



**HAL**  
open science

# Posets série-parallèles transfinis : automates, logiques et théories équationnelles

Amazigh Amrane

► **To cite this version:**

Amazigh Amrane. Posets série-parallèles transfinis : automates, logiques et théories équationnelles. Informatique et langage [cs.CL]. Normandie Université, 2020. Français. NNT : 2020NORMR102 . tel-03215265

**HAL Id: tel-03215265**

**<https://theses.hal.science/tel-03215265v1>**

Submitted on 3 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Informatique

Préparée au sein de l'Université de Rouen-Normandie

### Posets série-parallèles transfinis : automates, logiques et théories équationnelles

Présentée et soutenue par  
Amazigh AMRANE

Thèse soutenue publiquement le 30 octobre 2020  
devant le jury composé de

M. Nicolas BEDON	PR au LITIS, Université de Rouen-Normandie	Directeur de thèse
Mme Véronique BRUYÈRE	PR à l'Université de Mons	Examinatrice
M. Arnaud CARAYOL	PR au LIGM, Université Gustave Eiffel	Rapporteur
M. Christian CHOFFRUT	PR émérite à l'IRIF, Université de Paris	Rapporteur
M. Dominique PERRIN	PR émérite au LIGM, Université Gustave Eiffel	Examineur

Thèse dirigée par Nicolas BEDON, laboratoire LITIS









## REMERCIEMENTS

Plus que des remerciements, c'est un sentiment de gratitude envers Nicolas Bedon, mon directeur de thèse, pour m'avoir initié au monde de la recherche en m'accordant sa confiance et en me permettant de travailler, depuis mon stage de M2, sur un sujet aussi riche reliant plusieurs aspects de l'informatique théorique. Je le remercie grandement pour son soutien, sa disponibilité, sa patience et ses précieux conseils tout au long de cette thèse.

Je remercie Véronique Bruyère, Arnaud Carayol, Christian Choffrut et Dominique Perrin pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury de ma thèse, pour tout le temps consacré à la lecture de mon manuscrit et pour y avoir porté une très grande attention. Je remercie Arnaud Carayol et Christian Choffrut pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. Je les remercie pour toutes leurs remarques pertinentes et précieux conseils.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du LITIS, de l'équipe Combinatoire et Algorithmes et du département d'Informatique pour m'avoir chaleureusement accueilli depuis mon arrivée à l'université de Rouen Normandie. Je remercie particulièrement Carla Selmi et Ludovic Mignot pour m'avoir encouragé à suivre cette voie.

Un grand merci à toutes les équipes pédagogiques avec lesquelles j'ai pu travailler au département d'Informatique à l'université de Rouen Normandie et au département ASI à l'INSA Rouen Normandie. Leur fervent accueil, leur passion et leur disponibilité ont fait que ces premières années d'enseignement soient des plus sympathiques et enrichissantes.

Des remerciements particuliers à tous les docteurs/doctorants que j'ai côtoyés tout au long de ma thèse. Merci à Clément et Vlad de m'avoir accueilli dans leur bureau qui est devenu le mien au fil du temps. Merci à Edwin, Manon et Younes d'avoir été indulgents avec nos échanges à deux balles avec Clément. Merci à Pierre de ne pas m'avoir trop connu durant notre master commun ; autrement, on aurait finis gros mais bredouilles.

Je tiens également à remercier mes amis de longue date : Ghilas et Lyes,

sans qui la vie serait moins agréable. Je n'oublie pas Abderrahim, Aghiles, Anis, Jugurtha, Massinissa, Micipsa, Moncef, Moumourh, Saïd, Samy et Sofiane qui m'ont accompagné durant mon parcours universitaire.

Une pensée particulière aux membres de ma famille : Katia, Sihem, Thafath, Vava et Yemma qui ont dû se passer de moi de longues années, mais dont le soutien est indéniable.





## Résumé

Nous étudions dans cette thèse des structures généralisant la notion classique de mot. Elles sont construites à partir d'un ensemble partiellement ordonné (*partially ordered set* ou *poset*) vérifiant les propriétés suivantes :

- elles ne contiennent pas 4 éléments distincts  $x, y, z, t$  dont l'ordre relatif est exactement  $x < y, z < y, z < t$  (posets dits *sans N*) ;
- les chaînes sont des ordres linéaires dénombrables et dispersés ;
- les antichaînes sont finies ;

et chaque élément est étiqueté par une lettre d'un alphabet fini. De manière équivalente, la classe des posets que nous considérons est la plus petite construite à partir du poset vide et du singleton, fermée par les produits séquentiel et parallèle finis, et le produit  $\omega$  et son renversé  $-\omega$  (posets *série-parallèles*). Elle est une généralisation à la fois des posets série-parallèles finis étiquetés, en y ajoutant l'infinitude, et des mots transfinis, en affaiblissant l'ordre total des éléments en ordre partiel. En informatique, les posets série-parallèles finis trouvent leur intérêt dans la modélisation des processus concurrents basés sur les primitives *fork/join*, et les mots transfinis dans l'étude de la récursivité.

Les langages rationnels de ces posets étiquetés sont définis à partir d'expressions et d'automates équivalents introduits par Bedon et Rispal, qui généralisent le cas des mots transfinis (Bruyère et Carton) et celui des posets finis (Lodaya et Weil). Dans cette thèse nous les étudions du point de vue de la logique. Nous généralisons en particulier le théorème de Büchi, Elgot et Trakhtenbrot, établissant pour le cas des langages de mots finis l'égalité entre la classe des langages rationnels et celle des langages définissables en logique monadique du second ordre (MSO). La logique mise en œuvre est une extension de MSO par de l'arithmétique de Presburger.

Nous nous intéressons également à certaines variétés d'algèbres de posets. Nous montrons que l'algèbre dont l'univers est la classe des posets série-parallèles transfinis et dont les opérations sont les produits séquentiel et parallèle finis et les produits (resp. puissances)  $\omega$  et  $-\omega$  est libre dans la variété correspondante  $V$  (resp.  $V'$ ). Nous en déduisons la liberté de la même algèbre sans le produit parallèle ou le produit  $-\omega$ . Enfin, nous montrons que la théorie équationnelle de  $V'$  est décidable. Ce sont notamment des généralisations de résultats similaires de Bloom et Choffrut pour la variété d'algèbres de mots de longueur inférieure à  $\omega^\omega$ , de Choffrut et Ésik pour la variété d'algèbres de posets sans N dont les antichaînes sont finies et les chaînes sont de longueur inférieure à  $\omega^\omega$  et ceux de Bloom et Ésik pour la variété d'algèbres de mots sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés.

**Mots clés :** automates et logique, posets N-libres transfinis, posets série-parallèles, langage rationnel, automate branchant, logique monadique du second ordre, décidabilité, arithmétique de Presburger, variété, algèbre libre, théorie équationnelle.



## Abstract

We study in this thesis structures extending the classical notion of word. They are built from a partially ordered set (*poset*) verifying the following properties :

- they do not contain 4 distinct elements  $x, y, z, t$  whose relative order is exactly  $x < y, z < y, z < t$  (posets called *N-free*);
- their chains are countable and scattered linear orderings;
- their antichains are finite;

and each element is labeled by a letter of a finite alphabet. Equivalently, the class of posets which we consider is the smallest one built from the empty poset and the singleton, and being closed under sequential and parallel products, and  $\omega$  product and its backward ordering  $-\omega$  (series-parallel posets). It is a generalization of both of finite series-parallel labeled posets, by adding infinity, and transfinite words, by weakening the total ordering of the elements to a partial ordering. In computer science, series-parallel posets find their interest in modeling concurrent processes based on *fork/join* primitives, and transfinite words in the study of recursion.

The rational languages of these labeled posets are defined from expressions and equivalent automata introduced by Bedon and Rispal, which generalize the case of transfinite words (Bruyère and Carton) and the one of finite posets (Lodaya and Weil). In this thesis we study such structures from the logic point of view. In particular, we generalize the Büchi-Elgot-Trakhtenbrot theorem, establishing in the case of finite words the correspondence between the class of rational languages and the one of languages definable in monadic second order logic (MSO). The implemented logic is an extension of MSO by Presburger arithmetic.

We focus on some varieties of posets algebras too. We show that the algebra whose universe is the class of transfinite series-parallel posets and whose operations are the sequential and parallel products and the  $\omega$  and  $-\omega$  products (resp. powers) is free in the corresponding variety  $V$  (resp.  $V'$ ). We deduce the freeness of the same algebra without parallel or  $-\omega$  product. Finally, we show that the equational theory of  $V'$  is decidable. These results are, in particular, generalizations of similar results of Bloom and Choffrut on the variety of algebras of words whose length are less than  $\omega^\omega$ , of Choffrut and Ésik on the variety of algebras of N-free posets whose antichains are finite and whose chains are less than  $\omega^\omega$  and those of Bloom and Ésik on the variety of algebras of words indexed by countable and scattered linear orderings.

**Keywords :** automata and logic, transfinite N-free posets, series-parallel posets, rational languages, branching automata, monadic second-order logic, decidability, Presburger arithmetic, variety, free algebra, equational theory.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>10</b>
1.1 Notions de base . . . . .	10
1.1.1 Ensembles et opérations . . . . .	10
1.1.2 Relations et fonctions . . . . .	12
1.2 Cardinaux . . . . .	15
1.3 Ordres . . . . .	16
1.3.1 Définitions . . . . .	16
1.3.2 Ordres linéaires . . . . .	17
1.3.3 Opérations sur les ordres linéaires . . . . .	18
1.3.4 Ordinaux . . . . .	20
1.3.5 Ordres linéaires dispersés . . . . .	22
1.3.6 Coupures . . . . .	24
1.4 Posets . . . . .	25
1.4.1 Définitions et opérations . . . . .	26
1.4.2 Caractéristiques des posets . . . . .	28
1.4.3 Caractérisations de $SP^\circ$ . . . . .	30
1.4.4 Posets étiquetés . . . . .	32
1.5 Algèbre . . . . .	34
1.5.1 Structures algébriques . . . . .	34
1.5.2 Variétés d'algèbres . . . . .	37
1.5.3 Théories équationnelles . . . . .	40
1.5.4 Algèbres libres . . . . .	41
<b>2 Langages Rationnels</b>	<b>45</b>
2.1 Opérations rationnelles . . . . .	46
2.2 Expressions rationnelles . . . . .	50
2.3 Automates . . . . .	51
2.3.1 Définitions et notation . . . . .	51
2.3.2 Mots finis . . . . .	53
2.3.3 Mots sur les ordinaux . . . . .	55
2.3.4 Mots sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés . . . . .	58

2.3.5	Posets finis . . . . .	61
2.3.6	Posets sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés . . . . .	64
2.4	Langages rationnels du monoïde commutatif . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Logique</b>	<b>69</b>
3.1	Logique du premier ordre . . . . .	70
3.1.1	Arithmétique de Presburger . . . . .	72
3.2	Logique monadique du second ordre . . . . .	76
3.3	P-MSO . . . . .	81
3.3.1	Relations définissables en P-MSO . . . . .	84
3.4	Automates sur les mots et MSO . . . . .	87
3.4.1	MSO et langages rationnels de $A^\sharp$ . . . . .	88
3.4.2	MSO et langages rationnels de $A^\diamond$ . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Automates sur les Posets et P-MSO</b>	<b>94</b>
4.1	Langages $>1$ -rationnels . . . . .	96
4.2	Graphes . . . . .	97
4.2.1	Généralités . . . . .	98
4.2.2	D-graphes . . . . .	101
4.2.3	Des $>1$ -expressions aux D-graphes . . . . .	104
4.2.4	Propriétés de D-graphes . . . . .	110
4.2.5	Langages de D-graphes . . . . .	117
4.2.6	Preuve de la correction de la construction de D-graphes . . . . .	123
4.3	Coloriage . . . . .	134
4.3.1	ms-coloriage . . . . .	136
4.3.2	Encodage avec MSO d'un s-coloriage compatible . . . . .	146
4.3.3	s-coloriages compatibles et D-graphes . . . . .	149
4.4	Des D-graphes à P-MSO . . . . .	150
4.5	De P-MSO aux automates . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Théories Équationnelles de Posets</b>	<b>159</b>
5.1	Variétés d'algèbres de posets . . . . .	160
5.2	Algèbres libres . . . . .	162
5.2.1	Liberté de $SP^\diamond(A)$ . . . . .	162
5.2.2	Liberté de ${}^\omega SP(A)$ . . . . .	169
5.3	Décidabilité . . . . .	171
	<b>Conclusion</b>	<b>174</b>
	<b>Index</b>	<b>178</b>
	<b>Index des Notations</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>187</b>





Les mathématiques sont en étroite relation avec plusieurs disciplines scientifiques. Formaliser mathématiquement une notion particulière et ses différentes propriétés donne accès à la large panoplie d'outils et de techniques que les mathématiques pures mettent en exergue pour déduire de nouvelles connaissances. Ainsi, les scientifiques cherchent souvent à modéliser mathématiquement leurs objets d'études afin de mieux comprendre leurs comportements et de pouvoir étudier leurs propriétés.

En 1943, dans l'optique de concevoir des machines simulant un cerveau humain, Warren McCulloch et Walter Pitts assimilent dans [60] un neurone biologique à une fonction à plusieurs variables à valeurs réelles. Ils font ensuite interagir ces neurones entre eux pour former ce qui a été appelé par la suite « automate fini ». Un automate est couramment défini comme une machine abstraite possédant un ensemble fini d'états dont certains sont dits initiaux ou finaux, un ensemble de symboles appelés lettres et une relation de transition indiquant quels états peuvent être atteints par la machine à la lecture d'un symbole à partir d'un autre état. Il prend en entrée des suites finies de lettres appelée « mots », lit les lettres séquentiellement à partir d'un état initial et va d'état en état conformément à sa relation de transition. Le mot est reconnu si l'automate termine son calcul dans un état final.

C'est Stephen Cole Kleene qui a été le précurseur de la théorie des automates. Les automates définis ci-dessus portent d'ailleurs son nom. Dans l'article [52] paru en 1956, Kleene a été amené à faire un rapport sur l'article de McCulloch et Pitts. Il y donne une autre modélisation des langages définissables par un automate fini. En effet, il montre qu'un ensemble de mots finis peut être reconnu par un automate fini si et seulement si cet ensemble peut être décrit par une expression rationnelle. Il s'agit de structures formées récursivement à partir d'un ensemble de lettres appelé alphabet en utilisant d'autres symboles représentant des opérations binaires :  $+$ ,  $\cdot$  et un symbole unaire :  $*$ . Ces opérations sont interprétées comme étant les opérations d'union ensembliste, de concaténation des mots et d'itération finie de cette concaténation (appelée l'étoile de Kleene). Ce résultat est connu sous le nom de « théorème de Kleene ». Il marque la naissance de la théorie des automates.

La théorie des automates intervient dans plusieurs domaines : mathématiques, linguistique, électronique, biologie, etc. Elle est aussi une des plus im-

portantes branches de l'informatique théorique. La théorie des automates joue un rôle majeur dans le traitement de texte, la compilation, la théorie de calcul, la théorie des codes, la théorie des langages, entre autres. Ces nombreuses applications ont incité les chercheurs à l'étudier de plus près. D'autres modèles mathématiques équivalents aux automates de Kleene ont vu le jour depuis. Les résultats de Schützenberger dans [78] ont anticipé la caractérisation algébrique des langages des automates de Kleene par des structures appelées « semigroupes finis ». En effet, tout ensemble de mots est décrit par un semigroupe fini si et seulement si c'est le langage d'un automate de Kleene. En particulier, parmi tous les semigroupes finis décrivant le langage d'un automate, un unique semigroupe fini se distingue appelé semigroupe « syntaxique » qui reflète les propriétés algébriques de ce langage. Cette notion avancée par Schützenberger dans [78] lui permet dans [79] de classer certains langages définissables par des automates de Kleene selon les propriétés que leurs semigroupes syntaxiques satisfont : le langage d'un automate de Kleene peut être décrit par une expression rationnelle n'utilisant que des opérations booléennes et l'opération de concaténation (appelés langages sans étoile) si et seulement si son semigroupe syntaxique est aperiodique. La proximité entre les semigroupes et les langages des automates finis a été renforcée plus tard par Eilenberg [42] avec le théorème des pseudo-variétés. Il établit la correspondance entre la classe de tous les semigroupes finis et celle des langages des automates de Kleene. En parallèle, grâce notamment aux travaux de Myhill et Nerode [64], un automate fini dont le nombre d'états est le plus petit possible appelé « automate minimal » est associé à tout langage rationnel. Ces résultats font que la classe des langages rationnels est fermée par complémentation et qu'elle forme par conséquent une algèbre de Boole.

Les automates de Kleene ont aussi été utilisés pour résoudre des problèmes de décidabilité issus de la logique mathématique. Les logiciens Büchi [28], Elgot [44] et Trakhtenbrot [83], dans les années 60, ont établi séparément la correspondance des langages des énoncés de logique monadique du second ordre avec les langages rationnels de mots finis. Ce résultat est en particulier utilisé pour donner un algorithme décidant de la validité des formules de logique monadique faible du second ordre à un ou plusieurs successeurs. Le problème de décider si une formule de logique du second ordre est valide est ramené à un problème vacuité d'automates de Kleene. Quant aux langages sans étoile, McNaughton et Papert [62] montrent leur correspondance avec un fragment de la logique monadique du second ordre où les variables du second ordre sont interdites : la logique du premier ordre.

Les différents liens entre les automates, la logique mathématique et l'algèbre ont suscité d'autres applications des langages rationnels. Les notions d'automate et de logique sont par exemple utilisées ensemble à des fins de vérification de programmes. Les automates peuvent être utilisés pour simuler des machines séquentielles à mémoire bornée. On peut voir chaque état d'un automate comme l'état d'une machine et chaque lettre de son alphabet comme une instruction et par conséquent assimiler mots reconnus par un automate et programmes séquentiels. La logique est utilisée pour exprimer les propriétés qu'on veut vérifier sur ces machines. Vérifier qu'une machine satisfait une propriété revient à tester si l'intersection des langages de leurs modélisations est vide ou pas. De plus, le résultat de Büchi, Elgot et Trakhtenbrot a été généralisé plus tard vers des structures moins restreintes que les mots finis, en s'appuyant sur des notions d'automates adaptées. Parmi eux, on peut citer les mots indicés par

tous les entiers positifs [29], les ordinaux [31, 32, 30], les arbres [73], les ordres linéaires [11], etc. Ces généralisations fournissent en particulier des algorithmes de décision pour la théorie du second ordre des ordinaux dénombrables [30] et celle des fonctions à deux successeurs [73].

Afin d'étudier le comportement de machines séquentielles s'exécutant indéfiniment pour l'un et pour des motivations liées toujours à des problèmes de décisions pour l'autre, Muller [63] et Büchi [29] définissent des automates reconnaissant des mots indicés par tous les entiers naturels appelés les  $\omega$ -mots. En particulier, Büchi [29] a montré que les langages reconnus par ses automates sont exactement ceux décrits par la logique monadique du second ordre sur les  $\omega$ -mots. Les deux définitions d'automates ont été montrées équivalentes par McNaughton dans [61]. De plus, en ajoutant une itération sur  $\omega$  – qui n'est pas autorisée à être imbriquée – aux opérations rationnelles introduites par Kleene, il étend le théorème de Kleene aux  $\omega$ -mots. Un analogue du théorème de McNaughton et Papert pour les  $\omega$ -mots a été aussi montré dans [89]. Dans [31], Büchi a généralisé ses résultats en définissant un modèle d'automate reconnaissant des mots indicés par des ordinaux dénombrables et en montrant que les langages de ces automates sont exactement ceux définissables en logique monadique du second ordre. Les automates sur les ordinaux permettent en particulier de simuler une exécution infinie d'une machine séquentielle en un temps fini, et d'étudier son comportement après cette exécution. Les ordinaux modélisent une suite infinie d'actions pouvant s'exécuter en un temps fini. Une sous-classe des langages rationnels sur les mots indicés par des ordinaux dénombrables a été étudiée par Choueka dans [38]. Il définit des automates reconnaissant des mots de longueur inférieure à  $\omega^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et des expressions rationnelles équivalentes, étendant ainsi à ce cas le théorème de Kleene. C'est Wojciechowski qui généralise le théorème de Kleene aux langages rationnels de mots sur les ordinaux dénombrables dans [88] en ajoutant une itération sur les ordinaux dénombrables. Les automates de Choueka et ceux de Wojciechowski ont la même expressivité [5] quand les mots des langages reconnus par ces derniers sont de longueur inférieure à  $\omega^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Si une suite infinie d'instructions à exécuter dans le futur peut être simulée par un mot sur  $\omega$ , une suite infinie déjà exécutée dans le passé peut être simulée avec un mot sur l'ensemble des entiers négatifs, noté  $-\omega$ . Un modèle d'automates sur les mots dits bi-infinis indicés par l'ensemble des entiers relatifs a été considéré dans [48, 65] tout comme des expressions rationnelles équivalentes. Plus généralement, des automates de mots englobant tous les modèles d'automates sus-cités ont été considérés dans [26] par Bruyère et Carton. Il s'agit d'automates reconnaissant des mots indicés par des ordres linéaires. En se restreignant au cas des ordres linéaires dénombrables et dispersés et en s'aidant de la caractérisation d'Hausdorff [51] de ces ordres linéaires, ils montrent un analogue du théorème de Kleene. Les ordres linéaires dénombrables et dispersés sont des ordres linéaires finis ou des ordres linéaires infinis dénombrables ne contenant pas de sous-ordre isomorphe à  $\mathbb{Q}$ . Il s'agit des ordres linéaires construits à partir de l'ordre linéaire vide ou du singleton en utilisant des sommes finies, indicées par  $\omega$  ou par  $-\omega$  [51]. Cette caractérisation permet d'associer un ordinal dénombrable unique à chaque ordre linéaire dénombrable et dispersé; une propriété intéressante pour faire des preuves par induction. Une généralisation du théorème de Büchi-Elgot-Trakhtenbrot est montrée dans [11] par Bedon, Bès, Carton et Rispal, énonçant la correspondance des langages des automates sur

les ordres linéaires dénombrables et dispersés avec la logique monadique du second ordre sur les mêmes ordres linéaires. Dans [18], des expressions rationnelles équivalentes aux automates sur les ordres linéaires ont été introduites.

La caractérisation algébrique des langages rationnels des mots finis et les aboutissements qui en découlent ont incité les chercheurs à généraliser ces résultats aux mots infinis. Des structures algébriques inspirées des semigroupes ont été définies pour y parvenir. Les algèbres de Wilke [85, 86] ont été définies pour capturer l'expressivité des automates de Büchi et Muller. En particulier, une généralisation du théorème des variétés d'Eilenberg est montrée dans [85]. Des algèbres adaptant les semigroupes au cas des mots indicés par  $\omega$ , appelées  $\omega$ -semigroupes, ont été introduites par Perrin et Pin [70]. En particulier, Perrin montre une extension du théorème de Schützenberger aux  $\omega$ -mots dans [68]. Les  $\omega$ -semigroupes et algèbres de Wilke sont généralisés au cas de mots dont le support est un ordinal plus petit que  $\omega^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dans [6] et le théorème de Schützenberger, McNaughton et Papert sur les langages sans étoile est étendu à ce cas dans [7]. Bedon et Carton généralisent l'approche algébrique aux mots indicés par des ordinaux dénombrables dans [12] avec des structures appelées  $\omega_1$ -semigroupes utilisées dans [7] pour étendre les résultats sur les langages sans étoile au cas des ordinaux dénombrables. Enfin, des structures adaptées aux mots indicés par les ordres linéaires, appelées  $\diamond$ -semigroupes, ont été définies dans [36]. Une généralisation des théorèmes de Schützenberger et d'Eilenberg est montrée dans [14] par Bedon et Rispal pour le cas des mots indicés par des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Les caractérisations algébriques des différentes classes de langages rationnels de mots ont comme conséquence immédiate la fermeture de ces classes par complémentation et intersection. Cette propriété est cruciale pour résoudre les problèmes de décidabilité en logique. Compte tenu de ces faits, la question de la validité des formules de logique monadique du second ordre sur toutes ces classes est décidable.

La juxtaposition de plusieurs opérations pour former un ensemble de structures pose la question des propriétés axiomatiques que satisfait la combinaison de ces opérations. Par exemple, on sait que la concaténation binaire est une opération associative, mais on ne sait pas se prononcer aussi facilement sur son comportement lorsqu'elle cohabite avec des opérations d'arité infinies. Une approche algébrique peut être utilisée pour répondre à ce genre de questions. Le théorème dit « HSP » de Birkhoff [19] établit la correspondance entre les classes d'algèbres définies à partir d'égalités (classes équationnelles) et celles fermées par division et par produits directs (variétés d'algèbres). Les algèbres de Wilke ou les  $\omega$ -semigroupes sont des structures algébriques divisées en deux composantes et équipées de trois opérations : une opération binaire de concaténation finie sur la première composante, une opération d'itération d'arité  $\omega$  (la puissance  $\omega$ ) sur la deuxième, et une opération concaténant un élément de la première composante avec un élément de la deuxième. Dans [20], Bloom et Choffrut fusionnent les deux composantes et considèrent des variétés d'algèbres équipées de l'opération de concaténation binaire et la puissance  $\omega$ . Ils montrent que l'algèbre dont l'univers est la collection des mots contenant les lettres d'un alphabet et fermée par les opérations de concaténation et de la puissance  $\omega$  est une algèbre libre dans la variété considérée. En utilisant les automates de Choueka, ils montrent que la théorie équationnelle de cette variété est décidable en temps polynomial. Ces résultats ont été étendus aux cas des variétés dont les algèbres sont aussi équipées de la puissance  $-\omega$  [23] et quand le produit  $\omega$

(concaténation de  $\omega$  posets) est utilisé au lieu de la puissance [37].

Avec l'apparition de la programmation parallèle, des modélisations des programmes concurrents ont émergé. La concurrence est classiquement modélisée, entre autres, par les exécutions de Mazurkiewicz [59] ou les ensembles semi-linéaires [66]. Les ensembles semi-linéaires sont les ensembles rationnels dans le monoïde commutatif [43]. En particulier si un mot est une suite d'actions ordonnée, un mot dans le monoïde commutatif est un ensemble d'instructions dans lequel l'ordre n'importe pas, ou, de manière équivalente, un ensemble d'instructions indépendantes, qui peuvent être exécutées de manière concurrente. Des modèles de programmes concurrents alliant la séquentialité et le parallélisme ont aussi été considérés dans [49, 71] : les ensembles partiellement ordonnés communément appelés poset (pour « partially ordered set »). C'est sur ces structures que nous nous focalisons dans cette thèse. Dans un poset, les instructions d'un programme concurrent sont modélisées par des étiquettes associées aux éléments du poset. L'ordre partiel des éléments du poset définit l'ordre d'exécution des instructions. Les posets étiquetés sont une généralisation des mots. En effet, les mots peuvent être assimilés à des ensembles linéairement ordonnés dont les éléments sont étiquetés. D'une autre manière, les posets étiquetés dont les antichaînes sont de tailles inférieures ou égales à 1 sont des mots. Due à la possible répétitivité des instructions, les mots et les posets étiquetés peuvent être assimilés à des multiensembles respectivement linéairement et partiellement ordonnés, d'où l'appellation « pomset » (partially ordered multisets) qu'on trouve aussi dans la littérature [49, 50, 87].

Les opérations de base sur les posets étiquetés sont la composition séquentielle, notée  $\cdot$  et la composition parallèle notée  $\parallel$ . Les deux opérations sont associatives et la composition parallèle est naturellement commutative. La composition parallèle  $P_1 \parallel P_2$  de deux posets  $P_1$  et  $P_2$  engendre un ensemble partiellement ordonné par l'union des relations d'ordres des deux posets. La composition séquentielle  $P_1 \cdot P_2$  engendre un poset préservant l'ordre des éléments de  $P_1$  et  $P_2$  entre eux et met les éléments de  $P_1$  avant ceux de  $P_2$ . L'utilisation d'un nombre fini de fois de compositions séquentielles et parallèles sur des posets finis produit un ensemble fini partiellement ordonné série-parallèle. Les posets série-parallèles ont des propriétés intéressantes en termes de graphes. Ils correspondent aux posets n'ayant pas quatre élément  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ordonnés exactement de la manière suivante :  $x_1 < x_2, x_3 < x_2, x_3 < x_4$ , [49, 50, 84]. Ordonnés de cette manière ces éléments forment un  $N$ . Les posets série-parallèles sont appelés aussi « posets  $N$ -libres ».

Le franc succès de la théorie des automates sur les mots a encouragé sa généralisation vers le cas des posets. Plusieurs études sont allées dans ce sens. Les réseaux de Petri [74] ont été considérés par Grabowski dans [50]. Des automates sur des ensembles ordonnés par plusieurs ordres partiels ont aussi été définis dans [45]. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur les automates branchants introduits par Lodaya et Weil [56, 57]. Ce sont une généralisation des automates de Kleene, avec deux nouveaux types de transitions : « fork » et « join », en plus des transitions séquentielles habituelles des automates de Kleene. Les transitions fork permettent de mettre un nombre fini de flux d'instructions en concurrence et les transitions join les unifient. Les automates branchants de Lodaya et Weil reconnaissent des langages rationnels de la classe des posets finis  $N$ -libres étiquetés par un alphabet  $A$ , notée  $SP(A)$ .

Lodaya et Weil étendent dans [56] plusieurs résultats classiques de la théorie

des automates sur les mots. En ajoutant seulement la composition parallèle aux opérations utilisées par Kleene, ils définissent une notion d'expression rationnelle représentant des langages de posets N-libres dont le nombre de branches parallèles est délimité. C'est dans [55, 58] qu'ils réussissent à généraliser le théorème de Kleene aux automates branchants en introduisant une opération rationnelle d'itération parallèle finie notamment. Aussi, des structures algébriques équipées des compositions séquentielle et parallèle, appelées sp-algèbres, ont été introduites. Ces structures caractérisent bien les langages rationnels de posets N-libres de largeurs bornées, mais ne capturent pas l'expressivité des automates branchants de manière générale. Néanmoins, les sp-algèbres forment une variété d'algèbres dont  $SP(A)$  est une algèbre libre [21].

La caractérisation en logique monadique du second ordre des langages rationnels de posets N-libres de largeurs délimitées est due à Kuske. Il étudie dans [53] la classe des  $\omega$ -posets série-parallèles obtenue en utilisant les compositions séquentielle, parallèle bornée et la puissance  $\omega$ . Comme dans le cas fini, il montre que cette classe correspond à la classe des posets N-libres dont les antichaînes sont bornées et dont les chaînes sont indicées par l'ensemble des entiers naturels. En utilisant les sp-algèbres et la logique monadique du second ordre, il donne des caractérisations respectivement algébrique et logique des langages rationnels de  $\omega$ -posets N-libres de largeurs bornées. Il en déduit une caractérisation logique dans le cas fini. Des automates branchants reconnaissant des ensembles de posets infinis ont aussi été considérés dans [15, 54]. Dans [54], Kuske définit une généralisation des automates branchants aux  $\omega$ -posets en s'inspirant des automates de Büchi sur les  $\omega$ -mots. Il donne une extension du théorème de Kleene aux langages rationnels de  $\omega$ -posets de largeurs bornées. De plus, il étend les théorèmes de Schützenberger et de McNaughton et Papert sur les langages sans étoile de  $\omega$ -posets N-libres. Dans [15], Bedon et Rispal s'intéressent à la classe de posets  $SP^\circ$  obtenue à partir de l'ensemble vide et du singleton en utilisant les compositions séquentielle et parallèle finies, la composition séquentielle infinie à droite  $\omega$  et la composition séquentielle infinie à gauche  $-\omega$ . Ils montrent que cette classe correspond à la classe des posets N-libres dont les antichaînes sont finies et dont les chaînes sont des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Ils donnent une caractérisation à la Hausdorff de  $SP^\circ$ , donnant ainsi une propriété pour les posets de  $SP^\circ$  pratique pour les preuves par induction. Il définissent des automates branchants reconnaissant des langages de tels posets et établissent une généralisation du théorème de Kleene en définissant une notion d'expression rationnelle unifiant celles de Lodaya et Weil pour les posets N-libres finis et celles de Bruyère et Carton pour les mots indicés par des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Avec une approche algébrique, Bedon montre que cette classe de langages rationnels est fermée par complémentation [10]. Dans [8], il caractérise les langages rationnels de posets de  $SP^\circ$  étiquetés de largeurs bornées respectivement en termes de logique monadique du second ordre et de structures similaires aux sp-algèbres de Lodaya et Weil.

La puissance expressive de la logique monadique du second ordre sur les posets série-parallèles permet de caractériser des langages rationnels de posets de largeurs bornées. Toutefois, elle est strictement moins expressive dans le cadre général. Contrairement à l'étoile de Kleene, l'itération parallèle finie n'est pas définissable en logique monadique du second ordre. Kuske a suggéré dans [53] d'étendre cette dernière de manière à capturer l'expressivité des automates branchants. Bedon a utilisé dans [9] une logique consistant en MSO augmentée par

de l'arithmétique de Presburger, appelée P-MSO, pour y parvenir. L'arithmétique de Presburger permet de manipuler les ensembles semi-linéaires par des moyens de logique, [47]. Les ensembles semi-linéaires sont fermés en particulier par itération parallèle finie. En s'appuyant sur la fermeture de la classe des langages rationnels de  $SP(A)$  par complémentation montrée dans le même article [9], Bedon montre que les langages des automates branchants de Lodaya et Weil sont exactement ceux définissables en P-MSO sur  $SP(A)$  étendant ainsi le théorème de Büchi-Elgot-Trakhtenbrot aux posets N-libres finis. En conséquence de ce résultat, la théorie P-MSO sur  $SP(A)$  est décidable.

Des théories équationnelles de posets ont été étudiées dans [21, 22, 37]. Celle des variétés d'algèbres de posets équipées des compositions séquentielle et parallèle est montrée décidable dans [21] par Bloom et Ésik. Dans [22], les mêmes auteurs ont ajouté aux algèbres de Wilke l'opération de composition parallèle finie à leurs premières composantes. Ils caractérisent les algèbres libres de la variété de telles algèbres et montrent la décidabilité de sa théorie équationnelle. Choffrut et Ésik considèrent dans [37] des variétés d'algèbres de posets équipées de la composition séquentielle, la composition parallèle, et la puissance ou le produit  $\omega$ . Ils caractérisent les algèbres libres de ces variétés et montrent que la théorie équationnelle de celle utilisant la puissance  $\omega$  est décidable.

Nous étudions dans cette thèse la classe  $SP^\circ(A)$  des posets étiquetés, N-libres, dont les chaînes sont des ordres linéaires dénombrables et dispersés et dont les antichaînes sont finies, d'un point de vue logique et algébrique. La classe  $SP^\circ(A)$  est la plus petite classe de posets série-parallèles contenant le poset vide, chaque lettre de l'alphabet  $A$ , et qui est fermée par la composition séquentielle, la composition parallèle et les produits  $\omega$  et  $-\omega$ . Nous étendons le théorème de Büchi-Elgot-Trakhtenbrot en montrant qu'un sous-ensemble de  $SP^\circ(A)$  est rationnel si et seulement si ce sous-ensemble est définissable par un énoncé de P-MSO, avec des constructions effectives d'un formalisme à l'autre. La décidabilité de la théorie P-MSO sur  $SP^\circ(A)$  est un corollaire de cette caractérisation. Ce résultat englobe toutes les caractérisations logiques citées dans les paragraphes précédents. Le passage d'une formule de logique P-MSO vers un automate branchant de Bedon et Rispal reprend des arguments classiques similaires à ceux utilisés par Bedon, Bès, Carton et Rispal [11] et Bedon [9] dans leurs caractérisations logiques respectivement pour les langages rationnels sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés et pour les langages rationnels de posets série-parallèles finis. L'autre sens de la preuve utilise de nouveaux arguments. La construction habituelle utilisée notamment pour construire une formule de logique monadique du second ordre à partir d'un automate dans le cas des  $\omega$ -mots encode le calcul fait par l'automate pour reconnaître un  $\omega$ -mot. Dans ce cas, la formule associe un état de l'automate à chaque lettre du mot conformément à la définition de l'automate. Cela est possible puisque la suite d'états rencontrés lors du processus de la reconnaissance du mot est isomorphe à la suite des lettres du mot en question. Cette propriété n'est plus vérifiée dans le cas des automates sur les ordres linéaires. Dans [11], les auteurs surpassent cette difficulté en construisant une formule de logique à partir d'une expression rationnelle plutôt qu'un automate. La même contrainte subsiste dans le cas des posets série-parallèles transfinis, et nous l'évitons de la même manière. Toutefois, d'autres complications surviennent. La construction d'une formule P-MSO à partir d'une expression rationnelle décrivant un langage de  $SP^\circ(A)$  est développée comme suit. Nous transformons l'expression rationnelle en un

graphe orienté, étiqueté, partiellement ordonné et potentiellement cyclique. La formule P-MSO est construite en parcourant inductivement le graphe obtenu. La cyclicité est évitée en identifiant grâce à des formules de logique monadique du second ordre des facteurs particuliers de posets.

Du point de vue algébrique, nous nous intéressons à certaines variétés d'algèbres de posets série-parallèles transfinites. Il s'agit des variétés d'algèbres de posets considérées dans [37] où le produit  $-\omega$  ou la puissance  $-\omega$  sont ajoutés et celles considérées dans [23] où la composition parallèle est ajoutée. Nous montrons que l'algèbre  $SP^\circ(A)$  équipée des compositions séquentielle et parallèle et des produits  $\omega$  et  $-\omega$  est une algèbre libre dans sa variété correspondante. Nous en déduisons la liberté de l'algèbre constituée des mots sur les ordres linéaires équipée de la composition séquentielle et des produits  $\omega$  et  $-\omega$  dans sa variété correspondante. Nous considérons aussi la classe des posets série-parallèles transfinites où les produits  $\omega$  et  $-\omega$  ont été remplacés par les puissances  $\omega$  et  $-\omega$  et nous montrons qu'elle est librement engendrée dans sa variété d'algèbres correspondante. Nous prouvons aussi que la théorie équationnelle de cette dernière variété est décidable.

Cette thèse est composée de cinq chapitres et structurée de la manière suivante :

1. Nous aborderons dans le Chapitre 1 les notions de base et les notations que nous manipulerons tout au long de cette thèse. Nous évoquerons quelques définitions élémentaires de la théorie des ensembles et de l'algèbre universelle. Nous définirons formellement les notions d'ordre linéaire, de poset (étiqueté) et nous donnerons leurs différentes caractérisations.
2. Nous présenterons dans le Chapitre 2 plusieurs classes de langages rationnels. Nous définirons pour chaque classe des expressions rationnelles et des automates adaptés. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux langages rationnels du monoïde commutatif.
3. Dans le Chapitre 3, la syntaxe et la sémantique de la logique P-MSO sont présentées. Nous commencerons par présenter successivement la logique du premier ordre, l'arithmétique de Presburger et la logique monadique du second ordre. Dans la dernière section de ce chapitre nous rappellerons les caractérisations par la logique monadique du second ordre des langages rationnels sur les ordinaux dénombrables et sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Nous présenterons la construction d'une formule de logique monadique du second ordre à partir d'une expression rationnelle pour chaque classe.
4. Le Chapitre 4 est entièrement consacré à la preuve de notre généralisation du théorème de Büchi-Elgot-Trakhtenbrot aux posets série-parallèles transfinites. La majeure partie de ce chapitre est dédiée à la description et la preuve de correction de la construction effective d'un énoncé de P-MSO à partir d'une expression rationnelle définissant un langage de posets série-parallèles transfinites. Nous commencerons par définir des expressions rationnelles appelées « >1-expressions rationnelles » différentes mais équivalentes aux expressions rationnelles définies par Bedon et Rispal dans [15]. Nous rappellerons certaines notions de la théorie des graphes et nous décrirons la structure de graphe qui nous intéresse. Par la suite, nous présenterons la construction d'un graphe à partir d'une >1-expression et celle d'une formule P-MSO à partir du graphe résultant. En particulier,

nous exposons la technique dite « s-coloriage » qui nous permet d’esquiver la possible cyclicité de ce graphe. Dans la dernière section de ce chapitre nous exposerons la construction d’un automate branchant sur les posets série-parallèles transfinis à partir d’une formule P-MSO.

5. Dans le Chapitre 5, nous étudions les posets série-parallèles transfinis d’un point de vue algébrique. En premier lieu, nous définirons les classes de posets et les variétés d’algèbres de posets auxquelles nous nous intéressons. Par la suite, nous distinguerons les algèbres libres de ces variétés d’algèbres. À la fin nous donnerons un algorithme décidant la théorie équationnelle de la variété d’algèbres de posets série-parallèles transfinis équipée des compositions séquentielle et parallèle et des puissance  $\omega$  et  $-\omega$ .

# CHAPITRE 1

## PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre sont définis les objets mathématiques principaux qu'on manipulera tout au long de cette thèse. Les définitions élémentaires de la théorie des ensembles sont rappelées dans la Section 1.1 ainsi que les notions de relation et fonction. Les nombres cardinaux sont le sujet de la Section 1.2. Dans la Section 1.3, nous exposons la notion d'ordre de manière générale et nous définissons formellement les ordres linéaires. Nous y donnons en particulier la caractérisation d'Hausdorff des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Les posets sont définis dans la Section 1.4 avec une caractérisation à la Hausdorff étendant celle des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Enfin, des notions d'algèbre universelle sont rappelées dans la Section 1.5.

Les ordres linéaires sont des objets fondamentaux dans cette thèse. Nous nous appuyons particulièrement sur le livre de Rosenstein [76] dédié à ce sujet. En particulier, cette thèse se place dans la même lignée que ce livre du point de vue de la théorie des ensembles.

## 1.1 Notions de base

Dans cette section, nous rappelons certaines notions élémentaires mathématiques. Nous nous penchons sur la définition des ensembles, opérations, relations et fonctions.

### 1.1.1 Ensembles et opérations

Une *collection*  $C$  est un groupement d'objets pas forcément distincts appelés *éléments* de  $C$ . Une *classe* est une collection d'objets distincts. Un *ensemble* est une classe pouvant être formellement définie en théorie axiomatique des ensembles. Toutes les classes ne sont pas des ensembles. L'ensemble ne contenant aucun élément est l'ensemble *vide*, noté  $\emptyset$ . Un ensemble composé d'un unique élément est un *singleton*.

Soit  $E$  un ensemble. Lorsque  $e$  est un élément de  $E$ , on dit que  $e$  *appartient* à  $E$  ou que  $e$  est dans  $E$ , et on écrit  $e \in E$ . L'ensemble des entiers naturels est

noté  $\mathbb{N}$ , et  $\mathbb{N}$  privé de 0 est noté  $\mathbb{N}^*$ . L'ensemble des entiers relatifs est noté  $\mathbb{Z}$ . Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , on note l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  par  $[n]$ .

Les opérations qu'on va définir dans la suite pour les ensembles vaudront aussi pour les classes.

Un ensemble  $F$  est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de  $E$  si tous les éléments de  $F$  appartiennent à  $E$ . On dit alors que  $F$  est *inclus* dans  $E$  et on écrit  $F \subseteq E$ . S'il existe au moins un élément de  $E$  qui n'est pas dans  $F$  alors  $F$  est *strictement inclus* dans (ou *partie propre* de)  $E$  et on écrit  $F \subset E$ . Pour préciser que c'est bien une inclusion stricte on peut aussi utiliser le symbole  $\subsetneq$ . Naturellement,  $\emptyset$  est sous-ensemble de n'importe quel ensemble et chaque ensemble est sous-ensemble de lui même. Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux, noté  $E = F$ , si  $E \subseteq F$  et  $F \subseteq E$ . On note l'ensemble des sous-ensembles, l'ensemble des sous-ensembles non vides et l'ensemble des sous-ensembles de  $E$  contenant au moins deux éléments par respectivement  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}^+(E)$  et  $\mathcal{P}^{>1}(E)$ .

Une *opération* sur un ensemble  $E$  est un procédé consistant à faire interagir zéro ou plusieurs éléments de  $E$ , appelés *opérandes*, autour d'un symbole mathématique appelé *opérateur* pour obtenir un autre élément de  $E$ . Le résultat d'une opération dépend de la valeur des opérandes et de la sémantique donnée à l'opérateur. L'*arité* d'une opération correspond au nombre d'opérandes interagissant dans l'opération. De manière générale, une opération  $op$  d'arité  $n \in \mathbb{N}$  et d'opérandes  $e_1, \dots, e_n$  est notée  $op(e_1, \dots, e_n)$ . Une opération d'arité 0 est appelée *constante*. Une opération d'arité 1 est une opération *unaire*. Une opération d'arité 2 est une opération *binaires*. Souvent on note par  $e_1 op e_2$  l'opération  $op(e_1, e_2)$ . En plus des opérations d'arité finie, nous utiliserons par la suite des opérations d'arité infinie. Nous en parlerons dans les sections suivantes.

Un ensemble  $E$  est *fermé* par une opération  $op$  si l'application de  $op$  sur des éléments de  $E$  donne toujours comme résultat un élément de  $E$ . Soit  $OP$  un ensemble d'opérations sur un ensemble  $E$  et soit  $S \subseteq E$ . La *fermeture* de  $S$  par  $OP$ , notée  $\mathcal{C}_{OP}(S)$ , est le plus petit sous-ensemble  $X$  de  $E$  tel que  $S \subseteq X$  et  $X$  est fermé par les opérations de  $OP$ .

**Exemple 1.1.1.** *Les ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont fermés par les opérations d'addition et multiplication. Par contre, ils ne sont pas fermés par la division. De plus, seul  $\mathbb{Z}$  est fermé par la soustraction. En effet,  $0 - 1 \notin \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathbb{N}$  est la fermeture de  $\{0, 1\}$  par  $\{+, \times\}$ .*

Les exemples d'opérations ci-dessus sont des opérations binaires. Les études essayent d'y trouver certaines propriétés qui facilitent leurs manipulations et leurs compréhensions. Nous listons quelques propriétés d'opérations.

Soit  $op$  une opération binaire sur un ensemble  $E$ . On dit que  $op$

- est *commutative* si l'ordre de ses opérandes n'influe pas sur le résultat. En d'autres termes, pour toute paire d'opérandes  $x, y \in E$ ,  $x op y = y op x$ ;
- est *associative*, si pour tout  $x, y, z \in E$ ,  $(x op y) op z = x op (y op z)$ ;
- admet un *élément neutre* s'il existe un élément  $e \in E$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $e op x = x op e = x$ .

Lorsqu'une opération associative est utilisée plusieurs fois successivement, les parenthèses signifiant l'ordre des opérations ne sont pas nécessaires et sont souvent enlevées.

**Exemple 1.1.2.** L'addition et la multiplication dans  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont commutatives, associatives et possèdent un élément neutre. L'élément neutre de l'addition est 0, celui de la multiplication est 1. La soustraction et la division ne sont ni commutatives ni associatives.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. L'union de  $E$  et  $F$ , notée  $E \cup F$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $E$  ou à  $F$ . L'intersection de  $E$  et  $F$ , notée  $E \cap F$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent en même temps à  $E$  et à  $F$ . Les ensembles  $E$  et  $F$  sont dits *disjoints* si  $E \cap F = \emptyset$ . La différence de  $E$  et  $F$ , notée  $E \setminus F$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $E$  mais qui n'appartiennent pas à  $F$ . Le produit cartésien de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$ , est l'ensemble  $E \times F = \{(e, f) : e \in E, f \in F\}$ . Lorsque  $E \subseteq F$ , le complément de  $E$  dans  $F$ , noté  $E^C$ , est  $F \setminus E$ . Le complément est une opération unaire. Notons que, contrairement à l'union et l'intersection, la différence et le produit cartésien de deux ensembles ne sont pas commutatifs. Aussi, contrairement à la différence d'ensembles, l'union, l'intersection d'ensembles sont associatifs. D'une manière générale, le produit cartésien d'ensembles n'est pas associatif puisque les éléments de  $E \times (F \times G)$  sont des couples de la forme  $(e, (f, g))$  et ceux de  $(E \times F) \times G$  sont de la forme  $((e, f), g)$  pour des ensembles  $E, F, G$  et  $e \in E, f \in F, g \in G$ . Il l'est si un parmi  $E, F$  et  $G$  est vide. Toutefois, de la manière avec laquelle on définit le produit cartésien de  $n \in \mathbb{N}$  ensembles dans le paragraphe suivant, on fait en sorte que le produit cartésien soit associatif. Le couple d'ensembles non-vides  $(F, G)$  est une *partition* de l'ensemble non-vide  $E$  si  $F \cup G = E$  et  $F \cap G = \emptyset$ .

L'union, l'intersection et le produit cartésien de deux ensembles peuvent se généraliser à n'importe quel nombre  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , d'ensembles. Soient  $n \in \mathbb{N}$  ensembles  $E_1, \dots, E_n$ . L'union et l'intersection de tous ces ensembles, notées respectivement  $\cup_{i \in [n]} E_i$  et  $\cap_{i \in [n]} E_i$  correspondent respectivement à  $E_1 \cup \dots \cup E_n$  et  $E_1 \cap \dots \cap E_n$ . Le produit cartésien  $E_1 \times \dots \times E_n$ , noté  $\prod_{i \in [n]} E_i$ , est l'ensemble  $\{(e_1, \dots, e_n) : \text{pour tout } i \in [n], e_i \in E_i\}$ . Les éléments de  $E_1 \times \dots \times E_n$  sont appelés *n-uplets* ou *tuples*. Les 2-uplets sont aussi appelés *couples* ou *paires*. Soient  $E$  un ensemble et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit  $E^n$  par  $E^1 = E$  et  $E^{n+1} = E^n \times E = E \times E^n$ . Par convention,  $E^0 = \{()\}$ . Le tuple  $()$  est appelé le tuple vide. Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  un *n-uplet*. La projection de  $e$  sur sa  $i^{\text{ème}}$  composante est notée  $\pi_i(e)$ , soit  $\pi_i(e) = e_i$ . Par extension, quand  $E$  est un ensemble de *n-uplets*,  $\pi_i(E)$  est l'ensemble  $\{\pi_i(e) : e \in E\}$ .

On définit souvent un ensemble comme étant le plus petit ensemble satisfaisant une ou plusieurs propriétés particulières. Il s'agit de l'intersection de tous les ensembles satisfaisant la ou les propriétés citées.

Un *multiensemble* est une collection d'objets pas forcément distincts. En effet, contrairement aux ensembles, un élément d'un multiensemble peut apparaître plusieurs fois. Le nombre d'instances d'un élément dans un multiensemble est sa *multiplicité*. En conséquence, un ensemble est un multiensemble où tous les éléments sont de multiplicité 1.

### 1.1.2 Relations et fonctions

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles, pour  $n \in \mathbb{N}$ . Une *relation*  $R$  sur  $\prod_{i \in [n]} E_i$  est un sous-ensemble de  $\prod_{i \in [n]} E_i$ . Lorsque  $(x_1, \dots, x_n) \in R$ , on dit que  $x_1, \dots, x_n$  sont en relation  $R$ . Quand  $n = 2$  ( $R$  est une relation binaire) on note  $xRy$  pour

$(x, y) \in R$ . Notons que l'ordre d'apparition des éléments dans les tuples est important. En effet, étant donné une relation  $R$  sur  $E \times F$ ,  $x \in E$  et  $y \in F$ ,  $xRy$  n'implique par forcément que  $yRx$ . La relation  $R$  est *interne* si  $E_1 = \dots = E_n$ . Remarquons qu'une opération sur un ensemble  $E$  est une relation interne sur  $E$  sont des relations internes. Précisément, une opération d'arité  $n$  sur un ensemble  $E$  est une relation interne  $R$  sur  $E^{n+1}$  où pour chaque élément  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  de  $R$ ,  $x_1, \dots, x_n$  correspondent aux opérandes de l'opération et  $x_{n+1}$  est le résultat de l'opération. Comme les opérations d'arité 0, une relation sur  $\emptyset$  est appelée *constante*. Dans la suite, on s'intéresse surtout aux relations binaires. Lorsqu'on énonce que  $R$  est une relation sur  $E$  il faut comprendre que  $R$  est une relation  $E \times E$ .

Soit  $E$  un ensemble et soit  $R$  une relation sur  $E$ . On dit que  $R$  est :

- *réflexive* si, pour tout  $x \in E$ ,  $xRx$ ;
- *transitive* si, pour tout  $x, y, z \in E$ ,  $xRy$  et  $yRz$  implique  $xRz$ ;
- *symétrique* si, pour tout  $x, y \in E$ ,  $xRy$  implique  $yRx$ ;
- *antisymétrique* si, pour tout  $x, y \in E$ ,  $xRy$  et  $yRx$  implique  $x = y$ ;
- *asymétrique* si, pour tout  $x, y \in E$ , quand  $x \neq y$ , alors soit  $xRy$  ou bien  $yRx$  ou bien aucune des deux n'est vraie.

Une relation  $R$  sur  $E$  est une *relation d'ordre* si  $R$  est transitive et antisymétrique.

Soit  $R$  une relation d'ordre sur un ensemble  $E$  et soient  $x, y \in E$ . Si  $xRy$  ou  $yRx$  alors  $x$  et  $y$  sont dits *comparables*. Sinon  $x$  et  $y$  sont *incomparables*. La relation d'ordre  $R$  est dite *totale* si tous les éléments distincts de  $E$  sont deux à deux comparables. Sinon, elle est *partielle*. Une relation d'ordre est *stricte* si aucun élément n'est comparable avec lui même. Notons qu'une relation d'ordre stricte est une relation transitive et asymétrique. Les relations d'ordres sont souvent notées  $\leq$  quand elles ne sont pas strictes et  $<$  quand elles le sont. Ainsi, quand  $R$  est une relation d'ordre sur  $E$  et  $(x, y) \in R$ , on écrit  $x < y$  quand  $R$  est stricte et  $x \leq y$  sinon.

Une relation  $R$  sur  $E$  est une *relation d'équivalence* si  $R$  est réflexive, transitive et symétrique. Les relations d'équivalences sont souvent notées par  $\cong$ . Quand deux éléments  $x, y \in E$  sont en relation par une relation d'équivalence, on dit que  $x$  est *équivalent* à  $y$ . Lorsque  $\cong$  est une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ ,  $E$  peut être partitionné en *classes d'équivalences*. En effet, une *classe d'équivalence* de  $E$  est un sous-ensemble  $F$  de  $E$  tel que

- $x \cong y$ , pour tout  $x, y \in F$ ;
- il n'existe pas  $z \in E^C$  et  $x \in F$  tels que  $x \cong z$ .

De manière informelle, l'ensemble  $F$  est une classe d'équivalence si chaque élément de  $F$  est équivalent à tous les autres éléments de  $F$  et seulement les éléments de  $F$ . La classe d'équivalence de  $x \in E$ , notée  $C_x$  est l'ensemble des éléments de  $E$  équivalents à  $x$ . De manière plus formelle  $C_x = \{y \in E : x \cong y\}$ . On dénote par  $x/\cong$  n'importe quel élément de  $C_x$ . C'est un représentant de  $C_x$ . L'ensemble *quotient* de  $E$  par la relation d'équivalence  $\cong$ , noté  $E/\cong$ , est l'ensemble des classes d'équivalences de  $E$ .

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $g$  une relation sur  $E \times F$ . On dit que  $g$  est une *fonction* de  $E$  vers  $F$ , notée  $g : E \rightarrow F$ , si pour tout  $x \in E$  il existe au plus un seul  $y \in F$  tel que  $xRy$ . Dans ce cas,  $E$  est appelé l'*ensemble de*

départ ou *domaine* et  $F$  l'*ensemble d'arrivée* ou *codomaine* de  $g$ . D'autre part, si pour tout  $x \in E$  il existe exactement un seul  $y$  tel que  $xRy$ , la fonction  $g$  est dite *totale* aussi appelée *application*. Sinon la fonction  $g$  est dite *partielle*. Remarquons qu'une opération d'arité  $n \in \mathbb{N}$  sur  $E$  est une application de  $E^n$  vers  $E$ . Quand  $(x, y) \in g$ , l'élément  $x$  (resp.  $y$ ) est appelé l'*antécédent* (resp. l'*image*) de  $y$  (resp.  $x$ ) par  $g$ , et on écrit  $g(x) = y$ . On dit aussi que  $g$  *envoie*  $x$  vers  $y$ . Les antécédents d'une fonction sont aussi appelés *entrées* ou *arguments* de la fonction. L'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $g$  dans  $F$  est  $y$ , formellement  $\{x \in E : g(x) = y\}$ , est noté  $g^{-1}(y)$  et appelé l'*image réciproque* de  $y$  par  $g$  dans  $E$ . La *fonction réciproque* de  $g$ , notée  $g^{-1}$ , est définie par : pour tout  $x \in E$ , si  $g(x) = y$  alors  $g^{-1}(y) = x$ . Toutes les fonctions n'admettent pas forcément de fonctions réciproques. Les fonctions bijectives sont assurées d'en avoir. Les notions d'image et d'image réciproque d'éléments de  $E$  et  $F$  respectivement peuvent être étendues aux sous-ensembles de  $E$  et de  $F$ . Soient  $E' \subseteq E$  et  $F' \subseteq F$ . L'image de  $E'$  par  $g$  dans  $F$ , notée  $g(E')$ , est l'ensemble  $\{g(x) : x \in E'\}$ . L'image réciproque de  $F'$  par  $g$  dans  $E$ , noté  $g^{-1}(F')$ , est l'ensemble  $\{x \in E : g(x) \in F'\}$ .

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une fonction  $g : E \rightarrow F$  est dite :

- *injective* si  $g(x) = g(x')$  implique  $x = x'$ , ou de manière équivalente si  $x \neq x'$  implique  $g(x) \neq g(x')$ , pour tout  $x, x' \in E$ ;
- *surjective* si quelque soit  $y \in F$  il existe au moins un  $x \in E$  tel que  $g(x) = y$ ;
- *bijective* si  $g$  est en même temps injective et surjective.

Par conséquent, étant donnée une fonction bijective, tout élément de son ensemble de départ (resp. arrivée) est en relation avec exactement un élément de l'ensemble d'arrivée (resp. départ). Soient  $E, F, G$  des ensembles et soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux fonctions. La *composition* de  $f$  et  $g$ , notée  $g \circ f$ , est la fonction  $g \circ f : E \rightarrow G$  définie, pour tout  $x \in E$ , par  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

**Remarque 1.1.3.** Soit la relation  $\cong$  définie sur la classe des ensembles  $\mathcal{E}$  par :  $E \cong E'$  si et seulement s'il existe une fonction bijective de  $E$  vers  $E'$ , pour tout  $E, E' \in \mathcal{E}$ . Alors  $\cong$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{E}$ . En effet, tout ensemble est naturellement en bijection avec lui même (réflexivité). De plus, la transitivité s'obtient par une simple composition de fonctions bijectives. Enfin, la symétrie est aussi valable pour  $\cong$  puisque les fonctions bijectives admettent des fonctions réciproques bijectives.

Soient  $E, E'$  deux ensembles vérifiant  $E \subseteq E'$  et soient  $f : E \rightarrow F$  et  $f' : E' \rightarrow F$  deux fonctions. La fonction  $f'$  est la *restriction* de  $f$  sur  $E'$ , notée  $f|_{E'}$ , si  $f'(e') = f(e')$  pour tout  $e' \in E'$ . On dit alors que la fonction  $f$  étend (ou est une *extension* de)  $f'$ .

Maintenant que la notion de fonction est définie, on peut définir plus formellement la notion de multiensemble. Un *multiensemble* est un 2-uplet  $A = (E, m)$  où  $E$  est un ensemble et  $m : E \rightarrow \mathbb{N}$  une application qui associe à chaque élément de  $E$  sa multiplicité. On dit alors que le multiensemble  $A$  est sur l'ensemble  $E$ . Un multiensemble  $(E, m)$  avec  $m(e) = 1$  (resp.  $m(e) = 0$ ) pour tout  $e \in E$  est assimilable à un ensemble (resp. ensemble vide). Deux multiensembles  $A = (E, m)$  et  $B = (E', m')$   $A$  et  $B$  sont égaux si  $E = E'$  et pour tout  $e \in E$ ,  $m(e) = m'(e)$ , sinon ils sont différents. On note par  $\mathcal{M}(E)$  et  $\mathcal{M}^{>1}(E)$  respectivement l'en-

semble des multiensembles sur  $E$  et l'ensemble des multiensembles sur  $E$  ayant au moins deux éléments.

## 1.2 Cardinaux

Un ensemble  $E$  est *infini* s'il existe une bijection de  $E$  vers une partie propre de  $E$ . Sinon  $E$  est *fini*. Pour compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini on utilise les nombres finis usuels. Lorsqu'il s'agit d'un ensemble infini les nombres de  $\mathbb{N}$  ne suffisent plus. Dans un contexte où des ensembles infinis peuvent être manipulés, la taille des ensembles est décrite en termes de nombres cardinaux.

Les *nombres cardinaux* (ou simplement *cardinaux*) sont une généralisation des entiers naturels servant à mesurer la taille des ensembles. Le cardinal d'un ensemble  $E$  est noté  $|E|$ . Il est *infini* si ça n'est pas un entier.

Soient  $E$  et  $E'$  deux ensembles. Les ensembles  $E$  et  $E'$  sont de même cardinal, noté  $|E| = |E'|$ , s'il existe une fonction bijective  $f: E \rightarrow E'$ . Par conséquent, un cardinal peut être vu comme un représentant de la classe d'équivalence d'ensembles bijectifs (voir Remarque 1.1.3). La relation  $<$  sur l'ensemble des cardinaux définie, pour toute paire  $C$  et  $C'$  de cardinaux d'ensembles  $E$  et  $E'$ , par  $C < C'$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $C \neq C'$  ;
2. il existe une fonction injective de  $E$  vers  $E'$  ;

est une relation d'ordre totale et stricte.

Ce qui a amené à généraliser la notion de cardinal aux ensembles infinis est le bien connu théorème de Cantor qui dit ceci :

**Théorème 1.2.1** (Cantor). *Soit  $E$  un ensemble. Il n'existe pas de fonction bijective de  $E$  vers  $\mathcal{P}(E)$ .*

En d'autres termes, tout ensemble est de cardinal strictement plus petit que l'ensemble de ses parties. Cela montre que les ensembles infinis ne sont pas tous de même cardinalité. En fait, il existe une infinité de cardinaux infinis.

**Exemple 1.2.2.** *Soit  $E$  un ensemble infini. Par le Théorème 1.2.1, on sait que  $|E| \neq |\mathcal{P}(E)|$ . De plus, on peut prouver que  $|E| < |\mathcal{P}(E)|$ . En effet, il existe une fonction injective  $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définie par : pour tout  $e \in E$ ,  $f(e) = \{e\}$ .*

Le plus petit cardinal infini est le cardinal de l'ensemble des entiers naturels, noté  $\aleph_0$ . Tout ensemble  $E$  de cardinal inférieur ou égal à  $\aleph_0$  est dit *dénombrable*. Sinon  $E$  est *indénombrable*. Notons que si  $E$  est un ensemble dénombrable et que chaque  $e \in E$  est un ensemble dénombrable alors l'union  $\bigcup_{e \in E} e$  est un ensemble dénombrable. Le plus petit cardinal d'un ensemble indénombrable est noté  $\aleph_1$ .

**Exemple 1.2.3.** *Tout ensemble fini est dénombrable. Les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  sont des ensembles infinis dénombrables. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est infini à cause de la fonction  $f(x) = x+1$  de  $\mathbb{N}$  à  $\mathbb{N}^*$ , par exemple. Même constat pour  $\mathbb{Z}$  avec la fonction  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , par :*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Les ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont dénombrables pour les mêmes raisons. L'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est infini puisque  $\mathbb{N}$  est infini. En définissant une bijection de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$ , appelée « fonction de couplage », Cantor a prouvé que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est dénombrable. Par conséquent, les ensembles  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$  des nombres à développement décimal fini et des nombres rationnels sont aussi infinis et dénombrables. La raison est que les éléments de ces ensembles s'écrivent tous comme une fraction d'un couple de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .

## 1.3 Ordres

Cette section est dédiée aux ordres. Nous y présentons les notions d'ordres linéaires et les ordres partiels qui seront utiles pour la suite. Nous invitons le lecteur intéressé par le sujet à consulter le livre de Rosenstein [76] entièrement consacré aux ordres linéaires.

### 1.3.1 Définitions

Un *ordre* (ou *ensemble ordonné*)  $(E, R)$  est un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $R$ . Il est *dénombrable* si  $E$  est dénombrable. L'ordre  $(E, R)$  est *total* (resp. *partiel*) si  $R$  est une relation d'ordre totale (resp. partielle). L'ensemble  $E$  est alors *totalelement ordonné* (*partiellement ordonné*). Souvent, on confond l'ordre  $(E, R)$  et son ensemble  $E$  en disant « l'ordre total (resp. partiel)  $E$  » lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté. Le cas échéant, il faut comprendre « l'ordre total (resp. partiel)  $(E, R)$  » ou de manière équivalente « l'ensemble  $E$  muni de la relation d'ordre totale (resp. partielle)  $R$  ».

Soit  $(E, R)$  un ordre. Un élément  $m \in E$  est un *plus petit élément* (ou *minimum*) de  $E$ , s'il n'existe pas  $x \in E$  tel que  $x \neq m$  et  $xRm$ . De façon similaire,  $m$  est un *plus grand élément* (ou *maximum*) de  $E$  s'il n'existe pas  $x \in E$  tel que  $x \neq m$  et  $mRx$ . Notons que les ordres totaux admettent au plus un minimum et au plus un maximum. Ce n'est pas le cas des ordres partiels qui peuvent avoir plusieurs minimums et maximums. Selon la nature de l'ordre, on note  $\min(E)$  (resp.  $\max(E)$ ) le minimum (resp. maximum) ou l'ensemble des minimums (resp. maximums) de l'ordre  $(E, R)$ . Un élément  $y \in E$  est *successeur* d'un élément  $x \in E$  si  $xRy$  et il n'existe pas d'élément  $z \in E$  tel que  $xRz$  et  $zRy$ . Dans ce cas  $x$  est *prédécesseur* de  $y$  et  $x$  et  $y$  sont dits *consécutifs*.

Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ordres. L'ordre  $(E', R')$  est un *sous-ordre* de  $(E, R)$  si  $E' \subseteq E$  et pour tout  $x, y \in E'$ ,  $xR'y$  si et seulement si  $xRy$ . Dans ce cas, remarquons que  $R' = R \cap E' \times E'$ . Notons qu'un élément  $x \in E$  a un prédécesseur (resp. successeur) si le sous-ordre  $\{y \in E : yRx, y \neq x\}$  (resp.  $\{y \in E : xRy, y \neq x\}$ ) a un maximum (resp. minimum). L'ordre  $(E', R')$  est un *intervalle* de  $(E, R)$  si  $(E', R')$  est un sous-ordre de  $(E, R)$  tel que, pour tout  $e'_1, e'_2 \in E'$  et  $e \in E$ , si  $e'_1Re$  et  $eRe'_2$  alors  $e \in E'$ . L'intervalle est *initial* (resp. *final*) s'il n'existe aucun élément  $e \in E \setminus E'$  tel que  $eRe'$  (resp.  $e'Re$ ) et  $e' \in E'$ .

Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ordres tels que  $(E', R')$  est un sous-ordre de  $(E, R)$ . Un élément  $x \in E$  est une *borne inférieure* de  $E'$  dans  $E$  si  $xRe'$  pour tout  $e' \in E'$ . L'élément  $x$  est une *plus grande borne inférieure* de  $E'$  si  $x$  est une borne inférieure de  $E'$  et pour toute autre borne inférieure  $y$  de  $E'$ ,  $yRx$  ou  $y$  est incomparable avec  $x$ . Similairement, un élément  $x \in E$  est une *borne supérieure* de  $E'$  dans  $E$  si  $e'Rx$  pour tout  $e' \in E'$ . L'élément  $x$  est une *plus*

*petite* borne supérieure de  $E'$  si  $x$  est une borne supérieure de  $E'$  et, pour toute autre borne supérieure  $y$  de  $E'$ ,  $xRy$  ou  $y$  est incomparable avec  $x$ . Comme pour les maximums et les minimums, contrairement aux ordres totaux, les sous-ordres d'un ordre partiel peuvent avoir plusieurs bornes inférieures et supérieures comme ils peuvent ne pas en avoir du tout.

Selon la nature de l'ordre, on note  $\inf(E)$  (resp.  $\sup(E)$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) ou l'ensemble des bornes inférieures (resp. supérieures) de l'ordre  $(E', R)$  dans  $(E, R)$ .

Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux ordres. Une fonction  $f: E \rightarrow E'$  préservant l'ordre est une fonction injective satisfaisant la propriété suivante :

$$\text{pour tout } x, y \in E, xRy \text{ implique } f(x)R'f(y)$$

Les ordres  $E$  et  $E'$  sont *isomorphes*, noté  $E \simeq E'$ , s'il existe une fonction bijective  $f: E \rightarrow E'$  préservant l'ordre telle que

$$\text{pour tout } x, y \in E, xRy \text{ si et seulement si } f(x)R'f(y)$$

**Remarque 1.3.1.** *L'isomorphisme d'ordres est une relation d'équivalence sur la classe des ordres. En effet, tout ordre est isomorphe à lui même (réflexivité). De plus, pour tout ordres  $E, E'$  et  $E''$  tels que  $E$  est isomorphe à  $E'$  et  $E'$  est isomorphe à  $E''$ , on peut prouver que  $E$  et  $E''$  sont isomorphes (transitivité). La fonction  $f: E \rightarrow E''$  préservant l'ordre est la composée des deux fonctions préservant l'ordre entre  $E$  et  $E'$  et entre  $E'$  et  $E''$ . Enfin, la symétrie est vérifiée puisque les fonctions préservant l'ordre sont bijectives.*

Les notions présentées ci-dessus valent pour tous les ordres. La suite de la section est exclusivement dédiée aux ordres linéaires. On reviendra plus en détails sur les ordres partiels dans la Section 1.4.

### 1.3.2 Ordres linéaires

Un ordre  $(E, R)$  est un *ordre linéaire* si  $R$  est une relation d'ordre totale et stricte. L'ensemble  $E$  est alors dit *linéairement ordonné*. Enfin, l'ordre linéaire  $(E, R)$  est un *bon ordre* si tout sous-ordre non vide de  $(E, R)$  a un minimum.

**Exemple 1.3.2.** *Soient  $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$  et  $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$  respectivement l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers relatifs munis de leurs relations d'ordres strictes habituelles. Alors  $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$  et  $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$  sont des ordres linéaires. En particulier  $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$  est un bon ordre mais pas  $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ .*

Lorsqu'un ordre linéaire  $J$  non vide n'a pas de minimum (resp. maximum) on dit que  $J$  est *limite à gauche* (resp. *limite à droite*). Le *type d'ordre* d'un ordre linéaire  $J$  est un représentant de la classe d'équivalence  $C_J$  pour l'isomorphisme d'ordres linéaires. Le type d'ordre de tout ordre linéaire isomorphe à l'ordre linéaire  $\{1, \dots, n\}$  est noté  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La classe des types d'ordre linéaires finis est notée  $\mathcal{N}$ . Les types d'ordre de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  munis de leurs relations d'ordres strictes habituelles sont notés respectivement  $\omega$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$ . Les *ordinaux* sont les types d'ordre des bons ordres. On reviendra plus en détails sur les ordinaux dans la Sous-section 1.3.4.

Soient  $E$  un ensemble,  $(J, <_J)$  un ordre linéaire, et pour tout  $j \in J$ , soit  $e_j$  un élément de  $E$ . La suite  $(e_j)_{j \in J}$  est appelé *suite linéairement ordonnée*

d'éléments de  $E$ . On parlera aussi d'une suite indicée par l'ordre linéaire  $J$ . L'ordre linéaire  $J$  est appelé aussi la *longueur* de la suite ou son *support*. La suite  $(e_j)_{j \in J}$  peut être considérée comme une application de  $f: J \rightarrow E$ .

Les ordres linéaires sont appelés ainsi parce que leurs éléments sont ordonnés de façon à pouvoir les placer le long d'une ligne de gauche à droite sans ambiguïté. La non-ambiguïté du placement des éléments d'un ordre linéaire  $J$  est due notamment à l'asymétrie de la relation d'ordre stricte  $<$  avec laquelle  $J$  est équipé. En effet, un élément  $y \in J$  est à droite d'un élément  $x \in J$  si et seulement si  $x < y$ . Les éléments d'un ordre linéaire sont représentés par des «  $\bullet$  ». Une infinité d'éléments est représentée par trois petits points consécutifs «  $\dots$  » (voir Figure 1.1).

**Exemple 1.3.3.** Soient  $\mathbb{N}_1$  et  $\mathbb{Z}_1$  les sous-ensembles de respectivement  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  des entiers non divisibles par 2 et soient  $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N}_1^C$  et  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_1^C$  tous munis de leurs relations d'ordres strictes habituelles des entiers. Ces ordres linéaires sont tous représentés dans la Figure 1.1. Remarquons que  $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$  sont des sous-ordres de l'ordre linéaire  $\mathbb{N}$ . Le même constat est établi pour  $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2$  avec l'ordre linéaire  $\mathbb{Z}$ . Dans le même temps,  $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$  et  $\mathbb{N}$  sont tous les trois isomorphes. En effet la bijection  $f: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_2$ , définie par  $f(x) = x - 1$ , préserve l'ordre. De même pour les bijections  $f_1: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}$  et  $f_2: \mathbb{N}_2 \rightarrow \mathbb{N}$  définies respectivement par  $f_1(x) = \frac{x-1}{2}$  et  $f_2(x) = \frac{x}{2}$ . De la même manière,  $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2$  et  $\mathbb{Z}$  sont tous les trois isomorphes. Par conséquent  $\mathbb{N}_1$  et  $\mathbb{N}_2$  sont de type d'ordre  $\omega$ , et  $\mathbb{Z}_1$  et  $\mathbb{Z}_2$  sont de type d'ordre  $\zeta$ . Remarquons que  $\omega$  est limite à droite et  $\zeta$  limite à gauche et à droite.

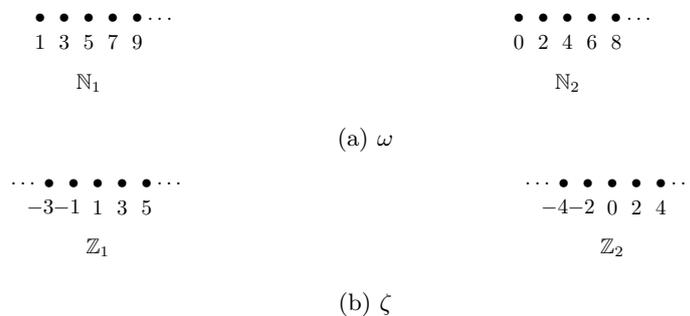


FIGURE 1.1 – Des ordres linéaires ayant comme types d'ordre  $\omega$  et  $\zeta$

Les ordres linéaires que nous utilisons par la suite sont définis à isomorphisme près. En effet, quand un ordre linéaire est utilisé, on suppose que c'est le représentant de sa classe d'équivalence (le type d'ordre).

### 1.3.3 Opérations sur les ordres linéaires

Soient  $I$  et  $J$  deux ensembles disjoints munis des relations d'ordres strictes  $<_I$  et  $<_J$  respectivement. Le *miroir* (ou l'inverse) de l'ordre linéaire  $I$ , noté  $-I$ , est l'ordre linéaire  $(I, <)$ , où  $<$  est défini par : pour tout  $x, y \in J$ ,  $x < y$  si et seulement si  $y <_I x$ . Remarquons que  $-(-I) = I$ . Aussi, quand  $I$  est un ordre linéaire fini  $-I \simeq I$ .

La *somme binaire* des ordres linéaires  $I$  et  $J$ , notée  $I + J$ , est l'ordre linéaire  $(I \cup J, <)$  défini par : pour tout  $x, y \in I \cup J$ ,  $x < y$  si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1.  $x \in I$  et  $y \in J$  ;
2.  $x, y \in I$  et  $x <_I y$  ;
3.  $x, y \in J$  et  $x <_J y$ .

De manière informelle  $I + J$  consiste à mettre les éléments de  $J$  à droite de ceux de  $I$  de façon à ce que les éléments de  $I$  et de  $J$  gardent leurs ordres de départ et que les éléments de  $J$  soient tous supérieurs à ceux de  $I$ . Notons que la somme binaire d'ordres linéaires est une opération associative. Par contre, elle n'est pas commutative.

**Exemple 1.3.4.** Remarquons que  $-\zeta = \zeta$ . D'ailleurs  $\zeta$  est isomorphe à  $-\omega + \omega$ . Remarquons aussi que  $-\omega + \omega \neq \omega + -\omega$ . En effet,  $-\omega + \omega$  est limite à gauche et à droite, contrairement à  $\omega + -\omega$  qui a un minimum et un maximum.

La somme binaire d'ordres linéaires peut s'étendre à une somme prenant comme argument une suite d'ordres linéaires. Soit  $(J, <_J)$  un ordre linéaire et pour tout  $j \in J$  soit  $(I_j, <_j)$  un ordre linéaire, où tous les  $I_j$  sont disjoints. La *somme indicée par  $J$*  (ou  *$J$ -somme*)  $\sum_{j \in J} I_j$  est l'ordre linéaire  $(K, <)$ , où  $K = \cup_{j \in J} I_j$ , muni de  $<$  défini par : pour tout  $x, y \in K$ ,  $x < y$  si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1. il existe  $j \in J$  tel que  $x, y \in I_j$  et  $x <_j y$  ;
2. il existe  $j, j' \in J$  tels que  $j <_J j'$  et  $x \in I_j$  et  $y \in I_{j'}$ .

De manière informelle, cela correspond à dérouler les éléments de  $J$  le long d'une ligne et à remplacer tout élément  $j \in J$  par  $I_j$ . Lorsque les ordres linéaires  $I_j$  sont tous isomorphes à un ordre linéaire  $I$  alors  $\sum_{j \in J} I_j$  est appelé le *produit* de  $J$  copies de  $I$ , noté  $I \cdot J$ . Enfin, pour tout ordinal  $\alpha$ , on dénote par  $I^\alpha$  l'ordre linéaire  $\underbrace{I \cdot I \cdot I \cdots}_{\alpha \text{ fois}}$ .

**Exemple 1.3.5.** Dans la Figure 1.2 est représenté l'ordre linéaire  $-\omega \cdot -\omega = -\omega^2$ . Cet ordre linéaire peut être écrit aussi  $\sum_{j \in -\omega} I_j$  où chaque  $I_j$  est isomorphe à  $-\omega$ . Il s'agit de dérouler  $-\omega$  et de remplacer chacun de ses éléments par  $-\omega$ . Dans la Figure 1.3 et la Figure 1.4 sont respectivement représentés les

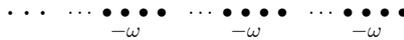
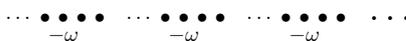


FIGURE 1.2 – L'ordre linéaire représentant  $-\omega^2$

ordres linéaires  $\omega \cdot -\omega$  et  $-\omega \cdot \omega$ . Remarquons que  $\omega \cdot -\omega \neq -\omega \cdot \omega$ .



FIGURE 1.3 – L'ordre linéaire représentant  $\omega \cdot -\omega$

FIGURE 1.4 – L'ordre linéaire représentant  $-\omega \cdot \omega$ 

### 1.3.4 Ordinaux

Rappelons que l'isomorphisme d'ordres linéaires est une relation d'équivalence sur la classe des ordres linéaires (voir Remarque 1.3.1). Rappelons aussi qu'un bon ordre est un ordre linéaire dont tout sous-ordre non vide admet un minimum. Alors  $E''$  est un *ordinal*. Le théorème suivant décrit une relation entre les bons ordres.

**Théorème 1.3.6.** (voir [76, Théorème 3.9] par exemple) Soient  $(E, R)$  et  $(E', R')$  deux bons ordres. Alors, exactement une des assertions suivantes est vraie :

1.  $(E, R) \simeq (E', R')$  ;
2.  $(E, R)$  est isomorphe à un intervalle initial de  $(E', R')$  ;
3.  $(E', R')$  est isomorphe à un intervalle initial de  $(E, R)$ .

Un *ordinal* est un représentant d'une classe d'équivalence de la classe des bons ordres pour la relation d'isomorphisme d'ordres linéaires. Les ordinaux sont une sous-classe de la classe des ordres linéaires. Cette classe est notée  $Ord$ . Elle est aussi bien ordonnée. En effet, la classe  $Ord$  munie de  $<$  défini, pour tout  $\alpha, \beta \in Ord$ , par  $\alpha < \beta$  si et seulement si  $\alpha$  est isomorphe à un intervalle initial de  $\beta$ , est un bon ordre. La classe des ordinaux dénombrables est notée  $\mathcal{O}$ . On a  $\mathcal{N} \subset \mathcal{O} \subset Ord$ .

Un ordinal  $\alpha$  est *successeur* s'il admet un maximum. Dit autrement, s'il existe  $\beta \in Ord$  tel que  $\alpha \simeq \beta + 1$ . Un ordinal qui n'est pas successeur est *limite*. Les ordinaux limites sont des ordres linéaires limites à droite. L'ordinal 0 est limite. Notons que tout ordinal successeur a un prédécesseur dans  $Ord$ .

Les ordinaux sont très utilisés en mathématiques. Ils permettent, en particulier, d'énoncer des définitions ou de faire des démonstrations grâce au principe d'*induction*.

Soit  $O$  un intervalle de  $Ord$  et soit  $I$  un intervalle initial de  $O$ . Une *définition inductive* sur  $O$  permet de définir étape par étape un ensemble d'objets mathématiques  $E$  en fonction d'autres objets mathématiques du même ensemble  $E$ . À chaque objet est associé un unique ordinal  $\alpha \in O$  qu'on appelle son *rang*. Les éléments de  $E$  ayant comme rang un ordinal de  $I$  sont définis indépendamment des autres éléments de  $E$ . C'est le cas de base de la définition inductive. Tout élément de  $E$  ayant comme rang  $\alpha \in O \setminus I$  est défini en fonction d'autres éléments de  $E$  de rangs plus petits que  $\alpha$ , qui sont eux mêmes définis en fonction d'autres éléments de  $E$  de rangs encore plus petits, etc. L'importance cruciale de l'utilisation des ordinaux est le fait que ce processus décroissant s'arrête forcément. En effet, il n'existe pas de suite infiniment décroissante d'ordinaux. Dans ce cas, on dit que la définition est *bien fondée*.

Sur le même principe, une *preuve par induction transfinie* consiste à prouver qu'une propriété  $P$  portant sur un intervalle  $O$  de  $Ord$  est vraie, en prouvant

qu'elle est vraie pour tout ordinal de  $O$ . Cela peut se faire de deux manières différentes mais équivalentes.

1. *L'induction forte*, qui consiste à vérifier que supposer que  $P$  est vérifiée pour tout ordinal  $\beta \in O$  tel que  $\beta < \alpha$  implique que  $P$  est vérifiée pour  $\alpha$ , pour tout  $\alpha \in O$ ;
2. *L'induction faible*, qui consiste à :
  - vérifier que  $P$  est vérifiée pour les cas de base;
  - vérifier que, pour tout ordinal successeur  $\alpha$ , supposer que  $P$  est vérifiée pour son prédécesseur implique que  $P$  est vérifiée pour  $\alpha$ ;
  - vérifier que, pour tout ordinal limite  $\alpha$ , supposer que  $P$  est vérifiée pour tout ordinal plus petit que  $\alpha$  implique que  $P$  est vérifiée pour  $\alpha$ .

Si la vérification est fructueuse, on peut conclure que la propriété  $P$  est vraie pour tout ordinal de  $O$ . Les définitions ou preuves par induction transfinitive généralisent les notions de définitions et démonstrations par récurrence sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ .

Tout ordinal  $\alpha$  peut aussi être représenté par l'ensemble des ordinaux plus petits que  $\alpha$ . Cette définition est attribuée à John von Neumann. Le plus petit ordinal, noté  $0$ , est le représentant de la classe d'équivalence du bon ordre vide. Cette classe d'équivalence ne contient d'ailleurs qu'un seul élément :  $\emptyset$ . L'ordinal qui suit  $0$  est un représentant de la classe d'équivalence des singletons bien ordonnés, noté  $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$ . Ensuite vient le représentant de la classe d'équivalence des ensembles bien ordonnés à deux éléments, noté  $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , et ainsi de suite, pour tous les ordinaux de  $Ord$ . De manière générale, dans le contexte des ordinaux finis,  $n \in \mathbb{N}$  dénote l'ordinal représentant la classe d'équivalence des bons ordres à  $n$  éléments. Le premier ordinal infini est  $\omega$ , représenté comme l'ensemble des ordinaux finis. Dans le cadre de la définition à la Von Neumann des ordinaux on a le théorème suivant :

**Théorème 1.3.7.** *Soit  $\alpha, \beta \in Ord$ . Les écritures suivantes sont équivalentes :*

1.  $\alpha < \beta$ ;
2.  $\alpha \in \beta$ ;
3.  $\alpha \subset \beta$ ;
4.  $\alpha \neq \beta$  et  $\alpha$  est un intervalle initial de  $\beta$ .

En plus des opérations sur les ordres linéaires définies dans la sous-section précédente, nous définissons l'opération d'exponentiation sur les ordinaux. Soit  $\alpha$  un ordinal limite et soit  $(\beta_i)_{i \in \alpha}$  une suite strictement croissante d'ordinaux. On dénote par  $\lim((\beta_i)_{i \in \alpha})$  le plus petit ordinal qui est plus grand de chacun des  $\beta_i$ . Ainsi, étant donné un ordinal  $\beta$ , on définit  $\beta^\alpha$  par induction sur  $\alpha$  comme suit :

$$\begin{aligned} \beta^0 &= 1 \\ \beta^{\alpha+1} &= \beta^\alpha \cdot \beta \\ \beta^\alpha &= \lim((\beta^{\alpha'})_{\alpha' \in \alpha}) \text{ quand } \alpha \text{ est limite et différent de } 0 \end{aligned}$$

L'un des théorèmes fondamentaux sur les ordinaux attribue une *forme normale* à tout ordinal :

**Théorème 1.3.8** (Cantor). *Tout ordinal  $\alpha \in \text{Ord}$  peut s'écrire de la manière suivante :*

$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$$

de façon unique, où  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont des ordinaux tels que  $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$  et  $k \in \mathbb{N}$  et  $n_1, \dots, n_k$  des ordinaux finis différents de 0.

### 1.3.5 Ordres linéaires dispersés

Un ordre linéaire  $J$  est *dense* si, pour tout  $x, z \in J$  tels que  $x < z$  il existe  $y \in J$  tel que  $x < y < z$ . En conséquence, l'ordre linéaire vide et celui contenant un seul élément sont des ordres linéaires denses. L'ordre linéaire  $J$  est *dispersé* si aucun de ses sous-ordres infinis n'est dense.

**Exemple 1.3.9.** *Les ordres linéaires de type d'ordre  $\eta$  sont denses. L'un des ordres linéaires de type d'ordre  $\eta$  est l'ensemble  $\mathbb{Q}$  muni de sa relation d'ordre stricte habituelle. En effet, entre chaque paire d'éléments  $x, z \in \mathbb{Q}$  tels que  $x < z$ , on peut trouver un autre élément  $y \in \mathbb{Q}$  tels que  $x < y < z$ . Par exemple, entre  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$ , il y a  $\frac{2}{5}$ . Ensuite, entre  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{5}$  il y a  $\frac{7}{20}$ , etc.*

Les ordres linéaires dispersés sont des ordres linéaires finis ou des ordres linéaires infinis qui n'ont pas de sous-ordre isomorphe à  $\eta$ .

Plutôt que de les définir en disant ce qu'ils ne sont pas, Felix Hausdorff a proposé une caractérisation intéressante de la classe  $\mathcal{S}$  des ordres linéaires dénombrables dispersés. En effet, il en donne une définition inductive, sur la classe des ordinaux  $\mathcal{O}$ . Les cas de base de la construction sont les ordres linéaires finis 0 et 1. Ensuite, pour chaque ordinal  $\alpha \in \mathcal{O}$ , on construit des classes d'ordres linéaires à partir des classes construites aux étapes précédentes (prédécesseurs de  $\alpha$ ) en utilisant des sommes indicées par ordres linéaires finis,  $\omega$ ,  $-\omega$  ou  $\zeta$ .

**Définition 1.3.10.** *Pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ , soit  $V_\alpha$  la classe des ordres linéaires définie inductivement comme ceci :*

$$V_0 = \{0, 1\}$$

$$V_\alpha = \left\{ \sum_{j \in J} I_j : J \in \mathcal{N} \cup \{\zeta, \omega, -\omega\}, I_j \in \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right\}$$

Notons, en particulier, que puisque l'union dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable, les sommes utilisées dans la Définition 1.3.10 donnent comme résultats des ordres linéaires dénombrables. Felix Hausdorff prouve le théorème suivant :

**Théorème 1.3.11** ([51]).  $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} V_\alpha$ .

Comme conséquence du Théorème 1.3.11, la classe des ordres linéaires dénombrables et dispersés est fermée par les  $J$ -sommés, où  $J \in \mathcal{N} \cup \{\omega, -\omega, \zeta\}$ . De plus, puisque  $1 \in \mathcal{N}$ , pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $\bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \subset V_\alpha$ .

La construction de la Définition 1.3.10 est intéressante notamment parce qu'elle associe à chaque ordre linéaire  $J$  un ordinal unique  $\alpha \in \mathcal{O}$  appelé le rang de  $J$ . Néanmoins, cette construction peut être raffinée de manière à donner plus

d'intuition au lecteur sur la notion de rang d'un ordre linéaire de  $\mathcal{S}$ . En effet, puisque  $\zeta \simeq -\omega + \omega$ , on peut se passer des  $\zeta$ -sommations. On isole aussi les sommes finies dans une classe à part. Formellement :

**Définition 1.3.12.** *Pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ , soient  $U_\alpha$  et  $Z_\alpha$  les classes d'ordres linéaires définies inductivement comme ceci :*

$$\begin{aligned} U_0 &= \{0, 1\} \\ Z_\alpha &= \left\{ \sum_{j \in J} I_j : J \in \mathcal{N}, I_j \in U_\alpha \right\} \\ U_\alpha &= \left\{ \sum_{j \in J} I_j : J \in \{\omega, -\omega\}, I_j \in \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta \right\} \cup \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.13.** *Pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ , les assertions suivantes sont vraies :*

1.  $U_\alpha \subset Z_\alpha \subset U_{\alpha+1}$  ;
2.  $U_\alpha \subseteq V_\alpha$  ;
3.  $V_\alpha \subset Z_\alpha \subset V_{\alpha+1}$ .

*Démonstration.* La première assertion  $U_\alpha \subset Z_\alpha$  vient du fait que  $1 \in \mathcal{N}$ . De plus on sait que  $Z_\alpha \subset U_{\alpha+1}$  par définition de  $U_{\alpha+1}$ .

La deuxième assertion peut être obtenue par induction sur  $\alpha$ . Par définition,  $U_0 = V_0$ . Supposons maintenant que  $\alpha > 0$  et soit  $I \in U_\alpha$ . Par définition de  $U_\alpha$ , on sait que soit  $I \in \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta$  ou  $I$  est de la forme  $\sum_{j \in J} I_j$  où  $J \in \{\omega, -\omega\}$  et chaque  $I_j \in \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta$ . Le premier cas est trivial. Dans le deuxième cas chaque  $I_j = \sum_{k \in t_j} I_{j,k}$ , pour  $t_j \in \mathcal{N}$ , tel que chaque  $I_{j,k} \in \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta$ . Par hypothèse d'induction chaque  $I_{j,k} \in \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ . Si  $J = 1$  alors  $I = \sum_{k \in t_1} I_{1,k}$  qui est clairement dans  $V_\alpha$ . Si  $J = \omega$  alors

$$I = (I_{0,0} + \dots + I_{0,t_0-1}) + (I_{1,0} + \dots + I_{1,t_1-1}) + \dots + (I_{i,0} + \dots + I_{i,t_i-1}) + \dots$$

qui peut être réécrit comme une  $\omega$ -somme d'éléments de  $\bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$  :

$$I = I_{0,0} + I_{0,1} + \dots + I_{0,t_0-1} + I_{1,0} + \dots$$

Donc  $I \in V_\alpha$ . Le raisonnement est symétrique au cas précédent quand  $J = -\omega$ .

Turnons nous vers la troisième assertion. On commence par prouver que pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $V_\alpha \subset Z_\alpha$ . On procède par induction sur  $\alpha$ . Si  $\alpha = 0$  alors clairement  $V_0 \subset Z_0$ . De plus, remarquons que  $Z_0 = \mathcal{N}$  et  $V_1 = \mathcal{N} \cup \{\omega, -\omega, \zeta\}$ . Alors  $Z_0 \subset V_1$ . Cela prouve le cas de base. Supposons maintenant que  $\alpha > 0$  et soit  $I \in V_\alpha$ . Alors  $I = \sum_{j \in J} I_j$  où  $J \in \mathcal{N} \cup \{\omega, -\omega, \zeta\}$  et pour tout  $j \in J$ ,  $I_j \in \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ . Par hypothèse d'induction, chaque  $I_j \in \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta$ . Par définition de  $U_\alpha$ ,  $\bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta \subset U_\alpha$ . De plus,  $I \in U_\alpha$  quand  $J \in \{\omega, -\omega\}$ . Donc, comme conséquence de la première assertion et par définition de  $Z_\alpha$ ,  $I \in Z_\alpha$  quand  $J \in \mathcal{N} \cup \{\omega, -\omega\}$ . Maintenant, si  $J = \zeta$  alors  $I = \sum_{j \in -\omega} I_j + \sum_{j \in \omega} I_j$  puisque  $\zeta \simeq -\omega + \omega$ . On sait que  $K_1 = \sum_{j \in -\omega} I_j$  et  $K_2 = \sum_{j \in \omega} I_j$  sont dans  $U_\alpha$ . Alors, par définition de  $Z_\alpha$ ,  $I = \sum_{j \in 2} K_j \in Z_\alpha$  puisque  $2 \in \mathcal{N}$ . Cela prouve que  $V_\alpha \subset Z_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ . En outre, dû notamment au cas de base, l'inclusion est stricte. La preuve que pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $Z_\alpha \subset V_{\alpha+1}$  peut être déduite par transitivité des deux premières assertions.  $\square$

Par conséquent, on peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.14.**  $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} Z_\alpha$ .

Grâce à ce raffinement, on peut mieux visualiser la notion de *rang* d'un ordre linéaire  $I \in \mathcal{S}$ . Il s'agit du nombre ordinal maximal d'imbrications des  $\omega$ -sommets et  $-\omega$ -sommets lors de la construction de  $I$ .

**Définition 1.3.15.** Soit  $I \in \mathcal{S}$ . Le *rang* de  $I$ , noté  $r(I)$ , est le plus petit ordinal  $\alpha \in \mathcal{O}$  tel que  $I \in Z_\alpha$ .

Cette notion est très utile. Elle permet de prouver des propriétés sur les ordres linéaires de  $\mathcal{S}$  par induction.

**Exemple 1.3.16.** Les ordres linéaires finis sont de rang 0. Leurs constructions n'utilisent aucune  $\omega$ -somme ou  $-\omega$ -somme. C'est les seuls qui appartiennent à  $Z_0$ . Les ordres linéaires  $\omega$  et  $-\omega$  sont de rang 1. Ils sont construits dans  $U_1$  en utilisant respectivement une  $\omega$ -somme et une  $-\omega$ -somme d'ordres linéaires finis de  $Z_0$ . L'ordre linéaire  $\zeta$  est également de rang 1. Il est construit dans  $Z_1$  en utilisant une 2-somme (somme binaire) d'ordres linéaires isomorphes à  $-\omega$  et  $\omega$ . L'ordre linéaire  $-\omega^2$  représenté dans la Figure 1.2 est de rang 2. Il est construit dans  $U_2$  en utilisant une  $-\omega$ -somme d'ordres linéaires tous isomorphes à  $-\omega$ . De manière générale, pour tout ordinal  $\alpha$ ,  $-\omega^\alpha$ ,  $\omega^\alpha$  et  $\zeta^\alpha$  sont de rang  $\alpha$ . Enfin, l'ordre linéaire  $-\omega^\alpha + \omega^{\alpha+1}$ ,  $\alpha \in \mathcal{O}$ , est de rang  $\alpha + 1$ .

### 1.3.6 Coupures

Soit  $I$  un ordre linéaire. Une *coupure de Dedekind* (ou simplement *coupure*) de  $I$  est un couple  $(J, K)$  d'intervalles disjoints de  $I$  tels que  $J \cup K = I$  et les éléments de  $J$  sont tous inférieurs aux éléments de  $K$ . Une coupure  $(J, K)$  de  $I$  est une *fosse* dans  $I$  si  $J$  et  $K$  ne sont pas vides,  $J$  n'a pas de maximum et  $K$  n'a pas de minimum. L'ensemble des coupures de  $I$  est noté  $\hat{I}$ . Un ordre linéaire est *complet* s'il n'a pas de fosse. Les coupures d'un ordre linéaire peuvent aussi être linéairement ordonnées. En effet, la relation  $<$  sur  $\hat{I}$ , définie par :  $(I_1, J_1) < (I_2, J_2)$  si et seulement si  $I_1 \subset J_2$ , pour tout  $(I_1, J_1), (I_2, J_2) \in \hat{I}$ , est une relation d'ordre totale et stricte sur  $\hat{I}$ . Notons que, pour toutes coupures  $(I_1, J_1), (I_2, J_2) \in \hat{I}$ , lorsque  $(I_1, J_1) < (I_2, J_2)$  l'inclusion  $J_2 \subset J_1$  est vraie aussi. L'ordre linéaire  $\hat{I}$  admet un minimum et un maximum. Il s'agit en l'occurrence de  $(I, \emptyset)$  et  $(\emptyset, I)$  respectivement. L'ensemble  $\hat{I}^*$  est par définition  $\hat{I} \setminus \{(I, \emptyset), (\emptyset, I)\}$ .

**Exemple 1.3.17.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ordre linéaire  $\hat{I}$  où  $I = \{0, \dots, n-1\}$  ordonné de la manière suivante :  $0 < \dots < n-1$ , est

$$\{(\emptyset, I), (\{0\}, \{1, \dots, n-1\}), \dots, (\{0, \dots, n-2\}, \{n-1\}), (I, \emptyset)\}$$

Remarquons que  $I$  est isomorphe à l'ordinal  $n$  et que  $\hat{I}$  est formé de couples d'ordinaux. Par conséquent, pour tout ordinal fini  $n$ , l'ordre linéaire  $\hat{n}$  est isomorphe à

$$\{(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n-2, 2), (n-1, 1), (n, 0)\}$$

qui est lui même isomorphe à l'ordinal  $n+1$ . Cela vaut d'ailleurs pour tous les ordinaux. L'ordre linéaire des coupures de tout ordinal  $\alpha$  est isomorphe à  $\alpha+1$ .

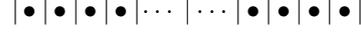


FIGURE 1.5 – L'ordre linéaire représentant  $I \cup \hat{I}$  où  $I = \omega + -\omega$ . Chaque coupure est représentée par «  $|$  »

L'ordre linéaire  $\hat{\omega}$  contient les coupures  $(\emptyset, \omega)$ ,  $(\{0, \dots, n\}, \{n+1, \dots\})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $(\omega, \emptyset)$ . Il est isomorphe à l'ordinal  $\omega + 1$ . L'ordre linéaire des coupures de  $-\omega$  est isomorphe à  $1 + -\omega$ .

Naturellement, l'union  $I \cup \hat{I}$  de l'ensemble des éléments de  $I$  et l'ensemble de ses coupures  $\hat{I}$  peut également être linéairement ordonnée. En effet, étant donné  $<_I$  et  $<_{\hat{I}}$  les relations d'ordres sur respectivement  $I$  et  $\hat{I}$ , la relation

$$< = <_I \cup <_{\hat{I}} \cup \{(i, (J, K)) \in I \times \hat{I} : i \in J\} \cup \{((J, K), i) \in \hat{I} \times I : i \in K\}$$

est une relation d'ordre totale et stricte sur  $I \cup \hat{I}$ . De manière informelle, la relation d'ordre  $<$  sur  $I \cup \hat{I}$  garde les éléments de  $I$  et de  $\hat{I}$  ordonnés comme ils l'étaient et pose, pour tout  $i \in I$  et  $c = (J, K) \in \hat{I}$ ,  $i < c$  lorsque  $i \in J$  et  $c < i$  lorsque  $i \in K$ . Notons qu'il n'existe pas  $i_1, i_2 \in I$  ni  $i'_1, i'_2 \in \hat{I}$  tels que  $i_1$  et  $i_2$  ou  $i'_1$  et  $i'_2$  sont consécutifs dans  $I \cup \hat{I}$ . En effet, pour tout  $i_1, i_2 \in I$  tels que  $i_1 <_I i_2$ , il existe  $c \in \hat{I}$  tel que  $i_1 < c < i_2$ . De plus, si  $i_1$  et  $i_2$  sont consécutifs dans  $I$  alors  $c$  est unique. Symétriquement, pour tout  $c_1, c_2 \in \hat{I}$  tels que  $c_1 <_{\hat{I}} c_2$ , il existe  $i \in I$  tel que  $c_1 < i < c_2$ . De plus, si  $c_1$  et  $c_2$  sont consécutifs dans  $\hat{I}$  alors  $i$  est unique. Le minimum  $(I, \emptyset)$  et le maximum  $(\emptyset, I)$  de  $\hat{I}$  sont le minimum et le maximum de  $I \cup \hat{I}$ . De plus :

**Proposition 1.3.18.** *Soit  $I$  un ordre linéaire. Alors l'ordre linéaire  $I \cup \hat{I}$  est complet.*

*Démonstration.* Remarquons que l'ensemble des coupures  $\hat{J}$  de tout sous-ordre  $J$  de  $I$  est un sous-ordre de  $\hat{I}$ . De plus  $J \cup \hat{J}$  est naturellement un sous-ordre de  $I \cup \hat{I}$ . Ainsi, puisque tout sous-ordre de ce genre admet un minimum et un maximum,  $I \cup \hat{I}$  est complet.  $\square$

**Exemple 1.3.19.** *Soit  $I = \omega + -\omega$ . L'ordre linéaire  $I$  est isomorphe à  $\zeta$ . L'ordre linéaire  $I$  n'est pas complet. La coupure  $(\omega, -\omega)$  est une fosse. En effet,  $\omega$  n'a pas de maximum et  $-\omega$  n'a pas de minimum. L'ordre linéaire  $I \cup \hat{I}$  est représenté dans la Figure 1.5. Il est isomorphe à  $\omega + 1 + -\omega$ .*

## 1.4 Posets

Dans cette section, nous reviendrons plus en détails sur une généralisation des ordres linéaires : les ensembles partiellement ordonnés (posets). On définit dans la Sous-section 1.4.1 des notions relatives aux posets. On y présente aussi des extensions aux posets des opérations définies sur les ordres linéaires. La classe des posets  $SP^\circ$  à laquelle nous nous intéressons tout au long de cette thèse est définie dans la Sous-section 1.4.2 en plus des propriétés que les posets de cette classe satisfont. Plusieurs caractérisations de  $SP^\circ$  sont rappelées dans

la Sous-section 1.4.3, notamment une généralisation due à Bedon et Rispal dans [15] de la construction inductive de Hausdorff présentée dans Définition 1.3.10. Enfin, nous nous intéressons dans la Sous-section 1.4.4 aux posets de  $SP^\circ$  quand ils sont étiquetés par un ensemble de symboles, appelés alphabet. Les posets étiquetés sont appelés aussi *posets*. C'est une généralisation de la notion de mot, puisque un mot peut être vu comme un ordre linéaire étiqueté par un alphabet. Les posets étiquetés ont été étudiés en premier dans [50, 87]. Toujours dans la Sous-section 1.4.4, nous définirons plusieurs sous classes des posets de  $SP^\circ$  étiquetés, auxquelles on va s'intéresser tout au long de cette thèse.

### 1.4.1 Définitions et opérations

Les posets sont une généralisation des ordres linéaires. En effet, contrairement aux ordres linéaires où toute paire d'éléments différents sont comparables, les éléments des posets ne le sont pas forcément. Formellement, un *poset*  $(P, <)$  (pour *Partially Ordered set*) est un ensemble muni d'une relation d'ordre partielle et stricte. Le poset vide est le poset  $(\emptyset, \emptyset)$ . Il est noté  $0$ . Par souci de simplification, un poset  $(P, <)$  est souvent noté  $P$ . Les posets sont souvent notés  $P, Q, R, \dots$ .

Soit  $(P, <)$  un poset. Une *chaîne*  $Q$  de  $P$  est un sous-ordre de  $P$  tel que  $(Q, < \cap Q \times Q)$  est un ordre linéaire. Une *antichaîne*  $Q$  de  $P$  est un sous-ensemble de  $P$  tel que tous les éléments de  $Q$  sont deux à deux incomparables. La *largeur* de  $P$  est  $wd(P) = \sup(\{|Q| : Q \text{ antichaîne de } P\})$ . Notons que les ordres linéaires sont des posets de largeur 1. Le poset vide est l'unique poset de largeur 0.

Les posets sont représentés avec le *diagramme de Hasse*. Dans le diagramme de Hasse original les éléments sont représentés par des points «  $\bullet$  » ou des symboles alphabétiques. Quand deux éléments  $x$  et  $y$  d'un poset sont comparables ils sont reliés par un segment. Dans ce cas,  $x$  est au dessus de  $y$  dans la représentation si et seulement si  $x$  est inférieur à  $y$ . En effet, l'ordre croissant des éléments se lit de haut en bas. Dans nos représentations de posets, nous utiliserons le même diagramme avec quelques modifications. L'ordre croissant se lira de gauche à droite pour uniformiser avec les ordres linéaires. De plus, nous nous contenterons de la réduction transitive du diagramme original. En effet, quand  $x < y$  et  $y < z$  dans un poset, nous nous limitons à dessiner des segments entre  $x$  et  $y$  et entre  $y$  et  $z$  sans en dessiner entre  $x$  et  $z$  même si, par transitivité,  $x < z$ . Par conséquent,  $x < y$  dans le diagramme s'il existe un chemin de  $x$  à  $y$  parcourant les segments de gauche à droite.

**Exemple 1.4.1.** Dans la Figure 1.6 est représenté le diagramme de Hasse du poset  $(P, <)$  où

$$P = \{x_0, \dots, x_5\}$$

$$< = \{(x_0, x_1), \dots, (x_0, x_5), (x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5)\}$$

L'élément  $x_0$  est le minimum de  $P$  et  $x_5$  son maximum. Ces éléments sont comparables avec tous les autres éléments. L'élément  $x_1$  est plus grand que  $x_0$ , plus petit que  $x_2$  et  $x_5$  et incomparable à  $x_3$  et  $x_4$ . L'élément  $x_2$  est plus grand que  $x_0$  et  $x_1$ , plus petit que  $x_5$  et incomparable à  $x_3$  et  $x_4$ .

Un poset  $(P, <)$  est *N-libre* s'il n'a pas de sous-ensemble  $N = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  tel que  $< \cap N^2 = \{(x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_4)\}$ . Autrement dit, si l'ordre partiel

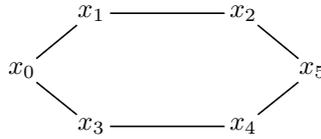


FIGURE 1.6 – Le diagramme de Hasse du poset  $(P, <)$  où  $P = \{x_0, \dots, x_5\}$  et  $< = \{(x_0, x_1), \dots, (x_0, x_5), (x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5)\}$

$(P, <)$  n'a pas de sous-ordre isomorphe à  $N$ . Un sous-ordre d'un poset est appelé aussi *sous-poset*. Le diagramme de Hasse du poset  $N$  est représenté dans la Figure 1.7. La Figure 1.8 représente le diagramme de Hasse d'un poset qui n'est

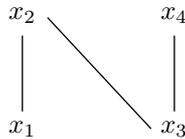


FIGURE 1.7 – Le poset  $N$ . Exceptionnellement, dans cette figure, l'ordre croissant est représenté de bas en haut

pas  $N$ -libre. Le poset de la Figure 1.6 est quant à lui  $N$ -libre. Aucun de ces sous-posets n'est isomorphe au poset  $N$ .

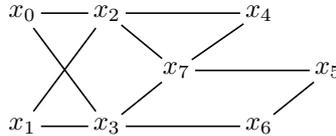


FIGURE 1.8 – Le diagramme de Hasse d'un poset qui n'est pas  $N$ -libre. En effet, le sous-poset  $\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$  est isomorphe au poset  $N$  aussi bien que le sous-poset  $\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$

On définit les opérations suivantes sur les posets.

Soient  $(P, <_P)$  et  $(Q, <_Q)$  deux posets disjoints. L'*union* (ou *composition parallèle*) de  $(P, <_P)$  et  $(Q, <_Q)$ , notée  $P \cup Q$ , est le poset  $(P \cup Q, <_{P \cup Q})$ . Ainsi, étant donnés  $<_{P \cup Q}$  et deux éléments  $x, y$  de  $P \cup Q$ ,  $x < y$  si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1.  $x, y \in P$  et  $x <_P y$ ;
2.  $x, y \in Q$  et  $x <_Q y$ .

De plus, certaines opérations sur les ordres linéaires peuvent s'étendre aux posets. La *somme* (ou *composition séquentielle*) de  $(P, <_P)$  et  $(Q, <_Q)$ , notée  $P+Q$ , est le poset  $(P \cup Q, <_{P+Q})$ . Ainsi, étant donnés  $<_{P+Q}$  et deux éléments  $x, y$  de  $P+Q$ ,  $x < y$  si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1.  $x, y \in P$  et  $x <_P y$ ;
2.  $x, y \in Q$  et  $x <_Q y$ ;

3.  $x \in P$  et  $y \in Q$ .

**Exemple 1.4.2.** La Figure 1.9 représente deux posets

$$P_1 = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4)\})$$

$$P_2 = (\{y_1, y_2, y_3, y_4\}, \{(y_1, y_3), (y_1, y_4), (y_2, y_3), (y_2, y_4)\})$$

ainsi que la composition parallèle  $P_1 \cup P_2$  et la composition séquentielle  $P_1 + P_2$ . Remarquons que  $M_1 = \{x_1\}$ ,  $M_2 = \{y_1, y_2\}$ ,  $M_1 \cup M_2$  et  $M_1$  sont respectivement les ensembles des minimums de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_1 \cup P_2$  et  $P_1 + P_2$ . Remarquons aussi que  $M'_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$ ,  $M'_2 = \{y_3, y_4\}$ ,  $M'_1 \cup M'_2$  et  $M'_2$  sont les ensembles des maximums de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_1 \cup P_2$  et  $P_1 + P_2$  respectivement.

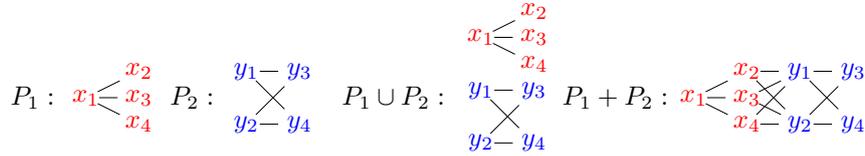


FIGURE 1.9 – Le diagramme de Hasse de deux posets N-libres  $P_1$  et  $P_2$  et leur compositions parallèles et séquentielles

Notons que la somme de posets est une opération associative. L'union de posets est une opération associative et commutative. Ainsi, écrire  $P_1 + \dots + P_n$  ou  $P_1 \cup \dots \cup P_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et des posets  $P_1, \dots, P_n$ , ne nécessite pas de mettre des parenthèses. Ces écritures peuvent être raccourcies en  $\sum_{i \in [n]} P_i$  et  $\bigcup_{i \in [n]} P_i$  respectivement. De plus, la somme finie de posets peut être généralisée à n'importe quelle suite linéairement ordonnée  $((P_j, <_j))_{j \in J}$  de posets deux à deux disjoints par

$$\sum_{j \in J} P_j = \left( \bigcup_{j \in J} P_j, \left( \bigcup_{j \in J} <_j \right) \cup \left( \bigcup_{j, j' \in J, j < j'} P_j \times P_{j'} \right) \right)$$

Ainsi, étant donnés  $< = \left( \bigcup_{j \in J} <_j \right) \cup \left( \bigcup_{j, j' \in J, j < j'} P_j \times P_{j'} \right)$  et deux éléments  $x, y$  de  $\sum_{j \in J} P_j$ ,  $x < y$  si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1. il existe  $j \in J$  tel que  $x, y \in P_j$  et  $x <_j y$  ;
2. il existe  $j, j' \in J$  tels que  $j <_J j'$  et  $x \in P_j$  et  $y \in P_{j'}$ .

La somme  $\sum_{j \in J}$  est appelée somme indicée par l'ordre linéaire  $J$ .

## 1.4.2 Caractéristiques des posets

On s'intéresse dans cette thèse à la classe de posets suivante :

**Définition 1.4.3.** La classe  $SP^\circ$  des posets série-parallèles est la plus petite classe de posets contenant le poset vide  $0$ , le singleton et qui est fermée par la composition parallèle finie disjointe et la somme disjointe indicée par un ordre linéaire dénombrable et dispersé de posets. Ces posets sont définis à isomorphisme près.

Notons que, puisque les sommes sont indicées par des ordres linéaires dénombrables et dispersés, et les compositions parallèles sont finies, les posets de  $SP^\diamond$  sont dénombrables, leurs antichaînes finies et leurs chaînes sont des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Les posets de  $SP^\diamond$  sont appelés posets série-parallèles dénombrables et dispersés. Notons que  $SP^\diamond$  contient des posets dont la largeur n'est majorée par aucun entier naturel.

**Exemple 1.4.4.** *Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , soit  $P_i$  une antichaîne telle que  $|P_i| = i$ . Soit  $P = \sum_{i \in \omega} P_i$ . Remarquons que  $P \in SP^\diamond$ . Aussi, notons qu'il n'y pas  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour toute antichaîne  $Q$  de  $P$ ,  $|Q| < n$ .*

On dénote par  $SP^{\diamond+} = SP^\diamond \setminus \{0\}$ , à savoir la classe  $SP^\diamond$  sans le poset vide.

Soit  $J \in \mathcal{S}$ . Une  $J$ -factorisation ou une *factorisation séquentielle* d'un poset  $P \in SP^\diamond$  est une suite de posets  $(P_j)_{j \in J}$  telle que  $P = \sum_{j \in J} P_j$ . Une *factorisation parallèle* d'un poset  $P$  est un ensemble de posets  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $P = \bigcup_{j \in [n]} P_j$ . On confond souvent entre l'écriture  $\sum_{j \in J} P_j$  (resp.  $\bigcup_{j \in [n]} P_j$ ) et la factorisation  $(P_j)_{j \in J}$  (resp.  $\{P_1, \dots, P_n\}$ ) d'un poset  $P$  en disant « soit la factorisation séquentielle (resp. parallèle)  $\sum_{j \in J} P_j$  (resp.  $\bigcup_{j \in [n]} P_j$ ) de  $P$  » puisque la factorisation peut être déduite de l'écriture de  $P$ . Une factorisation (séquentielle ou parallèle) est dite *non triviale* si aucun des  $P_j$  n'est le poset vide.

Un poset  $P \in SP^\diamond$  est *séquentiel* si  $P$  est un singleton ou si  $P$  admet une  $J$ -factorisation non triviale  $(P_j)_{j \in J}$  où  $J$  est un ordre linéaire qui contient au moins deux différents éléments. Il est *parallèle* s'il admet une factorisation parallèle non triviale  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , où  $n > 1$ . Notons que le poset vide est le seul de  $SP^\diamond$  qui n'est ni séquentiel ni parallèle. Le poset  $P$  est *séquentiellement irréductible* s'il n'admet pas de factorisation séquentielle non triviale. Il est *parallèlement irréductible* s'il n'admet pas de factorisation parallèle non triviale. Le poset vide n'est ni séquentiellement ni parallèlement irréductible. Une factorisation séquentielle  $(P_j)_{j \in J}$ , pour  $J \in \mathcal{S}$ , est *irréductible* si elle est non triviale et si tous les  $P_j$  sont séquentiellement irréductibles. On dit dans ce cas que  $P$  est *indiqué* par  $J$  (ou  $P$  est sur  $J$ ). Réciproquement, une factorisation parallèle  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , est *irréductible* si elle est non triviale et si chaque  $P_i$ ,  $i \in [n]$ , est parallèlement irréductible.

Si  $I$  est un intervalle d'un ordre linéaire  $J$  alors il existe deux ordres linéaires  $K$  et  $L$  tels que  $J \simeq K + I + L$ . Cette propriété n'est plus vraie dans le cas des posets. Nous définissons une notion analogue qui permet de généraliser cette propriété. Soit  $P \in SP^\diamond$ . Un sous-ordre  $I$  non-vide de  $P$  est un *bon intervalle* de  $P$  si  $I$  est un intervalle de  $P$  et, pour tout  $p \in P$ , quand  $x, y \in I$  tels que  $p < x$  ou  $x < p$  et ni  $p < y$  ni  $y < p$  alors  $p \in I$ . De manière informelle,  $I$  est un bon intervalle de  $P$  si, pour tout  $p \in P$ , quand  $p$  est comparable avec un élément de  $I$  et incomparable avec un autre élément de  $I$  alors  $p \in I$ . Un bon intervalle d'un poset correspond à un élément d'une de ses factorisations non triviales ou à un bon intervalle d'un élément d'une de ses factorisations non triviales.

**Proposition 1.4.5.** *Soient  $P \in SP^\diamond$  et  $I \subseteq P$ . Alors  $I$  est un bon intervalle de  $P$  si et seulement s'il existe un ordre linéaire  $J \in \mathcal{S}$  non vide tel que*

- soit  $P$  admet une  $J$ -factorisation  $(P_j)_{j \in J}$ ;
- ou  $P$  admet une factorisation parallèle  $\{P_1, \dots, P_J\}$ , où  $J$  est fini,

*et il existe  $j \in J$  tel que soit  $I = P_j$  ou  $I \subsetneq P_j$  et  $I$  est un bon intervalle de  $P_j$ .*

*Démonstration.* Quand  $I$  est un bon intervalle de  $P$  et  $X$  est tel que  $I \subseteq X \subseteq P$ , alors  $I$  est aussi un bon intervalle de  $X$ . En conséquence, l'implication de gauche vers la droite est vérifiée. Pour la réciproque, il suffit de noter que lorsque  $I$  est un bon intervalle de  $I'$  qui est lui même un bon intervalle de  $P$ , alors  $I$  est un bon intervalle de  $P$ .  $\square$

Chaque poset de  $SP^\circ$  admet une unique factorisation séquentielle (resp. parallèle) irréductible. Dans [15] une relation d'équivalence  $\sim$  sur les éléments d'un poset  $P$  de  $SP^\circ$  est définie, telle que  $P/\sim$  est isomorphe à un ordre linéaire dénombrable et dispersé (Lemme 9), et telle que chaque classe d'équivalence est un bon intervalle séquentiellement irréductible de  $P$ . Cela a induit l'unicité d'une factorisation séquentielle irréductible d'un poset.

**Proposition 1.4.6** ([15]). *Chaque poset de  $SP^\circ$  non vide admet une unique factorisation séquentielle irréductible.*

Avec les mêmes arguments, on peut montrer la même chose pour la factorisation parallèle irréductible.

**Exemple 1.4.7.** *Reprenons les posets  $P_1$  et  $P_2$  de la Figure 1.9. Ici,  $P_1 = \{x_1\} + (\{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\})$  et  $P_2 = (\{y_1\} \cup \{y_2\}) + (\{y_3\} \cup \{y_4\})$ . Les deux posets sont séquentiels. Naturellement  $P_1 + P_2$  est séquentiel et  $P_1 \cup P_2$  est parallèle. Le poset  $\{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\}$  est un sous-poset parallèle de  $P_1$ . Sa factorisation parallèle irréductible est  $\{\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$ . La factorisation séquentielle irréductible de  $P_1$  est  $(\{x_1\}, \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\})$ .*

### 1.4.3 Caractérisations de $SP^\circ$

Manipuler des objets infinis, tels les posets de  $SP^\circ$ , nécessite généralement l'existence d'une propriété inductive sur ces objets. C'est le cas des ordres linéaires dénombrables et dispersés grâce à la construction inductive de Hausdorff (voir Définition 1.3.10). Dans [15], N. Bedon et C. Rispal proposent une construction à la Hausdorff de  $SP^\circ$ .

**Définition 1.4.8.** *Les classes  $V_\alpha$  et  $W_\alpha$ , pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ , de posets dénombrables et dispersés (à isomorphisme près) sont inductivement définies comme suit :*

$$\begin{aligned} V_0 &= \{0, 1\} \\ W_\alpha &= \mathcal{C}_{\{\cup, +\}}(V_\alpha) \\ V_\alpha &= \left\{ \sum_{j \in J} P_j : J \in \{\omega, -\omega\} \text{ et pour tout } j \in J, P_j \in \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta \right\} \cup \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta \end{aligned}$$

et la classe  $S_{sp}$  de posets dénombrables et dispersés par  $S_{sp} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} W_\alpha$ .

En conclusion, ils prouvent le théorème suivant :

**Théorème 1.4.9** ([15]).  $S_{sp} = SP^\circ$ .

Ainsi, comme les ordres linéaires dénombrables et dispersés, à chaque poset  $P$  de  $SP^\circ$  est associé un unique ordinal. Il s'agit du plus petit ordinal  $\alpha \in \mathcal{O}$  tel que  $P \in W_\alpha$  en l'occurrence. De plus, pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ , chaque classe  $W_\alpha$  peut être décomposée en deux sous-classes permettant de dissocier les compositions finies séquentielles et parallèles.

**Théorème 1.4.10** ([15]). *Pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , soient*

$$\begin{aligned} X_{\alpha,0} &= V_\alpha \\ Y_{\alpha,i} &= \left\{ P: \exists n \in \mathbb{N} P = \sum_{j \in [n]} P_j \text{ tel que } P_j \in X_{\alpha,i} \text{ pour tout } j \in [n] \right\} \\ X_{\alpha,i+1} &= \left\{ P: \exists n \in \mathbb{N} P = \bigcup_{j \in [n]} P_j \text{ tel que } P_j \in Y_{\alpha,i} \text{ pour tout } j \in [n] \right\} \end{aligned}$$

Alors  $W_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_{\alpha,i}$ .

Cela permet d'associer à chaque poset  $P \in SP^\circ$ , en plus d'un ordinal  $\alpha \in \mathcal{O}$ , un entier  $i \in \mathbb{N}$  de manière unique. En effet, l'ensemble  $\mathcal{O} \times \mathbb{N}$  muni de la relation d'ordre définie, pour tout  $(\alpha, i), (\beta, j) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ , par  $(\beta, j) < (\alpha, i)$  si et seulement  $\beta < \alpha$  ou  $\beta = \alpha$  et  $j < i$ , est un bon ordre. Ainsi, en conséquence des Théorèmes 1.4.9 et 1.4.10, pour tout poset  $P \in SP^\circ$ , il existe  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$  aussi petit que possible tel que  $P \in X_{\alpha,i}$ .

**Définition 1.4.11.** *Le rang  $rp(P)$  d'un poset  $P \in SP^\circ$  est le plus petit  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$  tel que  $P \in X_{\alpha,i}$ .*

Remarquons que, pour tout  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ ,  $Y_{\alpha,i} \subset X_{\alpha,i+1} \subset Y_{\alpha,i+1}$ . Ces inclusions sont dues au fait qu'on puisse faire des sommes  $\sum_{i \in [1]}$  et des unions  $\bigcup_{i \in [1]}$ . Comme pour les ordres linéaires, quand un poset  $P$  est de rang  $rp(P) = (\alpha, i)$ ,  $\alpha$  désigne le nombre ordinal maximal d'imbrications des  $\omega$ -sommets et  $-\omega$ -sommets utilisées pour construire  $P$ .

**Exemple 1.4.12.** *Tout ordre linéaire  $J \in \mathcal{S}$  ayant comme rang  $r(J) = \alpha \in \mathcal{O}$  est de rang  $rp(J) \in \{(\alpha, 0), (\alpha, 1)\}$ . Tout poset  $P \in SP^\circ$  fini est de rang  $rp(P) = (0, i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .*

Focalisons nous sur le cas des posets  $P$  de rang  $(\alpha, 0)$ , pour  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

**Remarque 1.4.13.** *Soit  $P \in SP^\circ$  avec  $rp(P) = (\alpha, 0)$ ,  $\alpha > 0$ . Supposons que  $P = \sum_{j \in J} P_j$  soit une  $J$ -factorisation non triviale de  $P$  pour  $J \in \{\omega, -\omega\}$ . Alors, pour tout  $j \in J$ ,  $rp(P_j) < rp(P)$ . De plus, pour tout  $(\beta, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$  tel que  $(\beta, i) < (\alpha, 0)$ , pour tout  $j \in J$  il existe  $k \in J$  tel que  $k > j$  (resp.  $k < j$ ) et*

$$(\beta, i) \leq rp(P_k) < rp(P)$$

*Il en résulte que, pour tout  $j \in J$ ,  $\sum_{j' \geq j} P_{j'}$  (resp.  $\sum_{j' \leq j} P_{j'}$ ) est de rang  $(\alpha, 0)$ .*

Le Théorème 1.4.10 montre en particulier que tout poset  $P$  de rang  $(\alpha, 0)$ ,  $\alpha > 0$  admet une  $J$ -factorisation non triviale où  $J \in \{\omega, -\omega\}$ . Le lemme suivant montre que dans ce cas  $P$  admet uniquement une  $\omega$ -factorisation ou uniquement une  $-\omega$ -factorisation de ce genre.

**Lemme 1.4.14.** *Soit  $P \in SP^\circ$  un poset séquentiel tel que  $rp(P) = (\alpha, 0)$ ,  $\alpha > 0$ . Soient  $\sum_{j \in J} P_j$  et  $\sum_{j \in J'} P'_j$  des  $J$  et  $J'$ -factorisations non triviales de  $P$  où  $J, J' \in \{\omega, -\omega\}$ . Alors  $J = J'$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $J \neq J'$ . Supposons sans perte de généralité que  $J = \omega$  et  $J' = -\omega$ . Soit  $L = \sum_{j \leq k} P_j$  et  $R = \sum_{k < j < \omega} P_j$

pour  $k \in \omega$ . Alors  $P = L \cdot R$ . Comme conséquence de la Remarque 1.4.13,  $rp(R) = (\alpha, 0)$ . Remarquons qu'il existe  $k' \in -\omega$  tel que  $R$  est un bon intervalle séquentiel de  $R' = \sum_{j' \geq k'} P_{j'}$ . Soit  $L' = \sum_{-\omega < j' < k'} P_{j'}$ . Comme conséquence de la Remarque 1.4.13,  $rp(L') = rp(R) = (\alpha, 0)$ . De plus  $rp(R) \leq rp(R') \leq rp(P)$ . Par conséquent  $rp(R') = (\alpha, 0)$  aussi. On a  $P = L' \cdot R'$ , et par le Théorème 1.4.10,  $rp(P) = (\alpha, 1)$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

La classe  $SP^\diamond$  coïncide avec la classe  $NF^\diamond$  des posets N-libres dénombrables dont les chaînes sont des ordres linéaires dénombrables et dispersés et dont les antichaînes sont finies. C'est une extension de la correspondance de ces deux classes de posets dans le cas des posets finis [84].

**Théorème 1.4.15** ([15]).  $NF^\diamond = SP^\diamond$ .

Cette correspondance nous procure, en plus de la caractérisation constructive de  $SP^\diamond$  dans le Théorème 1.4.9, une caractérisation par rapport à l'ordre des éléments de ses posets. Aussi, la Définition 1.4.8 et le Théorème 1.4.9 donnent une définition bien fondée de  $SP^\diamond$  qu'on considère à partir de maintenant comme un ensemble, malgré qu'elle ait été définie comme une classe.

#### 1.4.4 Posets étiquetés

Un *alphabet*  $A$  est un ensemble (pas nécessairement fini) de symboles appelés *lettres*. Soit  $A$  un alphabet. Un *poset étiqueté* par  $A$  (ou poset sur  $A$ ) est un 3-uplet  $(P, <, l)$  tel que  $(P, <)$  est un poset et  $l: P \rightarrow A$  une application d'étiquetage associant à chaque élément de  $P$  une lettre de  $A$ . Les posets étiquetés sont aussi appelés *posets* dans la littérature. Deux posets étiquetés sont isomorphes s'il existe une fonction bijective préservant l'ordre et l'étiquetage entre les deux posets. L'unique poset vide étiqueté est noté  $\epsilon$ . On dénote aussi par «  $a$  » le poset singleton dont l'unique élément est étiqueté par  $a \in A$ , à savoir  $(\{x\}, \emptyset, l(x) = a)$ . Par soucis de simplification, comme les posets non étiquetés, un poset étiqueté  $(P, <, l)$  est aussi souvent noté  $P$ .

Dans la définition suivante, on étend les opérations sur les posets non-étiquetés aux posets étiquetés.

**Définition 1.4.16.** Soient  $(P, <_P, l_P)$  et  $(Q, <_Q, l_Q)$  deux posets disjoints étiquetés par  $A$ . Le produit séquentiel, appelé aussi concaténation,  $(P, <_P, l_P) \cdot (Q, <_Q, l_Q)$ , qu'on écrit aussi  $(P, <_P, l_P)(Q, <_Q, l_Q)$  pour simplifier, est le poset  $(P, <_P) + (Q, <_Q)$  étiqueté par  $l_P \cup l_Q$ . Similairement, le produit parallèle  $(P, <_P, l_P) \parallel (Q, <_Q, l_Q)$  est le poset  $(P, <_P) \cup (Q, <_Q)$  étiqueté par  $l_P \cup l_Q$ .

Aussi, le produit  $\prod_{j \in J} (P_j, <_j, l_j)$  d'une suite linéairement ordonnée  $((P_j, <_j, l_j))_{j \in J}$  (ou  $J$ -produit) de posets étiquetés par  $A$  est le poset  $\sum_{j \in J} (P_j, <_j)$  étiqueté par  $\bigcup_{j \in J} l_{P_j}$ .

Ainsi, le produit séquentiel, le produit parallèle et le produit d'une suite linéairement ordonnée de posets étiquetés sont obtenus par respectivement la composition séquentielle, la composition parallèle et la somme d'une suite linéairement ordonnée des posets non étiquetés correspondants. L'application d'étiquetage du poset résultat correspond à l'union des applications d'étiquetage des posets étiquetés utilisés lors de l'opération. De plus, comme les opérations correspondantes sur les posets non étiquetés, le produit séquentiel est une opération associative et le produit parallèle une opération associative et commutative.

Toujours pour raccourcir, on écrit  $P \cdot Q$  (ou  $PQ$ ),  $P \parallel Q$  et  $\prod_{j \in J} P_j$  respectivement les produits  $(P, <_P, l_P) \cdot (Q, <_Q, l_Q)$ ,  $(P, <_P, l_P) \parallel (Q, <_Q, l_Q)$  et  $\prod_{j \in J} (P_j, <_j, l_j)$ , pour simplifier. Aussi, lorsque, pour tout  $i \in [n]$ ,  $P_i = P$ , pour un certain poset  $P$ , on écrit  $P^n$  pour  $\prod_{i \in [n]} P_i$  et  $P^{\parallel n}$  pour  $\parallel_{i \in [n]} P_i$ .

On définit aussi deux cas particuliers de  $J$ -produits.

**Définition 1.4.17.** Soit  $P$  un poset étiqueté. La puissance  $\omega$  (resp.  $-\omega$ ) de  $P$ , notée  $P^\omega$  (resp.  $P^{-\omega}$ ), est le  $\omega$ -produit (resp.  $-\omega$ -produit) d'une suite linéairement ordonné  $(P_j)_{j \in \omega}$  (resp.  $(P_j)_{j \in -\omega}$ ) de posets tous isomorphes à  $P$ .

Soit  $A$  un alphabet. L'ensemble des posets de  $SP^\diamond$  étiquetés par  $A$  est notée  $SP^\diamond(A)$ . Aussi,  $SP^{\diamond+}(A) = SP^\diamond(A) \setminus \{\epsilon\}$ . Les notions définies pour les posets non étiquetés (chaîne, antichaîne, largeur, factorisation, poset séquentiel, poset parallèle, ...) s'étendent naturellement aux posets étiquetés. Soit  $(P, <, l)$  un poset étiqueté. Le rang de  $(P, <, l)$  est égal au rang de  $(P, <)$ . Le poset étiqueté  $(P', <', l')$  est un *facteur* de  $(P, <, l)$  si  $(P', <')$  est un bon intervalle de  $(P, <)$  et  $l'$  la restriction de  $l$  à  $P'$ . Nous confondons également facteur et bon intervalle dans la suite. Les posets étiquetés de largeur 1 sont appelés « mots » dans la littérature.

Soit  $A$  un alphabet. En plus de  $SP^\diamond(A)$ , nous nous intéressons dans les chapitres suivants à plusieurs sous-ensembles de  $SP^\diamond(A)$ .

**Définition 1.4.18.** Soit  $A$  un alphabet. On définit

- $A^*$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel;
- $A^\sharp$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel fini et le produit  $\omega$ ;
- $A^\diamond$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel fini, le produit  $\omega$  et le produit  $-\omega$ ;
- $SP(A)$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel fini et le produit parallèle.

Remarquons que :

- $A^*$  est l'ensemble des mots indicés par  $\mathcal{N}$  (mots finis);
- $A^\sharp$  est l'ensemble des mots indicés par  $\mathcal{O}$  (mots sur les ordinaux dénombrables);
- $A^\diamond$  est l'ensemble des mots indicés par  $\mathcal{S}$  (mots sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés);
- $SP(A)$  est l'ensemble des posets  $\mathbb{N}$ -libres étiquetés indicés par  $\mathcal{N}$  (posets finis).

**Exemple 1.4.19.** Reprenons le poset de l'Exemple 1.4.1. Dans la Figure 1.10 est représenté le poset  $P = a \cdot ((b \cdot b) \parallel (b \cdot b)) \cdot a$  étiqueté par l'alphabet  $A = \{a, b\}$ . L'application d'étiquetage associe à  $x_0$  et  $x_5$  la lettre  $a$  et à  $x_1, \dots, x_4$  la lettre  $b$ . Le poset  $P$  admet un seul minimum et un seul maximum tous les deux étiquetés par  $a$ .

**Exemple 1.4.20.** Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , soit  $P_j$  une antichaîne telle que  $|P_j| = j$  où tous les éléments de  $P_j$  sont étiquetés par  $a$ . Le poset  $P = \prod_{j \in \omega} P_j$  est le poset de l'Exemple 1.4.4 étiqueté par l'alphabet  $A = \{a\}$ . Il est représenté dans la Figure 1.11.

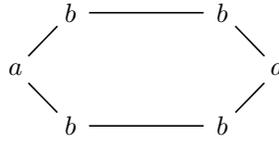


FIGURE 1.10 – Le diagramme de Hasse du poset de la Figure 1.6 étiqueté par l’alphabet  $A = \{a, b\}$

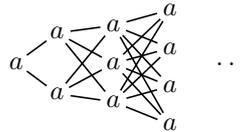


FIGURE 1.11 – Le diagramme de Hasse du poset de l’Exemple 1.4.4 étiqueté par l’alphabet  $A = \{a\}$

Dans la suite de cette thèse, on omettra quelquefois de préciser qu’un poset est étiqueté. Cela sera compris du contexte. Généralement, à l’utilisation d’un poset étiqueté, on précise de quelle classe de posets celui-ci est pris.

## 1.5 Algèbre

Nous reprenons dans cette section certaines notions d’algèbre universelle qui nous seront utiles dans les chapitres suivants. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à [1] ou [77]. Les définitions habituelles des différentes notions présentées dans cette section ont été adaptées pour permettre de manier des opérations d’arité infinies. Nous définissons les structures algébriques qui nous intéressent dans la Sous-section 1.5.1 et nous rappelons les définitions d’homomorphisme, de congruence et de noyau notamment. Brièvement, une structure algébrique est un ensemble  $E$  équipé d’opérations. En algèbre universelle classique les opérations d’une algèbre sont d’arité finies. Dans cette section nous utilisons des algèbres dont les opérations peuvent être d’arité infinies. Les résultats d’algèbre universelle que nous exposons dans cette section sont relatifs à des structures algébriques dont les opérations sont d’arité finies. Néanmoins, ces résultats sont facilement généralisables aux cas des algèbres dont les ensembles ou les arités de ses opérations peuvent être infinis. Nous abordons dans la Sous-section 1.5.2 les variétés d’algèbres en présentant deux manières différentes de les définir. Dans la Sous-section 1.5.3, nous rappelons la définition des théories équationnelles et leurs liens étroits avec les variétés d’algèbres. Enfin, la notion d’algèbre libre et ses propriétés intéressantes sont exhibées dans la Sous-section 1.5.4.

### 1.5.1 Structures algébriques

Dans cette sous-section, par soucis d’uniformisation et pour simplifier les définitions, toutes les opérations sur un ensemble  $E$  seront souvent considérées comme des opérations d’arité 1 avec, comme seule opérande, une suite linéairement ordonnée d’éléments de  $E$ .

Une *signature* ou un *type* algébrique  $\rho$  est une paire  $(F, \lambda)$  où  $F$  est un ensemble dont les éléments sont des symboles d'opérations et  $\lambda: F \rightarrow \mathcal{S}$  une application associant à chaque  $op$  de  $F$  un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $I$ . L'ensemble des symboles d'opérations de  $F$  associées à un ordre linéaire  $I \in \mathcal{S}$  est noté  $\rho_I$ . Par abus de langage, nous appelons  $\lambda(op)$  l'arité de  $op$ .

Une *algèbre* (ou *structure algébrique*)  $\mathcal{A}$  est une paire  $(A, \rho)$ , où  $A$  est un ensemble non vide (appelé l'*univers* de  $\mathcal{A}$ ) et  $\rho = (F, \lambda)$  une signature algébrique dont les symboles d'opérations de  $F$  sont interprétés comme des opérations sur  $A$ . Ainsi pour tout  $op \in \rho_I$ , pour un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $I$ ,  $op$  est interprétée comme une opérations d'arité  $I$  sur  $A$ . Dans la suite, les symboles d'opérations d'une signature  $\rho$  et les opérations concrètes sur l'univers d'une algèbre de signature  $\rho$  sont confondus. Remarquons que  $A$  est fermé par les opérations de  $\rho$ . Certaines algèbres sont particulières de par les propriétés que satisfont les opérations de sa signature.

Par convention, les algèbres sont notées par des lettres calligraphiques majuscules  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$  et leurs univers par les lettres majuscules correspondantes  $A, B, C, \dots$ . Quand l'ensemble des opérations d'une signature algébrique est fini et que les ordres linéaires associées à ces opérations peuvent être déduits du contexte, on note une algèbre  $\mathcal{A}$  dont  $A$  est l'univers et  $\{op_1, \dots, op_n\}$  l'ensemble des opérations de sa signature par  $(A, op_1, \dots, op_n)$ . Aussi, pour simplifier la notation, une algèbre dont l'univers est  $A$  est notée  $A$  également quand il n'y a pas de risque de confusion. Lorsque on manipule plusieurs algèbres de même signature, on écrit  $op^{\mathcal{A}}$  pour désigner l'opération  $op$  de la signature de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Prenons quelques exemples d'algèbres qui seront utilisées par la suite.

Soit  $S$  un ensemble et soit  $\cdot$  une opération binaire sur  $S$ . Alors :

- l'algèbre  $(S, \cdot)$  est un *semigroupe* si l'opération  $\cdot$  est associative.
- l'algèbre  $(S, \cdot, e)$  est *monoïde* si  $(S, \cdot)$  est un semigroupe et  $e \in S$  est un élément neutre de  $\cdot$ . C'est-à-dire que l'équation  $x \cdot e = e \cdot x = x$ , pour tout  $x \in S$ , est satisfaite.
- l'algèbre  $(S, \cdot, e)$  est *monoïde commutatif* si  $(S, \cdot)$  est un monoïde et l'opération  $\cdot$  est commutative en plus d'être associative.

Notons que les semigroupes et les monoïdes sont des algèbres dont la signature est  $(\{\cdot\}, \{(\cdot, 2)\})$  et  $(\{\cdot, e\}, \{(\cdot, 2), (e, 0)\})$  où 0 et 2 désignent les ordres linéaires à zéro et deux éléments respectivement.

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux algèbres de même signature  $\rho$ . Un *homomorphisme*  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est une fonction  $f: A \rightarrow B$  telle que

$$f(op^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I})) = op^{\mathcal{B}}((f(a_i))_{i \in I})$$

pour tout  $I \in \mathcal{S}$ ,  $op \in \rho_I$  et pour toute suite linéairement ordonnée  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ . On dit alors que la fonction  $f$  *préserve* (ou *commute* avec) les opérations de  $\rho$ . Notons que cette notion est différente avec la préservation d'ordre définie au préalable. L'algèbre  $\mathcal{B}$  est une *image homomorphe* de  $\mathcal{A}$  si la fonction  $f$  est surjective. L'homomorphisme  $f$  est un *isomorphisme* si  $f$  est bijective. On dit alors que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont isomorphes, et on écrit  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ . Enfin,  $\mathcal{B}$  est une *sous-algèbre* de  $\mathcal{A}$  si  $B$  est un sous-ensemble de  $A$  fermé par toutes les opérations de  $\rho$ . C'est-à-dire,  $op((a_i)_{i \in I}) \in B$ , pour tout  $I \in \mathcal{S}$ ,  $op \in \rho_I$  et pour toute suite linéairement ordonnée  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $B$ . Notons que

tout sous-ensemble de  $A$  n'est pas forcément l'univers d'une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ . En revanche, à partir de tout sous-ensemble de  $A$  on peut construire une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ . En effet, pour tout  $X \subseteq A$ , l'algèbre  $\mathcal{B}$  dont l'univers est la fermeture de  $X$  par les opérations de  $\rho$  et dont le type algébrique est  $\rho$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ . C'est d'ailleurs la plus petite sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  contenant  $X$ . Formellement, pour tout  $X \subseteq A$ ,  $(\mathcal{C}_F(X), \rho)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ , où  $F$  désigne l'ensemble des opérations de  $\rho$ . Notons que  $\mathcal{C}_F(X)$  correspond à l'intersection des univers de toutes les sous-algèbres de  $\mathcal{A}$  qui contiennent  $X$ . L'ensemble  $X$  est appelée *ensemble de générateurs* de l'algèbre  $\mathcal{C}_F(X)$ . On dit alors que l'algèbre  $\mathcal{C}_F(X)$  est *engendrée* par  $X$  ou que  $X$  *engendre*  $\mathcal{C}_F(X)$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de signature  $\rho$  et soit  $R$  une relation d'équivalence sur  $A$ . La relation  $R$  est *compatible* avec  $op \in \rho_I$ , pour  $I \in \mathcal{S}$ , si  $(a_i, a'_i) \in R$ , pour tout  $i \in I$ , implique  $(op((a_i)_{i \in I}), op((a'_i)_{i \in I})) \in R$  pour toutes suites  $(a_i)_{i \in I}$ ,  $(a'_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ . Une *congruence* sur  $\mathcal{A}$  est une relation d'équivalence  $\theta$  sur  $A$  qui est compatible avec toutes les opérations de  $\rho$ . L'ensemble des congruences sur  $\mathcal{A}$  est noté  $Cong(\mathcal{A})$ . Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de signature  $\rho$  et soit  $\theta$  une congruence sur  $\mathcal{A}$ . Puisque  $\theta$  est une relation d'équivalence, l'univers  $A$  de l'algèbre  $\mathcal{A}$  peut être partitionné en classes d'équivalences  $C_a$ , pour tout  $a \in A$ . Rappelons que  $A/\theta = \{C_a : a \in A\}$  est appelé l'ensemble quotient de  $A$  par  $\theta$ . L'algèbre de signature  $\rho$  et dont l'univers est  $A/\theta$  est appelée l'*algèbre quotient* de  $\mathcal{A}$  par  $\theta$ . Elle est notée  $\mathcal{A}/\theta$ . Cette algèbre satisfait pour tout  $I \in \mathcal{S}$ ,  $op \in \rho_I$  et pour toute suite linéairement ordonnée  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$

$$op^{\mathcal{A}/\theta}((a_i/\theta)_{i \in I}) = op^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I})/\theta$$

comme conséquence de la compatibilité de  $\theta$  avec toutes les opérations de  $\rho$ . De plus,  $\mathcal{A}/\theta$  est une image homomorphe de  $\mathcal{A}$ . En effet, la fonction  $h: A \rightarrow A/\theta$  définie par  $h(a) = a/\theta$ , pour tout  $a \in A$ , est un homomorphisme surjectif de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{A}/\theta$ . Il est appelé l'*homomorphisme naturel* de l'algèbre  $\mathcal{A}$  vers son algèbre quotient  $\mathcal{A}/\theta$ .

Le *noyau*  $ker(f)$  d'un homomorphisme  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  d'une algèbre  $\mathcal{A}$  vers une algèbre  $\mathcal{B}$  toutes les deux de type  $\rho$  est l'ensemble des couples  $(a, a') \in A \times A$  qui font que  $f$  n'est pas injectif. Formellement

$$ker(f) = \{(a, a') \in A^2 : f(a) = f(a')\}$$

Notons que  $ker(f)$  est une relation d'équivalence sur  $A$ . En effet, il est facile de prouver que les propriétés de réflexivité, transitivité et symétrie sont satisfaites. Cette relation définit un partitionnement de  $A$  en plusieurs classes d'éléments ayant la même image par  $f$ . De plus,  $ker(f)$  est compatible avec toutes les opérations de  $\rho$ . En effet, pour toute opération  $op \in \rho_I$  pour  $I \in \mathcal{S}$  et pour toute suite  $(a_i, a'_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $ker(f)$ ,

$$f(op^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I})) = op^{\mathcal{B}}((f(a_i)_{i \in I})) = op^{\mathcal{B}}((f(a'_i)_{i \in I})) = f(op^{\mathcal{A}}((a'_i)_{i \in I}))$$

Les notions de noyau et d'homomorphisme naturel nous permettent d'énoncer le bien connu *théorème d'homomorphisme*, appelé aussi le *premier théorème d'isomorphisme*.

**Théorème 1.5.1.** (voir [1, Proposition 1.2.2] par exemple) Soit  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un homomorphisme surjectif de l'algèbre  $\mathcal{A}$  vers l'algèbre  $\mathcal{B}$  de type  $\rho$ . Alors, il existe un unique isomorphisme  $g: \mathcal{A}/ker(f) \rightarrow \mathcal{B}$  tel que  $f = g \circ h$  où  $h$  est l'homomorphisme naturel de l'algèbre  $\mathcal{A}$  vers son algèbre quotient  $\mathcal{A}/ker(f)$ .

Ce théorème montre en particulier qu'une image homomorphe d'une algèbre  $\mathcal{A}$  correspond à une algèbre quotient de  $\mathcal{A}$ , et vice-versa.

Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une suite d'algèbres de même signature  $\rho$ . Le *produit direct*  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est l'algèbre de type  $\rho$  dont l'univers est le produit cartésien  $A = \prod_{i \in I} A_i$  et qui satisfait pour tout  $J \in \mathcal{S}$ ,  $op \in \rho_J$ , pour toute suite  $(a_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $A$  et pour tout  $i \in I$  :

$$\pi_i(op^{\mathcal{A}}((a_j)_{j \in J})) = op^{\mathcal{A}_i}((\pi_i(a_j))_{j \in J})$$

où  $\pi_i$  désigne la projection sur la  $i^{\text{ème}}$  composante. En particulier, pour deux algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de même signature  $\rho$ , le produit direct  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  est l'algèbre de type  $\rho$  dont l'univers est  $A \times B$  qui satisfait pour tout  $J \in \mathcal{S}$ ,  $op \in \rho_J$  et pour toute suite  $(a_j, b_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $A \times B$  :

$$op^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a_j, b_j)_{j \in J}) = (op^{\mathcal{A}}((a_j)_{j \in J}), op^{\mathcal{B}}((b_j)_{j \in J}))$$

## 1.5.2 Variétés d'algèbres

Soit  $\mathcal{K}$  une classe d'algèbres de même type algébrique. On dénote par

- $H(\mathcal{K})$ , la classe des images homomorphes des algèbres de  $\mathcal{K}$  ;
- $I(\mathcal{K})$ , la classe des algèbres isomorphes aux algèbres de  $\mathcal{K}$  ;
- $S(\mathcal{K})$ , la classe des sous-algèbres des algèbres de  $\mathcal{K}$  ;
- $P(\mathcal{K})$ , la classe des algèbres qui sont produits directs d'une suite non vide d'algèbres de  $\mathcal{K}$ .

Une classe d'algèbres de même type fermée par  $H, S$  et  $P$  est appelée une *variété*. De manière équivalente, une *variété*  $V$  est une classe d'algèbres de même type qui satisfait les trois conditions suivantes :

1. si  $\mathcal{A} \in V$  et  $\mathcal{B}$  est une image homomorphe de  $\mathcal{A}$  alors  $\mathcal{B} \in V$  ;
2. si  $\mathcal{A} \in V$  et  $\mathcal{B}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  alors  $\mathcal{B} \in V$  ;
3. si  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  est une suite d'algèbres de  $V$  alors  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \in V$ .

On dénote par  $V(\mathcal{K})$  la plus petite variété contenant la classe d'algèbres  $\mathcal{K}$  de même type. Dans ce cas, on dit que la variété  $V(\mathcal{K})$  est *engendrée* par  $\mathcal{K}$ . Si  $\mathcal{K} = \{\mathcal{A}\}$ , pour une algèbre  $\mathcal{A}$ , on écrit  $V(\mathcal{A})$  au lieu de  $V(\{\mathcal{A}\})$ . Notons que  $V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$ . On appelle  $\mathcal{V}$ -*algèbre* une algèbre appartenant à la variété d'algèbres  $\mathcal{V}$ .

**Exemple 1.5.2.** La classe de tous les semigroupes (resp. monoïdes) est une variété d'algèbres de type  $(\{\cdot\}, \{(\cdot, 2)\})$  (resp.  $(\{\cdot, e\}, \{(\cdot, 2), (e, 0)\})$ ).

Une variété d'algèbres peut aussi être définie par une liste de propriétés que toutes ses algèbres doivent satisfaire. Ces propriétés sont exprimées sous formes d'équations appelées *identités* ou *axiomes*. Par exemple, la propriété d'associativité du produit  $\cdot$  des semigroupes peut être exprimée sous forme de l'équation  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  où  $x, y$  et  $z$  sont des symboles représentant des éléments du semigroupe.

Soit  $\rho = (F, \lambda)$  un type algébrique et soit  $X$  un ensemble de symboles différents appelés *variables*. Supposons que  $X$  et l'ensemble des symboles désignant les opérations de  $F$  soient disjoints. L'ensemble des termes de type  $\rho$  sur  $X$ , noté  $T(X)$ , est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :

- $X \subseteq T(X)$ ;
- pour tout  $op \in \rho_0$ ,  $op \in T(X)$ ;
- pour tout  $I \in \mathcal{S}$ ,  $op \in \rho_I$  et pour toute suite linéairement ordonnée  $(t_i)_{i \in I}$  de termes  $X$ ,  $op((t_i)_{i \in I}) \in T(X)$ .

Remarquons que  $T(X) \neq \emptyset$  si et seulement si  $X \cup \rho_0 \neq \emptyset$ . Soit  $I$  un ordre linéaire dénombrable et dispersé et soit  $(x_i)_{i \in I}$  une suite de variables différentes de  $X$ . On dénote par  $t((x_i)_{i \in I})$  le terme  $t \in T(X)$  où n'apparaissent que des variables de la suite  $(x_i)_{i \in I}$ . De manière équivalente, on écrit  $t((x_i)_{i \in I})$  quand  $t \in T(\cup_{i \in I} \{x_i\})$ . On définit la notion de sous-terme d'un terme de  $T(X)$  de la manière suivante. Soit  $t \in T(X)$ . Alors :

- $t$  est un sous-terme de  $t$ ;
- si  $t$  est de la forme  $op((t_i)_{i \in I})$ , pour  $I \in \mathcal{S}$  et  $op \in \rho_I$ , alors pour tout  $i \in I$ ,  $t_i$  est un sous-terme de  $t$ ;
- le sous-terme d'un sous-terme de  $t$  est un sous-terme de  $t$ .

Un sous-terme *direct* de  $t$  est un sous-terme de  $t$  qui n'est pas sous-terme d'un sous-terme de  $t$  différent de  $t$ . Chaque terme  $t$  de type  $\rho$  peut être interprété sur n'importe quelle algèbre  $\mathcal{A}$  de type  $\rho$ . Les variables apparaissant dans  $t$  sont interprétées comme des éléments de  $A$ , tandis que les opérations apparaissant dans  $t$  sont interprétées comme des opérations concrètes sur des éléments de  $A$ .

Soient  $X$  un ensemble de variables et  $\mathcal{A}$  une algèbre de type algébrique  $\rho$ . Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une suite de variables différentes de  $X$ . Pour chaque terme  $t((x_i)_{i \in I})$  de type  $\rho$ , on définit la fonction  $t^{\mathcal{A}} : A^I \rightarrow A$  appelée l'*opération induite par  $t$  sur  $\mathcal{A}$* , prenant comme opérande une suite  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ , et définie inductivement de la manière suivante :

- si  $t = x_i$ , pour  $i \in I$ , alors  $t^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I}) = a_i$ ;
- si  $t = op \in \rho_0$  alors  $t^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I}) = op^{\mathcal{A}}$ ;
- si  $t$  est de la forme  $op((t_j((x_i)_{i \in I_j}))_{j \in J})$ , pour  $J \in \mathcal{S}$  et  $op \in \rho_J$  alors

$$t^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I}) = op^{\mathcal{A}}((t_j^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I_j}))_{j \in J})$$

Notons la distinction entre  $op^{\mathcal{A}}$  et  $op$ . Le symbole  $op$  est juste utilisé pour former les termes de  $T(X)$  alors que  $op^{\mathcal{A}}$  est une opération concrète sur les éléments de  $A$ . De manière informelle,  $t^{\mathcal{A}}$  correspond au terme  $t$  où les variables sont remplacées par des éléments de  $A$  et les symboles d'opérations par les opérations correspondantes sur  $A$ . Elle donne une interprétation de  $t$  dans  $A$ .

**Exemple 1.5.3.** Soit  $X = \{x, y, z\}$  un ensemble de variables et soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. Soit  $\rho = (F, \lambda)$  où  $F = \{\cdot, e\}$ ,  $\lambda(\cdot) = 2$  et  $\lambda(e) = 0$  un type algébrique. Alors

$$e, x, y, z, x \cdot y, y \cdot x, y \cdot z, x \cdot (y \cdot z), x \cdot (x \cdot e)$$

sont tous des termes différents de type  $\rho$ . Soit  $\mathcal{A} = (A^*, \cdot, \epsilon)$  une algèbre de type  $\rho$  où  $\cdot$  désigne le produit séquentiel de posets. Remarquons que  $(A^*, \cdot, \epsilon)$  est un monoïde puisque  $\cdot$  est associative et  $\epsilon$  est un élément neutre pour  $\cdot$ . Prenons le terme  $t = x \cdot (y \cdot z)$ . Alors le terme  $t$  peut être noté  $t(x, y, z, s)$  puisque les variables apparaissant dans  $t$  sont dans  $\{x, y, z, s\}$ . Aussi

$$t^{\mathcal{A}}(a, b, a, a) = a \cdot (b \cdot a), \quad t^{\mathcal{A}}(b, b, b, a) = b \cdot (b \cdot b)$$

Le terme  $t' = x \cdot (x \cdot e)$  est noté  $t'(x)$ . De plus

$$t'^{\mathcal{A}}(a) = a \cdot (a \cdot \epsilon), \quad t'^{\mathcal{A}}(b) = b \cdot (b \cdot \epsilon)$$

Enrichissons maintenant  $\rho$  avec l'opération  $\parallel$ . Soit  $\rho' = (F', \lambda')$  où  $F' = \{\cdot, \parallel, \epsilon\}$ ,  $\lambda'(\cdot) = \lambda'(\parallel) = 2$  et  $\lambda'(\epsilon) = 0$  un type algébrique. Alors

$$e, x, y, z, x \cdot y, y \cdot x, y \cdot z, x \parallel z, y \parallel x, x \cdot (y \parallel z), x \parallel (x \cdot x)$$

sont tous des termes différents de type  $\rho'$ . Soit  $\mathcal{B} = (SP(A), \cdot, \parallel, \epsilon)$  une algèbre de type  $\rho'$  où  $\parallel$  désigne le produit parallèle de posets. Soit  $t = x \cdot (y \parallel z)$ . On a

$$t^{\mathcal{B}}(a, b, a) = t^{\mathcal{B}}(a, a, b) = a \cdot (a \parallel b)$$

puisque le produit parallèle est commutatif.

On peut maintenant définir la notion d'axiome ou d'identité.

Soit  $X$  un ensemble de variables. Une *identité* de type  $\rho$  sur  $X$  est une expression de la forme  $t = t'$  où  $t$  et  $t'$  sont des termes sur  $X$  de type  $\rho$ . L'ensemble de toutes les identités de type  $\rho$  sur  $X$  est notée  $Id(X)$ . Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de type  $\rho$  et soient  $t((x_i)_{i \in I})$  et  $t'((x_i)_{i \in I})$  deux termes de type  $\rho$ , pour un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $I$ . La suite  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$  satisfait l'identité  $t = t'$  si

$$t^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I}) = t'^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I})$$

De plus, l'algèbre  $\mathcal{A}$  satisfait l'identité  $t = t'$  si n'importe quelle suite  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$  satisfait  $t = t'$ . On dit alors que  $t = t'$  est vraie dans  $\mathcal{A}$  et on écrit  $\mathcal{A} \models t = t'$ . De manière similaire, une classe d'algèbres  $\mathcal{K}$  de type  $\rho$  satisfait l'identité  $t = t'$ , noté aussi  $\mathcal{K} \models t = t'$ , si, pour tout  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{A} \models t = t'$ . Plus généralement étant donné un ensemble d'identités  $\Xi \subseteq Id(X)$  de type  $\rho$ , l'algèbre  $\mathcal{A}$  (resp. la classe d'algèbres  $\mathcal{K}$ ) satisfait  $\Xi$ , noté  $\mathcal{A} \models \Xi$  (resp.  $\mathcal{K} \models \Xi$ ) si  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{K}$ ) satisfait chacune des identités de  $\Xi$ . Une classe d'algèbres de type algébrique  $\rho$  qui satisfait un ensemble d'identités  $\Xi$  de type  $\rho$  sur un ensemble de variables  $X$  est une *classe équationnelle*, notée  $M(\Xi)$ . On dit alors que  $M(\Xi)$  est axiomatisée par  $\Xi$  ou que  $\Xi$  est une base pour  $M(\Xi)$ . Toute algèbre de  $M(\Xi)$  est dite être un *modèle* pour  $\Xi$ .

Les classes équationnelles coïncident avec les variétés d'algèbres.

**Théorème 1.5.4.** (Birkhoff) Soit  $\mathcal{K}$  une classe d'algèbres. Alors  $\mathcal{K}$  est une classe équationnelle si et seulement si c'est une variété d'algèbres.

Ainsi, toute identité satisfaite par une algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{K}$  est satisfaite par toutes les sous-algèbres et les images homomorphes de  $\mathcal{A}$ . De plus, si une identité est satisfaite par chaque algèbre de la suite  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  d'algèbres de  $\mathcal{K}$ , alors cette même identité est satisfaite par  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

**Exemple 1.5.5.** On définit les deux variétés suivantes :

1. la variété  $\mathcal{M}$  de type  $(\{\cdot\}, \{(\cdot, 2)\})$  satisfaisant l'identité :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

2. la variété  $\mathcal{M}'$  de type  $(\{\cdot, e\}, \{(\cdot, 2), (e, 0)\})$  satisfaisant les identités :

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \\ x \cdot e &= x \\ e \cdot x &= x\end{aligned}$$

La variété  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{M}'$ ) est la variété de tous les semigroupes (resp. monoïdes) (voir Exemple 1.5.2).

### 1.5.3 Théories équationnelles

L'ensemble des identités de type algébrique  $\rho$  sur ensemble de variables  $X$  qu'une classe d'algèbres  $\mathcal{K}$  de type  $\rho$  satisfait est noté  $Id_{\mathcal{K}}(X)$ . En particulier, on a les égalités suivantes :

$$M(Id_{\mathcal{K}}(X)) = V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$$

Une *théorie équationnelle* est un ensemble d'identités  $\Xi$  de type algébrique  $\rho$  sur un ensemble de variables  $X$  tel qu'il existe une classe d'algèbres  $\mathcal{K}$  de type  $\rho$  telle que

$$Id_{\mathcal{K}}(X) = \Xi$$

L'ensemble des identités  $\Xi$  est appelée la *variété* de  $\mathcal{K}$ . Soit  $X$  un ensemble de variables. Lorsqu'une variété d'algèbres  $\mathcal{K}$  est définie par un ensemble d'identités  $\Xi \subseteq Id(X)$ , l'ensemble des identités  $\Xi$  peut ne pas être exhaustif. C'est-à-dire  $\Xi \subsetneq Id_{\mathcal{K}}(X)$ . Toutefois, d'autres identités de  $\Xi^C$  peuvent être déduites à partir de  $\Xi$ .

Soient  $X$  un ensemble de variables,  $\rho$  une signature algébrique et  $T(X)$  l'ensemble des termes de type  $\rho$  sur  $X$ . Soit  $\Xi \subseteq Id(X)$  et soient  $t, t' \in T(X)$ . On écrit  $\Xi \models t = t'$  si toute algèbre de type  $\rho$  satisfaisant  $\Xi$  satisfait aussi  $t = t'$ . Dit autrement, si pour toute algèbre  $\mathcal{A}$  de type  $\rho$ ,  $\mathcal{A} \models \Xi$  implique  $\mathcal{A} \models t = t'$ . De plus :

**Définition 1.5.6.** Soient  $X$  un ensemble de variables,  $\rho$  une signature algébrique et  $T(X)$  l'ensemble des termes de type  $\rho$  sur  $X$ . Soit  $\Xi \subseteq Id(X)$  et soient  $t, t' \in T(X)$ . La fermeture déductive de  $\Xi$ , notée  $D(\Xi)$ , est le plus petit sous-ensemble de  $Id(X)$  tel que  $\Xi \subseteq D(\Xi)$  et

1. pour tout  $t \in T(X)$ ,  $t = t \in D(\Xi)$  ;
2. si  $t = t' \in D(\Xi)$  alors  $t' = t \in D(\Xi)$  ;
3. si  $t = t', t' = t'' \in D(\Xi)$  alors  $t = t'' \in D(\Xi)$  ;
4. si  $t_1 = t'_1 \in D(\Xi)$ ,  $t_1$  est un sous-terme d'un terme  $t \in T(X)$  et  $t'$  est obtenu à partir de  $t$  en remplaçant certains sous-termes isomorphes à  $t_1$  par  $t'_1$  alors  $t = t' \in D(\Xi)$  ;
5. si  $t_1 = t'_1 \in D(\Xi)$ ,  $x \in X$ ,  $t_x \in T(X)$  et  $t, t' \in T(X)$  deux termes obtenus en substituant toutes les occurrences de  $x$  dans respectivement  $t_1$  et  $t'_1$  par  $t_x$  alors  $t = t' \in D(\Xi)$ .

Toute identité  $t = t' \in D(\Xi) \setminus \Xi$  est dite *prouvable* à partir de  $\Xi$ , noté  $\Xi \vdash t = t'$ . Une *preuve formelle* de  $t = t'$  est une suite d'identités de  $Id(X)$

$$t_1 = t'_1, t_2 = t'_2, \dots, t_n = t'_n$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ , telle que  $t_n = t$  et  $t'_n = t'$  et, pour tout  $i \in [n]$  :

- soit  $t_i$  et  $t'_i$  sont deux termes identiques (première règle de la Définition 1.5.6);
- ou  $t_i = t'_i$  est obtenu à partir des identités qui le précède dans la suite en appliquant une des transformations (2)–(5) de la Définition 1.5.6.

On énonce le théorème de complétude de la logique équationnelle dû à Birkhoff.

**Théorème 1.5.7.** (*Birkhoff*) Soient  $X$  un ensemble de variables et soit  $\Xi \subseteq Id(X)$ . Alors, pour toute identité  $t = t' \in Id(X)$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\Xi \models t = t'$
2.  $t = t' \in D(\Xi)$ .

Lors de l'étude d'une théorie équationnelle, il est souvent question d'étudier la décidabilité de celle-ci. Une théorie équationnelle  $\Xi \subseteq Id(X)$ , pour un ensemble de variables  $X$ , est *décidable* s'il existe un algorithme décidant de l'appartenance d'une identité à  $D(\Xi)$ .

#### 1.5.4 Algèbres libres

Soit  $\mathcal{K}$  une classe d'algèbres de type  $\rho$  et soit  $X$  un ensemble. L'algèbre  $\mathcal{A}$  de type  $\rho$  est dite avoir la *propriété universelle* pour  $\mathcal{K}$  sur  $X$  si et seulement si, pour toute algèbre  $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ , toute fonction  $f: X \rightarrow B$  peut être étendue vers un homomorphisme  $f^\#: A \rightarrow B$ . Cet homomorphisme fait que le diagramme de la Figure 1.12, où la fonction  $g$  est définie par, pour tout  $x \in X$ ,  $g(x) = x$ , commute. D'une autre manière,  $f^\#$  doit vérifier  $f^\# \circ g = f$ . De plus, si  $X$  engendre

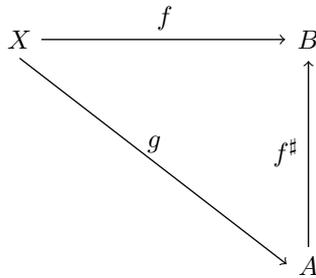


FIGURE 1.12

$\mathcal{A}$  alors  $f^\#$  est l'unique homomorphisme étendant  $f$ .

**Proposition 1.5.8.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre engendrée par un ensemble  $X \subseteq A$ . Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de même type que  $\mathcal{A}$  et soit une fonction  $f: X \rightarrow B$ . S'il existe un homomorphisme étendant  $f$  alors il est unique.

*Démonstration.* Soient  $g: A \rightarrow B$  et  $h: A \rightarrow B$  deux homomorphismes étendant  $f$  et soit  $\rho$  la signature de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Soit  $a \in A$ . La preuve est par induction sur le nombre ordinal maximal  $\alpha$  d'imbrications des opérations de  $\rho$  utilisées pour construire  $a$ . Si  $\alpha = 0$  alors  $a \in X$  et  $g(a) = h(a) = f(a)$ . Dans le cas où  $\alpha = 1$ , supposant sans perte de généralité que  $a = op((a_i)_{i \in I})$  pour un ordre linéaire

$I \in \mathcal{S}$ , une opération de  $\rho_I$  et pour une suite  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $A$ . Puisque  $\alpha = 1$ , alors pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \in X$ . Alors

$$\begin{aligned} g(\text{op}^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I})) &= \text{op}^{\mathcal{A}}((g(a_i))_{i \in I}) \\ &= \text{op}^{\mathcal{A}}((h(a_i))_{i \in I}) \\ &= h(\text{op}^{\mathcal{A}}((a_i)_{i \in I})) \end{aligned}$$

La preuve est la même pour  $\alpha > 1$ . On déduit que, pour tout  $i \in I$ ,  $g(a_i) = h(a_i)$  par hypothèse d'induction.  $\square$

Dans ce cas,  $\mathcal{A}$  est dite *libre* pour  $\mathcal{K}$  sur  $X$ . Par ailleurs, si  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$  alors  $\mathcal{A}$  est dite *libre dans*  $\mathcal{K}$  sur  $X$ . On dit alors que  $\mathcal{A}$  est *librement engendrée* par  $X$  dans  $\mathcal{K}$ . L'ensemble  $X$  est appelé *ensemble générateur libre* de  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\rho$  un type algébrique et soit  $X$  un ensemble de variables. Munir l'ensemble des termes  $T(X)$  de type  $\rho$  de la signature algébrique  $\rho$  nous procure une algèbre libre dans la classe de toutes les algèbres de type  $\rho$  sur  $X$ . Une algèbre libre dans la classe de toutes les algèbres de même type est dite *absolument libre*.

L'*algèbre des termes*  $\mathcal{T}(X)$  de type  $\rho$  sur un ensemble non vide  $X$  est l'algèbre dont l'univers est  $T(X)$  et qui satisfait pour tout  $I \in \mathcal{S}$ ,  $\text{op} \in \rho_I$  et pour toute suite linéairement ordonnée  $(t_i)_{i \in I}$  de termes de  $T(X)$

$$\text{op}^{\mathcal{T}(X)}((a_i)_{i \in I}) = \text{op}((a_i)_{i \in I})$$

Lorsque  $X = \emptyset$ ,  $\mathcal{T}(\emptyset)$  existe si et seulement si  $\rho_0 \neq \emptyset$ . Remarquons que  $\text{op}^{\mathcal{T}(X)}$  est une opération concrète sur les éléments de  $T(X)$  alors que  $\text{op}$  est juste un symbole utilisé pour la construction des termes de  $T(X)$ . Il est bien connu que l'algèbre des termes est une algèbre absolument libre.

**Théorème 1.5.9.** (voir [77, Théorème 10.8] par exemple) Soit  $X \neq \emptyset$  un ensemble de variables et soit  $\rho$  un type algébrique. Alors, si  $\rho_0 \neq \emptyset$ , l'algèbre  $\mathcal{T}(X)$  de type  $\rho$  est absolument libre.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de type  $\rho$  et soit une fonction  $f: X \rightarrow A$ . On définit la fonction  $f^\#: T(X) \rightarrow A$  par, pour tout  $t((x_i)_{i \in I}) \in T(X)$ ,  $f^\#(t) = t^{\mathcal{A}}((f(x_i))_{i \in I})$ . La fonction  $f^\#$  étend bien  $f$ . En effet, si un terme  $t = x \in X$  alors  $f^\#(t(x)) = t^{\mathcal{A}}((f(x))) = f(x)$ . Il faut prouver maintenant que  $f^\#$  commute avec les opérations de  $\rho$ . Soit  $t \in T(X)$  tel que  $t$  est de la forme  $\text{op}((t_i)_{i \in I})$  pour un ordre linéaire  $I \in \mathcal{S}$  et  $\text{op} \in \rho_I$ . Si  $I = 0$  il n'y a rien à faire. Sinon, supposons que  $t$  soit sur la suite  $(x_j)_{j \in J}$  de variables de  $X$ , pour  $J \in \mathcal{S}$ . Alors, par définition

$$f^\#(\text{op}((t_i)_{i \in I})) = \text{op}^{\mathcal{A}}((t_i^{\mathcal{A}}((a_j)_{j \in J}))_{i \in I}) = \text{op}^{\mathcal{A}}((f^\#(t_i))_{i \in I})$$

où pour tout  $j \in J$ ,  $a_j = f(x_j)$ . De plus, puisque par définition  $X$  engendre  $\mathcal{T}(X)$  alors  $\mathcal{T}(X)$  est absolument libre.  $\square$

On montre dans la suite que chaque classe  $\mathcal{K}$  d'algèbres de même type admet une algèbre libre par cardinal d'ensemble de générateurs. Cette algèbre peut être déduite à partir de l'algèbre des termes de même type.

Soit  $\mathcal{K}$  une classe d'algèbres de même type  $\rho$  et soit  $X$  un ensemble de variables. Soit

$$\theta_{\mathcal{K}}(X) = \{\phi \in \text{Cong}(\mathcal{T}(X)) : \mathcal{T}(X)/\phi \in \text{IS}(\mathcal{K})\}$$

On définit une congruence sur  $\mathcal{T}(X)$  associée à  $\mathcal{K}$  de la manière suivante :

$$\vartheta_{\mathcal{K}}(X) = \bigcap_{\phi \in \theta_{\mathcal{K}}} \phi$$

On note par  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X})$  l'algèbre  $\mathcal{T}(X)/\vartheta_{\mathcal{K}}(X)$ , où  $\overline{X} = X/\vartheta_{\mathcal{K}}(X)$ . On a le théorème suivant :

**Théorème 1.5.10.** (Birkhoff) *Soit  $\mathcal{K}$  une classe d'algèbres non vide de même type  $\rho$  et soit  $X$  un ensemble de variables, où  $X \cup \rho_0 \neq \emptyset$ . Alors  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in \text{ISP}(\mathcal{K})$ . De plus, l'algèbre  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X})$  est libre pour  $\mathcal{K}$  sur  $\overline{X}$ .*

Notons qu'en conséquence du théorème précédent et le théorème d'homomorphisme, toute algèbre de type  $\rho$  est une image homomorphe de l'algèbre des termes de type  $\rho$ . De plus, à isomorphisme près, toute classe d'algèbres admet au plus une algèbre libre par cardinal  $|X|$ , pour un ensemble de variables  $X$ .

**Proposition 1.5.11.** (voir [77, Théorème 10.7] par exemple) *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux ensembles de variables tels que  $|X_1| = |X_2|$ . Alors, pour toute classe d'algèbres  $\mathcal{K}$ ,  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X}_1) \simeq F_{\mathcal{K}}(\overline{X}_2)$ .*

Ainsi, l'algèbre des termes  $\mathcal{T}(X)$  de type  $\rho$  et  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X})$  sont des algèbres libres pour  $\mathcal{K}$  sur  $X$ . Pour étudier une classe d'algèbres  $\mathcal{K}$  de plus près, il serait plus intéressant que  $\mathcal{K}$  contienne une algèbre libre. Néanmoins, toutes les classes d'algèbres ne contiennent pas forcément d'algèbres libres. Les variétés d'algèbres ont la particularité de satisfaire cette propriété. En effet, étant donné un ensemble de variables  $X$ ,  $V(\mathcal{K})$  contient forcément une algèbre isomorphe à  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X})$  puisque toute variété d'algèbres est fermée par  $\text{IS}$  en particulier.

**Théorème 1.5.12** (Birkhoff). *Soient  $X$  un ensemble de variables et  $\mathcal{V}$  une variété d'algèbres de type  $\rho$  tels que  $X \cup \rho_0 \neq \emptyset$ . Alors, à isomorphisme près,  $F_{\mathcal{V}}(\overline{X})$  est libre dans  $\mathcal{V}$  sur  $X$ .*

L'intérêt des algèbres libres dans les variétés d'algèbres est décrit par la proposition suivante :

**Proposition 1.5.13.** *Soit  $\mathcal{K}$  une classe d'algèbres de même type  $\rho$  et soit  $X$  un ensemble de variables. Soient  $t$  et  $t'$  deux termes de  $T(X)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathcal{K} \models t = t'$  ;
2.  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \models t = t'$  ;
3.  $(t, t') \in \vartheta_{\mathcal{K}}(X)$ .

*Démonstration.* (1)  $\implies$  (2) et (2)  $\implies$  (3) sont une conséquence du fait que  $F_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in \text{ISP}(\mathcal{K})$  (voir Théorème 1.5.10). Enfin, remarquons qu'en conséquence du théorème d'homomorphisme, pour toute algèbre  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ , le noyau de l'homomorphisme  $f: T(X) \rightarrow \mathcal{A}$  est un élément de  $\vartheta_{\mathcal{K}}$ . Ainsi, puisque  $f(t) = f(t')$  quand  $t = t'$  alors (3)  $\implies$  (2). □

En particulier, trouver l'algèbre libre d'une variété d'algèbres  $\mathcal{K}$  permet de restreindre l'étude de la décidabilité de la théorie équationnelle de  $Id_{\mathcal{K}}(X)$ , pour un ensemble de variables  $X$ , à trouver un algorithme décidant si une identité  $t = t' \in Id(X)$  est satisfaite par  $F_{\mathcal{K}}(\bar{X})$ .

**Exemple 1.5.14.** Reprenons les variétés d'algèbres dans l'Exemple 1.5.5. Pour tout alphabet  $A$ , l'algèbre  $(A^+, \cdot)$  (resp.  $(A^*, \cdot, \epsilon)$ ) est l'algèbre libre dans  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{M}'$ ) sur  $A$ . L'algèbre  $(A^+, \cdot)$  (resp.  $(A^*, \cdot, \epsilon)$ ) est appelée le semigroupe libre (resp. monoïde libre).

Soit  $\mathcal{P}$  la variété de type  $(\{\cdot, \parallel, e\}, \{(\cdot, 2), (\parallel, 2), (e, 0)\})$  satisfaisant les identités :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (1.1)$$

$$(x \parallel y) \parallel z = x \parallel (y \parallel z) \quad (1.2)$$

$$x \parallel y = y \parallel x \quad (1.3)$$

$$x \cdot e = x \quad (1.4)$$

$$e \cdot x = x \quad (1.5)$$

$$x \parallel e = x \quad (1.6)$$

$$e \parallel x = x \quad (1.7)$$

Pour tout alphabet  $A$ , l'algèbre  $(SP(A), \cdot, \parallel, \epsilon)$  est l'algèbre libre dans  $\mathcal{P}$  sur  $A$ . De plus la théorie équationnelle de  $\mathcal{P}$  est décidable, [21]. Soit  $\Xi$  l'ensemble des identités (1.1) – (1.7). L'identité  $e \cdot e = e \parallel e$  est prouvable à partir de  $\Xi$ . En effet, une preuve formelle de  $e \cdot e = e \parallel e$  est la suivante :

$$e \cdot e \stackrel{(1.4)}{=} e, e \stackrel{(1.7)}{=} e \parallel e, e \cdot e = e \parallel e$$

## CHAPITRE 2

## LANGAGES RATIONNELS

Ce chapitre est consacré à la présentation des classes de langages rationnels des ensembles de posets introduits dans la Définition 1.4.18. Un langage rationnel d'une classe de posets  $C$  étiquetés par un alphabet  $A$  est un sous-ensemble de  $C$  qui peut être obtenu à partir des lettres de  $A$  et de l'ensemble vide en utilisant certaines opérations d'arité finies appelées « opérations rationnelles ». Ces langages peuvent être modélisés de plusieurs manières ; par des expressions rationnelles ou des automates notamment.

Le socle de la théorie des automates est le théorème de Kleene [52] établissant la correspondance entre la classe des langages décrits par des automates finis et celle dont les langages sont décrits par des termes, appelés « expressions rationnelles », construits à partir d'un alphabet en utilisant les symboles  $\cdot$ ,  $+$  et  $*$ , interprétés respectivement comme la concaténation, l'union et l'itération finie de la concaténation. Ce théorème a été étendu des mots finis vers notamment les mots dont les supports sont des ordinaux dénombrables [88] et plus généralement des ordres linéaires dénombrables et dispersés [26]. Nous renvoyons le lecteur à [25] où une hiérarchie de plusieurs classes de langages rationnels sur les mots est étudiée. Le théorème de Kleene a également été généralisé par Lodaya et Weil [55, 58] aux posets  $N$ -libres finis et par Bedon et Rispal [15] aux posets série-parallèles transfinis. Ces généralisations ont été montrées en enrichissant les automates de Kleene par de nouveaux types de transitions et ses expressions rationnelles par de nouveaux symboles d'opérations. Le théorème de Kleene et ses généralisations sont l'objet de ce chapitre.

Ce chapitre est divisé en quatre sections. Nous définissons dans la Section 2.1 toutes les opérations rationnelles que nous allons utiliser tout au long de cette thèse et les différentes classes de langages rationnels auxquelles nous nous intéressons. Les expressions rationnelles et les automates décrivant chaque classe de langages rationnels sont introduits dans respectivement la Section 2.2 et la Section 2.3. Nous nous intéressons dans la Section 2.4 aux langages rationnels des monoïdes commutatifs.

## 2.1 Opérations rationnelles

Un langage  $L$  est une partie d'un ensemble  $E$  de structures. Si  $E$  est un ensemble de structures étiquetés sur un alphabet  $A$  alors  $L$  est un langage sur  $A$ . On définit dans la suite différentes opérations sur les langages, appelées *opérations rationnelles*. Ces opérations sont toutes d'arité finies (unaire ou binaire). Lorsque un langage  $L$  ne contient qu'une seule structure  $S$ , on a tendance à écrire par exemple  $S^{op}$  au lieu de  $L^{op}$  pour éviter d'écrire les accolades, pour une opération rationnelle unaire  $op$ . C'est le cas aussi pour les opérations binaires. Les structures dont il est question dans ce chapitre sont des posets N-libres étiquetés.

Le *produit séquentiel* (ou *concaténation*) et le *produit parallèle* de deux langages de posets  $L$  et  $L'$  sont des extensions respectivement du produit séquentiel et du produit parallèle définis de la manière suivante :

$$L \cdot L' = \{P \cdot P' : P \in L, P' \in L'\} \text{ et } L \parallel L' = \{P \parallel P' : P \in L, P' \in L'\}$$

Le symbole de concaténation est souvent négligé. On écrira  $LL'$  pour  $L \cdot L'$ .

L'*union* de deux langages de posets  $L$  et  $L'$  est notée  $L + L'$ . Soient  $A$  et  $B$  deux alphabets. Soient  $L$  un langage de posets étiquetés par  $B$ ,  $P$  un poset étiqueté par  $A$  et  $\xi \in A$ .

La *substitution* de  $\xi$  par  $L$  dans  $P$ , notée  $L \circ_{\xi} P$ , est le langage  $L'$  de posets étiquetés par  $(A \setminus \{\xi\}) \cup B$  où chaque poset  $P' \in L'$  est le résultat du remplacement non-uniforme de chaque élément étiqueté par  $\xi$  dans  $P$  par un poset étiqueté de  $L$ . La non-uniformité sous-entend que deux éléments étiquetés par  $\xi$  peuvent être remplacés par des posets différents de  $L$ . Quand  $L \subseteq SP^{\circ}(B)$  et  $P \in SP^{\circ}(A)$ , la substitution  $L \circ_{\xi}$  est l'homomorphisme

$$h: (SP^{\circ}(A), \parallel, \amalg) \rightarrow (\mathcal{P}(SP^{\circ}(A \cup B)), \parallel, \amalg)$$

où  $\amalg$  désigne le produit indicé par un ordre linéaire dénombrable et dispersé, défini par  $h(\xi) = L$  et  $h(a) = a$  pour tout  $a \in A \setminus \{\xi\}$ . De manière plus formelle, soient  $A$  et  $B$  deux alphabets. Soient  $L$  un langage de posets étiquetés par  $B$ ,  $(P, <_P, l_P)$  un poset étiqueté par  $A$  et  $\xi \in A$ . Alors  $L \circ_{\xi} P$  contient tout poset  $(R, <_R, l_R)$  étiqueté par  $(A \setminus \{\xi\}) \cup B$  tel qu'il existe une application  $\nu_R: l_P^{-1}(\xi) \rightarrow R$  et

$$\begin{aligned} S_R &= (S_P \setminus l_P^{-1}(\xi)) \bigcup_{x \in l_P^{-1}(\xi)} S_{\nu_R(x)} \\ <_R &= <_P|_{S_R} \bigcup_{x \in l_P^{-1}(\xi)} <_{\nu_R(x)} \bigcup_{(x,y) \in <_P \cap P \times l_P^{-1}(\xi)} \{x\} \times S_{\nu_R(y)} \\ &\quad \bigcup_{(y,x) \in <_P \cap l_P^{-1}(\xi) \times P} S_{\nu_R(y)} \times \{x\} \\ l_R &= l_P|_{S_R} \bigcup_{x \in l_P^{-1}(\xi)} l_{\nu_R(x)} \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.1.** Soient  $B = \{a, b\}$ ,  $A = B \cup \{\xi\}$ ,  $P = b \parallel (\xi \cdot \xi) \in SP^{\circ}(A)$  et  $L = \{a \parallel b, b \cdot a\} \subseteq SP^{\circ}(B)$ . Alors  $L \circ_{\xi} P = \{b \parallel ((a \parallel b) \cdot (a \parallel b)), b \parallel ((b \cdot a) \cdot (b \cdot a)), b \parallel ((a \parallel b) \cdot (b \cdot a)), b \parallel ((b \cdot a) \cdot (a \parallel b))\}$ .

La substitution d'une lettre dans un poset par un langage peut être étendue de la manière suivante. Soient  $L$  et  $L'$  deux langages de posets étiquetés par un alphabet  $A$  et soit  $\xi \in A$ . Alors

$$L \circ_{\xi} L' = \bigcup_{P \in L'} L \circ_{\xi} P$$

De manière générale, l'opération de substitution peut être itérée sur le même langage. Soit  $A$  un alphabet avec  $\xi \in A$ . La *substitution itérée* sur un langage  $L$  de posets étiquetés par  $A$ , notée  $L^{*\xi}$ , est définie inductivement de la manière suivante :

$$L^{*\xi} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^{i\xi} \text{ avec } L^{0\xi} = \{\xi\} \text{ et } L^{(i+1)\xi} = \left( \bigcup_{j \leq i} L^{j\xi} \right) \circ_{\xi} L$$

**Exemple 2.1.2.** Soit l'alphabet  $A = \{a\}$  et  $L = a \circ_{\xi} (a(\xi \parallel \xi))^{*\xi}$ . Alors  $L$  est le plus petit langage contenant le poset  $a$  et tel que si  $x, y \in L$  alors  $a(x \parallel y) \in L$ . Ainsi  $L = \{a, a(a \parallel a), a(a(a \parallel a) \parallel a), a(a(a \parallel a) \parallel a(a \parallel a)), \dots\}$ .

Nous définissons maintenant les itérations séquentielles sur les langages de posets. Il s'agit de produits de posets indicés par des ordres linéaires dénombrables et dispersés appartenant à des classes particulières d'ordres linéaires. Ces itérations sont notées  $L^{\mathcal{J}}$ , pour un langage de posets  $L$  et une sous-classe  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{L}$ . Elles sont définies de la manière suivante :

$$L^{\mathcal{J}} = \left\{ \prod_{j \in J} P_j : J \in \mathcal{J}, P_j \in L \right\}$$

Plus précisément. Soit  $L$  un langage de posets. Alors :

$$L^* = \left\{ \prod_{j \in [n]} P_j : n \in \mathbb{N}^*, P_j \in L \right\}$$

Cette itération est appelée l'itération de Kleene. Il s'agit d'une itération séquentielle finie définie par Kleene dans [52]. On définit aussi la variante  $^+$  de la manière suivante.

$$L^+ = \left\{ \prod_{j \in [n]} P_j : n \in \mathbb{N}^*, P_j \in L \right\}$$

Il s'agit de l'itération sur tous les ordres linéaires finis sauf l'ordre linéaire vide. Remarquons que  $L^+ = L^* \setminus \{\epsilon\}$ .

Comme analogue de l'itération séquentielle finie, on définit aussi une itération parallèle finie de la manière suivante. Soit  $L$  un langage où  $\xi$  n'étiquette aucun élément d'un poset qu'il contient. Alors :

$$L^{\otimes} = \{\epsilon\} \circ_{\xi} \{(L \parallel \{\xi\})\}^{*\xi} = \left\{ \prod_{j \in [n]} P_j : n \in \mathbb{N}, P_j \in L \right\}$$

On dénote par  $L^{\oplus} = L^{\otimes} \setminus \{\epsilon\}$ . Ainsi, quand  $A$  est un alphabet,  $A^{\otimes}$  est la classe de toutes les antichaînes sur  $A$ . Les éléments de  $A^{\otimes}$  sont aussi appelées *mots commutatifs*. On y reviendra plus en détails dans la Section 2.4.

L'itération séquentielle de type d'ordre  $\omega$  a été définie dans [61] par McNaughton :

$$L^{\omega} = \left\{ \prod_{j \in \omega} P_j : P_j \in L \right\}$$

Ensuite Wojciechowski a introduit une opération d'itération séquentielle sur les ordinaux dénombrables [88] :

$$L^{\natural} = \left\{ \prod_{j \in \alpha} P_j : \alpha \in \mathcal{O}, P_j \in L \right\}$$

Bruyère et Carton ont introduit les miroirs des itérations séquentielles ci-dessus [26].

$$L^{-\omega} = \left\{ \prod_{j \in -\omega} P_j : P_j \in L \right\}$$

$$L^{-\natural} = \left\{ \prod_{j \in -\alpha} P_j : \alpha \in \mathcal{O}, P_j \in L \right\}$$

Il s'agit respectivement de l'itération séquentielle sur  $-\omega$  et sur les miroirs des ordinaux de  $\mathcal{O}$ . Remarquons que  $L^*, L^+, L^\omega \subseteq L^{\natural}$  et que  $L^*, L^+, L^{-\omega} \subseteq L^{-\natural}$ .

Enfin, soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages de posets. L'opération binaire  $\diamond$  introduite par Bruyère et Carton dans [26] est définie de la manière suivante :

$$L_1 \diamond L_2 = \left\{ \prod_{j \in J \cup \hat{J}^*} P_j : J \in \mathcal{S} \setminus \{0\} \text{ et } P_j \in L_1 \text{ si } j \in J \text{ et } P_j \in L_2 \text{ si } j \in \hat{J}^* \right\}$$

Un poset  $P \in L_1 \diamond L_2$  si et seulement si  $P$  admet une  $K$ -factorisation séquentielle où  $K = J \cup \hat{J}^*$  est un ordre linéaire dénombrable, dispersé, complet et non vide tel que pour tout  $k \in K$ ,  $P_k \in L_1$  quand  $k \in J$  et  $P_k \in L_2$  quand  $k \in \hat{J}^*$  (voir Figure 2.1).

**Remarque 2.1.3.** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages rationnels de posets. Alors  $P \in L_1 \diamond L_2$  si et seulement si il existe un ordre linéaire  $I$  dénombrable, dispersé, complet et non vide, et une suite de posets  $(P_i)_{i \in I}$  tels que  $P = \prod_{i \in I} P_i$  et, pour tout  $i \in I$ , les conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout  $j \in [2]$ , si  $P_i \in L_j$  et  $i$  a un successeur  $i'$  alors  $P_{i'} \notin L_j$  ;
- si  $i$  n'est pas le minimum de  $I$  et n'a pas de prédécesseur alors  $P_i \in L_2$  ;
- si  $i$  n'est pas le maximum de  $I$  et n'a pas de successeur alors  $P_i \in L_2$  ;
- si  $i \in I$  est le plus petit ou le plus grand élément de  $I$  alors  $P_i \in L_1$ .

Notons que  $\epsilon \in L_1 \diamond L_2$  si et seulement si  $\epsilon \in L_1$ .

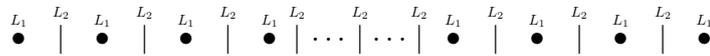


FIGURE 2.1 -  $L_1 \diamond L_2$

Étant donné un langage de posets  $L$ , on note par  $L^\diamond$  le langage  $(L \diamond \{\epsilon\}) + \{\epsilon\}$ . D'une autre manière :

$$L^\diamond = \left\{ \prod_{j \in J} P_j : J \in \mathcal{S} \text{ et pour tout } j \in J, P_j \in L \right\}$$

Remarquons la consistance avec la notation par  $A^\diamond$  de la classe des ordres linéaires dénombrables et dispersés étiquetés par un alphabet  $A$ .

De nombreuses classes de langages rationnels ont été définies. Chaque classe de langages rationnels est spécifique à une classe de posets particulière (voir Définition 1.4.18) et est différente des autres de par les opérations rationnelles utilisées. Nous listons quelques unes dans la suite.

La classe des langages rationnels de la classe de mots  $\mathcal{M}$ , notée  $Rat(\mathcal{M})$ , pour  $\mathcal{M} \in \{A^*, A^\sharp, A^\diamond\}$  est la plus petite classe de langages de mots contenant  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{a\}$  pour tout  $a \in A$  et qui est fermée par

- $\{\cdot, *, +\}$  pour  $\mathcal{M} = A^*$  [52];
- $\{\cdot, *, +, \omega, \natural\}$  pour  $\mathcal{M} = A^\sharp$  [88];
- $\{\cdot, *, +, \omega, -\omega, \natural, -\natural, \diamond\}$  pour  $\mathcal{M} = A^\diamond$  [26].

Les classes de langages rationnels définis ci-dessus sont des langages rationnels de respectivement mots finis, mots sur les ordinaux dénombrables et mots sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Notons que pour un alphabet  $A$  :

$$Rat(A^*) \subset Rat(A^\sharp) \subset Rat(A^\diamond)$$

Une hiérarchie de langages rationnels sur les mots a été établie dans [25]. Les langages rationnels de mots définis ci-dessus ainsi que d'autres y sont étudiés. Nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails.

Tout ensemble de mots n'est pas forcément un langage rationnel :

**Exemple 2.1.4.** *Le langage  $L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$  contenant tous les mots finis étiquetés par  $A = \{a, b\}$  ayant autant de  $a$  que de  $b$  et où les  $b$  sont situés après les  $a$  n'est pas rationnel.*

La classe des langages rationnels de la classe de posets  $\mathcal{C}$ , notée  $Rat(\mathcal{C})$ , pour  $\mathcal{C} \in \{SP(A), SP^\diamond(A)\}$  est la plus petite classe de langages de posets contenant  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{a\}$  pour tout  $a \in A$  et qui est fermée par

- $\{\cdot, \parallel, \circ_\xi, *^\xi, *, +\}$  pour  $\mathcal{C} = SP(A)$  [55, 56, 57, 58];
- $\{\cdot, \parallel, +, \circ_\xi, *^\xi, *, \omega, -\omega, \natural, -\natural, \diamond\}$  pour  $\mathcal{C} = SP^\diamond(A)$  [15];

sous les conditions suivantes pour les opérations  $\circ_\xi$  et  $*^\xi$  et pour tout langages  $L, L'$  de  $\mathcal{C}$  :

- $L \circ_\xi L' \in Rat(\mathcal{C})$  si  $\epsilon \notin L$ ;
- $L^{*\xi} \in Rat(\mathcal{C})$  si pour tout élément étiqueté par  $\xi$  dans un poset  $P$  de  $L$ , il existe un autre élément de  $P$  qui ne lui est pas comparable.

Il s'agit des classes des langage rationnels de posets dont la factorisation séquentielle irréductible est indicée respectivement par des ordres linéaires finis et des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Les conditions sur  $\circ_\xi$  et  $*^\xi$  excluent les langages du type de l'Exemple 2.1.4. Ceci afin d'instaurer une hiérarchie cohérente entre les classes des langages rationnels de chaque classe de posets. Ainsi, il est clair que pour un alphabet  $A$  on a :

$$Rat(A^*) \subset Rat(A^\sharp) \subset Rat(A^\diamond) \subset Rat(SP^\diamond(A)) \\ Rat(A^*) \subset Rat(SP(A)) \subset Rat(SP^\diamond(A))$$

Les deux prochaines sous-sections illustrent deux représentations particulières des langages rationnels. Les expressions rationnelles et les automates en l'occurrence. Le prochain chapitre détaille des caractérisations au moyen de la logique formelle de différentes classes de langages rationnels.

## 2.2 Expressions rationnelles

Soit  $A$  un alphabet et soit  $\xi \in A$ . Une *expression rationnelle* sur  $A$  est un terme sur  $A \cup \{\emptyset, \epsilon\}$  de type  $\rho = (F, \lambda)$  où

$$F = \{\cdot, \parallel, +, \circ_\xi, *^\xi, *, ^\omega, ^{-\omega}, \natural, ^{-\natural}, \diamond\}$$

et pour tout  $op \in F$ ,  $\lambda(op)$  est d'arité de  $op$ . Les notions de sous-expression rationnelle et sous-expression rationnelle directe se définissent similairement aux notions de sous-terme et sous-terme direct. L'ensemble des expressions rationnelles sur  $A$  est notée  $R_E(A)$ .

On définit inductivement une application  $L: R_E(A) \rightarrow \mathcal{P}(SP^\circ(A))$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L(\emptyset) &= \emptyset \\ L(\epsilon) &= \{\epsilon\} \\ L(a) &= \{a\}, \text{ pour tout } a \in A \\ L(e_1 \cdot e_2) &= L(e_1) \cdot L(e_2) \\ L(e_1 \parallel e_2) &= L(e_1) \parallel L(e_2) \\ L(e_1 + e_2) &= L(e_1) + L(e_2) \\ L(e_1 \circ_\xi e_2) &= L(e_1) \circ_\xi L(e_2) \\ L(e^{*\xi}) &= L(e)^{*\xi} \\ L(e^*) &= L(e)^* \\ L(e^\omega) &= L(e)^\omega \\ L(e^{-\omega}) &= L(e)^{-\omega} \\ L(e^\natural) &= L(e)^\natural \\ L(e^{-\natural}) &= L(e)^{-\natural} \\ L(e_1 \diamond e_2) &= L(e_1) \diamond L(e_2) \end{aligned}$$

Étant donné  $e \in R_E(A)$ ,  $L(e)$  est appelé le *langage* de l'expression rationnelle  $e$ . Un langage  $L$  est *rationnel* s'il existe une expression rationnelle  $e \in R_E(A)$  telle que  $L(e) = L$ .

Soit  $A$  un alphabet. On note par

- $R_E(A^*)$  le sous-ensemble de  $R_E(A)$  n'utilisant que les symboles de

$$A \cup \{\emptyset, \epsilon\} \cup \{\cdot, *, +\}$$

- $R_E(A^\natural)$  le sous-ensemble de  $R_E(A)$  n'utilisant que les symboles de

$$A \cup \{\emptyset\} \cup \{\cdot, *, +, ^\omega, ^\natural\}$$

- $R_E(A^\diamond)$  le sous-ensemble de  $R_E(A)$  n'utilisant que les symboles de

$$A \cup \{\emptyset, \epsilon\} \cup \{\cdot, *, +, ^\omega, ^{-\omega}, ^\natural, ^{-\natural}, \diamond\}$$

Ainsi, étant donné un langage  $L$  sur  $A$ , on a

- $L \in Rat(A^*)$  si et seulement si il existe  $e \in R_E(A^*)$  tel que  $L = L(e)$ ;

- $L \in \text{Rat}(A^\sharp)$  si et seulement si il existe  $e \in R_E(A^\sharp)$  tel que  $L = L(e)$  ;
- $L \in \text{Rat}(A^\diamond)$  si et seulement si il existe  $e \in R_E(A^\diamond)$  tel que  $L = L(e)$ .

En ce qui concerne les posets, soit  $A$  un alphabet avec  $\xi \in A$ . On note par

- $R_E(SP(A))$  le sous-ensemble de  $R_E(A)$  n'utilisant que les symboles de

$$A \cup \{\emptyset, \epsilon\} \cup \{\cdot, \parallel, \circ_\xi, *^\xi, *, +\}$$

- $R_E(SP^\diamond(A))$  le sous-ensemble de  $R_E(A)$  n'utilisant que les symboles de

$$A \cup \{\emptyset, \epsilon\} \cup \{\cdot, \parallel, +, \circ_\xi, *^\xi, *, \omega, -\omega, \natural, -\natural, \diamond\}$$

avec les conditions suivantes sur les expressions rationnelles de la forme  $e \circ_\xi e'$  et  $e *^\xi$  :

- $\epsilon \notin L(e)$  dans les expressions rationnelles de la forme  $e \circ_\xi e'$  et  $e *^\xi$  ;
- dans les expressions rationnelles de la forme  $e *^\xi$ , pour tout élément étiqueté par  $\xi$  dans un poset  $P$  de  $L(e)$ , il existe un autre élément de  $P$  qui ne lui est pas comparable.

Ces conditions excluent de  $R_E(SP(A))$  et  $R_E(SP^\diamond(A))$  les expressions rationnelles de la forme  $\epsilon \circ_\xi (a\xi b) *^\xi$ , par exemple, dont le langage est  $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Celui-ci n'est pas rationnel (voir Exemple 2.1.4). Ainsi, étant donné un alphabet  $A$  avec  $\xi \in A$  et  $L$  un langage sur  $A$ , on a :

- $L \in \text{Rat}(SP(A))$  si et seulement si il existe  $e \in R_E(SP(A))$  tel que  $L = L(e)$  ;
- $L \in \text{Rat}(SP^\diamond(A))$  si et seulement si il existe  $e \in R_E(SP^\diamond(A))$  tel que  $L = L(e)$ .

## 2.3 Automates

Chacun des modèles d'automates que nous allons étudier correspond à l'automate de la Définition 2.3.1 auquel est retiré un ou plusieurs types de transitions. L'automate de la Définition 2.3.1 correspond à celui introduit par Bedon et Rispal dans [15]. Un langage est reconnu par ce dernier si et seulement si c'est un langage de  $\text{Rat}(SP^\diamond(A))$ . Pour distinguer entre les différents modèles, on appelle automates sur les mots finis, ordinaux dénombrables et ordres linéaires dénombrables et dispersés les automates sur les mots de  $A^*$ ,  $A^\sharp$  et  $A^\diamond$  respectivement. Pour ce qui est des posets, on appelle automate sur les posets finis et posets transfinis les automates branchants reconnaissant les langages rationnels de  $SP(A)$  et  $SP^\diamond(A)$  respectivement, pour un alphabet  $A$ .

### 2.3.1 Définitions et notation

Nous définissons dans cette section des notions communes à toutes les classes d'automates présentées dans la suite.

**Définition 2.3.1.** *Un automate est un quintuplet  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  où :*

- $Q$  est un ensemble fini d'éléments appelés états ;
- $A$  est un alphabet fini ;

- $I \subseteq Q$  est l'ensemble des états initiaux ;
- $F \subseteq Q$  est l'ensemble des états finaux ;
- $E$  est l'ensemble des transitions de  $\mathcal{A}$ .

L'ensemble des transitions  $E$  est partitionné en cinq types de transitions :

1. les transitions successeurs  $E_{succ} \subseteq (Q \times A \times Q)$
2. les transitions limites à gauche  $E_{limG} \subseteq (\mathcal{P}(Q) \times Q)$
3. les transitions limites à droite  $E_{limD} \subseteq (Q \times \mathcal{P}(Q))$
4. les transitions fork  $E_{fork} \subseteq (Q \times \mathcal{M}^{>1}(Q))$
5. les transitions join  $E_{join} \subseteq (\mathcal{M}^{>1}(Q) \times Q)$

Les ensembles de transitions successeurs, limites à droite et limites à gauche forment l'ensemble des transitions séquentielles  $E_{seq} = E_{succ} \cup E_{limD} \cup E_{limG}$ .

Un automate peut être représenté de plusieurs manières. Nous choisissons de le représenter par un diagramme où :

- les états sont représentés par des cercles contenant le nom de l'état en question ;
- les états initiaux sont marqués par une flèche entrante ;
- les états finaux sont doublement encerclés ;
- les transitions sont représentées par des flèches entre les états ou les ensembles d'états concernés.

**Exemple 2.3.2.** Sur la Figure 2.2 est représenté l'automate  $(Q, A, E, I, F)$  avec

$$\begin{aligned}
 Q &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} & A &= \{a, b\} \\
 E_{succ} &= \{1 \xrightarrow{a} 1, 1 \xrightarrow{b} 2, 2 \xrightarrow{b} 4, 3 \xrightarrow{b} 5, 6 \xrightarrow{a} 1\} \\
 E_{limG} &= \{(\{1, 6\}, 7)\} & E_{limD} &= \{(0, \{1\})\} \\
 E_{fork} &= \{(1, \{2, 3\})\} & E_{join} &= \{(\{4, 5\}, 6)\} \\
 I &= \{0\} & F &= \{1, 7\}
 \end{aligned}$$

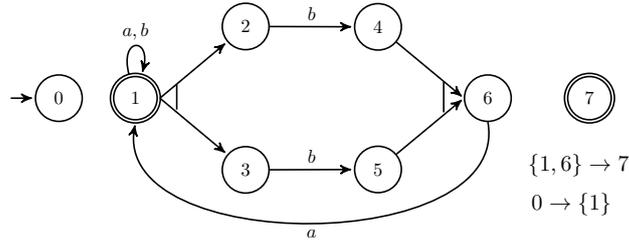


FIGURE 2.2 – Exemple d'un automate

Soit  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  un automate. Une transition séquentielle successeur  $t = (p, a, q)$  est notée  $p \xrightarrow{a} q$ . Dans ce cas on dit que  $t$  est étiquetée par  $a$ . Une transition limite à gauche  $(P, q) \in E_{limG}$  (resp. droite  $(q, P) \in E_{limD}$ ) est notée  $P \rightarrow q$  (resp.  $q \rightarrow P$ ). On dit qu'une transition  $t \in E$  quitte un état ou sort d'un

état  $p$  si  $t$  est une transition successeur  $(p, a, q)$ , une transition limite à droite  $p \rightarrow P$  ou une transition fork  $(p, \{p_1, \dots, p_n\})$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Symétriquement, on dit que  $t \in E$  rentre dans un état  $q$  si c'est une transition successeur  $(p, a, q)$ , une transition limite à gauche  $P \rightarrow q$  ou une transition join  $(\{q_1, \dots, q_n\}, q)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Un automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  prend en entrée un poset étiqueté  $P$  et répond si oui ou non il accepte  $P$ . La notion d'acceptation de  $P$  par  $\mathcal{A}$  est relative à la notion de chemin dans un automate. De manière générale, un chemin  $\gamma$  d'un état  $p$  à un état  $q$  dans un automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  est un poset étiqueté par  $E$  ayant un unique minimum et un unique maximum. L'élément minimum de  $\gamma$  est étiqueté par une transition quittant  $p$  et l'élément maximum de  $\gamma$  est étiqueté par une transition entrant dans  $q$ . En particulier, si  $\mathcal{A}$  est un automate sur les mots alors  $\gamma$  est de largeur 1 et les transitions étiquetant  $\gamma$  sont toutes séquentielles. Les états  $p$  et  $q$  sont appelés respectivement la *source* et la *destination* de  $\gamma$ . Deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  dans  $\mathcal{A}$  sont *consécutifs* si la destination de  $\gamma$  est la source de  $\gamma'$ . Un chemin  $\gamma$  d'un état  $p$  à un état  $q$  dans  $\mathcal{A}$  est dit *acceptant* si  $p$  est un état initial de  $\mathcal{A}$  et  $q$  un état final. Le langage reconnu par un automate dépend de la notion de chemin étiqueté par un poset dans un automate. Nous définirons cette notion formellement pour chaque classe d'automates. De manière générale, un automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  sur l'ensemble de posets  $E \in \{A^*, A^\#, A^\circ, SP(A), SP^\circ(A)\}$  est *complet* si, pour tout  $P \in E$  et pour tout  $p \in Q$ , il existe  $q \in Q$  tel que  $P$  est l'étiquette d'un chemin de  $p$  vers  $q$  dans  $\mathcal{A}$ . Lorsqu'un automate n'est pas complet, il est facile de le compléter. C'est-à-dire qu'il est facile d'obtenir un automate  $\mathcal{B}$  de même langage que  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{B}$  est complet. Il suffit de construire  $\mathcal{B}$  à partir de  $\mathcal{A}$  en ajoutant à son ensemble d'états un nouvel état non final dit *puits*  $s$  et d'ajouter les transitions qui manquent à  $\mathcal{A}$  pour qu'il soit complet en les faisant toutes rentrer dans  $s$ . Quand un poset  $P$  est l'étiquette d'un chemin acceptant dans un automate  $\mathcal{A}$ , on dit que  $\mathcal{A}$  reconnaît (ou accepte)  $P$ . Le langage de  $\mathcal{A}$ , noté  $L(\mathcal{A})$ , est l'ensemble des étiquettes de ses chemins acceptants.

Nous présentons dans la suite les modèles d'automates reconnaissant chaque classe de langages rationnels définie dans les sections précédentes. On rappelle également quelques résultats, marquants ou nécessaires par la suite, de chaque classe de langages rationnels, notamment la fermeture effective de ces classes par complémentation. Cette propriété de fermeture est très utile. Elle permet de déduire la fermeture par l'intersection et la différence. C'est aussi une propriété nécessaire dans le chapitre suivant, lors de la transformation d'une formule de logique en automate. On se penchera aussi sur les problèmes de décidabilité de vacuité et d'équivalences d'automates. Ces éléments sont indispensables pour prouver la décidabilité des logiques formelles qu'on étudiera dans le chapitre suivant. Tous les théorèmes que nous citerons dans les prochaines sous-sections sont effectifs. C'est à dire qu'il existe des algorithmes capables de témoigner de la véracité de chaque théorème.

### 2.3.2 Mots finis

Les automates sur les mots finis ont été introduits par Kleene dans [52]. L'ensemble de transitions d'un automate de Kleene ne comporte que des transitions séquentielles successeurs.

Un chemin dans un automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  sur les mots finis est une

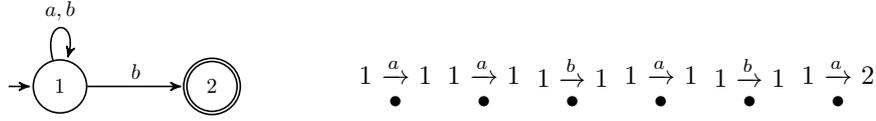


FIGURE 2.3 – Un automate de Kleene de langage  $(a+b)^* \cdot b$  et un de ses chemins acceptants étiqueté par  $aababb$

suite finie de transitions séquentielles successeurs. Formellement, l'ensemble des chemins  $\gamma$  étiquetés par des mots de  $A^*$  de contenus  $C(\gamma)$  dans  $\mathcal{A}$  est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :

- pour tout  $p \in Q$ ,  $\epsilon$  est un chemin de  $p$  à  $p$  étiqueté par  $\epsilon$  de contenu  $\{p\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute transition  $t = (p, a, q) \in E_{seq}$ ,  $t$  est un chemin de  $p$  à  $q$  étiqueté par  $a$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite finie  $(\gamma_i)_{i \leq k}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$ , avec  $k \geq 1$ , respectivement étiquetés par  $u_0, \dots, u_k$  de  $p_0, \dots, p_k$  à  $q_0, \dots, q_k$  de contenus  $(C(\gamma_i))_{i \leq k}$ ,  $\prod_{i \leq k} \gamma_i$  est un chemin de  $p_0$  à  $q_k$  étiqueté par  $\prod_{i \leq k} u_i$  de contenu  $\cup_{i \leq k} C(\gamma_i)$  dans  $\mathcal{A}$ .

Remarquons que la factorisation séquentielle irréductible de tout mot fini non vide accepté par  $\mathcal{A}$  est indicée par le même ordre linéaire fini que la factorisation séquentielle irréductible du chemin dont il est l'étiquette.

**Exemple 2.3.3.** Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. Sur la Figure 2.3 est représenté à gauche un automate de Kleene  $\mathcal{A}$  reconnaissant le langage rationnel  $L \in \text{Rat}(A^*)$  dont tous les mots se terminent par un  $b$ . Formellement

$$\mathcal{A} = (\{1, 2\}, \{a, b\}, \{1 \xrightarrow{a} 1, 1 \xrightarrow{b} 1, 1 \xrightarrow{b} 2\}, \{1\}, \{2\})$$

Le langage  $L$  est aussi le langage de l'expression rationnelle  $(a+b)^* \cdot b$ , qu'on peut écrire aussi  $A^*b$ . Sur le côté droit de la Figure 2.3 un chemin acceptant de  $\mathcal{A}$ . Ce chemin est de contenu  $\{1, 2\}$  et il est étiqueté par  $aababb$ .

Le bien connu théorème de Kleene est le suivant :

**Théorème 2.3.4** ([52]). Soit  $L$  un langage sur un alphabet  $A$  fini. Alors  $L \in \text{Rat}(A^*)$  si et seulement s'il existe un automate de Kleene  $\mathcal{A}$  tel que  $L = L(\mathcal{A})$ .

D'autres caractérisations des langages rationnels de  $A^*$  existent, notamment des caractérisations algébriques. En effet, les langages rationnels de  $A^*$  peuvent aussi être définies par les monoïdes finis.

Soit  $A$  un alphabet et soit  $L \subseteq A^*$ . Soit  $(M, \cdot, \epsilon)$  un monoïde et soit  $f: A^* \rightarrow M$  un homomorphisme de monoïdes. On dit que le monoïde  $M$  reconnaît  $L$  s'il existe un sous-ensemble  $P \subseteq M$  tel que  $L = f^{-1}(P)$ .

**Théorème 2.3.5.** Soit  $A$  un alphabet fini et soit  $L \subseteq A^+$ . Alors,  $L \in \text{Rat}(A^+)$  si et seulement si  $L$  est reconnu par un monoïde fini.

De plus, si  $L$  est reconnu par un monoïde  $M$ ,  $L^C$  l'est aussi. En effet, s'il existe  $P \subseteq M$  tel que  $f^{-1}(P) = L$ , où  $f: A^* \rightarrow M$  est un homomorphisme de monoïdes, alors  $L^C = f^{-1}(P^C)$ . Ainsi :

**Théorème 2.3.6.** Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $L$  et  $L'$  deux langages de  $\text{Rat}(A^*)$ . Alors  $L^C$ ,  $L \cap L'$  et  $L \setminus L'$  sont des langages rationnels de  $\text{Rat}(A^*)$ .

**Exemple 2.3.7.** Reprenons le langage de l'Exemple 2.3. Le langage complémentaire de  $L(A^*b)$  est  $L(A^*a + \epsilon)$ . Il s'agit de tous les mots de  $A^*$  qui ne se terminent pas  $b$ . Un automate reconnaissant ce langage complémentaire est représenté dans la Figure 2.4.

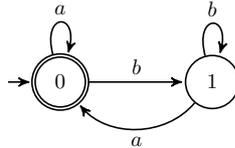


FIGURE 2.4 – Un automate de Kleene dont le langage est le complémentaire du langage de l'automate de la Figure 2.3

### 2.3.3 Mots sur les ordinaux

Pour reconnaître les langages rationnels sur les ordinaux dénombrables il faut ajouter aux automates de Kleene un nouveau type de transitions. Il s'agit de transitions appartenant à  $\mathcal{P}(Q) \times Q$ , pour un ensemble d'états  $Q$ . C'est Büchi et Muller qui ont été les premiers à utiliser des automates sur  $\omega$  dans respectivement [28] et [63]. Büchi a ensuite défini des automates sur les ordinaux dans [28] et [31]. Un modèle d'automate reconnaissant des langages rationnels de mots sur les ordinaux de rangs finis a été défini par Choueka dans [38]. Une autre définition de modèle d'automates sur les ordinaux a été donnée par dans [88] par Wojciechowski avec une extension du théorème de Kleene à la clé. D'autres variantes d'automates sur les ordinaux ont été aussi introduites. Pour plus de généralité, nous travaillerons sur un modèle consistant en l'automate de la Définition 2.3.1 où l'ensemble des transitions est restreint aux transitions séquentielles successeurs et limites à gauche.

**Exemple 2.3.8.** L'automate  $\mathcal{A}$  représenté sur la Figure 2.5 est le suivant :

$$\mathcal{A} = (\{1, 2\}, \{a, b\}, \{1 \xrightarrow{a} 1, 1 \xrightarrow{b} 1, (\{1\}, 2)\}, \{1\}, \{2\})$$

Dans cet automate, il n'y a qu'une seule transition limite à gauche :  $\{1\} \rightarrow 2$ .

Les transitions séquentielles successeurs sont  $1 \xrightarrow{a} 1$  et  $1 \xrightarrow{b} 1$ .

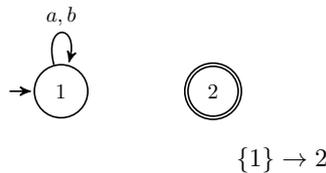


FIGURE 2.5 – Un automate de Büchi sur les ordinaux

Un chemin dans un automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  sur les ordinaux dénombrables est une suite de transitions de  $E$  indicée par un ordinal dénombrable. Les transitions d'un tel chemin sont soit des transitions successeurs  $E_{seq}$  ou des transitions limites à gauche  $E_{limG}$ . Dans un chemin  $\gamma = (t_\beta)_{\beta < \alpha}$  de  $\mathcal{A}$ , pour un ordinal  $\alpha \in \mathcal{O}$ , une transition  $t_\beta$  est une transition limite à gauche si et seulement si  $\beta$  est un ordinal limite. Dans le cas contraire,  $t_\beta$  est une transition séquentielle successeur. L'utilisation d'une transition limite à gauche lors d'un indice limite  $\beta < \alpha$  dans  $\gamma$  est tributaire des transitions utilisées avant  $\beta$ . C'est ici qu'intervient la notion d'ensemble cofinal à gauche d'une suite d'ensembles d'états indicée par un ordre linéaire.

Soit  $Q$  un ensemble,  $C = (Q_j)_{j \in J}$  une suite de sous-ensembles de  $Q$  indicée par un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $J$ ,  $c \in \hat{J}$  une coupure de  $J$  et soit  $<$  la relation d'ordre totale et stricte naturelle sur  $J \cup \hat{J}$ . Alors

$$cof_{c^-}(C) = \{q : \text{pour tout } i < c, \text{ il existe } i' \in J \text{ tel que } i < i' < c \text{ et } q \in Q_{i'}\}$$

L'ensemble  $cof_{c^-}(C)$  est l'ensemble des éléments de  $Q$  qui apparaissent *infiniment souvent* dans les  $Q_j$ ,  $j < c$ , d'indice infiniment proche à gauche de la coupure  $c$ . Il est appelé l'*ensemble cofinal à gauche* de  $C$  en  $c$ . Remarquons que  $cof_{c^-}(C)$  est vide quand  $c$  a un prédécesseur dans  $J \cup \hat{J}$ . Il est de même quand  $c$  est le minimum de  $J \cup \hat{J}$ . Inversement, quand la coupure  $c$  n'a pas de prédécesseur dans  $J \cup \hat{J}$  et n'est pas le minimum de  $J \cup \hat{J}$  alors nécessairement  $cof_{c^-}(C)$  n'est pas vide. En effet, dans ce cas la coupure  $c$  est précédée d'une infinité de  $Q_j$ , et, puisque  $Q$  est fini, il y aura forcément certains états de  $Q$  qui apparaîtront infiniment souvent. La notion de cofinalité à gauche est utilisée dans la suite dans une suite d'ensembles d'états indicée par  $\omega$ . Les ensembles d'états en question sont les contenus des chemins.

Soit  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  un automate sur les ordinaux dénombrables. L'ensemble des chemins  $\gamma$  étiquetés par des mots de  $A^\#$  de contenus  $C(\gamma)$  dans  $\mathcal{A}$  est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :

- pour tout  $p \in Q$ ,  $\epsilon$  est un chemin de  $p$  à  $p$  étiqueté par  $\epsilon$  de contenu  $\{p\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute transition  $t = (p, a, q) \in E_{seq}$ ,  $t$  est un chemin de  $p$  à  $q$  étiqueté par  $a$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite finie  $(\gamma_i)_{i \leq k}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$ , avec  $k \geq 1$ , respectivement étiquetés par  $u_0, \dots, u_k$  de  $p_0, \dots, p_k$  à  $q_0, \dots, q_k$  de contenus  $(C(\gamma_i))_{i \leq k}$ ,  $\prod_{i \leq k} \gamma_i$  est un chemin de  $p_0$  à  $q_k$  étiqueté par  $\prod_{i \leq k} u_i$  de contenu  $\cup_{i \leq k} C(\gamma_i)$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite  $(\gamma_i)_{i \in \omega}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$ , respectivement étiquetés par  $(u_i)_{i \in \omega}$  de contenus  $C = (C(\gamma_i))_{i \in \omega}$  et pour toute transition  $t = cof_{\omega^-}(C) \rightarrow q \in E_{limG}$ ,  $(\prod_{i \in \omega} \gamma_i)t$  est un chemin de la source de  $\gamma_0$  à  $q$  étiqueté par  $\prod_{i \in \omega} u_i$  de contenu  $(\cup_{i \in \omega} C(\gamma_i)) \cup \{q\}$  dans  $\mathcal{A}$ .

Dans le cas des automates sur les ordinaux dénombrables, la factorisation séquentielle irréductible de tout mot fini non vide accepté par  $\mathcal{A}$  est indicée par le même ordre linéaire fini que la factorisation séquentielle irréductible du chemin dont il est l'étiquette. De plus pour tout mot infini  $u$  accepté par  $\mathcal{A}$  tel que sa factorisation irréductible est  $\prod_{i \in \alpha} u_i$ , pour un ordinal dénombrable  $\alpha$ , la factorisation irréductible du chemin dont il est l'étiquette est indicé par  $\alpha + 1$ . Cette dernière correspond à  $\hat{\alpha}^*$ .

**Exemple 2.3.9.** Reprenons l'automate  $\mathcal{A}$  de l'Exemple 2.3.8 représenté dans la Figure 2.5. Le langage de  $\mathcal{A}$  est celui de l'expression rationnelle  $(a + b)^\omega$  qu'on peut écrire aussi  $A^\omega$ . Un chemin acceptant  $\gamma$  de  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $(ab)^\omega$  est dessiné sur la Figure 2.6. Il s'agit de  $\gamma = \gamma' \cdot t$ , où  $\gamma' = ((1, a, 1) \cdot (1, b, 1))^\omega$  et  $t$  est la transition limite à gauche  $(\{1\}, 2)$ . Remarquons que  $\gamma'$  est une  $\omega$ -

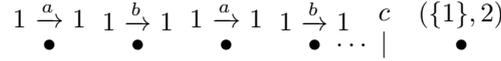


FIGURE 2.6 – Un chemin acceptant, de l'automate représenté dans la Figure 2.5, étiqueté par  $(ab)^\omega$

suite de chemins consécutifs où chaque chemin est étiqueté par  $ab$  et est de contenu  $\{1\}$ . Ainsi, l'ensemble cofinal à gauche de  $C$  dans la coupure  $c = \omega$  est  $\text{cof}_{c^-}(C) = \{1\}$ . Puisque  $(\{1\}, 2) \in E_{\text{lim}G}$  alors  $\gamma$  est un chemin de 1 à 2 dans  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $(ab)^\omega$ . Enfin, puisque 1 est un état initial et 2 un état final alors  $\gamma$  est un chemin acceptant de  $\mathcal{A}$  et  $(ab)^\omega \in L(\mathcal{A})$ . Tous les chemins acceptants de  $\mathcal{A}$  sont de contenu  $\{1, 2\}$ . Parmi les mots reconnus par  $\mathcal{A}$  on retrouve aussi  $(aa)^\omega = a^\omega$ ,  $(bb)^\omega = b^\omega$ ,  $(ba)^\omega \dots$

Wojciechowski a généralisé le théorème de Kleene en montrant que les automates sur les ordinaux dénombrables sont de même expressivité que les expressions rationnelles de  $R_E(A^\sharp)$ .

**Théorème 2.3.10** ([88]). *Soit  $L$  un langage sur un alphabet  $A$  fini. Alors  $L \in \text{Rat}(A^\sharp)$  si et seulement si il existe un automate sur les ordinaux dénombrables  $\mathcal{A}$  tel que  $L = L(\mathcal{A})$ .*

**Exemple 2.3.11.** Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. Les deux automates représentés sur la Figure 2.7 reconnaissent  $A^\sharp$ . Le mot vide  $\epsilon$  est reconnu puisque dans les deux automates, les états initiaux sont finaux. Sans leurs transitions limites à droite, les deux automates reconnaissent  $A^*$ . Pour tout ordinal limite  $\alpha$ , l'en-

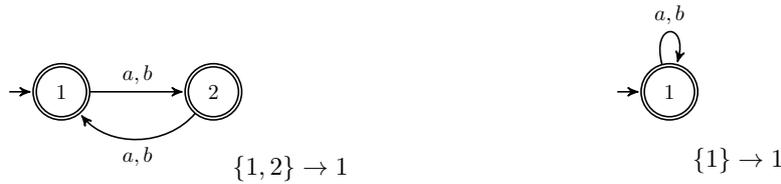


FIGURE 2.7 – Deux automates sur les ordinaux de langage  $(a + b)^\sharp$

semble cofinal à gauche de  $\alpha$  dans n'importe quelle suite de contenus de chemins consécutifs de l'automate à gauche (resp. droite) de la Figure 2.7 est  $\{1, 2\}$  (resp.  $\{1\}$ ).

**Exemple 2.3.12.** Le langage de l'automate  $\mathcal{B}$  de la Figure 2.8 est

$$A^\omega((aA^\omega)^* + (aA^\omega)^\omega)$$

où  $A = \{a, b\}$  est l'alphabet de l'automate. Sans l'état 3 et les transitions  $2 \xrightarrow{a} 1$  et  $(\{1, 2\}, 3)$  on retrouve l'automate de la Figure 2.5. Ainsi, le chemin représenté sur la Figure 2.5 est un chemin acceptant de  $\mathcal{B}$ . Outre les chemins étiquetés par

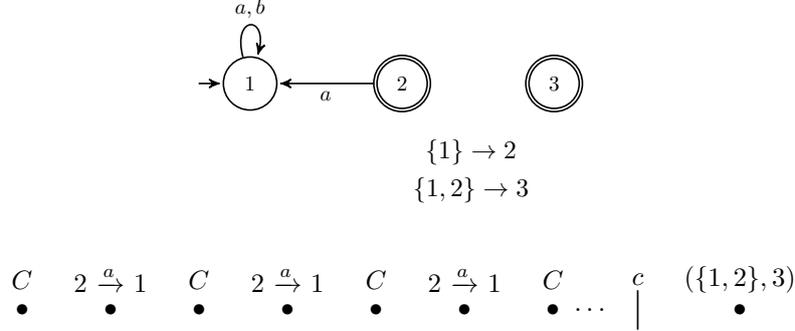


FIGURE 2.8 – Un automate  $\mathcal{B}$  sur les ordinaux dénombrables de langage  $A^\omega((aA^\omega)^* + (aA^\omega)^\omega)$  où  $A = \{a, b\}$  est l'alphabet de l'automate, et un chemin acceptant de  $\mathcal{A}$  où  $C$  est le chemin de la Figure 2.6

les mots de  $A^\omega$ , grâce à la transition  $2 \xrightarrow{a} 1$  et le fait que l'état 2 soit final, après avoir lu un mot de  $A^\omega$ , on peut lire un nombre fini de fois un mot de  $aA^\omega$ . On reconnaît ainsi un mot de  $A^\omega(aA^\omega)^*$ . On peut aussi le faire un nombre infini de fois grâce à la transition  $(\{1, 2\}, 3)$  et le fait que l'état 3 soit final. Un exemple d'un chemin  $C'$  avec un tel comportement est en bas de la Figure 2.8. Par  $C$  on désigne le chemin représenté dans la Figure 2.6. Dans ce cas les états 1 et 2 se répéteront infiniment souvent. En d'autres termes  $\text{cof}_-(C') = \{1, 2\}$ , ce qui justifie l'emploi de la transition  $(\{1, 2\}, 3)$ . On reconnaît ainsi un mot  $u$  de  $A^\omega(aA^\omega)^\omega$ ,  $(ab)^\omega(a(ab)^\omega)^\omega = ((ab)^\omega a)^\omega$  plus précisément. C'est un mot de rang  $rp(u) = 2$ .

La classe des langages rationnels de  $A^\sharp$  est fermée par complémentation, et donc par intersection et différence, puisque ces deux dernières s'expriment avec l'union et la complémentation.

**Théorème 2.3.13** (Büchi). *Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux automates sur les ordinaux dénombrables. Il existe des automates sur les ordinaux dénombrables de langages  $L(\mathcal{A})^C$ ,  $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$  et  $L(\mathcal{A}) \setminus L(\mathcal{B})$ .*

### 2.3.4 Mots sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés

Les automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés ont été définis par Bruyère et Carton dans [26]. C'est une généralisation des automates sur les ordinaux dénombrables. En plus des transitions limites à gauche, Bruyère et Carton ont introduit les transitions limites à droite. Leur mode d'emploi est symétrique à celui des transitions limites à gauche. Ainsi, un automate sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés correspond à celui introduit à la Définition 2.3.1 où l'ensemble des transitions est restreint aux transitions séquentielles successeurs, limites à gauche et limites à droite.

**Exemple 2.3.14.** L'automate  $\mathcal{A}$  représenté sur la Figure 2.9 est le suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, E, \{0\}, \{3\}) \\ E &= E_{seq} = E_{succ} \cup E_{limG} \cup E_{limD} \\ E_{succ} &= \{1 \xrightarrow{a} 1, 1 \xrightarrow{b} 1, 1 \xrightarrow{a} 2, 1 \xrightarrow{b} 2, 2 \xrightarrow{a} 2, 2 \xrightarrow{b} 2\} \\ E_{limG} &= \{(\{2\}, 3)\} \\ E_{limD} &= \{(0, \{1\})\}\end{aligned}$$

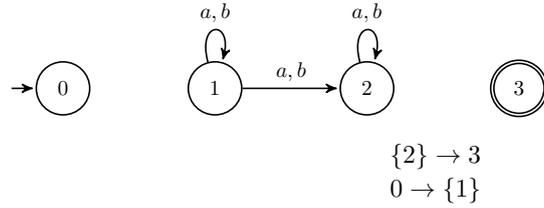


FIGURE 2.9 – Un automate sur les ordres linéaires

Un chemin dans un automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés est une suite de transitions de  $E$  indicée par un ordre linéaire. Les transitions d'un tel chemin sont soit des transitions successeurs  $E_{seq}$ , des transitions limites à gauche  $E_{limG}$  ou des transitions limite à droite  $E_{limD}$ . Dans un chemin  $\gamma = (t_j)_{j \in J}$  de  $\mathcal{A}$ , pour un ordre linéaire  $J$ , une transition  $t_j = P \rightarrow p$  est une transition limite à gauche si et seulement si  $j$  n'a pas de prédécesseur et n'est pas le minimum de  $J$ . Dans ce cas,  $P = cof_{j-}(\gamma)$ . Symétriquement, une transition  $t_j = p \rightarrow P$  est une transition limite à droite si et seulement si  $j$  n'a pas de successeur et n'est pas le maximum de  $J$ . Dans ce cas,  $P = cof_{j+}(\gamma)$  où  $cof_{j+}(\gamma)$  est l'ensemble cofinal à droite de  $\gamma$  en  $j$ . Il est défini symétriquement à l'ensemble cofinal gauche de la manière suivante :

$$cof_{j+}(\gamma) = \{q : \text{pour tout } i > j, \text{ il existe } i' \in J \text{ tel que } j < i' < i \text{ et } q \in Q_{i'}\}$$

Cette notion est utilisée dans la suite dans une suite d'ensembles d'états indicée par  $-\omega$ .

Soit  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  un automate sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. L'ensemble des chemins  $\gamma$  étiquetés par des mots de  $A^\circ$  de contenus  $C(\gamma)$  dans  $\mathcal{A}$  est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :

- pour tout  $p \in Q$ ,  $\epsilon$  est un chemin de  $p$  à  $p$  étiqueté par  $\epsilon$  de contenu  $\{p\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute transition  $t = (p, a, q) \in E_{seq}$ ,  $t$  est un chemin de  $p$  à  $q$  étiqueté par  $a$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite finie  $(\gamma_i)_{i \leq k}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$ , avec  $k \geq 1$ , respectivement étiquetés par  $u_0, \dots, u_k$  de  $p_0, \dots, p_k$  à  $q_0, \dots, q_k$  de contenus  $(C(\gamma_i))_{i \leq k}$ ,  $\prod_{i \leq k} \gamma_i$  est un chemin de  $p_0$  à  $q_k$  étiqueté par  $\prod_{i \leq k} u_i$  de contenu  $\cup_{i \leq k} C(\gamma_i)$  dans  $\mathcal{A}$  ;



la transition limite à droite  $1 \rightarrow \{1, 2\}$  on reconnaît  $(ab)^{-1}a$ . Ainsi,  $a(ba)^{\natural} \cup (ab)^{-1}a \subseteq L(\mathcal{A})$ . La  $\omega$ -suite de chemins consécutifs  $(2 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2)^{\omega}$  suivie de la transition limite à gauche  $\{1, 2\} \rightarrow 2$  forme un chemin de 2 à 2 étiqueté par  $(ba)^{\omega}$  dans  $\mathcal{A}$ . On précédant ce chemin de la transition  $1 \xrightarrow{a} 2$  on obtient un chemin  $\gamma$  acceptant dans  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $a(ba)^{\omega}$ . Similairement, la  $-\omega$ -suite de chemins consécutifs  $(\gamma_i)_{i \in -\omega}$  où, pour tout  $i \in -\omega$ ,  $\gamma_i = \gamma$ , précédée de la transition limite à droite  $1 \rightarrow \{1, 2\}$  est un chemin acceptant dans  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $(a(ba)^{\omega})^{-\omega}$ . Le langage de l'automate  $\mathcal{A}$  est  $L(\mathcal{A}) = a \diamond b$ .

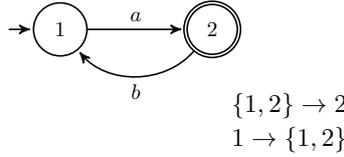


FIGURE 2.11 – Un automate sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés de langage  $a \diamond b$ .

Rispol et Carton ont prouvé dans [75] que la classe des langages rationnels de  $A^{\circ}$  est fermée par complémentation. Ainsi :

**Théorème 2.3.18** ([75]). *Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Il existe des automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés de langages  $L(\mathcal{A})^C$ ,  $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$  et  $L(\mathcal{A}) \setminus L(\mathcal{B})$ .*

Il a été montré dans [33] que la question de l'existence d'un chemin entre deux états d'un automate est décidable en temps polynomial. On peut en déduire le théorème suivant :

**Théorème 2.3.19** ([33]). *Soit  $\mathcal{A}$  un automate sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Alors, la question  $L(\mathcal{A}) = \emptyset$  est décidable.*

Grâce aux deux théorèmes précédents et notamment à l'effectivité du Théorème 2.3.18, on peut déduire aussi le théorème suivant :

**Théorème 2.3.20** ([27]). *Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Alors, la question  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$  est décidable.*

En effet,  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$  si et seulement si  $(L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})^C) \cup (L(\mathcal{A})^C \cap L(\mathcal{B})) = \emptyset$ . Ce théorème a été néanmoins prouvé dans [27], avant que la preuve de la fermeture de  $Rat(A^{\circ})$  par complémentation ne soit trouvée.

### 2.3.5 Posets finis

Les automates branchants ont été introduits dans [55, 56, 57, 58]. C'est une généralisation des automates de Kleene, en étendant l'ensemble des transitions par des transitions dites fork et join.

**Exemple 2.3.21.** L'automate branchant  $\mathcal{A}$  représenté sur la Figure 2.12 est le suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, E, \{1\}, \{6\}) \\ E &= E_{succ} \cup E_{fork} \cup E_{join} \\ E_{succ} &= \{2 \xrightarrow{a} 4, 3 \xrightarrow{b} 5\} \\ E_{fork} &= \{(1, \{1, 1\}), (1, \{2, 3\})\} \\ E_{join} &= \{(\{6, 6\}, 6), (\{4, 5\}, 6)\}\end{aligned}$$

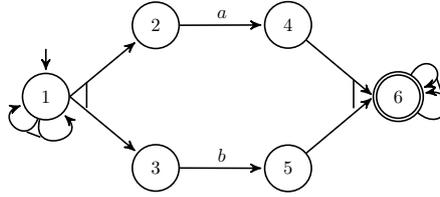


FIGURE 2.12 – Un automate branchant sur les posets finis

Soit  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  un automate sur les posets finis. L'ensemble des chemins  $\gamma$  étiquetés par des posets de  $SP(A)$  de contenus  $C(\gamma)$  dans  $\mathcal{A}$  est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :

- pour tout  $p \in Q$ ,  $\epsilon$  est un chemin de  $p$  à  $p$  étiqueté par  $\epsilon$  de contenu  $\{p\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute transition  $t = (p, a, q) \in E_{seq}$ ,  $t$  est un chemin de  $p$  à  $q$  étiqueté par  $a$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite finie  $(\gamma_i)_{i \leq k}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$ , avec  $k \geq 1$ , respectivement étiquetés par  $P_0, \dots, P_k$  de  $p_0, \dots, p_k$  à  $q_0, \dots, q_k$  de contenus  $(C(\gamma_i))_{i \leq k}$ ,  $\prod_{i \leq k} \gamma_i$  est un chemin de  $p_0$  à  $q_k$  étiqueté par  $\prod_{i \leq k} P_i$  de contenu  $\cup_{i \leq k} C(\gamma_i)$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour chaque ensemble fini de chemins  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  dans  $\mathcal{A}$ , pour  $k > 1$ , étiquetés respectivement par  $P_1, \dots, P_k$ , de  $p_1, \dots, p_k$  à  $q_1, \dots, q_k$ , si  $t = (p, \{p_1, \dots, p_k\}) \in E_{fork}$  et  $t' = (\{q_1, \dots, q_k\}, q) \in E_{join}$ , alors,  $t(\prod_{j \leq k} \gamma_j)t'$  est un chemin de  $p$  vers  $q$  étiqueté par  $P_1 \parallel \dots \parallel P_k$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$ .

Un poset parallèle  $P \in SP(A)$  est accepté par  $\mathcal{A}$  s'il admet une factorisation  $P_1 \parallel \dots \parallel P_n$ , avec  $n \geq 2$ , telle que :

- pour tout  $i \in [n]$ ,  $P_i$  est l'étiquette d'un chemin  $\gamma_i$  de  $p_i$  à  $q_i$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- il existe  $t = (p, \{p_1, \dots, p_n\}) \in E_{fork}$  et  $t' = (\{q_1, \dots, q_n\}, q) \in E_{join}$  ;
- $p$  est un état initial et  $q$  un état final.

Dans ce cas,  $P$  est l'étiquette d'un chemin  $\gamma$  dans  $\mathcal{A}$  de la forme  $t(\gamma')t'$  où  $\gamma' = \prod_{i \in [n]} \gamma'_i$  et chaque  $\gamma'_i$  est un chemin dans  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $P_i$ , pour tout  $i \in [n]$ . Remarquons que, puisque la factorisation parallèle de  $P$  n'est pas forcément irréductible, certains  $P_i$ ,  $i \in [n]$ , peuvent être à leurs tours parallèles. Les chemins dont ils seront l'étiquette auront la même forme que  $\gamma$ . Ce qui entraînera une sorte d'imbrication de fork et de join. Remarquons aussi que le

contenu  $C(\gamma)$  ne dépend aucunement des  $\gamma'_i$ . Par ailleurs, si  $P$  est un poset séquentiel alors  $P$  est l'étiquette d'un chemin acceptant dans  $\mathcal{A}$  si  $P$  admet une factorisation  $P_1 \cdot \dots \cdot P_n$  telle que :

- pour tout  $i \in [n]$ ,  $P_i$  est l'étiquette d'un chemin  $\gamma_i$  dans  $\mathcal{A}$  de  $p_i$  à  $q_i$  ;
- pour tout  $i \in [n - 1]$ ,  $q_i = p_{i+1}$  (les  $\gamma_i$  sont consécutifs) ;
- $p_1$  est un état initial et  $q_n$  un état final.

De manière générale, un chemin  $\gamma$  sur un automate branchant est un poset étiqueté ayant l'une des formes suivantes :  $\epsilon$ ,  $t$  ou  $t(\gamma)t'$  où  $t$  et  $t'$  sont des transitions et  $\gamma'$  est un sous-chemin de  $\gamma$ .

**Exemple 2.3.22.** *Un chemin acceptant  $\gamma$  de l'automate  $\mathcal{A}$  de la Figure 2.12 est représenté sur la Figure 2.13. Soit  $\gamma' = (1, \{2, 3\})(2 \xrightarrow{a} 4 \parallel 3 \xrightarrow{b} 5)(\{4, 5\}, 6)$ . Alors  $\gamma'$  est un chemin acceptant de  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $a \parallel b$ . C'est aussi un sous-chemin de  $\gamma$ . Le chemin  $\gamma$  est égal à  $\prod_{i \in [3]} P_i$  où*

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, \{1, 1\}) & P_3 &= (\{6, 6\}, 6) \\ P_2 &= \gamma_{2,1} \parallel \gamma' & \gamma_{2,1} &= (1, \{1, 1\})(\gamma' \parallel \gamma')(\{6, 6\}, 6) \end{aligned}$$

Le chemin  $\gamma$  est étiqueté par  $(a \parallel b) \parallel (a \parallel b) \parallel (a \parallel b)$ . Les posets  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont des sous-posets de  $\gamma$  mais ne sont pas eux mêmes des chemins. En revanche,  $\gamma, \gamma'$  et  $\gamma_{2,1}$  sont tous des chemins dans  $\mathcal{A}$  de contenu  $\{1, 6\}$ . Remarquons que  $L(\mathcal{A}) \subseteq A^{\oplus}$  où  $A = \{a, b\}$ . Le langage de  $\mathcal{A}$  est  $(a \parallel b)^{\oplus}$ .

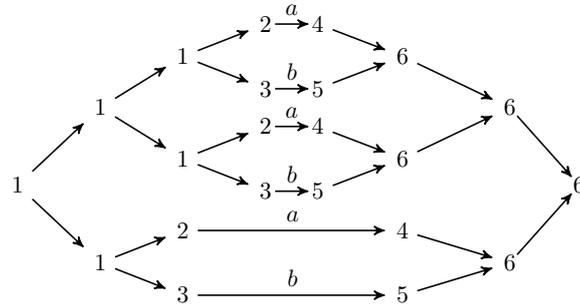


FIGURE 2.13 – Un chemin acceptant de l'automate de la Figure 2.12 étiqueté par  $(a \parallel b)^{\parallel 3} = a \parallel a \parallel a \parallel b \parallel b \parallel b$

**Exemple 2.3.23.** *Soit  $\mathcal{B}$  l'automate de la Figure 2.2 où les états 0 et 7 et les transitions limites sont supprimés et où 1 est l'état initial. Soit  $A = \{a, b\}$  l'alphabet de  $\mathcal{B}$ . Tous les mots de  $A^*$  sont reconnus par  $\mathcal{B}$ . Il s'agit de toutes les étiquettes des chemins acceptants ayant comme contenu  $\{1\}$ . Tous les posets reconnus par  $\mathcal{B}$  sont de largeurs au plus 2. Le poset  $(b \parallel b)a$  est l'étiquette du chemin  $(1, \{2, 3\})(2 \xrightarrow{b} 4 \parallel 3 \xrightarrow{b} 5)(\{4, 5\}, 6)6 \xrightarrow{a} 1$ . Ce dernier est un chemin acceptant de  $\mathcal{B}$  de contenu  $\{1, 6\}$ . Le langage de  $\mathcal{B}$  est  $(A^*(b \parallel b)a)^*$*

**Théorème 2.3.24** ([56]). *Soit  $L$  un langage sur un alphabet  $A$  fini. Alors  $L \in \text{Rat}(SP(A))$  si et seulement s'il existe un automate branchant  $\mathcal{A}$  tel que  $L = L(\mathcal{A})$ .*

Bedon a prouvé dans [9] que la classe des langages rationnels de  $SP(A)$  est fermée par complémentation.

**Théorème 2.3.25** ([9]). *Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $L$  et  $L'$  deux langages de  $Rat(SP(A))$ . Alors  $L^C$ ,  $L \cap L'$  et  $L \setminus L'$  sont aussi des langages rationnels de  $Rat(SP(A))$ .*

**Théorème 2.3.26** ([9]). *Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux automates branchants. Il existe des automates branchants de langages  $L(\mathcal{A})^C$ ,  $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$  et  $L(\mathcal{A}) \setminus L(\mathcal{B})$ .*

Similairement aux automates sur les mots, le problème de vacuité des automates branchants est décidable.

**Théorème 2.3.27.** ([58]) *Soit  $\mathcal{A}$  un automate branchant. Alors, la question  $L(\mathcal{A}) = \emptyset$  est décidable.*

Ainsi :

**Corollaire 2.3.28.** *Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux automates branchants. Alors, la question  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$  est décidable.*

### 2.3.6 Posets sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés

Les automates branchants sur les posets N-libres dénombrables et dispersés correspondent à l'automate de la Définition 2.3.1. Ils ont été introduits dans [15]. C'est une généralisation de toutes les classes d'automates précédemment définies. La définition de chemin étiqueté par un poset dans ce genre d'automate est aussi une généralisation des définitions de chemins vues dans les classes d'automates précédentes.

Soit  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  un automate sur  $SP^\diamond(A)$ . L'ensemble des chemins  $\gamma$  étiquetés par des posets de  $SP^\diamond(A)$  de contenus  $C(\gamma)$  dans  $\mathcal{A}$  est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :

- pour tout  $p \in Q$ ,  $\epsilon$  est un chemin de  $p$  à  $p$  étiqueté par  $\epsilon$  de contenu  $\{p\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute transition  $t = (p, a, q) \in E_{seq}$ ,  $t$  est un chemin de  $p$  à  $q$  étiqueté par  $a$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite finie  $(\gamma_i)_{i \leq k}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$ , avec  $k \geq 1$ , respectivement étiquetés par  $P_0, \dots, P_k$  de  $p_0, \dots, p_k$  à  $q_0, \dots, q_k$  de contenus  $(C(\gamma_i))_{i \leq k}$ ,  $\prod_{i \leq k} \gamma_i$  est un chemin de  $p_0$  à  $q_k$  étiqueté par  $\prod_{i \leq k} P_i$  de contenu  $\cup_{i \leq k} C(\gamma_i)$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour chaque ensemble fini de chemins  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  dans  $\mathcal{A}$ , pour  $k > 1$ , étiquetés respectivement par  $P_1, \dots, P_k$ , de  $p_1, \dots, p_k$  à  $q_1, \dots, q_k$ , si  $t = (p, \{p_1, \dots, p_k\}) \in E_{fork}$  et  $t' = (\{q_1, \dots, q_k\}, q) \in E_{join}$ , alors,  $t(\parallel_{j \leq k} \gamma_j)t'$  est un chemin de  $p$  vers  $q$  étiqueté par  $P_1 \parallel \dots \parallel P_k$  de contenu  $\{p, q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite  $(\gamma_i)_{i \in \omega}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$  respectivement étiquetés par  $(P_i)_{i \in \omega}$  de contenus  $C = (C(\gamma_i))_{i \in \omega}$  et pour toute transition  $t = cof_\omega(C) \rightarrow q \in E_{limG}$ ,  $(\prod_{i \in \omega} \gamma_i)t$  est un chemin de la source de  $\gamma_0$  à  $q$  étiqueté par  $\prod_{i \in \omega} P_i$  de contenu  $(\cup_{i \in \omega} C(\gamma_i)) \cup \{q\}$  dans  $\mathcal{A}$  ;

- symétriquement, pour toute suite  $(\gamma_i)_{i \in -\omega}$  de chemins consécutifs dans  $\mathcal{A}$  respectivement étiquetés par  $(P_i)_{i \in -\omega}$  de contenus  $C = (C(\gamma_i))_{i \in -\omega}$  et pour toute transition  $t = q \rightarrow \text{cof}_{-\omega+}(C) \in E_{\text{lim}D}$ ,  $t(\prod_{i \in -\omega} \gamma_i)$  est un chemin de  $q$  à la destination de  $\gamma_0$  étiqueté par  $\prod_{i \in -\omega} P_i$  de contenu  $(\cup_{i \in -\omega} C(\gamma_i)) \cup \{q\}$  dans  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 2.3.29.** *Considérons l'alphabet  $A = \{a, b\}$ . Soit l'automate  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  où :*

- $Q = \{0, 1, 2\}$ ,  $I = \{0\}$  et  $F = \{1\}$  ;
- $E_{\text{succ}} = \{(0, a, 1), (1, a, 2), (2, a, 2), (0, b, 0), (1, b, 1), (2, b, 2)\}$  ;
- $E_{\text{lim}G} \cup E_{\text{lim}D} = \{(\{0\}, 0), (\{1\}, 1), (\{2\}, 2), (0, \{0\}), (1, \{1\}), (2, \{2\})\}$  ;
- $E_{\text{fork}} = \{(0, \{0, 0\}), (1, \{1, 0\}), (2, \{2, 2\})\}$  ;
- $E_{\text{join}} = \{(\{0, 0\}, 0), (\{0, 1\}, 1), (\{1, 1\}, 2)\} \cup \{(\{2, x\}, 2) : \text{pour tout } x \in \{0, 1, 2\}\}$ .

*Remarquons que*

- *il y a un chemin dans  $\mathcal{A}$  de source 0 et de destination 0 étiqueté par  $P$  si et seulement si  $P$  n'a pas d'éléments étiquetés par  $a$  ;*
- *il y a un chemin dans  $\mathcal{A}$  de source 0 et de destination 1 étiqueté par  $P$  si et seulement si  $P$  a exactement un seul élément étiqueté par  $a$  ;*
- *il y a un chemin dans  $\mathcal{A}$  de source 0 et de destination 2 étiqueté par  $P$  si et seulement si  $P$  a au moins deux éléments étiquetés par  $a$*

*Par conséquent  $L(\mathcal{A})$  est l'ensemble des posets de  $SP^\circ(A)$  contenant exactement un seul élément étiqueté par  $a$ .*

**Exemple 2.3.30.** *Soit  $\mathcal{A}$  l'automate de la Figure 2.2. C'est un automate branchant sur les posets série-parallèles transfinis. En se limitant juste à l'état 0, l'état 1 et la transition limite à droite  $0 \rightarrow \{1\}$ , on retrouve un automate sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés reconnaissant  $A^{-\omega}$ . Il n'y a aucun chemin dans  $\mathcal{A}$  de source 1 et de destination 0. Tout chemin quittant 0 n'y passe plus. Rappelons que l'automate  $\mathcal{A}$  sans ses transitions limites, les états 0 et 7 et ayant comme état initial 1 est l'automate de L'Exemple 2.3.23 dont le langage est  $(A^*(b \parallel b)a)^*$ . Ainsi les mots qui sont étiquettes des chemins de source 0 et de destination 6 appartiennent à  $A^{-\omega}(A^*(b \parallel b)a)^*$ . Grâce à la transition limite à gauche  $\{1, 6\} \rightarrow 7$  et l'état 7 qui est final, on peut itérer  $(A^*(b \parallel b)a)^*$  infiniment souvent à droite. Par conséquent, les chemins de  $\mathcal{A}$  de source 1 et de destination 7 sont étiquetés par des posets de  $((A^*(b \parallel b)a)^*)^\omega$ . Le langage de  $\mathcal{A}$  est  $A^{-\omega}((A^*(b \parallel b)a)^*)^\omega$ . Notons qu'en remplaçant  $0 \rightarrow \{1\}$  par  $0 \rightarrow \{1, 6\}$ , le langage de  $\mathcal{A}$  devient  $(A^*(b \parallel b)a)^\zeta$ .*

**Théorème 2.3.31** ([15]). *Soit  $L$  un langage sur un alphabet  $A$  fini. Alors  $L \in \text{Rat}(SP^\circ(A))$  si et seulement si il existe un automate branchant  $\mathcal{A}$  tel que  $L = L(\mathcal{A})$ .*

La classe des langages rationnels de  $SP^\circ(A)$  est aussi fermée par complémentation.

**Théorème 2.3.32** ([10]). *Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $L$  et  $L'$  deux langages de  $\text{Rat}(SP^\circ(A))$ . Alors  $L^C$ ,  $L \cap L'$  et  $L \setminus L'$  sont des langages rationnels de  $\text{Rat}(SP^\circ(A))$ .*

En plus, par extension de la décidabilité des problèmes de vacuité et d'équivalences d'automates dans les cas des automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés et des automates sur les posets finis, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.3.33.** *Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux automates branchants sur les posets transfinis. Alors, les questions  $L(\mathcal{A}) = \emptyset$  et  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$  sont décidables.*

## 2.4 Langages rationnels du monoïde commutatif

Rappelons que dans un monoïde  $(M, \cdot, e)$ , la classe des langages rationnels est la plus petite classe contenant  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{m\}$  pour tout  $m \in M$  et qui est fermée par les opérations de  $\{+, \cdot, *\}$ . Quand le monoïde est commutatif, nous noterons son produit par  $\parallel$  au lieu de  $\cdot$  et sa fermeture itérative par  $\otimes$  au lieu de  $*$ . Ainsi, la classe des *langages rationnels* du monoïde commutatif  $A^\otimes$  est la plus petite classe contenant  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{a\}$  pour tout  $a \in A$  et qui est fermée par union finie  $+$ , produit parallèle  $\parallel$  et itération parallèle  $\otimes$ . Pour qu'il n'y ait pas de confusion entre les langages rationnels du monoïde commutatif et les langages rationnels de n'importe quelle autre classe de posets, on appelle la classe des langages rationnels du monoïde commutatif, la classe des *langages  $\parallel$ -rationnels*.

Naturellement, l'ensemble des termes de type  $\{+, \parallel, \otimes\}$  sur un alphabet  $A$  forme un ensemble d'expressions rationnelles caractérisant les langages  $\parallel$ -rationnels. De plus, tout langage  $\parallel$ -rationnel est le langage d'un automate branchant de Lodaya et Weil. Remarquons que lorsqu'un langage  $L \subseteq SP^\diamond(A)$  est rationnel alors  $L \subseteq A^\otimes$  si et seulement si  $L$  est  $\parallel$ -rationnel.

Les langages  $\parallel$ -rationnels d'un monoïde  $M$  sont étroitement liés aux ensembles semi-linéaires de  $M$ . Historiquement, les ensembles semi-linéaires sont définis sur  $\mathbb{N}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , muni de l'opération commutative d'addition sur les tuples de  $\mathbb{N}^k$  définie par :

$$(x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k) = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$$

**Définition 2.4.1.** *Un sous-ensemble  $L$  de  $\mathbb{N}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est linéaire s'il s'écrit sous la forme*

$$L = u + U^* = \left\{ u + \sum_{i \in [n]} v_i : n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } i \in [n], v_i \in U \right\}$$

où  $u \in \mathbb{N}^k$  et  $U = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{N}^k$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Il est semi-linéaire si c'est une union finie d'ensembles linéaires.

Dans notre cas, en s'appuyant sur l'image de Parikh, nous considérons les ensembles semi-linéaires comme des sous-ensembles de  $A^\otimes$  pour un alphabet  $A$ . En effet, étant donné un alphabet fini  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'image de Parikh (voir [67]) d'un mot commutatif  $u \in A^\otimes$ , notée  $p(u)$ , est le n-uplet  $(|u|_{a_1}, \dots, |u|_{a_n})$  où  $|u|_{a_i}$ , pour tout  $i \in [n]$ , désigne le nombre d'occurrences de la lettre  $a_i$  dans  $u$ . Pour tout  $i \in [n]$ , l'image de Parikh de  $a_i$  est le tuple dont toutes les coordonnées sont à 0 sauf la  $i^{\text{ème}}$  qui est égale à 1. Ce tuple est noté  $1_i$ . Plus généralement, on note par  $l_i$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$  le tuple dont toutes les coordonnées sont à 0 sauf la  $i^{\text{ème}}$  qui est égale à  $l$ . La taille des deux derniers tuples sera

comprise du contexte. Par extension, l'image de Parikh d'un langage  $L \subseteq A^{\otimes}$  est l'ensemble des images de Parikh des éléments de  $L$ .

**Remarque 2.4.2.** *L'image de Parikh d'un mot commutatif dépend de l'ordre total implicite donné aux différents  $a_i$ . Ainsi, pour utiliser l'image de Parikh de manière plus harmonieuse, lorsque nous manipulons des ensembles semi-linéaires ou des langages  $\|\text{-rationnels}$  sur un alphabet fini  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , implicitement, l'alphabet  $A$  est totalement ordonné par les indices des  $a_i : a_1 < \dots < a_n$ . Également, lorsque les lettres ne sont pas indicées, l'alphabet  $A$  est implicitement totalement ordonné par l'ordre d'apparition des lettres dans  $A$ .*

Cette définition de l'image de Parikh définit un isomorphisme de monoïdes entre  $(A^{\otimes}, \|\, \epsilon)$  et  $(\mathbb{N}^n, +, (0, \dots, 0))$ , où  $|A| = n$ . Dans ce contexte, lorsque  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ , pour  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , sont deux alphabets disjoints totalement ordonnés, les deux alphabets sont assimilés à des mots finis. Ainsi, on dénote, pour tout  $i \in [m]$ , par  $A \circ_{b_i} B$  l'alphabet totalement ordonné  $\{b_1, \dots, b_{i-1}, a_1, \dots, a_n, b_{i+1}, \dots, b_m\}$  où l'ordre correspond à l'ordre d'apparition des lettres dans  $A \circ_{b_i} B$ . Par conséquent, lorsque  $L$  et  $L'$  sont des langages  $\|\text{-rationnels}$  de  $A^{\otimes}$  et  $B^{\otimes}$  respectivement, le langage  $L \circ_{b_i} L'$  est un langage  $\|\text{-rationnel}$  de  $(A \circ_{b_i} B)^{\otimes}$ . De plus, si  $A = B$  alors  $L \circ_{b_i} L'$  est un langage  $\|\text{-rationnel}$  de  $A^{\otimes}$ . Ainsi :

**Définition 2.4.3.** *Soient  $A$  un alphabet fini et  $(A^{\otimes}, \|\, e)$  un monoïde commutatif. Un sous-ensemble  $L$  de  $A^{\otimes}$  est linéaire s'il s'écrit sous la forme*

$$L = a_1 \|\ \dots \|\ a_k \|\ \left( \bigcup_{i \in I} (a_{i,1} \|\ \dots \|\ a_{i,k_i}) \right)^{\otimes}$$

où  $I$  est un ensemble fini,  $k, k_i \in \mathbb{N}$ ,  $a_l, a_{i,j} \in A$  pour tout  $l \in [k]$ ,  $i \in I$  et  $j \in [k_i]$ . Il est semi-linéaire si c'est une union finie d'ensembles linéaires.

**Théorème 2.4.4** ([43]). *Dans un monoïde commutatif, un langage est  $\|\text{-rationnel}$  si et seulement si il est semi-linéaire.*

**Exemple 2.4.5.** *Considérons le langage  $L$  sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$  consistant en tous les mots finis commutatifs ayant strictement plus de  $a$  que de  $b$ . Alors  $L$  est le langage de l'expression rationnelle  $a \|\ a^{\otimes} \|\ (a \|\ a^{\otimes} \|\ b)^{\otimes}$  sur  $A^{\otimes}$ . Le langage  $L$  est linéaire. Il est aussi semi-linéaire. En effet, remarquons que  $L$  a aussi la forme  $a \|\ (a \|\ b + a)^{\otimes}$ .*

**Exemple 2.4.6.** *L'image de Parikh du langage de l'Exemple 2.4.5 sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$  est*

$$\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : n > m\}$$

avec  $a < b$  comme ordre total implicite de l'alphabet  $A$ .

De plus, Parikh a montré le théorème suivant :

**Théorème 2.4.7.** ([67, Théorème 2]) *Soit  $A$  un alphabet et soit  $L \in A^{\otimes}$ . Alors  $L$  est le langage d'une grammaire non-contextuelle si et seulement si  $L$  est semi-linéaire.*

**Remarque 2.4.8.** Soit  $A$  un alphabet. À tout ensemble linéaire  $L = a_1 \parallel \cdots \parallel a_k \parallel (\bigcup_{i \in I} (a_{i,1} \parallel \cdots \parallel a_{i,k_i}))^{\otimes}$  du monoïde commutatif  $A^{\otimes}$ , où  $I$  est un ensemble fini,  $k, k_i \in \mathbb{N}$ ,  $a_l, a_{i,j} \in A$  pour tout  $l \in [k]$ ,  $i \in I$  et  $j \in [k_i]$ , correspond la grammaire non-contextuelle de même langage suivante :

$$\xi \rightarrow \mid_{i \in I} (a_{i,1} \parallel \cdots \parallel a_{i,k_i}) \parallel \xi \mid a_1 \parallel \cdots \parallel a_k$$

où «  $\parallel$  » est l'opération du monoïde. De plus, étant donné  $a \in A$ , différent de tous les  $a_l, a_{i,j}$ , et l'ensemble linéaire sur  $A^{\otimes}$  suivant

$$L = a_1 \parallel \cdots \parallel a_k \parallel a^{\parallel n} \parallel \left( \bigcup_{i \in I} (a_{i,1} \parallel \cdots \parallel a_{i,k_i} \parallel a^{\parallel n_i}) \right)^{\otimes}$$

où  $n, n_i \in \mathbb{N}$  pour tout  $i \in I$ ,  $L^{*a}$  est le langage de la grammaire non-contextuelle d'axiome  $S$  suivante :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \xi \mid a \\ \xi &\rightarrow \mid_{i \in I} (a_{i,1} \parallel \cdots \parallel a_{i,k_i} \parallel S^{\parallel n_i}) \parallel \xi \mid a_1 \parallel \cdots \parallel a_k \parallel S^{\parallel n} \end{aligned}$$

Notons que la Remarque 2.4.8 s'étend naturellement aux ensembles semi-linéaires.

On montre dans le lemme suivant que la classe des ensembles semi-linéaires est fermée par substitution simple et substitution itérée :

**Lemme 2.4.9.** Soient  $A$  un alphabet,  $\xi \in A$ ,  $L$  et  $L'$  des ensembles semi-linéaires de  $A^{\otimes}$ . Alors  $L \circ_{\xi} L'$  et  $L^{*\xi}$  sont aussi des ensembles semi-linéaires de  $A^{\otimes}$ .

*Démonstration.* En appliquant le Théorème 2.4.4, on déduit que  $L$  et  $L'$  sont des langages  $\parallel$ -rationnels de  $A^{\otimes}$ . Ils sont donc les langages de deux expressions rationnelles  $e$  et  $e'$  utilisant comme opérations que les opérations de  $\{+, \parallel, \otimes\}$ . Soit  $e''$  l'expression rationnelle  $e'$  où chaque sous-expression  $\xi$  est remplacée par  $e$ . Remarquons que  $L(e'') = L(e \circ_{\xi} e')$ . Ainsi  $L \circ_{\xi} L'$  est un langage  $\parallel$ -rationnel de  $A^{\otimes}$ . De plus, la preuve que  $L^{*\xi}$  est un ensemble semi-linéaire est une conséquence directe de la Remarque 2.4.8 et du Théorème 2.4.7.  $\square$

La classe des ensembles semi-linéaires est aussi fermée par union, intersection, complémentation et différence.

**Théorème 2.4.10.** ([47, Théorème 1.1]) Soient  $E, E'$  deux ensembles semi-linéaires. Alors  $E^C$ ,  $E \cup E'$ ,  $E \cap E'$  et  $E \setminus E'$  sont aussi des ensembles semi-linéaires.

En plus des automates, la logique formelle permet également de caractériser les langages rationnels. Il y a plusieurs types de logiques mathématiques. Elles peuvent se différencier par leur pouvoir d'expressivité. En conséquence, selon les structures à caractériser, une logique peut être préférée à une autre. Les formules de logique permettent de caractériser un langage en énonçant formellement des propriétés que les structures de ce langage vérifient. Les formules d'une logique  $L$  sont construites à partir de formules de base en suivant des règles définies par la *syntaxe* de  $L$ . Une *sémantique* est attribuée aux formules de  $L$  pour leur donner du sens. Les formules sont interprétées sur une classe de structures. Le langage d'une formule est la sous-classe des structures vérifiant la propriété qu'elle énonce. Le domaine d'interprétation de  $L$  est appelé l'*univers* de  $L$ .

Nous définissons dans la Section 3.1 la syntaxe de la logique dite du premier ordre. L'arithmétique de Presburger est une logique du premier ordre enrichie notamment par l'addition et qui interprétée dans l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . Elle permet de manipuler les ensembles semi-linéaires avec des formules de logique. Elle est définie dans la Sous-section 3.1.1. Dans la Section 3.2 une généralisation de la logique du premier ordre est définie. Il s'agit de la logique monadique du second ordre (MSO). Cette logique est connue pour son étroite liaison avec les langages rationnels de  $A^*$ ,  $A^\#$ ,  $A^\diamond$  notamment. Une extension de la logique monadique du second ordre avec l'arithmétique de Presburger appelée P-MSO est présentée dans la Section 3.3.

De manière générale, le domaine d'interprétation que nous associons aux formules de logique MSO et P-MSO est  $SP^\diamond(A)$ . En se limitant aux mots, Büchi [28], Elgot [44] et Trakhtenbrot [83] ont montré séparément que MSO est de même expressivité que les automates de Kleene quand celle-ci est interprétée sur  $A^*$ . On se penchera dans la Section 3.4 sur les généralisations de ce résultat au cas des langages rationnels de  $A^\#$  par Büchi [31] et au cas des langages rationnels de  $A^\diamond$  par Bedon, Bès, Carton et Rispal [11].

### 3.1 Logique du premier ordre

Nous commençons par présenter dans cette section la syntaxe de la logique du premier ordre (FO, First Order).

Les formules de *logique du premier ordre* sont construites à partir de :

- variables du premier ordre : souvent notées par des lettres minuscules  $x, y, z \dots$  potentiellement indicées ;
- connecteurs booléens :  $\vee$  (ou),  $\neg$  (non) ;
- quantificateur :  $\exists$  (il existe) ;

et d'un ensemble de relations appelé l'*ensemble des prédicats* ou la *signature* de la logique. Les formules de logique sont souvent notées par des lettres grecques telles que  $\psi, \phi, \varphi, \chi \dots$ .

Rappelons qu'une constante est une relation d'arité 0. L'ensemble des *formules atomiques* d'une logique correspond aux formules de base à partir desquelles sont construites ses formules. Pour FO, l'ensemble des formules atomiques est construit à partir de l'ensemble des variables du premier ordre  $U$  et de sa signature  $\mathcal{L}_{FO}$ . Précisément, pour tout prédicat  $P$  sur  $U^n$  de  $\mathcal{L}_{FO}$ ,  $P(x_1, \dots, x_n)$  est une formule atomique, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_1, \dots, x_n \in U$ .

**Définition 3.1.1.** *Les formules FO sont construites à partir des éléments définis ci-dessus, en obéissant à la syntaxe suivante :*

- toute formule atomique est une formule FO ;
- si  $\psi$  est une formule FO et  $x$  est une variable du premier ordre alors  $\exists x\psi$  est une formule FO ;
- si  $\psi$  est une formule FO alors  $\neg\psi$  l'est aussi ;
- si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des formules FO alors  $\psi_1 \vee \psi_2$  l'est aussi.

*Cette définition est inductive. L'induction est finie.*

Pour que les formules soient plus lisibles, des parenthèses sont aussi utilisées. Notons qu'en plus des connecteurs booléens  $\neg$  et  $\vee$ , nous utilisons les connecteurs  $\wedge$  (et),  $\implies$  (implique) et  $\Leftrightarrow$  (équivalent à). Les formules  $\psi_1 \wedge \psi_2$ ,  $\psi_1 \implies \psi_2$  et  $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$  sont des abréviations respectivement des formules  $\neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$ ,  $\neg\psi_1 \vee \psi_2$  et  $(\psi_1 \implies \psi_2) \wedge (\psi_2 \implies \psi_1)$ . Une formule  $\psi$  utilisée pour construire une formule  $\phi$  est dite *sous-formule* de  $\phi$ . Nous considérons que toute formule est une sous-formule d'elle même. On appelle *portée* d'un quantificateur dans une formule  $\psi$  la plus petite sous-formule de  $\psi$  dans laquelle il apparaît. Par  $\forall x\psi$  on dénote  $\neg\exists x\neg\psi$ . Le quantificateur  $\forall$  se lit « pour tout ».

Une *occurrence* d'une variable du premier ordre  $x$  dans une formule  $\psi$  est un emplacement dans  $\psi$ , qui n'est pas immédiatement précédé par un quantificateur, où la variable  $x$  apparaît. Il peut y avoir plusieurs occurrences d'une même variable dans une formule de logique  $\psi$ .

Une occurrence d'une variable du premier ordre  $x$  dans  $\psi$  est *libre* s'il n'existe pas de sous-formule  $\exists x\psi'$  (resp.  $\forall x\psi'$ ) de  $\psi$  telle que  $x$  apparaît dans  $\psi'$ . Sinon, elle est *liée*. Pour plus de commodité, quitte à renommer les variables, nous supposons qu'aucune formule de logique n'utilise deux fois le même nom de variable pour deux variables différentes.

**Exemple 3.1.2.** Soient  $h$  un prédicat unaire,  $f$  un prédicat binaire et soit la formule suivante :

$$\psi = f(x, y) \wedge (\exists x h(x)) \wedge (\forall x f(x, x))$$

Il y a quatre occurrences de nom de variable  $x$  dans la formule ci-dessus. Les deux dernières occurrences sont toutes les deux dans la portée de  $\forall x$  et font toutes deux référence à la même variable. Après le renommage des variables on obtient :

$$\psi = f(x_1, y) \wedge (\exists x_2 h(x_2)) \wedge (\forall x_3 f(x_3, x_3))$$

La définition suivante formalise la notion de variable libre :

**Définition 3.1.3.** Soit  $\psi$  une formule FO. L'ensemble des variables libres de  $\psi$ , noté  $FV(\psi)$ , est défini par induction sur la structure de  $\psi$  comme suit :

- si  $\psi$  est une formule atomique alors  $FV(\psi)$  est l'ensemble des variables apparaissant dans  $\psi$  ;
- si  $\psi = \neg\psi'$  alors  $FV(\psi) = FV(\psi')$  ;
- si  $\psi$  est de la forme  $\psi_1 \vee \psi_2$  alors  $FV(\psi) = FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2)$  ;
- si  $\psi$  est de la forme  $\exists x\psi'$  alors  $FV(\psi) = FV(\psi') \setminus \{x\}$ .

Ainsi, quand toutes les occurrences d'un nom de variable  $x$  désignent la même variable dans une formule  $\psi$  alors  $x$  est liée dans  $\psi$  si il existe une sous-formule  $\psi'$  de  $\psi$  où  $x$  apparaît et  $x \notin FV(\psi')$ .

**Exemple 3.1.4.** Soit  $\psi$  la formule de l'Exemple 3.1.2 après renommage des variables :

$$\psi = f(x_1, y) \wedge (\exists x_2 h(x_2)) \wedge (\forall x_3 f(x_3, x_3))$$

L'ensemble des variables libres de  $\psi$  est  $\{x_1, y\}$ . De plus :

$$\begin{aligned} FV(f(x_1, y)) &= \{x_1, y\} & FV(h(x_2)) &= \{x_2\} \\ FV(f(x_3, x_3)) &= \{x_3\} & FV(\exists x_2 h(x_2)) &= \emptyset \end{aligned}$$

On note par  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  la formule  $\psi$  dans laquelle les variables du premier ordre  $x_1, \dots, x_n$  sont des variables libres, pour  $n \in \mathbb{N}$ . Une formule de logique  $\psi$  telle que  $FV(\psi) = \emptyset$  est dite *close*. Ce genre de formule est appelée aussi *énoncé*.

Soit  $A$  un alphabet. La signature de nos formules de logique du premier ordre est :

$$\mathcal{L}_{FO} = \{<\} \cup \{a : \text{pour tout } a \in A\}$$

Le prédicat  $<$  est binaire. Il prend comme arguments deux variables du premier ordre  $x$  et  $y$  et est écrit  $<(x, y)$  ou  $x < y$ . Pour tout  $a \in A$ , le prédicat  $a$  est unaire. Il prend en argument une variable du premier ordre  $x$ .

**Exemple 3.1.5.** Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet et soit la formule FO suivante :

$$\psi = \forall x a(x) \implies \exists y x < y \wedge b(y)$$

La formule  $\psi$  n'a pas de variables libres. C'est une formule close. Les formules

$$a(x), x < y, b(y), x < y \wedge b(y), \exists y x < y \wedge b(y), a(x) \implies \exists y \exists y b(y), \psi$$

sont des sous-formules de  $\psi$ . Soit  $\psi'$  la sous-formule  $x < y \wedge b(y)$ . On a  $FV(\psi') = \{x, y\}$ . On peut donc la noter par  $\psi'(x, y)$ .

Nous définirons la sémantique des formules de logique du premier ordre en même temps que celle des formules de logique monadique du second ordre dans la section suivante. Mais avant, nous introduisons un exemple d'une logique du premier ordre avec une signature différente de celle énoncée précédemment : la logique de Presburger.

### 3.1.1 Arithmétique de Presburger

La *logique de Presburger* ou l'*arithmétique de Presburger* définie dans [72] est une logique du premier ordre interprétée sur  $\mathbb{N}$ . Sa signature utilise un unique prédicat qui est le prédicat ternaire  $+(a, b, c)$ , qu'on écrit souvent  $a + b = c$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des variables du premier ordre :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} = \{+(a, b, c)\}$$

On note par  $\mathcal{P}_n$  la classe des formules de Presburger ayant  $n \in \mathbb{N}$  variables libres et par  $\mathcal{P} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_i$ .

**Exemple 3.1.6.** *La formule*

$$\rho(x, y) = \exists k \ x = y + k$$

est une formule de Presburger de  $\mathcal{P}_2$ .

L'univers d'interprétation des variables des formules de Presburger est l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les formules de  $\mathcal{P}_n$  caractérisent des sous-ensembles de  $\mathbb{N}^n$ .

Soit  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  une formule de Presburger dont les variables libres sont  $x_1, \dots, x_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . L'*interprétation*  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$  de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{N}^n$  *satisfait* (est un modèle pour)  $\rho$ , noté  $v \models \rho$  si :

- $\rho$  est de la forme  $x_i = x_j + x_k$  et  $v_i = v_j + v_k$ , pour  $i, j, k \in [n]$  ;
- $\rho$  est de la forme  $\rho_1 \vee \rho_2$  et  $v \models \rho_1$  ou  $v \models \rho_2$  ;
- $\rho$  est de la forme  $\neg \rho'$  et  $v \not\models \rho'$  ;
- $\rho$  est de la forme  $\exists x \ \rho'(x_1, \dots, x_n, x)$  et il existe une interprétation  $v_{n+1} \in \mathbb{N}$  de  $x$  telle que  $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \models \rho'$

où le symbole  $\not\models$  signifie « n'est pas un modèle ».

Soit  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  une formule de Presburger de  $\mathcal{P}_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . L'*ensemble de Presburger* de  $\rho$ , noté  $L(\rho)$ , est :

$$L(\rho) = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n : (v_1, \dots, v_n) \models \rho\}$$

Un sous-ensemble  $L$  de  $\mathbb{N}^n$  est un *ensemble de Presburger* s'il est l'ensemble de Presburger d'une formule de Presburger de  $\mathcal{P}_n$ . Une *tautologie* de Presburger est une formule de Presburger satisfaite par n'importe quelle interprétation de ses variables libres. Par convention l'ensemble  $\{()\}$  est l'ensemble de Presburger de toute tautologie de Presburger close. Une tautologie de Presburger close est notée par « vrai ».

**Exemple 3.1.7.** *Reprenons la formule  $\rho(x_1, x_2)$  de l'Exemple 3.1.6. L'ensemble de Presburger de  $\rho$  est l'ensemble de tous les couples d'entiers  $(v_1, v_2)$  tel que  $v_1 \leq v_2$ .*

Pour alléger les formules de logique de Presburger et pour qu'elles soient plus lisibles, nous utiliserons des abréviations qui font références à des formules définissables en arithmétique de Presburger. Par exemple, la formule :

$$\rho(x) = \forall y \ y = y + x$$

est notée  $x = 0$ , relativement à son ensemble de Presburger qui est  $L(\rho) = 0$ . En effet, il n'y a que 0 qui peut être ajouté à n'importe quel entier sans modifier sa valeur. Aussi :

$$y = z \text{ pour } \exists x \ x = 0 \wedge y = z + x$$

$$y < z \text{ pour } \exists x \ z = y + x \wedge \neg x = 0$$

$$y \leq z \text{ pour } y < z \vee y = z$$

$$x = y + 1 \text{ pour } y < x \wedge (\neg \exists z \ y < z \wedge z < x)$$

$$x = n \text{ pour } \exists y \ x = y + 1 \wedge y = n - 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$x + y = n \text{ pour } \exists z \ x + y = z \wedge z = n$$

$$x + y + z = n \text{ pour } \forall_{i \leq n} (x + y = i \wedge z = n - i)$$

$$x + y \leq n \text{ pour } \forall_{i \leq n} (x + y = i)$$

$$x + y > n \text{ pour } \neg x + y \leq n$$

Les autres abréviations que nous aurons à utiliser et qui ne sont pas dans la liste ci-dessus s'en déduisent facilement.

**Exemple 3.1.8.** Soit la formule de Presburger suivante :

$$\rho'(x, y) = \exists k \exists k' \ k = k' + 1 \wedge x = y + k$$

L'ensemble de Presburger de  $\rho'$  est un sous-ensemble de l'ensemble de Presburger de la formule  $\rho$  de l'Exemple 3.1.7. Ici, nous spécifions que l'entier qui doit être ajouté à l'interprétation de  $y$  pour avoir comme résultat l'interprétation de  $x$  doit être supérieur strictement à 0. Par conséquent :

$$L(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x < y\}$$

**Exemple 3.1.9.** Reprenons l'expression rationnelle  $a \parallel a^{\otimes} \parallel (a \parallel a^{\otimes} \parallel b)^{\otimes}$  de l'Exemple 2.4.5 (voir aussi Exemple 2.4.6) sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$ . Rappelons que son langage est l'ensemble semi-linéaire  $L = a \parallel (a \parallel b + a)^{\otimes}$  de  $A^{\otimes}$ . L'image de Parikh de  $L$  correspond à l'ensemble de Presburger de la formule  $\rho''(x, y) = x > y$ . Cette dernière est la négation de la formule  $\rho(x, y)$  de l'Exemple 3.1.6.

Les ensembles de Presburger et les ensembles semi-linéaires sont liés par le théorème suivant :

**Théorème 3.1.10** ([47]). Soit  $A$  un alphabet de taille  $n \in \mathbb{N}$ . Un langage  $L$  de  $A^{\otimes}$  est semi-linéaire si et seulement si il est l'ensemble de Presburger  $L(\rho)$  d'une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_n)$ , i.e.  $(|u|_{a_1}, \dots, |u|_{a_n}) \in L(\rho)$  si et seulement si  $u \in L$ . De plus, les constructions d'un formalisme à l'autre sont effectives.

Ce théorème montre que tout ensemble de Presburger de  $\mathbb{N}^n$  correspond à l'image de Parikh d'un ensemble semi-linéaire de  $A^\otimes$  et réciproquement, pour tout alphabet  $A$  de taille  $n$ . L'ensemble semi-linéaire de  $A^\otimes$  correspondant à l'ensemble de Presburger d'une tautologie de Presburger close est  $\{\epsilon\}$ . Remarquons que l'ordre des coordonnées des éléments de  $L(\rho)$  dépend de l'ordre implicite des lettres de l'alphabet  $A$  (voir Remarque 2.4.2).

Soit  $A$  un alphabet avec  $\xi \in A$ . En conséquence du Lemme 2.4.9, si deux langages  $L$  et  $L'$  sont des ensembles semi-linéaires de  $A^\otimes$  alors  $L \circ_\xi L'$  et  $L^{*\xi}$  le sont aussi. De plus, grâce au Théorème 3.1.10, on sait que l'image de Parikh de  $L \circ_\xi L'$  et  $L^{*\xi}$  est un ensemble de Presburger.

**Définition 3.1.11.** Soient  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  et  $\rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$  deux formules de Presburger et soient  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_{k'}\}$  deux alphabets disjoints ou égaux. Considérons  $L$  et  $L'$  comme les ensembles semi-linéaires de  $A^\otimes$  et  $B^\otimes$  correspondants, par le Théorème 3.1.10, aux ensembles de Presburger respectivement de  $\rho$  et  $\rho'$ . Quand  $A$  et  $B$  sont disjoints, pour tout  $i \in [k']$ ,  $L \circ_{b_i} L'$  est un ensemble semi-linéaire de  $(A \circ_{b_i} B)^\otimes$  et aussi, l'ensemble de Presburger d'une formule de Presburger qu'on note par  $\rho \circ_{x'_i} \rho'$ . Quand  $A = B$ , pour tout  $i \in [k']$ ,  $L \circ_{b_i} L'$  est un ensemble semi-linéaire de  $A^\otimes$  et l'ensemble de Presburger d'une formule de Presburger qu'on note par  $\rho \bullet_{x'_i} \rho'$ .

**Exemple 3.1.12.** Soient  $\rho(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 1$  et  $\rho'(x'_1, x'_2, x'_3) = x'_1 = 1 \wedge x'_2 + x'_3 \leq 1$ . Alors  $L(\rho) = \{(1, 0), (0, 1)\}$  et  $L(\rho') = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ . Soient  $A = \{a_1, a_2\}$  et  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  deux alphabets disjoints. Considérons les ensembles de Presburger de  $\rho$  et  $\rho'$  comme des ensembles semi-linéaires  $L$  et  $L'$  de respectivement  $A^\otimes$  et  $B^\otimes$ . Alors  $L$ ,  $L'$  et  $L \circ_{b_3} L'$  sont respectivement les langages des expressions rationnelles  $a_1 + a_2$ ,  $b_1 \parallel (b_2 + b_3 + \epsilon)$  et  $b_1 \parallel (b_2 + a_1 + a_2 + \epsilon)$  de respectivement  $A^\otimes$ ,  $B^\otimes$  et  $(A \circ_{b_3} B)^\otimes$ . L'image de Parikh  $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$  de  $L \circ_{b_3} L'$  est aussi l'ensemble de Presburger de  $\rho \circ_{x'_3} \rho' \equiv x_1 = 1 \wedge x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$ .

L'opération de substitution sur les langages de mots commutatifs s'étend naturellement à leurs images de Parikh. La relation entre les images de Parikh des langages de mots commutatifs intervenant dans une opération de substitution est décrite par les lemmes suivants. Ils sont obtenus par une simple application de la définition de l'opération de substitution.

**Lemme 3.1.13.** Soient  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_{k'}\}$  deux alphabets disjoints,  $L \subseteq A^\otimes$ ,  $L' \subseteq B^\otimes$  et  $i \in [k']$ . Alors  $(v''_1, \dots, v''_{k+k'-1}) \in p(L \circ_{b_i} L')$  si et seulement si  $(v''_1, \dots, v''_{i-1}, v'_i, v''_{i+k}, \dots, v''_{k+k'-1}) \in p(L')$ , pour  $v'_i \in \mathbb{N}$ , et il existe  $(v_{1,1}, \dots, v_{1,k}), \dots, (v_{v'_i,1}, \dots, v_{v'_i,k}) \in p(L)$  tels que  $(v''_i, \dots, v''_{i+k-1}) = (v_{1,1}, \dots, v_{1,k}) + \dots + (v_{v'_i,1}, \dots, v_{v'_i,k})$ .

**Lemme 3.1.14.** Soient  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  un alphabet,  $L, L' \subseteq A^\otimes$  et  $i \in [k]$ . Alors  $(v''_1, \dots, v''_k) \in p(L \circ_{a_i} L')$  si et seulement si il existe  $(v'_1, \dots, v'_k) \in p(L')$  et  $(v_{j,1}, \dots, v_{j,k}) \in p(L)$  pour tout  $j \in [v'_i]$  tels que pour tout  $r \in [k]$

$$v''_r = \begin{cases} \sum_{j \in [v'_i]} v_{j,r} & \text{si } r = i; \\ v'_r + \sum_{j \in [v'_i]} v_{j,r} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Similairement à la Définition 3.1.11, nous définissons des notations relatives aux substitutions itérées sur des ensembles semi-linéaires.

**Définition 3.1.15.** Soit  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  une formule de Presburger et soit  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  un alphabet. Considérons  $L$  comme l'ensemble semi-linéaire de  $A^{\otimes}$  correspondant, par le Théorème 3.1.10, à l'ensemble de Presburger de  $\rho$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $i \in [k]$ ,  $L^{*a_i}$  et  $L^{j a_i}$  sont des ensembles semi-linéaires de  $A^{\otimes}$  et aussi les ensembles de Presburger de formules de Presburger respectivement notées par  $\rho^{*x_i}$  et  $\rho^{j x_i}$ .

**Exemple 3.1.16.** Soit

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 = 1) \vee (x_1 = 0 \wedge x_2 = 2) \vee (x_1 = 1 \wedge x_2 = 1)$$

Soit  $A = \{a_1, a_2\}$  et considérons l'ensemble de Presburger de  $\rho$  comme un ensemble semi-linéaire  $L$  de  $A^{\otimes}$ . Alors  $L = \{a_1, a_2, a_2 \parallel a_2, a_1 \parallel a_2\}$ . Considérons  $L^{*a_2} = \cup_{i \in \mathbb{N}} L^{i a_2}$ . De manière générale et par induction sur  $i$  on peut vérifier que

$$\bigcup_{j \leq i} L^{j a_2} = \{u \in A^{\otimes} : 1 \leq |u| \leq 2^i \text{ et } |u|_{a_1} \leq 2^{i-1}\}$$

Par conséquent  $L^{*a_2} = A^{\otimes} \setminus \{\epsilon\}$ , et  $\rho^{*x_2}(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 \geq 1$ . Maintenant, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  soit  $\rho_i(x_1, x_2) \equiv 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2^i \wedge x_1 \leq 2^{i-1}$ . Alors  $L(\rho_i)$  est l'image de Parikh de  $\bigcup_{j \leq i} L^{j a_2}$ . Ainsi  $\rho^{(i+1)x_2} \equiv \rho_i \bullet_{x_2} \rho$  et  $\rho^{0x_2}(x_1, x_2) \equiv x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$ .

D'un autre point de vue,  $L^{*a_2}$  est aussi le langage de la grammaire non contextuelle d'axiome  $\xi$  suivante :

$$\xi \rightarrow a_1 \mid a_2 \mid a_1 \parallel \xi \mid \xi \parallel \xi$$

C'est aussi le point fixe du système suivant :

$$\xi \rightarrow a_1 \parallel (\xi + \epsilon) + \xi \parallel \xi + a_2$$

En s'inspirant de la définition de l'opération rationnelle de substitution itérée, on a le lemme suivant :

**Lemme 3.1.17.** Soient  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  une formule de Presburger et  $i \in [n]$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\rho^{(j+1)x_i} \equiv (\bigvee_{k \leq j} \rho^{k x_i}) \bullet_{x_i} \rho$ . De plus,  $L(\rho^{*x_i}) = \cup_{j \in \mathbb{N}} L(\rho^{j x_i})$ .

*Démonstration.* Considérons l'ensemble de Presburger de  $\rho$  comme un ensemble semi-linéaire sur l'alphabet  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . La première partie du lemme peut être déduite à partir des définitions :

$$\begin{aligned} L(\rho^{(j+1)x_i}) &= L(\rho)^{(j+1)a_i} = (\bigcup_{k \leq j} L(\rho)^{k a_i}) \circ_{a_i} L(\rho) \\ &= (\bigcup_{k \leq j} L(\rho)^{k x_i}) \circ_{a_i} L(\rho) = L(\bigvee_{k \leq j} \rho^{k x_i}) \circ_{a_i} L(\rho) \\ &= L((\bigvee_{k \leq j} \rho^{k x_i}) \bullet_{x_i} \rho) \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie du lemme :  $L(\rho^{*x_i}) = L(\rho)^{*a_i} = \cup_{j \in \mathbb{N}} L(\rho)^{j a_i} = \cup_{j \in \mathbb{N}} L(\rho^{j x_i})$ .  $\square$

Le lemme suivant montre que toute lettre différente de  $\xi$  appartenant à l'ensemble semi-linéaire  $L^{*\xi}$  est déjà présente dans l'ensemble semi-linéaire  $L$ .

**Lemme 3.1.18.** Soient  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  une formule de Presburger pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in [k]$  et  $t \in [k] \setminus \{i\}$ . Alors  $1_t \in L(\rho)$  si et seulement si  $1_t \in L(\rho^{*x_i})$ .

*Démonstration.* L'implication de la gauche vers la droite est triviale puisque  $L(\rho) \subseteq L(\rho^{*x_i})$  en conséquence notamment du Lemme 3.1.17. Réciproquement, soit  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  un alphabet. Considérons l'ensemble de Presburger de  $\rho$  comme un ensemble semi-linéaire  $L$  sur  $A$ . Par conséquent,  $\rho^{*x_i}$  dénote une formule de Presburger dont l'ensemble semi-linéaire correspondant est  $L^{*a_i}$ . Remarquons que  $1_t$  correspond à la lettre  $a_t \in A$  dans  $L^{*a_i}$ . On doit montrer que  $a_t \in L$ . On procède par contraposée. Supposons que  $a_t \notin L$ . On montre par induction sur  $j$  que si  $a_t \notin L$  alors  $a_t \notin L^{j a_i}$ , pour tout  $j \in [n]$ .

Si  $j = 0$  alors  $L^{0 a_i} = \{a_i\}$  et  $a_t \neq a_i$ . Si  $j = 1$  alors  $L^{1 a_i} = L$  et  $a_t \notin L$  par hypothèse. Maintenant, si  $j > 1$  alors  $L^{j a_i} = (\bigcup_{j' < j} L^{j' a_i}) \circ_{a_i} L$ . Par hypothèse

d'induction, pour tout  $j' < j$ ,  $a_t \notin L^{j' a_i}$ . De plus  $a_t \notin L$ . Puisque pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $a_t \notin L^{j a_i}$  alors  $a_t \notin L^{*a_i}$ . □

## 3.2 Logique monadique du second ordre

La logique monadique du second ordre (MSO) est une généralisation de la logique FO. Les formules de logique MSO sont construites comme celles de FO. De plus, MSO autorise l'utilisation de variables dites du second ordre souvent notées par des lettres majuscules  $X, Y, Z \dots$  potentiellement indicées. Ces variables du second ordre peuvent être quantifiées de façon existentielle ( $\exists$ ) ou universelle ( $\forall$ ). Nos formules MSO sont construites sur la signature

$$\mathcal{L}_{MSO} = \mathcal{L}_{FO} \cup \{X(x)\}$$

La formule  $X(x)$  est une formule atomique de MSO où  $X$  est une variable du second ordre et  $x$  une variable du premier ordre. Aussi, si  $\psi$  est une formule MSO alors  $\exists X \psi$  est une formule MSO. Similairement aux formules FO  $\forall X \psi \equiv \neg \exists X \neg \psi$ . L'ensemble  $FV(\psi)$  des variables libres d'une formule MSO est définie exactement comme dans la Définition 3.1.3 à laquelle est ajoutée la règle suivante :

$$\text{si } \psi \text{ est de la forme } \exists X \psi' \text{ alors } FV(\psi) = FV(\psi') \setminus \{X\}$$

Toujours pour éviter toute confusion, nous supposons qu'aucune formule de logique monadique du second ordre n'utilise le même nom de variable pour deux variables différentes. On note par  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n)$  une formule MSO  $\psi$  dans laquelle les variables du premier ordre  $x_1, \dots, x_n$  et les variables du second ordre  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables libres, pour  $n, n' \in \mathbb{N}$ . Similairement aux formules FO, une formule MSO sans variables libres est une *formule close* ou un *énoncé*.

**Exemple 3.2.1.** Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. La formule suivante :

$$\begin{aligned} \phi \equiv & \exists Y \exists Z \forall x_1 (Y(x_1) \vee Z(x_1)) \\ & \wedge \forall x_2 ((Y(x_2) \implies \neg Z(x_2)) \wedge (Z(x_2) \implies \neg Y(x_2))) \\ & \wedge \forall y \forall z ((Y(y) \wedge Z(z)) \implies y < z \wedge a(y) \wedge b(z)) \end{aligned}$$

est un énoncé de MSO.

Revenons à la sémantique que nous donnons aux formules de logique MSO. Cela induira la sémantique donnée aux formules FO automatiquement. L'univers d'interprétation de nos formules de logique MSO est la classe des posets série-parallèles étiquetés. Nos formules de logique MSO formalisent ainsi les propriétés de sous-ensembles de  $SP^\diamond(A)$  pour un alphabet  $A$ . Les variables du premier ordre utilisées dans une formule MSO représentent des éléments des posets qu'on veut caractériser. Les variables du second ordre représentent des ensembles d'éléments de posets qu'on veut caractériser. La formule atomique  $X(x)$ , qu'on a tendance à écrire  $x \in X$ , est interprétée comme : l'élément d'un poset représenté par la variable du premier ordre  $x$  appartient à l'ensemble d'éléments d'un poset représenté par la variable du second ordre  $X$ . Dans une formule MSO, le prédicat  $x < y$  signifie que  $x$  et  $y$  représentent deux éléments d'un poset  $P$  et  $x < y$  dans  $P$ . Le prédicat  $a(x)$  signifie que  $x$  représente un élément d'un poset  $P$  étiqueté par la lettre  $a \in A$ .

**Exemple 3.2.2.** Reprenons la formule du premier ordre  $\psi$  de l'Exemple 3.1.5 :

$$\psi = \forall x a(x) \implies \exists y x < y \wedge b(y)$$

Cette formule est lue de la manière suivante :

Pour tout élément  $x$  d'un poset  $P$ , si  $x$  est étiqueté par  $a$  dans  $P$  alors il existe un élément  $y$  de  $P$  tel que  $x < y$  dans  $P$  et  $y$  est étiqueté par  $b$ .

Ainsi, tout poset  $P$  dont tout élément étiqueté par  $a$  est suivi par un élément étiqueté par  $b$  satisfait la formule  $\psi$ . Remarquons que, pour tout élément  $x$  étiqueté par  $a$  dans un poset satisfaisant  $\psi$ , l'élément étiqueté par  $b$  qui le suit n'est pas forcément successeur de  $a$ . Les posets  $\epsilon$ ,  $b$ ,  $bb$ ,  $aaab$ ,  $(a \parallel b)b$  par exemple satisfont  $\psi$ . Les posets  $a$ ,  $aba$ ,  $a \parallel a$ ,  $a \parallel b$  par exemple ne satisfont pas  $\psi$ .

**Exemple 3.2.3.** Reprenons l'énoncé  $\phi$  de l'Exemple 3.2.1.

- la première ligne de la formule s'assure que tous les éléments du poset analysé sont soit dans l'interprétation  $Y$  ou dans celle de  $Z$  ;
- la deuxième ligne vérifie que tout élément se trouvant dans l'interprétation de  $Y$  ne se trouve pas dans l'interprétation de  $Z$  et inversement ;
- la troisième ligne indique que les éléments de l'interprétation de  $Y$  sont tous inférieurs aux éléments de l'interprétation de  $Z$ , et que tous les éléments de l'interprétation de  $Y$  sont étiquetés par  $a$  et ceux de l'interprétation de  $Z$  par  $b$ .

Les deux premières lignes de la formule partitionnent tout poset  $P$  analysé en deux sous-posets  $Y$  et  $Z$ . Cette partition n'est pas au sens mathématique du terme puisque  $Y$  ou  $Z$  peuvent être vides. La troisième vérifie en particulier que  $P = Y + Z$ . Par conséquent tout poset  $P$  ayant une factorisation séquentielle potentiellement triviale  $P_1 \cdot P_2$  où tous les éléments de  $P_1$  sont étiquetés par  $a$  et ceux de  $P_2$  sont étiquetés par  $b$  satisfait la formule  $\phi$ . En particulier, le poset vide satisfait  $\phi$  et tous les posets dont tous les éléments sont étiquetés par  $a$  (resp.  $b$ ) satisfont  $\phi$ .

Lorsque une formule MSO  $\psi$  est close, il n'y a pas de confusion quant à l'ensemble de posets dont la formule  $\psi$  liste les propriétés, comme vu dans

les exemples précédents. Toutefois, la confusion subsiste quand  $FV(\psi) \neq \emptyset$ . Lorsqu'on écrit

$$\psi = \forall x a(x) \implies \exists y x < y \wedge b(y)$$

on décrit l'ensemble de tous les posets dont tout élément étiqueté par  $a$  est suivi d'un élément étiqueté par  $b$ . Tandis que dans

$$\psi'(x, y) = a(x) \implies x < y \wedge b(y)$$

on ne sait pas à quels éléments de posets les variables  $x$  et  $y$  (qui sont libres dans ce cas) font références. L'ensemble des posets caractérisé par cette dernière formule dépend de l'interprétation donnée à  $x$  et  $y$ . Le poset  $P = a \cdot a \cdot b$  satisfait les propriétés décrites par la formule  $\psi$  puisqu'il existe bien un élément dans  $P$  étiqueté par  $b$  qui suit tous les éléments de  $P$  étiqueté par  $a$ . Cependant, notons que  $P$  satisfait  $\psi'$  seulement dans le cas où  $x$  désigne un élément de  $P$  étiqueté par  $a$  et  $y$  celui étiqueté par  $b$  ou quand les deux désignent l'élément étiqueté par  $b$ . Dans le cas où  $x$  désigne l'élément étiqueté par  $b$  et  $y$  un élément étiqueté par  $a$ ,  $P$  ne satisfait pas  $\psi'$ . Idem dans le cas où  $x$  et  $y$  désignent tous les deux un élément étiqueté par  $a$ .

Quand un poset  $P$  satisfait les propriétés formalisées dans une formule close  $\psi$  on dit que  $P$  est un *modèle* pour  $\psi$  ou que  $P$  satisfait  $\psi$ , noté  $P \models \psi$ . Inversement,  $P \not\models \psi$  si  $P$  ne satisfait pas les propriétés formalisées dans  $\psi$ . Puisqu'une formule MSO close est construite inductivement à partir de formules MSO potentiellement non closes, il va falloir définir formellement la notion de modèle d'une formule de logique non close. Lorsque  $\psi$  a des occurrences de variables libres  $x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m$ , pour  $n, m \in \mathbb{N}$  qui ne sont pas tous les deux égaux à 0, la notion de modèle pour  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  est définie relativement à l'interprétation donnée aux variables libres de  $\psi$  dans un poset. L'*interprétation* d'une variable libre du premier ordre (resp. second ordre) est une valeur concrète donnée à cette variable correspondant à un élément (resp. ensemble d'éléments) d'un élément de l'univers d'interprétation.

Dans la suite nous définissons formellement par induction sur la structure de  $\psi$  la notion de modèle d'une formule MSO  $\psi$ . Soient  $U_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de variables du premier ordre et  $U_2 = \{X_1, \dots, X_m\}$  un ensemble de variables du second ordre, pour  $n, m \in \mathbb{N}$ . Soit  $\psi$  une formule MSO dont les variables du premier (resp. second) ordre sont toutes dans  $U_1$  (resp.  $U_2$ ). Soit  $P$  un poset étiqueté par un alphabet  $A$  et soient  $\mu_1: V_1 \rightarrow P$  et  $\mu_2: V_2 \rightarrow \mathcal{P}(P)$  des applications appelées *interprétations* de respectivement  $U_1$  et  $U_2$  dans  $P$ . Soient  $v_1, \dots, v_n \in P$  et  $V_1, \dots, V_m \subseteq P$  tels que  $\mu_1(x_i) = v_i$  pour tout  $i \in [n]$  et  $\mu_2(X_j) = V_j$  pour tout  $j \in [m]$ . Alors, le poset  $P$  est un modèle pour  $\psi$  avec les interprétations  $\mu_1$  et  $\mu_2$  noté

$$P, (x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n), (X_1, V_1), \dots, (X_m, V_m) \models \psi$$

si

- $\psi = x_1 < x_2$  et  $v_1 < v_2$  dans  $P$ ;
- $\psi = a(x_1)$  et  $v_1$  est étiqueté par  $a$  dans  $P$ , pour  $a \in A$ ;
- $\psi = X_1(x_1)$  et  $v_1 \in V_1$ ;
- $\psi$  est de la forme  $\psi_1 \vee \psi_2$  et

$$P, (x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n), (X_1, V_1), \dots, (X_m, V_m) \models \psi_1$$

ou

$$P, (x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n), (X_1, V_1), \dots, (X_m, V_m) \models \psi_2$$

—  $\psi$  est de la forme  $\neg\psi'$  et

$$P, (x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n), (X_1, V_1), \dots, (X_m, V_m) \not\models \psi_1$$

—  $\psi$  est de la forme  $\exists x_1 \psi'$  et il existe  $v'_1 \in P$  tel que

$$P, (x_1, v'_1), (x_2, v_2), \dots, (x_n, v_n), (X_1, V_1), \dots, (X_m, V_m) \models \psi'$$

—  $\psi$  est de la forme  $\exists X_1 \psi'$  et il existe  $V'_1 \subseteq P$  tel que

$$P, (x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n), (X_1, V'_1), (X_2, V_2), \dots, (X_m, V_m) \models \psi'$$

Remarquons que les valeurs données par  $\mu_1$  et  $\mu_2$  aux variables du premier et du second ordre qui ne sont pas libres dans  $\psi$  n'ont pas vraiment d'intérêt. Par conséquent, si  $\psi$  est une formule MSO close alors  $P$  est un modèle pour  $\psi$  si

$$P, (x_1, \mu_1(x_1)), \dots, (x_n, \mu_1(x_n)), (X_1, \mu_2(X_1)), \dots, (X_m, \mu_2(X_m)) \models \psi$$

pour n'importe quelles  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Dans ce cas, on écrit tout simplement  $P \models \psi$ . De plus, dans le cas où  $FV(\psi) = \{x'_1, \dots, x'_{n'}, X'_1, \dots, X'_{m'}\} \subseteq U_1 \cup U_2$ , pour  $n', m' \in \mathbb{N}$  tels que  $\psi$  n'est pas close, alors on écrit

$$P, (x'_1, v'_1), \dots, (x'_{n'}, v'_{n'}), (X'_1, V'_1), \dots, (X'_{m'}, V'_{m'}) \models \psi(x'_1, \dots, x'_{n'}, X'_1, \dots, X'_{m'})$$

pour  $v'_1, \dots, v'_{n'} \in P$  et  $V'_1, \dots, V'_{m'} \subseteq P$  s'il existe deux interprétations  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de respectivement  $U_1$  et  $U_2$  dans  $P$  tel que  $P$  est un modèle pour  $\psi$  avec  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , pour tout  $i \in [n']$ ,  $\mu_1(x'_i) = v'_i$  et, pour tout  $j \in [m']$ ,  $\mu_2(X'_j) = V'_j$ . On appelle  $v_1, \dots, v_n$  et  $V_1, \dots, V_m$  l'interprétation donnée aux variables  $x_1, \dots, x_n$  et  $X_1, \dots, X_m$  dans  $P$ .

**Exemple 3.2.4.** Soit la formule de logique

$$\psi'(x, y) = a(x) \implies x < y \wedge b(y)$$

et soit le poset  $P = aab$  qu'on détaille par

$$P = (\{x_1, x_2, x_3\}, x_1 < x_2 < x_3, \{(x_1, a), (x_2, a), (x_3, b)\})$$

Alors

$$P, (x, x_3), (y, x_3) \models \psi'(x, y)$$

$$P, (x, x_3), (y, x_2) \models \psi'(x, y)$$

$$P, (x, x_1), (y, x_3) \models \psi'(x, y)$$

$$P, (x, x_2), (y, x_3) \models \psi'(x, y)$$

$$P, (x, x_2), (y, x_1) \not\models \psi'(x, y)$$

$$P, (x, x_1), (y, x_2) \not\models \psi'(x, y)$$

**Exemple 3.2.5.** *Soit*

$$\psi(y, z, Y, Z) = ((Y(y) \wedge Z(z)) \implies y < z \wedge a(y) \wedge b(z))$$

*une sous-formule de la formule close  $\phi$  de l'Exemple 3.2.1 et soit le poset*

$$P = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4)\}, l)$$

*ayant la fonction d'étiquetage  $l = \{(x_1, a), (x_2, b), (x_3, b), (x_4, a)\}$ . Le poset  $P$  s'écrit plus simplement  $a(b \parallel b)a$ . Remarquons que*

$$\begin{aligned} P, (y, x_1), (z, x_2), (Y, \{x_1\}), (Z, \{x_2, x_3\}) &\models \psi(x, y, X, Y) \\ P, (y, x_4), (z, x_2), (Y, \{x_1\}), (Z, \{x_3\}) &\models \psi(x, y, X, Y) \\ P, (y, x_4), (z, x_3), (Y, \emptyset), (Z, \{x_3\}) &\models \psi(x, y, X, Y) \\ P, (y, x_4), (z, x_3), (Y, \{x_1, x_4\}), (Z, \{x_3\}) &\not\models \psi(x, y, X, Y) \\ P, (y, x_2), (z, x_4), (Y, \{x_1, x_2, x_4\}), (Z, \{x_1, x_3\}) &\not\models \psi(x, y, X, Y) \end{aligned}$$

*Remarquons aussi que  $P \not\models \phi$ .*

On peut aussi voir les formules de logique comme étant des formules exprimant les propriétés d'un ensemble de posets sur un alphabet étendu. On appelle ces posets des *posets marqués* par extension de la notion de mot marqué définie par exemple dans [69] ou [82].

**Définition 3.2.6.** *Soit  $A$  un alphabet et soit  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  une formule MSO ayant un ensemble  $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  de variables du premier ordre libres et un ensemble  $V_2 = \{X_1, \dots, X_m\}$  de variables du second ordre libres. Un  $(V_1, V_2)$ -poset (ou poset marqué par  $V_1$  et  $V_2$ ) étiqueté par  $A$  est un poset  $(P, <, l)$  étiqueté par  $A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  tel que pour tout  $i \in [n]$  il existe exactement un seul  $p \in P$  tel que  $x_i \in \pi_2(l(p))$ .*

Remarquons qu'à partir de tout poset étiqueté par  $A$ , on peut construire un  $(\emptyset, \emptyset)$ -poset étiqueté par  $A$  et réciproquement. Dans la suite nous confondrons les deux notions. Remarquons aussi qu'une interprétation des variables libres  $x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m$  dans un poset  $(P, <, l)$  étiqueté par  $A$  induit un unique  $(V_1, V_2)$ -poset  $(P', <', l')$  étiqueté par  $A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  et réciproquement :

- les posets  $(P, <)$  et  $(P', <')$  sont isomorphes ;
- pour tout  $v \in P$ ,  $\pi_1(l'(v)) = l(v)$  ;
- chaque variable libre  $x$  du premier ordre apparaît dans la deuxième composante de l'étiquette d'un élément  $v \in P'$  si et seulement si l'interprétation de  $x$  dans  $P$  est  $v$  ;
- chaque variable libre  $X$  du deuxième ordre apparaît dans la troisième composante de l'étiquette d'un élément  $v \in P'$  si et seulement si  $v$  est un élément de l'interprétation de  $X$  dans  $P$ .

Pour ne pas alourdir la notation, souvent on ne fera pas de différence entre une variable du second ordre et son interprétation. Un  $(V_1, V_2)$ -poset est aussi noté  $P(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  quand  $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $V_2 = \{X_1, \dots, X_m\}$ .

On peut maintenant définir la notion de satisfaction d'une formule de logique  $\psi$  par un poset marqué. Soient  $A$  un alphabet,  $V_1$  un ensemble de variables du premier ordre,  $V_2$  un ensemble de variables du second ordre,  $\psi$  une formule MSO dont les variables du premier (resp. second) ordre sont dans  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) et soit  $(P, <, l)$  un  $(V_1, V_2)$ -poset. Alors  $P \models \psi$  si et seulement si :

- $\psi = x < y$  et il existe  $p, p' \in P$  tel que  $x \in \pi_2(l(p))$ ,  $y \in \pi_2(l(p'))$  et  $p < p'$  dans  $P$ ;
- $\psi = a(x)$  et il existe  $p \in P$  tel que  $x \in \pi_2(l(p))$  et  $\pi_1(l(p)) = a$ , pour  $a \in A$ ;
- $\psi = X(x)$  et il existe  $p \in P$  tel que  $x \in \pi_2(l(p))$  et  $X \in \pi_3(l(p))$ ;
- $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$  et  $P \models \psi_1$  ou  $P \models \psi_2$ ;
- $\psi = \neg\psi'$  et  $P \not\models \psi'$ .
- $\psi = \exists x \psi'$  et il existe  $p \in P$  tel que le poset  $P$  dans lequel l'étiquette  $(a, V, V') \in A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  de  $p$  est devenue  $(a, V \cup \{x\}, V')$  est un modèle pour  $\psi'$ ;
- $\psi = \exists X \psi'$  et il existe  $Q \subseteq P$  tel que le poset  $P$  dans lequel l'étiquette  $(a_q, V_q, V'_q) \in A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  de  $q$ , pour tout  $q \in Q$ , est devenue  $(a_q, V_q, V'_q \cup \{X\})$  est un modèle pour  $\psi'$ ;

Remarquons qu'un poset marqué qui est modèle d'une formule close est un  $(\emptyset, \emptyset)$ -poset.

**Exemple 3.2.7.** Reprenons la formule  $\psi'(x, y)$  de l'Exemple 3.2.4 et le poset  $P = aab$ . Le poset  $P$  avec l'interprétation  $(x, x_3), (y, x_2)$  (resp.  $(x, x_2), (y, x_1)$ ) induit le poset marqué  $(a, \emptyset, \emptyset)(a, \{y\}, \emptyset)(b, \{x\}, \emptyset)$  (resp.  $(a, \{y\}, \emptyset)(a, \{x\}, \emptyset)(b, \emptyset, \emptyset)$ ) et on a

$$\begin{aligned} ((a, \emptyset, \emptyset)(a, \{y\}, \emptyset)(b, \{x\}, \emptyset) &\models \psi' \\ (a, \{y\}, \emptyset)(a, \{x\}, \emptyset)(b, \emptyset, \emptyset) &\not\models \psi' \end{aligned}$$

Le poset  $P$  avec l'interprétation  $(y, x_2), (z, x_4), (Y, \{x_1, x_2, x_4\}), (Z, \{x_1, x_3\})$  des variables libres de  $\psi(y, z, Y, Z)$  de l'Exemple 3.2.3 induit le poset marqué

$$(a, \emptyset, \{Y, Z\})(b, \{y\}, \{Y\}) \parallel (b, \emptyset, \{Z\})(a, \{z\}, \{Y\})$$

qui n'est pas un modèle pour  $\phi(x, y, X, Y)$ .

### 3.3 P-MSO

La logique P-MSO (Presburger Monadic Second Order) est une extension de la logique MSO qui utilise l'arithmétique de Presburger. Elle a été utilisée par Bedon dans [9] pour caractériser les langages rationnels de posets N-libres finis. Notons que l'association de la logique MSO avec l'arithmétique de Presburger a été aussi utilisée, indépendamment, par Dal Zilio et Lugiez [41] et par Seidl, Schwentick et Muscholl [80]. Dans ces deux travaux, les auteurs définissent des notions d'automates d'arbres caractérisés par la logique MSO associée à l'arithmétique de Presburger. Ils utilisent notamment ces caractérisations pour obtenir des procédures de décision d'interrogations sur des documents XML.

La logique *P-MSO* est un mélange entre MSO et la logique de Presburger. D'un point de vue syntaxique, les formules de P-MSO sont construites à partir de trois types de variables : les variables du premier ordre, les variables du second ordre et les variables de Presburger ; et d'un ensemble de prédicats prédéfini, en utilisant les mêmes règles de construction que pour les formules de MSO. La différence entre P-MSO et MSO se situe dans les formules de la forme :

$$\psi(Z) = \mathcal{Q}(Z, \psi_1, \dots, \psi_n, \rho(x_1, \dots, x_n))$$

où  $Z$  est une variable du second ordre libre,  $\psi_i$ , pour tout  $i \in [n]$ , est une formule P-MSO n'ayant pas de variables libres du premier ordre, et  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  une formule de Presburger de  $\mathcal{P}_n$ . Les variables  $x_1, \dots, x_n$  sont libres pour  $\rho$  mais ne sont pas libres pour la formule complète  $\psi(Z)$ . On interprète les formules P-MSO sur les posets série-parallèles transfinis étiquetés par un alphabet  $A$ . La signature utilisée est  $\mathcal{L}_{P-MSO} = \{<, X(x)\} \cup \{a: a \in A\}$ . Il s'agit exactement de la même signature utilisée pour les formules MSO.

Formellement, soit  $A$  un alphabet  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_\emptyset$  trois ensembles disjoints de variables nommées respectivement *variables du premier ordre de P-MSO variables du second ordre de P-MSO*, et *variables du premier ordre de Presburger*.

Les formules de P-MSO sont construites inductivement selon la syntaxe suivante :

1. si  $a \in A$  et  $x \in V_1$  alors  $a(x)$  est une formule P-MSO ;
2. si  $x, y \in V_1$  alors  $x < y$  est une formule P-MSO ;
3. si  $x \in V_1$  et  $X \in V_2$  alors  $x \in X$  (ou  $X(x)$ ) est une formule P-MSO ;
4. si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des formules P-MSO alors  $\psi_1 \vee \psi_2$  et  $\psi_1 \wedge \psi_2$  le sont aussi ;
5. si  $\psi$  est une formule P-MSO alors  $\neg\psi$  est aussi une formule P-MSO ;
6. si  $\psi$  est une formule P-MSO et  $x \in V_1$  (resp.  $X \in V_2$ ) alors  $\exists x \psi$  et  $\forall x \psi$  (resp.  $\exists X \psi$  et  $\forall X \psi$ ) sont des formules P-MSO ;
7. si  $Z \in V_2$ ,  $x_1, \dots, x_n \in V_\emptyset$ ,  $\rho \in \mathcal{P}_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $i \in [n]$ ,  $\psi_i$  est une formule P-MSO sans variable libre du premier ordre alors

$$\mathcal{Q}(Z, \psi_1, \dots, \psi_n, \rho(x_1, \dots, x_n))$$

est une formule P-MSO.

Les six premières règles de construction sont exactement celles construisant les formules MSO sur la signature  $\mathcal{L}_{MSO}$ . La nouveauté dans P-MSO réside dans la septième règle de construction. L'ensemble  $FV(\psi)$  des variables libres d'une formule P-MSO généralise celui de MSO en plus de la règle suivante :

si  $\psi$  est une formule P-MSO de la forme  $\mathcal{Q}(Z, \psi_1, \dots, \psi_n, \rho(x_1, \dots, x_n))$  alors

$$FV(\psi) = \{Z\}$$

Similairement aux formules MSO, on note par  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  une formule P-MSO  $\psi$  dans laquelle les variables du premier ordre  $x_1, \dots, x_n$  et les variables du second ordre  $X_1, \dots, X_m$  sont des variables libres, pour  $n, m \in \mathbb{N}$ . Un *énoncé* P-MSO ou une formule *close* P-MSO est une formule P-MSO sans variables libres.

Comme précisé plus haut, les formules P-MSO sont interprétées sur les posets de  $SP^\circ(A)$  pour un alphabet  $A$ . Comme MSO, les variables de  $V_1$  sont interprétées sur des éléments de posets de  $SP^\circ(A)$ , celles de  $V_2$  sur des sous-ensembles de posets de  $SP^\circ(A)$ . Les variables de  $V_\emptyset$  sont interprétées sur  $\mathbb{N}$ . La sémantique donnée aux formules P-MSO généralise celle donnée aux formules MSO. Comme en MSO, quand  $x, y \in V_1$  sont interprétées sur des éléments d'un poset  $(P, <_P, l_P) \in SP^\circ(A)$  et  $X \in V_2$  comme un sous-ensemble de  $P$ , les formules atomiques  $x < y$ ,  $a(x)$  et  $X(x)$  sont interprétées comme respectivement  $x <_P y$ ,  $l_P(x) = a$  et  $x \in X$ . Les quantificateurs spécifient les modalités des différents variables et les connecteurs  $\neg, \vee$  permettent d'appliquer des opérations booléennes sur les formules P-MSO.

Nous détaillons dans la suite la sémantique donnée à une formule de la forme

$$\psi(Z) = \mathcal{Q}(Z, \psi_1, \dots, \psi_n, \rho(x_1, \dots, x_n))$$

Soit  $P \in SP^\circ(A)$  et soit  $c_1, \dots, c_n$  des couleurs différentes. Informellement, on assimile le concept de satisfaction de  $\psi(Z)$  par  $P$  à une notion de coloriage de l'interprétation  $Y$  de  $Z$  dans  $P$ . Pour que  $P$  satisfasse  $\psi(Z)$ , il faut que  $Y$  soit un facteur de  $P$  admettant une factorisation parallèle  $\parallel_{i \in [k]} Y_k$  non triviale pouvant être coloriée de la manière suivante : À chaque  $Y_i$ ,  $i \in [k]$ , on associe une couleur  $c_j$ ,  $j \in [n]$ , si  $Y_i$  satisfait  $\psi_j$ . Remarquons qu'il peut y avoir plusieurs tels coloriages, comme il peut ne pas y en avoir du tout. Un coloriage est fructueux si  $(v_1, \dots, v_n) \in L(\rho)$  où chaque  $v_j$ ,  $j \in [n]$  désigne le nombre d'utilisations de la couleur  $c_j$ . Plus formellement  $P$  satisfait  $\psi(Z)$  si  $Z$  est interprétée comme un bon intervalle  $Y$  non vide de  $P$ , et il existe  $(v_1, \dots, v_n) \in L(\rho)$  et des posets séquentiels  $Y_{1,1}, \dots, Y_{1,v_1}, \dots, Y_{n,1}, \dots, Y_{n,v_n} \in SP^{\circ+}(A)$  tels que  $Y = \parallel_{i \in [n]} \parallel_{j \in [v_i]} Y_{i,j}$  et  $Y_{i,j}$  satisfait  $\psi_i$  pour tout  $i \in [n]$  et  $j \in [v_i]$ . Si c'est le cas, on écrit  $P, Y \models \psi(Z)$ .

**Exemple 3.3.1.** Soit  $A = \{a_1, a_2\}$ , et soit  $\psi_i \equiv \exists x a_i(x)$ ,  $i \in [2]$ . Soit  $\rho(x_1, x_2) \equiv \exists k_1 \exists k_2 x_1 = 2k_1 \wedge x_2 = 2k_2 + 1 \in \mathcal{P}$ . Soient  $P_1 = a_1(a_1 \parallel a_1)a_1$ ,  $P_2 = a_2a_2$  et  $P_3 = (a_1 \parallel a_2)a_1$  et soit  $P = P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$ . Alors

$$P, P \models \mathcal{Q}(X, \psi_1, \psi_2, \rho(x_1, x_2))$$

puisque  $P_1$  et  $P_3$  satisfont  $\psi_1$ ,  $P_2$  satisfait  $\psi_2$  et  $(2, 1) \in L(\rho)$ .

Soit  $A$  un alphabet. L'univers d'interprétation de nos formules de logique P-MSO est  $SP^\circ(A)$ . Dans la suite, cet univers sera restreint suivant la classe de posets de  $\{A^*, A^\#, A^\circ, SP(A), SP^\circ(A)\}$  qu'on aura à traiter. S'il n'est pas cité, il sera compris du contexte. Le langage d'une formule  $\psi$ , noté  $L_{\mathcal{U}}(\psi)$ , est l'ensemble des posets marqués de l'univers d'interprétation  $\mathcal{U}$  qui sont modèles pour  $\psi$ . En particulier, lorsque  $\psi$  est une formule close,  $L_{\mathcal{U}}(\psi)$  est un ensemble de  $(\emptyset, \emptyset)$ -posets. Deux formules  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont dites *logiquement équivalentes* dans un univers d'interprétation  $\mathcal{U}$ , noté  $\psi_1 \equiv_{\mathcal{U}} \psi_2$ , si  $L_{\mathcal{U}}(\psi_1) = L_{\mathcal{U}}(\psi_2)$ . Quand l'univers  $\mathcal{U}$  est compris du contexte on écrit  $L(\psi)$  au lieu de  $L_{\mathcal{U}}(\psi)$  et  $\psi_1 \equiv \psi_2$  au lieu de  $\psi_1 \equiv_{\mathcal{U}} \psi_2$ .

**Exemple 3.3.2.** Soit l'énoncé FO suivant

$$\psi = \forall x a(x) \implies \exists y x < y \wedge (\neg \exists z x < z \wedge z < y) \wedge b(y)$$

Alors  $L_{A^*}(\psi)$  est l'ensemble des mots finis où toute lettre  $a$  est suivie immédiatement d'une lettre  $b$ . Ce langage est exprimé par l'expression rationnelle  $b^*(ab^+)^*b^*$ . Similairement,  $L_{A^\#}(\psi) = b^\#(abb^\#)^\#b^\#$  et  $L_{A^\circ}(\psi) = b^\circ(abb^\circ)^\circ b^\circ$ .

**Exemple 3.3.3.** Soit la formule MSO  $\phi$  close de l'Exemple 3.2.1 décrite aussi dans l'Exemple 3.2.3. Alors  $L_{A^*}(\phi) = a^*b^*$ ,  $L_{A^\#}(\phi) = a^\#b^\#$  et  $L_{A^\circ}(\phi) = a^\circ b^\circ$ .

Soit  $A$  un alphabet. La logique MSO est étroitement liée aux langages rationnels sur les mots de manière générale. En particulier, quand elle est interprétée sur  $A^*$  (resp.  $A^\#, A^\circ$ ) elle est exactement de même expressivité que les automates de Kleene (resp. sur les ordinaux dénombrables, sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés). Ces résultats sont l'objet de la prochaine section.

Bedon a étendu ces résultats aux langages rationnels de  $SP(A)$  en utilisant P-MSO. Nous en parlerons dans le chapitre suivant, et nous les étendrons aux langages rationnels de  $SP^\circ(A)$ . De son côté, la logique FO est strictement moins expressive que MSO. Elle caractérise les langages sans étoiles de  $A^*$ . Un langage sans étoile de  $A^*$  est le langage d'une expression rationnelle n'utilisant pas l'opération  $*$  mais où l'opération de complémentation est admise.

**Théorème 3.3.4** ([62]). *Soit  $A$  un alphabet. Alors un langage  $L$  de  $A^*$  est sans étoile si et seulement si il existe un énoncé FO  $\psi$  tel que  $L_{A^*}(\psi) = L$ .*

Dans une logique  $L$  interprétée sur une classe de posets  $\mathcal{U}$ , une  $L$ -théorie  $T_P$  d'un poset  $P$  est l'ensemble des formules de  $L$  dont  $P$  est un modèle. Une  $L$ -théorie  $T$  est *décidable* si la question « la formule  $\psi$  appartient à la théorie  $T$  ? » est décidable pour toute formule  $\psi$  de  $L$ .

Soit  $A$  un alphabet. Dans la prochaine section, on retracera les résultats de décidabilités de MSO sur  $A^*$ ,  $A^\sharp$  et  $A^\circ$ . Dans le chapitre suivant on se penchera sur la décidabilité de la théorie P-MSO sur  $SP(A)$  et  $SP^\circ(A)$ . Mais d'abord nous définissons dans la prochaine sous-section des formules P-MSO qui nous seront utiles dans la suite.

### 3.3.1 Relations définissables en P-MSO

Soit  $P$  un poset étiqueté. Une relation  $R \subseteq P^m \times (\mathcal{P}(P))^n$  est *définissable* en P-MSO (resp. MSO) dans  $P$  s'il existe une formule P-MSO (resp. MSO)  $\phi_R(x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_n)$  qui est satisfaite par  $P$  si et seulement si l'interprétation  $(v_1, \dots, v_m, V_1, \dots, V_n)$  donnée aux variables libres de  $\phi$  dans  $P$  est un élément de  $R$ . Naturellement toute relation sur  $P$  définissable en MSO est définissable en P-MSO.

Pour alléger nos formules de logique et pour qu'elles soient plus lisibles nous utiliserons ce qu'on appelle *macro*. Il s'agit d'abréviations de longues formules de logique à l'aide de symboles ou de noms de fonctions permettant de rendre les formules plus compréhensibles. Bien sûr, avant l'utilisation d'une macro on définira au préalable à quoi elle fait référence.

$$\begin{aligned} \exists^X x \psi(x, X) &\equiv \exists x x \in X \wedge \psi(x, X) \\ \forall^X x \psi(x, X) &\equiv \forall x x \in X \implies \psi(x, X) \\ x = y + 1 &\equiv y < x \wedge (\neg \exists z y < z \wedge z < x) \\ x \leq y &\equiv x = y \vee x < y \\ Dom(X) &\equiv \forall x x \in X \end{aligned}$$

Ces macros formalisent de haut en bas l'existence d'un  $x$  dans  $X$  tel que  $\psi(x, X)$ , pour tout  $x$  si  $x \in X$  alors  $\psi(x, X)$ , le fait que  $x$  soit un élément successeur de  $y$ , le fait que  $x$  soit plus petit ou égal à  $y$  et le fait que  $X$  contienne tous les éléments du poset dans lequel  $X$  est interprétée. Aussi, étant données deux formules P-MSO  $\psi_1(x_1, \dots, x_{k_1}, X_1, \dots, X_{k'_1})$  et  $\psi_2(x_1, \dots, x_{k_2}, X_1, \dots, X_{k'_2})$ , pour  $k_1, k'_1, k_2, k'_2 \in \mathbb{N}$ , on dénote par  $\psi_1(x_1, \dots, x_{k_1}, X_1, \dots, X_{k'_1}) \vee_c \psi_2(x_1, \dots, x_{k_2}, X_1, \dots, X_{k'_2})$  la formule

$$\psi_1(x_1, \dots, x_{k_1}, X_1, \dots, X_{k'_1}) \vee \psi_2(x_1, \dots, x_{k_2}, X_1, \dots, X_{k'_2})$$

si la condition  $c$  est vérifiée et  $\psi_1(x_1, \dots, x_{k_1}, X_1, \dots, X_{k'_1})$  sinon.

On liste dans la suite quelques macros de relations sur les posets définissables en P-MSO. Soient  $P$  un poset étiqueté,  $X, Y, Z \subseteq P$  et  $x \in P$ . Alors :

$$\begin{aligned}
X = \emptyset &\equiv \forall x \, x \notin X \\
X \neq \emptyset &\equiv \neg X = \emptyset \\
X \subseteq Y &\equiv \forall x \, x \in Y \implies x \in X \\
X = Y &\equiv X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \\
X \neq Y &\equiv \neg X = Y \\
X \subset Y &\equiv X \subseteq Y \wedge \neg X = Y \\
Y \cup Z = X &\equiv \forall x \, (x \in Y \vee x \in Z) \iff x \in X \\
Y \cap Z = \emptyset &\equiv \forall x \, (x \in Y \implies \neg x \in Z) \wedge (x \in Z \implies \neg x \in Y) \\
Y \cap Z \neq \emptyset &\equiv \neg Y \cap Z = \emptyset \\
Y, Z \neq \emptyset &\equiv Y \neq \emptyset \wedge Z \neq \emptyset \\
X < Y &\equiv \forall x \forall y \, (x \in X \wedge y \in Y) \implies x < y \\
\min(x, X) &\equiv \forall^X y \, x \leq y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max(x, X) &\equiv \forall^X y \, y \leq x \\
\text{Succ}(x, X) &\equiv \exists^X y \, y = x + 1 \\
\text{Pred}(x, X) &\equiv \exists^X y \, x = y + 1
\end{aligned}$$

L'interprétation de ces macros est suffisamment explicite. Les deux dernières en particulier vérifient que  $x$  admet respectivement un successeur et un prédécesseur dans  $X$ . Plus généralement :

$$\begin{aligned}
\text{Comp}(x, y) &\equiv x < y \vee y < x \\
\text{Incomp}(x, y) &\equiv \neg \text{Comp}(x, y)
\end{aligned}$$

où  $\text{Comp}(x, y)$  et  $\text{Incomp}(x, y)$  expriment respectivement «  $x$  est comparable à  $y$  » et «  $x$  est incomparable à  $y$  ». Dans le même contexte, les formules :

$$\begin{aligned}
x = y &\equiv \exists X, Y \, |X| = 1 \wedge |Y| = 1 \wedge x \in X \wedge y \in Y \wedge X = Y \\
x \parallel y &\equiv \neg x = y \wedge \text{Incomp}(x, y) \\
X \parallel Y &\equiv \forall x \forall y \, (x \in X \wedge y \in Y) \implies x \parallel y
\end{aligned}$$

expriment que  $x$  est égal à  $y$ , que  $x$  est différent et incomparable à  $y$  et que les éléments de  $X$  sont tous différents et incomparables aux éléments de  $Y$ . On dénote par

$$\exists! x \, \psi(x) \equiv \exists x \, \psi(x) \wedge (\forall y \, \psi(y) \implies y = x)$$

la formule exprimant l'existence d'un unique  $x$  tel que  $\psi(x)$ . Les formules

$$\begin{aligned}
\exists^X Y \, \psi(Y, X) &\equiv \exists Y \, Y \subseteq X \wedge \psi(Y, X) \\
\forall^X Y \, \psi(Y, X) &\equiv \forall Y \, Y \subseteq X \implies \psi(Y, X)
\end{aligned}$$

sont similaires à  $\exists^X x \, \psi(x, X)$  et  $\forall^X x \, \psi(x, X)$ .

La relation «  $(Y, Z)$  est une partition de  $X$  » est aussi définissable en P-MSO :

$$\text{Partition}(X, Y, Z) \equiv Y \cup Z = X \wedge Y \cap Z = \emptyset$$

Notons que ce n'est pas exactement la définition mathématique de la notion de partition d'un ensemble. En effet, ici nous autorisons  $Y$  et  $Z$  à être vides.

La relation  $|X| = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'est aussi :

$$- |X| = 0 \equiv X = \emptyset$$

$$- |X| = n + 1 \equiv \exists Y, Z \text{ Partition}(X, Y, Z) \wedge |Y| = 1 \wedge |Z| = n$$

On en déduit une formule P-MSO définissant la relation  $|X| \geq n$  :

$$|X| \geq n \equiv \neg(|X| = 0 \wedge \dots \wedge |X| = n - 1)$$

La relation «  $X$  est la composition séquentielle de  $Y$  et  $Z$  » est définissable en P-MSO :

$$X = Y + Z \equiv \text{Partition}(X, Y, Z) \wedge Y < Z$$

Similairement, «  $X$  est la composition parallèle de  $Y$  et  $Z$  » est aussi définissable en P-MSO :

$$X = Y \parallel Z \equiv \text{Partition}(X, Y, Z) \wedge Y \parallel Z$$

Plus généralement, la relation «  $X$  est un intervalle de  $P$  » l'est aussi :

$$\text{Intervalle}(X, P) \equiv X \subseteq P \wedge (\forall^X x \forall^P p \forall^X x' x < p \wedge p < x' \implies p \in X)$$

C'est une traduction en MSO de la définition formelle de la notion d'intervalle. On peut déduire aussi une formule MSO définissant «  $X$  est un bon intervalle de  $P$  ».

$$\text{Facteur}(X, P) \equiv \text{Intervalle}(X, P) \wedge X \neq \emptyset$$

$$\wedge (\forall^X x \forall^X x' \forall^P p (\text{Comp}(p, x) \wedge \text{Incomp}(p, x') \implies p \in X)$$

C'est une traduction en MSO de la définition formelle de la notion de bon intervalle qui correspond à la notion de facteur dans les posets étiquetés.

Les formules suivantes :

$$\text{Facteur}_s(X, P) \equiv \text{Facteur}(X, P) \wedge$$

$$(|X| = 1 \vee \exists X_1, X_2 X_1, X_2 \neq \emptyset \wedge X = X_1 + X_2)$$

$$\text{Facteur}_p(X, P) \equiv \text{Facteur}(X, P) \wedge \exists X_1, X_2 X_1, X_2 \neq \emptyset \wedge X = X_1 \parallel X_2$$

définissent les relations «  $X$  est un facteur séquentiel de  $P$  » et «  $X$  est un facteur parallèle de  $P$  ».

Enfin, nous aurons besoin de la macro formalisant la notion de facteur maximal d'une partie d'un poset. Soit  $P$  un poset et  $Y$  un sous-poset de  $P$ . Une partie  $X$  de  $Y$  est un facteur maximal de  $P$  dans  $Y$  si  $X$  est un facteur de  $Y$  et il n'existe pas de facteur  $Q$  de  $Y$  tel que  $X$  est une partie de  $Q$ . C'est ce qu'exprime la formule MSO suivante :

$$\text{FacteurMax}(X, Y) \equiv \text{Facteur}(X, Y) \wedge (\neg \exists Q \text{ Facteur}(Q, Y) \wedge X \subset Q)$$

**Exemple 3.3.5.** Soit  $\mathcal{U} \in \{A^*, A^\sharp, A^\circ, SP(A), SP^\circ(A)\}$  pour un alphabet  $A$  et soit  $a \in A$ . Soit la formule suivante :

$$\phi(X) \equiv X \neq \emptyset \wedge \text{Dom}(X) \wedge \exists^X x a(x)$$

La formule  $\phi(X)$  est satisfaite par tout poset de  $\mathcal{U}$  qui contient au moins un élément étiqueté par  $a$ . La sous-formule  $\text{Dom}(X)$  s'assure que l'interprétation de  $X$  contient tous les éléments du poset de  $\mathcal{U}$  dans lequel  $X$  est interprété. La formule suivante

$$\varphi(Y) = \text{Dom}(Y) \wedge \exists Y_1, Y_2 Y_1, Y_2 \neq \emptyset \wedge Y = Y_1 + Y_2 \wedge \phi(Y_1) \wedge \phi(Y_2)$$

définit le langage  $(L_{\mathcal{U}}(\phi) \setminus \{\epsilon\}) \cdot (L_{\mathcal{U}}(\phi) \setminus \{\epsilon\})$ .

**Exemple 3.3.6.** Soit  $A = \{a, b\}$  et soient les énoncés P-MSO suivants :

$$\psi_a \equiv \exists X \text{ Dom}(X) \wedge |X| = 1 \wedge a(x)$$

$$\psi_b \equiv \exists X \text{ Dom}(X) \wedge |X| = 1 \wedge b(x)$$

Alors  $L_{SP^\circ(A)}(\psi_a) = \{a\}$  et  $L_{SP^\circ(A)}(\psi_b) = \{b\}$ . Soit l'énoncé P-MSO suivant :

$$\phi \equiv \exists X \text{ Dom}(X) \wedge \mathcal{Q}(X, \psi_a, \psi_b, x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = 0)$$

L'ensemble de Presburger de la formule  $x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = 0$  est  $\{(v, v) : v \in \mathbb{N}^*\}$ . L'énoncé  $\phi$  est satisfait par tous les posets parallèles dont la factorisation parallèle irréductible est de la forme  $\prod_{i \in [n]} P_i$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , telle qu'il existe une partition  $(K_1, K_2)$  de  $[n]$  avec  $|K_1| = |K_2|$  et, pour tout  $j \in K_1$ ,  $P_j \models \psi_a$  et, pour tout  $j \in K_2$ ,  $P_j \models \psi_b$ . Par conséquent  $L_{SP^\circ(A)}(\phi) = (a \parallel b)^\oplus$ . Alors  $L_{SP^\circ(A)}(\phi) = L_{SP(A)}(\phi)$ . Le langage défini par  $\phi$  est le langage de l'automate de la Figure 2.12 décrit dans l'Exemple 2.3.22.

### 3.4 Automates sur les mots et MSO

Soit  $A$  un alphabet. Le résultat de Büchi [28], Elgot [44] et Trakhtenbrot [83] établissant l'équivalence d'expressivité entre les automates de Kleene et MSO a été généralisé à plusieurs autres classes de mots. En particulier, Büchi l'a généralisé pour les langages rationnels de  $A^\sharp$  dans [31] et Bedon, Bès, Carton et Rispal pour les langages rationnels de  $A^\circ$  dans [11]. Les preuves de ces assertions sont effectives. Il s'agit de construire à partir d'une expression rationnelle ou d'un automate de langage  $L$  une formule de logique MSO de langage  $L$  aussi, et inversement. Dans le cas  $A^*$  ou  $A^\sharp$ , la construction classique d'une formule MSO à partir d'un langage rationnel  $L$  se fait en encodant les propriétés satisfaites par un chemin acceptant d'un automate  $\mathcal{A}$  de langage  $L$ . L'idée est de simuler un chemin acceptant  $\gamma$  de  $\mathcal{A}$  en mettant chaque élément  $x$  du mot  $w$  qui l'étiquette dans une variable du second ordre  $X_t$  encodant une transition séquentielle  $t = (p, a, q)$  telle que  $a(x)$  de manière à ce que la suite des  $X_t$  simule un chemin acceptant dans  $\mathcal{A}$ . Cette construction repose sur le fait que, de manière générale, l'ordre linéaire indiquant la factorisation séquentielle irréductible d'un mot et celle du chemin dont il est l'étiquette sont similaires dans le cas des automates de Kleene et les automates sur les ordinaux dénombrables. Cette

propriété n'est plus vérifiée dans le cas des automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Par conséquent, cette construction n'est pas facilement généralisable aux langages rationnels de  $A^\circ$ . Dans ce cas, les auteurs dans [11] ont plutôt construit une formule MSO de langage  $L$  à partir d'une expression rationnelle de même langage. De plus, nous verrons dans le chapitre suivant que la même difficulté subsiste dans le cas des automates branchants sur les posets série-parallèles transfinis. Pour plus d'uniformité, nous présenterons dans cette section la construction d'une formule MSO interprétée sur  $A^\sharp$  (resp.  $A^\circ$ ) à partir d'une expression rationnelle de  $R_E(A^\sharp)$  (resp.  $R_E(A^\circ)$ ). Ces constructions sont inspirées de celle donnée dans [11]. Nous décrivons dans la Sous-section 3.4.1 comment construire une formule de logique MSO à partir d'une expression rationnelle de  $R_E(A^\sharp)$ . La construction d'une formule de logique MSO à partir d'une expression rationnelle de  $R_E(A^\circ)$  proposée dans [11] est donnée dans la Sous-section 3.4.2. Une construction similaire pour les langages rationnels de mots finis s'en déduit assez facilement.

La construction d'un automate sur les mots à partir d'une formule MSO interprétée sur  $A^*$ ,  $A^\sharp$  ou  $A^\circ$  est un cas particulier de la construction d'un automate à partir d'une formule P-MSO interprétée sur  $SP^\circ(A)$  que nous allons présenter dans la Section 4.5 du chapitre suivant. L'argument clé est la fermeture des différentes classes d'automates présentées dans le chapitre précédent par complémentation. Comme corollaire de l'effectivité du théorème de Büchi, Elgot et Trakhtenbrot et de ses généralisations, la décidabilité des théories MSO sur  $A^*$ ,  $A^\sharp$  et  $A^\circ$ .

### 3.4.1 MSO et langages rationnels de $A^\sharp$

L'équivalence d'expressivité entre la logique MSO interprétée sur les mots de  $A^*$  et les automates de Kleene a été établie par Büchi [28], Elgot [44] et Trakhtenbrot [83]. Büchi a généralisé ce résultat aux langages rationnels de  $A^\sharp$ .

**Théorème 3.4.1** ([31]). *Soit  $A$  un alphabet. Alors  $L \subseteq A^\sharp$  est rationnel si et seulement si il existe une formule  $\psi$  de MSO telle que  $L_{A^\sharp}(\psi) = L$ .*

La construction proposée par Büchi d'une formule de logique MSO  $\psi_L$  de langage  $L \in \text{Rat}(A^\sharp)$  repose sur un automate  $\mathcal{A}$  sur les ordinaux dénombrables reconnaissant  $L$ . Nous présentons dans cette sous-section une construction de  $\psi_L$  par induction sur une expression rationnelle de langage  $L$ . Cette construction est un cas particulier de la construction proposée dans [11] par Bedon, Bès, Carton et Rispal dans le cas des langages rationnels sur les ordres linéaires.

Rappelons que les expressions rationnelles de  $R_E(A^\sharp)$  sont des termes sur  $A \cup \{\emptyset, \epsilon\}$  de type algébrique  $(F, \lambda)$  où  $F = \{+, \cdot, \omega, \natural\}$  et  $\lambda(op)$  est l'arité de  $op$ , pour tout  $op \in F$ . Ainsi, une expression rationnelle  $e$  de  $R_E(A^\sharp)$  a l'une des formes suivantes :

$$\emptyset, \epsilon, a \ (a \in A), e_1 + e_2, e_1 \cdot e_2, e'^*, e'^\omega, e'^\natural$$

Soit  $e \in R_E(A^\sharp)$  telle que  $L(e) = L$ . Peu importe la forme de  $e$ ,  $\psi_L$  est de la forme suivante :

$$\exists X(\psi(X) \wedge \text{Dom}(X))$$

C'est la sous-formule  $\psi(X)$  qui change selon la forme de  $e$ . Remarquons que la variable du second ordre  $X$  est interprétée comme l'ensemble des éléments d'un mot  $u$  susceptible de satisfaire  $\psi_L$ .

— si  $e = \emptyset$  alors

$$\psi(X) \equiv \neg(X = X)$$

— si  $e = \epsilon$  alors

$$\psi(X) \equiv |X| = 0$$

— si  $e = a$ , pour  $a \in A$ , alors

$$\psi(X) \equiv |X| = 1 \wedge \forall^X x a(x)$$

— si  $e$  est de la forme  $e_1 + e_2$  ou  $e_1 \cdot e_2$  alors, par hypothèse d'induction, il existe  $\psi_i(Y)$  tel que le langage de

$$\exists X(\psi_i(X) \wedge \text{Dom}(X))$$

est  $L(e_i)$ ,  $i \in [2]$ . Ainsi

— pour  $e_1 + e_2$  :

$$\psi(X) = \psi_1(X) \vee \psi_2(X)$$

— pour  $e_1 \cdot e_2$  :

$$\psi(X) \equiv \exists X_1, X_2 X = X_1 + X_2 \wedge \psi_1(X_1) \wedge \psi_2(X_2)$$

Quand  $e$  est de la forme  $e_1 \cdot e_2$ , la formule  $\psi_L$  exprime que les éléments de  $X$  doivent pouvoir être partitionnés en deux sous-ensembles  $X_1$  et  $X_2$  tel que  $X_i$  satisfait  $\psi_i(Y)$ ,  $i \in [2]$ . Les ensembles  $X_i$  sont l'interprétation des éléments d'un facteur  $u_i$  de  $u$  tel que  $u = u_1 \cdot u_2$  et  $u_i \in L(e_i)$ ,  $i \in [2]$ .

L'idée générale de la construction de  $\psi(X)$  est semblable quand  $e$  est de la forme  $e'^*$ ,  $e'^\omega$  ou  $e'^\natural$ . Le cas échéant,  $\psi(X)$  doit exprimer que  $X$  peut être partitionné en une suite de sous-ensembles  $(X_i)_{i \in \alpha}$ , pour un ordinal dénombrable  $\alpha$ , telle que chaque  $X_i$  est interprété comme l'ensemble des éléments d'un mot de  $L(e')$ . Cette solution est impossible au vu de la potentielle infinité des  $X_i$ . C'est là où la notion de « facteur maximal » intervient. La formule  $\psi(X)$  exprime que  $X$  doit pouvoir être partitionné en deux sous-ensembles  $X_1$  et  $X_2$  tels que tout facteur maximal de  $X_i$  est l'ensemble des éléments d'un mot de  $L(e_i)$ . Nous avons besoin aussi d'une formule simulant une chaîne contenant un et un seul élément de chaque facteur maximal de  $X_1$  et  $X_2$ .

$$\text{Chaîne}(C, X) \equiv C \subseteq X \wedge \forall Y \text{FacteurMax}(Y, X) \implies (\exists! c c \in C \wedge c \in Y)$$

Il faut ensuite vérifier le type d'ordre de cette chaîne :

$$\text{Fini}(X) \equiv |X| = 0 \vee \exists^X z \max(z, X) \wedge \forall^X x (\min(x, X) \vee \text{Pred}(x, X))$$

$$\text{Omega}(X) \equiv \neg \text{Fini}(X) \wedge X \neq \emptyset \wedge \neg \exists^X x \max(x, X)$$

$$\wedge \forall Y (Y \subset X \implies \text{Fini}(Y))$$

La sous-formule  $\forall^X x \min(x, X) \vee \text{Pred}(x, X)$  de  $\text{Fini}(X)$  exprime que tout élément  $x \in X$  est soit le minimum de  $X$  ou admet un prédécesseur dans  $X$ . La formule  $\text{Omega}(X)$  exprime que  $X$  n'est pas fini, n'est pas vide, qu'il n'admet pas de maximum et que toute partie propre de  $X$  est finie.

Soit  $\psi'(X)$  la formule MSO obtenue par hypothèse d'induction telle que l'énoncé

$$\exists X(\psi'(X) \wedge \text{Dom}(X))$$

est de langage  $L(e')$ .

Remarquons que dans le cas où  $e$  est de la forme  $e'^*$  ou  $e'^{\natural}$ , si  $e' = \epsilon$  ou  $e' = \emptyset$  alors  $L(e) = \epsilon$ . De plus si  $e$  est de la forme  $e'^{\omega}$  et  $e' = \epsilon$  ou  $e' = \emptyset$  alors  $L(e) = L(e')$ . Donc on peut supposer dans la suite que  $e' \neq \epsilon$  et  $e' \neq \emptyset$ .

— si  $e$  est de la forme  $e'^*$

$$\begin{aligned} \psi(X) &\equiv \exists X_1 \exists C_1 \exists X_2 \exists C_2 \\ &\text{Partition}(X, X_1, X_2) \wedge \text{Chaine}(C_1, X_1) \wedge \text{Chaine}(C_2, X_2) \\ &\wedge \exists Z C_1 \cup C_2 = Z \wedge \text{Fini}(Z) \\ &\wedge \forall Y (\text{FacteurMax}(Y, X_1) \vee \text{FacteurMax}(Y, X_2)) \implies \psi'(Y) \\ &\vee |X| = 0 \end{aligned}$$

— si  $e$  est de la forme  $e'^{\omega}$  remarquons que lorsque  $\epsilon \in L(e')$  alors  $L(e')^* \subseteq L(e')^{\omega}$ . En effet, si  $\epsilon \in L(e')$  alors des mots de  $L(e')^{\omega}$  peuvent être finis dans le cas où  $\epsilon$  est itéré infiniment souvent. Alors :

$$\begin{aligned} \psi(X) &\equiv \exists X_1 \exists C_1 \exists X_2 \exists C_2 \\ &\text{Partition}(X, X_1, X_2) \wedge \text{Chaine}(C_1, X_1) \wedge \text{Chaine}(C_2, X_2) \\ &\wedge \exists Z C_1 \cup C_2 = Z \wedge (\text{Omega}(Z) \vee_{\epsilon \in L(e')} \text{Fini}(Z)) \\ &\wedge \forall Y (\text{FacteurMax}(Y, X_1) \vee \text{FacteurMax}(Y, X_2)) \implies \psi'(Y) \\ &\vee_{\epsilon \in L(e')} |X| = 0 \end{aligned}$$

En revanche, si  $e$  est de la forme  $e'^{\natural}$  alors

$$\begin{aligned} \psi(X) &\equiv \exists X_1 \exists X_2 \text{Partition}(X, X_1, X_2) \\ &\wedge \forall Y (\text{FacteurMax}(Y, X_1) \vee \text{FacteurMax}(Y, X_2)) \implies \psi'(Y) \\ &\vee |X| = 0 \end{aligned}$$

puisque  $\psi_L$  est interprétée sur  $A^{\natural}$ .

### 3.4.2 MSO et langages rationnels de $A^{\diamond}$

Une généralisation du théorème de Büchi a été établie par Bedon, Bès, Carton et Rispal dans [11] en utilisant la logique MSO interprétée sur  $A^{\diamond}$ .

**Théorème 3.4.2** ([11]). *Soit  $A$  un alphabet. Alors  $L \subseteq A^{\diamond}$  est rationnel si et seulement si il existe une formule  $\psi$  de MSO telle que  $L_{A^{\diamond}}(\psi) = L$ .*

En réalité, Bedon, Bès, Carton et Rispal ont prouvé dans [11] que tout langage rationnel sur les ordres linéaires est définissable en MSO. Ensuite, une preuve pour le cas des ordres linéaires dénombrables et dispersés est déduite. C'est cette dernière qu'on présente dans la suite. La construction proposée dans [11] est par induction sur une expression rationnelle.

Rappelons que les expressions rationnelles de  $R_E(A^{\diamond})$  sont des termes sur  $A \cup \{\emptyset, \epsilon\}$  de type  $(F, \lambda)$  où  $F = \{., *, +, \omega, -\omega, \natural, -\natural, \diamond\}$ . Ainsi, une expression rationnelle  $e$  de  $R_E(A^{\natural})$  a l'une des formes suivantes :

$$\emptyset, \epsilon, a \ (a \in A), e_1 + e_2, e_1 \cdot e_2, e'^*, e'^{\omega}, e'^{\natural}, e'^{-\omega}, e'^{-\natural}, e_1 \diamond e_2$$

La construction de  $\psi_L$  telle que  $L(\psi_L) = L(e)$  est par induction sur une expression rationnelle  $e$  telle que  $L(e) = L$ . Similairement au cas des ordinaux dénombrables, l'énoncé  $\psi_L$  est de la forme suivante :

$$\exists X(\psi(X) \wedge \text{Dom}(X))$$

C'est la sous-formule  $\psi(X)$  qui change selon la forme de  $e$ . Les cas de base de l'induction sont exactement les mêmes. De même que lorsque  $e$  est de la forme  $e_1 + e_2$  ou  $e_1 \cdot e_2$ . L'idée générale est toujours la même. La formule  $\psi(X)$  exprime que  $X$  peut être partitionné en une suite de sous-ensembles  $(X_i)_{i \in J}$ , pour un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $J$ , telle que chaque  $X_i$  est interprété comme l'ensemble des éléments d'un mot de  $L(e')$ . La différence est due exclusivement au changement du domaine d'interprétation qui n'est plus  $A^\sharp$  mais  $A^\circ$ . Par exemple, la formule  $\psi_L$  construite dans la section précédente pour une expression rationnelle de la forme  $e'^\sharp$  interprétée sur  $A^\circ$  définit plutôt  $L(e')^\circ$ . Similairement, la formule  $\text{Fini}(X)$  n'exprime plus la même chose. Elle est par exemple satisfaite par tous les mots indicés par  $-\omega$  quand elle est interprétée sur  $A^\circ$ . Par conséquent, il faut pouvoir caractériser d'autres types d'ordre ou classes de types d'ordre :

$$\begin{aligned} \text{Ordinal}(X) &\equiv \forall^X Y (Y \neq \emptyset \implies \exists^Y y \min(y, Y)) \\ \text{Fini}(X) &\equiv \forall^X Y (Y \neq \emptyset \implies \exists^Y x \exists^Y y \max(x, Y) \wedge \min(y, Y)) \\ \text{Omega}(X) &\equiv \neg \text{Fini}(X) \wedge X \neq \emptyset \wedge \neg \exists x \max(x, X) \\ &\quad \wedge \forall^X Y (Y \neq \emptyset \implies \exists^Y y \min(y, Y)) \\ &\quad \wedge (\exists^Y z \max(z, Y) \implies \text{Fini}(Y)) \end{aligned}$$

En particulier la formule  $\text{Fini}(X)$  vérifie que toute partie non vide de  $X$  admet un minimum et un maximum. Par ailleurs, à partir des formules ci-dessus, nous pouvons déduire les formules  $\neg \text{Ordinal}(X)$  et  $\neg \text{Omega}(X)$  :

$$\begin{aligned} \neg \text{Ordinal}(X) &\equiv \forall^X Y (Y \neq \emptyset \implies \exists^Y y \max(y, Y)) \\ \neg \text{Omega}(X) &\equiv \neg \text{Fini}(X) \wedge X \neq \emptyset \wedge \neg \exists x \min(x, X) \\ &\quad \wedge \forall^X Y (Y \neq \emptyset \implies \exists^Y y \max(y, Y)) \\ &\quad \wedge (\exists^Y z \min(z, Y) \implies \text{Fini}(Y)) \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $e$  est de la forme  $e'^*$  (resp.  $e'^\omega$ ) alors  $\psi(X)$  est exactement celle vue dans la Sous-section 3.4.1 au même cas, en remplaçant  $\text{Fini}(Z)$  (resp.  $\text{Omega}(Z)$ ) par sa nouvelle définition. Le cas où  $e$  est de la forme  $e'^{-\omega}$  est similaire au cas où  $e$  est de la forme  $e'^\omega$  en remplaçant  $\text{Omega}(Z)$  par  $\neg \text{Omega}(Z)$ . Le cas où  $e$  est de la forme  $e'^\sharp$  (resp.  $e'^{-\sharp}$ ) est similaire au cas où elle est de la forme  $e'^*$  en remplaçant  $\text{Fini}(Z)$  par  $\text{Ordinal}(Z)$  (resp.  $\neg \text{Ordinal}(X)$ ).

Enfin, quand  $e$  est de la forme  $e_1 \diamond e_2$ , il faut pouvoir vérifier le type d'ordre d'un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $I$  sur lequel un mot de  $L(e_1 \diamond e_2)$  est indicé. Il faut aussi vérifier certaines de ses propriétés suivant l'appartenance ou non de  $\epsilon$  à  $L(e_i)$ ,  $i \in [2]$  (voir [11, Section 3.2] et Remarque 2.1.3).

Supposons d'abord que  $\epsilon \notin L(e_1) \cup L(e_2)$ . Dans ce cas le lemme suivant donne les propriétés que doit satisfaire  $I$ .

**Lemme 3.4.3.** ([11, Lemme 2]) *Soit  $A$  un alphabet fini et soient  $e_1, e_2 \in R_E(A^\circ)$ . Alors, un mot  $u \in L(e_1 \diamond e_2)$  si et seulement si il est indicé par un*

ordre linéaire dénombrable et dispersé  $I$  complet qui peut être partitionné en deux sous-ordres  $J$  et  $K$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. si  $I$  admet un minimum  $m_1$  alors  $m_1 \in J$  ;
2. si  $I$  admet un maximum  $m_2$  alors  $m_2 \in J$  ;
3. tout élément de  $J$  différent du minimum et du maximum admet un prédécesseur et successeur dans  $I$  appartenant à  $K$  ;
4. si  $J$  admet un minimum  $m'_1$  alors  $m'_1$  admet un successeur dans  $I$  appartenant à  $K$  ;
5. si  $J$  admet un maximum  $m'_2$  alors  $m'_2$  admet un prédécesseur dans  $I$  appartenant à  $K$  ;
6. il existe au moins un élément de  $J$  entre chaque paire d'éléments de  $K$ .

Rappelons qu'un ordre linéaire  $I$  est complet s'il n'admet pas de coupure  $(J, K)$  telle que  $J$  et  $K$  ne sont pas vides,  $J$  n'a pas de maximum et  $K$  n'a pas de minimum. Alors :

$$\text{Complet}(I) \equiv \forall J \forall K (J, K \neq \emptyset \wedge I = J + K \implies \exists^I x \max(x, J) \vee \min(x, K))$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \psi(X) &\equiv \exists X_1 \exists J \exists X_2 \exists K \exists I \ X_1, X_2 \neq \emptyset \wedge J \cup K = I \\ &\wedge \text{Partition}(X, X_1, X_2) \wedge \text{Chaine}(J, X_1) \wedge \text{Chaine}(K, X_2) \wedge \text{Complet}(I) \\ &\wedge \forall Y \text{FacteurMax}(Y, X_1) \implies \psi_1(Y) \\ &\wedge \forall Y \text{FacteurMax}(Y, X_2) \implies \psi_2(Y) \\ &\wedge (\exists^I m_1 \min(m_1, I)) \implies m_1 \in J \\ &\wedge (\exists^I m_2 \max(m_2, I)) \implies m_2 \in J \\ &\wedge \forall^J j (\neg \min(j, J) \vee \neg \max(j, J)) \implies (\text{Succ}(j, K) \wedge \text{Pred}(j, K)) \\ &\wedge (\exists^J m'_1 \min(m'_1, J)) \implies \text{Succ}(m'_1, K) \\ &\wedge (\exists^J m'_2 \max(m'_2, J)) \implies \text{Pred}(m'_2, K) \\ &\wedge \forall^K k_1 \forall^K k_2 (k_1 < k_2 \implies \exists^J j' k_1 < j' \wedge j' < k_2) \end{aligned}$$

Les quatre premières lignes de la formule permettent de partitionner  $X$  de manière conforme à la définition de l'opération rationnelle  $\diamond$ . Les six dernières lignes formalisent les propriétés du Lemme 3.4.3 dans l'ordre. La formule  $\psi_i(Y)$  est celle obtenue par hypothèse d'induction telle que l'énoncé

$$\exists X (\psi_i(X) \wedge \text{Dom}(X))$$

soit de langage  $L(e_i)$ ,  $i \in [2]$ .

Les propriétés que doit vérifier  $I$  dans les autres cas sont soit un sous-ensemble de celles citées ci-dessus ou bien très similaires. Ces propriétés sont montrées dans [11]. Nous nous contenterons de les lister sans écrire toutes les formules correspondantes.

Si  $\epsilon \in L(e_1)$  et  $\epsilon \notin L(e_2)$  alors  $\epsilon \in L(e_1 \diamond e_2)$ . Dans ce cas  $u \in L(e_1 \diamond e_2)$  si et seulement si  $u$  peut être écrit comme  $\prod_{i \in I} u_i$  tel que  $I$  est soit vide ou  $I$  est complet et peut être partitionné en deux sous-ordres  $J$  et  $K$  tels que les propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $u_i \neq \epsilon$  pour tout  $i \in I$  ;
2.  $u_i \in L(e_1)$  quand  $i \in J$ , et  $u_i \in L(e_2)$  sinon ;
3. tout élément de  $J$  différent du minimum de  $I$  admet un prédécesseur dans  $I$  appartenant à  $K$  ;
4. tout élément de  $J$  différent du maximum de  $I$  admet un successeur dans  $I$  appartenant à  $K$ .

Si  $\epsilon \notin L(e_1)$  et  $\epsilon \in L(e_2)$  alors  $u \in L(e_1 \diamond e_2)$  si et seulement si  $u$  peut être écrit comme  $\prod_{i \in I} u_i$  tel que  $I$  est l'ordre linéaire réduit à un seul élément ou n'importe quel ordre linéaire dénombrable et dispersé qui peut être partitionné en deux sous-ordres  $J$  et  $K$  tels que les propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $u_i \neq \epsilon$  pour tout  $i \in I$  ;
2.  $u_i \in L(e_1)$  si  $i \in J$ , et  $u_i \in L(e_2)$  sinon ;
3. si  $I$  admet un minimum  $m_1$  alors  $m_1 \in J$  ;
4. si  $I$  admet un maximum  $m_2$  alors  $m_2 \in J$  ;
5. il existe au moins un élément de  $J$  entre chaque paire d'éléments de  $K$ .

Enfin, si  $\epsilon \in L(e_1) \cap L(e_2)$  alors  $u$  peut s'écrire comme  $\prod_{i \in I} u_i$  tel que  $I$  est n'importe quel ordre linéaire dénombrable et dispersé et  $u_i$  est n'importe quel mot non vide de  $L(e_1) \cup L(e_2)$ , pour tout  $i \in I$ . Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \psi(X) &\equiv \exists X_1 \exists X_2 \text{Partition}(X, X_1, X_2) \\ &\wedge \forall Y \text{FacteurMax}(Y, X_1) \implies (\psi_1(Y) \vee \psi_2(Y)) \end{aligned}$$

## CHAPITRE 4

# AUTOMATES SUR LES POSETS ET P-MSO

La particularité de MSO est son adaptation aux classes de langages rationnels de  $A^*$ ,  $A^\#$  et  $A^\diamond$ . Pour caractériser ces langages rationnels, seule l'univers de MSO change d'une classe à une autre. Toutefois, en ce qui concerne les posets, MSO est moins expressive que les automates branchants. En effet, il n'y a pas de formule MSO de langage  $(a \parallel b)^\oplus$  par exemple.

Nous présentons dans ce chapitre l'un des principaux résultats de cette thèse :

**Théorème 4.0.1** ([2, 4]). *Soit un alphabet  $A$ . Un langage  $L \subseteq SP^\diamond(A)$  est rationnel si et seulement si il est définissable en P-MSO avec des constructions effectives d'un formalisme vers l'autre.*

C'est une généralisation, en particulier, de l'équivalence d'expressivité entre MSO et les automates de Kleene, les automates sur les ordinaux dénombrables (Théorème 3.4.1) et les automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés (Théorème 3.4.2), quand MSO est respectivement interprétée sur  $A^*$ ,  $A^\#$  et  $A^\diamond$ . Un résultat similaire a aussi été montré pour les langages rationnels de posets série-parallèles finis  $SP(A)$ . Dans [9], Bedon utilise une extension de la logique MSO avec l'arithmétique de Presburger, appelée P-MSO, pour montrer que, lorsqu'elle est interprétée sur  $SP(A)$ , P-MSO est effectivement équivalente en expressivité aux automates branchants de Lodaya et Weil. Une procédure de décision pour la théorie P-MSO sur  $SP(A)$  s'en déduit naturellement. La construction d'un automate branchant  $\mathcal{A}$  à partir d'une formule P-MSO utilise des arguments classiques et s'appuie sur la fermeture de la classe des langages rationnels de  $SP(A)$  par complémentation montrée dans le même article. La réciproque reprend la construction classique de Büchi. Une formule P-MSO de même langage que  $\mathcal{A}$  est construite en encodant en P-MSO les propriétés satisfaites exclusivement par les chemins acceptant de  $\mathcal{A}$ .

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur une généralisation du théorème de Büchi-Elgot-Trakhtenbrot pour les langages rationnels de  $SP^\diamond(A)$ . Nous montrons que tout langage  $L \subseteq SP^\diamond(A)$  est rationnel si et seulement si il est définissable en P-MSO. Ce résultat est effectif. La construction d'un automate branchant sur les posets série-parallèles transfinis à partir d'une formule P-MSO reprend aussi des techniques habituelles. Nous présentons cette construc-

tion dans la Section 4.5. L'argument majeur est la fermeture de la classe des langages rationnels de  $SP^\diamond(A)$  par complémentation (Théorème 2.3.32). Cependant, l'implication de la gauche vers la droite utilise de nouvelles techniques. La technique habituelle de la construction d'une formule de logique  $\psi$  à partir d'un automate  $\mathcal{A}$  de mêmes langages consiste à encoder les propriétés des chemins acceptants de  $\mathcal{A}$  par des moyens de logique. La formule  $\psi$  encode un chemin acceptant  $\gamma$  dans  $\mathcal{A}$  étiqueté par un poset  $P$  en mettant chaque élément de  $P$  dans une variable du second ordre indiquée par une transition séquentielle successeur de manière consistante avec la définition de chemin. Il reste à encoder l'utilisation des transitions limites. Pour cela il faudrait que chaque facteur  $F$  de  $P$  ait un élément qui soit une plus grande borne inférieure ou une plus petite borne supérieure de  $F$  dans  $P$ . Cet élément servirait en particulier à encoder l'utilisation des transitions limites. Contrairement aux posets de  $A^*$ ,  $A^\#$  ou  $SP(A)$ , les posets de  $A^\diamond$  et  $SP^\diamond(A)$  n'ont pas cette propriété. Par exemple le poset  $X = a^{-\omega}a^\omega$  facteur du poset  $Y = a^\omega a^{-\omega} a^\omega a^{-\omega}$  n'a ni de plus grande borne inférieure ni de plus petite borne supérieure dans  $Y$ . C'est ce qui rend difficile la généralisation de la technique habituelle. Cette difficulté a été évitée dans [11] en construisant  $\psi$  à partir d'une expression rationnelle  $e \in R_E(A^\diamond)$  de même langage que  $\mathcal{A}$ . En nous appuyant sur le Théorème 2.3.31, nous faisons de même pour les langages rationnels de  $SP^\diamond(A)$ .

Nous construisons à partir d'une expression rationnelle  $e \in R_E(SP^\diamond(A))$  une formule P-MSO  $\psi_e$  telle que  $L(e) = L(\psi_e)$ . La construction se divise en trois étapes. La première étape consiste à transformer  $e$  en une forme équivalente appelée  $>1$ -expression. Cette dernière nous garantit que les différents symboles représentant des produits séquentiels composent séquentiellement, une fois interprétés, au moins deux posets non vides. Par exemple, l'expression rationnelle  $a^*$  est transformée en la  $>1$ -expression  $\epsilon + a + a^{*>1}$  où  $a^{*>1}$  itère séquentiellement  $a$  de manière finie et au moins deux fois. C'est une propriété très importante notamment pour la dernière étape de la construction. Les  $>1$ -expressions sont introduites dans la Section 4.1. La deuxième étape consiste à construire un graphe  $D_e$  par induction sur la  $>1$ -expression rationnelle construite à partir de  $e$ . Durant l'induction, nous faisons en sorte que  $D_e$  satisfasse certaines conditions facilitant, en particulier, le calcul de la formule de Presburger qui apparaîtra dans  $\psi_e$ . Les nœuds de  $D_e$  sont étiquetés par des lettres, des opérations séquentielles de  $>1$ -expressions ou par des formules de Presburger. Ces étiquettes, et notamment les opérations séquentielles, sont définissables en P-MSO en généralisant les techniques vues dans la Sous-section 3.4.2. Nous appelons « D-graphe » un graphe construit à partir d'une  $>1$ -expression. La définition d'un D-graphe et sa construction à partir d'une  $>1$ -expression sont présentées dans respectivement la Sous-section 4.2.3 et la Sous-section 4.2.2. Enfin, nous parcourons  $D_e$  pour construire  $\psi_e$ , en associant à chaque nœud  $n$  de  $D_e$  une formule P-MSO  $\psi_n$  dépendamment de l'étiquette de  $n$  et de ses fils potentiels. La difficulté réside dans le fait que  $D_e$  n'est pas forcément acyclique. La récursivité provoquée par la possible non acyclicité de  $D_e$  est évitée, en contournant, durant le parcours de  $D_e$ , certains arcs dit *spéciaux* identifiés lors de la construction de  $D_e$ . En effet, le graphe  $D_e$  privé de ces arcs spéciaux est acyclique. Le contournement de ces arcs spéciaux s'appuie sur une technique définissable en MSO appelée *s-coloriage*, développée dans la Sous-section 4.3.2. Elle permet l'arrêt du parcours de  $D_e$ , en identifiant certains facteurs séquentiels de posets de  $L(e)$ . La construction effective de  $\psi_e$  à partir de  $D_e$  est donnée dans la Section 4.4.

## 4.1 Langages $>1$ -rationnels

Soit  $A$  un alphabet. Avant de construire une structure de graphe à partir d'une expression rationnelle  $e \in R_E(SP^\circ(A))$ , il faut que cette dernière subisse quelques modifications. En effet, pour des raisons techniques qu'on détaillera dans les sections suivantes, on doit s'assurer que les opérations rationnelles séquentielles qu'on utilise composent au moins deux posets non vides. Ce n'est pas le cas pour les opérations séquentielles utilisées pour construire les langages rationnels de  $SP^\circ(A)$ . Rappelons que la classe des langages rationnels de  $SP^\circ(A)$  est la plus petite classe de langages contenant  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{a\}$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermée par

$$\{\cdot, \parallel, +, \circ_\xi, *^\xi, *, \omega, -\omega, \natural, -\natural, \diamond\}$$

Parmi elles, les opérations séquentielles sont les suivantes :  $\{\cdot, *, \omega, -\omega, \natural, -\natural, \diamond\}$ . Remarquons qu'aucune d'elles ne satisfait la propriété énoncée ci-dessus, en particulier lorsque une opérande est un langage contenant  $\epsilon$ . Par exemple  $\{\epsilon\} \cdot \{a\} = \{a\}$ . Nous définissons dans la suite des variantes de ces opérations. Soient  $L, L' \subseteq SP^\circ(A)$ . On définit :

$$L \cdot^{>1} L' = (L \setminus \{\epsilon\}) \cdot (L' \setminus \{\epsilon\}) \quad L^{*>1} = \left\{ \prod_{i \in [n]} P_i : n > 1, P_i \in L \setminus \{\epsilon\} \right\}$$

$$L^{\omega>1} = \left\{ \prod_{i \in \omega} P_i : P_i \in L \text{ pour tout } i \in \omega \right.$$

et  $P_i, P_j \neq \epsilon$  pour certains  $i, j$  avec  $i \neq j$  }

$$L^{-\omega>1} = \left\{ \prod_{i \in -\omega} P_i : P_i \in L \text{ pour tout } i \in -\omega \right.$$

et  $P_i, P_j \neq \epsilon$  pour certains  $i, j$  avec  $i \neq j$  }

$$L^{\natural>1} = \left\{ \prod_{i \in \alpha} P_i : \alpha \in \mathcal{O}, P_i \in L \text{ pour tout } i \in \alpha \right.$$

et  $P_i, P_j \neq \epsilon$  pour certains  $i, j$  avec  $i \neq j$  }

$$L^{-\natural>1} = \left\{ \prod_{i \in -\alpha} P_i : \alpha \in \mathcal{O}, P_i \in L \text{ pour tout } i \in -\alpha \right.$$

et  $P_i, P_j \neq \epsilon$  pour certains  $i, j$  avec  $i \neq j$  }

$$L \diamond^{>1} L' = \left\{ \prod_{j \in J \cup \hat{J}^*} P_j : J \in \mathcal{S} \setminus \{0\}, P_j \in L \text{ si } j \in J, P_j \in L' \text{ si } j \in \hat{J}^* \right.$$

et  $P_i, P_j \neq \epsilon$  pour certains  $i, j \in J \cup \hat{J}^*, i \neq j$  }

**Définition 4.1.1.** Soient  $A$  un alphabet et  $\xi \in A$ . La classe des langages  $>1$ -rationnels de  $SP^\circ(A)$  est la plus petite classe contenant  $\emptyset$ ,  $\{\epsilon\}$ ,  $\{a\}$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermée par les opérations de

$$op^{>1} = \{\parallel, \circ_\xi, *^\xi, \cup, \cdot^{>1}, *^{>1}, \diamond^{>1}, \omega^{>1}, -\omega^{>1}, \natural^{>1}, -\natural^{>1}\}$$

sous les conditions suivantes :

- $\epsilon \notin L$  dans  $L \circ_\xi L'$  et  $L^{*\xi}$  ;
- dans  $L^{*\xi}$ , pour tout élément étiqueté par  $\xi$  dans un poset  $P$  de  $L$ , il existe un autre élément de  $P$  qui ne lui est pas comparable.

On note par  $L +_c L'$  le langage  $L + L'$  quand la condition  $c$  est vérifiée,  $L$  sinon.

**Remarque 4.1.2.** Soit  $A$  un alphabet et soient  $L, L' \subseteq SP^\circ(A)$ . Remarquons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
L \cdot L' &= L \cdot^{>1} L' +_{\epsilon \in L} L' +_{\epsilon \in L'} L & L^* &= L^{* >1} + L + \epsilon \\
L^{\natural} &= L^{\natural >1} + L + \epsilon & L^{-\natural} &= L^{-\natural >1} + L + \epsilon \\
L^\omega &= L^{\omega >1} +_{\epsilon \in L} L^* & L^{-\omega} &= L^{-\omega >1} +_{\epsilon \in L} L^* \\
L^{\natural} &= L^{\natural >1} +_{\epsilon \in L} L^* & L^{-\natural} &= L^{-\natural >1} +_{\epsilon \in L} L^* \\
L \diamond L' &= L \diamond^{>1} L' + L +_{\epsilon \in L} L'
\end{aligned}$$

Ainsi, en conséquence de la fermeture de  $Rat(SP^\circ(A))$  par complémentation, et donc par intersection et différence (Théorème 2.3.32), remarquons qu'un langage de  $SP^\circ(A)$  est rationnel si et seulement si il est  $>1$ -rationnel.

On définit aussi une variante des expressions rationnelles de  $R_E(SP^\circ(A))$  appelée  $>1$ -expressions. Soit  $A$  un alphabet et soit  $\xi \in A$ . Une  $>1$ -expression sur  $A$  est un terme sur  $A \cup \{\emptyset, \epsilon\}$  de type algébrique  $\rho = (F, \lambda)$  où  $F = op^{>1}$  et pour tout  $op \in F$ ,  $\lambda(op)$  est l'arité de  $op$ . L'ensemble des  $>1$ -expressions sur  $A$  est noté  $R_E^{>1}(A)$ . Similairement à  $R_E(A)$ , une application  $L: R_E^{>1}(A) \rightarrow \mathcal{P}(SP^\circ(A))$  peut être aisément définie. Étant donné  $e \in R_E^{>1}(A)$ ,  $L(e)$  est appelé le langage de la  $>1$ -expression  $e$ . L'ensemble  $R_E^{>1}(SP^\circ(A))$  est le sous-ensemble de  $R_E^{>1}(A)$  où les expressions rationnelles de la forme  $e \circ_\xi e'$  et  $e^{*\xi}$  satisfont les conditions suivantes :

- $\epsilon \notin L(e)$  dans les expressions rationnelles de la forme  $e \circ_\xi e'$  et  $e^{*\xi}$  ;
- dans les expressions rationnelles de la forme  $e^{*\xi}$ , pour tout élément étiqueté par  $\xi$  dans un poset  $P$  de  $L(e)$ , il existe un autre élément de  $P$  qui ne lui est pas comparable.

Un langage est  $>1$ -rationnel s'il est le langage d'une  $>1$ -expression. Notons qu'en utilisant des égalités similaires à celles de la Remarque 4.1.2, toute expression rationnelle de  $R_E(SP^\circ(A))$  peut être transformée de manière unique (à commutativité et associativité près) en une  $>1$ -expression de  $R_E^{>1}(SP^\circ(A))$ , appelée la  $>1$ -expression de  $e$ . En revanche, il existe des  $>1$ -expressions qui ne sont la  $>1$ -expression d'aucune expression rationnelle de  $R_E(SP^\circ(A))$ . Par exemple, la  $>1$ -expression  $a \cdot^{>1} \epsilon$  n'est la  $>1$ -expression d'aucune expression rationnelle. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'expression rationnelle de  $R_E(SP^\circ(A))$  qui, en la transformant en une  $>1$ -expression donne  $a \cdot^{>1} \epsilon$ , même s'il existe bien une expression rationnelle de même langage,  $\emptyset$  en l'occurrence.

**Exemple 4.1.3.** Soient les expressions rationnelles  $e_1 = a \circ_\xi (a(\xi \parallel \xi))^{*\xi}$  et  $e_2 = e_1 \diamond b^\circ$ . Alors  $e'_1 = a \circ_\xi (a \cdot^{>1} (\xi \parallel \xi))^{*\xi}$  est la  $>1$ -expression de  $e_1$ . La  $>1$ -expression de  $e_2$  est  $e'_1 \diamond^{>1} (b \diamond^{>1} \epsilon + b + \epsilon) + e'_1$ .

## 4.2 Graphes

Nous présentons dans cette section la construction d'un graphe à partir d'une  $>1$ -expression. Nous appelons ces graphes des  $D$ -graphes. Nous présentons dans la Sous-section 4.2.1 des notions de théorie des graphes qui nous seront utiles par

la suite. Nous définirons formellement les D-graphes dans la Sous-section 4.2.2 et nous expliquerons dans la Sous-section 4.2.3 comment les construire à partir de  $>1$ -expressions, puis nous exposerons les propriétés structurelles qu'ils satisfont dans la Sous-section 4.2.4. Une notion de langage est associée aux D-graphes dans la Sous-section 4.2.5. Enfin, nous montrons dans la Sous-section 4.2.6 que le langage d'un D-graphe est le langage de la  $>1$ -expression dont il est issu.

### 4.2.1 Généralités

Un graphe est un objet mathématique utilisé pour modéliser des connexions entre un ensemble d'objets. Les objets sont représentés par des points appelés sommets ou nœuds et les relations entre eux par des traits les reliant. Nous évoquons dans cette sous-section quelques notions de la théorie des graphes utiles pour la suite. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter [40], par exemple.

Formellement, un *graphe*  $\mathcal{G}$  est un couple  $\mathcal{G} = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble de *nœuds* (ou *sommets*) de  $\mathcal{G}$  et  $E$  une relation binaire sur  $V$ . Il est *fini* si l'ensemble de ses sommets est fini, sinon il est infini.

Un graphe *non orienté*  $\mathcal{G}$  est un graphe  $(V, E)$  où les éléments de  $E$  sont des paires non ordonnées de nœuds différents appelées *arêtes* de  $\mathcal{G}$ . Par *non ordonné* on veut dire que  $(n, n')$  et  $(n', n)$  désignent la même arête reliant les nœuds  $n$  et  $n'$ ,  $n \neq n'$ , qu'on note aussi par  $\{n, n'\}$ . Les éléments d'une arête  $e = \{n, n'\} \in E$  sont appelés les *extrémités* de  $e$ . On dit alors que  $e$  *joint*  $n$  et  $n'$  et que  $n$  et  $n'$  sont *connectés*. Dans ce type de graphe, une arête joignant les nœuds  $n$  et  $n'$  décrit une relation symétrique entre  $n$  et  $n'$ . Dans un graphe fini non orienté  $\mathcal{G}$ , une *chaîne* de  $n \in V$  vers  $n' \in V$  est une suite  $n, n_1, \dots, n_k, n'$  de nœuds telle que  $k = 0$  et  $n$  et  $n'$  sont connectés ou  $k > 0$  et  $n$  est connecté à  $n_1$ ,  $n'$  est connecté à  $n_k$ , et pour tout  $i \in [k - 1]$ ,  $n_i$  est connecté à  $n_{i+1}$ . Cette chaîne est un *cycle* si  $k \geq 2$ ,  $n = n'$  et les nœuds  $n_1, \dots, n_k, n'$  sont distincts. Le graphe  $\mathcal{G}$  est *acyclique* s'il ne contient pas de cycle. Il est *connexe* si pour toute paire  $s, s' \in V$ ,  $s \neq s'$ , il existe une chaîne de  $s$  vers  $s'$ . Un graphe connexe et acyclique est appelé *arbre*. Les arbres ont notamment la particularité d'avoir pour chaque paire de nœuds différents  $n, n'$  exactement une chaîne, dont tous les nœuds sont différents, de  $n$  vers  $n'$ .

**Exemple 4.2.1.** *Le poset  $N$  représenté dans la Figure 1.7 et reproduit dans la Figure 4.1, pour plus de commodité, peut être assimilé au graphe suivant :*

$$(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}\})$$

*C'est un graphe connexe et acyclique : un arbre.*

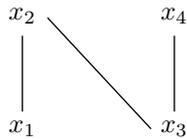


FIGURE 4.1 – Le poset  $N$

Un *graphe orienté*  $\mathcal{G}$  est un graphe  $(V, E)$  où les éléments de  $E$  sont des paires ordonnées de nœuds appelées *arcs* de  $\mathcal{G}$ . Dans ce cas les arcs  $(n, n')$  et  $(n', n)$  sont différents. Dans l'arc  $e = (n, n')$ ,  $n$  est appelé la *source* de  $e$  et  $n'$  sa *destination*. On dit que l'arc  $e$  va de  $n$  à  $n'$ . Remarquons qu'à chaque graphe  $\mathcal{G}$  orienté on peut associer un graphe non orienté. Il suffit d'enlever l'orientation des arcs. Le graphe non orienté obtenu s'appelle le graphe *sous-jacent* de  $\mathcal{G}$ . Un graphe orienté est *connexe* si son graphe sous-jacent est connexe. Un arc  $e = (n, n')$  est représenté par une flèche allant du nœud  $n$  au nœud  $n'$ . On dit que  $e$  *sort* de  $n$  et *entre* dans  $n'$ . Il est noté  $n \rightarrow n'$ . Le *degré sortant* (resp. *entrant*) d'un nœud  $n$  de  $V$  dans  $\mathcal{G}$ , noté  $\text{deg}_{\text{out}}(n)$  (resp.  $\text{deg}_{\text{in}}(n)$ ), est le nombre d'arcs sortants de (resp. entrants à)  $n$ .

Dans un graphe fini orienté  $\mathcal{G} = (V, E)$ , les nœuds de la suite  $n_1, \dots, n_k$ , pour  $k > 0$ , sont dits *consécutifs* s'il existe un arc  $n_i \rightarrow n_{i+1} \in E$ , pour tout  $i \in [k-1]$ . On dit aussi que la suite de nœuds  $n_1, \dots, n_k$  va de  $n_1$  à  $n_k$ . Similairement, les arcs de la suite  $e_1, \dots, e_k$  sont dits *consécutifs* si la destination de  $e_i$  est la source de  $e_{i+1}$ , pour tout  $i \in [k-1]$ . Un nœud  $p$  de  $V$  est un *ancêtre* d'un nœud  $n$  de  $V$  s'il existe dans  $\mathcal{G}$  une suite de nœuds consécutifs  $n_1, \dots, n_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  telle que  $p, n_1, \dots, n_k, n$  est aussi une suite de nœuds consécutifs. Le nœud  $n$  est dit être un *descendant* de  $p$ . Quand  $k = 0$ , on dit que  $p$  est un *parent* pour  $n$  et  $n$  un *enfant* de  $p$ . Un *cycle* dans  $\mathcal{G}$  est une suite  $n_1, \dots, n_k$ ,  $k > 1$ , de nœuds consécutifs de  $\mathcal{G}$  telle que  $n_1 = n_k$ . Un graphe orienté est *acyclique* s'il ne contient pas de cycle. Un graphe orienté acyclique est appelé *DAG* (Directed Acyclic Graph). Dans un DAG, il y a deux types de nœuds :

1. les nœuds *internes* : les nœuds ayant un degré sortant non nul ;
2. les *feuilles* : les nœuds ayant un degré sortant nul.

Remarquons qu'un arbre orienté est un DAG.

Les nœuds et/ou les arêtes (resp. arcs) d'un graphe non orienté (resp. orienté) peuvent être étiquetés. Un graphe *étiqueté* par un ensemble de symboles  $F$  est un 3-uplet  $(V, E, l)$  tel que  $(V, E)$  est un graphe et  $l$  une application associant à chaque nœud et/ou arête (resp. arc) du graphe non orienté (resp. orienté) un élément de  $F$ , appelé son *étiquette*.

**Exemple 4.2.2.** *L'automate de la Figure 2.4 reproduit dans la Figure 4.2, pour plus de commodité, peut être assimilé au graphe suivant :*

$$(\{0, 1\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{((0, 0), a), ((0, 1), b), ((1, 0), a), ((1, 1), b)\})$$

*C'est un graphe orienté dont les arcs sont étiquetés par un alphabet  $\{a, b\}$ . Il n'est pas acyclique puisqu'il existe un cycle entre 0 et 0 par exemple.*

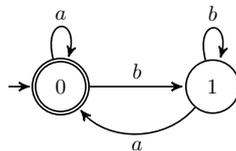


FIGURE 4.2 – Un graphe orienté dont les arcs sont étiquetés.

Un *arbre enraciné*  $T$  est un arbre dont l'ensemble des nœuds contient un nœud unique appelé la *racine* de  $T$ . La particularité de la racine d'un arbre

enraciné est le fait qu'elle induise une orientation des arêtes. En effet, un arbre enraciné  $T$  peut être assimilé à un arbre orienté  $T'$  où la racine de  $T$  est le seul nœud de  $T'$  n'ayant pas de parents et qui est ancêtre de tous les autres nœuds, et où il y a un arc de  $n$  à  $n'$  dans  $T'$  s'il existe une chaîne de  $r, n_1, \dots, n_k, n, n'$  dans  $T$ ,  $k \geq 0$ . Par conséquent, nous utilisons pour les arbres enracinés le vocabulaire défini pour les graphes orientés. Ainsi, la racine d'un arbre enraciné est facilement identifiable. Il s'agit du seul nœud dont le degré entrant est de 0. En effet, tous les nœuds différents de la racine sont de degré entrant 1. Notons qu'un DAG connexe n'est pas toujours un arbre enraciné. Inversement, un arbre enraciné est un DAG. Tous les arbres que nous aurons à utiliser sont des arbres enracinés. Par soucis de simplification, les arbres enracinés sont appelés simplement arbres dans la suite. Ainsi, en disant « l'arbre  $(T, E)$  », il faut comprendre « l'arbre orienté  $(T, E)$  où il existe un unique nœud  $r \in V$  tel qu'il n'existe pas  $n \in V$  avec  $(n, r) \in E$  »

Soit  $T = (V, E)$  un arbre. Alors  $T' = (V', E')$  est un *sous-arbre* de  $T$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ ;
- $T'$  est un arbre ;
- pour tout  $n \in V$ , si  $n \in V'$  alors, pour tout descendant  $n'$  de  $n$  dans  $T$ ,  $n'$  est aussi un descendant de  $n$  dans  $T'$ .

Un sous-arbre de  $T'$  différent de  $T$  est un sous-arbre *strict* de  $T$ . Un arbre a autant de sous-arbres qu'il a de nœuds. Un sous-arbre à partir d'un nœud  $n$  de  $T$  est le sous-arbre de  $T$  enraciné par  $n$ . Il est induit par les descendants de  $n$ . Le sous-arbre  $T'$  de  $T$  est un sous-arbre *direct* de  $T$  si  $T' \neq T$  et il n'existe pas  $T'' \neq T, T'$  sous-arbre de  $T$  tel que  $T'$  est un sous-arbre de  $T''$ . Remarquons que les sous-arbres directs d'un arbre  $T$  ont pour racines les enfants de la racine de  $T$ .

Étant donné un arbre  $T$  et un nœud  $x$  de  $T$ , la *profondeur* de  $x$  est la longueur de l'unique suite d'arcs consécutifs menant de la racine de  $T$  à  $x$ . La *hauteur* de  $x$  est la plus petite borne supérieure des longueurs des suites de nœuds consécutifs menant de  $x$  vers une feuille de  $T$ . La hauteur de  $T$  est la hauteur de sa racine. On peut définir une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des sous-arbres de  $T$  comme suit, pour tout  $T', T''$  sous-arbres de  $T$  :

$$T' < T'' \text{ si et seulement si } T' \text{ est un sous-arbre strict de } T''$$

Un arbre  $T$  où toute suite décroissante de sous-arbres est bien ordonnée est idoine pour les preuves par induction. C'est le cas de tout arbre dont la hauteur est finie par exemple.

Un arbre *ordonné* est un arbre dont les enfants de chaque nœud sont totalement ordonnés. Soit  $I$  un ordre linéaire dénombrable et dispersé. L'arbre ordonné de racine  $r$  et dont la suite ordonnée de ses sous-arbres directs est  $(T_i)_{i \in I}$  est noté  $(r, (T_i)_{i \in I})$ .

Un graphe enraciné est un graphe  $\mathcal{G} = (V, E)$  dans lequel un nœud est désigné et appelé *racine* du graphe, notée  $r(\mathcal{G})$ . Contrairement aux racines des arbres, la racine d'un graphe enraciné n'a pas de propriétés particulières.

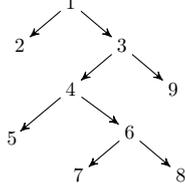


FIGURE 4.3 – Un arbre enraciné dont la racine est le nœud 1

### 4.2.2 D-graphes

On appelle *D-graphe* un cas particulier de graphe fini orienté enraciné dont les nœuds sont étiquetés et dont les arcs sont partiellement ordonnés. Dans un D-graphe, deux arcs sont comparables s'ils ont un parent commun, sinon ils sont incomparables. Plus formellement :

**Définition 4.2.3.** Un D-graphe est un 7-uplet  $D = (V, E_S, E_N, r, out, A, l)$  tel que :

- $V$  est un ensemble fini dont les éléments sont les nœuds de  $D$  ;
- l'ensemble des arcs de  $D$  est partitionné en deux ensembles disjoints  $E_S \subseteq V \times V$  (arcs spéciaux) et  $E_N \subseteq V \times V$  (arcs normaux).
- $r \in V$  est la racine de  $D$  ;
- $out$  est une application associant à chaque nœud  $n \in V$  une suite finie totalement ordonnée  $e_1 \dots e_k$  d'arcs sortants de  $n$  (notons qu'un arc peut avoir plusieurs occurrences dans  $out(n)$ ). On dit que  $n$  est bordé par  $out(n)$  ;
- $A$  est l'alphabet de  $D$  ;
- $l: V \rightarrow A \cup \mathcal{P} \cup \{ \cdot^{>1}, *^{>1}, \diamond^{>1}, \omega^{>1}, -\omega^{>1}, \natural^{>1}, -\natural^{>1} \}$  est une application d'étiquetage satisfaisant :
  - si  $l(n) \in A$  alors  $|out(n)| = 0$  ;
  - si  $l(n) \in \mathcal{P}_k$  alors  $|out(n)| = k$  ;
  - si  $l(n) \in \{ *^{>1}, \omega^{>1}, -\omega^{>1}, \natural^{>1}, -\natural^{>1} \}$  alors  $|out(n)| = 1$  ;
  - si  $l(n) \in \{ \cdot^{>1}, \diamond^{>1} \}$  alors  $|out(n)| = 2$ .

Les ensembles des arcs spéciaux et arcs normaux de  $D$  sont notés  $E_S(D)$  et  $E_N(D)$ .

Remarquons que lorsque un nœud  $n$  d'un D-graphe est étiqueté par le symbole d'une opération séquentielle de  $op^{>1}$  alors le cardinal de  $out(n)$  correspond à l'arité de l'opération séquentielle en question. Similairement, lorsque  $n$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , alors le cardinal de  $out(n)$  correspond au nombre  $k$  de variables libres de  $\rho$ . Par définition, le degré sortant d'un nœud  $n$  d'un D-graphe n'est pas toujours égal à  $|out(n)|$ , puisqu'il peut y avoir plusieurs occurrences d'un même arc dans  $out(n)$ . L'ordre partiel des arcs d'un D-graphe est induit par l'application  $out$ . Nous définissons une feuille d'un D-graphe comme étant tout nœud  $n$  tel que  $out(n)$  ne contient pas d'arcs normaux.

On assimile souvent les suites à des mots. Par exemple, étant donné un nœud  $n$  d'un D-graphe  $D$ ,  $\text{out}(n)$  est assimilé à un mot fini étiqueté par des arcs sortants de  $n$ . On dénote par  $e \circ_{e'} s$  la suite d'arcs obtenue en remplaçant dans la suite d'arcs  $s$  toute occurrence de l'arc  $e'$  par l'arc  $e$ . Quand un nœud  $n'$  de  $D$  est la destination du  $i^{\text{ème}}$  arc de  $\text{out}(n)$  (la  $i^{\text{ème}}$  lettre de  $\text{out}(n)$ ), on dit que  $n'$  est le  $i^{\text{ème}}$  enfant de  $n$ . Notons que  $n'$  peut être simultanément le  $i^{\text{ème}}$  et le  $j^{\text{ème}}$  enfant de  $n$  avec  $i \neq j$  (voir Exemple 4.2.21). Il peut être aussi l'enfant de plus d'un nœud. Quand  $i$  est la position d'un arc de  $s$  alors  $s' \circ_i s$  est la suite d'arcs obtenue en remplaçant le  $i^{\text{ème}}$  arc de  $s$  par  $s'$ . On note aussi par  $n' \circ_n^{\text{src}} s$  la suite d'arcs obtenue à partir de  $s$  en remplaçant chaque occurrence de  $n$  dans les sources des arcs de  $s$  par  $n'$ . Quand ce n'est pas précisé, remplacer la source d'un arc normal (resp. spécial) donne un arc normal (resp. spécial).

Nous représentons les nœuds des D-graphes par leurs étiquettes, les arcs sont représentés par des flèches démarrant de la source de l'arc et pointant à la destination de l'arc. Vu que  $\text{out}(n)$ , pour un nœud  $n$ , est une suite totalement ordonnée, nous mettons juste à coté de chaque arc de  $\text{out}(n)$  sa position dans  $\text{out}(n)$ . Les arcs normaux sont représentés par des flèches pleines et les arcs spéciaux par des flèches en tirets.

Nous utilisons les D-graphes comme structure intermédiaire permettant de construire une formule P-MSO  $\psi_e$  à partir d'une expression rationnelle  $e \in R_E(SP^\circ(A))$ , pour un alphabet  $A$ , telle que  $L(\psi_e) = L(e)$ . Un D-graphe  $D_e$  est construit par induction sur la  $>1$ -expression correspondante à  $e$ , puis  $\psi_e$  est construite par induction sur  $D_e$  privé de ses arcs spéciaux. Pour faciliter la construction de  $D_e$  et  $\psi_e$  par la suite, nous avons besoin qu'un D-graphe satisfasse certaines propriétés.

**Définition 4.2.4.** Soit  $D = (V, E_S, E_N, r, \text{out}, A, l)$  un D-graphe. On dit que  $D$  satisfait :

- la Propriété PP s'il n'a aucun arc  $n \rightarrow m$  tel que  $l(n), l(m) \in \mathcal{P}$  ;
- la Propriété SS s'il n'a aucun arc spécial  $n \rightarrow m$  tel que  $m$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}$  ;
- la Propriété DAG si  $(V, \emptyset, E_N, r, \text{out}, A, l)$  est acyclique.

Lors de la construction de  $D_e$  à partir de  $e$ , chaque étape d'induction s'assure que le D-graphe obtenu satisfait toutes les propriétés citées dans la Définition 4.2.4. La construction de  $D_e$  se fait à partir des D-graphes des sous-expressions rationnelles directes de  $e$ . Ceux-ci satisfont lesdites propriétés par hypothèse d'induction. Selon la forme de  $e$ , des modifications des étiquettes et des bordures de certains nœuds lors de la construction inductive peuvent entraîner le D-graphe en cours de construction à ne plus satisfaire la Propriété PP. Dans ce cas, il n'existe pas plus de deux nœuds consécutifs étiquetés par une formule de Presburger. L'algorithme suivant prend en compte ce type de D-graphe et le transforme en un D-graphe satisfaisant la Propriété PP.

Quand deux nœuds  $n$  et  $n'$  sont consécutifs et sont étiquetés par des formules de Presburger, l'Algorithme 1 supprime la connexion qui existe entre  $n$  et  $n'$  et crée de nouvelles connexions entre  $n$  et les enfants de  $n'$ . Le cas échéant l'étiquette de  $n$  est modifiée aussi.

Dans la suite nous associons aux nœuds d'un D-graphe une notion de langage. Le langage d'un D-graphe est le langage de sa racine. Le langage d'un nœud  $n$  d'un D-graphe dépend de l'étiquette de  $n$  et de ses potentiels enfants.

**Algorithme 1** PP-suppression

---

**pour tout** nœud  $n$  tel que  $l(n)$  est  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  **faire**  
**tant que** il existe  $(p, i)$  tel que  $n$  est le  $i^{\text{ème}}$  descendant de  $p$   
et  $l(p)$  est  $\rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$  **faire**  
 $l(p) \leftarrow \rho \circ_{x'_i} \rho'$   
 $\text{out}(p) \leftarrow (p \circ_n^{\text{src}} \text{out}(n)) \circ_i \text{out}(p)$   
 Supprimer  $n$  s'il est de degré entrant 0

---

En particulier, le langage d'un nœud étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  consiste en une composition parallèle de posets des langages des enfants de  $n$ . Par définition, la taille de la bordure d'un nœud étiqueté par  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  est égale à  $k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . Dans un poset du langage de  $n$ , le nombre de posets de chaque langage d'un enfant  $n_i$  de  $n$  mis en parallèle dépend de  $v_i$ , pour  $i \in [k]$  et une solution  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$ . Un D-graphe  $D_e$  est construit de manière à ce que son langage soit celui de l'expression rationnelle  $e$ . Selon la forme de  $e$ , certaines constructions sont plus délicates que d'autres. Lorsque  $e$  est de la forme  $e' \parallel e''$  ou  $e' + e''$ ,  $D_e$  est construit à partir de l'union de  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$ , obtenus par hypothèse d'induction, en ajoutant un seul nœud  $s$ , qui sera la racine de  $D_e$ , bordé par  $s \rightarrow r(D_{e'})$ ,  $s \rightarrow r(D_{e''})$ . L'union et le produit parallèle sont modélisés en étiquetant la racine  $s$  par une formule de Presburger  $\rho(x_1, x_2)$ . Elle doit signifier dans le cas du produit parallèle qu'un poset du langage de  $s$  doit composer en parallèle un poset du langage de  $r(D_{e'})$  et un poset du langage de  $r(D_{e''})$ . Par conséquent  $\rho$  doit avoir comme unique solution  $(1, 1)$ . Dans le cas de l'union  $\rho$  doit signifier qu'un poset du langage de  $s$  est soit un poset du langage de  $r(D_{e'})$  ou un poset du langage de  $r(D_{e''})$ . Par conséquent  $L(\rho)$  doit être égal à  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ . Après la construction de  $D_e$ , la PP-suppression doit être appliquée pour garantir la Propriété PP. L'idée lorsque  $e$  est de la forme  $e' \circ_\xi e''$  est de construire  $D_e$  à partir de l'union de  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$  en remplaçant chaque nœud étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e''}$  par une copie de  $r(D_{e'})$ . Le cas où  $e$  est de la forme  $e'^{*}\xi$  est plus délicat à cause de la récursion. Pour garantir que  $\xi$  soit dans le langage de  $D_e$ , nous devons nous assurer que  $r(D_{e'})$  soit étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ ,  $k > 0$ ,  $1_i \in L(\rho)$  et qu'il ait comme  $i^{\text{ème}}$  enfant un nœud  $n$  étiqueté par  $\xi$ . Puis nous devons remplacer, comme pour la substitution simple, tout nœud étiqueté par  $\xi$ , sauf  $n$ , par une copie de la racine. Cela requiert que  $n$  ait comme seul parent la racine. Ensuite, nous devons transformer  $\rho$  de manière consistante avec la définition de  $e'^{*}\xi$ . Cela se fait grâce à la Définition 3.1.15, en transformant  $\rho$  en  $\rho^{*x_i}$ . En particulier, grâce au Lemme 3.1.18, on sait que  $1_i \in L(\rho^{*x_i})$ . Ainsi, la condition que tout nœud étiqueté par une formule de Presburger ait au plus un enfant étiqueté par  $\xi$  s'impose aussi.

**Définition 4.2.5.** Soit  $A$  un alphabet tel que  $\xi \in A$ . On dit qu'un D-graphe  $D = (V, E_S, E_N, r, \text{out}, A, l)$  est  $\xi$ -normalisé si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. si un nœud étiqueté par  $\xi$  est l'enfant de la racine alors il n'est pas l'enfant d'un autre nœud ;
2. pour chaque  $n \in V$  avec  $l(n) \in \mathcal{P}$ , si  $\text{out}(n)$  est une suite  $n \rightarrow d_1, \dots, n \rightarrow d_k$  alors il existe au plus un  $i \in [k]$  tel que  $l(d_i) = \xi$ .

La  $\xi$ -normalisation de  $D$  consiste en la transformation donnée par l'Algorithme 2.

**Algorithme 2**  $\xi$ -normalisation d'un D-graphe

---

```

// Première étape
pour chaque arc  $f: n \rightarrow x$  pour  $n \neq r$  et  $x$  enfant de  $r$  avec  $l(x) = \xi$  faire
    Ajouter un nouveau nœud  $y$  étiqueté par  $\xi$  dans  $V$  et  $n \rightarrow y$  dans  $E_N(D)$ 
     $\text{out}(n) \leftarrow (n \rightarrow y) \circ_f \text{out}(n)$ 
// Deuxième étape
pour tout  $n \in V$  tel que  $l(n)$  est une formule  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ 
    et  $\text{out}(n)$  est une suite  $e_1: n \rightarrow n_1, \dots, e_k: n \rightarrow n_k$  faire
    si  $|\{i_1, \dots, i_m \in [k] : l(n_{i_j}) = \xi\}| > 1$  alors
        Ajouter un nouveau nœud  $n_0$  étiqueté par  $\xi$  dans  $V$ 
        Ajouter  $n \rightarrow n_0$  dans  $E_N(D)$ 
         $l(n) \leftarrow \exists x_{i_1}, \dots, x_{i_m} (x_0 = \sum_{j \in [m]} x_{i_j}) \wedge \rho(x_1, \dots, x_k)$ 
         $\text{out}(n) \leftarrow (n \rightarrow n_0)(\epsilon \circ_{e_{i_1}} \dots \epsilon \circ_{e_{i_m}} \text{out}(n))$ 
        Supprimer tous les  $n_{i_j}, j \in [m]$ , qui sont de degré entrant 0

```

---

Dans l'Algorithme 2, remarquons que  $\epsilon \circ_{e_j} \text{out}(n)$  (resp.  $\text{out}(n) \leftarrow (n \rightarrow y) \circ_f \text{out}(n)$ ) permet de supprimer toutes les occurrences de l'arc  $e_j$  (resp.  $f$ ) de  $\text{out}(n)$ . Ainsi, ils sont implicitement supprimés du D-graphe. La première étape de l'Algorithme 2 permet de garantir la première condition de la Définition 4.2.5. Après cette étape, tout nœud étiqueté par  $\xi$  qui est enfant de la racine est uniquement l'enfant de la racine. Sa deuxième étape s'assure que tout nœud  $n$  étiqueté par une formule de Presburger  $\rho$  a au plus un enfant étiqueté par  $\xi$ , et modifie  $\rho$  pour prendre en compte la modification de la bordure de  $n$ .

Remarquons que la  $\xi$ -normalisation et la PP-suppression préservent les Propriétés PP et SS. C'est-à-dire que le D-graphe obtenu en appliquant les deux algorithmes à n'importe quel D-graphe satisfaisant les propriétés PP et SS, satisfait lui aussi ces propriétés. Notons que la  $\xi$ -normalisation préserve aussi la Propriété DAG contrairement à la PP-suppression.

### 4.2.3 Des $>1$ -expressions aux D-graphes

Soit  $e$  une  $>1$ -expression. Dans cette section nous construisons un D-graphe  $D_e$  par induction sur  $e$ . Durant chaque étape d'induction  $D_e$  est construit à partir des D-graphes des sous-termes directs de  $e$  obtenus par induction, en ajoutant ou supprimant des nœuds et en modifiant les étiquettes et les bordures de certains nœuds existants. Notons que toute étape de la construction se terminera implicitement par l'Algorithme 2. Aussi, la construction s'assure que le D-graphe obtenu à chaque étape d'induction satisfait les Propriétés PP, SS et DAG. Par conséquent, nous partons du principe que les D-graphes obtenus par induction sont  $\xi$ -normalisés et satisfont les Propriétés PP, SS et DAG.

Commençons la construction de  $D_e = (V, E_S, E_N, r, \text{out}, A, l)$ . Sauf quand c'est mentionné, les arcs ajoutés durant les différentes étapes de la construction sont normaux.

- Cas  $e = \epsilon$  (resp.  $e = a \in A$ )  
 $D_e$  est réduit à un seul nœud étiqueté par n'importe quelle tautologie de Presburger close (resp. étiqueté par  $a$ ), sans arcs.

- Cas  $e = e_1 \text{ op } e_2$  (resp.  $e = e' \text{ op}$ ) avec  $\text{op} \in \{>^1, \circ >^1\}$  (resp.  $\text{op} \in \{*>^1, \omega >^1, -\omega >^1, \natural >^1, -\natural >^1\}$ )  
 $D_e$  est construit à partir de l'union disjointe de  $D_{e_1}$  et  $D_{e_2}$  (resp.  $D_{e'}$ ), avec un nouveau nœud  $n$  défini comme la racine de  $D_e$ , étiqueté par  $\text{op}$ , et bordé par  $n \rightarrow r(D_{e_1}), n \rightarrow r(D_{e_2})$  (resp.  $n \rightarrow r(D_{e'})$ ).
- Cas  $e = e_1 \circ_\xi e_2$   
 Quand  $e_2 = \xi$  alors  $D_e$  est identique à  $D_{e_1}$ . Sinon,  $D_e$  est construit à partir de l'union disjointe de  $D_{e_1}$  et  $D_{e_2}$  transformé par l'Algorithme 3. L'idée est de remplacer dans  $D_{e_2}$  tout nœud étiqueté par  $\xi$  par une copie de  $r(D_{e_1})$ . Cela pourrait amener le D-graphe à avoir certains arcs  $n \rightarrow n'$  avec  $n$  et  $n'$  étiquetés par des formules de Presburger, et donc à ne pas satisfaire la Propriété PP. C'est le cas quand  $r(D_{e_1})$  et un parent d'un nœud de  $D_{e_2}$  étiqueté par  $\xi$  sont tous les deux étiquetés par des formules de Presburger. On résout ce problème en appliquant la PP-suppression.

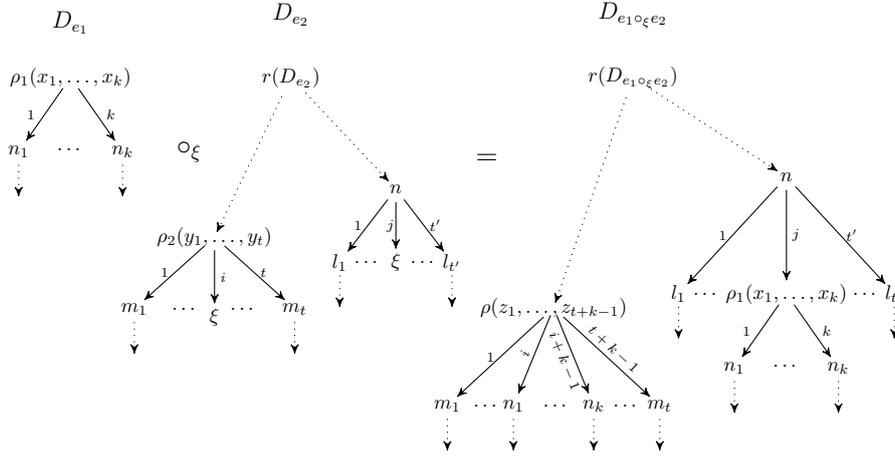


FIGURE 4.4 – La substitution, en utilisant l'Algorithme 3, de deux nœuds étiquetés par  $\xi$  dans  $D_{e_2}$  par un D-graphe enraciné par un nœud étiqueté par une formule de Presburger. Ici  $n$ , ni les  $n_i$  ne sont étiquetés dans  $\mathcal{P}$  et  $\rho \equiv \rho_1 \circ_{y_i} \rho_2$ . Les flèches en pointillés représentent des suites d'arcs consécutifs

---

**Algorithme 3** Construction de  $D_{e_1 \circ_\xi e_2}$ 


---

**pour tout** nœud  $n$  de  $D_{e_2}$  avec  $l(n) = \xi$  **faire**  
 $l(n) \leftarrow l(r(D_{e_1}))$   
 $\text{out}(n) \leftarrow n \circ_{r(D_{e_1})}^{\text{src}} \text{out}(r(D_{e_1}))$   
 Appliquer PP-suppression  
 Supprimer  $r(D_{e_1})$  de  $D_e$

---

La racine de  $D_e$  est  $r(D_{e_2})$ .

- Cas  $e = e' * \xi$

La construction de  $D_e$  se fait à partir  $D_{e'}$ . C'est le seul cas où des arcs

spéciaux sont ajoutés. C'est aussi le seul cas susceptible d'ajouter à la bordure de  $\text{out}(n)$  d'un nœud  $n$  de  $D_{e'}$  un arc se trouvant déjà dans  $\text{out}(n)$ . La construction de  $D_{e'+\xi}$  s'appuie sur les mêmes principes que le cas précédent : chaque nœud de  $D_{e'}$  étiqueté par  $\xi$  doit être remplacé par une copie de la racine. Ceci est délicat dans certains cas à cause des propriétés qu'on doit garantir dans le D-graphe en sortie. La construction suit l'Algorithme 4, en commençant à partir de  $D_{e'}$ . On procède en deux étapes. La première étape s'assure en particulier que la racine est étiquetée par une formule de Presburger  $\rho$  avec un  $i^{\text{ème}}$  enfant  $n_i$  étiqueté par  $\xi$  pour exactement un seul  $i$ , et que  $1_i$  est dans l'ensemble de Presburger de  $\rho$ . Dans la seconde étape, tous les nœuds étiquetés par  $\xi$ , sauf  $n_i$ , sont remplacés par une copie de la racine et on garantit la Propriété PP.

---

**Algorithme 4** Construction de  $D_{e'+\xi}$ 


---

```
// Première étape : transformation de la racine
si  $l(r(D_{e'}))$  est  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  et  $\text{out}(r(D_{e'}))$  est une suite  $e_1 \dots e_k$  alors
  si il existe  $e_i: r(D_{e'}) \rightarrow n_i, i \in [k]$ , tel que  $\gamma(n_i) = \xi$  alors
     $\triangleright$  Puisque  $D_{e'}$  est  $\xi$ -normalisé  $i$  est unique
     $l(r(D_{e'})) \leftarrow \rho^{*x_i}$ 
  sinon
    Ajouter un nouveau nœud  $x$  étiqueté par  $\xi$  et  $r(D_{e'}) \rightarrow x$  dans  $E_N(D_{e'})$ 
     $l(r(D_{e'})) \leftarrow (\rho(x_1, \dots, x_k) \wedge x_{k+1} = 0) \vee (\wedge_{i \in [k]} x_i = 0 \wedge x_{k+1} = 1)$ 
     $\text{out}(r(D_{e'})) \leftarrow \text{out}(r(D_{e'}))(r(D_{e'}) \rightarrow x)$ 
  sinon
    Considérer  $D_{e'+\xi}$  au lieu de  $D_{e'}$  dans la suite de la construction
// Seconde étape
pour chaque nœud  $n$  étiqueté par  $\xi$  qui n'est pas enfant de la racine  $r$  faire
   $l(n) \leftarrow l(r)$ 
   $\text{out}(n) \leftarrow n \circ_r^{\text{src}} \text{out}(r)$   $\triangleright$  Tous ces nouveaux arcs sont spéciaux
  Appliquer PP-suppression
```

---

Ainsi, dans la seconde étape de l'Algorithme 4 et avant la PP-suppression, l'étiquette de chaque nœud  $n$  étiqueté auparavant par  $\xi$ , qui n'est pas enfant de la racine, est remplacée par l'étiquette de la racine  $r$  et la bordure de  $n$  est remplacée par celle de  $r$ . La PP-suppression s'occupe ensuite de garantir la Propriété PP dans le D-graphe résultat. Notons qu'après la première étape le D-graphe satisfait la Propriété PP. En particulier, aucun des enfants  $n_1, \dots, n_k$  de la racine  $r$  n'a son étiquette dans  $\mathcal{P}$ . Puisque les nouveaux arcs spéciaux ont leurs destinations dans  $\{n_1, \dots, n_k\}$  la construction préserve la Propriété SS.

- Cas  $e = e_1 + e_2$  (resp.  $e = e_1 \parallel e_2$ )  
 $D_e$  est construit à partir de l'union disjointe de  $D_{e_1}$  et  $D_{e_2}$ , avec un nouveau nœud  $n$  étiqueté par  $\rho(x_1, x_2) \equiv \sum_{i \in [2]} x_i = 1$  (resp.  $x_1 = x_2 = 1$ ), bordé par  $n \rightarrow r(D_{e_1}), n \rightarrow r(D_{e_2})$ , qui est la racine de  $D_e$ . Enfin, la PP-suppression est appliquée si nécessaire.

**Remarque 4.2.6.** *Les arcs spéciaux sont ajoutés exclusivement par l'Algorithme 4 lors de la construction de  $D_{e'+\xi}$  à partir de  $D_{e'}$ . À la fin de l'exécution de l'Algorithme 4 et de l'Algorithme 2, tous les nouveaux arcs spéciaux*

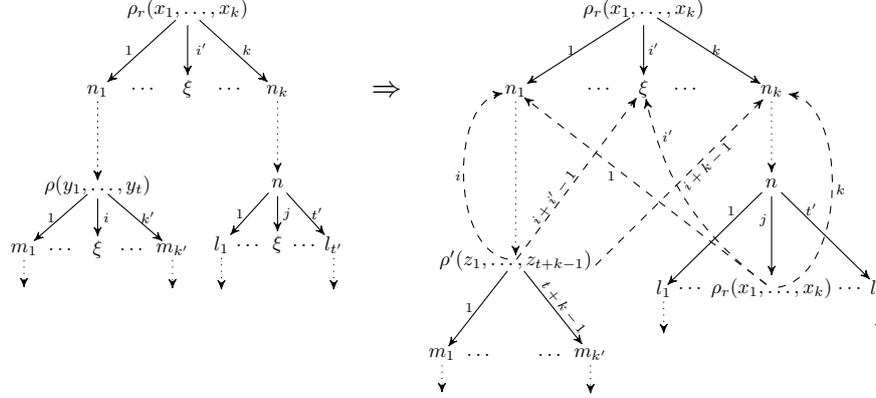


FIGURE 4.5 – L'application de la deuxième étape de l'Algorithme 4. Ici  $\rho' \equiv \rho_r \circ_{y_i} \rho$  et aucun des  $n$  et  $n_i$  n'est étiqueté dans  $\mathcal{P}$ . Les flèches en pointillés représentent des suites d'arcs consécutifs et les flèches en tirets représentent des arcs spéciaux

de  $D_{e' \ast \xi}$  ont comme sources des nœuds étiquetés par des formules de Presburger qui ne sont pas enfants de la racine à cause notamment de la Propriété PP. Ces nœuds sources ne sont pas des feuilles puisqu'ils sont sources aussi d'un arc normal ayant comme destination un nœud étiqueté par  $\xi$  ajouté durant la  $\xi$ -normalisation. De plus, ces nouveaux arcs spéciaux ont comme destinations des nœuds qui ne sont pas étiquetés par  $\xi$ . Remarquons qu'aucune étape de construction utilisant  $D_{e' \ast \xi}$  ne peut changer la source de ces arcs spéciaux. Par conséquent, tout arc spécial d'un D-graphe a comme source un nœud étiqueté par une formule de Presburger.

**Exemple 4.2.7.** Soit  $e = (b \cdot (a \parallel \xi^*))^{\ast \xi}$ . La  $>1$ -expression correspondante à  $e$  est  $f = (b \cdot >^1(a \parallel (\xi^{\ast >^1} + \xi + \epsilon)))^{\ast \xi}$ . Les différentes étapes de la construction de  $D_f$  sont détaillées dans la Figure 4.6.

La construction de  $D_f$  a fait appel à l'Algorithme 1 trois fois : lors de la construction du D-graphe de  $\xi^{\ast >^1} + \xi + \epsilon$ , lors de la construction du D-graphe de  $a \parallel (\xi^{\ast >^1} + \xi + \epsilon) = a \parallel \xi^{\ast}$  et à l'étape finale. La dernière seulement a été détaillée. Remarquons que le D-graphe de  $\xi^{\ast >^1} + \xi + \epsilon$  est le D-graphe de  $\xi^{\ast >^1} + \xi$  dans lequel la formule de Presburger  $\rho$  étiquetant la racine est modifiée de manière à ce qu'elle ait  $L(\rho) \cup (0, 0)$  comme ensemble de Presburger. La transformation de la formule de Presburger durant l'étape de la PP-suppression est détaillée dans l'Exemple 3.1.12.

**Exemple 4.2.8.** Remarquons que la  $>1$ -expression de  $e^+$  est  $e^{\ast >^1} + e'$  pour toute expression rationnelle  $e'$ . Soit  $e = (a \parallel b) \circ_{\xi} ((\xi \parallel \xi)^+)^{\ast \xi}$ . La  $>1$ -expression correspondante à  $e$  est  $f = (a \parallel b) \circ_{\xi} ((\xi \parallel \xi)^{\ast >^1} + (\xi \parallel \xi))^{\ast \xi}$ . Les différentes étapes de la construction de  $D_f$  sont détaillées dans la Figure 4.7. Similairement à l'exemple précédent, il y a une PP-suppression cachée lors de la construction du D-graphe de  $(\xi \parallel \xi)^+$  à partir du D-graphe de  $(\xi \parallel \xi)^{\ast >^1}$ .

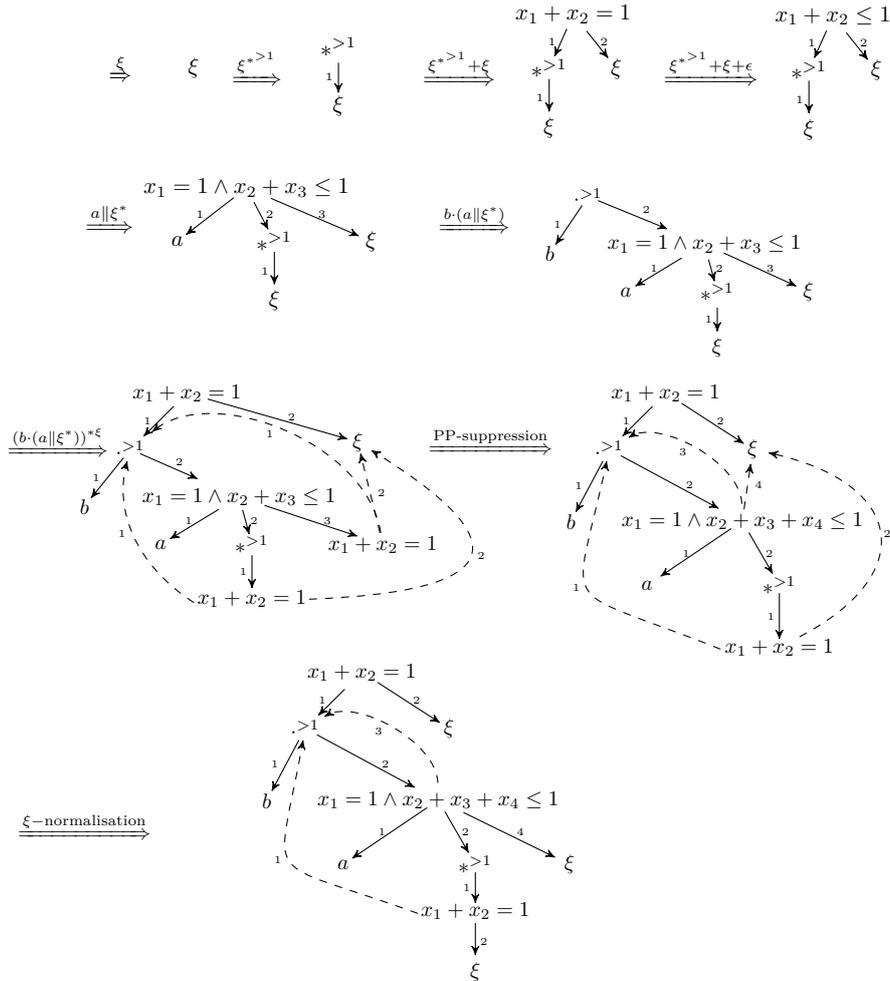


FIGURE 4.6 – La construction du D-graphe de  $(b\cdot^{>1}(a || (\xi^{*>1} + \xi + \epsilon)))^{*\xi}$  étape par étape. La PP-suppression est détaillée uniquement dans la dernière étape. Les arcs normaux sont représentés par flèches pleines, les arcs spéciaux par des flèches en tirets et les numéros à coté des arcs sortants d'un nœud  $n$  indiquent les positions de ces arcs dans  $out(n)$

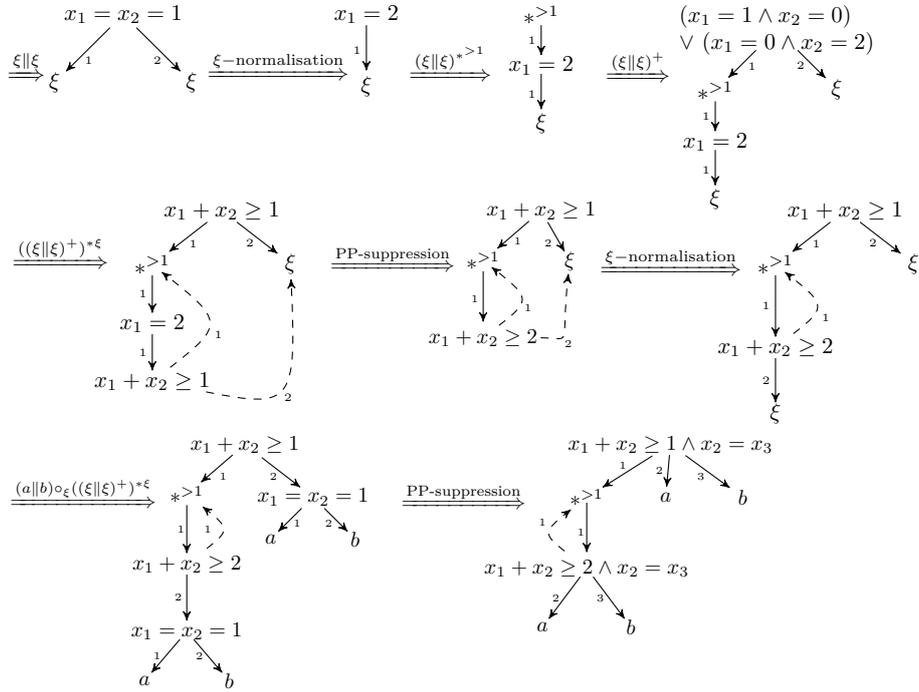


FIGURE 4.7 – La construction du D-graphe de  $(a \parallel b) \circ_{\xi} ((\xi \parallel \xi)^{*>1} + (\xi \parallel \xi))^*_{\xi}$  étape par étape. La PP-suppression est détaillée dans les deux substitutions

Ainsi, pour construire un D-graphe à partir d'une expression rationnelle de  $e$ , il faut d'abord transformer cette dernière en une  $>1$ -expression  $f$  puis construire le D-graphe par induction sur  $f$ . Nous confondons souvent entre une expression rationnelle et sa  $>1$ -expression. Dans la suite, nous notons par  $D_e$  le D-graphe de  $e$  quand  $e$  est une  $>1$ -expression ou de la  $>1$ -expression de  $e$  quand  $e$  est une expression rationnelle. Tous les D-graphes que nous aurons à utiliser dans la suite sont des D-graphes construits à partir des  $>1$ -expressions d'expressions rationnelles.

#### 4.2.4 Propriétés de D-graphes

Nous présentons dans cette sous-section certaines propriétés structurelles satisfaites par les D-graphes d'expressions rationnelles. La preuve du bon fondement de la Définition 4.2.16 en découle. Ces propriétés donnent aussi une intuition sur la corrélation entre les D-graphes et les expressions rationnelles dont ils sont issus. Les preuves de la véracité de ces propriétés sont essentiellement des vérifications par induction sur l'expression rationnelle à partir de laquelle le D-graphe est construit.

Le lemme suivant caractérise le D-graphe  $D_e$  d'une expression rationnelle  $e$  telle que  $\epsilon \in L(e)$ .

**Lemme 4.2.9.** *Soit  $e$  une  $>1$ -expression. Alors  $\epsilon \in L(e)$  si et seulement si  $r(D_e)$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  et  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$ , ou  $D_e$  est limité à un seul nœud étiqueté par une tautologie de Presburger close.*

*Démonstration.* On procède par induction sur  $e$ .

Si  $e = \epsilon$  alors  $D_e$  a un unique nœud étiqueté par une tautologie de Presburger close et le lemme suit immédiatement.

Si  $e = a$  alors  $D_e$  a un unique nœud étiqueté par  $a$  et le lemme suit immédiatement aussi.

Si  $e$  est de la forme  $e = e_1 \text{ op } e_2$  avec  $\text{op} \in \{.\!>^1, \diamond\!>^1\}$  ou  $e$  est de la forme  $e_1^{op}$  avec  $\text{op} \in \{*\!>^1, \omega\!>^1, -\omega\!>^1, \natural\!>^1, -\natural\!>^1\}$  alors  $\epsilon \notin L(e)$  et  $r(D_e)$  n'est pas étiqueté par une formule de Presburger et l'énoncé du lemme est vérifié.

Supposons maintenant que  $e$  soit de la forme  $e = e_1 \circ_\xi e_2$ . Nécessairement  $\epsilon \notin L(e_1)$ . Si  $e_2 = \xi$  alors  $D_e = D_{e_1}$  et l'énoncé du lemme est vérifié par hypothèse d'induction. Supposons que  $e_2 \neq \xi$ . Dans ce cas  $D_e$  est construit en modifiant  $D_{e_2}$ , et la racine de  $D_e$  est la racine (dont l'étiquette est peut être modifiée) de  $D_{e_2}$ . Supposons d'abord que  $r(D_{e_2})$  n'ait pas été modifié durant la construction. Puisque  $\epsilon \in L(e)$  si et seulement si  $\epsilon \in L(e_2)$  le lemme vient directement de l'hypothèse d'induction. Supposons maintenant que  $r(D_{e_2})$  ait été modifié durant la construction. Alors, ce nœud est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ , a un  $i^{\text{ème}}$  enfant  $n$  étiqueté par  $\xi$ ,  $i \in [k]$ , et  $D_{e_1}$  a une racine étiquetée par une formule de Presburger  $\rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$ . Par construction  $r(D_e)$  est étiqueté par  $\rho' \circ_{x_i} \rho$ . Supposons d'abord que  $\epsilon \in L(e)$ , et donc  $\epsilon \in L(e_2)$ . Par hypothèse d'induction  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$  et d'après le Lemme 3.1.13  $(0, \dots, 0) \in L(\rho' \circ_{x_i} \rho)$ . Réciproquement, supposons que  $(0, \dots, 0) \in L(\rho' \circ_{x_i} \rho)$ . D'après le Lemme 3.1.13,  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$ . Par hypothèse d'induction,  $\epsilon \in L(e_2)$  et donc  $\epsilon \in L(e)$ .

Retournons au cas où  $e$  est de la forme  $e = e'^{*}\xi$ . Pour l'implication de la gauche vers la droite, notons que  $\epsilon \in L(e)$  implique  $\epsilon \in L(e')$ , ce qui est interdit dans la définition des langages  $>1$ -rationnels. Revenons à l'implication de la

droite vers la gauche. Rappelons que la construction de  $D_{e' * \xi}$  à partir de  $D_{e'}$  est divisée en deux étapes : la racine de  $D_{e' * \xi}$  est construite dans la première étape, et n'est pas modifiée dans la deuxième étape. Après la première étape, la racine est étiquetée par une formule de Presburger  $\rho$ . La première étape est divisée en trois cas, et c'est juste une constatation de voir que  $\rho$  ne peut pas être close et que  $(0, \dots, 0) \notin L(\rho)$ .

Le cas où  $e = e_1 + e_2$  et  $e = e_1 \parallel e_2$  sont aussi des conséquences directes de la construction et du Lemme 3.1.13.

On a montré que le lemme est vérifié à chaque étape de la construction de  $D_e$  à partir de  $e$  en considérant  $D_e$  avant que l'Algorithme 2 soit appliqué. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'Algorithme 2 préserve les propriétés du lemme.  $\square$

Rappelons que par définition (Section 2.1),  $L^{*\xi}$  n'est pas rationnel quand  $L$  contient un poset ayant un élément étiqueté par  $\xi$  qui est comparable avec tous les éléments. Ce type de poset est de la forme  $P\xi P'$ . Le lemme suivant caractérise un D-graphe  $D_e$  d'une expression rationnelle  $e$  telle que  $P\xi P' \in L(e)$ , pour des posets  $P, P'$ .

**Lemme 4.2.10.** *Soient  $f$  une expression rationnelle et  $e$  son  $>1$ -expression correspondante. Alors, soit  $D_e$  est limité à un seul nœud étiqueté par  $\xi$  ou il existe dans  $D_e$  une suite d'arcs consécutifs  $e_1: s_1 \rightarrow d_1, \dots, e_n: s_n \rightarrow d_n$  telle que*

- $s_1 = r(D_e)$  ;
- $d_n$  est étiqueté par  $\xi$  ;
- pour tout  $i \in [n]$ , si  $s_i$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  alors il existe  $j \in [k]$  tel que  $e_i$  est la  $j^{\text{ème}}$  arc de  $\text{out}(s_i)$  et  $1_j \in L(\rho)$

si et seulement si  $P_1 \xi P_2 \in L(f)$  pour  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$ .

*Démonstration.* On procède par induction sur  $f$ . Quand  $f$  est une expression rationnelle, sa  $>1$ -expression correspondante est notée par  $e$ . Avant de commencer, rappelons que l'Algorithme 2 est utilisé après chaque étape d'induction de la construction de  $D_e$ . Remarquons qu'il existe une suite d'arcs comme énoncé dans le lemme dans  $D_e$  après que l'Algorithme 2 soit appliqué si et seulement si une telle suite existe déjà avant que l'Algorithme 2 ne soit appliqué. Par conséquent, on prouve le lemme sur le D-graphe construit par induction sur  $e$  avant que l'Algorithme 2 soit appliqué.

Si  $f = a$  pour une lettre  $a \in A$  ou  $f = \epsilon$  alors  $D_e$  n'a pas d'arcs, et l'énoncé du lemme est vérifié.

Si  $f$  est de la forme  $f = f' \cdot f''$ , alors  $e$  est de la forme  $e = e' \cdot >^1 e'' +_{\epsilon \in L(e')} e'' +_{\epsilon \in L(e'')} e'$ . Supposons sans perte de généralité que  $\epsilon \in L(e') \setminus L(e'')$ , donc  $e$  est de la forme  $e = e' \cdot >^1 e'' + e''$ . Supposons d'abord que  $r(D_{e''})$  ne soit pas étiqueté par une formule de Presburger. Par construction,  $D_e$  a une racine étiquetée par une formule de Presburger  $\rho(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 = 1$ , et  $\text{out}(r(D_e))$  est de la forme  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow n_1, r(D_e) \rightarrow n_2$ ,  $n_2$  est la racine d'une copie de  $D_{e''}$ ,  $n_1$  est un nœud étiqueté par  $\cdot >^1$  avec deux enfants  $n_3$  et  $n_4$  : les racines des copies de respectivement  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$ . Supposons d'abord qu'il existe dans  $D_e$  une suite d'arcs consécutifs  $e_1: s_1 \rightarrow d_1, \dots, e_n: s_n \rightarrow d_n$  comme énoncé dans le lemme. On distingue cinq cas :  $d_n$  est un descendant de  $n_2$ ,  $n_3$  ou  $n_4$ , ou  $n_2$  ou  $n_4$  sont des nœuds étiquetés par  $\xi$  et  $d_n$  est l'un d'eux. Dans le premier cas, il suffit

de supprimer le premier arc de la suite et appliquer l'hypothèse d'induction sur la copie de  $D_{e''}$  de racine  $n_2$ . Des arguments similaires sont utilisés dans le deuxième cas. Le troisième cas peut être réduit au premier, puisque  $n_2$  et  $n_4$  sont tous les deux des racines de copies de  $D_{e''}$ . Dans le quatrième cas,  $n = 1$ ,  $(0, 1) \in L(\rho)$  et  $\xi \in L(f)$ . Dans le cinquième cas  $n_2$  est aussi étiqueté par  $\xi$ . Supposons maintenant que  $P_1\xi P_2 \in L(f)$  pour  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$ . On distingue deux cas. Dans le premier cas, il existe  $P_{1,1}, P_{1,2} \in SP^\circ(A)$  tels que  $P_1 = P_{1,1}P_{1,2}$  et  $P_{1,2}\xi P_2 \in L(f'') = L(e'')$ . Il suffit d'ajouter  $r(D_e) \rightarrow n_2$  au début de la suite d'arcs obtenue par hypothèse d'induction appliquée sur la copie de  $D_{e''}$  de racine  $n_2$ . Dans le deuxième cas il existe  $P_{2,1}, P_{2,2} \in SP^\circ(A)$  tels que  $P_2 = P_{2,1}P_{2,2}$  et  $P_1\xi P_{2,1} \in L(f') = L(e')$ . Dans ce cas, il suffit d'ajouter  $r(D_e) \rightarrow n_1, n_1 \rightarrow n_3$  au début de la suite d'arcs obtenue par hypothèse d'induction appliquée sur  $D_{e'}$ . Quand l'étiquette de  $r(D_{e''})$  est une formule de Presburger, le Lemme 3.1.13 devrait être utilisé en plus des arguments ci-dessus.

Les cas des autres opérations séquentielles sont similaires.

Si  $f$  est de la forme  $f = f' \circ_\xi f''$ , alors  $e$  est de la forme  $e = e' \circ_\xi e''$ . Si  $e''$  est  $\xi$  ou  $e'$  est  $\xi$  alors par construction  $D_e$  est isomorphe respectivement à  $D_{e'}$  ou  $D_{e''}$  et il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction. Donc on peut supposer que  $e'$  et  $e''$  ne sont pas  $\xi$ , et que  $D_e$  est construit à partir de  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$ . Supposons d'abord qu'il existe dans  $D_e$  une suite d'arcs consécutifs  $e_1: s_1 \rightarrow d_1, \dots, e_n: s_n \rightarrow d_n$  comme dans l'énoncé du lemme. Puisque tous les nœuds étiquetés par  $\xi$  ont été remplacés dans  $D_{e''}$ , nécessairement il existe  $i \in [n]$  tel que  $e_i: s_i \rightarrow d_i$  est un arc allant d'un nœud de  $D_{e''}$  vers un nœud de  $D_{e'}$ . Alors, ou bien l'étiquette de  $s_i$  était  $\xi$  et elle a été changée par l'étiquette de  $r(D_{e'})$  durant la construction, ou alors  $s_i$  était étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ ,  $r(D_{e'})$  était étiqueté par une formule de Presburger  $\rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$ ,  $s_i$  a comme  $r^{\text{ème}}$  enfant  $s$  étiqueté par  $\xi$  avant la construction,  $d_i$  est le  $r'^{\text{ème}}$  enfant de  $r(D_{e'})$ , et l'étiquette de  $s_i$  a été changée en  $\rho' \circ_{x_r} \rho$ . Supposons qu'on soit dans le deuxième cas (le premier cas est plus simple et utilise des arguments similaires). Par hypothèse  $1_{r+r'-1} \in L(\rho' \circ_{x_r} \rho)$ , et d'après les Lemmes 4.2.9 et 3.1.13,  $1_r \in L(\rho)$  et  $1_{r'} \in L(\rho')$ . La suite  $r(D_{e'}) \rightarrow d_i, s_{i+1} \rightarrow d_{i+1}, \dots, s_n \rightarrow d_n$  d'arcs de  $D_{e'}$  vérifie l'énoncé du lemme, et par hypothèse d'induction il existe  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$  tels que  $P_1\xi P_2 \in L(f')$ . Considérons maintenant les nœuds  $s_j, j < i$  tels que  $s_j$  a été modifié durant la construction de  $D_{e' \circ_\xi e''}$  et est étiqueté par une formule de Presburger, nécessairement de la forme  $\rho' \circ_{x_{r_j}} \rho_j$  où  $\rho_j$  était l'étiquette de  $s_j$  dans  $D_{e''}$  et  $r_j$  est l'indice de  $s_j \rightarrow x_j$  dans  $\text{out}(s_j)$  dans  $D_{e''}$ , avec  $x_j$  étiqueté par  $\xi$ . Par hypothèse,  $1_{k_j} \in L(\rho' \circ_{x_{r_j}} \rho_j)$  pour un  $k_j$  tel que  $s_j \rightarrow d_j$  a comme indice  $k_j$  dans  $\text{out}(s_j)$  dans  $D_e$ , et, puisque  $s_j \rightarrow d_j$  est un arc de  $D_{e''}$  et comme conséquence du Lemme 3.1.13,  $1_{k_{j'}} \in L(\rho_j)$  pour un  $k_{j'}$  tel que  $s_j \rightarrow d_j$  a comme indice  $k_{j'}$  dans  $\text{out}(s_j)$  dans  $D_{e''}$ . La suite d'arcs  $s_1 \rightarrow d_1, \dots, s_i \rightarrow s$  d'arcs de  $D_{e''}$  vérifie les conditions du lemme, et par hypothèse d'induction  $P'_1\xi P'_2 \in L(f'')$  pour  $P'_1, P'_2 \in SP^\circ(A)$ . Par conséquent  $P'_1P_1\xi P_2P'_2 \in L(f' \circ_\xi f'')$ .

Retournons maintenant au côté inverse du lemme, et supposons que  $P_1\xi P_2 \in L(f' \circ_\xi f'')$  pour  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$ . Nécessairement, il existe  $P'_1, P''_1, P'_2, P''_2 \in SP^\circ(A)$  tels que  $P'_1\xi P'_2 \in L(f'')$  et  $P''_1\xi P''_2 \in L(f')$ ,  $P_1 = P'_1P''_1$  et  $P_2 = P'_2P''_2$ . Par hypothèse d'induction, il existe une suite  $s_{1,1} \rightarrow d_{1,1}, \dots, s_{n_1,1} \rightarrow d_{n_1,1}$  (resp.  $s_{1,2} \rightarrow d_{1,2}, \dots, s_{n_2,2} \rightarrow d_{n_2,2}$ ) d'arcs de  $D_{e'}$  (resp.  $D_{e''}$ ) qui vérifie l'énoncé du lemme. Supposons d'abord que  $r(D_{e'})$  et  $s_{n_2,2}$  ne soient pas tous le

deux étiquetés par des formules de Presburger. L'étiquette de  $d_{n_2,2}$  était  $\xi$  dans  $D_{e''}$  et a été modifiée en l'étiquette de  $r(D_{e'})$  dans  $D_{e' \circ_\xi e''}$ . La suite  $s_{1,2} \rightarrow d_{1,2}, \dots, s_{n_2,2} \rightarrow d_{n_2,2}, d_{n_2,2} \rightarrow d_{1,1}, \dots, s_{n_1,1} \rightarrow d_{n_1,1}$  d'arcs de  $D_{e' \circ_\xi e''}$  vérifie l'énoncé du lemme. En effet, par construction les sources  $d_{n_2,2}, s_{2,1}, \dots, s_{n_1,1}$  vérifient l'énoncé du lemme. Si une des sources  $s_{i,2}, i \in [n_2]$ , a été modifiée durant la construction, alors nécessairement  $r(D_{e'})$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho'$ , cette source ne peut pas être  $s_{n_2,2}$ , et son étiquette est une formule de Presburger  $\rho$  dans  $D_{e''}$  qui a été changée en  $\rho' \circ_{x_j} \rho$  pour  $j$  indice d'un arc  $s_{i,2} \rightarrow s$  dans  $\text{out}(s_{i,2})$  dans  $D_{e''}$ , avec  $s$  étiqueté par  $\xi$ . Puisque par hypothèse d'induction il existe  $r$  tel que  $r$  est un indice de  $s_{i,2} \rightarrow d_{i,2}$  dans  $\text{out}(s_{i,2})$  dans  $D_{e''}$  et  $1_r \in L(\rho)$ , et donc  $r \neq j$ , alors  $1_k \in L(\rho' \circ_{x_j} \rho)$  d'après le Lemme 3.1.13, pour  $k$  indice de  $s_{i,2} \rightarrow d_{i,2}$  dans  $\text{out}(s_{i,2})$  dans  $D_e$ . Maintenant, revons au cas où  $r(D_{e'})$  et  $s_{n_2,2}$  sont tous les deux étiquetés par des formules de Presburger, respectivement  $\rho'$  et  $\rho$ . Alors la suite  $s_{1,2} \rightarrow d_{1,2}, \dots, s_{n_2,2} \rightarrow d_{1,1}, s_{2,1} \rightarrow d_{2,1}, \dots, s_{n_1,1} \rightarrow d_{n_1,1}$  d'arcs de  $D_{e' \circ_\xi e''}$  vérifie l'énoncé du lemme. On argumente comme ci dessus, avec une attention particulière à l'arc  $s_{n_2,2} \rightarrow d_{1,1}$ . Par hypothèse, il existe  $j$  tel que  $s_{n_2,2} \rightarrow d_{n_2,2}$  a comme indice  $j$  dans  $\text{out}(s_{n_2,2})$  dans  $D_{e''}$ , et  $1_j \in L(\rho)$ . Également par hypothèse, il existe  $j'$  tel que  $r(D_{e'}) \rightarrow d_{1,1}$  a comme indice  $j'$  dans  $\text{out}(r(D_{e'}))$  dans  $D_{e'}$ , et  $1_{j'} \in L(\rho')$ . D'après le Lemme 3.1.13 et par construction de  $D_{e' \circ_\xi e''}$ ,  $1_{j+j'-1} \in L(\rho' \circ_{x_j} \rho)$  et  $j + j' - 1$  est un indice de  $s_{n_2,2} \rightarrow d_{1,1}$  dans  $\text{out}(s_{n_2,2})$  dans  $D_{e' \circ_\xi e''}$ .

Si  $f$  est de la forme  $f = f' + f''$  des arguments similaires sont utilisés.

Si  $f$  est de la forme  $f = f'^* \xi$ , alors  $e$  est de la forme  $e = e'^* \xi$ . Par définition,  $\xi \in L(f)$  et par construction, il y a une suite (de longueur 1) d'arcs de  $D_e$  satisfaisant l'énoncé du lemme.

Si  $f$  est de la forme  $f = f' \parallel f''$  alors  $e$  est de la forme  $e = e' \parallel e''$ , et il y a plusieurs cas. Si  $\epsilon \notin L(f') \cup L(f'')$  alors aucun des deux membres de l'équivalence du lemme n'est vrai, et le lemme est vérifié. Donc supposons sans perte de généralité que  $\epsilon \in L(f'')$ . D'après le Lemme 4.2.9,  $r(D_{e''})$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho_2$ , telle que soit  $\rho_2$  est une tautologie de Presburger close ou  $(0, \dots, 0) \in L(\rho_2)$ . Supposons que  $P_1 \xi P_2 \in L(f')$  pour  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$ , et sans perte de généralité que  $r(D_{e'})$  n'est pas étiqueté par une formule de Presburger. Par construction  $r(D_e)$  est étiqueté par  $\rho \equiv \rho_2 \circ_{x_2} (x_1 = x_2 = 1)$ , et  $1_1 \in L(\rho)$  d'après le Lemme 3.1.13. Il suffit d'ajouter l'arc  $r(D_e) \rightarrow r(D_{e'})$  au début de la suite d'arcs obtenue par hypothèse d'induction sur  $D_{e'}$  pour construire les suites requises d'arcs de  $D_e$ . Revenons à l'autre implication du lemme, et supposons l'existence de la suite d'arcs dans  $D_e$ . Supposons sans perte de généralité que  $r(D_{e'})$  et  $r(D_{e''})$  soient tous les deux étiquetés par des formules de Presburger, respectivement  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , donc l'étiquette de  $r(D_e)$  est  $\rho \equiv \rho_1 \circ_{x_1} \rho_2 \circ_{x_2} (x_1 = x_2 = 1)$ . D'après le Lemme 3.1.13, un de  $\rho_1, \rho_2$ , disons sans perte de généralité  $\rho_1$  est une tautologie close de Presburger ou a  $(0, \dots, 0)$  dans son ensemble de Presburger, donc  $\epsilon \in L(f')$  d'après le Lemme 4.2.9. En utilisant le Lemme 3.1.13 encore et l'hypothèse d'induction sur  $D_{e''}$ , on a  $P_1 \xi P_2 \in L(f'')$  pour  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$  donc  $P_1 \xi P_2 \in L(f)$ .  $\square$

Notons que dans l'assertion du Lemme 4.2.10, le D-graphe n'est pas obtenu à partir d'une  $>1$ -expression arbitraire. C'est le D-graphe de la  $>1$ -expression d'une expression rationnelle. Une  $>1$ -expression de la forme  $\xi \cdot >^1 \epsilon$  par exemple n'est la  $>1$ -expression d'aucune expression rationnelle. Son langage est vide. Son D-graphe ne satisfait pas la propriété énoncée dans le Lemme 4.2.10. Le

fait que  $e$  soit la  $>1$ -expression d'une expression rationnelle est une condition nécessaire.

**Lemme 4.2.11.** *Le D-graphe  $D_e$  d'une  $>1$ -expression  $e$  n'a pas d'arc spécial dont la destination est un nœud étiqueté par  $\xi$ .*

*Démonstration.* Le seul endroit où les arcs spéciaux sont ajoutés est l'Algorithme 4. Si un arc spécial  $s: n \rightarrow x$ , avec  $x$  étiqueté par  $\xi$ , a été ajouté, alors nécessairement  $x$  est un enfant de la racine. L'Algorithme 2 est appliqué après l'Algorithme 4. Sa première étape supprime  $s$ .  $\square$

Conformément à la construction inductive de D-graphes à partir de  $>1$ -expressions (Section 4.2.3), des arcs spéciaux sont ajoutés seulement lors du remplacement des nœuds étiquetés par  $\xi$  dans la construction de  $D_{e*\xi}$  à partir de  $D_e$ , pour une  $>1$ -expression  $e$  (Algorithme 4). Les arcs spéciaux ont toujours comme source un nœud étiqueté par une formule de Presburger (voir Remarque 4.2.6). En s'appuyant sur le Lemme 4.2.10, on montre les propositions suivantes :

**Proposition 4.2.12.** *Soit  $D_f$  le D-graphe d'une expression rationnelle  $f$ . Pour toute suite  $\alpha = e_1: s_1 \rightarrow d_1, \dots, e_l: s_l \rightarrow d_l$  d'arcs consécutifs de  $D_f$  telle que  $s_1 = r(D_f)$  et  $e_l \in E_S(D_f)$ , il existe  $i \in [l]$  tel que  $s_i$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_m)$ , et pour tout  $r \in [m]$  tel que  $e_i$  est le  $r^{\text{ème}}$  arc dans  $\text{out}(s_i)$  et pour tout  $(v_1, \dots, v_m) \in L(\rho)$ , si  $v_r > 0$  alors  $\sum_{i \in [m]} v_i > 1$ .*

*Démonstration.* On procède par induction sur  $f$ .

Rappelons que l'Algorithme 2 est appliqué après chaque étape de la construction inductive d'un D-graphe à partir d'une  $>1$ -expression. Si la proposition est vraie sur le D-graphe  $D$  avant l'application de l'Algorithme 2, alors elle reste vraie après son application (D-graphe  $D'$ ). En effet, l'Algorithme 2 n'ajoute pas d'arcs spéciaux ; il ajoute seulement des arcs normaux dont les destinations sont des nœuds étiquetés par  $\xi$ . Donc, si une suite  $\alpha$  d'arcs consécutifs se termine par un arc spécial dans  $D'$ , alors cette suite existe dans  $D$ , mais l'étiquette et la bordure de certaines sources d'arcs ont pu être modifiées si c'est des formules de Presburger. Supposons que l'étiquette de la source  $s_i$  d'un arc  $e_i$  de  $\alpha$  ait été modifiée ; cela s'est produit dans l'étape 2 de l'algorithme et nécessairement l'étiquette de  $s_i$  est une formule de Presburger. En conséquence du Lemme 4.2.11, il n'y a aucun  $d_j$ ,  $j \in [l]$ , étiqueté par  $\xi$ . Donc, il y a une bijection  $f$  entre l'ensemble des positions de  $e_i$  dans  $\text{out}(s_i)$  dans  $D$  et l'ensemble des positions de  $e_i$  dans  $\text{out}(s_i)$  dans  $D'$ . Soient  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  l'étiquette de  $s_i$  dans  $D$ ,  $\rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$  son étiquette dans  $D'$ ,  $r$  une position de  $e_i$  dans  $\text{out}(s_i)$  dans  $D$  et  $r'$  une position de  $e_i$  dans  $\text{out}(s_i)$  dans  $D'$  telles que  $f(r) = r'$ . Par construction de  $\rho'$  à partir de  $\rho$  on a  $(y_1, \dots, y_k) \in L(\rho)$ ,  $y_r > 0$ ,  $\sum_{i \in [k]} y_i > 0$  si et seulement si  $(y'_1, \dots, y'_{k'}) \in L(\rho')$ ,  $y'_{r'} > 0$ ,  $\sum_{i \in [k']} y'_i > 0$ .

Les arguments pour la preuve de la proposition sont très similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.10 dans tous les cas, sauf  $\circ_\xi$  et  $*\xi$ . On met l'accent sur ces deux cas.

Supposons que  $f$  soit de la forme  $f = f' \circ_\xi f''$ , et qu'on est dans les cas triviaux  $f'' = \xi$  ou  $f' = \xi$ . Donc  $e$  est de la forme  $e = e' \circ_\xi e''$ . Puisque la construction de  $D_e$  à partir de  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$  n'ajoute pas de nouveaux arcs spéciaux, tous les arcs spéciaux sont soit de  $D_{e'}$  ou  $D_{e''}$ . Supposons d'abord que  $e_l \in D_{e''}$ . Par construction,  $e_1 \dots e_l$  sont tous de  $D_{e''}$ . Les nœuds  $s_i$ ,  $i \in [l]$ , ont

pu être modifiés par la construction (étiquettes, bordures, ou le deux). Les  $s_i$  modifiés étaient nécessairement étiquetés par des formules de Presburger dans  $D_{e''}$ , et sont toujours étiquetés par des formules de Presburger dans  $D_e$ . Soit  $K = \{k \in [l] : s_k \text{ a son étiquette dans } \mathcal{P} \text{ dans } D_e\}$ . Si  $|K| = 0$  on a une contradiction avec l'hypothèse d'induction. Donc  $|K| > 0$ . Supposons par l'absurde que pour tout  $k \in K$ ,  $s_k$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho_k(x_{1,k}, \dots, x_{m_k,k})$ , et il existe  $r_k \in [m_k]$  tel que  $e_k$  a comme indice  $r_k$  dans  $\text{out}(s_k)$  dans  $D_e$  et  $1_{r_k} \in L(\rho_k)$ . Si pour tout  $k \in K$  l'étiquette de  $s_k$  n'a pas été modifiée durant la construction de  $D_e$  nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse d'induction. Soit  $K'$  le sous-ensemble de  $K$  tel que  $k' \in K'$  si et seulement si l'étiquette de  $s_{k'}$  a été modifiée durant la construction de  $D_e$ . Par construction,  $r(D_{e'})$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho_0(x_{1,0}, \dots, x_{k_0,0})$  et pour chaque  $k' \in K'$ ,  $s_{k'}$  était étiqueté par une formule de Presburger  $\rho'_{k'}(x_{1,k'}, \dots, x_{m'_{k'},k'})$  dans  $D_{e''}$  et  $\rho_{k'} \equiv \rho_0 \circ_{x_{i_{k'},k'}} \rho'_{k'}$  pour  $i_{k'} \in [m'_{k'}]$ . Puisque  $e \notin L(e')$ , d'après le Lemme 4.2.9, alors  $(0, \dots, 0) \notin L(\rho_0)$ . Donc il y a  $(y_{1,0}, \dots, y_{k_0,0}) \in L(\rho_0)$  et  $(y_{1,k'}, \dots, y_{m'_{k'},k'}) \in L(\rho'_{k'})$  tels que soit  $\sum_{i \in [k_0]} y_{i,0} = 1$ ,  $y_{i_{k'},k'} = 1$  et  $\sum_{i \in [m'_{k'}]} y_{i,k'} = 1$ , ou  $y_{i_{k'},k'} = 0$  et  $\sum_{i \in [m'_{k'}]} y_{i,k'} = 1$ . Dans les deux cas, on obtient une contradiction avec l'hypothèse d'induction sur  $D_{e''}$ .

Supposons maintenant que  $e_l \in D_{e'}$ . Par construction il existe  $k \in [l]$  tel que  $s_k$  appartient à  $D_{e''}$  et est source d'arcs dont les destinations sont des nœuds de  $D_{e'}$ . Si, dans la construction de  $D_e$ ,  $s_k$  a été modifié pour être une copie de  $r(D_{e'})$  alors il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction sur  $D_{e'}$  pour avoir la proposition. Sinon, l'étiquette de  $s_k$  dans  $D_e$  est  $\rho(x_1, \dots, x_k) \circ_{x'_i} \rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$  avec  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  l'étiquette de  $r(D_{e'})$  et  $\rho'(x'_1, \dots, x'_{k'})$  l'étiquette de  $s_k$  dans  $D_{e''}$ , pour  $i \in [k']$ . La proposition vient du Lemme 3.1.13 et de l'hypothèse d'induction appliquée sur  $D_{e'}$ .

Retournons au cas  $f = f'^{*}\xi$ , donc  $e$  est de la forme  $e = e'^{*}\xi$ . Par l'absurde supposons que la proposition soit fausse sur une suite d'arcs consécutifs  $e_1, \dots, e_l$  qu'on peut supposer aussi petite que possible. On peut supposer qu'elle est fausse avant que l'Algorithme 2 soit appliqué. Nécessairement, le seul arc spécial de la suite est  $e_l$ , sinon la suite n'est pas aussi petite que possible. Notons que dans la construction de  $D_{e'^{*}\xi}$  à partir de  $D_{e'}$ , tous les nouveaux arcs sont spéciaux excepté les nouveaux arcs de  $\text{out}(r(D_{e'^{*}\xi}))$ . Donc, s'il y a un nouvel arc dans  $e_1, \dots, e_{l-1}$ , c'est nécessairement  $e_1$ . Soit  $K \subseteq [l]$  tel que  $k \in K$  si et seulement si  $s_k$  est un nœud de  $D_{e'}$  et  $s_k$  a été modifié durant la construction de  $D_{e'^{*}\xi}$  à partir de  $D_{e'}$ . Si  $K = \emptyset$  on obtient une contradiction avec l'hypothèse d'induction, que  $s_1$  soit un nouveau nœud ou non. Par conséquent  $K \neq \emptyset$ . Soit  $k \in K$ , et supposons que  $s_k$  ait été étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e'}$ . Alors la nouvelle étiquette de  $s_k$  est identique à l'étiquette de  $r(D_{e'^{*}\xi})$  et  $\text{out}(s_k) = s_k \circ_{r(D_{e'^{*}\xi})}^{\text{src}} \text{out}(r(D_{e'^{*}\xi}))$ , avec tous les arcs de source  $s_k$  dans  $D_{e'^{*}\xi}$  spéciaux. Puisque la suite  $e_1, \dots, e_l$  est aussi petite que possible alors nécessairement  $k = l > 1$ .

Supposons d'abord que tous les arcs  $e_1, \dots, e_{l-1}$  existent dans  $D_{e'}$ . Supposons aussi que  $s_l$  ait été étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e'}$ . Pour tout  $k \in K \setminus \{1, l\}$ ,  $s_k$  est étiqueté dans  $D_{e'^{*}\xi}$  par une formule de Presburger  $\rho_k(x_1, \dots, x_{n_k})$  de la forme  $\rho_k \equiv \rho \circ_{x'_{t_k}} \rho'_k$  pour  $t_k \in [n'_k]$ , avec  $\rho'_k(x'_1, \dots, x'_{n'_k})$  son étiquette dans  $D_{e'}$ , et  $\rho(x''_1, \dots, x''_{n''})$  l'étiquette de  $r(D_{e'^{*}\xi})$ . Aussi,  $\text{out}(s_k) = (s_k \circ_{r(D_{e'^{*}\xi})}^{\text{src}} \text{out}(r(D_{e'^{*}\xi}))) \circ_{t_k} w$  avec  $w = w_1, \dots, w_{n'_k} = \text{out}(s_k)$  dans  $D_{e'}$ . Supposons que

$e_k$  apparaisse à une position  $k_1 \in [n_k]$  dans  $\text{out}(s_k)$  dans  $D_{e'^{*}\xi}$ . Si  $1_{k_1} \in L(\rho_k)$  alors nécessairement, par définition de  $\rho_k$  et parce que  $(0, \dots, 0) \notin L(\rho)$  puisque  $\epsilon \notin L(e')$  (Lemme 4.2.9), il existe  $k_2 \in [n'_k]$  tel que  $k_2$  est un indice de  $e_k$  dans  $\text{out}(s_k)$  dans  $D_{e'}$  et  $1_{k_2} \in L(\rho'_k)$  comme conséquence du Lemme 3.1.13. Maintenant, considérons  $s_1$ . Puisque c'est un élément de  $D_{e'}$  alors nécessairement il est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho$  dans  $D_{e'}$ , et  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  a pu être changé par la construction de deux manières. Si  $s_1$  a comme  $i^{\text{ème}}$  enfant un nœud étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e'}$ , alors  $\rho$  a été changée en  $\rho^{*x_i}$  dans  $D_e$ . Selon le Lemme 3.1.18, si  $1_j \in L(\rho^{*x_i})$  pour  $j \in [n] \setminus \{i\}$  alors  $1_j \in L(\rho)$ . Sinon, si  $s_1$  n'a pas d'enfant étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e'}$  alors  $\rho$  a été changée en  $\rho'(x_1, \dots, x_{n+1}) \equiv (\rho(x_1, \dots, x_n) \wedge x_{n+1} = 0) \vee (\wedge_{i \in [n]} x_i = 0 \wedge x_{n+1} = 1)$ , et si  $1_j \in L(\rho')$  pour  $j \in [n]$  alors  $1_j \in L(\rho)$ . Il s'en suit que la suite d'arcs  $e_1, \dots, e_{l-1}$  dans  $D_{e'}$  satisfait l'énoncé du Lemme 4.2.10, et donc il existe  $P_1, P_2 \in SP^\circ(A)$  tels que  $P_1 \xi P_2 \in L(e')$  ce qui est une contradiction avec le cas  $^{*\xi}$  de la définition des langages rationnels. Quand  $s_l$  était étiqueté par une formule de Presburger dans  $D_{e'}$  on argumente comme ci-dessus.

Enfin, quand  $e_1$  n'est pas un arc de  $D_{e'}$ , alors  $r(D_{e'^{*}\xi})$  est un nouveau nœud étiqueté par  $x_1 + x_2 = 1$  et  $\text{out}(r(D_{e'^{*}\xi})) = e_1, f$  pour un arc  $f$  de destination un nouveau nœud étiqueté par  $\xi$ , et le résultat vient aussi en utilisant les arguments ci-dessus.  $\square$

En commençant la suite d'arcs à partir de n'importe quel arc spécial on a

**Proposition 4.2.13.** *Soit  $D_f$  le D-graphe d'une expression rationnelle  $f$ . Pour toute suite  $\alpha = e_1 \dots e_l$  d'arcs consécutifs de  $D_f$  avec  $e_1, e_l \in E_S(D_f)$ ,  $l > 1$ , il existe un nœud  $n$  source d'un  $e_i$ ,  $i \in [l]$ , tel que  $n$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_m)$ , et pour tout  $r \in [m]$  tel que  $e_i$  est le  $r^{\text{ème}}$  arc dans  $\text{out}(n)$  et pour tout  $(v_1, \dots, v_m) \in L(\rho)$ , si  $v_r > 0$  alors  $\sum_{i \in [m]} v_i > 1$ .*

Le reste la section est consacré à la preuve de la Proposition 4.2.13. On commence par montrer quelques propriétés des D-graphes d'expressions rationnelles de la forme  $e^{*\xi}$  ou  $e \circ_\xi e'$ .

**Lemme 4.2.14.** *Soit  $e$  une  $>1$ -expression. Soit  $S$  l'ensemble de tous les arcs spéciaux de  $D_{e^{*\xi}}$  ajoutés dans la construction de  $D_{e^{*\xi}}$  à partir de  $D_e$ . Alors, pour tous les nœuds  $s, d$  de  $D_{e^{*\xi}}$ , si  $s \rightarrow d \in S$  alors  $r(D_{e^{*\xi}}) \rightarrow d$  est un arc de  $D_{e^{*\xi}}$ .*

*De plus, pour n'importe quel  $s \rightarrow d \in S$ , notons les étiquettes de  $s$  et de  $r(D_{e^{*\xi}})$  dans  $D_{e^{*\xi}}$  par respectivement  $\rho_s(x_1^s, \dots, x_{n_s}^s)$  et  $\rho_r(x_1^r, \dots, x_{n_r}^r)$ , et supposons que  $i$  soit un indice de  $s \rightarrow d$  dans  $\text{out}(s)$  dans  $D_{e^{*\xi}}$ . Si  $1_i \in L(\rho_s)$  alors il existe  $j$  indice de  $r(D_{e^{*\xi}}) \rightarrow d$  dans  $\text{out}(r(D_{e^{*\xi}}))$  tel que  $1_j \in L(\rho_r)$ .*

*Démonstration.* La première partie du lemme est immédiate par construction de  $D_{e^{*\xi}}$ . Pour la deuxième partie, il y a deux cas : soit  $s$  était étiqueté par  $\xi$  dans  $D_e$  ou non. Si c'est le cas, par construction  $\rho_s \equiv \rho_r$  et le résultat s'en suit. Sinon,  $s$  était le parent d'un nœud  $s'$  étiqueté par  $\xi$  dans  $D_e$ , et était étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  dans  $D_e$ . Soit  $k$  l'indice de  $s \rightarrow s'$  dans  $\text{out}(s)$  dans  $D_e$ . Alors  $\rho_s \equiv \rho_r \circ_{x_k} \rho$ . Ainsi, si  $1_i \in L(\rho_s)$ , alors  $1_k \in L(\rho)$  et  $1_{i-k+1} \in L(\rho_r)$ , comme conséquence du Lemme 3.1.13. Par définition de  $\text{out}(s)$  dans la construction de  $D_{e^{*\xi}}$ ,  $i - k + 1$  est un indice de  $r(D_{e^{*\xi}}) \rightarrow d$  dans  $\text{out}(r(D_{e^{*\xi}}))$ .  $\square$

La preuve du lemme suivant utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.14.

**Lemme 4.2.15.** *Soient  $e$  et  $e'$  deux  $>1$ -expressions et  $f: s \rightarrow d$  un arc de  $D_{e \circ_\xi e'}$  allant d'un nœud  $s$  de  $D_{e'}$  vers un nœud  $d$  de  $D_e$  ajouté dans la construction de  $D_{e \circ_\xi e'}$  à partir de  $D_{e'}$  et  $D_e$ . Alors  $r(D_e) \rightarrow d$  est un arc de  $D_e$ .*

*De plus, l'étiquette de  $s$  dans  $D_{e \circ_\xi e'}$  est une formule de Presburger  $\rho_s(x_1^s, \dots, x_{n_s}^s)$  si et seulement si l'étiquette de  $r(D_e)$  est une formule de Presburger  $\rho_r(x_1^r, \dots, x_{n_r}^r)$ . Dans ce cas, supposons que  $i$  soit un indice de  $f$  dans  $\text{out}(s)$ . Si  $1_i \in L(\rho_s)$  alors il existe  $j$  indice de  $r(D_e) \rightarrow d$  dans  $\text{out}(r(D_e))$  tel que  $1_j \in L(\rho_r)$ .*

On est prêt maintenant à prouver la Proposition 4.2.13.

*Démonstration de la Proposition 4.2.13.* On procède par induction sur l'expression rationnelle  $f$ . On note par  $e$  la  $>1$ -expression de  $f$ .

Si  $f = a$  pour une lettre  $a \in A$  ou  $f = \epsilon$  alors  $e$  est de la même forme et  $D_e$  n'a pas d'arcs, et la proposition est vérifiée.

Si  $f$  est de la forme  $f = f'^{op}$  pour  $op \in \{*, \omega, -\omega, \natural, -\natural\}$ , ou de la forme  $f = f' op f''$  pour  $op \in \{., \diamond\}$  il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction.

Si  $f = f_1 \parallel f_2$  alors  $e$  est de la forme  $e = e_1 \parallel e_2$ . Remarquons que la suite d'arcs de l'énoncé est entièrement composée d'arcs qui appartiennent tous à  $D_{e_1}$ , ou qui appartiennent tous à  $D_{e_2}$ . Puisque les destinations et les sources de ces arcs n'ont pas été modifiées par la construction, il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction.

Le cas  $f = f_1 + f_2$  est exactement le même que  $f = f_1 \parallel f_2$ .

Supposons que  $f$  soit de la forme  $f = f' \circ_\xi f''$ . Quand tous les arcs  $e_1, \dots, e_l$  sont de  $D_{f'}$  il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction. Quand tous les arcs  $e_1, \dots, e_l$  sont de  $D_{f''}$  l'argumentation est identique à celle de la preuve de la Proposition 4.2.12. Sinon, il existe  $i \in [l]$  tel que  $e_i$  va d'un nœud de  $D_{f''}$  vers un nœud de  $D_{f'}$ , tous les arcs  $e_1, \dots, e_{i-1}$  sont de  $D_{f''}$  et tous les arcs  $e_{i+1}, \dots, e_l$  sont de  $D_{f'}$ . Donc la proposition est une conséquence directe du Lemme 4.2.15 et la Proposition 4.2.12.

Enfin, supposons que  $f$  soit de la forme  $f = f'^{* \xi}$ . Quand chaque  $e_i$ ,  $i \in [l]$ , existe dans  $D_{f'}$  la proposition vient de l'hypothèse d'induction et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de la Proposition 4.2.12. Donc, supposons qu'il existe  $i \in [l]$  tel que  $e_i$  est un arc ajouté dans la construction de  $D_{f'^{* \xi}}$  à partir de  $D_{f'}$ . L'arc  $e_i$  a été ajouté dans l'étape 1 ou 2 de la construction. Si c'est dans l'étape 1, alors  $e_i$  n'est pas un arc spécial et sa source est la racine de  $D_{f'^{* \xi}}$ , donc  $i = 1$ , ce qui constitue une contradiction. Donc,  $e_i$  vient de l'étape 2. La proposition vient du Lemme 4.2.14 et la Proposition 4.2.12.  $\square$

### 4.2.5 Langages de D-graphes

Nous définissons dans cette section le langage d'un nœud d'un D-graphe issu d'une expression rationnelle. Le langage d'un tel D-graphe est aussi défini dans cette section. C'est le langage de sa racine. Un D-graphe d'une expression rationnelle est construit de telle manière que son langage soit celui de l'expression rationnelle. C'est ce que nous montrons par la suite.

**Définition 4.2.16.** Soit  $e$  la  $>1$ -expression d'une expression rationnelle sur un alphabet  $A$ . Soient  $n$  un nœud de  $D_e$  et  $P \in SP^\diamond(A)$ . Un chemin à partir de  $n$  dans  $D_e$  et étiqueté par  $P$  est un arbre ordonné étiqueté  $T_P$  tel que :

1. quand  $P$  est un singleton étiqueté par  $a$  et  $n$  une feuille étiquetée par  $a$  alors  $T_P$  est réduit à un seul nœud étiqueté par  $(n, a)$  ;
2. quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $\cdot^{>1}$  et bordé par  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1, n \rightarrow n_2$  alors  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, T_{P_1}, T_{P_2})$  avec  $m$  étiqueté par  $(n, 2)$  et  $T_{P_i}$  est un chemin de  $n_i$  dans  $D_e$  étiqueté par un poset non vide  $P_i$ ,  $i \in [2]$ , tel que  $P = P_1 P_2$  ;
3. quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $\ast^{>1}$  et bordé par  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1$  alors  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, T_{P_1}, \dots, T_{P_k})$  avec  $m$  étiqueté par  $(n, k)$  et  $T_{P_i}$  est un chemin de  $n_1$  dans  $D_e$  étiqueté par  $P_i$ ,  $i \in [k]$ , tel que  $P = P_1 \dots P_k$ . Il doit y avoir  $i, i' \in [k]$ ,  $i \neq i'$ , tels que  $P_i, P_{i'} \neq \epsilon$  ;
4. quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $\omega^{>1}$  et bordé par  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1$  alors  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, (T_{P_i})_{i \in \omega})$  avec  $m$  étiqueté par  $(n, \omega)$  et  $T_{P_i}$  est un chemin de  $n_1$  dans  $D_e$  étiqueté par  $P_i$ ,  $i \in \omega$ , tel que  $P = \prod_{i \in \omega} P_i$ . Il doit y avoir  $i, i' \in \omega$  tels que  $i \neq i'$  et  $P_i, P_{i'} \neq \epsilon$  ;
5. la construction quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $-\omega^{>1}$  est symétrique ;
6. quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $\natural^{>1}$  et bordé par  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1$  alors  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, (T_{P_i})_{i \in \alpha})$  pour  $\alpha \in \mathcal{O} \setminus \{0, 1\}$  avec  $m$  étiqueté par  $(n, \alpha)$  et  $T_{P_i}$  est un chemin de  $n_1$  dans  $D_e$  étiqueté par  $P_i$ ,  $i \in \alpha$ , tel que  $P = \prod_{i \in \alpha} P_i$ . Il doit y avoir  $i, i' \in \alpha$  tels que  $i \neq i'$  et  $P_i, P_{i'} \neq \epsilon$  ;
7. la construction quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $-\natural^{>1}$  est symétrique ;
8. quand  $P$  est un poset séquentiel et  $n$  est étiqueté par  $\diamond^{>1}$  et bordé par  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1, n \rightarrow n_2$  alors  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, (T_{P_j})_{j \in J \cup \hat{J}^*})$  pour  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$  avec  $m$  étiqueté par  $(n, J \cup \hat{J}^*)$  et  $T_{P_j}$  est un chemin de  $n_1$  dans  $D_e$  quand  $j \in J$ , de  $n_2$  quand  $j \in \hat{J}^*$ , et étiqueté par  $P_j$ ,  $j \in J \cup \hat{J}^*$ , tel que  $P = \prod_{j \in J \cup \hat{J}^*} P_j$ . Il doit y avoir  $j, j' \in J \cup \hat{J}^*$  tels que  $j \neq j'$  et  $P_j, P_{j'} \neq \epsilon$  ;
9. quand  $n$  est étiqueté par  $\rho(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k$  et bordé par  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1, \dots, n \rightarrow n_k$  alors  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, (T_{P_{i,j}})_{i \in [k], j \in [v_i]})$  avec  $m$  étiqueté par  $(n, (v_1, \dots, v_k))$  avec  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$ , et  $T_{P_{i,j}}$  est un chemin de  $n_i$  dans  $D_e$  étiqueté par un poset non vide  $P_{i,j}$ ,  $i \in [k]$ ,  $j \in [v_i]$ , tel que  $P = \prod_{i \in [k]} \prod_{j \in [v_i]} P_{i,j}$ . Notons que puisque le produit parallèle de posets est commutatif, l'ordre de la suite  $(T_{P_{i,j}})_{i \in [k], j \in [v_i]}$  n'a pas d'importance particulière.

Dans le dernier cas, quand  $T_P$  a la forme  $T_P = (m, (T_{P_{i,j}})_{i \in [k], j \in [v_i]})$  et  $n \rightarrow n_t \in E_S(D_e)$  pour  $t \in [k]$ , on dit que  $P_{t,j}$  est marqué par  $n \rightarrow n_t$  dans  $T_P$ , et que  $n \rightarrow n_t$  commence  $T_{P_{t,j}}$ , pour tout  $j \in [v_t]$ . Le marquage est une notion héréditaire : tout facteur de  $P_i$  marqué par un arc spécial  $e$  dans  $T_{P_i}$  est aussi considéré marqué par  $e$  dans  $T_P$ .

Notons que  $\epsilon$  peut être l'étiquette d'un chemin seulement dans le cas 9 de la Définition 4.2.16 quand  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$  ou quand  $\rho$  est une tautologie close.

Dans le cas contraire, la Propriété PP garantie que tous les  $P_{i,j}$  ne sont pas vides. Remarquons que la définition des chemins issus de nœuds étiquetés par une opération séquentielle est conforme à la définition de cette dernière dans la Section 4.1.

Nous définissons les notions de sous-chemin, sous-chemin strict et sous-chemin direct d'un chemin dans un D-graphe  $D_e$  similairement aux notions de sous-arbre, sous-arbre strict et sous-arbre direct d'un arbre. Ainsi, étant donné un chemin  $T = (m, (T_i)_{i \in I})$ , pour un ordre linéaire  $I \in \mathcal{S}$ , dans  $D_e$ , un *sous-chemin* de  $T$  est soit  $T$  ou un sous-chemin de l'un des  $T_i$ ,  $i \in I$ . Les  $T_i$ ,  $i \in I$ , sont les sous-chemins directs de  $T$ . Les sous-chemins de  $T$  différents de  $T$  sont les sous-chemins *stricts* de  $T$ . Comme pour les sous-arbres, les sous-chemins d'un chemin  $T$  dans  $D_e$  peuvent être partiellement ordonnés par une relation d'ordre qu'on note  $<_c$ . Ainsi, pour tout sous-chemins stricts  $T'$  et  $T''$  de  $T$  on a :

$$T' <_c T'' \text{ si et seulement si } T' \text{ est un sous-chemin strict de } T''$$

La Définition 4.2.16 est par induction sur la structure des chemins dans un D-graphe. Remarquons qu'un chemin peut avoir une hauteur infinie. C'est le cas par exemple d'un chemin  $T$  à partir d'un nœud  $n$  étiqueté par  $\omega^{>1}$  où  $T = ((n, \omega), (T_i)_{i \in \omega})$ , chaque  $T_i$  est de hauteur finie et la hauteur de  $T_{i+1}$  est strictement supérieure à la hauteur de  $T_i$ , pour tout  $i \in \omega$  (voir aussi Exemple 1.4.20). La Définition 4.2.16 s'appuie sur  $<_c$ . Nous montrons dans la proposition suivante que  $<_c$  est bien fondée.

**Proposition 4.2.17.** *La relation d'ordre  $<_c$  est bien fondée.*

*Démonstration.* Considérons la classe de tous les  $(T_P, P)$  formés d'un chemin  $T_P$  et de son étiquette  $P$  partiellement ordonnés par la relation  $(T_P, P) < (T_{P'}, P')$  si et seulement si  $T_P <_c T_{P'}$ . Nous attestons que  $<$  est un bon ordre. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une suite infinie décroissante  $\dots < (T_{P_i}, P_i) < \dots < (T_{P_1}, P_1) < (T_{P_0}, P_0)$ . On peut supposer que  $T_{P_{i+1}}$  soit un sous-chemin direct de  $T_{P_i}$ , pour tout  $i$ . Chaque  $T_{P_i}$  est un chemin d'un nœud  $n_i$ . Par conséquent, il existe un arc  $e_i : n_i \rightarrow n_{i+1}$  dans  $D_e$  pour tout  $i$ . La suite  $e_0, e_1, \dots$  est une suite infinie d'arcs consécutifs. On sait que les D-graphes privés de leurs arcs spéciaux sont des DAG. Puisque un cycle dans un D-graphe doit contenir un arc spécial, il y a parmi les  $e_i$  un arc spécial  $e$  qui se répète infiniment souvent dans la suite. Soit  $i_0, i_1, \dots$  la suite de tous les indices des  $i_j$  telle que  $e_{i_j} = e$ . La construction de  $P_{i_j}$  à partir  $P_{i_{j+1}}$  nécessite au moins un produit parallèle par un poset non vide en conséquence de la Proposition 4.2.13. Puisque la destination d'un arc spécial n'est pas étiquetée par une formule de Presburger (Propriété SS), la construction de  $P_{i_j}$  à partir de  $P_{i_{j+1}}$  nécessite aussi un produit séquentiel par un poset séquentiel non vide. Donc nécessairement  $rp(P_{i_j}) > rp(P_{i_{j+2}})$ . La suite  $\dots < rp(P_{i_2}) < rp(P_{i_0})$  est une suite infinie décroissante de rangs de posets, ce qui est contradictoire puisque l'ordre des rangs des posets est bien fondé.  $\square$

**Définition 4.2.18.** *Soit  $D$  le D-graphe d'une expression rationnelle. Soit  $n$  un nœud de  $D$ . Le langage  $L(D, n)$  de  $n$  dans  $D$  est l'ensemble des étiquettes des chemins dans  $D$  de  $n$ . Le langage  $L(D)$  de  $D$  est le langage de sa racine.*

Quand il n'y a pas risque de confusion, on note par  $L(n)$  le langage d'un nœud dans un D-graphe déduit du contexte.

Dans le cadre des langages des D-graphes, les Propriétés PP et SS permettent de garantir certains faits. Étant donné un D-graphe  $D$  d'une expression rationnelle sur un alphabet  $A$  et  $n$  un nœud de  $D$ , si  $a \in L(n)$ , pour  $a \in A$ , nécessairement  $n$  est étiqueté par  $a$ , ou, grâce à la Propriété PP,  $n$  est étiqueté par une formule de Presburger et a un enfant étiqueté par  $a$ . La Propriété SS garantit que  $L(n)$  ne contient pas de poset parallèle quand  $n$  est la destination d'un arc spécial. Par conséquent, tout poset marqué est séquentiel. En particulier :

**Remarque 4.2.19.** *Comme conséquence de la Proposition 4.2.13, quand il y a un chemin à partir de  $r(D_e)$  étiqueté par  $P$ , s'il contient deux sous-chemins différents étiquetés par  $F_1$  et  $F_2$  tous les deux marqués par le même arc spécial, alors  $F_1$  et  $F_2$  sont nécessairement des posets séquentiels (Propriété SS), et soit*

(C<sub>1</sub>)  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Éventuellement,  $F_1 F_2$  est un facteur séquentiel de  $P$  ;

(C<sub>2</sub>) un est strictement inclus dans l'autre, sans perte de généralité  $F_1 \subsetneq F_2$ .

Dans ce cas, il existe  $x \in F_2 \setminus F_1$  tel que  $x$  est incomparable à tous les éléments de  $F_1$ .

**Exemple 4.2.20.** *Soient  $L_1$  et  $L_2$  les langages de respectivement  $e_1 = a \circ_\xi (a(\xi \parallel \xi))^{\ast 5}$  (regarder aussi l'Exemple 4.1.3) et de  $e_2 = b^\zeta$ . Considérons les D-graphes  $D_e, D_{e_1}$  et  $D_{e_2}$  de respectivement  $e = e_1 \diamond e_2$ ,  $e_1$  et  $e_2$  représentés à gauche de la Figure 4.8. Soit  $\mathfrak{z}$  l'ordre linéaire fini  $\{x_1, x_2, x_3\}$  tel que  $x_1 < x_2 < x_3$ . Alors  $\mathfrak{z}^* = \{(\{x_1\}, \{x_2, x_3\}), (\{x_1, x_2\}, \{x_3\})\}$ . Soient  $x_4 = (\{x_1\}, \{x_2, x_3\})$  et  $x_5 = (\{x_1, x_2\}, \{x_3\})$ . Alors  $\mathfrak{z} \cup \mathfrak{z}^* = \{x_1, \dots, x_5\}$  ordonné comme suit :  $x_1 < x_4 < x_2 < x_5 < x_3$ .*

Un chemin  $T$  dans  $D_e$  à partir de  $r(D_e)$  est représenté à droite de la Figure 4.8 étiqueté par  $P = \prod_{j \in \mathfrak{z} \cup \mathfrak{z}^*} F_j$ , où  $F_{x_1} = a(a(a \parallel a) \parallel a)$ ,  $F_{x_4} = \epsilon$ ,  $F_{x_2} = a$ ,  $F_{x_5} = b^\zeta$  et  $F_{x_3} = a(a \parallel a)$ . Notons que  $F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3} \in L(D_{e_1})$  et  $F_{x_4}, F_{x_5} \in L(D_{e_2})$ . Notons aussi que  $F_{x_5} = \prod_{j \in \zeta \cup \hat{\zeta}^*} F_{5,j}$  où  $F_{5,j} = b$  quand  $j \in \zeta$  et  $F_{5,j} = \epsilon$  quand  $j \in \hat{\zeta}^*$ . Remarquons que le chemin  $T$  a un unique sous-chemin direct  $T'$  étiqueté aussi par  $P$ . Soient  $T'_{x_1}, T'_{x_4}, T'_{x_2}, T'_{x_5}, T'_{x_3}$  les sous-chemins directs de  $T'$  pris dans l'ordre de gauche à droite. Remarquons que chaque  $T'_{x_i}$  est étiqueté par  $F_{x_i}$ .

**Exemple 4.2.21.** *Soit  $e = ((a \parallel \xi^*)^{\ast 5} + b(c \parallel d))^{\ast 5}$  une expression rationnelle. Le D-graphe  $D_e$  de la  $>1$ -expression de  $e$  est représenté en haut de la Figure 4.9.*

Soit  $n_1, \dots, n_{11}$  le parcours préfixe de  $D_e$  sans ses arcs spéciaux. On a  $E_S(D_e) = \{n_4 \rightarrow n_2, n_4 \rightarrow n_3, n_4 \rightarrow n_7\}$ . Les feuilles de  $D_e$  sont  $n_2, n_5, n_6, n_8, n_{10}, n_{11}$ . Notons que dans  $\text{out}(n_4) = n_4 \rightarrow n_2, n_4 \rightarrow n_3, n_4 \rightarrow n_7$  chacun des arcs  $n_4 \rightarrow n_2$  et  $n_4 \rightarrow n_3$  se répète deux fois. En bas à gauche et en bas à droite de la Figure 4.9 sont représentés respectivement le poset  $P = a \parallel (\xi(a \parallel (b(c \parallel d)b(c \parallel d))))$  de  $L(D_e)$  et un chemin  $T_P$  dans  $D_e$  de  $n_1$  étiqueté par  $P$ . La racine de  $T_P$  est étiquetée par  $(n_1, (1, 1, 0, 0))$  avec  $(1, 1, 0, 0) \in L(\rho_1)$ . Le chemin  $T_P$  a deux sous-chemins directs  $T_{P_1} = (n_2, a)$  et  $T_{P_2} = ((n_3, 2), T_{P_{2,1}}, T_{P_{2,2}})$  étiquetés respectivement par  $P_1 = a$  et  $P_2 = P_{2,1} P_{2,2}$ , avec  $P = P_1 \parallel P_2$ ,  $T_{P_{2,1}}$  et  $T_{P_{2,2}}$  les sous-chemins directs de  $T_{P_2}$  à partir de  $n_4$  respectivement étiquetés par  $P_{2,1} = \xi$  et  $P_{2,2} = a \parallel (b(c \parallel d)b(c \parallel d))$ . Dans la continuité,  $T_{P_{2,1}}$  et  $T_{P_{2,2}}$  ont respectivement la forme  $((n_4, (0, \dots, 0, 1, 0)), (n_5, \xi))$  et  $((n_4, (1, 1, 0, \dots, 0)), T_{F_4}, T_{F_3})$

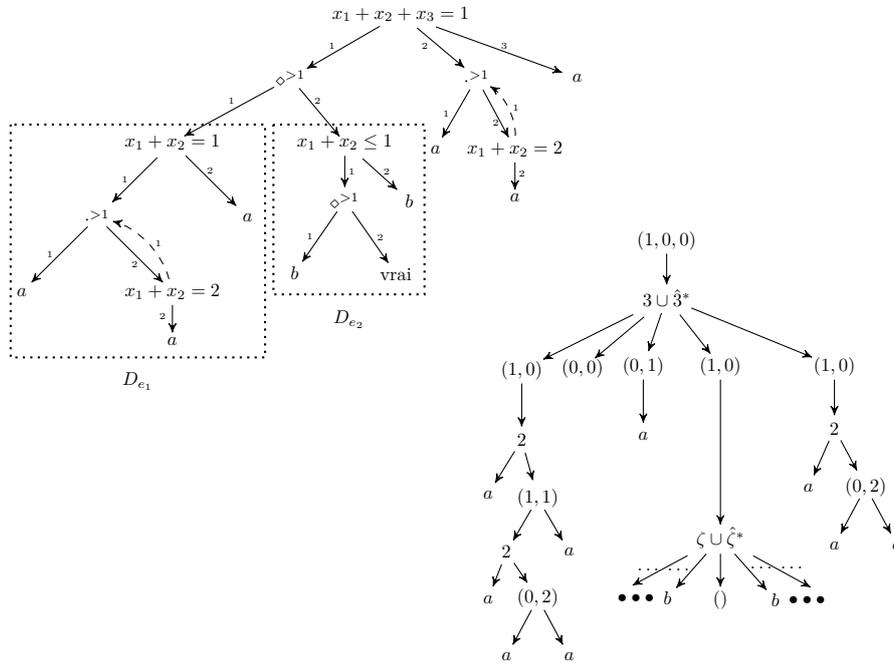


FIGURE 4.8 – Le D-graphe  $D_e$  de  $e = a \circ_\xi (a(\xi \parallel \xi))^* \xi \diamond b^\diamond$  et un chemin dans  $D_e$  de  $r(D_e)$ . Pour alléger les figures, les nœuds des chemins sont étiquetés par  $s$  au lieu de  $(n, s)$  où  $n$  est un nœud de  $D_e$

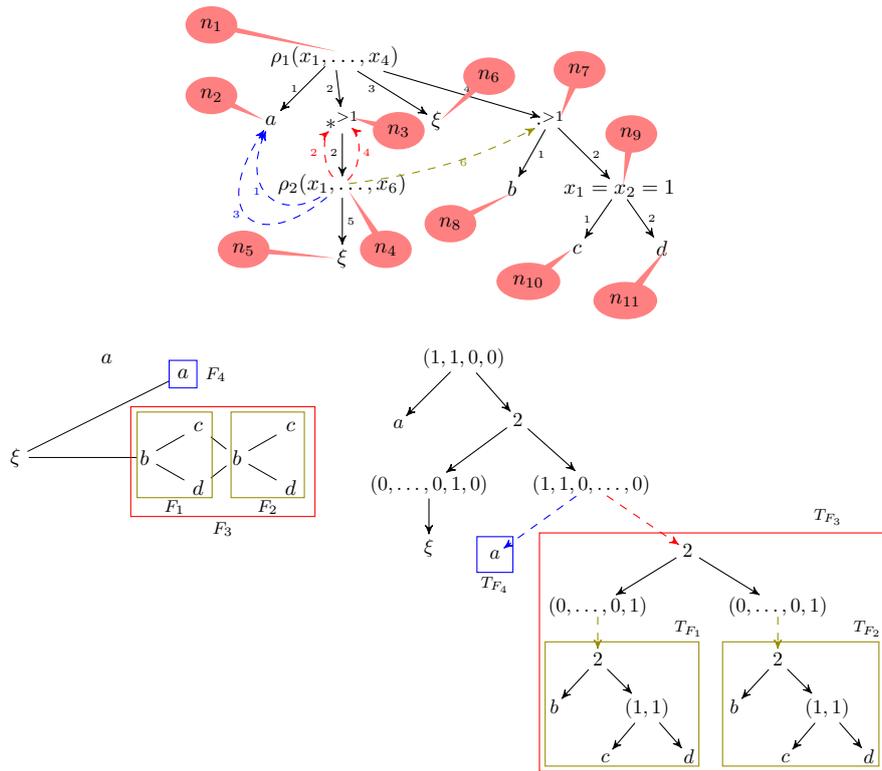


FIGURE 4.9 – Le D-graphe  $D_e$  de la  $>1$ -expression de  $e = ((a \parallel \xi^*)^{\xi} + (b(c \parallel d))^{\xi})^{\xi}$ , un poset  $P = a \parallel (\xi(a \parallel (b(c \parallel d)b(c \parallel d))))$  de  $L(e)$  et un chemin dans  $D_e$  de  $r(D_e)$  étiqueté par  $P$ . Ici  $\rho_1(x_1, \dots, x_4) \equiv (x_1 = x_2 = 0 \wedge x_3 + x_4 = 1) \vee (x_1 \geq 1 \wedge x_2 + x_3 + x_4 \leq 1)$  et  $\rho_2(x_1, \dots, x_6) \equiv (x_1 \geq 1 \wedge x_2 \leq 1 \wedge \bigwedge_{3 \leq i \leq 6} x_i = 0) \vee (x_1 \geq 0 \wedge x_2 = 0 \wedge ((x_3 = x_4 = 0 \wedge x_5 + x_6 = 1) \vee (x_3 \geq 1 \wedge x_4 + x_5 + x_6 \leq 1)))$

avec  $(0, \dots, 0, 1, 0), (1, 1, 0, \dots, 0) \in L(\rho_2)$  et  $(n_5, \xi)$ ,  $T_{F_4}$  et  $T_{F_3}$  sont de respectivement  $n_5$ ,  $n_2$  et  $n_3$  étiquetés respectivement par  $\xi$ ,  $F_4 = a$  et  $F_3 = b(c \parallel d)b(c \parallel d)$ . Notons qu'il existe un chemin de  $n_4$ , différent de  $T_{P_{2,2}}$ , étiqueté par le même poset. La seule différence réside dans la racine qui est étiquetée par  $(n_4, (0, 0, 1, 1, 0, 0))$ . Remarquons que  $T_{F_3}$  et  $T_{F_4}$  sont commencés par respectivement  $n_4 \rightarrow n_3$  et  $n_4 \rightarrow n_2$ . Similairement,  $T_{F_1}$  et  $T_{F_2}$  sont des sous-chemins de  $T_{F_3}$  de  $n_7$  étiquetés par  $F_1 = F_2 = b(c \parallel d)$  et sont commencés par  $n_4 \rightarrow n_7$ . Chaque  $F_i$  est marqué par l'arc qui commence  $T_{F_i}$ ,  $i \in [4]$ . En conséquence de la Remarque 4.2.19, l'arc marquant  $F_3$  est nécessairement différent de ceux qui marquent  $F_1$  et  $F_2$ .

Les propriétés montrées dans la Sous-section 4.2.4 donnent un aperçu sur la concordance des langages des expressions rationnelles avec les langages de leurs D-graphes. Soit  $D_e$  le D-graphe d'une expression rationnelle  $e$ . Le Lemme 4.2.9 montre que  $\epsilon \in L(e)$  si et seulement si  $\epsilon \in L(D_e)$ . Le Lemme 4.2.10 explique qu'il existe un poset dans  $L(D_e)$  ayant un élément étiqueté par  $\xi$  comparable à tous les autres éléments si et seulement si le même genre de poset existe dans  $L(e)$ . La Proposition 4.2.12 et la Proposition 4.2.13 montrent en particulier que les éléments de tout facteur marqué d'un poset  $P$  de  $L(D_e)$  sont tous incomparables avec au moins un élément de  $P$ . Les facteurs marqués de  $P$  sont les étiquettes des sous-chemins commencés par un arc spécial du chemin dont  $P$  est l'étiquette. Ces arcs spéciaux ont été forcément introduits lors de la construction du D-graphe d'une sous-expression  $e'$  de  $e$  de la forme  $e''^*\xi$ . Par définition, tout élément étiqueté par  $\xi$  d'un poset de  $L(e'')$  doit être incomparable avec au moins un autre élément.

La prochaine section est entièrement consacrée à la preuve de la proposition suivante :

**Proposition 4.2.22.** *Pour toute expression rationnelle  $f$ ,  $L(D_f) = L(f)$ .*

### 4.2.6 Preuve de la correction de la construction de D-graphes

Nous allons maintenant prouver l'exactitude de la construction de  $D_e$  à partir d'une expression rationnelle  $e$  (Proposition 4.2.22).

**Cas**  $e = e' \circ_\xi e''$

Nous montrons ici, pour toutes expressions rationnelles  $e, e' \in R_E(SP^\diamond(A))$  que, si  $e \circ_\xi e' \in R_E(SP^\diamond(A))$  alors  $L(D_e) \circ_\xi L(D_{e'}) = L(D_{e \circ_\xi e'})$ . Par définition, pour que  $e \circ_\xi e'$  soit dans  $R_E(SP^\diamond(A))$  il faut que  $\epsilon \notin L(e)$ . Par conséquent, d'après le Lemme 4.2.9, quand  $r(D_e)$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ , pour un  $m \in \mathbb{N}$ , la formule  $\rho$  n'est ni une tautologie close de Presburger ni  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$ . Dans la suite, nous partons du principe que lorsqu'une expression rationnelle  $e$  est de la forme  $e' \circ_\xi e''$ , alors  $\epsilon \notin L(e')$ .

**Lemme 4.2.23.** *Soient  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$  les D-graphes de deux expressions rationnelles  $e'$  et  $e''$  et soit  $e = e' \circ_\xi e''$ . Alors, pour tout nœud  $n$  commun à  $D_{e'}$  et  $D_e$ ,  $L(r(D_{e'})) \circ_\xi L(D_{e''}, n) = L(D_e, n)$ .*

*Démonstration.* Nous montrons que  $L(r(D_{e'})) \circ_\xi L(D_{e''}, n) \subseteq L(D_e, n)$ . La preuve que  $L(D_e, n) \subseteq L(r(D_{e'})) \circ_\xi L(D_{e''}, n)$  utilise des arguments similaires.

Soit  $P \in L(r(D_{e'})) \circ_{\xi} L(D_{e''}, n)$ . Par définition de l'opération de substitution, il existe  $P' \in L(D_{e''}, n)$  tel que  $P \in L(r(D_{e'})) \circ_{\xi} P'$ . On procède par induction sur la structure d'un chemin de  $L(D_{e''}, n)$  étiqueté par  $P'$  pour montrer que  $P \in L(D_e, n)$ . Commençons par les cas où  $\text{out}(n)$  est vide dans  $D_{e''}$ .

Supposons que  $n$  soit étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e''}$ . Par construction  $n$  a la même étiquette que  $r(D_{e'})$  dans  $D_e$  et  $\text{out}(n) = n \circ_{r(D_{e'})}^{\text{src}} \text{out}(r(D_{e'}))$  dans  $D_e$ . Dans ce cas l'ensemble des chemins de  $n$  dans  $D_e$  est isomorphe à l'ensemble des chemins de  $r(D_{e'})$  dans  $D_{e'}$ . Par conséquent,  $L(D_e, n) = L(r(D_{e'}))$ . Puisque  $L(D_{e''}, n) = \{\xi\}$ , on a par définition de l'opération de substitution  $P \in L(D_e, n)$ . Sinon, si  $n$  est étiqueté par une lettre  $a \in A$  qui n'est pas  $\xi$  dans  $D_{e''}$ , alors par construction  $n$  est étiqueté de la même façon dans  $D_e$ . On a  $L(D_e, n) = L(r(D_{e'})) \circ_{\xi} L(D_{e''}, n) = \{a\}$ .

Supposons maintenant que  $\text{out}(n) = e_{2,1} : n \rightarrow n_1, \dots, e_{2,k} : n \rightarrow n_k$  dans  $D_{e''}$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . Soit,  $T$  un chemin de  $n$  étiqueté par  $P'$  dans  $D_{e''}$ . Si l'étiquette de  $n$  dans  $D_{e''}$  est dans  $\{>^1, * >^1, \diamond >^1, \omega >^1, -\omega >^1, \natural >^1, -\natural >^1\}$  alors  $P'$  admet une  $J$ -factorisation de la forme  $\prod_{j \in J} P'_j$  pour  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$  telle qu'il existe au moins  $j, j' \in J$  avec  $j \neq j'$ , tels que  $P'_j, P'_{j'} \neq \epsilon$  et pour tout  $j \in J$ ,  $P'_j \in L(D_{e''}, n_t)$  est l'étiquette d'un sous-chemin de  $T$  dans  $D_{e''}$  à partir  $n_t$ , pour  $t \in [k]$ . Par conséquent,  $P = \prod_{j \in J} P_j$  où chaque  $P_j \in L(r(D_{e'})) \circ_{\xi} P'_j$ . Dans ce cas, il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction pour montrer que  $P \in L(D_e, n)$ .

Enfin, supposons que  $n$  soit étiqueté dans  $D_{e''}$  par une formule de Presburger  $\rho_2(x_1, \dots, x_k)$ . Dans ce cas, la racine de  $T$  est étiquetée par  $(n, (v_1, \dots, v_k))$  avec  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho_2)$ . De plus, par construction,  $n$  est aussi étiqueté par une formule de Presburger dans  $D_e$ . Supposons que  $n$  soit étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(z_1, \dots, z_l)$  pour  $l \in \mathbb{N}$ . Supposons aussi que  $\text{out}(r(D_{e'})) = e_{1,1} : r(D_{e'}) \rightarrow r_1, \dots, e_{1,m} : r(D_{e'}) \rightarrow r_m$  pour  $m \in \mathbb{N}$ . On distingue deux cas : le cas où  $n$  a un enfant étiqueté par  $\xi$  et le cas où il n'en a pas.

Commençons par le cas où il existe  $i \in [k]$  tel que  $n_i$  est étiqueté par  $\xi$ . Supposons que  $r(D_{e'})$  soit étiqueté par une formule de Presburger  $\rho_1(y_1, \dots, y_m)$ . Ce cas nécessite une PP-suppression. On a  $l = k + m - 1$ . Notons que  $i$  est unique puisque  $D_{e''}$  est  $\xi$ -normalisé par hypothèse. Alors  $\rho \equiv \rho_1 \circ_{x_i} \rho_2$  et  $\text{out}(n) = e_1, \dots, e_l$  dans  $D_e$  où  $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+m}, \dots, e_l = e_{2,1}, \dots, e_{2,i-1}, e_{2,i+1}, \dots, e_{2,k}$  et  $e_i, \dots, e_{i+m-1} = n \circ_{r(D_{e'})}^{\text{src}} \text{out}(r(D_{e'}))$ . On distingue trois cas :

1. si  $(v_1, \dots, v_k) = (0, \dots, 0)$  alors  $T$  est une feuille et  $P' = P = \epsilon$ . D'après le Lemme 3.1.13,  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$ . Par conséquent  $P \in L(D_e, n)$ ;
2. sinon, s'il existe  $t \in [k]$  tel que  $(v_1, \dots, v_k) = 1_t$  alors il y a deux cas selon  $t$  : si  $t \neq i$  alors en conséquence du Lemme 3.1.13 et la construction, il existe  $t' \in [l]$  tel que  $1_{t'} \in L(\rho)$  et  $e_{t'} = e_{2,t}$ . On déduit que  $L(D_e, n_{t'}) \subseteq L(D_e, n)$ . En outre,  $T = (d, T_{P'})$  où  $d$  est étiqueté par  $(n, 1_t)$  et un sous-chemin  $T_{P'}$  de  $T$  à partir  $n_t$  dans  $D_{e''}$  étiqueté par  $P'$ . Par conséquent, puisque  $T_{P'}$  est un sous-chemin de  $T$  à partir d'un nœud commun entre  $D_e$  et  $D_{e''}$ , par hypothèse d'induction  $L(r(D_{e'})) \circ_{\xi} P' \subseteq L(D_e, n_t)$ . On a  $P \in L(D_e, n)$ . Sinon,  $P' = \xi$  et par définition de l'opération de substitution  $P \in L(r(D_{e'}))$ . Donc  $P$  est l'étiquette d'un chemin  $T_P$  dans  $D_{e'}$  à partir de  $r(D_{e'})$  dont la racine est étiquetée par  $(r(D_{e'}), (v'_1, \dots, v'_m))$  avec  $(v'_1, \dots, v'_m) \in L(\rho_1)$ . D'après le Lemme 3.1.13, il existe  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_1, \dots, v'_m, v_{i+1}, \dots, v_k) \in L(\rho)$ . De plus, rappelons que par construction  $e_i, \dots, e_{i+m-1} = n \rightarrow r_1, \dots, n \rightarrow r_m$ . On a  $P \in L(D_e, n)$ ;

3. sinon,  $P' = P'_1 \parallel P'_2$  où  $P'_1 = \parallel_{\substack{j \in [k] \\ j \neq i}} \parallel_{s \in [v_j]} P'_{1,j,s}$ ,  $P'_{1,j,s} \in L(D_{e''}, n_j)$  et  $P'_2 = \xi^{\parallel v_i}$ . Par conséquent,  $P = P_1 \parallel P_2$  où  $P_1 = \parallel_{\substack{j \in [k] \\ j \neq i}} \parallel_{s \in [v_j]} P_{1,j,s}$ , chaque  $P_{1,j,s} \in L(r(D_{e'})) \circ_\xi P'_{1,j,s}$ ,  $P_2 = \parallel_{s \in [v_i]} P_{2,s}$  et pour tout  $s \in [v_i]$ ,  $P_{2,s} \in L(r(D_{e'}))$  est l'étiquette d'un  $T_{2,s}$  chemin de  $r(D_{e'})$  dans  $D_{e'}$  étiqueté par  $P_{2,s}$  de racine étiquetée par  $(r(D_{e'}), (v'_{s,1}, \dots, v'_{s,m}))$  pour  $(v'_{s,1}, \dots, v'_{s,m}) \in L(\rho_1)$ . En outre, chaque  $P'_{1,j,s}$  est l'étiquette d'un sous-chemin direct de  $T$  dans  $D_{e''}$  d'un nœud commun de  $D_{e''}$  et  $D_e$ . Donc, par hypothèse d'induction, chaque  $P_{1,j,s} \in L(D_e, n_j)$ . De plus, comme conséquence du Lemme 3.1.13, il existe  $(v''_1, \dots, v''_l) \in L(\rho)$  tel que  $(v''_1, \dots, v''_{i-1}, v''_{i+m}, \dots, v''_l) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$  et  $(v''_i, \dots, v''_{i+m-1}) = (v'_{1,1}, \dots, v'_{1,m}) + \dots + (v'_{v_i,1}, \dots, y'_{v_i,m})$ . On a  $P_1 \parallel P_2 \in L(D_e, n)$ ;

Revenons maintenant au cas où  $n$  n'a pas d'enfant étiqueté par  $\xi$  ou  $r(D_{e'})$  n'est pas étiqueté par une formule de Presburger. Ce cas ne nécessite pas de PP-suppression. Par construction, l'étiquette et la bordure de  $n$  dans  $D_{e''}$  et  $D_e$  sont les mêmes. On distingue trois cas :

1. si  $(v_1, \dots, v_k) = (0, \dots, 0)$  ou  $\rho$  est une tautologie de Presburger close alors  $T$  est une feuille et  $P = P' = \epsilon$ . Puisque  $L(\rho_2) = L(\rho)$  alors  $\epsilon \in L(D_e, n)$ ;
2. sinon, s'il existe  $t \in [k]$  tel que  $1_t \in L(\rho)$  alors  $T = (d, T_{P'})$  où  $d$  est étiqueté par  $(n, 1_t)$  et  $T_{P'}$  est un sous-chemin de  $T$  à partir  $n_t$  dans  $D_{e''}$  étiqueté par  $P'$ . De plus, puisque est un sous-chemin de  $T$  à partir d'un nœud commun à  $D_e$  et  $D_{e''}$ , alors par hypothèse d'induction, peu importe que  $n_t$  soit étiqueté par  $\xi$  ou non,  $L(r(D_{e'})) \circ_\xi L(D_{e''}, n_t) \subseteq L(D_e, n_t)$ . On a  $P \in L(D_e, n)$ ;
3. sinon,  $P' = \parallel_{j \in [k]} \parallel_{s \in [v_j]} P'_{j,s}$  où chaque  $P'_{j,s} \in L(D_{e''}, n_j)$ . Donc, par définition de l'opération de substitution,  $P = \parallel_{j \in [k]} \parallel_{s \in [v_j]} P_{j,s}$  où chaque  $P_{j,s} \in L(r(D_{e'})) \circ_\xi P'_{j,s}$ . Le lemme suit par hypothèse d'induction. □

La construction dans l'Algorithme 3 indique que  $r(D_{e' \circ_\xi e''}) = r(D_{e''})$ . Donc comme corollaire du Lemme 4.2.23, on a :

**Corollaire 4.2.24.** *Soient  $D_{e'}$  et  $D_{e''}$  les D-graphes des expressions rationnelles  $e'$  et  $e''$ . Alors  $L(r(D_{e' \circ_\xi e''})) = L(r(D_{e'})) \circ_\xi L(r(D_{e''}))$ .*

**Cas  $e = e'^* \xi$**

Retournons maintenant à la preuve de l'exactitude de la construction de  $D_{e^* \xi}$  pour un expression rationnelle  $e$ . Le D-graphe  $D_{e^* \xi}$  est construit à partir de  $D_e$  qui est obtenu par hypothèse d'induction. Toujours par hypothèse d'induction, on sait que  $L(D_e) = L(e)$ . Par conséquent, puisque la rationalité de  $L(e^* \xi)$  implique que  $e \neq \xi$  et  $e \notin L(e)$  alors  $D_e$  n'est ni un seul nœud étiqueté par  $\xi$  ni un D-graphe enraciné par un nœud étiqueté par  $\rho(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{P}_m$  pour  $m \in \mathbb{N}$  telle que  $\rho$  est une tautologie de Presburger close ou  $(0, \dots, 0) \in L(\rho)$  (Lemme 4.2.9). De plus, quand  $e = a \in A \setminus \{\xi\}$ ,  $D_e$  est limité à un seul nœud étiqueté par  $a$  sans arcs, et par construction,  $D_{e^* \xi}$  est un D-graphe contenant trois nœuds. Un nœud  $n_1$  étiqueté par  $a$ , un nœud  $n_2$  étiqueté par  $\xi$  et un nœud étiqueté par  $x_1 + x_2 = 1$  qui est la racine de  $D_{e^* \xi}$  bordé par  $r(D_{e^* \xi}) \rightarrow n_1, r(D_{e^* \xi}) \rightarrow n_2$ . Dans ce cas, remarquons que  $L(e^* \xi) = L(r(D_e))^* \xi = L(D_{e^* \xi})$

$= \{a, \xi\}$ . Donc, dans les lemmes suivants, ce cas n'est pas traité. Dans la suite nous supposons que lorsqu'une expression rationnelle  $e$  est de la forme  $e^{*\xi}$  alors tout  $\xi$  de tout poset de  $L(e)$  est incomparable avec au moins un autre élément.

On commence par montrer que  $L(D_e)^{*\xi} \subseteq L(D_{e^{*\xi}})$ . On montre d'abord quelques lemmes intermédiaires.

Rappelons que la première étape de l'Algorithme 4 garantit que la racine de  $D_{e^{*\xi}}$  est étiquetée par une formule de Presburger  $\rho$  avec un  $i^{\text{ème}}$  enfant étiqueté par  $\xi$  pour exactement un seul  $i$ , et  $1_i$  est dans l'ensemble de Presburger de  $\rho$ . Par conséquent :

**Lemme 4.2.25.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$ . Alors  $\xi \in L(r(D_{e^{*\xi}}))$ .*

**Lemme 4.2.26.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$  et soit  $d$  l'enfant de  $r(D_{e^{*\xi}})$  étiqueté par  $\xi$ . Pour tout nœud commun  $n$  de  $D_e$  et  $D_{e^{*\xi}}$ , si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $n \neq r(D_{e^{*\xi}})$  ;
- $n \neq d$  quand  $r(D_e)$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}$  ;

alors  $L(r(D_{e^{*\xi}})) \circ_{\xi} L(D_e, n) \subseteq L(D_{e^{*\xi}}, n)$ .

*Démonstration.* Puisque la seconde étape de l'Algorithme 4 est similaire à l'Algorithme 3, la preuve utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.23. En effet, les arguments à utiliser pour montrer le lemme quand  $n$  est étiqueté par  $a \in A \setminus \{\xi\}$  ou par une opération séquentielle sont les mêmes que ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.23 quand  $n$  est étiqueté de la même manière. De plus, quand  $n$  est étiqueté par  $\xi$  dans  $D_e$ , alors  $n$  est étiqueté dans  $D_{e^{*\xi}}$  exactement comme  $r(D_{e^{*\xi}})$  l'est, et  $\text{out}(n) = n \rightarrow y \circ_{n \rightarrow d} (n \circ_{r(D_{e^{*\xi}})}^{\text{src}} \text{out}(r(D_{e^{*\xi}})))$  dans  $D_{e^{*\xi}}$  avec  $y$  un nouveau nœud étiqueté par  $\xi$  aussi. Par conséquent, l'ensemble des chemins dans  $D_{e^{*\xi}}$  à partir de  $n$  est isomorphe à l'ensemble des chemins dans  $D_{e^{*\xi}}$  à partir de  $r(D_{e^{*\xi}})$ , et donc  $L(D_{e^{*\xi}}, n) = L(r(D_{e^{*\xi}}))$ . Puisque  $L(D_e, n) = \{\xi\}$ , le lemme suit par hypothèse d'induction. Enfin, le cas où  $n$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}$  utilise aussi des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.23. En effet, puisque  $r(D_{e^{*\xi}})$  est toujours étiqueté dans  $\mathcal{P}$  par construction, les arguments utilisés dans le cas où  $n$  a un enfant étiqueté par  $\xi$  (différent de  $d$  grâce à la  $\xi$ -normalisation) sont similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.23 dans le cas où la construction nécessitait une PP-suppression. En outre, si  $n$  n'est pas étiqueté par une formule de Presburger, les arguments sont similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.23 quand la construction ne nécessitait pas de PP-suppression. □

**Lemme 4.2.27.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$ . Alors  $L(r(D_{e^{*\xi}})) \circ_{\xi} L(r(D_e)) \subseteq L(r(D_{e^{*\xi}}))$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r_k$  et  $\text{out}(r(D_{e^{*\xi}})) = r(D_{e^{*\xi}}) \rightarrow r'_1, \dots, r(D_{e^{*\xi}}) \rightarrow r'_m$  pour  $k, m \in \mathbb{N}^*$ . On distingue deux cas, selon si  $r(D_e)$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}$  ou non.

Supposons d'abord que  $r(D_e)$  n'est pas étiqueté dans  $\mathcal{P}$ . Alors par construction  $m = 2$ ,  $r(D_{e^{*\xi}})$  est étiqueté par  $\rho'(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 = 1$ ,  $r'_1 = r(D_e)$ ,  $r'_2$  est étiqueté comme  $r(D_e)$  et  $r'_2$  est étiqueté par  $\xi$ . D'après le Lemme 4.2.26,

$L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(r(D_e)) \subseteq L(D_{e^*\xi}, r'_1)$ . Par conséquent, puisqu'on a  $1_1 \in L(\rho')$ , alors  $L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(r(D_e)) \subseteq L(r(D_{e^*\xi}))$ .

Sinon, supposons que  $r(D_e)$  soit étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ . Par construction,  $r(D_e) = r(D_{e^*\xi})$ . On distingue deux cas selon la présence d'un enfant de  $r(D_e)$  étiqueté par  $\xi$  ou non :

1. S'il existe  $i \in [k]$  tel que  $r_i$  est étiqueté par  $\xi$  alors, par construction  $\text{out}(r(D_e)) = \text{out}(r(D_{e^*\xi}))$ ,  $r(D_{e^*\xi})$  est étiqueté par  $\rho' \equiv \rho^{*x_i}$ . Soit  $P \in L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(r(D_e))$ . Par définition de l'opération de substitution il existe  $P' \in L(r(D_e))$  tel que  $P \in L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi P'$ . De plus il existe  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$  tel que

$$P' \in L(D_e, r_1)^{\|v_1\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v_i\|} \parallel \dots \parallel L(D_e, r_k)^{\|v_k\|}$$

Supposons sans perte de généralité que les  $v_i$  occurrences de  $\xi$  dans  $P'$  aient été substituées par  $P_1, \dots, P_{v_i} \in L(r(D_{e^*\xi}))$  pour obtenir  $P$ . Soit  $P'' = P_1 \parallel \dots \parallel P_{v_i}$ . Alors

$$P \in L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(D_e, r_1)^{\|v_1\|} \parallel \dots \parallel P'' \parallel \dots \parallel L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(D_e, r_k)^{\|v_k\|}$$

Notons que pour tout  $s \in [v_i]$ , il existe  $(v_{s,1}, \dots, v_{s,k}) \in L(\rho')$  tel que

$$P_s \in L(D_{e^*\xi}, r'_1)^{\|v_{s,1}\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v_{s,i}\|} \parallel \dots \parallel L(D_{e^*\xi}, r'_k)^{\|v_{s,k}\|}$$

D'après le Lemme 4.2.26, pour tout  $j \in [k]$ ,  $j \neq i$ ,  $L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(D_e, r_j) \subseteq L(D_{e^*\xi}, r'_j)$ . De plus, on a par construction  $L(D_e, r_i) = L(D_{e^*\xi}, r'_i) = \{\xi\}$ . Alors

$$P \in L(D_{e^*\xi}, r'_1)^{\|v'_1\|} \parallel \dots \parallel L(D_{e^*\xi}, r'_i)^{\|v'_i\|} \parallel \dots \parallel L(D_{e^*\xi}, r'_k)^{\|v'_k\|}$$

où  $v'_i = \sum_{s \in [v_i]} v_{s,i}$  et pour tout  $j \in [k] \setminus \{i\}$ ,  $v'_j = v_j + \sum_{s \in [v_i]} v_{s,j}$ . Remarquons que pour tout  $s \in [v_i]$  il existe  $t_s \in \mathbb{N}$  tel que  $(v_{s,1}, \dots, v_{s,k}) \in L(\rho^{t_s x_i})$  et  $t_s$  est le plus petit possible. Soit  $t = \max\{t_s : s \in [v_i]\}$ . On a  $(v'_1, \dots, v'_k) \in L(\rho^{(t+1)x_i})$ . Par conséquent  $P \in L(r(D_{e^*\xi}))$ ;

2. sinon, par construction,  $m = k + 1$ ,  $r'_m$  est étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e^*\xi}$ , pour tout  $j \in [k]$ ,  $r_j$  et  $r'_j$  sont étiquetés de la même manière et  $r(D_{e^*\xi})$  est étiqueté par

$$\rho'(x_1, \dots, x_m) \equiv (\rho(x_1, \dots, x_k) \wedge x_m = 0) \vee (\wedge_{j \in [k]} x_j = 0 \wedge x_m = 1)$$

Remarquons que pour tout  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$ , il existe  $(v_1, \dots, v_k, 0) \in L(\rho')$ . En conséquence du Lemme 4.2.26, pour tout  $j \in [k]$ ,  $L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(D_e, r_j) \subseteq L(D_{e^*\xi}, r'_j)$ . Ainsi  $L(r(D_{e^*\xi})) \circ_\xi L(r(D_e)) \subseteq L(r(D_{e^*\xi}))$ .  $\square$

**Lemme 4.2.28.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$ . Alors  $L(r(D_e))^{\ast\xi} \subseteq L(r(D_{e^*\xi}))$ .*

*Démonstration.* Soit  $P \in L(r(D_e))^{\ast\xi}$ . Par définition de la substitution itérée, il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $P \in L(r(D_e))^{i\xi}$ . Le lemme peut être montré par induction sur  $i$  en utilisant le Lemme 4.2.25 et le Lemme 4.2.27.  $\square$

Montrons maintenant que  $L(D_{e^* \xi}) \subseteq L(D_e)^{* \xi}$ . On montre d'abord quelques lemmes intermédiaires.

**Lemme 4.2.29.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$  où  $r(D_e)$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ ,  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r_k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , et  $r_i$  est étiqueté par  $\xi$ , pour un  $i \in [k]$ , et soit  $(v'_1, \dots, v'_k) \in L(\rho^{*x_i})$ . Alors*

$$\left( L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_1)^{\|v'_1\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v'_i\|} \parallel \dots \parallel L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_k)^{\|v'_k\|} \right) \subseteq L(D_e)^{* \xi}$$

*Démonstration.* Soit

$$L = L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_1)^{\|v'_1\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v'_i\|} \parallel \dots \parallel L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_k)^{\|v'_k\|}$$

Rappelons que  $L(D_e) = L(r(D_e))$ . D'après le Lemme 3.1.17 il existe un  $t \in \mathbb{N}$ , qu'on peut supposer le plus petit possible, tel que  $(v'_1, \dots, v'_k) \in L(\rho^{tx_i})$ . On procède par induction sur  $t$ .

Si  $t = 0$  alors  $(v'_1, \dots, v'_k) = 1_i$ . Donc  $L = \{\xi\}$  et par définition de la substitution itérée on a  $L \subseteq L(D_e)^{0\xi}$ .

Si  $t = 1$  alors  $(v'_1, \dots, v'_k) \in L(\rho)$ . Soit  $P \in L$ . Par définition de la substitution itérée, il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $P$  est dans

$$\left( \bigcup_{j' \leq j} L(D_e)^{j' \xi} \circ_{\xi} L(r_1)^{\|v'_1\|} \right) \parallel \dots \parallel \xi^{\|v'_i\|} \parallel \dots \parallel \left( \bigcup_{j' \leq j} L(D_e)^{j' \xi} \circ_{\xi} L(r_k)^{\|v'_k\|} \right)$$

De plus, puisque  $\xi \in \bigcup_{j' \leq j} L(D_e)^{j' \xi}$ , alors

$$P \in \left( \bigcup_{j' \leq j} L(D_e)^{j' \xi} \right) \circ_{\xi} \left( L(r_1)^{\|v'_1\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v'_i\|} \parallel \dots \parallel L(r_k)^{\|v'_k\|} \right)$$

On sait que  $L(D_e) = \bigcup_{(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)} L(r_1)^{\|v_1\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v_i\|} \parallel \dots \parallel L(r_k)^{\|v_k\|}$ . Par

conséquent, par définition de la substitution itérée  $P \in L(D_e)^{(j+1)\xi}$ .

Si  $t > 1$  alors  $(v'_1, \dots, v'_k) \in L((\bigvee_{t' < t} \rho^{t'x_i}) \bullet_{x_i} \rho)$  selon le Lemme 3.1.17. Dans ce cas, d'après le Lemme 3.1.14, il existe  $(v_{1,1}, \dots, v_{k,1}), \dots, (v_{1,v_i}, \dots, v_{k,v_i}) \in L(\bigvee_{t' < t} \rho^{t'x_i})$  et  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$  tels que pour tout  $l \in [k]$ ,  $l \neq i$ ,  $v'_l = v_l + \sum_{s \in [v_i]} v_{l,s}$  et  $v'_i = \sum_{s \in [v_i]} v_{i,s}$ . Par conséquent,

$$L = \left( L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_1)^{\|v_1\|} \right) \parallel \dots \parallel L_1 \parallel \dots \parallel L_{v_i} \parallel \dots \parallel \left( L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_k)^{\|v_k\|} \right)$$

où pour tout  $s \in [v_i]$ ,

$$L_s = \left( L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_1)^{\|v_{1,s}\|} \right) \parallel \dots \parallel \xi^{\|v_{i,s}\|} \parallel \dots \parallel \left( L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} L(r_k)^{\|v_{k,s}\|} \right)$$

Par hypothèse d'induction, pour tout  $s \in [v_i]$ ,  $L_s \subseteq L(D_e)^{* \xi}$ . Alors

$$L \subseteq L(D_e)^{* \xi} \circ_{\xi} \left( L(r_1)^{\|v_1\|} \parallel \dots \parallel \xi^{\|v_i\|} \parallel \dots \parallel L(r_k)^{\|v_k\|} \right)$$

Soit  $P \in L$ . Alors il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que

$$P \in \left( \bigcup_{j' \leq j} L(D_e)^{j'\xi} \right) \circ_\xi \left( L(r_1)^{\|v_1\|} \parallel \cdots \parallel \xi^{\|v_i\|} \parallel \cdots \parallel L(r_k)^{\|v_k\|} \right)$$

Remarquons que  $L(r_1)^{\|v_1\|} \parallel \cdots \parallel \xi^{\|v_i\|} \parallel \cdots \parallel L(r_k)^{\|v_k\|} \subseteq L(D_e)$ . Alors  $P \in L(D_e)^{(j+1)\xi}$ .  $\square$

**Lemme 4.2.30.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$  et soit  $d$  l'enfant de  $r(D_{e*\xi})$  étiqueté par  $\xi$ . Pour tout nœud commun  $n$  de  $D_e$  et  $D_{e*\xi}$ , si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $n \neq r(D_{e*\xi})$  ;
- $n \neq d$  quand  $r(D_e)$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}$  ;

alors  $L(D_{e*\xi}, n) \subseteq L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, n)$ .

*Démonstration.* Soit  $P \in L(D_{e*\xi}, n)$ . On montre par induction sur un chemin étiqueté par  $P$  de  $n$  dans  $D_{e*\xi}$  que  $P \in L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, n)$ . On prouve seulement le cas où  $n$  est étiqueté par  $\xi$  dans  $D_e$ . Les arguments pour montrer les autres cas sont similaires à ceux utilisés dans le Lemme 4.2.23.

Supposons donc que  $n$  soit étiqueté par  $\xi$  dans  $D_e$ . Alors  $L(D_e, n) = \{\xi\}$ . Alors par définition de l'opération de substitution, il faut montrer que  $P \in L(r(D_e))^{*\xi}$  ou de manière équivalente qu'il existe  $t \in \mathbb{N}$  tel que  $P \in L(r(D_e))^{t\xi}$ . Rappelons que d'après l'Algorithme 4 la racine  $r(D_{e*\xi})$  est étiquetée dans  $\mathcal{P}$ ,  $n$  est étiqueté exactement comme  $r(D_{e*\xi})$  dans  $D_{e*\xi}$  et  $\text{out}(n) = n \circ_{r(D_{e*\xi})}^{src}$   $\text{out}(r(D_{e*\xi}))$  dans  $D_{e*\xi}$ . Puisque  $d$  est un enfant de  $r(D_{e*\xi})$ , alors l'Algorithme 4 produit un  $D$ -graphe non  $\xi$ -normalisé. Par conséquent l'Algorithme 2 transforme  $\text{out}(n)$  en  $n \rightarrow y \circ_{n \rightarrow d} (n \circ_{r(D_{e*\xi})}^{src} \text{out}(r(D_{e*\xi})))$  où  $y$  est un nouveau nœud étiqueté par  $\xi$ .

Supposons que  $\text{out}(n) = n \rightarrow n_1, \dots, n \rightarrow n_k$  dans  $D_{e*\xi}$  et  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r_m$  pour  $m, k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons aussi que  $n$  est étiqueté dans  $D_{e*\xi}$  par une formule de Presburger  $\rho'(x_1, \dots, x_k)$ . Remarquons que l'ensemble des chemins étiquetés par  $P$  à partir de  $n$  dans  $D_{e*\xi}$  n'est pas vide et pour tout chemin  $T$  de cet ensemble, la racine de  $T$  est étiquetée par  $(n, (v_1, \dots, v_k))$  avec  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho')$ . On distingue deux cas selon l'étiquetage de  $r(D_e)$ . Supposons d'abord que  $r(D_e)$  ne soit pas étiqueté dans  $\mathcal{P}$ . Alors par construction,  $k = 2$ ,  $n$  est étiqueté par  $\rho'(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 = 1$ ,  $n_1 = r(D_e)$ ,  $n_2 = y$  dans  $D_{e*\xi}$ ,  $n_1$  est de même étiquette que  $r(D_e)$  et  $n_2$  est étiqueté par  $\xi$ . Remarquons que  $L(\rho') = \{1_1, 1_2\}$ . Si  $(v_1, v_2) = 1_2$  alors  $P = \xi$  et, par définition de la substitution itérée,  $P \in L(r(D_e))^{0\xi}$ . Sinon,  $T = (u, T_P)$  où  $u$  est étiqueté par  $(n, 1_1)$  et  $T_P$  est un chemin de  $n_1$  étiqueté par  $P$  dans  $D_{e*\xi}$ . Par conséquent, puisque  $T_P$  est un sous-chemin de  $T$  à partir de  $n_1$ , qui est un nœud commun de  $D_e$  et  $D_{e*\xi}$ , alors par hypothèse d'induction  $P \in L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(r(D_e))$ . Par définition de la substitution itérée il existe  $t \in \mathbb{N}$  tel que

$$P \in \left( \bigcup_{t' \leq t} L(r(D_e))^{t'\xi} \right) \circ_\xi L(r(D_e))$$

On a  $P \in L(r(D_e))^{(t+1)\xi}$ .

Supposons maintenant que l'étiquette de  $r(D_e)$  soit une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_m)$ . On distingue deux cas selon la présence ou non d'un enfant de  $r(D_e)$  étiqueté par  $\xi$

1. s'il existe  $i \in [m]$  tel que  $r_i$  est étiqueté par  $\xi$  alors, par construction,  $k = m$ ,  $\text{out}(r(D_e))$  et  $\text{out}(r(D_{e^*\xi}))$  ont les mêmes nœuds destinations  $r_1, \dots, r_m$  et  $\text{out}(n)$  a comme nœuds destinations (après la  $\xi$ -normalisation)  $n_1, \dots, n_k = r_1, \dots, r_{i-1}, y, r_{i+1}, \dots, r_m$ . De plus,  $\rho' \equiv \rho^{*x_i}$  et pour tout  $j \in [k]$ ,  $r_j$  et  $n_j$  sont de mêmes étiquette dans  $D_{e^*\xi}$ . S'il existe  $i' \in [k]$  tel que  $(v_1, \dots, v_k) = 1_{i'}$  alors  $T = (u, T_P)$  avec  $u$  étiqueté par  $(n, (v_1, \dots, v_k))$  et  $T_P$  est un chemin de  $n_{i'}$  étiqueté par  $P$  dans  $D_{e^*\xi}$ . Dans ce cas, on déduit que  $L(D_{e^*\xi}, n_{i'}) \subseteq L(D_{e^*\xi}, n)$ . Si  $i' = i$  alors  $P = \xi$  et  $P \in L(r(D_e))^{0\xi}$ .

Sinon, d'après le Lemme 3.1.18,  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$ . Ceci implique que  $L(D_e, r_{i'}) \subseteq L(r(D_e))$ . En outre, puisque  $T_P$  est un sous-chemin direct de  $T$  à partir  $r_{i'}$  qui est un nœud commun de  $D_e$  et  $D_{e^*\xi}$  alors par hypothèse d'induction  $P \in L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_{i'})$ . Par définition de la substitution

itérée, il existe  $t \in \mathbb{N}$  tel que  $P \in \left( \bigcup_{t' \leq t} L(r(D_e))^{t'\xi} \right) \circ_\xi L(D_e, r_{i'})$ . On a  $P \in L(r(D_e))^{(t+1)\xi}$ . Dans le cas où  $\sum_{j \in [k]} v_j > 1$ ,  $P = \parallel_{j \in [k]} \parallel_{s \in [v_j]} P_{j,s}$  où

chaque  $P_{j,s} \in L(D_{e^*\xi}, n_j)$  est l'étiquette d'un sous-chemin direct de  $T$  à partir de  $n_j$ . Alors par hypothèse d'induction, pour tout  $j \in [k]$ ,  $j \neq i$ , pour tout  $s \in [v_j]$ ,  $P_{j,s} \in L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_j)$ . Alors  $P$  est dans

$$L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_1)^{\parallel v_1} \parallel \dots \parallel \xi^{\parallel v_i} \parallel \dots \parallel L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_k)^{\parallel v_k}$$

On a, en conséquence du Lemme 4.2.29,  $P \in L(r(D_e))^{*\xi}$  ;

2. sinon, par construction,  $k = m + 1$ ,  $n_1, \dots, n_k = r_1, \dots, r_m, y$ ,  $n_k$  est étiqueté par  $\xi$  dans  $D_{e^*\xi}$  et

$$\rho'(x_1, \dots, x_k) \equiv (\rho(x_1, \dots, x_m) \wedge x_k = 0) \vee (\bigwedge_{j \in [m]} x_j = 0 \wedge x_k = 1)$$

Remarquons que  $L(\rho') = \{(v_1, \dots, v_m, 0) : (v_1, \dots, v_m) \in L(\rho)\} \cup \{1_k\}$ . Si  $(v_1, \dots, v_k) = 1_k$  alors  $P = \xi$  et, par définition de la substitution itérée,  $P \in L(r(D_e))^{0\xi}$ . Sinon, s'il existe  $i' \in [m]$  tel que  $(v_1, \dots, v_k) = 1_{i'}$  alors  $P \in L(D_{e^*\xi}, n_{i'})$ . Donc dans ce cas  $T = (u, T_P)$  avec  $u$  étiqueté par  $(n, 1_{i'})$  et  $T_P$  est un sous-chemin de  $T$  à partir  $n_{i'}$  dans  $D_{e^*\xi}$  étiqueté aussi par  $P$ . En outre,  $n_{i'} = r_{i'}$  est un nœud commun de  $D_e$  et  $D_{e^*\xi}$ . Alors par hypothèse d'induction  $P \in L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_{i'})$ . Par définition de l'opération de substitution itérée il existe  $t \in \mathbb{N}$  tel que  $P \in$

$\left( \bigcup_{t' \leq t} L(r(D_e))^{t'\xi} \right) \circ_\xi L(D_e, r_{i'})$ . Remarquons qu'on a aussi  $L(D_e, r_{i'}) \subseteq L(r(D_e))$ . On a  $P \in L(r(D_e))^{(t+1)\xi}$ .

Sinon,  $P = \parallel_{j \in [m]} \parallel_{s \in [v_j]} P_{j,s}$  où chaque  $P_{j,s} \in L(D_{e^*\xi}, n_j)$  et  $P_{j,s}$  est l'étiquette d'un sous-chemin direct de  $T$  à partir  $n_j$ . Alors par hypothèse d'induction, pour tout  $j \in [m]$ , pour tout  $s \in [v_j]$ ,  $P_{j,s} \subseteq L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_j)$ . De plus, on sait par définition de la substitution itérée que pour tout  $j \in [m]$ , pour tout  $s \in [v_j]$  il existe  $t_{j,s} \in \mathbb{N}$  tel que  $P_{j,s} \subseteq$

$\left( \bigcup_{t'_{j,s} \leq t_{j,s}} L(r(D_e))^{t'_{j,s}\xi} \right) \circ_\xi L(D_e, r_j)$ . Soit  $t = \max\{t_{j,s} : j \in [m], s \in [v_j]\}$ .

Alors

$$P \in \left( \bigcup_{t' \leq t} L(r(D_e))^{t'\xi} \right) \circ_\xi \left( L(D_e, r_1)^{\|v_1\|} \parallel \cdots \parallel L(D_e, r_m)^{\|v_m\|} \right)$$

Par conséquent, puisque  $(L(D_e, r_1)^{\|v_1\|} \parallel \cdots \parallel L(D_e, r_m)^{\|v_m\|}) \subseteq L(r(D_e))$ , on a  $P \in L(r(D_e))^{(t+1)\xi}$ . □

**Lemme 4.2.31.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$ . Alors  $L(r(D_{e*\xi})) \subseteq L(r(D_e))^{*\xi}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r_k$  et  $\text{out}(r(D_{e*\xi})) = r(D_{e*\xi}) \rightarrow r'_1, \dots, r(D_{e*\xi}) \rightarrow r'_m$  pour  $k, m \in \mathbb{N}^*$ . Par construction,  $r(D_{e*\xi})$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}_m$ . Supposons que l'étiquette de  $r(D_{e*\xi})$  soit une formule de Presburger  $\rho'(x_1, \dots, x_m)$ . Soit  $P \in L(r(D_{e*\xi}))$ . Alors pour tout chemin  $T$  d'étiquette  $P$  dans  $D_{e*\xi}$  à partir de la racine, la racine de  $T$  est étiquetée par  $(r(D_{e*\xi}), (v_1, \dots, v_m))$  pour une solution  $(v_1, \dots, v_m) \in L(\rho')$ . Il y a deux cas selon l'étiquette de  $r(D_e)$ . Supposons d'abord que  $r(D_e)$  ne soit pas étiqueté dans  $\mathcal{P}$ . Alors par construction  $m = 2$ ,  $r(D_{e*\xi})$  est étiqueté par  $\rho'(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 = 1$ ,  $r'_1 = r(D_e)$ ,  $r'_1$  et  $r(D_e)$  sont étiquetés de la même manière et  $r'_2$  est étiqueté par  $\xi$ . Remarquons que  $L(\rho') = \{1_1, 1_2\}$ . Si  $(v_1, v_2) = 1_2$  alors  $P = \xi$  et  $P \in L(r(D_e))^{0\xi}$ . Sinon,  $(v_1, v_2) = 1_1$  et  $P \in L(D_{e*\xi}, r'_1)$ . Comme conséquence du Lemme 4.2.30,  $P \in L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(r(D_e))$ . Alors par définition de la substitution itérée il existe  $t \in \mathbb{N}$  tel que  $P \in \left( \bigcup_{t' \leq t} L(r(D_e))^{t'\xi} \right) \circ_\xi L(r(D_e))$ . Par conséquent  $L(r(D_{e*\xi})) \subseteq L(r(D_e))^{(t+1)\xi}$ .

Si, supposons que l'étiquette de  $r(D_e)$  soit une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$ . Par construction  $r(D_e) = r(D_{e*\xi})$ . Il y a deux cas selon la présence ou non d'un enfant de  $r(D_e)$  étiqueté par  $\xi$  :

1. s'il existe  $i \in [k]$  tel que  $r_i$  est étiqueté par  $\xi$  alors par construction  $\text{out}(r(D_e)) = \text{out}(r(D_{e*\xi}))$  et  $\rho' \equiv \rho^{*x_i}$ . D'après le Lemme 4.2.30, pour tout  $j \in [k], j \neq i$ ,  $L(D_{e*\xi}, r'_j) \subseteq L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_j)$ . Remarquons qu'on a aussi  $L(D_{e*\xi}, r'_i) = L(D_e, r_i) = \{\xi\}$ . Alors  $P$  est dans

$$L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_1)^{\|v_1\|} \parallel \cdots \parallel \xi^{\|v_i\|} \parallel \cdots \parallel L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_k)^{\|v_k\|}$$

On conclut par le Lemme 4.2.29 ;

2. sinon par construction  $m = k + 1$  et pour tout  $j \in [k]$ ,  $r'_j = r_j$ . De plus,  $r'_m$  est étiqueté par  $\xi$ , pour tout  $j \in [k]$  les nœuds  $r'_j$  et  $r_j$  sont étiquetés de la même manière et

$$\rho'(x_1, \dots, x_m) \equiv (\rho(x_1, \dots, x_k) \wedge x_m = 0) \vee (\wedge_{j \in [k]} x_j = 0 \wedge x_m = 1)$$

. Remarquons que  $L(\rho') = \{1_m\} \cup \{(v_1, \dots, v_k, 0) : (v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)\}$ . Si  $(v_1, \dots, v_m) = 1_m$  alors  $P = \xi$  et par définition de la substitution itérée  $P \in L(r(D_e))^{0\xi}$ . Sinon,  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$ . D'après le Lemme 4.2.30, pour tout  $j \in [k]$   $L(D_{e*\xi}, r'_j) \subseteq L(r(D_e))^{*\xi} \circ_\xi L(D_e, r_j)$ . Alors, pour tout

$j \in [k]$  il existe  $t_j$  tel que  $L(D_{e^*\xi}, r'_j) \subseteq \left( \bigcup_{t'_j \leq t_j} L(r(D_e))^{t'_j \xi} \right) \circ_\xi L(D_e, r_j)$ .

Soit  $t = \max\{t_j : j \in [k]\}$ . Alors  $P$  est dans

$$\left( \bigcup_{t' \leq t} L(r(D_e))^{t' \xi} \right) \circ_\xi \left( L(D_e, r_1)^{\|v_1\|} \parallel \cdots \parallel L(D_e, r_k)^{\|v_k\|} \right)$$

On a  $P \in L(r(D_e))^{(t+1)\xi}$ .

□

Ainsi, grâce au Lemme 4.2.28 et au Lemme 4.2.31, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2.32.** *Soit  $D_e$  le  $D$ -graphe d'une expression rationnelle  $e$ . Alors  $L(r(D_{e^*\xi})) = L(r(D_e))^{*\xi}$ .*

### Preuve de la Proposition 4.2.22

Nous sommes maintenant prêts à prouver la Proposition 4.2.22.

*Démonstration de Proposition 4.2.22.* On procède par induction sur  $f$ . Dans la suite de la preuve, quand  $f$  est une expression rationnelle, la  $>1$ -expression correspondante est notée  $e$ .

Si  $f = a \in A$  alors  $e = a$ ,  $D_e$  est simplement un nœud  $n$  étiqueté par  $a$  et selon la Définition 4.2.16, il y a un seul chemin partant de  $n$  dans  $D_e$  et celui-ci est étiqueté par  $a$ . Alors  $L(D_e) = L(f) = \{a\}$ .

Si  $f = \epsilon$  alors  $e = \epsilon$ ,  $D_e$  est simplement un nœud  $n$  étiqueté par une tautologie de Presburger close  $\rho$  et selon la Définition 4.2.16, il y a un seul chemin partant de  $n$  dans  $D_e$  et celui-ci est étiqueté par  $\epsilon$ . Alors  $L(D_e) = L(f) = \{\epsilon\}$ .

Dans le cas où  $f = f_1 \parallel f_2$ ,  $e$  a la forme  $e_1 \parallel e_2$ . Supposons d'abord que ni  $r(D_{e_1})$  ni  $r(D_{e_2})$  ne sont étiquetés dans  $\mathcal{P}$ , alors par construction de  $D_e$ , il existe un chemin  $T$  dans  $D_e$  à partir de  $r(D_e)$  étiqueté par un poset  $P \in SP^\circ(A)$  si et seulement si  $T$  est de la forme  $(m, T_1, T_2)$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_e), (1, 1))$ ,  $T_i$  est un chemin dans  $D_{e_i}$  à partir de  $r(D_{e_i})$  étiqueté par  $P_i$  non vide de  $L(D_{e_i})$ ,  $i \in [2]$  et  $P = P_1 \parallel P_2$ . Alors  $L(D_e) = L(D_{e_1}) \parallel L(D_{e_2})$  et par hypothèse d'induction  $L(D_e) = L(f)$ . Sinon, supposons que  $r(D_{e_1})$  soit étiqueté  $\rho_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,k})$  et  $\text{out}(r(D_{e_1})) = r(D_{e_1}) \rightarrow r_1, \dots, r(D_{e_1}) \rightarrow r_k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$  et  $r(D_{e_2})$  n'est pas étiqueté dans  $\mathcal{P}$ . Alors par construction de  $D_e$ ,  $r(D_e)$  est étiqueté par  $\rho(x_{1,1}, \dots, x_{1,k}, x_2) \equiv \rho_1 \circ_{x_1} (x_1 = x_2 = 1)$  et  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r_k, r(D_e) \rightarrow r(D_{e_2})$ . En conséquence du Lemme 3.1.13,  $L(\rho) = \{(v_1, \dots, v_k, 1) : (v_1, \dots, v_k) \in L(\rho_1)\}$ . En particulier, quand  $e_1 = \epsilon$  alors  $\rho_1$  est une tautologie close,  $L(\rho) = \{(1)\}$  et  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r(D_{e_2})$ . Par construction de  $D_e$ , il existe un chemin  $T$  dans  $D_e$  à partir de  $r(D_e)$  étiqueté par un poset  $P \in SP^\circ(A)$  si et seulement si  $T$  est de la forme  $(m, (T_{P_{i,j}})_{i \in [k], j \in [v_i]}, T')$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_e), (v_1, \dots, v_k, 1))$  pour une solution  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho_1)$ ,  $T_{P_{i,j}}$  est un chemin dans  $D_{e_1}$  à partir de  $r_i$  étiqueté par un poset  $P_{i,j}$  non vide de  $L(D_{e_1}, r_i)$ ,  $i \in [k]$ ,  $j \in [v_i]$ , et  $T'$  est un chemin dans  $D_{e_2}$  à partir de  $r(D_{e_2})$  étiqueté par un poset  $P'$  non vide de  $L(D_{e_2}, r(D_{e_2}))$  tels que  $P = P_1 \parallel P'$  où  $P_1 = \parallel_{i \in [k]} \parallel_{j \in [v_i]} P_{i,j}$  ( $P_1 \in L(D_{e_1})$ ). Alors  $L(D_e) = L(D_{e_1}) \parallel L(D_{e_2})$  et par hypothèse d'induction  $L(D_e) = L(f)$ . On montre le cas où seulement  $r(D_{e_2})$  est étiqueté dans  $\mathcal{P}$  en utilisant des arguments similaires.

Supposons maintenant que  $r(D_{e_1})$  soit étiqueté par une formule de Presburger  $\rho_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,k})$ ,  $\text{out}(r(D_{e_1})) = r(D_{e_1}) \rightarrow r_1, \dots, r(D_{e_1}) \rightarrow r_k$ ,  $r(D_{e_2})$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho_2(x_{2,1}, \dots, x_{2,k'})$  et  $\text{out}(r(D_{e_2})) = r(D_{e_2}) \rightarrow r'_1, \dots, r(D_{e_2}) \rightarrow r'_{k'}$  pour  $k, k' \in \mathbb{N}$ . Alors par construction de  $D_e$ ,  $r(D_e)$  est étiqueté  $\rho(x_{1,1}, \dots, x_{1,k}, x_{2,1}, \dots, x_{2,k'}) \equiv \rho_2 \circ_{x_2} \rho_1 \circ_{x_1} (x_1 = x_2 = 1)$  et  $\text{out}(r(D_e)) = r(D_e) \rightarrow r_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r_k, r(D_e) \rightarrow r'_1, \dots, r(D_e) \rightarrow r'_{k'}$ . En conséquence du Lemme 3.1.13,  $L(\rho) = \{(v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_{k'}) : (v_1, \dots, v_k) \in L(\rho_1), (v'_1, \dots, v'_{k'}) \in L(\rho_2)\}$ . En particulier,  $\rho$  est une tautologie de Presburger close si et seulement si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont toutes les deux des tautologies closes aussi ( $e_1 = e_2 = \epsilon$ ). Donc, par construction de  $D_e$ , il existe un chemin  $T$  dans  $D_e$  à partir de  $r(D_e)$  étiqueté par un poset  $P \in SP^\circ(A)$  si et seulement si  $T$  est de la forme  $(m, (T_{P_{i,j}})_{i \in [k], j \in [v_i]}, (T_{P'_{i,j}})_{i \in [k'], j \in [v'_i]})$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_e), (v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_{k'}), (v_1, \dots, v_k) \in L(\rho_1)$  et  $(v'_1, \dots, v'_{k'}) \in L(\rho_2)$ ,  $T_{P_{i,j}}$  est un chemin de  $D_{e_1}$  à partir de  $r_i$  étiqueté par un poset  $P_{i,j}$  non vide de  $L(D_{e_1}, r_i)$ ,  $i \in [k]$ ,  $j \in [v_i]$ ,  $T_{P'_{i,j}}$  est un chemin dans  $D_{e_2}$  à partir de  $r'_i$  étiqueté par un poset  $P'_{i,j}$  non vide de  $L(D_{e_2}, r'_i)$ ,  $i \in [k']$ ,  $j \in [v'_i]$ , tels que  $P = P_1 \parallel P_2$  où  $P_1 = \parallel_{i \in [k]} \parallel_{j \in [v_i]} P_{i,j}$  ( $P_1 \in L(D_{e_1})$ ), et  $P_2 = \parallel_{i \in [k']} \parallel_{j \in [v'_i]} P'_{i,j}$  ( $P_2 \in L(D_{e_2})$ ). Alors  $L(D_e) = L(D_{e_1}) \parallel L(D_{e_2})$  et par hypothèse d'induction  $L(D_e) = L(f)$ .

La preuve quand  $f = f_1 + f_2$  utilise des arguments similaires.

Quand  $f = f_1 \cdot f_2$  alors  $e$  est de la forme  $e_1 \cdot^{>1} e_2 +_{\epsilon \in L(e_1)} e_2 +_{\epsilon \in L(e_2)} e_1$ . Supposons d'abord que  $\epsilon \notin L(e_1) \cup L(e_2)$ . Alors  $e = e_1 \cdot^{>1} e_2$ . Par construction de  $D_e$ , il existe un chemin  $T$  dans  $D_e$  à partir de  $r(D_e)$  étiqueté par un poset  $P \in SP^{\circ+}(A)$ , si et seulement si  $T$  est de la forme  $(m, T_1, T_2)$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_e), 2)$  et  $T_i$  est un chemin dans  $D_{e_i}$  à partir de  $r(D_{e_i})$  étiqueté par un poset  $P_i$  non vide de  $L(r(D_{e_i}))$ ,  $i \in [2]$ , et  $P = P_1 P_2$ . Alors  $L(D_e) = L(D_{e_1}) \cdot^{>1} L(D_{e_2})$  et par hypothèse d'induction  $L(D_e) = L(f)$ . Dans le cas où  $\epsilon \in L(e_1) \cap L(e_2)$ ,  $e$  est de la forme  $e_1 \cdot^{>1} e_2 + e_1 + e_2$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés quand  $e$  avait la forme  $e_1 + e_2$  on a  $L(D_e) = L(D_{e_1 \cdot^{>1} e_2}) \cup L(D_{e_1}) \cup L(D_{e_2})$ . Donc, puisque  $L(D_{e_1 \cdot^{>1} e_2}) = L(D_{e_1}) \cdot^{>1} L(D_{e_2})$  on a, par hypothèse d'induction,  $L(D_e) = L(f)$ . On montre de manière similaire les cas où  $\epsilon \in L(e_2) \setminus L(e_1)$  et  $\epsilon \in L(e_1) \setminus L(e_2)$ .

Dans le cas où  $f = f_1 \diamond f_2$ ,  $e$  est de la forme  $e_1 \diamond^{>1} e_2 + e_1 +_{\epsilon \in L(e_1)} e_2$ . Supposons d'abord que  $\epsilon \notin L(e_1)$ . Dans ce cas  $e$  est de la forme  $e_1 \diamond^{>1} e_2 + e_1$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés quand  $e$  avait la forme  $e_1 + e_2$  on a  $L(D_e) = L(D_{e_1 \diamond^{>1} e_2}) \cup L(D_{e_1})$ . Soit  $e' = e_1 \diamond^{>1} e_2$ . Alors par construction de  $D_{e'}$ , il y a un chemin  $T$  dans  $D_{e'}$  à partir de  $r(D_{e'})$  étiqueté par  $P \in SP^\circ$  si et seulement si  $T$  est de la forme  $(m, (T_j)_{j \in J \cup \hat{J}^*})$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_{e'}), J \cup \hat{J}^*)$ ,  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$ ,  $T_j$  est un chemin dans  $D_{e_1}$  à partir de  $r(D_{e_1})$  étiqueté par un poset  $P_j$  de  $L(r(D_{e_1}))$  quand  $j \in J$ ,  $T_j$  est un chemin dans  $D_{e_2}$  à partir de  $r(D_{e_2})$  étiqueté par un poset  $P_j$  de  $L(r(D_{e_2}))$  quand  $j \in \hat{J}^*$ ,  $P = \prod_{j \in J \cup \hat{J}^*} P_j$  et il doit exister au moins  $j, j' \in J \cup \hat{J}^*$  tels que  $j \neq j'$  et  $P_j, P_{j'} \neq \epsilon$ . Alors  $L(D_{e'}) = L(D_{e_1}) \diamond^{>1} L(D_{e_2})$  et  $L(D_e) = L(D_{e_1}) \diamond^{>1} L(D_{e_2}) \cup L(D_{e_1})$ . Donc par hypothèse d'induction  $L(D_e) = L(f)$ . Supposons maintenant que  $\epsilon \in L(e_1)$ . Alors  $e$  est de la forme  $e_1 \diamond^{>1} e_2 + e_1 + e_2$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés quand  $e$  était de la forme  $e_1 + e_2$  on a  $L(D_e) = L(D_{e_1 \diamond^{>1} e_2}) \cup L(D_{e_1}) \cup L(D_{e_2})$ . Donc, puisque  $L(D_{e_1 \diamond^{>1} e_2}) = L(D_{e_1}) \diamond^{>1} L(D_{e_2})$  on a, par hypothèse d'induction,  $L(D_e) = L(f)$ .

Lorsque  $f = f_1^*$ ,  $e$  est de la forme  $e_1^{* >1} + e_1 + \epsilon$ . Soit  $e' = e_1^{* >1}$ . Par construction de  $D_{e'}$  il existe un chemin  $T$  dans  $D_{e'}$  à partir de  $r(D_{e'})$  étiqueté par un poset

$P \in SP^{\circ+}(A)$  si et seulement  $T$  est de la forme  $(m, T_{P_1}, \dots, T_{P_n})$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_{e'}), n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , pour tout  $j \in [n]$   $T_{P_j}$  est un chemin dans  $D_{e_1}$  à partir de  $r(D_{e_1})$  étiqueté par un poset  $P_j \in L(r(D_{e_1}))$ ,  $P = \prod_{j \in [n]} P_j$  et il doit exister  $j, j' \in [n]$  tels que  $j \neq j'$  et  $P_j, P_{j'} \neq \epsilon$ . Alors  $L(D_{e'}) = L(D_{e_1})^{* > 1}$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés quand  $e$  était de la forme  $e_1 + e_2$  on a  $L(D_e) = L(D_{e_1^{* > 1}}) \cup L(D_{e_1}) \cup L(D_e)$ . Donc, puisque  $L(D_{e_1^{* > 1}}) = L(D_{e_1})^{* > 1}$ , on a, par hypothèse d'induction,  $L(D_e) = L(f)$ .

On utilise des arguments similaires au cas précédent pour montrer la proposition pour les cas où  $f = f_1^{\natural > 1}$  et  $f = f_1^{-\natural > 1}$ .

Quand  $f = f_1^{\omega > 1}$ ,  $e$  est de la forme  $e_1^{\omega > 1} +_{\epsilon \in L(e_1)} (e_1^{* > 1} + e_1 + \epsilon)$ . Supposons d'abord que  $\epsilon \notin L(e_1)$ . Alors  $e$  est de la forme  $e_1^{\omega > 1}$ . Par construction de  $D_e$ , il existe un chemin  $T$  dans  $D_e$  à partir de  $r(D_e)$  étiqueté par un poset  $P \in SP^{\circ}(A)$  si et seulement si  $T$  est de la forme  $(m, (T_j)_{j \in \omega})$  avec  $m$  étiqueté par  $(r(D_e), \omega)$ ,  $T_j$  est un chemin dans  $D_{e_1}$  à partir de  $r(D_{e_1})$  étiqueté par un poset  $P_j \in L(r(D_{e_1}))$ ,  $j \in \omega$ ,  $P = \prod_{j \in \omega} P_j$  et il doit exister  $j, j' \in \omega$  tels que  $j \neq j'$  et  $P_j, P_{j'} \neq \epsilon$ . Alors  $L(D_e) = L(D_{e_1})^{\omega > 1}$  et par hypothèse d'induction  $L(D_e) = L(f)$ . Dans le cas où  $\epsilon \in L(e_1)$ ,  $e$  est de la forme  $e_1^{\omega > 1} + e_1^{* > 1} + e_1 + \epsilon$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés quand  $e$  était de la forme  $e_1 + e_2$  on a  $L(D_e) = L(D_{e_1^{\omega > 1}}) \cup L(D_{e_1^{* > 1} + e_1 + \epsilon})$ . Donc, puisque  $L(D_{e_1^{\omega > 1}}) = L(D_{e_1})^{\omega > 1}$  et  $L(D_{e_1^{* > 1} + e_1 + \epsilon}) = L(D_{e_1})^{* > 1} + L(D_{e_1}) + L(\epsilon)$ , on a, par hypothèse d'induction,  $L(D_e) = L(f)$ .

On montre le cas où  $f = f_1^{-\omega > 1}$  de la même manière.

Les cas où  $f$  est de la forme  $f_1^{*\xi}$  ou  $f_1 \circ_{\xi} f_2$  sont traités respectivement dans le Corollaire 4.2.24 et le Corollaire 4.2.32.  $\square$

### 4.3 Coloriage

Dans la section précédente, nous avons construit à partir d'une expression rationnelle une structure particulière de graphe appelée D-graphe. Nous avons montré que le langage d'un D-graphe  $D_e$  est exactement le langage de l'expression rationnelle  $e$  à partir de laquelle il est construit. Nous voulons maintenant construire une formule P-MSO  $\psi_e$  à partir de  $D_e$  telle que  $P \in SP^{\circ}(A)$  satisfasse  $\psi_e$  si et seulement si  $P \in L(D_e) = L(e)$ . L'idée est de parcourir  $D_e$  récursivement pour calculer  $\psi_e$ . Le plan est de définir pour chaque nœud  $n$  de  $D_e$  une formule de P-MSO  $\psi_n(X)$ . On veut qu'un facteur  $P'$  d'un poset  $P$  satisfasse  $\psi_n(P')$  si et seulement si  $P' \in L(D_e, n)$ . La formule  $\psi_n(X)$  sera construite dépendamment de l'étiquette de  $n$  dans  $D_e$  et de ses enfants. La formule  $\psi_n(X)$  est simple à construire quand  $n$  est étiqueté par une lettre. Lorsque  $n$  est étiqueté par un produit séquentiel,  $\psi_n(X)$  dépend des formules  $\psi_{n_i}$  définies pour les  $n_i$  enfants de  $n$  obtenues par hypothèse d'induction. Par construction les arcs sortants de  $n$  sont des arcs normaux. Quand  $n$  est étiqueté par un produit séquentiel unaire,  $n$  est la source d'un seul arc normal  $n \rightarrow n_1$ . Dans ce cas, la formule  $\psi_n(X)$  partitionne  $X$  en  $X_1, X_2$  non vides de manière consistante avec l'étiquette de  $n$  en utilisant les techniques vues dans la Sous-section 3.4.2. Tout facteur maximal  $F$  d'un des  $X_i$  doit satisfaire la formule  $\psi_{n_1}(F)$ . La construction est similaire lorsque  $n$  est étiqueté par  $\cdot > 1$ . Dans ce cas  $n$  est la source de deux arcs normaux  $n \rightarrow n_1$  et  $n \rightarrow n_2$ . La formule  $\psi_n(X)$  partitionne  $X$  en

$X_1, X_2$  tels que  $X_1 < X_2$  et  $\psi_{n_1}(X_1)$  et  $\psi_{n_2}(X_2)$  sont vraies. Dans le cas où  $n$  est étiqueté par  $\diamond^{>1}$ , la formule  $\psi_n(X)$  partitionne  $X$  en  $X_1, X_2$  non vides de manière à satisfaire les propriétés énoncées dans le Lemme 3.4.3. La difficulté réside dans le cas des nœuds sources d'arcs spéciaux. Par construction de tels nœuds sont étiquetés par des formules de Presburger. Les arcs spéciaux peuvent causer des dépendances circulaires entre les formules associées aux nœuds de  $D_e$ , et sont les seuls à pouvoir le faire. Pour éviter cette récursivité, contrairement aux autres cas, une formule associée à un nœud  $n$  étiqueté par une formule de Presburger n'est pas directement exprimée en fonction des formules associées aux nœuds enfants de  $n$  joints par des arcs spéciaux. Les facteurs de posets de  $L(n)$  qui sont étiquettes de chemins d'un  $n_i$  enfant de  $n$  joint par un arc spécial  $n \rightarrow n_i$  ont la particularité d'être marqués par  $n \rightarrow n_i$ . Nous nous appuyons sur une technique définissable en MSO appelée *s-coloriage* identifiant ces facteurs. Un *s-coloriage* d'un poset  $P$  est une fonction partielle  $\mathbf{c}$  attachant à certains facteurs de  $P$  une couleur prise dans un ensemble de couleurs  $C$ . Toute fonction n'est pas forcément définissable en MSO, mais nous montrons que le *s-coloriage* l'est. C'est-à-dire qu'il existe  $Y_1, \dots, Y_k \subseteq P$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et une formule MSO  $\mathbf{c}_c(F, Y_1, \dots, Y_k)$  tels que, pour tout  $c \in C$  et pour tout facteur  $F$  de  $P$  :

$$F, Y_1, \dots, Y_k \models \mathbf{c}_c(F, Y_1, \dots, Y_k) \text{ si et seulement si } \mathbf{c}(F) = c$$

L'ensemble des couleurs  $C$  est composé de tous les couples  $(s, b)$  où  $s$  est un arc spécial de  $D_e$  et  $b \in \mathbb{B}$ . Lorsque  $n$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  et bordé par  $n \rightarrow n_1, \dots, n \rightarrow n_k$ , nous construisons  $\psi_n(X)$  de telle manière que  $X$  la satisfasse si  $X$  peut être factorisé en :

$$X = (X_{1,1} \parallel \dots \parallel X_{1,v_1}) \parallel \dots \parallel (X_{k,1} \parallel \dots \parallel X_{k,v_k})$$

où  $(v_1, \dots, v_k) \in L(\rho)$ , et pour tout  $i \in [k]$ , pour tout  $j \in [v_i]$ ,  $X_{i,j}$  satisfait  $\psi_{n_i}$  si  $n \rightarrow n_i$  est un arc normal, sinon  $X_{i,j}$  satisfait  $\mathbf{c}_{n \rightarrow n_i}$ . C'est la formule  $\psi_e$  qui se chargera par la suite, indépendamment de  $\psi_n(X)$ , de contraindre tout facteur  $X_{i,j}$  satisfaisant  $\mathbf{c}_{n \rightarrow n_i}$  à satisfaire aussi  $\psi_{n_i}$ . En effet, la formule  $\psi_e$  exprime l'existence d'un encodage  $Y_1, \dots, Y_k \subseteq P$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , d'un *s-coloriage* de  $P$  tel que :

- pour tout facteur  $F$  de  $P$  et pour tout  $n \rightarrow m \in E_S(D_e)$ , si

$$F, Y_1, \dots, Y_k \models \mathbf{c}_{n \rightarrow m}(F, Y_1, \dots, Y_k)$$

alors  $F$  satisfait  $\psi_m(F)$  ;

- $P$  satisfait  $\psi_{r(D_e)}(P)$ .

Nous allons maintenant donner la technique du *s-coloriage*. Commençons par remarquer que le *s-coloriage* n'est utilisé que pour identifier des facteurs séquentiels de  $P$ . On note  $Seq$  l'ensemble des posets séquentiels de  $SP^\diamond$  et  $F_s(P)$  l'ensemble des facteurs séquentiels du poset  $P$ .

**Définition 4.3.1.** *Soit  $P \in SP^\diamond$  et  $C$  un ensemble fini non vide de couleurs. Un *s-coloriage*  $\mathbf{c}: F_s(P) \rightarrow C$  de  $P$  avec  $C$  est une fonction partielle de  $F_s(P)$  à  $C$ . Il est compatible si, pour tous facteurs différents  $F, F' \in F_s(P)$  tels que  $\mathbf{c}(F)$  et  $\mathbf{c}(F')$  sont définis, soit :*

- $F \cap F' = \emptyset$  et, si  $F + F' \in F_s(P)$ , alors  $\mathbf{c}(F) \neq \mathbf{c}(F')$  ;

- l'un est strictement inclus dans l'autre (disons sans perte de généralité  $F \subsetneq F'$ ), et si  $\mathfrak{c}(F) = \mathfrak{c}(F')$  alors il existe  $x \in F' \setminus F$  tel que  $x$  est incomparable à tous les éléments de  $F$ .

Pour encoder le s-coloriage d'un facteur  $F$  d'un poset  $P$ , nous nous appuyons notamment sur des facteurs particuliers de  $F$  appelés facteurs « séquentiellement maximaux directs ». Un facteur  $F$  d'un poset  $P$  est *séquentiellement maximal* s'il n'existe pas de posets  $R, S$  pas tous les deux vides tels que  $R + F + S$  est un facteur de  $P$ . On dénote par  $F_{ms}(P)$  le sous-ensemble de  $F_s(P)$  de posets séquentiellement maximaux. Tout poset séquentiel est un facteur séquentiel séquentiellement maximal de lui-même. Formellement, pour tout  $P \in Seq$ ,  $P \in F_{ms}(P)$ . Un facteur  $F \in F_{ms}(P)$  est *direct* s'il n'existe pas  $P' \in F_{ms}(P) \setminus \{P, F\}$  tel que  $F \in F_{ms}(P')$ . On dénote par  $DF_{ms}(P)$  le sous-ensemble de  $F_{ms}(P)$  contenant tous les facteurs stricts et directs de  $P$ .

**Exemple 4.3.2.** Soit  $P = (a \cup b) + c + (d \cup (e + (f \cup (g + h))) \cup i)$  le poset non étiqueté représenté dans la Figure 4.10. Alors :

- $a, a \cup b$  et  $(a \cup b) + c$  sont des facteurs stricts de  $P$  ;
- $a \cup b$  et  $d \cup (e + (f \cup (g + h))) \cup i$  sont des facteurs parallèles de  $P$  ;
- $(a \cup b) + c$  et  $c + (d \cup (e + (f \cup (g + h))) \cup i)$  sont des facteurs séquentiels de  $P$  ;
- $g + h$  et  $d \cup i$  sont des facteurs séquentiellement maximaux de  $P$  ;
- $a, e + (f \cup (g + h))$  et  $P$  sont des facteurs séquentiellement maximaux directs de  $P$ .
- $(a \cup b) + c$  est un facteur séquentiel de  $P$  mais il n'est pas séquentiellement maximal.

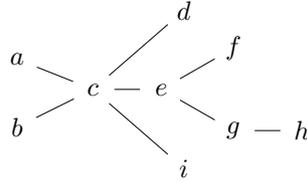


FIGURE 4.10 – Le poset non étiqueté  $P = (a \cup b) + c + (d \cup (e + (f \cup (g + h))) \cup i)$

L'encodage d'un s-coloriage d'un poset  $P$  s'appuie sur une autre technique appelée *ms-coloriage*, elle aussi définissable en MSO. Le ms-coloriage est propre aux facteurs séquentiels séquentiellement maximaux de  $P$ . Nous définissons cette technique dans la Sous-section 4.3.1 et nous montrons comment l'encoder en MSO. Nous montrons comment encoder en MSO un s-coloriage compatible dans la Sous-section 4.3.2. Dans la Sous-section 4.3.3, nous établissons un lien entre les s-coloriages compatibles et les chemins des D-graphes d'expressions rationnelles.

### 4.3.1 ms-coloriage

Étant donné un ensemble de couleurs  $C$ , un *ms-coloriage* d'un poset  $P \in SP^\diamond$  avec  $C$  est une fonction totale

$$\mathfrak{c}: F_{ms}(P) \rightarrow C$$

Un ms-coloriage de  $P$  peut être encodé en utilisant trois ensembles  $X_c^w, X_c^s, X_c^p$  d'éléments de  $P$ , pour chaque  $c \in C$ . nous voulons pouvoir dire sans ambiguïté, à partir de  $X_c^w, X_c^s, X_c^p$ , à quels facteurs de  $F_{ms}(P)$  est associée la couleur  $c \in C$ . L'idée est de trouver des éléments de  $F$  ayant des propriétés qui singularisent  $F$ . Par exemple, un élément  $z$  de  $F$  qui est comparable à tous les autres éléments de  $F$  n'a cette propriété que dans  $F$ . En effet, il n'existe aucun facteur  $F' \in F_{ms}(P)$  tel que  $F \in F_{ms}(F') \setminus \{F'\}$  et  $z$  est comparable à tous les autres éléments de  $F'$ . Le plus petit  $F'$  de ce genre a  $F$  comme facteur séquentiel séquentiellement maximal direct, et par conséquent il existe  $y \in F'$  tel que  $y$  est incomparable à  $z$ . De tels éléments sont mis dans  $X_c^w$ . Cependant, c'est plus compliqué de distinguer  $F$  quand celui-ci ne contient pas ce genre d'éléments. Le cas échéant, on sait que  $F$  admet une factorisation non triviale  $F_1 + F_2$  avec au moins un des  $F_i$  qui est parallèle. Supposons sans perte de généralité que  $F_1$  soit un poset parallèle. L'idée est de mettre deux éléments incomparables et différents  $x, x'$  de  $F_1$  dans  $X_c^p$  et un élément  $y$  de  $F_2$  dans  $X_c^s$ . Toutefois, il faut être prudent dans le choix de ces éléments. Les éléments  $y, x, x'$  appartiennent forcément à des facteurs de  $P$  qui sont eux aussi dans  $F_{ms}(P)$  auxquels il faut donc associer une couleur. Par conséquent il faut pouvoir remplir  $(X_c^w, X_c^s, X_c^p)_{c \in C}$  de façon cohérente de manière à pouvoir associer à chaque facteur de  $F \in F_{ms}(P)$  la couleur  $c(F)$ . C'est ce que nous allons montrer dans cette sous-section.

Avant de commencer, nous introduisons quelques notations. Pour alléger, on note par  $ms_C^X$  les ensembles  $(X_c^w, X_c^s, X_c^p)_{c \in C}$ . Aussi, étant donné  $c \in C, x \in P$  et  $\alpha \in \{w, s, p\}$ , on note par  $ms_C^X +_c^\alpha x$  les sous-ensembles  $(X_{c'}^w, X_{c'}^s, X_{c'}^p)_{c' \in C}$  de  $P$  définis par :

$$X_{c'}^\beta = \begin{cases} X_{c'}^\beta \cup \{x\} & \text{quand } \beta = \alpha \text{ et } c' = c; \\ X_{c'}^\beta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quand  $(y, x, x') \in P^3$ , on dénote par  $ms_C^X +_c(y, x, x') = ms_C^X +_c^s y +_c^p x +_c^p x'$ . On note par  $ms_C^X +_c x = ms_C^X +_c^w x$ . Enfin, étant donné des sous-ensembles de  $P$   $ms_C^X = (X_c^w, X_c^s, X_c^p)_{c \in C}$  et  $ms_C^{X'} = (X_c'^w, X_c'^s, X_c'^p)_{c \in C}$ , on entend par l'union ensemble par ensemble de  $ms_C^X$  et  $ms_C^{X'}$  les sous-ensembles de  $P$  :

$$(X_c^w \cup X_c'^w, X_c^s \cup X_c'^s, X_c^p \cup X_c'^p)_{c \in C}$$

Les quatre prochaines définitions posent les bases de la manière avec laquelle  $ms_C^X$  est utilisé pour encoder un ms-coloriage d'un poset.

**Définition 4.3.3.** Soit  $P \in SP^\diamond$ ,  $ms_C^X$  des sous-ensembles de  $P$ , et soit  $c \in C$ . Alors  $(y, x, x') \in X_c^s \times X_c^p \times X_c^p$  est directement lié par  $c$  pour  $F \in F_{ms}(P)$  dans  $ms_C^X$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $F = F_1 + F_2 + F_3$ ,  $F_2 = F_x \cup F_{x'}$ ,  $x \in F_x, x' \in F_{x'}$  et  $y \in F \setminus F_2$ , pour des posets  $F_1, F_2, F_3, F_x, F_{x'}$  ;
2. il existe  $z \in F \setminus F_2$  incomparable à (et différent de)  $y$  ;
3. il n'y a pas de facteur  $F' \in F_{ms}(F) \setminus \{F\}$  tel que  $F' = F'_1 + F'_2 + F'_3$ ,  $F'_2 = F'_{2,1} \cup F'_{2,2}$  pour des posets  $F'_1, F'_2, F'_3, F'_{2,1}, F'_{2,2}$ , tels que une des conditions suivantes soient vérifiées :
  - (a) il existe  $x_1, x_2 \in X_c^p$  tels que  $x_1 \in F'_{2,1}, x_2 \in F'_{2,2}$  et  $y \in F' \setminus F'_2$  ;

- (b) il existe  $y_1 \in X_c^s$  et  $x_1 \in X_c^p$  tels que  $x \in F'_{2,1}, x_1 \in F'_{2,2}$  et  $y_1 \in F' \setminus F'_2$  ;
- (c) il existe  $y_1 \in X_c^s$  et  $x_1 \in X_c^p$  tels que  $x' \in F'_{2,1}, x_1 \in F'_{2,2}$  et  $y_1 \in F' \setminus F'_2$ .

Dans ce cas,  $y, x$ , et  $x'$  sont dits respectivement directement s-lié, p-lié et p-lié par  $c$  pour  $F$  dans  $ms_C^X$ . De plus, on dit que  $(y, x, x')$  (resp.  $y, x$  et  $x'$ ) est indirectement lié (resp. s-lié, p-lié et p-lié) par  $c$  dans  $ms_C^X$  pour tout  $F' \in F_{ms}(P) \setminus \{F\}$  tel que  $F \in F_{ms}(F')$ .

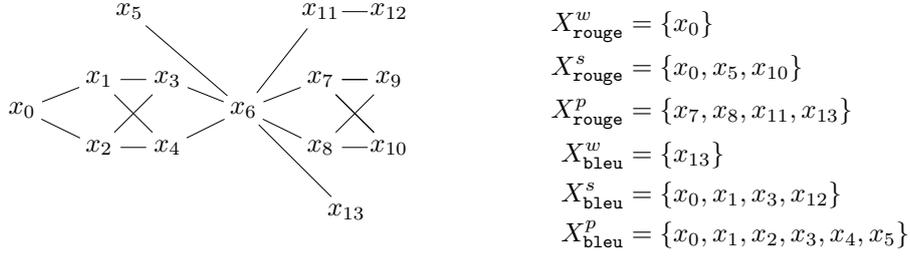
Remarquons que si  $y, x$  et  $(y, x, x')$  sont directement respectivement s-lié, p-lié et lié par  $c \in C$  pour  $F \in F_{ms}(P)$  dans  $ms_C^X$  alors ils sont indirectement respectivement s-lié, p-lié et lié dans  $(X_c^w \cap F', X_c^s \cap F', X_c^p \cap F')_{c \in C}$  pour tout  $F' \in F_{ms}(P)$  contenant strictement  $F$ . Aussi, en conséquence du troisième point de la Définition 4.3.3, si  $(y, x, x')$  est directement lié par  $c \in C$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$  alors il n'existe pas  $(y, s, s'), (t, x, s'), (t, s, x') \in X_c^s \times X_c^p \times X_c^p$  qui sont liés par  $c$  pour  $F' \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$  dans  $ms_C^X$ . On dit qu'un élément de  $P^3$  (resp.  $P$ ) est lié (resp. s-lié, p-lié) par  $c \in C$  pour  $F \in F_{ms}(P)$  dans  $ms_C^X$  s'il est indifféremment directement ou indirectement lié (resp. s-lié, p-lié) par  $c$  pour  $F$  dans  $ms_C^X$ .

**Exemple 4.3.4.** Soit  $C = \{\text{rouge}, \text{bleu}\}$ . Considérons le poset  $P \in SP^\circ(A)$  de la Figure 4.11. Soient  $P_1 = \{x_0, \dots, x_4\}$  et  $P_2 = \{x_7, \dots, x_{10}\}$ . Alors  $P_1, P_2, P \in F_{ms}(P)$ . Soient  $ms_C^X = (X_{\text{rouge}}^w, X_{\text{rouge}}^s, X_{\text{rouge}}^p), (X_{\text{bleu}}^w, X_{\text{bleu}}^s, X_{\text{bleu}}^p)$  les sous-ensembles de  $P$  représentés à droite de la Figure 4.11. Nous cherchons dans cet exemple les triplets de  $X_c^s \times X_c^p \times X_c^p$  liés pour  $P_1, P_2$  ou  $P$  par une couleur  $c \in C$  dans  $ms_C^X$ . Pour  $P_1$ , on trouve les triplets  $(x_1, x_3, x_4)$  et  $(x_3, x_1, x_2)$  qui sont directement liés par **bleu** pour  $P_1$  dans  $ms_C^X$ . En revanche, il n'existe pas  $z, t \in P_1 \cap X_{\text{bleu}}^p$  tels que  $(x_0, z, t)$  est lié par **bleu** pour  $P_1$  dans  $ms_C^X$  puisque  $x_0$  n'est incomparable avec aucun autre élément de  $P_1$ . C'est  $(x_{10}, x_7, x_8)$  qui est le seul triplet lié pour  $P_2$ . Ce triplet est directement lié par **rouge** pour  $P_2$  dans  $ms_C^X$ . Revenons maintenant à  $P$ . Pour la couleur **rouge**, chacun des  $(y, x_7, x_{11}), (y, x_7, x_{13}), (y, x_8, x_{11}), (y, x_8, x_{13}), (y, x_7, x_8)$  et  $(y, x_{11}, x_{13})$  pour  $y \in \{x_0, x_5\}$  satisfont la première et la deuxième condition de la Définition 4.3.3. Cependant, tous ceux utilisant  $x_7$  ou  $x_8$  ne satisfont pas la troisième condition de la Définition 4.3.3, puisque  $x_7$  et  $x_8$  sont déjà utilisés dans le triplet  $(x_{10}, x_7, x_8)$  lié par **rouge** pour  $P_2$ . Par conséquent, seuls  $(x_0, x_{11}, x_{13})$  et  $(x_5, x_{11}, x_{13})$  sont directement liés par **rouge** pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . Similairement, seul  $(x_{12}, x_0, x_5)$  est directement lié par **bleu** pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . Les triplets  $(x_1, x_3, x_4)$  et  $(x_3, x_1, x_2)$  (resp.  $(x_0, x_{11}, x_{13}), (x_5, x_{11}, x_{13})$  et  $(x_{10}, x_7, x_8)$ ) sont indirectement liés par **bleu** (resp. **rouge**) pour  $P$  dans  $ms_C^X$ .

ms-colorier un poset séquentiel séquentiellement maximal  $P$  s'encode en utilisant des éléments de  $P \cup P^3$  appelés candidats au ms-coloriage de  $P$ .

**Définition 4.3.5.** Soient  $P \in Seq$  dont la factorisation séquentielle irréductible est  $\sum_{j \in J} P_j$  et  $ms_C^X$  des sous-ensembles de  $P$ . L'ensemble  $\mathcal{C}_{ms_C^X}(P)$  de candidats pour le ms-coloriage de  $P$  est le plus petit sous-ensemble de  $P \cup P^3$  tel que :

- s'il existe  $j \in J$  tel que  $|P_j| = 1$  et  $c \in C$  tel que  $P_j \subseteq X_c^w$  alors  $P_j \subseteq \mathcal{C}_{ms_C^X}(P)$  ;

FIGURE 4.11 – Le diagramme de Hasse d'un poset  $P \in SP^\diamond$ 

- s'il n'y a pas de  $j \in J$  tel que  $|P_j| = 1$  et il existe  $c \in C$ ,  $y, x, x' \in P$  tels que  $(y, x, x')$  est directement lié par  $c$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$  alors  $(y, x, x') \in \mathcal{C}_{ms_C^X}(P)$ .

**Exemple 4.3.6.** Reprenons l'Exemple 4.3.4. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{ms_C^X}(\{x_{13}\}) &= \{x_{13}\} \\
\mathcal{C}_{ms_C^X}(P_1) &= \{x_0\} \\
\mathcal{C}_{ms_C^X}(P_2) &= \{(x_{10}, x_7, x_8)\} \\
\mathcal{C}_{ms_C^X}(P) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Même si  $(x_1, x_3, x_4)$  et  $(x_3, x_1, x_2)$  sont directement liés pour  $P_1$  par **bleu** dans  $ms_C^X$ , ils ne sont pas candidats au ms-coloriage de  $P_1$ , puisque  $x_0 \in P_1$  et comparable à tous les autres éléments de  $P_1$ . Tous les autres éléments de  $F_{ms}(P)$  n'ont aucun candidat pour leur ms-coloriage dans  $ms_C^X$ .

Pour encoder un ms-coloriage  $\mathbf{c}$  d'un poset  $P$ , il va falloir que  $ms_C^X$  contienne exactement un candidat pour chaque  $F \in F_{ms}(P)$ .

**Définition 4.3.7.** Soient  $P \in Seq$  dont la factorisation séquentielle irréductible est  $\sum_{j \in J} P_j$  et  $ms_C^X$  des sous-ensembles de  $P$ . Alors  $ms_C^X$  ms-colorie  $P$  en  $c \in C$ , noté  $ms_C^X(P) = c$ , si  $\mathcal{C}_{ms_C^X}(P)$  est un singleton  $\mathcal{C}_{ms_C^X}(P) = \{x\}$  et soit  $x \in X_c^w$  ou  $x \in X_c^s \times X_c^p \times X_c^p$ . Dans ce cas, on dit que  $P$  est ms-colorié en  $c$  par  $x$ . De plus,  $ms_C^X$  ms-colorie complètement un poset  $P \in SP^\diamond$  si  $ms_C^X(F)$  est défini pour tout  $F \in F_{ms}(P)$ .

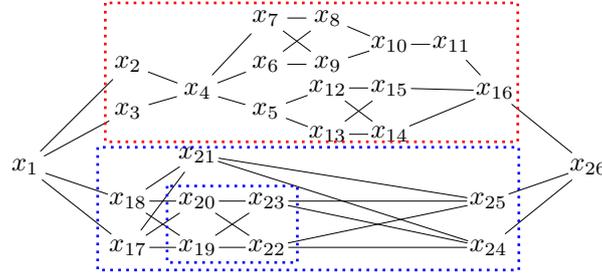
Ainsi, quand  $P \in SP^\diamond$  et  $\mathbf{c}: F_{ms}(P) \rightarrow C$  est un ms-coloriage de  $P$  avec  $C$  alors les sous-ensembles  $ms_C^X$  de  $P$  encodent  $\mathbf{c}$  si  $ms_C^X(F) = \mathbf{c}(F)$  pour tout  $F \in F_{ms}(P)$ .

À la fin de cette sous-section, nous montrons comment encoder un ms-coloriage complet d'un poset  $P \in SP^\diamond$  avec  $ms_C^X$ , par induction sur  $rp(P)$ . Le ms-coloriage en  $c \in C$  d'un facteur de  $F_{ms}(P)$  qui n'a pas encore de candidats pour son ms-coloriage dans  $ms_C^X$  et qui contient un élément  $x$  comparable à tous ses autres éléments est simple à faire. Il suffit d'ajouter  $x$  à  $X_c^w$ . Notons que cela ne compromet pas le ms-coloriage des autres éléments de  $F_{ms}(P)$ . Cependant, ajouter arbitrairement n'importe quel élément de  $P$  dans  $X_c^s$  ou  $X_c^p$  dans le but de ms-colorier un élément de  $F_{ms}(P)$  pourrait altérer le ms-coloriage d'autres facteurs. Cela nous mène à introduire la définition suivante :

**Définition 4.3.8.** Soient  $P \in SP^\diamond$ ,  $ms_C^X$  des sous-ensembles de  $P$ ,  $F \in F_{ms}(P)$  et  $c \in C$ . Alors  $x \in P$  est  $s$ -libre (resp.  $p$ -libre) pour  $(F, c)$  dans  $ms_C^X$  s'il n'est pas  $s$ -lié (resp.  $p$ -lié) par  $c$  pour  $F$  dans  $ms_C^X +_c^s x$  (resp.  $ms_C^X +_c^p x$ ).

Remarquons que si  $x \in P$  est  $\alpha$ -libre pour  $(F, c)$  avec  $F \in F_{ms}(P)$ ,  $c \in C$  et  $\alpha \in \{s, p\}$  alors  $x$  est  $\alpha$ -libre pour  $(F', c)$  dans  $ms_C^X$  mais aussi dans  $(X_c^w \cap F', X_c^s \cap F', X_c^p \cap F')_{c \in C}$  pour tout  $F' \in F_{ms}(F)$  tel que  $x \in F'$ .

**Exemple 4.3.9.** Soit  $C = \{\text{rouge}, \text{bleu}\}$  un ensemble de couleurs. Considérons le poset  $P \in SP^\diamond$  de la Figure 4.12. Soient  $P_1 = \{x_i : i \in [2; 16]\}$ ,  $P_2 = \{x_i : i \in [17; 25]\}$  et  $P_3 = \{x_{19}, x_{20}, x_{22}, x_{23}\}$ . Alors  $P_1, P_2, P_3 \in F_{ms}(P)$ . Soit  $\mathbf{c} : F_{ms}(P) \rightarrow C$  un ms-coloriage de  $P$  tel que  $\mathbf{c}(P_1) = \text{rouge}$  et  $\mathbf{c}(P_2) = \mathbf{c}(P_3) = \text{bleu}$ . On définit  $ms_C^X$  qui encode  $\mathbf{c}(P_i)$ ,  $i \in [3]$ . Notons que dans cet



$$\begin{aligned}
 X_{\text{rouge}}^w &= \{x_4\} \\
 X_{\text{rouge}}^s &= X_{\text{rouge}}^p = \emptyset \\
 X_{\text{bleu}}^w &= \emptyset \\
 X_{\text{bleu}}^s &= \{x_{19}, x_{18}\} \\
 X_{\text{bleu}}^p &= \{x_{22}, x_{23}, x_{21}, x_{19}\}
 \end{aligned}$$

FIGURE 4.12 – Le diagramme de Hasse d'un poset  $P \in SP^\diamond$  et un ms-coloriage de  $P_1, P_2, P_3 \in F_{ms}(P)$

exemple, on encode seulement la restriction de  $\mathbf{c}$  à  $P_1, P_2, P_3$  : la généralisation de la méthode pour encoder la fonction totale  $\mathbf{c} : F_{ms}(P) \rightarrow C$  suit le même principe. On commence avec tous les ensembles de  $ms_C^X$  vide. Le poset  $P_1$  contient deux éléments qui sont comparables à tous les autres éléments de  $P_1$  :  $x_4$  et  $x_{16}$ . Choisissons un parmi eux, indifféremment  $x_4$ . Puis ajoutons  $x_4$  à  $X_{\text{rouge}}^w$ . Cela suffit pour encoder que  $P_1$  est ms-colorié en **rouge**, puisqu'il n'y a pas d'autre candidat dans  $ms_C^X$  pour le ms-coloriage de  $P_1$ . Encodons maintenant  $\mathbf{c}(P_3) = \text{bleu}$ . Notons que, puisque  $P_3$  n'a pas d'élément comparable à tous les autres, on doit utiliser un 3-uplet dans  $P_3$ . Choisissons par exemple  $(x_{19}, x_{22}, x_{23})$ , et ajoutant  $x_{19}$  à  $X_{\text{bleu}}^s$  et  $x_{22}, x_{23}$  à  $X_{\text{bleu}}^p$ . Alors,  $(x_{19}, x_{22}, x_{23})$  est directement lié par **bleu** pour  $P_3$  dans  $ms_C^X$ . Ceci est un encodage du ms-coloriage de  $P_3$  en **bleu**, puisqu'il n'y a pas d'autre  $(z, z', z'') \in X_c^s \times X_c^p \times X_c^p$  qui ms-colorie  $P_3$  en  $c \in C$ , et puisque ça n'interfère pas avec l'encodage du ms-coloriage d'autres facteurs de  $F_{ms}(P)$ . Retournons maintenant à  $P_2$ . Il n'a pas d'élément comparable à tous les autres. Donc, on doit choisir un 3-uplet  $(y, y', y'')$  comme on a fait pour  $P_3$ . Notons que  $x_{19}$

n'est pas un bon choix pour  $y$  puisqu'il est déjà s-lié par **bleu** pour  $P_3$  dans  $ms_C^X$ . L'élément  $x_{20}$  n'est pas non plus un bon choix pour  $y$  puisqu'il n'est pas s-libre pour  $(P_3, \mathbf{bleu})$  et par conséquent non s-libre pour  $(P_2, \mathbf{bleu})$ . En effet, l'ajouter dans  $X_{\mathbf{bleu}}^s$  rendrait  $(x_{20}, x_{22}, x_{23})$  candidat pour le ms-coloriage de  $P_3$  en bleu, et en conséquence, indépendamment de  $y'$  et  $y''$ ,  $(x_{20}, y', y'')$  ne peut plus être lié par **bleu** pour  $P_2$  dans  $ms_C^X$ . Choisissons, par exemple,  $y = x_{18}$  et  $y' = x_{21}$ . Puisqu'on ne peut pas prendre  $y'' \in \{x_{22}, x_{23}\}$  puisqu'ils sont déjà p-liés par **bleu** pour  $P_3$  dans  $ms_C^X$ , alors nécessairement  $y''$  est indifféremment un parmi  $x_{20}, x_{19}$ , disons  $x_{19}$ . Ajoutons  $y$  dans  $X_{\mathbf{bleu}}^s$  et  $y', y''$  dans  $X_{\mathbf{bleu}}^p$  et c'est terminé. Finalement,  $(X_{\mathbf{rouge}}^w, X_{\mathbf{rouge}}^s, X_{\mathbf{rouge}}^p) = (\{x_4\}, \emptyset, \emptyset)$  et  $(X_{\mathbf{bleu}}^w, X_{\mathbf{bleu}}^s, X_{\mathbf{bleu}}^p) = (\emptyset, \{x_{19}, x_{18}\}, \{x_{22}, x_{23}, x_{21}, x_{19}\})$ .

**Proposition 4.3.10.** *Soient  $C$  un ensemble non vide de couleurs et  $P \in SP^\diamond$ . Pour tout ms-coloriage  $\mathbf{c}$  de  $P$  avec  $C$  il existe des sous-ensembles  $ms_C^X$  de  $P$  qui encodent  $\mathbf{c}$ .*

Le reste de cette sous-section est consacré à la preuve de la Proposition 4.3.10. L'idée pour encoder un ms-coloriage  $\mathbf{c}$  d'un poset  $P$  est de démarrer avec les ensembles de  $ms_C^X$  vides puis d'y insérer, à chaque étape d'induction et pour chaque facteur séquentiel séquentiellement maximal  $F$  de  $P$ , un élément  $x$  de  $F$  comparable à tous les autres éléments de  $F$  dans  $X_c^w$ , ou, sinon, un triplet  $y$  dans  $X_c^s$  et  $x, x'$  dans  $X_c^p$  tels que  $(y, x, x')$  est directement lié par  $c$  pour  $F$  dans  $ms_C^X$  et  $\mathbf{c}(F) = c$ . Dans le deuxième cas, le choix de  $y, x$  et  $x'$  doit être fait avec précaution. Ils ne doivent pas compromettre le ms-coloriage d'un facteur  $F' \in F_{ms}(F)$ . La clé est de choisir  $y, x$  et  $x'$  respectivement s-libre, p-libre et p-libre pour  $(F, c')$  dans  $ms_C^X$ , pour tout  $c' \in C$ . Les lemmes suivants montrent que tout poset  $P$  de  $Seq$  qui est complètement ms-colorié par  $ms_C^X$  contient, pour tout  $c \in C$ , au moins un élément s-libre et p-libre pour  $(P, c)$  dans  $ms_C^X$ , pour toute couleur  $c \in C$ .

**Lemme 4.3.11.** *Soit  $P \in Seq$  complètement ms-colorié par  $ms_C^X$ . Si pour tout  $c \in C$ , tous les éléments de  $X_c^p$  (resp.  $X_c^s$ ) sont p-liés (resp. s-liés) par  $c$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$  alors il existe  $x, y \in P$  tels, que pour tout  $c \in C$ ,  $x$  est p-libre et  $y$  est s-libre pour  $(P, c)$  dans  $ms_C^X$ .*

*Démonstration.* On procède par induction sur  $rp(P)$ . Si  $rp(P) = (0, i)$  pour  $i \in 0, 1$  alors  $P$  est soit le singleton ou un ordre linéaire fini. Dans les deux cas, pour tout  $c \in C$ , il n'y a pas  $(y, x, x') \in P^3$  lié par  $c$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . Donc,  $\bigcup_{c \in C} X_c^s = \bigcup_{c \in C} X_c^p = \emptyset$  et pour tout  $x \in P$ , pour tout  $c \in C$ ,  $x$  est naturellement s-libre et p-libre pour  $(P, c)$  dans  $ms_C^X$ . Sinon, supposons que la factorisation séquentielle irréductible de  $P$  soit  $\sum_{j \in J} P_j$ , pour  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$ . Supposons que  $P$  soit ms-colorié en  $e$  par  $z \in X_e^w$ . Alors, d'après les Définitions 4.3.5–4.3.7,  $z$  est comparable à tous les autres éléments de  $P$ . Dans ce cas, d'après la Définition 4.3.8,  $z$  est s-libre et p-libre pour  $(P, c)$  dans  $ms_C^X$ , pour tout  $c \in C$ .

Sinon, supposons que  $P$  soit ms-colorié en  $e$  par  $(y, x, x') \in X_e^s \times X_e^p \times X_e^p$ . Alors, d'après la Définition 4.3.7,  $\mathcal{C}_{ms_C^X}(P) = \{(y, x, x')\}$  et d'après la Définition 4.3.5 il n'y pas de  $j \in J$  tel que  $|P_j| = 1$ , et  $(y, x, x')$  est directement lié par  $e$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . D'après la Définition 4.3.3,  $P = P_1 + P_2 + P_3$ ,  $P_2 = P_x \cup P_{x'} \cup P_{x''}$  pour  $P_x, P_{x'} \in DF_{ms}(P)$  et  $P_1, P_2, P_3, P_{x''}$  des facteurs de  $P$ , tels que  $x \in P_x, x' \in P_{x'}$  et  $y \in P \setminus P_2$ . Remarquons qu'il existe  $P_y \in DF_{ms}(P)$  tel que  $y \in P_y$  et tous les éléments de  $P_y$  sont comparables à ceux de  $P_2$ .

On a  $rp(P_y), rp(P_x), rp(P_{x'}) < rp(P)$ . En outre,  $x$  n'est pas p-lié,  $x'$  n'est pas p-lié et  $y$  n'est pas s-lié par  $e$  pour respectivement  $P_x, P_{x'}$  et  $P_y$  dans  $ms_C^X$ , sinon  $(y, x, x')$  n'aurait pas pu être directement lié par  $e$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$  selon la Définition 4.3.3. Donc, soient  $\overline{X_e^p} = X_e^p \cap P_y$ ,  $\overline{X_e^s} = (X_e^s \cap P_y) \setminus \{y\}$  et  $\overline{X_c^p} = X_c^p \cap P_y$ ,  $\overline{X_c^s} = X_c^s \cap P_y$  pour tout  $c \in C \setminus \{e\}$  et soit  $ms_C^{\overline{X}} = (X_c^w, \overline{X_c^s}, \overline{X_c^p})_{c \in C}$ . Remarquons que  $P_y$  et  $ms_C^{\overline{X}}$  satisfont l'hypothèse du lemme. Alors, par hypothèse d'induction, il existe  $z \in P_y$  tel que  $z$  est p-libre pour  $(P_y, c)$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$ , pour tout  $c \in C$ . De plus, pour tout  $c \in C$   $z$  reste p-libre pour  $(P_y, c)$  dans  $ms_C^X$ . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe  $c' \in C$  tel que  $z$  n'est pas p-libre pour  $(P_y, c')$  dans  $ms_C^X$ . Alors, d'après la Définition 4.3.8, il existe  $y_1 \in X_{c'}^s$  et  $x_2 \in X_{c'}^p$  tels que  $(y_1, x_2, z)$  est lié par  $c'$  pour  $P_y$  dans  $ms_C^{X'} = ms_C^X +_{c'}^p z$ . Notons que, puisque  $y$  est utilisé dans  $(y, x, x')$  pour ms-colorier  $P$  en  $e$  alors  $y$  est s-libre pour  $(P_y, e)$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$ . Donc,  $z$  peut ne pas être p-libre seulement quand  $y_1 = y$  et  $c' = e$ . En effet, malgré la présence de  $y_1$  dans  $\overline{X_{c'}^s}$  et  $x_2$  dans  $\overline{X_{c'}^p}$  quand  $y_1 \neq y$  ou  $c' \neq e$ ,  $(y_1, x_2, z)$  n'a pas formé un triplet lié puisque  $z$  a été prouvé p-libre pour  $(P_y, c')$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$ . Selon l'hypothèse du lemme,  $x_2$  est p-lié par  $e$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . Alors il existe  $y_2 \in X_e^s$  et  $x'_2 \in X_e^p$  tels que  $(y_2, x_2, x'_2)$  est lié par  $e$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . De plus,  $(y_2, x_2, x'_2)$  est lié par  $e$  pour  $P_y$  dans  $ms_C^X$  puisque si  $y_2, x'_2 \in P \setminus P_y$  alors  $(y_2, x_2, x'_2)$  sera un autre candidat pour le ms-coloriage de  $P$  en  $e$  par  $ms_C^X$  ce qui n'est pas permis par la définition d'un ms-coloriage complet de  $P$ . Donc,  $(y, x_2, z)$  et  $(y_2, x_2, x'_2)$  sont liés par  $e$  pour  $P_y$  dans respectivement  $ms_C^{X'}$  et  $ms_C^X$ . Supposons que  $(y, x_2, z)$  et  $(y_2, x_2, x'_2)$  soient directement liés par  $e$  pour respectivement  $P'_y$  dans  $ms_C^{X'}$  et  $P''_y$  dans  $ms_C^X$  pour  $P'_y, P''_y \in F_{ms}(P_y)$ . Remarquons que  $(y_2, x_2, x'_2)$  est lié par  $e$  pour  $P''_y$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$  aussi puisque  $y_2 \neq y$  (le contraire aurait contredit le fait que  $(y, x, x')$  est lié par  $e$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ ). Remarquons aussi que  $ms_C^{X'}$  contient  $ms_C^X$ . On distingue trois cas :

1. si  $P'_y \in F_{ms}(P''_y) \setminus \{P''_y\}$  alors nécessairement chacun de  $y, z$  et  $x_2$  sont incomparables à  $x'_2$ . Alors, naturellement  $(y_2, z, x'_2)$  est aussi directement lié par  $e$  pour  $P''_y$  dans  $ms_C^{\overline{X}} +_{c'}^p z$ , ce qui contredit le fait que  $z$  est p-libre pour  $(P_y, e)$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$ ;
2. dans le cas où  $P'_y = P''_y$  alors la selon Définition 4.3.3,  $P'_y = P'_{y,1} + P'_{y,2} + P'_{y,3}$  tels que  $x_2, x'_2, z \in P'_{y,2}$ ,  $z$  et  $x'_2$  sont incomparables à  $x_2$  et  $y, y_2 \in P'_y \setminus P'_{y,2}$ . Dans ce cas  $(y_2, x_2, z)$  est aussi directement lié par  $e$  pour  $P'_y$  dans  $ms_C^{\overline{X}} +_{c'}^p z$ , ce qui contredit le fait que  $z$  est p-libre pour  $(P_y, e)$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$ ;
3. si  $P''_y \in F_{ms}(P'_y) \setminus \{P'_y\}$  alors  $(y, x_2, z)$  ne peut pas être lié par  $e$  dans  $ms_C^{X'}$  selon la Définition 4.3.3.

Donc pour tout  $c \in C$ ,  $z$  reste p-libre pour  $(P_y, c)$  dans  $ms_C^X$ .

Montrons maintenant que pour tout  $c \in C$ ,  $z$  reste p-libre aussi pour  $(P, c)$  dans  $ms_C^X$ . Par l'absurde supposons qu'il existe  $c' \in C$  tel que  $z$  n'est pas p-libre pour  $(P, c')$  dans  $ms_C^X$ . Alors, il existe  $y_1 \in X_{c'}^s$  et  $x_2 \in X_{c'}^p$  tels que  $(y_1, x_2, z)$  est lié par  $c'$  pour  $P$  dans  $ms_C^{X'}$ . Puisque  $z$  est p-libre pour  $(P_y, c')$  dans  $ms_C^X$  alors  $y_1, x_2 \notin P_y$ . Cela signifie que  $(y_1, x_2, z)$  est directement lié pour  $P$  dans  $ms_C^{X'}$ . Alors, selon la Définition 4.3.3 il existe  $P_{y_1}, P_{x_2} \in DF_{ms}(P)$  tels que  $y_1 \in P_{y_1}$ ,  $x_2 \in P_{x_2}$  et tous les éléments de  $P_y$  sont comparables à ceux de  $P_{y_1}$  et

incomparables à ceux de  $P_{x_2}$ . Par hypothèse,  $y_1$  et  $x_2$  sont respectivement s-lié et p-lié par  $c'$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . Alors il existe  $y_2 \in X_c^s$  et  $x_1, x'_1, x'_2 \in X_c^p$  tels que  $(y_1, x_1, x'_1)$  et  $(y_2, x_2, x'_2)$  sont liés par  $c'$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . Par hypothèse  $P$  est ms-colorié par  $(y, x, x')$  dans  $ms_C^X$ . Alors le ms-coloriage complet de  $P$  par  $ms_C^X$  implique que  $(y_1, x_1, x'_1)$  et  $(y_2, x_2, x'_2)$  sont liés par  $c'$  pour respectivement  $P_{y_1}$  et  $P_{x_2}$  dans  $ms_C^X$ . Remarquons que  $ms_C^{X'}$  contient  $ms_C^X$  et  $P_{y_1}, P_{x_2} \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$ . Par conséquent, selon la Définition 4.3.3,  $(y_1, x_2, z)$  ne peut pas être lié par  $c'$  dans  $ms_C^{X'}$  ce qui soulève une contradiction.

Maintenant, soient  $\overline{X_e^s} = X_e^s \cap P_x$ ,  $\overline{X_e^p} = (X_e^p \cap P_x) \setminus \{x\}$  et  $\overline{X_c^p} = X_c^p \cap P_x$ ,  $\overline{X_c^s} = X_c^s \cap P_x$  pour tout  $c \in C \setminus \{e\}$  et soit  $ms_C^{\overline{X}} = (X_c^w, \overline{X_c^s}, \overline{X_c^p})_{c \in C}$ . Remarquons que  $P_x$  et  $ms_C^{\overline{X}}$  satisfont l'hypothèse du lemme. Alors par hypothèse d'induction, pour tout  $c \in C$ , il existe  $z \in P_x$  tel que  $z$  est s-libre pour  $(P_x, c)$  dans  $ms_C^{\overline{X}}$ . La preuve que  $z$  reste s-libre pour  $(P, c)$ , pour tout  $c \in C$ , dans  $ms_C^X$  utilise des arguments similaires.  $\square$

En utilisant le lemme précédent, nous montrons que le ms-coloriage d'un poset  $P \in Seq$  peut être encodé sans changer le ms-coloriage de ses facteurs séquentiels stricts séquentiellement maximaux.

**Lemme 4.3.12.** *Soient  $P \in Seq$  et  $ms_C^X$  des sous-ensembles de  $P$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\mathcal{C}_{ms_C^X}(P) = \emptyset$  ;
- pour tout  $P' \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$ ,  $P'$  est complètement ms-colorié par  $ms_C^X$  ;
- pour tout  $c \in C$ , tous les éléments de  $X_c^p$  (resp.  $X_c^s$ ) sont p-liés (resp. s-liés) par  $c$  pour  $P$  dans  $ms_C^X$ .

Alors, pour tout  $e \in C$ , il existe  $z \in P \cup P^3$ ,  $ms_C^{X'} = ms_C^X +_e z$ , tels que :

- pour tout  $P' \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$ ,  $x \in P'^3$  et  $c \in C$ ,  $x$  est lié par  $c$  dans  $ms_C^X$  pour  $P'$  si et seulement si  $x$  est lié par  $c$  dans  $ms_C^{X'}$  pour  $P'$  ;
- $z$  ms-colorie  $P$  en  $e$ .

*Démonstration.* Supposons qu'on veuille ms-colorier  $P$  en  $e \in C$ . Si  $P = \{x\}$  alors chaque ensemble de  $ms_C^X$  est vide. Définissons  $ms_C^{X'}$  par : tous les ensembles sont vides sauf  $X_e^w = \{x\}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{C}_{ms_C^{X'}}(P) = \{x\}$ . Si  $|P| > 1$ , supposons que sa factorisation séquentielle irréductible soit  $P = \sum_{j \in J} P_j$ , pour  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$ . S'il existe  $j \in J$  tel que  $P_j = \{x\}$  alors il suffit de poser  $ms_C^{X'} = ms_C^X +_e x$  pour satisfaire les propriétés du lemme. Supposons maintenant que la factorisation séquentielle irréductible de  $P$  soit  $P = \sum_{j \in J} P_j$ , pour  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$  et chaque  $P_j$  est un poset parallèle. Soient  $j, j' \in J$  tels que  $j \neq j'$ . Alors  $P_j = P_{j,1} \cup P_{j,2} \cup P_{j,3}$  et  $P_{j'} = P_{j',1} \cup P_{j',2} \cup P_{j',3}$  tels que  $P_{j,1}, P_{j,2}, P_{j',1}, P_{j',2} \in DF_{ms}(P)$ . Par hypothèse, chacun des facteurs  $P_{j,1}, P_{j,2}, P_{j',1}, P_{j',2}$  est complètement ms-colorié par  $ms_C^X$ . De plus, tous les éléments de  $P_{k,t} \cap X_e^p$  et  $P_{k,t} \cap X_e^s$  sont respectivement p-liés et s-liés par  $c$  pour  $P_{k,t}$  dans  $ms_C^X$ ,  $k \in \{j, j'\}$ ,  $t \in [2]$ , pour tout  $c \in C$ . D'après le Lemme 4.3.11 il existe  $y_{j,1} \in P_{j,1}$  s-libre,  $x_{j',1} \in P_{j',1}$  p-libre et  $x_{j',2} \in P_{j',2}$  p-libre pour respectivement  $(P_{j,1}, e)$ ,  $(P_{j',1}, e)$  et  $(P_{j',2}, e)$  dans  $ms_C^X$ . De plus, on peut prouver par l'absurde en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.3.11, que  $y_{j,1}, x_{j',1}$  et  $x_{j',2}$  restent respectivement s-libre, p-libre et p-libre pour  $(P, e)$  dans  $ms_C^X$ . Donc, en posant  $ms_C^{X'} = ms_C^X +_e (y_{j,1}, x_{j',1}, x_{j',2})$ ,

$(y_{j,1}, x_{j',1}, x_{j',2})$  est directement lié par  $e$  pour  $P$  dans  $ms_C^{X'}$  et  $(y_{j,1}, x_{j',1}, x_{j',2})$  ms-colorie  $P$  en  $e$ . En outre, puisque  $y_{j,1}$ ,  $x_{j',1}$  et  $x_{j',2}$  sont respectivement s-libre, p-libre, p-libre pour  $(P, e)$  dans  $ms_C^X$  alors pour tout  $P' \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$ ,  $x \in P'^3$  et  $c \in C$ ,  $x$  est lié par  $c$  dans  $ms_C^{X'}$  pour  $P'$  si et seulement si  $x$  est lié par  $c$  dans  $ms_C^{X'}$  pour  $P'$ .  $\square$

Nous sommes maintenant prêts à prouver la Proposition 4.3.10.

*Démonstration de la Proposition 4.3.10.* Le cas où  $P = \emptyset$  n'a pas besoin d'être traité puisque dans ce cas  $F_{ms}(P) = \emptyset$ . Supposons que  $P \in SP^{\circ+}$ . On construit, par induction sur  $rp(P)$  un ms-coloriage  $ms_C^X = (X_c^w, X_c^s, X_c^p)_{c \in C}$  encodant  $\mathbf{c}$ , en s'assurant à chaque étape d'induction que pour tout  $c \in C$ ,  $X_c^p$  et  $X_c^s$  contiennent seulement des éléments respectivement p-liés et s-liés pour  $P$  dans  $ms_C^X$ . On commence avec tous les ensembles de  $ms_C^X$  vides. Le premier cas est le cas où  $rp(P) = (0, 0)$ . Dans ce cas,  $P$  est le singleton  $\{x\}$ . Posons  $X_e^w = \{x\}$ , où  $e = \mathbf{c}(P)$ , et laissons tous les autres ensembles composant  $ms_C^X$  vides et c'est terminé.

Sinon, supposons  $P \in Seq$  et que sa factorisation séquentielle irréductible soit  $\sum_{j \in J} P_j$ , pour  $J \in \mathcal{S} \setminus \{0, 1\}$ . Pour tout  $j \in J$ , soit  $P_j = \bigcup_{i \in [k_j]} P_{j,i}$  la factorisation parallèle irréductible de  $P_j$ . Notons que chaque  $rp(P_{j,i}) < rp(P)$  pour tout  $P_{j,i}$ . Ainsi, par hypothèse d'induction, il existe  $ms_C^{X_{j,i}}$  satisfaisant la proposition pour chaque  $P_{j,i} \in DF_{ms}(P)$ . Soit  $ms_C^{X'}$  l'union, ensemble par ensemble, des différents  $ms_C^{X_{j,i}}$ , pour tout  $j \in J$ ,  $i \in [k_j]$ ,  $k_j > 1$ . Par construction de  $ms_C^{X'}$ , pour tout  $c \in C$ , chaque élément  $x$  de  $X_c^p$  (resp.  $X_c^s$ ) est p-lié (resp. s-lié) par  $c$  pour  $F_x \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$  dans  $ms_C^{X'}$ . Cela garantit que  $\mathcal{C}_{ms_C^{X'}}(P) = \emptyset$  et  $ms_C^{X'}(F) = \mathbf{c}(F)$  pour tout  $F \in F_{ms}(P) \setminus \{P\}$ . Il suffit d'appliquer le Lemme 4.3.12 pour conclure.

Enfin, supposons maintenant que  $P$  ait la forme  $\bigcup_{j \in [k]} P_j$  pour  $k > 1$  où chaque  $P_j \in DF_{ms}(P)$ . Puisque chaque  $P_j \in Seq$ , construire un ms-coloriage  $ms_C^{X_j}$  satisfaisant la proposition pour chaque  $P_j$  peut être accompli en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans le paragraphe précédent. On définit  $ms_C^X$  comme l'union, ensemble par ensemble, des différents  $ms_C^{X_j}$ , pour tout  $j \in [k]$ .  $\square$

Nous avons prouvé que tout ms-coloriage  $\mathbf{c}$  d'un poset  $P$  avec un ensemble non vide de couleurs  $C$  peut être encodé par un certain  $ms_C^X$ . Cet encodage est naturellement définissable en MSO. En effet, étant donné un poset  $P$ , il existe les formules MSO suivantes :

- $ms_C^X(F) = c$  qui est satisfaite si et seulement si  $ms_C^X(F) = c$  (cf. Définition 4.3.7), en supposant que  $F \in F_{ms}(P)$ . Elle exprime qu'il existe  $z \in F \cup F^3$  tel que  $z$  est l'unique candidat pour le ms-coloriage de  $P$  en  $c$  dans  $ms_C^X$  ;
- $ms\text{-Coloriage}(P, ms_C^X)$  qui est satisfaite si et seulement si  $ms_C^X$  est un ms-coloriage complet de  $P$ . Elle exprime que, pour chaque  $F \in F_{ms}(P)$ , il existe  $c \in C$  tel que  $ms_C^X(F) = c$ .

Ici  $ms_C^X$  correspond aux variables libres du second ordre  $X_c^w, X_c^s$  et  $X_c^p$  pour tout  $c \in C$ . Les formules ci-dessus sont exprimées en faisant une simple traduction des Définitions 4.3.3–4.3.7 en MSO.

Posant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Facteur}_{ms}(F, P) &\equiv \mathbf{Facteur}_s(F, P) \wedge \neg \exists F' \mathbf{Facteur}(F', P) \\ &\quad \wedge (\exists F'' F'' = F' + F \vee F'' = F + F' \wedge \mathbf{Facteur}(F'', P)) \\ \mathbf{DFacteur}_{ms}(F, P) &\equiv \mathbf{Facteur}_{ms}(F, P) \wedge \neg \exists P' P \neq P' \wedge P' \neq F \\ &\quad \wedge \mathbf{Facteur}_{ms}(P', P) \wedge \mathbf{Facteur}_{ms}(F, P') \end{aligned}$$

exprimant respectivement que «  $F$  est un facteur séquentiellement maximal de  $P$  » et «  $F$  est un facteur séquentiellement maximal direct de  $P$  ».

Notons par  $\psi^c$ , pour une couleur  $c \in C$ , une formule ayant comme variables libres au moins  $X_c^w, X_c^s$  et  $X_c^p$ . Nous traduisons la Définition 4.3.3 par :

$$\begin{aligned} \mathbf{LIÉ}^c(y, x, x', F) &\equiv \exists F_1 \exists F_2 \exists F_x \exists F_{x'} \exists F'_1 \exists F'_2 \exists F'_{2,1} \exists F'_{2,2} \exists F'_1 z \\ &\quad \wedge (F = F_1 + F_2 \vee F = F_2 + F_1) \\ &\quad \wedge F_2 = F_x \parallel F_{x'} \wedge y \in F_1 \wedge x \in F_x \wedge x' \in F_{x'} \wedge y \parallel z \\ &\quad \wedge \neg \exists F' \mathbf{Facteur}_{ms}(F', F) \wedge F' \neq F \\ &\quad \wedge (F' = F'_1 + F'_2 \vee F = F'_2 + F'_1) \wedge F'_2 = F'_{2,1} \parallel F'_{2,2} \\ &\quad \wedge ((X_c^p \cap F'_{2,1} \neq \emptyset) \wedge (X_c^p \cap F'_{2,2} \neq \emptyset) \wedge y \in F'_1 \\ &\quad \quad \vee (X_c^s \cap F'_1 \neq \emptyset) \wedge (X_c^p \cap F'_{2,2} \neq \emptyset) \wedge x \in F'_{2,1} \\ &\quad \quad \vee (X_c^s \cap F'_1 \neq \emptyset) \wedge (X_c^p \cap F'_{2,2} \neq \emptyset) \wedge x' \in F'_{2,1}) \end{aligned}$$

De plus les formules

$$\begin{aligned} \mathbf{Candidat}_w^c(x, F) &\equiv x \in F \wedge x \in X_c^w \wedge \forall^F y (y \neq x \implies \mathbf{Comp}(x, y)) \\ \mathbf{Candidat}_{spp}^c(y, x, x', F) &\equiv \neg \exists^F z \forall^F y (y \neq z \implies \mathbf{Comp}(y, z)) \\ &\quad \wedge \mathbf{LIÉ}^c(y, x, x', F) \end{aligned}$$

expriment que  $x$  (resp.  $(y, x, x')$ ) est un candidat pour le ms-coloriage de  $F$  en  $c$ . Notons que  $\mathbf{LIÉ}^c(y, x, x', F)$ ,  $\mathbf{Candidat}_w^c(x, F)$  et  $\mathbf{Candidat}_{spp}^c(y, x, x', F)$  supposent que  $F$  est un facteur séquentiel séquentiellement maximal d'un poset  $P$ . La formule  $ms_C^X(F) = c$  suivante aussi :

$$\begin{aligned} &(\exists z \mathbf{Candidat}_w^c(z, F) \wedge \bigwedge_{\substack{c' \in C \\ c' \neq c}} \neg \mathbf{Candidat}_w^{c'}(z, F) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{c' \in C} \neg (\exists y_1 \exists x_1 \exists x'_1 \mathbf{Candidat}_{spp}^{c'}(y_1, x_1, x'_1, F) \\ &\quad \quad \vee \exists z_1 z_1 \neq z \wedge \mathbf{Candidat}_w^{c'}(z_1, F))) \\ &\quad \vee \\ &(\exists y \exists x \exists x' \mathbf{Candidat}_{spp}^c(y, x, x', F) \wedge \bigwedge_{\substack{c' \in C \\ c' \neq c}} \neg \mathbf{Candidat}_{spp}^{c'}(y, x, x', F) \\ &\quad \wedge \bigwedge_{c' \in C} \neg (\exists z_2 \mathbf{Candidat}_w^{c'}(z_2, F) \\ &\quad \quad \vee \exists y_2 \exists x_2 \exists x'_2 (y_2 \neq y \vee x_2 \neq x \vee x'_2 \neq x') \\ &\quad \quad \wedge \mathbf{Candidat}_{spp}^{c'}(y_1, x_1, x'_1, F))) \end{aligned}$$

La formule  $ms_C^X(F) = c$  ci-dessus est divisée en deux blocs. Le premier vérifie qu'il existe un candidat  $z$  au ms-coloriage de  $F$  en  $c$ , que  $z$  n'est pas candidat au ms-coloriage de  $F$  en  $c' \neq c$  et que, pour tout  $c' \in C$ , il est faux de dire

qu'il existe  $y_1, x_1, x'_1$  tels que  $(y_1, x_1, x'_1)$  est un candidat au ms-coloriage de  $F$  en  $c'$  ou qu'il existe  $z_1$  différent de  $z$  tel que  $z_1$  est candidat au ms-coloriage de  $F$  en  $c'$ . Similairement, le deuxième bloc vérifie qu'il existe  $y, x, x' \in F$  tels que  $(y, x, x')$  est candidat au ms-coloriage de  $F$  en  $c$  et qu'il n'est pas candidat au ms-coloriage de  $F$  en une autre couleur. Elle vérifie aussi qu'il n'y pas d'autres candidats mis à part  $(y, x, x')$  pour le ms-coloriage de  $F$  en n'importe quelle couleur. Notons que le premier bloc est satisfait si et seulement si le deuxième ne l'est pas. La formule  $ms_C^X(F) = c$  a comme variables libres  $F$  et les sous-ensembles  $ms_C^X$  de  $P$ . Enfin :

$$\text{ms-Coloriage}(P, ms_C^X) \equiv \forall F (\text{Facteur}_{ms}(F, P) \implies \bigvee_{c \in C} ms_C^X(F) = c)$$

### 4.3.2 Encodage avec MSO d'un s-coloriage compatible

Nous encodons dans cette sous-section, avec MSO, un s-coloriage compatible d'un poset  $P$  avec un ensemble de couleurs  $C$ . L'encodage d'un s-coloriage  $\mathbf{c}$  de  $P$  par  $C$  se fait à l'aide d'un ensemble  $X_c^v$ , pour chaque  $c \in C$ , ainsi qu'un ms-coloriage complet de  $P$  avec  $\mathcal{P}(C)$  encodé par des sous-ensembles  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X$  de  $P$ . Pour alléger, on note par  $s_C^X$  les sous-ensembles  $((X_c^v)_{c \in C}, ms_{\mathcal{P}(C)}^X)$  de  $P$ . Un encodage d'un s-coloriage de  $P$  associe la couleur  $c$  à  $F \in F_s(P)$  si chacun de ses éléments comparables à tous les autres est dans  $X_c^v$  et si chacun des éléments de  $DF_{ms}(F)$  est ms-colorié par une couleur  $c' \in \mathcal{P}(C)$  avec  $c \in c'$ . Formellement :

**Définition 4.3.13.** Soient  $P \in SP^{\diamond+}$ ,  $F \in F_s(P)$  dont la factorisation séquentielle irréductible est  $\sum_{j \in J} F_j$ ,  $X_c^v$  un sous-ensemble de  $P$  pour chaque  $c \in C$ , et  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X$  un ms-coloriage complet de  $P$ . Alors  $s_C^X$  s-colorie  $F$  en  $c \in C$ , noté  $s_C^X(F) = c$ , si pour tout  $j \in J$ ,

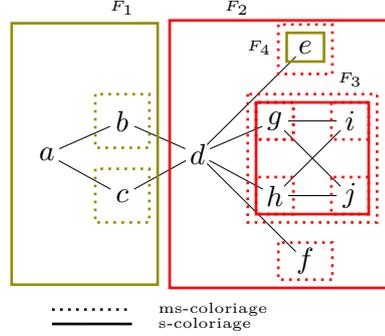
1.  $F_j \in X_c^v$  quand  $|F_j| = 1$  ;
2. quand  $|F_j| > 1$ ,  $c \in ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F_{j,i})$  pour tout  $F_{j,i}$  tel que  $F_j = \bigcup_{i \in [n_j]} F_{j,i}$  est la factorisation parallèle irréductible de  $F_j$  ;
3. il n'y a pas  $F', F''$  pas tous les deux vides tels que  $F' + F + F'' \in F_s(P)$  et  $s_C^X(F' + F + F'') = c$ .

Enfin, quand  $P \in SP^{\diamond}$  et  $\mathbf{c}: F_s(P) \rightarrow C$  est un s-coloriage de  $P$  avec  $C$  alors les sous-ensembles  $s_C^X$  de  $P$  encodent  $\mathbf{c}$  si  $s_C^X(F) = \mathbf{c}(F)$  pour tout  $F \in F_s(P)$ .

Comme conséquence de la Condition 3 de la Définition 4.3.13, notons que lorsque  $F$  et  $F'$  sont deux facteurs séquentiels de  $P$  tels que  $F + F'$  est aussi un facteur séquentiel de  $P$ , il n'y a pas de  $s_C^X$  encodant un s-coloriage tel que  $s_C^X(F) = s_C^X(F')$ . La finalité derrière l'utilisation d'un encodage d'un ms-coloriage de  $P$  par  $\mathcal{P}(C)$  dans l'encodage d'un s-coloriage compatible  $\mathbf{c}$  de  $P$  par  $C$  est la possibilité qu'il y ait un facteur  $F \in F_{ms}(P)$  qui soit aussi facteur séquentiel séquentiellement maximal de plusieurs facteurs séquentiels  $F_1, \dots, F_k$  de  $P$  tels que  $\mathbf{c}(F_1) \neq \dots \neq \mathbf{c}(F_k)$  (voir Exemple 4.3.17).

**Exemple 4.3.14.** Soient  $C = \{\text{rouge, vert}\}$  un ensemble de couleurs et  $P = a + (b \cup c) + d + (e \cup ((g \cup h) + (i \cup j)) \cup f)$ . Soient  $F_1 = a + (b \cup c)$ ,  $F_2 = P \setminus F_1$ ,  $F_3 = (g \cup h) + (i \cup j)$  et  $F_4 = e$ . Alors  $F_1, F_2, F_3, F_4 \in F_s(P)$ . Notons que  $F_3 \subsetneq F_2$  et qu'il existe  $x \in F_2 \setminus F_3$  tel que  $x$  est incomparable à n'importe quel  $y \in F_3$ .

Soit  $\mathbf{c}: F_s(P) \rightarrow C$  le  $s$ -coloriage défini par  $\mathbf{c}(F_1) = \mathbf{c}(F_4) = \mathbf{vert}$  et  $\mathbf{c}(F_2) = \mathbf{c}(F_3) = \mathbf{rouge}$ . Notons que  $\mathbf{c}$  est compatible. La Figure 4.13 représente  $P$  avec un encodage  $s_C^X$  de  $\mathbf{c}$ .



$$\begin{array}{lll}
X_{\mathbf{vert}}^v = \{a, e\} & X_{\{\mathbf{vert}\}}^w = \{b, c\} & X_{\mathbf{vert}}^v = \{a, e\} \\
X_{\{\mathbf{vert}\}}^w = \{b, c\} & X_{\mathbf{rouge}}^v = \{d\} & X_{\{\mathbf{rouge}\}}^w = \{e, f, g, h, i, j\} \\
X_{\mathbf{rouge}}^s = \{h\} & X_{\{\mathbf{red}\}}^p = \{i, j\} & X_{\emptyset}^w = \{a\}
\end{array}$$

et tous les autres sont vides.

FIGURE 4.13 – Le diagramme de Hasse d'un poset  $P \in SP^\diamond$  et un  $s$ -coloriage  $s_C^X$  de  $P$

L'ensemble  $F_{ms}(P)$  est constitué des singletons  $b, c, e, g, h, i, j, f$ , de  $F_3$  et de  $P$ . On a  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(b) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(c) = \{\mathbf{vert}\}$  et  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(e) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(g) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(h) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(i) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(j) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(f) = \{\mathbf{rouge}\}$ . On a aussi  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F_3) = \{\mathbf{rouge}\}$  puisque  $\mathcal{C}_{ms_{\mathcal{P}(C)}^X}(F_3) = \{(h, i, j)\}$ ,  $(h, i, j) \in X_{\{\mathbf{rouge}\}}^s \times X_{\{\mathbf{rouge}\}}^p \times X_{\{\mathbf{rouge}\}}^p$  et il n'y a pas de factorisation de  $F_3$  en  $F_3 = X + Y + Z$  pour des posets  $X, Y, Z$  tels que  $Y$  est un singleton. Puisque  $\mathcal{C}_{ms_{\mathcal{P}(C)}^X}(P) = \{a\}$  et  $a \in X_{\emptyset}^w$  on a  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(P) = \emptyset$ , et par conséquent  $P$  est complètement  $ms$ -colorié par  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X$ .

S'agissant du  $s$ -coloriage, on a  $s_C^X(F_1) = \mathbf{vert}$  puisque  $a \in X_{\mathbf{vert}}^v$ ,  $d \notin X_{\mathbf{vert}}^v$ ,  $DF_{ms}(F_1) = \{\{b\}, \{c\}\}$ , et  $\mathbf{vert} \in ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F)$  pour tout  $F \in DF_{ms}(F_1)$ . On a  $s_C^X(F_2) = \mathbf{rouge}$  puisque  $d \in X_{\mathbf{rouge}}^v$ ,  $\mathbf{rouge} \notin ms_{\mathcal{P}(C)}^X(b)$ ,  $\mathbf{rouge} \notin ms_{\mathcal{P}(C)}^X(c)$ ,  $DF_{ms}(F_2) = \{\{f\}, F_3, F_4\}$  et  $\mathbf{rouge} \in ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F)$  pour tout  $F \in DF_{ms}(F_2)$ . On a  $s_C^X(F_3) = \mathbf{rouge}$  puisque  $DF_{ms}(F_3) = \{\{g\}, \{h\}, \{i\}, \{j\}\}$ ,  $\mathbf{rouge} \in ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F)$  pour tout  $F \in DF_{ms}(F_3)$ , et il n'y a pas  $X, Y$  pas tous les deux vides tels que  $X + F_3 + Y$  est un facteur de  $P$ . Enfin,  $s_C^X(F_4) = \mathbf{vert}$  puisque  $e \in X_{\mathbf{vert}}^v$  et il n'y a pas  $X, Y$  pas tous les deux vides tels que  $X + e + Y$  est un facteur de  $P$ .

**Proposition 4.3.15.** Soient  $P \in SP^\diamond$ ,  $C$  un ensemble non vide de couleurs et  $\mathbf{c}: F_s(P) \rightarrow C$  un  $s$ -coloriage compatible de  $P$ . Il existe des sous-ensembles  $s_C^X$  de  $P$  qui encodent  $\mathbf{c}$ .

*Démonstration.* À partir de  $\mathbf{c}$  définissons un ms-coloriage  $\mathbf{c}' : F_{ms}(P) \rightarrow \mathcal{P}(C)$  comme suit : pour tout  $F \in F_{ms}(P)$ ,

$$\mathbf{c}'(F) = \{c : F \in DF_{ms}(F') \text{ pour } F' \in F_s(P) \text{ tel que } \mathbf{c}(F') = c\}$$

Selon la Proposition 4.3.10,  $\mathbf{c}'$  est encodé par  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X$ . Pour définir un encodage  $s_C^X = ((X_c^v)_{c \in C}, ms_{\mathcal{P}(C)}^X)$  de  $\mathbf{c}$  il suffit maintenant de définir  $X_c^v$  comme suit, pour chaque  $c \in C$  :  $x \in X_c^v$  si et seulement si il existe  $F \in F_s(P)$  tel que  $\mathbf{c}(F) = c$  et  $x$  est comparable à tous les éléments de  $F \setminus \{x\}$ . On vérifie que  $s_C^X(F) = \mathbf{c}(F)$  pour tout  $F \in F_s(P)$ . Supposons tout d'abord que  $\mathbf{c}(F) = c$  pour  $F \in F_s(P)$  et  $c \in C$ , et soit  $F = \sum_{j \in J} F_j$  la sa factorisation séquentielle irréductible. Soit  $j \in J$  tel que  $F_j$  est un singleton. Il est par conséquent comparable à tous les éléments de  $F \setminus \{x\}$ . Par définition  $x \in X_c^v$ . Par conséquent, le point 1 de la Définition 4.3.13 est vérifié. Des arguments similaires peuvent être appliqués quand  $F_j$  n'est pas un singleton : le point 2 de la Définition 4.3.13 est aussi vérifié. Puisqu'il n'y a pas de  $F' \in F_s(P)$  tel que  $\mathbf{c}(F') = c$  et  $F + F' \in F_s(P)$  ou  $F' + F \in F_s(P)$ , et qu'il n'y a pas  $X, Y$  pas tous les deux vides tels que  $\mathbf{c}(X + F + Y) = c$ , alors le point 3 de la Définition 4.3.13 est vérifié, et par conséquent  $s_C^X(F) = c$ . Des arguments similaires sont utilisés pour montrer si  $s_C^X(F) = c$  alors  $\mathbf{c}(F) = c$ .  $\square$

Nous avons montré que n'importe quel s-coloriage compatible  $\mathbf{c}$  de  $P$  avec  $C$  peut être encodé par des sous-ensembles  $s_C^X$  de  $P$  comme ci-dessus. Cet encodage est définissable en MSO. En effet, il existe les formules MSO suivantes :

- $\mathbf{s}_C^X(F) = c$  qui est satisfaite si et seulement si  $s_C^X$  s-colorie  $F$  en  $c \in C$ , en supposant que toutes les variables de la formule soient interprétées dans  $P$  et que  $F$  soit un facteur séquentiel de  $P$ . Elle est obtenue par une traduction directe en MSO de la Définition 4.3.13 ;
- **s-Coloriage**( $P, s_C^X$ ) qui est satisfaite si et seulement si **ms-Coloriage**( $P, ms_{\mathcal{P}(C)}^X$ ) est vraie et pour chaque facteur parallèle non vide  $F$  de  $P$ , il existe  $c \in \mathcal{P}(C)$  tel que  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F') = c$ , pour tout  $F' \in DF_{ms}(F)$ .

En effet,  $\mathbf{s}_C^X(F) = c$  correspond à :

$$\begin{aligned} (\forall^F x (\forall^F y \ x \neq y \implies \text{Comp}(x, y)) \implies x \in X_c^v) \\ \wedge \forall F_{j,i} (\text{DFacteur}_{ms}(F_{j,i}, F) \implies \bigvee_{\substack{c' \in \mathcal{P}(C) \\ c \in C'}} \text{ms}_{\mathcal{P}(C)}^X(F_{j,i}) = c') \\ \wedge \forall F' \forall P' (F' \neq \emptyset \wedge \exists I \ I = F' + F \vee I = F + F' \wedge \text{Facteur}_s(I, P')) \\ \implies \\ (|F'| = 1 \implies F' \cap X_c^v = \emptyset) \wedge (\text{Facteur}_p(F', P') \implies \\ \exists F'_{j,i} \text{DFacteur}_{ms}(F'_{j,i}, F') \wedge \neg(\bigvee_{\substack{c' \in \mathcal{P}(C) \\ c \in C'}} \text{ms}_{\mathcal{P}(C)}^X(F'_{j,i}) = c')) \end{aligned}$$

Étant donné un poset  $P$  et un facteur séquentiel  $F$  de  $P$ , la formule ci-dessus vérifie si  $s_C^X$  s-colorie  $F$  en  $c \in C$ . La première (resp. deuxième) ligne correspond à la première (resp. deuxième) condition de la Définition 4.3.13. Les dernières lignes vérifient la troisième condition de la Définition 4.3.13 en s'assurant que, pour tout facteur  $F'$  non vide de  $P$  tel que  $F' + F$  ou  $F + F'$  est un facteur séquentiel de  $P$ , si  $F'$  est le singleton alors il n'est pas dans  $X_c^v$  et si c'est un

facteur parallèle alors il contient au moins un facteur séquentiel direct séquentiellement maximal  $F'_{j,i}$  tel que  $c' \notin ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F'_{j,i})$ . La formule  $s_C^X(F) = c$  a comme variables libres  $F$  et toutes les variables du second ordre encodant  $s_C^X$ . Enfin :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}\text{-Coloriage}(P, s_C^X) &\equiv \mathbf{ms}\text{-Coloriage}(P, ms_{\mathcal{P}(C)}^X) \\ &\wedge \forall F(\mathbf{Facteur}_p(F, P) \implies \forall_{c \in \mathcal{P}(C)}(\forall F' \\ &\quad (\mathbf{DFacteur}_{ms}(F', F) \implies \mathbf{ms}_{\mathcal{P}(C)}^X(F') = c))) \end{aligned}$$

où  $s_C^X$  est constitué des variables libres du second ordre  $X_c^v$ , pour tout  $c \in C$ , et de  $ms_{\mathcal{P}(C)}^X$  lui-même constitué de  $X_{c'}^w, X_{c'}^s$  et  $X_{c'}^p$  pour tout  $c' \in \mathcal{P}(C)$ .

### 4.3.3 s-coloriages compatibles et D-graphes

Le s-coloriage est un argument majeur dans la transformation d'un D-graphe d'une expression rationnelle en une formule P-MSO (Section 4.4). Nous utilisons le s-coloriage pour associer un arc spécial à un facteur  $F \in F_s(P)$  comme suit.

**Proposition 4.3.16.** *Soient  $D_e$  le D-graphe d'une expression rationnelle  $e$ ,  $C = \mathbb{B} \times E_S(D_e)$ ,  $n$  un nœud de  $D_e$ . Supposons qu'il y ait un chemin  $T_P$  de  $n$  étiqueté par  $P \in SP^\diamond(A)$ . Il existe un s-coloriage compatible de  $P$  avec  $C$  et son encodage  $s_C^X$  en MSO tel que  $\pi_2(s_C^X(F)) = f \in E_S(D_e)$  si et seulement si  $F$  est marqué par  $f$  dans  $T_P$ , pour n'importe quel  $F \in F_s(P)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{c} : F_s(P) \rightarrow C$  un s-coloriage de  $P$  tel que, pour tout  $F \in F_s(P)$ ,  $\mathbf{c}(F) = (b, f)$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $F$  est marqué par  $f$  dans  $T_P$  ;
- pour tout  $F' \in F_s(P)$ , si  $FF' \in F_s(P)$  et  $\mathbf{c}(F') = (b', f)$  alors  $b \neq b'$ .

Naturellement  $\mathbf{c}$  vérifie la spécification de la proposition (voir aussi Remarque 4.2.19), et l'existence de  $s_C^X$  vient de la Proposition 4.3.15.  $\square$

La Proposition 4.3.16 atteste de l'existence d'un s-coloriage  $\mathbf{c}$  de  $P \in L(D_e)$  identifiant les facteurs de  $P$  marqués par un arc spécial  $f$  en les s-coloriant par  $(b, f)$  où  $b$  est un booléen. L'encodage des s-coloriages ne permet pas  $s_C^X(F) = s_C^X(F')$  quand  $F, F', FF' \in F_s(P)$ . Les booléens nous permettent d'éviter toute confusion lorsque  $P$  a un facteur séquentiel  $FF'$  avec  $F$  et  $F'$  marqués par le même arc spécial  $f$ . Le cas échéant  $F$  et  $F'$  seront s-coloriés par respectivement  $(b, f)$  et  $(b', f)$  avec  $b \neq b'$ . Ce cas particulier est présent dans l'Exemple 4.2.21 et explicité en termes de s-coloriage et ms-coloriage dans l'exemple suivant.

**Exemple 4.3.17.** *Continuons l'Exemple 4.2.21. Dénotons par  $b_l, c_l, d_l$  (resp.  $b_r, c_r, d_r$ ) les éléments les plus à gauche (resp. droite, cf. Figure 4.9) de  $P$  étiquetés par  $b, c$  et  $d$ . Soit  $C = \mathbb{B} \times E_S(D_e)$ . En conséquence de la Proposition 4.3.16 il existe un s-coloriage compatible et son encodage  $s_C^X = ((X_c^v)_{c \in C}, ms_{\mathcal{P}(C)}^X)$  tels que  $s_C^X(F_1) = (b_1, n_4 \rightarrow n_7)$ ,  $s_C^X(F_2) = (b_2, n_4 \rightarrow n_7)$ ,  $s_C^X(F_3) = (b_3, n_4 \rightarrow n_3)$ ,  $s_C^X(F_4) = (b_4, n_4 \rightarrow n_2)$  pour  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{B}$ ,  $b_1 \neq b$ , et  $s_C^X(F)$  est indéfini quand  $F \neq F_1, F_2, F_3, F_4$ . Notons que  $b_1$  doit être différent de  $b_2$  puisque  $F_1 F_2 \in F_s(P)$ , et  $F_1$  et  $F_2$  sont marqués par le même arc spécial ( $\pi_2(s_C^X(F_1)) = \pi_2(s_C^X(F_2)) = n_4 \rightarrow n_7$ ). Remarquons que  $c_l$  et  $d_l$  sont tous les deux des facteurs séquentiels séquentiellement maximaux de  $F_1$  et  $F_3$ . Similairement,  $c_r$  et  $d_r$  sont*

tous les deux des facteurs séquentiels séquentiellement maximaux de  $F_2$  et  $F_3$ .  
En utilisant les techniques vues tout au long de cette section, on a :

- $X_{(b_1, n_4 \rightarrow n_7)}^v = \{b_l\}$  ;
- $X_{(b_2, n_4 \rightarrow n_7)}^v = \{b_r\}$  ;
- $X_{(b_3, n_4 \rightarrow n_3)}^v = \{b_l, b_r\}$  ;
- $X_{(b_4, n_4 \rightarrow n_2)}^v = F_4$  ;
- $X_c^v = \emptyset$  pour tout  $c \in C \setminus \{(b_1, n_4 \rightarrow n_7), (b_2, n_4 \rightarrow n_7), (b_3, n_4 \rightarrow n_3), (b_4, n_4 \rightarrow n_2)\}$  ;
- $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(c_l) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(d_l) = \{(b_3, n_4 \rightarrow n_3), (b_1, n_4 \rightarrow n_7)\}$  ;
- $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(c_r) = ms_{\mathcal{P}(C)}^X(d_r) = \{(b_3, n_4 \rightarrow n_3), (b_2, n_4 \rightarrow n_7)\}$  ;
- $ms_{\mathcal{P}(C)}^X(F) = \emptyset$  quand  $F \in F_{ms}(P) \setminus \{\{c_l\}, \{d_l\}, \{c_r\}, \{d_r\}\}$ .

## 4.4 Des D-graphes à P-MSO

Soient  $A$  un alphabet,  $e$  une expression rationnelle de  $R_E(SP^\circ(A))$ ,  $D_e$  le D-graphe de son  $>1$ -expression et  $C = \mathbb{B} \times E_S(D_e)$ . Nous calculons dans cette section un énoncé  $\psi_{D_e}$  de P-MSO tel que  $P$  satisfait  $\psi_{D_e}$  si et seulement si  $P \in L(D_e)$ , pour tout  $P \in SP^\circ(A)$ . Naturellement les formules qui vont suivre sont interprétées dans  $SP^\circ(A)$ . Le calcul de  $\psi_{D_e}$  se fait par induction sur la structure de  $D_e$ , sans ses arcs spéciaux, comme suit. Nous associons à chaque nœud  $n$  de  $D_e$  une formule P-MSO  $\psi_n(X)$  en fonction de l'étiquette de  $n$  et de ses potentiels enfants. Dans la suite  $\psi_{n_i}(X)$  est la formule P-MSO associée au  $i^{\text{ème}}$  enfant de  $n$  obtenue par induction.

Si  $n$  est étiqueté par  $a \in A$  alors

$$\psi_n(X) \equiv |X| = 1 \wedge \forall^X x a(x)$$

Si  $n$  est étiqueté par un produit séquentiel alors  $\psi_n(X)$  est calculée en utilisant exactement les techniques utilisées dans la Sous-section 3.4.2. La seule différence réside dans le fait qu'ici, le cas où  $|X| = 0$  est définitivement écarté en raison de la définition des produits séquentiels des  $>1$ -expressions et parallèlement de la définition des chemins d'un D-graphe à partir d'un nœud étiqueté par un produit séquentiel. Les macros définies dans le Chapitre 3 que nous allons utiliser dans la suite n'ont pas besoin d'être redéfinies. En effet, leurs sémantiques ne changent pas lorsqu'elles sont interprétées dans  $SP^\circ(A)$ . En particulier, les macros  $\Omega(X)$  et  $\text{Fini}(X)$  que nous utilisons ici sont celles définies dans la Sous-section 3.4.2 dans le cas des ordres linéaires dénombrables et dispersés.

Si  $n$  est étiqueté par  $\cdot >^1$  alors par définition  $n$  a deux enfants  $n_1$  et  $n_2$  dans  $D_e$ . Supposons que  $n$  soit bordé par  $n \rightarrow n_1, n \rightarrow n_2$ . Alors

$$\psi_n(X) \equiv \exists X_1 \exists X_2 X_1, X_2 \neq \emptyset \wedge X = X_1 + X_2 \wedge \psi_{n_1}(X_1) \wedge \psi_{n_2}(X_2)$$

Si  $n$  est étiqueté par  $* >^1, \omega >^1, \natural >^1, -\omega >^1$  ou  $-\natural >^1$  alors par définition  $n$  a un seul enfant  $n_1$  dans  $D_e$ . Alors

$$\begin{aligned} \psi(X) &\equiv \exists X_1 \exists C_1 \exists X_2 \exists C_2 X_1, X_2 \neq \emptyset \\ &\wedge \text{Partition}(X, X_1, X_2) \wedge \text{Chaine}(C_1, X_1) \wedge \text{Chaine}(C_2, X_2) \\ &\wedge \exists Z C_1 \cup C_2 = Z \wedge |Z| \geq 2 \wedge \phi(Z) \\ &\wedge \forall Y (\text{FacteurMax}(Y, X_1) \vee \text{FacteurMax}(Y, X_2)) \implies \psi_{n_1}(Y) \end{aligned}$$

où la sous-formule  $|Z| \geq 2$  vérifie que le total des facteurs maximaux de  $X_1$  et de  $X_2$  est supérieur ou égal à deux puisque tout poset étiquette d'un chemin de  $n$  dans  $D_e$  est la concaténation d'au moins deux posets de  $L(D_e, n_1)$  (voir Définition 4.2.16), et où  $\phi(Z)$  est :

$$\begin{aligned} & \text{Fini}(Z) \text{ dans le cas } *^{>1} \\ & \text{Ordinal}(Z) \text{ dans le cas } \natural^{>1} \\ & \text{-Ordinal}(Z) \text{ dans le cas } \neg\natural^{>1} \\ & \text{Omega}(Z) \text{ dans le cas } \omega^{>1} \\ & \text{-Omega}(Z) \text{ dans le cas } \neg\omega^{>1} \end{aligned}$$

Enfin, si  $n$  est étiqueté par  $\diamond^{>1}$  alors par définition  $n$  a deux enfants  $n_1$  et  $n_2$  dans  $D_e$ . Supposons que  $n$  soit bordé par  $n \rightarrow n_1, n \rightarrow n_2$ . La formule  $\psi(X)$  est construite similairement au cas où l'expression rationnelle  $e$  est de la forme  $e_1 \diamond e_2$  de la Sous-section 3.4.2 avec quelques ajustements. Il y a quatre sous-cas selon l'appartenance ou non de  $\epsilon$  à  $L(D_e, n_i), i \in [2]$ . Si  $\epsilon \notin L(D_e, n_1) \cup L(D_e, n_2)$  alors :

$$\begin{aligned} \psi(X) \equiv & \exists X_1 \exists J \exists X_2 \exists K \exists I \ J \cup K = I \wedge X_1, X_2 \neq \emptyset \wedge |I| \geq 2 \\ & \wedge \text{Partition}(X, X_1, X_2) \wedge \text{Chaine}(J, X_1) \wedge \text{Chaine}(K, X_2) \wedge \text{Complet}(I) \\ & \wedge \forall Y \text{FacteurMax}(Y, X_1) \implies \psi_{n_1}(Y) \\ & \wedge \forall Y \text{FacteurMax}(Y, X_2) \implies \psi_{n_2}(Y) \\ & \wedge (\exists^I m_1 \min(m_1, I)) \implies m_1 \in J \\ & \wedge (\exists^I m_2 \max(m_2, I)) \implies m_2 \in J \\ & \wedge \forall^J j (\neg \min(j, J) \vee \neg \max(j, J)) \implies (\text{Succ}(j, K) \wedge \text{Pred}(j, K)) \\ & \wedge (\exists^J m'_1 \min(m'_1, J)) \implies \text{Succ}(m'_1, K) \\ & \wedge (\exists^J m'_2 \max(m'_2, J)) \implies \text{Pred}(m'_2, K) \\ & \wedge \forall^K k_1 \forall^K k_2 (k_1 < k_2 \implies \exists^J j' k_1 < j' \wedge j' < k_2) \end{aligned}$$

Comme dans le cas des autres produits séquentiels, l'ajustement ici consiste à vérifier que  $X_1$  et  $X_2$  qui partitionnent  $X$  ne sont pas vides et que l'union des chaînes  $J$  et  $K$  contient au moins deux éléments. C'est la même modification à apporter dans les cas où  $\epsilon \in L(D_e, n_1)$  et  $\epsilon \notin L(D_e, n_2)$ ,  $\epsilon \notin L(D_e, n_1)$  et  $\epsilon \in L(D_e, n_2)$ , ou  $\epsilon \notin L(D_e, n_1) \cap L(D_e, n_2)$ .

Dans le cas où  $n$  est étiqueté par une formule de Presburger  $\rho(x_1, \dots, x_k)$  par définition  $n$  a  $k$  enfants,  $k \in \mathbb{N}$ . Soient  $n \rightarrow n_1, \dots, n \rightarrow n_k$  les arcs sortants de  $n$  dans l'ordre. Posons  $C = \mathbb{B} \times E_S(D_e)$ . Alors :

$$\psi_n(X) \equiv \mathcal{Q}(X, \chi_1, \dots, \chi_k, \rho(x_1, \dots, x_k))$$

où

$$\chi_i \equiv \begin{cases} \forall Y \text{Dom}(Y) \implies \psi_{n_i}(Y) & \text{si } n \rightarrow n_i \in E_N(D_e); \\ \forall Y \text{Dom}(Y) \implies \forall_{b \in \mathbb{B}} \mathbf{s}_C^X(Y) = (b, n \rightarrow n_i) & \text{si } n \rightarrow n_i \in E_S(D_e). \end{cases}$$

En conclusion, l'énoncé  $\psi_{D_e}$  formalise que  $P \in L(D_e)$  si et seulement si il existe un chemin  $T_P$  dans  $D_e$  de  $r(D_e)$  étiqueté par  $P$ . Dans  $\psi_{D_e}$ , un s-coloriage

compatible  $s_C^X$  de  $P$  est utilisé de manière à ce que  $\pi_2(s_C^X(F)) = f$  si et seulement si  $F$  est marqué par  $f$  dans  $T_P$ , pour chaque facteur séquentiel  $F$  de  $P$ . L'énoncé garantit que lorsque  $F$  est marqué par  $f = n \rightarrow m$  alors  $F$  satisfait  $\psi_m(F)$ .

$$\begin{aligned} \psi_{D_e} \equiv & \exists P \exists s_C^X \text{ Dom}(P) \wedge \mathbf{s}\text{-Coloriage}(P, s_C^X) \wedge \psi_{r(D_e)}(P) \wedge \\ & \left( \bigwedge_{n \rightarrow m \in E_S(D_e)} \forall F (\text{Facteur}_s(F, P) \wedge \bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(F) = (b, n \rightarrow m)) \implies \psi_m(F) \right) \\ & \bigvee_{e \in L(e)} |P| = 0 \end{aligned}$$

En conséquence de la Proposition 4.2.22 et de la construction ci-dessus d'une formule P-MSO à partir du D-graphe d'une expression rationnelle, on a :

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $A$  un alphabet. Pour toute expression rationnelle  $e \in R_E(SP^\circ(A))$  il existe une formule P-MSO  $\psi_e$  telle que  $L(\psi_e) = L(e)$ . De plus la construction de  $\psi_e$  est effective.*

Cette proposition fournit une preuve de l'implication de gauche vers la droite du Théorème 4.0.1

**Exemple 4.4.2.** *Soit  $e = a \circ_\xi (a(\xi \parallel \xi))^{*\xi}$  l'expression rationnelle  $e_1$  de l'Exemple 4.2.20. Dans cet exemple on détaille la construction de la formule P-MSO  $\psi_{D_e}$  à partir de  $D_e$ , en utilisant les techniques évoquées dans la Section 4.4. Le D-graphe  $D_e$  et le poset  $P = a(a \parallel a(a \parallel a \parallel a) \parallel a(a \parallel a))$  de  $L(D_e)$  sont représentés à gauche de la Figure 4.14. Soit  $n_1, \dots, n_6$  le parcours préfixe de  $D_e$  sans ses arcs spéciaux. On a  $E_S(D_e) = \{n_4 \rightarrow n_2\}$ ,  $C = \mathbb{B} \times E_S(D_e)$  et*

$$\begin{aligned} - \psi_{n_1}(X) & \equiv \mathcal{Q}(X, \overline{\psi_{n_2}(Y)}, \overline{\psi_{n_6}(Y)}, x_1 + x_2 = 1); \\ - \psi_{n_2}(X) & \equiv \exists X_1, X_2, X = X_1 + X_2 \wedge \psi_{n_3}(X_1) \wedge \psi_{n_4}(X_2); \\ - \psi_{n_3}(X) & \equiv \psi_{n_5}(X) \equiv \psi_{n_6}(X) \equiv |X| = 1 \wedge \forall^X x a(x); \\ - \psi_{n_4}(X) & \equiv \mathcal{Q}(X, \overline{\bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(Y) = (b, n_4 \rightarrow n_2)}, \overline{\psi_{n_5}(Y)}, x_1 + x_2 = 2) \end{aligned}$$

où  $\overline{\psi(Y)} \equiv \forall Y \text{ Dom}(Y) \implies \psi(Y)$ . Alors

$$\begin{aligned} \psi_{D_e} \equiv & \exists P \exists s_C^X \text{ Dom}(P) \wedge \mathbf{s}\text{-Coloriage}(P, s_C^X) \wedge \psi_{n_1}(P) \\ & \wedge (\forall F (\text{Facteur}_s(F, P) \wedge \bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(F) = (b, n_4 \rightarrow n_2)) \implies \psi_{n_2}(F)) \end{aligned}$$

Sur la droite de la Figure 4.14 est représenté un chemin  $T_P$  dans  $D_e$  de  $n_1$  étiqueté par  $P$ . La racine de  $T_P$  est étiquetée par  $(n_1, (1, 0))$  avec  $(1, 0) \in L(x_1 + x_2 = 1)$ . Alors  $T_P$  a un unique sous-chemin direct  $T'_P$  de  $n_2$  étiqueté aussi par  $P$ . Par conséquent  $P \in L(n_2)$ . Remarquons que  $T'_P = (m, T_{P_1}, T_{P_2})$  où  $m$  est étiqueté par  $(n_2, 2)$ , et  $T_{P_1}$  et  $T_{P_2}$  sont des chemins dans  $D_e$  de respectivement  $n_3$  et  $n_4$  étiquetés respectivement par  $P_1 = a$  et  $P_2 = a \parallel a(a \parallel a \parallel a) \parallel a(a \parallel a)$ . Donc,  $P = P_1 P_2$ . Soit  $F_i, i \in [4]$ , l'étiquette du sous-chemin  $T_{F_i}, i \in [4]$ , de  $T_P$  commencé par l'arc spécial  $n_4 \rightarrow n_2$ , comme décrit dans Figure 4.14. Un facteur de  $P$  est marqué par  $n_4 \rightarrow n_2$  dans  $T_P$  si et seulement si c'est un des  $F_i$ . Par conséquent, il existe  $x \in F_i \setminus F_j$  qui est incomparable à tous les autres éléments de  $F_j$  quand  $F_j \subsetneq F_i$ , comme indiqué dans le point (C<sub>2</sub>) de la Remarque 4.2.19. En conséquence de la Proposition 4.3.16, ce marquage peut être exprimé en MSO avec un encodage  $s_C^X$  d'un s-coloriage compatible. Un facteur de  $P$  marqué dans  $T_P$  satisfait  $\overline{\bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(Y) = (b, n_4 \rightarrow n_2)}$ , pour  $b \in \mathbb{B}$ , si et seulement si c'est un des  $F_i$ . Les éléments maximums de  $P_2$  satisfont  $\psi_{n_5}$ ,  $P_1$  satisfait  $\psi_{n_3}$  et  $P_2$  satisfait  $\psi_{n_4}$ . Ainsi,  $P$  satisfait  $\psi_{n_2}$  aussi bien que  $\psi_{n_1}$  et c'est un modèle pour  $\psi_{D_e}$ .

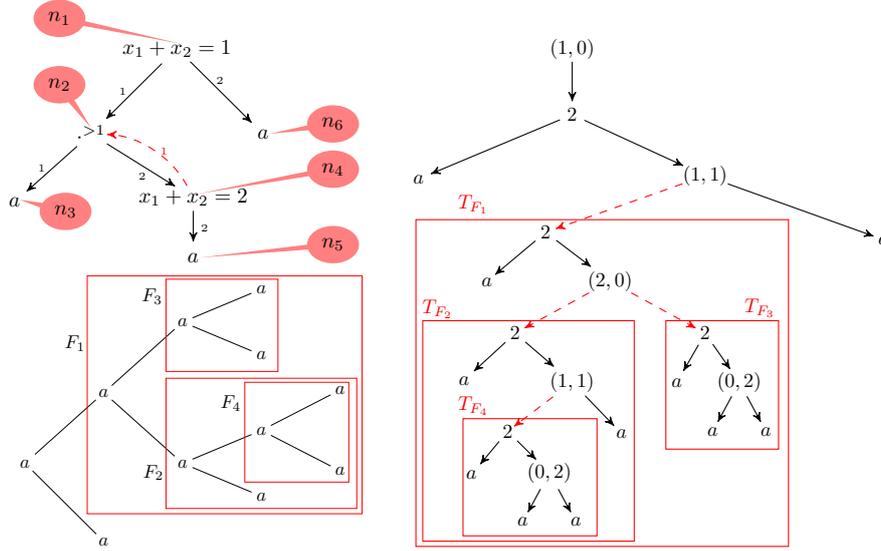


FIGURE 4.14 – Le D-graphe  $D_e$  de la  $>1$ -expression de  $e = a \circ_{\xi} (a(\xi \parallel \xi))^{\ast\xi}$ , le poset  $P = a(a \parallel a(a \parallel a(a \parallel a) \parallel a(a \parallel a)))$  de  $L(e)$  et un chemin dans  $D_e$  de  $n_1$  étiqueté par  $P$

**Exemple 4.4.3.** Soit le D-graphe  $D_e$  de l'expression rationnelle  $e = (a \parallel b) \circ_{\xi} ((\xi \parallel \xi)^+)^{\ast\xi}$  représenté dans la Figure 4.15. Sa construction étape par étape est détaillée dans la Figure 4.7. Soit  $n_1, \dots, n_7$  le parcours préfixe de  $D_e$  sans ses arcs spéciaux. On a  $E_S(D_e) = \{n_3 \rightarrow n_2\}$  et  $C = \mathbb{B} \times E_S(D_e)$ . Construisons  $\psi_{D_e}$ . Commençons par les formules de chaque nœud de  $D_e$  :

$$\begin{aligned} \psi_{n_1}(X) &\equiv \mathcal{Q}(X, \overline{\psi_{n_2}(Y)}, \overline{\psi_{n_6}(Y)}, \overline{\psi_{n_7}(Y)}, x_1 + x_2 \geq 1 \wedge x_2 = x_3) \\ \psi_{n_2}(X) &\equiv \exists X_1, X_2, C_1, C_2 \ X_1, X_2 \neq \emptyset \\ &\quad \wedge \text{Partition}(X, X_1, X_2) \wedge \text{Chaine}(C_1, X_1) \wedge \text{Chaine}(C_2, X_2) \\ &\quad \wedge \exists Z \ C_1 \cup C_2 = Z \wedge |Z| \geq 2 \wedge \text{Fin}(Z) \\ &\quad \wedge \forall Y (\text{FacteurMax}(Y, X_1) \vee \text{FacteurMax}(Y, X_2)) \implies \psi_{n_3}(Y) \\ \psi_{n_3}(X) &\equiv \mathcal{Q}(X, \overline{\bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(Y) = (b, n_3 \rightarrow n_2)}, \overline{\psi_{n_4}(Y)}, \overline{\psi_{n_5}(Y)}, \\ &\quad x_1 + x_2 \geq 2 \wedge x_2 = x_3) \\ \psi_{n_4}(X) &\equiv \psi_{n_6}(X) \equiv |X| = 1 \wedge \forall^X x \ a(x) \\ \psi_{n_5}(X) &\equiv \psi_{n_7}(X) \equiv |X| = 1 \wedge \forall^X x \ b(x) \end{aligned}$$

où  $\overline{\psi(Y)} \equiv \forall Y \ \text{Dom}(Y) \implies \psi(Y)$ . Alors

$$\begin{aligned} \psi_{D_e} &\equiv \exists P \exists s_C^X \ \text{Dom}(P) \wedge s\text{-Coloriage}(P, s_C^X) \wedge \psi_{n_1}(P) \\ &\quad \wedge (\forall F (\text{Facteur}_s(F, P) \wedge \bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(F) = (b, n_3 \rightarrow n_2)) \rightarrow \psi_{n_2}(F)) \end{aligned}$$

Soient  $F'_1 = F'_2 = (\xi \parallel \xi) \cdot (\xi \parallel \xi)$ ,  $F'_3 = (F'_2 \parallel \xi) \cdot (\xi \parallel \xi)$ . Soit  $F_i = \{(a \parallel b)\} \circ_{\xi} F'_i$  pour tout  $i \in [3]$ . Soient  $P_1 = (F_1 \parallel F_3) \cdot ((a \parallel b) \parallel (a \parallel b))$ ,  $P_2 = a$  et

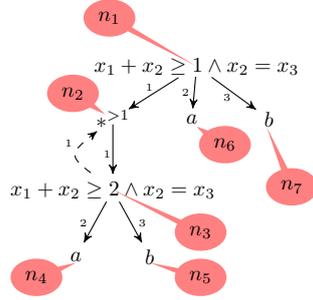


FIGURE 4.15 – Le D-graphe de la  $>1$ -expression  $(a \parallel b) \circ_{\xi} ((\xi \parallel \xi)^{*>1} + (\xi \parallel \xi))^{*\xi}$

$P_3 = b$ . Notons que  $P = P_1 \parallel P_2 \parallel P_3 \in L(e)$ . Pour  $D_e, F_1, F_2, F_3, P_1 \in L(n_2)$ ,  $F_1 \parallel F_3 \in L(n_3)$ ,  $P_2 \in L(n_6)$  et  $P_3 \in L(n_7)$ . Par conséquent  $P \in L(n_1)$ . Il y a un chemin  $\gamma$  de  $n_1$  étiqueté par  $P$  tel que  $F \in \{F_1, F_2, F_3\}$  si et seulement si  $F$  est marqué par  $n_3 \rightarrow n_2$  dans  $\gamma$ . Ainsi, chaque  $F_i, i \in [3]$ , doit être s-colorié par  $(b_i, n_3 \rightarrow n_2)$  pour  $b_i \in \mathbb{B}$ . Sous ce s-coloriage  $F_1, F_2$  et  $F_3$  satisfont  $\bigvee_{b \in \mathbb{B}} s_C^X(Y) = (b, n_3 \rightarrow n_2)$  aussi bien que  $\psi_{n_2}, F_1 \parallel F_3, P_1, P_2$  et  $P_3$  satisfont respectivement  $\psi_{n_3}, \psi_{n_2}, \psi_{n_6}$  et  $\psi_{n_7}$ . Donc  $P$  satisfait  $\psi_{n_1}$  et c'est un modèle pour  $\psi_{D_e}$ .

## 4.5 De P-MSO aux automates

La construction d'un automate de langage  $L$  à partir d'une formule de logique de même langage repose sur les mêmes principes pour toutes les classes de langages rationnels évoquées précédemment (voir Chapitre 2). Nous détaillons dans cette section la construction d'un automate branchant sur  $SP^{\diamond}(A)$  de langage  $L$  à partir d'une formule P-MSO interprétée sur  $SP^{\diamond}(A)$  de même langage. La construction d'un automate sur les autres classes de langages rationnels s'en déduit facilement en restreignant l'ensemble des transitions aux transitions de l'automate en question. La construction effective d'un automate sur  $SP^{\diamond}(A)$  de langage  $L$  à partir d'une formule P-MSO de même langage induit une procédure de décision pour la théorie P-MSO sur  $SP^{\diamond}(A)$ . Il en est de même pour la théorie P-MSO sur  $SP(A)$  et celle de MSO sur  $A^{\diamond}, A^{\#}$  et  $A^*$  pour les mêmes raisons.

Soit  $A$  un alphabet. La construction d'un automate branchant sur  $SP^{\diamond}(A)$  à partir d'une formule P-MSO interprétée sur  $SP^{\diamond}(A)$  de même langage utilise les mêmes techniques que la construction d'un automate branchant sur  $SP(A)$  à partir d'une formule P-MSO interprétée sur  $SP(A)$  de même langage se trouvant dans [9]. On exclut  $\epsilon$  de la construction. Si  $\epsilon$  est un modèle pour la formule, il peut être réintroduit facilement dans le langage de l'automate construit. Rappelons que le Théorème 2.3.32 certifie que la classe des langages rationnels de  $SP^{\diamond}(A)$  est fermée par les opérations booléennes.

Soient  $A$  un alphabet et  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  une formule P-MSO ayant l'ensemble  $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  de variables libres du premier ordre et l'ensemble  $V_2 = \{X_1, \dots, X_m\}$  de variables libres du second ordre toutes interprétées

comme respectivement des éléments et des ensembles d'éléments de posets de  $SP^\circ(A)$ . Rappelons qu'un poset étiqueté par  $A$  peut être assimilé à un  $(\emptyset, \emptyset)$ -poset étiqueté par  $A$ . Rappelons également que l'interprétation des variables libres  $x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m$  dans un poset  $P$  en plus du poset lui-même induisent un unique  $(V_1, V_2)$ -poset  $P(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  et réciproquement. Cela nous permet d'utiliser indifféremment une représentation ou une autre pour alléger la notation. Enfin, rappelons que pour plus de commodité, on ne fait pas de différence entre une variable et son interprétation quand cela est compris du contexte.

Nous construisons un automate branchant  $\mathcal{A}_\psi$  sur l'alphabet  $A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  tel que  $P, x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m \models \psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  si et seulement si  $P(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m) \in L(\mathcal{A}_\psi)$  pour tout poset  $P$ . Si  $\psi$  est un énoncé, alors  $P \models \psi$  si et seulement si  $P \in L(\mathcal{A}_\psi)$ . La construction de  $\mathcal{A}_\psi$  est par induction sur la structure de  $\psi$ . C'est une généralisation de la construction d'un automate de Kleene à partir d'une formule MSO (voir par exemple [82] pour une présentation claire de ce cas de figure).

Pour commencer, il faut pouvoir vérifier que les posets donnés en entrée soient des posets marqués (Définition 3.2.6). Il est simple de construire un automate  $\mathcal{A}_{(V_1, V_2)\text{-poset}}$  qui teste si un poset  $P$  étiqueté par  $A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  est un  $(V_1, V_2)$ -poset pour certains  $V_1, V_2$ . Il suffit de construire, pour chaque  $v \in V_1$ , un automate  $\mathcal{A}_{(V_1, V_2)\text{-poset}}^v$  testant dans  $P$  si  $v$  apparaît exactement une fois dans les deuxièmes composantes des lettres étiquétant les éléments de  $P$ . L'Exemple 2.3.29 illustre un automate branchant testant si une lettre  $a$  apparaît exactement une fois dans un poset. À partir de cet exemple nous pouvons déduire facilement  $\mathcal{A}_{(V_1, V_2)\text{-poset}}^v$  pour tout  $v \in V_1$ . Puisque, comme conséquence du Théorème 2.3.31, la classe des langages rationnels de  $SP^\circ(A)$  est fermée par intersection notamment, on peut effectivement construire un automate dont le langage est la conjonction des langages des  $\mathcal{A}_{(V_1, V_2)\text{-poset}}^v$ , pour tout  $v \in V_1$ . C'est l'automate  $\mathcal{A}_{(V_1, V_2)\text{-poset}}$ . À partir de maintenant on considère que les entrées des automates branchants sont des  $(V_1, V_2)$ -posets.

Quand la formule  $\psi$  est de la forme  $x_i < x_j$  pour des variables du premier ordre  $x_i, x_j \in V_1$ , l'automate  $\mathcal{A}_{x_i < x_j}$  doit vérifier que  $x_i$  et  $x_j$  apparaissent dans la seconde composante des lettres du poset marqué en entrée et que la lettre comportant  $x_i$  apparaît avant celle comportant  $x_j$ . La construction de  $\mathcal{A}_{x_i < x_j}$  est la suivante. Il a  $\mathcal{P}(V_1) \cup \{\perp\}$  comme ensemble d'états avec  $\perp$  un état puits. L'état  $\emptyset$  est le seul état initial et tous les états  $V \in \mathcal{P}(V_1)$  tels que  $x_i, x_j \in V$  sont finaux. La transition séquentielle successeur d'un état  $V \in \mathcal{P}(V_1)$  étiquetée par  $(a, W_1, W_2) \in A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  rentre dans

- $\perp$  si  $x_i \notin V$  et  $x_j \in W_1$  ou  $x_i, x_j \in W_1$  ;
- $V \cup W_1$  sinon.

Chaque état  $s$  qui n'est pas  $\perp$  est la source d'une transition fork  $(s, \{s, s\})$ , et pour chaque paire d'états  $(W_1, W_2) \in \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_1)$ ,  $(\{W_1, W_2\}, W_1 \cup W_2)$  sont des transitions join de  $\mathcal{A}_{x_i < x_j}$ . Enfin, pour chaque  $V \in \mathcal{P}(V_1)$ ,  $(\{V\}, V)$  et  $(V, \{V\})$  sont des transitions séquentielles limites de  $\mathcal{A}_{x_i < x_j}$ . Intuitivement, chaque état  $V \in \mathcal{P}(V_1)$  sauvegarde les deuxièmes composantes de toutes les lettres que rencontre tout chemin de  $\emptyset$  vers  $V$ . La propriété principale de  $\mathcal{A}_{x_i < x_j}$  est qu'il existe un chemin  $\gamma$  dans  $\mathcal{A}_{x_i < x_j}$  de l'état  $\emptyset$  vers un état  $V \in \mathcal{P}(V_1)$  si et seulement si  $\gamma$  est étiqueté par un poset marqué  $P$  où l'union des deuxièmes composantes des lettres de  $P$  est égal à  $V$ . L'utilisation par un chemin  $\gamma$  d'une

transition séquentielle successeur de source  $V \in \mathcal{P}(V_1)$  étiquetée par une lettre de  $A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2)$  où  $x_j$  appartient à la deuxième composante mène  $\gamma$  vers un état final si  $x_i \in V$  et vers l'état puits  $\perp$  dans le cas contraire.

La construction d'un automate branchant pour les formules de la forme  $a(x_i)$  et  $x_j \in X_i$  utilise le même principe. On donne ici la construction d'un automate branchant pour  $\mathcal{A}_{x_j \in X_i}$  qui teste si  $x_j$  est dans  $X_i$ . Cet automate a comme ensemble d'états  $Q = \{\perp, \top\}$  avec  $\perp$  comme unique état initial et  $\top$  comme unique état final. Les seules transitions séquentielles successeurs allant de  $\perp$  à  $\top$  sont étiquetées par  $(a, W_1, W_2)$  tel que  $x_j \in W_1$  et  $X_i \in W_2$ . Toutes les autres transitions séquentielles sont des transitions séquentielles allant de  $s$  à  $s$ ,  $(\{s\}, s)$  ou  $(s, \{s\})$  pour tout état  $s$ . Les transitions fork sont de la forme  $(s, \{s, s\})$  pour tout état  $s$ , et les transitions join sont de la forme  $(\{s_1, s_2\}, s_3)$  où  $s_3 = \top$  si au moins un des états  $s_1$  ou  $s_2$  est  $\top$ ,  $s_3 = \perp$  sinon.

La construction d'un automate branchant pour les formules de la forme  $\psi_1 \vee \psi_2$  ou  $\neg\psi'$  sont une conséquence du Théorème 2.3.31 et la fermeture de la classe des langages rationnels de  $SP^\circ(A)$  par les opérations booléennes, l'union et la complémentation notamment.

Supposons maintenant que  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  soit une formule P-MSO avec  $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  comme ensemble de variables libres du premier ordre et  $V_2 = \{X_1, \dots, X_m\}$  comme ensemble de variables libres du second ordre pour  $n, m \in \mathbb{N}$ . Soit l'automate branchant  $\mathcal{A}_\psi = (Q', A \times \mathcal{P}(V_1) \times \mathcal{P}(V_2), E', I', F')$  construit à partir de  $\psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$  par hypothèse d'induction, et soit  $i \in [n]$ . On utilise  $\mathcal{A}_\psi$  pour construire un automate branchant

$$\mathcal{A}_{\exists x_i \psi} = (Q' \times \mathbb{B}, A \times \mathcal{P}(V_1 \setminus \{x_i\}) \times \mathcal{P}(V_2), E, I' \times \{\text{faux}\}, F' \times \{\text{vrai}\})$$

tel que

$$P, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m \models \exists x_i \psi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$$

si et seulement si  $P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m) \in L(\mathcal{A}_{\exists x_i \psi})$ , pour tout poset  $P$ . L'idée ici est d'enlever l'interprétation donnée à la variable libre  $x_i$  dans les posets satisfaisant l'automate  $\mathcal{A}_\psi$ . L'ensemble des transitions  $E$  est construit comme suit. Pour les transitions séquentielles successeurs :

$$\begin{aligned} E_{succ} = & \{((q, b), (a, W_1, W_2), (q', b)) : (q, (a, W_1, W_2), q') \in E' \text{ et } x_i \notin W_1\} \\ & \cup \{((q, \text{faux}), (a, W_1 \setminus \{x_i\}, W_2), (q', \text{vrai})) : (q, (a, W_1, W_2), q') \in E' \\ & \text{et } x_i \in W_1\} \end{aligned}$$

Pour les transitions fork :

$$E_{fork} = \{((q_1, b), \{(q_2, b), (q_3, b)\}) : (q_1, \{q_2, q_3\}) \in E'\}$$

Pour les transitions join :

$$E_{join} = \{(\{(q_1, b_1), (q_2, b_2)\}, (q_3, b_1 \text{ ou } b_2)) : (\{q_1, q_2\}, q_3) \in E'\}$$

Pour les transitions séquentielles limites à gauche :

$$E_{limG} = \{(\{(q_1, b), \dots, (q_n, b)\}, (q, b)) : (\{q_1, \dots, q_n\}, q) \in E'\}$$

Pour les transitions séquentielles limites à droite :

$$E_{limD} = \{((q, b), \{(q_1, b), \dots, (q_n, b)\}) : (q, \{q_1, \dots, q_n\}) \in E'\}$$

Ici, le booléen apparaissant dans la deuxième composante d'un état de  $\mathcal{A}_{\exists x_i \psi}$  indique l'utilisation ou non d'une transition séquentielle successeur étiquetée par  $(a, W'_1, W_2)$  où  $x_i \notin W'_1$  issue d'une transition séquentielle successeur  $(a, W_1, W_2)$  de  $\mathcal{A}_\psi$  telle que  $W_1 = W'_1 \cup \{x_i\}$ . Un chemin acceptant dans  $\mathcal{A}_{\exists x_i \psi}$  doit impérativement utiliser cette transition pour qu'il puisse être acceptant. En effet, il existe sûrement une sous-formule de  $\psi$  de la forme  $a(x_i)$ . La construction d'un automate branchant pour une formule P-MSO de la forme  $\exists X \psi$  est similaire.

**Remarque 4.5.1.** *Nous avons montré à travers toutes les constructions ci-dessus que pour chaque énoncé MSO  $\psi$  il existe un automate branchant  $\mathcal{A}_\psi$  tel que  $P \models \psi$  si et seulement si  $P \in L(\mathcal{A}_\psi)$ .*

Le dernier cas est celui où  $\psi$  est de la forme

$$\mathcal{Q}(Z, \psi_1, \dots, \psi_n, \rho(x_1, \dots, x_n))$$

Rappelons ici que  $x_1, \dots, x_n$  sont des variables interprétées dans  $\mathbb{N}$ , et que chaque  $\psi_i$ ,  $i \in [n]$ , est un énoncé P-MSO. Par hypothèse d'induction, il existe un automate  $\mathcal{A}_{\psi_i}$  tel que  $R \models \psi_i$  si et seulement si  $R \in L(\mathcal{A}_{\psi_i})$ . De par la sémantique de

$$\mathcal{Q}(Z, \psi_1, \dots, \psi_n, \rho(x_1, \dots, x_n))$$

les posets de chaque  $L(\psi_i)$  sont des posets séquentiels. Rappelons que cette propriété est définissable en MSO par :

$$|R| = 1 \vee \exists R_1 \exists R_2 R_1, R_2 \neq \emptyset \wedge R = R_1 + R_2$$

En conséquence de la Remarque 4.5.1, cette propriété peut être testée par un automate branchant  $\mathcal{B}$ . En conséquence du Théorème 2.3.31 et la fermeture par complémentation de la classe des langages rationnels de  $SP^\circ(A)$ , il existe un automate branchant  $\mathcal{A}'_{\psi_i}$  tel que  $L_i = L(\mathcal{A}'_{\psi_i}) = L(\mathcal{A}_{\psi_i}) \cap L(\mathcal{B})$ . Maintenant, soit  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  un nouvel alphabet disjoint avec  $A$ . Il existe un automate  $\mathcal{C}$  sur l'alphabet  $B$  tel que  $L(\mathcal{C})$  est l'ensemble de Presburger de  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  sur  $B$ , [9]. Soit  $L = L_1 \circ_{b_1} (\dots (L_n \circ_{b_n} L(\mathcal{C})))$ . Il est clair que  $L = L(\psi)$ . En s'appuyant sur le Théorème 2.3.31,  $L$  est le langage d'un automate branchant.

**Proposition 4.5.2.** *Soit  $A$  un alphabet. Pour toute formule P-MSO  $\psi$  interprétée sur  $SP^\circ(A)$  il existe un automate branchant  $\mathcal{A}_\psi$  sur  $SP^\circ(A)$  tel que  $L(\psi) = L(\mathcal{A}_\psi)$ . De plus la construction de  $\mathcal{A}_\psi$  est effective.*

Cette proposition fournit une preuve de l'implication de droite vers la gauche du Théorème 4.0.1. On en obtient aussi une procédure de décision de la théorie P-MSO sur  $SP^\circ(A)$ . En effet, en conséquence de la décidabilité de la vacuité d'un automate branchant sur  $SP^\circ(A)$  (Théorème 5.3.4), on a :

**Corollaire 4.5.3.** *Soit  $A$  un alphabet. La théorie P-MSO sur  $SP^\circ(A)$  est décidable.*

La procédure de décision consiste à construire un automate branchant  $\mathcal{A}_\psi$  associé à un énoncé  $\psi$  de P-MSO et de voir si  $L(\mathcal{A}_\psi)$  est vide ou pas.

À partir de la construction d'un automate branchant sur  $SP^\diamond(A)$  à partir d'une formule P-MSO interprétée sur  $SP^\diamond(A)$  vue ci-dessus, on peut aisément déduire des constructions similaires d'un automate branchant sur  $SP(A)$  à partir d'une formule P-MSO interprétée sur  $SP(A)$  ou d'un automate sur  $A^*$  (resp.  $A^\sharp$ ,  $A^\diamond$ ) à partir d'une formule MSO interprétée sur  $A^*$  (resp.  $A^\sharp$ ,  $A^\diamond$ ). En effet, nous avons vu dans la Section 2.3 que les automates branchants sur  $SP^\diamond(A)$  sont une généralisation des types d'automates reconnaissant des langages rationnels de  $SP(A)$ ,  $A^*$ ,  $A^\sharp$  ou  $A^\diamond$ . Il suffit de procéder par induction sur une formule P-MSO interprétée sur  $SP(A)$  ou une formule MSO interprétée sur  $A^*$  (resp.  $A^\sharp$ ,  $A^\diamond$ ) et de restreindre les automates à construire aux transitions les concernant. Puisque le problème de vacuité d'un automate est décidable pour tous ces types d'automate et que les classes des langages rationnels de  $A^*$ ,  $A^\sharp$ ,  $A^\diamond$  et  $SP(A)$  sont toutes fermées par les opérations booléennes, un résultat similaire au corollaire 4.5.3 s'en suit naturellement.

**Corollaire 4.5.4.** *Soit  $A$  un alphabet. On a :*

- *la théorie MSO de  $A^*$  est décidable ;*
- *la théorie MSO de  $A^\sharp$  est décidable ;*
- *la théorie MSO de  $A^\diamond$  est décidable ;*
- *la théorie P-MSO de  $SP(A)$  est décidable.*

## CHAPITRE 5

# THÉORIES ÉQUATIONNELLES DE POSETS

Dans l'optique de généraliser la caractérisation algébrique des langages rationnels de mots finis par les semigroupes finis, pour un alphabet  $A$ , aux langages de mots sur  $\omega$ , Wilke [86] a introduit des algèbres à deux composantes équipée du produit séquentiel fini et de la puissance  $\omega$ . Une composante traite le cas des mots finis et l'autre traite le cas des mots indicés par  $\omega$ . Les opérations de cette algèbre sont liées par des identités reflétant leurs propriétés. Ces identités définissent une variété d'algèbres. Perrin et Pin ont défini des algèbres similaires aux algèbres de Wilke, appelées  $\omega$ -semigroupes [70], où la puissance  $\omega$  est remplacée par le produit  $\omega$ . Les deux structures sont équivalentes quand le nombre d'élément des algèbres est fini. Cette étude algébrique des mots sur  $\omega$  a été étendue vers des structures moins restreintes. Dans [22], les  $\omega$ -semigroupes ont été enrichis par le produit parallèle permettant de prendre en considération des posets  $N$ -libres ayant des antichaînes finies et des chaînes pouvant atteindre  $\omega$ . Dans [6, 13], la structure des  $\omega$ -semigroupes a été modifiée de manière à pouvoir considérer des mots dont les chaînes peuvent aller au delà de  $\omega$  i.e. des ordinaux de rangs finis et des ordinaux dénombrables. Ces dernières algèbres ont été enrichies dans [35, 36] par des opérations telles que la puissance  $-\omega$  pour prendre en compte des mots sur des ordres linéaires dénombrables (parfois dispersés). Certaines des modifications évoquées précédemment ont été apportées aux  $\omega$ -semigroupes dans [10, 37] pour considérer des algèbres de posets transfinis. Les motivations dans [6, 10, 13, 35, 36, 54] sont principalement l'étude des liens entre les automates, les expressions rationnelles, l'algèbre et la logique. Dans [20, 22, 23, 37] les auteurs s'axent essentiellement sur les variétés d'algèbres. Ce chapitre va aussi dans ce sens.

Des variétés d'algèbres de posets ont été considérées dans [21]. Les auteurs ont montré que  $SP(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans sa variété correspondante et ont prouvé la décidabilité de sa théorie équationnelle. Ces résultats ont été étendus dans [22] aux posets dont les antichaînes sont finies et dont les chaînes sont sur  $\omega$ . Dans [20], les deux composantes des  $\omega$ -semigroupes ont été jumelées en gardant leurs opérations. Les identités que ces opérations satisfont définissent une variété d'algèbres. Les auteurs montrent que l'algèbre dont l'univers est la classe des mots de rangs inférieurs à  $\omega$  est une algèbre libre de

cette variété et déduisent la décidabilité sa théorie équationnelle. Des résultats similaires ont pu être montrés dans [23] dans le cas des variétés d'algèbres qui sont équipées du produit séquentiel, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$ . Dans [37] les auteurs considèrent deux types de variétés d'algèbres de posets. Celle dont les algèbres sont équipées des produits séquentiel, parallèle et  $\omega$ , et celle où le produit  $\omega$  a été remplacé par la puissance  $\omega$ . Ils ont caractérisé les algèbres libres de ces variétés et ils ont montré la décidabilité de la théorie équationnelle de celle utilisant la puissance  $\omega$ .

Dans ce chapitre, on met l'accent sur des variétés d'algèbres de posets équipées du produit parallèle, du produit séquentiel et soit des produits  $\omega$  et  $-\omega$  ou des puissances  $\omega$  et  $-\omega$ . Nous prouvons que l'algèbre dont l'univers est  $SP^\circ(A)$  et qui est équipée des produits parallèle, séquentiel,  $\omega$  et  $-\omega$  est librement engendrée par  $A$  dans sa variété correspondante  $\mathcal{V}$ , [3]. On en déduit une preuve de la liberté de  $A^\circ$  dans sa variété correspondante. Nous considérons aussi la classe de posets étiquetés  ${}^\omega SP(A)$  où les produits  $\omega$  et  $-\omega$  ont été remplacés par les puissances  $\omega$  et  $-\omega$ . En utilisant les résultats de Bloom et Ésik dans [23], nous montrons que l'algèbre dont l'univers est  ${}^\omega SP(A)$  et qui est équipée des produits séquentiel et parallèle et des puissances  $\omega$  et  $-\omega$  est librement engendrée par  $A$  dans sa variété correspondante  $\mathcal{V}'$ . Les arguments utilisés pour prouver la liberté de  ${}^\omega SP(A)$  sont similaires à ceux utilisés dans [37, Th.6.1] dans lequel la variété considérée est  $\mathcal{V}'$  sans la puissance  $-\omega$ . De plus en s'appuyant sur le Corollaire 4.5.3 nous montrons que la théorie équationnelle de  $\mathcal{V}'$  est décidable.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Nous présentons dans la Section 5.1 les variétés d'algèbres de posets auxquelles on s'intéresse et les axiomes qu'elles satisfont. Nous montrons dans la Section 5.2 en particulier que  $SP^\circ(A)$  et  ${}^\omega SP(A)$  sont libres dans leurs variétés correspondantes  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}'$ . Enfin, nous consacrons la Section 5.3 à la preuve de la décidabilité de la théorie équationnelle de  $\mathcal{V}'$ .

## 5.1 Variétés d'algèbres de posets

Nous définissons dans cette section les différentes variétés étudiées dans ce chapitre en listant les identités qu'elles satisfont. Mais avant nous définissons les ensembles de posets étiquetés auxquelles nous faisons référence. Pour plus de commodité, nous rappelons la définition de certains ensembles de posets déjà présentées dans la Définition 1.4.18.

**Définition 5.1.1.** *Soit  $A$  un alphabet. On définit*

- ${}^\omega A$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$  ;
- $A^\circ$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel, le produit  $\omega$  et le produit  $-\omega$  ;
- $\omega SP(A)$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel, le produit parallèle et le produit  $\omega$  ;
- $SP^\omega(A)$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel, le produit parallèle et la puissance  $\omega$  ;

- ${}^\omega SP(A)$ , le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel, le produit parallèle, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$  ;
- $SP^\circ(A)$  le plus petit ensemble de posets étiquetés contenant  $\epsilon$ ,  $a$  pour tout  $a \in A$ , et qui est fermé par le produit séquentiel, le produit parallèle, le produit  $\omega$  et le produit  $-\omega$ .

Soient les identités suivantes de type  $(\{1, {}^\omega, {}^{-\omega}, \cdot, \parallel, \omega, -\omega\}, \lambda)$  avec

$$\lambda(1) = 0, \lambda({}^\omega) = \lambda({}^{-\omega}) = 1, \lambda(\cdot) = \lambda(\parallel) = 2, \lambda(\omega) = \omega \text{ et } \lambda(-\omega) = -\omega$$

construites sur un ensemble de variables  $X$  :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (A_1)$$

$$x \parallel (y \parallel z) = (x \parallel y) \parallel z \quad (A_2)$$

$$x \parallel y = y \parallel x \quad (A_3)$$

$$(x \cdot y)^\omega = x \cdot (y \cdot x)^\omega \quad (A_4)$$

$$(x^n)^\omega = x^\omega, \quad n \geq 1 \quad (A_5)$$

$$(x \cdot y)^{-\omega} = (y \cdot x)^{-\omega} \cdot y \quad (A_6)$$

$$(x^n)^{-\omega} = x^{-\omega}, \quad n \geq 1 \quad (A_7)$$

$$x \cdot 1 = x \quad (A_8)$$

$$1 \cdot x = x \quad (A_9)$$

$$x \parallel 1 = x \quad (A_{10})$$

$$1^\omega = 1 \quad (A_{11})$$

$$1^{-\omega} = 1 \quad (A_{12})$$

pour toute  $\omega$ -suite  $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$  et toute factorisation

$$(x_0, \dots, x_{n_0-1}), (x_{n_0}, \dots, x_{n_1-1}), \dots, (x_{n_i}, \dots, x_{n_i-1}), \dots$$

$$\omega((x_0, \dots, x_{n_0-1}), (x_{n_0}, \dots, x_{n_1-1}), \dots) = \omega(x_0, x_1, \dots) \quad (A_{13})$$

$$x_0 \cdot \omega(x_1, x_2, \dots) = \omega(x_0, x_1, x_2, \dots) \quad (A_{14})$$

$$\omega(1, 1, \dots) = 1 \quad (A_{15})$$

pour toute  $-\omega$ -suite  $\dots, x_i, \dots, x_1, x_0$  et toute factorisation

$$\dots, (x_{n_i-1}, \dots, x_{n_i}), \dots, (x_{n_1-1}, \dots, x_{n_0}), (x_{n_0-1}, \dots, x_0)$$

$$-\omega(\dots, (x_{n_1-1}, \dots, x_{n_0}), (x_{n_0-1}, \dots, x_0)) = -\omega(\dots, x_1, x_0) \quad (A_{16})$$

$$-\omega(\dots, x_2, x_1) \cdot x_0 = -\omega(\dots, x_2, x_1, x_0) \quad (A_{17})$$

$$-\omega(\dots, 1, 1) = 1 \quad (A_{18})$$

Remarquons que chaque algèbre dont l'univers est une classe de posets  $\mathcal{P}$  de la Définition 5.1.1 équipée de l'élément neutre  $\epsilon$  et des opérations sur lesquelles  $\mathcal{P}$  est fermée satisfait les identités ci-dessus qui sont de même type. Dans ce contexte,  $\epsilon$  est l'interprétation de 1 dans ce genre d'algèbres.

Les variétés auxquelles on s'intéresse sont les suivantes :

**Définition 5.1.2.** On définit

- $\mathcal{V}'_0$ , la collection d'algèbres de la forme  $(S, \cdot, \omega, -\omega, 1)$  qui satisfont les identités  $(A_1)$ ,  $(A_4)$ – $(A_9)$  et  $(A_{11})$ ,  $(A_{12})$ ;
- $\mathcal{V}_0$ , la collection d'algèbres de la forme  $(S, \cdot, \omega, -\omega, 1)$  qui satisfont les identités  $(A_1)$ ,  $(A_8)$ ,  $(A_9)$  et  $(A_{13})$ – $(A_{18})$ ;
- $\mathcal{V}_1$ , la collection d'algèbres de la forme  $(S, \cdot, \|\cdot, \omega, 1)$  qui satisfont les identités  $(A_1)$ – $(A_3)$ ,  $(A_8)$ – $(A_{10})$  et  $(A_{13})$ – $(A_{15})$ ;
- $\mathcal{V}'_1$ , la collection d'algèbres de la forme  $(S, \cdot, \|\cdot, \omega, 1)$  qui satisfont les identités  $(A_1)$ – $(A_5)$  et  $(A_8)$ – $(A_{11})$ ;
- $\mathcal{V}'$ , la collection d'algèbres de la forme  $(S, \cdot, \|\cdot, \omega, -\omega, 1)$  qui satisfont les identités  $(A_1)$ – $(A_{12})$ ;
- $\mathcal{V}$ , la collection d'algèbres de la forme  $(S, \cdot, \|\cdot, \omega, -\omega, 1)$  qui satisfont les identités  $(A_1)$ – $(A_3)$ ,  $(A_8)$ – $(A_{10})$  et  $(A_{13})$ – $(A_{18})$ .

Rappelons qu'une algèbre dont l'univers est un ensemble  $S$  est notée  $S$  aussi quand il n'y a pas de confusion possible.

## 5.2 Algèbres libres

Rappelons qu'en conséquence du Théorème 1.5.12 toute variété d'algèbres contient une algèbre libre par cardinal d'ensemble de générateurs. Cette dernière est isomorphe à une algèbre des termes de même type algébrique sur un ensemble de variables  $X$ . De plus, en conséquence de la Proposition 1.5.11, cette algèbre est unique, à isomorphisme près, pour chaque cardinal de  $X$ . Dans ce cadre, certaines des variétés définies dans la Définition 5.1.2 ont été déjà étudiées. Dans [23], Bloom et Ésik ont montré le résultat suivant :

**Théorème 5.2.1** ([23]). *Soit  $A$  un alphabet. Alors  ${}^\omega A$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}'_0$ .*

Dans [37], Choffrut et Ésik ont traité le cas des variétés  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}'_1$ . Ils ont montré le théorème suivant :

**Théorème 5.2.2** ([37]). *Soit  $A$  un alphabet. Alors  $\omega SP(A)$  et  $SP^\omega(A)$  sont librement engendrées par  $A$  respectivement dans  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}'_1$ .*

Nous caractérisons dans cette section les algèbres libres des variétés  $\mathcal{V}'_0$ ,  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{V}$ . Nous montrons dans la Sous-section 5.2.1 que  $SP^\circ(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}$ , pour un alphabet  $A$ . À partir de ce résultat nous déduisons une démonstration de la liberté de  $A^\circ$  dans  $\mathcal{V}_0$ . On en déduit aussi une nouvelle preuve de la liberté de  $\omega SP(A)$  dans  $\mathcal{V}_1$ . La Sous-section 5.2.2 est consacrée à la preuve de la liberté de  ${}^\omega SP(A)$  dans  $\mathcal{V}'$ . Nous nous appuyons sur le Théorème 5.2.1 et nous utilisons les mêmes techniques utilisées dans [37] pour prouver la liberté de  $SP^\omega(A)$  dans  $\mathcal{V}'_1$ .

### 5.2.1 Liberté de $SP^\circ(A)$

Tout au long de cette sous-section  $A$  désigne un alphabet. Nous montrons que  $SP^\circ(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}$ . Pour cela, nous devons montrer que pour toute algèbre  $S$  dans  $\mathcal{V}$  et pour toute fonction  $h: A \rightarrow S$ , il existe une extension unique de  $h$  en un homomorphisme  $SP^\circ(A) \rightarrow S$  préservant

les opérations de  $\mathcal{V}$ . Les produits  $\omega$  et  $-\omega$  font partie de ces opérations. Le lemme suivant nous permet d'éliminer toute occurrence de la constante 1 dans un élément  $s \in S$  de la forme  $J(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots)$  où  $(s_j)_{j \in J}$  est une  $J$ -suite d'éléments de  $S$  et  $J \in \{\omega, -\omega\}$ .

**Lemme 5.2.3.** *Soit  $S \in \mathcal{V}$  et soit  $s = (s_j)_{j \in J}$  une suite d'éléments de  $S$ , pour  $J \in \{\omega, -\omega\}$ . Soit  $(s'_{j'})_{j' \in J'}$  la suite d'éléments de  $s$  différents de 1. Alors, soit*

1.  $J(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = J(s'_0, s'_1, \dots, s'_i, \dots)$  quand  $J' = J$  ;
2. ou  $J(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = s'_0 \cdot \dots \cdot s'_n$ , quand  $J' = n$ , pour un entier  $n \geq 1$  ;
3. ou  $J(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = 1$  quand  $J' = 0$ .

*Démonstration.* Si, pour tout  $j \in J$ ,  $s_j \neq 1$  alors naturellement  $J = J'$ . Sinon, supposons que  $J = \omega$ . Supposons que le nombre de  $j \in \omega$  tel que  $s_j \neq 1$  soit fini. Si, pour tout  $j \in \omega$ ,  $s_j = 1$  alors on conclut par  $(A_{15})$ . Sinon, il existe  $k \in \omega$  tel que pour tout  $j \geq k$ ,  $s_j = 1$ . En utilisant  $(A_{14})$   $k$  fois on a

$$\omega(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = s_0 \cdot \dots \cdot s_k \cdot \omega(1, 1, \dots)$$

Par  $(A_{15})$ ,  $\omega(1, 1, \dots) = 1$ . Puisqu'il existe au moins  $l \in [k]$  tel que  $s_j \neq 1$  on conclut en utilisant  $(A_1)$ ,  $(A_8)$  et  $(A_9)$  si nécessaire.

Maintenant, s'il existe un nombre fini de  $j \in \omega$  tel que  $s_j = 1$  alors il existe  $k \in \omega$  tel que pour tout  $j \geq k$ ,  $s_j \neq 1$ . Alors, en utilisant  $(A_{14})$   $k$  fois on a

$$\omega(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = s_0 \cdot \dots \cdot s_k \cdot \omega(s_{k+1}, s_{k+2}, \dots)$$

En utilisant  $(A_1)$ ,  $(A_8)$  et  $(A_9)$  quand c'est nécessaire, on a

$$s_0 \cdot \dots \cdot s_k = s'_0 \cdot \dots \cdot s'_{k'}$$

pour  $k' \leq k$ , et pour tout  $j' \leq k'$ ,  $s'_{j'} \neq 1$ . Donc, en utilisant  $(A_{14})$   $k'$  fois

$$\omega(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = \omega(s'_0, \dots, s'_{k'}, s_{k+1}, s_{k+2}, \dots) = \omega(s'_0, s'_1, \dots, s'_i, \dots)$$

S'il y a une infinité de  $j_1 \in \omega$  et une infinité de  $j_2 \in \omega$  tels que  $s_{j_1} = 1$  et  $s_{j_2} \neq 1$  alors en utilisant  $(A_{13})$  on a

$$\omega(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = \omega(s'_0, s'_1, \dots, s'_i, \dots)$$

où chaque  $s'_j = s_{k_j} \cdot \dots \cdot s_{k'_j}$ , pour  $k_j, k'_j \in \omega$ . Ainsi, en utilisant, pour chaque  $s'_j$ ,  $(A_1)$ ,  $(A_8)$  et  $(A_9)$  si nécessaire, on a, pour tout  $j \in \omega$ ,  $s'_j = s'_{l'_j} \cdot \dots \cdot s'_{l''_j}$  où  $l'_j \leq k'_j$ . Donc, en utilisant encore une fois  $(A_{13})$ , on a :

$$\omega(s_0, s_1, \dots, s_i, \dots) = \omega(s'_{l'_0}, \dots, s'_{l'_i}, s'_{l''_0}, \dots, s'_{l''_i}, \dots) = \omega(s'_0, s'_1, \dots, s'_i, \dots)$$

Le cas où  $J = -\omega$  est symétrique, en utilisant  $(A_{16})$  au lieu de  $(A_{13})$ ,  $(A_{17})$  au lieu de  $(A_{14})$  et  $(A_{18})$  au lieu de  $(A_{15})$ .  $\square$

**Théorème 5.2.4.** *Soit  $A$  un alphabet.  $SP^\diamond(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ , soit  $X_{\alpha, i}$  l'ensemble des posets de  $SP^\circ(A)$  de rang  $(\alpha, i)$  ou moins. Soit  $\mathcal{M} = (M, \cdot, \|\cdot\|, \omega, -\omega, 1)$  une algèbre de  $\mathcal{V}$  et soit  $h: A \rightarrow M$  une fonction. On montre que  $h$  peut être étendue de manière unique en un homomorphisme de  $\mathcal{V}$ -algèbres  $h^\sharp: SP^\circ(A) \rightarrow M$ . On définit  $h^\sharp$  comme  $h^\sharp = \bigcup_{(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}} h_{\alpha, i}$  où chaque  $h_{\alpha, i}: X_{\alpha, i} \rightarrow M$  est définie par induction sur  $(\alpha, i)$  comme suit. On dénote par  $h_{<(\alpha, i)} = \bigcup_{(\beta, j) < (\alpha, i)} h_{\beta, j}$ . Soit  $P \in X_{\alpha, i}$ . Si  $rp(P) < (\alpha, i)$  alors  $h_{\alpha, i}(P) = h_{<(\alpha, i)}(P)$ . Sinon :

- si  $\alpha = 0$  et  $i = 0$  alors  $h_{\alpha, i} = h \cup (\epsilon \rightarrow 1)$ ;
- si  $\alpha > 0$  et  $i = 0$  alors  $P$  admet une  $J$ -factorisation non triviale

$$P = \prod_{j \in J} P_j \quad (5.19)$$

où  $J \in \{\omega, -\omega\}$  (voir Remarque 1.4.13) et  $rp(P_j) < rp(P)$  pour tout  $j \in J$ . On définit  $h_{\alpha, i}(P)$  par

$$h_{\alpha, i}(P) = \prod_{j \in J} h_{<(\alpha, i)}(P_j)$$

- si  $i > 0$  :

- si  $P$  est un poset séquentiel alors il admet une factorisation

$$P = \prod_{j \in [n]} P_j \quad (5.20)$$

où chaque  $P_j$  est un poset non vide de rang inférieur à  $(\alpha, i)$  et  $n \in \mathcal{N} \setminus \{0, 1\}$ . On définit  $h_{\alpha, i}(P)$  par

$$h_{\alpha, i}(P) = \prod_{j \in [n]} h_{\alpha, i-1}(P_j)$$

- sinon,  $P$  est un poset parallèle. Nous écrivons

$$P = \|\|_{s \in [n]} P_s$$

où chaque  $P_s$  est un poset séquentiel et  $n \geq 2$ . Alors, nous définissons  $h_{\alpha, i}(P)$  par

$$h_{\alpha, i}(P) = \|\|_{s \in [n]} h_{\alpha, i}(P_s)$$

D'après le Théorème 1.4.10, les factorisations utilisées dans la définition de  $h_{\alpha, i}$  existent. Toutefois, les séquentielles d'entres elles ((5.19) et (5.20)) ne sont pas uniques. Ceci peut remettre en cause le fait que  $h_{\alpha, i}$  soit une fonction bien définie. Pour tout  $P \in SP^\circ(A)$  de rang  $(\alpha, i)$ , on montre que :

1.  $h_{\alpha, i}(P)$  ne dépend pas de la factorisation de  $P$  et est donc bien définie ;
2.  $h_{\alpha, i}$  commute avec toutes les opérations de  $\mathcal{V}$  :
  - (a)  $h_{\alpha, i}(\prod_{j \in J} P_j) = \prod_{j \in J} h_{\alpha, i}(P_j)$ , pour  $J \in \mathcal{N} \cup \{\omega, -\omega\}$  ;
  - (b)  $h_{\alpha, i}(\|\|_{s \in [n]} P_s) = \|\|_{s \in [n]} h_{\alpha, i}(P_s)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

On procède par induction sur  $(\alpha, i)$ . Commençons par prouver que  $h_{\alpha, i}$  envoie  $P \in X_{\alpha, i}$  vers le même élément de  $M$  peut importe la factorisation de  $P$ . Si  $(\alpha, i) = (0, 0)$  le résultat est immédiat. Sinon, supposons d'abord que  $i = 0$ . D'après le Lemme 1.4.14, toutes les factorisations possibles de  $P$  comme indiqué dans (5.19) sont toutes des  $\omega$ -factorisations ou toutes des  $-\omega$ -factorisations. Supposons sans perte de généralité que  $P$  admette seulement des  $\omega$ -factorisations comme dans (5.19). Soient  $P = \prod_{j \in \omega} P_j$  et  $P = \prod_{j \in \omega} Q_j$  deux différentes  $\omega$ -factorisations de ce genre. Par définition de  $h_{\alpha, i}$

$$h_{\alpha, i}(\prod_{j \in \omega} P_j) = \prod_{j \in \omega} h_{<(\alpha, i)}(P_j) \text{ et } h_{\alpha, i}(\prod_{j \in \omega} Q_j) = \prod_{j \in \omega} h_{<(\alpha, i)}(Q_j)$$

Il existe une suite  $(R_j)_{j \in \omega}$  de posets non vides telle que  $P = \prod_{k \in \omega} R_k$  et pour tout  $j \in \omega$  il existe  $k_{P_j}, k'_{P_j}, k_{Q_j}, k'_{Q_j} \in \omega$  tel que

$$P_j = \prod_{k_{P_j} \leq l \leq k'_{P_j}} R_l \text{ et } Q_j = \prod_{k_{Q_j} \leq l \leq k'_{Q_j}} R_l$$

Par hypothèse d'induction  $h_{<(\alpha, i)}$  commute avec toutes les opérations de  $\mathcal{V}$ . Alors, on a pour tout  $j \in \omega$  :

$$h_{<(\alpha, i)}(P_j) = \prod_{k_{P_j} \leq l \leq k'_{P_j}} h_{<(\alpha, i)}(R_l) \text{ et } h_{<(\alpha, i)}(Q_j) = \prod_{k_{Q_j} \leq l \leq k'_{Q_j}} h_{<(\alpha, i)}(R_l)$$

Par conséquent  $\prod_{j \in \omega} h_{<(\alpha, i)}(P_j)$  peut être écrit comme

$$\begin{aligned} & \omega(h_{<(\alpha, i)}(R_{k_{P_0}}) \cdots h_{<(\alpha, i)}(R_{k'_{P_0}}), h_{<(\alpha, i)}(R_{k_{P_1}}) \cdots h_{<(\alpha, i)}(R_{k'_{P_1}}), \cdots) \\ \stackrel{(A_{13})}{=} & \omega(h_{<(\alpha, i)}(R_{k_{P_0}}), \dots, h_{<(\alpha, i)}(R_{k'_{P_0}}), h_{<(\alpha, i)}(R_{k_{P_1}}), \dots, h_{<(\alpha, i)}(R_{k'_{P_1}}), \cdots) \\ \stackrel{(A_{13})}{=} & \omega(h_{<(\alpha, i)}(R_{k_{Q_0}}) \cdots h_{<(\alpha, i)}(R_{k'_{Q_0}}), h_{<(\alpha, i)}(R_{k_{Q_1}}) \cdots h_{<(\alpha, i)}(R_{k'_{Q_1}}), \cdots) \end{aligned}$$

On a

$$\prod_{j \in \omega} h_{<(\alpha, i)}(P_j) = \prod_{j \in \omega} h_{<(\alpha, i)}(Q_j)$$

Le cas où  $P$  admet seulement des  $-\omega$ -factorisations comme indiqué dans (5.19) est prouvé symétriquement en utilisant  $(A_{16})$  au lieu de  $(A_{13})$ .

Supposons maintenant que  $i > 0$  et que  $P$  soit un poset séquentiel. Soient  $\prod_{s \in [n]} P_s$  et  $\prod_{j \in [m]} Q_j$  deux différentes factorisations de  $P$  comme indiqué dans (5.20). Il existe une suite  $R_1, \dots, R_t$ , pour  $t \geq m, n$ , de posets non vides telle que  $P = \prod_{k \in [t]} R_k$  avec la propriété que pour tout  $s \in [n]$ ,  $j \in [m]$ , il existe  $k_{P_s}, k'_{P_s}, k_{Q_j}, k'_{Q_j} \in [t]$  tels que

$$P_s = \prod_{k_{P_s} \leq l \leq k'_{P_s}} R_l \text{ et } Q_j = \prod_{k_{Q_j} \leq l \leq k'_{Q_j}} R_l$$

Par définition de  $h_{\alpha, i}$

$$h_{\alpha, i}(\prod_{s \in [n]} P_s) = \prod_{s \in [n]} h_{\alpha, i-1}(P_s) \text{ et } h_{\alpha, i}(\prod_{j \in [m]} Q_j) = \prod_{j \in [m]} h_{\alpha, i-1}(Q_j)$$

Par hypothèse d'induction  $h_{\alpha, i-1}$  commute avec toutes les opérations de  $\mathcal{V}$ . Alors, en utilisant  $(A_1)$ , on a, pour tout  $s \in [n]$ ,  $j \in [m]$  :

$$h_{\alpha, i-1}(P_s) = \prod_{k_{P_s} \leq l \leq k'_{P_s}} h_{\alpha, i-1}(R_l) \text{ et } h_{\alpha, i-1}(Q_j) = \prod_{k_{Q_j} \leq l \leq k'_{Q_j}} h_{\alpha, i-1}(R_l)$$

Ainsi  $\prod_{s \in [n]} h_{\alpha, i-1}(P_s)$  peut être écrit comme

$$\begin{aligned} & (h_{\alpha, i-1}(R_1) \cdots h_{\alpha, i-1}(R_{k'_{P_1}})) \cdots (h_{\alpha, i-1}(R_{k_{P_n}}) \cdots h_{\alpha, i-1}(R_{k'_{P_n}})) \\ & \stackrel{(A_1)}{=} (h_{\alpha, i-1}(R_1) \cdots h_{\alpha, i-1}(R_{k'_{Q_1}})) \cdots (h_{\alpha, i-1}(R_{k_{Q_m}}) \cdots h_{\alpha, i-1}(R_{k'_{Q_m}})) \end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{s \in [n]} h_{\alpha, i-1}(P_s) = \prod_{j \in [m]} h_{\alpha, i-1}(Q_j)$$

Ainsi, on a prouvé que  $h_{\alpha, i}$  est bien définie pour les posets séquentiels de rang  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ . De plus, à commutativité près, la factorisation parallèle irréductible est unique. Par conséquent  $h_{\alpha, i}$  est bien définie pour tous les posets de rang  $(\alpha, i)$ , pour tout  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ .

Montrons maintenant que  $h_{\alpha, i}$  préserve les opérations de  $\mathcal{V}$  dans  $X_{\alpha, i}$ .

Supposons que  $P$  soit un poset séquentiel. Il y a deux cas selon  $i$ .

Supposons que  $i = 0$ . Le cas où  $\alpha = 0$  est triviale, supposons donc que  $\alpha > 0$ . Supposons sans perte de généralité que  $P = \prod_{j \in \omega} P_j$  soit une  $\omega$ -factorisation non triviale de  $P$  choisie comme indiqué dans (5.19). Soient

$$P = \prod_{j \in \omega} P'_j = \prod_{j \in -\omega} P''_j = Q \cdot R$$

trois factorisations séquentielles de  $P$ . On montre que

$$h_{\alpha, i}(P) = \prod_{j \in \omega} h_{\alpha, i}(P'_j) = \prod_{j \in -\omega} h_{\alpha, i}(P''_j) = h_{\alpha, i}(Q) \cdot h_{\alpha, i}(R)$$

D'après le Lemme 1.4.14 et le Lemme 5.2.3, il y a seulement un nombre fini de  $P''_j$  non vides. En conséquence du Lemme 5.2.3 et le fait que  $h_{\alpha, i}(\epsilon) = 1$ , prouver que  $h_{\alpha, i}(P) = \prod_{j \in -\omega} h_{\alpha, i}(P''_j)$  peut être réduit à prouver que  $h_{\alpha, i}(P) = h_{\alpha, i}(Q) \cdot h_{\alpha, i}(R)$ . Supposons d'abord que les factorisations  $\prod_{j \in \omega} P'_j$  et  $Q \cdot R$  soient non triviales. On ramène la preuve que  $h_{\alpha, i}(P) = h_{\alpha, i}(Q) \cdot h_{\alpha, i}(R)$  à prouver que  $h_{\alpha, i}(P) = \prod_{j \in \omega} h_{\alpha, i}(P'_j)$ . En effet, puisque  $P$  n'a pas de d'élément maximum,  $R$  n'en a pas non plus. Donc,  $R$  aussi admet une  $\omega$ -factorisation non triviale. Soit  $\prod_{j \in \omega} R_j$  une telle  $\omega$ -factorisation de  $R$ . Alors, puisque  $rp(P) = rp(Q \cdot R)$ , on a  $rp(Q) < rp(P)$  et  $rp(R) = rp(P)$ . Puisque  $rp(Q) < rp(P)$ , en utilisant  $(A_{14})$ ,  $\prod_{j \in \omega} P'_j$  où  $P'_0 = Q$  et  $P'_{j+1} = R_j$ , pour tout  $j \geq 0$ , est une  $\omega$ -factorisation de  $P$ . Donc, il reste à prouver que  $h_{\alpha, i}(P) = \prod_{j \in \omega} h_{\alpha, i}(P'_j)$ . Puisque, par hypothèse la factorisation  $\prod_{j \in \omega} P'_j$  est non triviale, ceci peut être fait en utilisant les mêmes arguments que ceux qui montrent que  $h_{\alpha, i}$  est bien définie. Supposons maintenant que les factorisations  $\prod_{j \in \omega} P'_j$  et  $Q \cdot R$  contiennent des posets vides. Si  $R = \epsilon$  (resp.  $Q = \epsilon$ ) alors par définition  $h_{\alpha, i}(R) = 1$  (resp.  $h_{\alpha, i}(Q) = 1$ ), et on conclut par  $(A_8)$  (resp.  $(A_9)$ ). Si  $\prod_{j \in \omega} P'_j$  contient des posets vides alors, d'après le Lemme 5.2.3, il peut être écrit comme une  $\omega$ -factorisation non triviale ou une

factorisation de la forme  $P'_1 \cdot P'_2$  pour des posets  $P'_1, P'_2$  pas tous les deux vides. Ces deux cas ont été D'ores et déjà traités. Le cas où la définition de  $h_{\alpha,i}$  choisit une  $-\omega$ -factorisation de  $P$  comme dans (5.19) est prouvé symétriquement en utilisant  $(A_{17})$  au lieu de  $(A_{14})$ .

Supposons maintenant que  $i > 0$ . Soit  $\prod_{j \in [n]} P_j$  une factorisation séquentielle de  $P$  comme dans (5.20) pour  $n \in \mathcal{N}$ . Par définition de  $h_{\alpha,i}$

$$h_{\alpha,i}(P) = \prod_{s \in [n]} h_{\alpha,i-1}(P_s)$$

De nouveau, quand  $P = \prod_{j \in \omega} P'_j$ ,  $P = \prod_{j \in -\omega} P''_j$ ,  $P = Q \cdot R$  sont des factorisations séquentielles de  $P$  comme ci-dessus, on montre que

$$h_{\alpha,i}(P) = \prod_{j \in \omega} h_{\alpha,i}(P'_j) = \prod_{j \in -\omega} h_{\alpha,i}(P''_j) = h_{\alpha,i}(Q) \cdot h_{\alpha,i}(R)$$

Commençons par montrer que  $h_{\alpha,i}(P) = h_{\alpha,i}(Q) \cdot h_{\alpha,i}(R)$ . Si  $R = \epsilon$  (resp.  $Q = \epsilon$ ) alors par définition  $h_{\alpha,i}(R) = 1$  (resp.  $h_{\alpha,i}(Q) = 1$ ), et on conclut avec  $(A_8)$  (resp.  $(A_9)$ ). Sinon, il y a quatre cas. Si  $rp(Q), rp(R) < rp(P)$  alors  $Q \cdot R$  peut être considéré comme une factorisation de  $P$  comme indiqué dans (5.20) et le résultat suit avec les mêmes arguments que ceux prouvant que  $h_{\alpha,i}$  est bien définie. Supposons maintenant que  $rp(Q), rp(R) = rp(P)$ . Il existe une suite  $Z_1, \dots, Z_t$  de posets non vides, pour  $t \geq n$ , telle que  $P = \prod_{k \in [t]} Z_k$ , et il existe  $k_Q \in [n]$  et  $k_{P_s}, k'_{P_s} \in [t]$ , pour tout  $s \in [n]$ , tels que

$$P_s = \prod_{k_{P_s} \leq l \leq k'_{P_s}} Z_l, \quad Q = \prod_{l \in [k_Q]} Z_l \quad \text{et} \quad R = \prod_{k_Q < l \leq t} Z_l$$

Par hypothèse d'induction  $h_{\alpha,i-1}$  commute avec le produit séquentiel sur des posets de rangs inférieurs à  $rp(P)$ . Donc, pour tout  $s \in [n]$ ,

$$h_{\alpha,i-1}(P_s) = \prod_{k_{P_s} \leq l \leq k'_{P_s}} h_{\alpha,i-1}(Z_l)$$

De plus, puisque  $rp(Z_k) < rp(P)$ , pour tout  $k \in [t]$ ,  $\prod_{l \in [k_Q]} Z_l$  et  $\prod_{k_Q < l \leq t} Z_l$  sont des factorisations de respectivement  $Q$  et  $R$  comme dans (5.20). Alors, par définition de  $h_{\alpha,i}$

$$h_{\alpha,i}(Q) = \prod_{l \in [k_Q]} h_{\alpha,i-1}(Z_l) \quad \text{et} \quad h_{\alpha,i}(R) = \prod_{k_Q < l \leq t} h_{\alpha,i-1}(Z_l)$$

Ainsi  $\prod_{s \in [n]} h_{\alpha,i-1}(P_s)$  peut être écrit comme

$$\begin{aligned} & (h_{\alpha,i-1}(Z_{k_{P_1}}) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i-1}(Z_{k'_{P_1}})) \cdot \dots \cdot (h_{\alpha,i-1}(Z_{k_{P_n}}) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i-1}(Z_{k'_{P_n}})) \\ & \stackrel{(A_1)}{=} (h_{\alpha,i-1}(Z_1) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i-1}(Z_{k_Q})) \cdot (h_{\alpha,i-1}(Z_{k_Q+1}) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i-1}(Z_t)) \end{aligned}$$

On a

$$h_{\alpha,i}(P) = h_{\alpha,i}(Q) \cdot h_{\alpha,i}(R)$$

La preuve utilise des arguments similaires quand  $(rp(Q) < rp(P) \text{ et } rp(R) = rp(P))$  ou  $(rp(Q) = rp(P) \text{ et } rp(R) < rp(P))$ .

Prouvons maintenant que  $h_{\alpha,i}(P) = \prod_{j \in \omega} h_{\alpha,i}(P'_j)$ . Comme conséquence du Lemme 5.2.3 et le cas précédent on peut supposer que  $\prod_{j \in \omega} P'_j$  soit non triviale. Il existe une suite  $(Z_k)_{k \in \omega}$  de posets non vides telle que  $P = \prod_{k \in \omega} Z_k$ , et pour tout  $s \in [n-1]$ , il existe  $k_{P_s}, k'_{P_s} \in \omega$  et pour tout  $j \in \omega$  il existe  $k_{P'_j}, k'_{P'_j} \in \omega$  tels que

$$P_s = \prod_{k_{P_s} \leq l \leq k'_{P_s}} Z_l, P'_j = \prod_{k_{P'_j} \leq l \leq k'_{P'_j}} Z_l$$

et

$$P_n = \prod_{l > k'_{P_{n-1}}} Z_l$$

Par hypothèse d'induction  $h_{\alpha,i}$  commute avec le produit séquentiel et le produit  $\omega$  sur des posets de rangs inférieurs à  $rp(P)$ . Alors, pour tout  $s \in [n-1]$  et pour tout  $j \in \omega$  :

$$h_{\alpha,i}(P_s) = \prod_{k_{P_s} \leq l \leq k'_{P_s}} h_{\alpha,i}(Z_l) \text{ et } h_{\alpha,i}(P'_j) = \prod_{k_{P'_j} \leq l \leq k'_{P'_j}} h_{\alpha,i}(Z_l)$$

De plus

$$h_{\alpha,i}(P_n) = \prod_{l > k'_{P_{n-1}}} h_{\alpha,i}(Z_l)$$

Par conséquent  $\prod_{j \in \omega} h_{\alpha,i}(P'_j)$  peut être écrit comme

$$\begin{aligned} & \omega(h_{\alpha,i}(Z_{k_{P'_0}}) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P'_0}}), h_{\alpha,i}(Z_{k_{P'_1}}) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P'_1}}), \dots) \\ & \stackrel{(A_{13})}{=} \omega(h_{\alpha,i}(Z_{k_{P'_0}}), \dots, h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P'_0}}), h_{\alpha,i}(Z_{k_{P'_1}}), \dots, h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P'_1}}), \dots) \\ & \stackrel{(A_{14})}{=} \omega(h_{\alpha,i}(Z_{k_{P'_0}}) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P'_{n-1}}}), h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P'_{n-1}+1}}), \dots) \end{aligned}$$

En utilisant  $(A_1)$ , remarquons que

$$h_{\alpha,i}(Z_1) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i}(Z_{k'_{P_{n-1}}}) = h_{\alpha,i}(P_1) \cdot \dots \cdot h_{\alpha,i}(P_{n-1})$$

On a

$$h_{\alpha,i}(P) = \prod_{j \in \omega} h_{\alpha,i}(P'_j)$$

On montre symétriquement, en utilisant  $(A_{16})$  au lieu de  $(A_{13})$  et  $(A_{17})$  au lieu de  $(A_{14})$ , que

$$h_{\alpha,i}(P) = \prod_{j \in -\omega} h_{\alpha,i}(P''_j)$$

Enfin, supposons que  $P$  soit un poset parallèle. Soit  $P = \parallel_{s \in [n]} P_s$  la factorisation parallèle irréductible de  $P$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'on factorise  $P$  en  $Q \parallel R$ . Si  $R = \epsilon$  (resp.  $Q = \epsilon$ ) alors par définition  $h_{\alpha,i}(R) = 1$  (resp.  $h_{\alpha,i}(Q) = 1$ ), et on conclut par  $(A_{10})$  et  $(A_3)$  si nécessaire. Sinon, il y a quatre cas. Supposons d'abord que  $Q$  et  $R$  soient des posets parallèles. Soient

$Q = \parallel_{j \in [m]} Q_j$  et  $R = \parallel_{k \in [l]} R_k$  les factorisation parallèles irréductible de respectivement  $Q$  et  $R$ , pour  $m, l \in \mathbb{N}$ . Remarquons que  $m + l = n$ . Par définition de  $h_{\alpha, i}$

$$h_{\alpha, i}(P) = \parallel_{s \in [n]} h_{\alpha, i}(P_s), \quad h_{\alpha, i}(Q) = \parallel_{j \in [m]} h_{\alpha, i}(Q_j) \quad \text{et} \quad h_{\alpha, i}(R) = \parallel_{k \in [l]} h_{\alpha, i}(R_k)$$

Alors, en utilisant (A<sub>2</sub>) et (A<sub>3</sub>) on a

$$h_{\alpha}(P) = h_{\alpha}(Q) \parallel h_{\alpha}(R)$$

Si  $Q$  et  $R$  sont des posets séquentiels alors  $Q \parallel R$  est la factorisation parallèle irréductible de  $P$ , à commutativité près. Dans ce cas, il suffit d'appliquer la définition de  $h_{\alpha, i}$ . La preuve utilise des arguments similaires quand ( $Q$  est séquentiel et  $R$  est parallèle) ou ( $Q$  est parallèle et  $R$  est séquentiel).

Ainsi, puisque  $h_{0,0} = h$  et pour tout  $(\alpha, i) \in \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ ,  $(\alpha, i) > (0, 0)$ ,  $h_{\alpha, i}$  étend  $h_{<(\alpha, i)}$  alors  $h^{\sharp}$  est une extension de  $h$ . De plus, puisque  $h^{\sharp}$  s'appuie sur  $h$  et que  $A$  engendre l'algèbre  $SP^{\circ}(A)$  alors en conséquence de la Proposition 1.5.8,  $h^{\sharp}$  est unique. □

Les preuves des théorèmes suivants s'appuient sur les mêmes arguments Il suffit de restreindre  $h^{\sharp}$  aux opérations de la variété correspondante. En particulier, cela nous procure une nouvelle preuve pour le Théorème 5.2.6, montré déjà dans [37].

**Théorème 5.2.5.**  $A^{\diamond}$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}_0$ .

**Théorème 5.2.6** ([37]).  $\omega SP(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}_1$ .

### 5.2.2 Liberté de $\omega SP(A)$

Tout au long de cette sous-section  $A$  désigne un alphabet. En nous inspirant de la preuve que  $SP^{\omega}(A)$  est libre dans  $\mathcal{V}'_1$  dans [37], on montre que  $\omega SP(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}$ . La preuve s'appuie sur le Théorème 5.2.1 stipulant que  $\omega A$  est libre dans  $\mathcal{V}'_0$ . Nous aurons besoin d'étendre l'opération de substitution d'une lettre vers l'ensemble de l'alphabet (voir Section 2.1).

Soient  $A$  et  $B$  deux alphabets et soit  $P$  un poset étiqueté par  $A$ . Pour tout  $a \in A$ , soit  $G_a$  un poset étiqueté par  $B$  associé à  $a$  et soit  $G = (G_a)_{a \in A}$ . Le poset étiqueté par  $B$  consistant en  $P$  dans lequel tout élément étiqueté par  $a \in A$  est remplacé par  $G_a$ , pour tout  $a \in A$ , est noté  $G \circ_A P$ . En particulier, dans le cas d'un alphabet fini  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $A$  et  $B$  disjoints :

$$G \circ_A P = G_{a_n} \circ_{a_n} (\dots \circ_{a_2} (G_{a_1} \circ_{a_1} P))$$

Naturellement, si  $P$  et  $G_a$ , pour tout  $a \in A$ , sont N-libres, alors  $G \circ_A P$  l'est aussi.

Nous commençons par montrer que, pour toute algèbre  $S$  de même signature que  $\omega A$  dont l'univers est un sous-ensemble de  $\omega SP(A)$  tel que  $S = \mathcal{C}_{\{\cdot, \omega, -\omega\}}(S)$ , la substitution ci-dessus définit un homomorphisme allant de  $\omega A$  à  $S$ . De plus, sous certaines conditions, cet homomorphisme est un isomorphisme.

**Lemme 5.2.7.** *Soient  $A$  et  $B$  deux alphabets. Soit  $S \subseteq {}^\omega SP(B)$  tel que  $S$  est fermé par le produit séquentiel, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$ . Soit  $f: A \rightarrow G$  une fonction définie par  $f(a) = G_a \in G$  pour  $G \subseteq S$ . Alors, la fonction  $f^\sharp: {}^\omega A \rightarrow S$  étendant  $f$  définie par  $f^\sharp(u) = G \circ_A u$ , pour tout  $u \in {}^\omega A$ , est un homomorphisme de  $({}^\omega A, \cdot, {}^\omega, -{}^\omega, \epsilon)$  à  $(S, \cdot, {}^\omega, -{}^\omega, 1)$ .*

*De plus, si  $f$  est bijective,  $S$  est engendrée par  $G$ , et  $G$  contient seulement des posets séquentiellement irréductibles alors  $f^\sharp$  est bijective.*

*Démonstration.* Soit  $u \in {}^\omega A$  dont la factorisation séquentielle irréductible est  $\prod_{j \in J} u_j$  pour  $J \in \mathcal{S}$ , où chaque  $u_j \in A$ . Notons que  $f^\sharp(u) = G \circ_A u = \prod_{j \in J} G \circ_A u_j = \prod_{j \in J} f(u_j)$ . Soient  $v \cdot w, x^\omega$  et  $y^{-\omega}$  des factorisations séquentielles de  $u$ . Alors, on peut facilement prouver que

$$f^\sharp(u) = f^\sharp(v) \cdot f^\sharp(w) = f^\sharp(x)^\omega = f^\sharp(y)^{-\omega}$$

en s'appuyant sur l'unicité de la factorisation séquentielle irréductible de  $u$  (Proposition 1.4.6).

Montrons maintenant que lorsque  $f$  est bijective et  $S$  est engendrée par un ensemble de posets séquentiellement irréductibles,  $f^\sharp$  est bijective. Soient  $u, v \in {}^\omega A$  et supposons que  $f^\sharp(u) = P$  et  $f^\sharp(v) = Q$ . Soient  $\prod_{i \in I} u_i$  et  $\prod_{j \in J} v_j$  les factorisations séquentielles irréductibles de respectivement  $u$  et  $v$ , pour  $I, J \in \mathcal{S}$ , où chaque  $u_i$  et  $v_j$  sont dans  $A$ . Par définition de  $f^\sharp$ ,  $P = \prod_{i \in I} P_i$  et  $Q = \prod_{j \in J} Q_j$  où chaque  $P_i = G \circ_A u_i$  et  $Q_j = G \circ_A v_j$ . Donc, pour tout  $i \in I$  et pour tout  $j \in J$ ,  $P_i$  et  $Q_j$  sont des posets séquentiellement irréductibles de  $G$ . Supposons que  $P = Q$ . Alors  $I = J$  et, pour tout  $i \in I$ ,  $P_i = Q_i$ . On a, pour tout  $i \in I$ ,  $u_i = v_i$  puisque  $f$  est injective par hypothèse. De plus, puisque  $G$  engendre  $S$ , chaque élément  $P$  de  $S$  peut être écrit comme  $\prod_{j \in J} P_j$  où chaque  $P_j \in G$ , pour  $J \in \mathcal{S}$ . Puisque  $f$  est surjective par hypothèse, pour tout  $j \in J$ , il existe  $u_j \in A$  tel que  $f(u_j) = P_j$ . Ainsi  $f^\sharp(\prod_{j \in J} u_j) = P$ .  $\square$

En conséquence du Théorème 1.5.4 et de la première partie du Lemme 5.2.7 en particulier :

**Corollaire 5.2.8.** *Pour tout  $S \subseteq {}^\omega SP(A)$  fermé par le produit séquentiel, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$  et engendré par un ensemble de posets séquentiellement irréductibles de  ${}^\omega SP(A)$ , l'algèbre  $(S, \cdot, {}^\omega, -{}^\omega, 1)$  est une  $\mathcal{V}'_0$ -algèbre.*

Aussi, comme conséquence du Théorème 5.2.1 et du Lemme 5.2.7, puisque d'après la Proposition 1.5.11, il n'y a qu'une algèbre libre par cardinal d'ensemble de générateurs dans une variété d'algèbres :

**Corollaire 5.2.9.** *Pour tout  $S \subseteq {}^\omega SP(A)$  fermé par le produit séquentiel, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$  et engendré par un ensemble de posets séquentiellement irréductibles de  ${}^\omega SP(A)$ , l'algèbre  $(S, \cdot, {}^\omega, -{}^\omega, 1)$  est librement engendrée par  $G$  dans  $\mathcal{V}'_0$ .*

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème suivant :

**Théorème 5.2.10.**  *${}^\omega SP(A)$  est librement engendrée par  $A$  dans  $\mathcal{V}'$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , soit  ${}^\omega SP(A)_i$  le sous-ensemble de  ${}^\omega SP(A)$  contenant tous ses posets de largeurs inférieures ou égales à  $i$ . Alors  ${}^\omega SP(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} {}^\omega SP(A)_i$ . Notons que  ${}^\omega SP(A)_0 = \{1\}$  et  ${}^\omega SP(A)_1 = {}^\omega A$ . Remarquons que

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  ${}^\omega SP(A)_i$  est fermée par le produit séquentiel, la puissance  $\omega$  et la puissance  $-\omega$ . Aussi, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  ${}^\omega SP(A)_i$  est engendrée par ses posets séquentiellement irréductibles. D'après le Corollaire 5.2.8, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  ${}^\omega SP(A)_i$  peut être considérée comme une  $\mathcal{V}'_0$ -algèbre. Également, d'après le Corollaire 5.2.9, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  ${}^\omega SP(A)_i$  est librement engendrée par ses posets séquentiellement irréductibles dans  $\mathcal{V}'_0$ . Donc, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $S \in \mathcal{V}'_0$ , une fonction  $h' : A \rightarrow S$  peut être étendue en un unique homomorphisme de  $\mathcal{V}'_0$ -algèbres  $h'_i : {}^\omega SP(A)_i \rightarrow S$ .

Soit  $S$  une  $\mathcal{V}'$ -algèbre et soit  $h : A \rightarrow S$  une fonction. On montre que  $h$  peut être étendue en un homomorphisme de  $\mathcal{V}'$ -algèbres  $h^\sharp : {}^\omega SP(A) \rightarrow S$  de manière unique. En effet, on définit  $h^\sharp$  comme  $h^\sharp = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} h_i$  où chaque  $h_i : {}^\omega SP(A)_i \rightarrow S$  est définie, par induction sur  $i$ , comme suit :

- quand  $i = 0$ ,  $h_0$  est définie par  $\epsilon \rightarrow 1$  ;
- quand  $i = 1$ ,  $h_1$  est l'unique homomorphisme de  $\mathcal{V}'_0$ -algèbres  ${}^\omega A \rightarrow S$  étendant  $h$  (Théorème 5.2.1) ;
- quand  $i \geq 2$ ,  $h_i$  est définie comme suit :
  - sur les posets  $P$  de largeurs inférieures à  $i$ ,  $h_i(P)$  est  $h_{i-1}(P)$  ;
  - sur les posets séquentiels  $P$  de largeur  $i$ ,  $h_i(P)$  est  $h'_i(P)$  ;
  - sur les posets parallèles  $P$  de largeur  $i$ ,  $h_i(P)$  est définie relativement à la factorisation parallèle irréductible  $\parallel_{j \in [n]} P_j$  de  $P$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$h_i(P) = \parallel_{j \in [n]} h_{i-1}(P_j)$$

Prouver que  $h^\sharp$  est un homomorphisme de  $\mathcal{V}'$ -algèbres se fait de la manière habituelle. De plus, l'unicité de  $h^\sharp$  vient du fait que  $h^\sharp$  étend  $h$  et que  $A$  est un ensemble de générateurs de  ${}^\omega SP(A)$ .  $\square$

### 5.3 Décidabilité

Tout au long de cette section  $A$  désigne un alphabet. Nous prouvons ici la décidabilité de la théorie équationnelle de  $\mathcal{V}'$ .

Soit  $\tau$  la signature des  $\mathcal{V}'$ -algèbres. On commence par définir l'ensemble des termes auquel on s'intéresse.

**Définition 5.3.1.** *L'ensemble des termes  $T_A$  sur  $A$  de type  $\tau$  est le plus petit ensemble qui satisfait les conditions suivantes :*

- $A \cup \{1\} \subseteq T_A$  ;
- si  $t_1, t_2 \in T_A$  alors  $t_1 \cdot t_2, t_1 \parallel t_2 \in T_A$  ;
- si  $t \in T_A$  alors  $t^\omega, t^{-\omega} \in T_A$ .

Nous voulons trouver un algorithme qui, étant donnés deux termes  $t, t' \in T_A$ , décide si  $\mathcal{V}' \models t = t'$ .

**Exemple 5.3.2.** *L'identité  $t = t'$  suivante*

$$(x \parallel y^{-\omega}) \cdot (z \cdot (x \parallel (y^{-\omega} \cdot y)))^\omega = ((x \parallel y^{-\omega}) \cdot z)^\omega$$

est satisfaite par les algèbres de  $\mathcal{V}'$ . En effet

$$\begin{aligned}
(x \parallel y^{-\omega}) \cdot (z \cdot (x \parallel (y^{-\omega} \cdot y)))^\omega &\stackrel{(A_7)}{=} (x \parallel y^{-\omega}) \cdot (z \cdot (x \parallel ((y \cdot y)^{-\omega} \cdot y)))^\omega \\
&\stackrel{(A_6)}{=} (x \parallel y^{-\omega}) \cdot (z \cdot (x \parallel (y \cdot y)^{-\omega}))^\omega \\
&\stackrel{(A_7)}{=} (x \parallel y^{-\omega}) \cdot (z \cdot (x \parallel y^{-\omega}))^\omega \\
&\stackrel{(A_5)}{=} ((x \parallel y^{-\omega}) \cdot z)^\omega
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(A_1) - (A_{12}) \vdash (x \parallel y^{-\omega}) \cdot (z \cdot (x \parallel (y^{-\omega} \cdot z)))^\omega = ((x \parallel y^{-\omega}) \cdot z)^\omega$$

La preuve formelle est  $(A_7)$ ,  $(A_6)$ ,  $(A_7)$ ,  $(A_5)$ ,  $t = t'$ .

Puisque  ${}^\omega SP(A)$  est libre dans  $\mathcal{V}'$ , d'après la Proposition 1.5.13, trouver un algorithme décidant la théorie équationnelle de  $\mathcal{V}'$  peut être ramené à trouver un algorithme décidant si  ${}^\omega SP(A) \models t = t'$ . En effet, soit  $\mathcal{S}(A) = (T_A, \cdot, \parallel, {}^\omega, {}^{-\omega}, 1)$  l'algèbre des termes de type  $\tau$  sur  $A$ . D'après le Théorème 1.5.9, l'algèbre  $\mathcal{S}(A)$  est absolument libre i.e. elle est librement engendrée par  $A$  dans la classe contenant toutes les algèbres de signature  $\tau$ . Soit la relation  $\equiv \{(t, t') \in T_A : \mathcal{V}' \models t = t'\}$  sur  $T_A \times T_A$ . D'après la Proposition 1.5.13, la relation  $\equiv$  est une congruence sur  $\mathcal{S}(A)$  telle que l'algèbre  $\mathcal{S}(X)/\equiv$  est une algèbre libre dans  $\mathcal{V}'$  (voir aussi Théorème 1.5.10). Remarquons que  $|A/\equiv| = |A|$ . Par conséquent,  $\mathcal{S}(X)/\equiv$  et  ${}^\omega SP(A)$  sont isomorphes. Cet isomorphisme, qu'on note  $\llbracket t \rrbracket$  pour  $t \in \mathcal{S}(X)/\equiv$ , peut être défini par

$$\begin{aligned}
\llbracket 1 \rrbracket &= \epsilon \\
\llbracket a/\equiv \rrbracket &= a, & a \in A \\
\llbracket t_1 \cdot t_2 \rrbracket &= \llbracket t_1 \rrbracket \cdot \llbracket t_2 \rrbracket \\
\llbracket t_1 \parallel t_2 \rrbracket &= \llbracket t_1 \rrbracket \parallel \llbracket t_2 \rrbracket \\
\llbracket t^\omega \rrbracket &= \llbracket t \rrbracket^\omega \\
\llbracket t^{-\omega} \rrbracket &= \llbracket t \rrbracket^{-\omega}
\end{aligned}$$

On a :

**Proposition 5.3.3.** *Soient  $t, t' \in T_A$ . Alors  $\llbracket t \rrbracket = \llbracket t' \rrbracket$  si et seulement si  $\mathcal{V}' \models t \equiv t'$ .*

Par conséquent, prouver la décidabilité de la théorie équationnelle de  $\mathcal{V}'$  peut être réduit à décider si  $\llbracket t \rrbracket = \llbracket t' \rrbracket$ , pour tout  $t, t' \in T_A$ .

**Théorème 5.3.4.** *Soient  $t, t' \in T_A$ . La question «  $\llbracket t \rrbracket = \llbracket t' \rrbracket$  ? » est décidable.*

La procédure de décision est comme suit. Les termes  $t$  et  $t'$  peuvent être assimilés à des expressions rationnelles de  $R_E(SP^\diamond(A))$  dont les langages sont limités à un seul poset (voir Section 2.2). D'après le Théorème 4.0.1, on peut construire de manière effective à partir de ces expressions rationnelles, deux formules de P-MSO  $\psi_t$  et  $\psi_{t'}$  telles que  $L(\psi_t) = \llbracket t \rrbracket$  et  $L(\psi_{t'}) = \llbracket t' \rrbracket$ . On a  $L(\psi_t \wedge \psi_{t'}) = \emptyset$  si et seulement si  $\llbracket t \rrbracket \neq \llbracket t' \rrbracket$ . Le Théorème 5.3.4 découle de la décidabilité de la théorie P-MSO sur  $SP^\diamond(A)$  d'après le Corollaire 4.5.3. Cette

procédure de décision se base essentiellement sur les résultats montrés dans le chapitre précédent. Sa complexité est non élémentaire. Une autre procédure de décision avec une complexité exponentielle en la taille de  $t, t'$  peut être dérivée à partir de la preuve de [37, Théorème 7.6], dans laquelle la puissance  $^{-\omega}$  n'est pas considérée, en remplaçant l'utilisation de [37, Théorème 7.3] par [23, Corollaire 3.19].

## CONCLUSION

Nous avons présenté dans le Chapitre 2 trois classes de langages rationnels de mots. Chaque classe est différente de l'autre de par la classe des ordres linéaires par lesquels les mots de ses langages sont indicés : des ordres linéaires finis, des ordinaux dénombrables, des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Nous y avons présenté aussi deux classes de langages rationnels de posets étiquetés série-parallèles dont les antichaînes sont finies : celle où les chaînes des posets sont finies et celle où les chaînes des posets sont des ordres linéaires dénombrables et dispersés. Nous avons exposé pour chaque classe de langages rationnels les types d'automates et d'expressions rationnelles qui caractérisent ces langages. En particulier, les types d'automates et d'expressions rationnelles décrivant des langages rationnels de posets série-parallèles transfinis généralisent les automates et expressions rationnelles pour les langages rationnels des autres classes. Toutes ces classes ont des caractérisations en logique.

En ajustant son univers d'interprétation de manière appropriée, la logique monadique du second ordre est exactement de même expressivité que les automates de Kleene, les automates sur les ordinaux dénombrables et les automates sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Ces résultats ont été présentés dans le Chapitre 3. Pour ce qui est des posets, la logique monadique du second ordre est strictement moins expressive que les automates branchants. Dans le cas des posets série-parallèles finis, elle est exactement de même expressivité que les langages dits « série-rationnels » [53]. Un langage sur un alphabet  $A$  est *série-rationnel* s'il est obtenu à partir de l'ensemble vide et des lettres de  $A$  en utilisant l'union  $+$ , le produit séquentiel  $\cdot$ , le produit parallèle  $\parallel$  et l'itération séquentielle finie  $^+$ . Cette classe de langages est strictement incluse dans  $Rat(SP(A))$ . Des expressions rationnelles et des automates branchants la caractérisant ont été définis dans [57]. En particulier, les automates branchants de même expressivité sont des automates branchants dits « fork-acycliques ». Un automate branchant  $\mathcal{A}$  est *fork-acyclique* si tout chemin acceptant  $\gamma$  de  $\mathcal{A}$  ne contient pas de sous-chemin de la forme  $f(\parallel_{i \in [n]} \gamma_i)j$  avec un des  $\gamma_i$  de la forme  $f(\parallel_{i \in [n']} \gamma'_i)t$ , pour  $n, n' \in \mathbb{N}$  et des transitions fork  $f$  et join  $j$  de  $\mathcal{A}$ . Le résultat suivant est dû à Lodaya et Weil :

**Théorème 5.3.5** ([57]). *Soit  $L \in SP(A)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $L$  est accepté par un automate branchant et la largeur des posets de  $L$  est bornée ;
- $L$  est accepté par un automate branchant fork-acyclique ;
- $L$  est série-rationnel.

Un analogue de ces résultats existe pour le cas des posets série-parallèles transfinis. Dans  $SP^\diamond(A)$  les langages série-rationnels sont les langages décrits par les expressions rationnelles de  $R_E(A)$  où les symboles  $*^\xi$ ,  $\circ_\xi$  ne sont pas utilisés. On a alors :

**Théorème 5.3.6** ([8]). *Soit  $L \in SP^\diamond(A)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $L$  est accepté par un automate branchant sur les posets série-parallèles transfinis et la largeur des posets de  $L$  est bornée ;
- $L$  est accepté par un automate branchant sur les posets série-parallèles transfinis fork-acyclique ;
- $L$  est série-rationnel ;
- $L$  est définissable en MSO.

L'itération parallèle finie n'est pas définissable en logique monadique du second ordre. Bedon a montré qu'une extension de la logique monadique du second ordre par l'arithmétique de Presburger, appelée P-MSO, capture l'expressivité des automates branchants de Lodaya et Weil, [9]. Nous avons renforcé le lien entre la théorie des automates et la logique en montrant dans le Chapitre 4, par des constructions effectives utilisant des arguments nouveaux, que le langage de toute formule P-MSO interprétée sur des posets étiquetés série-parallèles transfinis est le langage d'un automate branchant sur les posets série-parallèles transfinis, et réciproquement. Comme conséquence, toute question sur les langages rationnels de  $SP^\diamond(A)$  définissable en P-MSO est décidable.

La construction classique d'une formule de logique MSO de même expressivité qu'un automate  $\mathcal{A}$ , initiée par Büchi-Elgot-Trakhtenbrot sur les automates de Kleene, consiste à encoder les propriétés d'un chemin acceptant de  $\mathcal{A}$  par des moyens de logique. Étant donné un mot fini  $w$ , l'existence d'un chemin acceptant  $\gamma$  dans un automate de Kleene  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$  étiqueté par  $w$  est exprimé en logique MSO en encodant chaque état  $q$  de  $\gamma$  dans une position de  $w$  apparaissant dans une variable du second ordre  $X_q$ , de manière consistante avec la définition de chemin acceptant d'un automate de Kleene. Cette technique s'appuie sur le fait que les ordres linéaires sous-jacents aux mots reconnus par un automate et leurs chemins acceptants sont isomorphes. Elle est facilement généralisable pour la construction d'une formule de logique MSO de même expressivité qu'un automate sur les ordinaux dénombrables ou plus généralement quand les ordres linéaires sous-jacents aux mots reconnus par un automate sont des ordres linéaires complets. Toutefois, elle ne l'est plus quand il s'agit d'ordres linéaires non complets. La même difficulté subsiste dans le cas des posets sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés. Dans [11], les auteurs ont choisi de contourner cette difficulté en construisant la formule de logique MSO de même expressivité qu'un automate sur les ordres linéaires dénombrables  $\mathcal{A}$  et dispersés en partant plutôt d'une expression rationnelle de même langage que  $\mathcal{A}$ . Nous avons fait de même pour la construction d'une formule P-MSO de même expressivité qu'un automate branchant sur  $SP^\diamond(A)$  (Chapitre 4).

Dans [34], Carton, Colcombet et Puppis ont montré qu'un langage d'ordres linéaires dénombrables  $L$  est définissable en MSO si et seulement si il l'est en utilisant les coupures de ces ordres linéaires « en arrière plan ». Autrement dit, l'utilisation d'éléments de  $\mathbb{R}$  dans des formules de logique MSO exprimant des propriétés sur  $\mathbb{Q}$  n'accroît en rien l'expressivité de la logique MSO. Cependant, le passage d'un formalisme à l'autre n'est pas effectif à cause notamment de l'indécidabilité de la théorie MSO de  $(\mathbb{R}, <)$  [81]. Dans notre cas, il serait intéressant de trouver un résultat similaire quant à l'utilisation « en arrière plan » des coupures des ordres linéaires dénombrables et dispersés. De plus, si le passage d'un formalisme à l'autre est effectif, nous pourrions démontrer l'équivalence d'expressivité des automates sur  $A^\diamond$  (resp.  $SP^\diamond(A)$ ) et MSO (resp. P-MSO) en utilisant les méthodes développées pour le cas des mots finis.

Un prolongement naturel de nos travaux serait aussi de considérer des posets dont les chaînes sont des ordres linéaires sans restriction aucune. Nommément, la plus petite classe de posets contenant le poset vide, le singleton et qui est fermée par la composition parallèle finie et par la somme indicée par un ordre linéaire. Cette classe de posets est équivalente à la classe de posets N-libres dont les antichaînes sont finies [15]. Des langages rationnels de mots indicés par des ordres linéaires ont été déjà considérés. Un analogue du théorème de Kleene pour les mots sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés a été montré dans [26] par Bruyère et Carton (voir Sous-section 2.3.4). Les auteurs ont fait remarquer que le type d'automates qu'ils avait introduit est adapté aussi aux mots sur tous les ordres linéaires. Dans ce cas, Bès et Carton ont montré dans [18] qu'il faut enlever les restrictions de la dénombrabilité et la dispersion des ordres linéaires dans les opérations  $\natural$ ,  $^{-\natural}$  et  $\diamond$ , et qu'il faut ajouter une opération rationnelle dite «  $\eta$ -shuffle » pour avoir un analogue du théorème de Kleene. Soit  $A$  un alphabet fini,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $L_1, \dots, L_n$  des langages de mots sur les ordres linéaires. Alors  $sh(L_1, \dots, L_n)$  est l'ensemble des mots  $w$  indicés par des ordres linéaires pouvant être écrits comme  $w = \prod_{j \in J} w_j$  où :

- $J$  est un ordre linéaire complet n'ayant ni minimum ni maximum ;
- il existe une partition  $(J_1, \dots, J_n)$  de  $J$  telle que tous les  $J_i$  sont denses dans  $J$ , et pour tout  $j \in J$ , si  $j \in J_j$  alors  $w_j \in L_k$ .

Il serait intéressant de voir si les mêmes modifications mènent vers la même conclusion dans le cas des posets. Le cas échéant, la prochaine étape serait de donner une caractérisation logique à ces langages de posets. Bedon, Bès, Carton et Rispal ont montré dans [11] que les langages rationnels sur les ordres linéaires sont définissables en logique monadique du second ordre. Toutefois, la logique monadique du second ordre est strictement plus expressive. En particulier, la classe des langages rationnels sur les ordres linéaires n'est pas fermée par complémentation. La première étape serait de déterminer quel fragment de la logique monadique du second ordre est exactement de même expressivité que les automates sur les ordres linéaires, puis de restreindre P-MSO de manière conforme.

De manière générale, nos travaux présentés dans le Chapitre 4 peuvent être poursuivis par l'étude de logiques moins expressives que P-MSO. Cela se fait généralement, pour la logique sur les structures finies (comme les mots finis), par une modification de la signature, ou en restreignant le nombre de variables ou l'alternance des quantificateurs. Pour les ordres linéaires, il est aussi intéressant de restreindre l'interprétation des variables du second ordre, par exemple,

sur leurs cardinaux ou sur leurs types d'ordre. Cela a été fait dans [39] où les interprétations des variables du second ordre ont été restreintes aux singletons (regarder aussi [16, 17]), ordinaux, ou ordres linéaires dispersés, avec des caractérisations algébriques analogues à celle de Schützenberger de telles logiques.

Dans le Chapitre 5, nous avons étudié différentes classes de posets série-parallèles transfinis d'un point de vue algébrique. Nous avons montré que, pour tout alphabet  $A$ ,  $SP^\diamond(A)$  et  $A^\diamond$  sont des algèbres libres dans leurs variétés d'algèbres correspondantes. Nous nous sommes aussi intéressés à la sous-classe  ${}^\omega SP(A)$  de  $SP^\diamond(A)$  obtenue à partir de l'ensemble vide et de toutes les lettres de  $A$  en utilisant le produit séquentiel, le produit parallèle et les puissances  $\omega$  et  $-\omega$ . Nous avons montré que  ${}^\omega SP(A)$  est une algèbre libre dans sa variété d'algèbres et, en nous appuyons sur la décidabilité de la théorie P-MSO montrée dans le Chapitre 4, nous avons montré que la validité de toute identité du même type algébrique est décidable. Ces travaux peuvent être prolongés en considérant d'autres opérations sur les posets, comme l'opération  $\eta$ -shuffle considérée dans [24] et l'itération parallèle infinie considérée dans [46].

- L*-théorie
  - décidable, 84
- état
  - puits, 53
- nœud
  - bordé par  $\text{out}(n)$ , 101
- $>1$ -expression, 97
- algèbre, 35
  - absolument libre, 42
  - commute, 35
  - congruence, 36
  - générateur, 36
  - homomorphisme, 35
  - libre, 42
  - librement engendrée, 42
  - monoïde, 35
  - monoïde commutatif, 35
  - présERVE, 35
  - produit direct, 37
  - propriété universelle, 41
  - semigroupe, 35
  - signature, 35
  - sous-algèbre, 35
  - structure algébrique, 35
  - type, 35
  - univers, 35
- algèbre des termes, 42
- alphabet, 32
  - lettres, 32
- arbre, 98
  - arbre enraciné, 99
  - hauteur, 100
  - ordonné, 100
  - profondeur, 100
  - sous-arbre, 100
- arbre enraciné
  - racine, 99
- arc
  - consécutifs, 99
  - destination, 99
  - entre, 99
  - normal, 101
  - sort, 99
  - source, 99
  - spécial, 101
- automate, 51
  - états, 51
  - alphabet, 51
  - automate branchant sur les posets
    - finis, 61
  - automate branchants sur les posets transfinis, 64
  - automate sur les mots finis, 53
  - automate sur les ordinaux, 55
  - automate sur les ordres linéaires, 58
  - chemin, 53
  - complet, 53
  - ensemble des transitions, 52
- borne inférieure
  - plus grande, 16
- borne supérieure
  - plus petite, 17
- cardinal
  - infini, 15
- chemin
  - acceptant, 53
  - commence, 118
  - consécutifs, 53

- destination, 53
- marqué, 118
- source, 53
- sous-chemin, 119
- classe, 10
- classe équationnelle, 39
- classe d'équivalence, 13
  - quotient, 13
- collection, 10
- congruence
  - algèbre quotient, 36
- coupure
  - fosse, 24
- D-graphe, 101
  - $\xi$ -normalisé, 103
  - chemin, 118
  - langage, 119
  - Propriété DAG, 102
  - Propriété PP, 102
  - Propriété SS, 102
- définition inductive
  - bien fondée, 20
- ensemble, 10
  - élément, 10
  - appartient, 10
  - complément, 12
  - dénombrable, 15
  - différence, 12
  - disjoints, 12
  - ensemble ordonné, 16
  - fermé, 11
  - fini, 15
  - inclus, 11
  - indénombrable, 15
  - infini, 15
  - intersection, 12
  - linéaire, 66, 67
  - linéairement ordonné, 17
  - partie, 11
  - partie propre, 11
  - partiellement ordonné, 16
  - partition, 12
  - produit cartésien, 12
  - semi-linéaire, 66, 67
  - singleton, 10
  - sous-ensemble, 11
  - strictement inclus, 11
  - totalement ordonné, 16
- union, 12
- vide, 10
- expression rationnelle, 50
- facteur
  - direct, 136
  - séquentiellement maximal, 136
- factorisation
  - factorisation parallèle, 29
  - factorisation séquentielle, 29
  - irréductible, 29
  - non triviale, 29
- fermeture déductive, 40
- fonction, 13
  - antécédent, 14
  - application, 14
  - arguments, 14
  - bijective, 14
  - codomaine, 14
  - composition, 14
  - domaine, 14
  - ensemble d'arrivée, 14
  - ensemble de départ, 14
  - entrées, 14
  - envoi, 14
  - extension, 14
  - fonction réciproque, 14
  - image, 14
  - image réciproque, 14
  - injective, 14
  - partielle, 14
  - préservant l'ordre, 17
  - restriction, 14
  - surjective, 14
  - totale, 14
- formule FO
  - énoncé, 71
  - close, 71
  - sous-formule, 70
- formule logique
  - langage, 83
  - logiquement équivalentes, 83
  - macro, 84
  - modèle, 78
- graphe, 98
  - étiqueté, 99
  - acyclique, 98, 99
  - chaîne, 98
  - connexe, 98, 99

- cycle, 99
- DAG, 99
- fini, 98
- nœuds, 98
- non orienté, 98
- sous-jacent, 99
- graphe non orienté
  - arêtes, 98
  - cycle, 98
  - sommets, 98
- graphe orienté, 99
  - arcs, 99
- homomorphisme
  - homomorphisme naturel, 36
  - image homomorphe, 35
  - isomorphisme, 35
  - noyau, 36
- identité, 39
  - preuve formelle, 40
  - prouvable, 40
- induction, 20
  - définition inductive, 20
  - induction faible, 21
  - induction forte, 21
  - preuve par induction transfinie, 20
  - rang, 20
- intervalle
  - bon intervalle, 29
  - final, 16
  - initial, 16
- langage, 46
  - concaténation, 46
  - itération, 47
  - produit parallèle, 46
  - produit séquentiel, 46
  - rationnel, 50
  - substitution, 46
  - substitution itérée, 47
  - union, 46
- logique
  - $L$ -théorie, 84
  - ensemble des prédicats, 70
  - formules atomiques, 70
  - logique de Presburger, 72
  - logique du premier ordre, 70
  - signature, 70
  - univers, 69
- variable, 71
- logique de Presburger
  - ensemble de Presburger, 72
  - est un modèle pour, 72
  - satisfait, 72
  - tautologie, 72
- monoïde commutatif
  - langages  $\|$ -rationnels, 66
  - langages rationnels, 66
  - mot commutatif, 66
- ms-coloriage, 136
- multiensemble, 12
  - multiplicité, 12
- nœud
  - ancêtre, 99
  - connectés, 98
  - consécutifs, 99
  - degré entrant, 99
  - degré sortant, 99
  - descendant, 99
  - enfant, 99
  - parent, 99
- opération, 11
  - élément neutre, 11
  - arité, 11
  - associative, 11
  - binaire, 11
  - commutative, 11
  - constante, 11
  - fermeture, 11
  - opérandes, 11
  - unaire, 11
- ordinal, 20
  - forme normale, 21
  - limite, 20
  - successeur, 20
- ordre, 16
  - bon ordre, 17
  - borne inférieure, 16
  - borne supérieure, 16
  - consécutifs, 16
  - dénombrable, 16
  - intervalle, 16
  - isomorphes, 17
  - maximum, 16
  - minimum, 16
  - partiel, 16

- plus grand élément, 16
- plus petit élément, 16
- prédécesseur, 16
- sous-ordre, 16
- successeur, 16
- total, 16
- ordre linéaire, 17
  - $J$ -somme, 19
  - complet, 24
  - coupure, 24
  - coupure de Dedekind, 24
  - dense, 22
  - dispersé, 22
  - limite à droite, 17
  - limite à gauche, 17
  - miroir, 18
  - produit, 19
  - rang, 24
  - somme binaire, 19
  - type d'ordre, 17
- P-MSO, 81
  - définissable, 84
  - variables de Presburger, 82
  - variables du premier ordre, 82
  - variables du second ordre, 82
- poset, 26
  - $J$ -factorisation, 29
  - antichaîne, 26
  - bon intervalle, 29
  - chaîne, 26
  - composition parallèle, 27
  - composition séquentielle, 27
  - diagramme de Hasse, 26
  - factorisation, 29
  - indiqué, 29
  - largeur, 26
  - N-libre, 26
  - parallèle, 29
  - parallèlement irréductible, 29
  - poset étiqueté, 32
  - poset marqué, 80
  - rang, 31
  - séquentiel, 29
  - séquentiellement irréductible, 29
  - série-parallèles, 28
  - somme, 27
  - somme indicée par un ordre linéaire, 28
  - sous-poset, 27
  - union, 27
- poset étiqueté
  - $J$ -produit, 32
  - concaténation, 32
  - facteur, 33
  - produit parallèle, 32
  - produit séquentiel, 32
  - puissance  $-\omega$ , 33
  - puissance  $\omega$ , 33
- produit cartésien
  - $n$ -uplets, 12
  - tuples, 12
- relation, 12
  - antisymétrique, 13
  - asymétrique, 13
  - constante, 13
  - interne, 13
  - réflexive, 13
  - relation d'équivalence, 13
  - relation d'ordre, 13
  - symétrique, 13
  - transitive, 13
- relation d'équivalence
  - compatible, 36
- relation d'ordre
  - comparables, 13
  - incomparables, 13
  - partielle, 13
  - stricte, 13
  - totale, 13
- s-coloriage, 135
  - compatible, 135
- sous-arbre
  - direct, 100
  - strict, 100
- sous-terme
  - direct, 38
- suite
  - longueur, 18
  - support, 18
- théorie équationnelle, 40
  - décidable, 41
  - variété, 40
- transition
  - étiquetée, 52
  - fork, 52
  - join, 52

- 
- limites à droite, 52
  - limites à gauche, 52
  - quitte, 52
  - rentre, 53
  - sort, 52
  - successeurs, 52
  - transitions séquentielles, 52
- variété, 37
- $\mathcal{V}$ -algèbre, 37
  - engendrée, 37
- variable
- interprétation, 78
  - liée, 70
  - libre, 70
  - occurrence, 70

## INDEX DES NOTATIONS

- $(I_j)_{j \in J}$  suite linéairement ordonnée d'ordres linéaires, page 19  
 $[n]$  ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , page 11  
 $\aleph_0$  plus petit cardinal infini, page 15  
 $\aleph_1$  plus petit cardinal indénombrable, page 15  
 $\beta^\alpha$  ordinal  $\beta$  puissance l'ordinal  $\alpha$ , page 21  
 $\bigcap_{i \in [n]} E_i$  intersection de  $n \in \mathbb{N}$  ensembles, page 12  
 $E^C$  complémentaire de l'ensemble  $E$ , page 12  
 $C(\gamma)$  contenu du chemin  $\gamma$  d'un automate, page 54, page 56, page 60, page 62, page 65  
 $\bigcup_{i \in [n]} E_i$  union de  $n \in \mathbb{N}$  ensembles, page 12  
 $\hat{I}^*$  ensemble des coupures de l'ordre linéaire  $I$  sans son minimum et son maximum, page 24  
 $\hat{I}$  ensemble des coupures de l'ordre linéaire  $I$ , page 24  
 $\emptyset$  ensemble vide, page 10  
 $\inf(E)$  bornes inférieures de l'ordre  $E$ , page 17  
 $-J$  ordre miroir de l'ordre linéaire  $J$ , page 18  
 $L_{\mathcal{U}}(\psi)$  langage de la formule  $\psi$  interprétée dans  $\mathcal{U}$ , page 83  
 $wd(P)$  largeur d'un poset  $P$ , page 26  
 $\lim((\beta_i)_{i \in \alpha})$  plus petit ordinal de la suite  $(\beta_i)_{i \in \alpha}$  strictement croissante d'ordinaux où  $\alpha$  est un ordinal limite, page 21  
 $\max(E)$  maximums de l'ordre  $E$ , page 16  
 $\min(E)$  minimums de l'ordre  $E$ , page 16  
 $\mathcal{A} \models \Xi$  algèbre (ou classe d'algèbres)  $\mathcal{A}$  satisfait l'ensemble d'identités  $\Xi$ , page 39  
 $\mathcal{A} \models t = t'$  algèbre (ou classe d'algèbres)  $\mathcal{A}$  satisfait l'identité  $t = t'$ , page 39

- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  algèbre  $\mathcal{A}$  est isomorphe à l'algèbre  $\mathcal{B}$ , page 35  
 $\mathcal{A}/\theta$  algèbre quotient  $\mathcal{A}$  par la congruence  $\theta$ , page 36  
 $\mathcal{T}(X)$  algèbre des termes sur  $X$ , page 42  
 $\mathcal{V}$ -algèbre algèbre de la variété  $\mathcal{V}$ , page 37  
 $\mathbb{N}$  ensemble des entiers naturels, page 11  
 $\mathbb{N}^*$   $\mathbb{N}$  privé de 0, page 11  
 $\omega$  plus petit ordinal infini, page 21  
 $\omega$  type d'ordre de  $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ , page 17  
 $\parallel$  produit parallèle de posets, page 32  
 $p(u)$  image de Parikh d'un mot commutatif, page 66  
 $\mathcal{P}^+(E)$  ensemble des sous-ensembles non vides de  $E$ , page 11  
 $\mathcal{P}^{>1}(E)$  ensemble des sous-ensembles de  $E$  contenant au moins deux éléments, page 11  
 $\mathcal{P}(E)$  ensemble des sous-ensembles de  $E$ , page 11  
 $\mathcal{P}$   $\cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_i$ , page 72  
 $\mathcal{P}_n$  classe des formules de Presburger ayant  $n \in \mathbb{N}$  variables libres, page 72  
 $\prod_{i \in [n]} E_i$  produit cartésien de  $n \in \mathbb{N}$  ensembles., page 12  
 $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  produit direct de la suite d'algèbres  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ , page 37  
 $\psi_1 \equiv_{\mathcal{U}} \psi_2$  formules logiquement équivalente dans l'univers  $\mathcal{U}$ , page 83  
 $r(I)$  rang d'un ordre linéaire dénombrable et dispersé  $I$ , page 24  
 $rp(P)$  rang d'un poset d'un poset série-parallèle  $P$ , page 31  
 $R_E(\mathcal{M})$  ensemble des expressions rationnelles décrivant les langages rationnels de la classe de posets  $\mathcal{M}$ , page 51  
 $\sum_{j \in J} I_j$  somme d'ordre linéaires indicée par  $J$ , page 19  
 $\sup(E)$  bornes supérieures de l'ordre  $E$ , page 17  
vrai tautologie de Presburger, page 72  
 $FV(\psi)$  ensemble des variables libres d'une formule de logique  $\psi$ , page 71  
 $\Xi \vdash t = t'$  identité  $t = t'$  est prouvable à partir de  $\Xi$ , page 40  
 $\mathbb{Z}$  ensemble des entiers relatifs, page 11  
 $\zeta$  type d'ordre de  $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ , page 17  
 $DF_{ms}(P)$  ensemble des facteurs séquentiellement maximaux directs de  $F_s(P)$ , page 136  
 $E \cap F$  intersection des ensembles  $E$  et  $F$ , page 12  
 $E \cup F$  union des ensembles  $E$  et de  $F$ , page 12  
 $E \setminus F$  différence entre les ensembles  $E$  et  $F$ , page 12

- $E \times F$  produit cartésien des ensembles  $E$  et  $F$ , page 12  
 $E/\cong$  ensemble quotient de  $E$  par  $\cong$ , page 13  
 $F \subsetneq E$   $F$  est strictement inclus  $E$ , page 11  
 $F \subset E$   $F$  est strictement inclus  $E$ , page 11  
 $F \subseteq E$   $F$  est inclus  $E$ , page 11  
 $F_{\mathcal{X}}(\overline{X})$  algèbre libre pour  $\mathcal{X}$  sur  $\overline{X}$ , page 43  
 $F_{ms}(P)$  ensemble des facteurs séquentiellement maximaux de  $F_s(P)$ , page 136  
 $F_s(P)$  ensemble des facteurs séquentiels du poset  $P$ , page 135  
 $g^{-1}(y)$  image réciproque de  $y$  par  $g$ , page 14  
 $H(\mathcal{X})$  classe des images homomorphes aux algèbres de  $\mathcal{X}$ , page 37  
 $I(\mathcal{X})$  classe des algèbres isomorphes aux algèbres de  $\mathcal{X}$ , page 37  
 $L + L'$  union de deux langages, page 46  
 $L \cdot L'$  produit séquentiel de deux langages, page 46  
 $L \circ_{\xi} L'$  substitution de  $\xi$  par  $L$  dans  $L'$ , page 47  
 $L \circ_{\xi} P$  substitution de  $\xi$  par  $L$  dans  $P$ , page 46  
 $L \parallel L'$  produit parallèle de deux langages, page 46  
 $L(\mathcal{A})$  langage de l'automate  $\mathcal{A}$ , page 53  
 $L(D, n)$  langage du nœud  $n$  dans un D-graphe  $D$ , page 120  
 $L(e)$  langage de l'expression rationnelle  $e$ , page 50  
 $L^*$  itération finie de  $L$ , page 47  
 $L^{\otimes}$  itération parallèle de  $L$ , page 47  
 $L^{\diamond}$  itération de  $L$  sur les ordres linéaires dénombrables et dispersés, page 49  
 $L^{-\natural}$  itération de  $L$  sur les miroirs des ordinaux dénombrables, page 48  
 $L^{-\omega}$  itération de  $L$  sur  $-\omega$ , page 48  
 $L^{\natural}$  itération de  $L$  sur les ordinaux dénombrables, page 48  
 $L^{\omega}$  itération de  $L$  sur  $\omega$ , page 48  
 $L^{*\xi}$  substitution itérée, page 47  
 $L_1 \diamond L_2$  opération rationnelle  $\diamond$  sur deux langages, page 48  
 $op^{\mathcal{A}}$  opération  $op$  de la signature de l'algèbre  $\mathcal{A}$ , page 35  
 $op^{>1}$  ensemble des opérations  $>1$ -rationnelles, page 97  
 $P(\mathcal{X})$  classe des algèbres qui sont produits directs d'algèbres de  $\mathcal{X}$ , page 37  
 $S(\mathcal{X})$  classe des sous-algèbres des algèbres de  $\mathcal{X}$ , page 37  
 $t((x_i)_{i \in I})$  terme  $t$  où apparaissent au plus les variables qui sont dans la suite  $(x_i)_{i \in I}$ , page 38  
 $T(X)$  ensemble des termes sur  $X$ , page 37

- $t^{\mathcal{A}}$  opération induite par le terme  $t$  sur  $\mathcal{A}$ , page 38
- $V(\mathcal{K})$  plus petite variété contenant la classe d'algèbres de même type  $\mathcal{K}$ , page 37
- $E_N(D)$  ensemble des arcs normaux du D-graphe  $D$ , page 101
- $E_S(D)$  ensemble des arcs spéciaux du D-graphe  $D$ , page 101
- $|E|$  cardinal de l'ensemble  $E$ , page 15
- $Cong(\mathcal{A})$  ensemble des congruences sur l'algèbre  $\mathcal{A}$ , page 36
- $\mathbb{D}$  ensemble des nombres décimaux, page 16
- $0$  poset vide, page 26
- $M(\Xi)$  classe des algèbres qui satisfont toutes les identités de  $\Xi$ , page 39
- $C_x$  classe d'équivalence de  $x$ , page 13
- $\mathcal{C}_{OP}(S)$  fermeture de  $S$  par l'ensemble des opérations  $OP$ , page 11
- $\mathcal{N}$  classe des ordres linéaires finis, page 17
- $Id_{\mathcal{X}}(X)$  ensemble des identités de type algébrique  $\rho$  sur un ensemble de variables  $X$  qu'une classe d'algèbres  $\mathcal{K}$  de type  $\rho$  satisfait, page 40
- $Id(X)$  ensemble des identités sur  $X$ , page 39
- $ker(f)$  noyau de l'homomorphisme  $f$ , page 36
- $\mathcal{S}$  classe des ordres linéaires dénombrables et dispersés, page 22
- $ms_C^X$  ensembles  $((X_c^v)_{c \in C}, ms_{\mathcal{P}(C)}^X)$ , page 146
- $ms_C^X$  ensembles  $(X_c^w, X_c^s, X_c^p)_{c \in C}$ , page 137
- $\mathcal{M}^{>1}(E)$  ensemble des multiensembles sur  $E$  ayant au moins deux éléments, page 15
- $\mathcal{M}(E)$  ensemble des multiensembles sur  $E$ , page 15
- $Ord$  classe des ordinaux, page 20
- $\mathcal{O}$  classe des ordinaux dénombrables, page 20
- $out(n)$  bordure du nœud  $n$ , page 101
- $\mathbb{Q}$  ensemble des nombres rationnels, page 16
- $\mathbb{R}$  ensemble des réels, page 15
- $Rat(\mathcal{M})$  classe des langages rationnels de l'ensemble de posets  $\mathcal{M}$ , page 49
- $f|_E$  restriction de la fonction  $f$  sur  $E$ , page 14
- $Seq$  ensemble des posets séquentiels de  $SP^\diamond$ , page 135
- FO logique du premier ordre, page 70
- MSO logique monadique du second ordre, page 76
- P-MSO extension de la logique MSO qui utilise l'arithmétique de Presburger, page 81

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Almeida. *Finite semigroups and universal algebra*, volume 3 of *Series in algebra*. World Scientific, 1994. (cf. p. 34 et 36)
- [2] A. Amrane and N. Bedon. Logic and rational languages of scattered and countable series-parallel posets. In *Language and Automata Theory and Applications - 13th International Conference, LATA 2019, St. Petersburg, Russia, March 26-29, 2019, Proceedings*, pages 275–287, St. Petersburg, Russian Federation, 2019. (cf. p. 94)
- [3] A. Amrane and N. Bedon. Equational theories of scattered and countable series-parallel posets. In *International Conference on Developments in Language Theory*, pages 1–13. Springer, 2020. (cf. p. 160)
- [4] A. Amrane and N. Bedon. Logic and rational languages of scattered and countable series-parallel posets. *Theor. Comput. Sci.*, 809:538–562, 2020. (cf. p. 94)
- [5] N. Bedon. Finite automata and ordinals. *Theoretical Computer Science*, 156(1-2):119–144, 1996. (cf. p. 3)
- [6] N. Bedon. Automata, semigroups and recognizability of words on ordinals. *Int. J. Alg. Comput.*, 8(1):1–21, February 1998. (cf. p. 4 et 159)
- [7] N. Bedon. Star-free sets of words on ordinals. *Information and Computation*, 166(2):93–111, 2001. (cf. p. 4)
- [8] N. Bedon. Logic and bounded-width rational languages of posets over countable scattered linear orderings. In *International Symposium on Logical Foundations of Computer Science*, pages 61–75. Springer, 2009. (cf. p. 6 et 175)
- [9] N. Bedon. Logic and branching automata. *Logical Meth. in Comput. Sci.*, 11(4:2):1–38, 2015. (cf. p. 6, 7, 64, 81, 94, 154, 157 et 175)
- [10] N. Bedon. Complementation of branching automata for scattered and countable N-free posets. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 19(25):769–799, 2018. (cf. p. 6, 65 et 159)
- [11] N. Bedon, A. Bès, O. Carton, and C. Rispal. Logic and rational languages of words indexed by linear orderings. *Theory of Comp. Syst.*, 46(4):737–760, 2010. (cf. p. 3, 7, 69, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 175 et 176)

- [12] N. Bedon and O. Carton. An Eilenberg theorem for words on countable ordinals. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 53–64. Springer, 1998. (cf. p. 4)
- [13] N. Bedon and O. Carton. An Eilenberg theorem for words on countable ordinals. In Cláudio L. Lucchesi and Arnaldo V. Moura, editors, *Latin'98: Theoretical Informatics*, volume 1380 of *Lect. Notes in Comput. Sci.*, pages 53–64, Campinas, Brazil, April 1998. Springer-Verlag. (cf. p. 159)
- [14] N. Bedon and C. Rispal. Schützenberger and Eilenberg theorems for words on linear orderings. In *International Conference on Developments in Language Theory*, pages 134–145. Springer, 2005. (cf. p. 4)
- [15] N. Bedon and C. Rispal. Series-parallel languages on scattered and countable posets. *Theoret. Comput. Sci.*, 412(22):2356–2369, 2011. (cf. p. 6, 8, 26, 30, 31, 32, 45, 49, 51, 64, 65 et 176)
- [16] N. Bedon and C. Rispal. Schützenberger and Eilenberg theorems for words on linear orderings. *Journal of Computer and System Sciences*, 78(2):517–536, March 2012. (cf. p. 177)
- [17] A. Bès and O. Carton. Algebraic characterization of FO for scattered linear orderings. In *Proc. of CSL'11, LIPIcs*, volume 12, pages 67–81, 2011. (cf. p. 177)
- [18] Alexis Bès and Olivier Carton. A Kleene theorem for languages of words indexed by linear orderings. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 17(3):519–542, 2006. (cf. p. 4 et 176)
- [19] G. Birkhoff. On the structure of abstract algebras. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 31, pages 433–454. Cambridge University Press, 1935. (cf. p. 4)
- [20] S. L. Bloom and C. Choffrut. Long words: the theory of concatenation and  $\omega$ -power. *Theoretical Computer Science*, 259(1-2):533–548, 2001. (cf. p. 4 et 159)
- [21] S. L. Bloom and Z. Ésik. Free shuffle algebras in language varieties. *Theoretical Computer Science*, 163(1-2):55–98, 1996. (cf. p. 6, 7, 44 et 159)
- [22] S. L. Bloom and Z. Ésik. Shuffle binoids. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 32(4-6):175–198, 1998. (cf. p. 7 et 159)
- [23] S. L. Bloom and Z. Ésik. Axiomatizing omega and omega-op powers of words. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 38(1):3–17, 2004. (cf. p. 4, 8, 159, 160, 162 et 173)
- [24] S. L. Bloom and Z. Ésik. The equational theory of regular words. *Information and Computation*, 197(1-2):55–89, 2005. (cf. p. 177)
- [25] V. Bruyère and O. Carton. Hierarchy among automata on linear orderings. *Theory of Computing Systems*, 38(5):593–621, 2005. (cf. p. 45 et 49)
- [26] V. Bruyère and O. Carton. Automata on linear orderings. *J. Comput. System Sci.*, 73(1):1–24, 2007. (cf. p. 3, 45, 48, 49, 58, 60 et 176)
- [27] V. Bruyère, O. Carton, and G. Sénizergues. Tree automata and automata on linear orderings. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 43(2):321–338, 2009. (cf. p. 61)
- [28] J. R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Zeit. Math. Logik. Grund. Math.*, 6:66–92, 1960. (cf. p. 2, 55, 69, 87 et 88)

- [29] J. R. Büchi. On a decision method in the restricted second-order arithmetic. In *Proc. Intern. Congr. on Logic, Methodology and Philosophy of Science, Berkeley 1960*, pages 1–11. Stanford University Press, 1962. (cf. p. 3)
- [30] J. R. Büchi. Decision methods in the theory of ordinals. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(5):767–770, 1965. (cf. p. 3)
- [31] J. R. Büchi. Transfinite automata recursions and weak second order theory of ordinals. In *Proc. Int. Congress Logic, Methodology, and Philosophy of Science (1964)*, pages 2–23. North-Holland Publ. Co., 1965. (cf. p. 3, 55, 69, 87 et 88)
- [32] J. R. Büchi. *The collected works of J. Richard Büchi*. Springer Science & Business Media, 2012. (cf. p. 3)
- [33] O. Carton. Accessibility in automata on scattered linear orderings. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 155–164. Springer, 2002. (cf. p. 61)
- [34] O. Carton, T. Colcombet, and G. Puppis. An algebraic approach to MSO-definability on countable linear orderings. *The Journal of Symbolic Logic*, 2017. (cf. p. 176)
- [35] O. Carton, T. Colcombet, and G. Puppis. Regular languages of words over countable linear orderings. *CoRR*, abs/1702.05342, 2017. (cf. p. 159)
- [36] O. Carton and C. Rispal. Complementation of rational sets on countable scattered linear orderings. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 16(4):767–786, August 2005. (cf. p. 4 et 159)
- [37] C. Choffrut and Z. Ésik. Two equational theories of partial words. *Theoretical Computer Science*, 737:19–39, 2018. (cf. p. 5, 7, 8, 159, 160, 162, 169 et 173)
- [38] Y. Choueka. Finite automata, definable sets, and regular expressions over  $\omega^n$ -tapes. *Journal of Computer and System Sciences*, 17(1):81–97, 1978. (cf. p. 3 et 55)
- [39] T. Colcombet and A. V. Sreejith. Limited set quantifiers over countable linear orderings. In *Automata, Languages, and Programming - 42nd International Colloquium, ICALP 2015, Kyoto, Japan, July 6-10, 2015, Proceedings, Part II*, pages 146–158, 2015. (cf. p. 177)
- [40] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to algorithms*. MIT press, 2009. (cf. p. 98)
- [41] S. Dal Zilio and D. Lugiez. Xml schema, tree logic and sheaves automata. In *International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, pages 246–263. Springer, 2003. (cf. p. 81)
- [42] S. Eilenberg. *Automata languages, and machines (volume B)*, 1976. (cf. p. 2)
- [43] S. Eilenberg and M-P. Schützenberger. Rational sets in commutative monoids. *J. of Algebra*, 13(2):173–191, 1969. (cf. p. 5 et 67)
- [44] C. C. Elgot. Decision problems of finite automata design and related arithmetics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98:21–51, 1961. (cf. p. 2, 69, 87 et 88)
- [45] Z. Ésik and Z. L. Németh. Automata on series-parallel biposets. In *International Conference on Developments in Language Theory*, pages 217–227. Springer, 2001. (cf. p. 5)

- [46] Z. Ésik and S. Okawa. Series and parallel operations on pomsets. In *International Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, pages 316–328. Springer, 1999. (cf. p. 177)
- [47] S. Ginsburg and E. H. Spanier. Semigroups, Presburger formulas, and languages. *Pacific J. of Mathematics*, 16(2):285–296, 1966. (cf. p. 7, 68 et 73)
- [48] D. Girault-Beauquier. Bilimites de langages reconnaissables. *Theoretical computer science*, 33(2-3):335–342, 1984. (cf. p. 3)
- [49] J. L. Gischer. The equational theory of pomsets. *Theoretical Computer Science*, 61(2-3):199–224, 1988. (cf. p. 5)
- [50] J. Grabowski. On partial languages. *Fundam. Inform.*, 4(1):427–498, 1981. (cf. p. 5 et 26)
- [51] F. Hausdorff. *Set theory*, volume 119. American Mathematical Soc., 2005. (cf. p. 3 et 22)
- [52] S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In *Automata studies*, pages 3–41. Princeton University Press, 1956. (cf. p. 1, 45, 47, 49, 53 et 54)
- [53] D. Kuske. Infinite series-parallel posets: logic and languages. In *ICALP 2000*, volume 1853 of *Lect. Notes in Comput. Sci.*, pages 648–662. Springer-Verlag, 2000. (cf. p. 6 et 174)
- [54] D. Kuske. Towards a language theory for infinite N-free pomsets. *Theoret. Comput. Sci.*, 299:347–386, 2003. (cf. p. 6 et 159)
- [55] K. Lodaya and P. Weil. A Kleene iteration for parallelism. In *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, pages 355–366, 1998. (cf. p. 6, 45, 49 et 61)
- [56] K. Lodaya and P. Weil. Series-parallel posets: algebra, automata and languages. In *STACS'98*, volume 1373 of *Lect. Notes in Comput. Sci.*, pages 555–565. Springer-Verlag, 1998. (cf. p. 5, 49, 61 et 63)
- [57] K. Lodaya and P. Weil. Series-parallel languages and the bounded-width property. *Theoret. Comput. Sci.*, 237(1–2):347–380, 2000. (cf. p. 5, 49, 61 et 174)
- [58] K. Lodaya and P. Weil. Rationality in algebras with a series operation. *Inform. Comput.*, 171:269–293, 2001. (cf. p. 6, 45, 49, 61 et 64)
- [59] A. Mazurkiewicz. Concurrent program schemes and their interpretations. *DAIMI Report Series*, 1977. (cf. p. 5)
- [60] W. S. McCulloch and W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, 5(4):115–133, 1943. (cf. p. 1)
- [61] R. McNaughton. Testing and generating infinite sequences by a finite automaton. *Information and control*, 9(5):521–530, 1966. (cf. p. 3 et 47)
- [62] R. McNaughton and S. A. Papert. *Counter-Free Automata (MIT research monograph no. 65)*. The MIT Press, 1971. (cf. p. 2 et 84)
- [63] D. E. Muller. Infinite sequences and finite machines. In *Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design (swct 1963)*, pages 3–16. IEEE, 1963. (cf. p. 3 et 55)

- [64] A. Nerode. Linear automaton transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 9(4):541–544, 1958. (cf. p. 2)
- [65] M. Nivat and D. Perrin. Ensembles reconnaissables de mots biinfinis. *Canadian Journal of Mathematics*, 38(3):513–537, 1986. (cf. p. 3)
- [66] R. J. Parikh. Language generating devices. *Quarterly Progress Report*, 60:199–212, 1961. (cf. p. 5)
- [67] R. J. Parikh. On context-free languages. *J. ACM*, 13(4):570–581, October 1966. (cf. p. 66 et 67)
- [68] D. Perrin. Recent results on automata and infinite words. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 134–148. Springer, 1984. (cf. p. 4)
- [69] D. Perrin and J-E. Pin. First-order logic and star-free sets. *J. Comput. System Sci.*, 32:393–406, 1986. (cf. p. 80)
- [70] D. Perrin and J-E. Pin. Semigroups and automata on infinite words. *NATO ASI Series C Mathematical and Physical Sciences-Advanced Study Institute*, 466:49–72, 1995. (cf. p. 4 et 159)
- [71] V. Pratt. Modeling concurrency with partial orders. *International journal of parallel programming*, 15(1):33–71, 1986. (cf. p. 5)
- [72] M. Presburger. Über die vollständigkeit eines gewissen systems der arithmetischen ganzer zahlen, in welchem die addition als einzige operation hervortritt. In *Proc. Sprawozdaniez I Kongresu Matematykw Krajow Slowianskich, Warsaw*, pages 92–101, 1930. English translation: On the completeness of certain system of arithmetic of whole numbers in which addition occurs as the only operation. *Hist. Philos. Logic*, 12:92–101, 1991. (cf. p. 72)
- [73] M. O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 141:1–5, 1969. (cf. p. 3)
- [74] W. Reisig. *Petri nets: an introduction*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2012. (cf. p. 5)
- [75] C. Rispal and O. Carton. Complementation of rational sets on countable scattered linear orderings. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 16(04):767–786, 2005. (cf. p. 61)
- [76] J. G. Rosenstein. *Linear Orderings*. Academic Press, 1982. (cf. p. 10, 16 et 20)
- [77] H. P. Sankappanavar and S. Burris. *A Course in Universal Algebra*. Dover Publications, Incorporated, 2012. (cf. p. 34, 42 et 43)
- [78] M-P. Schützenberger. Une théorie algébrique du codage. *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, 9:1–24, 1955. (cf. p. 2)
- [79] M-P. Schützenberger and P. Marcel. On finite monoids having only trivial subgroups. *Inf. Control.*, 8(2):190–194, 1965. (cf. p. 2)
- [80] H. Seidl, T. Schwentick, and A. Muscholl. Counting in trees. *Logic and Automata*, 2:575–612, 2008. (cf. p. 81)
- [81] S. Shelah. The monadic theory of order. *Annals of Mathematics*, pages 379–419, 1975. (cf. p. 176)
- [82] H. Straubing. *Finite automata, formal logic and circuit complexity*. Birkhäuser, 1994. (cf. p. 80 et 155)

- [83] B. A. Trakhtenbrot. Finite automata and monadic second order logic. *Siberian Math.*, 3:101–131, 1962. (Russian). Translation in AMS Transl. 59 (1966), 23-55. (cf. p. 2, 69, 87 et 88)
- [84] J. Valdes, R. E. Tarjan, and E. L. Lawler. The recognition of series parallel digraphs. *SIAM J. Comput.*, 11:298–313, 1982. (cf. p. 5 et 32)
- [85] T. Wilke. An Eilenberg theorem for  $\infty$ -languages. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 588–599. Springer, 1991. (cf. p. 4)
- [86] T. Wilke. An algebraic theory for regular languages of finite and infinite words. *Int. J. Alg. Comput.*, 3(4):447–489, 1993. (cf. p. 4 et 159)
- [87] J. Winkowski. An algebraic approach to concurrence. In *MFCS'79*, volume 74 of *Lect. Notes in Comput. Sci.*, pages 523–532. Springer Verlag, 1979. (cf. p. 5 et 26)
- [88] J. Wojciechowski. Finite automata on transfinite sequences and regular expressions. *Fundamenta informaticæ*, 8(3):379–396, 1985. (cf. p. 3, 45, 48, 49, 55 et 57)
- [89] T. Wolfgang. Star-free regular sets of  $\omega$ -sequences. *Information and Control*, 42(2):148–156, 1979. (cf. p. 3)



## Posets série-parallèles : automates, logiques et théories équationnelles

Nous étudions dans cette thèse des structures généralisant la notion classique de mot. Nous considérons la classe de posets construite à partir du poset vide et du singleton, fermée par les produits séquentiel et parallèle finis, et le produit  $\omega$  et  $-\omega$  (*posets série-parallèles*). Du point de vue de la logique, nous généralisons le théorème de Büchi, Elgot et Trakhtenbrot, établissant pour le cas des langages de mots finis l'égalité entre la classe des langages rationnels et celle des langages définissables en logique monadique du second ordre (MSO). La logique mise en œuvre est une extension de MSO par de l'arithmétique de Presburger. D'un point de vue algébrique, nous montrons que l'algèbre dont l'univers est la classe des posets série-parallèles transfinis et dont les opérations sont les produits séquentiel et parallèle finis et les produits (resp. puissances)  $\omega$  et  $-\omega$  est libre dans la variété correspondante  $V$  (resp.  $V_0$ ). Nous en déduisons la liberté de la même algèbre sans le produit parallèle ou le produit  $-\omega$ . Enfin, nous montrons que la théorie équationnelle de  $V_0$  est décidable.

## Series-parallel posets : automata, logic and equational theories

We study in this thesis structures extending the classical notion of word. We consider the class of posets built from the empty poset and the singleton, and being closed under sequential and parallel products, and  $\omega$  product and its backward ordering  $-\omega$  (*series-parallel posets*). From the logic point of view, we generalize the Büchi-Elgot-Trakhtenbrot theorem, establishing in the case of finite words the correspondence between the class of rational languages and the one of languages definable in monadic second order logic (MSO). The implemented logic is an extension of MSO by Presburger arithmetic. From the algebraic point of view, we show that the algebra whose universe is the class of transfinite series-parallel posets and whose operations are the sequential and parallel products and the  $\omega$  and  $-\omega$  products (resp. powers) is free in the corresponding variety  $V$  (resp.  $V_0$ ). We deduce the freeness of the same algebra without parallel or  $-\omega$  product. Finally, we show that the equational theory of  $V_0$  is decidable.