu'ils n'activent donc pas la dimension discursive [10] (figure 5.82a). Dans les questions 6 et 7, les élèves activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de CII (figure 5.82b). Nous avons observé, dans les enregistrements des sessions, que les élèves génèrent un processus d'*instrumentation* avec GeoGebra [11] qui crée un *codage* [12] avec lequel ils obtiennent tous les graphiques (du MRU et de la combinaison des MRU+MCU) x vs t , y vs t , x vs y (GG) mais seulement les équations des graphiques du MRU et celle de y vs t (AS). Bien que dans la question 6 du guide de travail nous observions qu'ils ont l'équation paramétrique $x(t)$ dans l'enregistrement de la session, nous observons que les élèves répondent, d'abord, à la question 7 dans laquelle, ils activent la *genèse discursive* [13] et obtiennent toutes les données du mouvement de la représentation AS de $y(t)$ et, ensuite, ils écrivent la représentation AS de $x(t)$ [14]. C'est-à-dire qu'avec les données de mouvement combinées, les élèves obtiennent le graphique et l'équation $y(t)$ immédiatement à l'aide de GeoGebra, car le seul mouvement, sur l'axe vertical, est le circulaire uniforme. Cependant, pour $x(t)$, l'équation AS ne peut pas être obtenue par un ajustement puisque la courbe est une combinaison d'une fonction linéaire et d'une fonction sinusoïdale (figure 5.81). Pour cette raison, les élèves ont fait ce qui suit : comme ils connaissent $y(t) = -0.38 + 3.6\sin(7.95t - 3.11)$ qui est la fonction qui modélise le mouvement circulaire uniforme, sur l'axe vertical. Ils ont écrit la fonction qui modélise le mouvement circulaire sur l'axe horizontal (apprentissage qu'ils ont obtenu dans l'activité précédente) $x(t) = -0.38 + 3.6\cos(7.95t - 3.11)$. Par la suite, nous observons qu'ils ont ajouté la fonction de mouvement linéaire $x(t) = 38.29t + 3.13$ et ils ont obtenu $x(t) = 38.29t + 3.6\cos(7.95t - 3.11) - 0.38 + 3.13$, fonction qui modélise le mouvement combiné dans la composante horizontale.



(a) Réponse 5 (MRU+MCU), ETC, groupe 1 (b) Réponse 6 et 7 (MRU+MCU), ETC, groupe 1

FIGURE 5.82 – Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 1

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 8. Faites le graphique x vs t Pourquoi n'est-il pas linéaire? Essayez de faire l'ajustement

- a) Combien de mouvements faut-il prendre en compte sur l'axe des x ?
 - b) Si vous connaissez la distance qui avance en x dans le MRU et la distance qui avance (ou régresse) dans le MCU, quelle serait la fonction qui calcule la distance totale de déplacement du point que vous étudiez?
 - c) Avec les connaissances dont vous disposez jusqu'à maintenant, pouvez-vous obtenir l'équation paramétrique de x ? Ecrivez-le et faites le ajustement dans GeoGebra pour vérifier s'il correspond bien à vos données expérimentales (esquissez le graphique et sauvegardez-le sous votre USB dans le dossier correspondant).
9. Quelle est la grandeur de la vitesse tangentielle du point que vous analysez ? (obtenir l'équation générale de la vitesse et la valeur de la vitesse)

Les élèves ont répondu aux questions 8 et 9 (figure 5.83).

8. Grafique x vs t ¿Por qué no es línea? Intenten hacer el ajuste

Debido a que en el eje x ocurren dos movimientos el del MCU y el MRU la ecuación debía ser la suma de las distancias recorridas en ambos. Así que tomamos la distancia en ambos y las sumamos

ECUACIÓN OBTENIDA =

$$x(t) = 38.29t + 3.6 \cos(1.95t - 3.11) - 0.38 + 3.13$$

AS

a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x ?

Dos, el MRU y MCU.

b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?

Como la suma o resta de las dos distancias. Y la ecuación obtenida está escrita en el punto B de este documento.

c) ¿Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ? Escribirla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbozen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente)

ECUACIÓN OBTENIDA

$$x(t) = 38.29t + 3.6 \cos(1.95t - 3.11) - 0.38 + 3.13$$

AS

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtengan la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

MRU + MCU

$$y(t) = r \cdot \omega = 38 + 3.6 \sin(1.95t - 3.11)$$

$$x(t) = 38.29t + 3.6 \cos(1.95t) + 2.75$$

$$x'(t) = 38.29 - 3.6 \sin(1.95t) \cdot (1.95)$$

$$y'(t) = 0 + 3.6 \cos(1.95t) \cdot (1.95)$$

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

$$v = \sqrt{(v - v_0 \sin(\omega t))^2 + (v_0 \cos(\omega t))^2}$$

$$v = \sqrt{v^2 - 2v v_0 \sin(\omega t) + v_0^2 \sin^2(\omega t) + v_0^2 \cos^2(\omega t)}$$

$$= \sqrt{v^2 - 2v v_0 \sin(\omega t) + v_0^2}$$

$$= \sqrt{2v^2 - 2v^2 \sin(\omega t)}$$

$$= v \sqrt{2(1 - \sin(\omega t))} \rightarrow \text{general AG}$$

CON datos:

$$= 38.29 \sqrt{2(1 - \sin(1.95t))}$$

(a) Réponse 11 (MRU+MCU) , groupe 1

(b) Réponse 12 (MRU+MCU) , groupe 1

FIGURE 5.83 – Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 1

Réponse en français

8. Étant donné que deux mouvements se produisent sur l'axe des x , le MCU et le MRU, l'équation devrait être la somme des distances parcourues sur les deux axes. Nous prenons donc la distance dans les deux cas et nous les additionnons. Équation obtenue :

8 a) Deux le MCU et MRU

8 b) comme l'addition ou la soustraction des deux distances. Et l'équation obtenue, qui est au point 8 de cet exercice

8 c) Équation obtenue

Analyse des réponses 8 et 9

Dans les réponses (figure 5.83), Nous pouvons voir que, contrairement à l'activité précédente, les valeurs de la vitesse angulaire et du rayon (dans les fonctions paramétriques) sont les mêmes, la réponse à cela est que, dans l'activité précédente, les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont données par l'ajustement de GeoGebra qui attribue des valeurs légèrement différentes. Dans cette activité, une seule fonction est obtenue par GeoGebra ($y(t)$) et l'autre ($x(t)$) est obtenue avec les mêmes valeurs uniquement en changeant le sinus en cosinus.

Les questions 8 et 9 activent le plan [Sem-Dis] de CII à CIII (figure 5.84). C'est-à-dire qu'en répondant à la question 8 et à tous ses points, les élèves génèrent un processus de **décodage** de la représentation AS $x(t)$ [15] qui contribue dans leur réponse à la question 9 et par un processus algébrique ils arrivent à la représentation générale de la vitesse tangentielle [16] prouvant que leur processus de modélisation les conduit à une équation générale correcte.

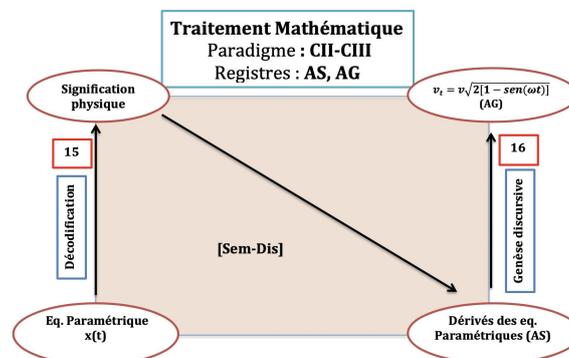
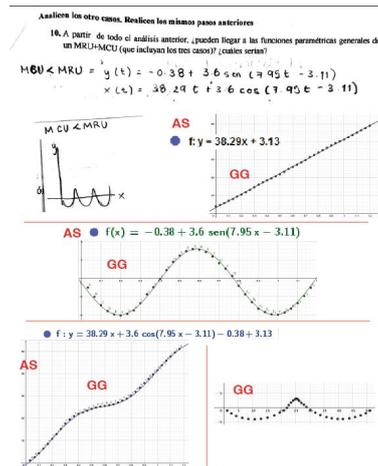


FIGURE 5.84 – Réponses 8 et 9 (MRU+MCU), ETC , groupe 1

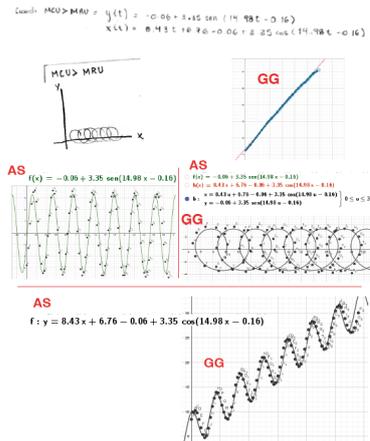
Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 10. A partir de toutes les analyses ci-dessus, pouvez-vous trouver les fonctions paramétriques générales d'une MRU+MCU (y compris les trois cas), quelles seraient-elles ?

11. Pouvez-vous obtenir $y(x)$ ou $x(y)$? sont-ils des fonctions ? Justifiez votre réponse

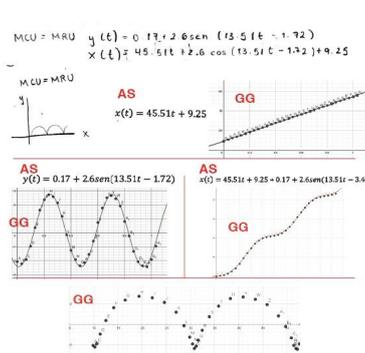
Les élèves ont répondu aux questions 10 et 11 (figure 5.85).



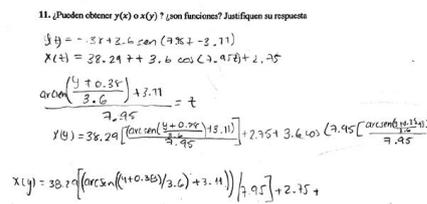
(a) Réponse 10 ($V_{MRU} < V_{MCU}$), groupe 1



(b) Réponse 10 ($V_{MRU} > V_{MCU}$), groupe 1



(c) Réponse 10 ($V_{MRU} = V_{MCU}$), groupe 1



(d) Réponse 11 (MRU+MCU), groupe 1

FIGURE 5.85 – Réponses 10 et 11, MRU+MCU, groupe 1

Analyse des réponses 10 et 11

Dans les réponses aux questions 10 et 11, les élèves activent la **dimension sémiotique** CII à CIII (Figure 5.86) et la **dimension discursive** de CII. Nous observons qu'ils écrivent les équations paramétriques des trois variantes de mouvement (AS), ainsi que chacune des représentations GG, et à partir de là, ils écrivent les équations paramétriques générales (AG) en activant la **dimension sémiotique** avec un processus de **codage** (de GG et AS à AG) [17]. Enfin, les élèves tentent d'obtenir l'équation de trajectoire (question 11) où nous observons une bonne manipulation algébrique lors de l'inver-

sion pour trouver $x(y)$, en activant la *genèse discursive* [18]. Lors de l'enregistrement des séances, nous avons observé que les étudiants voulaient faire un graphique de $x(y)$ pour vérifier s'ils avaient effectivement obtenu l'inverse de l'équation de la trajectoire, mais qu'ils n'avaient pas assez de temps.

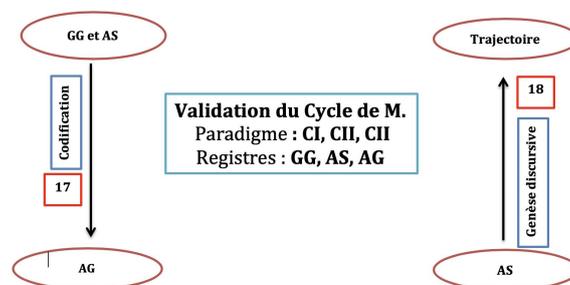


FIGURE 5.86 – Réponses 10 et 11 (MRU+MCU), ETC , groupe 1

Résumé de l'activité 4, groupe 1 (figures 5.87 et 5.88).

Lorsque les élèves du groupe 1 réfléchissent à la manière dont ils exécuteraient la combinaison de mouvements (MRU+MCU), de manière naturelle, ils prennent l'artefact utilisé dans l'activité 3 (moulin à vent) et essaient d'illustrer le mouvement (MRU et MCU) pour l'imaginer, en générant un processus d'*instrumentalisation* [1] qui les aide à *coder* les variables impliquées dans le mouvement et à pouvoir donner des représentations des phénomènes qui présentent ce mouvement [2]. Ceci, ainsi que les activités 1 et 3, est utile pour que les élèves écrivent les caractéristiques du MRU et du MCU, ainsi que les variantes possibles, de la vitesse, qui peuvent être données dans la combinaison des mouvements, en activant la *dimension discursive* [3]. Ensuite, lorsqu'ils aperçoivent que le moulin à vent est très grand, les élèves changent l'artefact matériel pour un spinner attachée à un bâton en bois, avec laquelle ils peuvent effectuer deux des 3 variantes du mouvement, lorsque la vitesse du MRU est inférieure à celle du MCU et vice-versa (première caisse). Avec ce dispositif, les élèves déclenchent un processus d'*instrumentalisation* [4] avec lequel ils parviennent à *coder* les variables pour obtenir le MP [5]. Ces registres ont été comparés à leur *référence théorique* et ils ont convenu que les MP correspondaient aux caractéristiques souhaitées [6]. Ils commencent un processus d'*instrumentation* avec Tracker [7] qui les conduit au *codage* du MP vers les registres TV et GT (qui les fait passer de CI à CII). Ne sachant pas comment démontrer que les vitesses sont égales ($V_{MRU} = V_{MCU}$), les élèves calculent la circonférence du fond circulaire d'une bouteille d'eau, le projettent sur la table et *prouvent* (CII) [4i] que les distances couvertes par le point de référence et le centre du

cercle sont égales dans le même temps. Avec cette certitude, les étudiants génèrent un processus d'*instrumentalisation* avec la bouteille d'eau [5i] qui les conduit à une *codification* des variables obtenant le registre MP [6i]. Immédiatement, les élèves ont réalisé, avec l'utilisation de Tracker (*instrumentation* [7i]), un codage du registre MP vers les registres TV et GT [8i]. Les élèves *décodent* les graphiques de Tracker [9] et notent ceux qui, selon eux, devraient être pris en compte, mais ne justifient pas pourquoi [10]. En utilisant GeoGebra (*instrumentalisation* [11]), ils *codent* le registre TV dans le registre GG mais pas dans tous les registres AS (pour la nature de la fonction $x(t)$) [12], ce qui les amène à leur *référence théorique* [13] et déduit la fonction manquante $x(t)$ [14]. Lors du *décodage* des équations paramétriques (AS) [15], les élèves parviennent à générer un processus algébrique pour arriver à la représentation générale (AG) de la vitesse tangentielle du point de référence dans le cercle (dans le spinner et dans la bouteille d'eau) [16]. Enfin, à partir des registres GG et AS, les élèves parviennent à obtenir (*coder*) les équations paramétriques générales [17] et une équation de trajectoire (afin de vérifier la trajectoire) [18], mais ils ne mentionnent pas s'il s'agit d'une fonction ou non.

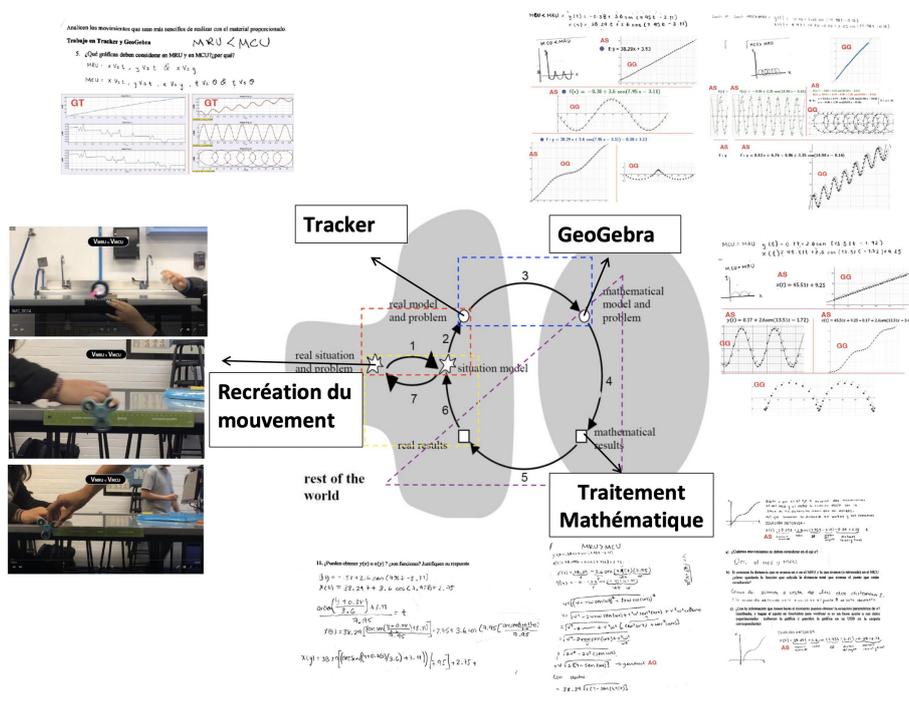


FIGURE 5.87 – La fonction autour du cycle de modernisation, activité MRU+MCU (groupe 1)

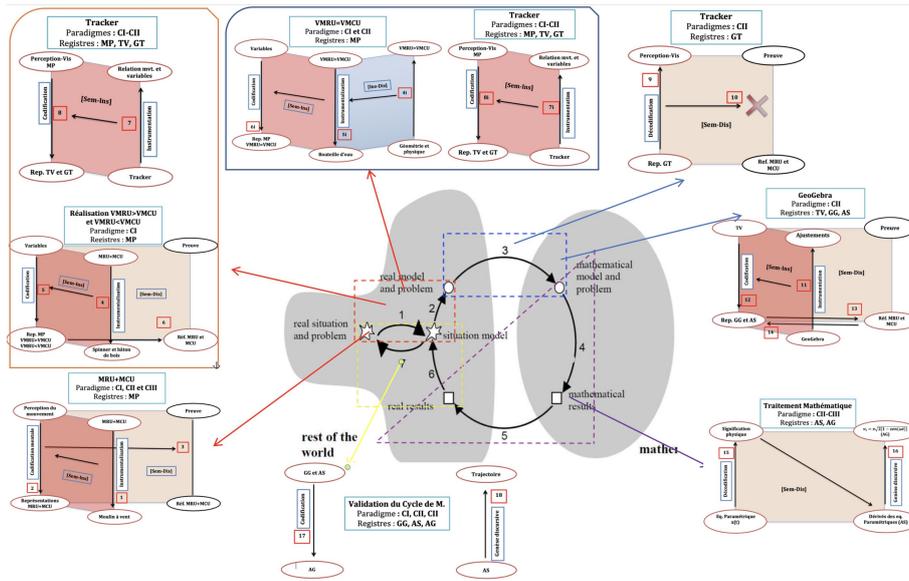


FIGURE 5.88 – Analyse globale, activité 4 (MRU+MCU), groupe 1

5.6.2 Groupe 2

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. *Comment exécuteriez-vous un mouvement qui combine MRU et MCU?*

2. *Quels sont les phénomènes que vous identifiez qui présentent cette combinaison de mouvements?*

3. *Notez tout ce que vous savez sur le MRU et le MCU (équations, caractéristiques, diagrammes....) Aide : tirez parti de données que vous avez obtenues lors d'activités précédentes.*

4. *Considérant que vous avez une composition d'un MRU et d'un MCU, quelles variantes possibles peuvent avoir les vitesses du phénomène global? Expliquez comment vous obtiendriez chacune des combinaisons suivantes*

Les élèves ont répondu aux questions 1, 2, 3 et 4 (figure 5.89) avant d'effectuer le mouvement combiné (MRU+MCU).

MRU + MCU
1. ¿Cómo realizarían un movimiento que combine el MRU y el MCU?
Con cualquier objeto que pueda ser girado, y desplazado horizontal o verticalmente al mismo tiempo.

(a) Réponse 1, MRU+MCU, groupe 2

2. ¿Qué fenómenos identifican que presentan esta combinación de movimientos?
Las llantas de un auto, un tornado visto desde arriba, las hélices de un helicóptero.

(b) Réponse 2, MRU+MCU, groupe 2

3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas...)
Ayuda: apóyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores.
MRU. Unidimensional, su ecuación es $v(t) = \frac{dx}{dt}$ o $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.
velocidad es constante, aceleración es igual a 0.
MCU. Bidimensional, tiene una aceleración centrípeta.
tiene magnitudes tangenciales y angulares. Sus ecuaciones son $x = r \cos(\omega t + \phi_0)$ y $y = r \sin(\omega t + \phi_0)$.

(c) Réponse 3, MRU+MCU, groupe 2

4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones

- Una es en la que la velocidad tangencial del MCU tenga una mayor magnitud que la velocidad del MRU.
Lo haríamos con un spinner en un palo, haciendo girar el spinner más rápido que el desplazamiento horizontal o vertical.
- Otra sería con una velocidad menor en el spinner y un desplazamiento con mayor velocidad.
- El último sería con ambas velocidades iguales, en este caso pensaríamos en hacerlo con un carro de juguete, donde la velocidad de la llanta sería la misma que la del carro si la medimos en un extremo de la llanta.

(d) Réponse 4, MRU+MCU, groupe 2

FIGURE 5.89 – Réponses 1, 2, 3 et 4, MRU+MCU, groupe 2

Réponse en français

1. Avec n'importe quel objet qui peut être tourné et déplacé horizontalement ou verticalement en même temps.

2. Les pneus d'une voiture, une tornade vue d'en haut, les hélices d'un hélicoptère

3. MRU. Un mouvement dimensionnel est $v(t) = \frac{dx}{dt}$ ou $v = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0}$ la vitesse est constante et l'accélération est égale à 0.

MCU : Un mouvement bidimensionnel, a une accélération centripète a des grandeurs tangentielles et angulaires. Ses équations sont $x = r \cos(\omega t + x_0)$ $y = r \sin(\omega t + y_0)$.

4. Dans une, la vitesse tangentielle du MCU est plus grande que la vitesse du MRU. Nous le ferions avec un spinner sur un bâton, ce qui ferait tourner le spinner plus vite que le déplacement horizontal ou vertical. ω Une autre serait avec une vitesse inférieure dans le spinner et un déplacement avec une vitesse plus élevée.

La dernière serait avec les deux vitesses égales, dans ce cas nous avons pensé le faire avec une voiture-jouet où la vitesse du pneu serait la même que la vitesse de la voiture si nous les mesurons à une extrémité du pneu.

Analyse des réponses 1, 2, 3 et 4

Comme nous pouvons le voir dans les réponses (figure 5.89), le groupe 2 fait une notation, $MRU \pm MCU$ et au-dessus des lettres MRU et MCU , ils mettent, respectivement, un signe moins et un signe plus. Nous pensons que pour des raisons pratiques, les élèves n'écrivent pas la lettre V pour la vitesse du MRU et la vitesse tangentielle du MCU comme le faisait l'équipe précédente. Aussi, nous avons remarqué que les étudiants ont mis un \pm qui nous dit qu'il est possible que dès le début, les élèves de ce groupe ont clairement que, les vitesses de ce mouvement combiné doivent être ajoutées ou soustraites selon leur sens. Dans la question 2, nous trouvons l'exemple qu'ils donnent des hélices d'un hélicoptère surprenant, car c'est un signe qu'ils pensent aux mouvements en trois dimensions. Cette réponse nous amène à penser que tout au long de ces activités de modélisation, les élèves ont développé une pensée plus complexe, ce qui les amène à donner des exemples plus élaborés dans plus de dimensions. Dans la réponse à la troisième question, nous pouvons observer la notation fonctionnelle et l'utilisation de paramètres, ce qui nous montre que ce groupe a développé une notation plus formelle. Ce que nous trouvons un peu étrange, c'est le x_0 et le y_0 pour indiquer un décalage puisque cette notation est couramment utilisée pour des positions. Nous pensons que c'est peut-être parce que ce sont des sujets que les élèves ne connaissent pas et qu'ils utilisent des symboles qui leur sont en quelque sorte familiers.

Comme le groupe 1, les étudiants de l'équipe 2 activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] avec des éléments des trois paradigmes (CI, CII et CIII) en répondant aux questions 1, 2, 3 et 4 (figure 5.90). C'est-à-dire que pour avoir une idée du mouvement

qui est généré lorsque les deux mouvements sont combinés, un des étudiants fait un processus d'*instrumentalisation* [1] en construisant un artefact matériel avec l'union d'un spinner et d'un crayon (ce qui lui permet de contrôler à la fois le MRU et le MCU). Dans l'enregistrement de la session, nous avons observé que cet artefact aide les élèves à *coder* mentalement les variables impliquées [2] et à répondre à la question 2 en donnant des représentations de phénomènes. Dans cette section, il est important de mentionner que dans l'équipe 2, une idée de pouvoir faire le mouvement tridimensionnel surgit, après avoir écrit l'exemple de l'hélicoptère, qu'ils illustrent avec l'artefact spinner-crayon (les élèves génèrent un aller-retour entre la *genèse instrumentale* et la *sémiotique*, que nous ne représentons qu'avec les doubles flèches dans le diagramme). Cet artefact les amène à mentionner que le graphique de telle situation serait une hélice (ils abandonnent l'idée d'un MP tridimensionnelle car ils ne savent pas comment ils peuvent faire les graphiques et ils continuent avec le mouvement en deux dimensions). Nous pouvons observer que lorsqu'ils répondent à ces questions, les étudiants montrent une évolution dans leur discours [3] qui se reflète dans les réponses 2, 3 et 4, où les étudiants écrivent les phénomènes qui peuvent présenter cette combinaison de mouvements, les caractéristiques qui rappellent du MRU et du MCU (avec des éléments de **CII** et **CIII**) et en donnant les 3 variantes qui peuvent être produites dans la combinaison de mouvements (CI).

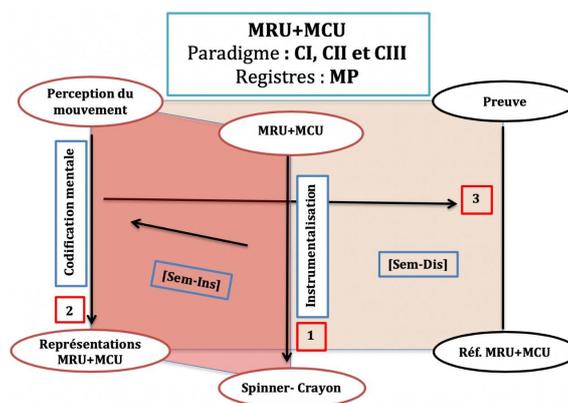


FIGURE 5.90 – Réponses 1, 2, 3 et 4 (MRU+MCU), ETC , groupe 2

Les élèves ont utilisé deux matériaux différents, un spinner attachée à un bâton en bois et une voiture-jouet. Avec ces matériaux, ils ont réalisé les trois variantes du mouvement : $V_{MRU} < V_{MCU}$ (figure 5.91a), $V_{MRU} > V_{MCU}$ (figure 5.91b), $V_{MRU} = V_{MCU}$ (figure 5.91c).

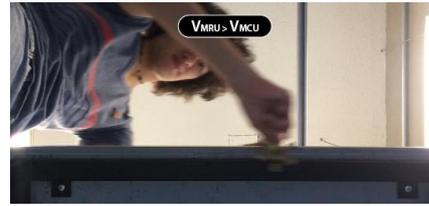
(a) $V_{MRU} < V_{MCU}$, groupe 2(b) $V_{MRU} > V_{MCU}$, groupe 2(c) $V_{MRU} = V_{MCU}$, groupe 2

FIGURE 5.91 – Les trois variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 2

Analyse des trois variantes des vitesses

Pour effectuer le mouvement où la vitesse du MRU est supérieure à la vitesse du MCU et où la vitesse du MRU est inférieure à la vitesse du MCU, le groupe 2 utilise l'artefact spinner-bâton de bois (ils changent le crayon pour le bâton de bois parce qu'ils peuvent mieux le coller) car avec cet artefact, ils peuvent percevoir la vitesse de chaque mouvement pour atteindre les caractéristiques souhaitées. En exécutant ces deux variantes de la combinaison des mouvements, les élèves activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de CI (figure 5.92a). C'est-à-dire, les élèves génèrent un processus d'*instrumentalisation* [4] avec l'artefact spinner-bâton de bois avec lequel ils parviennent à *coder* les variables qu'ils ont en tête pour atteindre les registres de représentations MP [5]. Lors de l'obtention des registres MP, les élèves les comparent avec le *référentiel théorique* qu'ils ont du MRU et du MCU [6] et ils décident de travailler avec ces représentations parce qu'elles répondent aux caractéristiques qu'ils considèrent comme bonnes. L'utilisation de Tracker établit un processus d'*instrumentation* [7] lors du *codage* des registres MP en registres TV et GT [8] (figure 5.92b).

Pour les déplacements où les vitesses du MRU et du MCU sont égales, les élèves décident d'utiliser une voiture-jouet. Pour ce groupe, contrairement à l'équipe 1, il est clair que s'ils placent un point de référence sur le contour de la roue, ce point aura une vitesse tangentielle égale à la vitesse linéaire de la voiture et, pour cette raison, ils n'effectuent aucun contrôle pour vérifier que cela se produit réellement. En ce sens, les élèves initient un processus d'*instrumentalisation* [4i] qui les conduit à la *codification*

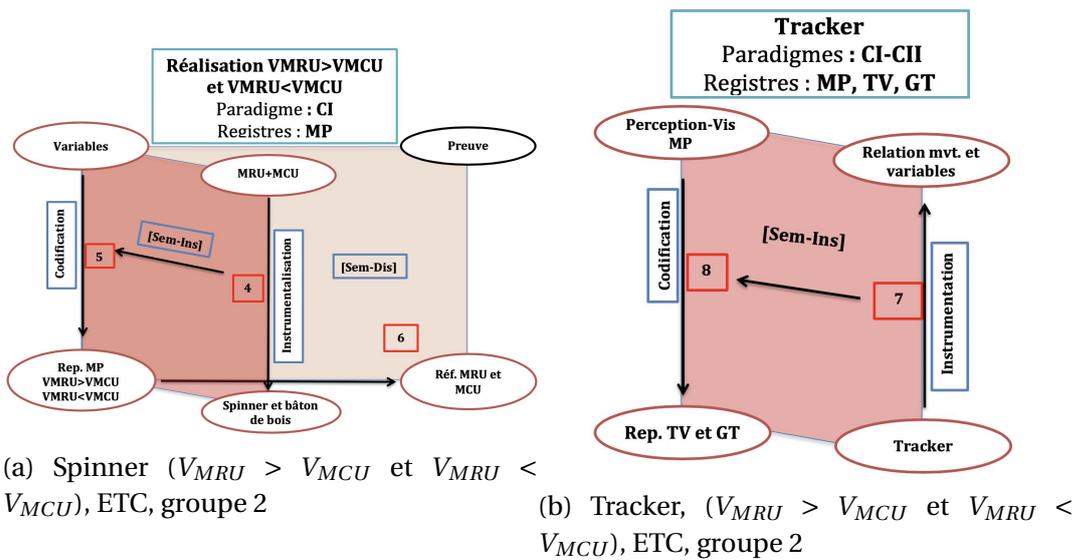


FIGURE 5.92 – Deux variantes des vitesses (MRU+MCU), ETC, groupe 2

des variables qu'ils ont en tête, en obtenant le registre **MP** [5i] qu'ils acceptent après l'avoir comparé à leur référentiel théorique [6i] (figure 5.93a). En utilisant Tracker, le groupe 2 génère un processus d'*instrumentation* [7i] qui *codifie* le registre **MP** dans les registres **TV** et **GT** [8i] en les ramenant à **CII** (figure 5.93b).

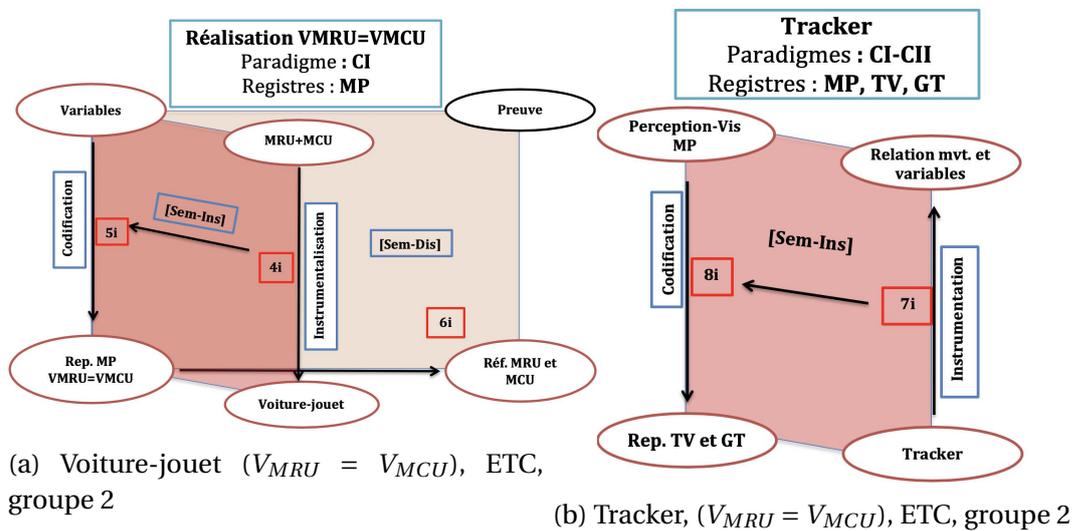


FIGURE 5.93 – MRU=MCU, ETC, groupes 2

Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. Quels graphiques devez-vous prendre en compte dans le MRU et le MCU? pourquoi?

6. Faites les graphiques et les ajustements nécessaires dans GeoGebra, tracez les graphiques et copiez les équations que vous pouvez obtenir avec GeoGebra.

7. Quelle est la forme du graphique y vs t ? pourquoi il a cette forme?

a) Quelles données sur les mouvements pouvez-vous obtenir grâce à l'ajustement que GeoGebra vous donne?

Ce groupe n'a pas sauvegardé les données de l'activité 4 dans l'USB, pour cette raison, il nous a été impossible de mettre les captures d'écran de Tracker et GeoGebra. Cependant, ils ont fait quelques dessins des graphiques, ils ont répondu le guide de travail et nous avons les enregistrements des sessions pour compléter l'analyse. Les réponses aux questions 5, 6 et 7 sont dans la figure 5.94.

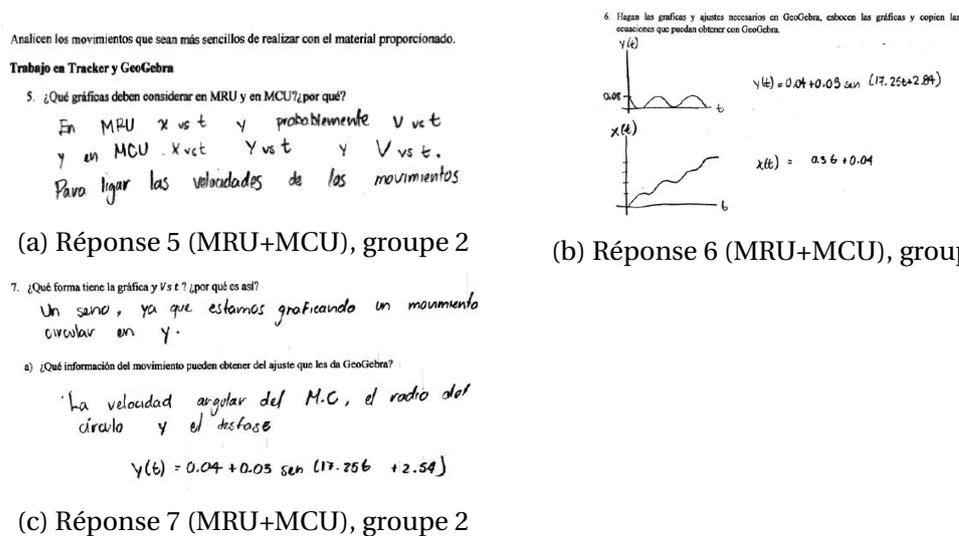


FIGURE 5.94 – Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 2

Réponse en français 5. Dans le MRU x vs t et probablement v vs t et dans MCU x vs t y vs t et v vs t . Pour relier les vitesses des mouvements .

7. Un sinus, puisque nous sommes en train de tracer un mouvement circulaire dans y .

a) La vitesse angulaire du M.C (Mouvement circulaire) le rayon du cercle et le décalage

Analyse des réponses 5, 6 et 7

Dans ces questions, Les élèves activent le plan [Sem-Dis] et [Sem-Ins] de CII (figures 5.95a et 5.95b). Dans la question 5, les étudiants génèrent un décodage [9] des graphiques que Tracker peut fournir et, ils décident de prendre en compte les graphiques x vs t et v vs t du MRU et les graphiques x vs t , y vs t et v vs t du MCU, en arguant du fait qu'ils peuvent relier les vitesses [10]. Dans la question 6, nous avons observé, dans les enregistrement de séance, que les étudiants génèrent un processus d'*instrumentation* avec GeoGebra [11] qui origine un processus de *codification* [12] avec lequel ils obtiennent tous les graphiques (du MRU et de la combinaison du MRU+MCU) x vs t , y vs t , x vs y (GG) mais seulement les équations des graphiques du MRU et le graphique y vs t du MCU (AS). Avec la question 7, les étudiants décodent le registre de représentation AS du MCU $y(t)$ et ils obtiennent la vitesse angulaire du MCU, le rayon du cercle et le décalage (information du MCU) [13].

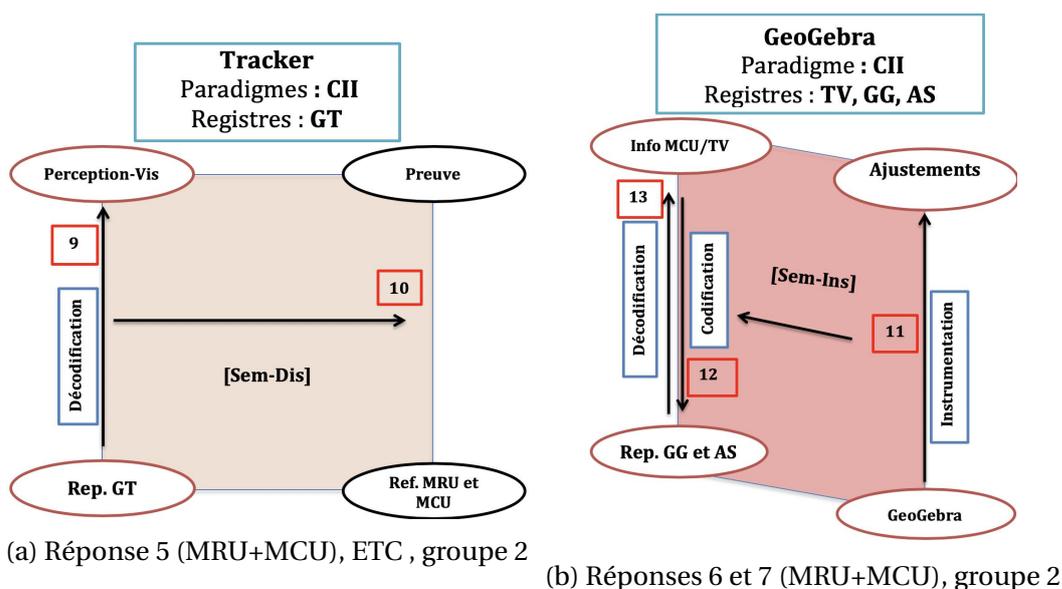


FIGURE 5.95 – Réponses 5,6 et 7 (MRU+MCU), groupe 2

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 8. Faites le graphique x vs t Pourquoi n'est-il pas linéaire? Essayez de faire l'ajustement

a) Combien de mouvements faut-il prendre en compte sur l'axe des x ?

b) Si vous connaissez la distance qui avance en x dans le MRU et la distance qui avance (ou régresse) dans le MCU, quelle serait la fonction qui calcule la distance totale de déplacement du point que vous étudiez ?

c) Avec les connaissances dont vous disposez jusqu'à maintenant, pouvez-vous ob-

tenir l'équation paramétrique de x ? Ecrivez-le et faites le ajustement dans GeoGebra pour vérifier s'il correspond bien à vos données expérimentales (esquissez le graphique et sauvegardez-le sous votre USB dans le dossier correspondant).

9. Quelle est la grandeur de la vitesse tangentielle du point que vous analysez? (obtenir l'équation générale de la vitesse et la valeur de la vitesse)

Les élèves ont répondu aux questions 8 et 9 (figure 5.96).

8. Grafiquen x vs t . ¿Por qué no es lineal? Intenten hacer el ajuste

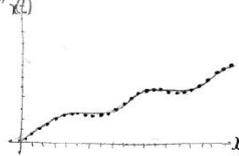
No es lineal porque es parte de un MRU y MCU
La función coseno tiene una pendiente

a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x ?
El MCU y MRU.

b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?
Función del MCU = $x(t) = 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.84)$
Función del MRU = $0.3t + 0.04$
Las sumamos y queda

AS $x(t) = 0.3t + 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.84) + 0.04$
Se eliminan por ser el ajuste inicial que está mejor

c) ¿Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ?
Escribanla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbozen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente)



ES $x(t) = 0.3t + 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.84)$

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtienen la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

$x(t) = 0.3t + 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.84)$
 $x'(t) = 0.3 - 0.05 \sin(17.25t + 2.84)$
 $y(t) = 0.04 + 0.03 \sin(17.25t + 2.84)$
 $y'(t) = 0.03 \cos(17.25t + 2.84)$

$v_x = x'(t)$ $v_y = y'(t)$ $v = 0.3$
 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $r = 0.03$
 $\omega = 17.25$ $C = 2.84$

$v = \sqrt{(C\omega - r\omega \sin C\omega t)^2 + (r\omega \cos C\omega t)^2}$
 $v = \sqrt{C^2\omega^2 - 2C\omega r \sin C\omega t + r^2\omega^2 \sin^2 C\omega t + r^2\omega^2 \cos^2 C\omega t}$
 $v = \sqrt{C^2\omega^2 - 2C\omega r \sin C\omega t + r^2\omega^2}$
 $v = \sqrt{2C^2\omega^2 - 2C\omega r \sin C\omega t + r^2\omega^2}$
 $v = \sqrt{2(C^2\omega^2 - C\omega r \sin C\omega t)}$
 $v = \sqrt{2C\omega(C - r \sin C\omega t)}$
 $v(t) = 0.3 \sqrt{2(1 - \sin(17.25t + 2.84))}$

$v_m = 0.39 \text{ m/s}$
sacada con GeoGebra a partir del promedio de velocidades instantáneas

(a) Réponse 8 (MRU+MCU), groupe 2

(b) Réponse 9 (MRU+MCU), groupe 2

FIGURE 5.96 – Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 2

Réponse en français

8. Elle n'est pas linéaire parce qu'elle fait partie d'un MRU et d'un MCU. La fonction cosinus a une pente.

8 a) Le MCU et le MRU

8 b) Nous les sommions et il reste; on l'élimine pour être l'ajustement initial

Analyse des réponses 8 et 9 Avant de commencer l'analyse en utilisant l'ETC, nous pensons qu'il est important de noter qu'à la question 8b, les élèves écrivent explicitement qu'ils vont ajouter les fonctions dues à la composition des mouvements. Cela confirme que le groupe 2, depuis le début, était clair que, d'une manière ou d'une autre, les fonctions devraient être ajoutées (parce qu'ils ont écrit $MRU \pm MCU$). Nous continuons également à confirmer que ce groupe utilise la notation fonctionnelle $x(t)$, $y(t)$

d'une manière familière pour exprimer les fonctions et la dépendance des variables concernées.

En continuant l'analyse à l'aide de l'ETC. A partir du décodage effectué à la question 7, les élèves de l'équipe 2 parviennent à répondre à la question 8 en générant une **codification** [14] des données des registres de représentation AS (du MRU et du MCU) et ils parviennent à générer la représentation AS $x(t)$ de la combinaison des mouvements (MRU+MCU). L'équation obtenue est introduite dans GeoGebra (**instrumentation** [15]) et prouve de manière pragmatique qu'elle s'adapte bien à leurs points d'expérimentation [16] (figure 5.97a). Les élèves répondent à la question 9 à partir du résultat de la question 8. Par un processus algébrique dans CIII, ils obtiennent la vitesse tangentielle du point qu'ils analysent [17] (figure 5.97b).

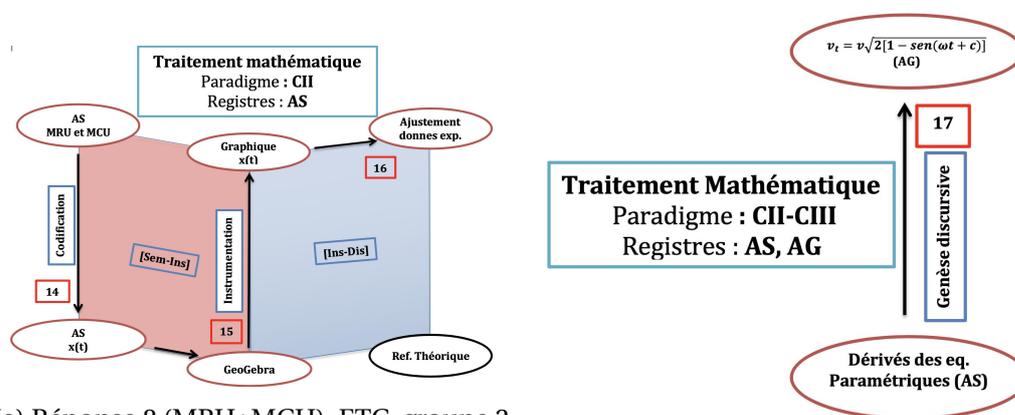


FIGURE 5.97 – Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 2

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 10. A partir de toutes les analyses ci-dessus, pouvez-vous trouver les fonctions paramétriques générales d'une MRU+MCU (y compris les trois cas), quelles seraient-elles ?

11. Pouvez-vous obtenir $y(x)$ ou $x(y)$? sont-ils des fonctions ? Justifiez votre réponse

Les élèves ont répondu aux questions 10 et 11 (figure 5.98).

Analicen los otros casos. Realicen los mismos pasos anteriores

10. A partir de todo el análisis anterior, ¿pueden llegar a las funciones paramétricas generales de un MRU+MCU (que incluyan los tres casos)? ¿cuáles serían?

AG

Ecuaciones generales:

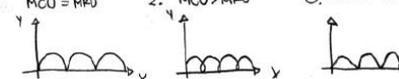
$$x(t) = V_0 t \pm r \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \sin(\omega t)$$

MRU MCU

- $V_0 = \omega r$
- $V_0 < \omega r$
- $V_0 > \omega r$

1. MCU = MRU 2. MCU > MRU 3. MCU < MRU



(a) Réponse 10 (MRU+MCU), groupe 2

11. ¿Pueden obtener $y(x)$ o $x(y)$? ¿son funciones? Justifiquen su respuesta

$$x(t) = V_0 t \pm r \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \sin(\omega t)$$

$$y = r \sin(\omega t)$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\omega t)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) = \omega t$$

$$t = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}$$

$$x\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}\right) = V_0 \left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}\right) \pm r \cos\left(\omega \cdot \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}\right)$$

$$x(y) = \frac{V_0 \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega} \pm r \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$= \frac{r \omega \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega} \pm r \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$= r \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \pm r \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$= r \left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \pm \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)\right)$$

(b) Réponse 11 (MRU+MCU), groupe 2

FIGURE 5.98 – Réponses 10 et 11, MRU+MCU, groupe 2

Analyse des réponses 10 et 11

Dans la réponse 10, les élèves donnent les équations paramétriques générales et écrivent les conditions qui doivent être données pour obtenir les trois variantes des mouvements. Nous pensons que cela nous montre l'évolution qu'ils ont développée tout au long de ces activités. Dans la question 11, bien qu'ils fassent une inversion de fonction, aucune vérification des conditions, comme dans le groupe 1, n'est observée ($-1 < \frac{y}{r} < 1$), ce qui indique qu'ils n'ont toujours pas une idée claire de la notion de fonction.

Dans les réponses aux questions 10 et 11, les élèves activent le plan [Sem-Dis] de CIII (Figure 5.99). Nous observons qu'ils écrivent les équations paramétriques générales (AG), ainsi que de dessins des trois types de cycloïdes, activant la *genèse sémiotique* [18]. Enfin, les étudiants tentent d'obtenir l'équation de trajectoire (à la question 11) où nous observons qu'il n'y a pas une bonne compréhension de la notion de fonction car il faut vérifier que l'argument est dans $[-1, 1]$. La formule trouvée n'est pas valide lorsque $V_t MCU > V MRU$. Son développement active la *genèse discursive* [19] (cependant, ils font des erreurs en écrivant l'équation paramétrique $y(t)$) et ceux mentionnés ci-dessus.

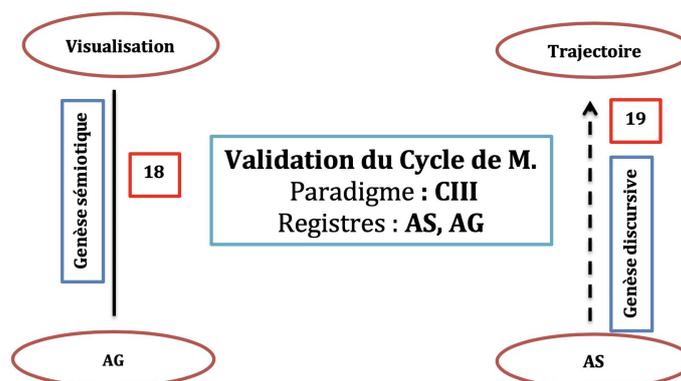


FIGURE 5.99 – Réponses 10 et 11 (MRU+MCU), ETC, groupe 2

Résumé de l'activité 4, groupe 2 (figures 5.100 et 5.101).

Afin d'imaginer comment ils exécuteraient la combinaison de mouvements, les élèves collent un spinner à un crayon (*instrumentalisation* [1]), ce qui leur fait imaginer différents phénomènes qui peut présenter ce mouvement (à partir d'un processus de codage) [2]. Ces processus leur font noter les caractéristiques de chaque mouvement et les 3 variantes que peuvent avoir les vitesses (dimension discursive) [3] (CI). Pour la réalisation du mouvement, le groupe 2 fait deux des variantes du mouvement avec le spinner ($V_{MRU} < V_{MCU}$ et $V_{MRU} > V_{MCU}$) en générant un processus d'*instrumentalisation* [4] qui déclenche une *codification* vers le MP [5] que les élèves acceptent en accord avec leur référence théorique [6] (CI). Ces registres du MP sont analysés avec GeoGebra (*instrumentation* [7]) pour obtenir les représentations **TV** et **GT** (*codage* [8], CI-CII). Dans le cas où les vitesses sont égales, les élèves utilisent une voiture jouet et analysent un point sur le pneu, générant les mêmes processus que l'artefact précédent (deuxième caisse de la figure 5.101). Les élèves *décodent* ensuite les registres GT pour choisir les graphiques qu'ils ont utilisés [9] et justifient brièvement leur réponse [10] (CII). Avec GeoGebra (*instrumentation* [11]), ils parviennent à obtenir les registres **GG** et certains **AS** [12], mais avec le *décodage* des deux, les étudiants arrivent à obtenir des informations du MCU [13] (CII), qu'ils utilisent ensuite pour obtenir $x(t)$ [14]⁶. Ils introduisent cet registre ($x(t)$) dans GeoGebra (*instrumentation* [15]) et prouvent que leurs données correspondent à la représentation **AS** et **GT** qu'ils ont déduite [16] (CII). En ce qui concerne le traitement mathématique, les élèves ont pu arriver à la représentation générale de la vitesse tangentielle afin de *prouver* que

6. ils suivent le même développement que l'équipe 1

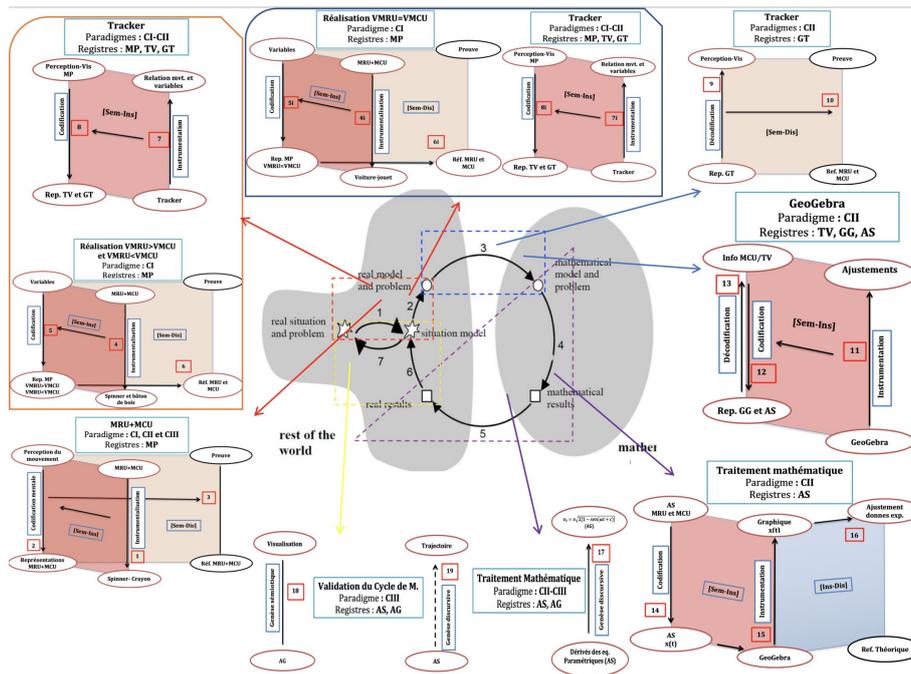


FIGURE 5.101 – Analyse globale, activité 4 (MRU+MCU), groupe 2

5.6.3 Groupe 3

Phases 1 et 2. Question(s) et/ou consigne(s) : 1. Comment exécuteriez-vous un mouvement qui combine MRU et MCU?

2. Quels sont les phénomènes que vous identifiez qui présentent cette combinaison de mouvements?

3. Notez tout ce que vous savez sur le MRU et le MCU (équations, caractéristiques, diagrammes....) Aide : tirez parti de données que vous avez obtenues lors d'activités précédentes.

4. Considérant que vous avez une composition d'un MRU et d'un MCU, quelles variantes possibles peuvent avoir les vitesses du phénomène global? Expliquez comment vous obtiendriez chacune des combinaisons suivantes

Les élèves ont répondu aux questions 1, 2, 3 et 4 (figure 5.102) avant d'effectuer le mouvement combiné (MRU+MCU).

1. ¿Cómo realizar un movimiento que combine el MRU y el MCU?
 1. Con el objeto del experimento pasado (reguleta) lo desplazamos sobre el contorno de una superficie plana (mesa), a la vez que este gira.

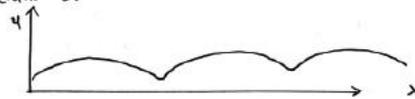
(a) Réponse 1, MRU+MCU, groupe 3

2. ¿Qué fenómenos identifican que presenten esta combinación de movimientos?
 - Una trena o rueda cuando avanzan
 - La hélice de un helicóptero cuando recorre una trayectoria
 - Toldado cuando rompes el material
 - Tornado cuando recorre una distancia
 - Huracán
 - Yo-yo cuando va bajando
 - Trompo cuando sigue camino
 - La tierra cuando gira alrededor del sol
 - Ventilador cuando se mueve

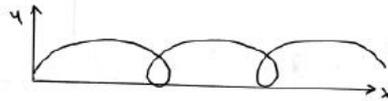
(b) Réponse 2, MRU+MCU, groupe 3

4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones

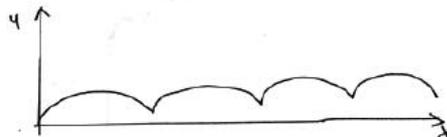
• La velocidad del movimiento circular es menor



La velocidad del movimiento rectilíneo es menor



• Velocidad constante en las 2, son iguales



(d) Réponse 4, MRU+MCU, groupe 3

3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas...)
 Ayuda: apóyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores

MRU

$$v = \frac{d}{t}$$

La velocidad es constante

A la magnitud de la velocidad recibe el nombre de la rapidez

MCU

$$\omega = r \cdot \theta$$

$$v = r \cdot \omega$$

$$a = r \cdot \omega^2$$

La velocidad total es constante

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

En 'x' y 'y' es constante

(c) Réponse 3, MRU+MCU, groupe 3

FIGURE 5.102 – Réponses 1, 2, 3 et 4, MRU+MCU, groupe 3

Réponse en français

1. Nous avons un mouvement circulaire et nous l'attachons à une base qui a un mouvement rectiligne ou nous pourrions utiliser une roue quand elle avance en tournant.

2. -Une pneu ou une roue pour avancer

-L'hélice d'un hélicoptère lorsqu'il parcourt un chemin

-La Perceuse lorsque il casse le matériau

-La tornade lorsqu'elle parcourt une certaine distance

-L'ouragan lorsqu'il parcourt une certaine distance

-Le yo-yo quand il descend

-La toupie lorsqu'elle suit un trajet

-La terre lorsqu'elle tourne autour du soleil

-Le ventilateur en mouvement

3. MRU :

-La vitesse est constante

-La grandeur de la vitesse s'appelle la magnitude de la vitesse.

MCU :

-La vitesse totale est constante $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$

-En x et en y il n'est pas constant

4. -La vitesse du mouvement circulaire est inférieur

-La vitesse du mouvement rectiligne est inférieur

-Vitesse constante dans les 2 sont égales

Analyse des réponses 1, 2, 3 et 4

Comme prévu, dans les réponses aux questions 1, 2, 3 et 4, les élèves activent les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] avec des éléments de **CI**, **CII** et **CIII**. En d'autres termes, lorsqu'ils répondent à la question 1, ils prennent comme référence l'expérience des activités précédentes. Dans ce cas, ils prennent un spinner et placent un bâton sur son axe de rotation, générant un processus d'*instrumentalisation* [1]. Ils le déplacent horizontalement en même temps que le spinner tourne. Cela leur permet de visualiser le type de mouvement demandé par l'activité, ce qui déclenche un processus de *codification* [2] qui les amène à générer différentes représentations des phénomènes, décrits

en LN dans la réponse à la question 2, figure 5.103. Dans les exemples de mouvement combiné, les élèves décrivent des situations en 3D que nous, en tant que chercheurs, avons pensé qu’elles pourraient émerger, telles que « La perceuse lorsque il casse le matériau »; le codage qui est généré, en raison du comportement de l’artefact (spinner et bâton de bois), leur fait penser à un mouvement en trois dimensions, ce qui rendrait une trajectoire d’une hélice, et dans le mouvement des planètes « La terre lorsqu’elle tourne autour du soleil » qui est une composition de deux mouvements circulaires, c’est une idée très intéressante car elle montre que ce groupe réfléchit à différentes variantes de mouvement en considérant des trajectoires non linéaires. Ces réponses nous montrent l’évolution de la pensée des élèves, qui ne se limite pas à deux dimensions, et à des mouvements de base. En prenant comme référence les activités précédentes et les réponses 1 et 2, les élèves activent la **dimension discursive** [3] à partir du sémiotique parce que ils réalisent un travail iconique en dessinant les graphiques de trajectoires (plan $x y$) des mouvements décrits. Ce groupe montre une meilleure identification des trajectoires par rapport aux autres groupes. Dans cette quatrième question, la réponse, bien qu’ils décrivent correctement les caractéristiques que doivent avoir les vitesses individuelles, dans la combinaison des mouvements, nous n’avons pas trouvé de preuve, ni dans la réponse écrite, ni dans l’enregistrement, de la façon dont ils les ont déterminées. Nous pensons que la réponse est basée sur la visualisation que les élèves ont faite des différents phénomènes et ils ont donc pu identifier correctement les trajectoires.

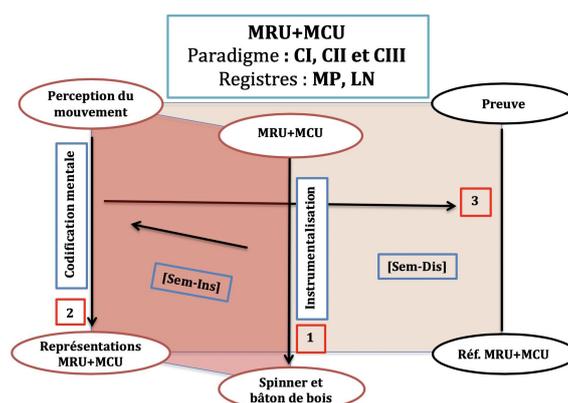


FIGURE 5.103 – Réponses 1, 2, 3, et 4 (MRU+MCU), ETC, groupe 3

Les élèves ont utilisé deux matériaux différents (comme les autres groupes), un spinner attaché à un bâton en bois et une bouteille d’eau. Avec ces matériaux, ils ont réalisé les trois variantes du mouvement, précisant que les étudiants de ce groupe

prennent, également, en compte la vitesse tangentielle du mouvement circulaire dans la notation V_{MCU} : $V_{MRU} < V_{MCU}$ (figure 5.104a), $V_{MRU} > V_{MCU}$ (figure 5.104b), $V_{MRU} = V_{MCU}$ (figure 5.104c).



(a) $V_{MRU} < V_{MCU}$, groupe 3



(b) $V_{MRU} > V_{MCU}$, groupe 3



(c) $V_{MRU} = V_{MCU}$, groupe 3

FIGURE 5.104 – Les trois variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 3

Analyse des trois variantes des vitesses

Pour effectuer les mouvements, lorsque la vitesse du MRU est inférieure à celle du MCU et dans le cas contraire, les élèves utilisent un spinner avec un bâton en bois incorporé dans l'axe de rotation (artefact matériel). Comme il est facile à utiliser, cet artefact leur permet de percevoir clairement les deux possibilités du mouvement en activant les plans [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de CI (5.105a). C'est-à-dire, lors de la réalisation des mouvements, un processus d'*instrumentalisation* [4] et de *codification* des variables, identifiées dans leur esprit, est présent [5] de telle sorte que lorsque les étudiants ont le MP, ils le mettent en contraste avec la représentation qu'ils ont du référentiel théorique des MRU et MCU, produit des activités 1 et 3 réalisées indépendamment [6]. Après avoir fait plusieurs répétitions pour s'assurer que l'enregistrement de mouvement a les meilleures conditions, les élèves commencent l'analyse avec Tracker, qui détermine un processus d'*instrumentalisation* [7] lors du *codage* du registre de représentation MP vers les registres TV et GT [8] (processus de CI à CII) (figure 5.105b).

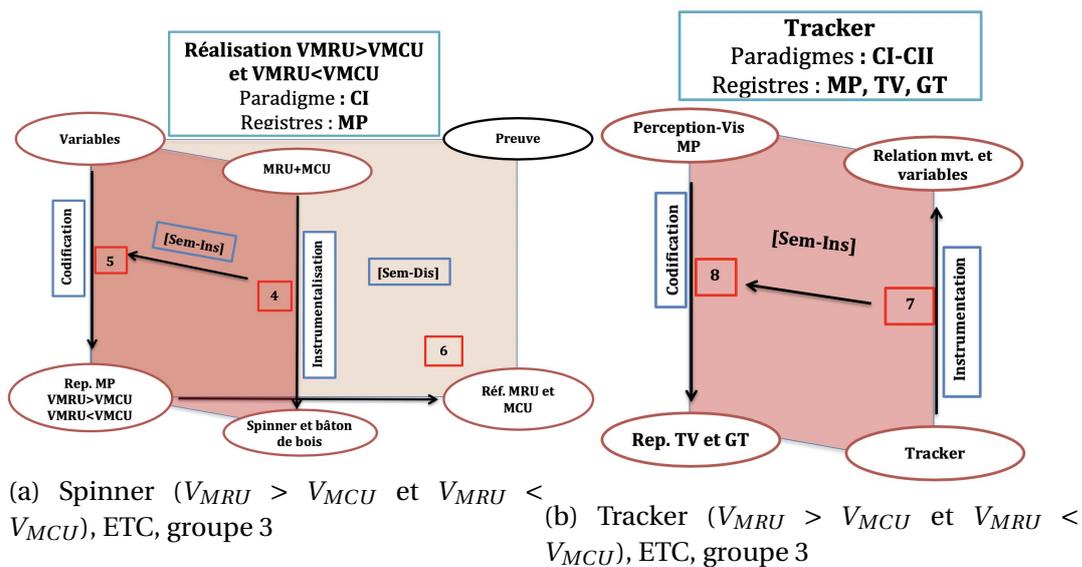
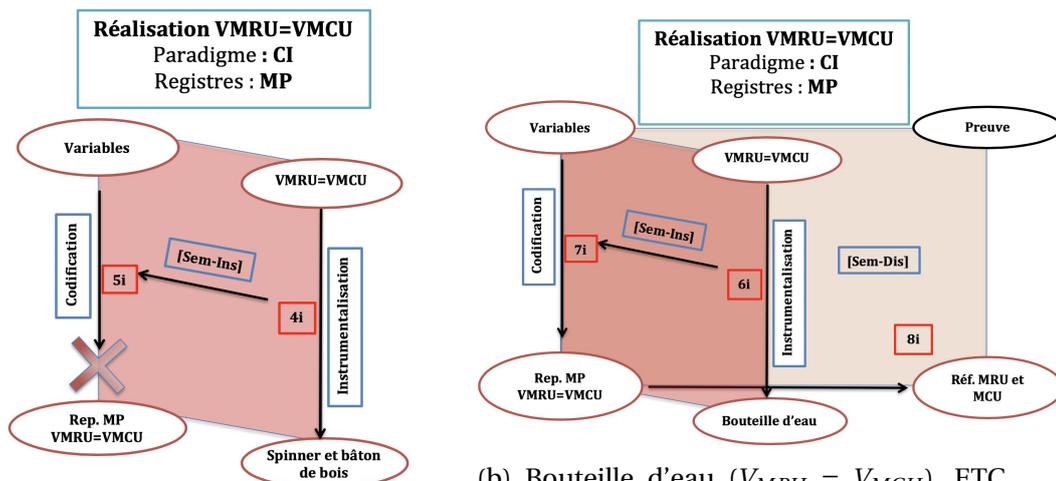
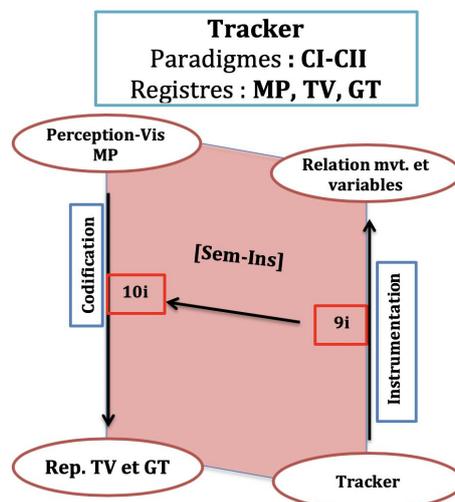


FIGURE 5.105 – Les deux variantes des vitesses, MRU+MCU, groupe 3

Lorsque les élèves essaient de faire le mouvement combiné, avec le spinner et le bâton de bois (*instrumentalisation* [4i]), de manière à ce que la vitesse du MRU soit la même que celle du MCU, ils réalisent qu'il est très compliqué de déplacer le spinner avec la même vitesse de rotation, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas coder les variables du MP souhaitées [5i]. En conséquence, les élèves choisissent de faire rouler une bouteille d'eau sur la table. Nous trouvons cette situation intéressante parce que nous avons constaté, de manière répétée, dans les différentes activités et avec les différents groupes, que le milieu (la nature des artefacts matériels et le lieu physique) intervient dans la difficulté ou la facilité pour réaliser le mouvement et obtenir la relation des variables recherchées. Nous pensons que cette situation est importante car elle les sensibilise aux phénomènes qui peuvent affecter la relation des variables en jeu. Le groupe 3 place son point de référence sur le bord extérieur de la base, générant ainsi un nouveau processus d'*instrumentalisation* [6i], avec lequel ils parviennent à coder les variables MP [7i] de manière adéquate, dans le cas de vitesses égales (parce le MP a été comparé à leur référentiel [8i]). Ensuite, à l'aide de Tracker, les étudiants génèrent un processus d'*instrumentation* [9i] qui les aide à coder les registres MP à TV et GT en les replaçant dans CII [10i] (figure 5.106).

(a) Spinner ($V_{MRU} = V_{MCU}$), ETC, groupe 3 groupe 3(b) Bouteille d'eau ($V_{MRU} = V_{MCU}$), ETC,(c) Tracker ($V_{MRU} = V_{MCU}$), ETC, groupe 3FIGURE 5.106 – $V_{MRU} = V_{MCU}$, groupe 3

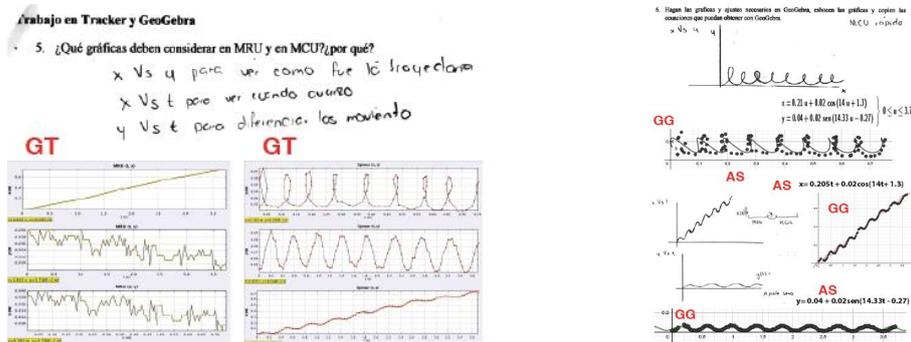
Phase 3. Question(s) et/ou consigne(s) : 5. *Quels graphiques devez-vous prendre en compte dans le MRU et le MCU? pourquoi?*

6. *Faites les graphiques et les ajustements nécessaires dans GeoGebra, tracez les graphiques et copiez les équations que vous pouvez obtenir avec GeoGebra.*

7. *Quelle est la forme du graphique y vs t ? pourquoi il a cette forme?*

a) *Quelles données sur les mouvements pouvez-vous obtenir grâce à l'ajustement que GeoGebra vous donne?*

Les élèves ont répondu aux questions 5, 6 et 7 (figure 5.107).



(a) Réponse 5 (MRU+MCU), groupe 3

(b) Réponse 6 (MRU+MCU), groupe 3

7. ¿Qué forma tiene la gráfica y V vs t ? ¿por qué es así? MCU. Como tiene una forma de seno, porque es el objeto que va orbitando y viajando en forma de círculo y a su vez va girando.
- a) ¿Qué información del movimiento pueden obtener del ajuste que les da GeoGebra?
- La paramétrica
 - la información de x y y
 - el movimiento circular que recorrió
 - La forma del movimiento

(c) Réponse 7 (MRU+MCU), groupe 3

FIGURE 5.107 – Réponses 5, 6 et 7, MRU+MCU, groupe 3

Réponse en français

5. x vs y pour voir comment le chemin fonctionne; x vs t pour voir comment elle a avancé; y vs t pour différencier les mouvements

7. A une forme sinus parce que c'est l'objet qui monte et descend sous la forme d'un cercle et qui tourne.

5 a). L'équation paramétrique; l'information de y ; le mouvement circulaire qu'il a parcouru la forme du mouvement

Analyse des réponses 5, 6 et 7

Dans la question 5, les élèves active le plan [Sem-Dis] de CI (figure 5.108a), en générant un *décodage* [9] des graphiques qu'ils ont obtenus de Tracker et en indiquant que les graphiques qu'ils doivent considérer sont x vs y , x vs t , y vs t . La justification, bien que brève, active la dimension discursive [10] en déclarant que le premier graphique est « pour voir comment la trajectoire s'est déroulée », le deuxième « pour voir les progrès qu'elle a réalisés » et le troisième « pour différencier les mouvements ». L'enregistrement de la séance montre que les arguments sont appuyés par la perception de la situation réelle au CI. Le dialogue qui en témoigne :

Espagnol	Français
E3 : Entonces, ¿Qué gráficas debemos considerar?	E3 : Alors, quels graphiques devons-nous considérer?
E1 : Yo digo que x vs y pero aún no se bien por qué	E1 : Je dis x contre y mais je ne sais toujours pas pourquoi
E3 : Pues para ver cómo fue la trayectoria, ¿qué más?	E3 : Eh bien, pour voir comment était la trajectoire, quoi d'autre?

Les mêmes enregistrements montrent, une activation du plan [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de CI et CII (figure 5.108b). C'est-à-dire, a émergé un processus d'*instrumentation* avec GeoGebra [11] et le *codage* consécutif [12] lors de l'obtention des graphiques et des équations (AS) du MRU et celui généré avec la combinaison des MRU+MCU (GG). Encore une fois, ils font un travail iconique de dessin des graphiques que la question 6 leur demande de faire, mais, contrairement aux attentes, ils ne copient pas les équations générées par GeoGebra (AS) dans le guide de travail (mais dans l'enregistrement de session et dans les graphiques réalisés dans GeoGebra ils apparaissent, comme le montre la figure 5.107b). Pour répondre à la question 7, ils activent la *genèse discursive* [13] en affirmant que le graphe « est sinusoïdal, car l'objet monte et descend en forme de cercle... » et en écrivant les informations qu'ils ont pu obtenir grâce à l'ajustement de GeoGebra (figure 5.107c).

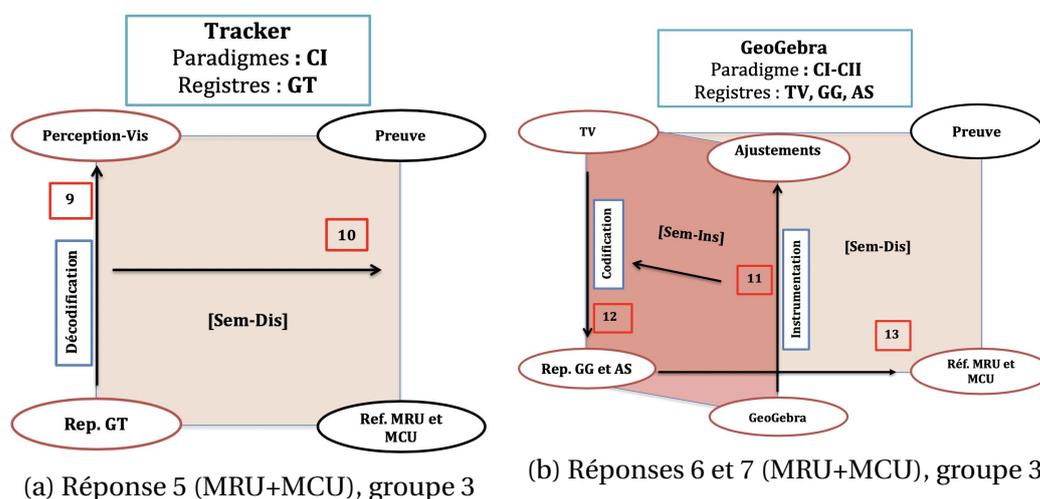


FIGURE 5.108 – Réponses 5, 6 et 7 (MRU+MCU), ETC, groupe 3

Phases 4 et 5. Question(s) et/ou consigne(s) : 8. Faites le graphique x vs t Pourquoi n'est-il pas linéaire? Essayez de faire l'ajustement

a) Combien de mouvements faut-il prendre en compte sur l'axe des x ?

b) Si vous connaissez la distance qui avance en x dans le MRU et la distance qui avance (ou régresse) dans le MCU, quelle serait la fonction qui calcule la distance totale de déplacement du point que vous étudiez?

c) Avec les connaissances dont vous disposez jusqu'à maintenant, pouvez-vous obtenir l'équation paramétrique de x ? Ecrivez-le et faites le ajustement dans GeoGebra pour vérifier s'il correspond bien à vos données expérimentales (esquissez le graphique et sauvegardez-le sous votre USB dans le dossier correspondant).

9. Quelle est la grandeur de la vitesse tangentielle du point que vous analysez? (obtenir l'équation générale de la vitesse et la valeur de la vitesse)

Les élèves ont répondu aux questions 8 et 9 (figure 5.109).

8. Grafiquen x Vs t . ¿Por qué no es lineal? Intenten hacer el ajuste

Porque es un movimiento circular, cuando está girando en la parte superior el movimiento se vea y pareciera que frenaba pero en el momento en el cual el movimiento está girando en la parte inferior se acelera, es por eso que la gráfica no es lineal y tiene unas pequeñas curvaturas.

a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x ?
Se consideran 2 movimientos, ya que se tienen en cuenta A y B dimensiones.

b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?
El MCU usa en sentido contrario al MRU, por lo que en vez de suma, lo restamos.
MRU - MCU
Cambiamos el seno por el coseno porque avanzamos en sentido contrario al movimiento en x .

c) Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ?
Escribanla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbozen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente).
Si la pasamos a radianes: **AS**
 $x(t) = 0.56t + 0.04 - 0.03 \cos(7.87t - 2.45)$

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtener la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$u(t) = 0.04 + 0.03 \sin(7.87t - 2.45)$
 $u(t) = 0.03(7.87) \cos(7.87t - 2.45)$

$x(t) = 0.56t + 0.04 - 0.03 \cos(7.87t - 0.87)$ desfase $C_1 = 2.45$
 $x'(t) = 0.56 - 7.87(0.03) [-\sin(7.87t - 0.87)]$ $C_2 = 0.87$
 $x'(t) = 0.56 + 7.87(0.03) \sin(7.87t - 0.87)$

$v = \sqrt{[r(\omega) \cos(\omega t - C)]^2 + [v_x + \omega r \sin(\omega t - C)]^2}$
 $v = \sqrt{r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - C) + v_x^2 + 2v_x \omega r \sin(\omega t - C) + r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - C)}$
 $v = \sqrt{r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - C) + r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - C) + v_x^2 + 2v_x \omega r \sin(\omega t - C)}$
 $v = \sqrt{r^2 \omega^2 [\cos^2(\omega t - C) + \sin^2(\omega t - C)] + v_x^2 + 2v_x \omega r \sin(\omega t - C)}$
 $v = \sqrt{r^2 \omega^2 + v_x^2 + 2v_x \omega r \sin(\omega t - C)}$ $v_x = r \omega$
 $v = \sqrt{v_x^2 + v_x^2 + 2v_x^2 \sin(\omega t - C)}$
 $v = \sqrt{2v_x^2 + 2v_x^2 \sin(\omega t - C)}$
 $v = \sqrt{2v_x^2 [1 + \sin(\omega t - C)]}$ **AG**
 $v = 0.56 \sqrt{2(1 + \sin(7.87t - 2.45))}$

(a) Réponse 11 (MRU+MCU), groupe 3

(b) Réponse 12 (MRU+MCU), groupe 3

FIGURE 5.109 – Réponses 8 et 9, MRU+MCU, groupe 3

Réponse en français

8. Parce qu'il s'agit d'un mouvement circulaire lorsqu'il tourne en haut, le mouvement est soustrait et semble freiner, mais le moment où le mouvement tourne en bas accélère de sorte que le graphique n'est pas linéaire et a quelques petites courbures.

8a. 2 mouvements sont pris en compte puisque deux dimensions sont prises en compte

8b. -Le MCU est allé dans la direction opposée au MRU, de sorte qu'au lieu d'ajouter nous l'avons soustrait

-MRU-MCU : Nous échangeons le sinus pour le cosinus car nous analysons le mouvement en x .

8c. Oui, nous pouvons l'obtenir

Analyse des réponses 8 et 9

En répondant à la question 8, les élèves activent le plan [Sem-Dis] en passant éventuellement de CII à CIII (figure 5.110). Autrement dit, Ils effectuent un processus de *décodage* de la représentation $y(t)$ du MRU+MCU et de $x(t)$ du MRU [14] (dans les 3 points de la question 8) pour arriver au *codage* $x(t)$ de la combinaison du mouvements (réponse 8c figure 5.109a) [15]⁷. Cette dernière réponse soutient le processus algébrique de la question 9, où nous observons, initialement, un travail de manipulation algébrique sur les équations fonctionnelles paramétriques spécifiques AS, mais dans un deuxième temps, ils donnent le pas du particulier au général et déterminent la valeur de la vitesse tangentielle, par un processus algébrique qui part de leur référence théorique et les conduit à la représentation algébrique générale AG pour prouver [16] qu'ils ont obtenu l'équation de la vitesse tangentielle générale du mouvement effectué

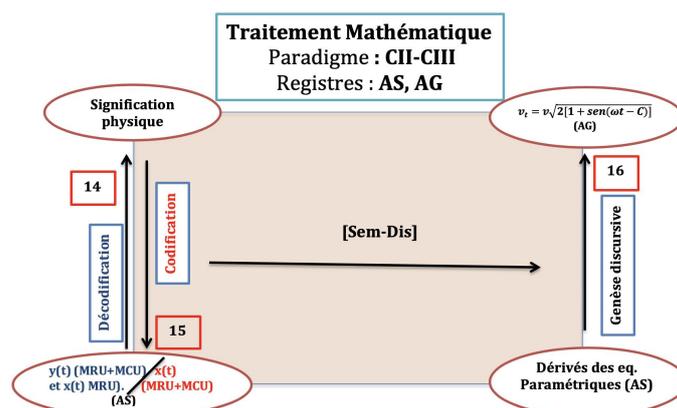


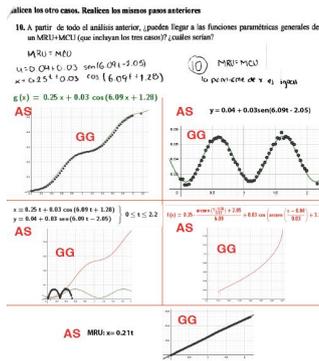
FIGURE 5.110 – Réponses 8 et 9 (MRU+MCU), ETC, groupe 3

Phases 6 et 7. Question(s) et/ou consigne(s) : 10. A partir de toutes les analyses ci-dessus, pouvez-vous trouver les fonctions paramétriques générales d'une MRU+MCU (y compris les trois cas), quelles seraient-elles ?

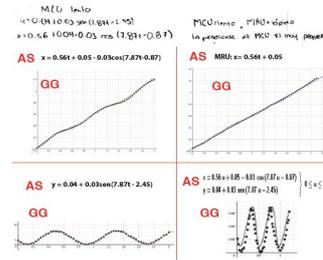
11. Pouvez-vous obtenir $y(x)$ ou $x(y)$? sont-ils des fonctions ? Justifiez votre réponse

Les élèves ont répondu aux questions 10 et 11 (figure 5.111).

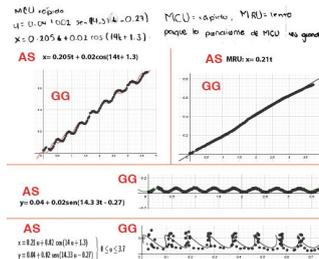
7. avec la même procédure que les équipes 1 et 2



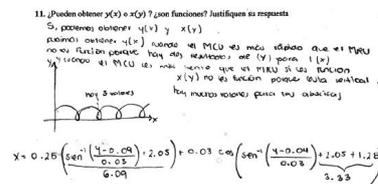
(a) Réponse 10 ($V_{MRU} < V_{MCU}$), groupe 3



(b) Réponse 10 ($V_{MRU} > V_{MCU}$), groupe 3



(c) Réponse 10 ($V_{MRU} = V_{MCU}$), groupe 3



(d) Réponse 11 (MRU+MCU), groupe 3

FIGURE 5.111 – Réponses 10 et 11, MRU+MCU, groupe 3

Réponse en français

10. MRU=MCU; MCU= lent; MRU= rapide; MCU= rapide MRU= lent

11. -Nous pouvons obtenir $y(x)$ et $x(y)$

-Nous avons pu obtenir $y(x)$ lorsque le MCU est plus rapide que le MRU, n'est pas une fonction parce qu'il y a deux résultats de y pour x et, lorsque le MCU est plus lente que le MRU est fonction. $x(y)$ ne fonctionne pas parce que cette verticale et il y a beaucoup de valeurs pour les abscisses.

Analyse des réponses 10 et 11

Dans les réponses aux questions précédentes, nous observons à nouveau la notation $MRU = MCU$ que nous considérons comme inadéquate, cependant, nous pensons que les étudiants du groupe 3 ont simplement cessé d'écrire les V pour question de praticité. Nous pouvons également observer que ce groupe n'utilise pas la notation fonctionnelle même si GeoGebra la donne. Aux questions 10 et 11, les élèves activent la genèse discursive de CI (figure 5.112b) et les plans [Sem-Dis] et [Ins-Dis] dans CII (figure 5.112c), mais ils ne parviennent pas à passer à CIII (figure 5.112a) puisqu'ils ne peuvent pas déterminer les équations paramétriques générales AG [17] à partir des équations AS. Plus tard, ils affirment qu'il est possible d'obtenir $y(x)$ et $x(y)$ sous condi-

tion. Pour répondre à la question de savoir s'il s'agit, ou non, de fonctions, les élèves utilisent un argument discursif et la preuve est pragmatique, tout en affirmant que l'équation $y(x)$, lorsque le MCU est plus lent que le MRU, est une fonction, car ils utilisent le critère de la ligne verticale [18], dans le cadre de leur référence théorique. D'autre part, ils affirment, sur la base du même critère, que les autres graphiques $y(x)$ et $x(y)$ ne sont pas des fonctions. Enfin, et pour vérifier sa réponse (une autre fois) ils déterminent l'équation inverse de la trajectoire $x(y)$ (AS) qu'ils vérifient par un processus algébrique qui provient de la *genèse sémiotique* et un processus *instrumental* [19] avec l'utilisation de GeoGebra avec lequel ils obtiennent la représentation *GG*.

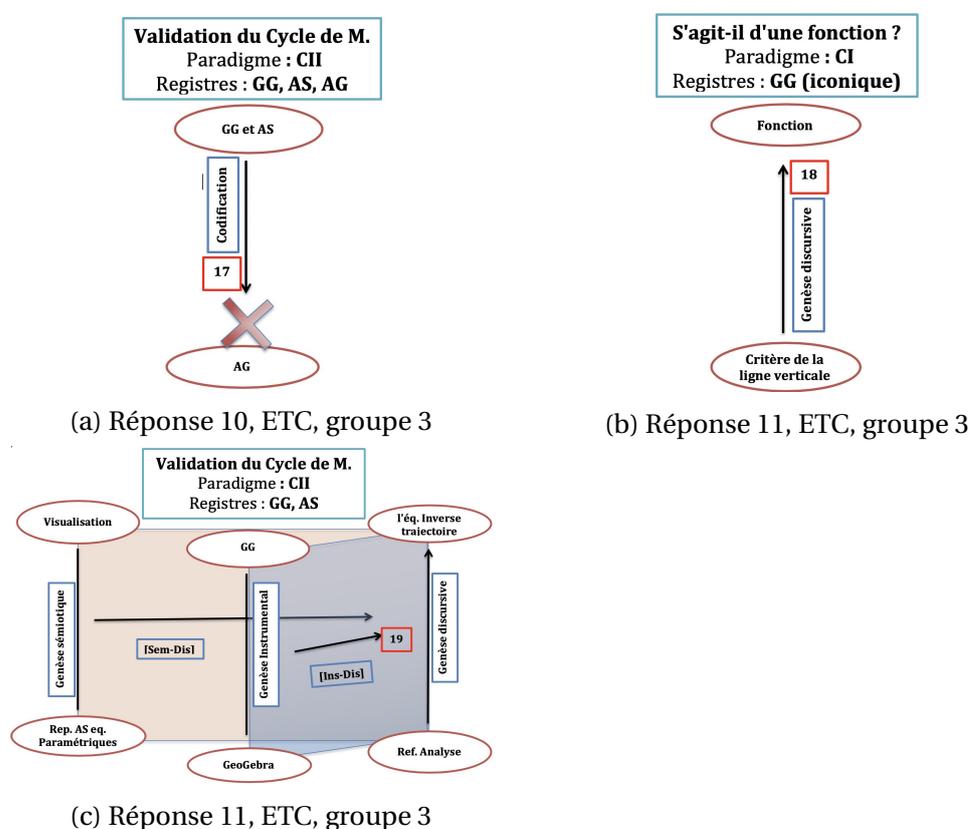


FIGURE 5.112 – Réponses 10 et 11, ETC, groupe 3

Résumé de l'activité 4, groupe 3 (figures 5.113 et 5.114).

Pour cette activité, les élèves de l'équipe 3 ont, d'abord, utilisé un spinner avec lequel ils ont illustré le **MP (CI)**. L'utilisation de cet artefact (instrumentalisation [1]) les a conduits à une *codification* [2] des variables, de sorte qu'ils ont pu proposer une série de phénomènes qu'ils considèrent comme répondant aux caractéristiques de la combinaison des mouvements. De même, l'équipe 3 a activé la *genèse discurs-*

sive en donnant les caractéristiques du MRU et du MCU séparément (référence théorique) ainsi que les variantes possibles de la combinaison des mouvements [3]. Pour la réalisation du mouvement, cette équipe a utilisé deux dispositifs : un spinner (première cadre, figure 5.114) et une bouteille d'eau (deuxième cadre) dans le but d'effectuer le MP. Avec le spinner, les étudiants effectuent deux variantes du mouvement : lorsque la vitesse du MRU est supérieure à celle de le MCU et l'inverse. Ils génèrent un processus d'*instrumentalisation* [4] et de *codification* [5] des variables, de manière à obtenir les MP qu'ils comparent avec leur référentiel et décident de les analyser avec Tracker (*instrumentation* [7]) en obtenant les registres TV et GT (*codification* [8]). Avec le même spinner, le groupe 3 essaie d'effectuer le mouvement lorsque la vitesse tangentielle du MCU et la vitesse du MRU sont égales (*instrumentation* [4i]), mais il ne parvient pas à *coder* les variables pour le MP souhaité [5i]. Ils changent l'artefact pour la bouteille d'eau (*instrumentalisation* [6i]) et réussissent à obtenir le *codage* qu'ils considèrent approprié [7i et 8i] (CI- CII). Après, ils effectuent un *dé-codage* des graphiques (de tous les mouvements) en activant la *dimension discursive*, afin de différencier les caractéristiques des mouvements et de dire lesquels sont utiles pour l'activité de modélisation [9 et 10]. Dans GeoGebra apparaît un processus d'*instrumentalisation*, de *codage* et de signification des graphiques à partir de leur référence théorique [11, 12 et 13]. Les élèves *décodent* ensuite les représentations GG et AS [14] pour obtenir des informations. Immédiatement, ils génèrent un processus de *codage* qui leur fait obtenir x vs t [15] et arriver à l'équation de la vitesse tangentielle générale [16]. Cette équipe n'écrit pas les équations générales de la cycloïde [17](CII) mais ils font une preuve pragmatique pour voir si les équations des trajectoires sont des fonctions [18]. Enfin, l'équation de trajectoire obtenue par un processus algébrique (dimension sémiotique) est tracée en GeoGebra pour voir quelle forme elle a, et prouver qu'elle est l'inverse de l'équation de trajectoire [19].

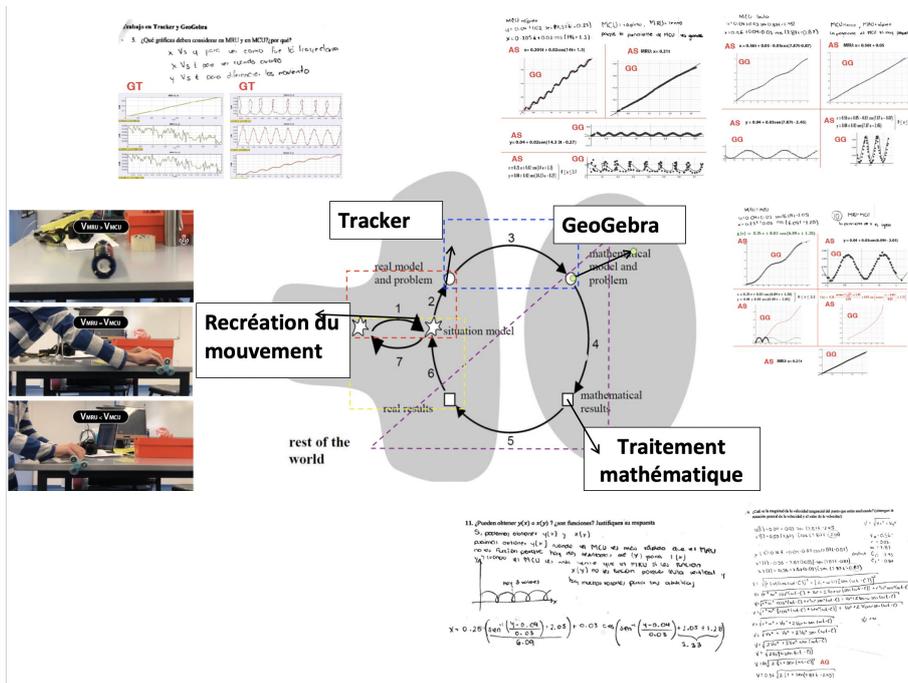


FIGURE 5.113 – La fonction autour du cycle de modernisation, activité MRU+MCU (groupe 3)

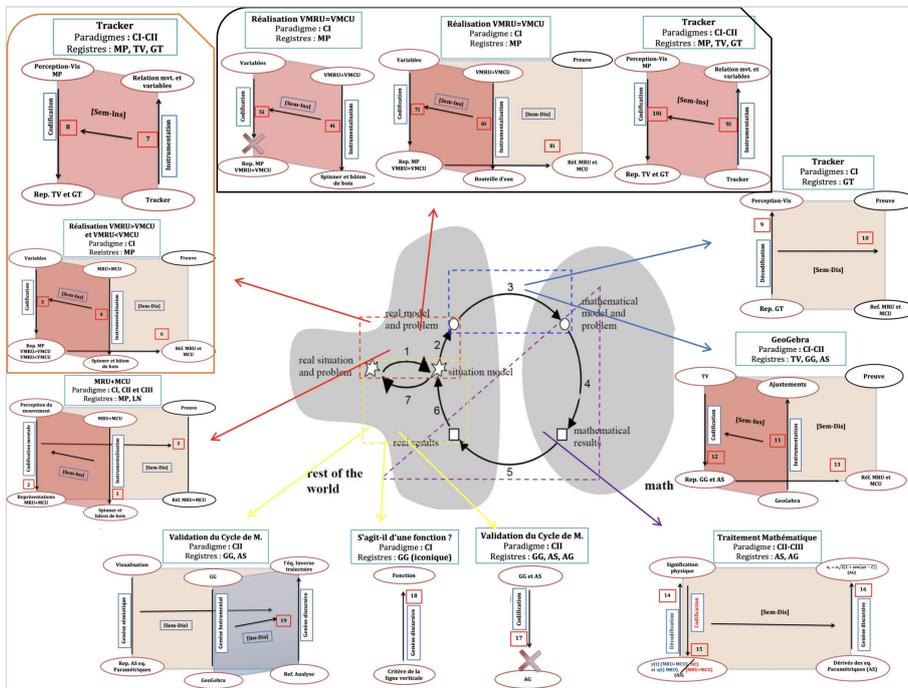


FIGURE 5.114 – Analyse globale, activité 4 (MRU+MCU), groupe 3

5.6.4 Conclusion générale activité 4

Cette activité est devenue un véritable défi pour les élèves. S'il est vrai qu'ils ont pu reconnaître le mouvement physique, sans grande difficulté, dans des situations familières, il est également vrai que la détermination des caractéristiques de la composition des mouvements était complexe. La cycloïde est une courbe qui n'est pas un sujet d'étude dans les programmes de la ENP, encore moins, les différentes possibilités qu'elle offre, en termes de caractéristiques du MRU et du MCU. Nous pensons que les élèves des trois équipes ont enrichi leurs connaissances, sur la base d'une articulation plus profonde entre les objets et leurs représentations sémiotiques. La modélisation de ce phénomène de mouvement a rendu pertinent le travail effectué sur l'ensemble des registres de représentation. Les courbes GT leur ont non seulement permis de visualiser le comportement des objets dans le mouvement combiné, mais, à partir de celles-ci, les étudiants ont pu déduire comment devait être la structure de la relation fonctionnelle AS ($x(t)$), qui devait être une composition des registres de représentation du MRU et du MCU, sur lesquels ils avaient travaillé précédemment.

Par conséquent, le travail dans GeoGebra leur a permis d'approfondir le lien, la coordination et la signification des registres GG et AS, en particulier avec les courbes paramétrées plus générales. Le traitement mathématique effectué par les trois groupes témoigne de leur capacité opérationnelle, en raison de l'importance accordée à cet aspect dans leurs cours réguliers de mathématiques. En outre, le même traitement montre un travail abstrait sur les représentations AS qui va du particulier au général AG. Ses justifications sur le traitement dans les registres AG sont caractérisées par des éléments du paradigme CIII, sans que cela signifie que le travail effectué dans ce paradigme est la partie centrale de la modélisation.

Nous considérons que cette activité a eu un effet positif sur le travail personnel des élèves. Le haut degré de difficulté de l'activité elle-même, les a fait mettre en jeu, non seulement les connaissances des domaines de la physique et des mathématiques, mais aussi ils ont dû travailler avec de nouveaux objets mathématiques, tels que les fonctions paramétriques et leurs représentations graphiques respectives, qui ne sont pas traités dans leurs cours de mathématiques habituels. Nous pensons que cela souligne l'importance de la modélisation des phénomènes de mouvement, comme stratégie pour que les étudiants développent la notion de fonction.

Dans cette dernière activité, nous pouvons observer une évolution significative des élèves en termes de l'ETC. C'est-à-dire que dans la première activité, les trois équipes

montrent un travail, principalement, au sein de CI, où les éléments sensoriels ont été à la base de leurs développements. Dans l'activité 3, nous percevons une transition vers un travail algébrique beaucoup plus spécifique (avec le registre AS) sans pour autant abandonner le travail en CI, et dans la quatrième activité, nous observons que les trois équipes commencent à réaliser un travail plus abstraite dès les premiers moments de l'activité, comme donner des exemples de phénomènes et extérioriser immédiatement les caractéristiques des trajectoires, imaginer des mouvements dans trois directions, etc. Nous avons également observé un passage du spécifique au général chez la plupart des étudiants. En ce qui concerne l'activation des éléments de l'ETC, nous pouvons vérifier que les élèves génèrent une activation complète des plans de l'ETC, ce qui signifie que les réponses qu'ils donnent tout au long des 4 activités sont enrichies par des éléments instrumentaux (genèse instrumentale), sémiotiques (genèse sémiotique) et discursifs (genèse discursive). En ce qui concerne les registres de représentation, nous voyons, sans doute, les processus de codage et de décodage des registres qui conduisent les étudiants à enrichir les processus qui accompagnent la fonction et les différents objets mathématiques. Avec toutes ces activités, nous avons réussi à ce que les élèves puissent aborder un sujet qu'ils n'avaient jamais étudié auparavant, à partir d'activités qu'ils connaissaient de manière théorique (tant en mathématiques qu'en physique) et qu'ils soient capables de modéliser mathématiquement un mouvement combiné qui aboutit à la connaissance de la cycloïde, qu'ils ne connaissaient pas.

Conclusion

Sommaire

6.1	Retour sur les chapitres	352
6.2	Réponses aux questions de recherche	357
6.2.1	Réponse à la question QRa	358
6.2.2	Réponse à la question QRb	360
6.2.3	Réponse à la question QRC	362
6.2.4	Réponse à la question QR	364
6.3	Résumé des contributions de la recherche	367
6.4	Les limites de la recherche	369
6.5	Les perspectives de l'avenir	370

6.1 Retour sur les chapitres

L'objectif principal de notre recherche était de découvrir si le fait de travailler avec des activités de modélisation mathématique, des phénomènes de mouvement, aide les élèves à développer la notion de fonction. C'est-à-dire, nous avons proposé de développer le concept de fonction à travers les courbes qui sont générées lors de la modélisation de différents mouvements (MRU, MRUA, MCU et la combinaison de MRU et MCU), même si certaines de ces courbes ne sont pas des représentations sémiotiques de fonctions numériques d'une variable réelle (fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). Afin d'atteindre notre objectif principal, dans cette recherche, nous avons développé les chapitres suivants :

Chapitre 1 (préliminaires et contextualisation), ce chapitre nous a permis **(i)** d'observer, à travers une brève étude historico-épistémologique, deux perspectives de l'objet mathématique fonction. D'une part, dans *l'évolution des mathématiques*, nous trouvons certains obstacles épistémologiques qui ont été présents tout au long du développement de la notion de fonction : **la loi de dépendance** et **l'utilisation du langage descriptif** (le langage symbolique étant précaire) ; **la conception dynamique** de la fonction de Newton, dans laquelle le graphique représentait la trajectoire de points en mouvement mais qui n'était pas considéré comme le graphique d'une fonction ; et **la symbolisation algébrique** de Dirichlet et Bourbaki qui donnait l'impression que seulement les relations algébriques ou analytiques pouvaient être considérées comme des fonctions. D'autre part, *l'étude de l'évolution de la cinématique* nous a fourni des éléments importants pour **définir une partie des paradigmes** de l'ETC, tels que les **types des pensée, leur évolution et les phénomènes d'intérêt** de chaque période.

(ii) L'analyse de huit livres (quatre d'analyse et quatre de physique générale) qui font partie de la bibliographie recommandée dans les programmes de l'ENP et des premiers semestres des licences de mathématiques et de physique. Cela signifie qu'ils font non seulement partie du référentiel théorique des élèves, mais aussi de celui des enseignants qui donnent ces cours à l'ENP. *En ce qui concerne les quatre livres d'analyse* nous constatons qu'[Apostol \(1977\)](#) et [Spivak \(1988\)](#), qui sont les plus anciennes références, **n'encouragent pas le travail sur les différents registres de représentation** des fonctions, **ni l'utilisation de la technologie** (les calculatrices à l'époque) comme support d'artefacts pour l'apprentissage. Par contre, les livres de [Thomas et Weir \(2005\)](#) et [Stewart \(2008\)](#), qui sont des références plus actuelles, proposent des activités qui motivent

les élèves à **parcourir les différents registres de représentation** et **encouragent l'utilisation des calculatrices** et des calculatrices graphiques. Cependant, dans les quatre livres, la plupart des exercices proposés sont encore de nature classique, c'est-à-dire, avec une **approche essentiellement algébrique** : tracer le graphique à partir de son expression algébrique, déterminer son domaine et son ensemble d'images, etc. En ce qui concerne la notation dans les livres d'analyse est en général similaire, ils utilisent les mêmes variables, symboles, etc. Ces notations standard en mathématiques (bien qu'elle soit fonctionnel et pratique dans ce domaine), nous pensons qui **génèrent un obstacle** quand on travaille dans des disciplines qui utilisent les mathématiques mais qui font appel à leurs propres notations de variables (comme c'est le cas pour la physique). *En relation avec les quatre livres de physique général* où nous observons le référentiel théorique, en matière de cinématique, nous constatons que la notation peut varier dans la façon dont ils considèrent certaines variables telles que la distance, les vitesses initiales et finales, etc. En ce qui concerne ce facteur, nous pensons qu'il est important que différentes notations soient traitées et que **les élèves soient conscients de la polyvalence des variables** et de la façon dont elles peuvent changer lorsqu'elles sont utilisées en mathématiques et dans différents domaines. **Cependant, le simple fait de changer des variables sans que l'élève soit vraiment conscient de ce qui se passe peut conduire à la dissociation des mathématiques avec des autres disciplines**, en générant un apprentissage sans lien et limité, comme nous le percevons à certains moments dans les activités réalisées par les élèves dans ce travail de recherche.

Nous pensons, sur la base des résultats de nos travaux de recherche, qu'une solution, dans les deux domaines où nous travaillons, consiste (dans une certaines mesures et compte tenu du contexte et des contraintes) à rendre visibles, dans les classes d'analyse et de cinématique, les relations fonctionnelles qui sont générées dans les phénomènes de mouvement et à les relier aux équations du mouvement (notre QR). Un autre élément important que nous trouvons dans les livres de physique est qu'ils ne mentionnent pas explicitement les équations paramétriques (bien qu'elles soient utilisées tout le temps). Cela nous amène à, ce que nous pensons, un des résultats majeurs de cette thèse. C'est-à-dire, nous avons amené les élèves, dès le premier phénomène de mouvement (MRU), à réfléchir et à analyser ce qui se passait dans deux dimensions, en introduisant les équations paramétriques (x et y par rapport au temps) que les élèves ont utilisé tout au long de l'atelier de modélisation. Nous pensons que, ce processus a dirigé les élèves à une réorganisation des connaissances et une articulation des do-

maines et disciplines en jeu.

(iii) Également dans ce chapitre, nous avons fait une analyse de l'établissement d'enseignement, du niveau académique des étudiants et des programmes (précédents et actuels) qui nous a permis, d'une part, d'adapter les activités au type d'élèves et aux exigences du programme. D'autre part, de trouver des informations qui nous permettraient d'avoir une idée de l'origine des difficultés que les enseignants et les élèves rencontrent en travaillant avec la notion de fonction. En ce sens, nous avons observé que, malgré l'indication dans le programme 2017 de l'objectif stipulant que les étudiants doivent appliquer les connaissances de base de l'analyse pour étudier et modéliser le mouvement à travers la technologie, le programme ne propose pas d'activités spécifiques qui peuvent être faites en classe. Nous pensons que cette situation, ainsi que la quantité de sujets à traiter tout au long de l'année scolaire, font qu'une grande partie des enseignants se désintéressent et continuent à donner des cours traditionnels. En ce sens, **les activités de modélisation que nous proposons dans ce travail de recherche peuvent non seulement être utilisées par les enseignants mais peuvent également être une initiative pour créer des ateliers de modélisation mathématique** (optionnels pour les élèves) dans les différents champs de connaissance de l'ENP.

Chapitre 2 (Cadre théorique). Le développement du premier chapitre et la nature de cette recherche nous a conduit à travailler avec différentes entités théoriques, dans le cadre de la didactique des mathématiques, comme le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#) et les registres de représentation ([Duval, 1999](#)) mais aussi d'étendre et d'adapter l'ETM ([Kuzniak et al., 2016a](#)) au domaine de la cinématique (Espace de Travail en Cinématique, ETC). Le fait de concevoir l'ETC n'était pas une décision arbitraire. Tout d'abord, nous avons essayé de placer la cinématique dans un espace de travail mathématique (ETMc) en partant du principe que ce domaine utilise un grand nombre d'objets mathématiques. Avec cette proposition, nous introduisons trois paradigmes et réalisons une (pré)expérience pour tester leur fonctionnement ([Reyes-Avenidaño \(2018\)](#), Annexe C). Bien qu'il ait été possible, en principe, de caractériser le travail des étudiants, nous avons constaté que la précision de l'étude n'était pas suffisante et que certains processus cognitifs et concepts typiques de la physique étaient laissés de côté. En ce sens, le chapitre 2 est composé de (i) l'explication, aussi précis que possible, du cadre théorique-méthodologique des ETM car il a servi de base à l'adaptation de l'ETC. L'un des points importants de cette section a été **la clarification**

de la notion de paradigme que nous utilisons dans l'ETC et que nous pensons qu'elle peut être utile pour de futures recherches.

(ii) L'adaptation et le développement de l'ETC. Dans cette section, nous complétons, approfondissons et expliquons, en essayant d'être clairs et précis, les trois paradigmes de la cinématique que nous avons introduit dans Reyes-Avenidaño (2018) : **le paradigme du réel, CI; le paradigme de la mesure et de la quantification, CII et; le paradigme de la formalisation et de la idéalisation, CIII**. Aussi, nous avons décrit **les genèses et les processus qui y sont générés**. Dans le même chapitre, nous avons expliqué certains cycles de modélisation et justifié pourquoi et comment nous avons utilisé le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007) avec l'ETC. Il est important de dire que le fonctionnement de l'ETC (paradigmes, circulation dans les plans et processus cognitifs) et son articulation avec le cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007) ont été validés en trois moments de cette recherche, lors de la conception des quatre activités de modélisation, au moment de l'analyse du travail attendu par les élèves et dans l'analyse des données issues de l'expérimentation.

Chapitre 3 (Méthodologie). Dans ce chapitre, nous expliquons et contextualisons (i) toute l'ingénierie didactique, méthodologie suivie dans ce travail de recherche et (ii) la méthodologie d'analyse de données en considérant :

- L'utilisation des courbes pour observer l'évolution de la notion de fonction. À cette fin, nous avons intégré quelques registres de représentation (Duval, 1999) des objets mathématiques, fonction et courbe¹, en définissant, pour la première fois, certains d'entre elles².
- Le rôle des artefacts technologiques Tracker et GeoGebra, qui ont joué un rôle crucial dans le passage entre les registres de représentation et les paradigmes.
- Les éléments épistémologiques et cognitifs (ETC), qui nous ont permis de placer les élèves dans les paradigmes en fonction du type de pensée, des artefacts et du niveau des processus cognitifs observés.

Les éléments théoriques des chapitres 2 et 3, dans leur ensemble, nous ont aidé à : **concevoir les activités de modélisation, à définir le travail attendu des élèves et à ca-**

1. il ne faut pas oublier que dans ce travail de recherche nous avons utilisé l'objet mathématique courbe (même si certains d'entre eux ne représentent pas des fonctions) pour induire un travail plus large et plus riche avec la notion de fonction.

2. Mouvement Physique, Langage naturel, Graphique Tracker, Graphique GeoGebra, Algèbre Spécifique et Algèbre Générale

racteriser le travail effectué par les élèves, en définissant les méthodologies global de la thèse et d'analyse des données de notre expérimentation.

Chapitre 4 (Analyse a priori des activités). Dans ce chapitre, nous développons le travail que nous attendions des élèves dans chacune des activités en ce qui concerne : le cycle de modélisation ; l'évolution de la notion de fonction à travers, non seulement de ses registres de représentation mais aussi de l'utilisation des courbes qui émergent des phénomènes de mouvement et, finalement, de les circulations que nous attendions au sein de l'ETC. **Ce chapitre a été fondamental, dans notre travail de recherche, car il nous a permis de confronter le travail attendu avec l'analyse des données des activités (chapitre 5) et, de cette façon, valider notre travail.**

Chapitre 5 (Analyse des activités de modélisation). Ce chapitre a servi, **(i)** d'une part, à montrer : les caractéristiques physiques de la salle de classe où nous avons réalisé les activités de modélisation mathématique, le nombre de séances, le matériel utilisé et les données avec lesquelles nous avons travaillé et, **(ii)** d'autre part, à effectuer l'analyse des enregistrements des séances et des réponses des élèves qui ont été comparés avec le travail attendu (chapitre 4). **C'est dans ce chapitre que nous validons le fonctionnement de l'ETC (paradigmes, plans verticaux, genèse, etc.),** mais aussi que nous vérifions que son utilisation avec le cycle de modélisation de [Blum et Leiss \(2007\)](#) et les registres de représentation ([Duval, 1999](#)) nous a permis de faire une caractérisation détaillée du travail des élèves qui nous a amené à répondre aux questions de recherche localement (dans chaque équipe).

Comme il peut être constaté, dans le cadre de cette recherche, notre **hypothèse de travail** porte sur l'idée que, lors de la réalisation d'activités de modélisation en cinématique, il est possible de générer un espace de travail dans lequel la notion de fonction peut être développée à partir de sa signification physique. De cette façon, le lien entre les disciplines est également encouragé en tant que ressource didactique pour donner un sens aux objets mathématiques comme proposé par [Lagrange \(2016\)](#). À partir de là, et avant de donner des réponses aux questions de recherche, il est important de dire qu'un élément fondamental qui a permis le passage de l'environnement physique à l'environnement mathématique a été la courbe générée par Tracker. Le mouvement effectué a été numérisé par les élèves point par point créant immédiatement une table de valeurs et une courbe, ce qui n'est pas nécessairement une fonction de

\mathbb{R} en \mathbb{R} , mais cela a permis aux étudiants de visualiser les variables physiques et leurs relations à partir des valeurs numériques et des graphiques. Comme Tracker ne fournit pas d'expressions algébriques pour les courbes, la notion de fonction est apparue à travers les courbes qui représentent le mouvement, bien que certains d'entre eux ne soient pas, en elles-mêmes, des représentations sémiotiques des fonctions (trajectoire circulaire, etc.). L'utilisation de GeoGebra a dirigé les élèves à rendre explicites, sur le plan algébrique, les fonctions qui peuvent être définies par les représentations sémiotiques générées par Tracker (qui ne sont pas, a priori, des représentations sémiotiques de fonctions).

6.2 Réponses aux questions de recherche

Pour répondre aux questions de recherche, il est important de noter qu'en analysant les données des trois équipes (chapitre 5), nous avons observé **l'émergence de l'objet mathématique courbe**, qui est devenu réellement important dans le développement de la notion de fonction. Bien que nous ne considérions pas explicitement cet objet dans la conception des activités son apparition constante, lors du travail avec les phénomènes de mouvement, l'a rendu essentiel pour le développement de la notion de fonction. C'est-à-dire, la notion de courbe est apparue comme un objet mathématique et non pas seulement comme une représentation sémiotique de la fonction. Le fait de 'décoller' les objets, fonction et courbe, par le biais (i) des mouvements physiques et (ii) des équations paramétriques, a permis aux élèves de comprendre et de donner un sens aux deux objets. Ensuite, grâce aux équations paramétriques (fonction) et à la notion de trajectoire (courbe), en cinématique, les élèves ont pu, dans chaque activité, reformuler les liens entre les deux objets.

A ce point du travail de recherche et après avoir développé 5 chapitres dans lesquels nous exposons le contexte, le cadre théorique, la méthodologie, l'analyse a priori, l'expérimentation et l'analyse des activités réalisées, nous pensons disposer de suffisant d'informations pour pouvoir répondre à notre question principale et aux sous-questions de recherche. Avant cela, nous montrons les questions :

QR Dans quelle mesure le travail sur les phénomènes de mouvement, à travers les processus de modélisation, permet-il de développer la notion de fonction ?

QRa Quel jeu entre les registres de représentation des fonctions est mis en place dans le processus de modélisation que nous avons développé ?

QRb Quel est l'effet du jeu entre registres sur le travail personnel des étudiants autour de la fonction ?

QRc Quel est l'ETC mis en place à l'issue de ces différentes expérimentation ?

6.2.1 Réponse à la question QRa

Quel jeu entre les registres de représentation des fonctions est mis en place dans le processus de modélisation que nous avons développé ?

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de rappeler que nous avons voulu enrichir la notion de fonction en l'introduisant à partir d'une représentation spatiale, en considérant des mouvements qui appartiennent au monde physique. Cette façon d'aborder l'objet mathématique, fonction, ainsi que le processus de modélisation ont conduit les élèves des 3 équipes à coordonner différents types de registres de représentation en faisant émerger des processus de codage et de décodage.

Lors de l'analyse des activités de modélisation, dans les trois équipes, nous avons perçu qu'un jeu similaire était déclenché entre les registres de représentation. C'est-à-dire, nous avons observé que l'articulation était causée par les différents artefacts utilisés (Table 6.1)

TABLE 6.1 – Les registres de représentation et les artefacts qui les font émerger

Registre de représentation	Artefact
MP	Matériel
TV	Technologique(Tracker)
GT	
GG	Technologique(GeoGebra)
AS	
AG	Symbolique

Dans la première colonne de la table, nous pouvons voir les registres de représentation dans l'ordre dans lequel, en général, ils ont émergé dans chaque activité et, dans

la colonne de droite, nous avons mis le type d'artefacts qui les a fait émerger. En observant cet ordre, nous constatons un processus de mathématisation, tant dans les registres de représentation que dans les artefacts utilisés. S'il est vrai que nous avons prévu que les élèves suivent cet ordre, les activités leur ont donné la liberté d'explorer d'autres possibilités. Cependant, en général, les étudiants ont fait comme indiqué dans la table, par conséquent, le jeu qui est généré entre les registres de représentation suit cet ordre (du registre MP au registre AG). À cet égard, nous avons observé que ce n'était pas seulement le fait de la circulation dans le cycle de modélisation qui permettait aux étudiants de travailler avec les différents registres de représentation des fonctions. Il y avait, d'une part, un rôle important à jouer dans l'intégration de l'utilisation des artefacts, notamment, les artefacts technologie, afin de favoriser la valeur pragmatique et épistémique (Artigue, 2002a), dans le but d'obtenir un avantage d'apprentissage. D'autre part, la progression des quatre activités, qui a conduit les élèves à une réflexion de plus en plus complexe et abstraite. L'interaction des registres de représentation dans chacune des activités (qui s'est produite principalement avec l'utilisation d'artefacts technologiques) a activé des processus de codage-décodage qui ont conduit les élèves non seulement pour donner un sens aux représentations, mais aussi pour les faire évoluer.

La valeur pragmatique a été démontrée par le fait qu'en utilisant les instruments technologiques (Tracker et GeoGebra), les élèves pouvaient immédiatement construire les registres de représentation ; table des valeurs (TV), graphique (GT et GG) et les équations paramétriques (AS). Mais aussi, la circulation dans le cycle de modélisation, avec la technologie comme médiateur, avait une valeur épistémique, puisqu'elle leur permettait non seulement une articulation et une réflexion sur la signification des différents registres, ce qui est une condition nécessaire à la compréhension des concepts (Duvall, 1999), mais aussi, un lien entre les deux disciplines, physique et mathématique, dont la cinématique relève. Nous devons souligner que nous n'affirmons pas que les logiciels utilisés dans cette recherche a, en soi, une grande valeur épistémique. Ce sont les activités réalisées par les élèves, à l'aide de ces logiciels, qui ont déterminé sa valeur (valeur que nous avons pu distinguer et interpréter grâce à la caractérisation du travail avec l'ETC). Pour cette raison, nous considérons que, dans une large mesure, la circulation dans le cycle de modélisation, avec la médiation de la technologie (même si nous pensons également que ce n'est pas nécessairement une condition suffisante) a encouragé un processus de mathématisation entre différents registres de représen-

tation, permettant aux élèves de développer et enrichir, progressivement, la notion de fonction par le traitement conjoint courbe-fonction, en proposant une sorte de 'décomposition' des deux objets (courbe et fonction) en (i) les mouvements physiques et puis (ii) les équations paramétriques. Ensuite, avec les équations paramétriques (fonction) et la notion de trajectoire (courbe) de la cinématique, il était possible reformuler les liens entre courbes et fonctions en mathématiques.

6.2.2 Réponse à la question QRb

Quel est l'effet du jeu entre registres sur le travail personnel des étudiants autour de la fonction ?

Nous pensons que l'effet du jeu entre les registres de représentation est généré par la proximité avec lesquels nous les avons traités et pour le travail qui a émergé entre les objets mathématiques, courbe et fonction. C'est-à-dire, nous partons d'une représentation spatiale du mouvement (cette représentation est traitée avec Tracker, qui montre non seulement la représentation spatiale mais aussi les représentations temporelles, faisant ainsi prendre conscience aux élèves des différences entre elles), cette représentation (comme nous l'avons traité) est proche de la représentation graphique d'une courbe mathématique et celle-ci, elle-même, est proche de la représentation graphique des fonctions. Ce jeu qui s'est déroulé entre les registres a permis aux élèves non seulement d'observer et de produire les différentes représentations de la fonction, mais aussi d'interpréter et de donner un sens aux objets mathématiques concernés. Cependant, la signification et la compréhension de la fonction et de ses propriétés ne se produisent pas spontanément par le simple fait d'avoir différents registres de représentation. Au-delà de leur importance en tant que conducteurs du travail en classe, la conception des guides de travail avait pour but de faire travailler les élèves et de relier, de manière naturelle, les différents registres et, finalement, de reconnaître les équations du mouvement, dans leur statut d'équations fonctionnelles. Nous avons pu vérifier que les trois équipes, à différentes phases du processus de modélisation, ont donné du sens aux variables, fonctions et équations (dans leurs différentes représentations), à partir des séquences de changements des registres de représentation (données dans les guides de travail).

Avec le MRU, nous avons constaté que les étudiants gardaient la perspective, basée sur leur référentiel de physique, où l'équation de position $x = vt$ leur permettait

de calculer la distance parcourue par l'objet en mouvement. Bien que, tout au long de cette activité, certains élèves montrent des signes d'utilisation de la notion de fonction, nous pouvons dire qu'ils ne parviennent pas à lui donner le statut d'une relation fonctionnelle. La modélisation et les registres de représentation générés par les artefacts technologiques (ordinateur et logiciels) avaient une grande valeur pragmatique (Artigue, 2002a) car les actions étaient efficaces (dans la mesure où les étudiants ont réussi, sans aucun problème, à changer entre les registres de représentation et à parcourir le cycle de modélisation en utilisant les artefacts technologiques). Cependant, la réflexion sur l'objet, fonction, n'était pas spécifique, peut-être à cause de la simplicité du mouvement et de son équation.

Le MCU a demandé plus de réflexion et de travail mathématique sur les équations paramétriques. Bien que les trois groupes aient travaillé avec les variables t et θ , les groupes 1 et 2 ont utilisé des artefacts matériels, de sorte que les différences entre les équations et les représentations graphiques qu'ils ont obtenues n'ont pas été aussi perceptibles. Cependant, l'équipe 3 a perçu une différence notable dans les graphiques des équations qui les mettaient en accord avec ce qui se passait. Les trois groupes ont identifié la variabilité et la dépendance des quantités physiques des équations. La coordination des registres de représentation et le travail algébrique sur les fonctions ont été plus exhaustifs. Nous pensons qu'avec cette activité, le jeu entre les différents registres a eu un effet positif sur le travail des élèves. Ils ont montré qu'ils disposent d'un bon référentiel théorique dans les deux domaines de connaissance. Ils ont établi un lien adéquat entre la dérivation et les concepts physiques de mouvement de vitesse angulaire et tangentielle. À ce stade du processus de modélisation, les étudiants ont déjà montré un changement qualitatif dans la coordination des différents registres de représentation de la fonction.

Enfin, la réalisation du mouvement formé par le MCU+MCU (cycloïde) a produit une analyse plus complète sur cette combinaison. Nous avons déjà commenté auparavant que la cycloïde est une courbe qui n'apparaît pas, pour son étude, dans les programmes de l'ENP, cependant, les étudiants ont pu construire, grâce à la technologie, ses différentes représentations. Ils ont également fait un très bon travail algébrique sur les relations fonctionnelles, de sorte que nous pouvons dire qu'à cette étape, les notions de courbe et fonction ont pris un sens et une signification plus importants. Avec cette activité, les élèves ont enrichi leur champ de connaissances car ils ont pu créer des articulations plus profondes entre les objets et leurs représentations sémiotiques à

partir de la coordination des registres de représentation.

Il est vrai que les changements dans les registres de représentation ont été fondamentales dans la signification et le développement de la notion de fonction, mais nous pensons aussi que le fait d'avoir conçu des activités qui ont amené les élèves à transiter, progressivement, par ces registres a été un point crucial dans ce processus. C'est-à-dire, dans l'analyse des résultats (Chapitre 5), nous avons pu constater comment le registre **MP** a aidé à donner un sens à la table des valeurs (**TV**) et à la graphique du Tracker (**GT**), puis ces représentations ont aidé à comprendre les représentations graphiques de GeoGebra (**GG**) et les équations paramétriques obtenues avec l'ajustement généré dans GeoGebra (**AS**), et enfin, comment l'ensemble des activités et des représentations aident les élèves à passer aux registres algébriques général (**AG**) qui sont les équations générales du mouvement.

6.2.3 Réponse à la question QRc

Quel est l'ETC mis en place à l'issue de ces différentes expérimentation ?

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de mentionner que, les travaux de recherche que nous avons développés dans cette thèse nous a donné la possibilité de mettre en place un ETC complet (Kuzniak et al., 2016a), avec l'hypothèse qu'il s'agit d'une condition nécessaire pour une avancée conceptuelle. C'est-à-dire qu'il a généré (i) un développement important dans chacune des genèses de chaque paradigme et (ii) un travail d'articulation entre les genèses et entre paradigmes.

Dans cette recherche, nous positionnons le domaine de la cinématique entre les disciplines, physique et mathématiques. En ce sens, l'ETC nous a permis d'articuler leur notions communes (grandeurs, variables, trajectoires, courbes, fonctions, équations, graphiques, etc.) dans les activités de modélisation que nous avons conçues. Aussi, avec l'utilisation de l'ETC, nous avons pu observer la nature du travail développé dans chacune des équipes et dans chaque activité. Nous avons observé que le niveau d'abstraction augmentait, non seulement en raison de l'utilisation d'artefacts matériels et technologiques dans chaque activité, mais aussi, globalement, dans les quatre activités. C'est-à-dire que nous avons observé que l'utilisation de ces artefacts guidait les élèves vers certains types de développement et de processus cognitifs. Par exemple, lorsqu'ils travaillaient avec les objets qui amenaient à produire les mouvements physiques (voiture jouet, moulin à vent,...), ceux-ci généraient des processus cognitifs liés

à la perception, la construction, la codification, le décodage et l'argumentation autour des caractéristiques que devrait avoir un certain mouvement. Ces processus ont été guidés, principalement, par des perceptions, déclenchant un travail dans le paradigme CI. L'utilisation de Tracker, a amené les élèves à commencer un premier niveau d'abstraction, où ils pouvaient observer simultanément le mouvement physique, mais aussi la représentation graphique et la table des valeurs. Bien que avec ce logiciel, les processus cognitifs de construction, de codage, de décodage et d'argumentation ont également été présentés, ceux-ci sont d'une nature différente de ceux générés lors de la réalisation du mouvement, car les objets mathématiques et physiques impliqués ne sont pas seulement guidés par des perceptions (transition entre le CI et le paradigme du CII). GeoGebra a conduit les étudiants vers un travail plus abstrait, où les processus cognitifs impliqués ont évolué vers un schéma de pensée dirigé, principalement, par un langage algébrique dans le but de quantifier le mouvement et de le généraliser, c'est-à-dire un travail développé principalement dans CII et CIII. Ce comportement a été observé individuellement (dans chaque activité) ainsi que dans l'ensemble des 3 activités, où leurs compétences en matière d'abstraction progressait. C'est-à-dire que, bien qu'ils n'aient jamais cessé de tenir compte des perceptions des mouvements, le passage par ces phases était beaucoup plus rapide et, par conséquent, le travail mathématique était plus exhaustif. Nous constatons, donc, une tendance à l'abstraction.

Nous avons considéré qu'il était nécessaire que les élèves mettent, intentionnellement, en jeu les processus cognitifs pour comprendre la nature du travail mathématique qu'ils effectuent dans chacune des phases du cycle de modélisation et, par conséquent, les transformer en langage naturel ou symbolique. Dans l'analyse des enregistrements du mouvement, nous avons pu observer, précisément, la manière dont la perception et l'attention portées à la réalisation des phénomènes de mouvement, et la circulation à travers les différentes phases, les ont amenés à réfléchir sur la nature du mouvement. La façon dont la notion de variable a évolué dans une relation fonctionnelle est également connue, puisqu'ils ont reconnu la correspondance entre les concepts physiques, considérés comme des variables mathématiques dans leurs différentes représentations. Cependant, ils ont également montré des limites en matière de langage mathématique, naturel et écrit. Nous pensons que cette limitation est due au fait que cet aspect n'est pas encouragé dans leurs cours réguliers où l'essentiel est généralement le développement des compétences procédurales.

Enfin, nous pensons que la mise en place d'un ETC complet nous a permis de com-

prendre un peu plus ce que signifie donner un sens à les objets mathématiques courbe et fonction, parce que ce sens est liée à l'élaboration d'un travail mathématique complet et efficace, comme nous l'avons observé dans l'analyse des données.

6.2.4 Réponse à la question QR

Dans quelle mesure le travail sur les phénomènes de mouvement, à travers les processus de modélisation, permet-il de développer la notion de fonction ?

Comme nous l'avons mentionné tout au long de cette section, l'un des éléments qui est apparu naturellement en travaillant sur les phénomènes de mouvement est la notion de courbe. Cet objet apparaît non seulement comme une représentation sémiotique de la fonction (telle que nous la contemplons lorsque nous conservons les activités) mais aussi comme un objet mathématique qui émerge des mouvements physiques et qui conduit les élèves aux équations paramétriques (fonctions), pour les conduire ensuite à la trajectoire (courbe). Aussi, tout au long de cette recherche, nous avons été témoins du travail des étudiants et de l'évolution de la notion de fonction et courbe à partir des activités de modélisation des phénomènes de mouvement :

- Les trois groupes ont fait preuve de compétences dans l'utilisation des outils technologiques, ce qui a facilité le développement des activités.
- Lors de la première activité, il a été évident que les élèves ont commencé avec des connaissances non coordonnées. C'est-à-dire qu'il y avait une confusion quant à la signification des variables physiques, qu'ils ne situaient pas correctement les variables sur le plan cartésien et la nature de leurs réponses se situait, principalement, dans le paradigme CI. En particulier, le groupe 3, qui a fait preuve d'un manque de précision dans son discours, n'a pas pu relier l'équation du MRU avec l'expression AS générée par GeoGebra.
- Dans l'activité trois, des progrès significatifs sont constatés chez les élèves, en termes de notation fonctionnelle ($x(t)$, $y(t)$...), de développements algébriques et d'utilisation des concepts. Nous observons également une plus grande coordination entre les objets mathématiques et physiques tout au long du processus de modélisation. Le travail des groupes est, principalement, développé dans les CII et CIII. L'équipe 3, qui avait eu des difficultés dans la première activité, a réalisé un progrès qualitatif dans la coordination des registres de représentation de la fonction et la courbe.

— L'activité quatre, bien qu'elle ait été la plus compliquée pour tous les groupes, a été menée correctement. Nous pensons que le processus de modélisation des mouvements a été fondamental pour leur compréhension. Dans ce cas, le lien que les étudiants ont établi avec les différents registres de représentation les a amenés à travailler avec l'objet mathématique cycloïde (où il y a aussi une courbe) et ses équations paramétriques associées au phénomène de mouvement combiné (MRU+MCU). En d'autres termes, le mouvement, de l'activité quatre, est décomposé (déconstruit) en deux mouvements élémentaires qui se "superposent" pour obtenir les mouvements souhaités (CI). A partir de cette décomposition, il est alors entendu qu'il y a trois cas selon la comparaison des vitesses (CII ou CIII) et les étudiants prennent la composition des mouvements (MRU et MCU) qui devient une somme des fonctions de base (CIII). Autrement dit, le mouvement est déconstruit en deux mouvements élémentaires et, parallèlement, les fonctions générales (AG) sont également déconstruites (en supposant que tout mouvement peut être modélisé par les fonctions). Ce processus génère un jeu entre fonctions et mouvements (où les artefacts technologiques jouent également un rôle important : Tracker qui suit deux points, un pour le mouvement composé et un pour la MCU (déconstruction de la courbe) et; GeoGebra pour les ajustements) pour localiser les paramètres des deux mouvements élémentaires (pour la MRU et pour la MCU, seulement la coordonnée y) et ensuite reconstruire les mouvements élémentaires (c'est-à-dire, déterminer la coordonnée x) et revenir au mouvement composé par la somme des fonctions. Les nouveaux mouvements sont ensuite modélisés par des courbes et des fonction, même si la courbe de mouvement n'est pas celle représentant une fonction $R \rightarrow R$.

Cela nous amène à, ce que nous pensons, **un des résultats majeurs de cette thèse**. C'est-à-dire, nous avons amené les élèves, dès le premier phénomène de mouvement (MRU), à réfléchir et à analyser ce qui se passait dans deux dimensions, en introduisant les équations paramétriques (x et y par rapport au temps) que les élèves ont utilisé tout au long de l'atelier de modélisation. Nous pensons que, ce processus a **abouti à une réorganisation des connaissances et une articulation (ou connexion) des domaines** et disciplines en jeu. Aussi, à l'issue de l'atelier mis en oeuvre, **les notions de fonctions et de courbes, initialement confondues, sont distinguées mais avec de forts et nouveaux liens** avec l'appa-

rition des courbes paramétrées. C'est en fait à ce niveau où nous pensons que se situe l'articulation physique/mathématique pour la cinématique mise en évidence dans cette recherche.

L'idée de déconstruction du mouvement, dans notre cas avec l'activité quatre, est liée à l'idée de déconstruction dimensionnelle de Duval (2016). Cette même idée est reprise par Montoya-Delgadillo et al. (2018) en perspectives de localité des fonctions. Dans le cas de notre recherche, nous avons mis en évidence une sorte de déconstruction cinématique des courbes et des fonctions. En ce sens et considérant tous le travail de recherche que nous avons présenté nous pensons donc que, dans l'ensemble, les quatre activités de modélisation ont permis une évolution dans la compréhension et la signification de la notion de fonction.

En résumé, **nous affirmons que par le processus de modélisation des phénomènes de mouvement, il est possible de traiter la fonction dans un sens inhabituel** dans le cadre de l'analyse, ce qui conduit à explorer différentes possibilités, par exemple, donner un sens à la fonction, par la détermination et la mise en relation des équations de mouvement dans leur statut de relations fonctionnelles, où la coordination des différents registres de représentation qui joue un rôle important pour la compréhension du concept. Notre étude a donné de la pertinence aux aspects sémiotiques travaillés par les étudiants, qui sont liés au traitement et à la conversion qu'ils ont fait des différents registres de représentation, tels que : mouvement physique (**MP**) ; langage naturel, oral (**LNo**) et écrit (**LNe**) ; graphique, généré par Tracker (**GT**) et GeoGebra(**GG**), et algébrique, spécifique (**AS**) et général (**AG**). Nous pensons également que les activités que nous avons proposées ont encouragé le raisonnement discursif, à travers les discussions qui ont eu lieu pendant les sessions du travail, en raison des processus de perception, de visualisation et de construction avec l'utilisation d'artefacts matériels et technologiques. L'activité quatre (la plus importante) a enrichi et créé des articulations profondes entre les domaines et les différents concepts, objets et représentations sémiotiques. De plus, le champ de modélisation de deux objets mathématiques, dont la signification changent de manière conjointe, entraîne une réorganisation nécessaire des connaissances en générant un saut conceptuel non trivial (l'extension du champ de modélisation des courbes des fonctions aux courbes paramétrées plus générales).

6.3 Résumé des contributions de la recherche

D'une manière générale, nous pensons à trois contributions principales de cette recherche :

- i En ce qui concerne **les objets mathématiques, courbe et fonction**, nous avons noté l'importance de la notion de courbe qui a directement influencé l'évolution de la notion de fonction. Bien que nous pensions que le fait de ne pas avoir explicitement pris en compte l'objet mathématique courbe (géométrie différentielle), dans l'élaboration des activités, était une limite, nous considérons que le simple fait de l'avoir traitée comme une représentation a amélioré les résultats que nous avons obtenus. C'est-à-dire, ce traitement a conduit les élèves, dans un premier temps, à une 'défragmentation' et, dans un deuxième temps, à l'union des objets et des propriétés de la fonction qui ont favorisé la signification et le traitement de ces concepts.
- ii En ce qui concerne le **cadre théorique-méthodologique, ETC**, et à la coordination avec le cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2007) et les registres de représentation (Duval, 1999). nous pensons que la contribution de l'ETC peut être utile pour des recherches futures dans les domaines de la didactique des mathématiques et de science (cinématique). Ce cadre théorique-méthodologique peut être utilisé non seulement avec l'objet mathématique fonction et les quatre phénomènes de mouvement sur lesquels nous avons travaillé dans cette thèse, mais, quel que soit l'objet mathématique, le phénomène de mouvement désiré et peut-être d'autres contextes physiques. Aussi, la coordination que nous avons réalisée avec l'ETC, le cycle de modélisation et les registres de représentation est utile pour la conception des activités de modélisation (en envisageant le travail attendu par les étudiants) et pour la caractérisation du travail effectué.
- iii **La conception des activités de modélisation qui ont été testées et analysées dans ce travail.** Nous pensons que les activités de modélisation que nous avons proposées dans ce travail de recherche peuvent servir de base non seulement pour de futures recherches, mais aussi elles peuvent être menées dans des établissements d'enseignement en s'adaptant au contexte, pour encourager l'utilisation d'activités de modélisation réelles en intégrant l'utilisation d'artefacts technologiques (ordinateurs et logiciels spécifiques) comme médiateurs dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, avec l'objectif que l'ensemble

des tâches-technologiques puisse aider à comprendre les objets mathématiques. Une caractéristique importante des activités de modélisation est que nous les adaptons au niveau académique des étudiants de l'ENP, qui ont généralement des connaissances supérieures à la moyenne. Cette caractéristique ouvre la possibilité que les activités puissent être utilisées avec des étudiants des premiers semestres d'ingénierie, de physique ou de mathématiques, en particulier l'activité quatre.

Plus particulièrement, et d'après les résultats que nous avons obtenus dans les analyses, nous pouvons dire que le fait d'étudier les fonctions à partir des phénomènes de mouvement nous a donné la possibilité d'approcher, les courbes, les fonctions paramétriques, les équations, les dérivées, et leurs différentes représentations. D'autre part, l'ETC nous a permis de caractériser le travail de l'élève en considérant des éléments du plan épistémologique et des processus cognitifs qui sont déclenchés à partir de situations réelles.

Pour terminer cette section, nous considérons qu'une partie fondamentale du travail de recherche est constituée par les commentaires des élèves participants à la fin des activités. Nous pensons que ces points de vue sont le résultat de l'effet que l'atelier de modélisation a eu sur eux :

Élève 1 :

« Pour moi, le cours a permis de clarifier certains aspects, non seulement des mouvements que nous avons étudiés, mais aussi d'avoir une introduction plus pratique aux dérivées ; pouvoir apprécier visuellement les différents types de fonctions et comprendre quels changements et ajustements les modifient d'une certaine manière était, à mon avis, la partie la plus profitable et la plus amusante du cours. Je suis très reconnaissant d'avoir pu assister à un tel cours, et j'emporte avec moi une idée beaucoup plus claire des modèles mathématiques qui me seront, sans doute, utiles dans ma carrière universitaire »

Élève 2 :

« La vérité a été une expérience unique, j'ai appris tellement de choses sur la physique et les mathématiques que j'ai été impressionné par tous les modèles des mouvements, être sincère toute ma vie m'a coûté beaucoup de physique, mais grâce à cet atelier et surtout à la façon dont vous nous avez appris, Clau, c'est que j'ai compris la raison des formules que nous travaillons en physique tous les jours. De plus, le fait de travailler en équipe nous a permis de créer des liens, du moins dans mon équipe avec

Joel et Pao. Le fait est que j'ai beaucoup aimé cette façon de travailler, beaucoup de professeurs devraient appliquer cette méthode et rendre la vie de l'élève plus belle »

Élève 3 :

« J'ai vraiment adoré l'atelier. Je pense que la façon dont nous avons appris est très utile puisque nous avons dû réfléchir tout le temps. Contrairement aux autres classes, nous avons dû trouver comment choisir les bons matériaux. J'ai aimé le travail d'équipe, car chacun y a contribué avec ses propres qualités et nous avons réussi à terminer ensemble. C'est également formidable que nous ayons appris à utiliser des outils informatiques pour résoudre les exercices, non seulement parce que cela facilite le travail, mais aussi parce que nous devons profiter de la précision qu'offrent ces outils s'ils sont utilisés de la bonne manière. Ces programmes nous ont parfois causé des problèmes, mais lorsque nous les avons résolus, nous avons acquis un autre apprentissage dans un autre domaine »

Élève 4 :

« J'ai aimé la façon dont l'atelier a été mené, parce que nous avons aussi appris à voir que les équations de la physique ne sont pas seulement pour le plaisir, mais qu'elles découlent d'une analyse mathématique.

Une autre chose intéressante est que je n'avais jamais eu de travail formel dans les laboratoires de physique en tant que tels, en aucune année. C'était cool, surtout pour ceux d'entre nous qui veulent étudier un science...j'ai renforcé ce que je savais déjà et j'ai eu une vision un peu plus large de la physique et de ses relations avec les mathématiques »

Les commentaires ci-dessus faits par les élèves reflètent l'effet de la découverte du lien entre les concepts physiques et les objets mathématiques qui leur sont associés, en particulier les fonctions.

6.4 Les limites de la recherche

En ce qui concerne les limites de la recherche, nous allons nous concentrer sur trois :

- i La première limite, la plus évidente, est que nous n'avons pas considéré explicitement l'objet mathématique courbe et ses interactions avec la notion de fonction dans la conception des activités. Nous pensons que le fait de le considérer

explicitement comme un objet mathématique aurait enrichi nos travaux de recherche.

- ii La deuxième limite se rapporte à la méthodologie d'analyse des enregistrements des sessions. En raison de la quantité de données dont nous disposions et de la caractérisation très détaillée que nous souhaitions réaliser, il nous a été impossible de traiter tous les enregistrements des sessions. Si nous pensons que nos analyses sont adéquates pour répondre aux questions de recherche, il est probable que nous aurions pu obtenir plus d'informations avec une analyse exhaustive des enregistrements des séances.
- iii La troisième limitation que nous avons trouvée dans notre travail de recherche est liée à la quantité d'activités que nous avons proposées et au temps dont nous disposions. Dans certaines activités (MCU et MRU+MCU), les étudiants voulaient passer plus de temps à faire des analyses, cependant, le temps n'était pas suffisant et nous avons dû les limiter pour continuer les autres activités. Bien que leurs résultats aient été satisfaisants et intéressants, nous pensons que cette situation a influencé les résultats que nous avons obtenus.

6.5 Les perspectives de l'avenir

En ce qui concerne les perspectives futures, nous visualisons cinq projets de recherche possibles, qui découlent du présent.

- i Le premier projet qui, à notre avis, émerge de ce travail de recherche est celui qui concerne les objets mathématiques courbe et fonction. C'est-à-dire, concevoir la courbe non seulement comme une représentation graphique mais aussi comme un objet mathématique qui conduit à un changement de domaine (géométrie différentielle). Cette recherche éventuelle déclencherait des travaux dans différents domaines et pas seulement entre les registres de représentation, ce qui impliquerait l'utilisation et la coordination de différents ETM (de géométrie, d'analyse, etc.) et éventuellement le ETC (en fonction des activités envisagées).
- ii Un deuxième projet et en utilisant éventuellement (i) peut consister à effectuer ce même travail, mais avec des professeurs de mathématiques. C'est-à-dire, dans la formation des enseignants dans la modélisation mathématique. Nous considérons qu'il est important d'établir un programme de formation des enseignants sur ce sujet, qui pourrait inclure la mise en œuvre des activités proposées dans

cette recherche. Il serait intéressant d'observer comment ils réalisent les activités et si celles-ci leur permettent de faire la transposition didactique des objets mathématiques courbe et fonction en objets d'apprentissage. Cette recherche avec les enseignants permettraient d'avancer sur ces liens étroits et profonds (on peut, en particulier, penser au théorème des fonctions implicites).

- iii Le troisième projet peut se concentrer à l'application de ces mêmes activités avec un nombre plus important d'étudiants. Dans ce projet, nous pouvons visualiser deux possibilités (en raison du niveau académique auquel nous avons conçu l'atelier de modélisation). D'une part, nous pouvons appliquer ces activités à des étudiants de même niveau scolaire, même s'ils n'ont pas un niveau de connaissances aussi élevé que les étudiants avec lesquels nous travaillons. Ce projet nous permettrait d'observer à quel point les notions de courbe et de fonction évoluent chez des élèves qui connaissent très peu le sujet. D'autre part, nous pouvons réaliser l'atelier avec des étudiants des premiers semestres des licences en mathématique, physique ou ingénierie. Un objectif, dans les deux directions, pourrait être de comparer notre résultats avec d'autres et d'observer, dans une plus large mesure, l'impact des activités de modélisation sur l'apprentissage des notions de courbe et fonction. En lien avec cette possible recherche, l'intégration, explicite, de l'objet mathématique courbe dans les activités est envisagée, ainsi que l'incorporation d'autres phénomènes de mouvement, tels que le plan incliné, le tir parabolique, même, des mouvements en trois dimensions, tels que l'hélice (qu'un groupe a spontanément évoqué).
- iv Le quatrième projet porte sur la création d'un espace de travail en physique, dans lequel le travail de modélisation de différents phénomènes peut être caractérisé, de telle sorte qu'il puisse être relié à l'ETM, dans le but de donner de sens à d'autres objets mathématiques. Par exemple, en prenant des phénomènes physiques qui impliquent des forces, des courants électriques, des flux de fluide, etc. et que cela conduit à traiter différents types de fonctions et d'objets mathématiques comme les dérivés, intégrales, d'équations différentielles, etc.
- v Enfin, nous pensons qu'un projet intéressant pourrait être de mettre en place des ateliers de modélisation mathématique, dans le lycée, avec des activités de différents domaines de connaissance et d'observer, à long terme, l'impact de ces ateliers sur les étudiants dans leur performance à l'université.

Bibliographie

- Ainley, J., Bills, L., et Wilson, K. (2004). Constructing meanings and utilities within algebraic tasks. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Apostol, T. M. (1977). Calculus volumen i. *Editorial Reverté*.
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental :¿ qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 1(1) :40–55.
- Artigue, M. (2002a). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 8(1) :59–72.
- Artigue, M. (2002b). Learning mathematics in a cas environment : The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, 7(3) :245.
- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., et Gómez, P. (1995a). La enseñanza de los principios del cálculo : problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1 :97–140.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., et Gómez, P. (1995b). Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *En Educación Matemática. México : Grupo editorial Iberoamérica*.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(Extraordinario 1) :267–299.
- Bachelard, G. (1993). *La formación del espíritu científico*. Teoría (Siglo Veintiuno). Siglo Veintiuno.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in mathematics*, 18(2) :147–176.
- Benveniste, É. (1974). Sémiologie de la langue. *Problèmes de linguistique générale*,

- 2 :43–66.
- Bernoulli, J. (1718). De solutionibus quae extant problematum isoperimetricorum ejusque nova earundum problematum. *Acta Erudit.*
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and Learning Mathematics In Context*, pages 3–14.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., et Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. Springer New York.
- Blum, W. et Leiss, D. (2005). „filling up “-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pages 1623–1633.
- Blum, W. et Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In *Mathematical modelling*, pages 222–231. Elsevier.
- Blum, W. et Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1) :37–68.
- Borromeo-Ferri, R. (2003). Mathematical thinking styles-an empirical study. *European research in mathematics education III. (2015, Ekim 19)*.
- Borromeo-Ferri, R. (2004). Mathematical thinking styles and word problems. In *Pre-conference proceedings of the ICMI study*, volume 14, pages 47–52.
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2) :86–95.
- Borromeo-Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In *Mathematical Modelling*, pages 260–270. Elsevier.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., et Higuera, L. R. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, 18(2) :37–74.
- Bourbaki, N. (2006). *Eléments de mathématique : Théorie des ensembles*. Springer.
- Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication (extraits). *Relation*, pages 933–982.
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *OpenEdition*, 5(1).
- Bunge, M. (1976). El ser no tiene sentido y el sentido no tiene ser : notas para una conceptología. *Teorema : Revista Internacional de Filosofía*, 6(2) :201–212.

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events : A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, pages 352–378.
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiate mathematics education. III. CBMS issues in mathematics education*, pages 114–162.
- Cauchy, A. L. B. (1884). *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, volume 3. Gauthier-Villars.
- Chevallard, Y. (1978). Sur la transposition didactique dans l'enseignement de la statistique. *Didactique de la statistique*.
- Chevallard, Y. (1980). La transposición didáctica : de las matemáticas eruditas a las matemáticas enseñadas.
- Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique. In IREM d'Aix Marseille, editor, *Ecole d'été de didactique des mathématiques*, pages 1–51, Orléans.
- Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath*, 2227.
- Christianson, G. E. et Westfall, R. S. (1984). *In the presence of the Creator : Isaac Newton and his times*. Free Press New York.
- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education*, volume 1, pages 369–375. Utrecht University Utrecht, The Netherlands.
- Cooney, T. J. (2012). Teachers thinking about functions : Historical. *Integrating research on the graphical representation of functions*, 131.
- Crombie, I. (1979). Análises de las doctrinas de platón : Ii. teoria del conocimiento y de la naturaleza. *Madrid, Alianza Universidad*, page 41.
- De Cotret, S. R. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17 :5–27.
- del Valle Coronel, M. et Curotto, M. M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 7(2) :464.
- Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction*

- articulante lois à densité et calcul intégral*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité.
- Descartes, R. (1637). 1637. la géométrie. *Discours de la méthode*, pages 376–493.
- Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In *Modelling and applications in mathematics education*, pages 69–78. Springer.
- Dolores, C. et Valero, M. d. S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC*.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., et Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept : From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6) :1243–1267.
- Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de la matemática : Escuela Francesa*, pages 118–144.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang Berne.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3) :349–382.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization : Cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. Technical report, Université du Littoral-Côte-d'Opale.
- Duval, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 7 :83–105.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática : La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1) :143–168.
- Duval, R. (2016). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. In *Advanced mathematical thinking*, pages 140–152. Springer.

- ENP, editor (1996a). *Guía de trabajo física IV de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- ENP, editor (1996b). *Programa de física III de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- ENP, editor (1996c). *Programa de física IV de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- ENP, editor (2017a). *Programa de física III de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- ENP, editor (2017b). *Programa de física IV de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- ENP, editor (2017c). *Programa de matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- ENP, editor (2017d). *Programa de matemáticas VI de la Escuela Nacional Preparatoria*. UNAM.
- Enrique, C. M. et Alzugaray, G. E. (2013). Modelo de enseñanza-aprendizaje para el estudio de la cinemática de un volante inercial usando tecnologías de la información y la comunicación en un laboratorio de física. *Formación universitaria*, 6(1) :3–12.
- Euclides (1991). *Elementos*, volume 1 : libros I–IV. Editorial Gredos, Madrid.
- Euclides (1994). *Elementos*, volume 2 : libros V–IX. Editorial Gredos, Madrid.
- Euclides (1996). *Elementos*, volume 3 : libros V–IX. Editorial Gredos, Madrid.
- Euler, L. (1748). *Introduction à l'analyse infinitésimale*, volume 2. Chez Barrois.
- Galbraith, P., Goos, M., Renshaw, P., et Geiger, V. (2003). Technology enriched classrooms : some implications for teaching applications and modelling. In *Mathematical modelling in education and culture*, pages 111–125. Elsevier.
- Galilei, G. (1632). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, volume 36. Edizioni Studio Tesi.
- Galilei, G. (1981). El ensayador. trad. M. Revuelta. Buenos Aires, Aguilar.
- Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité.
- García, L., Vázquez, R., et Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *ingenierías. Revista de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León*, (24), pages 27–34.
- Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 19 :51–63.
- Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. In *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, pages 305–314. Springer.

- Giancoli, D. (2006). *Principios con Aplicaciones de Física*. Madrid : Prentice Hall.
- Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. In *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, pages 75–87. Springer.
- Guerra, E. M. G., Patermina, H. E. H., et Jácome, A. E. C. (2015). Dificultades en el aprendizaje y el trabajo inicial con funciones en estudiantes de educación media. *Scientia et technica*, 20(3) :278–285.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational studies in mathematics*, 67(3) :237–254.
- Haines, C. R. et Crouch, R. (2010). *Remarks on a Modeling Cycle and Interpreting Behaviours*, pages 145–154. Springer US, Boston, MA.
- Halliday, D., Resnick, R., et Walker, J. (2010). *Fundamentals of Physics*. John Wiley & Sons.
- Hardie, R. et Gaye, R. (1994). Translation of aristotle’s “physics”.
- Hernández, A. (2013). *Sistema de actividades para propiciar la evaluación formativa en la enseñanza de la física*. PhD thesis, Universidad de las islas Baleares.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática*, 10(02) :23–45.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico)*.
- Hoffmann, B. (1985). *Einstein*. Salvat.
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11 :175–193.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 27 :32.
- Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school–examples and experiences. *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum. Hildesheim : Franzbecker*, pages 99–108.
- Kaiser, G. (2006). Introduction to the working group “applications and modelling”. In *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, pages 1613–1622.
- Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B., et Stillman, G. (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling : ICTMA14*, volume 1. Springer Science & Business Media.

- Kaiser, G. et Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, 38(3) :302–310.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept : A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4) :282–300.
- Kline, M., Martínez, M., et al. (1999). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.
- Krulik, S. et Rudnick, J. A. (1987). *Problem solving : A handbook for teachers*. ERIC.
- Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas* (Agustín Contin, trad.). México, Fondo de Cultura Económica. (Obra original publicada en 1962).
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16 :9–24.
- Kuzniak, A., Nechache, A., et Drouhard, J. (2016a). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, 48(6) :861–874.
- Kuzniak, A. et Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4-1) :5–39.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., et Elia, I. (2016b). Mathematical working spaces in schooling : an introduction. *ZDM*, 48(6) :721–737.
- Lagrange, J. (2016). Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus : modelling a suspension bridge through " jigsaw" group work. In *Colloque Espaces de Travail Mathématique*, pages 18–22.
- Lakatos, I. (1963). Proofs and refutations (i). *The British Journal for the Philosophy of science*, 14(53) :1–25.
- Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité.
- Lelong-Ferrand, J. et Arnaudès, J.-M. (1991). *Les Cours de référence. Cours de mathématiques. T. 3. Géométrie et cinématique*. Dunod Paris, 2001 Collection : Les Cours de référence 2e éd. Format : 16 cm x
- Lesh, R. A. et Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism : Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Routledge.
- López, J. et Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. In *Acta latinoamericana de matemática educativa 21*, volume 21, pages 308–318. Comité Latinoamericano de Ma-

temática Educativa AC.

- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., et Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics : Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6) :503–513.
- Monk, S. et Nemirovsky, R. (1994). The case of dan : Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 4 :139–168.
- Montoya-Delgadillo, E., Murillo, R. P., Vandebrouck, F., et Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1) :139–160.
- Montoya-Delgadillo, E. et Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des espaces de travail mathématique. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 19, pages 73–101.
- Montoya-Delgadillo, E. et Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6) :739–754.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3) :249–266.
- Moutet, L. (2016). *Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : une ingénierie didactique*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité.
- Nechache, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité.
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume 22, pages 67–90.
- Newton, I. (1802). *Mathematical principles of natural philosophy*. A. Strahan.
- Oresme, N. (1482). Tractatus de latitudinibus formarum. padova. *British Library : IA 3Q024*, 4.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14(3) :235–250.
- Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación matemática*, 26(2) :111–133.
- Peirce, C. S. (1931). *Collected papers of charles sanders peirce*. Harvard University Press.
- Petersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions. *Arch. Internat. d'Hist. d. Sciences*, 24(94) :29–50.

- Pisa, I. (2010). Organización para la cooperación y el desarrollo económico [en línea]< http.
- Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational studies in mathematics*, 2(2) :393–404.
- Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. *New trends in mathematics teaching IV*, pages 232–248.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Ramírez-Leal, P., Prada-Núñez, R., et Hernández-Suárez, C. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*.
- Reyes-Avenidaño, C. G. (2018). Paradigmas del espacio de trabajo matemático en cinemática : Análisis de una actividad de modelización. In *Actes du 6th colloque Espace de Travail Mathématique (Valparaiso, Chile, Decembre 2018)*, pages 63–72.
- Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in Mathematics*, 57(2) :229–263.
- Richelet, P. (1680). 1680. *Dictionnaire françois*, 2.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 8(2) :139–190.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4) :505–528.
- Ross, W. D. (1925). Aristotle's metaphysics. a revised text with introduction and commentary. *Mind*, 34(135) :351–361.
- Rossi, Paolo et Pons, M. (1998). *El nacimiento de la ciencia moderna en Europa*. Crítica.
- Ruiz Higuera, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función : Análisis epistemológico y didáctico. *Doctoral dissertation, Universidad de Jaén*.
- Sánchez Soto, I., Moreira, M. A., et Caballero Sahelices, C. (2009). Implementación de una propuesta de aprendizaje significativo de la cinemática a través de la resolución de problemas. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 17(1) :27–41.
- Sastre, V., P., Rey, G., et Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16 :141–155.
- Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, D., et Freedman, R. A. (2012). *Sears and Zemans-*

- ky's University Physics : With Modern Physics*. Addison-Wesley.
- Selden, J., Mason, A., et Selden, A. (1989). Can average calculus students work nonroutine problems? *Journal of Mathematical Behavior*, 8 :45–50.
- Selden, J., Selden, A., et Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. *MAA notes*, pages 19–28.
- SEP, A. (2011). Plan de estudios 2011. educación básica. *México : SEP*.
- Serway, R. A., Jewett, J. W., Hernández, A. E. G., et López, E. F. (2005). *Física para ciencias e ingeniería*. Thomson.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1) :1–36.
- Spivak, M. (1988). *Cálculo en variedades*. Reverté.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo*. Cengage Learning.
- Tall, D. (2010). A sensible approach to the calculus. In *Plenary at the National and International Meeting on the Teaching of Calculus*.
- Thomas, G. B. et Weir, M. D. (2005). *Cálculo : una variable*, volume 1. Pearson Educación.
- Ursini, S. (1996). Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable. *México : Grupo editorial Iberoamérica*.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., et Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental : una propuesta alternativa*. Trillas.
- Ursini, S. et Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. *Investigaciones en Matemática Educativa II. CINVESTAV-IPN. Mexico*.
- Ursini, S. et Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Vandebrouck, F. (2011). *no title*. Habilitation à diriger des recherches, Université Denis Diderot - Paris 7.
- Vygotsky, L. (1962). Thought and language.(e. hanfman and g. vakar, eds. and trans.).
- Yanitelli Ruiz, M. S. (2011). *Un cambio significativo en la enseñanza de las ciencias : el uso del ordenador en la resolución de situaciones experimentales de física en el nivel universitario básico*. PhD thesis, Université Denis Diderot - Paris 7.
- Youshkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19 th century. *Archive for History of exact Sciences*, 16(1) :37–85.

Zazkis, R., Dubinsky, E., et Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies : A study of students' understanding of the group d 4. *Journal for research in Mathematics Education*, pages 435–457.

Annexe A

Les guides de travail

A.1 Activité MRU

Actividad 1

Modelización matemática del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

1. Realicen la filmación del MRU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones...

Trabajo en Tracker

2. Observen la tabla de valores que obtuvieron con Tracker :
 - a) Hay tres variables t , x y y ¿Cuál es su significado físico?
 - b) Observen, en Tracker, y esbocen las siguientes gráficas y escriban su significado :
 - $xVst$
 - $yVst$
 - $yVsx$

Trabajo en GeoGebra

Crear una carpeta con el nombre Actividad1_MRU_Nombre del equipo. En esta carpeta se guardaran todos los documentos que se vayan realizando en esta actividad.

$xVst$

- I Construyan la gráfica $xVst$ con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombrén el archivo como $xvst_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU...

- II Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica $xVst$ (con el comando ajuste lineal)
- III Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nómbrarla $xvst_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

$yVst$

- I Construyan la gráfica y $vs t$ con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $yvst_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica y $vs t$ (con el comando ajuste lineal)
- III Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nómbrarla $yvst_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

$yVsx$

- I Construyan la gráfica y $vs t$ con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $yvsx_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU ...
- II Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica $yVsx$ (con el comando ajuste lineal)
- III Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nómbrarla $yvsx_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

Entreguen a la profesora los archivos de GeoGebra con los datos y las gráficas para que las imprima

Trabajo con las gráficas impresas

- I GeoGebra da las ecuaciones con las variables x y y . Reescribanlas con las variables adecuadas al movimiento realizado. También nombren los ejes coordenados con la variable correspondiente
- II Expliquen el significado de cada una de las gráficas obtenidas con respecto al movimiento
- III ¿De las tres gráficas cuál es la que modela el movimiento del objeto? ¿Por qué?

3. Obtengan la ecuación de la trayectoria $y(x)$ (ecuación rectangular) con $x(t)$ y $y(t)$ (ecuaciones paramétricas); ¿qué sucede cuando tratan de obtenerla?
4. Escriban la ecuación experimental que modela el movimiento y compárenla con la fórmula teórica de la distancia del MRU ($d = vt$).
¿Es posible saber la velocidad y la aceleración del movimiento? ¿cómo?
5. ¿Qué pueden decir del movimiento, considerando todo lo que realizaron?
6. Si pudieran hacer una vez más el experimento ¿qué mejoras harían?

Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron.

A.2 Activité MRUA

Actividad 2

Modelización matemática del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado
(MRUA)

1. Realicen la filmación del MRUA que hayan elegido y escriban : el porqué de su elección, sus observaciones, dificultades, consideraciones...

Trabajo en Tracker

2. Con la información del movimiento que genera, por defecto, Tracker, exploren las variables y gráficas adicionales al oprimir el botón datos y diagramas, respectivamente. ¿Consideran importante agregar algunas de ellas en su análisis? ¿cuáles y por qué?.

Trabajo en GeoGebra

Copien la tabla de datos a GeoGebra y realicen todas las gráficas, junto con su ajuste, que consideren necesarias para el análisis (aparte de x vs t , y vs t y y vs x). Guarden todos los datos en una carpeta con el nombre MRUA_Nombre del equipo. Los archivos que irán dentro de la carpeta deben ser nombrados también, por ejemplo $xvst_MRUA$, $yvst_MRUA$. . . No olviden hacer captura de pantalla a las gráficas con la ecuación de ajuste para su impresión

Nota : En una USB entreguen a la profesora los archivos de GeoGebra con los datos y las gráficas para que las imprima

Trabajo con las gráficas impresas

3. A un lado de cada gráfica :

I GeoGebra da las ecuaciones con las variables x y y . Reescribanlas con las variables adecuadas al movimiento realizado. También nombren los ejes coordenados con la variable correspondiente

II Expliquen el significado de cada una de las gráficas obtenidas con respecto al movimiento

III ¿De las tres gráficas cuál es la que modela el movimiento del objeto? ¿Por qué?

a) x vs t

b) y vs t

c) y vs x

4. ¿Se puede obtener la ecuación de la trayectoria utilizando las ecuaciones de posición (ecuaciones paramétricas)? ¿qué debería pasar, con esta ecuación, si el movimiento fuera ideal?

5. Comparen la ecuación que modela el movimiento (ecuación de posición) con la ecuación físicas del MRUA ($d = d_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$). Determinen la correspondencia entre ellas y escriban el significado físico término a término.

a Deriven la ecuación de posición, compárenla con $v_f = v_o + a t$ (otra de las ecuaciones de movimiento). Determinen la correspondencia entre ellas y escriban el significado físico término a término.

b Determinen la segunda derivada, ¿qué representa físicamente?

6. ¿Qué pueden decir del movimiento a partir de los resultados obtenidos (gráficas, velocidad y aceleración)?

Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron.

A.3 Activité MCU

Actividad 3

Modelización matemática del Movimiento Circular Uniforme (MCU)

1. Realicen la filmación del MCU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones...
2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis? Argumenten su respuesta

Trabajo en Tracker

Exporten su video a Tracker para comenzar el análisis.

3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado
4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?
5. Observen las gráficas :
 - a) x vs t y y vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?
 - b) x vs θ y y vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

Trabajo con GeoGebra

6. Importen la tabla de valores de Tracker en GeoGebra, grafiquen, hagan el ajuste con la función seno y Comparen :
 - a) x vs t y y vs t Escriban qué significa cada uno de los términos de las funciones que arroja GeoGebra cuando hacen el ajuste.
 - I Escriban una de las funciones en términos del coseno (pueden usar GeoGebra para verificar las diferentes opciones)

Ayuda : No olviden considerar que : $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cos}(x)$. Busquen información de traslación de funciones seno y coseno (si lo necesitan).
 - b) x vs θ y y vs θ ¿cómo son con respecto a las anteriores? ¿por qué? (convertir los grados a radianes)
 - I Observen los ajustes obtenidos, simplifiquen las ecuaciones y completen la tabla [A.1](#)
 - c) Si la velocidad angular es $\omega = \frac{\theta}{t}$ y por tanto $\theta = \omega t$, entonces las ecuaciones paramétricas (con el parámetro θ) se pueden escribir como :

$$x =$$

$$y =$$
7. Considerando las ecuaciones con el parámetro θ

Con respecto al	Ecuación paramétrica de x	Ecuación paramétrica de y	Simplificación ecuación paramétrica de x	Simplificación ecuación paramétrica de y
Tiempo t				
Ángulo θ (rad)				

TABLE A.1 – Ecuaciones paramétricas (t y θ)

- a) Transformen las ecuaciones paramétricas a una ecuación rectangular $y(x)$ que corresponda. Recordando que $\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$
- b) ¿Qué representa matemáticamente esta ecuación? ¿cuál es el significado físico?
8. Deriven con respecto a t las ecuaciones paramétricas respectivas. ¿Qué representan, desde un punto de vista físico, estas derivadas?
9. La magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Desarróllenla algebraicamente hasta su mínima expresión. Compárenla con la fórmula de velocidad tangencial que aparece en los libros de física.
10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{dt}\right)^2}$ con el mismo razonamiento algebraico de la pregunta anterior, determinen la expresión que representa la aceleración. Compárenla con las formulas que aparecen en los libros de física.
11. Completen la siguiente tabla A.2 para 5 valores del tiempo

t [s]	θ [rad]	ω [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]	v_t [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	a_c [$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$]

TABLE A.2 – Valores de la velocidad angular, velocidad tangencial y aceleración centrípeta

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a : Desarrollo Dificultades Conclusiones

A.4 Activité MRU+MCU

Actividad 4

MRU+MCU

1. ¿Cómo realizarían un movimiento que combine el MRU y el MCU?
2. ¿Qué fenómenos identifican que presenten esta combinación de movimientos?
3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas. . .) **Ayuda : apóyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores**
4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones
 - a)
 - b)
 - c)

Analicen los movimientos que sean más sencillos de realizar con el material proporcionado.

Trabajo en Tracker y GeoGebra

5. ¿Qué gráficas deben considerar en MRU y en MCU?¿por qué?
6. Hagan las graficas y ajustes necesarios en GeoGebra, esbocen las gráficas y copien las ecuaciones que puedan obtener con GeoGebra.
7. ¿Qué forma tiene la gráfica y Vs t? ¿por qué es así?
 - a) ¿Qué información del movimiento pueden obtener del ajuste que les da GeoGebra?
8. Grafiquen x vs t ¿Por qué no es lineal? Intenten hacer el ajuste
 - a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x?
 - b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?

c) ¿Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ? Escribanla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbocen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente)

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtengan la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

Analicen los otros casos. Realicen los mismos pasos anteriores

10. A partir de todo el análisis anterior, ¿pueden llegar a las funciones paramétricas generales de un MRU+MCU (que incluyan los tres casos)? ¿cuáles serían?

11. ¿Pueden obtener $y(x)$ o $x(y)$? ¿son funciones? Justifiquen su respuesta

Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a : Desarrollo Dificultades Conclusiones

Annexe B

Réponses aux guides de travail

B.1 Réponses de l'activité 1 (MRU)

B.1.1 Activité MRU, groupe 1



Equipo 1, TMF

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
 ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA
 Guía de trabajo



Actividad 1

Modelización matemática del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

1. Realicen la filmación del MRU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones...

Al inicio pensamos que una cinta adhesiva era una buena idea sin embargo tuvimos la dificultad de que la cinta no se iba recto entonces optamos por usar una pelota antiestres, en donde no presentamos esa misma dificultad; también utilizamos una regla como nuestra medida de referencia para el conteo de pixeles a la hora de graficar el movimiento en tracker.

Observamos que al pasar el video del movimiento a tracker la regla no estaba 100% alineada por lo que creemos que nuestros resultados se podrían ver afectados, sin embargo decidimos continuar ya que el error de alineación era casi imperceptible 😊

Trabajo en Tracker

2. Observen la tabla de valores que obtuvieron con Tracker:

a) Hay tres variables t , x y y ¿Cuál es su significado físico?

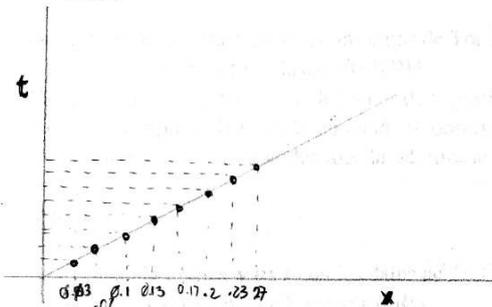
t = tiempo

x = distancia, recorrida

y = diferencia entre cada punto capturado (pixeles de diferencia).

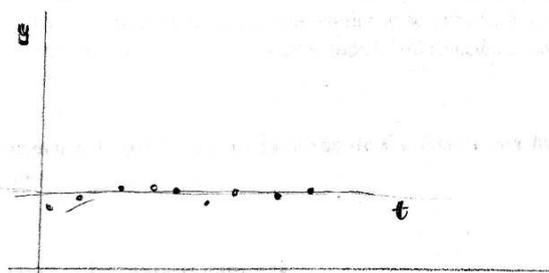
b) Observen, en Tracker, y esbocen las siguientes gráficas y escriban su significado:

• x vs t



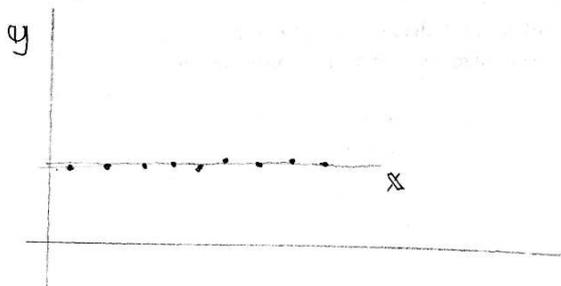
En esta gráfica, obtenemos el desplazamiento obtenido bajo cierto tiempo, en donde es constante el mismo.

• y vs t



Posición en el eje "y" con respecto al tiempo; puesto que nuestro cálculo (captura de puntos en el programa) no es exacto, cambian los puntos en "y".

• y vs x



La posición del objeto en el espacio

Trabajo en GeoGebra

Crear una carpeta con el nombre Actividad_1_MRU_ Nombre del equipo. En esta carpeta se guardaran todos los documentos que se vayan realizando en esta actividad.

x vs t

- I. Construyan la gráfica x vs t con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $xvst_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica x vs t (con el comando ajuste lineal)
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla $xvst_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

y vs t

- I. Construyan la gráfica y vs t con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $yvst_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica y vs t (con el comando ajuste lineal)
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla $yvst_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

y vs x

- I. Construyan la gráfica y vs x con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $yvsx_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU ...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica y vs x (con el comando ajuste lineal)
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla $yvsx_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

Entreguen a la profesora los archivos de GeoGebra con los datos y las gráficas para que las imprima

Trabajo con las gráficas impresas

- I. GeoGebra da las ecuaciones con las variables x y y . Reescribanlas con las variables adecuadas al movimiento realizado. También nombren los ejes coordenados con la variable correspondiente
- II. Expliquen el significado de cada una de las gráficas obtenidas con respecto al movimiento
- III. ¿De las tres gráficas cuál es la que modela el movimiento del objeto? ¿Por qué?

La última gráfica (x vs y) debido a que es la única 3
no constante y nuestro objeto sólo se mueve
horizontalmente

3. Obtengan la ecuación de la trayectoria $y(x)$ (ecuación rectangular) con $x(t)$ y $y(t)$ (ecuaciones paramétricas); ¿qué sucede cuando tratan de obtenerla?

$$x(t) = 118.62t + .24 = 118.62t + .24 = x - .24 = t = \frac{x - .24}{118.62}$$

$$y(t) = 0.5t + 0.67 = 0.5\left(\frac{x - .24}{118.62}\right) + 0.67 = 0.56 = y - 0.67$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + 67.4\right) \frac{1}{118.62}$$

$$0.5(x - .24) = (y - 0.67)118.62$$

$$\frac{1}{2}x - 0.12 = 118.62y - 79.4$$

$$y = \left(\frac{x}{2} - 12 + 79.4\right) \frac{1}{118.62}$$

4. Escriban la ecuación experimental que modela el movimiento y compárenla con la fórmula teórica de la distancia del MRU ($d = vt$).

$$x = 118.62t + 0.24 \text{ — ecuación del movimiento}$$

$x - 0.24 = 118.62t$ cuando el tiempo era 0, el objeto distancia $v \cdot t$ ya habrá recorrido .24 cm

¿Es posible saber la velocidad y la aceleración del movimiento? ¿cómo?

Sí, la velocidad es el cambio en la ecuación que modela el movimiento. Si derivamos la ecuación, obtenemos la velocidad: $x' = 118.62$. El cambio en la velocidad es la aceleración, por lo tanto, la derivada de la velocidad es la aceleración $v' = 0$. No hay aceleración.

5. ¿Qué pueden decir del movimiento, considerando todo lo que realizaron?

Comprobamos que el movimiento era un MRU, debido a que los datos obtenidos en el experimento coincidían con las características de este tipo de mov.

Gracias al análisis de las gráficas, logramos entender la relación y la diferencia entre la posición, la distancia, el movimiento, la velocidad y la trayectoria.

6. Si pudieran hacer una vez más el experimento ¿qué mejoras harían?

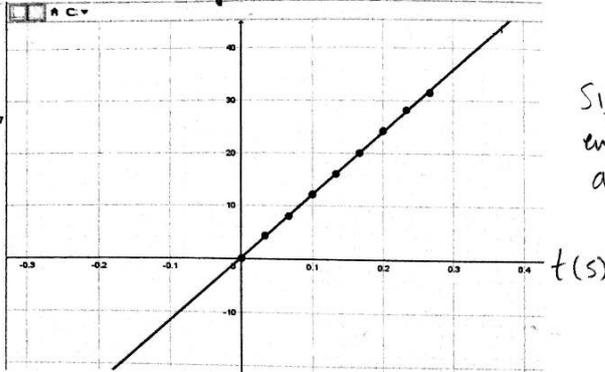
- Mejorar la captura de posición en el conjunto de puntos (tracker).
- La precisión a la hora de realizar el experimento.

XVST

Equipo 1

Equipo TMF

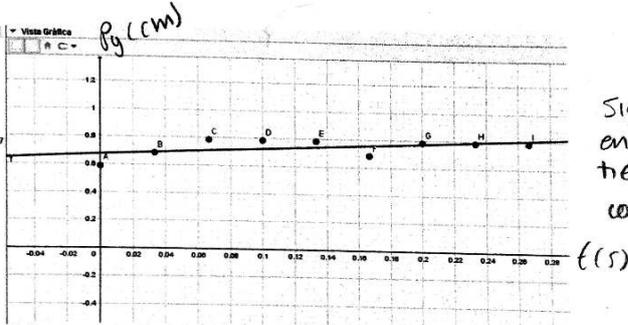
- A = (0, 0.00)
- B = (0.03, 4.36)
- C = (0.07, 8.05)
- D = (0.1, 12.14)
- E = (0.13, 16.03)
- F = (0.17, 20.01)
- G = (0.2, 24.2)
- H = (0.23, 28.19)
- I = (0.27, 31.48)
- H = (0, 0.00), (0.03, 4.36), (0.07, 8.05)
- E_y = 118.62x + 0.24



Significa la posición en x con respecto al tiempo

Y vs T

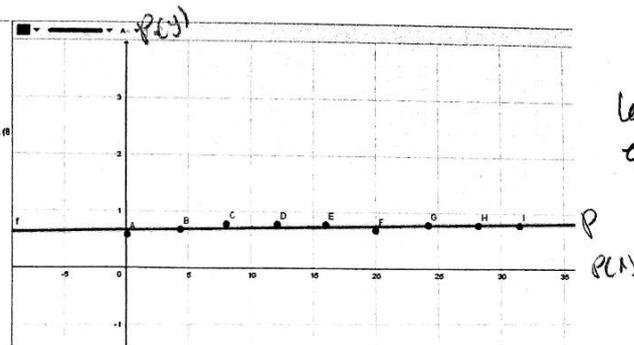
- > Vista Algebraica
- A = (0, 0.59)
- B = (0.03, 0.69)
- C = (0.07, 0.79)
- D = (0.1, 0.79)
- E = (0.13, 0.79)
- F = (0.17, 0.89)
- G = (0.2, 0.79)
- H = (0.23, 0.79)
- I = (0.27, 0.79)
- H = (0, 0.59), (0.03, 0.69), (0.07, 0.79)
- E_y = 0.5x + 0.87



Significa la posición en y con respecto al tiempo, que es constante

X vs Y

- A = (0.08, 0.59)
- B = (4.36, 0.69)
- C = (8.05, 0.79)
- D = (12.14, 0.79)
- E = (16.03, 0.79)
- F = (20.01, 0.89)
- G = (24.2, 0.79)
- H = (28.19, 0.79)
- I = (31.48, 0.79)
- H = (0.08, 0.59), (4.36, 0.69), (8.05, 0.79)
- E_y = 0.87



La posición del objeto en el espacio

B.1.2 Activité MRU, groupe 2



Equipo 2, Termodinámica

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA
Guía de trabajo



Actividad 1

Modelización matemática del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

1. Realicen la filmación del MRU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones...

Consideraciones: checamos que estuviera nivelada la mesa, para tener el más mínimo margen de error.

Trabajo en Tracker

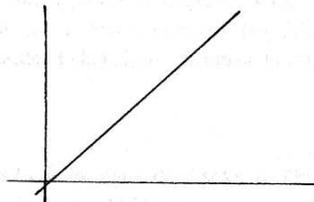
2. Observen la tabla de valores que obtuvieron con Tracker:
 a) Hay tres variables t , x y y ¿Cuál es su significado físico?

t : tiempo
 x : ~~distancia~~ recorrida en x
 posición
 y : posición en eje y .

- b) Observen, en Tracker, y esbocen las siguientes gráficas y escriban su significado:

• x vs t

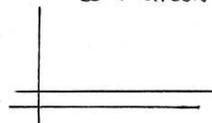
Es una pendiente, una línea recta que representa la velocidad en x , que es constante porque es un MRU



• y vs t

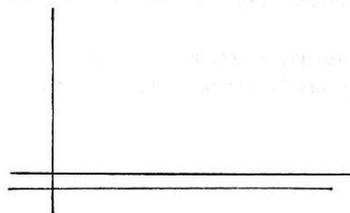
La gráfica es una línea recta horizontal, porque el movimiento de la pelota es lineal, horizontalmente, su posición vertical no debería cambiar.

Los pequeños cambios que se observan son ligeras variaciones del programa al momento de marcar nuestra referencia de movimiento



• y vs x

También es una línea recta ya que representa la trayectoria



Trabajo en GeoGebra

Crear una carpeta con el nombre Actividad_1_MRU_Nombre del equipo. En esta carpeta se guardaran todos los documentos que se vayan realizando en esta actividad.

x vs t

- I. Construyan la gráfica x vs t con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $xvst_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica x vs t (con el comando ajuste lineal)
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla $xvst_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

y vs t

- I. Construyan la gráfica y vs t con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $yvst_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica y vs t (con el comando ajuste lineal)
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla $yvst_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

y vs x

- I. Construyan la gráfica y vs x con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como $yvsx_MRU$ y guárdenlo en la carpeta MRU ...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica y vs x (con el comando ajuste lineal)
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla $yvsx_MRU$ guarden toda la información en la carpeta MRU

Entreguen a la profesora los archivos de GeoGebra con los datos y las gráficas para que las imprima

Trabajo con las gráficas impresas

- I. GeoGebra da las ecuaciones con las variables x y y . Reescribanlas con las variables adecuadas al movimiento realizado. También nombren los ejes coordenados con la variable correspondiente
- II. Expliquen el significado de cada una de las gráficas obtenidas con respecto al movimiento
- III. ¿De las tres gráficas cuál es la que modela el movimiento del objeto? ¿Por qué?

3. Obtengan la ecuación de la trayectoria $y(x)$ (ecuación rectangular) con $x(t)$ y $y(t)$ (ecuaciones paramétricas); ¿qué sucede cuando tratan de obtenerla?

$$x = 0.81t - 0.01 \quad y(t) = 0.03$$

$$t = \frac{x + 0.01}{0.81}$$

$$y\left(\frac{x + 0.01}{0.81}\right) = 0.03 \rightarrow \text{como } y(t) \text{ es una constante,}$$

si se valora en $t = \frac{x + 0.01}{0.81}$,
 daría lo mismo que valorarla
 en x . Por lo tanto, la trayectoria
 es constante en y y variable en x .

$$y(x) = 0.03$$

4. Escriban la ecuación experimental que modela el movimiento y compárenla con la fórmula teórica de la distancia del MRU ($d = vt$).

Por ser un movimiento unidimensional, la ecuación es $x(t) = 0.81t - 0.01$

En este caso la velocidad es igual a 0.81 m/s , que sería la pendiente de la gráfica y se multiplica por t que es el tiempo y el -0.01 m es un ajuste por la posición inicial la cual es $x = -0.01 \text{ m}$.

¿Es posible saber la velocidad y la aceleración del movimiento? ¿cómo?

Sí, ya que la pendiente equivale el cambio posición en x respecto al tiempo. Y como éste es constante, la aceleración es igual a 0 .

5. ¿Qué pueden decir del movimiento, considerando todo lo que realizaron?

Que cumple con las características de un movimiento rectilíneo uniforme. A pesar de que el movimiento está en 2 dimensiones espaciales, en una de ellas no existe un cambio de posición. Por lo tanto el movimiento sólo existe en el eje X .

6. Si pudieran hacer una vez más el experimento ¿qué mejoras harían?

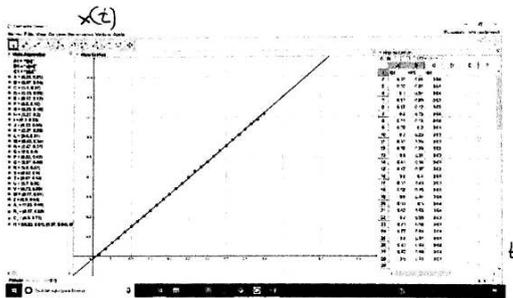
Cuidar la posición inicial del objeto para que no sea necesario el ajuste en la ecuación.

Equipo 2

Termodinamita

$x \text{ vs } t = 0.81x - 0.01$

1. $x(t) = 0.81t - 0.01$

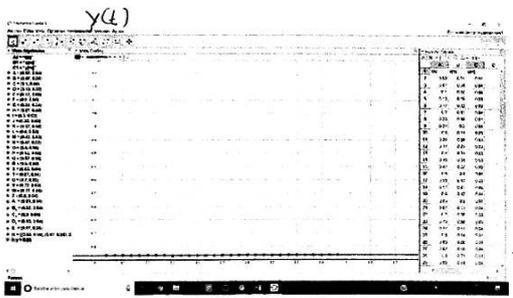


2. Ec. de una recta $y = mx + b$
 la pendiente de la recta es 0.81, por lo tanto, el cambio de la posición con respecto al tiempo, (velocidad) tiene una magnitud de 0.81 m/s. El punto inicial en $t = 0$, es en -0.01

$t \text{ vs } y = y = 0.03$

~~$x \text{ vs } y = 0.03$~~

1. $y(t) = 0.03$

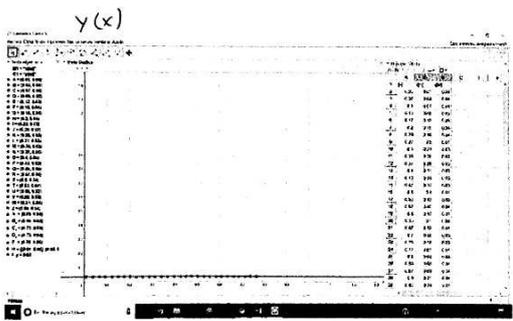


2. En esta gráfica ~~no~~ ~~es~~ la pendiente es igual a cero, por lo que a medida que t cambia, la posición en y es constante y siempre es de 0.03 m.

$x \text{ vs } x \quad y = 0.03$

~~$y \text{ vs } t = 0.03$~~ ~~$x \text{ vs } t = 0.81x -$~~

1. $y(x) = 0.03$



2. En esta gráfica la pendiente es cero ya que nos modela la trayectoria en la que cuando se avanza en x , y se mantiene constante.

3. Esta es la gráfica de la trayectoria.

B.1.3 Activité MRU, groupe 3



Equipo 3 Frixión

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA
Guía de trabajo



Actividad 1

Modelización matemática del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

1. Realicen la filmación del MRU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones...

Escogimos una pelota de un tamaño un poco más pequeño que el tamaño de una pelota de Tennis, con la ligereza de una pelota de espuma.

Además la escogimos por su tamaño, ligereza al manejar, su color y que no se rompe.

• Observaciones del experimento

Le sencilo Porque solo se siguió una trayectoria y dicha trayectoria es la más fácil que puede tener un objeto en línea recta

• Observaciones de gráfica

la primera gráfica x vs t tiene a ser una recta lo cual indica que es constante.

la segunda " y vs t no es una línea recta porque es muy pequeña pero si estuviera en una escala más pequeña se vería constante, fue desdibujado y el video fue la tercer " x vs y

• Dificultades

Encontramos un poco complejo el poder graficar en geogebra ya que al momento de querer hacer la recta lineal no encontramos la manera de como hacerlo.

Pusimos la distancia en cm y por eso no podíamos encontrar los puntos de dicha gráfica

• Geogebra gráfica

En la gráfica que hicimos de y vs t la pelota seguía una trayectoria que iba muy diferente al plano, con una inclinación que hacía que cambiaban todos nuestros resultados, tuvimos que calibrar y mover el plano y por ello nuestra gráfica se ve muy desproporcional.

Como lo medimos en cm ha y una variación muy amplia, por eso la gráfica se ve muy desproporcional.

Cambiamos la escala en 100 para que no fuera tan grande la variación en cm

Trabajo en Tracker

2. Observen la tabla de valores que obtuvieron con Tracker:

a) Hay tres variables t , x y y ¿Cuál es su significado físico?

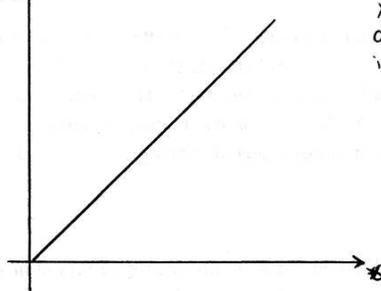
t = tiempo medido en segundos

x = posición medida en cm, el recorrido en dirección derecha o izquierda en el plano

y = posición medida en cm, el recorrido de arriba a abajo en el plano

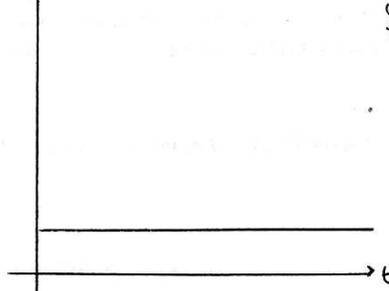
b) Observen, en Tracker, y esbocen las siguientes gráficas y escriban su significado:

• x vs t



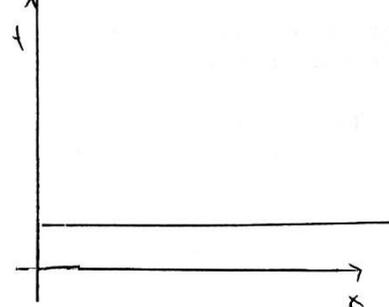
La distancia que se recorrió en x es $\propto t$ igual en tiempos iguales, ya que aumenta de la misma manera en intervalos de tiempos iguales.

• y vs t



(y) casi no cambió, porque fue casi constante en cuanto a los intervalos de tiempo.

• y vs x



Representa la posición que tomó la pelota en la trayectoria que recorrió y en " y " fue constante y " x " fue avanzando en línea recta.

Tiene un parecido con la gráfica anterior porque ~~en~~ la distancia es igual que un intervalo de tiempo como en la ² primer gráfica lo cual indica que es un MRU.

Trabajo en GeoGebra

Crear una carpeta con el nombre Actividad_1_MRU_ Nombre del equipo. En esta carpeta se guardaran todos los documentos que se vayan realizando en esta actividad.

x vs t

- I. Construyan la gráfica **x vs t** con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como **xvst_MRU** y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica **x vs t (con el comando ajuste lineal)**
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla **xvst_MRU** guarden toda la información en la carpeta MRU

y vs t

- I. Construyan la gráfica **y vs t** con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como **yvst_MRU** y guárdenlo en la carpeta MRU...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica **y vs t (con el comando ajuste lineal)**
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla **yvst_MRU** guarden toda la información en la carpeta MRU

y vs x

- I. Construyan la gráfica **y vs x** con los datos de Tracker en GeoGebra. Nombren el archivo como **yvsx_MRU** y guárdenlo en la carpeta MRU ...
- II. Hagan el ajuste lineal a la lista de puntos de la gráfica **y vs x (con el comando ajuste lineal)**
- III. Hagan una captura de pantalla en donde se observe la gráfica y la ecuación que da GeoGebra. Nombrenla **yvsx_MRU** guarden toda la información en la carpeta MRU

Entreguen a la profesora los archivos de GeoGebra con los datos y las gráficas para que las imprima

Trabajo con las gráficas impresas

- I. GeoGebra da las ecuaciones con las variables **x** y **y** . Reescribanlas con las variables adecuadas al movimiento realizado. También nombren los ejes coordenados con la variable correspondiente
 - II. Expliquen el significado de cada una de las gráficas obtenidas con respecto al movimiento
 - III. ¿De las tres gráficas cuál es la que modela el movimiento del objeto? ¿Por qué?
3. Esta

3. Obtengan la ecuación de la trayectoria $y(x)$ (ecuación rectangular) con $x(t)$ y $y(t)$ (ecuaciones paramétricas); ¿qué sucede cuando tratan de obtenerla?

Cuando tratamos de obtener " x " y " y " nos sale igual que en geogebra
(pero cuando queremos obtenerla sólo en " t ")

Cuando despejamos " y " nos dimos cuenta que " x " no es constante ya que la inclinación es mínima y geogebra no lo tomó en cuenta.

A partir de las ecuaciones de nuestros gráficos, obtuvimos las funciones de " x " y " y " y de ahí despejamos " y "

4. Escriban la ecuación experimental que modela el movimiento y compárenla con la fórmula teórica de la distancia del MRU ($d = vt$).

$$1.31x - 194.05y + 985.0671 = 0$$

La velocidad es constante con respecto al intervalo de tiempo

¿Es posible saber la velocidad y la aceleración del movimiento? ¿cómo?

Si es posible saber, a partir de saber la velocidad si lo medimos en un intervalo de tiempo podemos saber la aceleración; pero con este caso la aceleración es 0.

5. ¿Qué pueden decir del movimiento, considerando todo lo que realizaron?

En este caso la aceleración no cambia y la velocidad es igual porque recorre la misma distancia en un intervalo de tiempo que es constante.

6. Si pudieran hacer una vez más el experimento ¿qué mejoras harían?

Tener un mejor soporte para que el video sea más preciso

4

Tener en cuenta que con el marco de referencia cambia mucho la gráfica si lo dejamos en cm

del Río Pulido Erik Federico

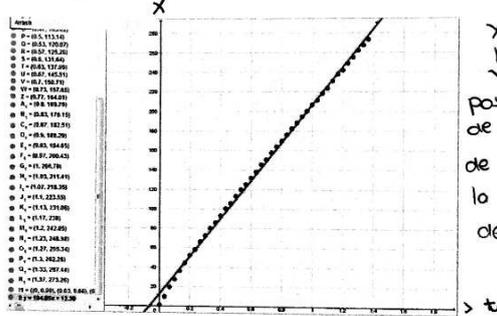
Flores Ortega Silvia

Zapata de la Rosa Alejandra

Astorga María del Carmen

Equipo 3
Friction

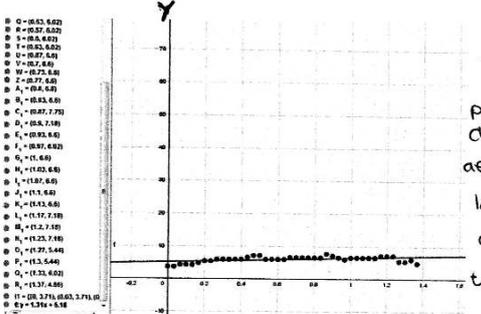
XVst f: $y = 194.05x + 12.39$



$x = 194.05 (\text{veces el tiempo}) + 12.39$
 \downarrow \downarrow
 $t = \text{tiempo}$

posición de la pelota de izquierda a derecha
 la distancia que ha recorrido la pelota en un tiempo determinado

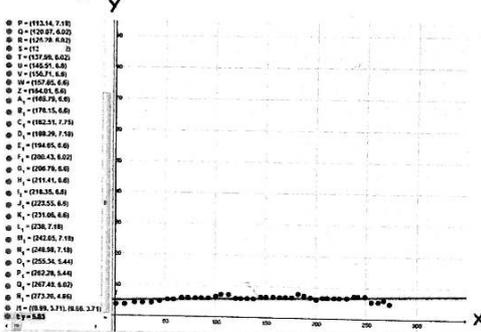
yVst f: $y = 1.31x + 5.16$



$y = 1.31 (t) + 5.16$
 \downarrow \downarrow
 posición de la pelota de arriba a abajo

la distancia que ha recorrido la pelota en un tiempo determinado solo que este es de arriba a abajo

xVsy f: $y = 5.03$



la x no aparece porque es constante la y
 $y = 5.03$

la posición del objeto en el video con respecto a los ejes "x" y "y"

31. Es la que describe el movimiento que hace el objeto porque está representando sus posiciones en los ejes "x" y "y"

B.2 Réponses de l'activité 3 (MCU)

B.2.1 Activité MCU, groupe 1



Equipal-TMF
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
 MÉXICO**

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Guía de trabajo



Actividad 3

Modelización matemática del Movimiento Circular Uniforme (MCU)

1. Realicen la filmación del MCU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones....

Escogimos el requilete de flor porque queríamos algo que otro equipo no hubiese escogido, aunque después de pasarlo a tracker nos dimos cuenta que el movimiento es bastante fácil aunque una dificultad es que no estábamos seguros de que el punto de referencia siempre estuviera en el mismo lugar.

2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis?
 Argumenten su respuesta

Sí, porque afecta el signo de los datos que obtengamos (positivos o negativos)

Trabajo en Tracker

Exporten su video a Tracker para comenzar el análisis.

3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado

x = posición con respecto al eje x
 y = posición con respecto al eje y
 t = tiempo transcurrido

4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?

Por el tipo de movimiento ya que en la circunferencia el origen del marco de referencia se encontraba en el centro (bueno en realidad nosotros decidimos ponerlo así)

5. Observen las gráficas:

a) x vs t & y vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?

No son idénticas porque cuando inició el movimiento la coordenada x difiere de la coordenada y .

b) x Vs θ & y Vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

Ambas son similares a la gráfica de un seno pero pero difieren en la ordenada al origen y que los puntos en $x(\theta)$ son negativos porque nuestro movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj.

Trabajo con GeoGebra

6. Importen la tabla de valores de Tracker en GeoGebra, grafiquen, hagan el ajuste con la función seno y Comparen:
- a) x Vs t & y Vs t Escriban qué significa cada uno de los términos de las funciones que arroja GeoGebra cuando hacen el ajuste.

x Vs t x = la posición con respecto al eje x
 t = tiempo transcurrido

y Vs t y = la posición con respecto al eje y
 t = tiempo transcurrido

Ambas variables son en función del tiempo

- I. Escriban una de las funciones en términos del coseno (pueden usar GeoGebra para verificar las diferentes opciones)

Ayuda: No olviden considerar que: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cos}(x)$. Busquen información de traslación de funciones seno y coseno (si lo necesitan).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 15.52 \sin(12.55x - 1.36) - 0.29 \\
 f(x) &= 15.52 \cos(12.55x) - 0.29
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} f(x) &= 15.52 \sin(12.55x - 1.36) - 0.29 \\ f(x) &= 15.52 \cos(12.55x) - 0.29 \end{aligned}} \right\} \text{Ecuación paramétrica de } y \text{ vs } t$$

b) x Vs θ y y Vs θ ¿cómo son con respecto a las anteriores? ¿por qué? (convertir los grados a radianes)

Son las mismas gráficas pero los puntos están en el cuadrante negativo porque nuestro movimiento van en el sentido de las manecillas del reloj

Las gráficas de θ no están desfasadas.

I. Observen los ajustes obtenidos, simplifiquen las ecuaciones y completen la tabla

Con respecto al	Ecuación paramétrica de x	Ecuación paramétrica de y	Simplificación ecuación paramétrica de x	Simplificación ecuación paramétrica de y
Tiempo t	$x = -0.65 + 15.22 \sin(12.51t + 0.22)$	$y = -0.29 + 15.22 \sin(12.55t - 1.36)$	$x = 15.22 \sin(12.57t)$	$y = 15.22 \cos(12.55t)$
Ángulo θ (rad)	$f(\theta) = -0.19 + 15.94 \sin(\theta)$	$f(\theta) = 0.07 + 15.9 \sin(\theta + 1.57)$	$f(\theta) = 15.9 \sin(\theta)$	$f(\theta) = 15.9 \cos(\theta)$

Quitamos los términos que estaban fuera del término que contenía el seno, porque no solo representaba que nuestro movimiento no era

- c) Si la velocidad angular es $\omega = \frac{\theta}{t}$ y por tanto $\theta = \omega t$, entonces las ecuaciones paramétricas (con el parámetro θ) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{Sen}(\omega t) & x &= 15.22 \operatorname{sen}(\theta) \\ x &= 15.22 \operatorname{sen}(\underbrace{12.51 t}_{\omega}) & y &= 15.22 \cos(\theta) \end{aligned}$$

7. Considerando las ecuaciones con el parámetro θ

- d) Transformen las ecuaciones paramétricas a una ecuación rectangular y(x) que corresponda. Recordando que $\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{cos}^2(\theta) = 1$

$$[(15.22 \operatorname{sen}(\theta))^2 + [\cos(\theta)(15.22)]^2 = r^2]$$

- e) ¿Qué representa matemáticamente esta ecuación? ¿cuál es el significado físico?

(a ecuación de la circunferencia, matemáticamente.
Y físicamente, representa la trayectoria

8. Deriven con respecto a t las ecuaciones paramétricas respectivas. ¿Qué representan, desde un punto de vista físico, estas derivadas?

$$x = 15.22 \operatorname{sen}(12.51 t)$$

$$\frac{dx}{dt} = 15.22 \cos(12.51 t) \frac{d(12.51 t)}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = (15.22) \cos(12.51 t) (12.51) \rightarrow \text{velocidad respecto a } x$$

$$y = 15.22 \cos(12.51 t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -15.22 \operatorname{sen}(12.51 t) \cdot 12.51 \rightarrow \text{velocidad en } y$$

9. La magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Desarróllena algebraicamente hasta su mínima expresión. Compárenla con la fórmula de velocidad tangencial que aparece en los libros de física.

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\left[(15.22 \text{ cm})(12.5 \text{ s})\cos(12.51 \text{ s})\right]^2 + \left[(-15.22 \text{ cm})(12.5 \text{ s})\sin(12.51 \text{ s})\right]^2} \\
 &= \sqrt{\left[(15.22 \text{ cm})^2(12.5 \text{ s})^2 \cos^2(12.51 \text{ s})\right] + \left[(-15.22 \text{ cm})^2(12.5 \text{ s})^2 \sin^2(12.51 \text{ s})\right]} \rightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1 \\
 &= \sqrt{(15.22 \text{ cm})^2(12.5 \text{ s})^2 [\cos^2(12.51 \text{ s}) + \sin^2(12.51 \text{ s})]} \\
 &= \sqrt{(15.22 \text{ cm})^2(12.5 \text{ s})^2} \\
 v_t &= (15.22 \text{ cm})(12.5 \text{ s}) \rightarrow |v_t = r \cdot \omega| \quad v_t = 190.25 \text{ cm/s}
 \end{aligned}$$

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ con el mismo razonamiento algebraico de la pregunta anterior, determinen la expresión que representa la aceleración. Compárenla con las formulas que aparecen en los libros de física.

$\frac{dv_x}{dt} = 15.22 \cdot [-\sin(12.55t)] \cdot (12.55 \text{ s})^2$ $\frac{dv_y}{dt} = 15.22 \cdot [\cos(12.55t)] \cdot (12.55 \text{ s})^2$

Debido a que el seno es la derivada del coseno, simplemente sustituimos "cos" por "sen".

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{\left[(15.22) \cdot (-\sin(12.55 \text{ s})) (12.55 \text{ s})^2\right]^2 + \left[(15.22 \text{ cm}) \cdot \cos(12.55 \text{ s}) (12.55 \text{ s})\right]^2} \\
 a &= \sqrt{(15.22 \text{ cm})^2 (12.55 \text{ s})^4 [-\sin^2(12.55 \text{ s})] + (15.22 \text{ cm})^2 (12.55 \text{ s})^4 [+ \cos^2(12.55 \text{ s})]} \\
 &= \sqrt{(15.22)^2 (12.55 \text{ s})^4} \\
 a_c &= (15.22 \text{ cm})(12.55 \text{ s})^2 \quad |a_c = r \omega^2|
 \end{aligned}$$

11. Completen la siguiente tabla para 5 valores del tiempo

$t[s]$	$\theta [rad]$	$\omega \left[\frac{rad}{s} \right]$	$r \cdot \omega$ $v_t \left[\frac{m}{s} \right]$	$r \cdot \omega^2$ $a_c \left[\frac{m}{s^2} \right]$
0.7 s	-12.37 rad	-17.67 rad/s	-268.93 $\frac{cm}{s}$	4752.12 $\frac{cm}{s^2}$
0.8 s	-13.67 rad	-17.88 rad/s	-259.96 $\frac{cm}{s}$	4440.87 $\frac{cm}{s^2}$
0.9 s	-14.88 rad	-16.63 rad/s	-261.58 $\frac{cm}{s}$	4158.72 $\frac{cm}{s^2}$
1.0 s	-16.03 rad	-16.03 rad/s	-243.47 $\frac{cm}{s}$	3910.99 $\frac{cm}{s^2}$
1.1 s	-17.18 rad	-15.58 rad/s	-235.91 $\frac{cm}{s}$	3656.6 $\frac{cm}{s^2}$

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

Para los valores de ω y v_t , van aumentando, aunque inician como un valor negativo debido a la dirección que toma nuestro movimiento, el cual va a favor de las manecillas del reloj.

También otra explicación a la desaceleración es la inconsistencia de velocidad; la aceleración va disminuyendo.

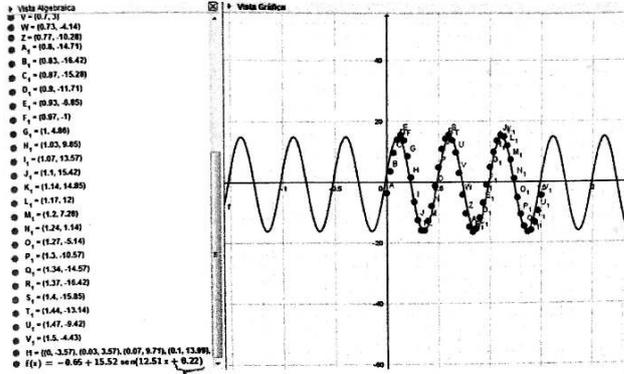
Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a:

- Desarrollo
- Dificultades
- Conclusiones

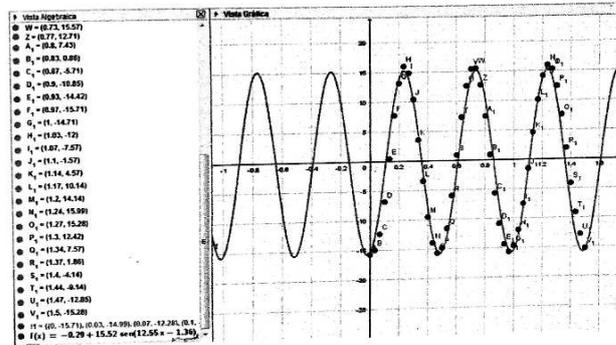
Equipo TMF MCU

13-02-19

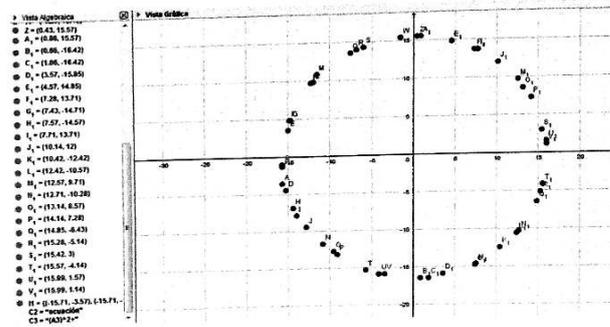
XvsT



TvsY

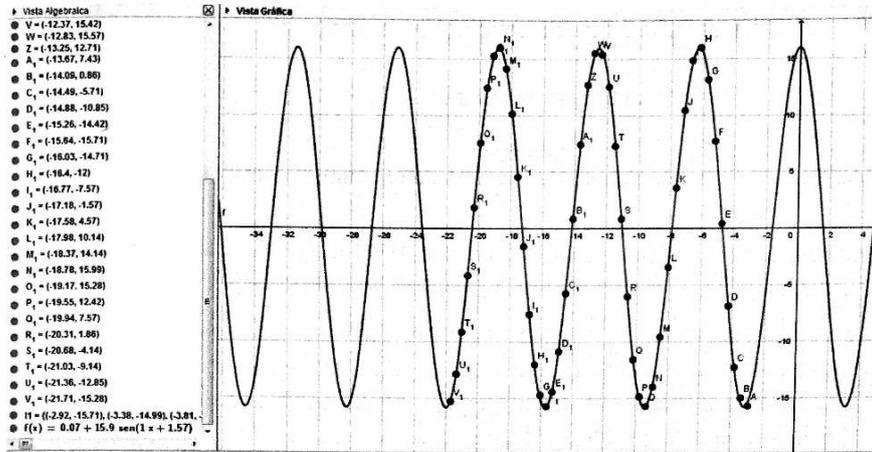


XvsY

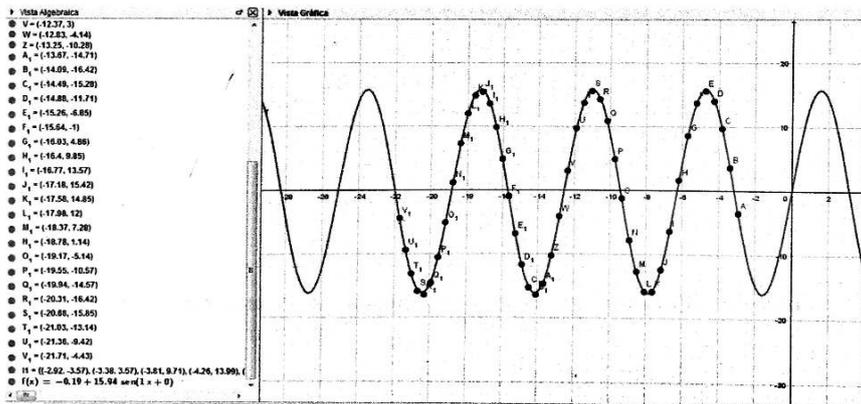


Equipo TMF

α VSy



α VSx



B.2.2 Activité MCU, groupe 2



Equipo 2 - termodinámica

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Guía de trabajo



Actividad 3

Modelización matemática del Movimiento Circular Uniforme (MCU)

1. Realicen la filmación del MCU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones....

Mantener estable el centro de rotación. •
 Consideramos la posición de la cámara con respecto
 al movimiento, que fuera paralelo

2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis?
 Argumenten su respuesta

Pues si hacemos el movimiento con sentido a las
 manecillas sería negativo

Trabajo en Tracker

Exporten su video a Tracker para comenzar el análisis.

3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado

x → Posición horizontal
 y → Posición vertical
 θ → Ángulo con respecto al origen.
 v → velocidad tangencial
 ω → velocidad angular

4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?

Porque el origen está en el centro del movimiento.

5. Observen las gráficas:

a) x Vs t & y Vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?

Están desfasadas por aproximadamente $\frac{\pi}{2}$.

b) x Vs θ & y Vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

La función x vs θ es una función coseno y y vs θ es una función seno. Hay un desfase.

Trabajo con GeoGebra

6. Importen la tabla de valores de Tracker en GeoGebra, grafiquen, hagan el ajuste con la función seno y Comparen:

a) x Vs t & y Vs t Escriban qué significa cada uno de los términos de las funciones que arroja GeoGebra cuando hacen el ajuste.

$$X \text{ vs } t = 0.02 + 0.33 \text{ sen}(11.83t + 1.68)$$

Es un ajuste para que quede en el centro
 Amplitud radio
 Frecuencia
 Ajuste de seno
 velocidad angular en x
 Ajuste a coseno $\approx \frac{\pi}{2}$

$$Y \text{ vs } t = -0.02 + 0.32 \text{ sen}(11.73t + 0.17)$$

Ajuste para que quede en el centro
 Amplitud radio
 Frecuencia
 Ajuste a seno
 velocidad angular en y

I. Escriban una de las funciones en términos del coseno (pueden usar GeoGebra para verificar las diferentes opciones)

Ayuda: No olviden considerar que: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$. Busquen información de traslación de funciones seno y coseno (si lo necesitan).

$$x(t) = 0.02 + 0.33 \cos(11.83t + 0.11)$$

b) x Vs θ y y Vs θ ¿cómo son con respecto a las anteriores? ¿por qué? (convertir los grados a radianes)

x vs θ es una función coseno y y vs θ una función seno. Se asimilan a x vs t y y vs t porque el cambio en θ y t es similar, es decir, hubo una velocidad constante en el movimiento, por ello los ajustes son certeros

I. Observen los ajustes obtenidos, simplifiquen las ecuaciones y completen la tabla

Con respecto al	Ecuación paramétrica de x	Ecuación paramétrica de y	Simplificación ecuación paramétrica de x	Simplificación ecuación paramétrica de y
Tiempo t	$x(t) = 0.02 + 0.33 \cos(11.83t + 0.11)$	$y(t) = -0.02 + 0.32 \sin(11.73t + 0.17)$	$x(t) = r \cos(\omega t + \phi_x)$	$y(t) = r \sin(\omega t + \phi_y)$
Ángulo θ (rad)	$x(\theta) = 0.01 + 0.33 \cos(\theta - 0.02)$	$y(\theta) = 0.32 \sin(\theta + 0.02)$	$x(\theta) = r \cos \theta$	$y(\theta) = r \sin \theta$

- c) Si la velocidad angular es $\omega = \frac{\theta}{t}$ y por tanto $\theta = \omega t$, entonces las ecuaciones paramétricas (con el parámetro θ) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 0.01 + 0.33 \cos(\theta - 0.02) & x &= 0.01 + 0.33 \cos(\omega t - 0.02) \\ y(\theta) &= 0.32 \sin(\theta + 0.02) & y &= 0.32 \sin(\omega t - 0.02) \end{aligned}$$

7. Considerando las ecuaciones con el parámetro θ

- d) Transformen las ecuaciones paramétricas a una ecuación rectangular $y(x)$ que corresponda. Recordando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

$$\begin{aligned} X(\theta) &= 0.33 \cos \theta & r &\approx 0.33 \approx 0.32 \Rightarrow r \approx 0.325 \\ Y(\theta) &= 0.32 \sin \theta & \frac{y^2}{0.106} &= \cos^2 \theta & \frac{x^2 + y^2}{0.106} &= 1 \\ X(\theta) &= 0.325 \cos \theta & \frac{y^2}{0.106} &= \sin^2 \theta & \boxed{x^2 + y^2 = 0.106} \\ Y(\theta) &= 0.32 \sin \theta & \frac{x^2}{0.106} + \frac{y^2}{0.106} &= 1 \end{aligned}$$

- e) ¿Qué representa matemáticamente esta ecuación? ¿cuál es el significado físico?

Matemáticamente es la ecuación de una circunferencia con radio de $\sqrt{0.106}$.

Físicamente representa la trayectoria del movimiento.

8. Deriven con respecto a t las ecuaciones paramétricas respectivas. ¿Qué representan, desde un punto de vista físico, estas derivadas?

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.325 \cos(11.83t + 0.11) = & \text{Es la función de la} \\ x'(t) &= -0.385 \sin(11.83t + 0.11) \cdot (11.83) & \text{velocidad tangencial en} \\ & & \text{x y la velocidad} \\ y(t) &= 0.325 \sin(11.83t + 0.11) \rightarrow & \text{tangencial en y} \\ y'(t) &= 0.325 \cdot 11.83 \cos(11.83t + 0.11) & \text{análisis} \end{aligned}$$

Era 11.83 pero se puso 11.83 para facilitar. Era 0.17 pero se puso 0.11 para facilitar el análisis.

9. La magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Desarróllena algebraicamente hasta su mínima expresión. Compárenla con la fórmula de velocidad tangencial que aparece en los libros de física.

$$v = \sqrt{[-0.325 \sin(11.83t + 0.11) \cdot 11.38]^2 + [0.325 \cdot 11.38 \cos(11.83t + 0.11)]^2}$$

$$v = \sqrt{[0.106 \cdot 129.5 \sin^2(11.83t + 0.11)] + [0.106 \cdot 129.5 \cos^2(11.83t + 0.11)]}$$

$$v = \sqrt{0.106 \cdot 129.5 (\sin^2(11.83t + 0.11) + \cos^2(11.83t + 0.11))}$$

$$v = \sqrt{0.106 \cdot 129.5}$$

$$v = \sqrt{0.106} \cdot \sqrt{129.5}$$

$$v = (0.325)(11.83)$$

$$v = 3.845 \frac{m}{s}$$

Es similar a $v = r\omega$
debido a que el radio
es $r = 0.325 \text{ m}$ y la
velocidad angular es $\omega = 11.83 \frac{\text{rad}}{s}$.

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ con el mismo razonamiento algebraico de la pregunta anterior, determinen la expresión que representa la aceleración. Compárenla con las formulas que aparecen en los libros de física.

$$x'(t) = (-0.325 \cdot 11.38) \sin(11.83t + 0.11)$$

$$x''(t) = (-0.325) \cdot 11.38^2 \cos(11.83t + 0.11) + 0$$

$$y'(t) = 0.325 \cdot 11.83 \cos(11.83t + 0.11)$$

$$y''(t) = -0.325 \cdot 11.83^2 \sin(11.83t + 0.11)$$

$$a = \sqrt{[-0.325 \cdot 11.38^2 \cos(11.83t + 0.11)]^2 + [-0.325 \cdot 11.83^2 \sin(11.83t + 0.11)]^2}$$

$$a = \sqrt{0.325^2 \cdot 11.38^4 \cos^2(11.83t + 0.11) + 0.325^2 \cdot 11.83^4 \sin^2(11.83t + 0.11)}$$

$$a = \sqrt{0.325^2 \cdot 11.38^4 (\cos^2(11.83t + 0.11) + \sin^2(11.83t + 0.11))}$$

$$a = \sqrt{0.325^2 \cdot 11.38^4}$$

$$a = 0.325 \cdot 11.38^2$$

$$a = 42.089 \frac{m}{s^2}$$

Es similar a $a = r\omega^2$
debido a que el radio es
 $r = 0.325 \text{ m}$ y la velocidad
angular es $\omega = 11.38 \frac{\text{rad}}{s}$.

11. Completen la siguiente tabla para 5 valores del tiempo

$t[s]$	$\theta [rad]$	$\omega \left[\frac{rad}{s}\right]$	$v_t \left[\frac{m}{s}\right]$	$a_c \left[\frac{m}{s^2}\right]$
0.13	1.56	12.3	3.9	46.8
0.33	4.26	12.91	4.19	54.167
0.6	7.07	11.78	3.82	45.1
0.93	11.16	12	3.9	46.8
1.23	14.46	11.92	3.87	46.18

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

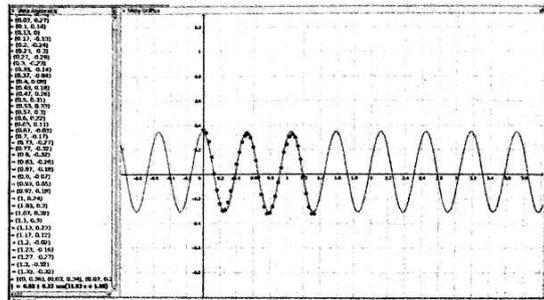
No son constantes, mas son similares, aproximadamente la velocidad angular (ω) es $11.38 \frac{rad}{s}$ de forma teorica, la velocidad tangencial (v_t) es $3.845 \frac{m}{s}$ y la aceleración centripeta (a_c) es $42.089 \frac{m}{s^2}$.

Debido a tomar puntos al azar que no estaban sujetos a los ajustes correspondientes, los valores de ω son ligeramente mayores al obtenido mediante la modelización, por lo tanto v_t y a_c son mayores, sin embargo siguen dentro de un rango aceptable y congruente con los valores obtenidos del modelado.

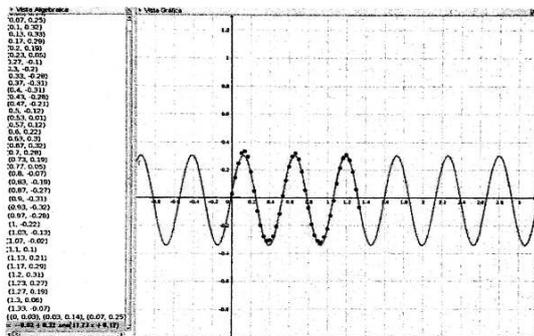
Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a:

- Desarrollo
- Dificultades
- Conclusiones

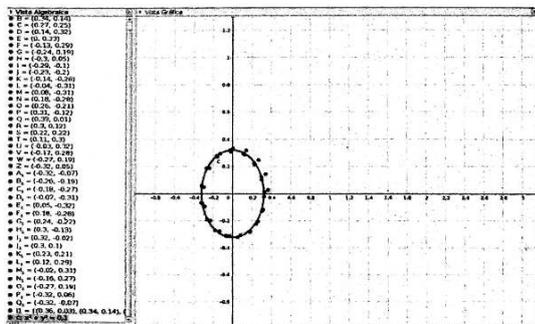
Equipo 2



$$x(t) = 0.02 + 0.33 \cos(11.83t + 0.11)$$

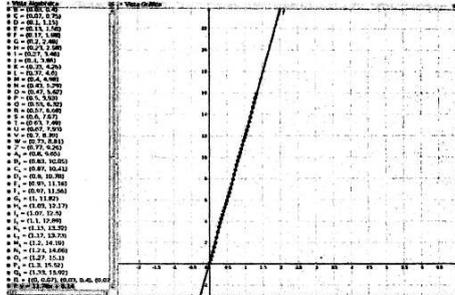


$$y(t) = -0.02 + 0.32 \text{ sen}(11.73t + 0.17)$$

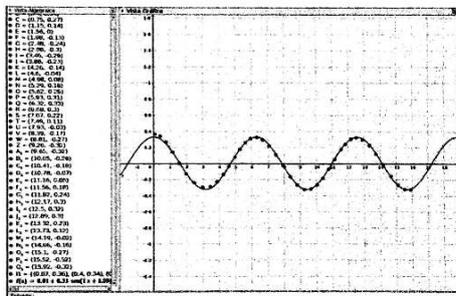


$$x^2 + y^2 = 0.1$$

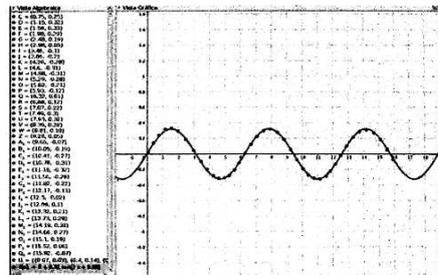
Equipo 2



$$\theta(t) = 11.78t + 0.14$$



$$x(\theta) = 0.01 + 0.33 \cos(\theta - 0.02)$$



$$y(\theta) = 0.32 \text{ sen}(\theta + 0.02)$$

B.2.3 Activité MCU, groupe 3

Equipo 3 Frixlán



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Guía de trabajo



Actividad 3

Modelización matemática del Movimiento Circular Uniforme (MCU)

1. Realicen la filmación del MCU que hayan elegido y escriban, el porqué de la elección de esos materiales, sus observaciones, dificultades, consideraciones....

Nosotros realizamos 3 videos, era un 40-40, un juguete y un disco de acetato, Escogimos este ultimo porque en los demás no teníamos una marco de referencia, Además la rotación del disco se veía muy clara; y pusieron un masking para saber las vueltas que daba el disco en un cierto intervalo de tiempo pero la luz afecto interferio al momento de marcar la trayectoria

Para poner nuestro marco de referencia en tracker nos fijamos como salían las gráficas y vimos que cuando ponamos el marco en el centro, vimos que con el ángulo y el tiempo nos salía una recta

2. ¿Consideran que el sentido de movimiento será un elemento relevante en su análisis? Argumenten su respuesta

Si, porque el angulo irá cambiando y puede ser positivo o negativo. Así también podemos saber en que sentido esta girando

Trabajo en Tracker

Exporten su video a Tracker para comenzar el análisis.

3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado

x = posición en el eje x :

y = posición en el eje y

t = tiempo en el cual recorre, el objeto, una posición determinada

θ = el ángulo que forma el eje x con respecto al punto (x, y) , parte del punto $(0, 0)$

4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?

porque cuando gira nuestro punto de referencia va pasando por todos los cuadrantes y va regresando al mismo punto de donde empezó

5. Observen las gráficas:

a) x vs t & y vs t ¿qué diferencias hay entre ellas?

x vs t es el coseno mientras que y vs t es el seno, uno empieza desde 1 mientras que el otro comienza en 0

b) x Vs θ & y Vs θ ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

La diferencia de estas 2 gráficas es que x vs θ empieza en 1 el cual es coseno y y vs θ es el seno que comienza en 0

Trabajo con GeoGebra

6. Importen la tabla de valores de Tracker en GeoGebra, grafiquen, hagan el ajuste con la función seno y Compáren:

a) x Vs t & y Vs t Escriban qué significa cada uno de los términos de las funciones que arroja GeoGebra cuando hacen el ajuste.

Al graficar estas funciones primero nos queda que x vs t se queda con un ajuste que muestra el coseno y cuando graficamos y vs t nos muestra el seno

$$x \text{ vs } t \\ 0.01 + 0.11 \sin(14.63t + 2.59)$$

\downarrow radio del disco \downarrow velocidad angular \downarrow desfase

$$y \text{ vs } t \\ 0.12 \sin(14.56t + 1.14)$$

\downarrow radio del disco \downarrow velocidad angular \downarrow desfase

I. Escriban una de las funciones en términos del coseno (pueden usar GeoGebra para verificar las diferentes opciones)

Ayuda: No olviden considerar que: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$. Busquen información de traslación de funciones seno y coseno (si lo necesitan).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\begin{aligned} x &= 0.01 + 0.11 \sin(14.63t + 2.59) \\ &= 0.01 + 0.11 \cos\left(14.63t + 2.59 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 1.02) \end{aligned}$$

b) x Vs θ y y Vs θ ¿cómo son con respecto a las anteriores? ¿por qué? (convertir los grados a radianes)

$$x \text{ vs } \theta \\ 0.13 \sin(x + 1.56) \rightarrow 0.13 \cos(x - 0.01)$$

$$y \text{ vs } \theta \\ 0.13 \sin(x + 0.01)$$

I. Observen los ajustes obtenidos, simplifiquen las ecuaciones y completen la tabla

Con respecto al	Ecuación paramétrica de x	Ecuación paramétrica de y	Simplificación ecuación paramétrica de x	Simplificación ecuación paramétrica de y
Tiempo t	$0.01 + 0.11 \cos(14.63t + 1.02)$	$0.12 \sin(14.56t + 1.14)$	$0.11 \cos(14.63t + 0.02)$	$0.12 \sin(14.56t + 1.14)$
Ángulo θ (rad)	$0.13 \cos(\theta - 0.01)$	$0.13 \sin(\theta + 0.01)$	$0.13 \cos \theta$	$0.13 \sin \theta$

- c) Si la velocidad angular es $\omega = \frac{\theta}{t}$ y por tanto $\theta = \omega t$, entonces las ecuaciones paramétricas (con el parámetro θ) se pueden escribir como:

$$x = 0.13 \cos \theta$$

$$y = 0.13 \sin \theta$$

7. Considerando las ecuaciones con el parámetro θ

- d) Transformen las ecuaciones paramétricas a una ecuación rectangular $y(x)$ que corresponda.

Recordando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ \uparrow \sin

$$\cos \theta = \frac{x}{0.13} \quad \sin \theta = \frac{y}{0.13} \quad \left(\frac{x}{0.13}\right)^2 + \left(\frac{y}{0.13}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{x}{0.13}\right)^2 \quad \sin^2 \theta = \left(\frac{y}{0.13}\right)^2$$

- e) ¿Qué representa matemáticamente esta ecuación? ¿cuál es el significado físico?

Es la ecuación de una circunferencia que describe la trayectoria del disco

8. Deriven con respecto a t las ecuaciones paramétricas respectivas. ¿Qué representan, desde un punto de vista físico, estas derivadas?

y vs t

$$y = 0.12 \sin(14.56t + 1.14)$$

$$y' = 0.12(14.56) \cos(14.56t + 1.14)$$

$$= 1.7472 \cos(14.56t + 1.14)$$

x vs t

$$x = 0.11 \cos(14.63t + 1.14)$$

$$x' = (0.11)(14.63) [-\sin(14.63t + 1.14)]$$

$$x' = 1.6093 [-\sin(14.63t + 1.14)]$$

9. La magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. Desarróllena algebraicamente hasta su mínima expresión. Compárenla con la fórmula de velocidad tangencial que aparece en los libros de física.

$$v = \sqrt{\left[\underset{r \cdot \omega}{1.7472} \cos(14.56t + 1.14) \right]^2 + \left[\underset{r \cdot \omega}{1.6093} \cdot -\sin(14.63t + 1.14) \right]^2}$$

$$= \sqrt{(3.0527) \cos^2(14.56t + 1.14) + 2.5898 \cdot \sin^2(14.63t + 1.14)}$$

$$= \sqrt{(0.11)^2 (14.63)^2 \cos^2(14.63t + 1.14) + (0.12)^2 (14.56)^2 \sin^2(14.56t + 1.14)}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^2 [\cos^2(14.595t + 1.14) + \sin^2(14.595t + 1.14)]}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^2 [1]} \quad \boxed{v = r\omega}$$

$$v = (0.115)(14.595) \quad v = 1.678425$$

10. Si, $a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ con el mismo razonamiento algebraico de la pregunta anterior, determine la expresión que representa la aceleración. Compárenla con las formulas que aparecen en los libros de física.

$$a = \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^4 (-\sin 14.595t + 1.14)^2 + (0.115)^2 (14.595)^4 (\cos 14.595t + 1.14)^2}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^4 (-\sin 14.595t + 1.14)^2 + (0.115)^2 (14.595)^4 (\cos 14.595t + 1.14)^2}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^4 (\sin^2 14.595t + 1.14 + \cos^2 14.595t + 1.14)}$$

$$= \sqrt{(0.115)^2 (14.595)^4 (1)}$$

$$= 0.115 (14.595)^2 \quad \boxed{a_n = \omega^2 r}$$

$$= 24.496$$

11. Completen la siguiente tabla para 5 valores del tiempo

$t[s]$	$\theta [rad]$	$\omega \left[\frac{rad}{s}\right]$	$v_t \left[\frac{m}{s}\right]$	$a_c \left[\frac{m}{s^2}\right]$
0.267	355.9°	14.884	1.711	25.476
0.4	382.1°	14.986	1.7176	25.6546
0.433	410.1535°	14.80	1.702	25.1896
0.467	438.6602°	14.78	1.6997	25.1215
0.5	467.3°	15.02	1.7233	25.944

$$v = r\omega \quad a = r\omega^2$$

¿Los valores de ω , v_t y a_c son constantes? Den una explicación al respecto

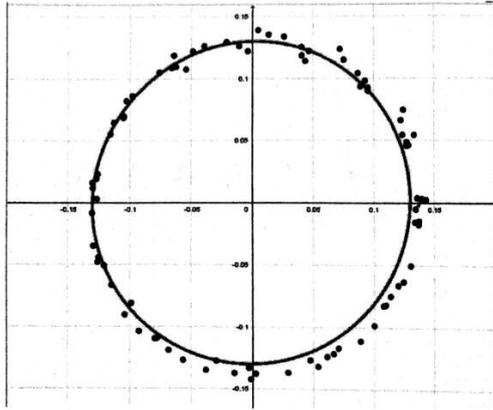
Son casi constantes, la velocidad tangencial ^{es} uniforme y por esto los valores no cambian mucho.

Tarea : Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a:

- Desarrollo
- Dificultades
- Conclusiones

X vs y

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.13 \sin(0.02u + 1.56) \\ y &= 0.13 \cos(0.02u + 0.01) \end{aligned} \right\} 0 < u < 2276.76$$

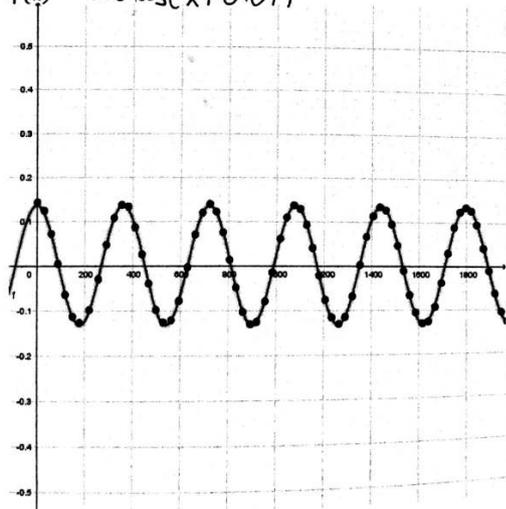


$\frac{\pi}{2}$

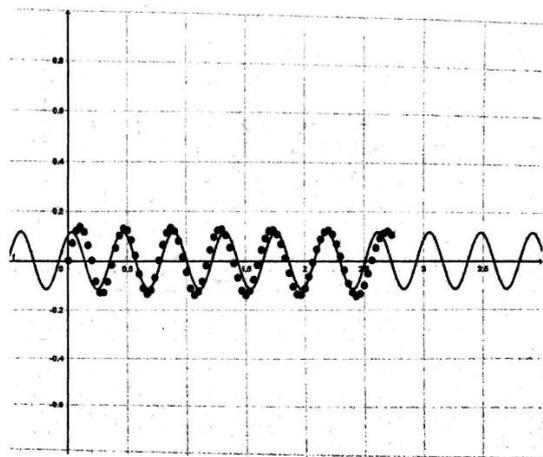
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 0.13 \sin(0.02x + 1.56) \\ f(x) &= 0.13 \cos(x + 0.01) \end{aligned}$$

X vs θ

$$x = 0.13 \cos(0.02\theta)$$



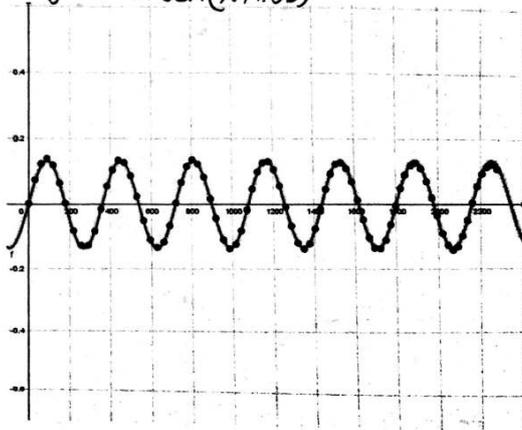
y vs t
r
 $f(x) = 0.12 \sin(14.56x + 1.74)$

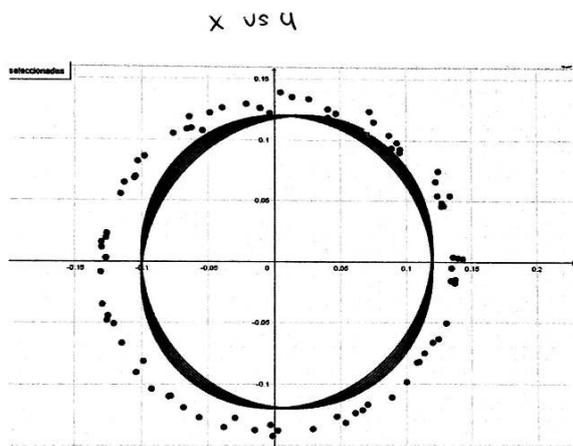
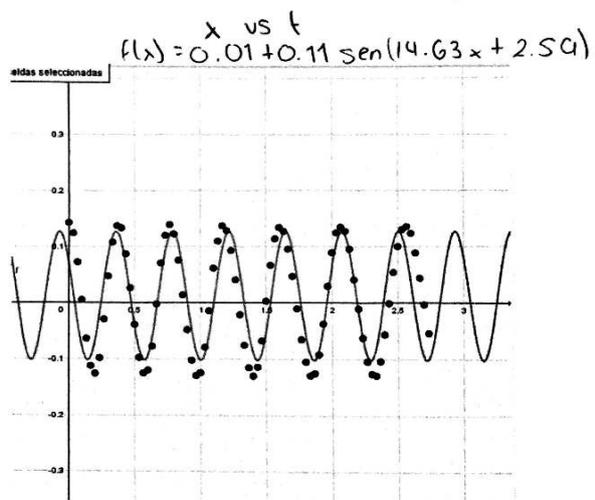


y vs θ

$$f(x) = 0 + 0.13 \text{sen}(0.02x + 0.01) \rightarrow$$

$$y = 0.13 \text{sen}(x + 1.56)$$





$$\left. \begin{aligned} x &= 0.01 + 0.11 \operatorname{sen}(14.63u + 2.59) \\ y &= 0.12 \operatorname{sen}(14.56u + 1.14) \end{aligned} \right\} 0 \leq u \leq 2.73$$

B.3 Réponses de l'activité 4 (MRU+MCU)

B.3.1 Activité MRU+MCU, groupe 1



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Actividad 4

MRU+MCU



Equipo 1 TMF

1. ¿Cómo realizarían un movimiento que combine el MRU y el MCU?
1. Con el objeto del experimento pasado (reguilete) lo deslizaríamos sobre el contorno de una superficie plana (mesa), a la vez que éste gira

2. ¿Qué fenómenos identifican que presenten esta combinación de movimientos?

Cualquier objeto con ruedas en movimiento (Bicicleta)
 Yoyo (cuando sube y baja)
 Decoración de un pastel cuadrado

3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas...)

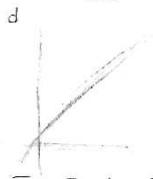
Ayuda: apóyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores

MRU Tiene una velocidad constante (sin aceleración)

El movimiento es constante en uno de sus ejes (y o z)

$v = \frac{dx}{dt}$ La trayectoria la podemos poner a través de la ecuación de la velocidad de los 2 ejes

La trayectoria sigue una línea recta

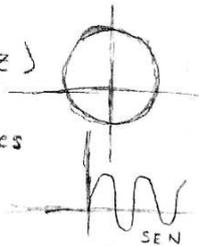


MCU El movimiento surge en dos ejes coordenados

La velocidad total del mov. es uniforme pero si analizamos el movimiento por separado en cada eje nos percatamos de que la velocidad es cíclica y tiene un punto máximo y un 1

mínimo por lo que va incrementando hasta llegar al máximo y viceversa

$$x = \cos \theta \quad y = \sin \theta \quad x^2 + y^2 = 1^2$$



4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones

- $V_{MRU} > V_{MCU}$

Tomaremos como referencia del MCU un punto más cercano al centro de la circunferencia para que así el movimiento circular sea más lento

- $V_{MRU} < V_{MCU}$

Tomaremos como referencia del MCU un punto más lejano al centro de la circunferencia para que así el movimiento circular sea más rápido

- $V_{MRU} = V_{MCU}$

Haremos rodar un objeto para que la distancia que recorra sea equivalente a las vueltas que da.

Analicen los movimientos que sean más sencillos de realizar con el material proporcionado.

Trabajo en Tracker y GeoGebra

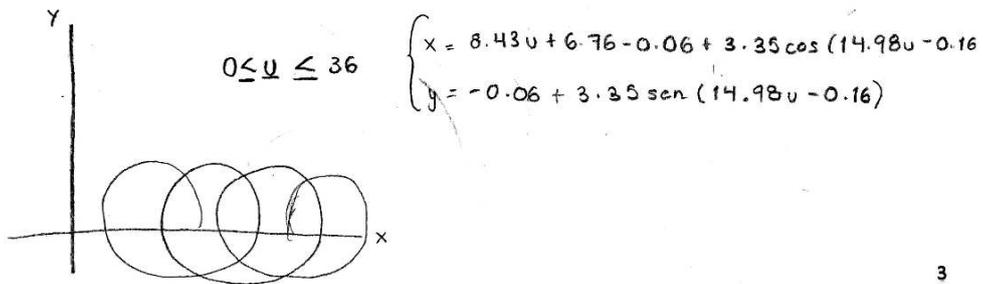
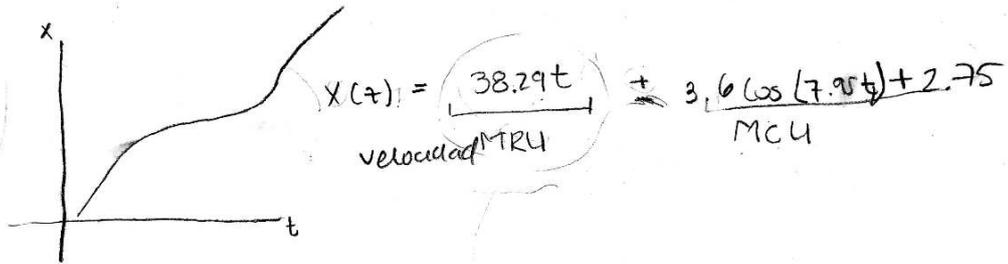
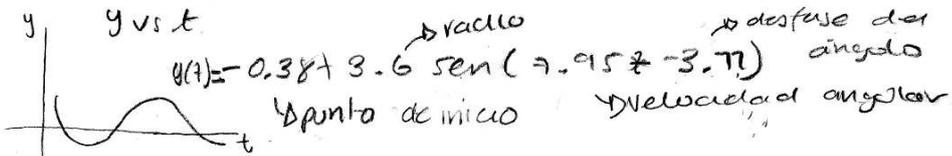
MRU < MCU

5. ¿Qué gráficas deben considerar en MRU y en MCU? ¿por qué?

MRU = $x \text{ vs } t$, $y \text{ vs } t$ & $x \text{ vs } y$

MCU = $x \text{ vs } t$, $y \text{ vs } t$, $x \text{ vs } y$, $t \text{ vs } \theta$ & $t \text{ vs } \omega$

6. Hagan las gráficas y ajustes necesarios en GeoGebra, esbocen las gráficas y copien las ecuaciones que puedan obtener con GeoGebra.



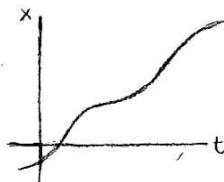
7. ¿Qué forma tiene la gráfica y V s t ? ¿por qué es así?

La gráfica v s t es parecida a la de un seno, a diferencia de que en nuestra tiene algunos desfases, debido a la inexactitud de nuestro video. Tiene esta forma ya que el movimiento ocurrido en el eje y es únicamente el circular y la gráfica de un MCU es un seno o coseno.

a) ¿Qué información del movimiento pueden obtener del ajuste que les da GeoGebra?

Podemos obtener la velocidad angular (ω) y la del MRU, el radio del círculo, el desfase que hubo tanto en el ángulo como en los dos ejes coordenados.

8. Grafiquen x Vs t ¿Por qué no es lineal? Intenten hacer el ajuste



Debido a que en el eje x ocurren dos movimientos el del MCU y el MRU la ecuación debía ser la suma de las distancias recorridas en ambos.

Así que tomamos la distancia en ambos y las sumamos

ECUACIÓN OBTENIDA =

$$x(t) = \underbrace{38.29t}_{\text{distancia recorrida}} + \underbrace{3.6}_{\text{radio}} \cos(\underbrace{7.95t}_{\omega} - \underbrace{3.11}_{\text{desfase del ángulo}}) - \underbrace{0.38 + 3.13}_{\text{desfases inicial y final}} \quad 5$$

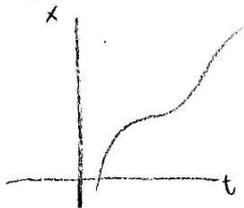
a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x ?

Dos, el MCU y MRU.

b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?

Como la suma o resta de las dos distancias.
Y la ecuación obtenido está escrita en el punto 8 de este documento

c) ¿Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ? Escribanla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbocen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente)



ECUACIÓN OBTENIDA

$$x(t) = \underbrace{38.29t}_{\text{distancia recorrida}} + \underbrace{3.6}_{\text{radio}} \cos(\underbrace{7.95t}_{\omega} - \underbrace{3.11}_{\text{desfase del ángulo}}) - \underbrace{0.38 + 3.13}_{\text{desfase inicial y final}}$$

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtenan la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

MRU > MCU

$$y(t) = -38 + 3.6 \sin(7.95t - 3.11)$$

$$x(t) = 38.29t + 3.6 \cos(7.95t) + 2.75$$

$$x'(t) = \underbrace{38.29}_{v} - \underbrace{3.6 \sin(7.95t)}_r \underbrace{(7.95)}_{\omega}$$

$$y'(t) = -\underbrace{0.0}_{v} + \underbrace{3.6 \cos(7.95t)}_r \underbrace{(7.95)}_{\omega}$$

$$v = \sqrt{(\underbrace{v - r \omega \sin(\omega t)}_x)^2 + (\underbrace{r \omega \cos(\omega t)}_y)^2}$$

$$v = \sqrt{v^2 - 2vr\omega \sin(\omega t) + r^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + r^2\omega^2 \cos^2(\omega t)}$$

$$= \sqrt{v^2 - 2vr\omega \sin(\omega t) + r^2\omega^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}$$

$$= \sqrt{v^2 - 2v \underbrace{r\omega}_v \sin(\omega t) + \underbrace{r^2\omega^2}_{v^2}}$$

$$= \sqrt{2v^2 - 2v^2 \sin(\omega t)}$$

$$= v \sqrt{2 [1 - \sin(\omega t)]} \rightarrow \text{general}$$

con datos:

$$= 38.29 \sqrt{2 [1 - \sin(7.95t)]}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Analicen los otros casos. Realicen los mismos pasos anteriores

10. A partir de todo el análisis anterior, ¿pueden llegar a las funciones paramétricas generales de un MRU+MCU (que incluyan los tres casos)? ¿cuáles serían?

Cuando $MCU > MRU =$

$$y(t) = -0.06 + 3.35 \sin(14.98t - 0.16)$$

$$x(t) = 8.43t + 6.76 - 0.06 + 3.35 \cos(14.98t - 0.16)$$

$MCU < MRU =$

$$y(t) = -0.38 + 3.6 \sin(7.95t - 3.11)$$

$$x(t) = 38.29t + 3.6 \cos(7.95t - 3.11)$$

$MCU = MRU$

$$y(t) = 0.17 + 2.6 \sin(13.51t - 1.72)$$

$$x(t) = 45.51t + 2.6 \cos(13.51t - 1.72) + 9.25$$

11. ¿Pueden obtener $y(x)$ o $x(y)$? ¿son funciones? Justifiquen su respuesta

$$y(t) = -0.38 + 3.6 \sin(7.95t - 3.11)$$

$$x(t) = 38.29t + 3.6 \cos(7.95t - 3.11) + 2.75$$

$$\frac{\arcsin\left(\frac{y + 0.38}{3.6}\right) + 3.11}{7.95} = t$$

$$x(y) = 38.29 \left[\frac{\arcsin\left(\frac{y + 0.38}{3.6}\right) + 3.11}{7.95} \right] + 2.75 + 3.6 \cos\left(7.95 \left[\frac{\arcsin\left(\frac{y + 0.38}{3.6}\right) + 3.11}{7.95} \right]\right)$$

$$x(y) = 38.29 \left[\left(\arcsin\left(\frac{y + 0.38}{3.6}\right) + 3.11 \right) / 7.95 \right] + 2.75 +$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = vt + v \cdot \sin(\omega t) = v(t + \sin(\omega t))$$

$$y(t) = vt + v \cdot \cos(\omega t) = v(t + \cos(\omega t))$$

Se cumple $MCU > MRU$ cuando $\omega > v$

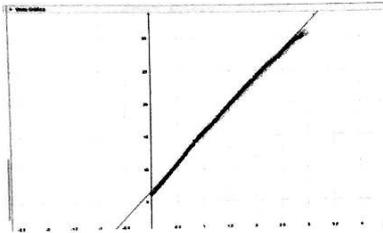
Se cumple $MCU < MRU$ cuando $\omega < v$

Se cumple $MCU = MRU$ cuando $\omega \approx v$

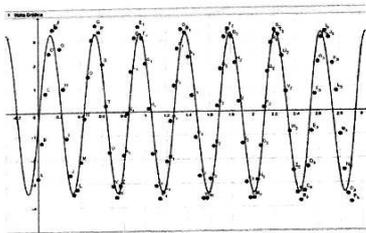
* Aunque, en este caso, no existió una velocidad igual debido a las variables que precedió (frecuencia, fuerza...)

-MRU +MCU

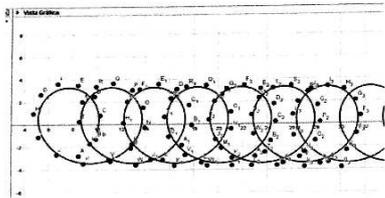
MRU
 $x(t) = 8.43t + 6.76$



MCU
 $y(t) = -0.06 + 3.35\text{sen}(14.98t - 0.16)$

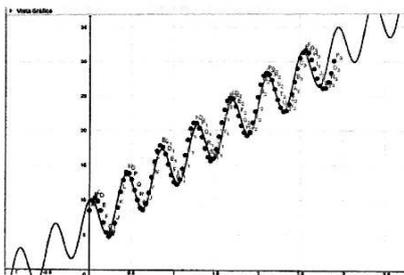


MRU+MCU
 $y(x)$



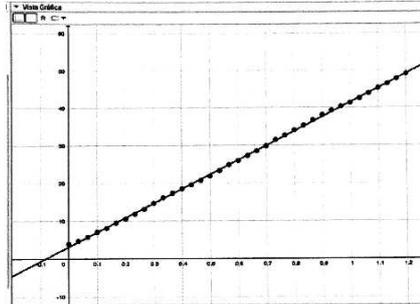
$$b: \left. \begin{aligned} x &= 8.43 u + 6.76 - 0.06 + 3.35 \cos(14.98 u - 0.16) \\ y &= -0.06 + 3.35 \text{sen}(14.98 u - 0.16) \end{aligned} \right\} 0 \leq u \leq 36$$

MRU+MCU
 $x(t) = 8.43t + 6.76 - 0.06 + 3.35\cos(14.98t - 0.16)$

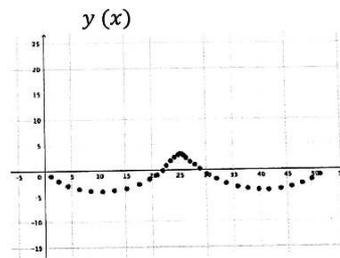
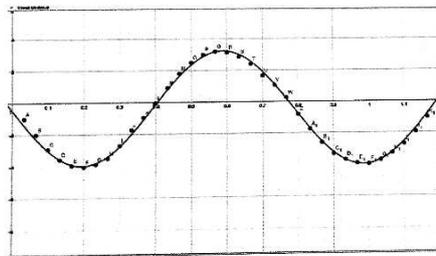


+MRU-MCU

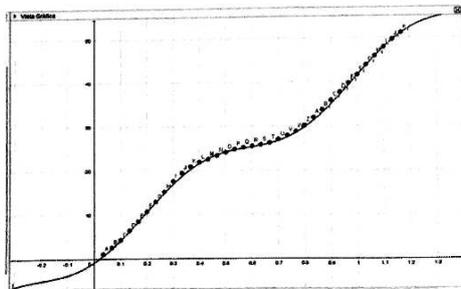
$$x(t) = 38.29t + 3.13 \text{ MRU}$$



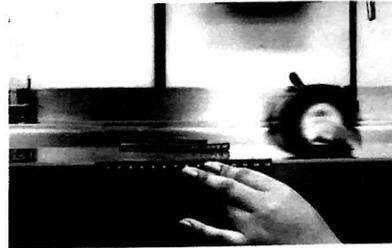
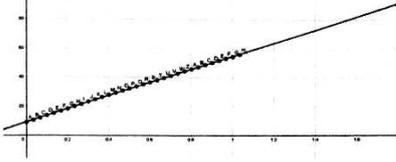
$$y(t) = -0.38 + 3.6 \text{ sen}(7.95t - 3.11)$$



$$x(t) = 38.29 + 3.6 \text{ sen}(7.95t - 3.11) - 0.38 + 3.13$$

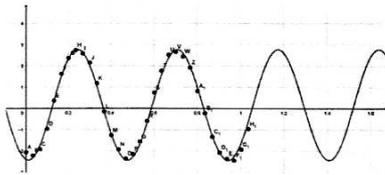


MRU=MCU
MRU
 $x(t) = 45.51t + 9.25$

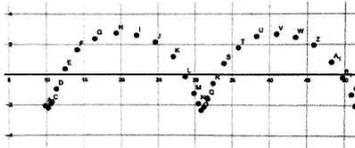
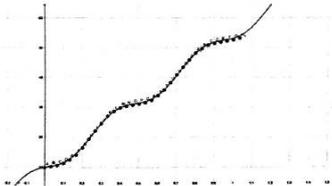


MRU+MCU

$$y(t) = 0.17 + 2.6\text{sen}(13.51t - 1.72)$$



$$x(t) = 45.51t + 9.25 + 0.17 + 2.6\text{sen}(13.51t - 3.4)$$



B.3.2 Activité MRU+MCU, groupe 2



Equipo 2 termodinámica

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA
 Actividad 4
 MRU+MCU



$$\overset{-}{MRU} \pm \overset{+}{MCU}$$

1. ¿Cómo realizarían un movimiento que combine el MRU y el MCU?

Con cualquier objeto que pueda ser girado y desplazado horizontal o verticalmente al mismo tiempo.

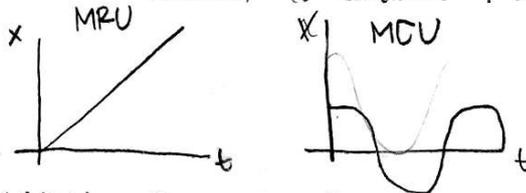
2. ¿Qué fenómenos identifican que presenten esta combinación de movimientos?

Las llantas de un auto, un tornado visto desde arriba, las hélices de un helicóptero.

3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas...)

Ayuda: apóyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores

MRU. Unidimensional, su ecuación es $v(t) = \frac{dx}{dt}$ o $v = \frac{x_a - x_o}{t_a - t_o}$
 velocidad es constante, aceleración es igual a 0.



MCU. Bidimensional, tiene una aceleración centrípeta tiene magnitudes tangenciales y angulares. Sus ecuaciones son

$$x = r \cos(\omega t + x_0) \quad y = r \sin(\omega t + y_0)$$

4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones

- Una es en la que la velocidad tangencial del MCU tenga una mayor magnitud que la velocidad del MRU.
Lo haríamos con un spinner en un palo, haciendo girar el spinner más rápido que el desplazamiento horizontal o vertical

- Otra sería con una velocidad menor en el spinner y un desplazamiento con mayor velocidad

- El último sería con ambas velocidades iguales, en este caso pensamos en hacerlo con un carro de juguete, donde la velocidad de la llanta sería la misma que la del carro si la medimos en un extremo de la llanta

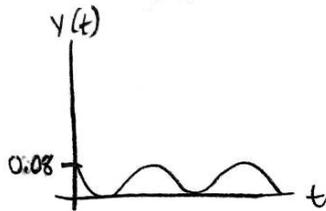
Analicen los movimientos que sean más sencillos de realizar con el material proporcionado.

Trabajo en Tracker y GeoGebra

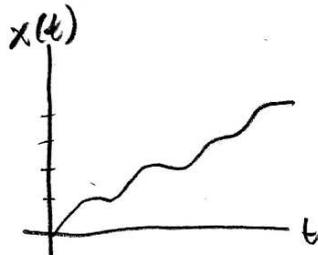
5. ¿Qué gráficas deben considerar en MRU y en MCU? ¿por qué?

En MRU x vs t y probablemente v vs t
 y en MCU x vs t y vs t y V vs t .
 Para ligar las velocidades de los movimientos

6. Hagan las graficas y ajustes necesarios en GeoGebra, esbocen las gráficas y copien las ecuaciones que puedan obtener con GeoGebra.



$$y(t) = 0.04 + 0.03 \sin(17.25t + 2.84)$$



$$x(t) = 0.3t + 0.04$$

7. ¿Qué forma tiene la gráfica y vs t ? ¿por qué es así?

Un seno, ya que estamos graficando un movimiento circular en y .

a) ¿Qué información del movimiento pueden obtener del ajuste que les da GeoGebra?

La velocidad angular del M.C, el radio del círculo y el desfase

$$y(t) = 0.04 + 0.03 \sin(17.256t + 2.54)$$

8. Grafiquen x vs t ¿Por qué no es lineal? Intenten hacer el ajuste

No es lineal porque es parte de un MRU y MCU
La función coseno tiene una pendiente

- a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x ?

El MCU y MRU.

- b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?

función del MCU = $x(t) = 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.54)$

función del MRU = $0.3t + 0.04$

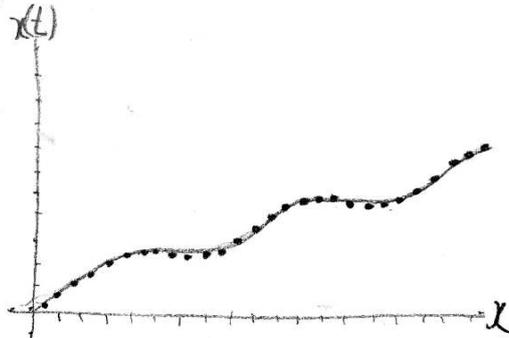
Las sumamos y queda



$$x(t) = 0.3t + 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.54) + 0.04$$

Se elimina por ser el ajuste inicial que está aquí

- c) ¿Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ? Escribanla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbocen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente)



ES $x(t) = 0.3t + 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.54)$

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtengan la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

$$x(t) = 0.3t + 0.04 + 0.03 \cos(17.25t + 2.84)$$

$$x'(t) = 0.3 - 0.03 \sin(17.25t + 2.84) (17.25)$$

$$y(t) = 0.04 + 0.03 \sin(17.25t + 2.84)$$

$$y'(t) = 0.03 \cos(17.25t + 2.84) (17.25)$$

$$v_x = x'(t) \quad v_y = y'(t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_0 = 0.3$$

$$r = 0.03$$

$$\omega = 17.25$$

$$C = 2.84$$

$$v = \sqrt{(v_0 - r\omega \sin(\omega t + C))^2 + (r\omega \cos(\omega t + C))^2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2vr\omega \sin(\omega t + C) + r^2\omega^2 \sin^2(\omega t + C) + r^2\omega^2 \cos^2(\omega t + C)}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2vr\omega \sin(\omega t + C) + r^2\omega^2 (\sin^2(\omega t + C) + \cos^2(\omega t + C))}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2vr\omega \sin(\omega t + C) + r^2\omega^2}$$

Porque $v_0 = r\omega$

$$v = \sqrt{2v_0^2 - 2vr\omega \sin(\omega t + C)}$$

$$v = \sqrt{2(v_0^2 - vr\omega \sin(\omega t + C))}$$

$$v = \sqrt{2v_0^2 (1 - \sin(\omega t + C))}$$

$$v = \sqrt{2} \sqrt{v_0^2 (1 - \sin(\omega t + C))}$$

$$v(t) = 0.3 \sqrt{2} \sqrt{1 - \sin(17.25t + 2.84)}$$

$$v_m = 0.39 \text{ m/s}$$

↓
sacada con Geogebra
a partir del promedio de
velocidades instantáneas

Analicen los otros casos. Realicen los mismos pasos anteriores

10. A partir de todo el análisis anterior, ¿pueden llegar a las funciones paramétricas generales de un MRU+MCU (que incluyan los tres casos)? ¿cuáles serían?

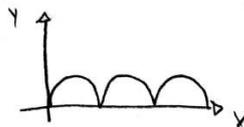
Ecuaciones generales

$$x(t) = V_0 t \pm r \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \sin(\omega t)$$

- MRU MCU
1. $V_0 = \omega r$
 2. $V_0 < \omega r$
 3. $V_0 > \omega r$

1. MCU = MRU



2. MCU > MRU



3. MCU < MRU



11. ¿Pueden obtener $y(x)$ o $x(y)$? ¿son funciones? Justifiquen su respuesta

$$x(t) = V_0 t \pm r \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \sin(\omega t)$$

$$y = r \sin(\omega t)$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\omega t)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) = \omega t$$

$$t = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}$$

$$x\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}\right) = V_0 \left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}\right) \pm r \cos\left(\omega \cdot \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega}\right)$$

$$x(y) = \frac{V_0 \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega} \pm r \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$= \frac{V_0 \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)}{\omega} \pm r \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$= r \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \pm r \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$= r \left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \pm \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)\right)$$

Tarea: Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a:

- Desarrollo
- Dificultades
- Conclusiones

B.3.3 Activité MRU+MCU, groupe 3



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Actividad 4
 MRU+MCU



Equipo 3 Frisón

1. ¿Cómo realizarían un movimiento que combine el MRU y el MCU?

Tenemos un movimiento circular y lo adherimos a una base que tiene un movimiento reclinineo, o podríamos usar una rueda ya que esta avanza mientras gira

2. ¿Qué fenómenos identifican que presenten esta combinación de movimientos?

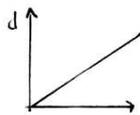
- Una llanta o rueda cuando avanzan
- La hélice de un helicóptero cuando recorre una trayectoria
- Taladro cuando rompe el material
- Tornado cuando recorre una distancia
- Huracán " "
- Yo-yo cuando va bajando
- Trompo cuando sigue camino
- La tierra cuando gira alrededor del sol
- Ventilador cuando se mueve

3. Escriban todo lo que saben del MRU y MCU (ecuaciones, características, diagramas...)

Ayuda: apóyense en la información que han obtenido de las actividades anteriores

MRU
 $v = \frac{d}{t}$

La velocidad es constante



A la magnitud de la velocidad recibe el nombre de la rapidez

MCU

$w = r \theta$

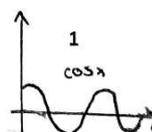
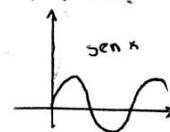
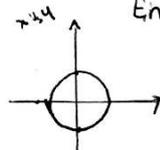
$v = r w$

$a = r w^2$

La velocidad total es constante

$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$

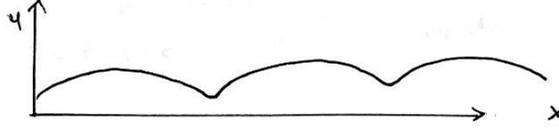
En "x" y "y" no es constante



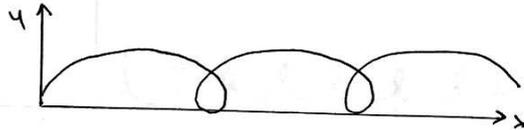
4. Considerando que tienen una composición de un MRU y un MCU ¿qué posibles variantes pueden tener las velocidades del fenómeno global? Expliquen cómo lograrían realizar cada una de las combinaciones

velocidades diferentes

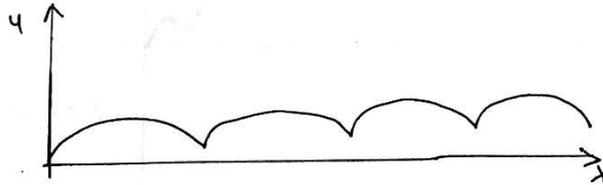
- La velocidad del movimiento circular es menor



- La velocidad del movimiento rectilíneo es menor



- Velocidad constante en las 2, son iguales



alicen los movimientos que sean más sencillos de realizar con el material proporcionado.

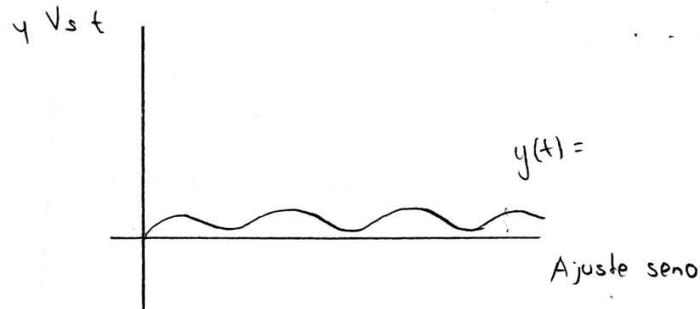
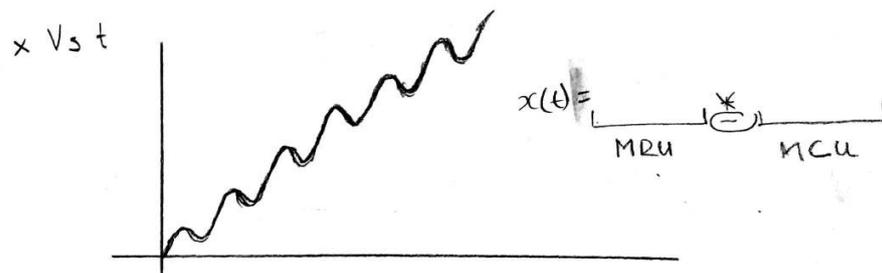
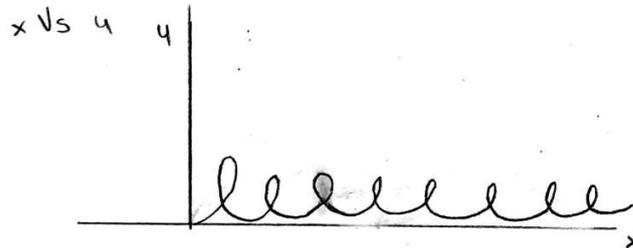
Trabajo en Tracker y GeoGebra

5. ¿Qué gráficas deben considerar en MRU y en MCU? ¿por qué?

- x Vs y para ver como fue la trayectoria
- x Vs t para ver cuando ocurre
- y Vs t para diferenciar los movimiento

6. Hagan las graficas y ajustes necesarios en GeoGebra, esbocen las gráficas y copien las ecuaciones que puedan obtener con GeoGebra.

MCU rápida



7. ¿Qué forma tiene la gráfica v vs t ? ¿por qué es así? MCU - lento

tiene una forma de seno, porque es el objeto que va subiendo y bajando en forma de círculo y a su vez va girando.

a) ¿Qué información del movimiento pueden obtener del ajuste que les da GeoGebra?

La paramétrica

la información de "y"

el movimiento circular que recorrió

La forma del movimiento

8. Grafiquen x vs t ¿Por qué no es lineal? Intenten hacer el ajuste

Porque es un movimiento circular, cuando está girando en la parte superior el movimiento se resta y pareciera que frena pero en el momento en el cual el movimiento está girando en la parte inferior se acelera, es por eso que la gráfica no es lineal y tiene unas pequeñas curvaturas.

- a) ¿Cuántos movimientos se deben considerar en el eje x ?

Se consideran 2 movimientos, ya que se toman en cuenta 2 dimensiones

- b) Si conocen la distancia que se avanza en x en el MRU y la que avanza (o retrocede) en el MCU ¿cómo quedaría la función que calcula la distancia total que avanza el punto que están estudiando?

El MCU iba en sentido contrario al MRU, por lo que en vez de sumar, lo restamos.

$$\text{MRU} - \text{MCU}$$

Cambiamos el seno por el coseno, porque estamos analizando el movimiento en " x "

- c) ¿Con la información que tienen hasta el momento pueden obtener la ecuación paramétrica de x ?
Escribanla, y hagan el ajuste en GeoGebra para verificar si es un buen ajuste a sus datos experimentales (esbocen la gráfica y guarden la gráfica en su USB en la carpeta correspondiente)

Si, la podemos obtener.

$$x(t) = 0.56t + 0.04 - 0.03 \cos(7.87t - 0.87)$$

MRU

MCU

9. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad tangencial del punto que están analizando? (obtengan la ecuación general de la velocidad y el valor de la velocidad)

$$u(t) = 0.04 + 0.03 \operatorname{Sen}(7.87t - 2.45)$$

$$u'(t) = 0.03(7.87) (\cos(7.87t - 2.45))$$

$$x(t) = 0.56t + 0.04 - 0.03 \cos(7.87t - 0.87)$$

$$x'(t) = 0.56 - 7.87(0.03) [-\operatorname{sen}(7.87t - 0.87)]$$

$$x''(t) = 0.56 + 7.87(0.03) (\operatorname{sen}(7.87t - 0.87))$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_0 = 0.56$$

$$r = 0.03$$

$$\omega = 7.87$$

$$C_1 = -2.45$$

$$C_2 = -0.87$$

$$V = \sqrt{[r(\omega) \cos(\omega t - C)]^2 + [V_0 + \omega(r) [\operatorname{sen}(\omega t - C)]]^2}$$

$$V = \sqrt{r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - C) + V_0^2 + 2V_0 r \omega [\operatorname{sen}(\omega t - C)] + r^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - C)}$$

$$V = \sqrt{r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - C) + r^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - C) + V_0^2 + 2V_0 r \omega \operatorname{sen}(\omega t - C)}$$

$$V = \sqrt{r^2 \omega^2 [\cos^2(\omega t - C) + \operatorname{sen}^2(\omega t - C)] + V_0^2 + 2V_0 r \omega \operatorname{sen}(\omega t - C)}$$

$$V = \sqrt{r^2 \omega^2 + V_0^2 + 2V_0 r \omega \operatorname{sen}(\omega t - C)}$$

$$V_0 = r\omega$$

$$V = \sqrt{V_0^2 + V_0^2 + 2V_0^2 \operatorname{sen}(\omega t - C)}$$

$$V = \sqrt{2V_0^2 + 2V_0^2 \operatorname{sen}(\omega t - C)}$$

$$V = \sqrt{2V_0^2 [1 + \operatorname{sen}(\omega t - C)]}$$

$$V = V_0 \sqrt{2 [1 + \operatorname{sen}(\omega t - C)]}$$

$$V = 0.56 \sqrt{2 (1 + \operatorname{sen}(7.87t - 2.45))}$$

alicen los otros casos. Realicen los mismos pasos anteriores

10. A partir de todo el análisis anterior, ¿pueden llegar a las funciones paramétricas generales de un MRU+MCU (que incluyan los tres casos)? ¿cuáles serían?

$$\begin{array}{ll} \text{MRU} = \text{MCU} & \text{MCU lento} \\ y = 0.04 + 0.03 \sin(6.09t - 2.05) & y = 0.04 + 0.03 \sin(7.87t - 2.45) \\ x = 0.25t + 0.03 \cos(6.09t + 1.28) & x = 0.56 + 0.04 - 0.03 \cos(7.87t - 0.87) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{MCU rápido} \\ y = 0.04 + 0.02 \sin(14.33t - 0.27) \\ x = 0.205t + 0.02 \cos(14t + 1.3) \end{array}$$

11. ¿Pueden obtener $y(x)$ o $x(y)$? ¿son funciones? Justifiquen su respuesta

Sí, podemos obtener $y(x)$ y $x(y)$

podemos obtener $y(x)$ cuando el MCU es más rápido que el MRU no es función porque hay dos resultados de (y) para $1(x)$

y cuando el MCU es más lento que el MRU sí es función $x(y)$ no es función porque esta vertical y hay muchos valores para las abscisas



$$x = 0.25 \left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{y-0.04}{0.03}\right) + 2.05}{6.09} \right) + 0.03 \cos\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{y-0.04}{0.03}\right) + 2.05 + 1.28}{3.33}\right)$$

Tarea: Preparen una exposición de 10 minutos de duración en la que expliquen a los otros equipos cómo fue su trabajo en el proceso de modelización que experimentaron, respecto a:

- Desarrollo
- Dificultades
- Conclusiones

10) $MRU = MCU$

la pendiente de x es igual

$MCU = \text{lento}$, $MRU = \text{rápido}$

la pendiente de MCU es muy pequeña

$MCU = \text{rápido}$, $MRU = \text{lento}$

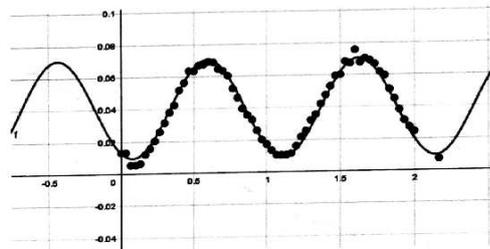
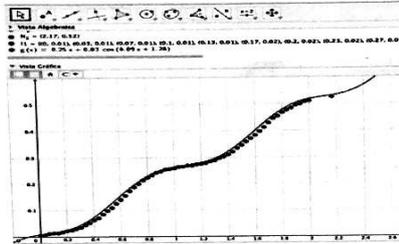
porque la pendiente de MCU es grande

Equipo 3 FriXion

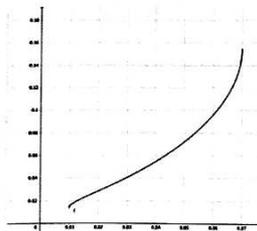
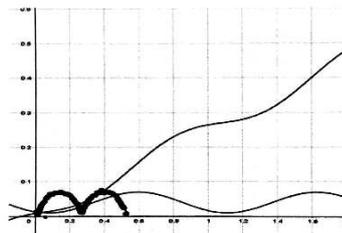
MRU=MCU

$$x = 0.25t + 0.03\cos(6.09t + 1.28)$$

$$y = 0.04 + 0.03\text{sen}(6.09t - 2.05)$$



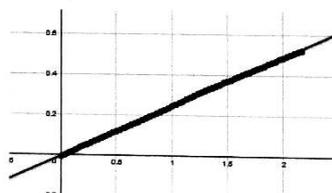
$$\left. \begin{aligned} x &= 0.25t + 0.03\cos(6.09t + 1.28) & x &= 0.25t + 0.03 \cos(6.09t + 1.28) \\ y &= 0.04 + 0.03\text{sen}(6.09t - 2.05) & y &= 0.04 + 0.03 \text{sen}(6.09t - 2.05) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2.2$$



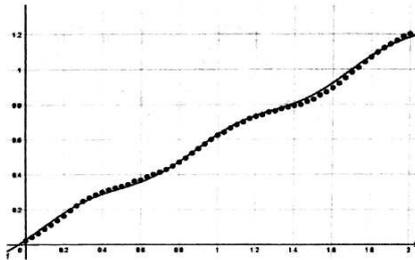
• $x = 0.25t$

$$f(x) = 0.25 \cdot \frac{\arcsen\left(\frac{x-0.04}{0.03}\right) + 2.05}{6.09} + 0.03 \cos\left(\arcsen\left(\frac{x-0.04}{0.03}\right) + 3.33\right)$$

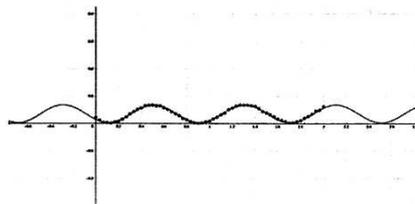
MRU



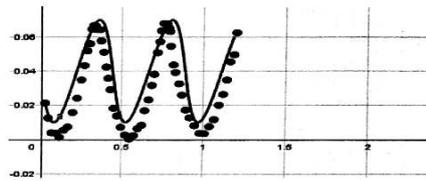
MCU Lento



- $x = 0.56t + 0.05 - 0.03\cos(7.87t - 0.87)$



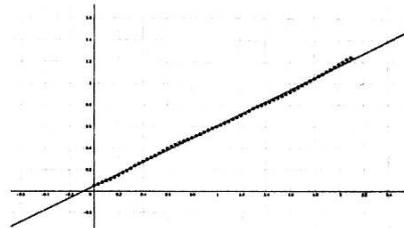
- $y = 0.04 + 0.03\text{sen}(7.87t - 2.45)$



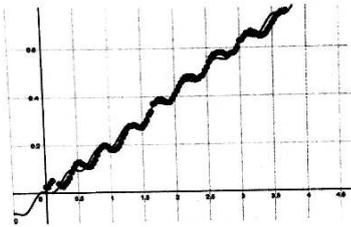
$$\left. \begin{aligned} x &= 0.56u + 0.05 - 0.03 \cos(7.87u - 0.87) \\ y &= 0.04 + 0.03 \text{sen}(7.87u - 2.45) \end{aligned} \right\} 0 \leq u \leq 2$$

MRU

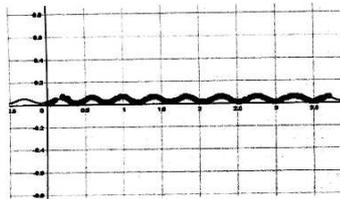
- $x = 0.56t + 0.05$



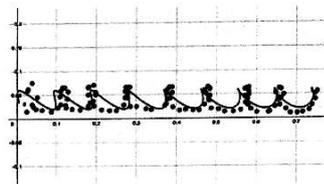
MCU rapido



- $x = 0.205t + 0.02\cos(14t + 1.3)$

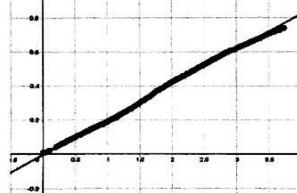


- $y = 0.04 + 0.02\sin(14.33t - 0.27)$



$$\left. \begin{aligned} x &= 0.21u + 0.02\cos(14u + 1.3) \\ y &= 0.04 + 0.02\sin(14.33u - 0.27) \end{aligned} \right\} 0 \leq u \leq 3.7$$

MRU



- $x = 0.21t$

Annexe C

Article ETM6

PARADIGMAS DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN CINEMÁTICA: ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN

Claudia Gabriela Reyes Avendaño

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, France

clau25@ciencias.unam.mx

El objetivo de la presente comunicación es mostrar parte de los paradigmas del Espacio de Trabajo en Cinemática (ETC) y su funcionamiento en articulación con el ciclo de modelización de Blum y Leiss. Para ello, se considera un fragmento del análisis y resultados de una experimentación, realizada con estudiantes de último año de liceo (17-18 años). La actividad está compuesta de una tarea de modelización matemática, de un fenómeno de Movimiento Circular Uniforme (MCU), en donde los objetos matemáticos tratados, principalmente, son las funciones seno y coseno.

Palabras clave: Modelización matemática, Espacio de Trabajo en Cinemática (ETC), Paradigmas del ETC, Cinemática.

INTRODUCCIÓN

Desde el nacimiento de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016), se ha observado un creciente interés por el uso de este marco teórico-metodológico para el análisis y diseño de diferentes situaciones en el ámbito de la investigación en didáctica de las matemáticas. El perfeccionamiento y desarrollo de la teoría, dentro de la matemática y en otras disciplinas afines, ha mostrado que la dialéctica que emerge en los diferentes ETMs (geometría, probabilidad, análisis...) conduce hacia una visión más amplia de los objetos o situaciones motivo de estudio. Como resultado de lo anterior, se ha reforzado la idea de que la circulación que se genera entre los planos del ETM, en un dominio o varios, permite observar un mismo objeto o situación a través de diferentes registros de representación (Duval, 1995; Arzarello 2006) favoreciendo la visualización y significación de los objetos matemáticos tratados. Por otro lado, a lo largo de la historia de las matemáticas, hemos observado cómo el estudio de fenómenos de movimiento de objetos sólidos (cinemática) originó la evolución o el nacimiento de elementos y conceptos matemáticos, por ejemplo: Oresme, en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* (1482), da indicios de lo que se puede considerar como gráficas de funciones, asociando el cambio físico con figuras geométricas; Galileo Galilei, en su libro *discursos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* (1638), también, contribuyó a la construcción de la idea de función, introduciendo lo numérico en representaciones gráficas y, sobre todo, expresó las leyes de movimiento incorporando ideas de variación directa e indirectamente proporcional; Newton y Leibniz se consideran los creadores del Cálculo, aunque el trabajo que los llevó a su invención presenta algunas diferencias. En el trabajo de Newton (el único que mencionaremos en ese artículo) se aprecia una orientación

física, en la que el concepto de velocidad es fundamental. Es decir, Newton tenía una visión mecanicista, al considerar el tiempo como noción universal y a las variables dependientes de él como cantidades que “fluyen” de forma continua y poseen velocidad de cambio (Ruiz, 1994). De igual manera, hemos comprobado cómo la matemática ha dado a la física las bases y las pruebas para consolidarse como una ciencia experimental cada vez más precisa. Uno de muchos ejemplos de esto, es la teoría de Relatividad de Einstein, que tiene como base la abstracción y formalismo matemático los cuales prueban, describen y predicen fenómenos físicos no evidentes. En este sentido, estas dos disciplinas aunadas a procesos de modelización comparten objetos, nociones y pruebas importantes de las que podemos hacer uso en situaciones dentro de la didáctica de las matemáticas.

Partiendo de lo dicho anteriormente, el trabajo que se presenta a continuación está dividido en dos partes principales (i) la teórica que da sustento a este trabajo, en la que se incluye una introducción a los paradigmas del *ETC* (los cuales se desprenden de una investigación más amplia y próxima a ser publicada) y (ii) la dialéctica que se genera entre estos paradigmas con el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) en el análisis a priori de las actividades y en el desarrollo del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad de modelización propuesta.

MARCO TEÓRICO

El diseño y análisis de la actividad de modelización desarrollada, en esta experimentación, fue realizada considerando las fases del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007), el funcionamiento del marco teórico-metodológico *ETM* y los paradigmas del *ETC*. A continuación se da una breve descripción de estos elementos teóricos.

El espacio de trabajo matemático

El *ETM* (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) es un marco teórico-metodológico que articula dos planos horizontales: **el epistemológico**, donde están contenidos los objetos propios de la matemática, su naturaleza, fundamentos, métodos y el modelo matemático en donde se encuentran inmersos; y **el cognitivo**, que se refiere al sujeto y al uso que les da a esos objetos. Es decir, se refiere a procesos tales como el aprendizaje, visualización, razonamiento, construcción, prueba, etc. Estos planos se articulan a través de las génesis **semiótica**, **instrumental** y **discursiva** las cuales emergen de 6 componentes fundamentales: 3 en el plano epistemológico: *representamen*, *artefactos* y *referencial teórico*; y 3 en el cognitivo: *visualización*, *construcción* y *prueba*. Es decir, la componente **representamen** (en el sentido de Peirce 1978 y el enfoque semiótico de Duval 2004) está unida al proceso cognitivo **visualización** por la *génesis semiótica*. El **artefacto**, que puede ser material o simbólico, está ligado al proceso cognitivo **construcción** a través de la *génesis instrumental* inspirada en la concepción de Rabardel (1995). Finalmente, el **referencial**, conformado por elementos teóricos, está ligado al proceso cognitivo **prueba** en el sentido de Balacheff (1987).

La interdependencia que existe entre las génesis, da vida a los planos verticales: Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis] (figura 1).

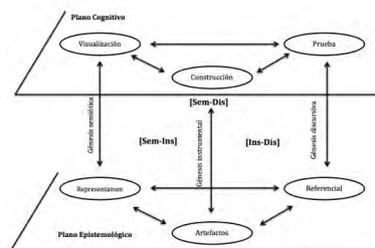


Figura 1: Esquema de los planos verticales del ETM (Kuzniak & Richard, 2014)

Paradigmas del ETC

La noción de paradigma juega un papel muy importante en el *ETM*. En primer lugar, debemos considerar que Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003) parten de la definición general de paradigma de Kuhn (1971) “*El conjunto de creencias, técnicas y valores compartidos por un grupo científico determina la forma correcta de plantear y comenzar la resolución de un problema*” y la trasladan al contexto de la didáctica en el *ETM_G*, donde los paradigmas tienen la función de guiar y/o caracterizar el trabajo matemático generado en la resolución de una tarea. Posteriormente, esta idea se expande a otros dominios, dentro del *ETM*, por ejemplo: probabilidad, análisis, álgebra, etc. En este sentido y considerando que la Cinemática es un dominio que ha estado presente en el desarrollo de ciertos objetos matemáticos y que la matemática es fundamental dentro de la Física, a continuación introducimos algunos elementos de los paradigmas del *ETC*, que ayudarán a entender su uso y funcionamiento en la situación didáctica planteada.

CI (paradigma de lo real), En este paradigma se dan explicaciones basadas en la observación de la recreación del fenómeno físico, por ejemplo ¿cómo es el movimiento? Hacia arriba, hacia abajo, hacia los lados, rápido, lento, se frena, etc. Estas explicaciones están dadas bajo una estructura cognitiva la cual no tiene como sustento un conocimiento matemático profundo de la situación o carece de él. Es decir, el razonamiento está basado en aspectos esencialmente sensoriales: intuición, visualización, manipulación, etc. los cuales pueden surgir de la experimentación momentánea o de vivencias pasadas. El trabajo realizado en este paradigma se enfoca en percibir las variables físicas de la situación sin darles una connotación conceptual. Los artefactos, comúnmente, utilizados en este paradigma son objetos materiales, que toman el status de instrumentos, al recrear movimientos o situaciones que pertenecen a la cinemática.

En CI, el representamen se refiere a signos tangibles del movimiento que pueden ser percibidos con nuestros sentidos y tiene que ver con las características del mismo. Algunos ejemplos son: el cambio de posición de un objeto en términos de trayectoria y sentido (hacia arriba, abajo, un lado, en círculo, recto...); ritmo de movimiento (rápido, lento); distancia (cerca, lejos); etc. Igualmente se pueden hacer comparaciones (más rápido, más lento, menos pesado...). Por otro lado, también se puede considerar la información cualitativa de las representaciones gráficas en el sentido que Nicole Oresme les da en su obra *Tractatus de configurationibus qualitatum* (1482) en donde reflexiona sobre la variación de las magnitudes a través de la visualización de las gráficas del movimiento.

En este paradigma, regularmente, se hacen descripciones, explicaciones e inferencias cualitativas basadas en el empirismo y pragmatismo que surgen de la experimentación y bagaje anterior. La prueba o validación, en CI, es en el sentido de prueba pragmática de Balacheff (1987) donde se da la confrontación de argumentos y razonamientos producto de la experimentación misma. Esta validación está ligada a la acción y a la experiencia, contiene una carga significativa de saberes prácticos y las justificaciones se dan a través de material concreto o de representación del objeto. En este sentido, el discurso esperado es producto de las intuiciones, experiencias y saberes personales.

El inicio de la transición de este paradigma al siguiente se da cuando se quiere medir y cuantificar lo que se está observando. En este momento, los aspectos sensoriales, que guían la recreación de la situación, ya no son suficientes. El aspecto cualitativo cede su lugar, no solo a la cuantificación de las variables sino también a la interpretación del conjunto numérico que arroja tal cuantificación.

CII (paradigma de la medida y cuantificación) En este paradigma se puede, o no, recrear la situación en una experimentación, al igual que CI. Sin embargo, es fundamental contar con la información adecuada de la situación estudiada para que se pueda comenzar un proceso de idealización del fenómeno que dirija a CIII. Es decir, en CII se busca que el movimiento sea medido y esté expresado y analizado en términos de elementos, variables, conceptos, propiedades, leyes, etc. que pertenezcan al dominio de la física y de las matemáticas, de tal manera que se pueda obtener información cuantitativa como: la velocidad, aceleración, trayectoria, etc. En este sentido, en CII el uso de objetos matemáticos es inevitable, sin embargo, su uso no es en un sentido formal, axiomático-deductivo, sino con la única finalidad de medir y cuantificar el fenómeno. El tipo de razonamiento esperado requiere del desarrollo de habilidades algebraicas y aritméticas en el uso de las ecuaciones de movimiento; interpretación de gráficas de forma cuantitativa; cambios en los registros de representación, etc. Los artefactos en este paradigma pueden ser materiales o simbólicos: software, materiales para la experimentación, instrumentos de medición, esquemas, formulas, gráficas, etc. Es importante mencionar que, el simple hecho de trabajar con ciertos artefactos no produce automáticamente la transición entre

paradigmas. Es el trabajo y la intencionalidad con que se usen los elementos del *ETC* (los artefactos, conocimiento, signos, etc.) lo que determina el paso.

En CII, el representamen (signo) toma el estatus de objeto conceptual, en el sentido de Bunge (1983), es decir, que dichos objetos existen en determinados contextos. Mientras que en CI se habla de las características del movimiento de los objetos materiales a partir de la percepción que se tiene de él, en CII hay un cambio de signo, dejan de estar relacionados con los sentidos y se transforman en variables representadas simbólicamente. También emerge una interiorización de los objetos conceptuales con la finalidad de usarlos para cuantificar las variables asociadas al movimiento, sin que haya, necesariamente, una reflexión sobre su naturaleza.

La transición hacia CIII se da cuando se hace necesario un razonamiento sobre la naturaleza de los objetos conceptuales y en donde el trabajo matemático formal es fundamental.

CIII (Paradigma de la formalización e idealización) es la formalización de la situación en términos de objetos matemáticos, es decir, el saber sabio dirige este paradigma. Se formulan pruebas intelectuales (Balacheff, 1987) caracterizadas por un razonamiento que incluye cadenas de argumentos en lenguaje simbólico con el propósito de producir más conocimiento. En CIII se prescinde de los objetos materiales y de la experimentación física, en todo caso se hace uso de experimentación mental. En este paradigma se hace evidente la relación que existe entre los conocimientos matemáticos formales y las leyes y conceptos físicos involucrados. Por ejemplo: en la deducción de las ecuaciones de movimiento; en el uso de objetos como la derivada de una función R en R^2 o R^3 , que se interpreta como una velocidad (o vector velocidad); integrales, etc. Los instrumentos en este paradigma son simbólicos. El discurso en CIII tiene que estar sustentado en principios, leyes, teoremas tanto de la física como de la matemática, bajo un razonamiento hipotético deductivo como elementos fundamentales de la demostración.

La modelización

Para esta investigación consideramos la definición que dan Lesh y Harel (2003, p.159) de “modelo”

“Los modelos son sistemas conceptuales que generalmente tienden a expresarse utilizando una variedad de medios de representación interactivos, que pueden incluir símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos por computadora, diagramas o gráficos en papel, metáforas basadas en la experiencia, etc. Sus propósitos son construir, describir o explicar otros sistemas”

La modelización puede ser vista como un proceso compuesto por un conjunto de fases o pasos que siguen los estudiantes de forma ordenada y cíclica. Para Schmidt (2010) la modelización matemática se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas, que pueden ser abiertos, y que pertenecen a la realidad. Schmidt también

menciona que la definición puede variar en función de las características y objetos considerados, por ejemplo, la naturaleza del contexto de la tarea o el modelo utilizado. Tomando en cuenta lo anterior y la naturaleza de nuestro trabajo consideramos pertinente el uso del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) principalmente, porque las fases que considera son las que nos proporcionan la información necesaria en nuestra investigación.

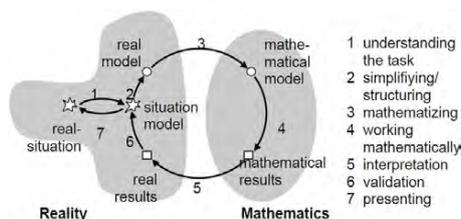


Figura 2: Esquema del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007)

El ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007), figura 2, es un ciclo compuesto de 7 fases: (1) **comprensión/construcción**, se refiere a entender y concebir una situación, en el mundo real, que pueda ser abordada matemáticamente; (2) **simplificación/estructuración**, en esta fase se debe hacer un reconocimiento de las variables a considerar y métodos de resolución; (3) **matematización**, es donde se identifican los objetos matemáticos, las variables y las condiciones que se deben tomar. Esta fase vive entre el resto del mundo y la matemática, pues necesita de ambas para poder ser concebida; (4) **trabajo matemático**, se hace explícita la relación que existe entre las variables, se formulan y se resuelven problemas, se hacen hipótesis, etc. (5) **interpretación**, en esta fase se busca dar sentido a los resultados matemáticos obtenidos con la situación real; (6) **validación**, se prueban los resultados matemáticos con la situación real; (7) **Exposición**, se da cuenta del proceso y funcionamiento del modelo obtenido. Es importante notar que en la fase 6 y 7 pueden surgir preguntas que cuestionen el modelo obtenido y en consecuencia surja la necesidad de comenzar nuevamente el ciclo considerando los nuevos cuestionamientos.

ETC y ciclo de modelización

La forma en que se utilizaron estos elementos teóricos en el trabajo de investigación es el siguiente:

- 1) En primer lugar, los paradigmas del *ETC* y el ciclo de modelización fueron utilizados en el diseño de la actividad con la intención de generar una dialéctica entre estos elementos teóricos que ayudara a los estudiantes, no solo a transitar por todas las fases del ciclo de modelización, sino también a que incitaran una circulación entre planos en el *ETC* de tal manera que las funciones seno y coseno, y su relación con el MCU emergiera de forma natural.

- 2) En segundo lugar, el ciclo de modelización y los paradigmas del *ETC* se utilizaron para el análisis y caracterización del trabajo realizado por los estudiantes.

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE UNA SESIÓN

La experimentación se realizó en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) con un grupo de 30 alumnos de último año de liceo, interesados en estudiar alguna carrera científica o ingeniería. Se realizó un análisis cualitativo del *ETM* personal de los estudiantes utilizando tanto sus reproducciones escritas, como las filmaciones de las realizaciones experimentales. Algunos de los conocimientos previos de los alumnos son: Matemáticas IV y V (Álgebra y Geometría Analítica), la mitad del curso de Matemáticas VI (Cálculo diferencial e integral), Física III (conocimientos básicos de mecánica, cinemática, termodinámica y electromagnetismo) y medio curso de Física IV (conocimientos más profundos de la mecánica clásica). Con respecto al uso de los software, Tracker y Excel, se destinó una sesión para enseñarles su funcionamiento (ya que la mayoría de los alumnos no contaba con el conocimiento suficiente de las herramientas tecnológicas para realizar las actividades). La experimentación estuvo compuesta de tres sesiones (independientes a la sesión introductoria) que se describen brevemente a continuación:

En la primera (50 min) se dio a cada uno de los estudiantes un cuestionario diagnóstico. La Segunda sesión (100 min), se dividió en dos partes y se trabajó en equipos de 4 y 5 estudiantes: la primera (50 min), estuvo destinada a la experimentación y filmación de un MCU utilizando diferentes materiales (pelotas atadas a una cuerda, spinner, disco vinil...); En la segunda, los estudiantes analizaron, con Tracker, el video del movimiento que habían filmado previamente, la finalidad era obtener la representación numérica del movimiento. Finalmente, en la última sesión (100 min), se dio a los estudiantes un cuestionario para que pudieran reflexionar y continuar con el proceso de modelización.

ANÁLISIS

Considerando que en esta contribución se quiere mostrar el funcionamiento de los paradigmas del *ETC* y la dialéctica que surge con el ciclo de modelización. A continuación, se hace el análisis de la sesión 2 y dos preguntas de la sesión 3 (se escogieron estos reactivos debido a que muestran, de forma más clara, el funcionamiento de los entes teóricos), de uno de los seis equipos. En primer lugar, se muestra el análisis a priori de las preguntas analizadas y, posteriormente, el análisis de las respuestas.

Análisis a priori

Primera tarea, sesión 2

1. Realicen la filmación de un movimiento circular uniforme (considerando dos radios diferentes) con el material proporcionado y analícelo con el programa Tracker.

Esta tarea tuvo la finalidad de activar las tres primeras fases del ciclo de modelización (comprensión de la tarea, simplificando/estructurando y matematizando) al poner en juego los conocimientos básicos de los estudiantes, concernientes al MCU y del funcionamiento del software.

En la primera parte de la tarea (realizar y filmar el movimiento, fase 1 y 2), se quería que los alumnos activaran el plano [Sem-Ins] del *ETC* haciendo uso de los artefactos materiales (spinner, disco vinyl, molinillo de viento, cámara, etc) como instrumentos para producir el fenómeno de movimiento (signo). En el desarrollo de esta actividad se esperaba que las intervenciones de los estudiantes, estuvieran basadas en el desarrollo mismo de la experiencia, paradigma CI. No esperábamos que argumentaran de manera conceptual, ni física ni matemáticamente, sino que estuvieran ocupados en una reproducción “adecuada” (con base en sus conocimientos previos) del movimiento. Por otro lado, queríamos que este acercamiento, los llevara a considerar algunos elementos básicos del referencial teórico en su forma natural, que tienen origen en la percepción visual y que toman forma a través del discurso de los estudiantes cuando intentan explicar lo que está sucediendo con el movimiento. Es decir, pueden considerar las propiedades del MCU pero no necesariamente con una argumentación formal. En este caso activando el plano [Sem-Dis] del *ETC*.

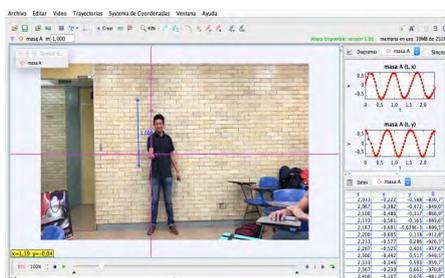


Figura 3 Interface del programa Tracker

En la segunda parte de la tarea (analizar el video con Tracker, fase 2 y 3: simplificando/estructurando y matematizando) se esperaba que los estudiantes pudieran realizar el cambio de signos asociados con la situación real, a otros que tienen que ver con su representación numérica en forma de tablas de valores, a través del software Tracker, figura 3. Consideramos que, en este cambio, los estudiantes seguirán en CI y en los planos [Sem-Ins] y [Sem-Dis], puesto que en la actividad no

está previsto que realicen la medición o cuantificación de las variables involucradas en el movimiento.

Segunda y tercera pregunta, sesión 3

2. **Observen los valores que toman las coordenadas x y y . Expliquen por qué unos son positivos y otros negativos**
3. **Consideren la cantidad de datos que les permitan trazar las dos gráficas de la coordenada x y y con respecto al desplazamiento angular θ . ¿Cuáles son las funciones con las que identifican las gráficas? Explique su respuesta.**

La pregunta dos considerada, también, en la fase 3 (matematización) la ubicamos en el paradigma CI. En esta pregunta, se trabaja con las tablas de valores impresas proporcionadas por Tracker (tiempo t [s], posición en x [m], posición en y [m] y ángulo θ [grados]), figura 3. A partir de esa información, se quiere que los estudiantes visualicen la posición del objeto en su trayectoria, considerando el cambio de los valores de las componentes horizontal y vertical, correspondiente a la selección de variables de la fase 3. Esperamos que la interpretación que realicen de los datos numéricos obtenidos, les permita, eventualmente, llegar a los objetos matemáticos que, en este caso, serían las funciones seno y coseno.

La pregunta 3 tiene el propósito de inducir el cambio en el registro de representación, del tabular al gráfico y del gráfico al funcional. El primer cambio de registro, tabular al gráfico, se considera en el paradigma CI ya que los estudiantes siguen manipulando datos ligados directamente al fenómeno físico sin tener la necesidad de cuantificar ni de usar un lenguaje algebraico, sin embargo, esperamos que la elección que hagan de los datos numéricos no sea arbitraria, sino que los elijan bajo un razonamiento físico, en términos del movimiento, de tal manera que, al visualizar la representación gráfica, emerja la una primera idea de idealización del movimiento. En consecuencia, esperamos que cuando realicen el cambio de registro de representación al funcional, los estudiantes transiten a CII donde las funciones, que modelan el fenómeno, se utilizan con el objetivo de vincular las variables involucradas con los objetos matemáticos y cuantificar el fenómeno.

La activación de los planos esperada, en la pregunta 2 y 3, es la [Sem-Ins] en la dirección de la génesis instrumental, con el uso de los datos numéricos dados por Tracker, hacia la génesis semiótica, con la visualización de las gráficas que representan el fenómeno físico. También, creemos que en las filmaciones que se realicen del trabajo de cada equipo, se observe el intercambio de ideas y argumentos, como evidencia de su referencial teórico. El tipo de explicaciones y justificaciones esperadas en esta etapa son empíricas y pragmáticas, activando el plano [Sem-Dis] de lo discursivo a lo semiótico.

Análisis equipo A (disco vinyl)



Figura 4: Dispositivo experimental del equipo A

En el análisis de las filmaciones (del desarrollo de la actividad) y reproducciones escritas del equipo A, se observa cómo los estudiantes intercambian ideas sobre el lugar y la forma más adecuada en que se filmará el MCU. La discusión que se genera, en principio, no toca los elementos del movimiento en sí mismo, más bien se ocupan en cumplir las características exigidas por el software: iluminación, nitidez del video, tomas fijas, etc. En esta primera fase de modelización (comprensión de la tarea) se observa que el equipo A, hace uso de los artefactos materiales: vinyl con el estatus de instrumento [vinyl-movimiento circular] y la cámara [cámara-filmación] con el propósito de construir el movimiento, activando el plano [Sem-Ins] del *ETC*. Una vez logradas las características requeridas por Tracker, realizan las primeras filmaciones del movimiento, lo cual evidencia la activación de la segunda fase del ciclo de modelización (simplificando y estructurando). Uno de los integrantes (*E1*) toma la iniciativa de colocar los dos puntos con diferentes radios sobre el disco [*sin pensar mucho en la ubicación y las consecuencias*] y hacerlo girar sobre la punta de uno de sus dedos (figura 4). Otro integrante del equipo (*E2*) comenta “hazlo más fuerte porque se detiene muy rápido” y “si lo hacemos muy rápido solo se puede ver una línea”.

Consideramos que en estos comentarios subyacen conceptos físicos ligados a la percepción sensorial del movimiento (signo) y a sus conocimientos previos, plano [Sem-Dis]. En el primer comentario se aprecia la idea de velocidad y de fricción que retarda el movimiento. El segundo comentario está más relacionado con la manera en que Tracker procesa la información, pero también está presente la idea de velocidad. Sin embargo, a pesar de que están realizando la experimentación, no hacen más cuestionamientos acerca del movimiento. No surgen preguntas acerca de su uniformidad, de las diferencias entre la velocidad tangencial y la velocidad angular, no perciben si se mueve el centro, etc. Esto significa que la experimentación del movimiento no lleva a los alumnos a una reflexión de las variables físicas involucradas. Sin embargo, los procesos cognitivos que ponen en juego los integrantes del equipo A, para resolver la tarea, son procesos sensoriales, lo que los sitúa en el paradigma CI.

En la segunda parte de la tarea, los estudiantes permanecen en la fase 2 del ciclo de modelización (Blum, Leiss, 2007) y transitan a la fase 3, como se había previsto, puesto que el cambio de signos con el instrumento (Tracker, tablas de valores) les permite simplificar el movimiento a un conjunto de datos agrupados, a partir de los cuales tienen la posibilidad de pasar a la fase de matematización. Como tampoco realizan cuantificación de variables ni análisis de la situación los estudiantes permanecen en CI, como se previó en el análisis a priori.

Análisis de los resultados de la segunda y tercera pregunta

Para la pregunta 2, transcribimos el intercambio de ideas y argumentos que el equipo A tuvo y que quedó registrado en la filmación:

- 1 E1: tenemos aquí el plano ¿no? y es un círculo *[dibuja un plano cartesiano y un círculo con centro en el origen]*, entonces la posición x aquí va a ser positiva *[señalando el primer cuadrante]* pero cuando va girando *[se observa que el giro lo hace en sentido de las manecillas del reloj, hacia el cuarto cuadrante]* x sigue siendo positiva, pero y se hace negativa ¿no? Entonces aquí *[el lápiz está señalando la parte de la circunferencia que se encuentra en el tercer cuadrante]* y se hace positiva, no, no, ¿se va haciendo positiva! bueno se acerca al positivo, pero x se hace negativa ¿pero ahora cómo lo explicamos?

Tal como habíamos previsto, *E1* intenta explicar el cambio de signos de x y y , en términos del movimiento de los puntos ubicados en el disco de vinyl, representándolo con una circunferencia en el plano cartesiano. Consideramos que la acción de *E1* tiene sustento en su referencial teórico sobre el plano cartesiano, sin embargo, no se aprecia que tenga una idea clara de cómo analizar la variación de los datos numéricos de las variables definidas por el movimiento.

- 2 E2: ¿cómo explicas qué?
- 3 E1: cómo es negativo y positivo
- 4 E2: son los grados de aquí a acá *[señalando los datos]*, son posi... ah no, olvídalos
- 5 E1: ¿cómo explicas que x y y son positivo y negativo? eso pero explicado
- 6 E2: ¿por qué teta está con muchos números? *[Señalando la columna de los grados en la hoja de datos obtenidos con Tracker. Hace una pausa y retoma la pregunta de su compañero E1]* porque está en diferentes partes del eje ¿no? *[refiriéndose a los signos de x y y]* del eje y y del eje x , de aquí para acá son positivos *[señalando el eje x del lado derecho del plano cartesiano]* y de aquí para acá son negativos *[señalando el eje x del lado izquierdo del plano cartesiano]* ya está.

El hecho de que *E2* se pregunte sobre la variación en los valores de teta, subyace la idea que tiene sobre el desplazamiento angular como una variable matemática relacionada con el aspecto físico, lo cual podemos considerarlo como un incipiente paso hacia el paradigma CII, caracterizado por el análisis en términos de variables y conceptos. Pero, se observa que los otros integrantes no le dan gran importancia a esta idea, por lo que permanecen en CI.

- 7 E1: o sea pero cómo lo redacto, ya redactado
- 8 E2: yo qué sé
- 9 E1: porque el círculo pasa por los cuatro planos del eje, ¿son planos estos, no? [refiriéndose a los cuadrantes del plano cartesiano] por los cuatro planos del eje
- 10 E2: no, no son planos ¿o sí?
- 11 E1: ¿cómo se llaman estas partes? [hace una pequeña pausa] cuadrantes
- 12 E3: pero más bien sería el punto de referencia
- 13 E1: Exactamente, el punto de referencia [escribe inmediatamente] “porque el punto de referencia pasa a través de los cuatro cuadrantes”

En este intercambio de ideas podemos observar la manera en que interactúan los estudiantes activando el plano [Sem-Dis] porque intentan responder a partir de su referencial teórico y dando como prueba pragmática la experiencia de haber ejecutado el movimiento.

El enunciado 3 pide elegir a los estudiantes una cierta cantidad de datos para trazar las gráficas de la coordenada x y y con respecto al desplazamiento angular θ . El equipo A no sigue la instrucción y en el video se escucha el siguiente intercambio de ideas:

- 14 E1: Pues es algo así ¿no? [no traza la gráfica porque E4 interrumpe]
- 15 E4: [la chica haciendo el video] era como de seno ¿no?

Es probable que E4 haya recordado que en el análisis de datos en Tracker, éste genera la gráfica correspondiente y por esta razón habla del seno.

- 16 E1: ¿sí crees? O sea es algo así la función, queda así ¿no? [no se alcanza a ver lo que traza en la hoja]
- 17 E2: ¿por qué desde el cero?
- 18 E1: Esa es mi pregunta, es nada más de x o también de y
- 19 E2: De y
- 20 E1: Si es de x comienza de 1.5 ¿no?
- 21 E2: Depende si el circulito [punto sobre el círculo] está arriba comienza en cero, si el circulito está aquí [señalando el punto cuando $teta$ vale cero grados] empieza en 1.5 si es x

En este intercambio de ideas se aprecia que E1 y E2 visualizan el movimiento para determinar el punto donde deben comenzar a trazar la gráfica, lo cual evidencia que tienen noción sobre lo discreto.

22 E1: entonces nada más pongo una...

23 E2 toma el lápiz, pero antes de comenzar a graficar dice: ¿pero no es con respecto a esto? [señalando los datos que obtuvieron en Tracker, en la hoja impresa] ¿o no?

24 E1: pues nada más hay que dibujar la función ¿no?

25 E2: ¡ay! pues en ese caso, según yo es así [dibuja en la hoja la gráfica]

La actividad tenía el propósito de que los estudiantes tuvieran la experiencia de transitar de lo discreto (tabla de valores) a lo continuo (gráfica de la función) a través del manejo de diferentes registros de representación. Por un momento *E2* considera hacer uso de la tabla de valores impresa (como se pedía), pero inmediatamente abandonan esta idea para enfocarse en determinar la forma global de la gráfica.

26 E1: ¿entonces quedaría así?

27 E2: yo digo porque seno de 180 y seno de 0 es cero [dejan la gráfica de $-r\text{sen}(\theta)$]

Trazan la gráfica correspondiente a la coordenada x , y la asocia con la función " $\cos\theta r$ ", y para la coordenada y trazan la gráfica como $-y$, o sea la relaciona con la función " $-\text{sen}\theta r$ ", la forma en que *E1* escribe las funciones no es correcta, en términos de posición de variables. Sin embargo, en el video se nota cómo en un principio *E1* había olvidado escribir r , después, su compañero *E2* le hace la observación y *E1* por falta de espacio la coloca al final.

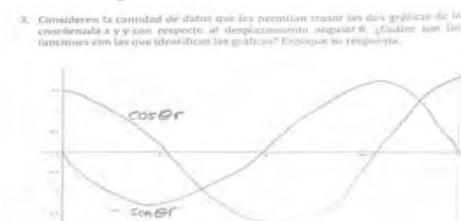


Figura 5: Gráficas del equipo A para responder la pregunta 3

En el diálogo se observa que hay una activación del plano [Sem-Dis] de lo discursivo a lo semiótico porque para trazar las gráficas solo hacen uso de su referencial teórico y de las pruebas pragmáticas. Aunque si hay un cambio de registro de representación, tabular al gráfico, no es claro distinguir el paso de lo discreto a lo continuo porque no toman los datos obtenidos por Tracker, solo trazan directamente la gráfica que consideran correcta. En el diálogo se nota que el estudiante *E2* percibe cómo se comporta la gráfica, a partir de la posición del punto sobre el círculo, sin embargo no corrige a *E1* cuando traza la gráfica. Finalmente, con sus conocimientos previos asignan, a las gráficas, las funciones que podrían modelar el movimiento, figura 5.

Como los estudiantes establecen explícitamente la relación entre las variables asociadas con el movimiento, utilizando lenguaje matemático, podemos decir que se encuentran en la fase 4 del ciclo de modelización, trabajo matemático. También

observamos que hay un cambio de signo, de lo numérico a lo algebraico, y se aprecia la interiorización del concepto de función al asociarle una expresión simbólica al fenómeno de movimiento. Por tanto, creemos que los estudiantes dan el paso hacia el paradigma CII.

El análisis que se presenta en este trabajo es un extracto del análisis completo, la finalidad es mostrar el funcionamiento de los elementos teóricos en una situación de aprendizaje.

CONCLUSIONES

Con base en el análisis de esta experimentación, podemos decir que, en principio, el uso de los paradigmas, del *ETC*, para el diseño de la actividad y, el análisis y la caracterización del trabajo realizado por los estudiantes es funcional. La descripción de cada uno de los paradigmas favorece la categorización del trabajo, en el dominio de la cinemática y de la matemática, de tal manera que la caracterización del *ETC* personal de los estudiantes sea más precisa. También, consideramos que, en la medida en que se mejoren las actividades, éstas impactarán positivamente en la caracterización de los paradigmas del *ETC*.

El uso del ciclo de modelización de Blum y Leiss en el diseño de la actividad propició la activación de los planos del *ETC*, haciendo que los estudiantes transitaran a diferentes registros de representación. De acuerdo con Duval (1993) el uso de más de un registro de representación promueve la adquisición conceptual de un objeto matemático, en este caso el de función.

El haber considerado estas dos teorías, en conjunto, hizo que nuestro trabajo se enriqueciera. Por un lado, el ciclo de modelización nos ayudó a diseñar y analizar una actividad que diera lugar a la transición de un fenómeno real hacia su representación en el mundo de la matemática (a través de fases que consideran cambios en los registros de representación de los objetos matemáticos tratados). Por otro lado, el *ETC* nos permitió caracterizar con mayor detalle los: artefactos, representámenes, referenciales teóricos y los procesos cognitivos involucrados en cada una de las fases.

Finalmente, en el diseño y análisis de las actividades que se pondrán en práctica en un taller de 3 meses de modelización matemática, se considerarán aspectos como: intervenciones del profesor; preguntas que los ayuden, de manera más concreta, a transitar de un paradigma a otro y; una fase de exposición que retroalimente el proceso de modelización.

REFERENCES

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(Extraordinario 1), 267-299.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, 18(2), 147-176.

- Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines *et al.* (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics*. (pp. 222-231). Ellis Horwood, Chichester.
- Bunge (1983) Epistemologie. Paris, Ed. Maloine Collection Recherches Interdisciplinaires
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Lang.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Galilei, G. (1945). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Losada.
- Harel, G., & Lesh, R. (2003). Local conceptual development of proof schemes in a cooperative learning setting. *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, 359-382.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of CERME*(Vol. 3, No. 1-9).
- Kuhn, S. T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura económica.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.
- Oresme (1482), N., & da Parma, B. P. *Tractatus de latitudinibus formarum*. Mathaeus Cerdonis.
- Peirce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe* (Vol. 31). Seuil.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; Une approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand Colin.
- Ruiz, L. (1994). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. *Doctoral dissertation, Universidad de Jaén*.
- Schmidt, B. (2010). Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective. In *CERME-6-Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon: NRP (pp. 2066-2075).

