HAL open science

Algèbres amassées associées aux variétés de Richardson ouvertes : un algorithme de calcul de graines initiales

Etienne Menard

To cite this version:

Etienne Menard. Algèbres amassées associées aux variétés de Richardson ouvertes : un algorithme de calcul de graines initiales. Algèbre commutative [math.AC]. Normandie Université, 2021. Français. NNT : 2021NORMC211 . tel-03213985

HAL Id: tel-03213985

https://theses.hal.science/tel-03213985

Submitted on 11 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHEMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Algèbres amassées associées aux variétés de Richardson ouvertes : un algorithme de calcul de graines initiales

Présentée et soutenue par
Etienne MENARD

Thèse soutenue le 10/03/2021 devant le jury composé de		
M. VINCENT PILAUD	Chargé de recherche HDR, École Polytechnique	Rapporteur du jury
Mme CLAIRE AMIOT	Maître de conférences, Institut Fourier	Membre du jury
Mme SOPHIE MORIER-GENOUD	Maître de conférences, Université Paris 6 Pierre et Marie Curie	Membre du jury
M. PIERRE-GUY PLAMONDON	Professeur des universités, Université de Versailles Saint-Quentin	Membre du jury
M. BERNARD LECLERC	Professeur des universités, Université Caen Normandie	Directeur de thèse
M. BERNHARD KELLER	Professeur des universités, Université Paris 7 Paris Diderot	Président du jury

Thèse dirigée par BERNARD LECLERC, Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen)

UNIVERSITÉ CAEN NORMANDIE

Remerciements

Avant toute chose, je voudrais remercier celui sans qui rien de tout cela n'aurait été possible, celui qui m'a fait découvrir la notion de carquois en M1 après avoir renforcé mon goût pour l'algèbre avec un passionnant cours de M1, celui qui a su m'accompagner lors de mon stage de M2 et ces presque 4 années de doctorat, toujours avec patience et bienveillance : merci Bernard pour ton encadrement et j'espère que nous continuerons à collaborer régulièrement.

Je voudrais aussi remercier Denis qui était mon référent local pour le comité de suivi individuel. Je n'ai jamais vraiment eu besoin de faire appel à toi (heureusement) mais je sais que tu aurais su répondre présent et j'ai apprécié ton suivi de mon cursus et tes suggestions lors des réunions du comité.

Autre membre de mon comité de suivi de thèse et un des membres du jury, merci à toi Pierre-Guy pour ton implication dans ce comité et tes conseils judicieux, notamment celui de persévérer dans la mise en algorithme des mutations. Ce qui devait être un simple outil à la base s'est finalement avéré être le point de départ de la rédaction de la preuve.

Je remercie aussi Vincent et Bernhard qui ont accepté de rapporter mon manuscrit de thèse, leurs relectures attentives et leurs conseils ont contribué à l'amélioration de sa qualité. Les conseils sur l'amélioration des algorithmes me laissent de quoi m'occuper pendant un certain temps. Je remercie en particulier Bernhard pour son applet qui m'a aidé à calculer mes premières mutations de carquois, et pour ses réponses à mes interrogations sur les suites rouges et vertes.

Merci aussi à Sophie et Claire qui ont accepté de faire partie de mon jury, leur expertise dans le domaine ne fait aucun doute et j'attends leurs questions durant ma soutenance avec impatience (à l'idée des pistes qu'elles pourraient m'ouvrir) et crainte (à l'idée de ne pas savoir y répondre). J'ai particulièrement apprécié nos échanges lors de l'ANR SC^3A et j'espère que nous aurons l'occasion de continuer à échanger régulièrement. Et merci à toi Sophie d'avoir réalisé le rêve de tout collégien en maths avec ta nouvelle façon d'additionner les fractions.

Restons dans l'ANR SC^3A pour me tourner vers Yann, que j'ai rencontré en même temps que Pierre-Guy. Je te remercie pour tes encouragements, nos échanges, et tes invitations à parler au séminaire des doctorants du LAMFA et à participer à cette rencontre de l'ANR SC^3A. J'espère que nous aurons à nouveau l'occasion d'échanger et de travailler ensemble.

Encore dans l'ANR SC^3A mais cette fois-ci parmi mes homologues doctorants, merci à celui avec qui j'ai fait le plus de conférences : Élie. Je ne me souviens plus où nous nous sommes rencontrés la première fois (à Caen peut-être ?) mais depuis nous nous sommes croisés à presque chaque conférence, que ce soit Leicester, Marseille, Amiens ou Caen, j'ai toujours le même plaisir à te retrouver et à échanger avec toi. Félicitations à nouveau pour ta thèse et je suis sûr que nous nous reverrons.

Je voudrais maintenant saluer mes professeurs, de Caen et de Lyon 1, merci pour vos enseignements puis vos conseils en tant que collègues. J'espère que cette soutenance rendra honneur à ce que vous m'avez apporté.

Merci à mes collègues de l'ED MIIS et du collège des Écoles doctorales, j'ai eu plaisir à travailler avec vous sur des dossiers complexes et très intéressants.

Un merci tout particulier aux doctorants du LMNO, pour votre soutien, vos conseils et tous les bons moments passés ensemble. De bébé du labo je suis maintenant le papa et j'espère que mes petits pioupious mèneront leur thèse à bien et qu'ils auront bien retenus tous les conseils administratifs dispensés ces 4 années.

Il est de petites mains, discrètes mais sans qui rien ne serait possible : merci à Sonia, Anita, Marie, Axelle et Marie, nos secrétaires qui ont toujours su répondre patiemment à nos galères administratives et

nous accompagner avec talent dans toutes nos démarches. Sans vous, notre travail serait tout simplement impossible. Autres personnes indispensables que j'aimerais remercier : merci à Anne-Sophie et ses collègues qui ont toujours su faire de notre labo un lieu agréable à vivre et étaient encore présents le soir quand nous quittions le labo à des heures tardives.

Je pense fort à toutes les personnes merveilleuses avec qui j'ai partagé les bancs de la fac, mes camarades de licence, l'équipe des agrégatifs, les topologues algébriques de Lyon.

Merci à mes étudiants d'avoir été un public plutôt facile à gérer et d'avoir au moins essayé de faire semblant d'être intéressé par l'algorithmique. Merci de m'avoir permis d'obtenir un retour direct sur mon travail, les fruits d'un enseignement se mesurant plus vite que ceux de la recherche.

Maintenant je souhaiterais remercier mes parents, Laurence et David qui ont su me procurer la famille aimante et attentionnée qui a fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Merci à Gerbold, Juliette, Lucie et Baptiste mes frères et sœurs de sang ou de cœur pour vos encouragements, vos soutiens et nos temps en famille. Merci à Léone d'avoir toujours insisté pour que je vienne la voir un peu plus souvent, me forçant à prendre des pauses bienvenues dans mon travail. Merci aussi à Louise, Eugène et Guy, qui ont su me couvrir de leur amour chaque jour où nous étions ensemble et qui, je l'espère, sont fiers de moi là où ils sont. Merci enfin à toute ma famille qui a toujours été là pour moi.

Les remerciements pourraient encore durer très longtemps (la légende dit qu'ils continuent encore, ailleurs, à l'abri des yeux indiscrets) avec la liste de tous mes amis qui ont su être là pour moi, dans la joie comme dans la peine. Soyez tous remerciés chacun à votre tour : cette thèse, c'est aussi un peu de vous.

Table des matières

1 Introduction **7**
1.1 Résumé . . . 7
1.2 Organisation . . . 8

2 Préliminaires **11**
2.1 Systèmes de racines, groupe de Weyl et combinatoire . . . 11
2.1.1 Système de racines cristallographique . . . 11
2.1.2 Groupes de Weyl . . . 13
2.1.3 Ordre de Bruhat . . . 15
2.1.4 Représentant le plus à droite . . . 16
2.2 Algèbre de Lie . . . 17
2.2.1 Algèbres de Lie semi-simples . . . 17
2.2.2 Modules de plus haut poids . . . 18
2.2.3 Caractères . . . 20
2.2.4 Cristaux . . . 20
2.2.5 Le cristal $\mathcal{B}(\infty)$ . . . 21
2.2.6 Polytopes . . . 23
2.2.7 Structure cristalline sur $\mathcal{MV}(\infty)$ . . . 27
2.2.8 Groupes algébriques linéaires . . . 29
2.2.9 Variété de drapeaux . . . 29
2.3 Algèbres amassées . . . 30
2.3.1 Graine . . . 30
2.3.2 Algèbre amassée . . . 31
2.3.3 Carquois . . . 31
2.4 Algèbre préprojective . . . 32
2.4.1 Sous-catégories de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ . . . 33
2.4.2 Caractère d'amas . . . 34
2.5 Structure amassée . . . 35
2.6 Structure amassée sur l'algèbre préprojective . . . 38
2.6.1 Graine pour la structure amassée de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ . . . 38
2.6.2 Structure amassée sur $\mathcal{C}_w$ . . . 40
2.7 Existence d'une structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$ . . . 41
2.7.1 Paires de torsion . . . 41
2.7.2 Graine de $\mathcal{C}_{v,w}$ . . . 42
2.7.3 Lien avec $\mathbb{C}[N]$ . . . 42
2.8 Stratification des modules sur l'algèbre préprojective . . . 44
2.8.1 Algèbres quasi-héréditaires . . . 45
2.8.2 L'algèbre $B_{\overline{w}}$ est quasi-héréditaire . . . 46
2.8.3 Mutation de Δ-vecteurs . . . 47
2.9 Calcul des Δ-vecteurs par les polytopes de Mirković-Vilonen . . . 47
2.9.1 Variété nilpotente de Lusztig . . . 48
2.9.2 Polytopes de Harder-Naramsimhan . . . 48

2.9.3 Détermination des Δ-vecteurs de $V_{\overline{w}}$ . . . 49
2.10 Condition d'appartenance aux sous-catégories $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^v$ . . . 51

3 Deux descriptions de l'algorithme **53**
3.1 Premier algorithme de mutation . . . 53
3.1.1 Définitions préalables . . . 53
3.1.2 Définition du premier algorithme de mutation . . . 54
3.2 Deuxième algorithme de mutation . . . 63
3.2.1 Définitions préalables . . . 63
3.2.2 Définition du deuxième algorithme . . . 63

4 Preuve du théorème **67**
4.1 Idées de la preuve . . . 67
4.2 Définitions . . . 68
4.3 Structure des Δ_i-vecteurs initiaux de $V_{\overline{w}}$ . . . 72
4.4 Description des sommets évincés . . . 78
4.5 Structure en dents de scie du carquois de $V_{\overline{w}}$ . . . 80
4.6 Énoncé du théorème structurel . . . 80
4.7 Structure de la preuve du théorème structurel . . . 81
4.8 Initialisation du théorème structurel . . . 81
4.8.1 Point 1 . . . 81
4.8.2 Point 2 . . . 81
4.8.3 Point 3 . . . 81
4.8.4 Point 4 . . . 81
4.8.5 Point 5 . . . 82
4.8.6 Point 6 . . . 82
4.8.7 Conclusion . . . 82
4.9 Structure de la preuve de l'hérédité . . . 82
4.9.1 Preuve de l'initialisation du lemme structurel . . . 83
4.10 Configurations et héritages . . . 84
4.11 Décalage de dents . . . 87
4.12 Preuve de l'hérédité du lemme structurel . . . 89
4.13 Lemme d'inclusion . . . 93
4.14 Preuve du lemme d'inclusion . . . 96
4.15 Hérédité du théorème structurel . . . 101
4.16 Preuve du théorème final . . . 102

5 Applications du théorème **105**
5.1 Équivalence de la définition des algorithmes de mutation . . . 105
5.2 Suites rouges et vertes . . . 106
5.2.1 Définitions . . . 106
5.3 Obtention des graines par quotient . . . 112

A Algorithmes Sage **115**
A.1 Prérequis . . . 115
A.1.1 Installation . . . 115
A.1.2 Chargement des fichiers . . . 115
A.2 Exemples minimaux fonctionnels . . . 115
A.2.1 Suivi de l'algorithme principal . . . 116
A.2.2 Génération du carquois de $V_{\overline{w}}$ . . . 117

B Exemple de fonctionnement de l'algorithme **119**
B.1 Données initiales . . . 119
B.2 Δ-stratification . . . 121
B.3 Δ-vecteurs des modules initiaux . . . 123
B.4 Lien avec le théorème 4.3.10 . . . 124
B.5 Lien avec la définition alternative de l'algorithme . . . 124
B.6 Calcul de la V_i-coloration des sommets . . . 124
B.7 Mutations . . . 128

CHAPITRE 1

Introduction

1.1 Résumé

Le but de ce mémoire est d'apporter une solution algorithmique à un problème provenant de la théorie des algèbres amassées.

Les algèbres amassées, inventées par S. Fomin et A. Zelevinsky autour de l'an 2000 [FZ02a], sont des anneaux commutatifs intègres munis d'une structure combinatoire additionnelle très particulière. Cette structure consiste en la donnée d'une famille de *graines* reliées les unes aux autres par une procédure appelée *mutation*. Chaque graine consiste plus précisément en deux parties : un *amas* et un *carquois*. L'amas d'une graine est une famille d'un nombre n fixé d'éléments de l'anneau qui engendre librement son corps des fractions, et le carquois est un graphe orienté qui code les n mutations reliant cette graine à ses voisines. L'esprit de cette définition est que la réunion des amas forme une famille (en général infinie) d'éléments remarquables de l'anneau, qui peuvent être construits par une procédure combinatoire inductive à partir d'une graine de départ (*graine initiale*).

Les motivations des inventeurs provenaient de divers exemples, (i) en théorie de Lie algébrique (ainsi l'anneau des fonctions polynomiales sur le groupe des matrices unitriangulaires a une structure naturelle d'algèbre amassée, liée aux bases canoniques de Lusztig et à la notion de matrice totalement positive) [FZ02a], (ii) en combinatoire (suites de Somos, phénomène de Laurent [FZ02b]), ou (iii) dans la théorie des systèmes intégrables (conjecture de Zamolodchikov) [FZ03]. Depuis l'apparition des algèbres amassées, de nombreuses autres relations avec divers domaines ont été découvertes, par exemple avec la théorie des représentations de carquois et d'algèbres de dimension finie [BMR+06, CK06, CK08], avec la géométrie des variétés de carquois et les représentations d'algèbres affines quantiques [HL10], avec les espaces de Teichmüller décorés des surfaces de Riemann [GSV10, FST08, FT18], avec la géométrie birationnelle et la symétrie miroir [GHKK18].

Le point de départ de ce mémoire est une structure d'algèbre amassée pour les anneaux de coordonnées de certaines strates de la variété de drapeaux associée à un groupe algébrique linéaire simple de type A, D, E : les *variétés de Richarson ouvertes*. Ces strates sont les intersections des cellules de Schubert de la variété de drapeaux relativement à deux sous-groupes de Borel opposés. Elles ont été d'abord considérées par Kazhdan et Lusztig [KL80] (en lien avec les polynômes de Kazhdan-Lusztig), puis sont réapparues dans l'étude de la structure de Poisson de la variété de drapeaux [GY09], et dans l'étude de sa partie totalement non-négative [Lus98, Rie97, Rie99, RW08]. Par analogie avec les travaux de Berenstein, Fomin et Zelevinsky sur les doubles cellules de Bruhat [BFZ05, FZ99], il est raisonnable d'espérer que les variétés de Richardson ouvertes admettent une structure amassée compatible à la fois avec la structure symplectique et la positivité totale. Dans [Lec16] une sous-algèbre amassée de rang maximal de l'anneau des coordonnées d'une variété de Richardson a été construite, et il a été conjecturé que cette sous-algèbre coïncide avec l'anneau tout entier.

Cette conjecture a récémment été prouvée par Galashin et Lam dans le cas particulier des *variétés positroïdes*, [GL19] c'est-à-dire des strates de Richardson ouvertes de la variété de drapeaux d'un groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ (type A) qui apparaissent dans une variété Grassmannienne, mais elle est toujours ouverte en général. Une des difficultés est sans doute que la construction de [Lec16] est théorique et ne fournit pas de graine initiale totalement explicite. En fait, suivant l'approche de [GLS11], à chaque strate de

Richardson on associe dans [Lec16] une certaine sous-catégorie de Frobenius de la catégorie des modules sur l'algèbre préprojective de même type que le groupe algébrique de départ, et on montre que cette catégorie admet une structure amassée au sens de Buan, Iyama, Reiten et Scott [BIRS09]. Le lien avec l'anneau de coordonnées de la strate de Richardson se fait ensuite par le biais du *caractère d'amas* déjà étudié dans [GLS06]. Dans cette construction les graines de l'algèbre amassée proviennent directement des modules rigides maximaux de la catégorie de Frobenius. En particulier le carquois de la graine s'identifie au carquois de Gabriel de l'algèbre d'endomorphismes du module rigide maximal. Malheureusement, ces modules rigides maximaux sont très difficiles à décrire en général, et même pour les plus simples d'entre eux étudiés à la fin de [Lec16], le carquois associé n'est pas connu.

Dans ce mémoire nous donnons un algorithme qui, à partir des paramètres définissant une strate de Richardson (c'est-à-dire à partir d'un couple (v, w) d'éléments du groupe de Weyl tels que $v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat), calcule un module rigide maximal explicite de la catégorie de Frobenius associée, *ainsi que son carquois*. Le principe de l'algorithme est le suivant. La catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$ introduite dans [Lec16] est définie comme l'intersection de deux sous-catégories $\mathcal{C}^v$ et $\mathcal{C}_w$ de la catégorie des modules sur l'algèbre préprojective. La catégorie $\mathcal{C}_w$ et sa structure amassée ont été étudiées en détail dans [BIRS09, GLS11], et on connaît, pour chaque décomposition réduite $\overline{w}$ de w, un module rigide maximal $V_{\overline{w}}$ de $\mathcal{C}_w$ ainsi que son carquois. On peut donc à partir de cette graine initiale de $\mathcal{C}_w$ produire par mutation de nouvelles graines. L'idée de l'algorithme est d'effectuer une suite de mutations bien choisies qui aboutisse à un module rigide maximal R de $\mathcal{C}_w$ tel que $\ell(w) - \ell(v)$ *facteurs directs indécomposables de R appartiennent aussi à $\mathcal{C}^v$*. La somme de ces facteurs est le module rigide maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$ recherché. De plus son carquois s'obtient à partir de celui de R en supprimant les flèches adjacentes aux sommets correspondant aux facteurs de R qui ne sont pas dans $\mathcal{C}^v$.

La suite de mutations à effectuer peut être vue comme une variante de la suite de mutations étudiée dans [GLS11] pour passer du module $V_{\overline{w}}$ à un module noté $T_{\overline{w}}$ dans [GLS11]. Une première formulation de l'algorithme, qui nous a été suggérée par J. Schröer, décrit explicitement cette suite à partir de la donnée de $\overline{w}$ et de son sous-mot $\overline{v}$ *le plus à droite* qui représente v. Pour démontrer que la conjecture de Schröer est correcte, nous avons dû passer par une deuxième formulation de la suite de mutations, a priori indépendante. Dans [GLS11] sont décrites des stratifications de la catégorie $\mathcal{C}_w$ dont les strates sont paramétrées par des vecteurs d'entiers appelés Δ-*vecteur*. Les modules rigides étant caractérisés par la strate à laquelle ils appartiennent, on peut identifier les modules rigides de $\mathcal{C}_w$ au moyen de leur Δ-vecteur. On peut aussi donner un critère d'appartenance à $\mathcal{C}_{v,w}$ en termes d'annulation de certaines coordonnées du Δ-vecteur. Enfin des formules de mutation des Δ-vecteurs ont été décrites dans [GLS11]. Dans la deuxième formulation de l'algorithme, les mutations sont choisies de manière à annuler l'une après l'autre, un peu comme dans un algorithme "glouton", les coordonnées appropriées des Δ-vecteurs. Le principal résultat de ce mémoire est de montrer que cette stratégie gloutonne fonctionne correctement, et qu'elle coïncide en fait avec la première formulation de l'algorithme.

1.2 Organisation

Le mémoire est organisé comme suit. Dans le chapitre 2, on commence par rappeler à la section 2.1 les bases de la théorie des systèmes de racines et des groupes de Weyl, dont les paires d'éléments paramétrisent les strates que l'on étudiera. Dans la section 2.2, en partant de la matrice de Cartan associée à un système de racines cristallographique, on rappelle des résultats sur la théorie des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples, et en particulier la notion de module de plus haut poids. La structure combinatoire de ces modules peut être décrite grâce à la théorie des cristaux qu'on utilisera à la section 2.9. Ensuite on rappelle à la section 2.3 la définition d'une algèbre amassée. Dans les sections suivantes on rappelle la définition de l'algèbre préprojective 2.4, de sa catégorie de modules $\mathbf{mod}(\Lambda)$ sur laquelle on définira un analogue catégorique de la notion d'algèbre amassée, la structure amassée, d'abord en général à la section 2.5 puis plus spécifiquement sur $\mathbf{mod}(\Lambda)$ à la section 2.6 et enfin sur sa sous-catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$, catégorie dont l'étude sera le cœur de ce document, à la section 2.7. On poursuit avec des rappels sur la notion de Δ-vecteur à la section 2.8 puis à la section 2.9.3 on calcule les Δ-vecteurs d'une graine initiale de $\mathcal{C}_w$ relatifs à la stratification associée à une décomposition réduite arbitraire de w_0. Finalement, à la section 2.10 on prouve des critères d'appartenance d'un module $M \in \mathbf{mod}(\Lambda)$ à l'une des catégories $\mathcal{C}^v$ ou $\mathcal{C}_w$ en fonction de son Δ-vecteur.

Dans le chapitre 3 on décrit deux algorithmes, le premier, conjecturé par Schroër étant une variation de celui précédemment énoncé dans [GLS11], le deuxième étant un algorithme glouton dans sa formulation, visant à obtenir des modules de $\mathcal{C}^v$ en modifiant de façon adéquate leurs Δ-vecteurs. Le premier algorithme est déterminé par la combinatoire des représentants de v et w choisis, le deuxième repose sur des choix faits à chaque étape en fonction des Δ-vecteurs. L'équivalence entre ces deux algorithmes sera prouvée à

la section 5.1.

Au chapitre 4 on prouve que le deuxième algorithme permet bien d'obtenir une graine pour la structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$. On énonce les théorèmes qu'on va démontrer aux sections 4.3 et 4.6 et on explique à la section 4.1 l'organisation de la preuve. Ainsi on utilise les résultats prouvés à la section 2.9.3 pour établir à la section 4.3 une caractérisation des Δ-vecteurs des facteurs directs du module initial qui seront mutés par l'algorithme. Dans les sections 4.4 on établit des critères combinatoires pour classer les facteurs directs du module initial et des différents modules mutés en plusieurs ensembles et dans la section 4.5, on introduit du vocabulaire qui nous permettra de décrire de façon efficiente la structure du carquois associé aux modules que l'on mutera. On énonce ensuite à la section 4.6 le théorème qu'on a appelé « structurel » qui décrit l'effet de la suite de mutations de notre algorithme sur la graine initiale et on précise dans la section suivante l'organisation de la preuve de ce théorème. On conclut à la section 4.16 à la validité de ce théorème.

Au chapitre 5, on prouve comme dit précédemment l'équivalence des deux algorithmes formulés au chapitre 5 puis on étudie des corollaires possibles du résultat, dans la théorie des suites vertes et rouges de Keller et sur le rapport entre la sortie de l'algorithme et l'obtention d'une graine de $\mathcal{C}_{v,w}$ par un quotient de la graine initiale $V_{\overline{w}}$.

Dans l'appendice on donne à la section B un exemple détaillé de l'ensemble des étapes des algorithmes de calcul d'une graine de $\mathcal{C}_{v,w}$ qui illustre de nombreux points de ce document.

Au cours de cette thèse, on a développé des fonctions SageMath permettant de représenter les modules et leurs mutations en fonction de leurs Δ-vecteurs. On a programmé plusieurs fonctions détaillées à la section A.2 et en particulier une fonction qui prend en entrée le représentant $\overline{w}$ représenté comme suite d'entiers et l'élément v (représenté par le type Sage d'élément d'un groupe de Weyl) et renvoie en sortie les Δ-vecteurs du module $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ ainsi que son carquois. Il est aussi possible de faire enregistrer des carquois et la liste des Δ-vecteurs à chaque étape de l'algorithme. L'ensemble de ces fonctions peut être téléchargé à l'adresse `https://menarde01.users.lmno.cnrs.fr/soutenance.html` et incorporé à une installation SageMath en suivant les indications de la section A.1.1 et les indications fournies avec l'archive.

CHAPITRE 2

Préliminaires

2.1 Systèmes de racines, groupe de Weyl et combinatoire

Dans cette section on va définir les notions de système de racines et de groupe de Weyl associé à ces systèmes. Les strates des variétés de drapeaux (qu'on définira à la section 2.2.9) auxquelles on va attacher des algèbres amassées (définies à la section 2.3) seront indexées par des paires d'éléments de ce groupe de Weyl.

2.1.1 Système de racines cristallographique

Cette section est inspirée de [Hum72] et [Car05].

Soit E un espace euclidien, c'est à dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

On appelle **réflexion** de E une transformation linéaire qui laisse fixe un **hyperplan** (un sous-espace de codimension un) et qui envoie tout vecteur orthogonal à cet hyperplan sur son opposé.

A chaque vecteur $\alpha \in E\backslash\{0\}$, on associe une réflexion σ_α par rapport à l'hyperplan

$$P_\alpha = \{\beta \in E \mid (\alpha,\beta) = 0.$$

On définit de façon explicite la réflexion par la formule :

$$\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

On notera $\langle\beta,\alpha\rangle$ le scalaire $\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$

On définit alors la notion de système de racines de la façon suivante :

Définition 2.1.1 (Système de racines)**.** Un sous-ensemble $\Phi \subset E$ est appelé **système de racines cristallographique** de E s'il vérifie les conditions suivantes :

1. Φ est fini, engendre E et ne contient pas 0_E
2. Si $\alpha \in \Phi$, les seuls vecteurs colinéaires de α dans Φ sont $\pm\alpha$
3. Si $\alpha \in \Phi$, $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$
4. Si $\alpha,\beta \in \Phi$, $\langle\beta,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$

Définition 2.1.2 (Groupe de Weyl d'un système de racines)**.** Soit Φ un système de racines de E. On note $W \subset \mathrm{GL}(E)$ le sous-groupe engendré par les réflexions $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$. On appelle ce groupe le **groupe de Weyl** de Φ.

Définition 2.1.3 (Racines simples et positives)**.** Un sous-ensemble $\Pi \subset \Phi$ est appelé **ensemble des racines simples** de Φ si Π est une base de E et si chaque racine $\beta \in \Phi$ peut s'écrire comme $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$ où les coefficients k_α sont soit tous positifs soit tous négatifs. Une racine $\alpha \in \Pi$ est dite **racine simple** (par rapport à Π). On peut alors dire qu'une racine est **positive** par rapport à Π, si les k_α sont tous positifs dans la somme ci-dessus. Dans le cas contraire, la racine est dite **négative**. On note Φ^+ l'ensemble des racines positives.

On notera $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ les racines simples de Π, $I = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des racines simples, $n = \mathrm{Card}(\Pi)$ le nombre de racines simples et r le cardinal de Φ^+.

Définition 2.1.4 (Matrice de Cartan)**.** La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ est appelée **matrice de Cartan** de Φ.

Proposition 2.1.5 ([Car05, Propositions 6.3 & 6.4])**.** *La matrice de Cartan de Φ dépend uniquement de la numérotation des racines de Π. Elle est indépendante du choix de l'ensemble des racines simples.*

Ses coefficients vérifient :

1. $a_{i,i} = 2$, $\forall i \in I$
2. $a_{i,j} \in \{0, -1, -2, -3\}$ *si* $i \neq j$
3. *Si* $a_{i,j} = -2$ *ou* -3 *alors* $a_{j,i} = -1$
4. $a_{i,j} = 0$ *si et seulement si* $a_{j,i} = 0$

Définition 2.1.6 (Graphe de Coxeter)**.** Soit Φ un système de racines avec comme ensemble de racines simples Π. Le **graphe de Coxeter** est le graphe à n sommets correspondant à chacune des racines de Π où on a

$$q_{i,j} := \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$$

arêtes entre les sommets i et j ($i \neq j$).

Définition 2.1.7 (Diagramme de Dynkin)**.** Le **diagramme de Dynkin** de Φ est le graphe de Coxeter sur lequel on ajoute une flèche pointant vers la plus courte des deux racines si toutes les racines ne sont pas de même longueur et si on a une arête entre deux racines simples de longueur différentes.

Définition 2.1.8. Soit $\Phi = \Psi \sqcup \Omega$ un système de racines de E tel que Ψ et Ω soient eux-mêmes des systèmes de racines sur des sous-espaces supplémentaires $E_1 \oplus E_2 = E$. Alors on dit que Φ est décomposable en les systèmes Ψ et Ω et on note $\Phi = \Psi \times \Omega$.

Si le système de racines Φ n'admet aucune décomposition de ce type, il est dit **irréductible**.

Proposition 2.1.9 ([Car05, Section 6])**.** *Un système de racines est irréductible si et seulement si son diagramme de Dynkin est connexe.*

La classification des systèmes de racines ou des diagrammes de Dynkin est largement traitée dans la littérature. On pourra notamment consulter [Hum72], [Car05] ou encore [Hum90]. Ici on rappelle juste la classification :

Proposition 2.1.10 ([Car05, Liste 6.11])**.** *Les différents diagrammes de Dynkin connexes sont les :*

$$A_n : \ 1 — 2 \cdots\cdots n-1 — n \quad (n \geq 1),$$

$$B_n : \ 1 — 2 \cdots\cdots n-2 — n-1 \Rightarrow n \quad (n \geq 2),$$

$$C_n : \ 1 — 2 \cdots\cdots n-2 — n-1 \Leftarrow n \quad (n \geq 2),$$

$$D_n : \begin{array}{ccccc} & & & & n-1 \\ & & & \diagup & \\ 1-2 & \cdots & n-2 & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & n \end{array} \quad (n \geq 4),$$

$$E_8 : \ \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 - 7 - 8 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 2 & & & & \end{array},$$

(on obtient le graphe de E_7 à partir de E_8 en retirant le sommet 8, celui de E_6 en retirant les sommets 7 et 8),

$$F_4 : \ 1 - 2 \Longleftarrow 3 - 4 \ ,$$

$$G_2 : \ 1 \Lleftarrow 2 \ .$$

Remarque 2.1.11. *En type A, D ou E, graphe de Coxeter et diagramme de Dynkin sont identiques. Dans ce document on ne considérera que des systèmes de racines de types A, D ou E dont on numérotera les sommets comme ci-dessus.*

Exemple 2.1.12. On va présenter une représentation du système de racines A_2. On peut prendre comme racines simples : $\alpha_1 = (2, 0)$ et $\alpha_2 = (-1, \sqrt{3})$. On a de plus $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, \sqrt{3})$ et $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$, $\Phi = \Phi^+ \sqcup (-\Phi^+)$.

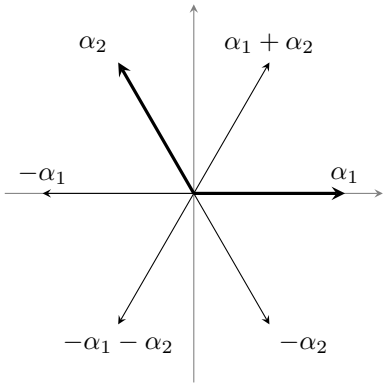


FIGURE 2.1 – Système de racines de type A_2

De manière générale, le système de racines de type A_n peut être vu dans l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 0$ comme l'ensemble des vecteurs $e_i - e_j$ avec $1 \leq i \neq j \leq n + 1$.

2.1.2 Groupes de Weyl

Définition 2.1.13 (Groupe de Coxeter)**.** Un **groupe de Coxeter** est un groupe G admettant une présentation de la forme :

$$G = \langle s_i \in S \mid (s_i s_j)^{n_{i,j}} = 1 \rangle$$

où $n_{i,j} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $(s_i s_j)^\infty = 1$ indique que ces deux éléments n'ont pas de relation. On demande de plus que $n_{i,i} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq \mathrm{Card}(S)$, c'est-à-dire que tous les éléments de S soient des involutions.

La donnée de la paire (G, S) est appelée un **système de Coxeter**.

Tout au long de ce document nous considérerons les groupes de Weyl W associés aux systèmes de racines Φ de type A_n, D_n et E_n. Ces groupes de Weyl sont des exemples de groupes de Coxeter avec $S = \{s_i \mid i \in I\}$ où I est l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de Φ et $n_{i,j} = 2$ si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ ou $n_{i,j} = 3$ si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1$. Étant donné un groupe de Weyl W, on notera ses éléments v, w, x ou comme produits de réflexions élémentaires $s_k \cdots s_1$ indexées de *droite à gauche*. Étant donné un élément w, on distinguera si nécessaire un représentant particulier de w, noté $\overline{w}$ et décrit comme une suite d'entiers (correspondant aux indices des s_i), indexée de *droite à gauche*. Dans ce contexte on utilisera occasionnellement le vocabulaire de la théorie de la réécriture, parlant de lettres pour les entiers de la liste, de mot pour le représentant d'un élément de W.

On appelle **longueur** de $w \in W$, notée $\ell(w)$ le nombre minimal de générateurs d'un représentant de w dans le système de Coxeter (W, S). On appelle **représentant réduit** de w un représentant composé exactement de ce nombre de générateurs. Sauf mention contraire, tous les mots considérés dans cette thèse seront réduits. On note w_0 l'élément de longueur maximale de W.

Notation 2.1.14. Étant donné un représentant réduit $\overline{w}$ de w, on définit $\dot{w}$ comme une complétion à gauche de $\overline{w}$ en un représentant de w_0. C'est à dire un représentant de w_0 dont les $\ell(w)$ premières lettres de droite forment le représentant $\overline{w}$.

Étant donné $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \ldots, i_1]$ et $1 \leq m \leq \ell(w)$, on a :

$$w_{<m} = s_{i_{m-1}} \cdots s_{i_1}, \quad w_{\leq m} = s_{i_m} s_{i_{m-1}} \cdots s_{i_1}$$

et

$$\overline{w}_{<m} = [i_{m-1}, \ldots, i_1] \quad \overline{w}_{\leq m} = [i_m, \ldots, i_1].$$

En pratique on n'indique pas la façon dont on va compléter $\overline{w}$ en $\dot{w}$, mais nous verrons par la suite que la façon exacte dont on le complète n'a aucune influence sur les résultats que l'on prouve.

Exemple 2.1.15. On se place dans le groupe de Weyl de type A_3. On note s_1, s_2, s_3 les réflexions élémentaires vérifiant $s_i^2 = 1$, $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$, $s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3$ et $s_1s_3 = s_3s_1$.

On choisit un élément de W, $w := s_1s_2s_3s_2$. Il admet plusieurs représentants : $\overline{w} := [1, 2, 3, 2]$ correspondant au produit précédent, $\overline{w}_2 := [1, 3, 2, 3]$ correspondant au produit égal $s_1s_3s_2s_3$ et, correspondant au produit $s_3s_1s_2s_3$, $\overline{w}_3 := [3, 1, 2, 3]$. Chacun de ces représentants est réduit, la longueur de w étant $\ell(w) = 4$. Le représentant $\overline{w}_4 = [3, 3, 1, 3, 3, 2, 3, 2]$ n'est pas réduit.

Un des représentant de l'élément de longueur maximal w_0 est $\overline{w}_0 = [1, 2, 3, 1, 2, 1]$. On peut compléter à gauche $\overline{w}$ en un représentant de w_0, par exemple $\dot{w} = [3, 2, 1, 2, 3, 2]$.

Il y a autant de manières de compléter à gauche en un représentant de w_0 que d'expressions réduites de w_0v^{-1}. Par exemple si l'on prend $\overline{v} = [3, 2, 1]$, on a deux représentants $\dot{v}$ possibles : $[1, 2, 1, 3, 2, 1]$ ou $[2, 1, 2, 3, 2, 1]$.

On a déjà défini r à la définition 2.1.3 comme le nombre de racines positives de Φ. Ce nombre est aussi égal à $\ell(w_0)$, par la proposition suivante :

Proposition 2.1.16 ([Hum90, Section 1.7])**.** *Soit $\overline{w}_0 = [i_r, \dots, i_1]$, un représentant de $w_0 \in W$. Alors les racines de la suite (β_i) :*

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) \quad (2 \leq k \leq r)$$

sont deux à deux distinctes et forment Φ^+, l'ensemble des racines positives de Φ.

Exemple 2.1.17 (Cas A_3)**.** Prenons un représentant de w_0 dans A_3. On pose $\overline{w_0} = [1, 2, 3, 1, 2, 1]$.

On a

$$\begin{array}{llll}
\beta_1 = & \alpha_1 = & \alpha_1 & = (1, -1, 0, 0), \\
\beta_2 = & s_1(\alpha_2) = & \alpha_1 + \alpha_2 & = (1, 0, -1, 0), \\
\beta_3 = & s_1s_2(\alpha_1) = & \alpha_2 & = (0, 1, -1, 0), \\
\beta_4 = & s_1s_2s_1(\alpha_3) = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = (1, 0, 0, -1), \\
\beta_5 = & s_1s_2s_1s_3(\alpha_2) = & \alpha_2 + \alpha_3 & = (0, 1, 0, -1), \\
\beta_6 = & s_1s_2s_1s_3s_2(\alpha_1) = & \alpha_3 & = (0, 0, 1, -1),
\end{array}$$

et donc on a bien l'ensemble des racines positives du système de racines.

Définition 2.1.18. On appelle **couleur** d'un indice k d'un représentant $\overline{w} = [i_\ell, \dots, i_1]$ la valeur numérique de i_k.

On dit que deux couleurs i et j sont **adjacentes** si $n_{i,j} = 3$ ou encore les sommets i et j sont reliés par une arête dans le diagramme de Dynkin du système de racines sous-jacent.

Exemple 2.1.19. Dans l'exemple 2.1.15, la couleur de la quatrième lettre (ou du quatrième indice, à partir de la droite) de $\overline{w}$ est 1.

Définition 2.1.20. Soit $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$ un représentant d'un élément d'un groupe de Weyl de longueur ℓ et $1 \leq k \leq \ell$ un entier. On notera k^+ l'indice dans $\overline{w}$ défini comme

$$\min\{k < j \leq \ell(w) \mid i_j = i_k\}$$

ou bien $\ell(w) + 1$ si l'ensemble précédent est vide. Autrement dit c'est le premier indice de $\overline{w}$ à gauche[1] de k de même couleur que k.

On définit de même k^- comme

$$\max\{1 \leq j < k \mid i_j = i_k\}$$

ou 0 si l'ensemble précédent est vide.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$, $k^{\alpha+} = (k^{(\alpha-1)+})^+$ et $k^{(-\alpha)+} = k^{\alpha-}$.

On définit également

$$k_{\min} = \min\{1 \leq j \leq \ell(w) \mid i_j = i_k\}$$

et

$$k_{\max} = \max\{1 \leq j \leq \ell(w) \mid i_j = i_k\}.$$

Exemple 2.1.21. En reprenant l'exemple 2.1.15, on a dans $\overline{w}$, $1^+ = 3$ et $2^+ = 5$ (car il n'existe aucun indice supérieur à 2 de même couleur (3) dans ce représentant).

1. Pour notre numérotation de droite à gauche des représentants.

Définition 2.1.22. Étant donné un représentant $\overline{w}$ d'un élément $w \in W$, on appellera **2-mouvement en position** k $(1 \leq k \leq \ell(w) - 1)$, le mouvement de réécriture suivant :

$$[i_r, \ldots, i_{k+2}, \underline{i_{k+1}, i_k}, i_{k-1}, \ldots, i_1] \rightsquigarrow [i_r, \ldots, i_{k+2}, \underline{i_k, i_{k+1}}, i_{k-1}, \ldots, i_1]$$

où $n_{i_k, i_{k+1}} = 2$.

On appellera **3-mouvement en position** k, $(1 \leq k \leq \ell(w) - 2)$, le mouvement de réécriture suivant :

$$[i_r, \ldots, i_{k+3}, \underline{i_{k+2}, i_{k+1}, i_k}, i_{k-1}, \ldots, i_1] \rightsquigarrow [i_r, \ldots, i_{k+3}, \underline{i_{k+1}, i_k, i_{k+1}}, i_{k-1}, \ldots, i_1]$$

où $i_{k+2} = i_k$ et $n_{i_k, i_{k+1}} = 3$.

Exemple 2.1.23. Dans l'exemple 2.1.15 on passe de $\overline{w} = [1, 2, 3, 2]$ à $\overline{w}_2 = [1, 3, 2, 3]$ par un 3-mouvement en position 1. On passe de $\overline{w}_2$ à $\overline{w}_3 = [3, 1, 2, 3]$ par un 2-mouvement en position 3.

2.1.3 Ordre de Bruhat

Proposition 2.1.24 ([Hum90, Section 5.7])**.** *Soit T l'ensemble des réflexions s_α, $\alpha \in \Phi$ et*

$$S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$$

alors on a

$$T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}.$$

Définition 2.1.25. Soient $w, w' \in W$. On note $w' \to w$ s'il existe une réflexion $t \in T$ telle que $w = w't$ avec $\ell(w) > \ell(w')$.

Remarque 2.1.26. *Si on a $\alpha \in \Phi$ tel que $w = w's_\alpha$, en posant $\beta = w' \cdot \alpha \in \Phi$, on a $(w')^{-1} s_\beta w' = s_\alpha$ et donc $w = s_\beta w'$. On peut donc donner une définition alternative : $w' \to w$ s'il existe une réflexion $t \in T$ telle que $w = tw'$ avec $\ell(w) > \ell(w')$.*

Définition 2.1.27 (Ordre de Bruhat)**.** On définit l'**ordre de Bruhat** par $w' \leq w$ si $w' = w$ dans W ou s'il existe une suite d'éléments $w_i \in W$ tels que :

$$w' \to w_1 \to \cdots \to w_m = w.$$

En pratique on utilisera souvent les caractérisations de l'ordre de Bruhat en terme de sous-expressions, en vertu du théorème suivant :

Théorème 2.1.28 ([Hum90, Section 5.10])**.** *Soit $\overline{w} = [i_k, \ldots, i_1]$ un représentant réduit fixé de w. Alors on a $w' \leq w$ si et seulement si w' admet au moins un représentant parmi les sous-expressions de $\overline{w}$.*

Définition 2.1.29 (Ordre de Bruhat faible)**.** Soit $u, v \in W$. On dit que u est plus petit que v pour l'ordre de Bruhat faible à gauche (respectivement à droite), noté $u \leq_L v$ (respectivement $u \leq_R v$) s'il existe un facteur gauche (un préfixe) [2] (respectivement droit (un suffixe)) de v représentant u.

Exemple 2.1.30. L'élément du groupe de Weyl de type A_3 $w = s_1 s_2 s_1 s_3 s_2$ est plus grand pour l'ordre de Bruhat que $v = s_3 s_2 s_3$ car il existe un représentant réduit $\overline{w} = [2, 1, 3, 2, 3]$ de w et un représentant réduit $\overline{v} = [3, 2, 3]$ de v tels que $\overline{v}$ est un sous-mot de $\overline{w}$. En particulier ici, on a même $\overline{w} \geq_R \overline{v}$.

Dans le groupe de Weyl de type A_3, $w = s_1 s_2 s_3 s_1$ est plus grand pour l'ordre de Bruhat que $v = s_2 s_1$ car il existe un représentant réduit $\overline{w} = [1, 2, 1, 3]$ et l'unique représentant réduit $\overline{v} = [2, 1]$ de v tels que $\overline{v}$ est un sous-mot de $\overline{w}$.

Proposition 2.1.31 ([Hum90, Section 5.10])**.** *Quel que soit $w \in W$, on a*

$$e \leq_L w \leq_L w_0 \text{ et } e \leq_R w \leq_R w_0.$$

Remarque 2.1.32. *Cette proposition nous assure de l'existence d'au moins un représentant $\dot{w}$ de w_0 par complétion à gauche d'un représentant $\overline{w}$ d'un élément $w \in W$.*

Proposition 2.1.33 ([Hum90])**.** *L'inversion est un automorphisme pour l'ordre de Bruhat, la multiplication à gauche ou à droite par w_0 est un antiautomorphisme.*

2. On rappelle qu'on lit les mots de droite à gauche dans ce document

2.1.4 Représentant le plus à droite

Dans la description de l'algorithme, on aura besoin d'un représentant spécifique de l'élément $v \in W$, défini comme le sous-mot le plus à droite de $\overline{w}$ représentant $w \in W$. On va ici formaliser cette notion et en indiquer certaines propriétés.

Notation 2.1.34. A partir d'ici et dans toute la suite du document, ℓ désignera la longueur $\ell(v)$.

Définition 2.1.35. Soit $v, w \in W$ des éléments du groupe de Weyl, v de longueur ℓ, w de longueur $\ell(w)$, tels que $v \leq w$. On fixe un représentant $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$ de w. Comme $v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat il existe des sous-mots $[i_{k_\ell}, \dots, i_{k_1}]$ avec $r \geq k_\ell > \cdots > k_1 \geq 1$ tel que

$$v = s_{i_{k_\ell}} \cdots s_{i_{k_1}}.$$

On note $\overline{v} = [i_{p_\ell}, \dots, i_{p_1}]$ le sous-mot de $\overline{w}$ défini de la façon suivante :

- p_1 est le plus petit indice k tel que $vs_{i_k} < v$;
- p_2 est le plus petit indice $k > p_1$ tel que $vs_{i_{p_1}} s_{i_k} < vs_{i_{p_1}}$;
- ...
- p_m est le plus petit indice $k > p_{m-1}$ tel que $vs_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{m-1}}} s_{i_k} < vs_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{m-1}}}$;
- ...

Ainsi $[i_{p_\ell}, \dots, i_{p_1}]$ est un sous-mot de $\overline{w}$ donnant un représentant réduit de v.

Exemple 2.1.36. Soit W un groupe de Weyl de type A_3 et $w \in W$ de représentant $\overline{w} = [1, 2, 3, 1, 2]$ et $v = s_1 s_2 s_1$. On a $\overline{v} = [2, 1, 2]$ (correspondant aux indices $1, 2$ et 4) qui est le sous-mot de $\overline{w}$ le plus à droite représentant v.

Lemme 2.1.37 (Équivalence entre la minimalité à droite et la minimalité lexicographique)**.** *Si on appelle $[m_\ell, \dots, m_1]$ le plus petit ℓ-uplet pour l'ordre lexicographique tel que :*

$$1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_\ell \leq r \quad \textit{et} \quad s_{i_{m_\ell}} \cdots s_{i_{m_1}} = v$$

alors on a $[m_\ell, \dots, m_1] = [p_\ell, \dots, p_1]$.

Démonstration. Comme $[i_{p_\ell}, \dots, i_{p_1}]$ est un sous-mot de $\overline{w}$, par minimalité, on a

$$[m_\ell, \dots, m_1] \leq [p_\ell, \dots, p_1]$$

pour l'ordre lexicographique. En particulier $m_1 \leq p_1$. D'autre part, comme $s_{i_{m_\ell}} \cdots s_{i_{m_1}} = v$ on a que $vs_{i_{m_1}} < v$ donc $p_1 \leq m_1$ par définition de la suite $(p_i)_i$. Ainsi $p_1 = m_1$.

Supposons par induction que $m_a = p_a$ pour $a = 1, \dots, b < \ell$. Comme $[m_\ell, \dots, m_1] \leq [p_\ell, \dots, p_1]$ on a $m_{a+1} \leq p_{a+1}$. D'autre part $vs_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_a}} = s_{i_{m_\ell}} \cdots s_{i_{m_{a+1}}}$ ainsi

$$vs_{i_{m_1}} \cdots s_{i_{m_{a+1}}} = vs_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_a}} s_{i_{m_{a+1}}} < vs_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_a}}$$

alors, par définition de $(p_i)_i$, on a $p_{a+1} \leq m_{a+1}$. Ainsi $p_{a+1} = m_{a+1}$.

□

On renforce ce lemme grâce à la condition d'échange :

Lemme 2.1.38 (Minimalité dans les sous-mots)**.** *Soit $[t_\ell, \dots, t_1]$ tel que :*

$$1 \leq t_1 < \cdots < t_\ell \leq r \quad \textit{et} \quad s_{i_{t_\ell}} \cdots s_{i_{t_1}} = v$$

alors, pour chaque $1 \leq a \leq \ell$, on a $t_a \geq p_a$. Autrement dit $[p_\ell, \dots, p_1]$ est minimal pour l'ordre partiel $\preceq$ donné par :

$$[c_\ell, \dots c_1] \preceq [d_\ell, \dots, d_1] \Leftrightarrow c_a \leq d_a \textit{ pour tout } 1 \leq a \leq \ell.$$

Démonstration. Par définition, on a que $t_a \geq k_1$ pour tout $1 \leq a \leq \ell$. On a $v = s_{i_{t_\ell}} \cdots s_{i_{t_1}}$ et $s_{p_{k_1}} < v$. Alors, par la condition d'échange, il existe $1 \leq a \leq \ell$ tel que :

$$(s_{i_{t_\ell}} \cdots \widehat{s}_{i_{t_a}} \cdots s_{i_{t_1}}) s_{i_{p_1}} = (s_{i_{p_\ell}} \cdots s_{i_{p_2}}) s_{i_{p_1}} = v.$$

Ainsi $[p_\ell, \ldots, p_1] \leq [t_\ell, \ldots, \widehat{t_a}, \ldots, t_1, p_1]$ pour l'ordre lexicographique et alors

$$[p_\ell, \ldots, p_2] \leq [t_\ell, \ldots, \widehat{t_a}, \ldots, t_1].$$

En particulier les $\ell - 1$ lettres de $[t_\ell, \ldots, \widehat{t_a}, \ldots, t_1]$ ont des indices supérieurs ou égaux à p_2. Ensuite, comme $v s_{i_{p_1}} s_{i_{p_2}} < v s_{i_{p_1}}$, il existe $1 \leq b \leq \ell$ avec $a \neq b$ tel que

$$(s_{i_{t_\ell}} \cdots \widehat{s}_{i_{t_a}} \cdots \widehat{s}_{i_{t_b}} \cdots s_{i_{t_1}}) s_{i_{p_2}} s_{i_{p_1}} = (s_{i_{p_\ell}} \cdots s_{i_{p_3}}) s_{i_{p_2}} s_{i_{p_1}}, \quad \text{si } a > b$$

ou bien

$$(s_{i_{t_\ell}} \cdots \widehat{s}_{i_{t_b}} \cdots \widehat{s}_{i_{t_a}} \cdots s_{i_{t_1}}) s_{i_{p_2}} s_{i_{p_1}} = (s_{i_{p_\ell}} \cdots s_{i_{p_3}}) s_{i_{p_2}} s_{i_{p_1}}, \quad \text{si } a < b.$$

Ainsi $[p_\ell, \ldots, p_3] \leq [t_\ell, \ldots, \widehat{t_a}, \ldots, \widehat{t_b}, \ldots, t_1]$ si $a > b$ et $[p_\ell, \ldots, p_3] \leq [t_\ell, \ldots, \widehat{t_b}, \ldots, \widehat{t_a}, \ldots, t_1]$ si $b > a$.

En continuant de cette façon, on voit que pour chaque $1 \leq b \leq \ell$, il y a au moins $\ell - b + 1$ lettres de $[t_\ell, \ldots, t_1]$ qui sont supérieures ou égales à p_b. Comme elles sont ordonnées à l'intérieur du mot, cela prouve le lemme. □

Définition 2.1.39. Par concordance entre toutes ces notions, on appellera $[i_{p_\ell}, \ldots, i_{p_1}]$ le **sous-mot représentant** v **le plus à droite** de $\overline{w}$.

Définition 2.1.40. Etant donné $m = p_k$ l'indice d'une lettre de $\overline{v}$, on définit $m^\oplus$ comme

$$\min\{m < j \leq \ell(v) \mid i_{p_j} = i_{p_m}\}$$

ou $\ell(v) + 1$ si l'ensemble est vide..

Autrement dit $m^\oplus$ est le plus petit indice parmi ceux des lettres de $\overline{v}$ de couleur i_{p_m}, strictement supérieur à m.

Exemple 2.1.41. Dans l'exemple 2.1.36, on a $1^\oplus = 3$ car i_{p_1} et i_{p_3} valent tous deux 2 et les indices p_i compris entre p_1 et p_3 (autrement dit ici seulement p_2) sont d'une couleur différente.

2.2 Algèbre de Lie

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ la matrice de Cartan d'un système de racines cristallographique Φ.

2.2.1 Algèbres de Lie semi-simples

On rappelle que les algèbres de Lie semi-simples sur $\mathbb{C}$ sont classifiées par les matrices de Cartan de la façon suivante :

Définition 2.2.1. On définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à A comme l'algèbre de Lie engendrée par les $3n$ générateurs $(e_i, f_i, h_i)_{1 \leq i \leq n}$ et les relations :

1. $[h_i, h_j] = 0$,
2. $[e_i, f_i] = h_i$, $[e_i, f_j] = 0$ si $i \neq j$,
3. $[h_i, e_j] = a_{i,j} e_j$, $[h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j$,
4. Pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$, $\mathrm{ad}\,(e_i)^{-a_{i,j}+1}(e_j) = 0$,
5. Pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$, $\mathrm{ad}\,(f_i)^{-a_{i,j}+1}(f_j) = 0$,

où ad désigne l'action adjointe : $\mathrm{ad}\,(x)(y) = [x, y]$.

Théorème 2.2.2 ([Ser13, Appendice Section VI])**.** *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ engendrée par les h_i est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Les racines de $\mathfrak{g}$ vue comme $\mathfrak{h}$-module forment le système de racines Φ.*

Plus précisément, on appelle **poids** les éléments de $\mathfrak{h}^*$ et on définit les racines α_i comme les éléments de l'espace $\mathfrak{h}^*$ tel que :

$$\langle \alpha_i, h_j \rangle = a_{i,j} \quad \forall i, j \in I.$$

La famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ forme un ensemble Π de racines simples de Φ. On définit alors par linéarité h_α pour tout $\alpha \in \Phi$.

On appelle **famille des poids fondamentaux** la famille des poids $(\varpi_i)_{i \in I}$ vérifiant :

$$\langle \varpi_i, h_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in I.$$

Dans le cas d'une matrice de Cartan de type A_2, on représente à la figure 2.2 les racines et les poids fondamentaux.

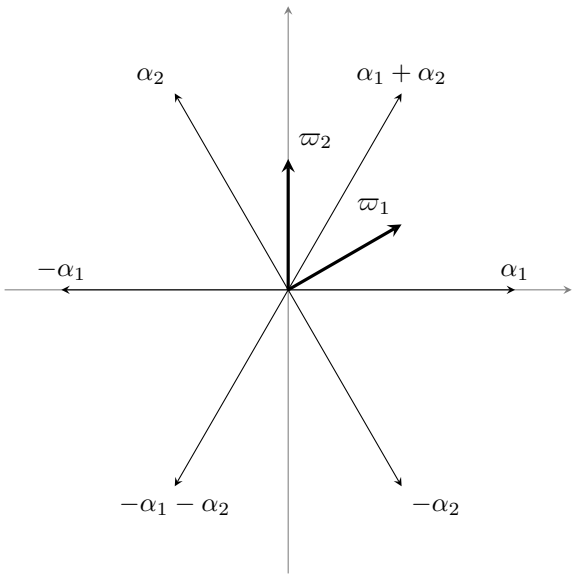


FIGURE 2.2 – Système de racines de type A_2

On note $P := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varpi_i$ le réseau des poids entiers et $P^+ := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{N}\varpi_i$ le monoïde des poids dominants entiers.

Si le système de racines est irréductible, l'algèbre de Lie associée est simple (voir par exemple [Car05, Corollaire 6.15]).

Théorème 2.2.3 ([Ser13, Théorème 7, Chapitre VI.4])**.** *Toute $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simple admet une présentation de la forme de celle de la définition 2.2.1.*

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 (Décomposition de Cartan)**.** *L'algèbre $\mathfrak{g}$ admet la décomposition triangulaire suivante :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}_-$$

où $\mathfrak{n}$ est la sous-algèbre engendrée par les e_i et $\mathfrak{n}_-$ celle engendrée par les f_i.

2.2.2 Modules de plus haut poids

Définition 2.2.5. Soit V un $\mathfrak{g}$-module et $\varpi \in \mathfrak{h}^*$ un poids. Notons V^ϖ l'ensemble de tous les $v \in V$ tels que $hv = \varpi(h)v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. On dit qu'un élément de V^ϖ est **un vecteur de poids** ϖ et on appelle V^ϖ l'**espace de poids** de ϖ si $V^\varpi \neq 0$.

Soit $v \in V$. On dit que v est un **élément primitif de poids** ϖ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. v est non nul et de poids ϖ,
2. on a $e_\alpha v = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

Les modules irréductibles contenant un tel élément ont des propriétés décrites dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.6 ([Ser13, Théorèmes 1 & 2 Section VII.3])**.** *Soit V un $\mathfrak{g}$-module irréductible contenant un élément primitif v de poids ϖ alors :*

1. *v est l'unique élément primitif de V (à multiplication par un scalaire près) et on appelle son poids* ***le plus haut poids*** *de V.*
2. *Les poids π de V sont de la forme :*
$$\pi = \varpi - \sum_{\alpha_i \in \Pi} m_i \alpha_i, \quad m_i \in \mathbb{N}.$$
Ils ont une multiplicité finie et ϖ est de multiplicité 1. On a $V = \bigoplus_\pi V^\pi$.
3. *Deux $\mathfrak{g}$-modules irréductibles V_1 et V_2 de plus haut poids respectifs ϖ_1 et ϖ_2 sont isomorphes si et seulement si $\varpi_1 = \varpi_2$.*
4. *Pour tout poids $\varpi \in \mathfrak{h}^*$, il existe un tel module irréductible de plus haut poids ϖ.*

Définition 2.2.7. On appelle **module de plus haut poids** ϖ un module engendré par un élément primitif de poids ϖ.

Un module irréductible de plus haut poids ϖ étant unique à isomorphisme près par le théorème 2.2.6, on note ce module $H(\varpi)$.

Exemple 2.2.8. Un exemple particulier de module de plus haut poids est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ c'est à dire, $\mathfrak{g}$ vu comme un $\mathfrak{g}$-module.

On a la décomposition de Cartan de
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{n}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{n}_\alpha$$
en espace de poids. Les espaces $\mathfrak{n}_\alpha$ sont des espaces de poids de dimension 1 et de poids α. $\mathfrak{h}$ est l'espace de poids 0 et est de dimension n.

Par exemple, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ la représentation adjointe est le module de plus haut poids $\alpha_1 + \alpha_2$ et c'est aussi le module de plus bas poids $-\alpha_1 - \alpha_2$. Le module est représenté à la figure 2.3. Un élément primitif de $H(\alpha_1 + \alpha_2)$ est $E_{1,3}$.

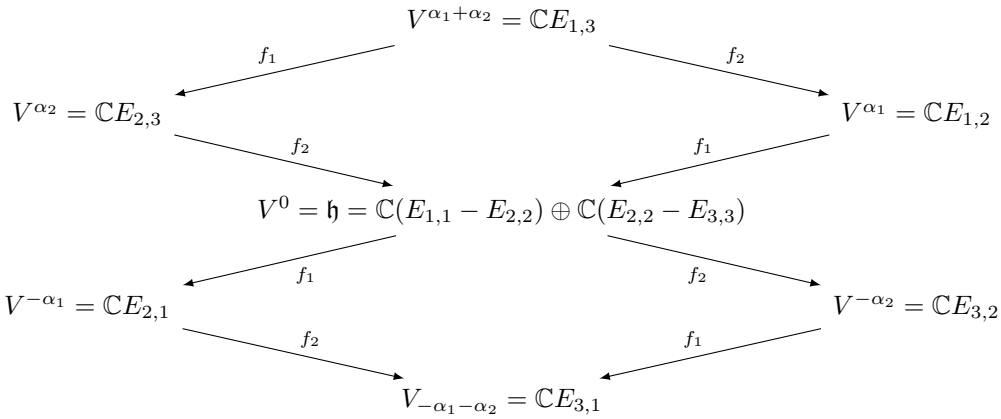


FIGURE 2.3 – Module $H(\alpha_1 + \alpha_2)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

Ici on a
$$e_1 = \text{ad } E_{1,2},\ e_2 = \text{ad } E_{2,3},\ f_1 = \text{ad } E_{2,1},\ f_2 = \text{ad } E_{3,2}$$
et
$$h_1 = \text{ad } (E_{1,1} - E_{2,2}),\ h_2 = \text{ad } (E_{2,2} - E_{3,3}).$$

La théorie des modules de plus haut poids permet d'étudier les modules de dimension finie, notamment grâce à la proposition 2.2.9 et son corollaire immédiat.

Proposition 2.2.9 ([Ser13, Proposition 3, Section VII.4])**.** *Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, alors on a :*

1. $V = \bigoplus_\pi V^\pi$.
2. *Si π est un poids de V, $\pi(h_\alpha)$ est un entier pour tout $\alpha \in \Phi$.*
3. *Si $V \neq 0$, V contient un élément primitif.*
4. *Si V est engendré par un élément primitif, V est irréductible.*

Corollaire 2.2.10. *Chaque $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie a un plus haut poids.*

On peut aussi définir de même la notion de module de plus bas poids où l'élément primitif vérifie $f_\alpha v = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

Proposition 2.2.11. *[Car05, Proposition 10.15] $H(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda \in P^+$.*
Soit $L(\lambda)$ le module irréductible de plus bas poids λ. $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda \in -(P^+)$.

Les modules irréductibles de plus hauts poids ϖ_i sont appelés **modules fondamentaux** ou **représentations fondamentales** de $\mathfrak{g}$.

2.2.3 Caractères

On note A l'algèbre $\mathbb{Z}[P]$ du groupe P noté multiplicativement, de base $(e^\pi)_{\pi \in P}$ telle que

$$e^\pi e^{\pi'} = e^{\pi+\pi'}.$$

Définition 2.2.12. Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Pour chaque poids π de V,la multiplicité de π dans V est notée $m_\pi = \dim V^\pi$. L'élément

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_\pi m_\pi e^\pi \in A$$

est appelé le **caractère** de V.

Cet invariant permet de classifier les $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie.

Proposition 2.2.13 ([Ser13, Proposition 5 section VII.7])**.** *Soit $\mathrm{ch}(V)$ le caractère de V défini comme précédemment, on a les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{ch}(V)$ *est invariant par l'action du groupe de Weyl W sur A, induite par l'action naturelle de W sur P*
2. *On a*
$$\mathrm{ch}(V \oplus V') = \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(V'),$$
$$\mathrm{ch}(V \otimes V') = \mathrm{ch}(V)\mathrm{ch}(V').$$
3. *Deux $\mathfrak{g}$-modules V et V' de dimension finie sont isomorphes si et seulement si* $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(V')$.

Bien qu'il existe une formule explicite due à Weyl ([Ser13, Théorème 4, Section VII.7]), le calcul de ce caractère peut être assez fastidieux en pratique. Les cristaux qu'on va présenter dans la section suivante sont des objets combinatoires permettant de faciliter le calcul du caractère des représentations irréductibles.

2.2.4 Cristaux

On va reprendre les éléments de l'introduction donnée dans [KS97, Section 3].

Définition 2.2.14 (Cristal)**.** Soit Φ un système de racines cristallographique donné, possédant un ensemble de racines simples $(\alpha_i)_i$ et de coracines simples $(h_i)_i$ et un réseau de poids P. Un **cristal** B est un ensemble muni des applications suivantes :

$$\mathrm{wt} : B \to P, \quad \varepsilon_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

$$\widetilde{e}_i : B \to B \cup \{0\}, \quad \widetilde{f}_i : B \to B \cup \{0\}$$

Les applications vérifient les conditions suivantes :

1. $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle \mathrm{wt}(b), h_i \rangle$,
2. si $b \in B$ et $\widetilde{e}_i b \in B$ alors $\mathrm{wt}(\widetilde{e}_i b) = \mathrm{wt}(b) + \alpha_i$, $\varepsilon_i(\widetilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$ et $\varphi_i(\widetilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$,
3. si $b \in B$ et $\widetilde{f}_i b \in B$ alors $\mathrm{wt}(\widetilde{f}_i b) = \mathrm{wt}(b) - \alpha_i$, $\varepsilon_i(\widetilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$ et $\varphi_i(\widetilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$,
4. pour $b, b' \in B$ et $i \in I$, $b' = \widetilde{e}_i b$ si et seulement si $b = \widetilde{f}_i b'$,
5. pour $b \in B$, si $\varphi_i(b) = -\infty$ alors $\widetilde{e}_i b = \widetilde{f}_i b = 0$.

Définition 2.2.15 (Morphisme de cristaux)**.** Soient B_1 et B_2 deux cristaux. Un **morphisme** ψ est une application $\psi : B_1 \cup \{0\} \to B_2 \cup \{0\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\psi(0) = 0$,
2. si $b \in B_1$ et $\psi(b) \in B_2$ alors $\mathrm{wt}(\psi(b)) = \mathrm{wt}(b)$, $\varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b)$ et $\varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b)$,
3. si on a $b, b' \in B_1$ et $i \in I$ tels que $\widetilde{f}_i(b) = b'$ et $\psi(b), \psi(b') \in B_2$ alors on a $\widetilde{f}_i(\psi(b)) = \psi(b')$.

Étant donné un cristal B, on définit son caractère comme $\mathrm{ch}(B) = \sum_{b \in B} \mathrm{wt}(b)$.

Théorème 2.2.16 ([Kas95, Section 4 & 7])**.** *1. Pour tout poids $\lambda \in P^+$, il existe un cristal $B(\lambda)$, unique à isomorphisme près, possédant un élément b avec $\mathrm{wt}(b) = \lambda$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $\widetilde{e}_i b = 0$ et vérifiant $\mathrm{ch}(B(\lambda)) = \mathrm{ch}(H(\lambda))$.*

2. Les cristaux forment une catégorie monoïdale.

Le produit tensoriel de deux cristaux est défini dans [Kas95, Section 3.2 & Théorème 4.1] mais nous ne l'utiliserons pas dans ce mémoire. Cela permet en particulier d'étudier les caractères de produits tensoriels de $\mathfrak{g}$-modules.

On voit dans la section suivante un exemple de cristal.

2.2.5 Le cristal $\mathcal{B}(\infty)$

Lorsque l'on utilise la théorie des cristaux pour déterminer les caractères de représentations de dimension finie, on a un cristal particulièrement intéressant, appelé $\mathcal{B}(\infty)$. En effet ce cristal contient le cristal de toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ (on en voit une illustration dans l'exemple 2.2.17).

De plus on peut explicitement construire n'importe quel élément de ce cristal à partir d'un élément de plus haut poids u_∞ annulé par tous les opérateurs $\widetilde{e}_i$, en lui appliquant une suite bien choisie d'opérateurs $\widetilde{f}_i$.

La définition originale de $\mathcal{B}(\infty)$ est en terme d'une base du groupe quantique $U_q(\mathfrak{n})$ lorsque q tend vers 0. Ici on ne développera pas cette définition mais on utilisera à la place un modèle combinatoire : celui des polytopes de Mirković-Vilonen, où on associe à chaque élément $b \in \mathcal{B}(\infty)$ un polytope convexe $\mathrm{Pol}(b)$ sur le réseau $\mathbb{Z}I = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}h_i$, ce qu'on va développer au théorème 2.9.2.

Exemple 2.2.17. On représente le début du cristal $\mathcal{B}(\infty)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de type A_2 à la figure 2.4.

On étiquette les sommets par des modules rigides selon la correspondance qui sera expliquée au théorème 2.9.2.

On voit dans le haut du cristal $\mathcal{B}(\infty)$ certains cristaux de représentations de plus haut poids de $\mathfrak{g}$ de type A_2. En fait dans chaque cas, le sommet étiqueté par $\{0\}$ a pour poids 0 et donc par exemple ici, le sommet étiqueté par $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}$ a pour poids $-2\alpha_1 - 2\alpha_2$. Pour obtenir les poids corrects du cristal de chaque représentation de plus haut poids $H(\lambda)$, il faut alors rajouter λ à chacun des poids. Le sommet sus-cité a donc finalement le poids $\varpi_1 + \varpi_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) = -(\varpi_1 + \varpi_2)$ dans le cristal de la représentation $H(\varpi_1 + \varpi_2)$.

De même le sommet initial étiqueté par $\{0\}$ a pour poids 0 dans $\mathcal{B}(\infty)$ mais ϖ_1 dans $\mathcal{B}(\varpi_1)$, ϖ_2 dans $\mathcal{B}(\varpi_2)$ et $\varpi_1 + \varpi_2$ dans $\mathcal{B}(\varpi_1 + \varpi_2)$.

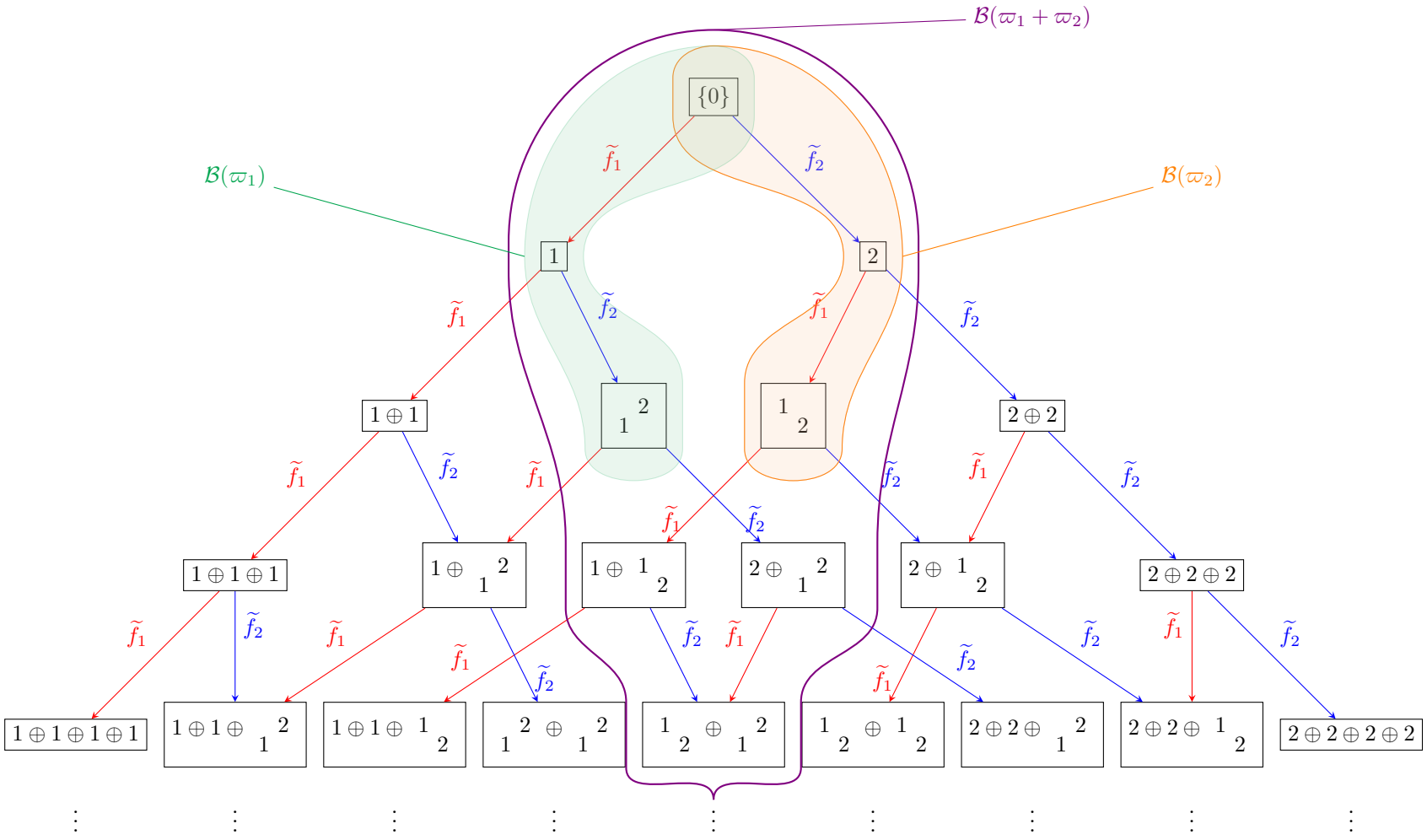


FIGURE 2.4 – Cristal $\mathcal{B}(\infty)$ de $\mathfrak{g}$ de type A_2

2.2.6 Polytopes

On reprend les notations précédentes : $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de type A, D ou E, $\mathfrak{h}$ sa sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines associé et Π l'ensemble des racines simples. On identifiera ici $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ et α_i et h_i.

Définition 2.2.18 (Donnée GGMS)**.** Soit $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w\in W}$ une collection d'éléments de $\mathfrak{h}_\mathbb{R} := \bigoplus_{j\in I} \mathbb{R}h_j$.

On dit que cette collection est une **donnée de Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova (donnée GGMS)** si elle vérifie la condition suivante :

$$\mu_{s_i w} - \mu_w \in (-\mathbb{N})(w^{-1}\cdot h_i), \quad \forall w \in W, i \in I.$$

Remarque 2.2.19. *Ici, on choisit des conventions différentes des articles cités par cohérence avec la proposition 2.9.16.*

Définition 2.2.20 (Pseudo-polytope de Weyl, [NS09, Section 2.1] & [Kam10, Section 2.3])**.** Étant donné une donnée GGMS $\mu_\bullet$, on lui associe le polytope convexe $P(\mu_\bullet) \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ défini par

$$P(\mu_\bullet) = \mathrm{Conv}\{\mu_w \mid w \in W\}$$

où Conv désigne l'enveloppe convexe dans $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. On appelle ce polytope un **pseudo-polytope de Weyl**.

Exemple 2.2.21. On se place dans le cas d'un système de racines de type A_2. On commence par représenter le réseau $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}h_i$ à la figure 2.5.

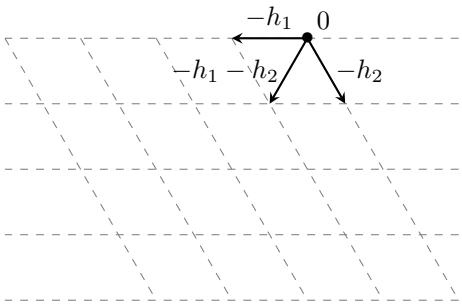


FIGURE 2.5 – Réseau $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}h_i$

On représente la donnée de la table 2.1 sur la figure 2.6.

w	e	s_1	s_2	s_2s_1	s_1s_2	$s_1s_2s_1$
μ_w	0	$-3h_1$	$-2h_2$	$-4h_1-h_2$	$-2h_1-4h_2$	$-4h_1-4h_2$

TABLE 2.1 – Donnée

On vérifie que c'est bien une donnée GGMS :

$$\mu_{s_1} - \mu_e = -3h_1 \in (-\mathbb{N})(e\cdot h_1), \quad \mu_{s_2} - \mu_e = -2h_2 \in (-\mathbb{N})(e\cdot h_2),$$
$$\mu_{s_2s_1} - \mu_{s_1} = -h_1 - h_2 \in (-\mathbb{N})(s_1\cdot h_2) = (-\mathbb{N})(h_1+h_2),$$
$$\mu_{s_1s_2} - \mu_{s_2} = -2(h_1+h_2) \in (-\mathbb{N})(s_2\cdot h_1) = (-\mathbb{N})(h_1+h_2),$$
$$\mu_{s_1s_2s_1} - \mu_{s_2s_1} = -3h_2 \in (-\mathbb{N})(s_1s_2\cdot h_1), \quad \mu_{s_2s_1s_2} - \mu_{s_1s_2} = -2h_1 \in (-\mathbb{N})(s_2s_1\cdot h_2).$$

Exemple 2.2.22. On se place dans le groupe de Weyl de type A_2. On a la donnée GGMS indiquée à la table 2.2.

On représente le polytope sur la figure 2.7.

Exemple 2.2.23. On se place dans le groupe de Weyl de type A_3. On considère la donnée GGMS de la table 2.3. On a le polytope de la figure 2.8.

De manière générale, le polytope d'une donnée GGMS par rapport à un groupe de Weyl de type A_3 sera de la forme de la figure 2.9 avec des arêtes de longueurs variables, possiblement nulles.

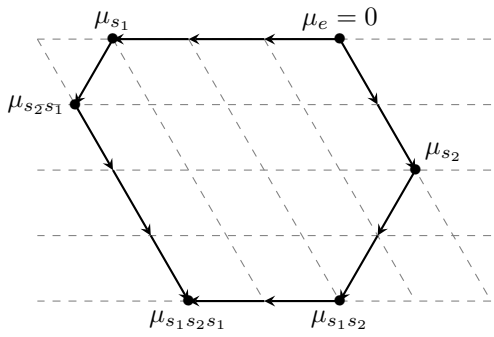


FIGURE 2.6 – Polytope $P(\mu_\bullet)$

w	e	s_1	s_2	s_1s_2	s_2s_1	$s_1s_2s_1$
μ_w	0	$-2h_1$	$-h_2$	$-2h_1-3h_2$	$-2h_1$	$-2h_1-3h_2$

TABLE 2.2 – Donnée GGMS

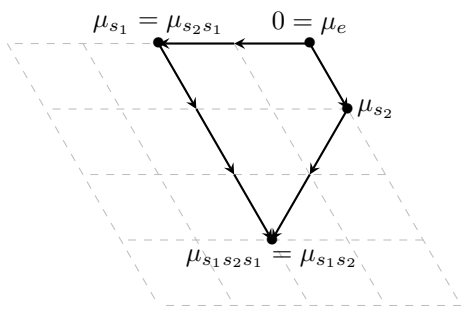


FIGURE 2.7 – Polytope $P(\mu_\bullet)$

w	e	s_1	s_2	s_3	s_1s_2	s_2s_1
μ_w	0	0	$-h_2$	0	$-h_2$	$-h_1-h_2$
w	s_2s_3	s_3s_1	s_3s_2	$s_1s_2s_1$	$s_1s_2s_3$	$s_2s_3s_1$
μ_w	$-h_2-h_3$	0	$-h_2$	$-h_1-h_2$	$-h_2-h_3$	$-h_1-h_2-h_3$
w	$s_2s_3s_2$	$s_3s_1s_2$	$s_3s_2s_1$	$s_1s_2s_3s_1$	$s_1s_2s_3s_2$	$s_2s_3s_1s_2$
μ_w	$-h_2-h_3$	$-h_2$	$-h_1-h_2$	$-h_1-h_2-h_3$	$-h_2-h_3$	$-h_1-2h_2-h_3$
w	$s_2s_3s_2s_1$	$s_3s_1s_2s_1$	$s_1s_2s_3s_1s_2$	$s_1s_2s_3s_2s_1$	$s_2s_3s_1s_2s_1$	$s_1s_2s_3s_1s_2s_1$
μ_w	$-h_1-h_2-h_3$	$-h_1-h_2$	$-h_1-2h_2-h_3$	$-h_1-h_2-h_3$	$-h_1-2h_2-h_3$	$-h_1-2h_2-h_3$

TABLE 2.3 – Donnée GGMS

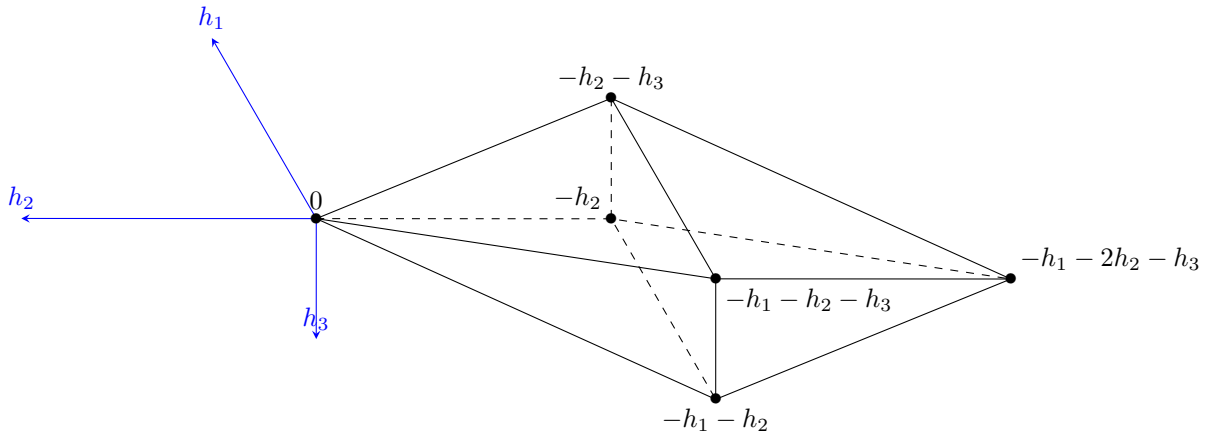


FIGURE 2.8 – Polytope

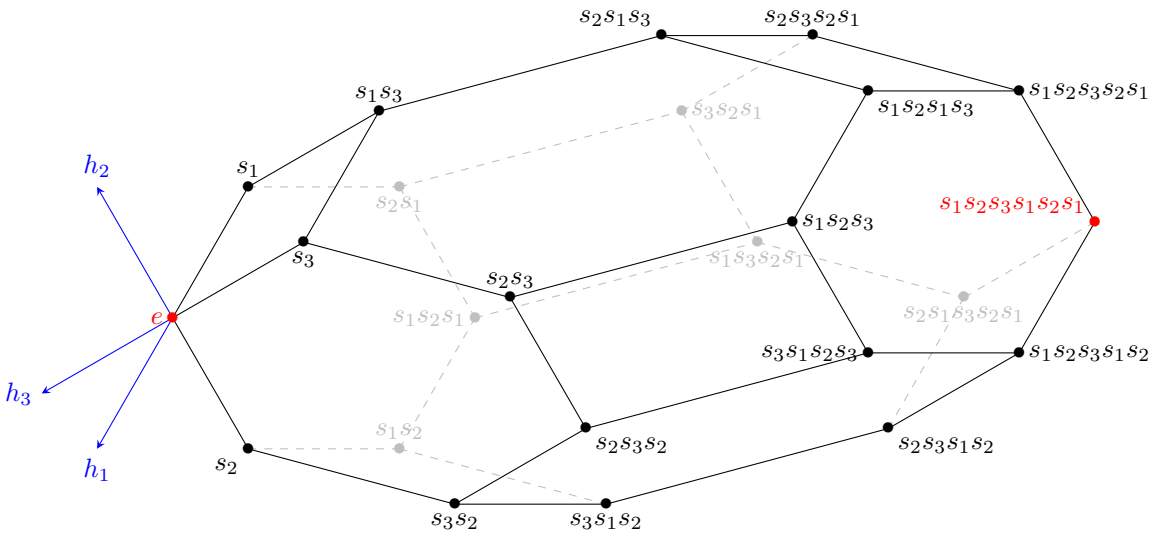


FIGURE 2.9 – Polytope général d'une donnée GGMS de type A_3

Définition 2.2.24 (Entiers $n_l^{\dot{w}}$)**.** Soit $\dot{w} = [i_r, \ldots, i_1]$ un représentant réduit de $w_0 \in W$. On pose $w_l^{\dot{w}} = s_{i_l} \cdots s_{i_1} \in W$ pour $1 \leq l \leq r$.

Étant donnée une donnée GGMS $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$, on définit les entiers $n_l^{\dot{w}} = n_l^{\dot{w}}(\mu_\bullet)$ par la formule suivante

$$\mu_{w_l^{\dot{w}}} - \mu_{w_{l-1}^{\dot{w}}} = -n_l^{\dot{w}}(\beta_l^{\dot{w}})^*$$

où

$$(\beta_l^{\dot{w}})^* = s_{i_1} \cdots s_{i_{l-1}} h_{i_l}.$$

Autrement dit, $n_l^{\dot{w}}$ mesure la longueur de l'arête joignant $\mu_{w_{l-1}^{\dot{w}}}$ à $\mu_{w_l^{\dot{w}}}$.

Définition 2.2.25 (Donnée de Mirković-Vilonen)**.** Une donnée GGMS $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w \in W}$ est dite **donnée de Mirković-Vilonen** si elle satisfait les conditions suivantes :

- si deux mots réduits $\dot{w}$ et $\dot{x}$ sont reliés par un 2-mouvement [3] en position k alors on a

$$n_l^{\dot{w}} = n_l^{\dot{x}},\ \forall 1 \leq l \leq r,\ l \notin \{k, k+1\}$$

  et

$$n_k^{\dot{w}} = n_{k+1}^{\dot{x}},\ n_{k+1}^{\dot{w}} = n_k^{\dot{x}}.$$

- s'ils sont reliés par un 3-mouvement en position k, alors on a :

$$n_l^{\dot{w}} = n_l^{\dot{x}},\ \forall 1 \leq l \leq r, l \notin \{k, k+1, k+2\}$$

  et

$$\begin{aligned} n_k^{\dot{x}} &= n_{k+2}^{\dot{w}} + n_{k+1}^{\dot{w}} - \min(n_k^{\dot{w}}, n_{k+2}^{\dot{w}}), \\ n_{k+1}^{\dot{x}} &= \min(n_k^{\dot{w}}, n_{k+2}^{\dot{w}}), \\ n_{k+2}^{\dot{x}} &= n_k^{\dot{w}} + n_{k+1}^{\dot{w}} - \min(n_k^{\dot{w}}, n_{k+2}^{\dot{w}}). \end{aligned}$$

Le pseudo-polytope de Weyl d'une donnée de Mirković-Vilonen est appelé **polytope de Mirković-Vilonen**.

On note $\mathcal{MV}$ l'ensemble de tous les polytopes de Mirković-Vilonen.

Exemple 2.2.26. La donnée GGMS de l'exemple 2.2.21 n'est pas une donnée de Mirković-Vilonen. En effet, on peut considérer $\dot{w} = [1, 2, 1]$ et $\dot{x} = [2, 1, 2]$. On a les entiers suivants :

$$n_1^{\dot{w}} = 3, n_2^{\dot{w}} = 1, n_3^{\dot{w}} = 3,$$

$$n_1^{\dot{x}} = 2, n_2^{\dot{x}} = 2, n_3^{\dot{x}} = 2.$$

On a un 3-mouvement en position 1 entre $\dot{w}$ et $\dot{x}$ et par exemple $1 = n_2^{\dot{w}} \neq \min(n_1^{\dot{x}}, n_3^{\dot{x}}) = 2$.

La donnée GGMS de l'exemple 2.2.22 est une donnée de Mirković-Vilonen. Pour les mêmes représentants $\dot{w}$ et $\dot{x}$, on a les entiers

$$n_1^{\dot{w}} = 2, n_2^{\dot{w}} = 0, n_3^{\dot{w}} = 3,$$

$$n_1^{\dot{x}} = 1, n_2^{\dot{x}} = 2, n_3^{\dot{x}} = 0,$$

et on a bien

$$1 = 3 + 0 - 2, \quad 2 = \min(2, 3), \quad 0 = 2 + 0 - 2.$$

On peut de même vérifier que l'exemple 2.2.23 est une donnée de Mirković-Vilonenen choisissant deux représentants de w_0 quelconques.

3. *Cf.* définition 2.1.22.

2.2.7 Structure cristalline sur $\mathcal{MV}(\infty)$

On va maintenant rappeler comment munir un sous-ensemble de $\mathcal{MV}$ d'une structure de cristal comme dans [NS09], [Kam10].

Tout d'abord, nous définissons les opérateurs de Kashiwara sur les éléments d'une donnée de Mirković-Vilonen.

Définition 2.2.27 (Opérateurs de Kashiwara)**.** Soit $\mu_\bullet$ une donnée de Mirković-Vilonen et $j \in I$. On définit $f_j(\mu_\bullet)$ comme l'unique donnée de Mirković-Vilonen $\mu'_\bullet$ telle que $\mu'_e = \mu_e - h_j$ et telle que $\mu'_w = \mu_w$ pour tous les $w \in W$ tels que $s_j w < w$. En particulier on aura $\mu'_{w_0} = \mu_{w_0}$ et $\mu'_{s_j} = \mu_{s_j}$.

Inversement, on définit $e_j\mu_\bullet$ si $\mu_e \neq \mu_{s_j}$ l'unique donnée de Mirković-Vilonen telle que $\mu'_e = \mu_e + h_j$ et telle que $\mu'_w = \mu_w$ si $s_j w < w$.

Définition 2.2.28. On appelle $\mathcal{MV}(\infty)$ l'ensemble des polytopes $P = P(\mu_\bullet)$ de Mirković-Vilonen dont la donnée de Mirković-Vilonen vérifie $\mu_{w_0} = 0_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}}$.

Remarque 2.2.29. *On a alors* $\mu_w \in \sum_{j\in I}(-\mathbb{N})h_j$ *pour tout* $w \in W$.

On peut alors définir une structure de cristal sur $\mathcal{MV}(\infty)$ de la façon suivante :

Définition 2.2.30 (Structure de cristal sur $\mathcal{MV}(\infty)$)**.** Soit $P = P(\mu_\bullet) \in \mathcal{MV}(\infty)$ un polytope de Mirković-Vilonen de donnée GGMS $\mu_\bullet = (\mu_w)_{w\in W}$.

On pose :

1. $\mathrm{wt}(P) := \mu_e$,
2. $\varepsilon_j(P) := \max\{N \geq 0 \mid e_j^N P \neq 0\}$,
3. $\varphi_j(P) := \langle \alpha_j, \mathrm{wt}(P)\rangle + \varepsilon_j(P)$,

et on définit l'opérateur descendant de Kashiwara $f_j : \mathcal{MV}(\infty) \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{MV}(\infty) \cup \{\mathbf{0}\}$ et l'opérateur ascendant $e_j : \mathcal{MV}(\infty) \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{MV}(\infty) \cup \{\mathbf{0}\}$ par :

$$e_j\mathbf{0} = f_j\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad f_jP = f_jP(\mu_\bullet) := P(f_j\mu_\bullet),$$

$$e_jP = e_jP(\mu_\bullet) := \begin{cases} P(e_j\mu_\bullet) & \text{si } \mu_e \neq \mu_{s_j}, \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Théorème 2.2.31 ([Kam07, Section 3])**.** *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de type* A, D *ou* E.

$$(\mathcal{MV}(\infty), \mathrm{wt}, (e_j)_{j\in I}, (f_j)_{j\in I}, (\varepsilon_j)_{j\in I}, (\varphi_j)_{j\in J})$$

est un cristal pour $U_q(\mathfrak{g})$ *et il existe un unique isomorphisme de cristaux* $\psi : \mathcal{B}(\infty) \to \mathcal{MV}(\infty)$ *pour* $U_q(\mathfrak{g})$.

Remarque 2.2.32. *Si l'algèbre* $\mathfrak{g}$ *est de type* B, C, F *ou* G *il faut remplacer dans le théorème* $U_q(\mathfrak{g})$ *par* $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$ *où* $\mathfrak{g}^\vee$ *désigne l'algèbre de Lie duale au sens de Langlands.*

Exemple 2.2.33. En reprenant le graphe de la figure 2.4 page 22 qui représentait le cristal $B(\infty)$ et en étiquetant chaque sommet par les polytopes de Mirković-Vilonen construits de façon inductives par les opérateurs de Kashiwara à partir du sommet initial contenant la donnée de Mirković-Vilonen nul, on obtient le graphe cristallin $\mathcal{MV}(\infty)$.

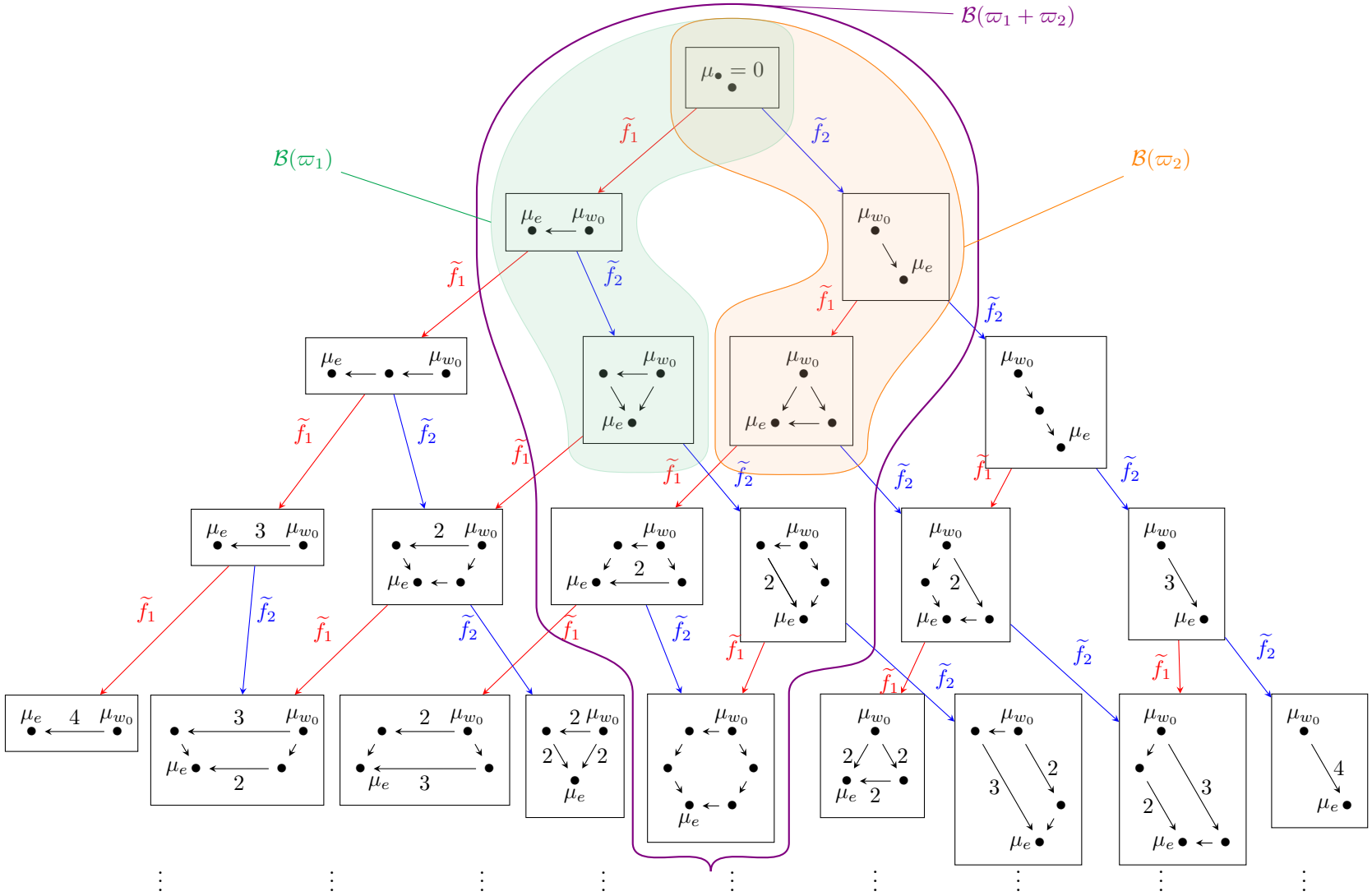


FIGURE 2.10 – Cristal $\mathcal{B}(\infty)$ de $\mathfrak{g}$ de type A_2

2.2.8 Groupes algébriques linéaires

Dans ce qui va suivre, on va supposer que G est un $\mathbb{C}$-groupe algébrique connexe, simplement connexe, semi-simple. On note B, B^- deux sous-groupes de Borel opposés de radicaux unipotents respectifs N et N_-. On appelle H leur tore maximal $H = B \cap B_-$ et on pose $W = \mathrm{Norm}_G(H)/H$ leur groupe de Weyl. On pourra consulter [Hum75, Chapitre IX] pour plus de détails sur cette définition du groupe de Weyl et son lien avec la définition 2.1.13.

On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie de G. C'est une algèbre de Lie semi-simple admettant une présentation du type de la définition 2.2.1 et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Exemple 2.2.34. On peut considérer le cas $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Dans ce cas, on peut choisir comme groupe de Borel B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, B_- celui des matrices triangulaires inférieures. On a H le sous-groupe des matrices diagonales et N est le sous-groupe des matrices unitriangulaires supérieures, N_- celui des matrices unitriangulaires inférieures.

On va maintenant obtenir des générateurs de G à partir des générateurs de la présentation 2.2.1 de $\mathfrak{g}$.

A chaque générateur e_i on associe la famille de générateurs $x_i(t)$ dépendant d'un paramètre complexe t, à chaque générateur f_i, la famille $y_i(t)$ et à chaque générateur h_i, la famille $z_i(t)$, images par l'application exponentielle :

$$x_i(t) : t \mapsto \exp(te_i), \quad y_i(t) : t \mapsto \exp(tf_i), \quad z_i(t) : t \mapsto \exp(th_i).$$

Exemple 2.2.35. Si on regarde l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$, on a :

$$e_i = E_{i,i+1},\ f_i = E_{i+1,i} \text{ et } h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}.$$

On a alors

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_i(t) : t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y_i(t) : t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow z_i(t) : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le tore maximal H est engendré par les sous-groupes à un paramètre $z_i(t)$ pour tout $i \in I$, le sous-groupe unipotent maximal N par les sous-groupes à un paramètre $x_i(t)$ pour tout $i \in I$ et le sous-groupe unipotent maximal N_- par les sous-groupes à un paramètre $y_i(t)$ pour tout $i \in I$.

2.2.9 Variété de drapeaux

Définition 2.2.36. Soit G un groupe algébrique simple simplement connexe sur $\mathbb{C}$. On suppose que G est simplement lacé, c'est à dire que G est de type A, D ou E.

On note $W = \mathrm{Norm}_G(H)/H$ le groupe de Weyl.

On considère la **variété de drapeaux** $X = B^-\backslash G$ et on note $\pi : G \to X$ la projection naturelle $\pi(g) := B^-\backslash g$, $g \in G$.

Exemple 2.2.37. En type A_n la variété de drapeau X s'identifie à la variété $\mathcal{F}$ dont les points sont les drapeaux de sous-espaces :

$$\mathcal{F} := \{\{0\} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n \subsetneq \mathbb{C}^{n+1}\}$$

En effet, dans le cas $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, ce groupe agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des drapeaux et le stabilisateur du drapeau standard est le sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires.

Théorème 2.2.38 ([Hum75, Chapitre X])**.** *Chaque double classe de G modulo B^- contient un unique $w \in W$. On a donc la **décomposition de Bruhat** :*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B^-.$$

On appelle ***décomposition de Schubert*** *la décomposition de la variété de drapeaux induite à partir de la décomposition de Bruhat de G par π :*

$$X := \bigsqcup_{w \in W} \pi(B^- w B^-).$$

On notera $C_w := \pi(B^- w B^-)$ la ***cellule de Schubert*** *associée à w. Elle est isomorphe à $\mathbb{C}^{\ell(w)}$.*

De même, on peut décomposer G au moyen de l'action à gauche de B^- et de l'action à droite de B. On appelle cette décomposition, ***décomposition de Birkhoff*** *:*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B.$$

Elle se projette par π comme précédemment sur la ***décomposition de Schubert opposée*** *:*

$$X = \bigsqcup_{w \in W} C^w.$$

où $C^w = \pi(B^- w B)$ est la ***cellule de Schubert opposée*** *associée à w et isomorphe à $\mathbb{C}^{\ell(w_0)-\ell(w)}$.*

Définition 2.2.39. Étant données une cellule de Schubert C_w et une cellule de Schubert opposée C^v, on définit l'intersection

$$\mathcal{R}_{v,w} := C^v \cap C_w,$$

appelée **variété de Richardson ouverte**.

Proposition 2.2.40 ([KL80])**.** *$\mathcal{R}_{v,w}$ est non vide si et seulement si $v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat. C'est un sous-ensemble lisse irréductible localement fermé de C_w de dimension $\ell(w) - \ell(v)$.*

2.3 Algèbres amassées

Dans cette section, on va rappeler des résultats fondamentaux sur les algèbres amassées et les structures amassées, notamment pour fixer les notations et les conventions. Cette section est inspirée de [FZ04, Section 4].

2.3.1 Graine

On fixe deux entiers strictement positifs $m \geq n$ et on pose $\mathcal{F}$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{Q}$ en m variables indépendantes.

Définition 2.3.1 (Graine)**.** Une **graine** de type géométrique dans $\mathcal{F}$ est la donnée d'une paire $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$ où

- $\widetilde{\mathbf{x}} = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathcal{F}$ est une famille algébriquement libre, qui engendre $\mathcal{F}$,
- $\widetilde{B} = (b_{i,j})$ est une matrice $m \times n$ d'entiers, telle que la sous-matrice $n \times n$ supérieure $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$ est anti-symétrique, on l'appelle **partie principale** de $\widetilde{B}$. $\widetilde{B}$ est de rang maximal.

On définit les graines à une renumérotation simultanée des éléments de $\widetilde{\mathbf{x}}$ près, et donc à une renumérotation des lignes et colonnes de $\widetilde{B}$ près.

Remarque 2.3.2. *On peut en fait définir les graines dans le contexte plus général où la matrice n'est pas antisymétrique, mais seulement anti-symétrisable, mais ici on n'étudiera que des algèbres amassées dont les graines sont définies par des matrices anti-symétriques.*

Définition 2.3.3 (Mutations de graines)**.** On pose $\mathbf{x} = \{x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ et $\mathbf{c} = \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$.

On définit l'opération μ_k $1 \leq k \leq n$, appelée **mutation dans la direction** k, comme l'application qui associe la graine $(\widetilde{\mathbf{x}}_k, \mu_k(\widetilde{B}))$ à la graine $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$ où :

$$\widetilde{\mathbf{x}}_k := \widetilde{\mathbf{x}} - \{x_k\} \cup \{x'_k\} \quad \text{où} \quad x'_k = \frac{\prod_{b_{i,k}>0} x_i^{b_{i,k}} + \prod_{b_{i,k}<0} x_i^{-b_{i,k}}}{x_k},$$

$$\mu_k(\widetilde{B}) = (b'_{i,j})_{i,j} \quad \text{où} \quad b'_{i,j} = \begin{cases} -b_{i,j} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{i,j} + \frac{|b_{i,k}|b_{k,j} + b_{i,k}|b_{k,j}|}{2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.3.2 Algèbre amassée

Définition 2.3.4 (Équivalence par mutation)**.** Deux graines sont dites **équivalentes par mutation**, ce qui est noté $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B}) \sim (\widetilde{\mathbf{x}}', \widetilde{B}')$, s'il existe une suite de mutations permettant de passer de $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$ à $(\widetilde{\mathbf{x}}', \widetilde{B}')$.

On note $\mathcal{S}$ la classe de mutation de la graine $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$. On note $\mathcal{X}$ l'union de tous les éléments de $\mathcal{F}$ qui appartiennent à l'une des graines de $\mathcal{S}$ à l'exception de l'ensemble des coefficients d'amas $\mathbf{c}$. On appelle les éléments de $\mathcal{X}$ les **variables d'amas**.

Définition 2.3.5. L'**algèbre amassée** $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est la $\mathbb{Z}[\mathbf{c}^{\pm 1}]$-sous-algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables d'amas :

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) := \mathbb{Z}[\mathbf{c}^{\pm 1}, \mathcal{X}].$$

L'entier n, cardinal de chaque amas, est appelé **rang** de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Remarque 2.3.6. *Dans certains cas, on ne considérera que la $\mathbb{Z}[\mathbf{c}]$-sous-algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables d'amas. Notamment c'est cette définition que l'on prend pour munir $\mathbb{C}[N]$ d'une structure d'algèbre amassée.*

Exemple 2.3.7. On va décrire l'algèbre amassée de type A_2 sans coefficients.

On a un amas initial $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et une matrice de mutation $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. On a alors :

$$\mu_1(\mathbf{x}, B) = \left(\left(\frac{x_2 + 1}{x_1}, x_2 \right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mu_2 \circ \mu_1(\mathbf{x}, B) = \left(\left(\frac{x_2 + 1}{x_1}, \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_1(\mathbf{x}, B) = \left(\left(\frac{x_1 + 1}{x_2}, \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mu_2 \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_1(\mathbf{x}, B) = \left(\left(\frac{x_1 + 1}{x_2}, x_1 \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Dans ce cas on a en fait parcouru l'ensemble des amas possibles (à permutation des deux variables près) et donc ici l'algèbre amassée est la sous-algèbre de $\mathbb{Q}((x_1, x_2))$ engendrée par les polynômes de Laurent :

$$x_1, x_2, \frac{x_1 + 1}{x_2}, \frac{x_2 + 1}{x_1}, \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2}.$$

2.3.3 Carquois

Définition 2.3.8. Un carquois (graphe orienté) $Q = (I_0, I_1, s, t)$ est la donnée d'un ensemble I_0 de sommets (numérotés de 1 à n), d'un ensemble I_1 de flèches, d'une application source $s : I_1 \to I_0$ et d'une application but $t : I_1 \to I_0$.

Définition 2.3.9 (Carquois d'une graine)**.** À une graine munie d'une matrice $\widetilde{B}$ dont la partie principale est anti-symétrique, on peut associer un carquois de la façon suivante :

- On associe à chaque élément de $\widetilde{\mathbf{x}}$ un sommet du carquois : $x_i \mapsto i \in I_0$
- On a $|b_{i,j}|$ flèches dans I_1 de i vers j si $b_{i,j} > 0$, de j vers i sinon, permettant de définir les applications s et t.

Remarque 2.3.10. *La matrice n'étant pas forcément carrée, une partie du carquois ne peut pas forcément être déterminée pour les flèches entre deux sommets d'indices $> n$.*

En fait ce n'est pas important car ces sommets correspondront à un sous-ensemble des variables appelé coefficients, des sommets qui ne seront pas mutés et on considère que deux carquois ne différant que de flèches entre deux sommets correspondant à des coefficients sont équivalents.

Définition 2.3.11 (Mutation de carquois)**.** La mutation de matrice se traduit par une modification des flèches du carquois de la façon suivante : si on mute le sommet d'indice k :

1. si on a une suite de flèches $i \to k \to j$, on crée une nouvelle flèche $i \to j$,
2. toutes les flèches adjacentes au sommet k sont retournées,

3. si on a des flèches parallèles et de sens opposés entre deux sommets, on supprime les 2-cycles jusqu'à avoir un carquois sans aucun 2-cycle.

Remarque 2.3.12. *De tels 2-cycles ne sont pas nécessairement uniques, les carquois étant définis à isomorphisme préservant les sommets près, la mutation est bien définie.*

2.4 Algèbre préprojective

Définition 2.4.1. Soit Φ un système de racines de type A, D ou E. On choisit une orientation pour son diagramme de Dynkin afin de le transformer en carquois $Q = (I_0, I_1, s, t)$. On définit le carquois « double » $\overline{Q} = (I_0, I_1 \sqcup I_1^-, s, t)$ où $I_1^- = \{\alpha^* \mid \alpha \in I_1 \mid s(\alpha^*) = t(\alpha) \text{ et } t(\alpha^*) = s(\alpha)\}$ formé de Q et, pour toute arête de Q, d'une arête entre les mêmes sommets mais de sens opposé.

Étant donné un corps $\mathbb{K}$, on définit l'algèbre de chemins $\mathbb{K}\overline{Q}$ sur le carquois double $\overline{Q}$.

On définit l'élément c de cette algèbre par :

$$c = \sum_{\alpha \in I_1} \alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha,$$

et on note (c) l'idéal bilatère engendré par cet élément.

On appelle alors **algèbre préprojective** l'algèbre quotient Λ définie par

$$\Lambda := \mathbb{K}\overline{Q}/(c).$$

Définition 2.4.2. On note $\mathbf{mod}(\Lambda)$ la catégorie des Λ-modules de dimension finie.

Exemple 2.4.3 (Algèbre préprojective de type A_3)**.** On se place dans le système de racine de type A_3. On rappelle son diagramme de Dynkin $1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3$.

On choisit une orientation des flèches afin d'obtenir un carquois $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$.

On double alors les flèches avec des flèches d'orientation opposée $1 \underset{\alpha^*}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta^*}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 3$.

On a alors l'algèbre des chemins (engendrées par les flèches $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*$ et les chemins de longueur nulle basés en chacun des sommets $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3) sur le carquois double $\mathbb{K}\overline{Q}$, et on introduit les relations suivantes :

$$\alpha^*\alpha = 0, \quad \beta\beta^* = 0, \quad \beta^*\beta = \alpha\alpha^*$$

Finalement l'algèbre Λ est de dimension 10, de base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*, \alpha\alpha^*, \beta\alpha, \alpha^*\beta^*\}$. Elle agit sur elle-même en tant que Λ-module selon la table 2.4.

	ε_1	ε_2	ε_3	α	α^*	β	β^*	$\alpha\alpha^*$	$\beta\alpha$	$\alpha^*\beta^*$
ε_1	ε_1	0	0	0	α^*	0	0	0	0	$\alpha^*\beta^*$
ε_2	0	ε_2	0	α	0	0	β^*	$\alpha\alpha^*$	0	0
ε_3	0	0	ε_3	0	0	β	0	0	$\beta\alpha$	0
α	α	0	0	0	$\alpha\alpha^*$	0	0	0	0	0
α^*	0	α^*	0	0	0	0	0	0	0	0
β	0	β	0	$\beta\alpha$	0	0	0	0	0	0
β^*	0	0	β^*	0	0	$\alpha\alpha^*$	0	0	0	0
$\alpha\alpha^*$	0	$\alpha\alpha^*$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\beta\alpha$	0	0	$\beta\alpha$	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha^*\beta^*$	0	0	$\alpha^*\beta^*$	0	0	0	0	0	0	0

Table 2.4 – Action de Λ sur elle-même

Notation 2.4.4. A partir de maintenant Λ désignera une algèbre préprojective associée à un carquois de type A, D ou E.

2.4.1 Sous-catégories de mod(Λ)

Définition 2.4.5. Soit $i \in I$. On note S_i le Λ-module simple de dimension 1, canoniquement en correspondance avec le sommet i du diagramme de Dynkin, on note Q_i l'enveloppe injective de S_i et P_i la couverture projective de S_i.

Définition 2.4.6 (Série des socles)**.** Étant donné un module $M \in \mathbf{mod}(\Lambda)$ on appellera **série des socles** de M la suite de sous-quotients : $\mathrm{soc}(M), \mathrm{soc}(M/\mathrm{soc}(M)), \cdots, \mathrm{top}(M)$.

On représentera chacun des facteurs directs simples de ces sous-quotients, par l'indice de ce module simple.

Exemple 2.4.7. Pour l'algèbre préprojective de type A_3, le module projectif P_2 de tête S_2, a comme série de socles : $S_2, S_1 \oplus S_3, S_2$. On le représente par la figure 2.11.

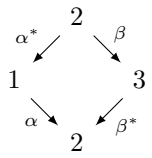


FIGURE 2.11 – Module P_2

C'est un module d'espace vectoriel sous-jacent l'espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{C}^4$ dont on appelle les vecteurs de base ε_2, α^*, β et $\alpha\alpha^*$ qu'on appellera aussi $\beta^*\beta$. Il possède la table de multiplication représentée à la table 2.5

	ε_2	α^*	β	$\alpha\alpha^*$
ε_1	0	α^*	0	0
ε_2	ε_2	0	0	$\alpha\alpha^*$
ε_3	0	0	β	0
α	0	$\alpha\alpha^*$	0	0
α^*	α^*	0	0	0
β	β	0	0	0
β^*	0	0	$\alpha\alpha^*$	0

TABLE 2.5 – Table de multiplication du module P_2

Cette représentation permet, dans les cas simples, de facilement visualiser des quotients ou des sous-modules de modules donnés, et l'effet des foncteurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\dagger$ qui sont définis ci-après :

Définition 2.4.8 ([GLS08])**.** Etant donné le groupe de Weyl W associé au même système de racines que Λ, on note s_i les générateurs de Coxeter. Pour chaque $i \in I$, on définit l'endofoncteur $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{s_i}$ de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ comme le foncteur, qui à tout module $X \in \mathbf{mod}(\Lambda)$ associe le module $\mathcal{E}_i(X)$, noyau de la surjection :

$$X \twoheadrightarrow S_i^{\oplus m_i(X)}$$

où $m_i(X)$ désigne la multiplicité du module simple S_i dans la tête de X.

En ce qui concerne les morphismes, si $f : X \to Y$ est un homomorphisme, $f(\mathcal{E}_i(X)) \subset \mathcal{E}_i(Y)$ et on définit $\mathcal{E}_i(f) : \mathcal{E}_i(X) \to \mathcal{E}_i(Y)$ comme la restriction de f à $\mathcal{E}_i(X)$.

De manière similaire, on définit $\mathcal{E}_i^\dagger(X)$ comme le conoyau de l'injection

$$S_i^{\oplus m_i^\dagger(X)} \to X$$

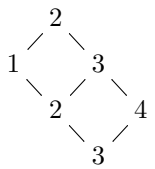
où $m_i^\dagger(X)$ désigne la multiplicité du module simple S_i dans le socle de X. On définit de manière analogue à $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i^\dagger(f)$ pour tout $f : X \to Y \in \mathbf{mod}(\Lambda)$.

Étant donné $X \in \mathbf{mod}(\Lambda)$, $\mathcal{E}_i$ agit sur X en retirant la composante isotypique de S_i dans la tête de X.

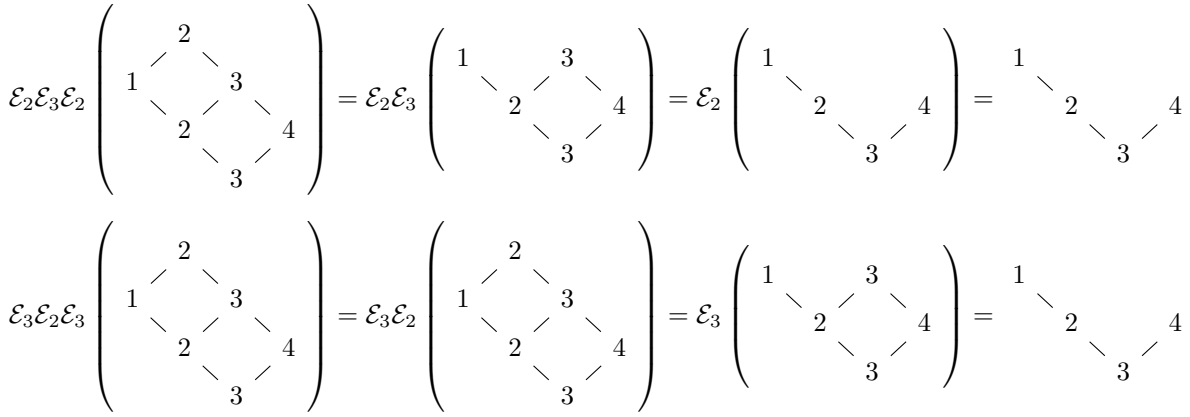
$\mathcal{E}_i^\dagger$ agit sur X en retirant la composante isotypique de S_i dans le socle de X.

Proposition 2.4.9 ([GLS08, Proposition 5.1])**.** *Les foncteurs $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_i^\dagger$ vérifient les relations de tresses de W. On peut donc définir de façon univoque les foncteurs $\mathcal{E}_w$ et $\mathcal{E}_w^\dagger$ pour chaque $w \in W$.*

Exemple 2.4.10. Considérons le module P_2 de l'algèbre préprojective de A_4.



On applique le foncteur $\mathcal{E}_{s_2 s_3 s_2}$ en regardant deux représentants différents : $[2,3,2]$ et $[3,2,3]$.



Définition 2.4.11. On note $\mathrm{Sub}(M)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{mod}(\Lambda)$. Les objets de cette catégorie sont les Λ-modules isomorphes à des sous-modules d'une somme directe de copies de M.

On note $\mathrm{Fac}(M)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ dont les objets sont des Λ-modules isomorphes à des quotients d'une somme directe de copies de M.

Définition 2.4.12 ([GLS11, Section 2.4] & [Lec16, Section 3.2.3])**.** Soit $w \in W$, posons $u := w^{-1}w_0$. On pose $I_w = \mathcal{E}_u\left(\bigoplus_{i\in I} Q_i\right)$. On définit la sous-catégorie pleine suivante :

$$\mathcal{C}_w := \mathrm{Fac}(I_w) \subset \mathbf{mod}(\Lambda).$$

De manière duale, on pose $J_w := \mathcal{E}^\dagger_{w^{-1}}\left(\bigoplus_{i\in I} Q_i\right)$ et on définit la sous-catégorie pleine :

$$\mathcal{C}^w := \mathrm{Sub}(J_w) \subset \mathbf{mod}(\Lambda).$$

On introduit maintenant la catégorie qui sera l'objet d'étude principal de cette thèse :

Définition 2.4.13 ([Lec16, Définition 3.6])**.** Soit v, w deux éléments du groupe de Weyl tels que $v \leq w$ pour l'ordre de Bruhat. La catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$ est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\mathcal{C}_{v,w} := \mathcal{C}_w \cap \mathcal{C}^v.}$$

2.4.2 Caractère d'amas

Le lien entre les sous-catégories de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ et l'algèbre $\mathbb{C}[N]$ est assuré par le caractère d'amas $\varphi : \mathbf{mod}(\Lambda) \to \mathbb{C}[N]$. On va ici détailler l'expression de ce caractère. On pourra consulter [GLS08, Section 5] pour plus d'informations.

Définition 2.4.14. Soit M un Λ-module de dimension m. Soit $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$ un représentant d'un élément de W. On définit la variété $\mathcal{F}_{M,\mathbf{i}}$ de drapeaux de sous-modules de type $\mathbf{i}$:

$$\mathfrak{f} = (0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = M)$$

tels que $F_k/F_{k-1} \cong S_{i_k}$ pour $1 \leq k \leq m$.

On note $\chi(\mathcal{F}_{M,\mathbf{i}})$ la caractéristique d'Euler de $\mathcal{F}_{M,\mathbf{i}}$ en tant que variété algébrique projective complexe.

Définition 2.4.15. On appelle **caractère d'amas** la fonction régulière $\varphi_M \in \mathbb{C}[N]$ qui a pour expression sur un produit arbitraire de sous-groupes de N à un paramètre $x_j(t)$:

$$\varphi_M(\mathbf{x_j}(\mathbf{t})) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^k} \chi(\mathcal{F}_{M,\mathbf{j^a}})\frac{\mathbf{t^a}}{\mathbf{a}!},$$

où $\mathbf{x_j}(\mathbf{t}) := x_{j_1}(t_1)\cdots x_{j_k}(t_k)$, $\frac{\mathbf{t^a}}{\mathbf{a}!} := \frac{t_1^{a_1}\cdots t_k^{a_k}}{a_1!\cdots a_k!}$, $\mathbf{j^a} := [\underbrace{j_1,\ldots,j_1}_{a_1 \text{ fois}},\ldots,\underbrace{j_k,\ldots,j_k}_{a_k \text{ fois}}]$ et $t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{C}$.

On pourra trouver plus de détail sur ce caractère d'amas dans [GLS11, Section 6] et [Lec16, Section 4].

Exemple 2.4.16. Soit M le module P_2 de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ pour l'algèbre préprojective de type A_3 comme défini à l'exemple 2.4.7. P_2 a seulement deux drapeaux de sous-modules :

$$2 \subset \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix}$$

et

$$2 \subset \begin{smallmatrix}&3\\2&\end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix}$$

de types : $(2,1,3,2)$ et $(2,3,1,2)$.

On est en type A_3 donc N est le groupe des matrices unitriangulaires de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ qui admet comme générateurs :

$$x_1(t) = \begin{bmatrix}1&t&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&t&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}$$

Ici on va évaluer φ_{P_2} sur le produit $x_{\mathbf{j}}(\mathbf{t})$ correspondant à un représentant de l'élément de longueur maximale de W, $\mathbf{j} = [1,2,3,1,2,1]$.

$$\mathbf{x_j}(\mathbf{t}) = x_1(t_1)x_2(t_2)x_3(t_3)x_1(t_4)x_2(t_5)x_1(t_6) = \begin{bmatrix}1&t_1+t_4+t_6&t_1t_2+t_1t_5+t_4t_5&t_1t_2t_3\\0&1&t_2+t_5&t_2t_3\\0&0&1&t_3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Par [BFZ96], lorsque $\mathbf{t}$ décrit $\mathbb{C}^6$, $x_{\mathbf{j}}(\mathbf{t})$ décrit un sous-ensemble dense de N, ce qui va nous permettre de définir de façon non ambigüe une fonction de $\mathbb{C}[N]$ par le caractère d'amas.

On veut avoir $\mathbf{j^a} = (2,1,3,2)$ ou $\mathbf{j^a} = (2,3,1,2)$ avec $\mathbf{j} = [1,2,3,1,2,1]$.

Il n'existe aucun $\mathbf{a}$ permettant d'obtenir la première suite de facteurs de compositions. On peut obtenir la deuxième en posant $\mathbf{a} = [0,1,1,1,1,0]$. On a alors :

$$\varphi_{P_2}(\mathbf{x_j}(\mathbf{t})) = t_2t_3t_4t_5$$

ce qui correspond à la fonction $M = \begin{bmatrix}1&a&b&c\\0&1&d&e\\0&0&1&f\\0&0&0&1\end{bmatrix} \mapsto be - cd = \Delta_{(1,2),(3,4)}$, autrement dit le mineur sur les deux premières lignes et deux dernières colonnes.

Ainsi, on a associé au module P_2 de $\mathbf{mod}(\Lambda)$, un élément de $\mathbb{C}[N]$ qui se trouve être un mineur.

2.5 Structure amassée

On rappelle ici la définition de [BIRS09, Section II.1] d'une structure amassée, qui permet de modéliser les algèbres amassées dans un contexte catégorique. On verra ensuite comment cette théorie s'applique à la catégorie $\mathbf{mod}(\Lambda)$.

On va supposer que les catégories sont des catégories Krull-Schmidt $\mathbb{K}$-linéaires où $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos. Plus particulièrement, on va supposer ici que les catégories sont des sous-catégories fermées par extension de la catégorie $\mathbf{mod}(A)$ où A est une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$.

Supposons qu'on a une famille d'ensembles $\underline{x}$ appelés **amas** d'objets indécomposables non-isomorphes. L'union de tous les objets indécomposables d'amas est appelé l'ensemble des variables d'amas. Supposons aussi qu'on ait un sous-ensemble $\underline{p}$ d'objets indécomposables. On note T l'union des objets indécomposables dans $\underline{x}$ et $\underline{p}$ et on l'appelle **amas étendu**.

Définition 2.5.1. Étant donné un A-module M, on note $\mathrm{add}(M)$ la clôture additive de M, à savoir la sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules dont les objets sont les A-modules isomorphes à une somme directe de facteurs directs de M.

Définition 2.5.2 (Approximation de modules, morphismes minimaux)**.** Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathbf{mod}(A)$, un homomorphisme $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ est une **$\mathcal{C}$-approximation à gauche** de X si pour tout homomorphisme $g : X \to Z$ avec $Z \in \mathcal{C}$ il existe un morphisme $h : Y \to Z$ tel que $g = hf$.

Un morphisme $f : V \to W$ est dit **minimal à gauche** si chaque morphisme $g : W \to W$ tel que $gf = f$ est un isomorphisme.

De façon duale un homomorphisme $f : Y \to Z$ est une **$\mathcal{C}$-approximation à droite** de X si pour chaque homomorphisme $g : Z \to X$ avec $Z \in \mathcal{C}$, il existe $h : Z \to Y$ tel que $g = fh$.

Un morphisme $f : V \to W$ est dit **minimal à droite** si chaque morphisme $g : V \to V$ tel que $fg = f$ est un isomorphisme.

Définition 2.5.3. Si une sous-catégorie $\mathcal{C} \subset \mathbf{mod}(A)$ est telle que pour tout objet $M \in \mathbf{mod}(A)$, on a une $\mathcal{C}$-approximation à droite, la catégorie est dite **fonctoriellement finie à droite**.

Si une sous-catégorie $\mathcal{C} \subset \mathbf{mod}(A)$ est telle que pour tout objet $M \in \mathcal{C}$, on a une $\mathcal{C}$-approximation à gauche, la sous-catégorie est dite **fonctoriellement finie à gauche**.

Si une sous-catégorie $\mathcal{C} \subset \mathbf{mod}(\Lambda)$ est à la fois fonctoriellement finie à gauche et à droite, elle est dite **fonctoriellement finie**.

Définition 2.5.4 (Structure amassée faible)**.** On dit que les amas, pris avec l'ensemble des coefficients $\underline{p}$, forment une **structure amassée faible** sur la catégorie $\mathcal{C}$ si on a les deux propriétés suivantes.

1. pour chaque amas étendu T et chaque variable d'amas M, il existe un unique objet indécomposable $M^* \not\simeq M$ tel qu'on obtienne un nouvel amas T^* par remplacement de M par M^*. On note cette opération, appelée **échange**, par $\mu_M(T) = T^*$ et on appelle (M, M^*) une **paire d'échange**,

2. pour chaque variable d'amas M, il existe des suites exactes courtes

$$M^* \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \text{ et } M \xrightarrow{s} B' \xrightarrow{t} M^*$$

où les applications g et t sont des $\mathrm{add}(T\backslash\{M\})$-approximations minimales à droite et f et s des $\mathrm{add}(T\backslash\{M\})$-approximations minimales à gauche. On les appelle des **suites d'échanges**.

Définition 2.5.5. Étant donné un amas étendu T, on définit le carquois Q_T où les sommets correspondent aux objets indécomposables de T et le nombre de flèches $T_i \to T_j$ est donné par la dimension de l'espace des applications irréductibles $\mathrm{rad}(T_i, T_j)/\mathrm{rad}^2(T_i, T_j)$. Ici $\mathrm{rad}(,)$ désigne le radical de $\mathrm{add}(T)$.

Définition 2.5.6 (Carquois d'une algèbre d'endomorphisme)**.** Etant donné un A-module

$$M = M_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{n_n}$$

défini comme précédemment, on définit le carquois de son algèbre d'endomorphisme comme le carquois Γ_M dont les sommets sont les $\mathrm{End}(A)$-modules simples S_i correspondant aux facteurs directs M_i et où le nombre de flèches $i \to j$ entre S_i et S_j est donné par :

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{End}_A(M)}(S_i, S_j).$$

Proposition 2.5.7 (Voir [GLS06, Section 3.2])**.** *Soit $M = M_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{n_n}$ un A-module où les M_i sont des modules indécomposables deux à deux non isomorphes avec $n_i \geq 1, \forall i$. On pose $S_i = S_{M_i}$ le $\mathrm{End}_A(M)$-module simple correspondant à M_i et $P_i = \mathrm{Hom}_A(M_i, M)$, le $\mathrm{End}_A(M)$-module projectif indécomposable de tête S_i. Pour $1 \leq i, j \leq n$ on a égalité entre les nombres suivants :*

- *le nombre de flèches $i \to j$ dans le carquois Γ_M de $\mathrm{End}_A(M)$,*

- $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{End}_A(M)}(S_i, S_j)$,
- *la dimension de l'espace des applications irréductibles* $M_i \to M_j$ *dans* $\mathrm{add}(M)$,
- *la dimension de l'espace des applications irréductibles* $P_j \to P_i$ *dans la catégorie* $\mathrm{add}(P_1 \oplus \cdots \oplus P_n)$ *de* $\mathrm{End}_A(M)$*-modules projectifs.*

Soit, de plus, f *(resp.* g*) une* $\mathrm{add}(M/(M_i^{\oplus n_i}))$*-approximation minimale à gauche (resp. à droite) de* M_i *:* $f : M_i \to M'$ *(resp.* $g : M'' \to M_i$*). Si* $i \neq j$*, on a*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{End}_A(M)}(S_i, S_j) = [M' : M_j],$$

$$\dim \mathrm{Ext}_{\mathrm{End}_A(M)}(S_j, S_i) = [M'' : M_j].$$

Définition 2.5.8. On dit que le carquois $Q = (Q_0, Q_1)$ est un **carquois étendu** par rapport à un sous-ensemble $Q'_0 \subset Q_0$ s'il n'y a aucune flèche entre deux sommets de $Q_0 \backslash Q'_0$. On considère que le carquois Q_T d'un amas étendu est un carquois étendu en oubliant les flèches entre deux sommets correspondant à des coefficients.

Remarque 2.5.9. *En pratique, si on considère dans les exemples les carquois d'une catégorie donnée* $\mathcal{C}$*, ce qui sera pertinent pour la structure amassée, ce sera le carquois étendu par rapport à l'ensemble des sommets portant un module projectif. Autrement dit, on négligera les flèches entre deux modules projectifs (qui n'interviendront pas dans les mutations).*

Définition 2.5.10 (Catégorie stable)**.** La **catégorie stable** $\underline{\mathcal{C}}$ d'une catégorie $\mathcal{C} \subset \mathbf{mod}(\Lambda)$ est la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les classes d'équivalences de morphismes de $\mathcal{C}$ modulo la factorisation de morphismes à travers un objet $\mathcal{C}$-projectif-injectif.

Définition 2.5.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant une structure amassée faible, on dit que la catégorie $\mathcal{C}$ n'a pas de boucle (resp. de 2-cycles) si dans le carquois étendu de chaque amas étendu de sa structure amassée il n'y a pas de boucle (resp. de 2-cycles).

Définition 2.5.12 (Structure amassée)**.** On dit que la structure amassée faible précédemment définie est une **structure amassée** si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. il n'y a pas de boucles ou de 2-cycles (pour chaque variable d'amas M, chaque morphisme non-isomorphisme $u : M \to M$ se factorise à travers $g : B \to M$ et $s : M \to B'$ tandis que chaque morphisme non-isomorphisme $v : M^* \to M^*$ se factorise à travers $f : M^* \to B$ et $t : B' \to M^*$ où B et B' ne possèdent en commun aucun facteur direct indécomposable),
2. pour un amas étendu T, on passe de Q_T à Q_{T^*} par une mutation de Fomin-Zelevinsky [4] au sommet de Q_T donné par la variable d'amas M.

On verra à la section 2.6 la structure amassée sur la catégorie $\mathbf{mod}(\Lambda)$ définie à la section 2.4.

Un exemple (qui recouvrira les catégories étudiées ici) de catégories possédant une structure amassée faible sont les catégories de Frobenius stablement 2-Calabi-Yau. On va rappeller ici les définitions de ces différents termes.

Définition 2.5.13 (Module projectif, module injectif)**.** Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie fermée par extension de $\mathbf{mod}(A)$. Un module $C \in \mathcal{C}$ est dit $\mathcal{C}$-**projectif** si on a $\mathrm{Ext}^1_A(C, X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{C}$.

De manière duale, un module $C \in \mathcal{C}$ est dit $\mathcal{C}$-**injectif** si on a $\mathrm{Ext}^1_A(X, C) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{C}$. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **avoir assez de projectifs** [5] si pour chaque $X \in \mathcal{C}$, il existe une suite exacte courte de $\mathcal{C}$:

$$0 \to Y \to P \to X \to 0$$

avec P projectif.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **avoir assez d'injectifs** [6] si pour chaque $X \in \mathcal{C}$, il existe une suite exacte courte de $\mathcal{C}$:

$$0 \to X \to I \to Y \to 0$$

avec I injectif.

4. Cf définition 2.3.11.
5. *having enough projectives* en anglais.
6. *having enough injectives* en anglais.

Définition 2.5.14 (Catégorie de Frobenius)**.** Une catégorie est dite **de Frobenius** si elle est exacte[7], si elle a assez de projectifs et d'injectifs et si les projectifs et les injectifs coïncident.

Définition 2.5.15 (Foncteur de dualité)**.** Soit $\mathcal{C}$ une $\mathbb{K}$-catégorie. On définit le foncteur $D = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\cdot, \mathbb{K})$, on l'appelle **foncteur de dualité**.

Définition 2.5.16 (Catégorie 2-Calabi-Yau)**.** Une **catégorie 2-Calabi-Yau** est une $\mathbb{K}$-catégorie triangulée $\mathcal{C}$ possédant un isomorphisme fonctoriel :

$$D\mathrm{Ext}^1(A, B) \equiv \mathrm{Ext}^1(B, A)$$

pour tous $A, B \in \mathcal{C}$.

Définition 2.5.17. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **stablement 2-Calabi-Yau** si elle est de Frobenius et que sa catégorie stable $\underline{\mathcal{C}}$ est 2-Calabi-Yau.

2.6 Structure amassée sur l'algèbre préprojective

Dans [GLS06] (reformulé dans [BIRS09, Section II.1]), il est montré que $\mathbf{mod}(\Lambda)$ est une catégorie stablement 2-Calabi-Yau sur laquelle existe une structure amassée. Le but de cette section est d'expliciter cette structure amassée.

On va commencer par rappeler quelques définitions sur les modules, en se basant sur [GLS06]. Ici A est une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. En pratique, on prendra la $\mathbb{C}$-algèbre Λ.

Définition 2.6.1. Un A-module M est dit **rigide** si $\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0$.

Remarque 2.6.2. *Autrement dit cela signifie que toute auto-extension du module est triviale ou encore que la seule façon de compléter la suite exacte courte suivante :*

$$0 \to M \to ? \to M \to 0$$

est de remplacer ? par $M \oplus M$.

Définition 2.6.3. Un module rigide T est **rigide maximal** si, pour chaque A-module T' tel que $T \oplus T'$ est rigide, on a $T' \in \mathrm{add}(T)$.

Définition 2.6.4. Soit M un module, on note $\Sigma(M)$ le nombre de classes d'isomorphismes de facteurs directs indécomposables de M.

Théorème 2.6.5 ([GLS06, Théorème 2.1])**.** *Soit Λ une algèbre préprojective de type A, D ou E et $r = \ell(w_0)$ pour w_0 le mot de longueur maximal du groupe de Weyl associé. Pour tout Λ-module rigide T, on a $\Sigma(T) \leq r$.*

Définition 2.6.6. Un Λ-module T est dit rigide **complet** si on a $\Sigma(T) = r$.

Remarque 2.6.7. *En fait, par [GLS06, Théorème 2.2], on a équivalence entre la notion de module rigide maximal et module rigide complet et on a donc un critère numérique simple pour démontrer qu'un module est rigide maximal, ce qu'on utilisera pour prouver le théorème 4.16.1.*

2.6.1 Graine pour la structure amassée de $\mathbf{mod}(\Lambda)$

Définition 2.6.8. Soit $M = M_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{\oplus n_n}$ un module de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ dont on connaît la décomposition en modules indécomposables deux à deux non-isomorphes. Si on a $n_i = 1$ pour tout i, on dit que M est **basique**.

Définition 2.6.9. Dans $\mathbf{mod}(\Lambda)$ un module basique rigide maximal M sera appelé **graine**.

Le but de cette section est de rappeler que les modules basiques rigides maximaux permettent de définir une structure amassée sur $\mathbf{mod}(\Lambda)$.

7. Ici on ne détaillera pas la notion de catégorie exacte, toutes les sous-catégories fermées par extensions de catégories abéliennes l'étant.

Définition 2.6.10. Soit T un Λ-module rigide maximal basique de décomposition en facteurs directs indécomposables :

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r.$$

Le carquois Γ_T de $\mathrm{End}_\Lambda(T)$ définit une matrice entière $B(t) = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ où

$$t_{i,j} = \mathrm{Card}\{\alpha \in (\Gamma_T)_1 \mid s(\alpha) = j, t(\alpha) = i\} - \mathrm{Card}\{\alpha \in (\Gamma_T)_1 \mid s(\alpha) = i, t(\alpha) = j\}.$$

On va supposer, quitte à réordonner les termes, que les facteurs directs $T_{r-n+1}, \ldots, T_r$ sont projectifs. Pour tout $1 \leq k \leq r-n$ on a la suite exacte courte :

$$0 \to T_k \xrightarrow{f} \bigoplus_{t_{i,k}>0} T_i^{t_{i,k}} \to T_k^* \to 0 \tag{2.1}$$

où f est une $\mathrm{add}(T/T_k)$-approximation minimale de T_k à gauche.

On pose

$$\mu_{T_k}(T) = T_k^* \oplus T/T_k$$

et on appelle $\mu_{T_k}(T) = \mu_k(T)$, la mutation de T dans la direction T_k (ou k).

De plus, par [GLS06, Théorème 2.6] on a que les mutations de la partie principale de la matrice $B(t)$ (c'est à dire les coefficients $(b_{i,j})_{1 \leq 1, j \leq n}$) coïncident avec les mutations de carquois de Γ_T dans la direction k.

Remarque 2.6.11. *On peut utiliser à la place de la suite exacte courte 2.1 la suite exacte courte :*

$$0 \to T_k^* \to \bigoplus_{t_{i,k}<0} T_i^{t_{i,k}} \xrightarrow{g} T_k \to 0, \tag{2.2}$$

où g est une $\mathrm{add}(T/T_k)$*-approximation minimale de T_k à droite.*

Les modules rigides maximaux basiques ont des propriétés spécifiques permettant de définir une structure amassée :

Proposition 2.6.12 ([GLS06, Proposition 6.7])**.** *Soit T un Λ-module basique rigide maximal et X un facteur direct indécomposable de T. Si X n'est pas projectif, alors il existe exactement un Λ-module indécomposable Y à isomorphisme près tel que $X \not\cong Y$ et $Y \oplus T/X$ est rigide maximal.*

Proposition 2.6.13 ([GLS06, Proposition 5.7])**.** *Soient X et Y des Λ-modules rigides indécomposables tels que* $\dim \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y, X) = 1$ *et soit :*

$$0 \to X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Y \to 0$$

une suite exacte courte non-scindée. Alors $M \oplus X$ et $M \oplus Y$ sont rigides, $X, Y \notin$ $\mathrm{add}(M)$*. Si on suppose de plus que $T \oplus X$ et $T \oplus Y$ sont des Λ-modules rigides maximaux basiques pour un T, alors f est une* $\mathrm{add}(T)$*-approximation minimale à gauche et g une* $\mathrm{add}(T)$*-approximation minimale à droite.*

On a un critère, dans nos cas pour savoir si une sous-catégorie de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ possède une structure amassée :

Théorème 2.6.14. *[BIRS09, Théorème II.3.1] Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie close par extension et fonctoriellement finie de* $\mathbf{mod}(\Lambda)$*. Alors la catégorie $\mathcal{C}$ a une structure amassée.*

On va préciser des termes de vocabulaire que nous réutiliserons dans la section 2.7.

Définition 2.6.15. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ possédant une structure amassée. On choisit un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}$, T_0 qu'on appelle **initial**. Tout autre module rigide maximal basique T est dit **accessible** s'il est l'image de T_0 par un nombre fini de mutations.

Nous allons maintenant voir comment cette structure amassée sur $\mathbf{mod}(\Lambda)$ induit une structure amassée sur la sous-catégorie $\mathcal{C}_w$. On pourrait faire le même travail sur $\mathcal{C}^v$ mais comme en pratique on utilisera des graines de $\mathcal{C}_w$, c'est sur celle-ci qu'on se concentrera.

2.6.2 Structure amassée sur $\mathcal{C}_w$

Dans cette section on va reprendre une partie des résultats de [GLS11]. On se reportera à cet article pour les preuves. Tout d'abord les théorèmes suivants nous assurent que la catégorie a les bonnes propriétés pour avoir une structure amassée :

Théorème 2.6.16 ([BIRS09])**.** *Pour tout élément $w \in W$ on a les propriétés suivantes :*

- *$\mathcal{C}_w$ est une catégorie de Frobenius,*
- *La catégorie stable $\underline{\mathcal{C}}_w$ est une catégorie 2-Calabi-Yau,*
- *$\mathcal{C}_w$ a n $\mathcal{C}_w$-modules projectifs-injectifs indécomposables qui sont les facteurs directs indécomposables de I_w,*
- *$\mathcal{C}_w = \mathrm{Fac}(I_w)$,*

où I_w est défini à la 2.4.12.

Définition 2.6.17 (Module amas-basculant)**.** Un module T de $\mathcal{B}$, sous-catégorie fermée par extensions, facteurs directs et sommes directes de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ est dit **$\mathcal{B}$-amas-basculant** si on a l'équivalence suivante :

$$(X \in \mathcal{B} \text{ et } \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, X) = 0) \Leftrightarrow (X \in \mathrm{add}(T)).$$

On a alors un critère pour savoir si un module est $\mathcal{C}_w$-rigide maximal :

Théorème 2.6.18 ([GLS11, Théorème 2.9])**.** *Pour un Λ-module rigide T de $\mathcal{C}_w$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\Sigma(T) = \ell(w)$,*
2. *T est $\mathcal{C}_w$-rigide maximal,*
3. *T est un $\mathcal{C}_w$-module amas-basculant.*

On va maintenant voir comment construire explicitement une graine. Pour cela on donnera d'abord la description des facteurs directs du module puis la description de son carquois.

Définition 2.6.19. Soit X un Λ-module et S_j un module simple, on définit $\mathrm{soc}_j(X) = \mathrm{soc}_{S_j}(X)$ comme composante isotypique de S_j dans le socle de X [8].

Définition 2.6.20 (Définition des modules $(V_k)_k$)**.** Soit $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$ et $1 \leq t \leq \ell(w)$ un entier, X un Λ-module, on définit une chaîne de modules associée à cette décomposition :

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_t \subseteq X,$$

telle que pour $1 \leq p \leq t$, $X_p/X_{p-1} = \mathrm{soc}_{i_p}(X/X_{p-1})$. On définit $\mathrm{soc}_{i_1,\dots,i_t}(X) = X_t$.

On définit alors le module V_k comme :

$$V_k := \mathrm{soc}_{i_k,\dots,i_1}(Q_{i_k}),$$

où Q_{i_k} est défini à la définition 2.4.5 et on pose $V_{\overline{w}} = \bigoplus_{k=1}^{\ell(w)} V_k$.

Définition 2.6.21. Soit $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$ un représentant de l'élément $w \in W$. On définit le carquois de $V_{\overline{w}}$ de la façon suivante :

- les sommets du carquois sont étiquetés par les modules $(V_i)_{i=1}^{\ell(w)}$ définis à la définition 2.6.20,
- les flèches sont données par les règles suivantes :
  - on a une flèche $V_{k^+} \leftarrow V_k$ $\forall (k, k^+) \in \{1, \dots, \ell(w)\}$, appelée **flèche horizontale** ,
  - on a q_{i_k,i_j} flèches $V_j \to V_k$, $i_k \neq i_j$ si on a l'encadrement suivant :

    $$j^+ \geq k^+ > j > k,$$

    où (q_{i_k,i_j}) est la matrice d'incidence du diagramme de Dynkin sous-jacent. On appelle ces flèches les flèches **flèches ordinaires**.

8. De manière équivalente : somme de tous les sous-modules de X isomorphes à S_j.

Remarque 2.6.22. *Ne travaillant que sur des groupes de Weyl de type A, D ou E, ici q_{i_k,i_j} ne vaudra que 1, entre deux sommets de couleur i, j avec $m_{i,j} = 3$ ou 0, lorsque $m_{i,j} = 2$.*

Exemple 2.6.23. On va se placer dans un groupe de Weyl de type A_3, on pose $\overline{w} = [3, 2, 1, 3]$. On a donc $u = w^{-1}w_0 = s_2s_3$.

$$\mathcal{C}_w = \mathrm{Fac}(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3(Q_I)) = \mathrm{Fac}\left(1 \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & 3 \\ & & \\ & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$$

où $Q_I = \begin{smallmatrix} & & 3 \\ & & \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ & & \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & & 3 \end{smallmatrix}$.

Le module $V_{\overline{w}}$ se décompose donc de la façon suivante :

$$V_{\overline{w}} = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & 3 \\ & & \\ & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & & 3 \end{smallmatrix}$$

et possède le carquois de la figure 2.12.

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \\
 & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & 3 \\ & & \\ & & \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.12 – Carquois de $V_{\overline{w}}$

2.7 Existence d'une structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$

Dans [Lec16], Leclerc prouve l'existence d'une structure amassée sur la catégorie $\mathcal{C}_{v,w} = \mathcal{C}^v \cap \mathcal{C}_w$.

On rappelle ici les théorèmes principaux montrés dans [Lec16] et les informations qu'ils nous donnent sur les graines de la structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$.

Proposition 2.7.1 ([Lec16, Section 3.3])**.** *La catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$ est close par extensions, par sommes directes et par facteurs directs.*

Remarque 2.7.2. *En revanche, $\mathcal{C}_w$ est close par modules quotients, $\mathcal{C}^v$ par sous-modules par définition, mais $\mathcal{C}_{v,w}$ n'est ni l'un ni l'autre en général.*

De plus, on a :

Proposition 2.7.3 ([Lec16, Proposition 3.7])**.** *La catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$ est fonctoriellement finie.*

Ces deux propositions, en tenant compte du théorème 2.6.14 permettent de conclure à l'existence d'une structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$.

On connaît aussi un moyen de construire des graines de la structure amassée de $\mathcal{C}_{v,w}$, via la théorie des paires de torsion qu'on introduit brièvement ici.

2.7.1 Paires de torsion

Définition 2.7.4 (Paire de torsion,[ASS06, Définition IV.1.1])**.** Une paire $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ est appelée **paire de torsion** si on a les conditions suivantes :

1. $\mathrm{Hom}(M, N) = 0$ pour chaque $M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{F}$,
2. si $X \in \mathbf{mod}(\Lambda)$ est tel que $\mathrm{Hom}(X, N) = 0$ pour chaque $N \in \mathcal{F}$ alors $X \in \mathcal{T}$,
3. si $Y \in \mathbf{mod}(\Lambda)$ est tel que $\mathrm{Hom}(M, Y) = 0$ pour chaque $M \in \mathcal{T}$ alors $Y \in \mathcal{F}$.

La sous-catégorie $\mathcal{T}$ est dite **classe de torsion** et ses objets **objets de torsion**. La catégorie $\mathcal{F}$ est dite **classe libre de torsion** et ses objets **objets libres de torsion**.

Proposition 2.7.5 ([Lec16, Section 3.2.5])**.** *Soit $w \in W$, la paire $(\mathcal{C}_w, \mathcal{C}^w)$ est une paire de torsion.*

Définition 2.7.6. Soit $X \in \mathbf{mod}(\Lambda)$, $w \in W$. On note $t_w(X)$, le sous-module maximal de X dans $\mathcal{C}_w$. On appelle ce module le **radical de torsion** de X contenu dans $\mathcal{C}_w$.

Proposition 2.7.7 ([ASS06, Proposition VI 1.4])**.** *On a $X/t_w(X) \in \mathcal{C}^w$.*

2.7.2 Graine de $\mathcal{C}_{v,w}$

On peut construire un module rigide maximal pour $\mathcal{C}_{v,w}$ en utilisant l'application t_v de la façon suivante :

Proposition 2.7.8 ([Lec16, Proposition 3.12])**.** *Soit T un module rigide maximal de $\mathcal{C}_w$ alors $T/t_v(T)$ est un module rigide maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$.*

Remarque 2.7.9. *On peut alors penser qu'on a un moyen d'avoir une graine pour la structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$.*

Cependant il manque la condition selon laquelle le module doit être basique, ce que ce quotient ne nous assure pas (c'est faux en général).

D'autre part, on ne sait pas non plus comment se comporte le carquois de la graine de $\mathcal{C}_w$ avec ce passage au quotient.

Exemple 2.7.10. On part du module $V_{\overline{w}} = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix}$ (on numérote les facteurs directs de gauche à droite dans l'ordre croissant) de l'exemple 2.6.23 dans W de type A_3. On prend $v = s_2$. On va donc regarder la catégorie $\mathcal{C}_v$ pour calculer $t_v(V_{\overline{w}})$. On a $u = s_2 w_0 = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$.

On a

$$\mathcal{C}_v = \mathrm{Fac}\left(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1\left(\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \mathrm{Fac}(S_2) = \mathrm{add}(S_2).$$

La catégorie $\mathcal{C}_v$ étant très simple (on aurait d'ailleurs pu se dire que $V_{[2]}$ est un module rigide maximal de cette catégorie et en déduire facilement cette expression), il est aisé de déterminer les $t_{s_2}(V_i)$:

$$t_{s_2}(1) = 0, \quad t_{s_2}(3) = 0, \quad t_{s_2}\left(\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix}\right) = 2, \quad t_{s_2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

et donc les quotients successifs sont :

$$V_1/t_{s_2}(V_1) = V_1 = 1, \quad V_2/t_{s_2}(V_2) = V_2 = 3, \quad V_3/t_{s_2}(V_3) = 1 \oplus 3 \quad V_4/t_{s_2}(V_4) = V_4$$

et finalement on a

$$V_{\overline{w}}/t_{s_2}(V_{\overline{w}}) = 1 \oplus 3 \oplus 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & \\ & 3 & \end{smallmatrix}.$$

Ce module n'est pas basique, on a deux modules isomorphes à S_1 et S_3.

Cependant en retirant les modules surnuméraires, on obtient bien un module rigide basique de la catégorie $\mathcal{C}_{s_2,s_3s_2s_3s_1}$. C'est d'ailleurs le même module que celui obtenu par application de l'algorithme 3.2.4. On étudiera la connexion entre ces deux façons de calculer une graine de la structure amassée de $\mathcal{C}_{v,w}$ à la section 5.3.

2.7.3 Lien avec $\mathbb{C}[N]$

Définition 2.7.11. Soit T un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ ayant une structure amassée. On pose $\mathcal{T}$ la collection de tous les modules rigides maximaux basiques $\mathcal{C}$-accessibles à partir de T. On pose $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$ la décomposition de $T \in \mathcal{T}$ en facteurs directs indécomposables.

On note $R(\mathcal{C})$ la $\mathbb{C}$-sous algèbre de $\mathbb{C}[N]$ engendrée par les fonctions φ_{T_i} (définies à la définition 2.4.15 pour T_i facteur direct de $T \in \mathcal{T}$ et $1 \leq i \leq k$).

On définit aussi $S(\mathcal{C}) := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle \varphi_M \mid M \in \mathcal{C}\rangle$.

On peut alors donner une description explicite de cet espace lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{v,w}$.

Proposition 2.7.12 ([Lec16, Proposition 4.2])**.** *On a*

$$S(\mathcal{C}_{v,w}) = {}^{N(v)}\mathbb{C}[N]^{N'(w)} := \{f \in \mathbb{C}[N] \mid f(nxn') = f(x) \quad \forall x \in N, n \in N(v), n' \in N'(w)\}$$

où $N(v) := N \cap (v^{-1}N^{-}v)$ *et* $N'(w) = N \cap (w^{-1}Nw)$.

Afin de définir $R(\mathcal{C}_{v,w})$ il faut fixer un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}_{v,w}$. Pour cela, on choisit un représentant $\overline{w}$ de $w \in W$ et on définit le module $V_{\overline{w}}$ comme dans la définition 2.6.21. On définit alors le module $U_{\overline{w}} = V_{\overline{w}}/t_v(V_{\overline{w}})$ comme à la proposition 2.7.8.

On peut donner une description plus combinatoire de ce module de la façon suivante :

Définition 2.7.13. Etant donné $w = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$ et $v \in W$, on va définir une suite d'éléments de W $(v_{(0)}, \dots, v_{(\ell(w))})$ selon le schéma inductif suivant :

$$v_{(0)} = e, \quad v_{(k)} = \begin{cases} s_{i_k} v_{(k-1)} & \text{si } vv_{(k-1)}^{-1} s_{i_k} < vv_{(k-1)}^{-1} \\ v_{(k-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

on a alors $v_{(0)} \leq \cdots \leq v_{(r)} = v$.

Remarque 2.7.14. *C'est cette méthode qui est utilisée par les algorithmes Sage développés pour modéliser l'algorithme de mutation pour déterminer le représentant de v minimal à droite dans $\overline{w}$.*

Définition 2.7.15. On pose l'ensemble

$$J_{v,\overline{w}} := \{k \in \{1, \dots, \ell(w)\} \mid v_{(k)} = v_{(k-1)}\},$$

autrement dit l'ensemble des indices de stagnation de la suite $(v_{(k)})_k$.

Proposition 2.7.16. *On a alors* $|J_{v,\overline{w}}| = \ell(w) - \ell(v) = \dim \mathcal{R}_{v,w}$.

On peut alors définir les facteurs directs de $U_{\overline{w}}$ de la façon suivante :

Définition 2.7.17. Pour tout $1 \leq j \leq \ell(w)$, on pose $U_j := \mathcal{E}^{\dagger}_{v_{(j)}^{-1}} V_j$.

On a alors la proposition suivante, établissant la relation entre les deux définitions de $U_{\overline{w}}$:

Proposition 2.7.18 ([Lec16, Proposition 4.3])**.** *On a* $U_j = V_j/t_v(V_j)$ *et donc* $U_{\overline{w}} = \bigoplus_{1 \leq j \leq \ell(w)} U_j$, *de plus*

$$\Sigma(U_{\overline{w}}) = \ell(w) - \ell(v).$$

Ainsi on a le nombre de facteurs indécomposables distincts d'une graine pour la structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$.

Finalement on peut énoncer le théorème suivant, précisant la structure amassée sur $\mathcal{C}_{v,w}$ et son lien avec l'anneau de coordonnées de la variété de Richardson ouverte $\mathcal{R}_{v,w}$.

Théorème 2.7.19 ([Lec16, Théorème 4.5])**.** *On a les propositions suivantes :*

1. *Pour $v \leq w \in W$,le sous-espace $S(\mathcal{C}_{v,w})$ de $\mathbb{C}[N]$ est égal à l'anneau des polynômes doublement invariants ${}^{N(v)}\mathbb{C}[N]^{N'(w)}$.*

2. *La localisation $S_{v,w}$ de $S(\mathcal{C}_{v,w})$ par rapport au sous-ensemble multiplicatif*

$$M_{v,w} = \{\varphi_P \mid P \text{ projectif de } \mathcal{C}_{v,w}\}$$

   est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$.

3. *La catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$ a une structure amassée. La sous-algèbre $R(\mathcal{C}_{v,w})$ de $S(\mathcal{C}_{v,w})$ a la structure d'une algèbre amassée. L'ensemble $M_{v,w}$ correspond à l'ensemble des monômes en les variables gelées de $R(\mathcal{C}_{v,w})$. Ainsi, l'algèbre amassée $R_{v,w}$ obtenue à partir de $R(\mathcal{C}_{v,w})$ en inversant les variables d'amas gelées est isomorphe à une sous-algèbre amassée $\widetilde{R}_{v,w}$ de $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$.*

4. *Le nombre de variables d'amas d'un amas de $R_{v,w}$ (en comptant les gelées) est égal à $\dim \mathcal{R}_{v,w}$.*

5. *Si $\mathcal{C}_{v,w}$ a un nombre fini d'objets indécomposables à isomorphisme près, on a $R(\mathcal{C}_{v,w}) = S(\mathcal{C}_{v,w})$ et l'algèbre amassée $\widetilde{R}_{v,w}$ est égale à $\mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$.*

Remarque 2.7.20. *L'isomorphisme du point 2. du théorème 2.7.19 provient de l'isomorphisme de variétés $(N \cap v^{-1}Nv) \cap (v^{-1}B^-wB^-) \cong \mathcal{R}_{v,w}$ défini par l'application $x \mapsto \pi(\widetilde{v}w)$ où ici $\widetilde{v}$ désigne un représentant distingué de v (voir [BGY06] et [Lec16, Lemme 2.2]).*

Conjecture 2.7.21. *On a l'égalité $\widetilde{R}_{v,w} = \mathbb{C}[\mathcal{R}_{v,w}]$ en général.*

En plus de [Lec16] qui prouve la conjecture dans le cas où $\mathcal{C}_{v,w}$ a un nombre fini d'indécomposables et dans celui $w = v'v$ avec $\ell(w) = \ell(v') + \ell(v)$, [SSW20] la prouvent dans le cas des variétés ouvertes de Schubert sur la Grasmannienne. De plus [GL19] montrent que l'anneau de coordonnées d'une variété positroïde ouverte coïncide avec l'algèbre amassée associée à un diagramme de Postnikov. Dans ce cas, en regardant l'action de B^- sur G à droite et non plus à gauche, la graine combinatoire qu'ils définissent correspond à la graine $U_{\overline{w}}$, définie à la proposition 2.7.8 par Leclerc.

2.8 Stratification des modules sur l'algèbre préprojective

Dans cette section, on associe à chaque module de $\mathcal{C}_w$ un vecteur d'entiers appelé Δ-vecteur. Ces vecteurs joueront un rôle crucial dans la preuve de l'algorithme qui sera introduit à la définition 3.2.4. Cette section est une adaptation de [GLS11, Sections 10 & 11].

Dans la définition 2.6.21, on remarque qu'on a une inclusion de modules $V_k \subset V_{k^+}$ pour tout couple $(k, k^+) \in \{1, \dots, \ell(w)\}$. On a alors :

Définition 2.8.1. Soit $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$, on appelle $M_k, \forall k \in \{1, \dots, \ell(w)\}$ le module suivant :

$$M_k := \begin{cases} V_k & \text{si } k = k_{\min}, \\ V_k/V_{k^-} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où V_k est le module défini à la définition 2.6.20.

Lorsqu'on aura besoin de définir le représentant $\overline{w}$ de w vis à vis duquel sont définis ces modules, on notera la famille $(M_{k,\overline{w}})_k$.

On peut alors définir des catégories définies par une stratification par ces familles $(M_{k,\overline{w}})$ et étudier la catégorie des modules définis par cette stratification.

Définition 2.8.2. Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ un m-uplet d'entiers positifs et soit $\mathcal{C}_{M_{\overline{w},\underline{a}}}$ la catégorie de tous les Λ-modules tels qu'il existe une chaîne :

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_m = X$$

de sous-modules de X avec $X_k/X_{k-1} \cong M_k^{a_k}$ pour tout $1 \leq k \leq r$.

Chaque Λ-module appartient à une seule de ces catégories $\mathcal{C}_{M_{\overline{w},\underline{a}}}$ par le lemme suivant :

Lemme 2.8.3 ([GLS11, Lemme 10.1])**.** *Si X est un module de $\mathcal{C}_{M_{\overline{w},\underline{a}}}$ et de $\mathcal{C}_{M_{\overline{w},\underline{b}}}$ on a $\underline{a} = \underline{b}$.*

Définition 2.8.4. On définit la catégorie suivante :

$$\mathcal{C}_{M_{\overline{w}}} := \bigcup_{a \in \mathbb{N}^m} \mathcal{C}_{M_{\overline{w},\underline{a}}}.$$

Lemme 2.8.5 ([GLS11, Lemme 10.2])**.** *On a $\mathcal{C}_w = \mathcal{C}_{M_{\overline{w}}}$.*

Définition 2.8.6. On pose $B_{\overline{w}} := \mathrm{End}_\Lambda(V_{\overline{w}})^{\mathrm{op}}$.

Ici A^{op} désigne l'anneau opposé de A, c'est à dire l'anneau dont la multiplication est effectuée dans l'ordre opposé. Autrement dit, si on a $x, y \in A$, $x \times_{A^{\mathrm{op}}} y = y \times_A x$. On verra après la définition de Δ_k un exemple et une justification à l'utilisation de cet anneau opposé.

On définit maintenant les modules Δ_k et les Δ-vecteurs.

Définition 2.8.7. On définit les modules standards de $B_{\overline{w}}$:

$$\Delta_k := \mathrm{Hom}(V_{\overline{w}}, M_k).$$

Remarque 2.8.8. *L'opposition de* $\mathrm{End}_\Lambda(V_{\overline{w}})$ *est nécessaire afin d'avoir des* $B_{\overline{w}}$*-modules à gauche. En effet, si on a* $f \in \Delta_k$ *et* $g, h \in B_{\overline{w}}$*, on a* $(gh) \cdot f = f \circ (g \times_{B_{\overline{w}}} h) = f \circ (h \times_{\mathrm{End}_\Lambda(V_{\overline{w}})} g)$.

Les modules Δ_k ont des propriétés intéressantes notamment la suivante :

Lemme 2.8.9 ([GLS11, Lemme 10.3])**.** *Les vecteurs dimension* $(\dim_{B_{\overline{w}}}(\Delta_k))_{k=1}^{\ell(w)}$ *sont linéairement indépendants.*

De plus, ces vecteurs dimension s'adaptent parfaitement à l'inclusion des modules M_k dans les modules V_k via le résultat suivant :

Lemme 2.8.10 ([GLS11, Lemme 10.4])**.** *Pour tout* $1 \leq k \leq \ell(w)$*, on a :*

$$\dim_{B_{\overline{w}}}(\mathrm{Hom}(V_{\overline{w}}, V_k)) = \dim_{B_{\overline{w}}}(\Delta_k) + \dim_{B_{\overline{w}}}(\Delta_{k^-}) + \cdots + \dim_{B_{\overline{w}}}(\Delta_{k_{\min}}).$$

Finalement on a la proposition suivante permettant de relier les modules de $\mathcal{C}_w$ et les modules standards :

Proposition 2.8.11 ([GLS11, Proposition 10.5])**.** *Soit* $X \in \mathcal{C}_w$ *et* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{\ell(w)})$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \in \mathcal{C}_{M_{\overline{w},\underline{a}}}$,
2. *Il existe une suite exacte courte :*

$$0 \to \bigoplus_{k=1}^{\ell(w)} V_{k^-}^{a_k} \to \bigoplus_{k=1}^{\ell(w)} V_k^{a_k} \to X \to 0,$$

3. $\dim_{B_{\overline{w}}}(\mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, X)) = \sum_{k=1}^{\ell(w)} a_k \dim_{B_{\overline{w}}}(\Delta_k)$.

2.8.1 Algèbres quasi-héréditaires

Définition 2.8.12. Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie et $\mathcal{U}$ une classe de A-modules. On note $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ la classe de tous les A-modules X ayant une filtration :

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_t = X$$

de sous-modules tels que chaque facteur X_j/X_{j-1} appartient à $\mathcal{U}$ pour $1 \leq j \leq t$. On appelle une telle filtration **$\mathcal{U}$-filtration** de X. On appelle ces modules des **modules $\mathcal{U}$-filtrés**.

Définition 2.8.13 (Module standard)**.** Soient $S_1, \ldots, S_m$ les A-modules simples de A, $P_1, \ldots, P_m$ les modules projectifs indécomposables. Pour une bijection $\omega : \{S_1, \ldots, S_m\} \to \{1, \ldots, m\}$, on note Δ_i le plus grand module quotient de P_i tel que $[\Delta_i, S_j] = 0$ pour tout j tels que $\omega(S_j) > \omega(S_i)$. Ici $[\Delta_i, S_j]$ compte le nombre de facteurs de composition de Δ_i isomorphes à S_j.

On définit $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$ la famille des **modules standards**.

Remarque 2.8.14. *On peut définir de façon duale les* ***modules costandards****, noté* $\nabla = \{\nabla_1, \ldots, \nabla_m\}$.

Définition 2.8.15 (Algèbre quasi-héréditaire)**.** La $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie A est dite **quasi-héréditaire** si on a $\mathrm{End}_A(\Delta_i) \simeq \mathbb{K}$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ et si $A \in \mathcal{F}(\Delta)$ pour A vue comme A-module à gauche sur lui-même.

Remarque 2.8.16. *On pourra consulter [DR89, IR11] pour plus d'information sur les algèbres héréditaires, introduites initialement dans [CPS88], [Sco87] et [PS88].*

Définition 2.8.17 (Δ-vecteur)**.** Supposons qu'on ait une algèbre quasi-héréditaire A et $\mathcal{F}(\Delta)$ la sous-catégorie des A-modules Δ-filtrés. Soit $X \in \mathcal{F}(\Delta)$, et $[X : \Delta_i]$ le nombre d'occurrences de Δ_i dans la Δ-filtration de X, alors on définit :

$$\dim_\Delta(X) = ([X : \Delta_1], \ldots, [X : \Delta_m]) \in \mathbb{N}^m$$

le **vecteur de Δ-dimension** ou **Δ-vecteur** de X.

On peut montrer que ce nombre ne dépend pas du choix de la filtration.

Définition 2.8.18. Une algèbre est **fortement quasi-héréditaire** s'il existe une bijection ω telle que pour tout $1 \leq k \leq m$ il existe une suite exacte courte :

$$0 \to R_k \to P_k \to D_k \to 0$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. R_k est une somme directe de A-modules projectifs P_j avec $\omega(j) > \omega(k)$,
2. $[D_k : S_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(j) > \omega(k) \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$.

Proposition 2.8.19. *Chaque algèbre fortement quasi-héréditaire est quasi-héréditaire avec $\Delta_k = D_k$ pour tout k.*

Définition 2.8.20. On dit que A est Δ-sérielle si chaque P_k admet une unique Δ-filtration.

2.8.2 L'algèbre $B_{\overline{w}}$ est quasi-héréditaire

On rappelle qu'on a choisi un représentant $\overline{w}$ de $w \in W$, les deux collections de modules $V_{\overline{w}}$ et $M_{\overline{w}}$. Dans cette section on définira $S(k)$ comme la tête (simple) des $B_{\overline{w}}$-modules indécomposables :

$$R_k := \mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, V_k) \quad 1 \leq k \leq m.$$

On définit comme précédemment $\Delta_k := \mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, M_k)$ et on pose :

$$\Delta := \{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}.$$

On définit la bijection suivante inversant les indices :

$$\omega : \{S(1), \ldots, S(m)\} \to \{1, \ldots, m\},$$

par $\omega(S(k)) := m - k + 1$.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.8.21 ([GLS11, Théorème 11.1])**.** *Soit $\overline{w}$ un représentant d'un élément $w \in W$. On a les propriétés suivantes :*

1. *l'algèbre $B_{\overline{w}}$ est fortement quasi-héréditaire et Δ-sérielle pour la famille des modules standards Δ,*
2. *le foncteur $\mathrm{Hom}_\Delta(V_{\overline{w}}, -)$ induit l'équivalence de catégories $F_{\overline{w}} : \mathcal{C}_w \to \mathcal{F}(\Delta)$.*

Finalement on a la proposition suivante nous donnant une interprétation combinatoire des Δ-vecteurs :

Proposition 2.8.22 ([GLS11, Proposition 11.3])**.** *Soit $X \in \mathcal{C}_w$ et $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$. On a équivalence entre les propositions suivantes :*

1. *$X \in \mathcal{C}_{M_{\overline{w}}, \underline{a}}$,*
2. *$\dim_\Delta(F_{\overline{w}}(X)) = (a_1, \ldots, a_r)$.*

Remarque 2.8.23. *Autrement dit on a équivalence entre l'existence d'une filtration de X par les modules $M_1, \ldots, M_m$ d'indice croissant du socle vers la tête avec les multiplicités $\underline{a}$ et le fait que $F_{\overline{w}}(X)$ ait pour Δ-vecteur $\underline{a}$.*

Ce qu'on peut résumer par :

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, X) = \begin{array}{c} \Delta_m^{\oplus a_m} \\ \hline \vdots \\ \hline \Delta_1^{\oplus a_1} \end{array} \Leftrightarrow X = \begin{array}{c} M_m^{\oplus a_m} \\ \hline \vdots \\ \hline M_1^{\oplus a_1} \end{array}.$$

Ou encore, pour V_k :

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, V_k) = \begin{array}{c} \Delta_k \\ \hline \Delta_{k^-} \\ \hline \vdots \\ \hline \Delta_{k_{\min}} \end{array} \Leftrightarrow V_k = \begin{array}{c} M_k \\ \hline M_{k^-} \\ \hline \vdots \\ \hline M_{k_{\min}} \end{array}.$$

Pour la suite du document, on commettra l'abus de langage suivant, permettant d'alléger l'expression et de garder l'exemple de cette équivalence de stratifications comme interprétation concrète des Δ-vecteurs.

Définition 2.8.24 (Δ-vecteur d'un module de $\mathcal{C}_w$)**.** Soit $\overline{w}$ un représentant de $w \in W$ et X un module indécomposable de $\mathcal{C}_w$. On définit le Δ-vecteur de X comme le vecteur d'entiers positifs :

$$\Delta_{\overline{w}}(X) := \dim_\Delta(F_{\overline{w}}(X)) = \dim_\Delta(\mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, X)) = [a_1, \dots, a_{\ell(w)}]$$

et la coordonnée $\Delta_{\overline{w},i}(X) := a_i$ pour tout $1 \leq i \leq \ell(w)$.

Remarque 2.8.25. *Dans ce qui suivra, on regardera souvent les Δ-vecteurs comme définis à partir d'un représentant $\dot{w}$ de w_0 obtenu par complétion à gauche de $\overline{w}$. Dans ce cas, pour les modules de $\mathcal{C}_w$ on a $(\Delta_{\overline{w},i}(X))_{i=1}^{\ell(w)} = (\Delta_{\dot{w},i}(X))_{i=1}^{\ell(w)}$.*

2.8.3 Mutation de Δ-vecteurs

L'un des intérêts des Δ-vecteurs est qu'on sait comment exprimer le Δ-vecteur d'un module muté à partir de son Δ-vecteur avant mutation et de ceux des modules adjacents par [GLS11, Section 12].

Définition 2.8.26 (Vecteur d_Δ)**.** Soit $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \dots, i_1]$ un représentant d'un élément $w \in W$. On rappelle qu'on a le vecteur dimension du $B_{\overline{w}}$-module : $\Delta_k = \mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\overline{w}}, M_k)$, $\forall 1 \leq k \leq \ell(w)$ où la coordonnée d'indice m est

$$\dim(\Delta_k)_m = \dim \mathrm{Hom}_\Lambda(V_m, M_k).$$

On définit le vecteur de vecteurs :

$$d_\Delta := (\dim(\Delta_1), \dots, \dim(\Delta_{\ell(w)})) \in (\mathbb{N}^{\ell(w)})^{\ell(w)}.$$

Proposition 2.8.27 (Δ-vecteur d'un module muté, [GLS11, Proposition 12.6])**.** *Soient $(M_1, \dots, M_{\ell(w)})$ les facteurs directs indécomposables d'un Λ-module M, rigide, $\mathcal{C}_w$-maximal, basique, dont le carquois est $Q_M = (Q_0, Q_1, s, t)$. Si on mute l'amas dans la direction k, on a le Δ-vecteur du muté M_k^*, $\Delta(M_k^*)$ qui vérifie la formule suivante :*

$$\Delta(M_k^*) := \begin{cases} -\Delta(M_k) + \sum\limits_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=k}} \Delta(M_{s(\alpha)}) & \text{si } \sum\limits_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=k}} \big(\Delta(M_{s(\alpha)}), d_\Delta\big) > \sum\limits_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=k}} \big(\Delta(M_{t(\alpha)}), d_\Delta\big), \\ -\Delta(M_k) + \sum\limits_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=k}} \Delta(M_{t(\alpha)}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où (a, b) désigne le produit scalaire usuel entre deux vecteurs.

Remarque 2.8.28. *Ainsi, pour calculer le muté d'un Δ-vecteur, on va utiliser une des suites exactes courtes des équations 2.1 et 2.2. Cependant, il peut être fastidieux en pratique de calculer à la main la condition permettant de définir laquelle des deux doit être utilisée ou de le déterminer de façon théorique sans faire les calculs explicitement. On verra au lemme 4.12.4 que dans notre cadre d'étude, il n'y a qu'une seule suite exacte qui donne des coordonnées toutes positives et c'est donc celle-ci qui sera utilisée pour le calcul de la mutation de Δ-vecteur.*

2.9 Calcul des Δ-vecteurs par les polytopes de Mirković-Vilonen

Le but de cette section est d'expliciter et de rappeler les théorèmes de Baumann, Kamnitzer et Tingley sur les liens existants entre les polytopes de Mirković-Vilonen et les modules de $\mathcal{C}_w$, induits par les équivalences de catégories de [BKT14, Exemple 5.14 & Remarque 5.25]. Cette section va nous donner un moyen de calculer les Δ-vecteurs d'un même module de la graine initiale $V_{\overline{w}}$ quel que soit le représentant de w_0 par rapport auquel on définit les Δ-vecteurs.

2.9.1 Variété nilpotente de Lusztig

Le lien entre la base cristalline $\mathfrak{B}(\infty)$ et la catégorie $\mathbf{mod}(\Lambda)$ a été établi par les travaux de Lusztig et Kashiwara-Saito que nous allons maintenant rappeler.

Définition 2.9.1 (Variété de Lusztig)**.** Étant donné un carquois Q avec un ensemble de sommets I et un ensemble d'arêtes E, on définit comme à la définition 2.4.1, l'algèbre préprojective Λ. On va considérer les Λ-modules comme des espaces vectoriels I-gradués via l'équivalence de catégories classique entre Λ-modules et représentations de carquois.

À un vecteur dimension $\nu \in \mathbb{N}I$ fixé, la donnée d'un Λ-module se réduit à la connaissance de la collection de ses applications linéaires, qu'on verra comme les points d'une variété algébrique. On appelle cette variété la **variété nilpotente de Lusztig** qu'on notera $\Lambda(\nu)$. On associera un Λ-module à un point de $\Lambda(\nu)$.

On notera $\mathfrak{B}(\nu)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $\Lambda(\nu)$ et on note :

$$\mathfrak{B} = \bigsqcup_{\nu \in \mathbb{N}I} \mathfrak{B}(\nu).$$

Théorème 2.9.2 ([KS97, Théorème 5.3.2] et [Lus13, Théorème 1.8])**.** *$\mathfrak{B}$ possède une structure de cristal et il existe un unique isomorphisme de cristaux*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}(\infty) & \xrightarrow{\cong} & \mathfrak{B} \\ b & \longrightarrow & \Lambda_b \end{array}.$$

Exemple 2.9.3. Dans l'exemple 2.2.17, on a étiqueté chacun des sommets par un module rigide. On peut le faire puisqu'en type A_2 toute composante irréductible de $\mathfrak{B}$ possède un unique module rigide à isomorphisme près.

On a donc l'existence d'un isomorphisme de cristal entre les composantes irréductibles de réunion de variétés nilpotentes de Lusztig et les sommets du cristal $\mathfrak{B}(\infty)$. On a vu à la section 2.2.7 comment réaliser $\mathfrak{B}(\infty)$ en termes de polytopes de Mirković-Vilonen. Dans la section suivante, on va relie les composantes irréductibles de $\mathfrak{B}$ aux polytopes de Mirković-Vilonen.

2.9.2 Polytopes de Harder-Naramsimhan

Afin de relier les polytopes de Mirković-Vilonen et les Λ-modules de dimension finie, on construit les polytopes de Harder-Naramsimhan définis ci-après.

Définition 2.9.4 (Polytopes de Harder-Naramsimhan, [BKT14])**.** On appelle **polytope de Harder-Naramsimhan** d'un Λ-module T, l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}I$ des vecteurs dimensions des Λ-sous-modules de T. On le note $\mathrm{Pol}(T)$.

Exemple 2.9.5. On reprend le module P_2 de l'exemple 2.4.7.

On liste les sous-modules et leurs vecteurs dimensions dans la table 2.6.

Sous-modules	0	2	$\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 3 \\ 2 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$
Vecteurs dimension	$(0,0,0)$	$(0,1,0)$	$(1,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,1)$	$(1,2,1)$

Table 2.6 – Données de construction du polytope de Harder-Naramsimhan de P_2

Ce qui donne le polytope de la figure 2.13.

Théorème 2.9.6 ([BKT14, Section 1.3])**.** *Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie alors pour chaque $b \in \mathfrak{B}(\infty)$, l'ensemble $\{T \in \Lambda_b \mid \mathrm{Pol}(T) = \Psi(b)\}$ contient un sous-ensemble ouvert dense de Λ_b, où $\Psi(b)$ est le polytope de Mirković-Vilonen associé à b dans l'isomorphisme Ψ du théorème 2.2.31.*

Autrement dit $\mathrm{Pol}(b)$ est la valeur générique de l'application $T \to \mathrm{Pol}(T)$ sur Λ_b.

Remarque 2.9.7. *Si $T \in \mathbf{mod}(\Lambda)$ est rigide, T est générique* i.e. *l'adhérence de son orbite est une composante irréductible $\mathfrak{B}_T \in \mathfrak{B}$. Donc $\mathrm{Pol}(T)$ est le polytope de Mirković-Vilonen associé à $\mathfrak{B}_T$.*

Exemple 2.9.8. Cette identification $T \leftrightarrow \mathrm{Pol}(T)$ peut se lire en identifiants les étiquettes des graphes cristallins des figures 2.4 et 2.10.

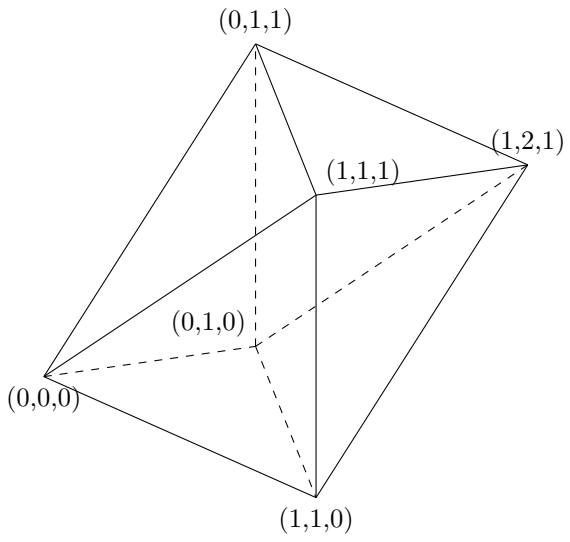


FIGURE 2.13 – Polytope de Harder-Naramsimhan de P_2

2.9.3 Détermination des Δ-vecteurs de $V_{\overline{w}}$

On va maintenant utiliser les résultats précédents, ainsi qu'un théorème de Naito et Sagaki, pour obtenir une description des Δ-vecteurs des facteurs indécomposables de $V_{\overline{w}}$ relativement à la structure quasi-héréditaire de $B_{\dot{w}}$ où $\dot{w}$ est une décomposition réduite arbitraire de w_0.

Tout d'abord, en tenant compte de la remarque 2.9.7, comme les facteurs indécomposables

$$V_{\overline{w},k} \quad (1 \leq k \leq \ell(w))$$

de $V_{\overline{w}}$ sont rigides, on voit que les polytopes de Harder-Naramsimhan

$$\mathrm{Pol}(V_{\overline{w},k}) \quad (1 \leq k \leq \ell(w))$$

sont des polytopes de Mirković-Vilonen. Plus précisément, le cristal $\mathfrak{B}(\infty)$ contient les cristaux $B(\lambda)$ de toutes les représentations irréductibles de dimension finie $H(\lambda)$. D'après [GLS11, Proposition 9.1], le module $V_{\overline{w},k}$ correspond à un vecteur de poids extrémal $\varpi_{i_k} - s_{i_1} \cdots s_{i_k}(\varpi_{i_k})$ de la représentation fondamentale $H(\varpi_{i_k})$. Ainsi le polytope $\mathrm{Pol}(V_{\overline{w},k})$ n'est autre que le polytope de Mirković-Vilonen de poids extrémal $\varpi_{i_k} - s_{i_1} \cdots s_{i_k}(\varpi_{i_k})$ du cristal $B(\varpi_{i_k})$.

Les polytopes de Mirković-Vilonen de poids extrémaux des cristaux $B(\lambda)$ ont été calculés par Naito et Sagaki [NS09, Théorème 4.1.5]. D'autre part les liens entre les polytopes de Harder-Naramsimhan et les Δ-vecteurs sont donnés par Baumann, Kamnitzer et Tingley [BKT14, Sections 5.3 & 5.4]. En traduisant dans nos conventions ces résultats et en les appliquant aux modules $V_{\overline{w},k}$, nous arrivons aux règles de calcul suivantes.

Définition 2.9.9. Soit $\dot{w} = [i_r, \ldots, i_1]$ un représentant de w_0 tel que $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \ldots, i_1]$. On note u_k l'élément défini par

$$u_k = s_{i_r} \cdots s_{i_{k+1}}, \quad 1 \leq k \leq \ell(w)$$

avec $u_r = e$.

On choisit $\dot{w}_0 = [j_r, \ldots, j_1]$, un autre représentant de w_0. On définit $[j_{q_{r-k}}, \ldots, j_{q_1}]$ le représentant le plus *à gauche* de u_k dans $\dot{w}_0$.

Notation 2.9.10. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section, on fixe un entier $1 \leq k \leq \ell(w)$. Cela revient à fixer un facteur direct indécomposable $V_{\overline{w},k}$ de $V_{\overline{w}}$.

Définition 2.9.11. On rappelle l'énumération des racines de Φ^+ définie à la proposition 2.1.16. On définit la suite $(\beta_i^{\dot{w}_0})_i$ comme

$$\beta_1^{\dot{w}_0} = \alpha_{i_1} \quad \text{et } \beta_m^{\dot{w}_0} = s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}}(\alpha_{i_m}), \quad 2 \leq m \leq r$$

où α_{i_1} est la racine simple associée au sommet i_1 du diagramme de Dynkin.

Notation 2.9.12. On reprend les notations précédentes. On note

$$[j_{r_k}, \dots, j_{r_1}] = [j_r, \dots, j_1] \backslash [j_{q_{r-k}}, \dots, j_{q_1}]$$

l'ensemble des lettres de $\dot{w}_0$ n'intervenant pas dans l'écriture la plus à gauche de u_k.

Exemple 2.9.13. On choisit $\overline{w} := [2,1,2,3,2,1]$ et $\dot{w}_0 = [1,2,3,1,2,1]$. On prend $k = 4$, on a donc $u_4 = s_2 s_1$. Le représentant le plus à gauche de u_4 dans $\dot{w}_0$ est formé des lettres d'indices : $q_1 = 3$ et $q_2 = 5$, et donc $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 4, r_4 = 6$.

Définition 2.9.14 ([NS09, Section 4.1])**.** Avec les notations précédentes, on définit une suite d'éléments $(\xi_i^{\dot{w}_0})_i$ de la façon suivante. On pose $\xi_0^{\dot{w}_0} = \varpi_{i_k}$. On pose par convention $r_0 = 0$ et on a

$$\xi_{r_c}^{\dot{w}_0} := s_{\beta_{r_c}^{\dot{w}_0}} s_{\beta_{r_{c-1}}^{\dot{w}_0}} \cdots s_{\beta_{r_1}^{\dot{w}_0}}(\varpi) \quad (1 \leq c \leq k),$$

$$\xi_{q_d}^{\dot{w}_0} := \xi_{r_c}^{\dot{w}_0} \quad \text{si } r_c < q_d < r_{c+1}.$$

Exemple 2.9.15. On reprend les données de l'exemple 2.9.13.

On a $\varpi = \varpi_2$. On rappelle qu'on a $q_1 = 3$ et $q_2 = 5$. On a :

$$\begin{array}{lcll}
\xi_0^{\dot{w}_0} = & \varpi & & = \varpi_2, \\
\xi_1^{\dot{w}_0} = & s_{\beta_1}(\varpi_2) & = s_{\alpha_1}(\varpi_2) & = \varpi_2, \\
\xi_2^{\dot{w}_0} = & s_{\beta_2} s_{\beta_1}(\varpi_2) & = s_{\alpha_1+\alpha_2}(\varpi_2) & = \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_3^{\dot{w}_0} = & \xi_2^{\dot{w}_0} & & = \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_4^{\dot{w}_0} = & s_{\beta_4} s_{\beta_2} s_{\beta_1}(\varpi_2) & = s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}(\varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2) & = \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_5^{\dot{w}_0} = & \xi_4^{\dot{w}_0} & & = \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_6^{\dot{w}_0} = & s_{\beta_6} s_{\beta_4} s_{\beta_2} s_{\beta_1}(\varpi_2) & = s_{\alpha_3}(\varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2) & = \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3.
\end{array}$$

Proposition 2.9.16. *Avec les notations de la définition 2.9.14*

$$(\Delta_{\dot{w}_0}(V_{\overline{w},k}))_i = n_i^{\dot{w}_0} \quad \textit{tel que } n_i^{\dot{w}_0} = \begin{cases} 0 & \textit{si } i \in \{q_1, \dots q_{r-k}\} \\ \langle \beta_i^{\dot{w}_0}, \xi_{i-1}^{\dot{w}_0} \rangle & \textit{sinon} \end{cases}$$

où $\xi_0^{\dot{w}_0} = \varpi_{i_k}$.

On peut définir de façon équivalente $n_i^{\dot{w}_0}$ *comme l'entier tel que*

$$\xi_{i-1}^{\dot{w}_0} - \xi_i^{\dot{w}_0} = n_i^{\dot{w}_0} \beta_i^{\dot{w}_0}.$$

Exemple 2.9.17. On continue l'exemple 2.9.15. On va calculer le $\Delta_{\dot{w}_0}$-vecteur du module $V_{\overline{w},4}$ dont la décomposition de socle est :

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & 2 & \end{array}.$$

La suite des poids calculée à l'exemple 2.9.15 est :

$$\begin{array}{lcl}
\xi_0 & = & \varpi_{i_4} = \varpi_2, \\
\xi_1 & = & \varpi_2, \\
\xi_2 & = & \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_3 & = & \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_4 & = & \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_5 & = & \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
\xi_6 & = & \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3.
\end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{ll}
\xi_0 - \xi_1 & = n_1\beta_1 = \quad 0, \\
\xi_1 - \xi_2 & = n_2\beta_2 = \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_2, \\
\xi_2 - \xi_3 & = n_3\beta_3 = \quad 0, \\
\xi_3 - \xi_4 & = n_4\beta_4 = \quad 0, \\
\xi_4 - \xi_5 & = n_5\beta_5 = \quad 0, \\
\xi_5 - \xi_6 & = n_6\beta_6 = \quad \alpha_3 = \beta_6.
\end{array}$$

On retrouve le même résultat en calculant ainsi :

$$\begin{array}{lcll}
n_1^{\dot{w}_0} = & \langle \beta_1^{\dot{w}_0}, \xi_0^{\dot{w}_0} \rangle = & \langle \alpha_1, \varpi_2 \rangle & = 0, \\
n_2 = & \langle \beta_2, \xi_1 \rangle = & \langle \alpha_1 + \alpha_2, \varpi_2 \rangle & = 1, \\
n_3 = & & n_{q_1} & = 0, \\
n_4 = & \langle \beta_4, \xi_3 \rangle = & \langle \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \rangle & = 0, \\
n_5 = & & n_{q_2} & = 0, \\
n_6 = & \langle \beta_6, \xi_5 \rangle = & \langle \alpha_3, \varpi_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \rangle & = 1.
\end{array}$$

Son $\Delta_{\dot{w}_0}$-vecteur vaut donc $[0,1,0,0,0,1]$ et, considérant que les strates associées à $\dot{w}_0$ sont les suivantes :

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
1	1 2	2	1 2 3	2 3	3

on a bien

$$\frac{M_6}{M_2} = \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & 2 & \end{array}.$$

2.10 Condition d'appartenance aux sous-catégories $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^v$

Dans cette section, on donne un critère combinatoire d'appartenance d'un module de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ aux sous-catégories $\mathcal{C}^v$ et $\mathcal{C}_w$ en terme de leurs Δ-vecteurs définis à la définition 2.8.24.

Proposition 2.10.1. *Soit $\overline{w}$ un représentant de $w \in W$. Soit $\dot{w}$ un représentant de w_0 ayant comme facteur droit $\overline{w}$. Un module de $\mathbf{mod}(\Lambda)$ dont les $\Delta_{\dot{w}}$-vecteurs de ses facteurs directs ont des coordonnées toutes nulles pour les indices $> \ell(w)$ appartient à la catégorie $\mathcal{C}_w$.*

Démonstration. Par le lemme 2.8.5, on a que tout module de $\mathcal{C}_w$ admet une stratification par les modules $(M_{i,\dot{w}})_{i=1}^{\ell(w)}$ et inversement, tout module admettant une telle stratification appartient à la catégorie. Ainsi, ici, tout module de $\mathbf{mod}(\Lambda) = \mathcal{C}_{\dot{w}}$ admettant une filtration par les $\ell(w)$ premiers modules $M_{i,\dot{w}}$ appartient à la catégorie $\mathcal{C}_w$. □

Avant de prouver un critère d'appartenance à $\mathcal{C}^v$, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.10.2. *Soit M un module de $\mathbf{mod}(\Lambda)$, $v \in W$, $\overline{v}$ un représentant de v. On fixe comme à la notation 2.1.14 une complétion à gauche $\dot{v}$ en w_0 de $\overline{v}$. Le module $t_v(M)$ (défini à la définition 2.7.6) a pour $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur celui composé des $\ell(v)$ premières coordonnés de celui de M.*

Démonstration. Soit N, le sous-module de M, de $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur celui composé des $\ell(v)$ premières coordonnées de celui de M. On va montrer que c'est le module maximal de $\mathcal{C}_v$ parmi les sous-modules de M par l'absurde.

N est un sous-module de M, qui appartient à $\mathcal{C}_v$. Par maximalité, on a $N \subset t_v(M)$. Ainsi on a $M/N \supseteq M/t_v(M)$. Par définition des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs tout sous-module de M contenant N possède pour $\ell(v)$ premières coordonnées celles de N. Ainsi, s'il existe $t_v(M) \supsetneq N$ dans $\mathcal{C}_v$, on a que $t_v(M)$ possède au moins une coordonnée de son $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur qui est d'indice supérieur à $\ell(v)$, ce qui contredit l'appartenance à $\mathcal{C}_v$ d'après la proposition 2.10.1, c'est absurde.

Donc $t_v(M) = N$. □

Proposition 2.10.3 (Critère d'appartenance à $\mathcal{C}^v$)**.** *Soit $v \in W$ et M un module de $\mathbf{mod}(\Lambda)$. Alors, on a $M \in \mathcal{C}^v$ si et seulement si les $\ell(v)$ premières coordonnées de son $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur sont nulles.*

Démonstration. On rappelle que par la proposition 2.7.7 pour tout module $M \in \mathbf{mod}(\Lambda)$, on a

$$M/t_v(M) \in \mathcal{C}^v.$$

Ainsi, $M = M/t_v(M)$ ou encore $t_v(M) = 0$ si et seulement si $M \in \mathcal{C}^v$.

Or, par le lemme précédent, on a que $t_v(M)$ a pour $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur le vecteur dont les $\ell(v)$-premières coordonnées sont les mêmes que celles de M et dont les autres sont nulles. Ainsi, $t_v(M) = 0$, est équivalent à avoir que $\Delta_{\dot{v}}(M)$ commence par $\ell(v)$ coordonnées nulles. □

CHAPITRE 3

Deux descriptions de l'algorithme

3.1 Premier algorithme de mutation

Dans toute cette section, on se place dans un groupe de Weyl W de type A, D ou E et on choisit un élément $w \in W$, un représentant $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \ldots, i_1]$ de w et un élément $v \in W$ tel que $v \leq w$. On pose $\ell = \ell(v)$ et on note $\overline{v} = [i_{p_\ell}, \ldots, i_{p_1}]$ le représentant le plus à droite de v dans $\overline{w}$.

On va énoncer un algorithme permettant de construire un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}_{v,w}$ à partir d'un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}_w$. Pour cela, on a besoin de définir certaines quantités à partir de la combinatoire de $\overline{w}$ et $\overline{v}$.

3.1.1 Définitions préalables

Définition 3.1.1 (Entiers β_m et γ_m)**.** Soit $1 \leq m \leq \ell$. On définit :

$$\gamma_m = \mathrm{Card}\{1 \leq j \leq m \mid i_{p_j} = i_{p_m}\}.$$

Autrement dit γ_m est le nombre de lettres de $\overline{v}$ d'indice inférieur à m de même couleur que i_{p_m}.

On définit de même :

$$\beta_m = \mathrm{Card}\{1 \leq j \leq p_m \mid \forall 1 \leq k \leq m, p_k \neq j \text{ et } i_j = i_{p_m}\}.$$

Autrement dit, β_m est le nombre de lettres de $\overline{w}$ d'indices compris entre 1 et $p_m - 1$ n'intervenant pas dans $\overline{v}$ et de même couleur que i_{p_m}.

Exemple 3.1.2. On se place dans un groupe de Weyl de type D_4. On rappelle que, conformément aux conventions de la proposition 2.1.10, le sommet 2 correspond au point trivalent.

On choisit $\overline{w} = [\underline{3}, \underline{1}, \underline{2}, 1, \underline{4}, 2, \underline{3}, 1, 2, \underline{1}]$ et $\overline{v} = [3, 1, 2, 4, 3, 1]$. Ainsi on a $[p_1, \ldots, p_6] = [1, 4, 6, 8, 9, 10]$.

On va déterminer β_5 et γ_5. La cinquième lettre de $\overline{v}$ est un 1 et elle correspond à la lettre d'indice $p_5 = 9$ de $\overline{w}$. On va donc considérer le mot $\overline{w}_{\leq 9} = [1, 2, 1, 4, 2, 3, 1, 2, 1]$. On va souligner les lettres apparaissant dans $\overline{v}$ et surligner les 1 n'y apparaissant pas. On a ainsi :

$$\overline{w}_{\leq 9} = [\underline{1}, \underline{2}, \overline{1}, \underline{4}, 2, \underline{3}, \overline{1}, 2, \underline{1}].$$

On a deux 1 soulignés donc $\gamma_5 = 2$ et deux 1 surlignés donc $\beta_5 = 2$.

Définition 3.1.3. Soient $1 \leq k \leq \ell(w)$, $0 \leq m \leq \ell(v)$. On définit

$$\alpha(k, m) = \mathrm{Card}\{1 \leq j \leq m \mid i_{p_j} = i_k\}.$$

Remarque 3.1.4. *En fait α compte le nombre de lettres de $\overline{v}$ de couleur i_k d'indice inférieur ou égal à m.*

On a $\alpha(k, m) = \alpha(k^+, m) = \alpha(k^-, m)$ (si les indices k^+ et k^- existent). En effet, dans cette définition, k n'intervient que par l'intermédiaire de $i_k = i_{k^+} = i_{k^-}$.

Remarque 3.1.5. *On a* $\gamma_m = \alpha(p_m, m)$.

Proposition 3.1.6. *Si* $i_{p_m} = i_k$, *on a* $\alpha(k,m) = \alpha(k,m-1)+1$. *Sinon on a* $\alpha(k,m) = \alpha(k,m-1)$.

Démonstration. Dans le premier cas, on a

$$\{1 \leq j \leq m \mid i_{p_j} = i_k\} = \{1 \leq j \leq m-1 \mid i_{p_j} = i_k\} \cup \{i_{p_m}\}.$$

Dans le second, on a

$$\{1 \leq j \leq m \mid i_{p_j} = i_k\} = \{1 \leq j \leq m-1 \mid i_{p_j} = i_k\}$$

car $i_{p_m} \neq i_k$. □

3.1.2 Définition du premier algorithme de mutation

Pour cet algorithme, on appliquera une suite de mutations à la graine initiale $V_{\overline{w}}$ pour la structure amassée sur $\mathcal{C}_w$ déterminée comme dans la définition 2.6.20 par $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \ldots, i_1]$.

L'algorithme s'exprime sous la forme d'une suite de suites de mutations, notée $(\widetilde{\mu}_m)_{1 \leq m \leq \ell}$ correspondant aux lettres de $\overline{v}$. Chacun des $\widetilde{\mu}_m$ est une suite de mutations de sommets de même couleur i_{p_m}, c'est à dire situés sur une même ligne horizontale du carquois.

Définition 3.1.7 (Suite de mutations $\widetilde{\mu}_m$)**.** Soit $1 \leq m \leq \ell(v)$. On pose $k = p_m$, $\gamma = \gamma_m$ et $\beta = \beta_m$. On définit la suite de mutations :

$$\widetilde{\mu}_m := \begin{cases} \mu_{(k_{\max})^{\gamma-}} \circ \cdots \circ \mu_{(k_{\min})^{\beta+}} & \text{si } (k_{\max})^{\gamma-} \geq (k_{\min})^{\beta+} \\ id & \text{sinon} \end{cases}$$

où k^+, k^-, $k_{\min}$, $k_{\max}$ ont été définis à la définition 2.1.20.

Autrement dit, $\widetilde{\mu}_m$ mute par ordre croissant tous les sommets de couleur i_{p_m} dont l'indice est compris entre deux bornes. L'indice minimal, sera le premier, décalé dans l'ordre croissant du nombre d'indices de cette couleur qu'on a « sauté » (au sens de β_m), l'indice maximal, le dernier, décalé dans l'ordre décroissant du nombre d'indices de cette couleur qu'on a déjà mutés (en comptant celui qu'on va muter). En fait la borne maximale correspond à l'exclusion finale des derniers sommets de la ligne des sommets à muter.

Exemple 3.1.8. On se place dans W de type A_5 avec

$$\overline{w} = [1, 3, 2, 4, 3, \underline{2}, \underline{4}, \underline{5}, 4, \underline{3}, 2, \underline{1}, \underline{2}] \text{ et } v = s_2 s_4 s_5 s_3 s_1 s_2.$$

On a $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 4, p_4 = 6, p_5 = 7, p_6 = 8$.

On a les entiers γ et β indiqués dans la table 3.1.

m	1	2	3	4	5	6
p_m	1	2	4	6	7	8
i_{p_m}	2	1	3	5	4	2
β_m	0	0	0	0	1	1
γ_m	1	1	1	1	1	2

Table 3.1 – Valeurs des entiers β et γ

On a alors :

$$\widetilde{\mu}_1 = \mu_8 \circ \mu_3 \circ \mu_1, \quad \widetilde{\mu}_2 = \mu_2, \quad \widetilde{\mu}_3 = \mu_9 \circ \mu_4, \quad \widetilde{\mu}_4 = id, \quad \widetilde{\mu}_5 = \mu_7, \quad \widetilde{\mu}_6 = \mu_3.$$

Remarque 3.1.9. *On remarque que l'algorithme ressemble à l'algorithme de [GLS11, Section 13.1] à la différence que pour les* $\widetilde{\mu}_m$ *où* $\beta_m \neq 0$, *on omet les* β_m *premières mutations sur la ligne de couleur* i_{p_m}. *C'est le cas ici pour* $\widetilde{\mu}_5$ *et* $\widetilde{\mu}_6$.

Notation 3.1.10. On va noter $R_{i,m}$ les modules obtenus par la suite de mutations $\widetilde{\mu}_m \circ \cdots \circ \widetilde{\mu}_1$. Plus précisément, on posera $R_{i,0} = V_i$ pour V_i facteur direct de $V_{\overline{w}}$, pour tout $1 \leq i \leq \ell(w)$.

Ensuite, on posera $R_{i,j} = \widetilde{\mu}_j(R_{i,j-1})$ pour $1 \leq i \leq \ell(w)$ et $1 \leq j \leq \ell(v)$.

Définition 3.1.11 (Définition de l'algorithme)**.** Soit $\overline{w}$ le représentant de w fixé comme précédemment et $\overline{v}$ le représentant le plus à droite de v dans $\overline{w}$.

On définit

$$\mu^{\bullet}(V_{\overline{w}}) = S(\widetilde{\mu}_{\ell} \circ \cdots \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$$

où S correspond à la suppression des facteurs directs $R_{k,\ell(v)}$ tels que $k > (k_{\max})^{\alpha(k,\ell(v))-}$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.1.12. *$\mu^{\bullet}(V_{\overline{w}})$ est un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}_{v,w}$. Le carquois de $\mu^{\bullet}(V_{\overline{w}})$ est obtenu en retirant au carquois de $\widetilde{\mu}_{\ell} \circ \cdots \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ toutes les flèches adjacentes à un sommet supprimé par l'opération S et seulement celles-ci.*

Remarque 3.1.13. *En particulier si $\overline{v}$ est le facteur droit de $\overline{w}$, on a pour tout m, $\beta_m = 0$ et dans ce cas on retrouve les $\ell(v)$ premières étapes de l'algorithme [GLS11, Section 13.1] (mais dans l'algorithme de Geiss, Leclerc et Schröer, on ne supprime pas de module à la fin).*

Cependant on n'a pas nécessairement $v \leq_R w$ et donc on ne peut pas en général trouver de tels représentants « bien adaptés ».

Exemple 3.1.14. On reprend les données de l'exemple 3.1.8. On représente $V_{\overline{w}}$ avec son carquois à la figure 3.1. On rappelle qu'on est dans le cas où W est de type A_5 avec $\overline{w} = [1, 3, 2, 4, 3, \underline{2}, \underline{4}, \underline{5}, 4, \underline{3}, 2, \underline{1}, \underline{2}]$ et $v = s_2 s_4 s_5 s_3 s_1 s_2$.

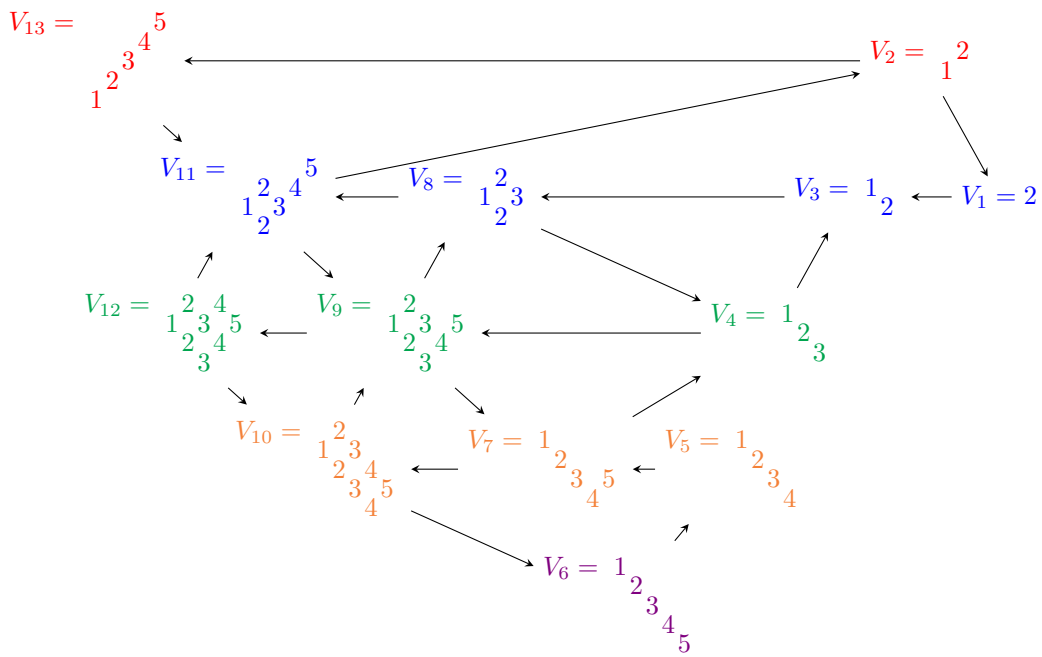


FIGURE 3.1 – Module $V_{\overline{w}}$

On va appliquer la suite de mutation $\widetilde{\mu}_1 = \mu_8 \circ \mu_3 \circ \mu_1$.

On a la mutation de $V_1 = 2$ correspondant aux deux suites exactes courtes :

$$2 \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \to 1, \tag{3.1}$$

$$1 \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \to 2. \tag{3.2}$$

et donc le module muté V_1^* est le simple S_1.

Après cette mutation on a le module de la figure 3.2 (les flèches modifiées sont en magenta gras).

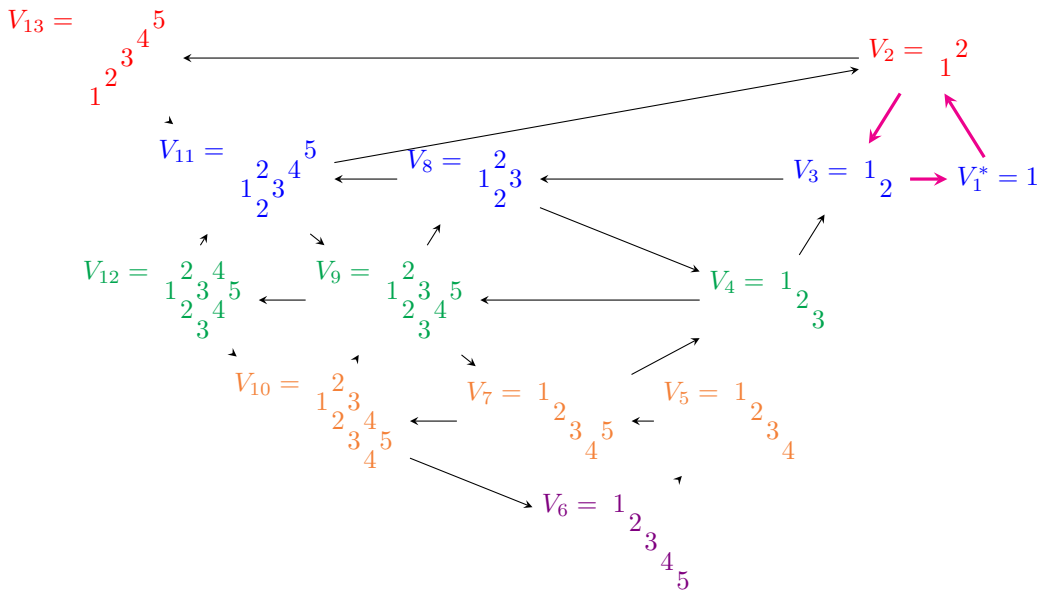


FIGURE 3.2 – Module $\mu_1(V_{\overline{w}})$

On mute alors $V_3 = {}^{1}_{2}$ correspondant aux deux suites exactes courtes suivantes :

$$ {}^{1}_{2} \to 1 \oplus {}^{2}_{1}{}^{3}_{2} \to {}^{2}_{1}{}_{3}\,, \tag{3.3} $$

$$ {}^{2}_{1}{}_{3} \to {}^{2}_{1} \oplus {}^{1}_{2}{}_{3} \to {}^{1}_{2}\,. \tag{3.4} $$

On a alors $V_3^* = {}^{2}_{1}{}_{3}$ et le module $\mu_3 \circ \mu_1(V_{\overline{w}})$ est celui de la figure 3.3.

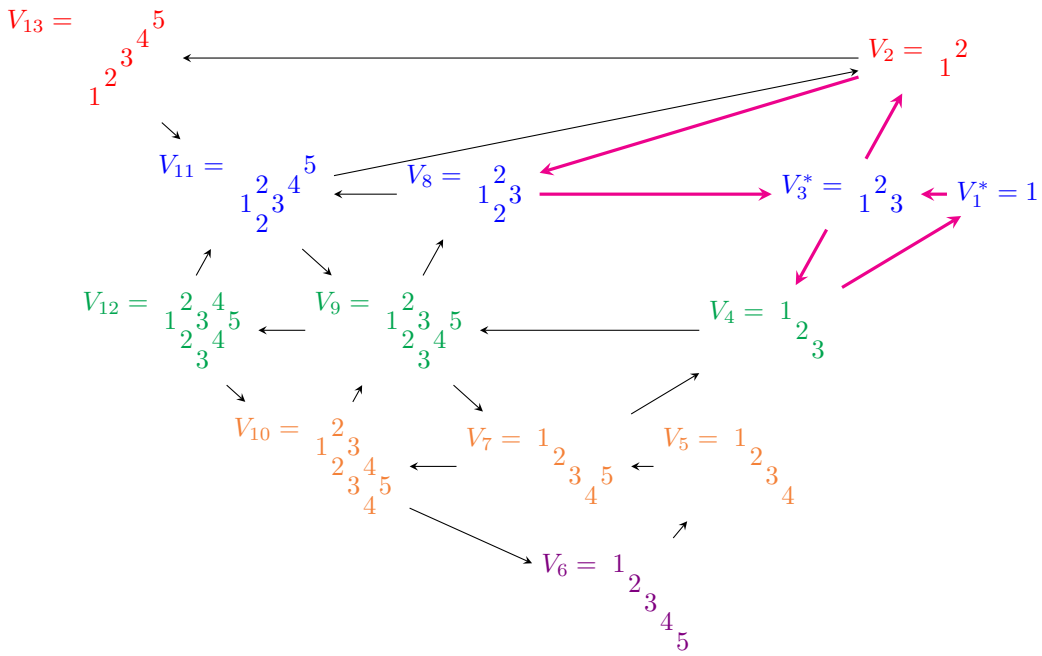


FIGURE 3.3 – Module $\mu_3 \circ \mu_1(V_{\overline{w}})$

On mute maintenant $V_8 = {}_{1}{}^{2}{}_{2}{}^{3}$.

On a les suites exactes courtes :

$$ {}_{1}{}^{2}{}_{2}{}^{3} \to {}_{1}{}^{2}{}_{3} \oplus {}_{1}{}^{2}{}_{2}{}^{3}{}_{4}{}^{5} \to {}_{1}{}^{2}{}_{3}{}_{4}{}^{5} $$

$$ {}_{1}{}^{2}{}_{3}{}_{4}{}^{5} \to {}_{1}{}^{2} \oplus {}_{1}{}^{2}{}_{2}{}^{3}{}_{3}{}_{4}{}^{5} \to {}_{1}{}^{2}{}_{2}{}^{3}. $$

On a donc $V_8^* = {}_{1}{}^{2}{}_{3}{}_{4}{}^{5}$ et le module de la figure 3.4.

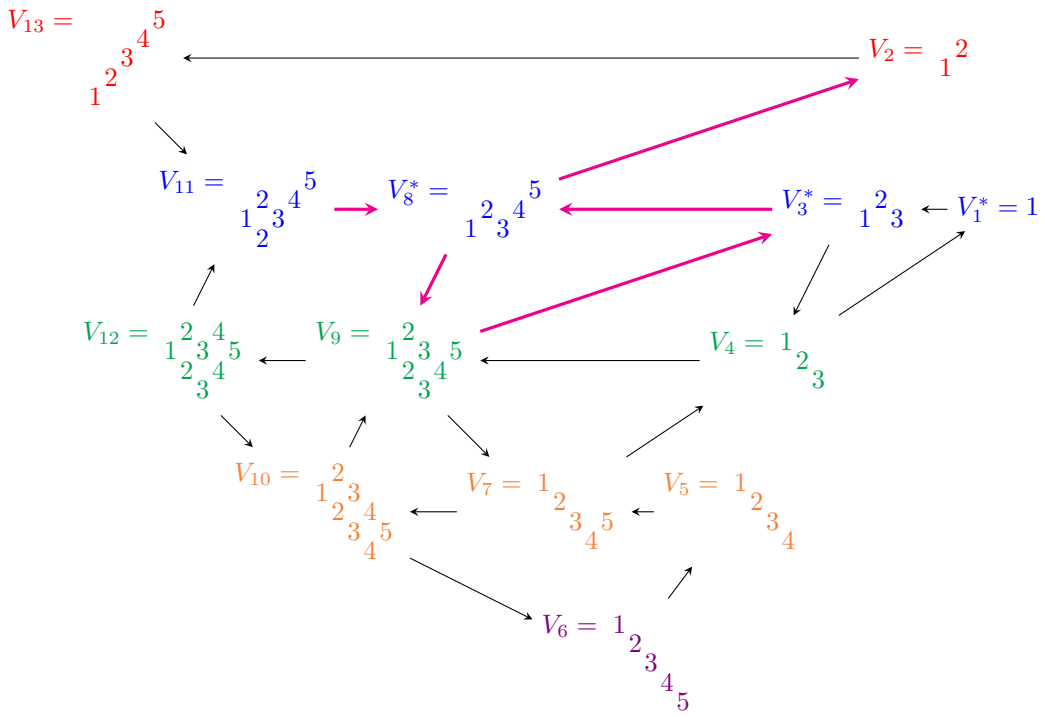


FIGURE 3.4 – Module $\widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On renomme les facteurs indécomposables du module en conservant leurs indices :

$$V_1^* \rightsquigarrow R_{1,1},\ V_3^* \rightsquigarrow R_{3,1},\ V_8^* \rightsquigarrow R_{8,1},\ V_k \rightsquigarrow R_{k,1},\ k \notin \{1,3,8\}.$$

On va maintenant appliquer $\widetilde{\mu}_2 = \mu_2$ à $\widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$, on obtient la figure 3.5.

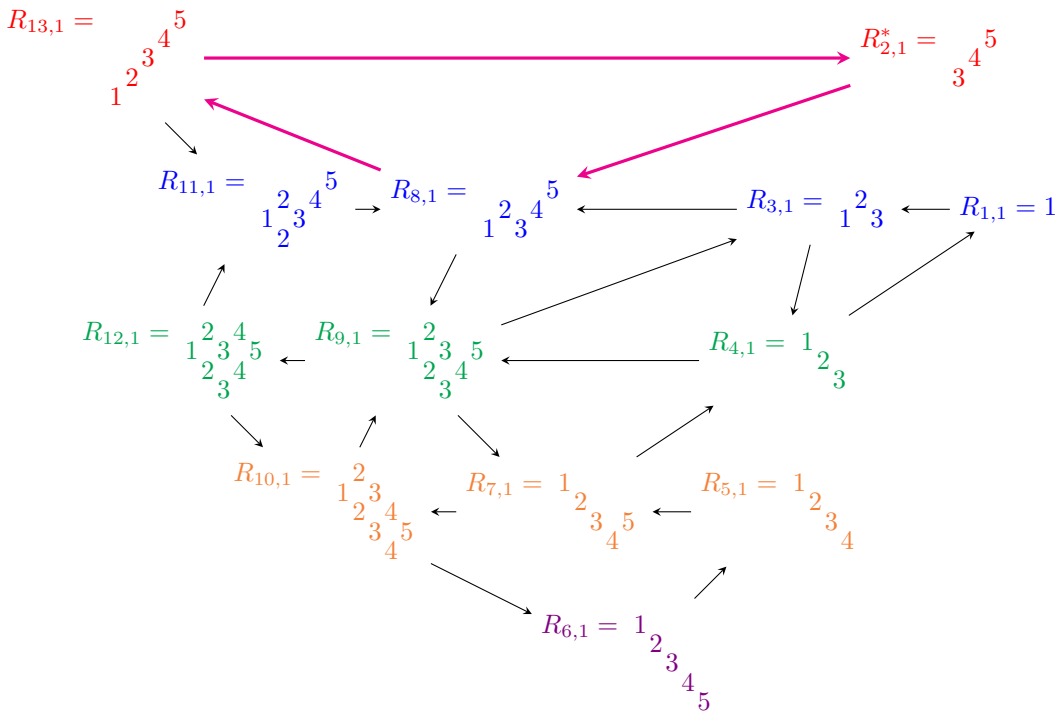


FIGURE 3.5 – Module $\widetilde{\mu}_2 \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

À nouveau on renomme les facteurs indécomposables $R^*_{2,1} \rightsquigarrow R_{2,2}$ et $R_{k,1} \rightsquigarrow R_{k,2}$ pour $k \neq 2$.
On applique maintenant la suite de mutations $\widetilde{\mu}_3 = \mu_9 \circ \mu_4$ et on obtient le module de la figure 3.6.

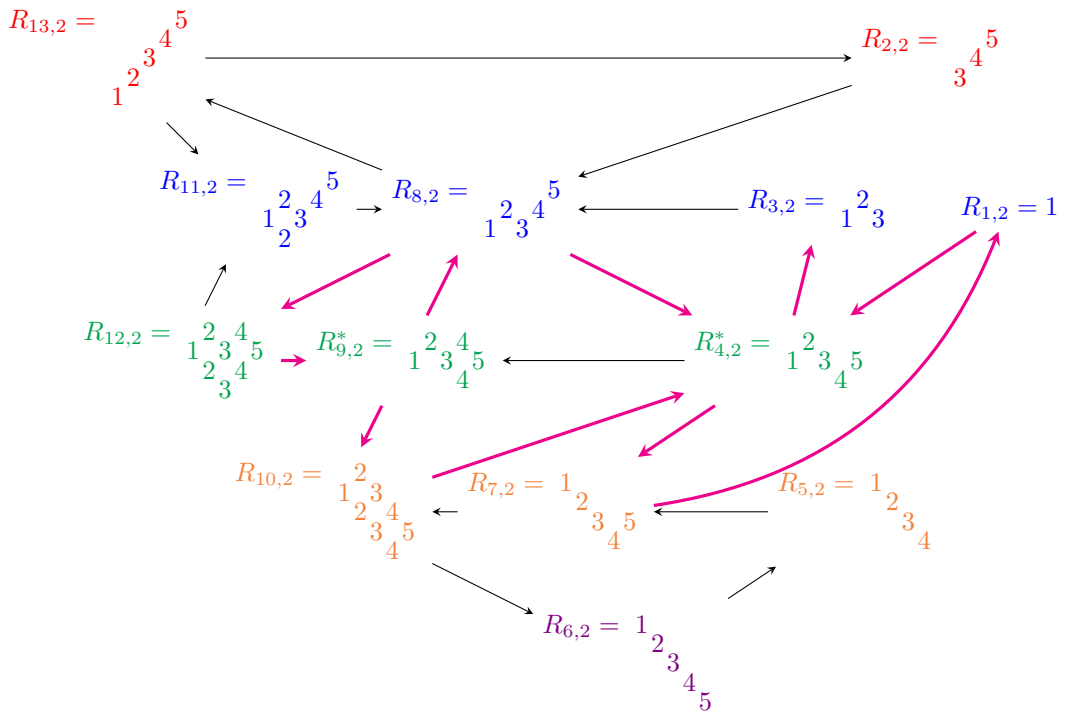


FIGURE 3.6 – Module $\widetilde{\mu}_4 \circ \widetilde{\mu}_3 \circ \widetilde{\mu}_2 \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}}) = \widetilde{\mu}_3 \circ \widetilde{\mu}_2 \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On renomme les modules indécomposables $R^*_{4,2} \rightsquigarrow R_{4,3}$, $R^*_{9,2} \rightsquigarrow R_{9,3}$ et $R_{k,2} \rightsquigarrow R_{k,3}$.
Comme on a $\widetilde{\mu}_4 = id$, on conserve le module, on renomme $R_{k,3} \rightsquigarrow R_{k,4}$.
On applique la suite de mutations $\widetilde{\mu}_5 = \mu_7$ et on obtient le module de la figure 3.7.

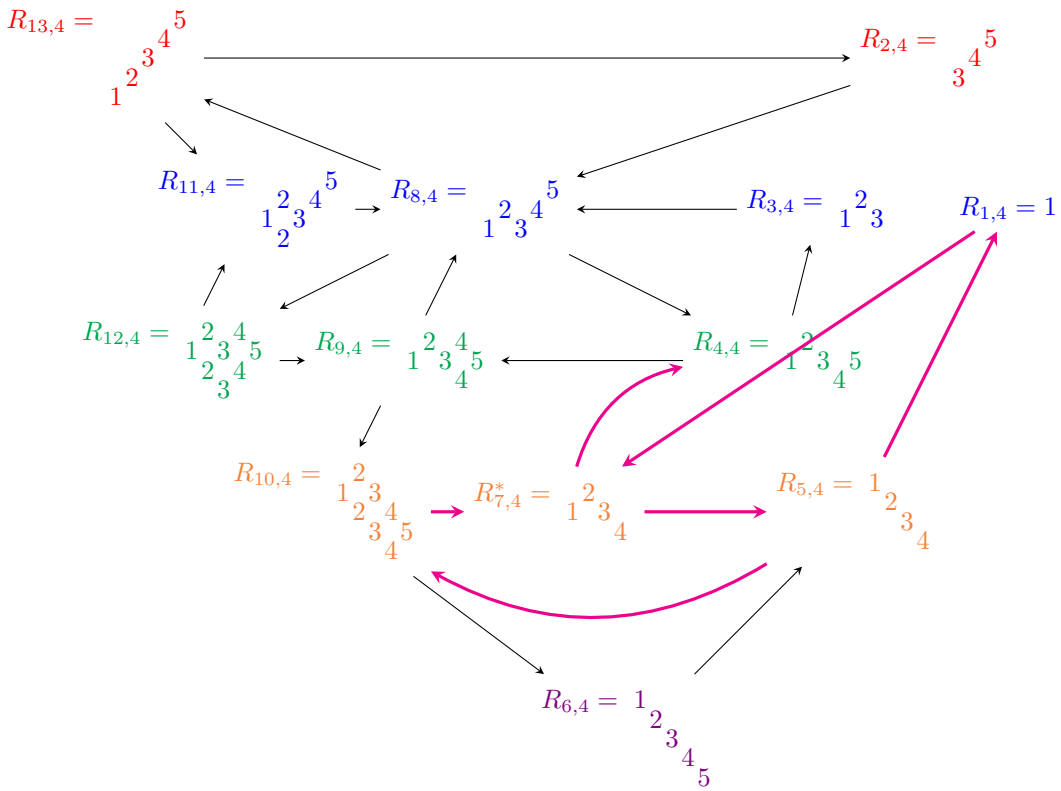


FIGURE 3.7 – Module $\widetilde{\mu}_5 \circ \widetilde{\mu}_4 \circ \widetilde{\mu}_3 \circ \widetilde{\mu}_2 \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On renomme les facteurs indécomposables $R^*_{7,4} = R_{7,5}$ et $R_{k,4} = R_{k,5}$ et $k \neq 7$.
On applique $\widetilde{\mu}_6 = \mu_3$. On a le module de la figure 3.8.

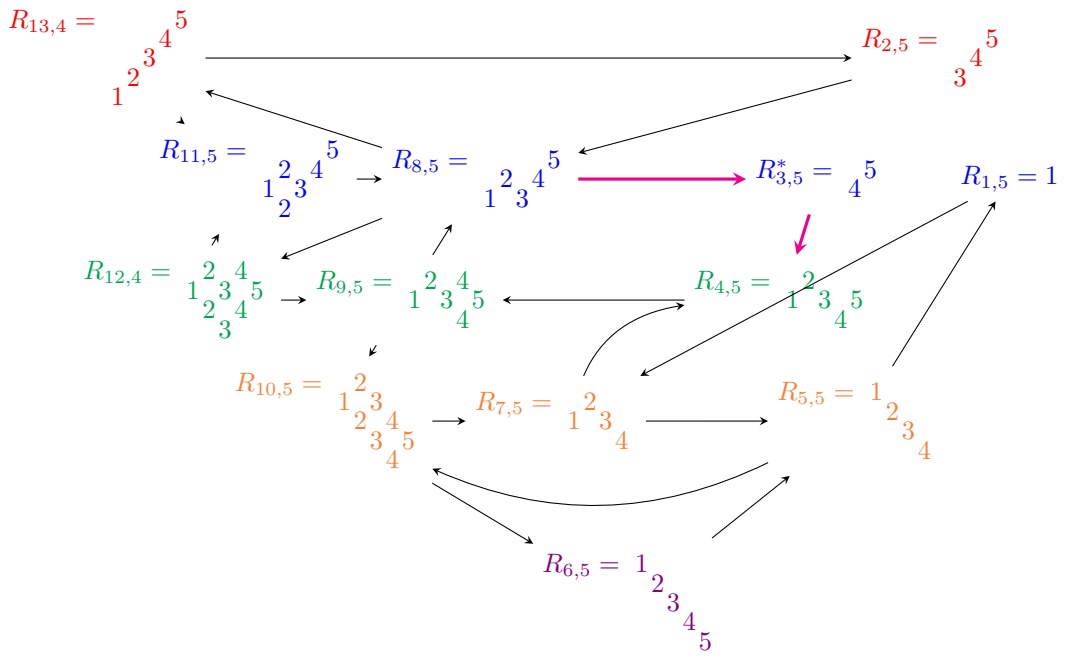


FIGURE 3.8 – Module $\widetilde{\mu}_6 \circ \widetilde{\mu}_5 \circ \widetilde{\mu}_4 \circ \widetilde{\mu}_3 \circ \widetilde{\mu}_2 \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On renomme les modules $R^*_{3,5} \rightsquigarrow R_{3,6}$ et $R_{k,5} \rightsquigarrow R_{k,6}$ pour $k \neq 3$.

Afin d'obtenir $\mu^\bullet$, on calcule les indices $(k_{\max})^{\alpha(k,\ell(v))-}$ pour les k de chaque couleur. Pour la couleur 1, on regarde $(2_{\max})^{\alpha(2,6)-} = 13^- = 2$. Pour la couleur 2, on regarde $(1_{\max})^{\alpha(1,6)-} = 11^{2-} = 3$. Pour la couleur 3, on regarde $(4_{\max})^{\alpha(4,6)-} = 12^- = 9$. Pour la couleur 4, on regarde $(5_{\max})^{\alpha(5,6)-} = 10^- = 7$. Pour la couleur 5, on regarde $(6_{\max})^{\alpha(6,6)-} = 6^{1-} = 0$.

Ainsi $\mu^\bullet$ retire les modules indécomposables d'indice $13, 8, 11, 12, 10, 6$ et on obtient le module de la figure 3.9.

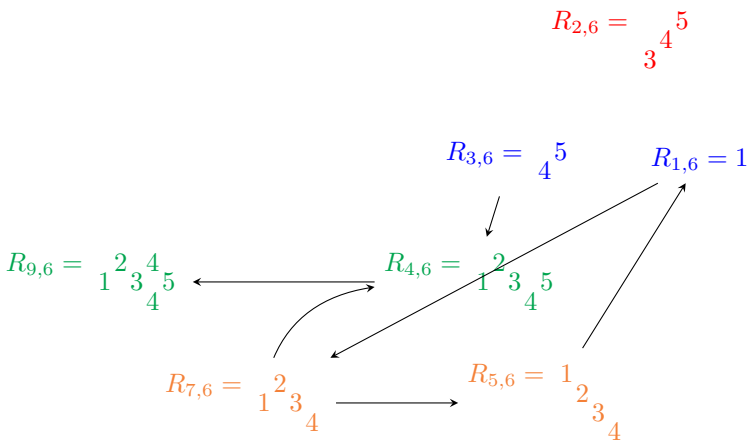


FIGURE 3.9 – Module $\mu^\bullet(V_{\overline{w}})$

Ainsi, par le théorème 3.1.12 on a que $\mu^\bullet(V_{\overline{w}})$ est un module rigide basique maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$, dont le carquois est représenté à la figure 3.9.

La preuve de ce théorème sera l'objet du reste du document. Cependant pour cela on prouvera en fait un autre algorithme qu'on introduit dans la section suivante, puis on établira l'équivalence entre les deux définitions.

3.2 Deuxième algorithme de mutation

On définit préalablement des quantités combinatoires.

3.2.1 Définitions préalables

Soit v, w deux éléments de W, et deux représentants $\overline{v}$ et $\overline{w}$ comme dans la section précédente. Soit $1 \leq m \leq \ell = \ell(v)$. On rappelle que, comme indiqué à la notation 2.1.14, $\dot{v}$ est la complétion à gauche de $\overline{v}$ en un représentant réduit de w_0.

Définition 3.2.1 (Ensemble d'indices $A_m(R)$)**.** Soit R un module rigide maximal de $\mathcal{C}_w$ admettant une décomposition en facteurs directs indécomposables $R = \bigoplus_{i=1}^{\ell(w)} R_i$ dans un ordre fixé. À chaque facteur direct R_i, $1 \leq i \leq \ell(w)$, on associe son $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur $\Delta_{\dot{v}}(R_i)$. On pose $b_m = ((p_m)_{\max})^{\alpha(p_m,m)-}$.

On définit :

$$A_m(R) = \{1 \leq i \leq b_m \mid \Delta_{\dot{v},m}(R_i) \neq 0\}$$

où $\Delta_{\dot{v},m}$ désigne la $m$ème coordonnée du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur.

On ordonne les éléments de $A_m(R)$ par ordre croissant et on note $(A_m(R))_1$ le plus petit des éléments de $A_m(M)$, $(A_m(R))_i$ le $i$ème plus petit et $(A_m(R))_{\max}$ le plus grand.

3.2.2 Définition du deuxième algorithme

On a une description analogue de l'algorithme en termes d'une suite de suites de mutations $(\widehat{\mu}_m)_{1\leq m\leq \ell}$. Les sommets à muter dans $\widehat{\mu}_m$ sont définis en fonction de leurs $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs.

Définition 3.2.2 (Suite de mutations $\hat{\mu}_m$)**.** Soit R un module rigide maximal basique de la catégorie $\mathcal{C}_w$ admettant une décomposition $R = \bigoplus_{i=1}^{\ell(w)} R_i$ où les facteurs sont deux à deux distincts. On détermine l'ensemble des indices $A_m(R) = A_m$ comme à la définition 3.2.1. Alors on définit $\hat{\mu}_m$ comme la suite de mutations suivante :

$$\hat{\mu}_m := \begin{cases} \mu_{A_{m,\max}} \circ \mu_{A_{m,\max-1}} \circ \cdots \circ \mu_{A_{m,1}} & \text{si } A_m(R) \neq \varnothing, \\ id & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mu_k(R)$ désigne la mutation de R dans la direction k.

Autrement dit, on mute les modules ayant un $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur de $m$ème coordonnée non-nulle dans l'ordre croissant de leurs indices en n'allant pas plus loin qu'une certaine borne. Comme dans le premier algorithme, (où on le faisait via la quantité γ qui augmente) on mute un sommet de moins, via b_m, à chaque suite de mutations sur une ligne d'une couleur donnée.

Notation 3.2.3. Comme à la notation 3.1.10, on posera $R_{i,0} = V_i$ pour tout facteur V_i de $V_{\overline{w}}$ et $1 \leq i \leq \ell(w)$ et $R_{i,j} = \hat{\mu}_j(R_{i,j-1})$ pour $1 \leq i \leq \ell(w)$ et $1 \leq j \leq \ell(v)$.

On justifiera cet abus de notation par la proposition 5.1.1 où l'on montrera que les deux définitions de nos algorithmes de mutations sont en fait équivalentes.

Définition 3.2.4. On définit la suite d'applications suivantes :

$$\mu_\bullet(V_{\overline{w}}) = S(\hat{\mu}_\ell \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$$

où, comme précédemment, S correspond à la suppression des facteurs directs $R_{k,\ell(v)}$ tels que

$$k > (k_{\max})^{\alpha(k,\ell(v))-}.$$

Remarque 3.2.5. *Dans cet algorithme on ne sait quels sommets seront mutés par $\hat{\mu}_m$ qu'après avoir effectué $\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ et en regardant les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules mutés.*

Théorème 3.2.6. *$\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est un module rigide maximal basique de $\mathcal{C}_{v,w}$. Le carquois de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est obtenu en retirant au carquois de $\widehat{\mu}_\ell \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ toutes les flèches adjacentes à un sommet supprimé par l'opération S et seulement celles-ci.*

Exemple 3.2.7. On reprend le cas de l'exemple 3.1.8. On rappelle qu'on est dans le cas où W est de type A_5 avec $\overline{w} = [1, 3, 2, 4, 3, \underline{2}, \underline{4}, \underline{5}, 4, \underline{3}, 2, \underline{1}, \underline{2}]$ et $v = s_2 s_4 s_5 s_3 s_1 s_2$.

On va devoir d'abord déterminer les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des facteurs directs indécomposables de $V_{\overline{w}}$.

On complète $\overline{v} = [2, 4, 5, 3, 1, 2]$ en $\dot{v} = [2, 3, 4, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 5, 3, 1, 2]$. On a alors les strates de la table 3.2.

k	1	2	3	4	5
$M_{k,\dot{v}}$	2	$\begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & \\ & 3 \end{smallmatrix}$	5	$\begin{smallmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 & 5 \end{smallmatrix}$
k	6	7	8	9	10
$M_{k,\dot{v}}$	$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix}$	3	$\begin{smallmatrix} & 2 & & \\ 1 & & 3 & \\ & & & 4 & 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & & \\ & 4 & 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & 4 & 5 \end{smallmatrix}$
k	11	12	13	14	15
$M_{k,\dot{v}}$	1	$\begin{smallmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 2 & & \\ 1 & & 3 & \\ & & & 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & & \\ & 4 & \end{smallmatrix}$	4

TABLE 3.2 – Strates définissant la $\Delta_{\dot{v}}$-stratification

Les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $(V_i)_{1\leq i\leq \ell(w)}$ (figure 3.1) sont alors ceux de la table 3.3. Afin d'éviter d'écrire des vecteurs de $\mathbb{N}^{15}$ dont la majorité des coordonnées seront nulles, on les écrit comme combinaisons linéaires des vecteurs $(f_i)_{1\leq i\leq 15}$ de la base canonique de $\mathbb{Z}^{15}$.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{\dot{v}}(V_k)$	f_1	f_2	f_1+f_{11}	f_3+f_{11}	f_{12}	f_4+f_{12}	f_5+f_{11}
k	8	9	10	11	12	13	
$\Delta_{\dot{v}}(V_k)$	f_1+f_6	f_3+f_8	$f_5+f_{11}+f_{13}$	$f_1+f_6+f_{10}$	$f_3+f_8+f_{15}$	$f_2+f_7+f_{10}$	

TABLE 3.3 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $V_{\overline{w}}$

On va déterminer la suite de mutations $\widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$. On détermine l'ensemble :

$$A_1(V_{\overline{w}}) = \{1 \leq i \leq 8 \mid \Delta_{\dot{v},1}(V_{\overline{w}}) \neq 0\} = \{1,3,8\}.$$

On a donc $\widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}}) = \mu_8 \circ \mu_3 \circ \mu_1$.

On va appliquer la proposition 2.8.27 pour calculer les évolutions de $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs.

On reprend les équations 3.1 et 3.2 qui donnent :

$$\Delta_{\dot{v}}(V_1^*) \stackrel{?}{=} \Delta_{\dot{v}}(V_3) - \Delta_{\dot{v}}(V_1) = f_1 + f_{11} - f_1 = f_{11}$$

ou bien

$$\Delta_{\dot{v}}(V_1^*) \stackrel{?}{=} \Delta_{\dot{v}}(V_2) - \Delta_{\dot{v}}(V_1) = f_2 - f_1.$$

On remarque que seul le premier calcul est possible (un Δ-vecteur ne pouvant avoir des coordonnées strictement négatives, *cf.* remarque 2.8.28). On verra au corollaire 4.12.5 qu'en général, dans cet algorithme, une seule des deux suites exactes donne des coordonnées positives.

On calcule ensuite $\Delta_{\dot{v}}(V_3)$ en reprenant les équations 3.3 et 3.4.

$$\Delta_{\dot{v}}(V_3^*) = \Delta_{\dot{v}}(V_1^*) + \Delta_{\dot{v}}(V_8) - \Delta_{\dot{v}}(V_3) = f_{11} + f_1 + f_6 - f_1 - f_{11} = f_6$$
$$\Delta_{\dot{v}}(V_2) + \Delta_{\dot{v}}(V_4) - \Delta_{\dot{v}}(V_3) = f_2 + f_3 + f_{11} - f_1 - f_{11} = -f_1 + f_2 + f_3$$

De même on obtient $\Delta_{\dot{v}}(V_8^*)$ par le calcul suivant :

$$\Delta_{\dot{v}}(V_8^*) = \Delta_{\dot{v}}(V_3^*) + \Delta_{\dot{v}}(V_{11}) - \Delta_{\dot{v}}(V_8) = f_6 + f_1 + f_6 + f_{10} - f_1 - f_6 = f_6 + f_{10}.$$

On a donc comme table de $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs pour $\widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ la table 3.4.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,1})$	f_{11}	f_2	f_6	f_3+f_{11}	f_{12}	f_4+f_{12}	f_5+f_{11}
k	8	9	10	11	12	13	
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,1})$	f_6+f_{10}	f_3+f_8	$f_5+f_{11}+f_{13}$	$f_1+f_6+f_{10}$	$f_3+f_8+f_{15}$	$f_2+f_7+f_{10}$	

TABLE 3.4 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $\widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

Comme on a la même suite de mutations $\widehat{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_1$ qu'à l'exemple 3.1.2, on a le même module $\widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}}) = \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$. On note $R_1 = \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$, représenté à la figure 3.4. On détermine maintenant $A_2(\widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$ et $\widehat{\mu}_2$.

On a

$$A_2(R_1) = \{1 \leq i \leq 2 \mid \Delta_{\dot{v},2}(R_{i,1})\} = \{2\}$$

et donc

$$\widehat{\mu}_2 = \mu_2 = \widetilde{\mu}_2.$$

Suite à cette mutation, on obtient le module $R_2 = \widehat{\mu}_2 \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}}) = \widetilde{\mu}_2 \circ \widetilde{\mu}_1(V_{\overline{w}})$, représenté à la figure 3.5. Les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des facteurs directs sont ceux de la table 3.5.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,2})$	f_{11}	f_7+f_{10}	f_6	f_3+f_{11}	f_{12}	f_4+f_{12}	f_5+f_{11}
k	8	9	10	11	12	13	
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,2})$	f_6+f_{10}	f_3+f_8	$f_5+f_{11}+f_{13}$	$f_1+f_6+f_{10}$	$f_3+f_8+f_{15}$	$f_2+f_7+f_{10}$	

TABLE 3.5 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $\widehat{\mu}_2 \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On détermine maintenant :

$$A_3(R_2) = \{1 \leq i \leq 9 \mid \Delta_{\dot{v},3}(R_{i,3}) \neq 0\} = \{4, 9\}$$

et on a donc alors $\widehat{\mu}_3 = \mu_9 \circ \mu_4$ et on a à nouveau $\widehat{\mu}_3 = \widetilde{\mu}_3$.

On obtient donc le module R_3 représenté à la figure 3.6 et on a les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de la table 3.6.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,3})$	f_{11}	f_7+f_{10}	f_6	f_8	f_{12}	f_4+f_{12}	f_5+f_{11}
k	8	9	10	11	12	13	
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,3})$	f_6+f_{10}	f_8+f_{15}	$f_5+f_{11}+f_{13}$	$f_1+f_6+f_{10}$	$f_3+f_8+f_{15}$	$f_2+f_7+f_{10}$	

TABLE 3.6 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $\widehat{\mu}_3 \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On détermine maintenant

$$A_4(R_3) = \{1 \leq i \leq 0 | \Delta_{\dot{v},4}(R_{i,3}) \neq 0\} = \varnothing$$

et on a donc $\widehat{\mu}_4 = id = \widetilde{\mu}_4$.

On pose donc $R_4 = R_3$ et on détermine

$$A_5(R_4) = \{1 \leq i \leq 7 | \Delta_{\dot{v},5}(R_{i,4}) \neq 0\} = \{7\}.$$

On a $\widehat{\mu}_5 = \mu_7 = \widetilde{\mu}_5$ et donc on a $R_5 = \widehat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ qui est le module représenté à la figure 3.7 et dont les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs sont ceux de la table 3.7.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,5})$	f_{11}	$f_7 + f_{10}$	f_6	f_8	f_{12}	$f_4 + f_{12}$	$f_{11} + f_{13}$
k	8	9	10	11	12	13	
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,5})$	$f_6 + f_{10}$	$f_8 + f_{15}$	$f_5 + f_{11} + f_{13}$	$f_1 + f_6 + f_{10}$	$f_3 + f_8 + f_{15}$	$f_2 + f_7 + f_{10}$	

TABLE 3.7 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $\widehat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On détermine

$$A_6 = \{1 \leq i \leq 3 | \Delta_{\dot{v},6}(R_5) \neq 0\} = \{3\}$$

et donc on a $\widehat{\mu}_6 = \mu_3 = \widetilde{\mu}_6$.

Ce qui nous donne alors $\widehat{\mu}_6 \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ qui est représenté à la figure 3.8 et dont les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs sont indiqués à la table 3.8.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,6})$	f_{11}	$f_7 + f_{10}$	f_{10}	f_8	f_{12}	$f_4 + f_{12}$	$f_{11} + f_{13}$
k	8	9	10	11	12	13	
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,6})$	$f_6 + f_{10}$	$f_8 + f_{15}$	$f_5 + f_{11} + f_{13}$	$f_1 + f_6 + f_{10}$	$f_3 + f_8 + f_{15}$	$f_2 + f_7 + f_{10}$	

TABLE 3.8 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $\widehat{\mu}_6 \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$

On retire ensuite les facteurs indécomposables comme dans l'exemple 3.1.8 et on obtient le module représenté à la figure 3.9 dont les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs sont indiqués à la table 3.9.

k	1	2	3	4	5	7	9
$\Delta_{\dot{v}}(R_{k,6})$	f_{11}	$f_7 + f_{10}$	f_{10}	f_8	f_{12}	$f_{11} + f_{13}$	$f_8 + f_{15}$

TABLE 3.9 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$

Comme chaque facteur de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ a un $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur dont toutes les coordonnées d'indice inférieur ou égal à 6 sont nulles, on a bien $\mu_\bullet(V_{\overline{w}}) \in \mathcal{C}^v$.

CHAPITRE 4

Preuve du théorème

Dans tout ce chapitre on fixe $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \ldots, i_1]$ un mot réduit pour $w \in W$, on choisit $v \leq w$ et on note $\overline{v} = [i_{p_\ell}, \ldots, i_{p_1}]$ le représentant de v le plus à droite dans $\overline{w}$ (*cf.* section 2.1.4). On note $\dot{v}$ la complétion à gauche de $\overline{v}$ en un représentant de w_0 (*cf.* notation 2.1.14). On note $V_{\overline{w}}$ le module rigide maximal de $\mathcal{C}_w$ associé à $\overline{w}$ défini à la définition 2.6.20.

4.1 Idées de la preuve

Comme on l'a vu, l'algorithme du chapitre 3 ressemble à la suite de mutations décrite dans [GLS11]. Cependant il est plus complexe.

La première différence est que la suite de mutations $\tilde{\mu}_m$ (ou $\hat{\mu}_m$) ne commence pas toujours au début de la ligne du carquois de couleur i_{p_m}. Pour décrire exactement le point de départ des mutations sur cette ligne, nous utilisons les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules correspondant à chaque sommet. En fait seules les $\ell(v)$ premières coordonnées de ces vecteurs sont utilisées (cf. section 3.2). Pour pouvoir amorcer l'algorithme, nous devons donc commencer par calculer les $\ell(v)$ premières coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des facteurs directs indécomposables du module rigide initial $V_{\overline{w}}$. C'est l'objet de la section 4.3, qui s'appuie sur les résultats rappelés à la section 2.9.

La deuxième différence est plus substantielle. Le point clé de la démonstration de [GLS11] est que, à chaque mutation, la configuration des flèches du carquois incidente au sommet muté est toujours la même : les flèches sortant du sommet muté sont toujours des flèches horizontales, et les flèches entrant dans le sommet muté sont toujours des flèches obliques issues de sommets appartenant à des lignes de couleurs adjacentes à i_{p_m}. Cela permet un contrôle simple des suites exactes courtes associées à chaque mutation, qui donnent par projection via le caractère d'amas des identités déterminantales déjà démontrées par Fomin et Zelevinsky.

Dans l'algorithme du chapitre 3, la situation n'est plus aussi régulière. Par exemple, il peut y avoir des flèches entre le sommet muté et des lignes de couleur non adjacente à i_{p_m}. Pour pouvoir néanmoins contrôler l'algorithme, et vérifier qu'à chaque étape les $\ell(v)$ premières coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs se modifient de manière régulière, on est amené à considérer seulement une partie de la graine en mutation, qu'on appellera *graine coupée*. Il s'agit de la graine obtenue en retirant tous les facteurs directs indécomposables dont les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs ont déjà toutes leurs $\ell(v)$ premières coordonnées égales à 0. En d'autres termes, on retire tous les facteurs indécomposables qui appartiennent déjà à la sous-catégorie $\mathcal{C}^v$. Le carquois de la graine coupée est par définition le sous-carquois plein obtenu en retirant les sommets correspondant aux facteurs indécomposables qu'on a retirés. Le point crucial de la preuve est alors que le carquois de la graine coupée a une structure plus simple que l'on peut contrôler par mutation. En particulier dans ce carquois coupé, les flèches sortant du sommet muté sont toujours des flèches horizontales, et les flèches entrant dans le sommet muté sont toujours des flèches obliques issues de sommets appartenant à des lignes de couleurs adjacentes à i_{p_m}. Ceci est énoncé plus précisément dans le théorème structurel 4.6.1, et la preuve de ce théorème occupe la plus grande partie de ce chapitre.

4.2 Définitions

Définition 4.2.1 (Δ-vecteur raccourci d'un module de $\mathcal{C}_w$)**.** Dans le chapitre 4, on ne considérera souvent que les $\ell(v)$ premières coordonnées du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur d'un module. On désignera ce Δ-vecteur raccourci par :

$$\widetilde{\Delta}_{\dot{v}} = (\Delta_{\dot{v},k})_{k=1}^{\ell(v)}.$$

Définition 4.2.2. On rappelle les notations introduites à la définition 2.1.20 et à la notation 2.1.14. On appelle k^+ le plus petit indice strictement supérieur à k de même couleur dans $\overline{w}$. S'il n'existe pas, on pose $k^+ = \ell(w) + 1$. De même on définit k^- le plus grand indice strictement inférieur à k de même couleur dans $\overline{w}$. S'il n'existe pas, on pose $k^- = 0$.

On a défini $\alpha(k, m)$ à la définition 3.1.3 comme le nombre d'indices inférieurs à i_{p_m} parmi ceux de $\overline{v}$ qui sont de la couleur de i_k.

On introduit trois nouvelles notations :

Soit $1 \leq m \leq \ell(v)$, $m^{\oplus}$ est l'indice d'une lettre de $\overline{v}$ strictement supérieur à p_m de couleur i_{p_m}. S'il n'existe pas, on note $m^{\oplus} = \ell + 1$

Sous les mêmes hypothèses, $f(k)$ est l'indice du plus grand élément de $\overline{v}$ inférieur ou égal à k, de couleur i_k. $f_{\min}(k)$ est l'indice du plus petit élément de $\overline{v}$ de couleur i_k. Si un tel indice n'existe pas, $f_{\min}(k) = 0$. Si $k = r + 1$, on pose $f(k) = \ell(v) + 1$.

Autrement dit :

$$m^{\oplus} := \min(\{1 \leq j \leq \ell(v) \mid p_j > p_m \text{ et } i_{p_j} = i_{p_m}\}, \ell + 1),$$

$$f(k) := \begin{cases} \max\{1 \leq j \leq \ell(v) \mid p_j \leq k \text{ et } i_{p_j} = i_k\} & \text{si l'ensemble est non vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$f_{\min}(k) := \begin{cases} \min\{1 \leq j \leq \ell(v) \mid i_{p_j} = i_k\} & \text{si l'ensemble est non vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque 4.2.3. *Si $k = p_n$, $f(k) = n$ et de manière générale, on a $f(p_n) = n$ mais $p_{f(k)} \leq k$.*

Dans le cas d'une lettre de $\overline{v}$, f permet de passer de son indice dans $\overline{w}$ à son indice dans $\overline{v}$, si l'indice k n'est pas celui d'une lettre de $\overline{v}$ (donc on n'a aucun n tel que $p_n = k$), $f(k)$ indique l'indice dans $\overline{v}$ de la lettre de couleur i_k la plus proche à droite.

Exemple 4.2.4. Soit W de type D_5 (on rappelle que le diagramme de Dynkin général est à la proposition 2.1.10) et $\overline{w} = [4, 3, 2, 5, 3, \underline{1, 2, 4, 3, 1}, 4, \underline{2, 5, 3, 4, 2, 1, 2, 3}, 2]$ et $\overline{v} = [1, 2, 4, 3, 1, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 2, 3]$. On a donc comme indices pour les lettres de $\overline{v}$:

$$[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15].$$

On a $2^+ = 7$ car la deuxième lettre de $\overline{w}$, i_2, est un 3 et le 3 suivant dans $\overline{w}$ est à la position 7.

On a $f(1) = 0$ car la première lettre de $\overline{w}$ n'est pas dans $\overline{v}$ et on n'en a aucune de même couleur (ici 1) d'indice inférieur dans $\overline{v}$. A contrario, $f(9) = 8$ car dans $\overline{v}$, i_9 est le huitième lettre (i_{p_8}) de $\overline{v}$. On a $f(10) = 5$ car si la dixième lettre de $\overline{w}$ qui est un $4 = i_{10}$, n'est pas dans $\overline{v}$; le cinquième élément de $\overline{v}$ qui correspond à la sixième lettre de $\overline{w}$ est aussi un 4 : $p_5 = 6$ et $i_6 = i_{p_5} = 4$, le plus grand de ceux d'indice inférieur à 10 dans $\overline{v}$.

On a $f_{\min}(17) = 7$ car le premier indice dans $\overline{v}$ d'une lettre valant $5 = i_{17}$ est le septième, $i_{p_7} = i_{17} = 5$.

On a $\alpha(9, 10) = 3$ car dans la partie droite de $\overline{w}$ allant jusqu'à l'indice égal au dixième élément de $\overline{v}$, autrement dit $p_{10} = 12$, on a 3 lettres égales à $2 = i_9$ faisant partie de $\overline{v}$ (3,5 et 9).

Définition 4.2.5 (Graine coupée)**.** Soit $0 \leq m \leq \ell$. On note $R_m = \hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}) = \bigoplus_{i=1}^{\ell(w)} R_{i,m}$ où les $R_{i,m}$ sont indécomposables et les $\hat{\mu}_i$ forment la suite de mutations définie à la définition 3.2.2. On appelle **graine coupée** le module $G_m = C(R_m)$ obtenu à partir de R_m en retirant :

- les facteurs directs $R_{i,m}$ tels que $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(R_{i,m}) = 0$, qu'on appellera les **sommets/modules évincés**,
- les facteurs directs $R_{i,m}$ tels que $i > (i_{\max})^{\alpha(k,m)-}$.

On note $G_{i,m} = R_{i,m}$ si $R_{i,m} \in G_m$.

Quand on parlera du carquois de la graine coupée G_m, on parlera du carquois de R_m dont on a retiré les sommets ci-dessus et les arêtes adjacentes à ces sommets.

On appelle $R_{k_{\text{mini}}}$ le sommet de couleur i_k d'indice minimum parmi les sommets de R. De même, on appelle $R_{k_{\text{maxi}}}$ le sommet de couleur i_k d'indice maximum parmi les sommets de R.

On étend cette notation aux modules de la graine coupée G de V, en prenant minimum et maximum parmi les sommets de G.

En vertu de cette indexation des facteurs directs, on dira que le module $R_{j,m}$ est de couleur i_j.

Remarque 4.2.6. *On remarque par la proposition 2.10.3 que les modules $R_{i,m}$ évincés sont les facteurs directs de R_m appartenant à $\mathcal{C}_{v,w}$.*

Définition 4.2.7 (Sous-carquois bicolore)**.** Soit $1 \leq m \leq \ell$ et $1 \leq j, k \leq \ell(w)$ tels que $i_k \neq i_j$. On appellera **sous-carquois bicolore relatif aux couleurs** (i_k, i_j) le sous-carquois du carquois de R_m formé :

- des sommets correspondants aux indices de couleur i_k et i_j,
- des flèches entre deux sommets de couleur i_k,
- des flèches entre des sommets de couleurs i_k et i_j.

Remarque 4.2.8. *Ici les deux couleurs jouent un rôle dissymétrique. En particulier on ne représente pas les flèches entre deux sommets de couleur i_j.*

Définition 4.2.9 (Dent de scie)**.** Soit Γ un sous-carquois bicolore relatif aux couleurs (i_k, i_j). On appelle **dent de scie** de Γ, un cycle de Γ formé des éléments suivants :

1. une flèche d'origine un sommet de couleur i_k, disons R_k et de but un sommet de couleur i_j, disons R_j,
2. une flèche d'origine R_j et de but un sommet de couleur i_k d'indice inférieur à k, disons $R_{k^{\alpha-}}$ pour un $\alpha > 0$,
3. une suite de flèches entre sommets de couleur i_k : $R_{k^{\alpha-}} \to R_{k^{(\alpha-1)-}} \to \cdots \to R_{k^-} \to R_k$.

On dit alors que $R_{k^{\alpha-}}$ est l'**extrémité droite** de la dent de scie, R_k son **extrémité gauche** et R_j son **sommet**.

On appelle **suite de dents de scie successives** une collection de n dents de scies qu'on peut ordonner de façon à ce que l'extrémité gauche de la dent m soit l'extrémité droite de la dent $m+1$ pour tout $1 \leq m \leq n-1$. On appelle **extrémité droite de la suite** l'extrémité droite de la dent 1 et **extrémité gauche de la suite** l'extrémité gauche de la dent n.

Exemple 4.2.10. On va considérer le carquois de la figure 4.1

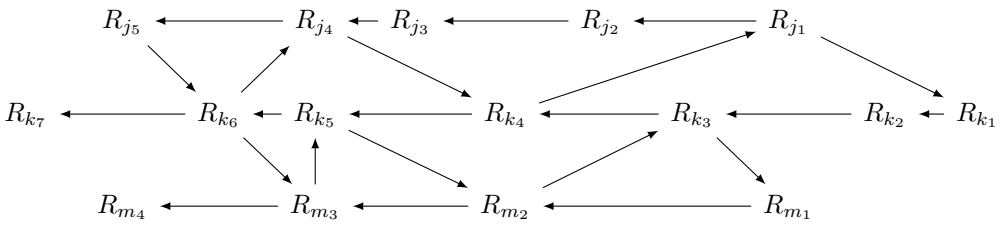


FIGURE 4.1 – Exemple de carquois

où on a $j_5 > j_4 > j_3 > j_2 > j_1$ cinq sommets de même couleur (qu'on appellera i_j), $k_7 > k_6 > \cdots > k_1$ sept sommets de même couleur i_k et $m_4 > m_3 > m_2 > m_1$ quatre sommets de même couleur i_m. Les couleurs i_j et i_k sont adjacentes tout comme les couleurs i_k et i_m mais pas les couleurs i_j et i_m.

La figure 4.2 représente le sous-carquois bicolore par rapport aux couleurs (i_j, i_k), à la figure 4.3 celui par rapport aux couleurs (i_k, i_j) (observer que les deux sont différents) et à la figure 4.4 celui par rapport aux couleurs (i_k, i_m). A chaque fois on représentera en gras les flèches entre deux sommets de la première couleur.

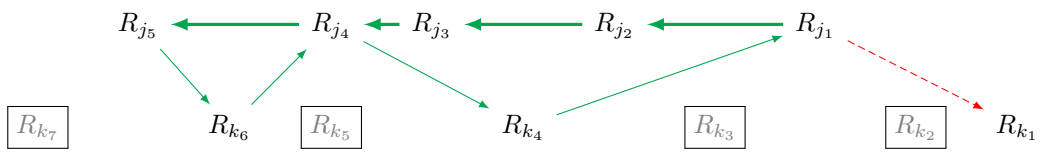


FIGURE 4.2 – Sous-carquois bicolore $(\mathbf{i_j}, i_k)$

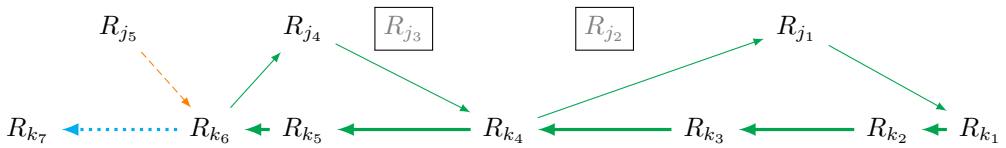


FIGURE 4.3 – Sous-carquois bicolore $(\mathbf{i_k}, i_j)$

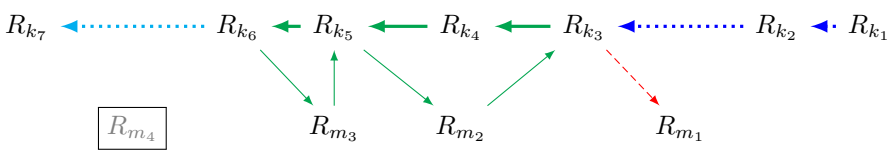


FIGURE 4.4 – Sous-carquois bicolore $(\mathbf{i_k}, i_m)$ découpé en sous-carquois

Définition 4.2.11 (Carquois en dents de scie)**.** Soit Γ le sous-carquois relatif aux couleurs (i_k, i_j). On dit que Γ a une **configuration en dents de scie** si on peut le découper en les 6 sous-carquois (un sommet pouvant appartenir à plusieurs carquois) suivants :

1. une suite de α sommets reliés par des flèches consécutives
$$R_{(k_{\text{mini}})^{\alpha+}} \leftarrow R_{(k_{\text{mini}})^{(\alpha-1)+}} \leftarrow \cdots \leftarrow R_{(k_{\text{mini}})^{+}} \leftarrow R_{k_{\text{mini}}},\ \alpha \geq 0,$$
2. une ou aucune flèche $R_{(k_{\text{mini}})^{\alpha+}} \to R_j$ où R_j est un sommet de couleur i_j. Si cette flèche existe, on l'appelle **barbe initiale**,
3. une suite de n dents de scie successives d'extrémité droite $R_{(k_{\text{mini}})^{\alpha+}}$ et d'extrémité gauche $R_{(k_{\text{maxi}})^{\beta-}}$ où $\beta \geq 0$,
4. une ou aucune flèche $R_{j'} \to R_{(k_{\text{maxi}})^{\beta-}}$ où $R_{j'}$ est un sommet de couleur i_j, si cette flèche existe, on l'appelle **barbe finale**,
5. une suite de β sommets reliés par des flèches consécutives
$$R_{k_{\text{maxi}}} \leftarrow R_{(k_{\text{maxi}})^{-}} \leftarrow \cdots \leftarrow R_{(k_{\text{maxi}})^{(\beta-1)-}} \leftarrow R_{(k_{\text{maxi}})^{\beta-}},$$
6. une collection de sommets de couleur i_j n'étant but ou source d'aucune flèche.

On dit que le carquois a une **configuration en dents de scie pure** s'il ne possède pas de barbe initiale.

Exemple 4.2.12. On a illustré dans les figures 4.4, 4.2, 4.3 les sous-carquois de la définition 4.2.11. On représente en pointillés bleus la suite de flèches initiales et en pointillés cyans la suite finale, en traits normaux verts la suite de dents de scie, en tirets rouges la barbe initiale, en tirets orange la barbe finale, enfin on encadre en gris les sommets isolés.

Pour avoir un exemple de barbe finale, on a $R_{j_5} \to R_{k_6}$ dans la figure 4.3.

On a sur les figures 4.2 et 4.4 une configuration en dents de scie non-pure, alors que la figure 4.3 a une configuration en dents de scie pure.

Proposition 4.2.13. *Si un sous-carquois bicolore (i_k, i_j) a une structure en dents de scie, cette structure est conservée en retirant des sommets consécutifs de même couleur parmi les indices minimaux.*

Remarque 4.2.14. *En revanche ce n'est pas forcément le cas pour la structure en dents de scie pures, dès lors qu'on retire un sommet de la ligne de couleur i_k.*

Démonstration. On prouve que c'est le cas en retirant $R_{j_{\text{mini}}}$ et $R_{k_{\text{mini}}}$ et on conclut par récurrence.

Si on retire $R_{j_{\text{mini}}}$ on a plusieurs cas :

1. $R_{j_{\text{mini}}}$ est un sommet isolé,
2. $R_{j_{\text{mini}}}$ est le but d'une barbe initiale,
3. $R_{j_{\text{mini}}}$ est le sommet de la première dent,
4. $R_{j_{\text{mini}}}$ est la source de la barbe finale.

Dans le premier cas, retirer $R_{j_{\text{mini}}}$ ne change pas la structure. Dans le deuxième cas, en retirant $R_{j_{\text{mini}}}$, on retire la barbe initiale $R_k \to R_{j_{\text{mini}}}$. Elle est alors suivie d'une suite de dents, d'une barbe finale ou d'une suite de sommets. La structure en dents de scie est préservée.

Dans le troisième cas, retirer $R_{j_{\text{mini}}}$ retire la première dent. Il n'y a pas de barbe initiale (sinon elle aurait pour but un sommet d'indice plus petit que j_{mini}, impossible par minimalité). La structure est préservée

Dans le quatrième cas, la barbe finale est en fait la seule flèche ordinaire du carquois, en la supprimant avec $R_{j_{\text{mini}}}$ tous les sommets de couleurs i_j sont maintenant des sommets isolés, et la ligne de couleur i_k est en suite consécutive de type 1. La structure est conservée.

Ainsi dans tous les cas, supprimer $R_{j_{\text{mini}}}$ ne perturbe pas la structure en dents de scie.

On va maintenant étudier l'effet d'une suppression de $R_{k_{\text{mini}}}$. Encore une fois on a plusieurs choix possibles :

1. $R_{k_{\text{mini}}}$ est le premier sommet d'une suite de sommets reliés par des flèches horizontales consécutives,

2. $R_{k_{\text{mini}}}$ est la source de la barbe initiale,

3. $R_{k_{\text{mini}}}$ est l'extrémité droite d'une dent,

4. $R_{k_{\text{mini}}}$ est le but d'une barbe finale.

Dans le premier cas, la suite est raccourcie d'un sommet (ou disparaît), la structure est préservée.

Dans le deuxième cas, la barbe disparaît et la ligne commence maintenant par une dent, une barbe finale ou une suite de flèches horizontales (précédemment la suite finale). La structure est préservée.

Dans le troisième cas, la dent $R_{(k_{\text{mini}})^{\alpha+}} \leftarrow R_j \leftarrow R_{k_{\text{mini}}}$ (où α est la longueur de la dent) devient une suite initiale de flèches horizontales : $R_{(k_{\text{mini}})^{\alpha+}} \leftarrow \cdots \leftarrow R_{(k_{\text{mini}})^+}$ puis une barbe initiale $R_{(k_{\text{mini}})^{\alpha+}} \rightarrow R_j$ et ensuite un reprend la suite de dents présente initialement moins une. La structure est préservée.

Dans le dernier cas, la barbe finale est supprimée, comme pour $R_{j_{\text{mini}}}$ les deux lignes sont désormais disjointes et i_k n'est plus qu'une ligne formée d'une succession de flèches horizontales. La structure est préservée. □

4.3 Structure des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs initiaux de $V_{\overline{w}}$

Le but de cette section est de prouver le théorème 4.3.1 afin de pouvoir initialiser notre récurrence. Pour cela, on le montrera sous une autre forme, plus adaptée à la preuve, via le théorème 4.3.10 et l'on établira l'équivalence des deux théorèmes par la remarque 4.3.11. Dans cette section on continuera à utiliser les objets et notations introduites dans les sections précédentes.

Théorème 4.3.1 (Structure des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs initiaux)**.** *Les ℓ premières coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des facteurs directs indécomposables de $V_{\overline{w}}$ vérifient la formule suivante :*

$$\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(V_a) = \sum_{j=1}^{f(a)} \delta_{i_{p_j}, i_a} f_j, \quad (1 \leq a \leq \ell(w))$$

Exemple 4.3.2. On considère le cas où W est de type D_5, $\overline{w} = [5, 1, \underline{3, 2, 4, 3}, 2, \underline{5, 1}, 2, 3, \underline{4, 3, 2, 1, 3}, 2]$, $\overline{v} = [3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 3, 2, 1, 3]$. On complète $\overline{v}$ en $\dot{v} = [5, 3, 4, 2, 3, 5, 4, \underline{2, 1, 3, 2, 4, 3}, 5, 1, 4, \underline{3, 2, 1, 3}]$. On choisit $a = 14$, on a $f(14) = 10$ et $i_{14} = 2$. Alors :

$$\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(V_{\overline{w},14}) = f_3 + f_{10}$$

On a en fait comme vecteur complet : $\Delta_{\dot{v}} = f_3 + f_{10} + f_{20}$.

On peut aussi considérer l'exemple 3.2.7 où les coordonnées des $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}$-vecteurs sont celles qui sont colorées.

Remarque 4.3.3. *On peut reformuler en disant que les ℓ premières coordonnées du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur du module V_k valent 0 sauf celles dont l'indice i correspond à un indice $p_j \leq k$ et de couleur i_k, qui valent alors 1.*

Notation 4.3.4. Soit $1 \leq a \leq \ell(w)$. Le module $V_a \in V_{\overline{w}}$ a son $\Delta_{\dot{w}}$-vecteur uniquement déterminé par les a premières lettres de $\overline{w}$. On va donc associer à $\dot{w} = [i_r, \ldots, i_1]$ un découpage

$$\overline{w}_a = [i_a, \ldots, i_1] \text{ et } \overline{u}_a = [i_r, \ldots, i_{a+1}].$$

On notera $[j_{m_{r-a}}, \ldots, j_{m_1}]$ le représentant le plus à gauche de $u_a = s_{i_r} \cdots s_{i_{a+1}} = w_0 w_a^{-1}$ dans le représentant $\dot{v} = [j_r, \ldots, j_1]$.

On note $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_a \leq r$ les éléments de $\{1, \ldots, r\} \backslash \{m_1, \ldots, m_{r-a}\}$ c'est à dire les indices des lettres de $\dot{v}$ n'intervenant pas dans l'écriture du représentant le plus à gauche de u_a.

On va utiliser la description des Δ-coordonnées en termes de données de Mirković-Vilonen, donnée par la proposition 2.9.16, afin de prouver que dans notre cas on a bien le théorème 4.3.1.

Proposition 4.3.5. *Avec les notations précédentes, on a :*

1. *$m_1 \geq \ell$ si et seulement si $p_\ell < a + 1$,*

2. *il existe un entier q, $0 \leq q \leq \ell - 1$ tel que $m_1 = \ell - q$ si et seulement si $p_{\ell-q} \geq a + 1$ et $p_{\ell-q-1} \leq a$.*

Démonstration. On va prouver chaque résultat indépendamment, à chaque fois en prouvant que chacune des proposition est équivalente à une même troisième.

On commence par prouver le point 1.

Supposons qu'on ait $p_\ell \leq a$ alors on a que $[i_{p_\ell}, \ldots, i_{p_1}]$ est un sous-mot de $[i_a, \ldots, i_1]$ qui est un représentant de w_a et donc on a :

$$v \leq u_a^{-1} w_0 = w_a.$$

Réciproquement, si on a $v \leq w_a$, il existe au moins un sous-mot de $[i_a, \ldots, i_1]$ représentant v. Par le lemme 2.1.38, le sous-mot le plus à droite représentant v est plus petit pour l'ordre lexicographique que n'importe laquelle des expressions de v dans $\overline{w}_a$ et donc est un sous-mot de $\overline{w}_a$. En particulier on a donc $p_\ell \leq a$.

Ainsi on a montré que $p_\ell \leq a \Leftrightarrow v \leq u_a^{-1} w_0$.

On va maintenant montrer qu'on a équivalence entre $m_1 \geq \ell$ et $v \leq u_a^{-1} w_0$.

On suppose que $m_1 > \ell$. Dans ce cas $[j_{m_{r-a}}, \ldots, j_{m_1}]$ est un sous-mot de $[j_r, \ldots, j_{\ell+1}]$. Or ce dernier est un représentant de $w_0 v^{-1}$ et donc on a $u_a \leq w_0 v^{-1}$. Or par la proposition 2.1.33 et le fait que $w_0^{-1} = w_0$ on a que $u_a \leq w_0 v^{-1} \Leftrightarrow u_a^{-1} \leq v w_0$ et par la même proposition, on a $u_a^{-1} w_0 \geq v$ ce qu'on voulait montrer.

Réciproquement, supposons qu'on ait $u_a \leq w_0 v^{-1}$. Alors on a un représentant de u_a parmi les sous-mots de $[j_r, \ldots, j_{\ell+1}]$. Par le lemme 2.1.38, on a que chacun de ces mots est plus petit, pour l'ordre lexicographique que $[j_{m_{r-a}}, \ldots, j_{m_1}]$ et donc en particulier ce mot est un sous mot de $[j_r, \ldots, j_{\ell+1}]$ et en particulier $m_1 \geq \ell + 1$.

Ainsi on a $(m_1 > \ell) \Leftrightarrow (v \leq u^{-1} w_0) \Leftrightarrow (p_\ell \leq a)$.

On prouve maintenant le point 2, à nouveau par une double équivalence avec une troisième proposition.

Supposons qu'on ait q tel que $m_1 = \ell - q$. On veut montrer que c'est équivalent à

$$(u \leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q-1}}) \text{ et } (u \not\leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q}}).$$

Comme $m_1 = \ell - q$, $[j_{m_{r-a}}, \ldots, j_{m_1}]$ est un sous-mot de $[j_r, \ldots, j_{\ell-q}]$ et on a alors

$$u \leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q-1}}.$$

D'autre part, par maximalité de $j_{m_{r-a}}$ à gauche dans $[j_r, \ldots, j_1] = \dot{v}$ et par le lemme 2.1.38 on sait qu'il n'existe aucun sous-mot $[j_{n_{r-a}}, \ldots, j_{n_1}]$ représentant u_a tel que $n_1 > m_1$. Donc u n'admet aucun représentant dans $[j_r, \ldots, j_{m_1+1}]$ d'où

$$u \not\leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q}}.$$

Montrons maintenant l'implication réciproque. Par hypothèse, on sait qu'il existe au moins un représentant de u_a dans les sous-mots de $[j_r, \ldots, j_{\ell-q}]$ et aucun parmi ceux de $[j_r, \ldots, j_{\ell-q-1}]$. On en déduit donc que tout représentant de u_a dans $[j_r, \ldots, j_{\ell-q}]$ commence à droite par $j_{\ell-q}$. Or par le lemme 2.1.38, le représentant le plus à gauche, $[j_{m_{r-a}}, \ldots, j_{m_1}]$ est un de ceux-ci et donc $m_1 = \ell - q$.

Ainsi on a montré que :

$$(m_1 = \ell - q) \Leftrightarrow ((u \leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q-1}}) \text{ et } (u \not\leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q}})).$$

On veut maintenant montrer l'équivalence :

$$((p_{\ell-q} \geq a+1) \text{ et } (p_{\ell-q-1} \leq a)) \Leftrightarrow ((u \leq w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q-1}}}) \text{ et } (u \not\leq w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q}}})).$$

Supposons qu'on ait $p_{\ell-q} \geq a+1$ et $p_{\ell-q-1} \leq a$. Ainsi $s_{i_{p_{\ell-q-1}}} \cdots s_{i_{p_1}}$ admet au moins un représentant parmi les sous mots de $[i_a, \ldots, i_1]$ dont en particulier $[i_{p_{\ell-q-1}}, \ldots, i_{p_1}]$ et donc on a

$$s_{i_{p_{\ell-q-1}}} \cdots s_{i_{p_1}} \leq u_a^{-1} w_0.$$

Inversement, $s_{i_{p_{\ell-q}}} \cdots s_{i_{p_1}}$ n'admet aucun représentant parmi les sous-mots de $[i_a, \ldots, i_1]$ et on a :

$$s_{i_{p_{\ell-q}}} \cdots s_{i_{p_1}} \not\leq u_a^{-1} w_0.$$

A nouveau, en passant à l'inverse et en multipliant à gauche par w_0 on retrouve les deux inégalités :

$$w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q-1}}} \geq u_a, \text{ et}$$
$$w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q}}} \not\geq u_a.$$

On va maintenant prouver la réciproque.

Si on a ces deux inégalités c'est qu'on n'a aucun représentant de $s_{i_{p_{\ell-q}}} \cdots s_{i_{p_1}}$ dans $[i_a, \ldots, i_1]$ et qu'on en a au moins un pour $s_{i_{p_{\ell-q-1}}} \cdots s_{i_{p_1}}$. Par minimalité et par le lemme 2.1.38 on a donc que pour le représentant le plus à gauche de u_a, on a $p_{\ell-q} > a$ et $p_{\ell-q-1} \leq a$.

On a donc bien l'équivalence

$$((p_{\ell-q} \geq a+1) \wedge (p_{\ell-q-1} \leq a)) \Leftrightarrow ((u_a \leq w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q-1}}}) \wedge (u \not\leq w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q}}})).$$

Il nous reste à montrer les deux équivalences

$$(u_a \leq w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q-1}}}) \Leftrightarrow (u \leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q-1}})$$

et

$$(u \not\leq w_0 s_{i_{p_1}} \cdots s_{i_{p_{\ell-q}}}) \Leftrightarrow (u \not\leq w_0 s_{j_1} \cdots s_{j_{\ell-q}}).$$

Ces équivalences sont immédiates car $(j_i)_{1 \leq i \leq \ell} = (i_{p_j})_{1 \leq j \leq \ell}$ par définition de $\overline{v}$. □

Exemple 4.3.6. On se place dans $W = D_6$ avec le diagramme de Dynkin de la figure 4.5

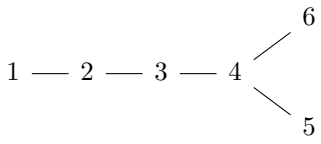


FIGURE 4.5 – Diagramme de Dynkin du type D_6

On a $\overline{w} = [5, 3, 4, 2, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 3, 4, 1, 3]$ et on le complète en

$$\dot{w} = [2, 3, 4, 6, 1, 2, 3, 4, \underline{5}, 3, 4, 2, 3, 6, \underline{4}, 2, \underline{1, 5, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5}, 3, \underline{4}, 1, \underline{3}].$$

On choisit $v = s_4 s_5 s_1 s_2 s_3 s_4 s_6 s_2 s_3 s_4 s_5 s_4 s_2 s_3$ (et donc $\ell(v) = 14$), et on a :

$$\overline{v} = [5, 4, 1, 5, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 4, 3],$$

complété en

$$\dot{v} = [4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 5, 4, 2, 3, 2, 5, 4, 1, 5, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 4, 3].$$

On a comme indices de lettres de $\overline{w}$ formant $\overline{v}$:

$$(p_i)_{1 \leq i \leq 14} = [1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 22].$$

Si on choisit $a = 10$, on a alors

$$\dot{w} = [\underbrace{2, 3, 4, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 2, 3}_{\overline{u}_{10}}, \underbrace{2, 4, 3, 6, 4, 5, 3, 4, 1, 3}_{\overline{w}_{10}}].$$

On cherche [1] alors le représentant le plus à gauche de u_{10} dans $\dot{v}$.

On trouve $[6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 4, 2, 3, 2, 5, 4, 1, 5, 2, 3]$ qui reprend les lettres aux positions

$$[9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].$$

En particulier on a donc $m_1 = 9$. $p_9 = 11 \geq a+1$ et $p_8 = 10 \leq a$, comme dans le second cas de la proposition 4.3.5.

Si on récapitule, on a

$$\dot{w} = [\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{2}, \overline{3}, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 3, 4, 1, 3]$$

$$\dot{w} = [2, 3, 4, 6, 1, 2, 3, 4, \underline{5}, 3, 4, 2, 3, 6, \underline{4}, 2, \underline{1}, \underline{5}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{6}, \underline{4}, \underline{5}, 3, \underline{4}, 1, \underline{3}]$$

$$\dot{v} = [4, \overline{6}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, 5, \overline{4}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{2}, \overline{3}, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 4, 3]$$

$$\dot{v} = [4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 5, 4, 2, 3, 2, \underline{5}, \underline{4}, \underline{1}, \underline{5}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{6}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{4}, \underline{3}]$$

1. On peut utiliser la fonction sousMotReduitMinimalAGauche dans les fonctions SAGE associées à ce document.

où les lettres surlignées en rouge représentent les positions des lettres du représentant de u_{10} dans $\dot{w}$ et $\dot{v}$ et celles soulignées en bleu, celles de v.

On se place maintenant dans un cas proche. On garde $\dot{w}$, on prend $v = s_4s_5s_1s_2s_3s_4s_6s_2s_3s_4s_5s_4s_2s_3$. On a $\overline{v} = [4, 1, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 4, 3]$, donc en particulier $p_{12} = 15$ et

$$\dot{v} = [4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 4, 1, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 4, 3].$$

On prend $a = 16$. On a $p_{12} = 15 < 17 = a + 1$. Cela donne donc

$$\dot{w} = [\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{6}, 4, 2, 1, 5, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 3, 4, 1, 3]$$

$$\dot{w} = [2, 3, 4, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 6, 4, \underline{2}, \underline{1}, 5, \underline{2}, \underline{3}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{6}, \underline{4}, \underline{5}, 3, \underline{4}, 1, \underline{3}]$$

$$\dot{v} = [4, \overline{6}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{2}, 3, \overline{4}, \overline{5}, 4, \overline{3}, 2, 4, 1, 2, 3, 2, 4, 3, 6, 4, 5, 4, 3]$$

$$\dot{v} = [4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, \underline{4}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{6}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{4}, \underline{3}]$$

On a comme représentant de u_{16} : $\overline{u}_{16} = [2, 3, 4, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 6]$. Le représentant le plus à gauche de u_{16} dans $\dot{v}$ est alors : $[4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 2, 4, 5, 3]$. En particulier $m_1 = 14 > 12 = \ell(v)$, on est dans le premier cas de la proposition 4.3.5.

On va maintenant montrer donner une description des coordonnées des $\Delta_{\dot{w}}$-vecteurs des modules de $V_{\overline{w}}$.

Proposition 4.3.7. *Soit V_a un facteur direct indécomposable de $V_{\overline{w}}$, de socle le module simple S_{i_a}. On choisit un représentant $\dot{x} = [k_r, \ldots, k_1]$ de w_0 et on note $[k_{m_{r-a}}, \ldots, k_{m_1}]$ le représentant le plus à gauche de u_a dans $\dot{x}$. Soit $m < m_1$. Alors on a ,avec les notations de la définition 2.9.14, $\xi_m^{\dot{x}} = s_{k_1} \cdots s_{k_m}(\varpi_{i_a})$ et*

$$\Delta_{\dot{w},m}(V_a) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_m = i_a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On a $\beta_m^{\dot{x}} = s_{k_1} \cdots s_{k_{m-1}}(\alpha_{i_a})$ et donc

$$s_{\beta_m^{\dot{x}}} = (s_{k_1} \cdots s_{k_{m-1}}) s_{k_m} (s_{k_1} \cdots s_{k_{m-1}})^{-1}$$

alors

$$s_{\beta_m^{\dot{x}}} \cdots s_{\beta_1^{\dot{x}}} = s_{k_1} \cdots s_{k_m}.$$

En effet, on a une simplification des facteurs comme le montre l'écriture :

$$\begin{aligned} s_{\beta_m^{\dot{x}}} &= (s_{k_1} \cdots s_{k_{m-1}})(s_{k_m})(s_{k_{m-1}} \cdots s_{k_1})(s_{k_1} \cdots s_{k_{m-2}})(s_{k_{m-1}})(s_{k_{m-2}} \cdots s_{k_1}) \cdots (s_{k_1})(s_{k_2})(s_{k_1}) s_{k_1} \\ &= s_{k_1} \cdots s_{k_m}. \end{aligned}$$

Comme ici on suppose que $m < m_1$, on a

$$\xi_m^{\dot{x}} = s_{\beta_m^{\dot{x}}} \cdots s_{\beta_1^{\dot{x}}}(\varpi_{i_a}) = s_{k_1} \cdots s_{k_m}(\varpi_{i_a})$$

et donc

$$\xi_{m-1}^{\dot{x}} - \xi_m^{\dot{x}} = s_{k_1} \cdots s_{k_{m-1}}(\varpi_{i_a} - s_{k_m}(\varpi_{i_a})).$$

Or on a $s_{k_m}(\varpi_{i_a}) - \varpi_{i_a} = 0$ si $k_m \neq i_a$ et $\varpi_{i_a} - s_{k_m}(\varpi_{i_a}) = \alpha_{k_m}$ sinon. Alors $\xi_{m-1}^{\dot{x}} - \xi_m^{\dot{x}} = \beta_m^{\dot{x}}$ si $k_m = i_a$ et donc :

$$n_m^{\dot{x}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_m = i_a, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où, par la proposition 2.9.16, le résultat voulu. □

Lemme 4.3.8. *S'il existe $0 \leq q \leq \ell - 1$ tel que $m_1 = \ell - q$, on a $[m_{q+1}, \ldots, m_1] = [\ell, \ldots, \ell - q]$.*

Exemple 4.3.9. Considérons le cas où on a

$$\overline{w} = [5, 1, \underline{3, 2, 4, 3}, 2, \underline{5, 1}, 2, 3, \underline{4, 3, 2, 1, 3}, 2]$$

et

$$\overline{v} = [3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 3, 2, 1, 3],$$

qu'on complète en

$$\dot{w} = [4, 3, 2, 5, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$$

et

$$\dot{v} = [5, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 3, 2, 1, 3].$$

On a $\ell = 11$, $p_\ell = 15$. Prenons $a = 10$. On a alors u_a qui admet comme représentant réduit le plus à gauche dans $\dot{w}$:

$$[4, 3, 2, 5, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 5]$$

et dans $\dot{v}$, celui formé par les lettres surlignées :

$$\dot{v} = [5, \overline{3, 4}, 2, \overline{3, 5}, 4, \overline{2, 1}, \underbrace{\overline{3, 2, 4, 3, 5}, 1, 4, 3, 2, 1, 3}_{\overline{v}}].$$

Le lemme affirme que ici, la partie du représentant le plus à gauche de u_a dans $\dot{v}$ qui est dans $\overline{v}$ est un facteur gauche de $\overline{v}$. Ici le sous-mot $[3, 2, 4, 3, 5]$ est contigu.

Démonstration. On va prouver le résultat pour $\dot{v}$, $\dot{w}$ fixés et pour toute valeur de a.

Si $a > p_\ell - 1$ ou encore que $a + 1 > p_\ell$, par la proposition 4.3.5, on a $m_{1,a} \geq \ell$ et donc on ne vérifie pas les hypothèses du théorème.

Si $a + 1 = p_\ell$ alors $p_{\ell-1} < a + 1$ et donc $p_{\ell-1} \leq a$ et par la proposition 4.3.5, on a $m_{1,a} = \ell$ et donc $[m_{1,a}] = [\ell]$ et le lemme est vérifié.

Pour $a \leq p_\ell$ on va procéder par une récurrence décroissante sur la valeur de a. Les suites $(m_i)_{1 \leq i \leq r-a}$ dépendant de la valeur de a, on va leur adjoindre en indice la valeur a à laquelle elles se rapportent.

On suppose qu'on a $1 < a \leq p_\ell$, qu'il existe $0 \leq q_a \leq \ell - 1$ tel que $m_{1,a} = \ell - q$ et que $[m_{q_a+1,a}, \ldots, m_{1,a}] = [\ell, \ldots, \ell - q_a]$.

On veut montrer que pour $b = a - 1$, il existe $0 \leq q_b \leq \ell - 1$ tel que $m_{1,b} = \ell - q_b$ et que $[m_{q_b+1,b}, \ldots, m_{1,b}] = [\ell, \ldots, \ell - q_b]$.

On commence par montrer l'existence de q_b. Comme $m_{1,a} = \ell - q_a$, par la proposition 4.3.5, on a :

$$p_{\ell-q_a} \geq a + 1 \text{ et } p_{\ell-q_a-1} \leq a.$$

On peut réécrire cela de la façon suivante :

$$p_{\ell-q_a} \geq b + 2 \text{ et } p_{\ell-q_a-1} \leq b + 1.$$

On a alors deux cas possibles :

1. soit $p_{\ell-q_a-1} = b + 1$,
2. soit $p_{\ell-q_a-1} \leq b$.

1. Dans le premier cas on a alors

$$p_{\ell-q_a-1} \geq b + 1 \text{ et } p_{\ell-q_a-2} < b + 1 \text{ et ainsi } p_{\ell-q_a-2} \leq b.$$

   Par la proposition 4.3.5, on a $m_{1,b} = \ell - q_a - 1$ et donc $q_b = q_a + 1$.

2. Dans le second cas, on a

$$p_{\ell-q_a} \geq b + 2 \geq b + 1 \text{ et } p_{\ell-q_a-1} \leq b$$

   et par la proposition 4.3.5, on a $m_{1,b} = \ell - q_a$ et donc $q_a = q_b$.

Dans les deux cas on a donc prouvé l'existence d'un $q_b \geq q_a$ tel que $m_{1,b} = \ell - q_b$.

On montre maintenant que chacun des deux cas implique l'égalité $[m_{q_b+1,b}, \ldots, m_{1,b}] = [\ell, \ldots, \ell - q_b]$.

On commence par le **premier cas**. On a alors $q_b = q_a + 1$ et $m_{1,b} = \ell - q_b$. On va commencer par montrer que $[m_{r-b,b}, \ldots, m_{2,b}]$ est un représentant de u_a.

Par définition, on a $u_b = s_{j_{m_{r-b,b}}} \cdots s_{j_{m_{1,b}}} = s_{i_r} \cdots s_{i_{b+1}}$. Ainsi $u_b s_{i_{b+1}} = s_{i_r} \cdots s_{i_{a+1}} = u_a$.

Or $i_{p_\alpha} = j_\alpha$ pour tout $1 \leq \alpha \leq \ell$ par définition de $\dot{v}$. Comme $m_{1,b} = \ell - q_b$,

$$j_{m_{1,b}} = j_{\ell-q_b} = i_{p_{\ell-q_b}} = i_{p_{\ell-q_a-1}}.$$

Or comme par l'hypothèse définissant le premier cas on a $p_{\ell-q_a-1} = b + 1$, on a $j_{m_{1,b}} = i_{b+1}$.

Alors $u_a = u_b s_{i_{b+1}} = u_b s_{j_{m_{1,b}}} = s_{j_{m_{r-b,b}}} \cdots s_{j_{m_{2,b}}}$ et $[m_{r-b,b}, \ldots, m_{2,b}]$ est un représentant de u_a dans $\dot{v}$.

Mais on sait que le représentant le plus à gauche de u_a dans $\dot{v}$ est $[m_{r-a,a}, \ldots, m_{1,a}]$ ainsi par le lemme 2.1.38, pour tout $2 \leq \alpha \leq r - b$, on a $m_{\alpha-1,a} \geq m_{\alpha,b}$.

On va montrer qu'en fait on a $m_{\alpha-1,a} = m_{\alpha,b}$ pour tout α.

Comme $m_{2,b} > m_{1,b}$, on a

$$\ell - q_b = m_{1,a} \geq m_{2,b} > m_{1,b} = \ell - q_b - 1$$

donc $m_{1,a} = m_{2,b}$. On peut alors répéter cet encadrement pour toutes les valeurs de α et obtenir

$$\forall 2 \leq \alpha \leq q_b + 1,\ m_{\alpha,b} = \ell - q_b + \alpha - 1 = m_{\alpha-1,a}$$

et donc

$$[m_{q_b+1,b}, \ldots, m_{2,b}] = [m_{q_a+1,a}, \ldots, m_{1,a}] = [\ell, \ldots, \ell - q_b + 1]$$

et comme on a déjà montré que $m_{1,b} = \ell - q_b$, on a finalement :

$$[m_{q_b+1,b}, \ldots, m_{1,b}] = [\ell, \ldots, \ell - q_b].$$

On va maintenant démontrer le **deuxième cas**. On a $\ell - q_a = m_{1,a} = m_{1,b} = \ell - q_b$.

Comme précédemment $u_b = u_a s_{i_{b+1}}$ par définition et donc $u_b = s_{j_{m_{r-a,a}}} \cdots s_{j_{m_{1,a}}} s_{i_{b+1}}$. Or $\ell(u_b) = r-b$ par définition de u_b (et comme $\dot{w}$ est un représentant réduit) et $\ell(u_b s_{j_{m_{1,b}}}) \leq r-b-1$ car $s_{j_{m_{r-b,b}}} \cdots s_{j_{m_{2,b}}}$ en est un représentant. On a donc $\ell(u_b) > \ell(u_b s_{j_{m_{1,b}}})$.

Par la relation d'échange on a qu'il existe un $r - b \geq \alpha \geq m_{1,b}$ tel que

$$u_a = u_b s_{i_{b+1}} = s_{j_{m_{r-b,b}}} \cdots \widehat{s}_{j_{m_{\alpha,b}}} \cdots s_{j_{m_{1,b}}}.$$

Or, comme $[j_{m_{r-a,a}}, \ldots, j_{m_{1,a}}]$ est le représentant le plus à gauche de u_a, on a :

$$\forall 1 \leq \beta \leq \alpha,\ m_{\beta,b} \leq m_{\beta,a} \text{ et } \forall \alpha + 1 \leq \beta \leq r - b,\ m_{\beta,b} \leq m_{\beta-1,a}.$$

On va montrer par récurrence que pour tout $2 \leq \beta \leq \min(\alpha, q_b + 1)$, on a

$$m_{\beta,b} = m_{\beta,a}$$

Pour $\beta = 2$, on a $m_{1,b} = m_{1,a} = \ell - q_b$, ensuite on a

$$\ell - q_b = m_{1,b} < m_{2,b} \leq m_{2,a} = \ell - q_a = \ell - q_b + 1$$

et donc $m_{2,b} = \ell - q_b + 1 = m_{2,a}$. On a donc l'initialisation.

Par récurrence on suppose qu'on a $m_{\beta-1,b} = \ell - q_b + \beta - 2 = m_{\beta-1,a}$. Alors on a

$$\ell - q_b + \beta - 2 = m_{\beta-1,b} < m_{\beta,b}$$

et par minimalité on a $m_{\beta,b} \leq m_{\beta,a} = \ell - q_b + \beta - 1$. On a donc la suite d'inégalités :

$$\ell - q_b + \beta - 2 = m_{\beta-1,b} < m_{\beta,b} \leq m_{\beta,a} = \ell - q_b + \beta - 1$$

et ainsi $m_{\beta,b} = m_{\beta,a}$.

On va donc maintenant chercher à déterminer les positions relatives de α et q_b+1, en effet, si $\alpha > q_b+1$ on peut déduire de la récurrence précédente le résultat du lemme.

On va procéder par l'absurde, supposons qu'on ait $\min(\alpha, q_b + 1) = \alpha < q_b + 1$. On a alors

$$\ell - q_b + \alpha - 2 = m_{\alpha-1,b} < m_{\alpha_b} < m_{\alpha+1,b} \leq m_{\alpha,a} = \ell - q_b + \alpha - 1.$$

C'est impossible pour des questions de cardinalité. Ainsi on a $\alpha \geq q_b + 1$ et donc, $m_{\beta,a} = m_{\beta,b}$ pour tout $2 \leq \beta \leq q_b + 1$.

De plus on a $m_{1,b} = m_{1,a}$ et finalement on peut écrire :

$$[m_{q_b+1,b}, \ldots, m_{1,b}] = [\ell, \ldots, \ell - q_b].$$

Ainsi on a montré le lemme dans les deux cas. □

Théorème 4.3.10. *On a l'identité suivante entre coordonnées de Δ-vecteurs :*

$$\Delta_{\dot{v},m}(V_a) = \Delta_{\dot{w},i_{p_m}}(V_a)$$

pour $1 \leq m \leq \ell(v)$, $1 \leq a \leq \ell(w)$.

Démonstration. Tout d'abord, si $a = r$ (ce qui implique que $\ell(w) = r$ et donc $w = w_0$), on a $u_a = e$ et donc on va devoir raisonner légèrement différent des autres cas, dans ce cas, on peut toujours appliquer la proposition 4.3.7 et donc on a l'égalité voulue.

On va prouver une à une les identités cherchées, pour chaque $1 \leq m \leq \ell(v)$.

Tout d'abord, si $m < m_1$, on sait par la proposition 4.3.7 que dans ce cas là, en prenant $\dot{x} = \dot{v}$, on a

$$\Delta_{\dot{v},m}(V_a) = \begin{cases} 1 & \text{si } j_m = i_a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On va maintenant montrer qu'on peut réutiliser ce résultat avec $\dot{x} = \dot{w}$ et à la place de m, p_m pour avoir un résultat similaire avec $\Delta_{\dot{w},p_m}(V_a)$.

Pour cela on utilise la proposition 4.3.5. En effet, comme $m < m_1$, on a deux possibilités.

Dans un premier cas, on a $m < m_1$ pour tout $1 \leq m \leq \ell$ (cas 1) et alors $p_\ell \leq a$. Or $p_m \leq p_\ell$ et alors le m_1 nécessaire pour la borne de la proposition 4.3.7 est alors le premier indice du représentant le plus à gauche de u_a dans $\dot{w}$, ce qui est par définition $a + 1$. On a donc bien $p_m \leq m_{1,\dot{w}}$ et on peut appliquer la proposition 4.3.5.

Dans l'autre cas, il existe un $0 \leq q \leq \ell - 1$ tel que $m_1 = \ell - q$. Mais dans tous les cas on a $m < m_1$ et donc $p_m \leq p_{\ell-q-1} \leq a$ et donc à nouveau on peut appliquer la proposition 4.3.5. On a alors :

$$\Delta_{\dot{w},p_m}(V_a) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_{p_m} = i_a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or, comme par définition $i_{p_m} = j_m$, on a

$$\Delta_{\dot{v},m}(V_a) = \Delta_{\dot{w},p_m}(V_a).$$

Il nous reste à étudier le cas où $m \geq m_1$.

Dans ce cas, par la proposition 4.3.5, on sait que $m \geq \ell - q$ et donc $p_m \geq p_{\ell-q} \geq a + 1$. Par définition de u_a dans $\dot{w}$, on sait que $\xi^{\dot{w}}_{p_m} = \xi^{\dot{w}}_{p_m - 1}$ et donc $n^{\dot{w}}_{p_m} = 0$ et ainsi $\Delta_{\dot{w},p_m}(V_a) = 0$. Il nous reste donc à prouver que, dans ce cas $\Delta_{\dot{v},m}(V_a) = 0$.

Pour cela, on va utiliser le lemme 4.3.8. On a que $[\ell, \ldots, \ell - q] = [m_{q+1}, \ldots, m_1]$, ainsi, pour tout $\ell \geq m \geq \ell - q$, on a $\Delta_{\dot{v},m}(V_a) = 0$.

Ainsi pour tout $1 \leq m \leq \ell$ on a

$$\Delta_{\dot{v},m}(V_a) = \Delta_{\dot{w},p_m}(V_a).$$

□

On peut maintenant prouver le théorème 4.3.1 :

Démonstration. Par définition $f(a) = \max\{1 \leq j \leq \ell(v) \mid p_j \leq a \text{ et } i_{p_j} = i_a\}$. On va ici utiliser le théorème 4.3.10 en distinguant d'une part, les m tels que $p_m \leq a$, et d'autre part les autres.

Dans le premier cas, par la proposition 4.3.5, on a que $m < m_1$ et donc pour ces coordonnées, on peut directement utiliser la proposition 4.3.7.

Dans le deuxième cas, par le lemme 4.3.8 et la preuve du théorème 4.3.10 on sait que les coordonnées sont nulles, ce qui se traduit ici par une sommation en dehors de ces indices. □

Remarque 4.3.11. *On peut reformuler ce résultat en disant que si V_a est un facteur direct indécomposable de $V_{\overline{w}}$, les indices des coordonnées égales à 1 de $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(V_a)$ sont les entiers appartenant à l'ensemble :*

$$\{1 \leq j \leq \ell(v) \mid f_{\min}(a) \leq j \leq f(a) \mid i_{p_j} = i_a\},$$

les autres étant nulles.

En effet, l'ensemble $\{1 \leq j < f_{\min}(a) \mid i_{p_j} = i_a\}$ est vide par minimalité de $f_{\min}(a)$.

4.4 Description des sommets évincés

Soit $0 \leq m \leq \ell(v)$.

Dans cette section, on va établir un critère combinatoire sur l'indice k d'un facteur direct indécomposable $R_{k,m}$ de $\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ permettant d'établir si $R_{k,m} \in \mathcal{C}^v$ et donc s'il sera évincé dans la graine coupée. Pour cela on fera une hypothèse sur $\Delta_{\dot{v}}(R_{k,m})$ qui sera montrée au théorème 4.6.1.

Soit $1 \leq k \leq \ell(w)$ tel que $k \leq ((p_k)_{\max})^{\alpha(p_k,m)-}$. Dans cette section, on pose $R = \widehat{\mu}_m \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ et $R_k = R_{k,m}$.

Hypothèse 4.4.1. *Les indices des coordonnées non-nulles de $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(R_k)$ sont les éléments de l'ensemble :*

$$\{1 \leq j \leq \ell \mid f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus} \leq j \leq f(k^{\alpha(k,m)+}) \mid i_{p_j} = i_k\}.$$

Exemple 4.4.2. On peut constater dans l'exemple 3.2.7 que cette hypothèse est vérifiée.

Lemme 4.4.3. *Si $i_k = i_{p_m}$ alors $f_{\min}(k)^{\alpha(k,m-1)\oplus} = f(p_m) = m$*

Démonstration. En effet, $f_{\min}(k)^{\alpha(k,m-1)\oplus}$ est le premier indice dans $\overline{v}$ d'une lettre de $\overline{w}$ de la couleur i_k, qu'on a décalé (dans $\overline{v}$) $\alpha(k, m-1)$ fois. Si la m ème lettre de $\overline{v}$ est de la couleur i_k alors le décalé $\alpha(k, m-1)$ fois de la première lettre de la couleur i_k dans $\overline{v}$ est exactement p_m. □

Exemple 4.4.4. On reprend les données de l'exemple 3.1.8. On a $\overline{w} = [1, 3, 2, 4, 3, \underline{2}, \underline{4}, \underline{5}, 4, \underline{3}, 2, \underline{1}, \underline{2}]$ et $v = s_2 s_4 s_5 s_3 s_1 s_2$. On a $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 4, p_4 = 6, p_5 = 7, p_6 = 8$.

Ainsi $f_{\min}(7)^{\alpha(7,5-1)\oplus} = 5^{0\oplus} = 5 = f(7)$ ou encore $f_{\min}(8)^{\alpha(8,6-1)\oplus} = 1^{\oplus} = 6 = f(8)$.

Définition 4.4.5. L'application $\xi(k, m)$, définie par :

$$\xi(k,m) = \begin{cases} \min\{\ell(w) \geq j > p_m \mid \exists 1 \leq q \leq \ell(v) \mid j = p_q \text{ et } i_j = i_k\} & \text{si non vide,} \\ \ell(w) + 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $p_0 = 0$ est l'application qui, au couple (k, m), associe l'indice de la première lettre soulignée de couleur que i_k dans $\overline{w}$ à gauche (strictement) de i_{p_m}.

Remarque 4.4.6. *On a $\xi(k^-, m) = \xi(k^+, m) = \xi(k, m)$ (si k, k^+, k^- existent).*

Proposition 4.4.7. $f(\xi(k, m)) = f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus}$.

Démonstration. Si $m = 0$, le résultat est immédiat par définition. Si $m \neq 0$, on va distinguer deux cas. Si $i_k = i_{p_m}$, alors par le lemme 4.4.3, on a $f(\xi(k, m)) = f(p_m)^{\oplus} = f_{\min}(k)^{(\alpha(k,m-1)+1)\oplus}$. De plus, par l'égalité des couleurs on a $\alpha(k, m) = \alpha(k, m-1) + 1$ et donc on en déduit l'égalité

$$f(\xi(k,m)) = f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus}.$$

Si $i_k \neq i_{p_m}$, on raisonne par récurrence sur m. On suppose donc que $f(\xi(k, m-1)) = f_{\min}(k)^{\alpha(k,m-1)\oplus}$. Comme dans ce cas $\alpha(k, m-1) = \alpha(k, m)$, il nous reste à montrer que $\xi(k, m-1) = \xi(k, m)$. En effet, on aurait une différence s'il existe une lettre de $\overline{v}$ de couleur i_k dont l'indice est dans l'intervalle $\{p_{m-1}+1, p_m-1\}$, ce qui est impossible par minimalité de $\overline{v}$. Ainsi on a $\xi(k, m-1) = \xi(k, m)$ et l'hérédité est donc montrée dans le cas stationnaire et le cas où on a une progression. □

Corollaire 4.4.8. *Soit R_k un module vérifiant l'hypothèse 4.4.1. Alors $R_k \in \mathcal{C}^v$ si et seulement si $k^{\alpha(k,m)+} < \xi(k, m)$.*

Démonstration. Dans ce cas l'ensemble de l'hypothèse 4.4.1 est vide car

$$f(k^{\alpha(k,m)+}) < f(\xi(k,m)) = f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus}.$$

L'inégalité est stricte, car même si f n'est pas strictement croissante, l'indice $p_{f(k)^{\alpha(k,m)+}}$ est inférieur ou égal à $k^{\alpha(k,m)+}$ alors qu'il existe $1 \leq j \leq \ell$ tel que $\xi(k, m) = p_j$ et donc $p_{f(\xi(k,m))} = \xi(k, m)$. □

Corollaire 4.4.9 (Evictions initiales)**.** *Les facteurs indécomposables V_k de $V_{\overline{w}}$ tels que $f(k) < f_{\min}(k)$ sont dans $\mathcal{C}^v$. Donc dans ce cas $V_k \notin C(V_{\overline{w}})$*

Démonstration. Par la remarque 4.3.11 chaque facteur direct de $V_{\overline{w}}$ vérifie l'hypothèse 4.4.1 pour $m = 0$. Comme on a $f(\xi(k, 0)) = f_{\min}(k)$ pour tout k, le corollaire 4.4.8 s'applique. □

Corollaire 4.4.10. *Si R_{k^-}, R_k sont des facteurs directs de R vérifiant l'hypothèse 4.4.1 et si $R_k \in \mathcal{C}^v$ alors $R_{k^-} \in \mathcal{C}^v$.*

Démonstration. On a $(k^-)^{\alpha(k,m)+} < k^{\alpha(k,m)+} < \xi(k, m) = \xi(k^-, m)$. Par le corollaire 4.4.8, on a que $R_{k^-} \in \mathcal{C}^v$. □

4.5 Structure en dents de scie du carquois de $V_{\overline{w}}$

Proposition 4.5.1. *Pour tout couple (i_k, i_j) de couleurs adjacentes, le sous-carquois bicolore (i_k, i_j) du carquois du module $V_{\overline{w}}$ a une configuration en dents de scie au sens de la définition 4.2.11.*

Démonstration. D'après la définition 2.6.21, l'existence des flèches ordinaires est conditionnée par la vérification d'inégalités du type

$$k^+ \geq j^+ > k > j \quad \text{ou} \quad j^+ \geq k^+ > j > k.$$

On va raisonner en parcourant les différents indices $k_{\text{mini}}, (k_{\text{mini}})^+, \ldots, (k_{\text{maxi}})^-, k_{\text{maxi}}$ et montrer qu'on vérifie, selon le cas, les différentes configurations. On notera k l'indice du sommet qu'on est en train d'examiner.

Tout d'abord tant qu'on a $k^+ < j_{\text{mini}}$, aucune des deux inégalités ne peut être vérifiée et donc on n'a pas de flèche entre la ligne i_j et V_k. On est donc dans le cas 1. de la définition 4.2.11. Si $j_{\text{mini}} < k_{\text{mini}}$ ce cas ne se produit pas et l'ensemble des flèches de 1. est vide.

Si on a $k_{\text{maxi}} < j_{\text{mini}}$ (et $j_{\text{mini}} \neq j_{\text{maxi}}$), on n'a pas de flèche ordinaire entre les deux lignes et donc on est dans le cas 1. sur toute la ligne, le point est vérifié.

Inversement si $k_{\text{mini}} > j_{\text{maxi}}$ (et que $k_{\text{mini}} \neq k_{\text{maxi}}$) on est dans le cas 5. sur toute la ligne.

Si initialement on a $j_{\text{mini}} < k_{\text{mini}}$ alors il existe un $(j_{\text{mini}})^{\gamma+}$ tel que $(j_{\text{mini}})^{(\gamma+1)+} > k_{\text{mini}} > (j_{\text{mini}})^{\gamma+}$. Alors on considère le k maximal tel que $k^+ > (j_{\text{mini}})^{(\gamma+1)+} > k > (j_{\text{mini}})^{\gamma+}$. On a alors une flèche $V_{(j_{\text{mini}})^{\gamma+}} \to V_k$. C'est la barbe initiale (cas 2.).

Sinon on a un k minimal vérifiant $k^+ > j_{\text{mini}} > k$. Il peut cependant exister plusieurs indices de couleur i_j ainsi encadrés par k^+ et k et on va nommer ici le j maximal pour cette condition, de sorte qu'on ait $j^+ \geq k^+ > j > k$. On a alors une flèche $V_j \to V_k$ qui va être le début d'une dent de la série de dents 3. de la structure en dents de scie.

Si $j = j_{\text{maxi}}$ alors il sera impossible de trouver un $\gamma > 0$ et un k tels que $k^+ \geq j^{(\gamma+1)+} > k > j^{\gamma+}$ car ici $j^{\gamma+} = j^{(\gamma+1)+} = n+1$. On n'a pas de dent et cette flèche formant la dent incomplète correspond à la barbe finale (point 4. de la définition). Ensuite on n'aura plus que les flèches horizontales entre sommets de la ligne i_k, conformément au point 5. de la définition.

Sinon, il existe un $\gamma > 0$ tel que, pour le même j que celui du paragraphe définissant $V_j \to V_k$, l'inégalité $k^{(\gamma+1)+} \geq j^+ > k^{\gamma+} > j$ est vérifiée, on a alors une flèche $V_{k^{\gamma+}} \to V_j$ et donc la $V_{k^{\gamma+}} \to V_j \to V_k$ de la suite de dents du point 3. de la définition.

A ce moment là, soit on peut trouver un $\zeta > 0$ vérifiant $j^{(\zeta+1)+} \geq k^{(\gamma+1)+} > j^{\zeta+} > k^{\gamma+}$ et alors on a le début d'une nouvelle dent selon le principe précédent, soit ce n'est pas possible et alors on arrive directement à la partie 5. de la définition sans passer par la partie 4..

On répète les dents de la partie 3. jusqu'à arriver soit à une fin des indices j qui conduit à une barbe finale ou à une ligne du type 5. selon le cas soit à une fin des indices k qui donne alors la fin du point sans barbe finale et ligne simple finales (4. et 5.) tous deux optionnels.

□

4.6 Énoncé du théorème structurel

On veut prouver par récurrence le théorème suivant :

Théorème 4.6.1 (Théorème structurel)**.** *Avec les notations de la section 4.2, en posant $1 \leq k \leq \ell(w)$, $0 \leq m \leq \ell(v)$, $G_m = C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$ on a :*

1. *Chaque facteur $G_{i,m}$ a un $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur dont les coordonnées d'indice inférieur ou égal à m sont nulles.*

2. *Pour chaque module $G_{k,m}$ tel que $G_{k^+,m}$ existe dans G_m, on a une flèche $G_{k^+,m} \leftarrow G_{k,m}$. On l'appelle **flèche horizontale**.*

3. *Les autres flèches du carquois de G_m sont entre des modules de couleurs distinctes adjacentes : si on a $G_{k,m} \to G_{j,m}$ avec $i_k \neq i_j$, alors i_k et i_j sont des couleurs adjacentes. Ces flèches sont appelées **flèches ordinaires**.*

4. *Pour tout couple de couleurs adjacentes i_k et i_j, le sous-carquois bicolore de G_m par rapport aux couleurs (i_k, i_j) a une configuration en dents de scie.*

   En particulier aucun sommet ne possède plus de deux flèches incidentes à une autre ligne de couleur adjacente donnée.

5. *Pour toute couleur i_j adjacente à la couleur $i_{p_{m+1}}$, le sous-carquois bicolore de G_m par rapport aux couleurs $(i_{p_{m+1}}, i_j)$ a une configuration en dents de scies* pures.

6. *Les ℓ premières coordonnées du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur du module $G_{k,m}$ de G_m vérifient la règle suivante :*

   - *les coordonnées égales à 1 sont les coordonnées d'indices $1 \leq j \leq \ell$ telles que $i_{p_j} = i_k$ et où j vérifie l'inégalité :*
   $$f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus} \leq j \leq f(k^{\alpha(k,m)+}), \tag{4.1}$$
   - *toutes les autres coordonnées d'indice inférieur ou égal à ℓ sont nulles.*

Dans le cas où $m = \ell(v)$, le point 5 est sans objet.

Remarque 4.6.2. *On remarque que, d'après le point 6, les seuls sommets ayant une coordonnée m non nulle pour leur $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur seront les sommets de couleur i_{p_m}. Par définition de l'algorithme 3.2.4, on a donc que dans $\hat{\mu}_m$ on ne mutera que des sommets de la même ligne. De plus en étudiant la formule 4.1, on a que si on mute le sommet k, on mute les sommets k^+, k^{2+} etc. jusqu'à k_{maxi} exclu.*

4.7 Structure de la preuve du théorème structurel

Afin de prouver le théorème 4.6.1, on procèdera par récurrence. Dans la section 4.8, on prouve l'initialisation de la récurrence, en utilisant les résultats de la section 4.3. Dans la section 4.9 on énonce un lemme permettant de prouver l'hérédité des points 1, 2, 3, 4, 6. Dans la section 4.13, on énonce un lemme permettant de conclure à l'hérédité du point 5. On conclut à l'hérédité dans la section 4.15.

4.8 Initialisation du théorème structurel

On suppose dans cette partie que $m = 0$ et on considère la graine coupée initiale $G = C(V_{\overline{w}})$. Avant de montrer les différents points, on remarque que, par le corollaire 4.4.9, les sommets d'indice inférieur strictement à i_{p_1} sont évincés.

4.8.1 Point 1

Dans ce cas le point 1 est trivial.

4.8.2 Point 2

Le carquois de la graine coupée est un sous-carquois du carquois de $V_{\overline{w}}$ dont on n'a retiré que des flèches ordinaires ou des flèches horizontales adjacentes à un sommet retiré lui aussi. Par construction, le carquois de $V_{\overline{w}}$ vérifie cette propriété.

4.8.3 Point 3

Pour la même raison que précédemment ce point est vérifié par construction.

4.8.4 Point 4

Par les points 2 et 3 qu'on vient de démontrer, on a déjà l'existence des flèches ordinaires et horizontales prédites. En effet par le corollaire 4.4.9, on a que G contient les sommets k tels que $f(k) \geq f_{\min}(k)$. En particulier, c'est un sous-carquois de celui de $V_{\overline{w}_{\geq p_1}}$. Le carquois de $V_{\overline{w}_{\geq p_1}}$ est obtenu à partir de celui de $V_{\overline{w}}$ en retirant des sommets consécutifs parmi ceux d'indices minimaux de chaque couleur (par le corollaire 4.4.10). Par la proposition 4.2.13, on ne perturbe pas cette structure en retirant des sommets consécutifs initiaux d'une ligne.

Ensuite, pour passer du carquois de $V_{\overline{w}_{\geq p_1}}$ à celui de G on va à nouveau supprimer des sommets mais sur des lignes de couleur différentes de i_{p_1}, encore une fois, des sommets consécutifs d'indices initiaux, ce qui ne perturbera pas la structure en dents de scie.

Finalement, par la proposition 4.5.1, on sait que le carquois de $V_{\overline{w}}$ est en dents de scie pour tout ses sous-carquois bicolores. Par ce qui précède, cette qualité est conservée pour G.

On a donc vérifié le point pour G.

4.8.5 Point 5

Ce résultat est prouvé par le lemme suivant :

Lemme 4.8.1 (Configurations des flèches ordinaires dans le cas initial)**.** *Dans une graine coupée*

$$G = C(V_{\overline{w}}),$$

la ligne de couleur i_{p_1} vérifie le point 5 du théorème 4.6.1.

Démonstration. On remarque tout d'abord que par minimalité de $\overline{v}$, l'indice minimal de couleur i_{p_1} appartient à $\overline{v}$. Ainsi tout sommet $V_i \in V_{\overline{w}}$ de couleur p_1 appartient au carquois de G et on a bien $(p_1)_{\text{mini}} = (p_1)_{\min} = p_1$.

On doit prouver dans ce cas que pour chaque ligne de couleur i_j adjacente à la ligne i_{p_1}, la flèche d'indice minimal est $V_j \to V_{(p_1)^{\gamma+}}$.

Supposons qu'on ait j et γ minimaux tels qu'on a une flèche $V_{(p_1)^{\gamma+}} \to V_j$. On va montrer qu'on a alors une flèche $V_j \to V_{(p_1)^{\varsigma+}}$ où $\zeta < \gamma$. Cela veut dire que l'inégalité

$$p_1{}^{(\gamma+1)+} \geq j^+ > p_1{}^{\gamma+} > j$$

est vérifiée et on veut montrer qu'il existe $\zeta < \gamma$ tel que

$$j^+ \geq p_1{}^{(\zeta+1)+} > j > p_1{}^{\zeta+}.$$

On montre que $\gamma > 0$. En effet, si on avait $\gamma = 0$ dans la première équation on aurait j tel que $j < p_1$ ce qui est impossible. En effet, on a $f_{\min}(j) > 1$ (car j et p_1 sont de couleurs différentes) et $f(j) = 0$ (car $j < p_1$). Alors on aurait V_j qui ne serait pas un sommet du carquois de G donc $\gamma > 0$.

Ainsi on a que $p_1^{\gamma+} > j > 1$. Il existe donc un $\zeta < \gamma$ tel que $p_1^{(\zeta+1)+} > j > p_1^{\zeta+}$. Comme de plus on a $j^+ > p_1^{\gamma+}$ et $p_1^{\gamma+} > 1^{\zeta+}$, finalement on a l'inégalité

$$j^+ \geq p_1^{(\zeta+1)+} > j > p_1^{\zeta+}$$

et donc la flèche $V_j \to V_{p_1^{\gamma+}}$ n'était pas celle d'indice minimal. On a donc que la flèche ordinaire d'indice minimal entre les deux lignes pointe forcément vers la ligne de couleur p_1. □

4.8.6 Point 6

Ce point est équivalent à la remarque 4.3.11.

4.8.7 Conclusion

La graine initiale G vérifie les condition du 4.6.1, l'initialisation de la récurrence est vérifiée.

4.9 Structure de la preuve de l'hérédité

On va maintenant prouver l'hérédité des différents points. Pour les points 1, 2, 3, 4 et 6, on le prouvera tout au long de l'exécution de $\hat{\mu}_m$ en montrant que ces points sont conservés, sous une forme légèrement adaptée, après chaque mutation élémentaire μ_k. Pour le point 5, on procédera de même mais à la fin de $\hat{\mu}_m$ on aura besoin du résultat du lemme 4.15.2 dont la preuve repose sur le 4.13.2 pour revenir à l'hérédité du point 5 du théorème structurel 4.6.1.

On résume cette « étude mutation après mutation » dans le lemme suivant :

Lemme 4.9.1 (Lemme structurel)**.** *Lorsqu'on est au milieu d'une mutation sur une ligne, donc sur une suite d'opérations de la forme :*

$$R = \mu_{j^{\gamma+}} \circ \mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \hat{\mu}_{m-2} \circ \cdots \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}) = \mu_{j^{\gamma+}} \circ \cdots \circ \mu_j(R_{m-1})$$

on a une version faible du théorème structurel 4.6.1 de la façon suivante :

Dans la graine coupée $G = C(R)$, on note $G_{i,m-1}$ les facteurs de G non-encore mutés par $\widehat{\mu}_m$ et $G_{i,m} = \mu_i(G_{i,m-1})$:

1. *Les facteurs $G_{i,m-1}$ de couleur différente de i_j et les facteurs $G_{j,m}, G_{j^+,m}, \ldots, G_{j^{\gamma+},m}$ ont des coordonnées d'indice inférieur ou égal à m nulles.*

2. *On a les mêmes flèches horizontales que précédemment à l'exception de la flèche horizontale*

$$G_{j^{(\gamma+1)+},m-1} \to G_{j^{\gamma+},m}$$

qui est dans le sens opposé (si $G \neq C(\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$, sinon, on a exactement le point 2 du théorème).

3. *comme dans le théorème structurel : toutes les flèches qui ne sont pas horizontales sont entre des lignes de couleur adjacentes.*

4. *Pour tout couple de couleurs (c_1, c_2) avec $c_1, c_2 \neq i_{p_m}$, le sous-carquois bicolore (c_1, c_2) est en configuration dents de scie. De plus les sous-carquois bicolores (i_{p_m}, c_3) avec c_3 une couleur adjacente à i_{p_m} auquel on retire les sommets de couleur i_j d'indice supérieur strictement à $j^{\gamma+}$ est en configuration dents de scie.*

5. *Les sous-carquois bicolores (i_j, c_3) auxquels on a retiré les sommets de couleur i_j d'indice inférieur strictement à $j^{\gamma+}$ sont en configuration de dents de scie pure.*

6. *Soit G_k un facteur indécomposable qui a un indice de couleur différente de celle de j (c'est à dire de i_{p_m}) ou qui est l'un des $G_{j^{(\gamma-1)+},m}, \ldots, G_{j,m}$. Alors $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_k)$ a des coordonnées toutes nulles sauf celles d'indices de couleur i_k appartenant à l'intervalle :*

$$f_{\min}(k)^{\alpha(k,m)\oplus} \leq j \leq f(k^{\alpha(k,m)+}), \tag{4.2}$$

qui valent alors 1.

4.9.1 Preuve de l'initialisation du lemme structurel

Ici on prouve que les hypothèses de lemme sont vérifiées pour la graine $G_{m-1} = C(\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$. On suppose que le théorème 4.6.1 est vérifié pour la graine coupée $G_{m-1} = C(\widehat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \widehat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$.

Point 1 Cela revient à dire que les facteurs $G_{k,m-1}$ de couleur différente de i_{p_m} ont des coordonnées d'indice inférieur ou égal à m nulles. Le point 1 du théorème nous donne déjà cette information pour les coordonnées jusqu'à l'indice $m-1$ (inclus). De plus, en utilisant le point 6 du théorème, comme $i_{p_m} \neq i_k$ et donc, pour ces k, $\alpha(k,m) = \alpha(k,m-1)$, les sommets d'une couleur différente de celle de j ont déjà une coordonnée d'indice m nulle.

Point 2 Ici on est dans le cas particulier du point 2 et donc tautologiquement, les hypothèses du point 2 du théorème sont vérifiées.

Point 3 Ici aussi, par hypothèse, G vérifie les hypothèses du théorème.

Point 4 Ici, l'ensemble d'indices est vide et donc l'hypothèse est vérifiée, étant une restriction des hypothèses du théorème (car on ne considère pas les sous-carquois bicolores dont l'une des couleurs est i_j).

Point 5 Les sous-carquois bicolores considérés étant les (i_{p_j}, c_3), ce point revient à l'hypothèse 5 du théorème et est donc trivialement vérifié.

Point 6 Comme pour le point 1, on a $\alpha(k,m) = \alpha(k,m-1)$ pour tout k d'une couleur différente de i_j et la liste des sommets de la couleur i_j considérée est vide donc cette hypothèse revient à celle du théorème et est trivialement vérifiée.

Conclusion Ainsi, on remarque qu'à part ce qui concerne la ligne de couleur i_j, ces hypothèses sont celles du théorème avant qu'on commence la ligne de mutation, elles sont donc vérifiées et l'initialisation de la preuve du lemme 4.9.1 est correcte.

4.10 Configurations et héritages

Dans cette section, on va, par une analyse des configurations possibles et par des disjonctions de cas, donner des outils qui permettront de prouver les points 4 et 5 du lemme 4.9.1 dans la section 4.12.

Remarque 4.10.1. *Par définition de l'ensemble de l'équation 4.1, on a que si $R_{k^+,m}$ est évincé, alors $R_{k,m}$ est forcément lui-même évincé. Inversement, une fois qu'un module n'est pas évincé, les suivants de la ligne ne le seront pas non plus lors de cette série de mutations. C'est pour cela qu'on n'étudiera les évictions que dans les configurations initiales.*

On liste ici les configurations qui vont intervenir au cours de nos mutations. On notera ici G_k les modules initiaux puis G_k^* une fois mutés.

Configurations initiales

Initialement et sous réserve de la validité des hypothèses 5 et 4 du théorème 4.6.1, on a les trois configurations de la table 4.1 comme configurations possibles.

Pour expliquer les raisons de ces héritages de configuration, on va détailler les cas. A chaque fois on se référera aux configuration de la table 4.1 ou à celles de la table 4.2 en adaptant la numérotation des sommets. Dans chacun des cas, on suppose que $G_{k^{2+}}$ existe, car si ce n'est pas le cas alors $G_{k^+} = G_{k_{\text{maxi}}}$ est le dernier sommet de sa ligne et alors on ne va pas le muter. De plus on aura alors $k_{\text{maxi}} = (k_{\max})^{\alpha(k,m)+}$ et donc à partir de ce moment, ce module ne fera plus partie des graines coupées successives.

Cas α_0 si éviction Dans ce cas, après mutation de G_k, on l'évince de la graine coupée et donc G_{k^+} est le nouveau premier sommet de sa ligne. Si G_{k^+} n'avait aucune flèche ordinaire, on est à nouveau dans le cas α_0. S'il avait une flèche ordinaire avec la ligne i_j, par le point 5 la première flèche $G_j \leftrightarrow G_{k^+}$ a forcément pour but G_{k^+} et alors, selon la présence d'une flèche $G_{k^{2+}} \to G_j$ on est dans le cas α_1 ou le cas α_2. Par le même raisonnement sur le point 5, G_k ne peut avoir deux flèches ordinaires le reliant à G_j, auquel cas il y en aurait une qui aurait G_k comme source.

Cas α_0 sans éviction Si on n'a pas d'éviction, on continue dans les cas suivants. Comme précédemment, G_{k^+} ne peut posséder au plus qu'une flèche ordinaire avec la ligne G_j, celle-ci ayant G_{k^+} comme but. Si on n'en a pas, on est dans le cas β_0, si on en a une, selon la configuration entre $G_{k^{2+}}$ et G_j, on est dans le cas β_1 ou β_2.

Cas α_1 avec éviction Si on a éviction de G_k^*, G_{k^+} devient le premier sommet de la ligne. Cependant, la flèche $G_j \to G_{k^+}$ est toujours présente. De plus on ne peut pas avoir d'autre flèche de la ligne i_j adjacente à G_{k^+} car ici, soit la flèche $G_j \to G_k$ était la seule entre les deux lignes soit c'était le début d'une dent $G_{k^{\gamma+}} \to G_j \to G_k$ avec $\gamma > 1$ (puisqu'on n'a pas $G_{k^+} \to G_j$ par hypothèse), l'autre flèche étant conservée malgré l'éviction. Ainsi on a donc une seule flèche pointant sur G_{k^+} et selon la configuration de $G_{k^{2+}}$ on est dans le cas α_1 ou α_2.

Cas α_1 sans éviction Si on n'a pas d'éviction, on est donc maintenant en train d'étudier la configuration autour de G_{k^+} tout en sachant qu'il n'y a qu'une seule flèche ordinaire $G_j \to G_{k^+}$ et qu'on a une flèche $G_k^* \to G_j$. Ainsi, à renommage des sommets près et selon l'existence ou non d'une flèche $G_{k^{2+}} \to G_j$, on est dans le cas β_3 ou β_4.

Cas α_2 avec éviction Si on a éviction G_{k^+} devient le premier sommet de sa ligne. De plus on sait qu'on n'a pas de flèche $G_{k^+} \leftrightarrow G_j$ mais G_{k^+} étant la fin d'une dent $G_{k^+} \to G_j \to G_k$ soit c'était la dernière (et seule) et on n'a plus d'autre flèche, soit il existe $\gamma > 0$ tel que $G_{j^{\gamma+}} \to G_{k^+}$. Si une telle flèche n'existe pas, G_{k^+} n'est pas relié à la ligne i_j et on est dans le cas α_0 à nouveau, sinon, selon ce qui se passe autour de $G_{k^{2+}}$ on est dans le cas α_1 ou α_2.

Cas α_2 sans éviction Sans éviction, on arrive avec G_{k^+} entouré de deux flèches horizontales l'ayant comme source, et potentiellement une flèche ordinaire $G_{j^{\gamma+}} \to G_k^+$. Du fait de l'absence de connexion entre G_{k^+} et G_j on n'est pas dans un cas β_3 ou β_4 et donc en plus du renommage $k^+ \to k$, on fera aussi un renommage $j^{\gamma+} \to j$ pour les configurations de la table 4.2. Si on n'a pas de flèche ordinaire, on retombe sur le cas β_0. Si on en a une, selon ce qui se passe sur $G_{k^{2+}}$ on est dans le β_1 ou β_2.

Config.	α_0	α_1	α_2
Surnom	Initiale simple	Initiale dent longue	Initiale dent courte
G	$\leftarrow G_{k+} \leftarrow G_k$	$\begin{tikzcd} G_{j+} & G_j \arrow[l, dashed] \arrow[d, "\emptyset"] & \\ & G_{k+} & G_k \arrow[l] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} G_{j+} & G_j \arrow[l, dashed] \arrow[dr] & \\ & G_{k+} \arrow[u] & G_k \arrow[l] \end{tikzcd}$
$\mu_k(G)$	$\leftarrow G_{k+} \rightarrow G_k^*$	$\begin{tikzcd} G_{j+} & G_j \arrow[l, dashed] \arrow[dl] & \\ & G_{k+} \arrow[r] & G_k^* \arrow[ul] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} G_{j+} & G_j \arrow[l, dashed] \arrow[d, "\emptyset"] & \\ & G_{k+} \arrow[r] & G_k^* \arrow[ul] \end{tikzcd}$
Suivant sans éviction Suivant si éviction	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$	β_3, β_4 α_1, α_2	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$

Table 4.1 – Configurations initiales possibles et évolution

Config.	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4
Surnom	Début et fin	Entrée dent longue	Entrée dent courte	Milieu dent (longue)	Fin dent
G	$G_{k+} \leftarrow G_k \rightarrow G_{k-}^*$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[d, "\emptyset"] & \\ G_{k+} & G_k \arrow[l] \arrow[r] & G_{k-}^* \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[d, "\emptyset"] & \\ G_{k+} \arrow[ur] & G_k \arrow[l] \arrow[r] & G_{k-}^* \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[d, "\emptyset"] & \\ G_{k+} & G_k \arrow[l] \arrow[r] & G_{k-}^* \arrow[ul] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[d] & \\ G_{k+} \arrow[ur] & G_k \arrow[l] \arrow[r] & G_{k-}^* \arrow[ul] \end{tikzcd}$
$\mu_k(G)$	$G_{k+} \rightarrow G_k^* \leftarrow G_{k-}^*$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G_{k+} \arrow[r] & G_k^* \arrow[u] & G_{k-}^* \arrow[l] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[dl, "\emptyset"'] \arrow[dr] & \\ G_{k+} \arrow[r] & G_k^* \arrow[u] & G_{k-}^* \arrow[l] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[dl] \arrow[d, "\emptyset"] & \\ G_{k+} \arrow[r] & G_k^* \arrow[u] & G_{k-}^* \arrow[l] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & G_j \arrow[d, "\emptyset"] & \\ G_{k+} \arrow[r] & G_k^* \arrow[u] & G_{k-}^* \arrow[l] \end{tikzcd}$
Suivant	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	β_3, β_4	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	β_3, β_4	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$

Table 4.2 – Configurations générales possibles et évolution

Exemple 4.10.2. On va illustrer cela par l'exemple de la figure 4.6

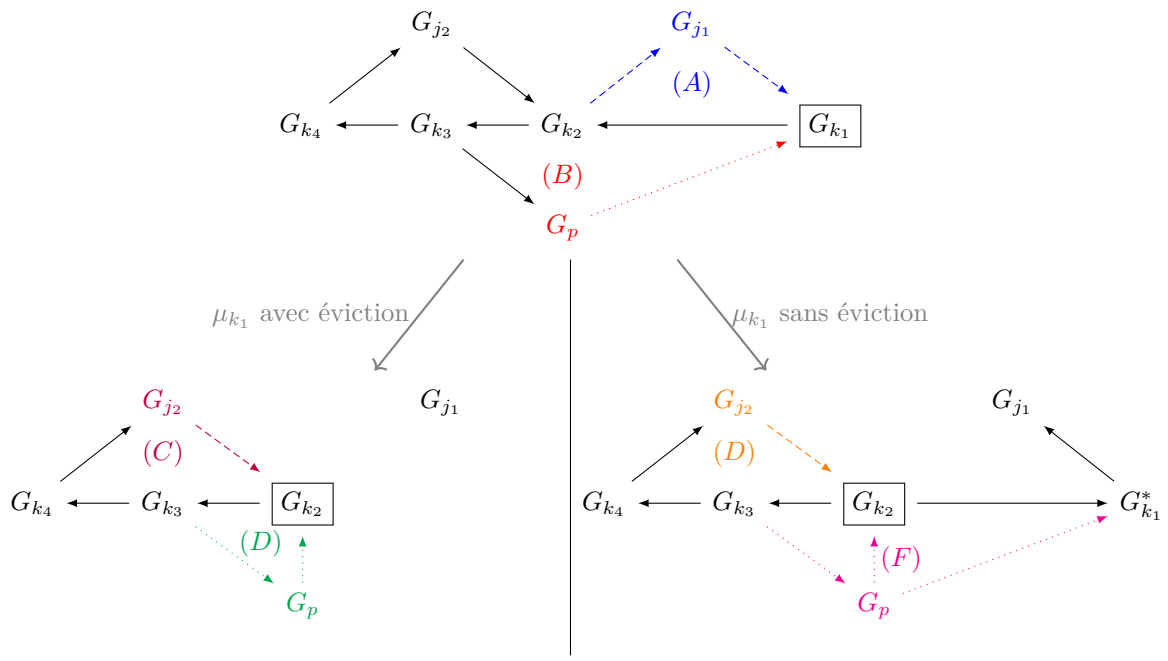


FIGURE 4.6 – Évolutions de configurations initiales

Initialement on a un carquois où les sommets j_2 et j_1 sont de couleur i_j, k_i de couleur i_k et p de couleur i_p.

Le sous-carquois bicolore (i_k, i_j) est en configuration α_2 par rapport au sommet G_{k_1} (flèches en tirets bleus et flèches horizontales de la ligne i_k autour de (A)). Le sous-carquois bicolore (i_k, i_p) est en configuration α_1 autour de G_{k_1} (flèches en pointillés rouges autour de (B) et flèches horizontales).

Ensuite, après mutation de G_{k_1}, si on a éviction de ce dernier, on observe que le sous-carquois bicolore (i_k, i_j) est maintenant en configuration α_1 autour de G_{k_2} (tirets violets, lettre (C)). De son côté le carquois bicolore (i_k, i_p) est maintenant en configuration α_2 (pointillés verts, (D)). On remarque que si la dent initiale avait été $G_{k_4} \to G_p \to G_{k_2}$, (D) serait encore en configuration α_1.

Si on n'a pas éviction du dernier sommet, alors la configuration du sous-carquois bicolore (i_k, i_j) autour de G_{k_2} est de type β_1 (tirets orange, (D)). Si la dent $G_{k_4} \to G_{j_2} \to G_{k_2}$ était plus courte $(G_{k_3} \to G_{j_2} \to G_{k_2})$, on aurait une configuration de type β_2.

La configuration du sous-carquois bicolore (i_k, i_p) est de type β_4 (3 flèches ordinaires en pointillés magenta, (F)). On remarque que comme précédemment, si la dent était plus longue, et qu'on avait initialement $G_{k_4} \to G_p \to G_{k_1}$ on serait alors en configuration β_3.

Configurations générales

Par le tableau 4.2, on a identifié pour l'instant 5 configurations générales. On montrera que sous nos hypothèses, on n'aura toujours que ces 5 configurations puisqu'aucune autre n'émerge suite à des mutations.

Cas β_0 Après mutation de G_k, on arrive sur G_{k^+}. G_{k^+} peut être au plus adjacent à une seule flèche ordinaire, disons $G_j \to G_{k^+}$ (pour les mêmes raisons que dans le cas α_0). Si on n'a pas de telle flèche, on retombe sur un cas β_0. S'il en existe une, selon la configuration autour de $G_{k^{2+}}$, on tombe donc dans le cas β_1 ou β_2.

Cas β_1 Suite à la mutation de G_k, on a d'ores et déjà un triangle $G^*_k \to G_j \to G_{k^+}$. De plus, comme pour le cas α_1, on ne peut avoir de flèche $G_{j^{\gamma+}} \to G_{k^+}$, $\forall \gamma > 0$. Ainsi selon la configuration de $G_{k^{2+}}$, on sera dans le cas β_3 ou β_4.

Cas β_2 Dans ce cas, comme pour α_2, on aura potentiellement une flèche $G_{j^{\gamma+}} \to G_{k^+}$ et l'absence de flèche $G_{k^+} \not\to G_j$ entraîne un renommage des sommets. Si une telle flèche n'existe pas, on est dans le cas

β_0 (remarquons alors que c'était la dernière dent et donc qu'on n'aura plus que du β_0 jusqu'à la fin pour ce couple de lignes). Si elle existe, selon la configuration de $G_{k^{2+}}$ on est dans le cas β_1 ou β_2.

Cas β_3 Comme pour le cas β_1, on n'a qu'une seule flèche ordinaire $G_j \to G_{k^+}$. Ainsi, selon la configuration de $G_{k^{2+}}$ on est dans le cas β_3 ou β_4.

Cas β_4 Comme pour le cas β_2, on considère un nouveau sommet de la ligne i_j. Si on n'a pas de flèche de ce sommet vers G_{k^+} on est dans le cas β_0 et comme précédemment dans ce cas là on y reste jusqu'à la fin. Si elle existe, on est dans le cas β_1 ou β_2 selon la configuration de $G_{k^{2+}}$.

Exemple 4.10.3. On va illustrer cela par l'exemple de la figure 4.7

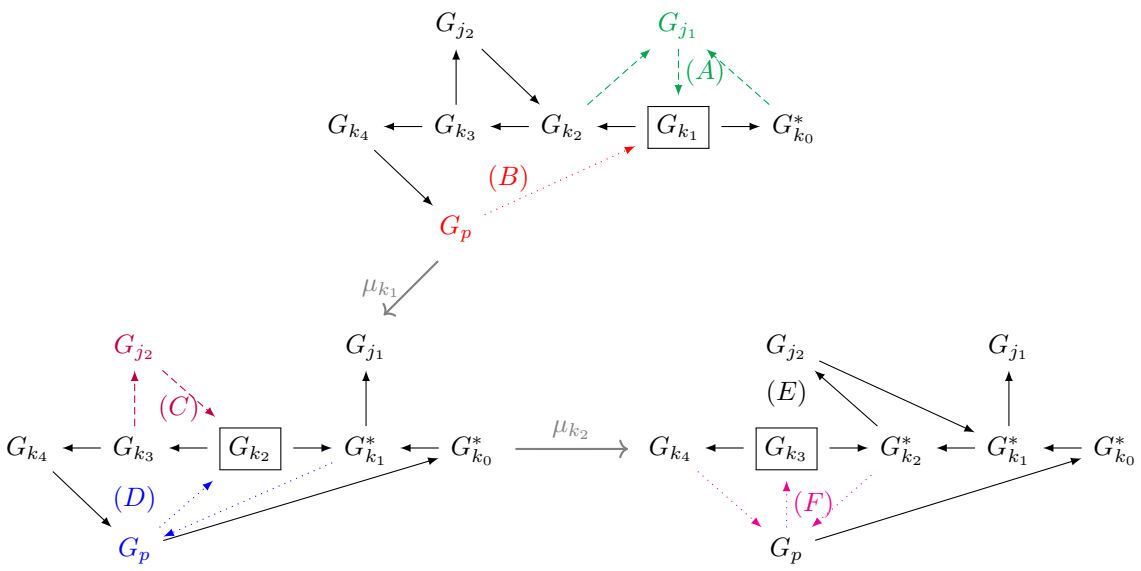


FIGURE 4.7 – Évolutions de configurations générales

Initialement, dans le sous-carquois bicolore (i_k, i_j) on a une configuration β_4 autour de G_{k_1} (tirets verts, (A)). Dans le sous-carquois bicolore (i_k, i_p) on a une configuration β_1 (pointillés rouge, (B)).

Après mutation μ_{k_1}, dans le sous-carquois (i_k, i_j), on a, autour de G_{k_2} une configuration β_2 (tirets violets, (C)). Dans le sous-carquois (i_k, i_p), on a une configuration β_3 (pointillés bleu, (D)).

Après mutation μ_{k_2}, dans le sous-carquois (i_k, i_j) on a une configuration β_0 autour de G_{k_3} ((E), pas de flèches ordinaires). Dans le sous-carquois (i_k, i_p), on a une configuration β_4 à nouveau (pointillés magenta).

4.11 Décalage de dents

Dans cette section, on va montrer que l'effet des mutations successives de $\hat{\mu}_m$ sur les sous-carquois bicolores (i_{p_m}, c_3) peut se résumer en un « décalage des dents » de la configuration en dents de scie (un tel décalage pouvant provoquer l'apparition d'une barbe initiale).

Proposition 4.11.1 (Décalage de dents)**.** *Supposons qu'on ait une ligne i_{p_m} d'un carquois dans la configuration 5 du théorème 4.6.1. Après mutation de chacun des sommets de la ligne dans l'ordre croissant de leurs indices $\mu_{(p_m)^-_{\text{maxi}}} \circ \cdots \circ \mu_{(p_m)_{\text{mini}}}$ et exclusion du sommet d'indice maximal de la ligne, appelé $G_{(p_m)_{\text{maxi}}}$, on retrouve une configuration en dents de scie à un décalage des indices de la ligne i_{p_m} d'un rang vers la droite. Autrement dit les dents $G_{k^{\alpha+}} \to G_j \to G_k$ deviennent des dents $G^*_{k^{(\alpha-1)+}} \to G_j \to G^*_{k^-}$ où $i_k = i_{p_m}$ avec les restrictions suivantes :*

- *Si $k = k_{\text{mini}}$, alors le triangle $G_{k^{\alpha+}} \to G_j \to G_k$ devient après mutation la flèche $G^*_{k^{(\alpha-1)+}} \to G_j$*
- *Si la dernière flèche ordinaire est dans l'orientation $G_j \to G_k$ avec $k \neq k_{\text{maxi}}$ (barbe finale), on a l'apparition d'une dent $G^*_{(k_{\text{maxi}})^-} \to G_j \to G^*_{k^-}$ (avec la réserve précédente si $k = k_{\text{mini}}$).*

Démonstration. On va utiliser l'étude des différentes configurations possibles de la section 4.10.

On va commencer le raisonnement à la première dent après éviction (éventuelle) des modules initiaux de la ligne. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'il n'y a pas eu d'éviction. En effet dans le cas contraire, après l'éviction, on recommence le raisonnement initial sur la même ligne mais un module plus loin et la ligne est toujours dans la configuration voulue d'après la proposition 4.2.13.

Si on a une suite de modules du type 1. (dans la nomenclature de la définition 4.2.11, on se déplace jusqu'à atteindre la première dent (on rappelle qu'on n'a pas de barbe initiale de par la configuration de la ligne). On a alors ici 4 cas de figures : d'une part, soit le sommet du triangle est le premier module de la ligne soit non, d'autre part soit c'est une dent courte (les extrémités gauche et droite sont des sommets consécutifs) ($G_{k^+} \to G_j \to G_k$) soit c'est une dent plus longue. Selon les cas on a le tableau 4.3 pour la première configuration explorée :

	Triangle long	Triangle court
Sommet initial	α_1	α_2
Sommet non initial	β_1	β_2

Table 4.3 – Configuration initiale selon les cas

On va commencer par traiter les cas courts. Si on est dans le cas α_2, après mutation, on a une flèche unique $G_k^* \to G_j$ qui forme la dent décalée (étant l'image de la flèche initiale $G_{k^+} \to G_j$) et dégénérée, le décalage de la flèche $G_j \to G_k$ n'étant pas possible sur G_{k^-}, ce sommet n'existant pas ou plus. Il n'y a pas de flèche partant vers les sommets successifs à G_k, pour la suite des dents, on se référera aux cas β.

Si on est dans le cas β_2, on passe directement d'une dent $G_{k^+} \to G_j \to G_k$ à une dent $G_k^* \to G_j \to G_{k^-}^*$, on a donc décalé la dent d'un rang vers la droite et sans créer de flèche vers les sommets successifs à G_k. A nouveau, pour la dent suivante, on réutilisera le raisonnement général, et elle commencera par une configuration β_1 ou β_2

Pour ce qui est du cas α_1, la dent longue initiale, le raisonnement sera le même que pour β_1, la dent longue générale, à l'exception de la délétion de la flèche $G_j \to G_k$ qui ne peut pas être décalée en $G_j \to G_{k^-}$ faute d'existence de G_{k^-}. La preuve dans ce cas sera donc vue à travers le dernier cas (on a alors l'apparition d'une barbe initiale).

Pour le cas de la dent longue générale, on commence par la configuration β_1, la flèche $G_{k^{\gamma+}} \to G_j$ qui forme la dent avec $G_j \to G_k$ n'est pas représentée, car $\gamma > 1$ (γ représente la longueur de la base de la dent). La mutation de β_1 nous donne la flèche $G_j \to G_{k^-}^*$, le renversement de la flèche ordinaire en $G_k^* \to G_j$ et l'apparition d'une flèche $G_j \to G_{k^+}$. On passe alors au sommet suivant à muter, la configuration (en tenant compte de la réécriture $k^+ \rightsquigarrow k$ par rapport aux indices de la table 4.2) étant alors β_3 si $\gamma > 2$ ou β_4 si $\gamma = 2$.

Si $\gamma > 2$, alors après mutation, la flèche initiale renversée qu'on avait $G_k \to G_j$ est supprimée, la flèche $G_j \to G_{k^+}$ est renversée et une flèche $G_j \to G_{k^2+}$ apparaît. On recommence alors le même raisonnement au pas suivant, arrivant en configuration β_3 β_4 selon si $G_{k^{\gamma+}}$ est le successeur direct du sommet qu'on va muter.

Si $\gamma = 2$ ou qu'on arrive en configuration β_4 suite à une suite de configurations β_3, on est alors au moment où on va muter $G_{k^{(\gamma-1)+}}$ et on a dans le triangle initialement considéré :

1. la flèche décalée $G_j \to G_{k^-}^*$ (qui n'existe pas si G_k est le premier de sa ligne)
2. la flèche $G_{k^{(\gamma-2)+}}^*$
3. la flèche $G_j \to G_{k^{(\gamma-1)+}}$ qu'on s'attend à avoir dans le sens opposé comme formant la dent avec la flèche (1)
4. la flèche $G_{k^{\gamma+}} \to G_j$ qui est le côté gauche de la dent.

Après mutation, la flèche 1) est inchangée, la 2) est supprimée, la 3) est renversée, formant une dent $G_{k^{(\gamma-1)+}}^* \to G_j \to G_{k^-}^*$ et la flèche 4) est supprimée. Finalement on a bien décalé la dent d'un rang vers la droite.

Suite à cette mutation on reprend le raisonnement par une configuration β_1 ou β_2 immédiatement (car les dents successives ont un sommet en commun), soit on arrive sur une barbe finale ou la suite de flèches horizontales finales. Si c'est ce dernier cas, il n'y a alors plus rien à faire.

Si on a une barbe finale, on a alors une configuration β_1, suivie de configurations β_3 mais sans avoir de configuration β_4 pour conclure la récurrence. Si on appelle $G_{k^{\varsigma+}}$ le dernier sommet de la ligne, le dernier sommet qu'on mutera sera $G_{k^{(\varsigma-1)+}}$ en configuration β_3. Après mutation on a une flèche $G_{k^{(\varsigma-1)+}}^* \to G_j$

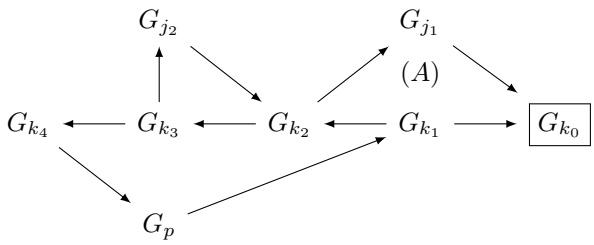
qui ferme la dent dégénérée formée de la barbe finale et une flèche $G_j \to G_{k^{\varsigma+}}$ qui n'apparaîtra plus par la suite, le sommet but rejoignant la liste des sommets ignorés par la coupure de la graine. Ainsi finalement on retombe bien sur l'hypothèse du lemme.

□

Exemple 4.11.2. On va reprendre l'exemple 4.10.3

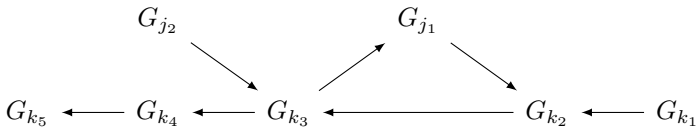
On a la dent initialement $G_{k_3} \to G_{j_2} \to G_{k_2}$ qui se retrouve décalée en $G^*_{k_2} \to G_{j_2} \to G^*_{k_1}$ après $\mu_{k_2} \circ \mu_{k_1}$, c'est le cas d'une dent courte non-initiale.

On peut ajouter un carquois précédent, traduisant l'état avant la mutation μ_{k_0}. Ce carquois serait :

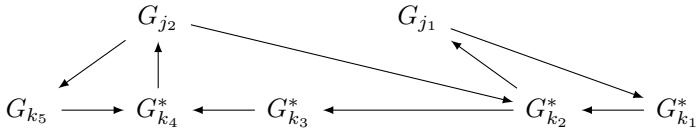


Alors on voit une dent (A) $G_{k_2} \to G_{j_1} \to G_{k_0}$ qui, après $\mu_{k_1} \circ \mu_{k_0}$ se réduit à la barbe initiale $G^*_{k_1} \to Gj_1$. C'est le cas d'une dent longue initiale.

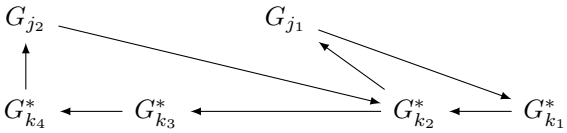
Pour illustrer la deuxième partie de la 4.11.1, on va considérer le carquois suivant :



Dans ce cas là, après $\mu_{k_4} \circ \cdots \circ \mu_{k_1}$ on a le carquois :



Qui devient, après exclusion de G_{k_5} de la liste des sommets considérés :



On a ici l'apparition d'une dent $G^*_{k_4} \to G_{j_2} \to G^*_{k_2}$ alors qu'on n'avait initialement qu'une barbe finale $G_{j_2} \to G_{k_2}$.

Néanmoins on remarquera que ça ne perturbe ni la structure en dents de scie, ni les mutations ultérieures, le sommet R_{k_4} ne sera plus muté et donc la flèche ne sera pas prise en compte dans le calcul des Δ-vecteurs lors des mutations ultérieures.

4.12 Preuve de l'hérédité du lemme structurel

On suppose le lemme 4.9.1 vérifié pour le module $\mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$.

Le point 1 sera prouvé en dernier, se déduisant du point 6.

Point 2 On a deux cas, soit on est au début de la ligne (première mutation ou suivant une éviction) autrement dit dans un des cas α de la section 4.10 soit ce n'est pas le cas et on est dans un des cas β.

Si on est dans un cas α, on a une flèche $R_{j^+,m-1} \leftarrow R_{j,m}$ avant mutation, par le 4 du lemme. Suite à la mutation, cette flèche sera renversée et ce sera la seule flèche horizontale dans ce cas. Ainsi, autour de $R_{j^+,m-1}$ on aura la flèche $R_{j^+,m-1} \to R_{j,m}$ qui sera la seule modifiée et donc on a bien montré l'hérédité.

Si on est dans un cas β, on a la configuration $R_{j^{(\gamma+1)+},m-1} \leftarrow R_{j^{\gamma+},m-1} \to R_{j^{(\gamma-1)+},m}$. Après mutation, les deux flèches sont inversées et donc on a $R_{j^{(\gamma+1)+},m-1} \to R_{j^{\gamma+},m} \leftarrow R_{j^{(\gamma-1)+},m}$ qui sont les deux seules flèches horizontales modifiées et donc on a bien une seule flèche horizontale dans un sens inhabituel, à la place prévue (on sait que les autres flèches horizontales n'ont pas été modifiées). On a donc bien l'hérédité.

Point 3 En étudiant les différentes configurations de la section 4.10, et en utilisant le corollaire du point 5 en ce que le sommet qu'on va muter est but de toutes les flèches ordinaires qui lui sont adjacentes et source d'aucune, on a donc la validité de l'étude des configuration de la section 4.10 et pas de possibilité de création d'une flèche entre lignes de couleurs toutes deux adjacentes à i_j mais non adjacentes entre elles.

Point 4 Par hypothèse de récurrence, on sait déjà que la ligne $R_{j^{(\gamma-1)+},m} \leftarrow \cdots \leftarrow R_{j,m}$ est dans la configuration voulue, il faut donc montrer qu'après mutation de $R_{j,m-1}$, la ligne prolongée de ce module, maintenant noté $R_{j,m}$, sera dans la bonne configuration.

Si on est sur le premier sommet de la ligne, la ligne prolongée sera réduite au module qu'on vient de muter. En étudiant les configurations α de la section 4.10, on a que $R_{j,m}$ est en phase 1. ou 5. au sens de la définition 4.2.11 après une configuration α_0, après une configuration α_1 ou α_2 on est en phase barbe initiale (on ne regarde pas la flèche $R_{k,m-1} \to R_{j^+,m-1}$). Ainsi dans chacun de ces cas, on vérifie le point.

Si on est au milieu de la ligne, on doit examiner les configurations β. Si on est en β_0 c'est qu'on n'a pas encore atteint la première dent ou qu'on a dépassé la dernière et donc que sur ce qui précède sur la ligne, on est en phase 1. ou 5.. Le résultat après la mutation donne un prolongement de cette phase.

Si on est en β_1 ou en β_2, soit on avait avant une phase 1. (on ne peut pas avoir de barbe initiale par le point 5 du théorème) soit une dent. Après la mutation, on a une dent $R_{j^{\gamma+},m} \to R_{k,m-1} \to R_{j^{(\gamma-1)+},m}$ et donc on est toujours dans la suite des dents. Si on est dans la configuration β_3 ou β_4, c'est qu'on est au milieu d'une dent, et la ligne qui précède est dans ce cas. Après mutation, on a décalé l'extrémité de la dent d'un rang à gauche et la demi-ligne de droite est toujours en phase de dents.

Ainsi, on a vérifié le point 4 du lemme.

Exemple 4.12.1. On va considérer le cas $W = D_6$, avec

$$\overline{w} = [5, 2, \underline{4}, \underline{3}, \underline{6}, 1, \underline{4}, \underline{5}, \underline{2}, \underline{3}, 1, \underline{4}, \underline{6}, 2, \underline{1}, \underline{3}, 2, \underline{4}, \underline{5}, 3, \underline{2}, 4, \underline{3}, 1, \underline{2}],$$

et pour

$$\overline{v} = [4, 3, 6, 4, 5, 2, 3, 4, 6, 1, 3, 4, 5, 2, 3, 2].$$

On regarde $C(\hat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$. Ici on est dans le cas initial de la récurrence du lemme, donc dans la figure 4.8, la ligne verte de couleur 3 est en configuration de dents de scies pures.

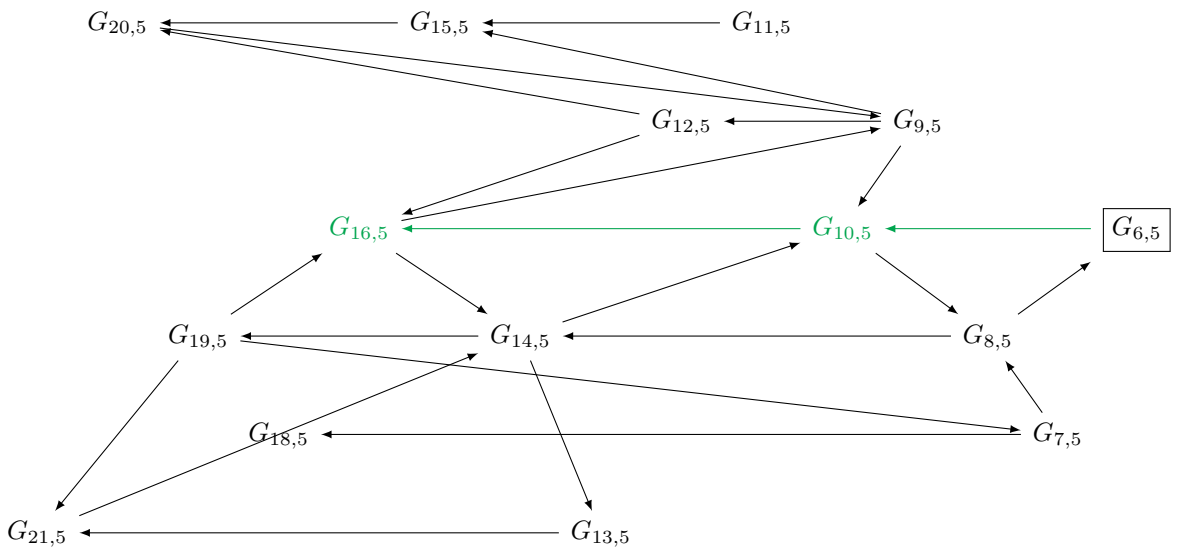


FIGURE 4.8 – $C(\hat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(\Gamma_{\overline{w}}))$

On mute maintenant dans la direction 6. On a le carquois de la figure 4.9.

Toutes les autres lignes que la verte sont en configuration de dents de scie et la ligne verte dont on ne considère que le sommet $G_{6,5}$ est aussi en configuration de dents de scie (cas dégénéré avec un seul sommet et une seule flèche ordinaire).

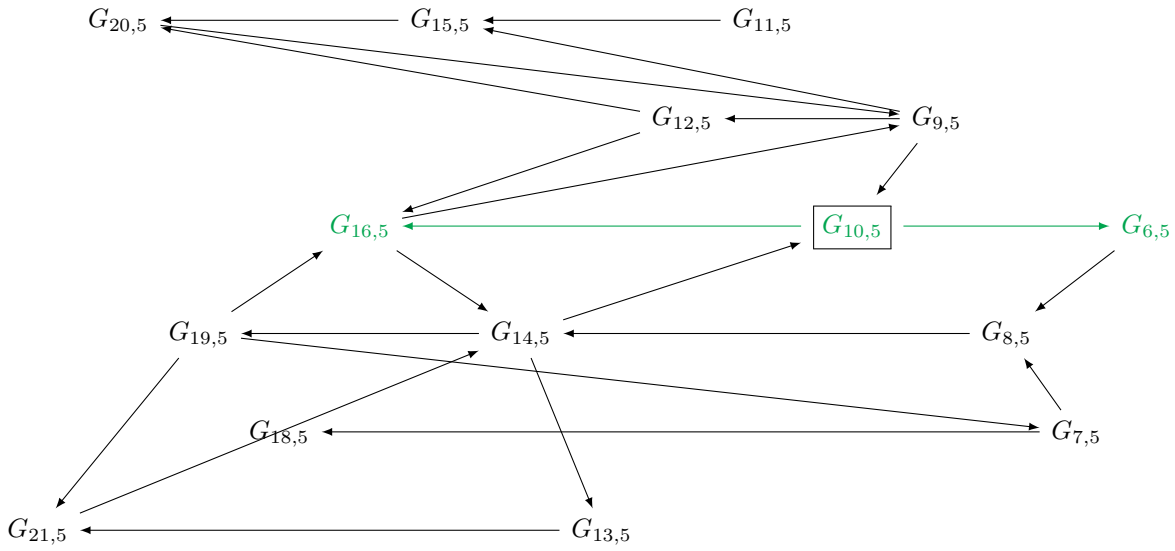


FIGURE 4.9 – $C(\mu_6 \circ \hat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(\Gamma_{\overline{w}}))$

Point 5 Ce point revient à dire que pour toute couleur adjacente à i_j, la première flèche ordinaire après $R_{j^{\gamma+},m-1}$ a pour but la ligne de couleur i_j.

On va le prouver en supposant qu'il existe une barbe initiale et montrer que c'est impossible.

Soit la flèche était déjà présente dans la graine $\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$, soit elle a été créé par la mutation précédente, soit elle fait partie d'une dent dont on a supprimé l'autre flèche ordinaire.

Dans le premier cas c'est impossible par l'hypothèse 5 du théorème (et cela veut dire, que par rapport à cette couleur on n'a toujours été que dans les configurations α_0 ou β_0 dans les mutations précédentes). Pour le deuxième cas, en regardant les cas créant des flèches vers le successeur du sommet muté (à savoir α_1, β_1 et β_3) on voit que ce sont toujours des flèches ayant la ligne de couleur i_j comme but.

Ainsi si une flèche apparaissait ce serait l'extrémité gauche d'une dent. On sait déjà que ce ne peut pas être une dent dont la base est de longueur 1 (cas α_2 et β_2) car dans ce cas, la flèche $R_{j^{\gamma+},m-1} \to R_{k,m-1}$ est supprimée par la mutation, c'est donc une flèche provenant d'une dent « longue ». Mais dans ce cas on a eu à un moment la configuration β_1 et ensuite des configurations β_3. Mais alors la flèche ordinaire ayant pour source $R_{j^{\gamma+},m-1}$ aurait été supprimée par la configuration β_4 de l'étape précédente.

Ainsi on a que pour toute couleur adjacente à celle de j, la première flèche ordinaire du couple de lignes a la ligne de couleur i_j comme but. On a démontré l'hérédité du point 5.

Exemple 4.12.2. On regarde la figure 4.9, on considère la partie gauche de la ligne verte, formée des sommets $G_{10,5}$ et $G_{16,5}$, on est bien en configuration de dents de scie pures, $G_{10,5}$ n'étant source d'aucune flèche ordinaire.

Point 6 Ici, il faut montrer que, si les coordonnées non nulles parmi les ℓ premières du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur de $R_{j^{\gamma+},m-1}$ sont les i de la couleur i_j tels que

$$f_{\min}(j^{\gamma+})^{\alpha(j,m-1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1))+})$$

avant mutation, $R_{j^{\gamma+},m}$ possède pour coordonnées non nulles parmi les ℓ premières, les i tels que

$$f_{\min}(j^{\gamma+})^{\alpha(j,m)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m))+}).$$

On va tout d'abord établir des résultats intermédiaires, conséquences du point 5.

Lemme 4.12.3. *A chaque mutation de $\mu_\bullet$, le module à muter n'est source d'aucune flèche ordinaire vers un autre sommet de la graine coupée.*

Démonstration. C'est initialement vrai lorsque dans la graine $G = (\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$, on va muter le premier sommet, j_{mini} de la ligne i_{p_m}. En effet, aucun sous-carquois bicolore (i_{p_m}, c_3) pour toute couleur c_3 adjacente ne possède de barbe initiale, en vertu de l'hypothèse 5 du théorème structurel 4.6.1. Le premier sommet ne possède soit pas de flèche ordinaire (s'il est en configuration 1. par rapport à chacune

de ses couleurs adjacentes) soit des flèches ayant j_{mini} comme but (configurations 3., extrémité d'une dent, ou configuration 4., barbe finale).

Par le point 5, tous les carquois bicolores (i_j, c_3) où i_j est le sommet qu'on va muter sont en configuration de dents de scie pure. Ainsi s'il existait une flèche ordinaire de source i_j dans la graine G, il existerait au moins un sous-carquois bicolore qui ne serait pas en configuration de dents de scie pure. □

Cette hypothèse, conjuguée à l'hypothèse 6 du lemme structurel 4.9.1, nous permet de déduire l'information suivante sur l'évolution du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur du facteur qu'on va muter (ce qui va nous être utile pour déterminer si le module qu'on vient de muter doit être évincé par la suite ou non).

Lemme 4.12.4 (Évolution des coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs par mutation)**.** *Si le sommet qu'on va muter est dans une des configurations du point 5 du lemme 4.9.1 alors les ℓ premières coordonnées du facteur direct indécomposable muté $G_k^* = G_{k,m}$ seront (vues comme des vecteurs) :*

$$\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{k,m}) = \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{k^+,m-1}) + \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{k^-,m-1}) - \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{k,m-1})$$

avec le vecteur nul pour $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{k^-,m-1})$ si $G_{k^-,m-1} \notin G$.

Démonstration. Par le lemme 4.12.3 et les hypothèses du lemme 4.9.1, on a que le module qu'on va muter est source de toutes les flèches horizontales qui lui sont adjacentes et but de toutes les flèches ordinaires qui lui sont adjacentes. On va reprendre la proposition 2.8.27. D'après cette proposition il y a deux formules différentes à utiliser selon les cas pour le Δ-vecteur du module muté. Ici, on ne fera pas le calcul permettant de déterminer laquelle utiliser mais on va raisonner par l'absurde, en utilisant le fait que, de par la définition même des Δ-vecteurs ceux-ci ne peuvent avoir que des coordonnées positives.

Pour fixer les notations, on va supposer en être à la mutation

$$\mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \hat{\mu}_{m-2} \circ \cdots \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$$

et donc qu'on va muter le module $G_{j^{\gamma+},m-1}$

Par le point 6 du lemme 4.12.4 pour $\mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$, on a que les sommets qui ne sont pas sur la ligne du sommet muté ont une coordonnée d'indice m nulle pour leur $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur (elle est nulle car ils ne sont pas de la bonne couleur et ils n'ont pas été mutés depuis). Ainsi si l'on utilise la première formule de la proposition 2.8.27, on calculera :

$$\sum_{G_i \to G_{j^{\gamma+},m-1}} \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_i) - \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{\gamma+},m-1})$$

Or, comme pour chacun des G_i, la coordonnée d'indice m est nulle et que ce n'est pas le cas pour $G_{j^{\gamma+},m-1}$, on aurait pour $G_{j^{\gamma+},m}$ une coordonnée d'indice m négative, ce qui est absurde. Ainsi, par élimination, on sait que l'on va utiliser la deuxième formule, c'est-à-dire considérer dans le calcul les modules étant le but des flèches horizontales, à savoir $G_{j^{(\gamma+1)+},m-1}$ dans tous les cas [2] et $G_{j^{(\gamma-1)+},m}$ le cas échéant [3]. Dans ce cas, pour éviter une répétition de deux raisonnements similaires, on considérera ce module comme étant égal au module nul.

On a alors l'égalité voulue pour le calcul des coordonnées du module muté :

$$\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{\gamma+},m}) = \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{(\gamma-1)+},m}) + \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{(\gamma+1)+},m-1}) - \widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{\gamma+},m-1})$$

□

En particulier, cela implique :

Corollaire 4.12.5. *La suite exacte courte utilisée pour calculer $\widetilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{\gamma+},m})$ est celle donnée par les flèches ayant pour origine $G_{j^{\gamma+},m-1}$.*

On prouve maintenant le point 6 pour $\mu_{j^{\gamma+}} \circ \mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ avec la formule obtenue au lemme 4.12.4 :

$$\tilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{\gamma+},m}) = \tilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{(\gamma+1)+},m-1}) + \tilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{(\gamma-1)-},m}) - \tilde{\Delta}_{\dot{v}}(G_{j^{\gamma+},m-1})$$

On rappelle que les coordonnées des différents termes sont les i de la couleur de j tels que :

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m-1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1))+}) \quad \text{pour } G_{j^{\gamma+},m-1},$$

2. Il existe forcément car sinon, $G_{j^{\gamma+},m-1}$ serait le dernier module de la ligne et par définition de la coupure, on le supprimerait.

3. Si $G_{j^{\gamma+},m}$ est le premier de sa ligne, il n'a pas de prédécesseur.

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m-1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+1+\alpha(j,m-1))+}) \quad \text{pour } G_{j^{(\gamma+1)+},m-1},$$

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma-1+\alpha(j,m))+}) \quad \text{pour } G_{j^{(\gamma-1)+},m},$$

en effet, $G_{j^{(\gamma-1)+},m}$ ayant déjà été muté, α est modifié. L'argument de $f_{\min}$ a été remplacé par j dans chaque expression car cette fonction ne dépend que de la couleur. En simplifiant les expressions et en tenant compte du fait que $\alpha(j,m) = \alpha(j,m-1)+1$, on a alors :

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m-1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1))+}) \quad \text{pour } G_{j^{\gamma+},m-1},$$

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m-1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+1+\alpha(j,m-1))+}) \quad \text{pour } G_{j^{(\gamma+1)+},m-1},$$

$$f_{\min}(j)^{(\alpha(j,m-1)+1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1))+}) \quad \text{pour } G_{j^{(\gamma-1)+},m}.$$

On peut donc redécouper en trois intervalles :

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m-1)\oplus} \leq i < f_{\min}(j)^{(\alpha(j,m-1)+1)\oplus},$$

$$f_{\min}(j)^{(\alpha(j,m-1)+1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1))+}),$$

$$f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1))+}) < i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1)+1)+}).$$

Sur le premier intervalle, on a une coordonnée non nulle pour $G_{j^{\gamma+},m-1}$ et une pour $G_{j^{(\gamma+1)+},m-1}$, les coordonnées de $G_{j^{\gamma+},m}$ sur cet intervalle seront donc nulles (on remarque que c'est en fait un seul indice, égal à m).

Sur le second, les trois facteurs ont des coordonnées non nulles, $1+1-1=1$ donc les coordonnées du muté seront égales à 1.

Sur le dernier intervalle, seul $G_{j^{(\gamma+1)+},m-1}$ sera non nul et donc le muté aura des coordonnées non nulles.

Ainsi finalement, les coordonnées non nulles du muté $G_{j^{\gamma+},m}$ seront dans l'intervalle

$$f_{\min}(j)^{(\alpha(j,m-1)+1)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m-1)+1)+}),$$

ce qu'on peut réécrire

$$f_{\min}(j)^{\alpha(j,m)\oplus} \leq i \leq f(j^{(\gamma+\alpha(j,m))+}).$$

On retombe bien sur l'inégalité qu'on voulait prouver, on a prouvé l'hérédité.

Point 1 Se déduit directement du point 6.

Conclusion

On vient de montrer l'hérédité des hypothèses. Par récurrence, on a donc les six hypothèses vérifiées à chaque mutation sur la ligne si elles sont effectuées dans cet ordre.

4.13 Lemme d'inclusion

Ayant prouvé le lemme structurel 4.9.1, on est proche d'avoir prouvé l'hérédité du théorème structurel 4.6.1. Néanmoins, de part sa formulation, le point 5, qui dit que la ligne $i_{p_{m+1}}$ sera en configuration dents de scie pure, ne peut se déduire du lemme 4.9.1. On va donc avoir recours à un nouveau résultat en remarquant que la combinatoire du carquois de la graine coupée est proche du carquois d'une graine $V_{\overline{w}'}$ où $\overline{w}'$ est un sous-mot gauche de $\overline{w}$. On en déduira la structure en dents de scie pures de la combinatoire de cette graine intermédiaire.

Plus précisément, pour $1 \leq m \leq \ell(v)$, on note $\overline{w}_{\geq p_{m+1}}$ le facteur gauche $[i_{\ell(w)}, \ldots, i_{p_{m+1}}]$ de $\overline{w}$. À ce mot on peut associer grâce à la définition 2.6.20 un module $V_{\overline{w}_{\geq p_{m+1}}}$, et le carquois correspondant $\Gamma_{W_{m+1}}$ donné par la définition 2.6.21. Le lemme 4.13.2 va montrer que, moyennant des renumérotations appropriées ρ_m, ce carquois contient comme sous-carquois le carquois coupé Γ_{G_m} de la graine coupée $C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$.

L'intérêt de ce lemme est que ce carquois $\Gamma_{W_{m+1}}$ est parfaitement explicite et de forme régulière donnée par la définition 2.6.21, et on parviendra à en déduire le point 5 manquant du théorème structurel 4.6.1.

Définition 4.13.1 (Morphisme de graphe)**.** Soient $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ et $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1)$ deux graphes. Une application $f : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ est un morphisme de graphe si pour tout arête $\alpha_{j_s,j_t} \in \Gamma_1$ de source le sommet Γ_{j_s} et de but le sommet Γ_{j_t}, l'arête $f(\alpha_{j_s,j_t})$ de source $f(\Gamma_{j_s})$ et de but $f(\Gamma_{j_t})$ appartient à Γ'_1.

Si f est injective, on dit que Γ est inclus dans Γ'.

Lemme 4.13.2 (Inclusion de carquois)**.** *Soit $0 \leq m \leq \ell(v)$. Soient*

$$\Gamma_{W_m} = (W_{i,m+1}, \beta_{j_s,j_t,m+1}) \text{ et } \Gamma_{G_m} = (G_{i,m}, \alpha_{j_s,j_t,m})$$

les carquois (vus comme ensembles de sommets et de flèches) des modules respectivement définis par

$$V_{\overline{w}_{\geq p_{m+1}}} \text{ et } C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$$

où on note les flèches de façon à ce que $\gamma_{j_s,j_t,m}$ ait pour source j_s et pour but j_t.

Pour $0 \leq m \leq \ell(v)$, on définit la famille d'applications $(\rho_m)_m$ par :

$$\rho_m : \left\{ \begin{array}{ccc} (G_{i,m}, \alpha_{j_s,j_t,m}) & \longrightarrow & (W_{i,m+1}, \beta_{j_s,j_t,m+1}) \\ G_{i,m} & \longmapsto & W_{i^{\alpha(i,m)+},m+1} \end{array} \right. .$$

Ces applications sont des morphismes de graphes injectifs préservant les couleurs de la façon suivante :

$$\text{si } W_{j,m+1} = \rho_m(G_{k,m}) \text{ alors } i_j = i_k.$$

Remarque 4.13.3. *L'inclusion ρ permet de lire le carquois Γ_{G_m} (aux étiquettes des sommets près) dans la partie gauche du carquois $\Gamma_{W_{m+1}}$. Cette inclusion est mise en évidence dans l'exemple 4.13.4 en coloriant en orange dans $\Gamma_{W_{m+1}}$ les sommets images de ceux de Γ_{G_m} par ρ_m.*

Exemple 4.13.4. Comme dans l'exemple 4.12.1. On va considérer le cas $W = D_6$, avec

$$\overline{w} = [5, 2, \underline{4}, \underline{3}, \underline{6}, 1, \underline{4}, \underline{5}, \underline{2}, \underline{3}, 1, \underline{4}, \underline{6}, 2, \underline{1}, \underline{3}, 2, \underline{4}, \underline{5}, 3, \underline{2}, 4, \underline{3}, 1, \underline{2}],$$

et pour

$$\overline{v} = [4, 3, 6, 4, 5, 2, 3, 4, 6, 1, 3, 4, 5, 2, 3, 2],$$

on a comme indices des lettres de $\overline{v}$ $[1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23]$.

On va considérer $m = 6$, $m + 1 = 7$ (soit $p_6 = 10$ et $p_7 = 11$) et donc regarder les carquois des modules :

$$\Gamma_{\overline{w}\geq 10} \text{ et } C(\hat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})).$$

On va illustrer le résultat de ρ_5 sur trois sommets et quatre flèches dont les noms sur la figure 4.10 sont $W_{12,6}$, $W_{16,6}$, $W_{18,6}$ et $\beta_{15,12,6}$, $\beta_{10,16,6}$, $\beta_{14,10,6}$ et $\beta_{19,16,6}$.

Pour calculer les images des différentes fonctions et morphismes, on calcule les quantités suivantes : $\alpha(12, 5) = 2$, $\alpha(16, 5) = 1$, $\alpha(18, 5) = 1$.

Pour les sommets, on a $W_{12,6}$ qui n'a pas d'antécédent par ρ_5 (tout comme la flèche $\beta_{15,12,6}$ puisqu'elle est incidente à ce sommet). On a $\rho_5(G_{10,5}) = W_{10^{\alpha(16,5)+},6} = W_{16,6}$, $\rho_5(G_{7,5}) = W_{18,6}$.

Afin de vérifier que c'est bien un morphisme de graphe, on remarque de plus que $\rho_5(G_{8,5}) = W_{14,6}$, $\rho_5(G_{14,5}) = W_{19,6}$ et $\rho_5(G_{6,5}) = W_{10,6}$. On a les flèches $\alpha_{8,6,5}$, $\alpha_{6,10,5}$ et $\alpha_{14,10,5}$ dans Γ_{G_5} et des flèches $\beta_{14,10,6}$, $\beta_{10,16,6}$ et $\beta_{19,16,6}$ dans Γ_{W_6}.

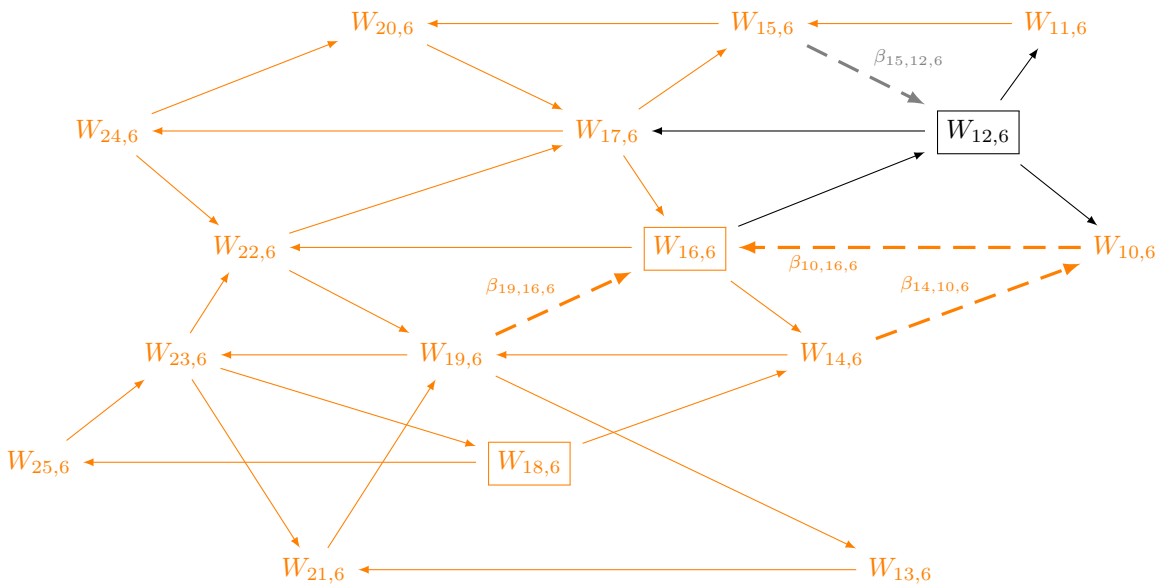


FIGURE 4.10 – $\Gamma_{\overline{w}_{\geq 10}}$

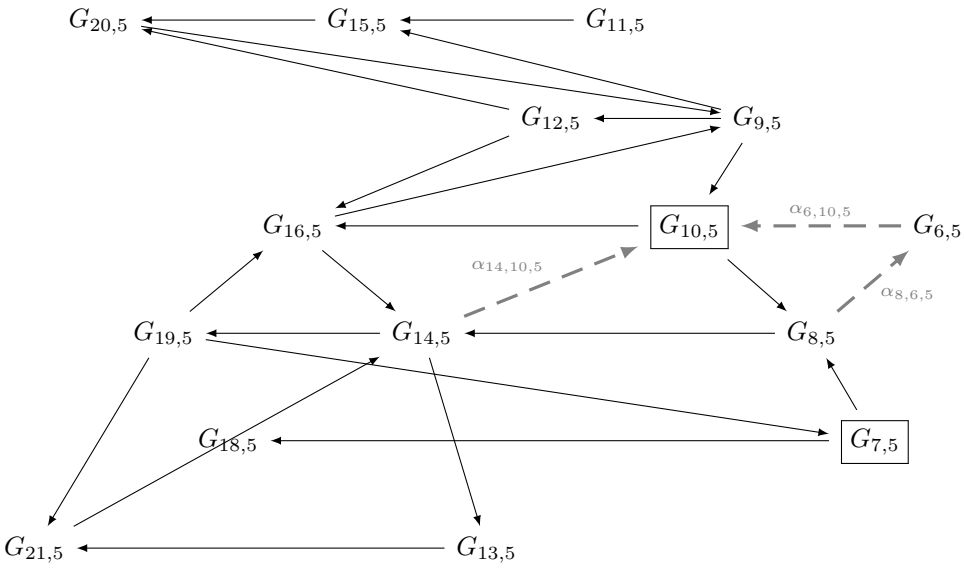


FIGURE 4.11 – $C(\hat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(\Gamma_{\overline{w}}))$

4.14 Preuve du lemme d'inclusion

Preuve du lemme 4.13.2. Pour prouver le lemme on aura besoin de deux applications supplémentaires qui ne sont pas des morphismes de graphes.

On définit $\iota_m : \Gamma_{W_m} \to \Gamma_{W_{m+1}}$ par les opérations suivantes sur les sommets et flèches :

$$\iota_m : \begin{cases} W_{j,m} & \longmapsto \begin{cases} W_{j^+,m+1} & \text{si} \quad i_j = i_{p_m} \text{ et } (p_m)_{\max} \geq j^+ \geq p_{m+1}, \\ W_{j,m+1} & \text{sinon si} \quad i_j \neq i_{p_m} \text{ et } j \geq p_{m+1}, \\ \notin D_{\iota_m} & \text{sinon,} \end{cases} \\ \beta_{j_s,j_t,m} & \longmapsto \begin{cases} \notin D_{\iota_m} & \text{si} \quad W_{j_s,m} \notin D_{\iota_m} \text{ ou } W_{j_t,m} \notin D_{\iota_m}, \\ \beta_{j_s^+,j_t^+,m+1} & \text{sinon si} \quad i_{j_s} = i_{j_t} = i_{p_m}, \\ \beta_{j_s,j_t,m+1} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

où l'on note $\beta_{\iota_m(j_s),\iota_m(j_t),m}$ la flèche telle que

$$s(\beta_{\iota_m(j_s),\iota_m(j_t),m}) = \iota_m(W_{j_s,m}) \text{ et } t(\beta_{\iota_m(j_s),\iota_m(j_t),m}) = \iota_m(W_{j_t,m}).$$

On définit $\overline{\mu}_m : \Gamma_{G_{m-1}} \to \Gamma_{G_m}$ par les opérations suivantes sur les sommets et flèches :

$$\overline{\mu}_m : \begin{cases} G_{j,m-1} & \longmapsto \begin{cases} G_{j,m} & \text{si} \quad (i_j \neq i_{p_m}) \text{ ou } (j_{\max} > j^{\alpha(j,m)+} \geq \xi(j,m)), \\ \notin D_{\overline{\mu}_m} & \text{sinon,} \end{cases} \\ \widetilde{\alpha}_{j_s,j_t,m-1} & \longmapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{j_s,j_t,m} & \text{si} \quad (i_{j_s} \neq i_{p_m} \neq i_{j_t}) \text{ ou } (i_{j_s} = i_{j_t} = i_{p_m}), \\ \widetilde{\alpha}_{j_s^-,j_t,m} & \text{si} \quad i_{j_s} = i_{p_m} \neq i_{j_t} \text{ et } G_{j_s^-,m-1}, G_{j_t,m-1} \in D_{\overline{\mu}_m} \\ \widetilde{\alpha}_{j_s,j_t^-,m} & \text{si} \quad i_{j_s} \neq i_{p_m} = i_{j_t} \text{ et } G_{j_s,m-1}, G_{j_t^-,m-1} \in D_{\overline{\mu}_m}, \\ \notin D_{\overline{\mu}_m} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

et, pour chaque flèche $\widetilde{\alpha}_{j_s,j_t,m-1}$ telle qu'il n'existe pas de flèche $\widetilde{\alpha}_{j_t^{\gamma+},j_s,m-1}$ avec $\gamma > 0$ et vérifiant $j_t^{\alpha(j_t,m-1)+} \neq (j_t)_{\max}$ (c'est à dire qu'on est sur une barbe finale), on ajoute une flèche $\widetilde{\alpha}_{j_{t_2},j_s,m}$ où $j_{t_2} = (j_t)_{\max}^{\alpha(j_t,m)-}$.

On va d'abord montrer que dans tous les cas la fonction ι_m définie ci-dessus est bien définie et que $\iota_m(\Gamma_{W_m})$ est bien $\Gamma_{W_{m+1}}$ le carquois du module $V_{\overline{w}_{\geq p_{m+1}}}$.

Ensuite on prouvera de la même façon que $\overline{\mu}_m$ est bien définie, que l'image $\overline{\mu}_m(\Gamma_{G_{m-1}})$ est bien le carquois du module $C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$ et que ρ_m est un morphisme de graphes.

Soit $0 \leq m < \ell(v)$. Par définition on a que $\Gamma_{W_{m+1}}$ est un carquois obtenu à partir de Γ_{W_m} en retirant les sommets d'indice $p_{m+1} > j \geq p_m$ et les flèches incidentes à ces sommets.

Les sommets de Γ_{W_m} n'ayant pas d'image par ι_m sont :

1. $W_{(p_m)_{\max},m}$
2. les sommets $W_{j,m}$ tels que $i_j \neq i_{p_m}$ et $p_{m+1} > j > p_m$
3. les sommets $W_{j,m}$ tels que $i_j = i_{p_m}$ et $p_{m+1} > j^+ > p_m$ c'est à dire tous les sommets de couleur i_{p_m} d'indice dans l'intervalle $\{p_m, \ldots, p_{m+1} - 1\}$ sauf celui d'indice maximal vérifiant cette propriété.

Ainsi, parmi les sommets ayant une image par ι_m, on a une bijection $W_{j,m} \leftrightarrow W_{j,m+1}$ pour les sommets de couleur différente de i_{p_m} d'indice supérieur ou égal à p_{m+1} et une bijection $W_{j,m} \leftrightarrow W_{j^+,m+1}$ pour les sommets de couleur i_{p_m}.

De plus dans $\Gamma_{W_{m+1}}$ on a les mêmes flèches que dans Γ_{W_m} à l'exception de celles qui sont incidentes à un sommet d'indice $p_{m+1} > j \geq p_m$.

Parmi ces flèches conservés, les flèches $\alpha_{j_s,j_t,m}$ telles qu'au moins une des deux extrémités est d'une couleur différente de i_{p_m} on a une bijection $\alpha_{j_s,j_t,m} \leftrightarrow \alpha_{j_s,j_t,m+1}$. Dans le cas contraire, on a une flèche horizontale et on a la bijection $\alpha_{k,k^+,m} \leftrightarrow \alpha_{k^+,k^{2+},m+1}$. La flèche $\alpha_{k^+,k^{2+},m+1}$ appartient à $\Gamma_{W_{m+1}}$ car par hypothèse $k^+ \geq p_{m+1}$ et $k^+ \neq k_{\max}$ et donc $W_{k^{2+},m+1} \in \Gamma_{W_{m+1}}$.

Ainsi on a une bijection entre le carquois $\Gamma_{W_{m+1}}$ et le sous-carquois plein du carquois Γ_{W_m} sur lequel ι_m est défini. On a donc $\iota_m(\Gamma_{W_m}) = \Gamma_{m+1}$ pour tout $0 \leq m < \ell(v)$.

Soit $\Gamma_{G_{m-1}}$ le carquois de la graine coupée $C(\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$. On va montrer que $\overline{\mu}_m(\Gamma_{G_{m-1}})$ est le carquois de la graine coupée $C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$. Afin de fixer les notations, on posera que $\hat{\mu}_m = \mu_{k^{\gamma+}} \circ \cdots \circ \mu_k$.

Par la proposition 4.11.1, on sait que le carquois $\Gamma_{G_{m-1}}$ est modifié de la façon prescrite par $\overline{\mu}_m$ après mutations dans les directions $k, k^+, \ldots, k^{\gamma+}$ successivement et coupure du carquois obtenu.

Ainsi ι_m et $\overline{\mu}_m$ sont bien définis et on a bien $\iota_m(\Gamma_{W_m}) = \Gamma_{W_{m+1}}$ et $\overline{\mu}_m(\Gamma_{G_{m-1}}) = \Gamma_{G_m}$.

On va maintenant prouver que ρ_m est un morphisme de graphes pour tout $0 \leq m \leq \ell(v)$ par récurrence.

Pour ρ_0, comme Γ_{G_0} est le sous-carquois plein de $V_{\overline{w}}$ contenant tous les sommets $R_{j,0}$ vérifiant $j \geq \xi(j,0)$ et que Γ_{W_1} est le sous-carquois plein de $V_{\overline{w}}$ contenant tous les sommets $R_{j,0}$ vérifiant $j \geq p_1$ et que pour tout $1 \leq j \leq \ell(w)$, on a $\xi(j,0) \geq p_1$, Γ_{G_0} est un sous-carquois de Γ_{W_0}. De plus comme on a pour tout $1 \leq j \leq \ell(w)$, $\alpha(j,0) = 0$ on n'a pas de décalage de sommets (ni de flèches) et donc ρ_0 est bien défini et, à renommage des sommets et flèches près, est l'identité sur son image. C'est donc un morphisme sur son image.

Supposons maintenant que ρ_{m-1} est un morphisme de graphes. On va montrer que ρ_m est un morphisme de graphes. Pour cela on va montrer que pour tout m, on a $\rho_m \circ \overline{\mu}_m = \iota_m \circ \rho_{m-1}$ sur leurs ensembles de définition.

$$\begin{tikzcd}
(G_{j,m-1}, \alpha_{j_s,j_t,m-1}) \arrow[r, "\rho_{m-1}"] \arrow[d, "\overline{\mu}_m"] & (W_{j,m}, \beta_{j_s,j_t,m}) \arrow[d, "\iota_m"] \\
(G_{j,m}, \alpha_{j_s,j_t,m}) \arrow[r, "\rho_m"] & (W_{j,m+1}, \beta_{j_s,j_t,m+1})
\end{tikzcd}$$

On va distinguer plusieurs cas pour $G_{j,m-1}$:

1. soit $j^{\alpha(j,m-1)+} = (i_{p_m})_{\max}$
2. ou sinon $j^{\alpha(j,m)+} < p_{m+1}$
3. ou sinon $\xi(j,m) > j^{\alpha(j,m)+} \geq p_{m+1}$
4. ou sinon $j^{\alpha(j,m)+} \geq \xi(j,m)$

Dans le premier cas, $G_{j,m-1}$ n'a pas d'image par $\overline{\mu}_m$. D'autre part $\rho_{m-1}(G_{j,m-1}) = W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}$ et $\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{\alpha(j,m)+},m+1}$.

Dans le deuxième cas, comme $\xi(i,m) \geq p_{m+1}$ pour tout $1 \leq i \leq \ell(w)$, on n'a pas d'image de $G_{j,m-1}$ par $\overline{\mu}_m$. On a $\rho_{m-1}(G_{j,m-1}) = W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}$ et $W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}$ n'a pas d'image par ι_m.

Dans le troisième cas, $G_{j,m-1}$ n'a pas d'image par $\overline{\mu}_m$. On a $\rho_{m-1}(G_{j,m-1}) = W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}$ et on a deux cas pour l'image de $W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}$ par ι_m. Si $i_j = i_{p_m}$ alors

$$\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{(\alpha(j,m-1)+1)+},m+1} = W_{j^{\alpha(j,m)+},m+1},$$

sinon

$$\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m+1} = W_{j^{\alpha(j,m)+},m+1}.$$

Dans le quatrième cas, on a $\overline{\mu}_m(G_{j,m-1}) = G_{j,m}$ et $\rho_m(G_{j,m}) = W_{j^{\alpha(j,m)+},m+1}$. D'autre part on a $\rho_{m-1}(G_{j,m-1}) = W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}$. Alors $\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m})$ a deux résultats possibles. Si $i_j = i_{p_m}$ alors $\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{(\alpha(j,m-1)+1)+},m+1}$ et comme $\alpha(j,m) = \alpha(j,m-1)+1$, on a

$$\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{\alpha(j,m)+},m+1}.$$

Sinon on a $\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m+1}$ et comme $\alpha(j,m-1) = \alpha(j,m)$ finalement on a bien dans les deux cas $\iota_m(W_{j^{\alpha(j,m-1)+},m}) = W_{j^{\alpha(j,m)+},m+1}$. On a donc bien l'égalité.

On va maintenant prouver l'égalité pour les flèches. Pour cela on les divise en sous-ensembles :

1. les flèches $\alpha_{j_s,j_t,m-1}$ telles que $G_{j_s,m-1}$ ou $G_{j_t,m-1}$ n'a pas d'image par $\overline{\mu}_m$,
2. ou sinon les flèches $\alpha_{j_s,j_t,m-1}$ telles que $i_{j_s} \neq i_{p_m}$ et $i_{j_t} \neq i_{p_m}$,
3. ou sinon les flèches $\alpha_{j_s,j_t,m-1}$ telles que $i_{j_s} = i_{j_t} = i_{p_m}$,
4. ou sinon les flèches $\alpha_{j_s,j_t,m-1}$ où $i_{j_s} = i_{p_m}$ ou bien (exclusivement) $i_{j_t} = i_{p_m}$ (qu'on subdivisera en deux sous-cas).

Dans le premier cas, on n'est pas dans le domaine de définition de $\overline{\mu}_m$.

Dans le deuxième cas, on a $\overline{\mu}_m(\alpha_{j_s,j_t,m-1}) = \alpha_{j_s,j_t,m}$ et alors

$$\rho_m(\alpha_{j_s,j_t,m}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m)+},j_t^{\alpha(j_t,m)+},m+1}.$$

D'autre part, on a

$$\rho_{m-1}(\alpha_{j_s,j_t,m-1}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}$$

et alors on a

$$\iota_m(\beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}.$$

Dans le troisième cas, on a $\overline{\mu}_m(\alpha_{j_s,j_t,m-1}) = \alpha_{j_s,j_t,m}$ et

$$\rho_m(\alpha_{j_s,j_t,m}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m)+},j_t^{\alpha(j_t,m)+}}.$$

D'autre part, on a

$$\rho_{m-1}(\alpha_{j_s,j_t,m_1}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}$$

et

$$\iota_m(\beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}) = \beta_{j_s^{(\alpha(j_s,m-1)+1)+},j_t^{(\alpha(j_t,m-1)+1)+},m+1} = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m)+},j_t^{\alpha(j_t,m)+},m+1}.$$

Dans le quatrième cas, pour fixer les notations, on va supposer qu'on a $i_{j_s} = i_{p_m}$, l'autre cas s'en déduira de façon similaire. On a $\hat{\mu}_m(\alpha_{j_s,j_t,m-1}) = \alpha_{j_s^-,j_t,m}$. Alors on a

$$\rho_m(\alpha_{j_s^-,j_t,m}) = \beta_{(j_s^-)^{\alpha(j_s,m)+},j_t^{\alpha(j_t,m)+},m+1} = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m+1}$$

car $\alpha(j_s,m) = \alpha(j_s,m-1)+1$.

D'autre part, on a

$$\rho_{m-1}(\alpha_{j_s,j_t,m-1}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}$$

et alors

$$\iota_m(\beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m}) = \beta_{j_s^{\alpha(j_s,m-1)+},j_t^{\alpha(j_t,m-1)+},m+1}.$$

Ainsi dans tous les cas où la fonction est définie, on a bien l'égalité.

Finalement on a montré que pour chaque sommet et chaque flèche de Γ_{G_m} ayant un antécédent par $\overline{\mu}_m$, son image par ρ_m est égale à l'image de cet antécédent par la composée $\iota_m \circ \rho_{m-1}$. Comme on a montré que pour tout m, ρ_m est bien définie et que par hypothèse de récurrence on sait que ρ_{m-1} est un morphisme de graphes, on va prouver que ρ_m est aussi un morphisme de graphes.

Comme on sait que tout sommet de Γ_{G_m} admet un antécédent par $\overline{\mu}_m$, ρ_m est bien définie pour tous les sommets. Pour les flèches, il reste quelques flèches n'ayant pas d'antécédent par $\overline{\mu}_m$ mais étant présentes dans Γ_{G_m}, ce sont les flèches décrites à la proposition 4.11.1, créées suite au décalage de barbes finales.

Dans ce cas là on a donc des flèches $\alpha_{(p_m)_{\max}^{\alpha(p_m,m)-},j,m}$ où i_j est une couleur adjacente à i_{p_m}. De plus on sait que dans $\Gamma_{G_{m-1}}$, la dernière flèche entre les lignes i_j et i_{p_m} était la flèche $\alpha_{j,k,m-1}$ où $i_k = i_{(p_m)}$ et $k \leq (p_m)_{\max}^{\alpha(p_m,m)-}$. Comme ρ_{m-1} est un morphisme de graphes, on sait qu'il existe une flèche $\beta_{j^{\alpha(j,m-1)+},k^{\alpha(k,m-1)+},m}$ dans Γ_{W_m}. Par définition de Γ_{W_m}, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$j^{(\alpha(j,m-1)+1)+} \geq k^{(\alpha(k,m-1)+1)+} > j^{\alpha(j,m-1)+} > k^{\alpha(k,m-1)+} \tag{4.3}$$

Pour montrer que $\alpha_{(p_m)_{\max}^{\alpha(p_m,m)-},j,m}$ a bien une image par ρ_m, il faut montrer que la flèche

$$\beta_{j^{\alpha(j,m-1)+},(p_m)_{\max},m+1}$$

existe. C'est équivalent à montrer que l'inégalité

$$j^{(\alpha(j,m-1)+1)+} \geq \ell(w)+1 > j^{\alpha(j,m-1)+} > (p_m)_{\max}$$

est vérifiée. En particulier cette égalité nous donne que $j^{\alpha(j,m-1)+} = j^{\alpha(j,m)+} = j_{\max}$.

Ainsi cette flèche n'existe que si $j = (j_{\max})^{\alpha(j,m-1)-}$.

On va montrer que c'est une solution de l'inégalité 4.3 et que c'est la seule.

Tout d'abord, si $j = (j_{\max})^{\alpha(j,m-1)-}$ alors $j^{\alpha(j,m-1)+} = j_{\max}$ et alors

$$j^{(\alpha(j,m-1)+1)+} = \ell(w)+1 \geq k^{(\alpha(k,m-1)+1)+}.$$

L'équation est bien vérifiée.

Supposons qu'il existe $j \neq j_{\max}^{\alpha(j,m-1)-}$, qu'on va noter $(j_{\max})^{\gamma-}$ avec $\gamma > \alpha(j,m-1)$ vérifiant l'équation 4.3. En l'injectant dans l'équation on obtient :

$$(j_{\max})^{(\gamma-(\alpha(j,m-1)+1))-} \geq k^{(\alpha(k,m-1)+1)+} > (j_{\max})^{(\gamma-\alpha(j,m-1))-} > k^{\alpha(k,m-1)+}$$

où aucune des quantités n'est égale à $\ell(w)+1$ car $\gamma-(\alpha(j,m-1)+1)\geq 0$. D'autre part, comme par hypothèse $k\leq (p_m)_{\max}^{\alpha(p_m,m)-}$ on a $k^{(\alpha(k,m-1)+1)+}\leq k_{\max}$. Ainsi, il existe un entier $\delta\geq 0$ tel que

$$(k_{\max})^{(\delta-1)-}\geq (j_{\max})^{(\gamma-(\alpha(j,m-1)+1))-}>(k_{\max})^{\delta-}>(j_{\max})^{(\gamma-\alpha(j,m-1))-}$$

et donc il existe une flèche $\beta_{(j_{\max})^{(\gamma-\alpha(j,m-1))-},(k_{\max})^{\delta-},m}$ dans Γ_{W_m}.

Or $\Gamma_{G_{m-1}}$ étant un sous-carquois complet de Γ_{W_m}, et les sommets $W_{(j_{\max})^{(\gamma-\alpha(j,m-1))-},m}$ et $W_{(k_{\max})^{\delta-},m}$ étant dans l'image de ρ_{m-1}, la flèche $\beta_{(j_{\max})^{(\gamma-\alpha(j,m-1))-},(k_{\max})^{\delta-},m}$ a un antécédent dans $\Gamma_{G_{m-1}}$, c'est absurde.

Ainsi la seule solution de l'équation 4.3 possible est $j=(j_{\max})^{\alpha(j,m-1)-}$ et donc la flèche

$$\alpha_{(p_m)_{\max}^{\alpha(p_m,m)-},j,m}$$

a bien une image dans $\Gamma_{W_{m+1}}$.

ρ_m est un morphisme de graphes.

□

Exemple 4.14.1. On va reprendre le cas de l'exemple 4.13.4, à savoir le cas $W=D_6$, avec

$$\overline{w}=[5,2,\underline{4},\underline{3},\underline{6},1,\underline{4},\underline{5},\underline{2},\underline{3},1,\underline{4},\underline{6},2,\underline{1},\underline{3},2,\underline{4},\underline{5},3,\underline{2},4,\underline{3},1,\underline{2}],$$

et pour

$$\overline{v}=[4,3,6,4,5,2,3,4,6,1,3,4,5,2,3,2],$$

on a comme indices des lettres de $\overline{v}$ $[1,3,5,7,8,10,11,13,14,16,17,18,19,21,22,23]$.

On va considérer $m=6$, $m+1=7$ (soit $p_6=10$ et $p_7=11$) et donc regarder les carquois des modules :

$$\Gamma_{\overline{w}\geq 10} \text{ et } C(\hat{\mu}_5\circ\cdots\circ\hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})),$$

ainsi que les carquois des modules :

$$\Gamma_{\overline{w}\geq 11} \text{ et } C(\hat{\mu}_6\circ\cdots\circ\hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})).$$

On va maintenant illustrer les fonctions ι_6 et $\overline{\mu}_6$.

Pour passer de la figure 4.12 à la figure 4.14, on a $\iota_6(W_{12,6})=W_{12,7}$, $\iota_6(W_{16,6})=W_{16^+,7}=W_{22,7}$ car $i_{p_6}=i_{16}$ et enfin $\iota_6(W_{18,6})=W_{18,7}$. En ce qui concerne les flèches, on a $\beta_{14,10,6}$ qui n'a pas d'image, $\iota_6(\beta_{15,12,6})=\beta_{15,12,7}$, $\iota_6(\beta_{19,16,6})=\beta_{19,16,7}$ et $\iota_6(\beta_{10,16,6})=\beta_{16,22,7}$.

Pour passer de la figure 4.13 à la figure 4.15, on a $\overline{\mu}_6(G_{10,5})=G_{10,6}$ et $\overline{\mu}_6(G_{7,5})=G_{7,6}$. De plus on a $\overline{\mu}_6(\alpha_{6,10,5})=\alpha_{6,10,6}$, $\overline{\mu}_6(\alpha_{14,10,5})=\alpha_{14,6,6}$ car $i_{10}=i_{p_6}$. $\alpha_{8,6,5}$ n'a pas d'image par $\overline{\mu}_6$.

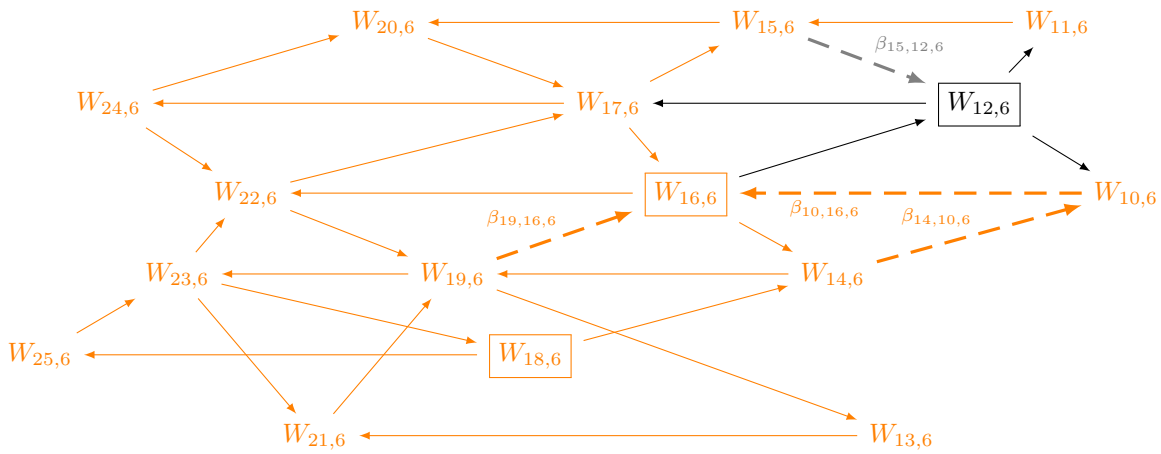


FIGURE 4.12 – $\Gamma_{\overline{w}_{\geq 10}}$

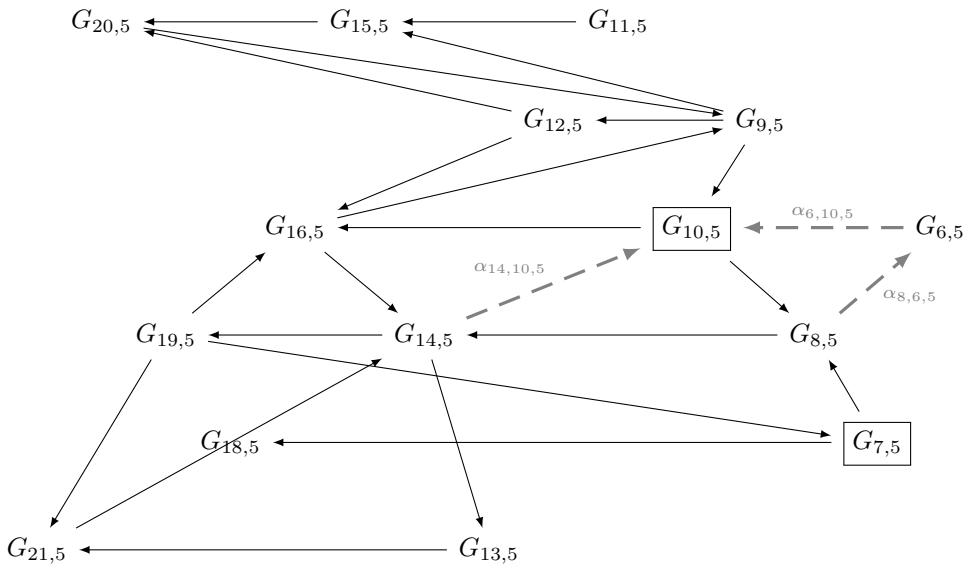


FIGURE 4.13 – $C(\hat{\mu}_5 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(\Gamma_{\overline{w}}))$

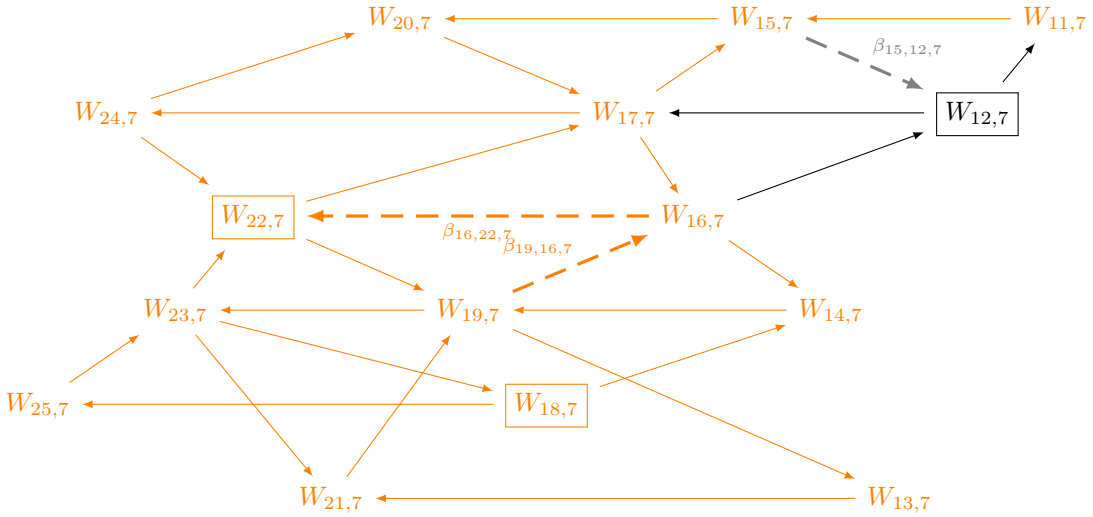


FIGURE 4.14 – $\Gamma_{\overline{w}_{\geq 11}}$

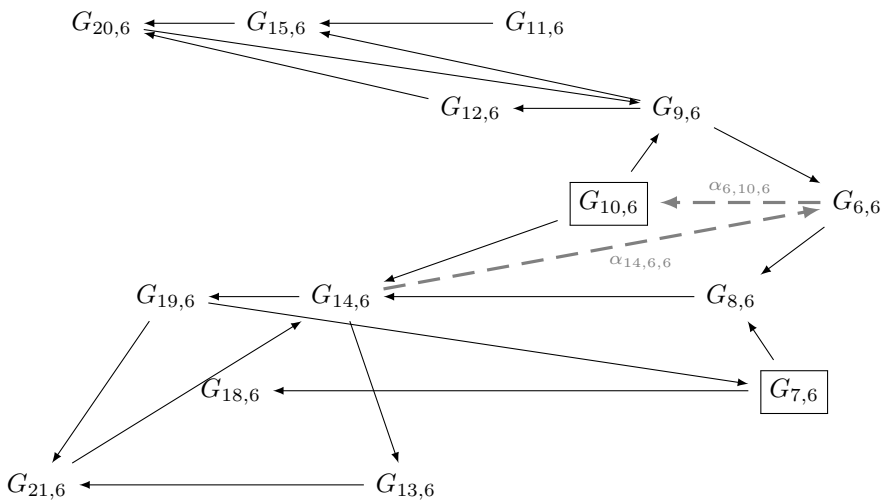


FIGURE 4.15 – $C(\hat{\mu}_6 \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(\Gamma_{\overline{w}}))$

4.15 Hérédité du théorème structurel

Au vu du lemme 4.13.2, on peut en déduire le résultat suivant :

Lemme 4.15.1. *La famille de morphismes* (ρ_m) *admet une réciproque partielle :*

$$\rho_m^* : \begin{cases} (W_{i,m+1}, \beta_{j_s,j_t,m+1}) & \longmapsto & (G_{i,m}, \alpha_{j_s,j_t,m}) \\ W_{i,m+1} & \longmapsto & \begin{cases} G_{i^{\alpha(i,m)-},m} & si \quad i^{\alpha(i,m)-} \geq \xi(i,m) \\ \notin D_{\rho_m^*} & sinon \end{cases} \end{cases}$$

Démonstration. On a montré au lemme 4.13.2 que le carquois Γ_{G_m} était inclus dans le carquois $\Gamma_{W_{m+1}}$. La condition pour que le morphisme soit défini correspond à la condition pour qu'un sommet appartienne à Γ_{G_m}. □

Lemme 4.15.2 (Retour à la disposition habituelle du point 5 du théorème 4.6.1)**.** *Dans la graine*

$$C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})),\ 0 \leq m < \ell,$$

alors la ligne de couleur $i_{p_{m+1}}$ *est dans la configuration 5 du théorème 4.6.1.*

Démonstration. Ce lemme utilise le lemme 4.15.1. En effet, on veut prouver que le carquois Γ_{G_m} est dans la configuration cherchée. En fait, on commence par prouver que c'est le cas pour le carquois $\Gamma_{W_{m+1}}$. C'est immédiat par le lemme 4.8.1 en prenant ici pour $\overline{w}$, $\overline{w}_{\geq p_{m+1}}$ et p_{m+1} pour $\overline{w}_1$. Ainsi on sait que la ligne qu'on va muter dans ce carquois est dans la bonne configuration.

Maintenant on doit se ramener au sous carquois Γ_{G_m}. On va donc avoir potentiellement des suppressions de sommets. Cependant, on ne va avoir aucune suppression sur la ligne qu'on va muter. En effet, par minimalité de $\overline{v}$ il n'existe aucune lettre de la couleur $i_{p_{m+1}}$ dans l'intervalle $\{p_m, \ldots, p_{m+1}\}$, dans le cas contraire, ce serait cet indice là qui serait utilisé par p_{m+1}. D'autre part, on ne peut pas avoir p_m de cette couleur, sinon le mot $\overline{v}$ aurait deux lettres de même couleur accolées et donc serait simplifiable, ce qui est absurde : $\overline{v}$ était supposé réduit.

Or, si on avait l'apparition d'une barbe initiale sur la ligne p_{m+1} cela signifierait qu'on a supprimé un sommet d'un triangle de cette ligne. Le carquois Γ_{G_m} vérifie donc la bonne configuration. □

On va supposer ici qu'on est dans la configuration du 4.9.1 et qu'on est dans la graine $G = C(R)$ où

$$R = \mu_{j^{\gamma+}} \circ \mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \hat{\mu}_{m-2} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$$

avec $\hat{\mu}_m = \mu_{j^{\gamma+}} \circ \mu_{j^{(\gamma-1)+}} \circ \cdots \circ \mu_j$.

Point 1

On part du point 1 du lemme 4.9.1. A cet instant de la mutation, seul le module $R_{k^{(\gamma+1)+}}$ n'a pas nécessairement des coordonnées d'indice inférieur à m non-nulles (en fait seule la coordonnée d'indice m). Cependant comme $k^{(\gamma+1)+} > (k_{\max})^{\alpha(k,m)-}$, dans les graines coupées suivantes, ce module sera retiré. Ainsi la vérification de ce point pour tous les sommets est assurée et donc on a la validité de l'hypothèse 1 du théorème 4.6.1 pour la graine $C(\hat{\mu}_m \circ \cdots \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}}))$.

Point 2

Par le point 2 du lemme, on a une seule flèche horizontale dans un sens incorrect $R_{k^{(\gamma+1)+}} \to R_{k^{\gamma+}}$. L'exclusion du module $R_{k^{(\gamma+1)+}}$ des prochaines graines coupées entraîne la suppression de cette flèche (entre autres) et donc la graine nouvellement formée satisfait à nouveau la condition 2 du théorème.

Point 3

Par le point 3 du lemme, identique au point du théorème, on sait que sans l'exclusion du sommet, le point est toujours valide. Si on exclut un sommet, on ne fait que retirer des flèches ordinaires et pas en créer entre deux lignes de couleur non-adjacentes. Après suppression, la condition 3 du théorème est donc vérifiée.

Point 4

Par le point 4 du lemme, chaque ligne est dans la bonne configuration avant exclusion du dernier sommet de la ligne i_j. Après exclusion, on aura retiré des flèches ordinaires et une flèche horizontale (si le sommet n'est pas le seul de sa ligne).

Si la fin de la ligne i_j était en phase (e), on l'a juste raccourcie d'un sommet, si on avait une barbe finale, elle disparaît en ne remettant pas en cause la validité de l'hypothèse, si elle était la fin d'une suite de dents successives, la dernière dent est amputée, la partie droite formant alors une barbe finale. Si elle avait une barbe initiale, la dérogation est supprimée et on n'a plus que la phase (a) pour ce couple de lignes. Si elle était en phase (a), on a désormais une phase (a) raccourcie d'un sommet. On a les mêmes raisonnements pour les phases (d), (c) et (b) si on regarde une ligne d'une couleur adjacente.

Ainsi dans chacun des cas la structure en dents de scie est conservée sur la couleur i_j et les couleurs adjacentes et les autres lignes ne sont pas modifiées. Donc après suppression du sommet de fin de la ligne, le point 4 du théorème est vérifié.

Point 5

Ici on ne peut pas utiliser une extension du point 5 puisqu'on doit regarder la ligne $i_{p_{m+1}}$ qui est différente de la ligne i_j. Cependant, on a le lemme 4.15.2 qui nous permet de conclure. Si jamais $m = \ell$ et donc que le lemme ne s'applique pas, l'hypothèse du théorème est vide et donc vérifiée.

Point 6

Le point 6 du lemme, nous dit que tous les sommets sauf $R_{j^{(\gamma+1)+},m-1}$ vérifient la bonne identité combinatoire de leur ℓ premières coordonnées, par rapport au point 6 du théorème (donc pour $\alpha(j,m)$). Ainsi supprimer le dernier module « fautif » permet de vérifier immédiatement le résultat voulu.

Conclusion

Ainsi on a montré que si les conditions du théorème étaient vérifiées pour $\hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$, elles le sont à nouveau pour $\hat{\mu}_m \circ \hat{\mu}_{m-1} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ et donc on a montré l'hérédité. L'initialisation étant aussi vérifiée, on a prouvé par récurrence que pour tout $0 \leq m \leq \ell$ la graine coupée $\hat{\mu}_m \circ \cdots \circ \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ vérifiait la structure du théorème 4.6.1.

4.16 Preuve du théorème final

On veut prouver le théorème suivant :

Théorème 4.16.1 (Structure amassée sur les strates de variétés de drapeaux)**.** *Le module $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est une graine pour la structure amassée sur la catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$.*

Pour prouver ce théorème on va en fait chercher à prouver plusieurs résultats :

Proposition 4.16.2. *Le module $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est dans $\mathcal{C}_{v,w}$*

Démonstration. Le module de la graine $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est l'image par mutations et suppressions successives de facteurs directs d'un module $V_{\overline{w}} \in \mathcal{C}_w$. La catégorie $\mathcal{C}_w$ étant stable par mutations et facteurs directs, il est immédiat que le module de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est un module de $\mathcal{C}_w$.

Pour prouver l'appartenance de $\mathcal{C}^v$, on va utiliser le point 1 du théorème 4.6.1. En effet, si l'on prend $m = \ell$, on a que tous les modules V_i de la graine ont des coordonnées d'indice inférieur ou égal à ℓ toutes nulles pour leur $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur ainsi tous les facteurs directs du module sont dans $\mathcal{C}^v$. Cette catégorie étant stable par somme directe, on a que la somme directe des modules est dans $\mathcal{C}^v$ et donc le module de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est dans $\mathcal{C}^v$ par la proposition 2.10.3. Il est donc dans $\mathcal{C}_{v,w}$. □

Proposition 4.16.3. *Le module $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est rigide.*

Démonstration. Le module initial $V_{\overline{w}}$ est rigide car c'est une graine pour la structure amassée sur la catégorie $\mathcal{C}_w$. De plus on sait que la rigidité est conservé par les mutations. D'autre part si un module M est rigide, par définition, pour tout sous-module $N \subset M$, N est rigide aussi. $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ se décomposant en une succession de mutations élémentaires et de suppression de facteurs directs (un module ainsi privé d'un facteur direct étant un sous-module du module originel), la rigidité de $V_{\overline{w}}$ entraîne celle de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$. □

Proposition 4.16.4. *Le module $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est rigide maximal dans $\mathcal{C}_{v,w}$*

Démonstration. On rappelle qu'un module rigide est dit maximal dans la catégorie $\mathcal{C}$, s'il est rigide et qu'il possède le nombre maximal de facteurs directs irréductibles possibles dans la catégorie.

Par la proposition 4.16.3, on sait que $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est rigide. Par la proposition 2.7.18, on sait qu'un module rigide maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$ a $\ell(w)-\ell(v)$ facteurs directs distincts. D'autre part, initialement $V_{\overline{w}}$ possède $\ell(w)$ facteurs directs irréductibles distincts. A la fin de $\mu_\bullet$, on retire les modules dont les indices appartiennent à

$$\bigcup_{k\in I}\{1 \leq j \leq \ell(w) \mid i_j = i_k \mid j > (j_{\max})^{\alpha<(k,\ell)-}\}.$$

Le cardinal de cet ensemble est

$$\sum_{k\in I}\alpha(k,\ell) = \ell.$$

Ainsi $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ possède $\ell(w)-\ell(v)$ facteurs directs indécomposable distincts, est rigide et appartient à la catégorie $\mathcal{C}_{v,w}$. C'est donc un module rigide maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$. □

Preuve du théorème 4.16.1. Par la définition 2.6.9, un module rigide maximal basique sur l'algèbre préprojective est une graine pour la structure amassée sur la catégorie. Par la proposition 4.16.4, on a donc $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ qui est une graine pour la structure amassées sur $\mathcal{C}_{v,w}$. □

Proposition 4.16.5. *Les facteurs directs $\mathcal{C}_{v,w}$-projectifs de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ correspondent aux sommets de Γ_{R_ℓ} adjacents à l'un des sommets supprimés par S et aux sommets du carquois Γ_{R_ℓ} qui ne sont adjacents à aucun autre sommet de Γ_{R_ℓ}.*

Démonstration. Un module ne relevant d'aucune des deux catégories de la proposition est donc dans $\mathcal{C}_{v,w}$ et adjacent uniquement à des facteurs directs de $\mathcal{C}_{v,w}$. Donc si on le mute il est encore dans $\mathcal{C}_{v,w}$.

Si le sommet R_k qu'on va muter est adjacent à l'un des sommets de $\mathcal{C}_w\backslash\mathcal{C}_{v,w}$, le sommet muté appartiendra à $\mathcal{C}_w\backslash\mathcal{C}_{v,w}$, ainsi il n'est pas $\mathcal{C}_{v,w}$-mutable et est donc $\mathcal{C}_{v,w}$-projectif.

Si le sommet n'est adjacent à aucun autre, il n'est pas non plus mutable et donc $\mathcal{C}_{v,w}$-projectif. □

Proposition 4.16.6. *Le carquois $\Gamma_{R_{\ell(v)}}$ obtenu à partir de celui de $V_{\overline{w}}$ par les mutations successives de $\mu_\bullet$ et le retrait des sommets est le carquois du module $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$.*

Démonstration. Par la proposition 4.16.5, les facteurs supprimés ne sont adjacents à aucun sommet non $\mathcal{C}_{v,w}$-projectif. Ainsi la suppression de ces sommets ne supprime aucun flèche entre un facteur mutable et un facteur (mutable ou $\mathcal{C}_{v,w}$-projectif).

Le carquois obtenu, qui est un sous-carquois plein du carquois d'une graine de $\mathcal{C}_w$, est donc le carquois d'une graine de $\mathcal{C}_{v,w}$. □

CHAPITRE 5

Applications du théorème

5.1 Équivalence de la définition des algorithmes de mutation

A la section 3.1, on a donné deux définitions pour la suite de mutations-suppressions à effectuer. À l'aide de la preuve du théorème 4.6.1, on peut maintenant prouver l'équivalence des deux définitions.

Proposition 5.1.1. *Pour tout m, on a $\widetilde{\mu}_m = \widehat{\mu}_m$.*

Démonstration. On va utiliser les résultats du théorème 4.6.1 pour en déduire les mutations définies par $\hat{\mu}$. En effet, ici on ne va s'intéresser qu'aux coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs d'indice $\leq \ell$.

On a donc que les coordonnées d'indice m non-nulles sont sur les modules $R_{k,m-1}$ de la graine $\hat{\mu}_{m-1} \cdots \hat{\mu}_1(V_{\overline{w}})$ tels que $i_k = i_{p_m}$. Et parmi ceux là, en fait on a ceux tels que

$$f_{\min}(k)^{\alpha(k,m-1)\oplus} \leq m \leq f(k^{\alpha(k,m-1)+})$$

et tels que $k < (k_{\max})^{\alpha(k,m)-}$ (*cf.* définition 3.2.1).

Le module de plus petit indice qui sera muté, s'il existe, est $R_{k,m-1}$ tel que $m = f(k^{\alpha(k,m-1)+})$. Celui de plus grand indice est celui d'indice $(k_{\max})^{\alpha(k,m)-}$.

D'autre part, par définition de $\widetilde{\mu}_m$, on a qu'à ce point là, on va muter les sommets

$$((p_m)_{\min})^{\beta_m+}, \ldots, ((p_m)_{\max})^{(\gamma_m)-}.$$

De plus on rappelle que par définition $\gamma_m = \alpha(p_m, m)$ et donc finalement $\widetilde{\mu}_m$ mute les sommets d'indices

$$((p_m)_{\min})^{\beta_m+}, \ldots, ((p_m)_{\max})^{\alpha(p_m,m)-}.$$

Il nous faut donc montrer que

$$k = (k_{\max})^{\alpha(k,m)-} \Leftrightarrow k = ((p_m)_{\max})^{\alpha(p_m,m)-},$$

et

$$m = f(k^{\alpha(k,m-1)+}) \Leftrightarrow k = ((p_m)_{\min})^{\beta_m+}.$$

Pour la première équivalence, comme $(p_m)_{\max} = k_{\max}$ et $\alpha(p_m, m) = \alpha(k, m)$, elle est évidente.

Pour la deuxième équivalence, par définition de f on a que le plus petit k tel que $f(k^{\alpha(k,m-1)+}) = m$ est celui vérifiant

$$k^{\alpha(k,m-1)+} = p_m.$$

En effet, il vérifie bien l'égalité et si on a un j de même couleur tel que $j^{\alpha(k,m-1)+} < k^{\alpha(k,m-1)+}$ alors $j^{\alpha(k,m-1)+} < p_m$ et $f(j^{\alpha(k,m-1)+}) < m$.

Ainsi l'équivalence peut se réécrire :

$$p_m = k^{\alpha(k,m-1)+} \Leftrightarrow ((p_m)_{\min})^{\beta_m+} = k.$$

On part du membre de droite auquel on applique $(\gamma_m - 1)+ = (\alpha(k,m) - 1)+ = \alpha(k, m-1)+$ car $i_k = i_{p_m}$, on a alors

$$((p_m)_{\min})^{(\gamma_m+\beta_m-1)+} = k^{(\alpha(k,m-1))+}.$$

Or on sait que $\gamma_m + \beta_m = \mathrm{Card}\{1 \leq k \leq p_m \mid i_k = i_{p_m}\}$ c'est à dire le nombre de lettres de couleur i_{p_m} d'indice inférieur ou égal à p_m dans $\overline{w}$. Alors, si on part de la première lettre de $\overline{w}$ de couleur i_{p_m} et qu'on la décale du nombre de lettres de même couleur dans $\overline{w}_{\leq p_m}$ on atteint l'indice p_m^+ et donc ici $((p_m)_{\min})^{(\gamma_m+\beta_m-1)+} = p_m$ et on a bien $p_m = k^{\alpha(k,m-1)+}$.

Ainsi, les deux définitions de mutations mutent les mêmes sommets dans le même ordre, elles sont donc équivalentes. □

Corollaire 5.1.2. *On a $\mu_\bullet(V_{\overline{w}}) = \mu^\bullet(V_{\overline{w}})$.*

5.2 Suites rouges et vertes

Dans cette section on va examiner la suite de mutations du théorème 3.1.12 du point de vue de la théorie des suites rouges-vertes de Keller. On commence par rappeler quelques définitions.

5.2.1 Définitions

Dans cette section on se basera sur [KD20].

Définition 5.2.1. Soit Q un carquois à n sommets. Le **carquois encadré** $\widehat{Q}$ est obtenu à partir de Q en ajoutant pour chaque sommet $i \in Q_0$, un nouveau sommet i' et une nouvelle flèche $i' \to i$.

Dans ce contexte on appellera ces nouveaux sommets i' des **sommets gelés**.

Soit R un carquois obtenu à partir de $\widehat{Q}$ par une suite finie de mutations (sur les sommets $i \in Q$). Un sommet est dit **vert** par rapport à $\widehat{Q}$ s'il n'est la source d'aucune flèche $i \to j'$ où $j' \in R$ est un sommet gelé. Inversement un sommet est dit **rouge** par rapport à $\widehat{Q}$, s'il n'est le but d'aucune flèche ayant pour source un sommet gelé $j' \in R$.

Remarque 5.2.2. *Comme le carquois de la définition 2.6.21 est le carquois de l'algèbre d'endomorphismes de $V_{\overline{w}}$ (et pas le carquois de l'algèbre opposée) nous devons utiliser des flèches $i' \to i$ au lieu des flèches $i \to i'$ de [KD20].*

Remarque 5.2.3. *Tous les sommets d'un carquois sont verts par rapport à lui-même.*

Théorème 5.2.4 ([DWZ10, Théorème 1.7])**.** *Tout sommet non-gelé de R est soit vert soit rouge par rapport à n'importe quel carquois de sa classe de mutation.*

Définition 5.2.5 (Suites verte, verte maximale, rougissante)**.** Une suite de sommets $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ d'un carquois initial Q est **verte** par rapport à un carquois R donné si pour chaque $1 \leq t \leq N$, le sommet k_t est vert par rapport à R dans le carquois partiellement muté :

$$\mu_{k_{t-1}} \circ \cdots \circ \mu_{k_2} \circ \mu_{k_1}(\widehat{Q})$$

Une suite est **verte maximale** par rapport à R si elle est verte par rapport à R et si tous les sommets non-gelés de $\mu_{\mathbf{i}}(\widehat{Q})$ sont rouges par rapport à R.

Une suite est **rougissante** par rapport à R si tout les sommets non-gelés de $\mu_{\mathbf{i}}(\widehat{Q})$ sont rouges par rapport à R (sans nécessairement que la suite soit verte).

Conjecture 5.2.6. *La suite des sommets de $V_{\overline{w}}$ mutés par $\mu_\bullet$ est une suite verte par rapport à $V_{\overline{w}}$.*

Exemple 5.2.7. On se place dans le groupe de Weyl de type A_4 avec

$$\overline{w} = [3, \underline{2}, 3, \underline{1}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{2}, 3] \text{ et } v = s_4 s_2 s_3 s_1 s_2.$$

On représente à la figure 5.1 le carquois de $V_{\overline{w}}$ (dont les sommets sont en vert) ainsi que son encadrement en bleu.

Ici $\mu_\bullet = S(\mu_6 \circ \mu_3 \circ \mu_2)$. On va regarder l'évolution du carquois au fur et à mesure des mutations, en représentant en vert les flèches ayant pour but un sommet gelé, en rouge celle ayant pour source un sommet gelé. On représente en vert ou en rouge les sommets selon leur coloration au sens de la définition 5.2.1.

Après avoir retiré les sommets, on obtient le carquois de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ à la figure 5.5

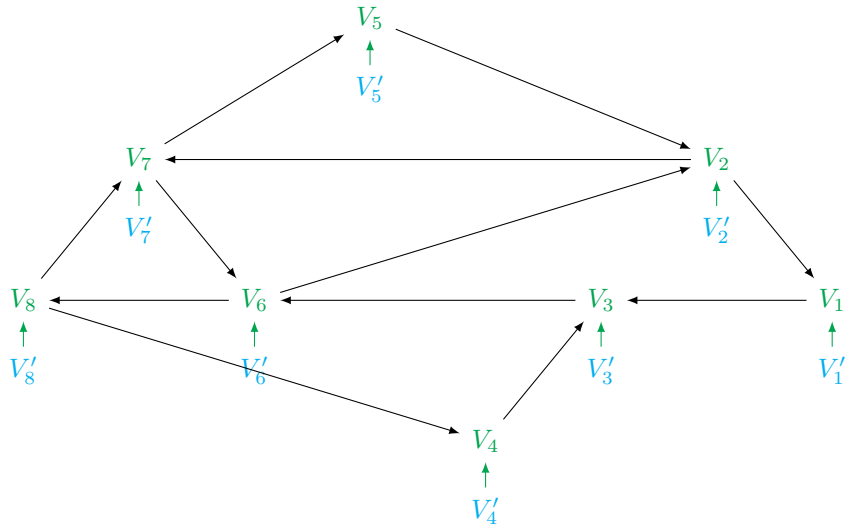


FIGURE 5.1 – Carquois encadré de $V_{\overline{w}}$

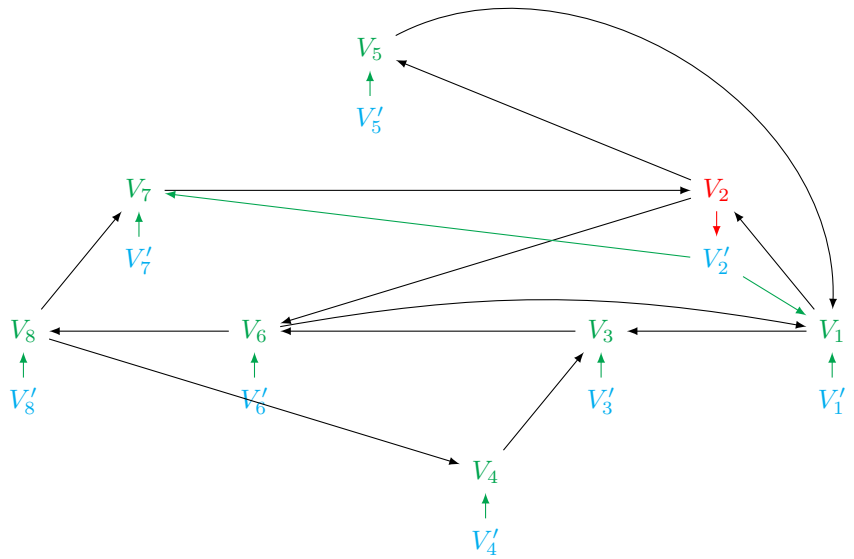


FIGURE 5.2 – Carquois encadré de $\mu_2(V_{\overline{w}})$

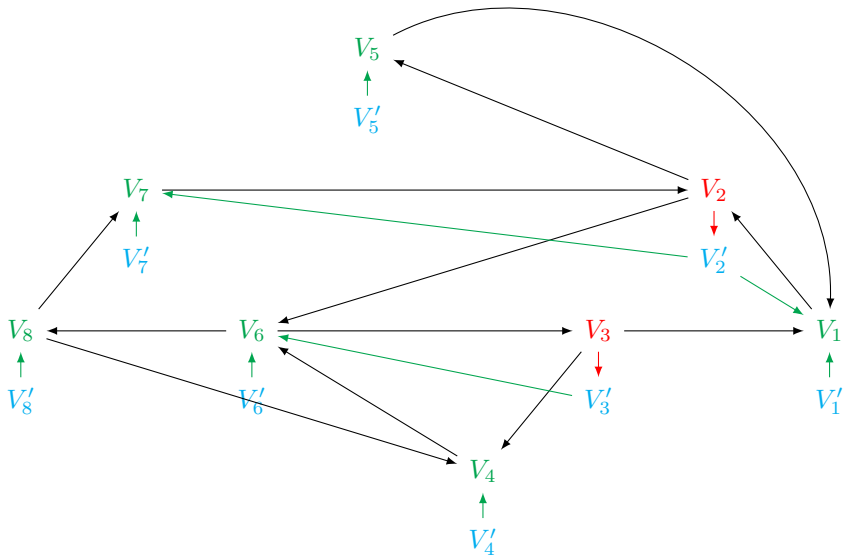


FIGURE 5.3 – Carquois encadré de $\mu_3 \circ \mu_2(V_{\overline{w}})$

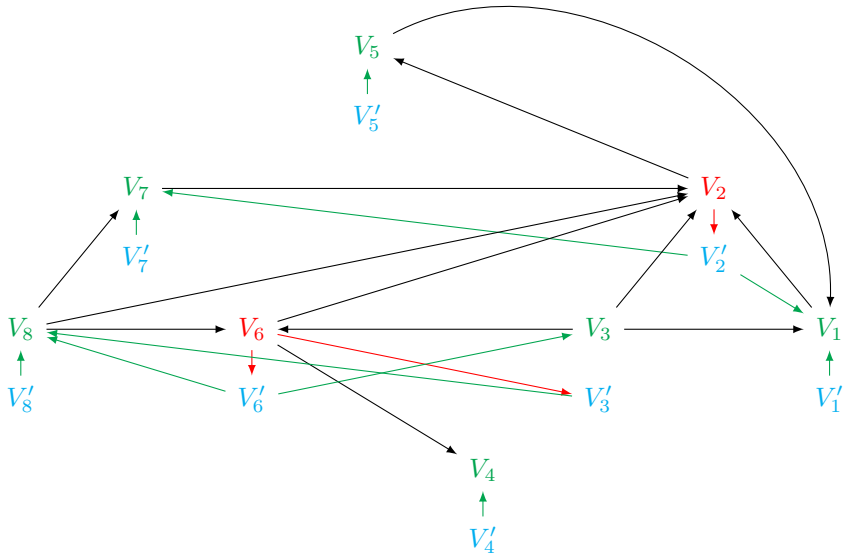


FIGURE 5.4 – Carquois encadré de $\mu_6 \circ \mu_3 \circ \mu_2(V_{\overline{w}})$

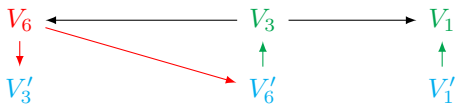


FIGURE 5.5 – Carquois encadré de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$

Proposition 5.2.8. *La suite des sommets de $V_{\dot{w}}$ mutés par $\mu_\bullet$ est une suite verte par rapport à $V_{\dot{v}}$.*

Exemple 5.2.9. Comme dans l'exemple 5.2.7, on va regarder l'effet de $\mu_\bullet$ sur le carquois $V_{\overline{w}}$ mais cette fois pour les sommets rouges et verts déterminés en fonction du carquois $V_{\dot{v}}$. On utilise ici la complétion $\dot{v} = [4, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 3, 2]$ et on part du carquois de $V_{\dot{v}}$ pour arriver au carquois de $V_{\dot{w}}$ d'où on en déduit celui de $V_{\overline{w}}$ avec $\dot{w} = [4, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 3]$. On a le carquois de la figure 5.7 qu'on va muter. On remarque qu'on a renuméroté les sommets colorés en cohérence avec $\overline{w}$ mais les sommets gelés ont gardé les noms qu'ils avaient dans $\widehat{V}_{\dot{v}}$. Leurs positions ont pu être modifiées pour des raisons de lisibilité du carquois.

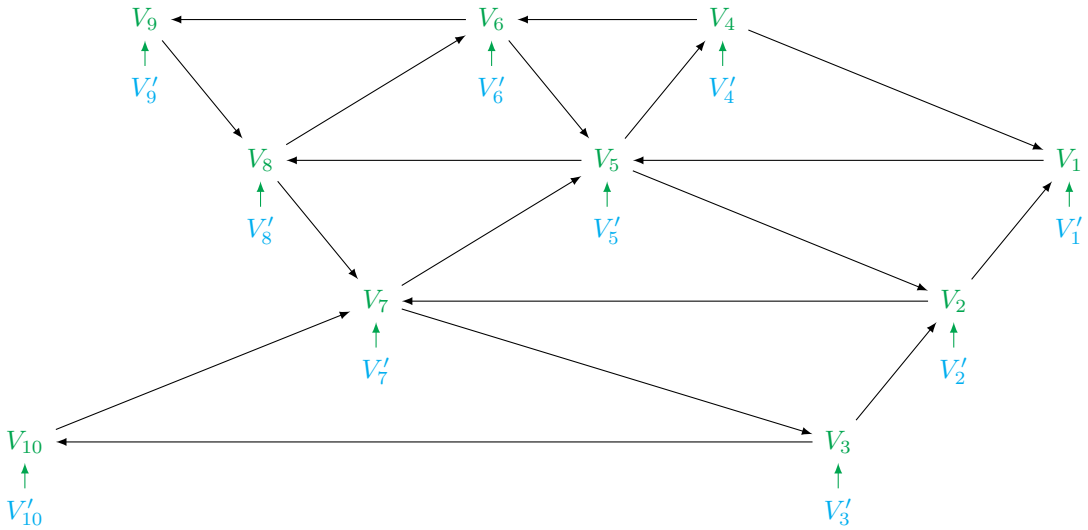


FIGURE 5.6 – Carquois $\widehat{V}_{\dot{v}}$

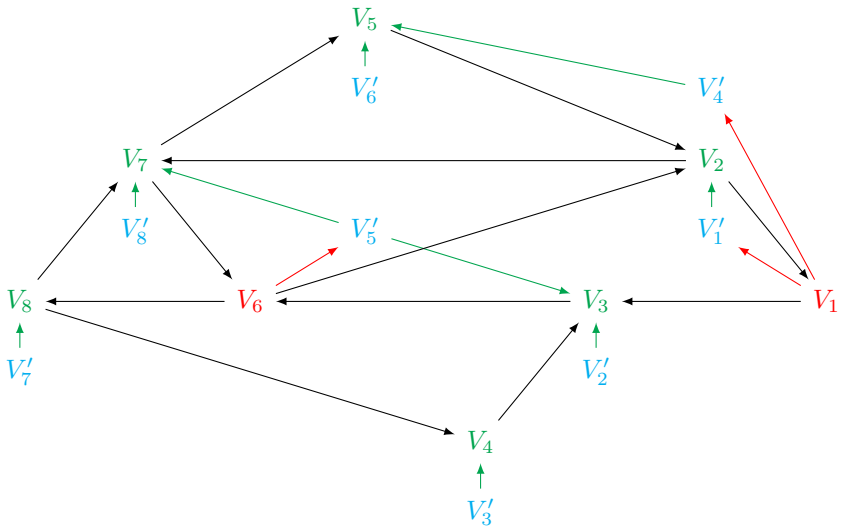


FIGURE 5.7 – Carquois de $V_{\overline{w}}$ avec une $V_{\dot{v}}$-coloration des sommets

Et finalement, à la figure 5.11, on obtient des colorations différentes de la figure 5.5. Cependant dans ces deux exemples, la suite de mutations effectuée était verte.

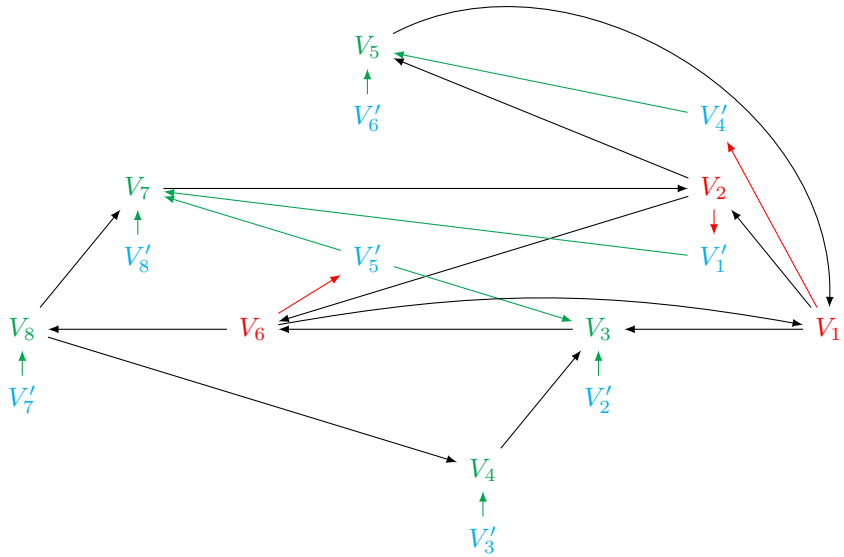


FIGURE 5.8 – Carquois de $\mu_2(V_{\overline{w}})$ avec une $V_{\dot{v}}$-coloration des sommets

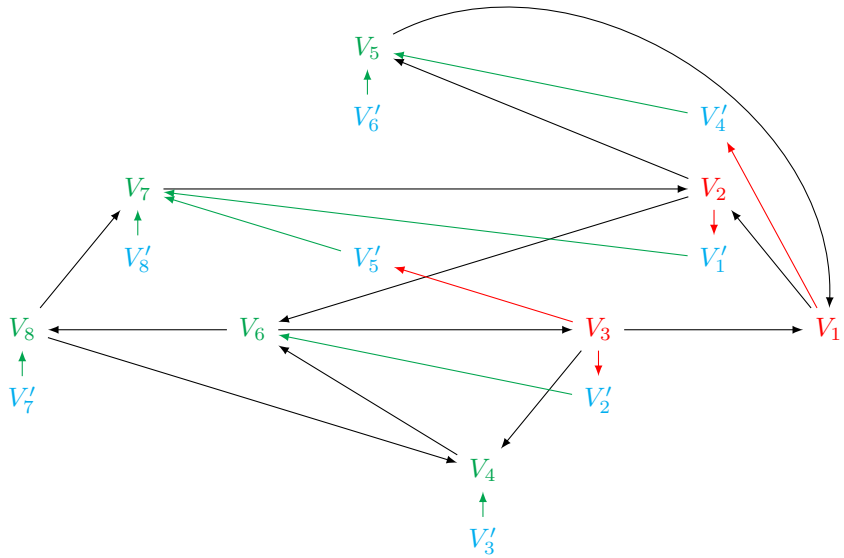


FIGURE 5.9 – Carquois de $\mu_3 \circ \mu_2(V_{\overline{w}})$ avec une $V_{\dot{v}}$-coloration des sommets

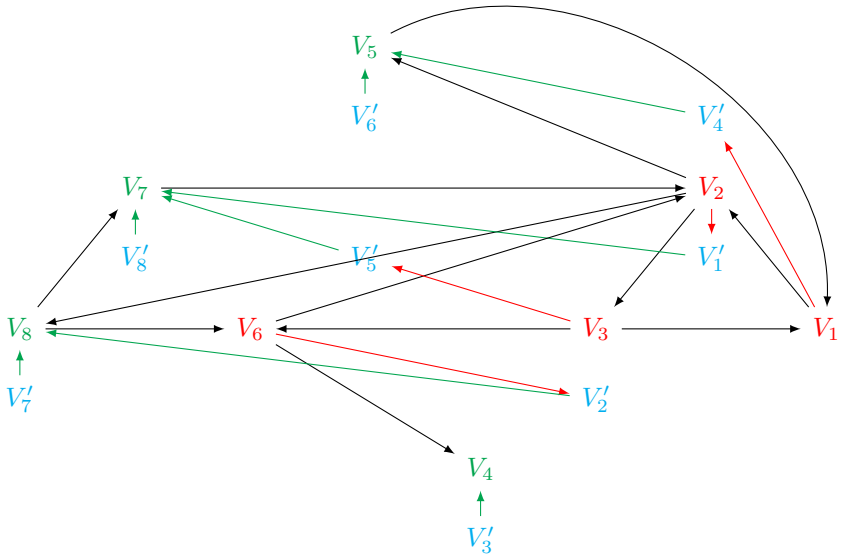


FIGURE 5.10 – Carquois de $\mu_6 \circ \mu_3 \circ \mu_2(V_{\overline{w}})$ avec une $V_{\dot{v}}$-coloration des sommets

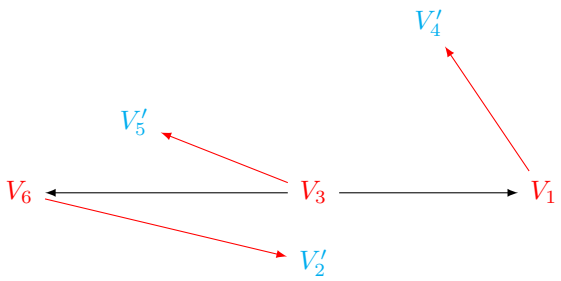


FIGURE 5.11 – Carquois de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ avec une $V_{\dot{v}}$-coloration des sommets

Démonstration de la proposition 5.2.8. Le module $V_{\dot{w}}$ (et son carquois) est dans la classe de mutation de $V_{\dot{v}}$: on peut passer de $\dot{v}$ à $\dot{w}$ par une suite de 2 et 3-mouvements. Les 2-mouvements se traduisent par une renumérotation des sommets, les 3-mouvements par une mutation et une renumérotation des sommets.

Dans la suite, on va noter $F_{\dot{v}}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\dot{v}}, -)$. Par la preuve de l'algorithme, on a vu que le calcul des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs s'effectue toujours en prenant en compte la suite exacte courte dont le module à muter, R_k, est le noyau, comme expliqué dans le corollaire 4.12.5. Par [GLS11, Proposition 12.4], on a équivalence entre le fait qu'une suite exacte courte soit $F_{\dot{v}}$-exacte et une condition sur les dimensions de ses vecteurs de $B_{\dot{v}}$-dimension. Cette condition est équivalente au fait de choisir la suite exacte courte dont R_k est le noyau.

D'après [KB20], ceci est équivalent au fait que la mutation est verte par rapport à $V_{\dot{v}}$.

Ainsi les mutations de $\mu_\bullet$ sont des mutations vertes par rapport à $V_{\dot{v}}$. □

Remarque 5.2.10. *Comme on peut le voir dans l'exemple 5.2.7, la suite des sommets mutés par $\mu_\bullet$ n'est ni une suite verte maximale, ni rougissante.*

5.3 Obtention des graines par quotient

On rappelle qu'on a décrit à la proposition 2.7.8 un procédé général pour construire des graines de $\mathcal{C}_{v,w}$: partant d'une graine T de $\mathcal{C}_w$, on forme $T/t_v(T)$. Malheureusement ce module n'est pas basique en général, et on ne sait pas calculer son carquois. On conjecture ici qu'on peut trouver grâce à l'algorithme un sous-module basique, rigide et $\mathcal{C}_{v,w}$-maximal de $V_{\overline{w}}/t_v(V_{\overline{w}})$ et donc déterminer son carquois.

Conjecture 5.3.1. *Soit $V_{\overline{w}}$ le module de la définition 2.6.20. Alors $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$ est un sous-module basique maximal de $V_{\overline{w}}/t_v(V_{\overline{w}})$.*

Corollaire 5.3.2. *L'algorithme $\mu_\bullet$ permet de déterminer le carquois d'un sous-module basique, rigide, $\mathcal{C}_{v,w}$-maximal de $V_{\overline{w}}/t_v(V_{\overline{w}})$.*

Exemple 5.3.3. On reprend l'exemple 5.2.7. On rappelle qu'on a W de type A_4, $\overline{w} = [3, \underline{2}, 3, \underline{1}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{2}, 3]$ et $v = s_4 s_2 s_3 s_1 s_2$. On va déterminer $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}_v$ d'après la définition 2.4.12.

On a donc :

$$\mathcal{C}_w = \mathrm{Fac}\left(\begin{array}{c}3\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&3&\\2&&4\\1&3&\\&2&\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\1&3&\\2&&4\\&3&\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\&3&\\&&4\end{array} \right)$$

$$\mathcal{C}_v = \mathrm{Fac}\left(\begin{array}{c}2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\1&&3\\&2&\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\3\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\&3&\\&&4\end{array} \right)$$

$$\mathcal{C}^v = \mathrm{Sub}\left(\begin{array}{c}4\\3\end{array} \oplus \begin{array}{c}3\\4\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\1&&3\\&&4\end{array} \oplus \begin{array}{c}1\\\end{array} \right)$$

On représente les facteurs de $V_{\overline{w}}$ dans la table 5.1, les sous-modules $t_v(V_i)$ dans la table 5.2, et les modules $U_i = V_i/t_v(V_i)$ dans la table 5.3.

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
3	$\begin{array}{c}3\\2\end{array}$	$\begin{array}{c}2\\3\end{array}$	$\begin{array}{ccc}&2&\\&3&\\&&4\end{array}$	$\begin{array}{ccc}&3&\\&2&\\1&&\end{array}$	$\begin{array}{ccc}&3&\\2&&4\\&3&\end{array}$	$\begin{array}{ccc}&3&\\&2&\\1&&4\\&3&\\&2&\end{array}$	$\begin{array}{ccc}&2&\\1&&3\\&2&\\&&4\\&3&\end{array}$

Table 5.1 – Facteurs directs de $V_{\overline{w}}$

On a donc

$$U_{\overline{w}} = V_{\overline{w}}/t_v(V_{\overline{w}}) = 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus \begin{array}{c}3\\4\end{array} \oplus \begin{array}{c}3\\4\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\1&&3\\&&4\end{array}$$

et le plus grand sous-module basique est :

$$3 \oplus \begin{array}{c}3\\4\end{array} \oplus \begin{array}{ccc}&2&\\1&&3\\&&4\end{array}.$$

$t_v(V_1)$	$t_v(V_2)$	$t_v(V_3)$	$t_v(V_4)$	$t_v(V_5)$	$t_v(V_6)$	$t_v(V_7)$	$t_v(V_8)$
0	2	$\begin{smallmatrix} 2 & \\ & 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & \\ & 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & \\ & 3 \end{smallmatrix}$

TABLE 5.2 – Facteurs directs $t_v(V_i)$

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
3	3	0	0	3	$\begin{smallmatrix} 3 & \\ & 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & \\ & 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & & 4 \end{smallmatrix}$

TABLE 5.3 – Facteurs directs de $V_{\overline{w}}/t_v(V_{\overline{w}})$

En appliquant $\mu_\bullet$ comme dans l'exemple 5.2.7, on a $\mu_\bullet(V_{\overline{w}}) = \ 3 \ \oplus \ \begin{smallmatrix} 3 & \\ & 4 \end{smallmatrix} \ \oplus \ \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & & 4 \end{smallmatrix}$.

ANNEXE A

Algorithmes Sage

A.1 Prérequis

A.1.1 Installation

Ces fichiers nécessitent d'avoir installé Sage sur sa machine. Les algorithmes ont été testés sur la version 8.1 de Sage. Pour installer les fichiers, il faut récupérer l'archive disponible sur https://menarde01.users.lmno.cnrs.fr/files/SageClusterStructureOnStrataOfFlagVarieties.zip et la décompresser dans le dossier voulu. Ensuite, modifier le chemin dudit dossier dans le fichier **run.sage** à l'endroit indiqué. Les indications données sont prévues pour une utilisation de Sage via l'invite de commande. L'utilisation via un bloc-note ne devrait pas poser de problème à partir du moment où les fichiers sont chargés mais cela n'a pas été testé.

A.1.2 Chargement des fichiers

On a deux possibilités pour le chargement des fichiers :

- les charger à chaque nouvelle session Sage
- les charger ponctuellement

Chargement persistant

Si l'on veut que Sage charge les fichiers spécifiques à chaque démarrage, il faut s'assurer de déplacer le fichier **init.sage** à l'intérieur du dossier ∼/**.sage** sur un système Unix (ou le dossier équivalent sur une autre installation de Sage, se reporter à la documentation officielle du logiciel).

Si le fichier existe déjà, il suffit d'insérer les lignes du fichier dans le fichier **init.sage** déjà existant, en vérifiant le chemin vers le fichier **run.sage** à la ligne démarrant par **load**.

A chaque démarrage de Sage, les instructions du fichier **init.sage** seront lues et les fichiers chargés.

Chargement ponctuel

Pour charger les fichiers, il suffit de charger le fichier **run.sage** et d'avoir correctement configuré ce fichier comme indiqué à la section A.1.1. Pour cela il faut taper

load("chemin_vers_le_fichier/run.sage")

en adaptant évidemment le chemin vers le fichier.

A.2 Exemples minimaux fonctionnels

Le but de cette section est de reproduire quelques exemples d'utilisation du code développé pendant la thèse dans certains cas parmi les plus usuels.

A.2.1 Suivi de l'algorithme principal

```
[W,[s1,s2,s3,s4,s5,s6]]=creerGroupeWeyl("D6")
#On créé un groupe de Weyl de type D6 et on nomme les 6 réflexions é
    ↪ lémentaires du groupe.
w=W.random_element_of_length(25)
#On tire au hasard un élément du groupe W de longueur 25
repw=motVersRep(w)
#On récupère un représentant repw de l'élément w
repw=modifAleatoireRep(repw,34,W)[0]
#On modifie le représentant en lui appliquant 34 mouvements é
    ↪ lémentaires (2 ou 3-mouvements, potentiellements répétés)
v=choixSousMot(W,repw)
v=choixSousMot(W,repw)
#On choisit aléatoirement un élément v plus petit que w pour l'ordre de
    ↪ Bruhat
#On doit le faire deux fois car la première itération renvoie souvent
    ↪ l'élément
# w lui-même
testAlgo2(repw,v,enregistrement=True)
#On teste notre algorithme dans le cas où on a choisi le couple
    ↪ (repw,v) comme données et on enregistrement le résultat dans le
    ↪ dossier log du dossier où on a mis le fichier run.sage
testAlgo2(repw,v,enregistrement=True,
...couperADroite=True)
#Idem que précédemment mais cette fois on a la graine coupée.
```

On obtient alors des fichiers images semblables à ceux de la figure A.1, A.2 ou A.3. Ici les données de départ étaient W de type D_6, $\overline{w} = [3, 4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 1]$ et $v = s_3s_4s_6s_2s_3s_4s_5s_1s_2s_3s_4s_6s_4s_3s_1s_2s_1$.

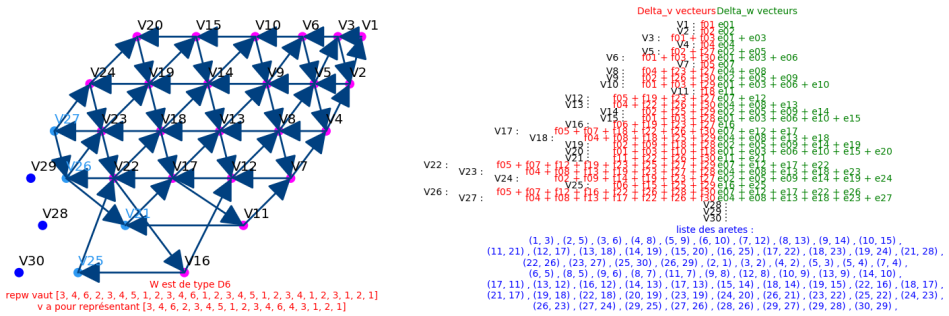


FIGURE A.1 – Exemple de sortie de l'algorithme (graine initiale non-coupée)

FIGURE A.2 – Exemple de sortie finale de l'algorithme (graine de $\mathcal{C}_{v,w}$)

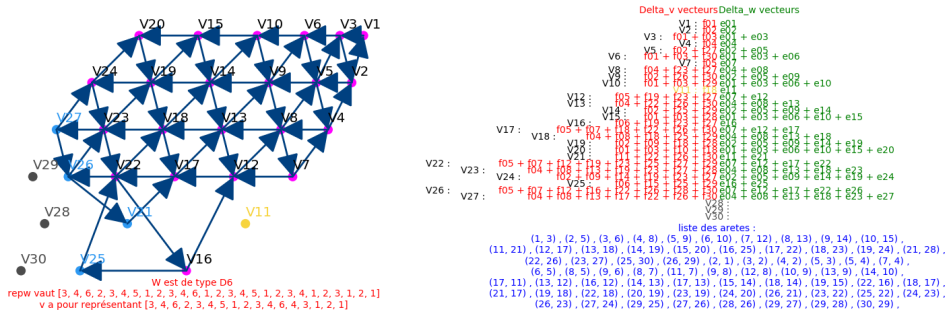


FIGURE A.3 – Exemple de sortie de l'algorithme (version coupée de la graine initiale)

Sur les images de gauche on voit les carquois (dans le cas des graines coupés les sommets en jaune sont ceux appartenant à $\mathcal{C}^v$). Les sommets en bleu ciel sont des sommets $\mathcal{C}_w$-projectifs (mais il peut aussi en exister parmi les sommets quelconques). Sur les images de droites on a les $\Delta_{\dot{v}}$ et $\Delta_{\dot{w}}$-coordonnées de chacun des facteurs directs de la graine puis la liste des arêtes. Pour des raisons techniques apparaissent aussi des sommets isolés qui appartiennent à $V_{\dot{w}}$ mais pas à $V_{\overline{w}}$ et les flèches adjacentes sont toujours listées même si non représentées.

Ici, on a fait le choix de tirer les données au hasard, mais on peut tout à fait imposer des conditions.

```
[W,[s1,s2,s3,s4,s5,s6]]=creerGroupeWeyl("D6")
#On créé un groupe de Weyl de type D6 et on nomme les 6 réflexions é
    ↪ lémentaires du groupe.
repw=[5,3,4,6,2,3,4,5,1,2,3,4,6,2,3,4,5,2,3,1,2]
#On récupère un représentant repw de l'élément w
v=s4*s6*s5*s1*s2*s3*s4*s3*s2*s1
#On choisit un élément v plus petit que w pour l'ordre de Bruhat
testAlgo2(repw,v,enregistrement=True)
#On teste notre algorithme dans le cas où on a choisi le couple
    ↪ (repw,v) comme données et on enregistrement le résultat dans le
    ↪ dossier log du dossier où on a mis le fichier run.sage
testAlgo2(repw,v,enregistrement=True,
...couperADroite=True)
#Idem que précédemment mais cette fois on a la graine coupée.
```

A.2.2 Génération du carquois de $V_{\overline{w}}$

Afin de générer une graine initiale, on a deux fonctions selon que l'on veut connaître ses vecteurs $\Delta_{\dot{v}}$ et $\Delta_{\dot{w}}$ d'une part ou la coloration de ses sommets d'autre part.

Pour obtenir les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs et $\Delta_{\dot{w}}$-vecteurs, le plus simple est en fait d'utiliser l'algorithme général mais de ne lui faire faire aucune mutation. Seulement on ne peut pas lui indiquer une liste de mutations vides (sinon il va directement calculer la liste de la définition 3.1.7). L'astuce est donc de lui demander de faire deux fois la même mutation.

```
#On suppose qu'on a déjà défini W, les réflexions
#initiales et le représentant repw et l'élement v
testAlgo2(repw,v,listeMutations=[(1,0),(1,0)],enregistrement=True)
#Ici en fait on lui indique de muter deux fois le sommet d'indice 1
#Il affiche la sortie de l'algorithme et l'enregistre dans le dossier
    ↪ indiqué
#L'algorithme renvoie des données dont le carquois, les matrices
#de $\Delta$-coordonnées, la liste des graphiques et la liste
#des mouvements de réécriture
```

Pour obtenir la $V_{\overline{w}}$-coloration du carquois de la graine de $V_{\overline{w}}$, on saisit le code suivant :

```
#On suppose qu'on a déjà défini W, les réflexions
#initiales et le représentant repw et l'élément v
carquoisEncadreInitial(repw,W,affiche=True)
```

```
#L'algorithme affiche le carquois,une liste de sommets
#colorés sur un autre graphique avec la liste des arêtes
#et renvoie le carquois encadré.
```

Si on veut la coloration par rapport à une autre graine, on doit avoir le chemin de réécriture d'une graine à l'autre et donc les représentants de w_0 contenant à droite les éléments qu'on veut considérer. Par exemple pour avoir la $V_{\dot{v}}$ coloration de la graine $V_{\overline{w}}$ (en fait $V_{\dot{w}}$) on saisit le code suivant.

```
#On suppose qu'on a déjà défini W, les réflexions
#initiales et le représentant repw et l'élément v

#On calcule les représentants de w_0
repwcomplete=completeMot(repw,W)
repvcomplete=completeMot(motVersRep(v),W)

#On calcule la liste de mouvements de réécriture de l'un à l'autre
liste=calculMouvementsTresses(repvcomplete,repwcomplete,W)

#On génère le carquois de V_v
Q=carquoisEncadreInitial(repvcomplete,W)

#On lui applique les mouvements de réécriture
R=appliquerListeMouvementsSSVZCarquoisCvecteurs(Q,liste)

#On affiche le résultat
genCarquoisCVecteurs(R,repwcomplete)
```

ANNEXE B

Exemple de fonctionnement de l'algorithme

Tout au long de ce chapitre on mettra en parallèle les calculs faits à la main et les sorties de l'implémentation Sage. Dans l'implémentation, les arêtes seront représentées par un couple de deux entiers, correspondants aux sommets, le premier étant la source, le second le but. Les sommets négatifs sont en fait les sommets gelés apparaissant dans la coloration rouge-verte du carquois. On va détailler l'application de l'algorithme 3.2.4 au cas d'un groupe de Weyl W de type D_5 avec $\overline{w} = [5, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$ et $\overline{v} = [3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 3, 2, 1, 3]$. On associe une couleur à chacune de réflexions élémentaires de W : $1, 2, 3, 4, 5$. Par la suite, quand on aura besoin d'un représentant de w_0 contenant $\overline{w}$ à droite, on choisira $\dot{w} = [4, 3, 2, 5, 1, 3, 2, 4, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2]$. On commence par mettre en évidence l'écriture de $\overline{v}$ dans $\overline{w}$:

$$\overline{w} = [5, 1, \underline{3, 2, 4, 3}, 2, \underline{5, 1}, 2, 3, \underline{4, 3, 2, 1, 3}, 2]$$

On a donc l'équivalence entre les indices i et p_i de la table B.1.

Indice dans $\overline{v}$ (p_j)	Indice dans $\overline{w}$ (k)	Couleur ($i_k = i_{p_j}$)
1	2	3
2	3	1
3	4	2
4	5	3
5	6	4
6	9	1
7	10	5
8	12	3
9	13	4
10	14	2
11	15	3

TABLE B.1 – Correspondance entre les indices k et p_j

On peut déjà déduire, par la définition 3.1.7 les sommets qui vont être mutés par l'algorithme (on colore les μ_k selon la couleur i_k de k dans $\overline{w}$) :

$$\mu_\bullet = S \circ \underbrace{id}_{\widetilde{\mu}_{11}} \circ \underbrace{id}_{\widetilde{\mu}_{10}} \circ \underbrace{id}_{\widetilde{\mu}_{9}} \circ \underbrace{\mu_5}_{\widetilde{\mu}_{8}} \circ \underbrace{\mu_{10}}_{\widetilde{\mu}_{7}} \circ \underbrace{\mu_3}_{\widetilde{\mu}_{6}} \circ \underbrace{\mu_6}_{\widetilde{\mu}_{5}} \circ \underbrace{\mu_7 \circ \mu_5 \circ \mu_2}_{\widetilde{\mu}_{4}} \circ \underbrace{\mu_{11} \circ \mu_8 \circ \mu_4}_{\widetilde{\mu}_{3}} \circ \underbrace{\mu_9 \circ \mu_3}_{\widetilde{\mu}_{2}} \circ \underbrace{\mu_{12} \circ \mu_7 \circ \mu_5 \circ \mu_2}_{\widetilde{\mu}_{1}}$$

B.1 Données initiales

On détermine à la main le module $V_{\overline{w}}$ dans la table B.2 ainsi que son carquois à la figure B.1 (on lit la couleur des modules à la couleur de leur socle). On donne à la figure B.2 l'équivalent de la sortie de l'implémentation (où les facteurs directs indécomposables sont représentés par leur Δ-vecteur qu'on calculera ci-après.

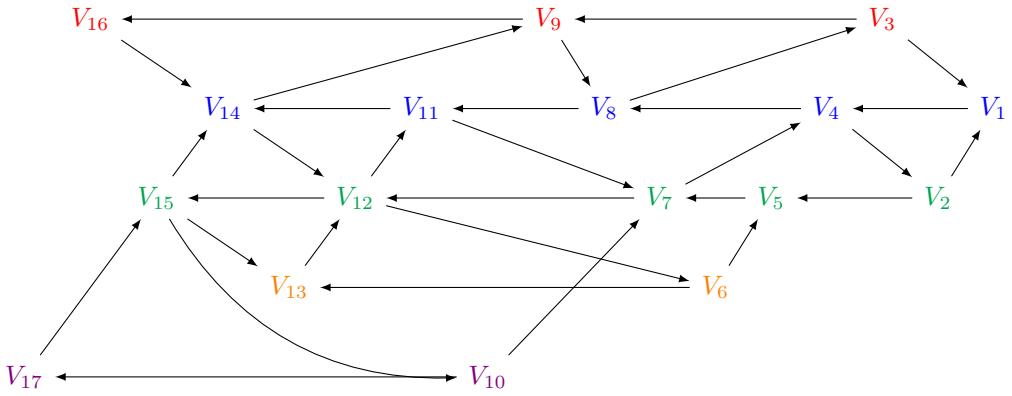


FIGURE B.1 – Carquois de $V_{\overline{w}}$

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
2	2	2	2	1	1
	3	1	1 3	2	2
			2	3	3
					4
V_7	**V_8**	**V_9**	**V_{10}**	**V_{11}**	**V_{12}**
2	2 4	4	2	3	1 3
1 3	1 3	3	1 3	2 4	22 4
2 4	2	2	2 4	1 3	1 33
3		1	3	2	2 4 5
			5		3
V_{13}	**V_{14}**	**V_{15}**	**V_{16}**	**V_{17}**	
3	1	2 4	1	4	
2 4	2 4	1 33	2	3	
1 3	33	22 4 5	3	2 5	
2 5	2 4 5	1 33	4 5	1 3	
3	1 3	2 4 5	3	2 4	
4	2	3	2	3	
			1	5	

TABLE B.2 – Décomposition de socle des modules V_i

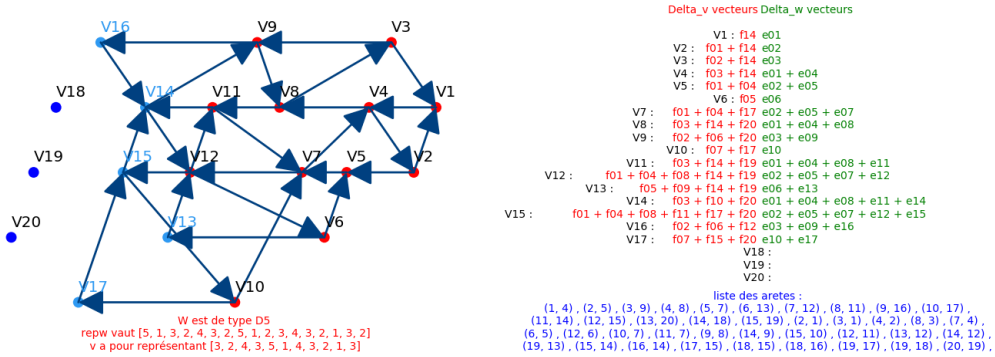


FIGURE B.2 – Sortie de l'implémentation

B.2 Δ-stratification

Ici on va appeler L_i les modules déterminant les $\Delta_{\overline{w}}$-vecteurs. On appellera W_i les facteurs directs indécomposables de $V_{\dot{v}}$ et M_i leurs quotients déterminant les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs.

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9
2	2	2	2	1	1	2	4	4
	3	1	1 3		2	3		3
					3	4		
					4			
L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	
2	3	1 3	3	1	2 4	1	4	
1 3		2 4	2 4	2 4	3	2	3	
2 4		3	3	3	5	3	5	
3		5	5	5		5		
5								

TABLE B.3 – Décomposition de socle des modules $M_{i,\overline{w}}$

Afin de définir les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs, on choisit la complétion[1] de $\overline{v}$ en

$$\dot{v} = [5, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 3, 2, 1, 3]$$

Ce qui nous donne les facteurs directs indécomposables (W_i) de $V_{\dot{v}}$ de la table B.4 qui se stratifient selon les modules $M_{i,\dot{v}}$ de la table B.5

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
3	1	1 3	1	1	3	1
		2	2	2	2	2
			3	3	1	3
				4		5
W_8	W_9	W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}
1	1 3	1	1 3	1	1	2
2	2 5	2	22 5	2	2 5	1 3
1 33	3	33	1 33	3	33	2 5
2 4 5	4	2 4 5	2 4 5	4 5	2 4 5	3
3		1 3	3	3	1 3	4
		2		2	2	
				1		
W_{15}	W_{16}	W_{17}	W_{18}	W_{19}	W_{20}	
3	2 5	2	5	3	4	
2 5	1 33	1 3	3	2 4 5	3	
1 3	22 4 5	2 4 5	2 4	1 33	2 5	
2 4	1 33	33	1 3	22 4 5	1 3	
3	2 4 5	2 4 5	2 5	1 33	2 4	
5	3	1 3	3	2 4 5	3	
		2	4	3	5	

TABLE B.4 – Décomposition de socle des modules W_i

1. Elle peut être purement arbitraire, tant qu'elle est réduite. Ici on a choisit la sortie de l'implémentation.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
3	1	1 3 2	1 2	1 2 3 4	3 2	1 2 3 5
M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
1 2 33 4 5	3 5	1 2 33 2 4 5	3 2 5	1 2 3 4 5	5	2
M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	
3 2 5 3 4	2 5 33 4	2 3 5	5 3 4	3 4	4	

Table B.5 – Décomposition de socle des modules $M_{i,\dot{v}}$

B.3 Δ-vecteurs des modules initiaux

On a directement le $\Delta_{\dot{w}}$-vecteur de chaque module V_i dans la table B.6 comme dans la remarque 2.8.23.

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
e_1	e_2	e_3	e_1+e_4	e_2+e_5	e_6
V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
$e_2+e_5+e_7$	$e_1+e_4+e_8$	e_3+e_9	e_{10}	$e_1+e_4+e_8+e_{11}$	$e_2+e_5+e_7+e_{12}$
V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	
e_6+e_{13}	$e_1+e_4+e_8+e_{11}+e_{14}$	$e_2+e_5+e_7+e_{12}+e_{15}$	$e_3+e_9+e_{16}$	$e_{10}+e_{17}$	

TABLE B.6 – $\Delta_{\dot{w}}$-vecteurs des modules V_i

Pour déterminer les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs, on pourrait utiliser les résultats du théorème 4.3.10 mais on n'aurait alors d'information que sur les $\ell(v) = 11$ premières coordonnées. Ici on va appliquer une autre stratégie et utiliser le résultat suivant :

Théorème B.3.1 ([BKT14, Propositions 5.26 & 5.27])**.** *Soient $\overline{w}$ et $\overline{w}_2$ deux représentants d'un même mot réduit w, M un module de $\mathcal{C}_w$.*

*Si $\overline{w}$ et $\overline{w}_2$ diffèrent d'un 2-mouvement (*cf. *définition 2.1.22) en position $1 \leq k \leq \ell(w)-1$ et si on a*

$$\Delta_{\overline{w}}(M) = [n_{\ell(w)}, \dots, n_{k+2}, n_{k+1}, n_k, n_{k-1}, \dots, n_1],$$

alors on a

$$\Delta_{\overline{w}_2}(M) = [n_{\ell(w)}, \dots, n_{k+2}, n_k, n_{k+1}, n_{k-1}, \dots, n_1].$$

Si $\overline{w}$ et $\overline{w}_2$ diffèrent d'un 3-mouvement en position $1 \leq k \leq \ell(w)-2$ et si on a :

$$\Delta_{\overline{w}}(M) = [n_{\ell(w)}, \dots, n_{k+3}, n_{k+2}, n_{k+1}, n_k, n_{k-1}, \dots, n_1],$$

alors on a

$$\Delta_{\overline{w}_2}(M) = [n_{\ell(w)}, \dots, n_{k+3}, r, q, p, n_{k-1}, \dots, n_1],$$

où

$$p = n_{k+2} + n_{k+1} - \min(n_k, n_{k+2}), \quad q = \min(n_{k+2}, n_k), \quad r = n_{k+1} + n_k - \min(n_k, n_{k+2}).$$

Ainsi, comme $\dot{w}$ et $\dot{v}$ sont deux représentants réduits de w_0, pour déterminer le $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur d'un module de $\mathcal{C}_w \subset \mathcal{C}_{w_0} = \mathbf{mod}(\Lambda)$ on part de son $\Delta_{\dot{w}}$-vecteur et on détermine un chemin d'étape élémentaires de réécritures en termes de 2 et 3-mouvements de $\dot{w}$ à $\dot{v}$. Pour information ce sont les :

$$(17,18),(15,16),(9,10),(8,9),(9,10,11),(8,9),(11,12),(12,13),(13,14,15),(15,16,17),(14,15),$$

$$(17,18,19),(16,17),(19,20),(12,13),(10,11,12),(12,13,14),(11,12),(14,15),(15,16),(16,17),$$

$$(17,18,19),(13,14),(7,8),(8,9,10),(10,11),(11,12),(12,13),(13,14,15),(12,13),(15,16,17),(14,15),$$

$$(10,11),(2,3),(3,4,5),(5,6),(1,2,3),(3,4),(4,5),(5,6,7),(4,5),(2,3,4),(1,2),(7,8),$$

$$(8,9,10),(10,11,12),(9,10),(12,13),(13,14)$$

Ensuite on applique le théorème B.3.1 pour calculer à chaque étape de réécriture le Δ-vecteur du module. On obtient alors les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de la table B.7

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
f_{14}	f_1+f_{14}	f_2+f_{14}	f_3+f_{14}	f_1+f_4
V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
f_5	$f_1+f_4+f_{17}$	$f_3+f_{14}+f_{20}$	$f_2+f_6+f_{20}$	f_7+f_{17}
V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
$f_3+f_{14}+f_{19}$	$f_1+f_4+f_8+f_{14}+f_{19}$	$f_5+f_9+f_{14}+f_{19}$	$f_3+f_{10}+f_{20}$	$f_1+f_4+f_8+f_{11}+f_{17}+f_{20}$
V_{16}			V_{17}	
$f_2+f_6+f_{12}$			$f_7+f_{15}+f_{20}$	

TABLE B.7 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules V_i

On a donc les données de départ de notre graine en joignant le carquois B.1 et les tables B.6 et B.7.

On retrouve les tables B.6 et B.7 dans la sortie de l'implémentation reproduite à la figure B.3, les $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs étant en rouge, les $\Delta_{\dot{w}}$-vecteurs en vert (aucun lien avec la coloration rouge-verte de Keller).

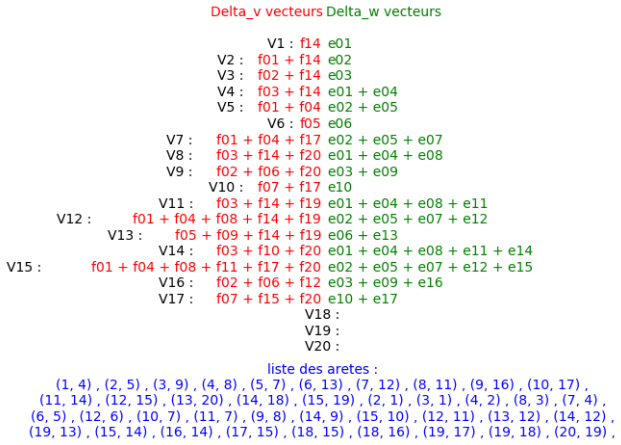


FIGURE B.3 – $V_{\overline{w}}$

On remarque que, comme $\ell(v) = 11$, en vertu du critère énoncé par la proposition 4.16.2, les modules dont le $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur est nul jusqu'à la onzième coordonnée incluse appartiennent à $\mathcal{C}^v$. Ils sont représentés dans la table B.7 par une case jaune pâle. Ici on a uniquement V_1 dans ce cas. Il est donc évincé.

B.4 Lien avec le théorème 4.3.10

On peut ici illustrer les résultats du théorème 4.3.10 en remarquant que les premières coordonnées des $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs de la table B.7 sont bien égales aux coordonnées des $\Delta_{\dot{w}}$-vecteurs de la table B.6 pour la correspondance de la table B.1.

Par exemple on doit avoir pour chaque module $\Delta_{\dot{v},3}(V_k) = \Delta_{\dot{w},4}(V_k)$ pour chaque module $(V_k)_{k=1}^{\ell(w)}$. En effet, pour chacun des modules ayant une quatrième $\Delta_{\dot{w}}$-coordonnée non nulle $(V_4, V_8, V_{11}, V_{14})$, ces modules ont une troisième $\Delta_{\dot{v}}$-coordonnée non nulle. Et ce sont les seuls pour laquelle cette coordonnée est non nulle.

B.5 Lien avec la définition alternative de l'algorithme

On a vu au début de cette section que la première suite de mutations serait $\mu_{12} \circ \mu_7 \circ \mu_5 \circ \mu_2$. On détermine, à partir de la table B.7 l'ensemble $A_1(V_{\overline{w}})$ défini à la définition 3.2.1.

On détermine d'abord la borne $b_m = ((p_1)_{\max})^{\alpha(p_1,m)-}$. Ici $p_1 = 2$. $2_{\max} = 14$ et $\alpha(2,1) = 1$. Ainsi $b = 14^- = 12$. $A_1(V_{\overline{w}})$ est donc l'ensemble des indices des modules ayant une coordonnée 1 non nulle dans leur $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur et dont l'indice est inférieur ou égal à 12. On a $A_1(V_{\overline{w}}) = [2, 5, 7, 12]$ et donc $\hat{\mu}_1 = \mu_{12} \circ \mu_7 \circ \mu_5 \circ \mu_2 = \widetilde{\mu}_1$.

B.6 Calcul de la $V_{\dot{v}}$-coloration des sommets

On illustre ici des définitions de la section 5.2. On représente à la figure B.4 le carquois encadré $V_{\dot{v}}$ dans sa coloration initiale. On rappelle qu'on a $\dot{v} = [5, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 4, 3, 2, 1, 3]$.

On applique les différents mouvements de réécriture de $\dot{v}$ à $\dot{w}$ puis on supprime les sommets d'indice supérieur à $\ell(w)$ pour obtenir le carquois $V_{\dot{v}}$-coloré de $V_{\overline{w}}$ à la figure B.5. Les sommets gelés n'ont pas été renommés au fur et à mesure des modifications mais ils ont été réarrangés afin d'améliorer la lisibilité du diagramme. On voit à la figure B.6 la sortie brute des algorithmes.

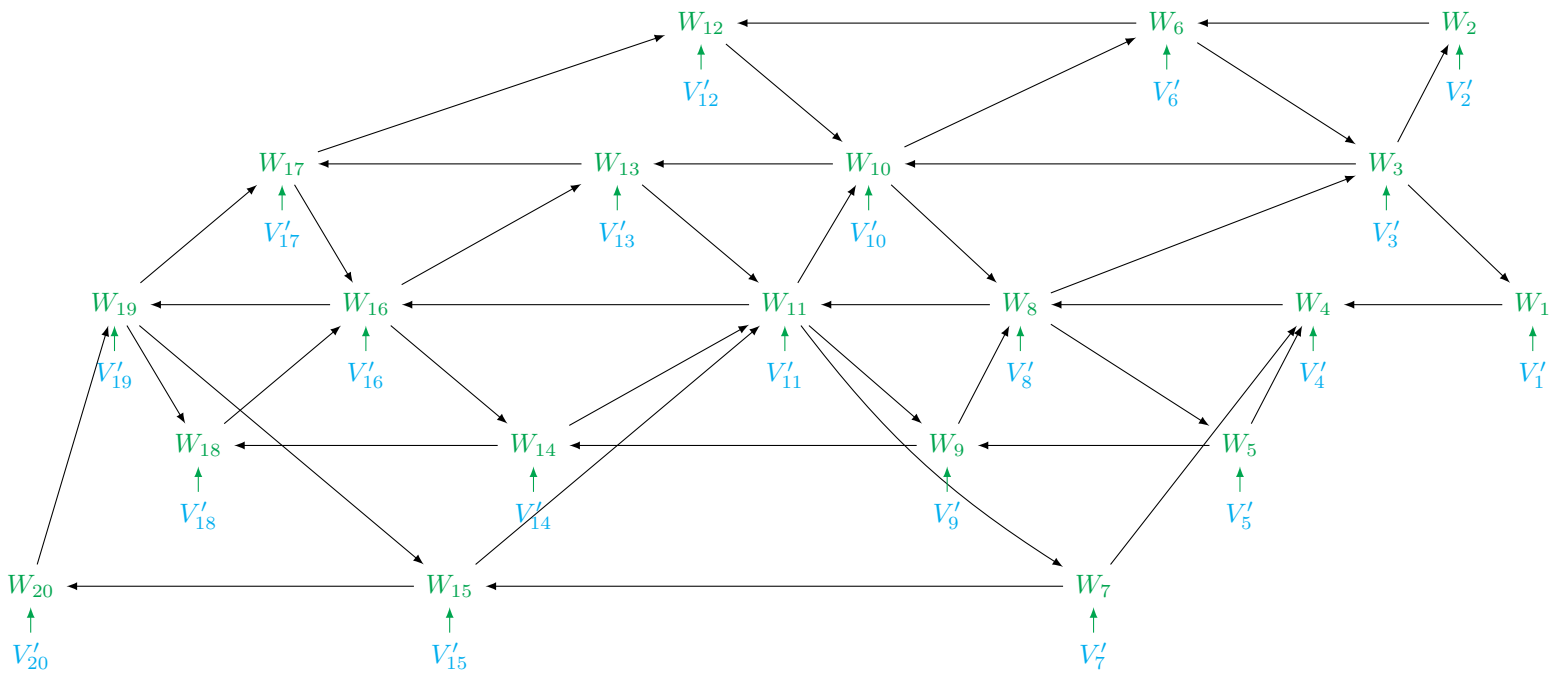


FIGURE B.4 – Coloration initiale de $V_\dot{v}$

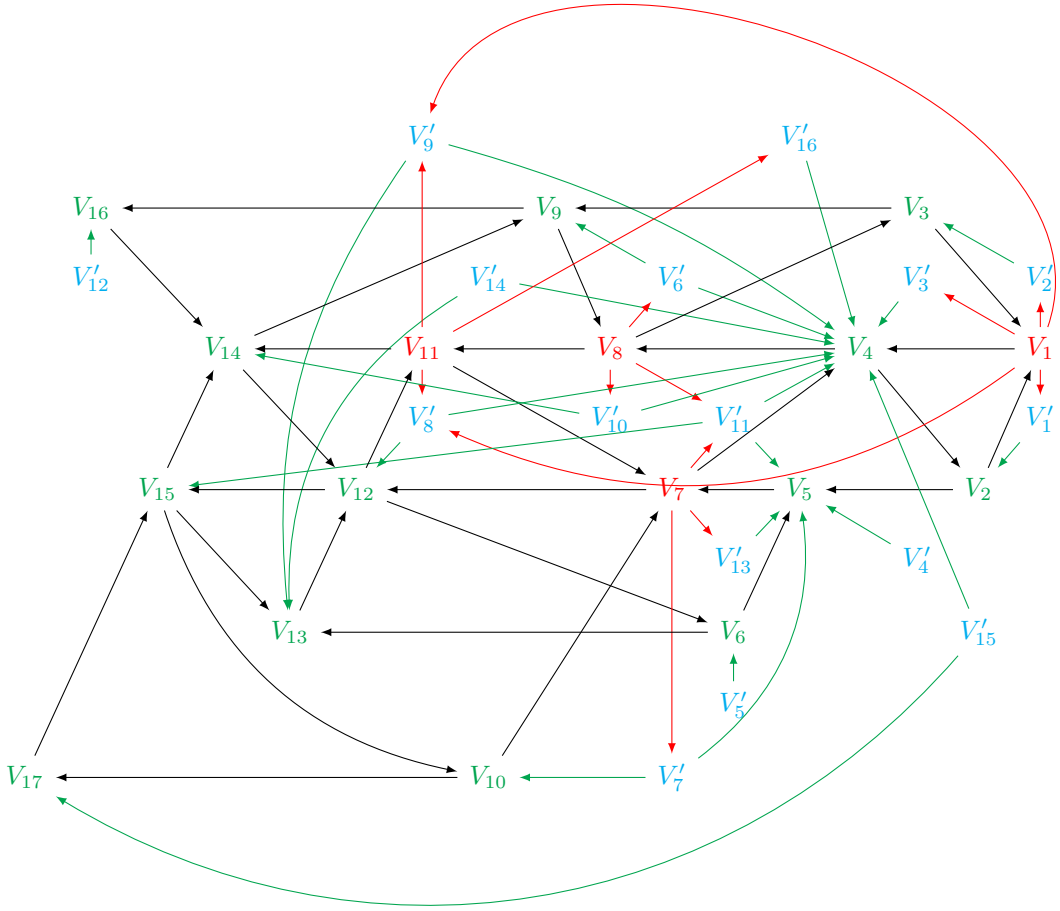


FIGURE B.5 – Carquois de $V_{\overline{w}}$, $V_{\dot{v}}$-coloré

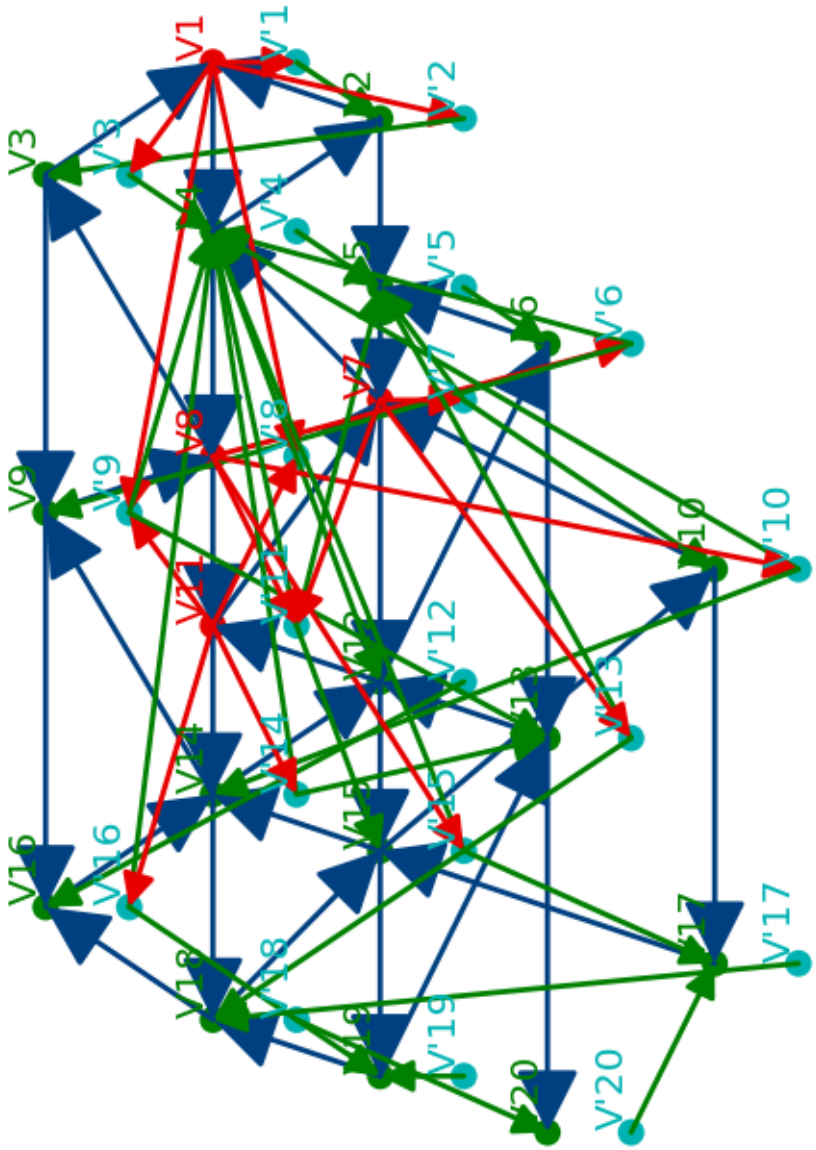


FIGURE B.6 – Sortie d'algorithme

Dans la suite on colorera seulement les sommets sans représenter les sommets gelés et les flèches adjacentes.

B.7 Mutations

On rappelle la graine R_0 en dessinant à la figure B.7 son carquois et en rappelant ses Δ-coordonnées à la table B.8. Les cases à fond jaune correspondent aux facteurs appartenant à $\mathcal{C}^v$ et les sommets correspondant dans les graphes seront encadrés. Les sommets seront colorés en rouge ou en vert selon leur $V_{\dot{v}}$-coloration et les flèches horizontales seront colorées selon la couleur de la ligne. On mettra à chaque fois en parallèle les données calculées par nos propres moyens et les sorties de l'algorithme.

Les flèches ne sont pas toujours très lisibles sur le graphique de gauche de la sortie de l'implémentation alors elles sont énumérées dans les graphiques de droite. Les flèches adjacentes aux sommets 18, 19 et 20 sont des artefacts techniques et ne doivent pas être considérés. Ici on a fait les suppressions au fur et à mesure des mutations mais les arêtes supprimées sont toujours listées.

Pour retrouver les graines coupées à chaque étape il faut regarder quels sont les sommets ayant des coordonnées dans les graphiques de droite des sorties de l'implémentation et retrancher ceux qui sont encadrés dans les figures montrant les sommets colorés.

Sur l'implémentation les sommets ayant des points bleus foncés sont des sommets n'appartenant pas à la graine initiale, les sommets en bleu ciel sont des sommets correspondants à des facteurs non mutables et les sommets avec un point rouge (couleur changée dans les dernières versions de l'implémentation) sont des sommets quelconques (potentiellement non tous mutables). La couleur rouge n'a ici rien à voir avec la coloration rouge-verte de Keller.

On rappelle qu'on va faire la suite de mutations :

$$\mu_\bullet = S \circ \underbrace{id}_{\widetilde{\mu}_{11}} \circ \underbrace{id}_{\widetilde{\mu}_{10}} \circ \underbrace{id}_{\widetilde{\mu}_{9}} \circ \underbrace{\mu_5}_{\widetilde{\mu}_{8}} \circ \underbrace{\mu_{10}}_{\widetilde{\mu}_{7}} \circ \underbrace{\mu_3}_{\widetilde{\mu}_{6}} \circ \underbrace{\mu_6}_{\widetilde{\mu}_{5}} \circ \underbrace{\mu_7 \circ \mu_5 \circ \mu_2}_{\widetilde{\mu}_{4}} \circ \underbrace{\mu_{11} \circ \mu_8 \circ \mu_4}_{\widetilde{\mu}_{3}} \circ \underbrace{\mu_9 \circ \mu_3}_{\widetilde{\mu}_{2}} \circ \underbrace{\mu_{12} \circ \mu_7 \circ \mu_5 \circ \mu_2}_{\widetilde{\mu}_{1}}$$

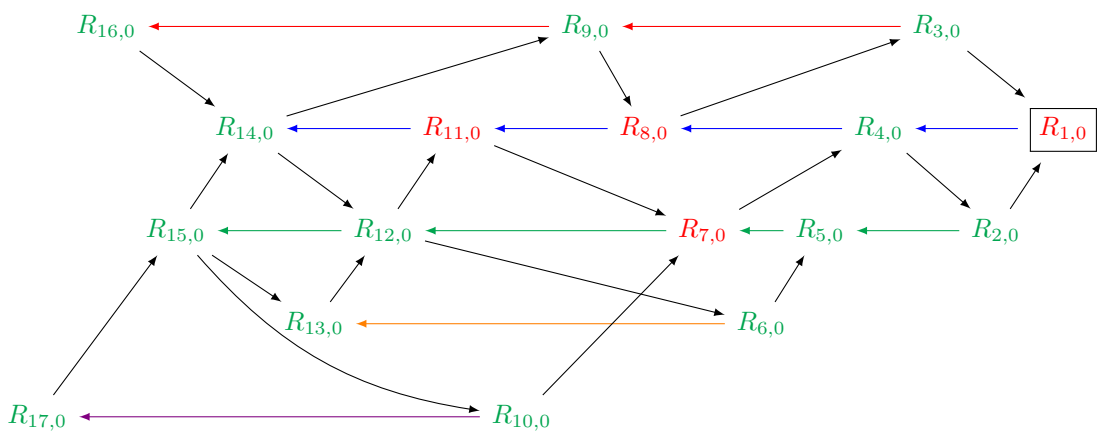


FIGURE B.7 – Carquois de R_0

1	2	3	4	5
f_{14}	$f_1 + f_{14}$	$f_2 + f_{14}$	$f_3 + f_{14}$	$f_1 + f_4$
6	7	8	9	10
f_5	$f_1 + f_4 + f_{17}$	$f_3 + f_{14} + f_{20}$	$f_2 + f_6 + f_{20}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_3 + f_{14} + f_{19}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{14} + f_{19}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.8 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $R_{i,0}$

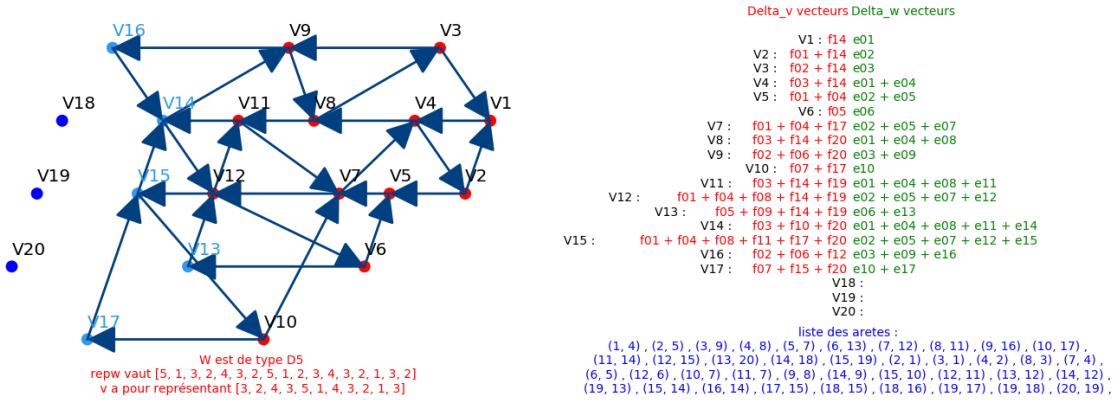


FIGURE B.8 – $V_{\overline{w}}$

On va détailler la première mutation. On mute le module $R_{2,0}$.
Par le corollaire 4.12.5, on sait que le muté de $R_{2,0}$ sera $R_{2,1}$ vérifiant l'égalité de $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs :

$$\Delta_{\dot{v}}(R_{2,1}) = \Delta_{\dot{v}}(R_{5,0}) + \Delta_{\dot{v}}(R_{1,0}) - \Delta_{\dot{v}}(R_{2,0}) = f_1 + f_4 + f_{14} - f_1 - f_{14} = f_4$$

On a alors le carquois de la figure B.9 et les mêmes $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs qu'à la table B.8 à l'exception de $R_{2,0}$.

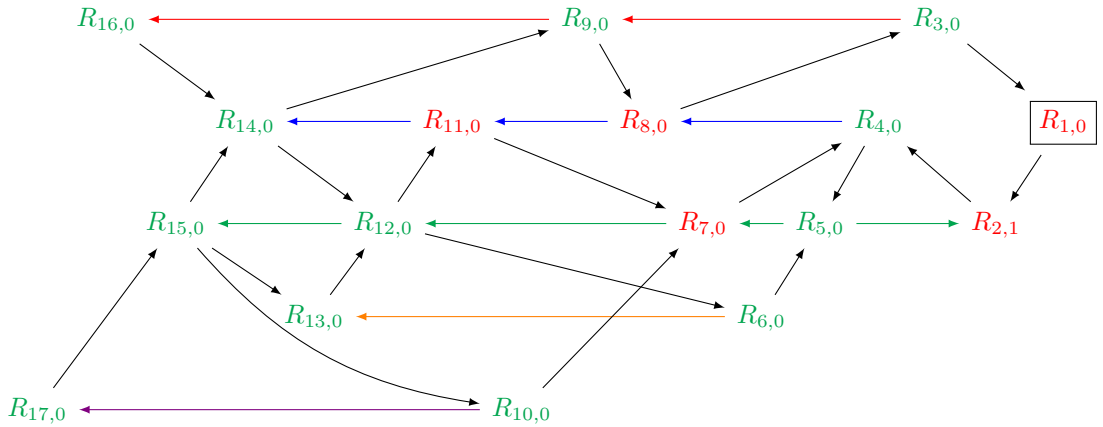


FIGURE B.9 – Carquois de $\mu_2(R_0)$

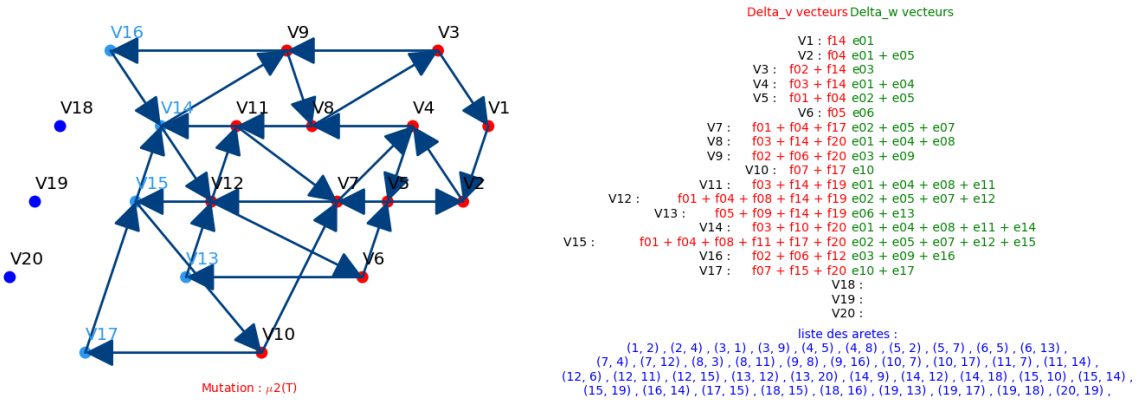


FIGURE B.10 – $\mu_2(V_{\overline{w}})$

On continue sur le même principe pour finir $\widetilde{\mu}_1$ et on obtient la figure B.11 et la table B.9.

1	2	3	4	5
f_{14}	f_4	$f_2 + f_{14}$	$f_3 + f_{14}$	$f_4 + f_{17}$
6	7	8	9	10
f_5	$f_4 + f_8 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{14} + f_{20}$	$f_2 + f_6 + f_{20}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_3 + f_{14} + f_{19}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.9 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $R_{i,1}$

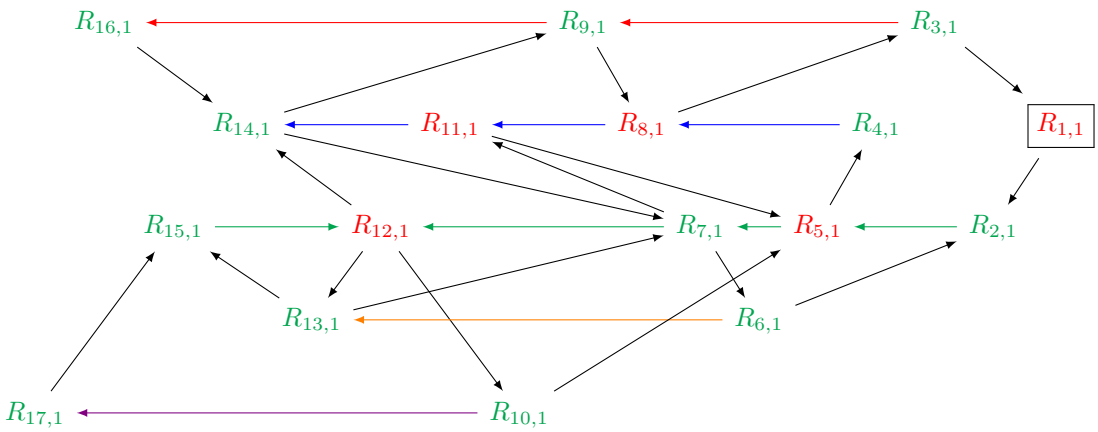


FIGURE B.11 – Carquois de $\widetilde{\mu}_1(R_0) = R_1$

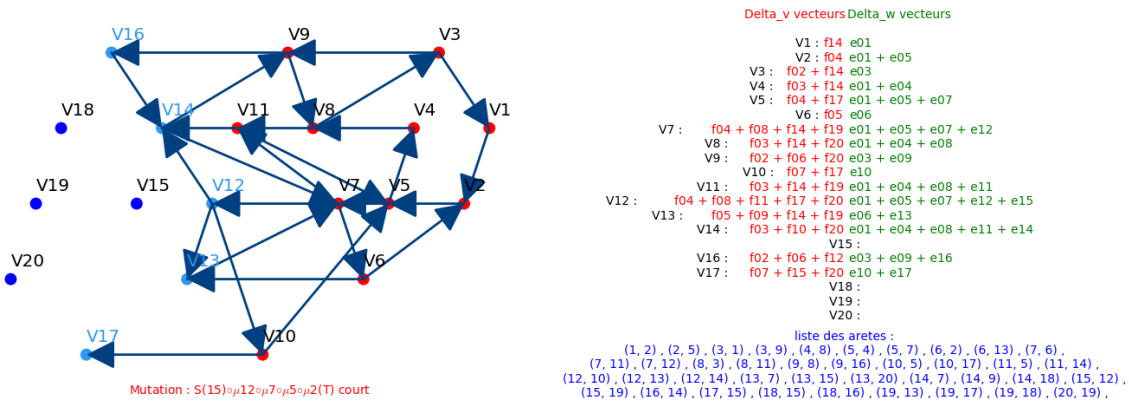


FIGURE B.12 – R_1

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_2$ et on obtient la figure B.13 et la table B.10.

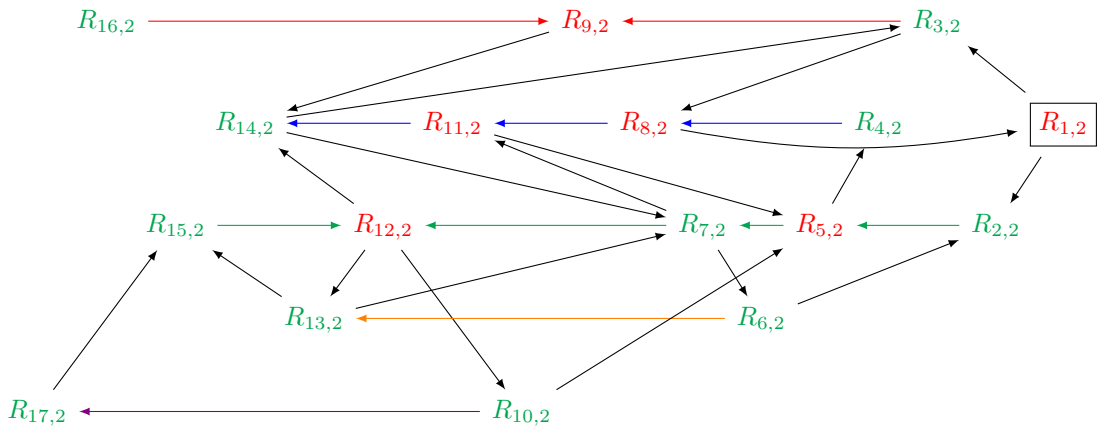


FIGURE B.13 – Carquois de R_2

1	2	3	4	5
f_{14}	f_4	$f_6 + f_{20}$	$f_3 + f_{14}$	$f_4 + f_{17}$
6	7	8	9	10
f_5	$f_4 + f_8 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{14} + f_{20}$	$f_6 + f_{12}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_3 + f_{14} + f_{19}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.10 – Δ_v-vecteurs des modules $R_{i,2}$

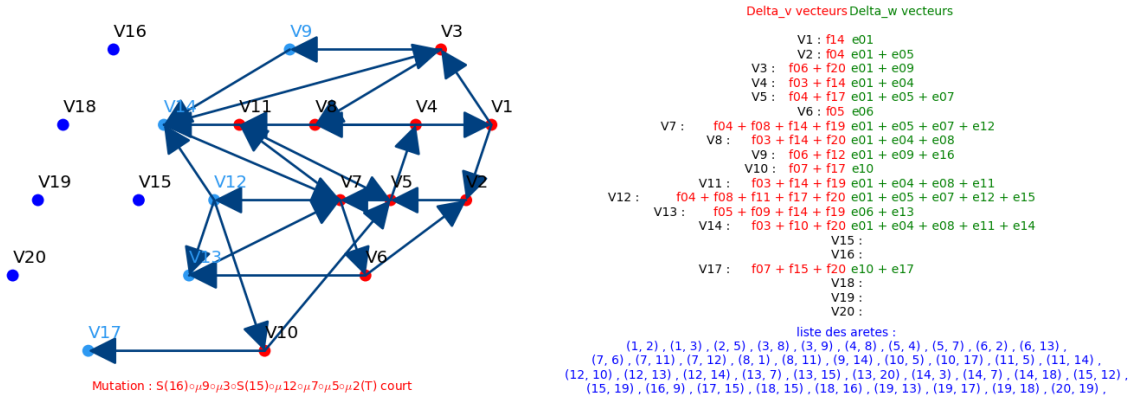


FIGURE B.14 – R_2

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_3$ et on obtient la figure B.15 et la table B.11.

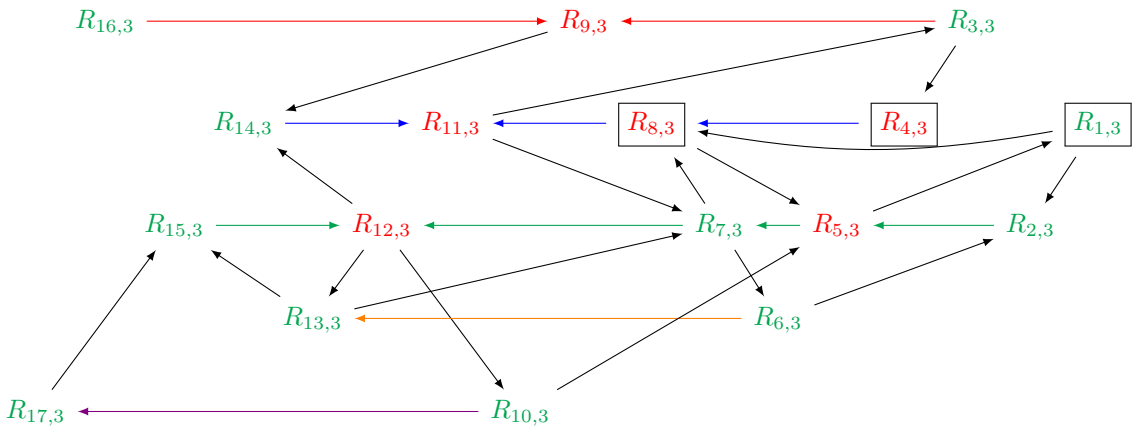


FIGURE B.15 – Carquois de R_3

1	2	3	4	5
f_{14}	f_4	$f_6 + f_{20}$	f_{20}	$f_4 + f_{17}$
6	7	8	9	10
f_5	$f_4 + f_8 + f_{14} + f_{19}$	$f_{14} + f_{19}$	$f_6 + f_{12}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_{10} + f_{20}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.11 – Δ_v-vecteurs des modules $R_{i,3}$

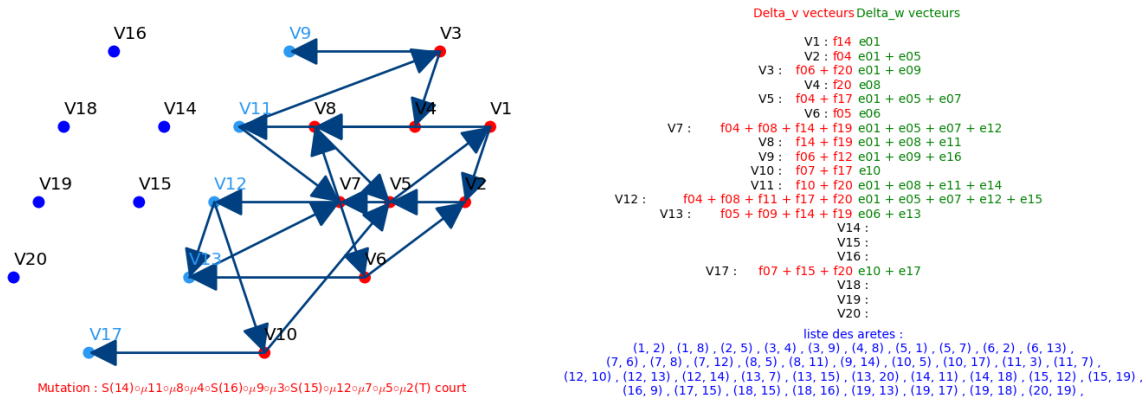


FIGURE B.16 – R_3

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_4$ et on obtient la figure B.17 et la table B.12.

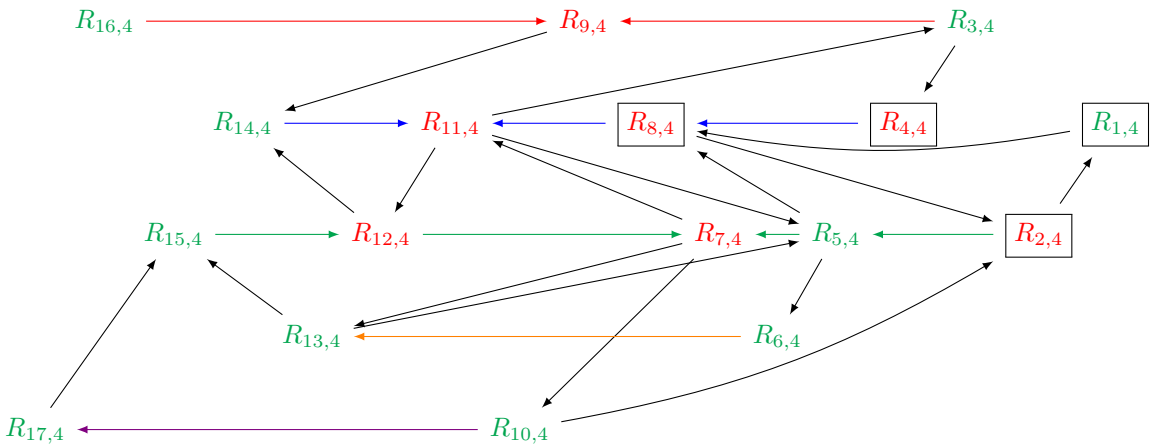


FIGURE B.17 – Carquois de R_4

1	2	3	4	5
f_{14}	f_{17}	$f_6 + f_{20}$	f_{20}	$f_8 + f_{14} + f_{19}$
6	7	8	9	10
f_5	$f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_{14} + f_{19}$	$f_6 + f_{12}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_{10} + f_{20}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.12 – Δ_υ-vecteurs des modules $R_{i,4}$

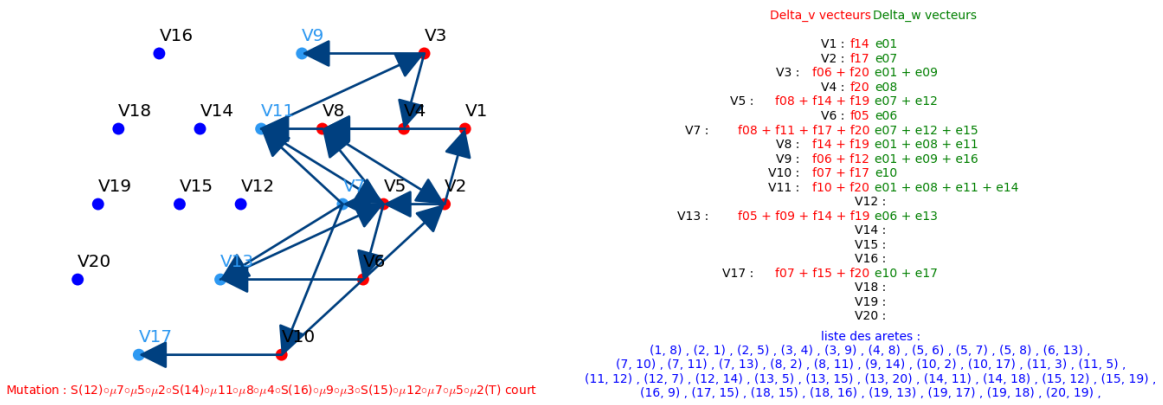


FIGURE B.18 – R_4

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_5$ et on obtient la figure B.19 et la table B.13.

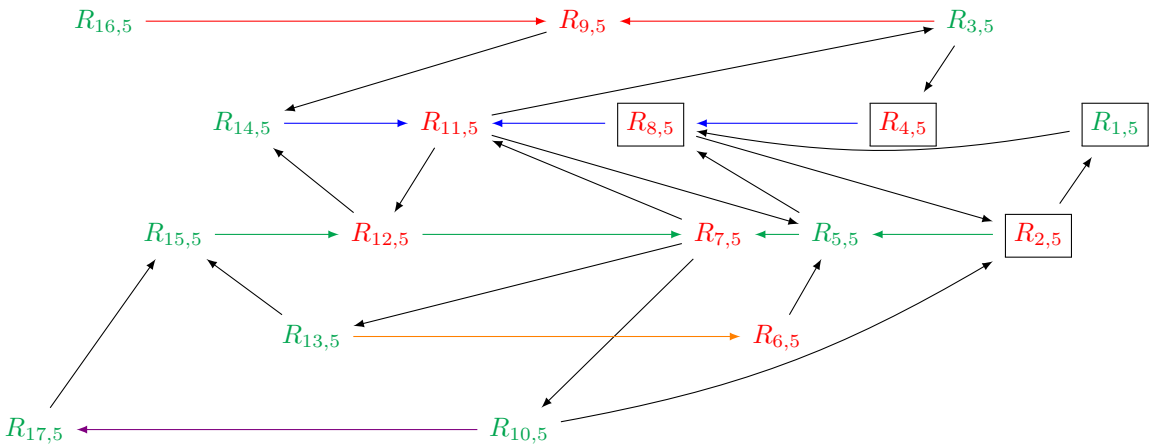


FIGURE B.19 – Carquois de R_5

1	2	3	4	5
f_{14}	f_{17}	$f_6 + f_{20}$	f_{20}	$f_8 + f_{14} + f_{19}$
6	7	8	9	10
$f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_{14} + f_{19}$	$f_6 + f_{12}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_{10} + f_{20}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.13 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $R_{i,5}$

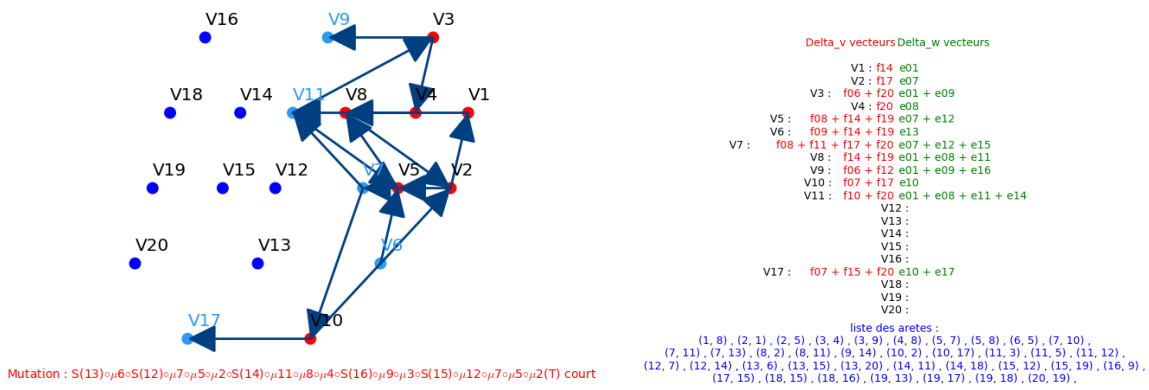


FIGURE B.20 – R_5

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_6$ et on obtient la figure B.21 et la table B.14.

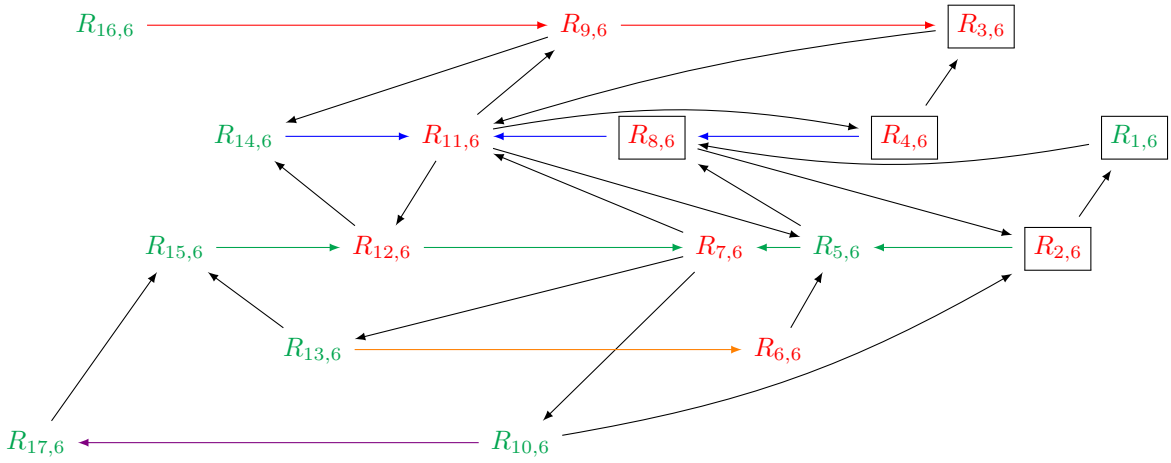


FIGURE B.21 – Carquois de R_6

1	2	3	4	5
f_{14}	f_{17}	f_{12}	f_{20}	$f_8 + f_{14} + f_{19}$
6	7	8	9	10
$f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_{14} + f_{19}$	$f_6 + f_{12}$	$f_7 + f_{17}$
11	12	13	14	15
$f_{10} + f_{20}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.14 – Δ_v-vecteurs des modules $R_{i,6}$

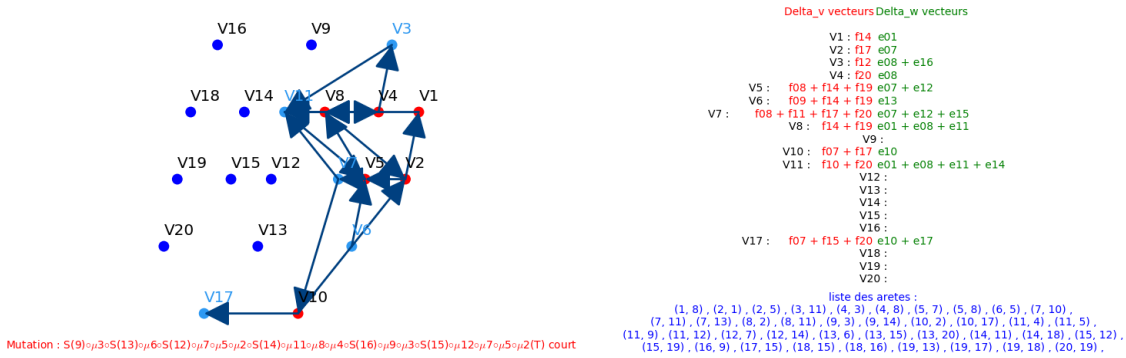


FIGURE B.22 – R_6

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_7$ et on obtient la figure B.23 et la table B.15.

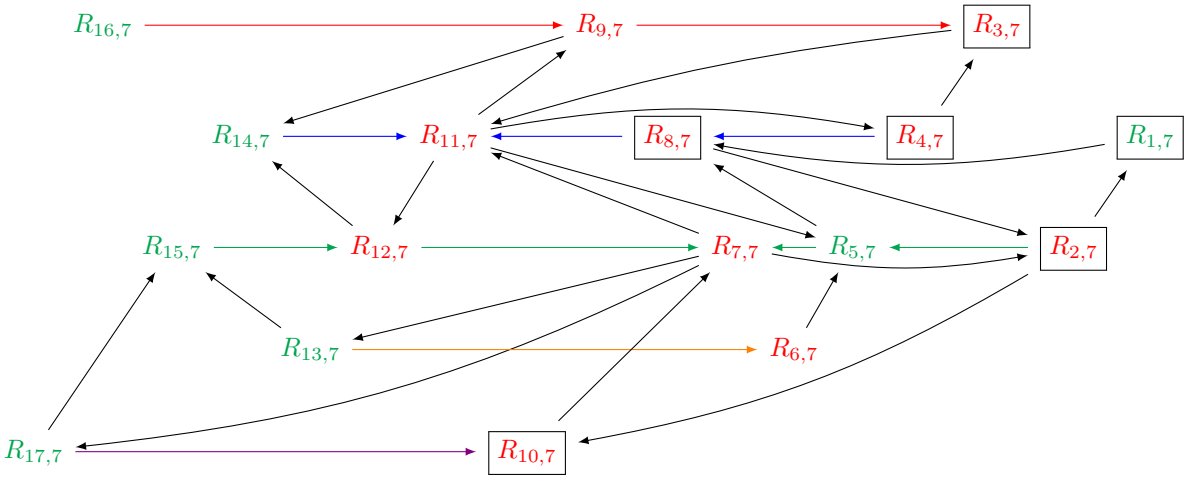


FIGURE B.23 – Carquois de R_7

1	2	3	4	5
f_{14}	f_{17}	f_{12}	f_{20}	$f_8 + f_{14} + f_{19}$
6	7	8	9	10
$f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_{14} + f_{19}$	$f_6 + f_{12}$	$f_{15} + f_{20}$
11	12	13	14	15
$f_{10} + f_{20}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.15 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $R_{i,7}$

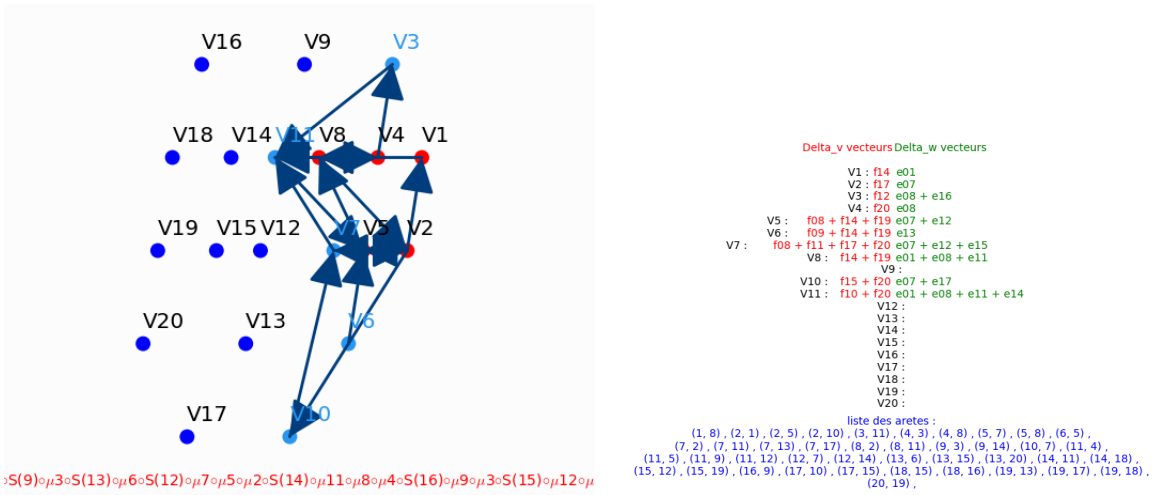


FIGURE B.24 – R_7

On applique ensuite la suite de mutations $\widetilde{\mu}_{11} \circ \widetilde{\mu}_{10} \circ \widetilde{\mu}_9 \circ \widetilde{\mu}_8 = \mu_5$ et on obtient la figure B.25 et la table B.16.

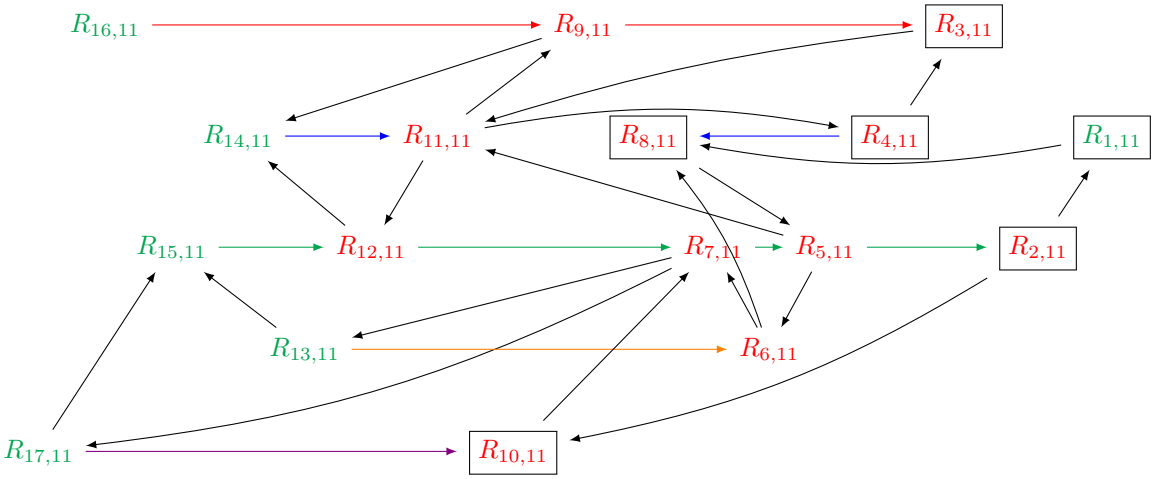


FIGURE B.25 – Carquois de R_{11}

1	2	3	4	5
f_{14}	f_{17}	f_{12}	f_{20}	$f_{11} + f_{17} + f_{20}$
6	7	8	9	10
$f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_{14} + f_{19}$	$f_6 + f_{12}$	$f_{15} + f_{20}$
11	12	13	14	15
$f_{10} + f_{20}$	$f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$	$f_5 + f_9 + f_{14} + f_{19}$	$f_3 + f_{10} + f_{20}$	$f_1 + f_4 + f_8 + f_{11} + f_{17} + f_{20}$
	16		17	
	$f_2 + f_6 + f_{12}$		$f_7 + f_{15} + f_{20}$	

TABLE B.16 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $R_{i,11}$

Finalement on supprime les sommets $5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$ et on obtient la figure B.26 et la table B.17. Ici le seul sommet $\mathcal{C}_{v,w}$-mutable est $R_{1,\bullet}$.

1	2	3	4	8	10
f_{14}	f_{17}	f_{12}	f_{20}	$f_{14} + f_{19}$	$f_{15} + f_{20}$

TABLE B.17 – $\Delta_{\dot{v}}$-vecteurs des modules $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$

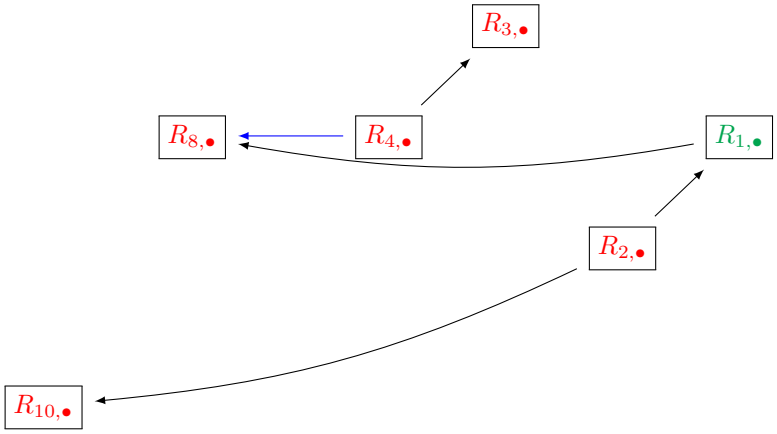


FIGURE B.26 – Carquois de $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$

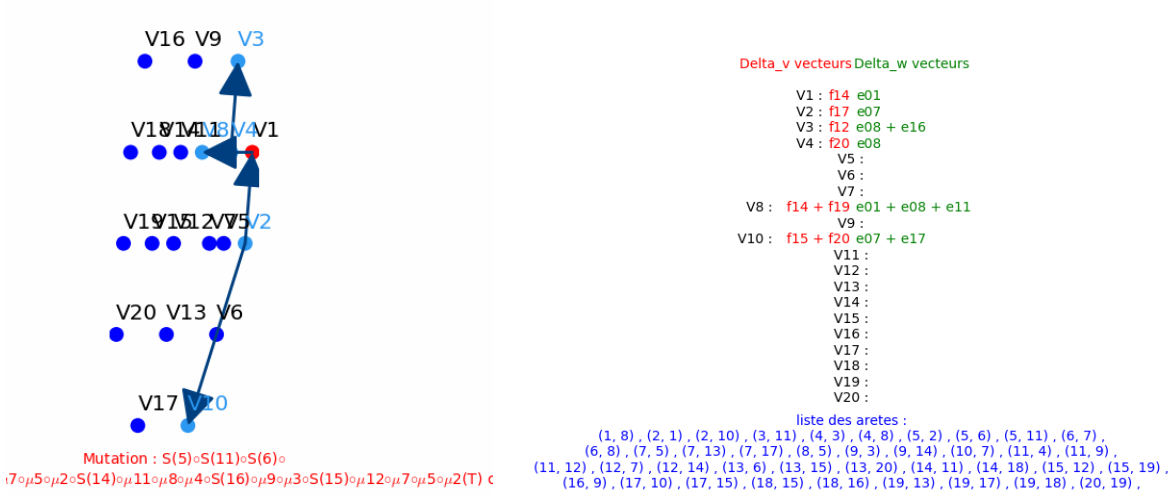


FIGURE B.27 – $\mu_\bullet(V_{\overline{w}})$

Bibliographie

[ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Number 65, 71-72 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2006.

[BFZ96] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Parametrizations of Canonical Bases and Totally Positive Matrices. *Advances in Mathematics*, 122(1) :49–149, September 1996.

[BFZ05] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Mathematical Journal*, 126(1) :1–52, January 2005.

[BGY06] Kenneth Alexander Brown, Kenneth R. Goodearl, and Milen Tchernev Yakimov. Poisson structures on affine spaces and flag varieties. I. Matrix affine Poisson space. *Advances in Mathematics*, 206(2) :567–629, November 2006.

[BIRS09] Aslak Bakke Buan, Osamu Iyama, Idun Reiten, and Jeanne Scott. Cluster structures for 2-Calabi–Yau categories and unipotent groups. *Compositio Mathematica*, 145(4) :1035–1079, July 2009.

[BKT14] Pierre Baumann, Joel Kamnitzer, and Peter Tingley. Affine Mirković-Vilonen polytopes. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 120(1) :113–205, November 2014.

[BMR+06] Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in Mathematics*, 204(2) :572–618, August 2006.

[Car05] Roger W. Carter. *Lie Algebras of Finite and Affine Type*. Number 96 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2005.

[CK06] Philippe Caldero and Bernhard Keller. From triangulated categories to cluster algebras II. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 39(6) :983–1009, November 2006.

[CK08] Philippe Caldero and Bernhard Keller. From triangulated categories to cluster algebras. *Inventiones mathematicae*, 172(1) :169–211, April 2008.

[CPS88] Edward Cline, Brian Parshall, and Leonard Scott. Finite dimensional algebras and highest weight categories. *J. reine angew. Math*, 391(2) :85–99, 1988.

[DR89] Vlastimil Dlab and Claus Michael Ringel. Quasi-hereditary algebras. *Illinois Journal of Mathematics*, 33(2) :280–291, June 1989.

[DWZ10] Harm Derksen, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky. Quivers with potentials and their representations II : Applications to cluster algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, 23(3) :749–790, 2010.

[FST08] Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes. *Acta Mathematica*, 201(1) :83–146, 2008.

[FT18] Sergey Fomin and Dylan Thurston. *Cluster Algebras and Triangulated Surfaces Part II : Lambda Lengths*, volume 255 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, September 2018.

[FZ99] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Double Bruhat cells and total positivity. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(2) :335–380, 1999.

[FZ02a] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras I : Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2) :497–529, 2002.

[FZ02b] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. The Laurent Phenomenon. *Advances in Applied Mathematics*, 28(2) :119–144, February 2002.

[FZ03] Sergey Fomin and Andre Zelevinsky. Y -systems and generalized associahedra. *Annals of Mathematics*, 158(3) :977–1018, November 2003.

[FZ04] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras : Notes for the CDM-03 conference. *arXiv :math/0311493*, September 2004.

[GHKK18] Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, 31(2) :497–608, 2018.

[GL19] Pavel Galashin and Thomas Lam. Positroid varieties and cluster algebras. *arXiv :1906.03501 [math]*, June 2019.

[GLS06] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Rigid modules over preprojective algebras. *Inventiones mathematicae*, 165(3) :589–632, September 2006.

[GLS08] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Partial flag varieties and preprojective algebras. *Annales de l'institut Fourier*, 58(3) :825–876, 2008.

[GLS11] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Kac–Moody groups and cluster algebras. *Advances in Mathematics*, 228(1) :329–433, September 2011.

[GSV10] Michael Gekhtman, Michael Shapiro, and Alek Vainshtein. *Cluster Algebras and Poisson Geometry*. Number v. 167 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2010.

[GY09] Kenneth R. Goodearl and Milen Tchernev Yakimov. Poisson structures on affine spaces and flag varieties. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(11) :5753–5780, 2009.

[HL10] David Hernandez and Bernard Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Mathematical Journal*, 154(2) :265–341, August 2010.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Number 9 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1972.

[Hum75] James E Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Springer New York, New York, NY, 1975.

[Hum90] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1990.

[IR11] Osamu Iyama and Idun Reiten. 2-Auslander Algebras Associated with Reduced Words in Coxeter Groups. *International Mathematics Research Notices*, 2011(8) :1782–1803, January 2011.

[Kam07] Joel Kamnitzer. The crystal structure on the set of Mirković–Vilonen polytopes. *Advances in Mathematics*, 215(1) :66–93, October 2007.

[Kam10] Joel Kamnitzer. Mirković-Vilonen cycles and polytopes. *Annals of Mathematics*, 171(1) :245–294, March 2010.

[Kas95] Masaki Kashiwara. On crystal bases. In *Representations of Groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of *CMS Conf. Proc.*, pages 155–197. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[KB20] Bernhard Keller and Sarjick Bakshi. Communication Privée, 2020.

[KD20] Bernhard Keller and Laurent Demonet. A survey on maximal green sequences. In *Representation Theory and Beyond*, volume 758 of *Contemp. Math.*, pages 267–286. Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2020] \copyright 2020.

[KL80] David Kazhdan and George Lusztig. Schubert varieties and Poincaré duality. In *Geometry of the Laplace Operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, volume 36 of *Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI*, pages 185–203. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[KS97] Masaki Kashiwara and Yoshihisa Saito. Geometric construction of crystal bases. *Duke Mathematical Journal*, 89(1) :9–36, July 1997.

[Lec16] Bernard Leclerc. Cluster structures on strata of flag varieties. *Advances in Mathematics*, 300 :190–228, September 2016.

[Lus98] George Lusztig. Total positivity in partial flag manifolds. *Representation Theory. An Electronic Journal of the American Mathematical Society*, 2 :70–78, 1998.

[Lus13] George Lusztig. Canonical Bases Arising from Quantized Enveloping Algebras. II. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 102(0) :175–201, May 2013.

[NS09] Satoshi Naito and Daisuke Sagaki. Mirković–Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal. *Advances in Mathematics*, 221(6) :1804–1842, August 2009.

[PS88] Brian Parshall and Leonard Scott. Derived categories, quasi-hereditary algebras, and algebraic groups. *Carlton University Mathematical notes*, 3 :1–104, 1988.

[Rie97] Konstanze Rietsch. Intersections of Bruhat cells in real flag varieties. *International Mathematics Research Notices*, 1997(13) :623–640, January 1997.

[Rie99] Konstanze Rietsch. An Algebraic Cell Decomposition of the Nonnegative Part of a Flag Variety. *Journal of Algebra*, 213(1) :144–154, March 1999.

[RW08] Konstanze Rietsch and Lauren Williams. The Totally Nonnegative Part of G/P is a CW Complex. *Transformation Groups*, 13(3) :839–853, December 2008.

[Sco87] Leonard Scott. Simulating algebraic geometry with algebra I : The algebraic theory of derived categories. In *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, 1986), Proc. Symp. Pure Math*, volume 47, pages 271–281, 1987.

[Ser13] Jean-Pierre Serre. *Complex Semisimple Lie Algebras*. Springer Berlin, Berlin, 2013.

[SSW20] Khrystyna Serhiyenko, Melissa Sherman-Bennett, and Lauren Williams. Combinatorics of cluster structures in Schubert varieties. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 82B :Art. 8, 12, 2020.

Index

2-mouvement, 15
3-mouvement, 15

algèbre
  fortement quasi-héréditaire, 47
  héréditaire
    Δ-sérielle, 47
  quasi-héréditaire, 46
algèbre amassée, 32
algèbre préprojective, 33
amas
  accessible, 40
  caractère d', 36
  cardinal d'un, 32
  initial, 40
  variable d', 32
amas étendu, 37
  carquois d'un, 37

Birkhoff
  décomposition de Birkhoff, 31
Bruhat
  décomposition de, 30
  ordre de, 15

carquois
  bicolore, 71
  en dents de scie, 73
  encadré, 108
  étendu, 38
Cartan
  matrice de, 12
catégorie
  2-Calabi-Yau, 39
  ayant assez d'injectifs, 38
  ayant assez de projectifs, 38
  de Frobenius, 39
  fonctoriellement finie, 37
  stable, 38
  stablement 2-Calabi-Yau, 39
couleur
  adjacente à une autre, 14
  d'un facteur direct, 71
Coxeter
  graphe de, 12
  groupe de, 13
  système de, 13
cristal, 21
  morphisme de, 21

Δ-vecteur, 46
  d'un module de $\mathcal{C}_w$, 48
  mutation de, 48
donnée
  de Mirković-Vilonen, 27
  GGMS, 24
drapeau
  variété de, 30
Dynkin
  diagramme de, 12

échange, 37
élément
  primitif, 19
espace euclidien
  réflexion d'un, 11
espace vectoriel
  hyperplan d'un, 11

facteur direct
  couleur d'un, 71
flèche
  horizontale, 41, 82
  ordinaire, 41, 82
foncteur
  de dualité, 39

Gelfand
  donnée GGMS, 24
Goresky
  donnée GGMS, 24
graine, 39
  coupée, 70
  de type géométrique, 31
  mutation équivalente, 32
groupe
  de Weyl, 13

Harder
  polytope de Harder-Naramsimhan, 49

injectif

assez d', *voir* catégorie

Kashiwara
opérateur de, 28

lettre
couleur d'une, 14
libre de torsion
classe de, 43
objets, 43
longueur, 13
Lusztig
variété nilpotente de, 49

MacPherson
donnée GGMS, 24
Mirković
donnée de Mirković-Vilonen, 27
polytope de Mirković-Vilonen, 27
module
amas-basculant, 41
approximation de, 37
basique, 39
costandard, 46
évincé, 70
filtration de, 46
fondamental, 20
injectif, 38
projectif, 38
radical de torsion d'un, 43
rigide, 39
complet, 39
maximal, 39
séries des socles d'un, 34
modules
filtrés, 46
standards, 46
morphisme
minimal, 37
mot, 13
lettre d'un, 13
sous-mot le plus à droite, 17
mutation, 31

Naramsimhan
polytope de Harder-Naramsimhan, 49

paire d'échange, 37
partie principale
d'une matrice, 31
poids, 18, 19
plus haut, 19
vecteur de, 19
polytope
de Harder-Naramsimhan, 49
de Mirković-Vilonen, 27
pseudo-p. de Weyl, 24
projectif
assez de, *voir* catégorie

racine
positive, 12
simple, 12
représentation
caractère d'une, 20
fondamentale, 20
représentant
réduit, 13
Richardson
variété de
ouverte, 31

Schubert
cellule de, 31
opposée, 31
décomposition de, 31
opposée, 31
Serganova
donnée GGMS, 24
sommet
évincé, 70
rouge, 108
vert, 108
sommets
gelés, 108
structure amassée, 38
faible, 37
suite
verte, 108
verte maximale, 108
suite d'échange, 37
système de racines
groupe de Weyl d'un, 11
irréductible, 12
racines simple d'un, 12
système de racines cristallographique, 11

torsion
classe de, 43
objets de, 43
paire de, 42

Vilonen
donnée de Mirković-Vilonen, 27
polytope de Mirković-Vilonen, 27

Weyl
Groupe de, 11
groupe de
représentant d'un élément d'un, *voir* mot
pseudo-polytope de, 24

Liste des symboles

$\mathrm{add}(M)$	Clôture additive de M, page 37
$a_{i,j}$	Coefficient de la matrice de Cartan, page 12
α	Racine, page 12
α_i	Racine simple du système de racine sous-jacent, associée au sommet d'indice i, page 50
$A_m(R)$	Indice des facteurs directs de R dont la $m$ème coordonnée du $\Delta_{\dot{v}}$-vecteur est non-nulle, page 64
A_n	Système de racines, page 12
$\mathcal{A}(\mathcal{S})$	Algèbre amassée de la classe de mutation-équivalence $\mathcal{S}$, page 32
$\mathfrak{B}$	$\bigsqcup_{\nu\in\mathbb{N}I}\mathfrak{B}(\nu)$, page 49
$\beta_i^{\dot{w}}$	Racine de l'énumération de racines donnée par $\dot{w}$, page 50
β_i	Suite de racines définie à la proposition 2.1.16, page 14
$\mathfrak{B}(\nu)$	Ensemble des composantes irréductibles de $\Lambda(\nu)$, page 49
χ	Caractéristique d'Euler, page 35
C^v	Cellule de Schubert opposée associée à v, page 31
$\mathcal{C}_{v,w}$	$C^v \cap C_w$, page 35
$\mathcal{C}^w$	$\mathrm{Sub}\left(\mathcal{E}_{w^{-1}}^{\dagger}\left(\bigoplus_{i\in I} Q_i\right)\right)$, page 35
$\mathcal{C}_w$	$\mathrm{Fac}\left(\mathcal{E}_u\left(\bigoplus_{i\in I} Q_i\right)\right)$, page 35
C_w	Cellule de Schubert associée à w, page 31
d_Δ	Vecteur dimension des modules standards, page 48
Δ	Famille des modules standards, page 46
Δ_k	$\mathrm{Hom}(V_{\overline{w}}, M_k)$, page 45
$\widetilde{\Delta}$	Δ-vecteur limité aux $\ell(v)$ premières coordonnées, page 70
$\Delta_{\overline{w}}(X)$	Δ-vecteur de $X \in \mathcal{C}_w$ par rapport au représentant $\overline{w}$ de w, page 48
D_n	Système de racines, page 12
E	Espace euclidien, page 11
$\mathcal{E}_i^{\dagger}$	Endofoncteur de $\mathbf{mod}(\Lambda)$, page 34

$\mathcal{E}_i$	Endofoncteur de $\mathbf{mod}(\Lambda)$, page 34
e_j	Opérateur ascendant de Kashiwara, page 28
E_n	Système de racines, page 12
$\mathcal{F}$	Corps des $\mathbb{Q}$ fractions rationnelles à m variables, page 31
$\mathrm{Fac}(M)$	Sous-catégorie des quotients de puissances de M, page 35
$\mathcal{F}(\Delta)$	Catégorie des modules Δ-filtrés d'une algèbre quasi-héréditaire, page 46
f_j	Opérateur descendant de Kashiwara, page 28
$f(k)$	Indice dans $\overline{v}$ de l'élément inférieur ou égal à k de couleur i_k, page 70
$f_{\min}(k)$	Indice minimal dans $\overline{v}$ d'un élément de couleur i_k, page 70
$\mathcal{F}_{M,\mathbf{i}}$	Variété de drapeaux de M ayant une décomposition selon $\underline{i}$, page 35
$\mathcal{F}_{\overline{w}}$	Équivalence de catégorie $\mathcal{C}_w \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(\Delta)$, page 47
$V_{\overline{w}}$	Graine défini par la combinatoire du représentant $\overline{w}$, page 41
I	Ensemble des indices des racines simples, page 12
i_k	Couleur de la $k$ème lettre de $\overline{w} = [i_{\ell(w)}, \ldots, i_1]$, page 14
$k_{\max}$	Plus grand indice de $\overline{w}$ de même couleur que k, page 14
$k_{\min}$	Plus petit indice de $\overline{w}$ de même couleur que k, page 14
$m^{\oplus}$	Successeur de même couleur que m dans $\overline{v}$, page 17
k^+	Indice strictement supérieur à k de même couleur que k dans $\overline{w}$ sous-entendu, page 14
k^-	Indice strictement inférieur à k de même couleur que k dans $\overline{w}$ sous-entendu, page 14
ℓ	Longueur $\ell(v)$, page 13
ℓ	Longueur de $v \in W$ (en tant qu'entier), page 16
Λ	Algèbre prépojective, page 33
$\Lambda(\nu)$	Variété de Lusztig de vecteur dimension ν, page 49
$\ell(w)$	Longueur de l'élément $w \in W$, page 13
M_k	V_k/V_{k^-}, page 45
$\mathbf{mod}(\Lambda)$	Catégorie des Λ-modules de dimension finie, page 33
μ_k	Mutation dans la direction k, page 31
$\mu_\bullet$	Donnée GGMS, page 24
$\mathcal{MV}$	Ensemble des polytopes de Mirković-Vilonen, page 27
n	Cardinal de l'amas, page 32
n	Nombre de racines simples de Π, page 12
∇	Famille des modules costandards, page 46
$n^{\oplus}$	Indice du successeur de même couleur de l'élément d'indice n dans $\overline{v}$, page 70
$n_l^{\dot{w}}$	Entier associé aux élément de la donnée GGMS $(\mu_{\dot{w}_l})_l$, page 27
Φ	Système de racines, page 11
Φ^+	Ensemble des racines positives, page 12

Π	Ensemble des racines simples de Φ, page 12
P_i	Couverture projective de S_i, page 34
$\leq$	Ordre de Bruhat (entre deux éléments d'un groupe de Coxeter, page 15
$\leq_R$	Ordre de Bruhat faible à droite, page 15
$\leq_L$	Ordre de Bruhat faible à gauche, page 15
$P(\mu_\bullet)$	Pseudo-polytope de Weyl associé à la donnée GGMS $\mu_\bullet$, page 24
$\mathrm{Pol}(T)$	Polytope de Harder-Naramsimhan du Λ-module T, page 49
$(\cdot,\cdot)$	Produit scalaire de E, page 11
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Scalaire $\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$, page 11
Q_i	Enveloppe injective de S_i, page 34
$q_{i,j}$	Nombre d'arêtes entre les sommets i et j du graphe de Coxeter, page 12
r	Longueur de l'élément de longueur maximale de W, page 14
r	Nombre de racine positives de Φ, page 12
rad	Radical, page 37
$R(\mathcal{C})$	Sous-algèbre de $\mathbb{C}[N]$ engendrée par les φ_{T_i}, $T = \bigoplus_i T_i$ et $T \in \mathcal{T}$, page 43
$\mathcal{R}_{v,w}$	Variété de Richardson ouverte, page 31
$S(\mathcal{C})$	$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle\varphi_M; M \in \mathcal{C}\rangle$, page 43
S_i	Module simple associé au sommet i, page 34
σ_α	Réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à α, page 11
$\Sigma(M)$	Nombre d'isoclasses de facteurs directs de M, page 39
$\mathrm{soc}_j(X)$	Partie du socle de X isomorphe à une puissance de S_j, page 41
$\mathrm{Sub}(M)$	Sous-catégorie des sous-modules de puissances de M, page 35
$t_w(X)$	Radical de torsion de X dans C_w, page 43
u_k	Complémentaire de $\dot{w}_{\leq k}$ dans $\dot{w}$, page 50
V_k	Module défini par les indices 1 à k du représentant de w sous-jacent, page 41
$V_{\overline{w}}$	$\bigoplus_{k=1}^{\ell(w)} V_k$, page 41
$\overline{w}$	Représentant d'un élément w de W, page 13
W	Groupe de Weyl de type A, D ou E, page 13
w_0	Élément de longueur maximale de W, page 13
$\dot{w}$	Complétion à gauche de $\overline{w}$ en w_0, page 13
X	Variété de drapeaux, page 30
$\xi(k,m)$	Première lettre de la couleur de k à droite de $r(v,\overline{w})_m$ à être soulignée, page 81

Résumé :

Les algèbres amassées sont des anneaux commutatifs intègres avec une structure combinatoire particulière. Cette structure consiste en la donnée d'une famille de graines, liées entre elles par une opération appelée mutation. Chaque graine est composée de deux parties : un amas et un carquois.

Les variétés de Richardson ouvertes sont des strates de la variété de drapeaux associée à un groupe linéaire algébrique de type simplement lacé. Elles sont l'intersection de cellules de Schubert respectivement à deux sous-groupes de Borel opposés. Dans [Lec16], une sous-algèbre amassée de rang maximal sur l'anneau de coordonnées d'une variété de Richardson ouverte a été construite et cette sous-algèbre est conjecturée être égale à l'anneau entier. La construction de cette algèbre amassée provient d'une catégorie de Frobenius $\mathcal{C}_{v,w}$ de modules sur l'algèbre préprojective, définie comme intersection de deux catégories $\mathcal{C}_w$ et $\mathcal{C}^v$ déjà étudiées par Geiss, Leclerc, Schröer et Buan, Iyama, Reiten et Scott. Le lien entre les algèbres amassées et les structures amassées est donné par le caractère d'amas défini dans [GLS06].

Dans cette thèse, nous construisons un algorithme qui, étant donné les paramètres définissant une variété de Richardson ouverte, construit un module rigide maximal explicite de la catégorie de Frobenius associée et son carquois. Cet algorithme a pour donnée de départ la graine initiale pour la structure amassée sur $\mathcal{C}_w$ définie par un représentant $\overline{w}$ d'un élément w du groupe de Weyl. Par le biais d'une suite de mutations déterminée combinatoirement, on obtient à partir de la graine initiale un module rigide maximal de $\mathcal{C}_w$ qui, à suppression de certains facteurs directs près, est un module rigide maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$. De plus le sous-carquois du carquois muté est exactement le carquois de l'algèbre d'endomorphisme du module rigide maximal de $\mathcal{C}_{v,w}$ donnant alors la description complète d'une graine initiale pour la structure amassée de $\mathcal{C}_{v,w}$.

Abstract :

Cluster algebras are integral domains with a particular combinatorial structure. This structure consists in the data of a family of seeds linked together by an operation called mutation. Each seed consists in two parts : a cluster and a quiver.

Richardson open varieties are some strata of the flag variety associated to a simple linear algebraic group of simply-laced type. These are the intersection of Schubert cells with respect to two opposite Borel subgroups. In [Lec16] a cluster subalgebra of maximal rank on the coordinate ring of an open Richardson variety has been constructed and this subalgebra is conjectured to be equal to the whole ring. The construction of this cluster algebra comes from a Frobenius category $\mathcal{C}_{v,w}$ of modules over the preprojective algebra, defined as the intersection of two categories $\mathcal{C}_w$ and $\mathcal{C}^v$ already studied by Geiss, Leclerc, Schröer and Buan, Iyama, Reiten and Scott. The bond between cluster algebras and cluster structures is given by the cluster character defined in [GLS06].

In this thesis we build an algorithm which, given the parameters defining a Richardson open variety, compute an explicit maximal rigid module of the associated Frobenius category and its quiver. This algorithm has an initial seed for the cluster structure on $\mathcal{C}_w$ defined by a representative $\overline{w}$ of an element w of the Weyl group as a starting datum. By a combinatorially defined sequence of mutation on this initial seed we obtain a maximal rigid module of $\mathcal{C}_w$ which is, up to deletion of some direct summands is a maximal rigid module of $\mathcal{C}_{v,w}$. In addition, the subquiver of the mutated quiver is exactly the quiver of the endomorphism algebra of the $\mathcal{C}_{v,w}$-maximal rigid module, giving then the complete description of an initial seed for the cluster structure on $\mathcal{C}_{v,w}$.

Mots clés : Algèbres Amassées, Variétés de Richardson ouvertes, Algèbre de Lie, Théorie des représentations, Combinatoire, Algorithmique, Structures Amassées, Groupe de Weyl, Algèbre préprojective, Carquois.