



**HAL**  
open science

# Tomographie de l'Océan Indien par inversion de forme d'onde

Mathurin Dongmo Wamba

► **To cite this version:**

Mathurin Dongmo Wamba. Tomographie de l'Océan Indien par inversion de forme d'onde. Sciences de la Terre. Université Paris Cité, 2020. Français. NNT : 2020UNIP7077 . tel-03216584

**HAL Id: tel-03216584**

**<https://theses.hal.science/tel-03216584v1>**

Submitted on 4 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS



Thèse préparée à l'Institut de Physique du Globe de Paris  
École Doctorale STEP'UP – ED 560  
IPGP – Équipe de Sismologie

# Tomographie de l'océan Indien par inversion de forme d'onde

par

**Mathurin DONGMO WAMBA**

Thèse de doctorat de Sciences de la Terre et de l'environnement

présentée et soutenue publiquement le  
10 Juillet 2020

devant un jury composé de

<b>Yann capdeville</b>	Directeur de Recherche (LPG,Nantes,France) .....	Rapporteur
<b>Eric Debayle</b>	Directeur de Recherche (UCB, Lyon,France) .....	Rapporteur
<b>Eléonore Stutzmann</b>	Physicienne (IPG, Paris,France) .....	Présidente
<b>Frederik J. Simons</b>	Professeur (Princeton, U.S.A) .....	Examineur
<b>Jean-Paul Montagner</b>	Professeur (IPGP,Paris,France) .....	Directeur de thèse
<b>Barbara Romanowicz</b>	Professeure (IPGP,CLG. de France,U.C.Berkeley) ...	Directrice de thèse



UNIVERSITÉ DE PARIS



Thèse préparée à l'Institut de Physique du Globe de Paris  
École Doctorale STEP'UP – ED 560  
IPGP – Équipe de Sismologie

# Tomographie de l'océan Indien par inversion de forme d'onde

par

**Mathurin DONGMO WAMBA**

Thèse de doctorat de Sciences de la Terre et de l'environnement

présentée et soutenue publiquement le  
10 Juillet 2020

devant un jury composé de

<b>Yann capdeville</b>	Directeur de Recherche(LPG,Nantes,France) .....	Rapporteur
<b>Eric Debayle</b>	Directeur de Recherche(UCB, Lyon,France) .....	Rapporteur
<b>Frederik J. Simons</b>	Professeur (Princeton, U.S.A) .....	Examineur
<b>Jean-Paul Montagner</b>	Professeur (IPGP,Paris,France) .....	Directeur de thèse
<b>Barbara Romanowicz</b>	Professeure (IPGP,CLG. de France,U.C.Berkeley) ...	Directrice de thèse





## Résumé

L'arrivée des panaches et la naissance des points chauds à la surface de la terre serait probablement la cause de la fragmentation de la Pangée il y a  $\sim 200$  Ma, au cours du jurassique. Le Gondwana était formé de plusieurs masses continentales telles que l'Afrique, l'Australie, l'Inde et l'Antarctique. La fin du crétacé a été affectée par une crise biologique causée par un cataclysme volcanique et/ou dû à astéroïde, qui a provoqué la disparition d'environ 90% des vies sur terre, y compris celle des dinosaures, et a produit les trapps du Deccan en Inde, d'une superficie d'environ 2 millions de  $\text{km}^2$  et d'une épaisseur de 2,5-3 km. C'est de ce désastre qu'à vu le jour le point chaud de la Réunion il y a  $\sim 65$  Ma, la plaque indienne a alors amorcé sa dérive vers le nord avec une vitesse d'environ **18-20 cm/an**, et la fermeture de l'océan Téthys s'amorça au devant de la plaque indienne, cependant la remontée des laves basaltiques sous les rides forma un nouveau plancher océanique derrière la plaque indienne : c'était alors la naissance de l'océan Indien. En 1953, le chercheur canadien Tuzo Wilson a suggéré qu'un tel volcan intra-plaque serait dû à un point chaud fixe dans le manteau capable de créer des chapelets d'îles volcaniques à la surface lorsqu'une plaque lithosphérique passe au-dessus ; plus tard en 1971, Jason Morgan a suggéré que les points chauds sont alimentés par des panaches thermiques en provenance de la limite noyau-manteau dus à des instabilités thermiques. Le but de cette thèse est d'investiguer l'état actuel du panache Réunionnais dans toute l'étendue de l'océan indien, responsable de nombreuses îles volcaniques comme les Maldives, Maurice et La Réunion. En appliquant les techniques d'inversion de forme d'onde, nous sommes capables d'imager la structure de la terre sous la Réunion jusqu'au manteau inférieur. Nous utilisons les données RHUM-RUM ainsi que des données collectées via la **FDSN** (Federation of Digital Seismograph Networks) data center. Nous avons bâti le problème direct à l'aide des éléments spectraux. Pour ce cas régional, nous utilisons la code RegSEM (Regional spectral element method) afin de calculer des sismogrammes synthétiques qui sont ensuite comparés aux sismogrammes réels. Nous avons sectionné la forme d'onde en plusieurs paquets d'ondes, chaque paquet d'onde correspond à un mode spécifique. Nous inversons pour deux paramètres, la vitesse isotrope et l'anisotropie radiale. Le résultat montre une zone importante d'anomalie de vitesse lente s'étendant de l'Est à l'Ouest sur près de  $\sim 2100$  km dans le bassin des Mascareignes à une profondeur de 200 km. Notre modèle met également en évidence un panache sous le point chaud de la Réunion doté d'une tête épaisse dans le manteau supérieur et d'une queue étroite ancrée dans le manteau inférieur. Notre modèle apporte une lumière sur la connexion entre le panache Réunionnais et la LLSVP (Large Low Shear Velocity Province) Sud-Africaine, ainsi qu'entre l'anomalie des Mascareignes et la base du manteau inférieur.







## Summary

The arrival of some plumes and the birth of hotspots at the Earth surface is more likely the cause of the break up of the Pangea  $\sim 200\text{Ma}$  ago, during the jurassic era. The Gondwana was formed by many continental masses like Africa, Australia, India and Antarctic. The late cretaceous was affected by a biological crisis caused by a volcanic and/or asteroid cataclysm which provoke the disappearance of 90% of life on the Earth including dinosaurs, and produced India Deccan traps with an area of 2 millions  $\text{km}^2$  and thickness of 2.5-3 km. This volcanic disaster was associated with the birth of la Réunion hotspot  $\sim 65\text{ Ma}$  years ago, from there the india plate entered into the northward migration with a velocity of about **18-20 cm/year**, and the closure of the Tethys ocean in front of the indian plate started; in the meantime the raising of basaltic lava from the indian ridges formed a new ocean floor behind the indian plate: this was the birth of indian ocean. In 1953 the Canadian researcher Tuzo Wilson suggested that such an intra-plate volcano may be due to a fixed hotspot in the mantle capable to create successive volcano on the surface; later in 1971 Jason Morgan suggested that the hotspot is fed by a mantle plume rising from the core-mantle boundary due to thermal instabilities. The goal of this thesis is to investigate the actual state of the plume in the entire indian ocean, responsible of many volcanic islands such as Maldives, Maurice and Réunion. By applying waveform inversion we are able to image the earth structure down to the lower mantle; we use Rhum-Rum data and also data collected from **FDSN** (Federation of Digital Seismograph Networks) data center to perform our inversion. We perform the forward modelling with the spectral element method. For this regional case we use RegSEM (regional spectral element method) to compute synthetic seismograms that were compared to real seismograms later on. We divided the waveform into several wavepackets, each wavepacket corresponds to a specific mode. We inverted for two parameters, isotropic velocity and radial anisotropy. The result shows a large velocity anomaly channel extending from East to West over nearly  $\sim 2100\text{ km}$  in the Mascarene basin at a depth of 200 km. Our model also bring to light a plume under the Reunion hotspot with a broad head in the upper mantle and a narrow tail anchored in the lower mantle. Our model sheds light on the connection between the Reunion plume and the South African LLSVP (Large Low Shear Velocity Province), as well as between the Mascarene anomaly and the base of the lower mantle.



# Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier **INSPIRE** (INterdiSciPlinarity and excellence for doctoral training of International REsearchers in Paris), co-financement USPC et Commission Européenne, et le **Collège de France** qui ont financé ce projet, ainsi que L'Institut de Physique du Globe de Paris au sein du quel cette thèse s'est déroulée. Je remercie du fond du cœur mes encadrants **Jean-Paul Montagner & Barbara Romanowicz** pour les bases et concepts scientifiques que vous m'avez inculqués, je tiens également à témoigner ici des conseils, encouragements et soutien incommensurable au cours de mes années passées auprès de vous. Additionnellement, je remercie sincèrement ma famille qui malgré la distance qui nous sépare a su m'apporter son soutien moral et encouragement ; Maman, Papa (paix à son âme), Tante (**Anne Kana**) et frère (**David Kaze**), j'apprécie ici l'éducation de base que vous m'avez inculquée. Mes remerciements vont également à **Geneviève Moguilny, Haydar Karaoglu & Hugo Jimenez** qui ont sur le plan informatique aidé à l'installation des codes de d'inversion de la forme d'onde développé à Berkeley sur le cluster (Malbec) de L'IPGP. A tous mes "co-bureau" je passe un coucou, car vous avez été une pièce essentielle (de par des petits jeux de divertissement, conseils) dans la réussite de cette thèse. A tous les membres du laboratoire je ne cesserai de vous dire merci pour les moments chaleureux que nous avons passés ensemble, sans oublier les « bières-parties », et surtout les rencontres de foot-ball. Un grand merci aux **membres du jury** qui ont accepté de consacrer leur précieux temps dans l'évaluation de ce travail. Je n'imagine pas comment j'aurai pu accomplir cette tâche sans le soutien de ma compagne **Emireine**, tu as toujours été là pour moi, malgré la distance qui nous a souvent séparé. Je ne saurais terminer ces remerciements sans témoigner le soutien au quotidien de la famille **Tchuisseu** depuis mon arrivée à Paris, à mon amis d'enfance **Armand Tabakam** et tous ceux que j'ai omis de mentionner leur noms.



# Table des matières

Résumé .....	4
Summary.....	7
Table des matières.....	12
Liste des figures .....	18
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
0.1 Généralités sur la dérive de l'Inde .....	19
0.2 Modélisation des panaches .....	23
0.3 Intérêts et enjeux scientifiques de l'étude du panache Réunionnais .....	25
0.4 Problème direct et principes fondamentaux.....	26
0.5 Sélection et pondération des données .....	31
<b>1 Modes propres de la Terre</b>	<b>37</b>
1.1 Approximation moyenne le long du trajet .....	40
1.2 Équation du mouvement dans un modèle perturbé.....	42
1.3 Théorie de couplage asymptotique non linéaire des modes propres (NACT) .....	50
<b>2 Problème inverse</b>	<b>55</b>
2.1 Paramétrisation du problème inverse .....	55
2.1.1 Les fonctions b-spline radiales .....	55
2.1.2 Les splines sphériques .....	57
2.1.3 Intégrale le long du trajet (path-integral).....	58
2.1.4 Paramétrisation physique du modèle.....	59
2.1.5 Paramétrisation géographique du modèle.....	60
2.2 Calcul des noyaux de sensibilité .....	62
2.2.1 Sensibilité dans le cadre de la théorie des rais.....	63
2.2.2 Sensibilité dans le cas de fréquence finie .....	63
2.2.3 Sensibilité de la vitesse de groupe .....	64
2.2.4 Sensibilité de $V_s$ et $\xi$ .....	67
2.3 Approximation du Hessien au premier ordre pour une inversion hybride .....	69
2.3.1 Sens physique du Hessien .....	73
2.3.2 Information a priori.....	78
2.3.3 Conclusion Préliminaire .....	79
2.4 Croûte et Homogénéisation.....	81
2.5 Construction de la croûte.....	83
2.5.1 Correction de croûte .....	85
<b>3 Tomographic Model of Indian Ocean</b>	<b>87</b>

3.1	A narrow plume conduit anchored in lower mantle beneath la Réunion hotspot .	87
3.1.1	Abstract .....	87
3.2	Introduction.....	88
3.3	Methods .....	89
3.4	Model parametrization .....	90
3.5	Sensitivity kernel matrix .....	91
3.6	Tomography dataset.....	92
3.7	Deep structure beneath the Indian ocean inferred from waveform inversion.....	94
3.7.1	uppermost mantle (down to 410km) .....	94
3.7.2	Transition zone and lower mantle .....	97
3.7.3	Correlation between shear velocity model and radial anisotropy .....	98
3.7.4	Plume originating from the lower mantle.....	100
3.8	Discussion.....	102
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>105</b>
	<b>Références</b>	<b>106</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>111</b>
A.1	<b>Rappels importants de notions de dérivées</b> .....	112
A.1.1	<b>Obtention du modèle régional à partir du modèle SEMUCB-WM1</b>	112
A.2	Variance résiduelle des différentes phases .....	112
A.3	Comparaison des paquets d'ondes dans les différents modèles .....	112
A.4	<b>Comparison of observed data and synthetics computed in SEMUCB-WM1 and SEMindo</b> .....	113
A.5	<b>Resolution test</b> .....	115
A.6	Workflow of the methodology.....	118
A.7	Workflow description .....	119
A.8	Construction de la Croûte .....	121

# Table des figures

1	Début de la dislocation de la masse continentale Antarctique-Australie-Inde, naissance de l'océan Atlantique (il y a $\sim 120$ Ma d'années), et Indien, la flèche noire indique le début de la naissance de l'océan Atlantique. ....	20
2	Migration de l'Inde vers l'Asie, après son détachement des autres masses continentales (il y a $\sim 50$ Ma d'années), la flèche noire indique le sens de déplacement de l'Inde. ....	20
3	Topographie et profondeur de la limite lithosphère-asthénosphère (LAB) dans l'océan Indien et ses environs. Les triangles noirs représentent les stations sismiques utilisées, les cercles rouges représentent la position des points chauds dont les conduits sont indiqués par les flèches rouges. On voit que le continent Indien est moins épais ( $\sim 100$ km) que les autres plaques (comportant des continents) dérivant de la fragmentation du Gondwana Kumar et al. (2007). ....	21
4	Les différentes coupes verticales (en bas) suivant les 6 profils (en haut) montrent la variation en profondeur de la perturbation de vitesse <b>des ondes S polarisées verticalement (<math>V_{sv}</math>) par rapport à la moyenne</b> . Les zones en bleu délimitées par des pointillés noirs sont des zones où la vitesse $V_{sv}$ est rapide par rapport à la moyenne (elles sont dites froides et rapides). Ces pointillés noirs mettent en évidence ici l'épaisseur de la lithosphère (i.e. la limite lithosphère-asthénosphère ou encore LAB) qui varie en fonction du profil et est de l'ordre d'une centaine de kilomètres. Pour déterminer cette épaisseur un « cutoff » de 1.25 % a été appliqué sur la perturbation de vitesse (i.e. $\Delta V_{sv}/V_{sv} > 1.25\%$ , ce qui a permis d'estimer l'épaisseur de la lithosphère en pointillés noirs sur les coupes). Les zones rouges sont dites chaudes et lentes, et peuvent être associées au bouclier du précambrien Indien. Les abréviations marquées en noir sur les coupes (exemple Singhbhum Craton (SC), Central Indian (CI)) sont les noms des différents cratons (Maurya et al. (2016)). ....	22
5	Modélisation numérique du panache thermique, de gauche à droite on voit le début de la formation du panache, qui prend ensuite de l'ampleur au cours du temps en se développant sous forme de champignon Farnetani and Samuel (2005). ....	24
6	Évolution des instabilités thermo-mécaniques, génératrices d'un mouvement ascendant de panaches, les isothermes (en rouge) sont marqués de particules thermochromiques (i.e. capables de changer de couleur en fonction de la température). À 470s et à 840s on voit le début de la formation du panache, qui prend ensuite de l'ampleur entre 950s-1460s avec une queue étroite surmontée d'une grosse tête (Davaille et al. (2005)). ....	24



7	Stations sismiques large-bande déployées dans l'océan indien, les cercles rouges indiquent les stations au fond de mer (obs) et les stations continentales mises en place dans le cadre du projet RHUM-RUM, les cercles jaunes indiquent les stations permanentes installées dans l'océan indien depuis plusieurs années. Les stations du projet MACOMO Array sont représentées par des cercles de couleur bleue, les points noirs représentent la sismicité de la région (beaucoup plus intense sur la dorsale médio-océanique). Les figures insérées en haut (à gauche) et en bas (à droite) présentent les modèles de sismomètres large-bande déployés dans le cadre du projet RHUM-RUM respectivement par l'Allemagne et la France (Mazzullo et al. (2016)).	26
8	Anomalie de vitesse d'onde de surface et l'anisotropie azimutale autour du point chaud de la Réunion, on voit une forte anomalie de vitesse lente dans le bassin de Mascareigne à 170 km (à gauche) et à 200km (à droite), cette anomalie a été dénommée MBAR (Mascarene Basin Asthenospheric Reservoir) par Barruol et al. (2019) et Mazzullo et al. (2016). Cependant l'origine de cette anomalie en profondeur reste controversée.	26
9	Trajet entre la source sismique de magnitude 6.5 (en étoile jaune), de profondeur 120 km et la station RER représentée en triangle.	28
10	Accélération du sol enregistrée par la station RER, sur ses trois composantes (verticale, nord-sud, est-ouest) ; transformées en composantes verticales, longitudinales et transverses, cette donnée a été filtrée entre 40-400s.	28
11	Maillage de la région d'étude (océan et continent indien), le chunk a une superficie de $89^\circ \times 89^\circ$ , dans cette méthode des éléments spectraux, nous ne faisons pas le maillage de la couche d'eau, elle est remplacée par une pression ( $\rho gh$ ). La longueur d'onde minimale que nous propageons ici à 40s est de 160 km, la taille horizontale des éléments est d'environ $d_h \leq 1.15^\circ$ et la distance entre les points de Gauss-Lobatto-Legendre est $\Delta x = 0.9$ . Pour éviter les multiples réflexions aux bords du domaine nous exploitons les PML « Perfectly Matched Layers » Festa and Vilotte (2005).	29
12	Comparaison des donnée observée (rouge) et de la donnée calculée (bleu) à l'aide du code RegSEM, à la station RER, sur les trois composante (vertical, radiale et transverse). la donnée observée et calculée sont filtrées dans la bande passante de 40-400s. La magnitude du séisme est de 6.5 et sa est profondeur de 120 km, cette donnée est identique à celle de la figure 10.	30
13	Sources (cercles jaunes) et récepteurs (triangles bleus) utilisés dans cette étude, les chunks RegSEM ( représentés ici en différentes couleurs : bleu, rouge, et rouge violacé) permettent d'inclure les événements télésismiques, environ 200 événements et 414 stations sismiques sont représentées. Les magnitudes des événements sont $5.0 \leq M \leq 7.0$	31
14	Comparaison des données réelles (en rouge) et des synthétiques (en bleu) calculés dans le modèle de départ SEMUCB-WM1, les triangles noirs représentent les stations sismiques, et la source est représentée par l'étoile rouge. La magnitude du séisme est de 7.0 et sa profondeur est de $\sim 80\text{km}$ ; la comparaison est faite sur les composantes Z,L,T.	32

15	Exemple d'un paquet d'onde sélectionné sur la composante radiale, la donnée observée est en rouge et le synthétique correspondant est en bleu, la carte insérée montre le trajet correspondant (la source en rouge et la station RER, en jaune), sur cet exemple le sismogramme synthétique est calculé dans le modèle de départ, $t_0$ et $t_1$ correspondent à la fenêtre délimitant le paquet d'onde (mode harmonique).....	34
16	Dans cet exemple le paquet d'onde non sélectionné est constitué du mode harmonique XR1 et du mode fondamental R1 de la composante verticale, la donnée observée est en rouge et la donnée calculée en bleu, la carte insérée montre le trajet correspondant (la source en rouge et la station RER, en jaune), le sismogramme synthétique est calculé dans le modèle de départ, $t_0$ et $t_1$ correspondent à la fenêtre délimitant le paquet d'onde (mode harmonique et fondamental).....	35
17	Exemple de paquet d'onde sélectionné, constitué du mode harmonique XR1 et du mode fondamental R1 de la composante transverse, la donnée observée est en rouge et le synthétique correspondant est en bleu, la carte insérée montre le trajet correspondant (la source en rouge et la station RER, en jaune), le sismogramme synthétique est calculé dans le modèle de départ, $t_0$ et $t_1$ correspondent à la fenêtre délimitant le paquet d'onde (mode harmonique et fondamental). ...	36
1.1	Propagation de l'onde de la source (★) vers le récepteur (▲), dans un milieu décrit par sa densité ( $\rho(X)$ ) et la célérité ( $c(X)$ ), le signal en rouge est l'onde (déplacement instantané du sol $d(X_r, t)$ /donnée) enregistrée par le récepteur. ...	37
1.2	Spectre sur 35 heures de la composante radiale du sismogramme du séisme de Bolivie (9 juin 1994) enregistré en Californie, on remarque que certains pics correspondent à plusieurs modes (exemple le pic de fréquence 0.96 correspond aux modes ${}_1S_3$ et ${}_3S_1$ ) indiquant ainsi le couplage entre les modes ayant les mêmes fréquences, le trait continu est le spectre observé, et le trait en pointillés est le spectre prédit à l'aide d'un modèle de vitesse (Dahlen and Tromp 1998). ...	50
1.3	Le couplage entre les modes d'une même branche ( $n$ fixé et $\ell$ variable, PAVA) permet de calculer les noyaux de sensibilité 1D, et le couplage entre les modes de différentes branches ( $\ell$ fixé et $n$ variable, NACT) nous permet de calculer les noyaux de sensibilité 2D, ce qui permet de capter les hétérogénéités latérales (Li and Romanowicz 1996). Le couplage à travers les différentes branches permet d'inclure les courtes périodes et de prendre en compte le caractère de rais des ondes volume, voir la relation $ka = (\ell + 1/2)$ . ....	51
2.1	Représentation des b-splines radiaux (cubique), à droite est représenté le zoom de la figure de gauche entre 50-700 km. ....	57
2.2	Représentation des splines sphériques (latéraux) sur tout le globe terrestre, les splines en rouge représentent le domaine où l'inversion est effectuée dans cette étude, la distance $\Delta_{ij}$ entre deux splines $i$ et $j$ est de $\sim 200$ km. ....	58
2.3	Trajet d'une particule allant du point A repéré par $(t_a, x_a)$ au point B repéré par $(t_b, x_b)$ en mécanique classique.....	59
2.4	Trajets possibles d'une particule allant d'un point A repéré par $(t_a, x_a)$ au point B repéré par $(t_b, x_b)$ en mécanique ondulatoire. ....	59

2.5	Différents trajets découpant une anomalie de vitesse lente par exemple (objet rouge supposé chaud), les stations sismiques sont représentées par des triangles noirs et sources par des étoiles rouges. Dans ce cas l'imagerie de l'anomalie est plus probable, parce que plusieurs trajets se croisent sur elle. ....	74
2.6	Paramétrisation en bloc, ici les blocs sont numérotés de $j = 1, \dots, M$ et les trajets entre les sources (étoiles rouges) et les stations (triangles noirs) numérotés de $i = 1, \dots, N$ . Cette paramétrisation permet de mieux échantillonner la région dans l'optique de retrouver l'anomalie de la figure 2.5 .....	75
2.7	Exemple d'un problème sous déterminé où nous avons moins de trajets que de blocs ( $N < M$ ); La couleur rouge indique les blocs les plus traversés par les ondes sismiques et la couleur bleue des blocs les moins traversés par des trajets. Par contre les blocs blanc principalement situés entre les zones rouges et bleues, représentent ici des blocs qui n'ont pas été échantillonnés par les ondes sismiques. ....	77
2.8	Exemple d'ondelette de Fourier $w_{n_1, n_2}(r)$ (à gauche) et sa correspondance dépendant du vecteur d'onde (à droite) $k$ , $w_{n_1, n_2}(k)$ avec $k = n/(r_\Omega - r_a)$ pour $n_0/(r_\Omega - r_a) \sim 1 km^{-1}$ (Capdeville et al. 2013) .....	83
2.9	Workflow de la construction de la croûte homogénéisée à l'aide des données (mesurées entre 25-60s) de courbes de dispersion de vitesse de groupe des ondes de Rayleigh et de Love.....	85
3.1	Left: Spherical spline node distribution. The red dots delimited by the dashed red line represent the regional nodes that fall in the region of interest with spacing of $2^\circ \times 2^\circ$ . Right: cubic-splines used for the vertical parametrization (with zoom from 100-700km showing the distribution of cubic splines in the upper mantle transition zone). ....	90
3.2	Sources (yellow dots) and receivers (blue triangles) used in this study. The three RegSEM chunks used to allow us to include teleseismic events are represented here by red, blue and magenta lines, respectively. Our dataset comprises 200 events and 414 seismic stations including 57 ocean bottom seismometers ( <b>OBSs</b> ) from the RHUM-RUM experiment around la Réunion hotspot. ....	93
3.3	Path coverage for the entire dataset. It comprises about $\sim 1500$ intersecting paths across Indian ocean, with denser coverage around the island of la Réunion. ....	93
3.4	Hit count map (per unit area) for fundamental, higher and mixed mode of Rayleigh waves (left). The red (resp. blue) areas correspond to regions where the path coverage is the denser (resp. poorer); the whole region is better sampled by Rayleigh wave than by Love wave. ....	94
3.5	Hit count map (per unit area) for fundamental, higher and mixed mode of Love wave, showing how the region is sampled by Love waves. The southern part is less covered because of the lack of seismic stations and sources. ....	94
3.6	Comparison of mean isotropic velocity of the starting model SEMUCB-WM1 (black) and updated model SEMindo (yellow) on the left, as well as radial anisotropy (rep. right) ( $\xi = V_{SH}^2/V_{SV}^2$ ). ....	95

3.7	Comparison of the starting model (SEMUCB-WM1) on the left, and the updated model (SEMindo) on the right at depths of 100 and 150 km. The shear wave velocity perturbation is plotted relative to the regional average plotted on the <b>Figure 3.6</b> (left column).	96
3.8	Comparison of the starting model (SEMUCB-WM1) on the left panel, and the updated model (SEMindo) on the right panel at depths of 200, 300 and 400 km. The shear wave velocity perturbation is plotted relative to the regional average with the same color scale. The overall amplitudes of the anomalies decrease with depth but their signatures are still visible at the base of the asthenosphere at 400 km depth.	97
3.9	View of both models (SEMUCB-WM1, left panel) and updated model (SEMindo, right panel) in the upper mantle transition zone. Due to the decrease of the amplitude with the depth, the models are plotted with a color scale lower than the one used Fig 3.7, 3.8 for the uppermost mantle structures. The main low velocity structures on the both sides of the CIR are still visible in the transition zone, and the Eastern anomaly spreads more towards the East at 500-660 km depth as we can see on the right panel.	98
3.10	Correlation between the velocity model (left panel) and radial anisotropy model (right panel), both are resolved on the same grid and they are in agreement on the continent as well as in the ocean, but more particularly on the two principal anomalies on either sides of the Central Indian Ocean.	99
3.11	Comparison at 200-300 km depth of radial anisotropy of SEMUCB-WM1 model (left panel) and radial anisotropy model from this study (right panel), in our model we resolve more features. The two principal anomalies are not shown on the starting model.	99
3.12	Comparison of cross-sections of SEMUCB-WM1 model (left panel) and this study (right panel). In our model we resolve features beneath la Réunion and Marion hotspots. Both cross-sections pass through the Mascarene basin and show a narrow conduit connecting the border of the LLSVP. In the upper mantle, the low velocity anomaly then spreads beneath the Mascarene Basin, toward the CIR and beyond.	101
3.13	Cross-sections of SEMindo model (this study); the cross-sections still show a narrow conduit rooted above the South Africa LLSVP, the amplitude of the conduit is the same as in the previous cross-sections that can be related to the discharge of the conduit content in the upper mantle; the history of the carlsberg slab is well tracked (fast velocity anomaly on the cross-section, see (i) on both right and left panel) as well as the Sumatra subduction zone, see (j) right panel.	101
A.1	Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMind (this study, right panel). The correlation between the observed data and synthetic is close to the unity $\sim 0.92$ in SEMindo, the comparison is done on the Z-component and the higher mode is compared along the path with epicentral distance $\sim 5600$ km.	113

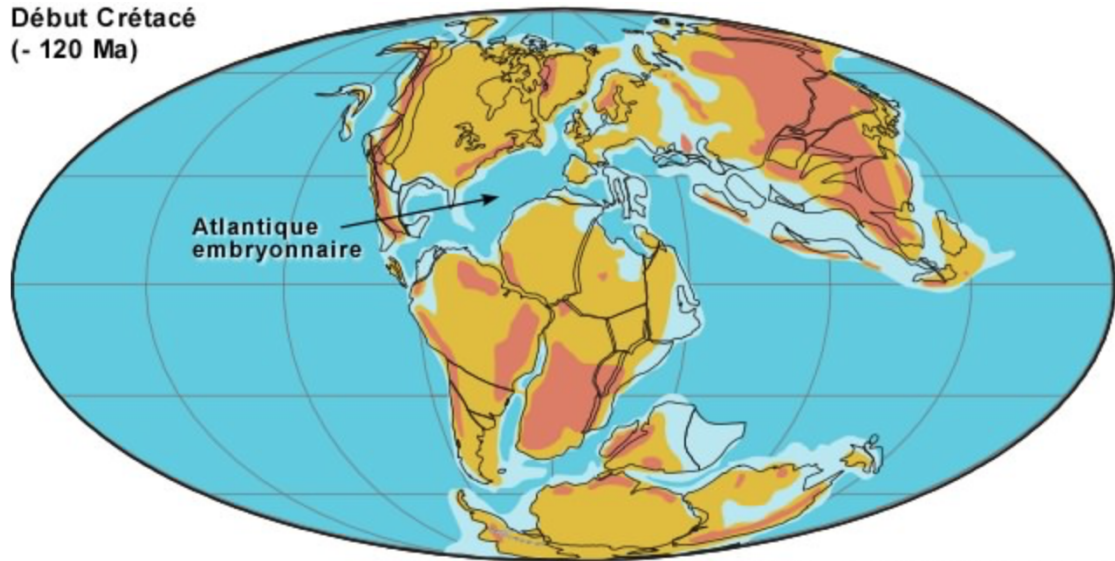
A.2	Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMind (this study, right panel) along a seismic path around la Réunion. The correlation between the observed data and synthetic is $\sim 0.94$ in SEMindo, the higher mode is compared here on the radial component is compared (L-component) and the epicentral distance is about $\sim 6600$ km. ...	114
A.3	Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMind (this study, right panel) along mixed path (continental and oceanic). The correlation between the observed data and synthetic is $\sim 0.96$ in SEMindo, the higher mode is compared here on the radial component is compared (L-component) and the epicentral distance is about $\sim 7500$ km. ....	114
A.4	Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMind (this study, right panel) around la Réunion (oceanic path). The correlation between the observed data and synthetic is $\sim 0.94$ in SEMindo, the higher mode is compared here on the radial component is compared (Z-component) and the epicentral distance is about $\sim 6300$ km. ...	115
A.5	Resolution of the test, the input plume models are shown in the left panel with the width of 400 km, the amplitudes are 0.002 (right panel above) and 0.01 (right panel below). The output are shown on the right panel.....	115
A.6	Resolution test in the upper mantle, the input model (right panel) has a width of 200 km and the amplitude of 0.02. The output is shown on the right panel. .	116

# Introduction

## 0.1 Généralités sur la dérive de l'Inde

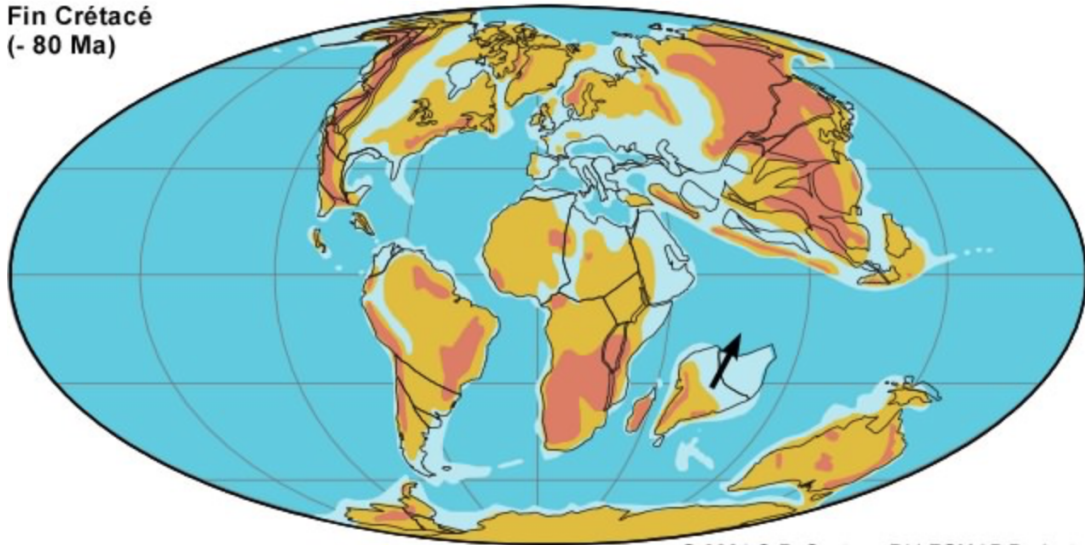
Le piton de la fournaise est connu comme le troisième volcan le plus actif au monde, après celui d'Hawaï et de l'Etna. Il est situé sur l'île de la Réunion à  $55.5^{\circ}\text{E}$  et  $21^{\circ}\text{S}$  et un peu plus grand que le Karthala situé au Comores. Ce volcan intra-plaque est dit « volcan de point chaud ». Cette appellation est due au fait qu'il est différent de par sa position (à l'intérieur de la plaque) de la plupart des volcans, généralement situés à la frontière des plaques. Le chercheur Canadien Tuzo Wilson fut le tout premier en 1963 à proposer l'idée d'un point chaud fixe dans le manteau capable de créer une chaîne successive d'îles volcaniques en surface lorsqu'il est surmonté par une plaque tectonique en mouvement. L'arrivée des panaches en surface serait responsable de la dislocation de la Pangée en plusieurs continents il y a  $\sim 200$  millions d'années. Au cours du Jurassique, l'Amérique du sud, l'Afrique, l'Antarctique, l'Inde et l'Australie formaient un super continent appelé **Gondwana**, mais c'est à la fin du Jurassique (il y a  $\sim 160$  millions d'années) que la fracturation du Gondwana s'est accrue et a commencé à individualiser les masses continentales que nous connaissons aujourd'hui. La fin du crétacé est marquée par le détachement de l'Inde des autres masses continentales et le début de sa migration vers l'Asie. Au cours de cette migration l'océan **Téthys** se ferme devant la plaque indienne et derrière elle, naît l'océan indien, à mi-chemin un volcan submerge l'Inde de lave (naissance des trapps du Deccan), alors l'Inde vient d'être perforé par un point chaud. Pendant cette période de déplacement vers le nord, la vitesse de l'Inde atteint les **18-20 cm/an** (Kumar et al. 2007), car elle est entraînée par le plancher océanique de l'océan Téthys (qui subducte sous l'Eurasie), et accélérée par le point chaud ; Entre temps la remontée du basalte le long des dorsales forme un nouveau plancher océanique (c'est la naissance de l'océan indien). Le volcan qui a submergé l'Inde de sa lave est situé à la Réunion et les trapps du Deccan (qui s'étendent sur une superficie d'environ 2 millions  $\text{km}^2$  et 2.5-3 km d'épaisseur) produites à cette époque sont localisées au sud-ouest du continent indien aujourd'hui, c'est-à-dire à environ 4800 km de l'île de la Réunion ; donc l'Inde aurait parcouru en moyenne 4600 km depuis son détachement du Gondwana.

Début Crétacé  
(- 120 Ma)



**Figure 1** – Début de la dislocation de la masse continentale Antarctique-Australie-Inde, naissance de l’océan Atlantique (il y a ~120 Ma d’années), et Indien, la flèche noire indique le début de la naissance de l’océan Atlantique.

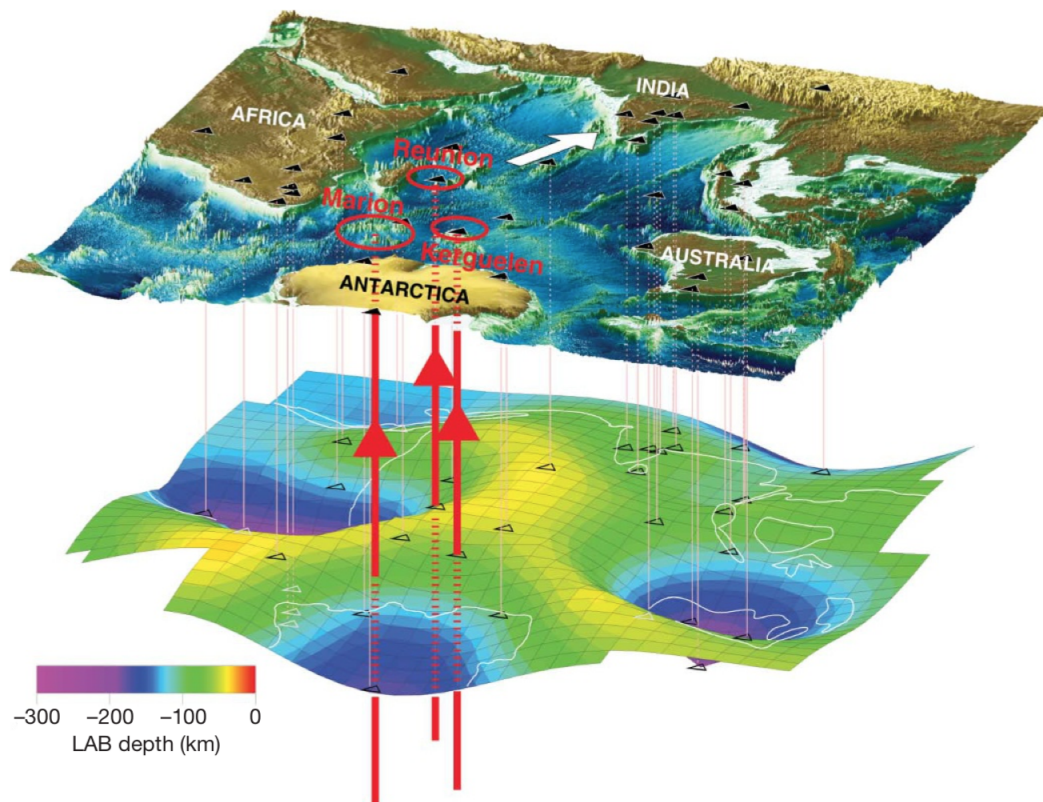
Fin Crétacé  
(- 80 Ma)



**Figure 2** – Migration de l’inde vers l’Asie, après son détachement des autres masses continentales (il y a ~ 50 Ma d’années), la flèche noire indique le sens de déplacement de l’inde.

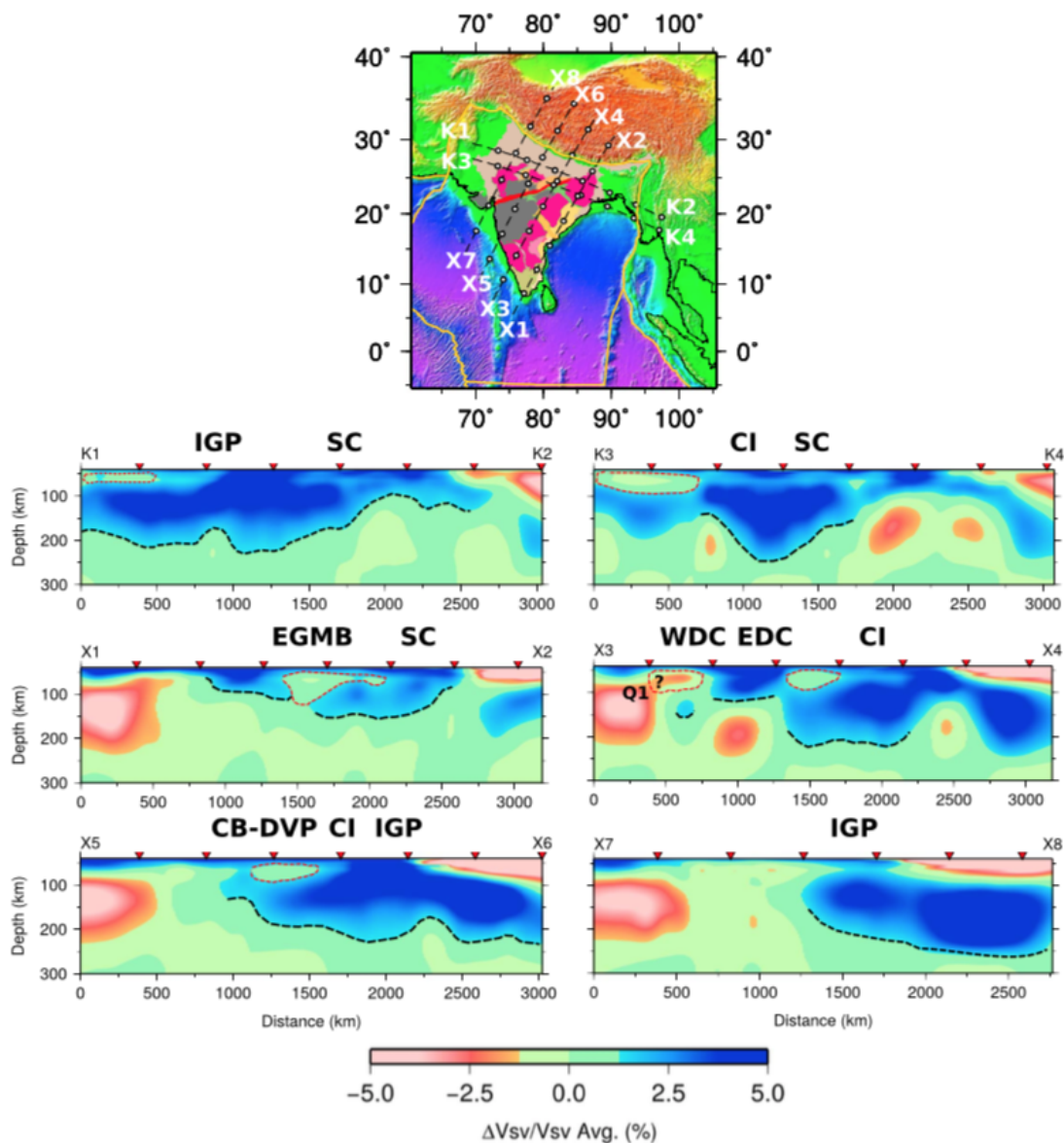
La naissance du point chaud de la Réunion située entre la fin du crétacé et le début du paléocène (il y a environ 65 Ma) est marquée par cette forte activité volcanique qui a eu un impact important sur la composition de l’atmosphère et celle des océans, le volume de  $CO_2$  produit par cette éruption est 3 fois celui de l’atmosphère actuelle et aurait réchauffé la Terre de 4 °C. La grande crise biologique de la fin du crétacé est donc probablement liée à ce cataclysme volcanique au cours duquel on a assisté à la disparition de près de 90% de la vie sur Terre (y compris celle des dinosaures) en plus de l’effet de l’astéroïde qui a donné naissance au cratère de **Chicxulub au large du Yucatan (Mexique)**. La naissance successive des îles volcaniques telles que les Maldives, Maurice et la Réunion est

une preuve palpable que le point chaud est resté actif sous la plaque indienne en dérive vers l'Asie, et sa position est indiquée de nos jours par celle du Piton de la Fournaise, qui est le dernier volcan actif résultant de ce point chaud. Une des questions que l'on peut se poser est de savoir pourquoi d'autres plaques (telles que l'Australie, l'Afrique) qui émanent aussi de la fragmentation du Gondwana n'ont pas migré à d'aussi grande vitesse que l'Inde ? En utilisant l'analyse de la fonction récepteur de l'onde **S**, [Kumar et al. \(2007\)](#) ont pu estimer l'épaisseur de la plaque indienne (Figure 3), qui est de l'ordre d'une **centaine de kilomètres**. Mais en 2016 une étude plus approfondie a été faite par [Maurya et al. \(2016\)](#) à l'aide d'un important jeu de données (du réseau de stations sismiques indien) privées à cette époque (mais publiques aujourd'hui). Cette étude basée sur la réduction en profondeur de la vitesse des **ondes S** polarisées verticalement, a permis de montrer une variation de l'épaisseur de la plaque indienne en fonction des différents blocs cratoniques localisés sur continent Indien (Figure 4). Par exemple il estime une épaisseur la lithosphère de  $\sim 120\text{km}$  à l'Est de **Dharwar** et de  $\sim 160\text{km}$  à l'Ouest de **Dharwar** ; par ailleurs cette épaisseur varie entre  $\sim 160 - 200\text{km}$  sur le craton de **Singhbhum** et entre  $\sim 140 - 200\text{km}$  à **Bastar** (Figure 4).



**Figure 3** – Topographie et profondeur de la limite lithosphère-asthénosphère (LAB) dans l'océan Indien et ses environs. Les triangles noirs représentent les stations sismiques utilisées, les cercles rouges représentent la position des points chauds dont les conduits sont indiqués par les flèches rouges. On voit que le continent Indien est moins épais ( $\sim 100\text{ km}$ ) que les autres plaques (comportant des continents) dérivant de la fragmentation du Gondwana [Kumar et al. \(2007\)](#).





**Figure 4** – Les différentes coupes verticales (en bas) suivant les 6 profils (en haut) montrent la variation en profondeur de la perturbation de vitesse **des ondes S polarisées verticalement ( $V_{sv}$ ) par rapport à la moyenne**. Les zones en bleu délimitées par des pointillés noirs sont des zones où la vitesse  $V_{sv}$  est rapide par rapport à la moyenne (elles sont dites froides et rapides). Ces pointillés noirs mettent en évidence ici l'épaisseur de la lithosphère (i.e. la limite lithosphère-asthénosphère ou encore LAB) qui varie en fonction du profil et est de l'ordre d'une centaine de kilomètres. Pour déterminer cette épaisseur un « cutoff » de 1.25 % a été appliqué sur la perturbation de vitesse (i.e.  $\Delta V_{sv}/V_{sv} > 1.25\%$ , ce qui a permis d'estimer l'épaisseur de la lithosphère en pointillés noirs sur les coupes). Les zones rouges sont dites chaudes et lentes, et peuvent être associées au bouclier du précambrien Indien. Les abréviations marquées en noir sur les coupes (exemple Singhbhum Craton (SC), Central Indian (CI)) sont les noms des différents cratons (Maurya et al. (2016)).

Il apparaît donc que la plaque indienne est d'une épaisseur moyenne de l'ordre d'une centaine de kilomètres, car son épaisseur est de 2 ou 3 fois plus faible que celle des autres plaques continentales (Afrique, Antarctique et l'Australie) issues du Gondwana (Figure 3). Cette épaisseur (plus petite) s'expliquerait par l'existence d'un point chaud sous le Gondwana au niveau de ce qui allait devenir la plaque indienne plus tard. Après fragmentation du Gondwana, ce « poids plume » plus léger, a été emporté plus vite que les autres mor-

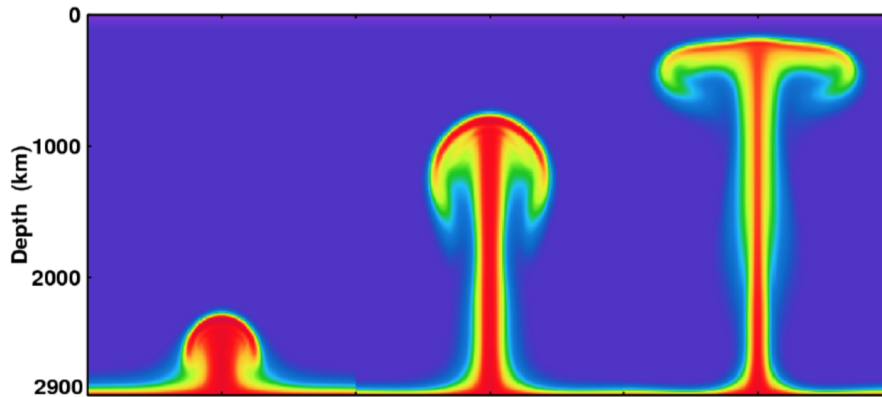
ceaux de masses continentales. Le « poids plume » s'expliquerait par la fusion partielle de la partie inférieure de la lithosphère indienne dû à la remonté du panache, qui aurait facilité le déplacement de la plaque indienne, entraîné par un « **ridge push** » ou un « **slab pull** ». Bien que l'étude de [Maurya et al. \(2016\)](#) montre une profondeur de la LAB plus grande, elle révèle la « Indian keel » (forme particulière de la plaque indienne, voir la coupe K3K4 de la figure 4) qui pourrait mieux expliquer la dérive rapide de l'Inde. L'avancée rapide de l'Inde vers l'Eurasie a finalement abouti à la collision Inde-Eurasie, ce qui a occasionné la naissance de l'Himalaya et du plateau tibétain, ainsi que la disparition complète de l'océan téthys. Cependant le manteau lithosphérique continue sa plongée tandis que la croûte moins dense que le manteau résiste à l'enfoncement, se désolidarisant ainsi du manteau. On note alors au niveau de l'Himalaya le décollement de la croûte qui s'empile en écailles qui se chevauchent. Cette collision Inde-Eurasie a considérablement fait chuter (d'environ 1/4) la vitesse de la plaque indienne qui est passée de **18-20 cm/an** pendant sa période de surf à **5 cm/an** de nos jours.

Nous venons de voir l'impact du point chaud de la Réunion sur la plaque indienne en dérive depuis sa dislocation du Gondwana, la question que l'on se pose est celle de l'origine des points chauds ? En 1971, l'Américain **Jason Morgan** ([Morgan 1971](#)), proposa l'idée selon laquelle les points chauds sont alimentés par un flux de matière chaude appelé « **panache thermique** » qui prend naissance à la frontière manteau-noyau (CMB) dû aux instabilités thermiques, et qui par la suite traversent le manteau pour alimenter les points chauds en surface. Pour mieux comprendre la naissance des panaches à l'interface manteau-noyau, il est important de noter qu'à l'échelle des temps géologiques l'unité de temps est le million d'années, et le manteau terrestre se comporte comme un fluide, et par conséquent les panaches thermiques peuvent prendre leur naissance à la CMB (core-mantle boundary) suite à ces instabilités thermiques dites de Rayleigh-Taylor dans la couche limite thermique. Nous présenterons dans la suite de ce chapitre quelques modèles de panache et leur description dans l'optique de mieux comprendre les résultats qui émaneront de la cartographie du panache réunionnais.

## 0.2 Modélisation des panaches

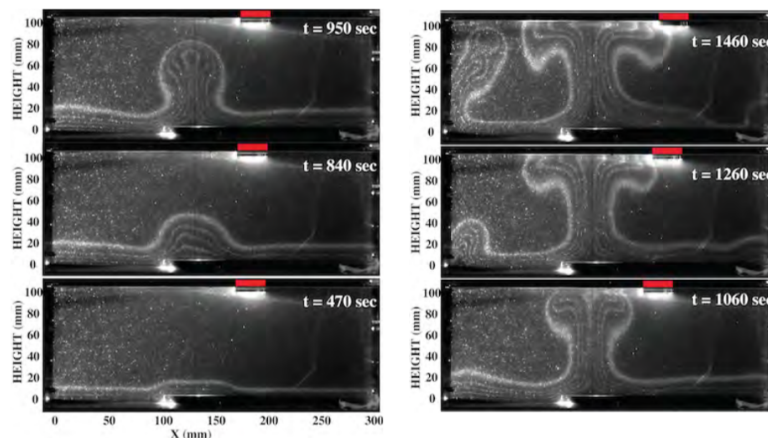
Pour une étude approfondie des panaches mantelliques thermiques, les géophysiciens spécialistes de la mécanique des fluides ont mis au point les modèles de panaches à l'aide des simulations numériques ([Campbell and Griffiths \(1990\)](#), [Farnetani and Samuel \(2005\)](#)) et des expériences en laboratoire (Figures 5, 6). Pour illustrer cela, nous pouvons considérer l'exemple d'un récipient à moitié rempli d'un fluide visqueux (l'huile de palme). Lorsqu'on chauffe le bas d'un tel récipient il se forme des courants de convection (ascendants et descendants) à partir d'une certaine température de chauffage. Ces courants de convection résultent de la variation des propriétés physiques (température, densité) dans la direction privilégiée de déplacement des molécules du fluide (direction verticale). Cette variation de propriétés physiques prend sa naissance au niveau de la couche limite thermique fine, formée au fond du récipient où la température du fluide s'accroît rapidement tandis que sa densité diminue. Ceci facilite la remontée du fluide plus chaud vers la surface libre du récipient où la chaleur est libérée. Pendant ce temps, le fluide plus dense et moins chaud

de la surface libre plonge au fond du récipient, on assiste ainsi à des mouvements dits convectifs. C'est ce qui se passe dans le manteau à l'échelle de temps géologiques, où les plaques froides et denses plongent tandis que la matière chaude et moins dense (panache mantellique) remonte vers la surface.



**Figure 5** – Modélisation numérique du panache thermique, de gauche à droite on voit le début de la formation du panache, qui prend ensuite de l'ampleur au cours du temps en se développant sous forme de champignon [Farnetani and Samuel \(2005\)](#).

Le diamètre de la queue du panache ancré dans le manteau inférieur (où la viscosité est  $\sim 6 \times 10^{26}$  stokes) mesure environ 500 km et donc plus petit que le diamètre de la queue dans le manteau supérieur (qui est de l'ordre d'une centaine de kilomètres) où la viscosité est  $\sim 10^5$  moins élevée. Le gradient de température entre l'intérieur du panache et le manteau environnant est de l'ordre d'une centaine de degrés celsius. La fusion partielle de la tête du panache sous la lithosphère ouvrirait une brèche dans la lithosphère, ce qui provoquerait un cataclysme volcanique accompagné des remontées de basaltes vers la surface. Une fois vidé, le panache subsisterait à l'aide de sa queue quelques millions ou même quelques dizaines de millions d'années s'il est toujours alimenté par le bas.

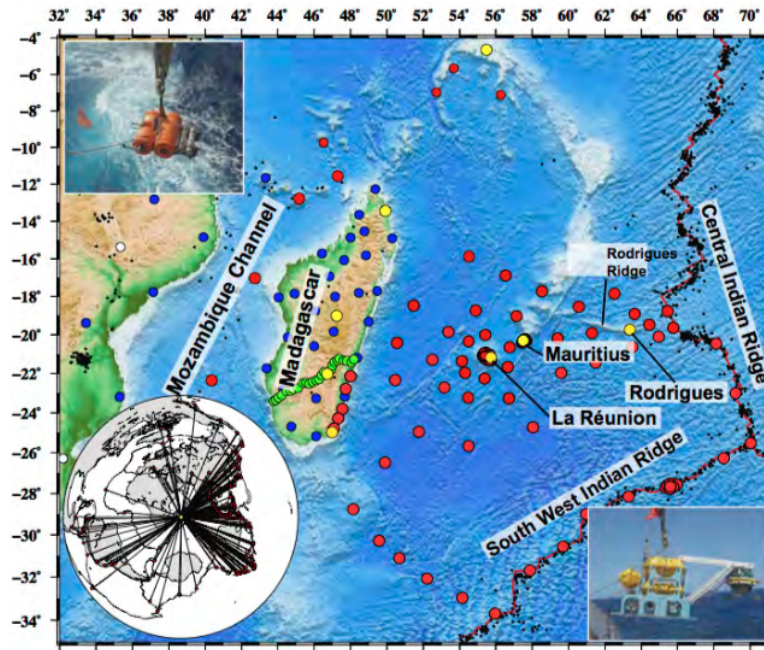


**Figure 6** – Évolution des instabilités thermo-mécaniques, génératrices d'un mouvement ascendant de panaches, les isothermes (en rouge) sont marquées de particules thermochromiques (i.e. capables de changer de couleur en fonction de la température). À 470s et à 840s on voit le début de la formation du panache, qui prend ensuite de l'ampleur entre 950s-1460s avec une queue étroite surmontée d'une grosse tête ([Davaille et al. \(2005\)](#)).

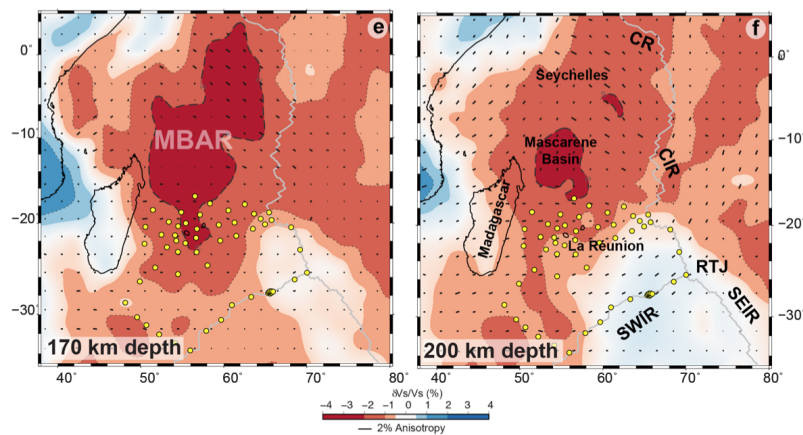
### 0.3 Intérêts et enjeux scientifiques de l'étude du panache Réunionnais

Le panache mantellique qui a donné naissance au point chaud de la Réunion il y a  $\sim 65$  Ma d'années a suscité plusieurs questionnements et son origine en profondeur reste controversée. Bien que l'Inde ait terminé sa période de surf, accompagnée par la fermeture de l'océan Téthys et de la naissance de l'océan indien, elle reste l'une des plaques les plus rapides au monde avec une vitesse moyenne de  $\sim 5$  cm/an, après les plaques Pacifique ( $\sim 10$  cm/an), Phillipine et Nazca ( $\sim 7$  cm/an). Sa collision avec l'Eurasie l'a ralenti, mais ne l'a pas stoppée ; pourquoi cette forte vitesse persiste même après collision avec l'Eurasie ? Quelle est l'origine en profondeur du panache mantellique responsable des trapps du Decan en Inde ? y a-t-il un épanchement de ce panache (s'il existe) sous la lithosphère qui contribuerait à la dérive de l'Inde ? Quel est l'impact du panache sur la dorsale médio-océanique ? Quelle pourrait être la durée de vie de ce point chaud ? comment est-il alimenté en profondeur ?

C'est pour essayer d'apporter de la lumière à cet ensemble de questions que les chercheurs Français et Allemands ont mis sur pied entre 2012-2013 (d'octobre 2012 à décembre 2013) le projet RHUM-RUM (Réunion Hotspot and Upper Mantle-Réunion Unterer Mantel), qui a permis l'installation des premières stations sismiques au fond de l'océan indien autour du point chaud de la Réunion (figure 7). En octobre 2012, 57 sismomètres **OBSs** (ocean-bottom seismometers) ont été déployés sur une superficie de  $\sim 2000 \times 2000$  km<sup>2</sup> à l'aide du navire Français R/V Marion Dufresne dans l'océan indien (cruise MD192 ; Barruol, 2014 ; Barruol et al., 2012), elles ont été récupérées plus tard en décembre 2013 par le navire Allemand R/V Meteor (cruise M101 ; Sigloch, 2013). Parmi les 57 stations sismiques 48 étaient des stations allemandes en provenance de la DEPAS (Deutscher Geräte-Pool für Amphibische Seismologie) et les 9 autres étaient des stations Françaises large-bande provenant de l'INSU (Institut National des Sciences de l'Univers). Les stations sises à Madagascar (en blues) sont celles du projet MACOMO. L'exploitation de ce jeu de données a permis de faire un premier modèle tomographique d'onde de surface (en inversant uniquement le mode fondamental) en 2016 ; ce dernier exhibe des vitesses lentes jusqu'à 250km et une anomalie assez remarquable dans le bassin des Mascareignes à 200 km de profondeur. Le mode fondamental des ondes de surface n'étant sensible que jusqu'à  $\sim 300$  km de profondeur (Debayle and Lévêque (1997), Mazzullo et al. (2016) & Barruol et al. (2019), voir figure 8). Profondeur à laquelle ce modèle trouve sa limite de résolution, pour pousser ce résultat dans l'optique de connaître l'origine en profondeur du panache réunionnais et la structure du manteau sous l'océan ainsi que sous le continent indien, nous avons étendu notre base de données sur l'ensemble de l'océan et du continent par une inclusion systématique des télé-séismes. L'ensemble de ces données nous a permis de mettre au point un nouveau modèle tomographique de l'océan indien par inversion de la forme d'onde, en utilisant les méthodes de calculs puissantes (les éléments spectraux etc ...) et des centres de calculs intensifs tels que le CINES (Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur), NERSC (National Energy Research Scientific Computing) et S-CAPAD (Service de Calcul Parallèle et de Traitement de Données en sciences de la Terre). Nous présenterons dans les prochains chapitres les détails sur la méthode utilisée pour l'inversion de la forme d'onde, les résultats et leur interprétation, ainsi que la conclusion et les perspectives.



**Figure 7** – Stations sismiques large-bande déployées dans l’océan indien, les cercles rouges indiquent les stations au fond de mer (obs) et les stations continentales mises en place dans le cadre du projet RHUM-RUM, les cercles jaunes indiquent les stations permanentes installées dans l’océan indien depuis plusieurs années. Les stations du projet MACOMO Array sont représentées par des cercles de couleur bleue, les points noirs représentent la sismicité de la région (beaucoup plus intense sur la dorsale médio-océanique). Les figures insérées en haut (à gauche) et en bas (à droite) présentent les modèles de sismomètres large-bande déployés dans le cadre du projet RHUM-RUM respectivement par l’Allemagne et la France (Mazzullo et al. (2016)).

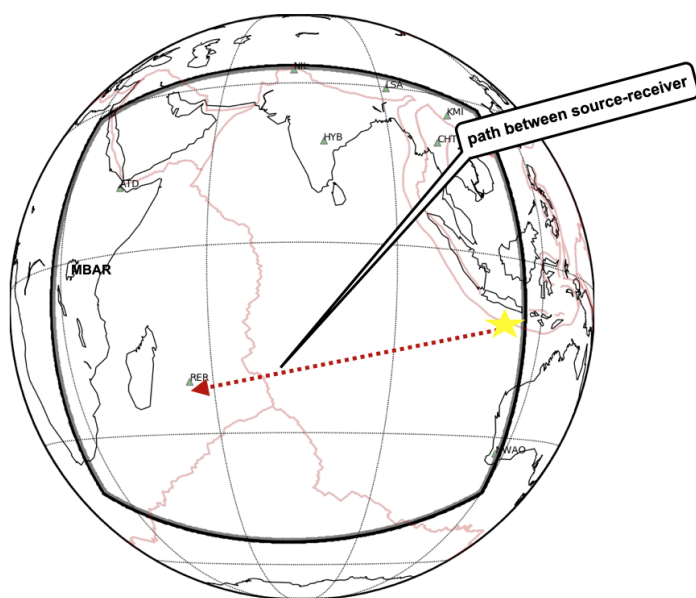


**Figure 8** – Anomalie de vitesse d’onde de surface et l’anisotropie azimutale autour du point chaud de la Réunion, on voit une forte anomalie de vitesse lente dans le bassin de Mascareigne à 170 km (à gauche) et à 200km (à droite), cette anomalie a été dénommée MBAR (Mascarene Basin Asthenospheric Reservoir) par Barruol et al. (2019) et Mazzullo et al. (2016). Cependant l’origine de cette anomalie en profondeur reste controversée.

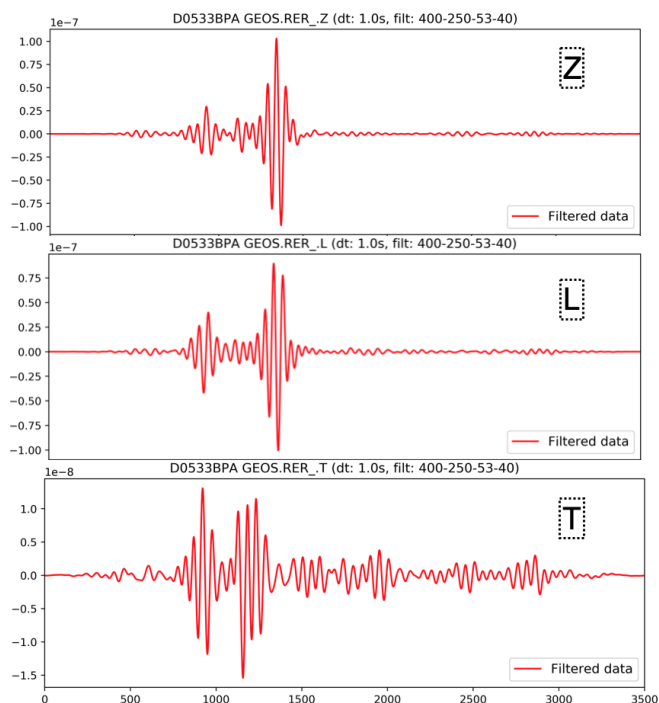
## 0.4 Problème direct et principes fondamentaux

Les modèles de tomographie sismique dérivent des données observées, celles-ci sont collectées (ou mesurées) sur le terrain comme précédemment décrit. Une donnée ici n’est rien

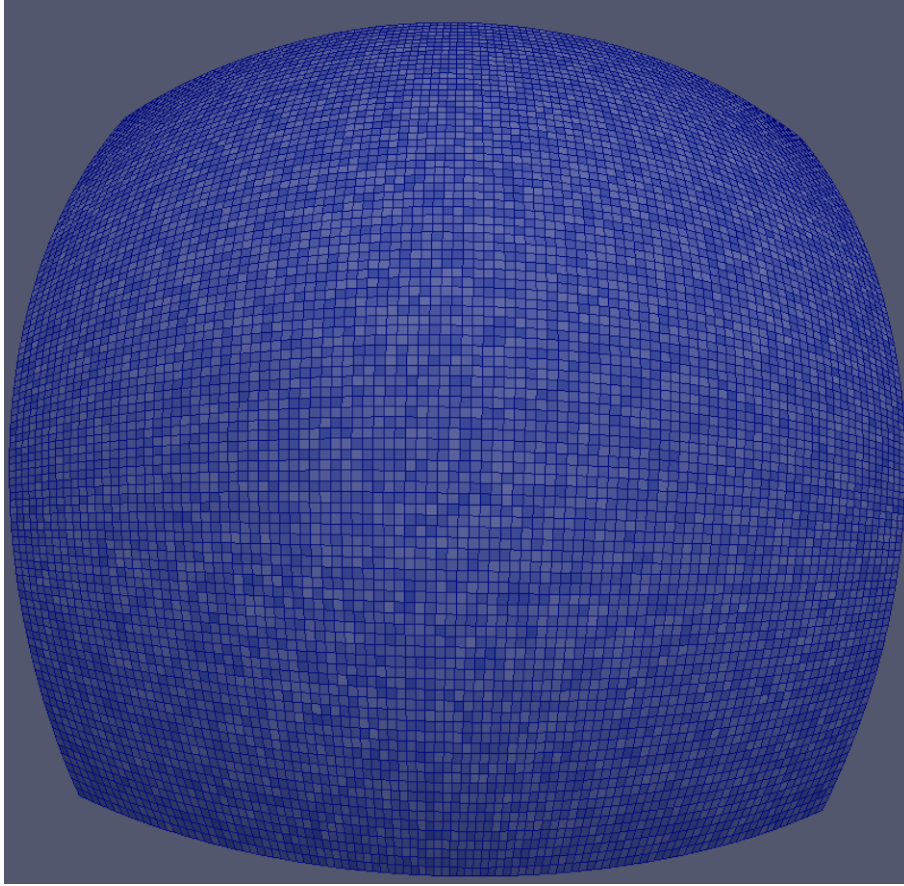
d'autre que la vitesse du sol enregistrée par un sismomètre lors d'un séisme ; l'accélération et le déplacement pouvant être obtenus par une simple dérivée ou une intégrale en fonction du temps de la vitesse. La figure 10 montre un exemple de donnée sismique enregistrée à la station RER. L'obtention d'un modèle tomographique nécessite la résolution de deux sous problèmes que sont : le problème direct et le problème inverse. Le problème direct consiste à reproduire les données (comme celles montrées sur la figure 10) observées à l'aide d'un modèle de Terre existant, en exploitant les méthodes mathématiques et informatiques pour résoudre l'équation d'onde dans un milieu viscoélastique. Dans le cadre de cette thèse nous utilisons la méthode des éléments spectraux (Cupillard et al. (2012), Komatitsch and Tromp (2002)) pour résoudre l'équation d'onde dans notre région d'étude, cela nécessite un maillage de la région d'étude à l'aide d'éléments de forme hexaédrique (figure 11), que nous n'allons pas détailler dans cette thèse. Une fois le maillage effectué, nous avons besoin d'un modèle de croûte (nous utilisons ici une croûte 3D homogénéisée), la position des récepteurs et des sources (en coordonnées sphériques). Comme paramètres de source nous prenons le tenseur de moment sismique (Global Centroid-Moment-Tensor Solution). Toutes ces conditions réunies, nous sommes alors capables de déclencher chaque source de façon individuelle et de calculer la propagation du champ des ondes de la source vers les différents récepteurs, étant donné que la donnée synthétique calculée ne sera presque jamais en parfait accord avec la donnée observée ; nous allons essayer d'améliorer l'accord entre les deux en effectuant une inversion de certains paramètres : la vitesse des ondes  $\mathbf{S}$  isotrope et l'anisotropie radiale. Nous utilisons aussi les modes propres de la Terre qui donne une première approximation de l'accélération du sol (sismogramme) utilisée dans le calcul des noyaux de sensibilité (Li and Romanowicz 1996). La matrice que nous inversons est une matrice carrée d'ordre  $(n, n)$ , où  $n$  est le nombre de paramètres du modèle. Les éléments de la matrice sont des dérivées partielles des données synthétiques calculées, mais il est important de noter que pour calculer les dérivées partielles utilisées dans le calcul du Hessien (matrice à inverser) et du gradient, nous utilisons la méthode des modes propres de la Terre qui consiste à coupler les modes à travers et le long des différentes branches (Li and Romanowicz 1996).



**Figure 9** – Trajet entre la source sismique de magnitude 6.5 (en étoile jaune), de profondeur 120 km et la station RER représentée en triangle



**Figure 10** – Accélération du sol enregistrée par la station RER, sur ses trois composantes (verticale, nord-sud, est-ouest) ; transformées en composantes verticales, longitudinales et transverses, cette donnée a été filtrée entre 40-400s.



**Figure 11** – Maillage de la région d'étude (océan et continent indien), le chunk a une superficie de  $89^\circ \times 89^\circ$ , dans cette méthode des éléments spectraux, nous ne faisons pas le maillage de la couche d'eau, elle est remplacée par une pression ( $\rho gh$ ). La longueur d'onde minimale que nous propageons ici à 40s est de 160 km, la taille horizontale des éléments est d'environ  $d_h \leq 1.15^\circ$  et la distance entre les points de Gauss-Lobatto-Legendre est  $\Delta x = 0.9$ . Pour éviter les multiples réflexions aux bords du domaine nous exploitons les PML « Perfectly Matched Layers » [Festa and Vilotte \(2005\)](#).

La technique des éléments spectraux est basée sur la division du domaine 3D dans lequel on veut propager le champ des ondes en plusieurs éléments hexaédriques, dans chacun de ces éléments le champ des ondes est décrit par les points de Gauss-Lobatto-Legendre d'un certain ordre  $N$ . Les éléments hexaédriques étant des éléments 3D, nous avons besoin de  $N+1$  points de GLL dans chaque direction, c'est-à-dire  $(N+1)^3$  de GLL au total par élément. Dans **RegSEM** l'ordre du polynôme est compris entre 4 et 8 ( $4 \leq N \leq 8$ ); pour une longueur d'onde ( $\lambda$ ) nous avons besoin d'au moins **5 points de GLL**. La taille moyenne (c'est-à-dire la taille moyenne horizontale) d'un élément hexaédrique et l'ordre du polynôme  $N$  sont contraints par la longueur d'onde minimale ( $\lambda_{min}$ ).

$$d \leq \frac{N}{5} \lambda_{min} \quad (1)$$

la longueur d'onde minimale est évaluée à partir de la vitesse minimale du modèle de vitesse et de la période de propagation de l'onde. Le pas d'intégration est évalué en utilisant l'approximation au second-ordre de la différence finie, et sa stabilité est donnée par la

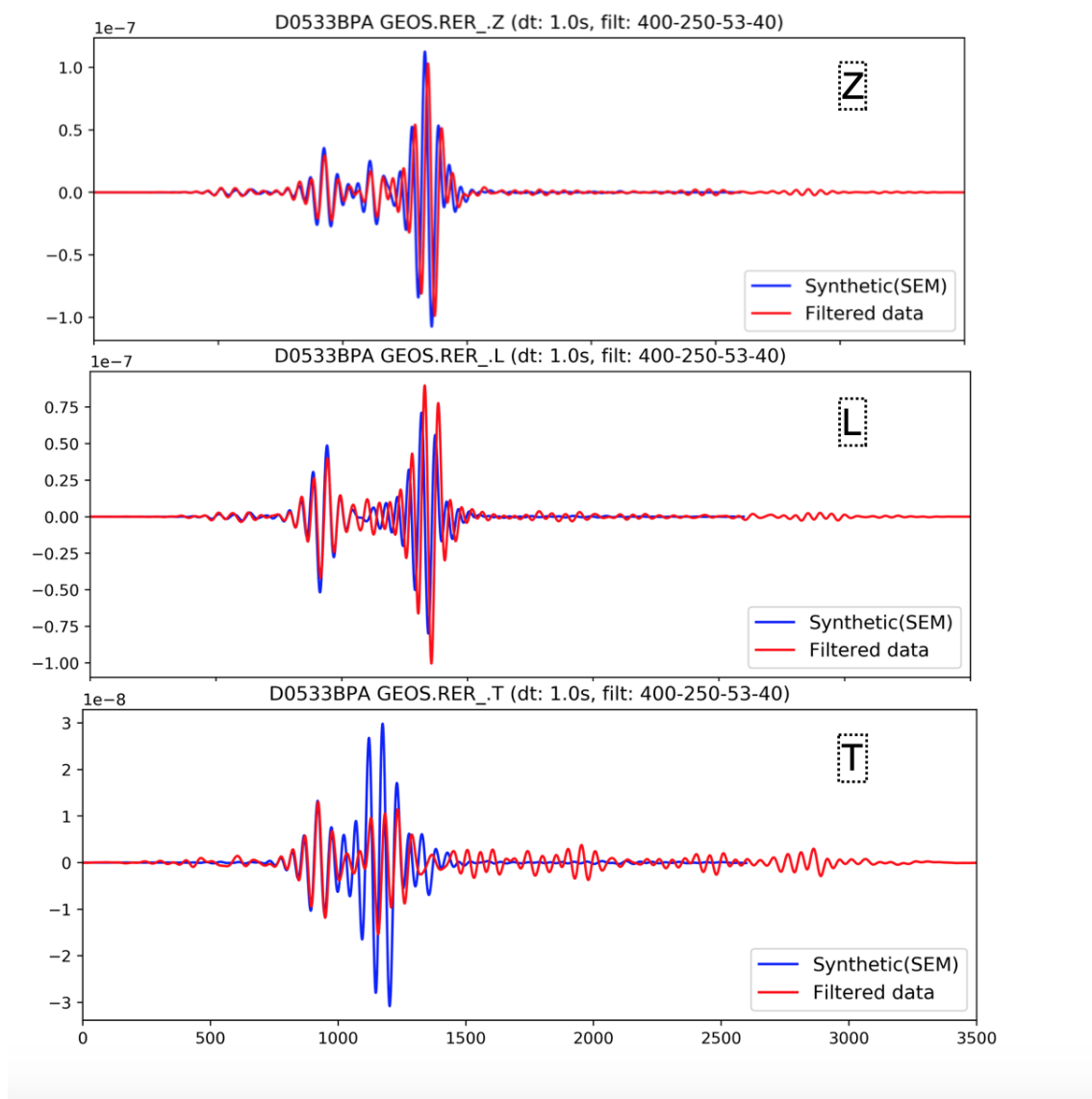


condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) :

$$\Delta t \leq c \left[ \frac{\Delta x}{\alpha} \right]_{min} \quad (2)$$

$c$  est le nombre courant choisit entre 0.3 et 0.4,  $\Delta x$  est la distance entre les points de Gauss-Lobatto-Legendre, et  $\alpha$  est la vitesse de l'onde P (Cupillard et al. 2012).

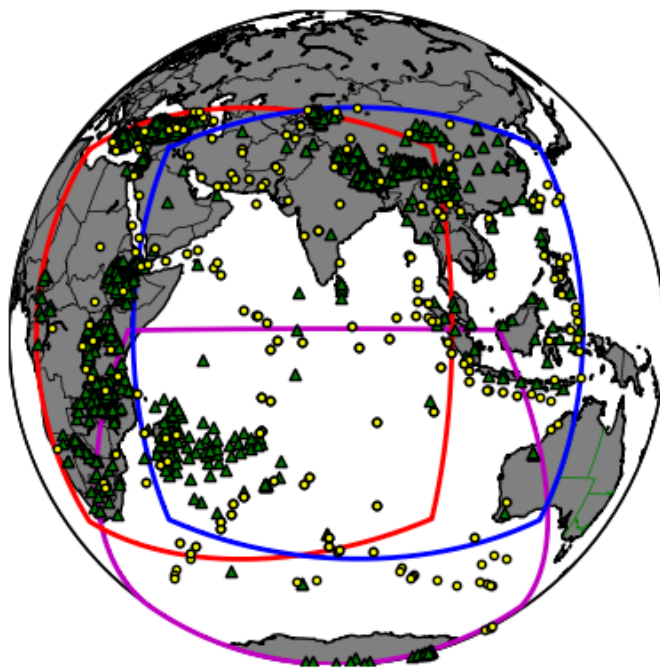
Les données calculées par RegSEM peuvent être comparées aux données observées comme le montre l'exemple de la figure ci-dessous.



**Figure 12** – Comparaison des donnée observée (rouge) et de la donnée calculée (bleu) à l'aide du code RegSEM, à la station RER, sur les trois composante (vertical, radiale et transverse). la donnée observée et calculée sont filtrées dans la bande passante de 40-400s. La magnitude du séisme est de 6.5 et sa est profondeur de 120 km, cette donnée est identique à celle de la figure 10.

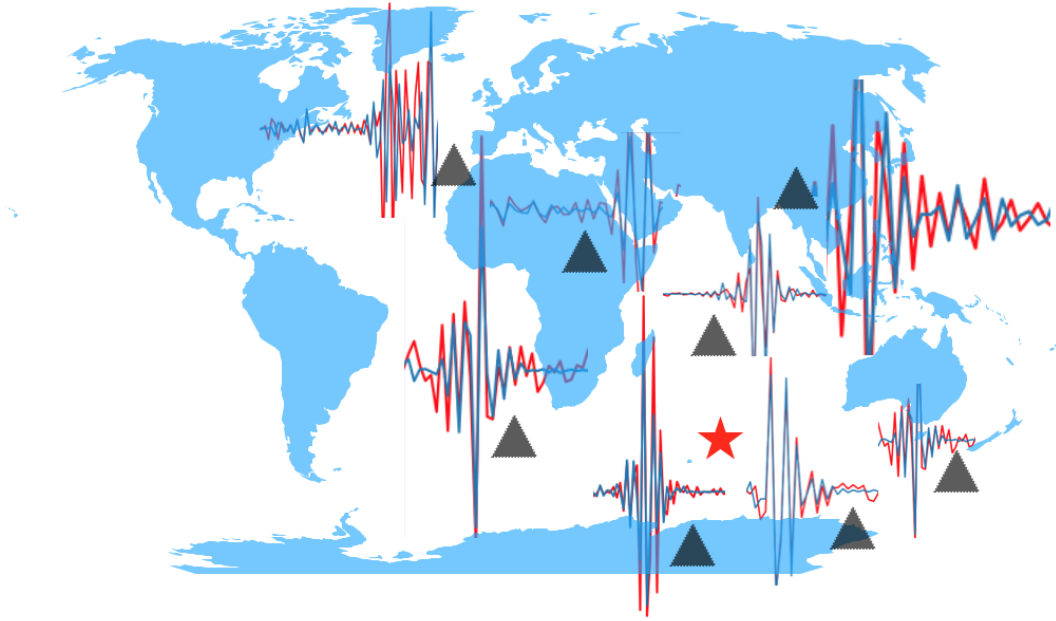
## 0.5 Sélection et pondération des données

Nous avons utilisé les événements dont les magnitudes sont comprises entre  $5.0 \leq M \leq 7.0$ . Nous avons calculé séparément les synthétiques dans chacun des trois chunks RegSEM représentés sur la figure 13, en déclenchant individuellement chaque source (tenseur de moment sismique) dont les paramètres de source sont données par le catalogue « globalcmt » (Ekström et al. (2012)).



**Figure 13** – Sources (cercles jaunes) et récepteurs (triangles bleus) utilisés dans cette étude, les chunks RegSEM (représentés ici en différentes couleurs : bleu, rouge, et rouge violacé) permettent d’inclure les événements télé-sismiques, environ 200 événements et 414 stations sismiques sont représentées. Les magnitudes des événements sont  $5.0 \leq M \leq 7.0$

La propagation du champ des ondes généré par une source dans notre domaine nécessite 64 cœurs physiques, dont 4 nœuds (en raison de 16 cœurs/nœuds). Une fois le calcul des synthétiques dans chaque chunk RegSEM terminé, nous rassemblons les synthétiques des 3 chunks (tout en s’assurant qu’il n’y ait pas répétition des événements) en un ensemble unique, pour préparer la comparaison aux données observées (Figure 14). L’ensemble des données sont filtrées dans une bande passante de 40-400s, avec des fréquences coins de 53 et 250s. La figure 14 montre un exemple de comparaison des données observées et calculées à chaque station, après simulation numérique du champ des ondes émis par une source sismique.



**Figure 14** – Comparaison des données réelles (en rouge) et des synthétiques (en bleu) calculés dans le modèle de départ SEMUCB-WM1, les triangles noirs représentent les stations sismiques, et la source est représentée par l'étoile rouge. La magnitude du séisme est de 7.0 et sa profondeur est de  $\sim 80$ km ; la comparaison est faite sur les composantes Z,L,T.

Nous remarquons ici un bon accord entre les données et des synthétiques à certaines stations (stations au sud de l'océan indien) et un mauvais accord sur d'autres (station au nord de l'atlantique et au sud de l'Australie), pour cela nous avons un critère de sélection basé sur la réduction de variance résiduelle et la corrélation entre la donnée observée et la donnée calculée. Dans notre procédure dénommée « Picking » (Panning and Romanowicz 2006), la donnée dont la corrélation avec le synthétique correspondant est négative (dû au fait que le déphasage est supérieur à  $\pi/2$ ) est recalée à l'itération considérée, ceci permet d'éviter le saut de cycles (cycle skipping). Mais il est important de noter que la donnée recalée peut être acceptée de nouveau lorsque le modèle s'améliore au cours des itérations. Les relations suivantes nous donnent le « root means square » (rms) et la corrélation entre une donnée et le synthétique correspondant :

$$rmsr = \frac{\sum_i (d_i - s_i)(d_i - s_i)}{\sum_i d_i^2}$$

$$rmss = \frac{\sum_i (d_i - s_i)(d_i - s_i)}{\sum_i s_i^2}$$

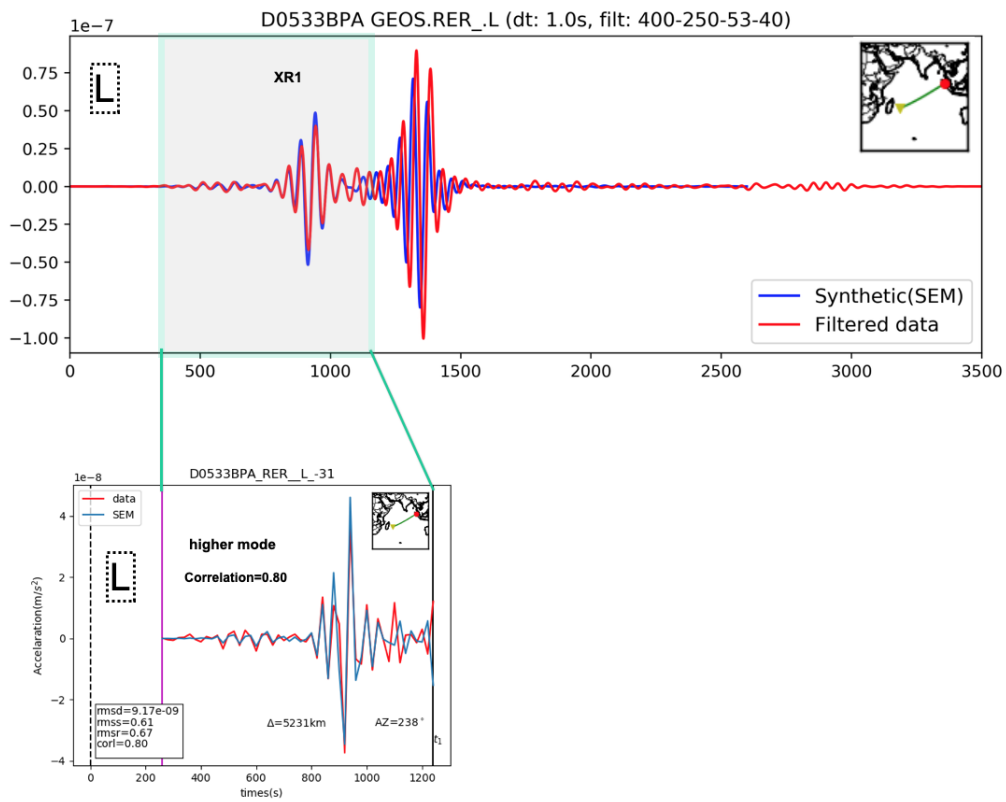
$$corl = \frac{\sum_i (d_i * s_i)}{\sqrt{\sum_i d_i^2 * \sum_i s_i^2}}$$

$d_i$  et  $s_i$  sont respectivement les  $i^{eme}$  point de la donnée observée et calculée, les conditions

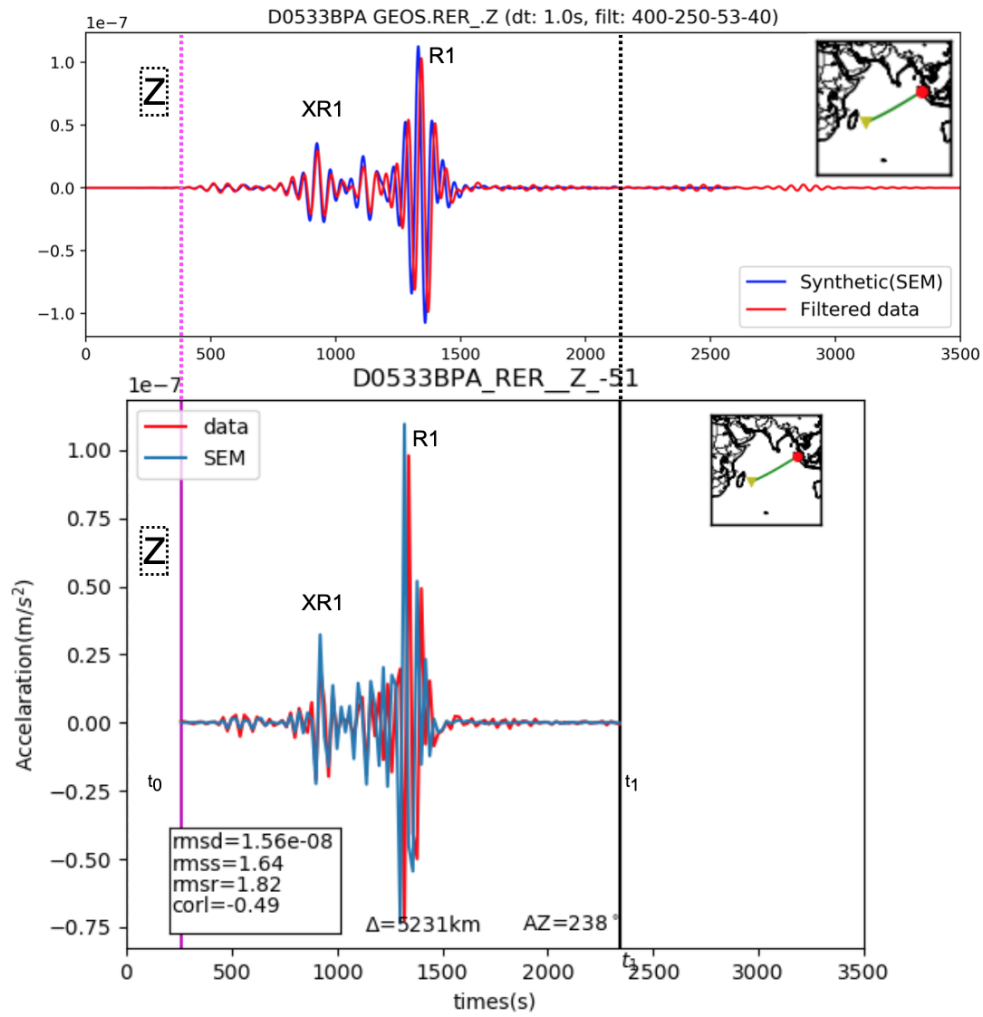
à satisfaire sont les suivantes :  $rmsr \leq 2$ ,  $rms \leq 2$ , and  $corl \geq 0$ . Les valeurs de  $rmsr$  et  $rms$  sont stockés pour construire la matrice de covariance des données  $C_d$ . Pour pondérer les données, nous leur donnons un poids inversement proportionnel à la "rmsr", la variance résiduelle, et le poids  $w_e$  permet d'équilibrer les amplitudes des différents paquets d'ondes. Les données contenues dans un même paquet d'onde, correspondant à une fenêtre en temps sont pondérées par un poids défini par :

$$w = w_e w_n w_r$$

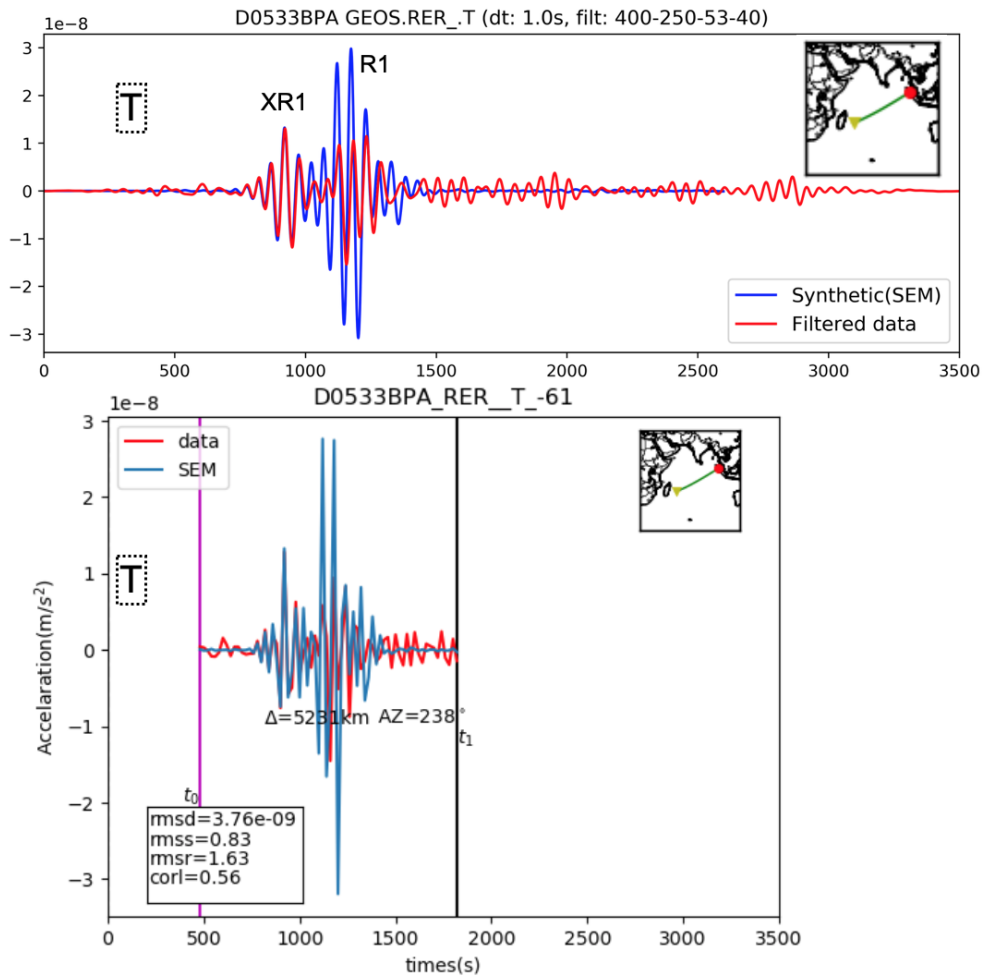
$w_n$  prend en compte la redondance des données dans un paquet d'onde, nous pouvons avoir deux cas de figures ici : le cas où chacune des données contenues dans le paquet d'onde donne une information indépendante, et le cas où toutes les données contenues dans le paquet d'onde peuvent être représentées par une seule donnée (i.e. les autres données sont considérées comme redondantes). En désignant par  $n$  le nombre d'échantillons de la donnée dans le paquet d'onde on définit  $w_n$  par :  $w_n = n^{-1/2}$ .  $w_r$  quantifie la redondance d'un paquet d'onde par rapport à d'autres paquets d'ondes qui échantillonnent le même trajet, dans le cas des ondes de surface cette étape se fait en choisissant le rayon définissant la région sur laquelle la redondance des sources et des stations est considérée. La pondération des données est une étape très importante dans cette méthode, car elle permet d'homogénéiser la couverture spatiale des données et d'éviter notre modèle d'être biaisé par une quelconque mauvaise couverture. Les figures ci-dessous montrent des exemples de paquets d'onde sélectionnés et pondérés (exemple du mode harmonique de la composante radiale de la donnée observée présentée plus haut, figure 12). Le mode fondamental de l'exemple figure 12 n'a pas été sélectionné lors de l'itération considérée, mais pourra être sélectionné lors des prochaines itérations (i.e. avec l'évolution du modèle). La corrélation entre la donnée observée et la donnée calculée pour ce paquet d'onde est de bonne qualité (i.e.  $\sim 0.80$ ), la distance épacentrale ( $\Delta$ ) est de  $\sim 5231$  km.



**Figure 15** – Exemple d'un paquet d'onde sélectionné sur la composante radiale, la donnée observée est en rouge et le synthétique correspondant est en bleu, la carte insérée montre le trajet correspondant (la source en rouge et la station RER, en jaune), sur cet exemple le sismogramme synthétique est calculé dans le modèle de départ,  $t_0$  et  $t_1$  correspondent à la fenêtre délimitant le paquet d'onde (mode harmonique).



**Figure 16** – Dans cet exemple le paquet d'onde non sélectionné est constitué du mode harmonique XR1 et du mode fondamental R1 de la composante verticale, la donnée observée est en rouge et la donnée calculée en bleu, la carte insérée montre le trajet correspondant (la source en rouge et la station RER, en jaune), le sismogramme synthétique est calculé dans le modèle de départ,  $t_0$  et  $t_1$  correspondent à la fenêtre délimitant le paquet d'onde (mode harmonique et fondamental).



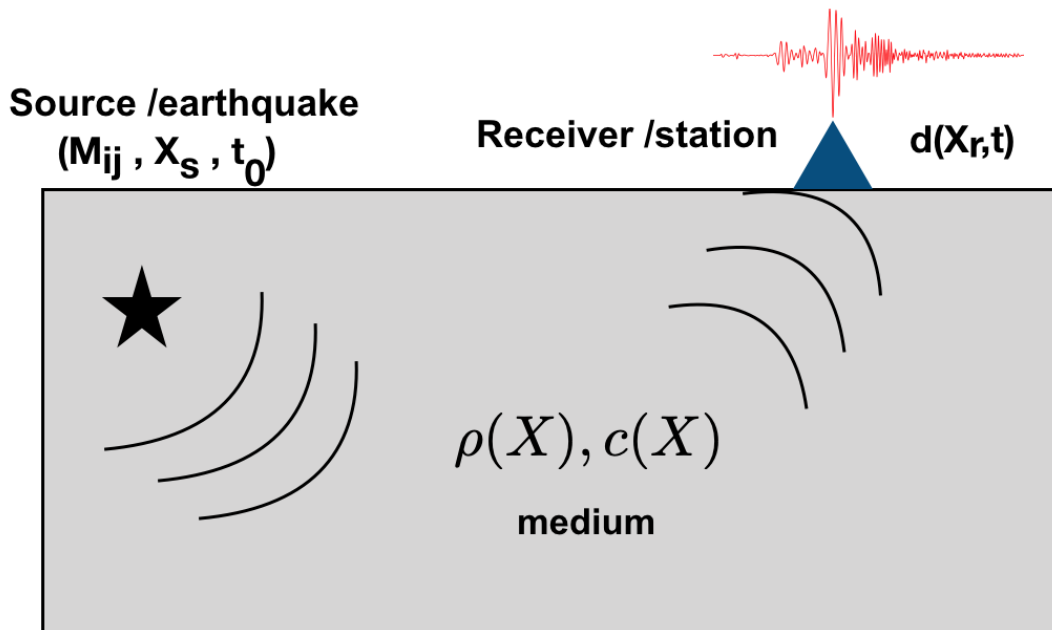
**Figure 17** – Exemple de paquet d’onde sélectionné, constitué du mode harmonique XR1 et du mode fondamental R1 de la composante transverse, la donnée observée est en rouge et le synthétique correspondant est en bleu, la carte insérée montre le trajet correspondant (la source en rouge et la station RER, en jaune), le sismogramme synthétique est calculé dans le modèle de départ,  $t_0$  et  $t_1$  correspondent à la fenêtre délimitant le paquet d’onde (mode harmonique et fondamental).

Dans la suite nous allons nous pencher sur la théorie et la méthodologie utilisées dans la mise en place des éléments nécessaires pour l’inversion de la forme d’onde.

## Chapitre 1

# Modes propres de la Terre

La théorie des modes propres de la Terre est une théorie bien vaste que nous n'allons pas complètement détailler dans cette partie, nous nous contenterons de donner l'essentiel qui servira pour la compréhension de la suite. Une des applications de cette théorie en sismologie est la reproduction d'un sismogramme enregistré par une station sismique à l'aide d'un modèle de Terre donné. Pour simplifier, considérons une source (séisme dont la source est décrite par un tenseur de moment sismique) qui émet un signal enregistré par un récepteur (station sismique), voir figure 1.1.



**Figure 1.1** – Propagation de l'onde de la source (★) vers le récepteur (▲), dans un milieu décrit par sa densité ( $\rho(X)$ ) et la célérité ( $c(X)$ ), le signal en rouge est l'onde (déplacement instantané du sol  $d(X_r, t)$ )/donnée) enregistrée par le récepteur.



L'équation régissant la propagation de l'onde dans un tel milieu est donnée par :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{T} = \mathbf{c} : \nabla u$ ;  $\mathbf{c}$  est le tenseur de contrainte, les conditions aux limites sont données par :  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$  sur  $\partial\Omega$  (frontière du domaine).

Puisque notre Terre est 3D, nous pouvons réécrire l'équation précédente suivant chaque direction  $i \rightarrow (1,2,3)$  et en prenant en compte la force due à la gravité comme suit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i + \rho g_i \quad (1.2)$$

où  $\rho_0$  est le modèle de référence,  $f_i$  et  $\rho g_i$  sont respectivement les forces de surface et de volume appliquées au domaine considéré. En réalité la théorie des modes propres permet la résolution de l'équation de l'élastodynamique que nous venons de décrire et dont la forme la plus compacte est donnée par l'équation suivante :

$$\left( \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{H}_0 \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{H}_0$  est un opérateur intégro-différentiel appelé « self-adjoint » et donné par :

$\mathbf{H}_0(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla(u_r \rho_0 g_0) - \rho_0 \nabla \phi + \hat{\mathbf{r}} \rho_0 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u})$ , avec  $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \sigma_{\mathbf{ij}}$  la traction et  $\phi$  le potentiel gravitationnel satisfaisant l'équation de Poisson  $\Delta \phi = 4\pi G \rho_0$ , où  $G$  est la constante gravitationnelle;  $u_r$  est la composante radiale du déplacement, et  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  est l'ensemble des forces exercées au point  $\mathbf{r}$  à un instant  $t > 0$ . La résolution de cette équation nécessite la prise en compte des conditions aux limites telles que la continuité des contraintes (ou tractions) et du déplacement au niveau des différentes discontinuités de la Terre, et à la surface de la Terre supposée libre. Dans la Terre on distingue deux principales discontinuités : **les discontinuités solide-solide** délimitant **la zone de transition** (410 – 660 km), **les discontinuités fluide-solide et solide-fluide** au niveau de la **CMB** (core mantle boundary) et de la **ICB** (inner core boundary) situées respectivement à  $\sim 2900$  km et  $\sim 5150$  km de profondeur. La transition **solide-océan** située à  $\sim 3$  km de profondeur et la discontinuité de **Moho** située à  $\sim 30$  km de profondeur.

Les 6 conditions à satisfaire dans la résolution de cette équation sont les suivantes :

- La traction  $\mathbf{T}$  doit être continue sur toutes les frontières déformables, et nulle à la surface.
- Le déplacement  $\mathbf{u}$  doit être continu à toutes les frontières solide-solide (i.e. on suppose qu'il n'y a pas de glissement à une telle frontière).
- Le potentiel  $\phi$  doit être continu à toutes les frontières.
- Le déplacement et la traction doivent être réguliers au centre de la Terre (i.e.  $u(r=0) = T(r=0) = 0$ ) et le potentiel doit être nul à l'infini ( $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ ).
- $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi$  doit être continu sur toutes les frontières, avec  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale à la surface au niveau de la frontière.
- $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}$  doit être continu sur toutes les frontières (i.e. le flux qui régit la conservation de la matière).

La résolution de l'équation sans second membre permet d'obtenir les fonctions propres de l'opérateur  $H_0$  qui sont des fonctions orthogonales (en d'autres termes, elle permet d'avoir

les oscillations dites libres du système considéré). La solution de l'équation sans second membre peut s'écrire comme une combinaison linéaire des modes propres comme suit :

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t) = \sum_k u_k(x) e^{i\omega_k t}$$

où  $u_k(x)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot {}_k U(r) \mathbf{Y}_\ell^m + {}_k V(r) \nabla_1 Y_\ell^m + {}_k W(r) \times \nabla_1 Y_\ell^m \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} {}_k U_\ell^m(r) \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \phi) + {}_k V_\ell^m(r) \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \phi) + {}_k W_\ell^m(r) \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Avec les modes sphéroïdaux ( $S_\ell^m$ , généralement observés sur les composantes verticale et radiale) et toroïdaux ( $T_\ell^m$ , généralement observés sur la composante transversale) définis comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}} Y_\ell^m(\theta, \phi) \\ \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \phi) = \frac{1}{[2\ell+1]^{1/2}} \left( \hat{\theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi} \right) \\ \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \phi) = \frac{1}{[2\ell+1]^{1/2}} \left( \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi} - \hat{\phi} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

où  $k = (n, \ell, m)$  désigne le  $k^{ieme}$  mode ; et  $u_k(x)$  vérifie la condition d'orthogonalité suivante  $\int_V \rho_0(r) u_{k'}^* u_k dv = \delta_{kk'}$  ainsi que l'équation  $H_0(\underline{u}_k) = -\rho_0 \omega_k^2 \underline{u}_k$ .

Les harmoniques sphériques sont définies par :  $Y_\ell^m = X_\ell^m(\theta) e^{im\phi} = (-1)^m \left( \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \right)^{1/2} P_\ell^m(\cos \phi) e^{im\phi}$

où  $P_\ell^m$  est le polynôme de Legendre donné par :  $P_\ell^m = \left[ \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^\ell \ell!} \right] \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell$ .

Lorsqu'on fixe l'ordre angulaire  $\ell$  et l'ordre radial  $n$  et que l'on fait varier l'ordre azimutal  $- \ell \leq m \leq \ell$ , on a  $2\ell + 1$  modes (oscillations) appelés multiplet qui ont la même fréquence  $n\omega_\ell$ . La solution généralisée est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_k^n \frac{1}{\omega_k^2} u_k(r_R, \theta_R, \phi_R) [-\mathcal{E}^*(x_s) : M(x_s)] (1 - \cos \omega_k t) e^{-\alpha_k t} H(t) \quad (1.5)$$

dans cette équation nous avons 3 principaux termes :

-Terme source :  $\mathcal{E}^*(x_s) : M(x_s) = \mathcal{E}_{ij}^* M_{ij} = \mathcal{E}_{1j}^* M_{1j} + \mathcal{E}_{2j}^* M_{2j} + \mathcal{E}_{3j}^* M_{3j} = \mathcal{E}_{11}^* M_{11} + \dots + 2\mathcal{E}_{12}^* M_{12} + \dots$

-Terme station :  $u_k(r_R, \theta_R, \phi_R)$

-Terme temporel :  $(\cos \omega_k t) e^{-\alpha_k t} H(t)$

$k$  représente le  $k^{th}$  mode avec  $k = (\ell, n, m)$ , où  $\ell, n, m$  sont les ordres angulaire, radial et azimutal.

$x_s = (r_s, \theta_s, \phi_s)$ ,  $H(t)$  représentent respectivement les coordonnées de la source et la fonction de **Heaviside** ;  $\mathcal{E}^*(s)$  le complexe conjugué du tenseur de déformation et  $M(s)$  le tenseur de moment sismique.

En considérant  $\vec{v}$  comme un vecteur unitaire suivant l'une des 3 directions considérée (verticale, radiale ou transverse), une projection suivant l'une de ces directions s'écrit

alors :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \Re e \left\{ \sum_k \sum_m R_k^m S_k^m \exp(i\omega_k t - \alpha_k t) \right\} \quad (1.6)$$

$R_k^m$  et  $S_k^m$  sont les combinaisons linéaires des harmoniques sphériques  $Y_\ell^m$ , évaluées respectivement au récepteur et à la source. Par conséquent ces deux termes peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} R_k^m(\theta_R, \phi_R) = \sum_{N=-1}^{N=1} R_{kN} Y_\ell^{Nm}(\theta_R, \phi_R) \\ S_k^m(\theta_s, \phi_s) = \sum_{M=-2}^{M=2} S_{kM} Y_\ell^{Mm}(\theta_s, \phi_s) \end{cases}$$

les coefficients  $R_{kN}$  et  $S_{kM}$  sont donnés par le tableau ci-dessous (Woodhouse and Girnius (1982)).

N	$R_{kN} = R_k^N(0, 0)$	$S_{kN} = S_k^N$
0	$k_0 U v_r$	$k_0 [\partial_r U M_{rr} + \frac{1}{2} F (M_{\theta\theta} + M_{\phi\phi})]$
$\pm 1$	$k_1 (V \pm iW)(\pm v_\theta - i v_\phi)$	$k_1 (X \pm iZ)(\pm M_{r\theta} - i M_{r\phi})$
$\pm 2$		$k_2 r_s^{-1} (V \pm iW)[(M_{\theta\theta} - M_{\phi\phi}) \pm 2i M_{\theta\phi}]$
$\dots$	$U, V, W$ fonctions propres évaluées à la surface de la Terre	$U, V, W$ fonctions évaluées à la source

$$F = r_s^{-1} [2U - \ell(\ell + 1)V], \quad X = \partial_r V + r_s^{-1}(U - V) \quad \text{et} \quad X = \partial_r W + r_s^{-1}W$$

$M_{rr}, M_{\theta\theta}, M_{\phi\phi}, M_{r\theta}, M_{r\phi}$  et  $M_{\theta\phi}$  sont les composantes du tenseur de moment sismique.

$v_r, v_\theta, v_\phi$  les composantes de l'instrument, les fonctions propres  $U, V, W$  sont calculées pour chaque  $k^{iem}$  mode, les valeurs de  $k_0, k_1 \dots k_n$  dans le tableau sont définies par la relation suivante :

$$k_n = \frac{1}{2^n} \left[ \frac{(2\ell + 1)(\ell + n)!}{4\pi(\ell - n)!} \right]^{1/2}$$

Dziewonski and Gilbert (1976) ont montré que :

$$\sum_m R_k^m S_k^m = A_\ell(\Delta)$$

Pour  $-2 \leq m \leq 2$ , avec  $A_\ell(\Delta) = a_\ell^0 Y_\ell^0(\Delta) + a_\ell^1 Y_\ell^1(\Delta) + a_\ell^2 Y_\ell^2(\Delta)$

Les coefficients  $a_\ell^0, a_\ell^1$  etc . . . , dépendent de la profondeur de la source et du tenseur de moments sismique. L'approximation asymptotique  $Y_\ell^m(\Delta)$  pour les ondes haute fréquence (i.e.  $\ell \gg 1$ ) est donnée par :  $Y_\ell^m(\Delta) = \frac{1}{\pi\sqrt{\sin \Delta}} \cos(k\Delta - \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}) + o(\frac{1}{\ell})$ , où  $k$  est le vecteur d'onde défini par  $k = \ell + \frac{1}{2}$  (pour une Terre de rayon unité).

## 1.1 Approximation moyenne le long du trajet

L'approximation le long du trajet (appelée « path average approximation » en anglais) fut introduit de façon empirique par Woodhouse and Dziewonski (1984) dans le but de prendre en compte les hétérogénéités latérales en considérant les perturbations de fréquence (frequency shift) le long du trajet ; ceci leur a permis de donner l'expression de la forme d'onde selon que l'on considère un modèle de Terre 1D ou 3D.

Pour un modèle de Terre 1D l'expression de la forme d'onde sur l'une des composantes (verticale, radiale ou tangentielle) est donnée par la relation suivante :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \Re e \left\{ \sum_{\ell} A_{\ell}(\Delta) e^{i\omega_k t} e^{-\alpha_k t} \right\} \quad (1.7)$$

pour un modèle de Terre 3D nous avons :

$$u_{pava} = \vec{v} \cdot \vec{u} = \Re e \left\{ \sum_{\ell} A_{\ell}(\Delta + \delta\Delta) e^{i(\omega_k + \delta\omega_k)t} e^{-\alpha_k t} \right\} \quad (1.8)$$

où les perturbations sur le trajet  $\delta\Delta$ , et sur la fréquence  $\delta\omega_k$  (qui prend en compte le couplage des modes dans le multiplet  $k$ , le long d'une branche) sont données par :

$\delta\Delta = \frac{a\Delta}{kU}(\hat{\omega}_k - \tilde{\omega}_k)$  avec  $ka = (\ell + 1/2)$  et  $a$ ,  $\Delta$ ,  $U$  sont respectivement le rayon de la Terre, la distance épacentrale et la fonction propre ;  $\ell$  est l'ordre angulaire. Les perturbations de fréquences sont données par la relation suivante :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_k = \frac{1}{2\pi} \oint \delta\omega_k(s) ds, & \text{« frequency shift » sur l'arc majeur} \\ \tilde{\omega}_k = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \delta\omega_k(s) ds, & \text{« frequency shift » sur l'arc mineur} \end{cases}$$

où  $\hat{\omega}_k$  et  $\tilde{\omega}_k$  sont respectivement les perturbations de fréquence le long du grand cercle qui coupe la sphère et le long de l'arc mineur entre la source et la station.  $\delta\omega_k(s)$  est la perturbation locale de la fréquence (local frequency shift) à l'intérieur d'un multiplet (ensemble des modes ayant la même fréquence) induit par les perturbations des paramètres physiques autour de leur moyenne, prenant ainsi en compte les hétérogénéités latérales dans un modèle de Terre 3D. Rappelons que ce « shift de fréquence » est responsable du couplage entre les modes d'un même multiplet ; il est calculé en utilisant la théorie de perturbation des modes propres de la Terre comme suit :

$$\delta\omega_k(\theta, \varphi) = \int_0^a \mathbf{M}_k(r) \frac{\delta m}{m_0}(\theta, \varphi, r) r^2 dr \quad (1.9)$$

$\mathbf{M}_k(r)$  est le noyau de sensibilité 1D par rapport à la profondeur (raison pour laquelle on intègre uniquement par rapport au rayon) du  $k^{\text{ième}}$  mode défini par  $\mathbf{M}_k(r) = \frac{\partial \omega_k}{\partial m}(r)$ . Ici  $a$  est le rayon de la Terre et  $\delta m$  la perturbation du modèle par rapport au modèle de référence  $m_0$  (1D). Pour la perturbation d'un modèle isotrope défini par trois paramètres  $\mathbf{m} = (v_s, v_p, \rho)$  le noyau de sensibilité peut donc être calculé pour chacun de ces paramètres d'où  $\mathbf{M}_k = (M_k^s(r), M_k^p(r), M_k^{\rho}(r))$ . Il est par ailleurs important de noter que la perturbation de la fréquence locale ( $\delta\omega_k$ ) **dépend de la structure le long du plan vertical contenant la source et la station, pondérée par la sensibilité en profondeur du mode considéré. L'approximation moyenne le long du trajet (PAVA), consiste à remplacer dans l'expression  $A_{\ell}(\Delta)$  des harmoniques sphériques par leur approximation asymptotique à l'ordre zéro en  $1/\ell$ , donnée par :**

$$Y_{\ell}^m(\Delta) \approx \frac{1}{\pi \sqrt{\sin \Delta}} \cos(k\Delta - \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}) + 0(\frac{1}{\ell}) \quad (1.10)$$

Où  $k = \ell + 1/2$  (pour une Terre de rayon unité); il est aussi important de noter que le noyau de sensibilité correspondant au « path average approximation » est 1D (i.e. dépend uniquement de la structure moyenne le long du plan vertical qui contient la source et le récepteur). Cette expression de PAVA établie par [Woodhouse and Dziewonski \(1984\)](#) a été approximée aux ondes de surface par [Romanowicz \(1987\)](#). Cette méthode est adaptée à l'étude du mode fondamental des ondes de surface, mais limitée pour l'étude des modes harmoniques et les ondes de volume.

**Remarques :** À partir de l'expression de  $A_\ell(\Delta)$  et de l'approximation asymptotique de  $Y_\ell^m(\Delta)$  on remarque que l'amplitude des modes varie de façon presque périodique en fonction de l'ordre angulaire  $\ell$  le long d'une branche. Cette périodicité dépend de la distance épacentrale  $\Delta$  (elle est due à la présence du terme  $k\Delta$  dans l'équation 1.10), de l'équation 1.9 nous remarquons que si notre milieu est homogène (i.e.  $\delta m=0$ ) le « shift de fréquence » est nul, et donc pas de couplage entre les modes d'un même multiplet.

## 1.2 Équation du mouvement dans un modèle perturbé

Dans cette partie nous utiliserons la **notion braket** dont il est nécessaire de faire un bref rappel. Elle fut introduite en 1939 Paul Dirac pour faciliter l'écriture des équations de la mécanique quantique. Elle consiste à écrire une intégrale par exemple sous forme de braket. Considérons par exemple une fonction d'onde  $\Psi$ , nous pouvons écrire :

$$\int \Psi_n^* \Psi_n d\tau = \langle n|n \rangle$$

où  $\Psi^*$  est le complexe conjugué de  $\Psi$ , si nous supposons qu'un opérateur  $H$  agit sur la fonction d'onde considérée alors nous pouvons écrire :

$$\int \Psi_n^* H \Psi_n d\tau = \langle n|H|n \rangle$$

Il est import de noter ici que « bra » ou « left » (terme de gauche) signifie toujours que le complexe conjugué a été utilisé. Donc la fonction  $\Psi_n$  s'écrirait seulement avec le terme de droite comme il suit :  $\Psi_n = |n\rangle$

Revenons maintenant à l'équation d'onde; pour un modèle perturbé l'équation du mouvement s'écrit comme suit :

$$(\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (H_0 + H) \mathbf{u} + \mathbf{f}(t, x_s) \quad (1.11)$$

En sismologie la force externe  $\mathbf{f}(t, x_s)$  est définie par  $\mathbf{f}(t, x_s) = h(t) \mathbf{M}(x - x_s)$  où  $\mathbf{M}$  est le tenseur de moment sismique et  $h(t)$  la fonction de Heaviside.

Dans l'équation 1.11,  $H = H(\delta\rho_0, \delta\mu, \delta\kappa, h, Q)$ , si l'on considère la transformée de Laplace  $\bar{u}(p) = \int_0^\infty u(t) e^{-pt} dt$  alors l'équation devient :

$$(\rho_0 + \delta\rho) p^2 \bar{u} = (H_0 + H) \bar{u} + \bar{f} \quad (1.12)$$

la solution sans second membre peut s'écrire comme la somme des modes propres  $\bar{u} = \sum_s a_s \bar{u}_s^0$ , en multipliant l'équation précédente par  $\bar{u}_n^{*0}$  et en intégrant sur tout le volume on

obtient l'équation suivante :

$$p^2 \int_V \bar{u}_n^{*0} (\rho_0 + \delta\rho) \bar{u} dv = \int_V \bar{u}_n^{*0} (H_0 + H) \bar{u} dv + \int_V \bar{f} \bar{u}_n^{*0} dv \quad (1.13)$$

le terme de gauche :

$$p^2 \int_V \bar{u}_n^{*0} (\rho_0 + \delta\rho) \bar{u} dv = p^2 \sum_s a_s \underbrace{\int_V \rho_0 \bar{u}_s^0 \bar{u}_n^{*0} dv}_1 + p^2 \sum_s a_s \underbrace{\int_V \bar{u}_n^{*0} \delta\rho \bar{u}_s^0 dv}_{\langle n|\delta\rho|s \rangle} = p^2 a_n + p^2 \sum_s a_s <$$

$n|\delta\rho|s \rangle$

le terme de droite :

$$\begin{aligned} \int_V \bar{u}_n^{*0} (H_0 + H) \bar{u} dv + \int_V \bar{f} \bar{u}_n^{*0} dv &= \sum_s a_s \underbrace{\int_V \bar{u}_n^{*0} H_0 \bar{u}_s^0 dv}_{-\omega_n^2} + \sum_s a_s \underbrace{\int_V \bar{u}_n^{*0} H \bar{u}_s^0 dv}_{\langle n|H|s \rangle} + \int_V \bar{f} \bar{u}_n^{*0} dv \\ &= -\omega_n^2 a_n + \sum_s a_s \langle n|H|s \rangle + F_n \end{aligned}$$

avec :

$$\langle n|H|s \rangle = \int_V \bar{u}_n^{*0} H \bar{u}_s^0 dv; \quad \langle n|\delta\rho|s \rangle = \int_V \bar{u}_n^{*0} \delta\rho \bar{u}_s^0 dv; \quad F_n = \int_V \bar{f} \bar{u}_n^{*0} dv$$

**Rappel :**

$H_0 \bar{u}_s^0 = -\rho_0 \omega_s^2 \bar{u}_s^0$  par conséquent  $\int_V \bar{u}_n^{*0} H_0 \bar{u}_s^0 dv = -\int_V \rho_0 \omega_s^2 \bar{u}_s^0 \bar{u}_n^{*0} dv = -\omega_n^2 \delta_{ns}$  (condition d'orthogonalité), où  $\delta_{ns}$  est le symbole de Kronecker (i.e.  $\delta_{ns} = 1$  si  $n = s$  et  $\delta_{ns} = 0$  si  $n \neq s$ ). La combinaison des termes de gauche et de droite conduit à :

$$(p^2 + \omega_n^2) a_n = \sum_s a_s \left( \langle n|H|s \rangle - p^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) + F_n \quad (1.14)$$

à l'ordre zéro les termes de perturbations ( $\delta\rho$  et  $H$ ) qui apparaissent à droite de l'équation 1.14 sont nulles ; nous obtenons alors la solution pour une Terre à symétrie sphérique, irrotationnelle et isotrope (SNREI) :  $\bar{u} = \sum_n a_n \bar{u}_n^0$  avec  $a_n = F_n / (p^2 + \omega_n^2)$

Pour une approximation de premier ordre (**approximation de Born**), on substitue la solution à l'ordre zéro dans l'équation 1.14 (i.e.  $a_s = F_s / (p^2 + \omega_s^2)$ ) ce qui conduit à :

$$a_n = \sum_s \left( \langle n|H|s \rangle - p^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) \frac{F_s}{(p^2 + \omega_n^2)(p^2 + \omega_s^2)} + \frac{F_n}{(p^2 + \omega_n^2)} \quad (1.15)$$

Pour introduire la dépendance temporelle de la source dans la résolution de cette équation nous substituons  $F_n \rightarrow F_n/p$  (dû au fait que la source est une fonction de Heaviside), ceci conduit alors à :

$$a_n = \sum_s \left( \langle n|H|s \rangle - p^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) \frac{F_s}{p(p^2 + \omega_n^2)(p^2 + \omega_s^2)} + \frac{F_n}{p(p^2 + \omega_n^2)} \quad (1.16)$$

Nous allons distinguer deux cas de figures, à savoir le cas d'un multiplet isolé et le cas du couplage entre les multiplets :

**a) multiplet isolé** ( $\omega_n = \omega_s$ )

On entend par multiplet les  $2\ell + 1$  valeurs attribuées à l'ordre azimutal  $m$  pour  $n$  et  $\ell$  fixés (i.e. pour chaque mode défini par le couple de valeurs  $n$  et  $\ell$ , on a une dégénérescence de

$2\ell + 1$  modes qui constituent le multiplet). Nous rappelons ci-dessous quelques transformées de **Laplace** que nous allons utiliser par la suite :

$$\frac{p}{(p^2 + \omega_n^2)^2} \leftrightarrow \frac{t \sin \omega_n t}{2\omega_n}; \quad \frac{1}{p(p^2 + \omega_n^2)} \leftrightarrow \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2}; \quad \frac{1}{(p^2 + \omega_n^2)} \leftrightarrow \cos \omega_n t; \quad \frac{1}{p(p^2 + \omega_n^2)^2} \leftrightarrow \frac{1}{\omega_n^2} \left[ \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} - \frac{t \sin \omega_n t}{2\omega_n} \right]$$

En substituant  $\omega_s$  par  $\omega_n$  dans l'équation 1.16 et en revenant dans le domaine temporel, on obtient :

$$a_n = \sum_s F_s^0 (\langle n|H|s \rangle) \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^4} - \frac{t \sin \omega_n t}{2\omega_n^3} \sum_s F_s^0 (\langle n|H|s \rangle + \omega_n^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle) + F_n^0 \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} \quad (1.17)$$

On remarque ici que le premier et le second terme de l'équation précédente sont liés à la perturbation du modèle alors que le dernier terme est lié au modèle de référence 1D (SNREI); le sismogramme résultant du modèle perturbé ( $u$ ) peut donc s'écrire comme la somme du sismogramme résultant du modèle de référence ( $u_0$ ) et d'une perturbation  $\delta u$  :

$$u = u_0 + \delta u$$

à l'aide d'un changement de notation  $n \rightarrow (k, m)$  et  $s \rightarrow (k', m')$  **nous pouvons mieux décrire la contribution due au couplage entre les modes cachés à l'intérieur d'un multiplet isolé  $k$  ( $\omega_n = \omega_k$ ), sur le sismogramme résultant**; cette contribution s'écrit alors :

$$\delta u = \sum_{m=0}^{2\ell+1} a_k^m u_k^{m0}$$

$k$  indique ici le multiplet à l'intérieur duquel on fait la somme sur les  $2\ell + 1$  singlets qu'il contient; dans le changement de notation ci-dessus  $k$  représente le multiplet et  $m$  représente le  $m^{iem}$  mode contenu dans le multiplet  $k$ . Il est aussi important de noter que  $u_k^{m0}$  est la solution de l'équation du mouvement sans second membre (i.e. pour une Terre de référence où l'opérateur intégral-différentiel est uniquement  $H_0$ ). Donc en reprenant l'expression de  $a_n$ , en l'écrivant sous la forme  $a_k^m$  et en substituant  $n$  par  $m$  et  $s$  par  $m'$ , puis  $F_s^0$  (correspondant au  $s^{th}$  mode) par  $F_k^{m'}$  (correspondant au  $m'^{th}$  mode du multiplet  $k$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta u &= \sum_{m=0}^{2\ell+1} a_k^m u_k^{m0} \\ &= \sum_{m=0}^{2\ell+1} u_k^{m0} \left\{ \sum_{m'=0}^{2\ell+1} F_k^{m'} (\langle m|H|m' \rangle) \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k^4} - \right. \\ &\quad \left. \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k^3} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} F_k^{m'} (\langle m|H|m' \rangle + \omega_k^2 \langle m|\delta\rho|m' \rangle) \right\} \quad (1.18) \end{aligned}$$

En ajoutant le terme  $u_0 = \sum_{m=0}^{2\ell+1} a_k u_k^{m0}$  à l'expression précédente on obtient l'expression du

sismogramme pour un modèle perturbé en sommant sur les  $2\ell + 1$  singlets du multiplet  $k$  :

$$\begin{aligned}
 u_0 + \delta u = & \sum_k \left\{ \sum_{m=0}^{2\ell+1} u_k^{m0} F_k^m \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k^2} \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{2\ell+1} u_k^{m0} \left( \sum_{m'=0}^{2\ell+1} F_k^{m'} \langle m|H|m' \rangle \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k^4} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k^3} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} F_k^{m'} (\langle m|H|m' \rangle + \omega_k^2 \langle m|\delta\rho|m' \rangle) \right) \right\} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

on définit par  $R_k^m$  et  $S_k^m$  les termes calculés respectivement à la station et à la source :

$$R_k^m = v \cdot u_k^0(r_R, \theta_R, \phi_R) \text{ et } S_k^m = F_k^m.$$

Pour obtenir une des composantes (radiale, verticale ou transversale) du sismogramme, nous redéfinissons les perturbations telles que  $H \rightarrow H/\omega^2$  et  $\delta\rho \rightarrow \delta\rho/\omega^2$ ; ainsi une composante du sismogramme s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = & \sum_k \left\{ \sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^m \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k^2} \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m \left( \sum_{m'=0}^{2\ell+1} S_k^{m'} \langle m|H|m' \rangle \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k^2} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} S_k^{m'} (\langle m|H|m' \rangle + \omega_k^2 \langle m|\delta\rho|m' \rangle) \right) \right\} \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

Dans la suite nous allons ignorer le terme statique de la composante du sismogramme (i.e. le terme  $1/\omega_k^2$ ), en effet dans la pratique le filtrage passe bande fait disparaître ce terme, en plus pour simplifier nous posons :

$Z_k^{mm'} = \langle m'|H|m \rangle + \omega_k \langle m'|\delta\rho|m \rangle$ , terme qui prend en compte la perturbation pour chaque multiplet  $k$ .

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
 v \cdot u = & - \sum_k \left\{ \sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^m \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k^2} + \sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m \left( \sum_{m'=0}^{2\ell+1} S_k^{m'} \langle m|H|m' \rangle \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k^2} + \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} S_k^{m'} Z_k^{mm'} \right) \right\} \\
 = & - \sum_k \left\{ \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k^2} \sum_{m=0}^{2\ell+1} \left( R_k^m S_k^m + \sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} \langle m|H|m' \rangle \right) + \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k} \sum_{m=0}^{2\ell+1} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} Z_k^{mm'} \right\} \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Dans le souci de se débarrasser du terme séculaire ( $t \sin \omega_k t$ ) en l'incluant dans le terme en cosinus, nous allons maintenant chercher une approximation au premier ordre de cette relation, en posant  $H_k^{mm'} = \langle m|H|m' \rangle$ , et en redéfinissant  $H_k^{mm'}$  et  $R_k^m S_k^m$  tel que  $H_k^{mm'} \rightarrow H_k^{mm'}/\omega_k^2$  et  $R_k^m S_k^m \rightarrow R_k^m S_k^m/\omega_k^2$  (en effet le terme source dépend de la fré-



quence)

$$v \cdot u = - \sum_k \sum_{m=0}^{2\ell+1} \left( R_k^m S_k^m + \sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} H_k^{mm'} \right) \left\{ \cos \omega_k t + \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k} \frac{\sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} Z_k^{mm'}}{\sum_k \sum_{m=0}^{2\ell+1} \left( R_k^m S_k^m + \sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} H_k^{mm'} \right)} \right\} \quad (1.22)$$

En négligeant le terme de perturbation  $R_k^m S_k^{m'} H_k^{mm'}$  au dominateur devant le produit du terme source-station  $R_k^m S_k^m$  nous avons la relation suivante :

$$v \cdot u = - \sum_k \left( \sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^m + \sum_{m=0}^{2\ell+1} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} H_k^{mm'} \right) \left\{ \cos \omega_k t + \varepsilon \frac{t \sin \omega_k t}{2\omega_k} \right\} \quad (1.23)$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{\sum_{m=0}^{2\ell+1} \sum_{m'=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^{m'} Z_k^{mm'}}{\sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^m}$$

On définit la fréquence moyenne d'un multiplet comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_k^2 &= \omega_k^2 - \frac{\sum_m \sum_{m'} R_k^m S_k^{m'} Z_k^{mm'}}{\sum_m R_k^m S_k^m} \\ &= \omega_k^2 - \varepsilon \end{aligned} \quad (1.24)$$

d'où  $\bar{\omega}_k = \omega_k (1 - \varepsilon/\omega_k^2)^{1/2} \sim \omega_k - \varepsilon/2\omega_k$

Nous pouvons donc écrire :

$$\cos(\omega_k - \varepsilon/2\omega_k)t = \cos(\omega_k)t \cos(\varepsilon/2\omega_k)t + \sin(\omega_k)t \sin(\varepsilon/2\omega_k)t \sim \cos(\omega_k)t + (\varepsilon t/2\omega_k) \sin(\omega_k)t$$

En substituant  $\cos(\omega_k)t + (\varepsilon t/2\omega_k) \sin(\omega_k)t$  par  $\cos \bar{\omega}_k t$  dans l'équation 1.23 et en prenant uniquement le multiplet isolé  $R_k^m S_k^m$  (i.e. en négligeant le terme de perturbation indiqué par  $H_k^{mm'}$ ) nous obtenons :

$$v \cdot u = - \sum_k \sum_{m=0}^{2\ell+1} R_k^m S_k^m (\cos \bar{\omega}_k t) \quad (1.25)$$

### Applications au calcul de la perturbation due aux différents paramètres

Nous venons d'établir l'influence de la perturbation du modèle sur les fréquences d'oscillation des modes de notre système, par ailleurs nous avons utilisé la notation **braket** dans l'écriture des termes perturbatifs de notre système ; en considérant la perturbation du paramètre de densité nous allons voir comment évaluer une telle perturbation donnée par :

$$\langle m | \delta \rho | m' \rangle = \int_V \bar{u}_m^{0*} \delta \rho \bar{u}_{m'}^0 dv$$

où l'élément de volume est défini par  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$  et l'élément d'angle solide  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

En considérant la composante verticale du déplacement des oscillations libres d'une Terre à symétrie sphérique, élastique, irrotationnelle et isotrope (SNREI) qui s'écrit :

$u_m^0 = \hat{r}U(r)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ . Nous pouvons écrire la perturbation de la densité sous la même forme que le déplacement, en la décomposant sur la base des harmoniques sphériques comme suit :

$$\delta\rho(r, \theta, \varphi) = \sum_{s,t} \delta\rho_s^t(r)Y_s^t(\theta, \varphi) \quad (1.26)$$

où  $\delta\rho_s^t$  sont les coefficients du modèle à déterminer ; par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_V \bar{u}_m^{0*} \delta\rho \bar{u}_{m'}^0 dv &= \sum_{s,t} \int_r \delta\rho_s^t(r) U^2(r) r^2 dr \int_\Omega Y_\ell^{m*} Y_\ell^{m'} Y_s^t d\Omega \\ &= \sum_{s,t} \gamma_{\ell\ell s}^{mm't} \int_r \delta\rho_s^t(r) K(r) dr \end{aligned} \quad (1.27)$$

avec  $K(r) = U^2(r)r^2$  qui représente ici le noyau de sensibilité dépendant de la fonction propre  $U$ , et  $\gamma_{\ell\ell s}^{mm't}$  prend en compte les variations latérales définies par :  $\gamma_{\ell\ell s}^{mm't} = \int_\Omega Y_\ell^{m*} Y_\ell^{m'} Y_s^t d\Omega$

Pour généraliser ce calcul on exprime  $Z_k^{mm'} = \langle m|\delta\rho|m' \rangle$  par la relation ci-dessous :

$$Z_k^{mm'} = \sum_{s,t} \gamma_{\ell\ell s}^{mm't} \int_r M_s(r) \delta m_s^t(r) r^2 dr \quad (1.28)$$

où le modèle a été décomposé sur les harmoniques sphériques avec des coefficients tel que  $\delta m_s^t = (\delta\kappa_s^t, \delta\mu_s^t, \delta\rho_s^t, \dots)$ , et on définit la sensibilité de chaque paramètre du modèle donné par  $M_s = (M_s^\kappa, M_s^\mu, M_s^\rho, \dots)$ .

Le terme  $\gamma_{\ell\ell s}^{mm't}$  est donné par :

$$\gamma_{\ell\ell s}^{mm't} = \int_\Omega Y_\ell^{m*} Y_\ell^{m'} Y_s^t d\Omega = (-1)^n (2\ell + 1) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell & \ell & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell & s \\ -m & m' & m - m' \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Comme nous avons établi l'expression du déplacement dans le cas d'un multiplet isolé, nous allons à présent nous pencher sur le cas du couplage entre les multiplets.

### b) Couplage entre multiplets ( $\omega_n \neq \omega_s$ )

Nous allons maintenant considérer les termes perturbatifs (i.e. les termes dans lesquels apparaissent  $H$  et  $\delta\rho$ ) de l'équation 1.16 donnant les coefficients d'excitation  $a_n$  en supposant que  $\omega_n \neq \omega_s$ .

$$\begin{aligned} a'_n &= \sum_s \frac{F_s \langle n|H|s \rangle}{\omega_n^2 - \omega_s^2} \left\{ \frac{1}{p(p^2 + \omega_s^2)} - \frac{1}{p(p^2 + \omega_n^2)} \right\} \\ &\quad - \sum_s \frac{F_s \langle n|\delta\rho|s \rangle}{\omega_n^2 - \omega_s^2} \left\{ \frac{1}{(p^2 + \omega_s^2)} - \frac{1}{(p^2 + \omega_n^2)} \right\} p \end{aligned} \quad (1.30)$$

L'exploitation des transformées de Laplace données plus haut nous permet de réécrire  $a'_n$  dans le domaine temporel :

$$a'_n = \sum_s \frac{F_s^0 \langle n|H|s \rangle}{\omega_n^2 - \omega_s^2} \left( \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} - \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} \right) - \sum_s \frac{F_s^0 \langle n|\delta\rho|s \rangle}{\omega_n^2 - \omega_s^2} \left( \cos \omega_s t - \cos \omega_n t \right) \quad (1.31)$$

en regroupant les termes en  $\cos \omega_n t$  et en  $\cos \omega_s t$ ;  $a'_n$  s'écrit :

$$a'_n = \sum_s \frac{F_s^0 \cos \omega_n t}{(\omega_n^2 - \omega_s^2)\omega_n^2} \left( \langle n|H|s \rangle + \omega_n^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) - \sum_s \frac{F_s^0 \cos \omega_s t}{(\omega_n^2 - \omega_s^2)\omega_n^2} \left( \langle n|H|s \rangle + \omega_s^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) + \sum_s \frac{F_s^0 \langle n|H|s \rangle}{\omega_s^2 \omega_n^2} \quad (1.32)$$

Comme précédemment nous allons nous débarrasser du terme statique (i.e. du dernier terme de l'équation précédente), puis chercher une contribution des termes perturbatifs en faisant la sommation des combinaisons linéaires des coefficients d'excitation  $a'_n$  avec la solution de l'équation gouvernant les oscillations libres d'une Terre à symétrie sphérique, élastique et isotrope (SNREI). Ainsi nous pouvons écrire  $\delta u = \sum_n a'_n u_n^0$ ; où  $n$  désigne le  $n^{ieme}$  mode. En substituant  $a'_n$  par sa valeur (privée du terme statique) nous obtenons :

$$\delta u = \sum_n u_n^0 \sum_s \left\{ \frac{F_s^0 \cos \omega_n t}{(\omega_n^2 - \omega_s^2)\omega_n^2} \left( \langle n|H|s \rangle + \omega_n^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) - \frac{F_s^0 \cos \omega_s t}{(\omega_n^2 - \omega_s^2)\omega_n^2} \left( \langle n|H|s \rangle + \omega_s^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) \right\} \quad (1.33)$$

$n$  et  $s$  étant des variables muettes, si nous permutons  $n$  et  $s$  dans le dernier terme de l'équation précédente, elle sera maintenant constitué des termes suivants :

$$u_n^0 F_s^0 \frac{\cos \omega_n t}{(\omega_n^2 - \omega_s^2)\omega_n^2} \left( \langle n|H|s \rangle + \omega_n^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right)$$

et

$$-u_s^0 F_n^0 \frac{\cos \omega_n t}{(\omega_s^2 - \omega_n^2)\omega_n^2} \left( \langle s|H|n \rangle + \omega_n^2 \langle s|\delta\rho|n \rangle \right)$$

En combinant les deux termes on peut réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\delta u = \sum_n \sum_s \left\{ \frac{u_n^0 F_s^0 \cos \omega_n t}{(\omega_n^2 - \omega_s^2)\omega_n^2} \left( \langle n|H|s \rangle + \omega_n^2 \langle n|\delta\rho|s \rangle \right) - \frac{u_s^0 F_n^0 \cos \omega_n t}{(\omega_s^2 - \omega_n^2)\omega_n^2} \left( \langle s|H|n \rangle + \omega_n^2 \langle s|\delta\rho|n \rangle \right) \right\} \quad (1.34)$$

En reprenant la notation des multiuplets  $n \rightarrow (k,m)$  et  $s \rightarrow (k',m')$  nous pouvons réécrire

la perturbation ( $\delta u$ ) sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta u = & - \sum_k \sum_{k'} \frac{\cos \omega_k t}{(\omega_{k'}^2 - \omega_k^2) \omega_k^2} \left\{ u_k^{m0} \left( \left\langle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \middle| H \right\rangle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \right\rangle + \omega_k^2 \left\langle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \middle| \delta \rho \right\rangle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \right\rangle \right) F_{k'}^{m'} \\ & + u_{k'}^{m'0} \left( \left\langle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \middle| H \right\rangle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\rangle + \omega_k^2 \left\langle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \middle| \delta \rho \right\rangle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\rangle \right) F_k^m \left. \right\} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pour écrire cette expression sous une forme plus réduite, nous posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_k^m = u_k^{m0} \\ Z_{kk'}^{mm'} = \left\langle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \middle| H \right\rangle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \right\rangle + \omega_k^2 \left\langle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \middle| \delta \rho \right\rangle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \right\rangle \\ S_{k'}^{m'} = F_{k'}^{m'} \\ R_{k'}^{m'} = u_{k'}^{m'0} \\ Z_{k'k}^{m'm} = \left\langle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \middle| H \right\rangle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\rangle + \omega_k^2 \left\langle \begin{matrix} m' \\ k' \end{matrix} \middle| \delta \rho \right\rangle \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\rangle \\ S_k^m = F_k^m \end{array} \right.$$

ceci conduit à :

$$\delta u = \sum_k \sum_{\substack{k' \\ k \neq k'}} \frac{\cos \omega_k t}{(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2) \omega_k^2} \left\{ \sum_m \sum_{m'} \left( R_k^m Z_{kk'}^{mm'} S_{k'}^{m'} + R_{k'}^{m'} Z_{k'k}^{m'm} S_k^m \right) \right\} \quad (1.36)$$

Souvenons nous que nous avons considéré seulement le terme perturbatif de l'équation 1.16, le sismogramme final est donné par la somme de  $u_0$  (privé de son terme statique) et de  $\delta u$  :

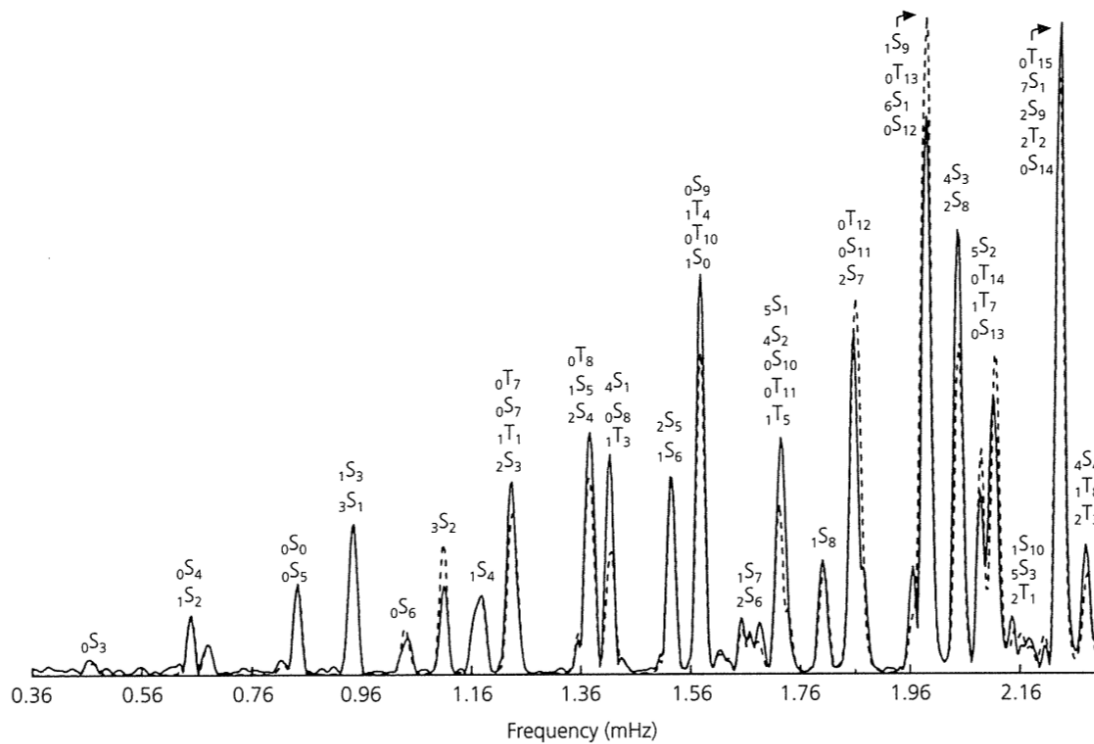
$$u(t) = \sum_k \left\{ \sum_m R_k^m S_k^m \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k^2} + \sum_{k'} \frac{\cos \omega_k t}{(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2) \omega_k^2} \left( \sum_m \sum_{m'} (R_k^m Z_{kk'}^{mm'} S_{k'}^{m'} + R_{k'}^{m'} Z_{k'k}^{m'm} S_k^m) \right) \right\}$$

L'écriture complexe de l'onde sur l'une des composantes est :

$$v \cdot u(t) = \Re \left\{ \sum_k \frac{e^{i\omega_k t}}{\omega_k^2} \left\{ \sum_m R_k^m S_k^m + \sum_{\substack{k' \\ k \neq k'}} \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega_{k'}^2)} \left( \sum_m \sum_{m'} (R_k^m Z_{kk'}^{mm'} S_{k'}^{m'} + R_{k'}^{m'} Z_{k'k}^{m'm} S_k^m) \right) \right\} \right\} \quad (1.37)$$

Le second terme de l'équation 1.37 correspond au couplage entre les multiplets et le premier correspond à une Terre SNREI.

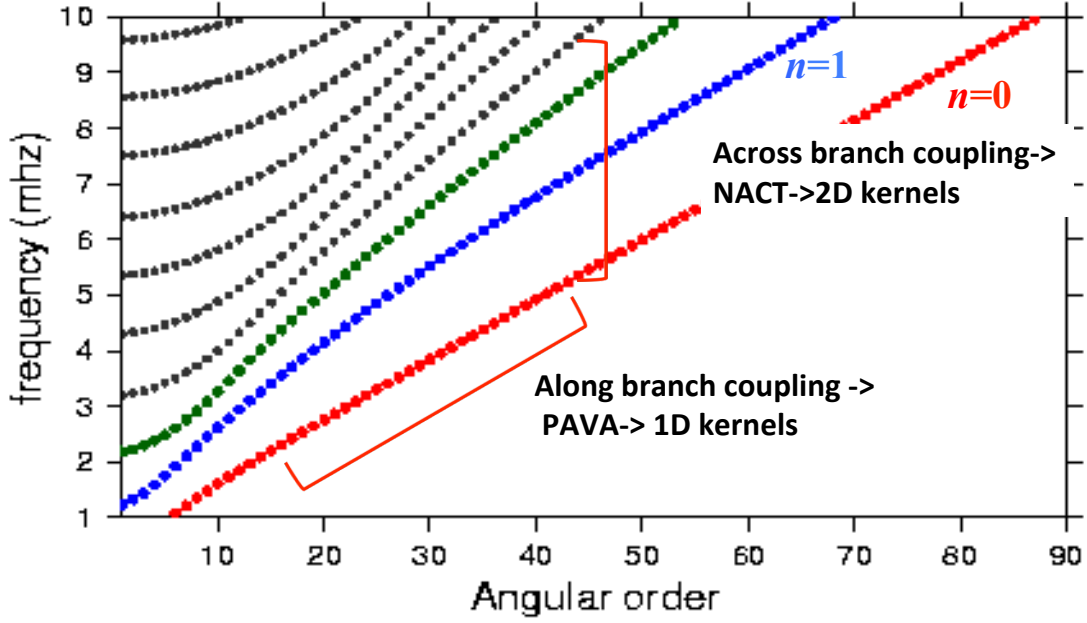
La figure 1.2 montre un exemple de modes propres de la Terre.



**Figure 1.2** – Spectre sur 35 heures de la composante radiale du sismogramme du séisme de Bolivie (9 juin 1994) enregistré en Californie, on remarque que certains pics correspondent à plusieurs modes (exemple le pic de fréquence 0.96 correspond aux modes  ${}_1S_3$  et  ${}_3S_1$ ) indiquant ainsi le couplage entre les modes ayant les même fréquences, le trait continue est le spectre observé, et le trait en pointillés est le spectre prédit à l'aide d'un modèle de vitesse (Dahlen and Tromp 1998).

### 1.3 Théorie de couplage asymptotique non linéaire des modes propres (NACT)

Le couplage entre les modes appartenant aux différentes branches (voir figure 1.3) est décrit par la « nonlinear asymptotic coupling theory » établie par Li and Tanimoto (1993), et nous permet de calculer les noyaux de sensibilité 2D dans le plan vertical contenant la source et le récepteur.

Toroidal modes :  $n \mathbf{T} l$ 


l: angular order, horizontal nodes  
n: overtone number, vertical nodes

**Figure 1.3** – Le couplage entre les modes d'une même branche ( $n$  fixé et  $\ell$  variable, PAVA) permet de calculer les noyaux de sensibilité 1D, et le couplage entre les modes de différentes branches ( $\ell$  fixé et  $n$  variable, NACT) nous permet de calculer les noyaux de sensibilité 2D, ce qui permet de capter les hétérogénéités latérales (Li and Romanowicz 1996). Le couplage à travers les différentes branches permet d'inclure les courtes périodes et de prendre en compte le caractère de rais des ondes volume, voir la relation  $ka = (\ell + 1/2)$ .

D'une manière générale nous pouvons simplifier l'écriture d'un sismogramme par la relation suivante :

$$u(\tau) = \mathbf{R} \exp(i\Omega\tau) \mathbf{S} \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  sont les vecteurs correspondant au récepteur et à la source respectivement, et  $\Omega$  est défini comme suit :

$$\Omega_{ij} = \omega_i I_{ij} + \frac{Z_{ij}}{\omega_i + \omega_j} \quad (1.39)$$

avec  $\omega_i$  la fréquence propre complexe du singlet  $i$ ,  $I_{ij}$  sont les éléments de la matrice identité  $I$ , et  $Z_{ij}$  prend en compte l'effet de la perturbation sur la structure 3D (Li and Tanimoto 1993). Si l'on désire négliger l'effet de la perturbation sur la structure 3D, il suffit faire de tendre  $Z_{ij} \rightarrow 0$ .

Si nous introduisons le « shift de fréquence » apparent  $\delta\omega_i$  (qui est le même pour tous les singlets contenus dans un multiplet) dans l'expression donnée par l'équation 1.39, on obtient  $\Omega_{ij} = (\omega_i + \delta\omega_i)I_{ij} + \frac{Z_{ij}}{\omega_i + \omega_j} - \delta\omega_i I_{ij}$ ; ceci conduit :  $\Omega_{ij} = (\omega_i + \delta\omega_i)I_{ij} + (Z_{ij} - \omega_i \delta\omega_i I_{ij} - \omega_j \delta\omega_i I_{ij}) / (\omega_i + \omega_j)$

d'où :

$$\Omega_{ij} = \hat{\omega}_i I_{ij} + \frac{\hat{Z}_{ij}}{\omega_i + \omega_j} \quad (1.40)$$

avec  $\hat{\omega}_i = \omega_i + \delta\omega_i$  et  $\hat{Z}_{ij} = Z_{ij} - \omega_i\delta\omega_i I_{ij} - \omega_j\delta\omega_j I_{ij}$

L'expression de  $Z_{ij}$  est définie par  $Z_{ij} = \langle i|H|j \rangle - \omega_j^2 \langle i|\delta\rho|j \rangle$ , où

$$\begin{cases} \langle i|H|j \rangle = \int_V u_i^{*0} H u_j dv \\ \langle i|\delta\rho|j \rangle = \int_V u_i^{*0} \delta\rho u_j dv \end{cases}$$

Nous avons défini plus haut (équation 1.24) la perturbation de fréquence  $\delta\omega_k$  (identique pour tous les singlets appartenant à un même multiplet) tel que  $\bar{\omega}_k \sim \omega_k - \varepsilon/2\omega_k$ , ainsi en remplaçant  $\varepsilon$  par son expression donnée plus haut, nous pouvons écrire :

$$\delta\omega_k = \frac{\sum_m \sum_{m'} R_k^m S_K^{m'} Z_k^{mm'}}{2\omega_k \sum_{m=0} R_k^m S_k^m}$$

Nous pouvons évaluer  $\delta\omega_k$  en sommant les fréquences propres locales ( $\delta\omega_{loc}$ ) le long du trajet entre la source et la station, ce qui conduit à :

$$\delta\omega_k = \frac{1}{\widehat{SR}} \int_S^R \delta\omega_{loc}^k d\varphi \quad (1.41)$$

où  $d\varphi$  est l'élément de distance angulaire entre la source et la station,  $\widehat{SR}$  la distance source-station et  $\delta\omega_{loc}^k$  la fréquence propre en chaque point le long du trajet.

En exploitant tout ce que nous avons établi jusqu'ici, nous allons donner l'expression du sismogramme établie par [Li and Romanowicz \(1995\)](#) à l'aide de la théorie NACT (nonlinear asymptotic coupling theory) :

$$u_{nact}(t) = \sum_k A_k \exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_k t) + \delta u(t) \quad (1.42)$$

La sommation est faite ici sur tous les multiplets ; le terme  $A_k$  est donné par :

$$A_k = \sum_m R_k^m S_k^m$$

et la perturbation  $\delta u(t)$  qui prend en compte le couplage à travers les différentes branches est donnée par :

$$\delta u(t) = \sum_k \left[ -\mathbf{i}\delta\omega_k t A_k \exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_k t) + \sum_{\substack{k' \\ k' \in \Gamma_k}} D_{kk'}(t) E_{kk'}(t) \right] \quad (1.43)$$

Ici  $\Gamma_k$  est l'ensemble de multiplets dont les fréquences propres  $\omega_{k'}$  sont telles que  $\omega_{k'} \geq \omega_k$  ; les termes  $D_{kk'}$  et  $E_{kk'}$  sont définis par :

$$D_{kk'}(t) = \frac{\exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_k t) - \exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_{k'} t)}{(\omega_k + \omega_{k'}) + (\hat{\omega}_k - \hat{\omega}_{k'})} \quad (1.44)$$

$$E_{kk'}(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_{kk'}^{(1)} \int_0^{2\pi} \delta\omega_{kk'}^2 \cos[(\ell' - \ell)\varphi] d\varphi + Q_{kk'}^{(2)} \int_0^{2\pi} \delta\omega_{kk'}^2 \sin[(\ell' - \ell)\varphi] d\varphi \right\} \quad (1.45)$$

$Q_{kk'}^{(1)}$  et  $Q_{kk'}^{(2)}$  sont fonctions de la station et de la source,  $\ell'$  et  $\ell$  sont les ordres angulaires correspondant aux multiplets  $k'$  et  $k$ , et  $\varphi$  la distance le long du grand cercle.  $\delta\omega_{kk'}^2$  est donnée par :

$$\delta\omega_{kk'}^2 = \int_0^a \delta m M_{kk'} r^2 dr - \sum_d r_d^2 h_d H_{kk'}^d \quad (1.46)$$

avec  $M_{kk'}$ ,  $H_{kk'}^d$  les noyaux de sensibilité et  $h_d$  l'ondulation de la  $d^{ieme}$  discontinuité. En réalité la présence d'une discontinuité (Moho par exemple) de rayon  $r_d$  induit un « shift de fréquence » du mode  $k$  et ce « shift de fréquence » induit à son tour le couplage avec le mode voisin  $k'$  et cela se traduit par la perturbation du carré de la fréquence  $\omega_{kk'}^2$  donnée par la relation 1.47 (qui fait intervenir la fréquence des deux modes  $k$  et  $k'$ ). On définit alors la discontinuité de la manière suivante (Li and Romanowicz 1996) :

$$\delta\omega_{kk'}^2 = 2\omega_{kk'} \delta\omega_{kk'} = (\omega_k + \omega_{k'}) \delta\omega_{kk'} = \sum_d r_d^2 \delta r_d H_{kk'}^d \quad (1.47)$$

où  $\delta r_d$  est la perturbation du rayon de la discontinuité.

On remarque que la perturbation du modèle  $\delta m$  dépend de  $\theta$ ,  $\varphi$  et de  $r$ , nous pouvons donc alors décomposer  $\delta m$  sur une base de spline cubique :

$$\delta m = \sum_{i,j} C_{ij} \beta_i(r) H_j(\theta, \varphi) \quad (1.48)$$

où  $C_{ij}$ ,  $\beta(r)$  et  $H(\theta, \varphi)$  sont respectivement les coefficients, b-spline (cubique) et les splines sphériques. La dérivée de  $\omega_k$  par rapport aux paramètres du modèle est donnée par

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \beta_i(r) r^2 dr \int_0^\Delta H_j(\theta, \varphi) ds \quad (1.49)$$

le terme  $H_j(\theta, \varphi)$  est le « path-integral » qui permet de calculer la contribution de chaque point de la grille le long du trajet source-station, cette notion de « path-integral » sera détaillée dans les prochains chapitres.





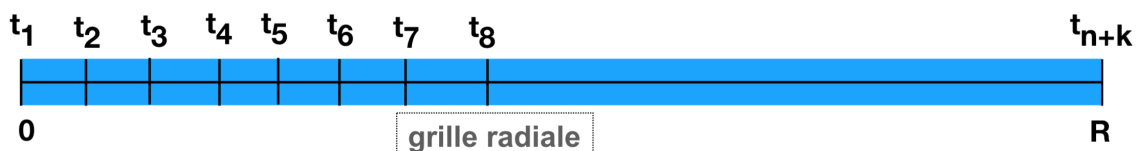
## Chapitre 2

# Problème inverse

## 2.1 Paramétrisation du problème inverse

### 2.1.1 Les fonctions b-spline radiales

Les fonctions b-splines (figure 2.1) trouvent leur application dans plusieurs domaines, tel que la physique quantique, la sismologie etc ... ; une fonction b-spline est tout simplement une combinaison linéaire de splines (fonction définie par morceaux à l'aide des polynômes) sur un intervalle bien défini.



Considérons l'axe radial ( $0 \leq r \leq R$ ) de la figure ci-contre que nous subdivisons en une séquence des points appelés nœuds (knots en anglais), satisfaisant la condition  $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+k} = R$

Les fonctions b-splines d'ordre  $k$  sur la séquence des points sont définies par la relation récursive suivante :

$$q_{i,1}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq r < t_{i+1} \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$
$$q_{i,k}(r) = \frac{r - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} q_{i,k-1}(r) + \frac{t_{i+k} - r}{t_{i+k} - t_{i+1}} q_{i+1,k-1}(r) \quad \text{avec } k > 1 \quad (2.1)$$

$q_{i,k}(r)$  est un polynôme de degré  $k - 1$  défini sur l'intervalle  $t_i \leq r \leq t_{i+k}$ , la famille de fonctions  $q_{i,k}(r)$  est dite uniforme si les nœuds  $t_i$  sont équidistants les uns des autres, dans le cas contraire elle est dite non uniforme. Mais en réalité dans cette étude nous utilisons une base de  $N$  b-spline ( $\beta_0(r), \beta_1(r), \dots, \beta_{N-1}(r)$ ) construite par [Panning and Romanowicz \(2006\)](#). Dans leur construction ils généralisent en supposant que les nœuds sont espacés de façon arbitraire, puis en imposant une surface unitaire après chaque spline.

Si l'on considère les fonctions b-spline  $\beta_k(r)$  dont les nœuds sont compris entre les nœuds extrêmes tels que  $2 \leq k \leq N - 3$ , alors ces fonctions b-splines sont construites à l'aide d'une combinaison linéaire de 4 polynômes ( ${}_k q_j$ ) de degrés 3,2,1 et 0 respectivement dans l'intervalle  $[r_{k-2}, r_{k+2}]$ .

$$\begin{aligned}\beta_k(r) &= \sum_{j=0}^3 {}_k q_j(r) \\ &= {}_k q_0(r) + {}_k q_1(r) + {}_k q_2(r) + {}_k q_3(r)\end{aligned}\quad (2.2)$$

où les polynômes  ${}_k q_j$  sont définis par :

$${}_k q_j(r) = a_j^k (r - r_j)^3 + b_j^k (r - r_j)^2 + c_j^k (r - r_j) + d_j^k \quad (2.3)$$

avec  $r \in [r_{k-2+j}, r_{k+2+j}]$  et  ${}_k q_j(r) = 0$ , par tout ailleurs. Pour déterminer les 16 coefficients  $a_j^k, b_j^k, c_j^k$  et  $d_j^k$  on impose les conditions suivantes :

(i) La fonction spline et ses dérivées premières et secondes sont nulles aux deux nœuds délimitant son domaine de définition (ceci implique 6 conditions à satisfaire) :

$$\begin{aligned}{}_k q_j(r_{k-2+j}) &= {}_k q_j'(r_{k-2+j}) = {}_k q_j''(r_{k-2+j}) \\ {}_k q_j(r_{k+2+j}) &= {}_k q_j'(r_{k+2+j}) = {}_k q_j''(r_{k+2+j})\end{aligned}$$

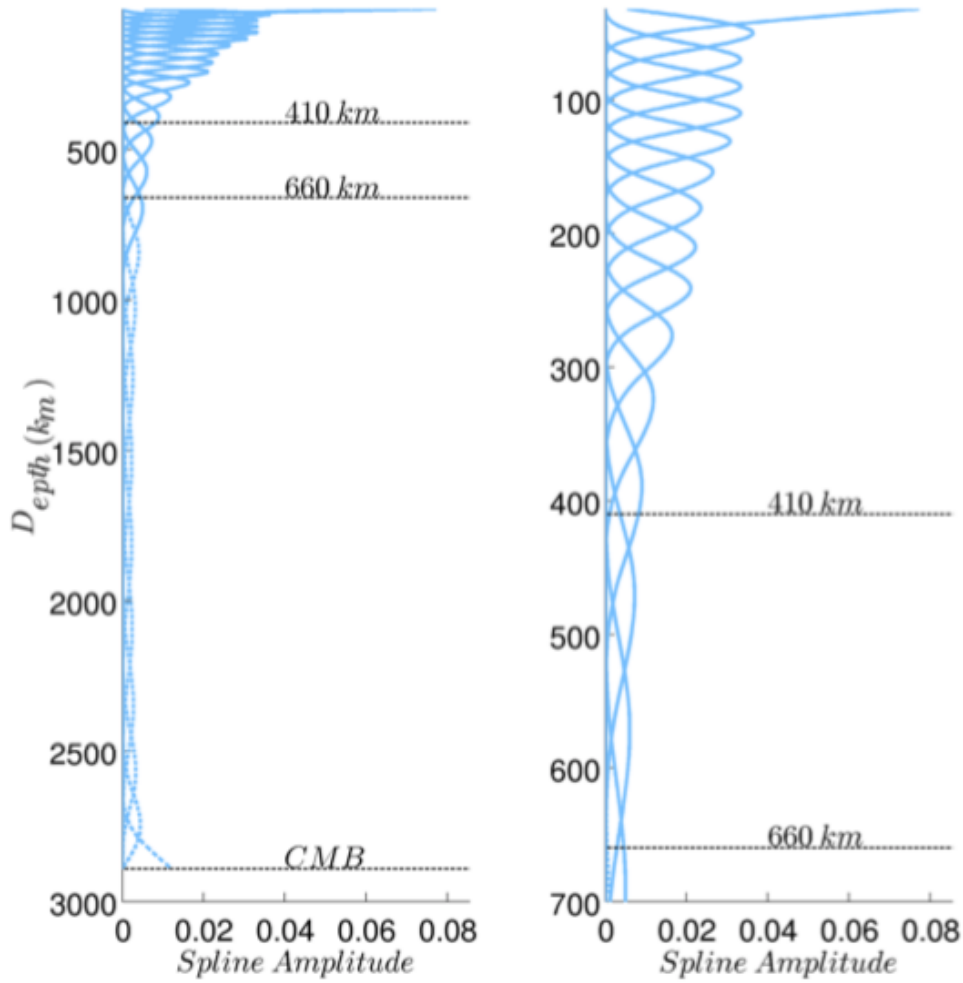
(ii) La fonction spline et ses dérivées premières et secondes sont continues aux nœuds (ceci implique 9 conditions à satisfaire) :

$$\begin{aligned}{}_k q_0(r_{k-1}) &= {}_k q_1(r_{k-1}) ; {}_k q_1(r_k) = {}_k q_2(r_k) ; {}_k q_2(r_{k+1}) = {}_k q_3(r_{k+1}) \\ {}_k q_0'(r_{k-1}) &= {}_k q_1'(r_{k-1}) ; {}_k q_1'(r_k) = {}_k q_2'(r_k) ; {}_k q_2'(r_{k+1}) = {}_k q_3'(r_{k+1}) \\ {}_k q_0''(r_{k-1}) &= {}_k q_1''(r_{k-1}) ; {}_k q_1''(r_k) = {}_k q_2''(r_k) ; {}_k q_2''(r_{k+1}) = {}_k q_3''(r_{k+1})\end{aligned}$$

(iii) La fonction spline respecte la condition de normalisation :

$$\int_{r_{k-2}}^{r_{k+2}} \beta_k(r) dr = 1$$

Ces conditions permettent de déterminer les 16 coefficients mentionnés plus haut, pour plus de détails voir [Panning and Romanowicz \(2006\)](#).



**Figure 2.1** – Représentation des b-splines radiaux (cubique), à droite est représenté le zoom de la figure de gauche entre 50-700 km.

### 2.1.2 Les splines sphériques

Les splines sphériques (latéraux, voir figure 2.2) permettent de représenter une grandeur physique en 2 dimensions (i.e. dépendant de la colatitude et de la longitude par exemple) pour cette raison, elle dépend de la distance géodésique (distance angulaire entre deux points sur une sphère)  $\Delta$ , elle est définie par (Wang and Dahlen 1995) :

$$B(\Delta) = \begin{cases} \frac{3}{4}\bar{\Delta}^{-3}\Delta^3 - \frac{6}{4}\bar{\Delta}^{-2}\Delta^2 + 1, & \Delta \leq \bar{\Delta} \\ -\frac{1}{4}\bar{\Delta}_1^3 + \frac{3}{4}\bar{\Delta}_1^2 - \frac{3}{4}\bar{\Delta}_1 + \frac{1}{4}, & \bar{\Delta} \leq \Delta \leq 2\bar{\Delta} \end{cases}$$

$\bar{\Delta}$  est la distance angulaire moyenne entre deux nœuds (knots) voisin ;  $\Delta_1 = \Delta - \bar{\Delta}$  et  $\bar{\Delta}_1 = \Delta_1/\bar{\Delta}$

Remarquons ici que si  $\Delta \geq 2\bar{\Delta}$  alors  $B$  et sa dérivée sont nulles.

Considérons une fonction dépendant des coordonnées géographiques (colatitude et longitude) telle que la vitesse de phase des ondes de surface par exemple. Nous pouvons alors la décomposer sur la base de fonction spline sphérique (latérale) comme suit :

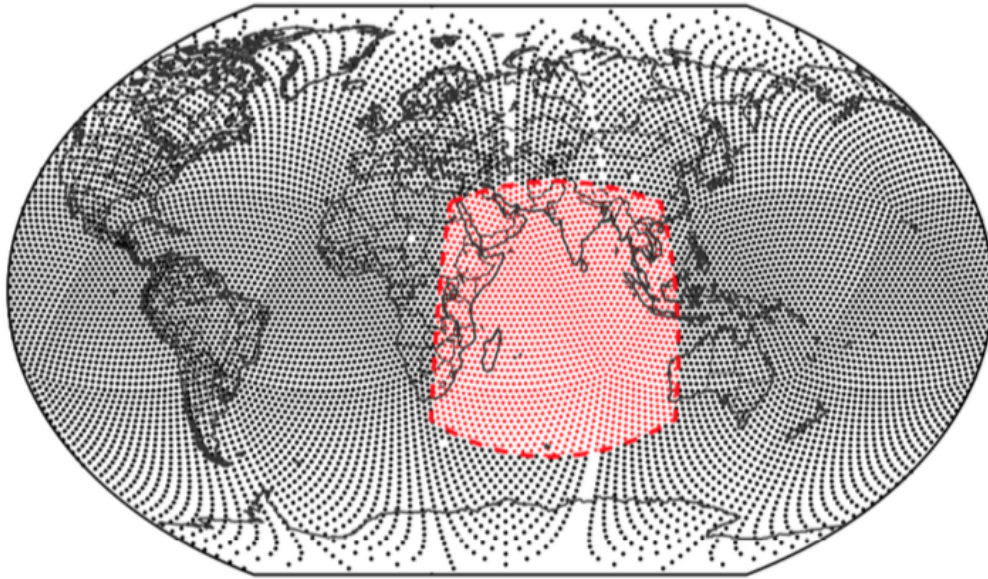
$$c(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^N B_i(\Delta) a_i \quad (2.4)$$

avec  $a_i$  les coefficients du modèle de vitesse aux nœuds  $i$ , si nous avons les valeurs locales (i.e. les valeurs à chaque nœud) nous pouvons déterminer les coefficients  $a_i$  en résolvant le système :  $\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{a}$

avec  $c_i$  et  $B_{ij}$  définis par :

$$\begin{cases} c_i = c(\theta_i, \phi_i) \\ B_{ij} = B_j(\Delta_{ij}) \end{cases}$$

$\Delta_{ij}$  est la distance entre le  $i^{th}$  et le  $j^{th}$  nœud de la grille de paramétrisation. La figure 2.2 montre une représentation des nœuds latéraux sur toute la Terre, avec une partie en couleur rouge qui est le domaine par lequel nous sommes intéressés.



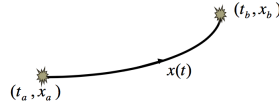
**Figure 2.2** – Représentation des splines sphériques (latéraux) sur tout le globe terrestre, les splines en rouge représentent le domaine où l'inversion est effectuée dans cette étude, la distance  $\Delta_{ij}$  entre deux splines  $i$  et  $j$  est de  $\sim 200$  km.

### 2.1.3 Intégrale le long du trajet (path-integral)

Pour clarifier au mieux cette notion d'intégrale le long du trajet (path-integral), nous allons l'illustrer par deux exemples simples, donnés respectivement en mécanique classique et en

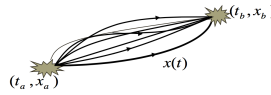
mécanique ondulatoire. En mécanique classique par exemple lorsque une particule repérée dans le temps et dans l'espace, dont la position instantanée est décrite par  $\mathbf{x}(t)$ , va d'un point A à un point B ; le trajet emprunté est unique et est défini par :

$S = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$ , où  $L(x, \dot{x}, t)$  est le **Lagrangien** (différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la particule).



**Figure 2.3** – Trajet d'une particule allant du point A repéré par  $(t_a, x_a)$  au point B repéré par  $(t_b, x_b)$  en mécanique classique.

En revanche, en mécanique ondulatoire on considère tous les trajets possibles que la particule peut emprunter pour aller du point A au point B (figure 2.4).



**Figure 2.4** – Trajets possibles d'une particule allant d'un point A repéré par  $(t_a, x_a)$  au point B repéré par  $(t_b, x_b)$  en mécanique ondulatoire.

D'autant plus que plusieurs trajets pour aller de A à B sont possibles, on se propose en mécanique ondulatoire de calculer la contribution de chaque trajet par la relation suivante :

$$K(a, b) = \sum_{\text{trajets}} A_i(x(t))$$

$A_i(x(t))$  est la distribution de chaque trajet entre les points A et B, et définie par  $A_i(x(t)) = \text{cste.} \exp[iS_i(x(t))/\hbar]$

Cette description nous permet d'avoir une idée générale de la notion du trajet source-récepteur, qui comme dans le cas de la figure 2.4 est un « multipathing ». Les « path-integral » seront calculés dans le cadre de cette étude le long de l'arc mineur entre la source et le récepteur.

### 2.1.4 Paramétrisation physique du modèle

La propagation des ondes sismiques à l'intérieur de la Terre est régie par l'équation de l'élasto-dynamique qui met en exergue le tenseur des propriétés élastiques du milieu de propagation (Terre), ce tenseur à 81 paramètres est réduit à 21 paramètres à l'aide des propriétés de symétrie. Mais jusqu'ici il n'est pas toujours possible de déterminer ses 21 paramètres à l'intérieur du manteau terrestre (par exemple), à l'aide des données sismologiques dont nous disposons. Pour cette raison les sismologues essaient le plus souvent d'approximer la Terre comme un milieu transversalement isotrope (i.e. ayant uniquement de l'anisotropie radiale) avec un axe de symétrie vertical, ceci permet de réduire considérablement le nombre de paramètres décrivant notre Terre. Un tel milieu peut être décrit

par les 5 paramètres de **Love** (1927) notés  $A, C, F, L, N$  et définis par :

$$A = \rho V_{PH}^2 ; C = \rho V_{PV}^2 ; N = \rho V_{SH}^2 ; L = \rho V_{SV}^2 \quad (2.5)$$

où  $\rho$  est la densité du milieu de propagation,  $V_{PH}, V_{PV}$  sont les vitesses de l'onde P se propageant horizontalement et verticalement respectivement ; de même  $V_{SH}$  et  $V_{SV}$  sont les vitesses de l'onde S polarisée horizontalement et verticalement. Nous pouvons redéfinir les 5 paramètres précédents à l'aide de 3 paramètres anisotropes plus deux vitesses isotropes ( $V_{Piso}, V_{Siso}$ ) dites « Voigt average isotropic velocities ». Nous pouvons alors écrire :

$$\xi = V_{SH}^2/V_{SV}^2 ; \phi = V_{PV}^2/V_{PH}^2 ; \eta ; V_{Piso}^2 \simeq (V_{PV}^2 + 4V_{PH}^2)/5 ; V_{Siso}^2 \simeq (2V_{SV}^2 + V_{SH}^2)/3 \quad (2.6)$$

$\eta = F/(A - 2L)$  est le paramètre prenant en compte les variations de la vitesse de propagation de l'onde sismique dans une direction intermédiaire entre la direction horizontale et verticale. Nous nous intéresserons ici à inverser uniquement pour les paramètres  $V_{Siso}$  (l'expression approximative est donnée par la relation 2.6) et  $\xi$  ; dû au fait que les paramètres  $V_{Piso}$  (l'expression approximative est donnée par la relation 2.6),  $\phi, \rho$ , et  $\eta$  ne sont pas assez contraints, nous n'inverserons pas pour leur variations latérales. Pour cette raison nous allons utiliser les lois d'échelle ("scaling") établies par [Montagner and Anderson \(1989\)](#) et remaniés par [Panning and Romanowicz \(2006\)](#) pour réduire le nombre de paramètres à inverser.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln(V_{Piso})}{\delta \ln(V_{Siso})} &\simeq 0.5 \\ \frac{\delta \ln(\rho)}{\delta \ln(V_{Siso})} &\simeq 0.3 \\ \frac{\delta \ln \phi}{\delta \ln \xi} &\simeq -1.5 \\ \frac{\delta \ln \eta}{\delta \ln \xi} &\simeq -2.5 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il est clair que l'anisotropie radiale  $\xi$  est due à la différence entre les vitesses des ondes S polarisées horizontalement ( $V_{SH}$ ) et verticalement ( $V_{SV}$ ) ; si nous inversons pour ces paramètres ( $V_{SH}$  et  $V_{SV}$ ) et nous calculons par la suite l'anisotropie radiale  $\xi$  il sera plus probable d'avoir une incertitude importante sur l'amplitude de l'anisotropie radiale voir même sur le signe de la résolution de l'anisotropie radiale. Pour toutes ces raisons il est alors plus intéressant d'inverser directement pour l'anisotropie radiale et la vitesse  $V_{Siso}$ .

### 2.1.5 Paramétrisation géographique du modèle

La paramétrisation géographique consiste à déterminer la répartition de notre modèle sur l'ensemble des points géographiques de notre région d'étude, ceci revient à déterminer la fonction caractéristique de notre modèle (de vitesse, d'anisotropie et ou d'atténuation) sur une Terre à symétrie sphérique, sachant que nous avons trois degrés de liberté ( $r, \theta, \varphi$ ) sur une sphère ; notre modèle est représenté radialement (suivant  $r$ ) par les fonctions b-splines

et latéralement (suivant  $\theta$  et  $\varphi$ ) par les fonctions b-splines latérales.

Pour la paramétrisation radiale de  $V_s$  et  $\xi$  (anisotropie radiale), Nous avons choisi 20 nœuds radiaux avec un espacement irrégulier (b-splines radiales), cet espacement irrégulier entre des nœuds radiaux reflète le fait que la distribution de la sensibilité des données en profondeur est irrégulière. Latéralement nous utilisons 1116 nœuds (splines sphériques) pour tout le manteau (manteau supérieur et inférieur).

$$\delta m(r, \theta, \varphi) = \sum_s \sum_j m_{js} B_j(r) H_s(\theta, \varphi) \quad (2.8)$$

Dans cette expression précédente  $\delta m(r, \theta, \varphi)$  est la perturbation 3D du modèle,  $m_{js}$  représente les coefficients du modèle qui permettent de scanner latéralement notre Terre en profondeur, ces coefficients sont déterminés par inversion. Les coefficients  $m_{js}$  sont stockés dans les fichiers de type « MODEL-NAME.A3d »

Pour un modèle de Terre SNREI, le calcul des fréquences propres  $\omega_k$  et des fonctions propres  $U_k(r)$ ,  $V_k(r)$ ,  $W_k(r)$  pour chaque mode  $k$  ( $k = n, \ell$ ) est connu, en utilisant le code de calcul des fréquences propres et des fonctions propres « yannos » par exemple. Une fois les fonctions propres connues nous pouvons aisément calculer les noyaux de sensibilité  $M_k(r)$  et par conséquent les perturbations 3D des fréquences propres  $\delta\omega_k$  en chaque point géographique ( $\theta, \phi$ ) sur la surface de la Terre.

$$\delta\omega_k(\theta, \phi) = \int_0^a \left( M_k^{(1)}(r) \frac{\delta m_1}{m_1}(r, \theta, \phi) + M_k^{(2)} \frac{\delta m_2}{m_2}(r, \theta, \phi) + \dots \right) r^2 dr \quad (2.9)$$

Nous avons omis le terme prenant en compte les perturbations des discontinuités (voir équation 1.46). Pour une source  $S(\theta_S, \phi_S)$  et une station  $R(\theta_R, \phi_R)$  on définit le « shift de fréquence » pour chaque mode  $k$  sur l'arc mineur et l'arc du grand cercle par les relations données en dessous de l'équation 1.8. Il est important de noter que les perturbations de fréquence sur l'arc mineur ( $\delta\tilde{\omega}_k$ ) et sur l'arc majeur ( $\delta\hat{\omega}_k$ ) sont nécessaires pour le calcul du sismogramme avec la méthode du « path average approximation » donnée par l'équation 1.8. Ainsi pour les calculer nous exploitons les coefficients du modèle (obtenus par la décomposition du modèle sur une base de fonctions splines) stockés dans les fichiers de type « MODEL-NAME.A3d » et les noyaux des sensibilité  $M_k(r)$  ; pour chaque mode  $k$  et chaque b-spline (fonction définie par morceaux) radiale de degré  $j$ , on définit le noyau de sensibilité correspondant au degré  $j$  comme suit :

$$\mathbf{M}_k^j = \int_0^a M_k(r) B_j(r) r^2 dr \quad (2.10)$$

En plaçant l'équation 2.8 dans l'équation 2.9, on obtient :

$$\delta\omega_k(\theta, \phi) = \sum_s \sum_j \int_0^a m_{js} B_j(r) H_s(\theta, \varphi) r^2 dr \quad (2.11)$$

Pour chaque couple source-station on définit le « **path-integral** » comme étant :

$$\mathbf{L}_s^{\gamma,1} = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta H_s(\theta, \phi) ds \quad (2.12)$$



$$\mathbf{L}_s^{\gamma,2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_s(\theta, \phi) ds \quad (2.13)$$

Pour calculer le « path-integral » sur l'arc mineur (équation 2.12) et sur l'arc majeur (équation 2.13), nous avons essentiellement besoin de la position de la source, de la station et de la paramétrisation géographique de la surface choisie.

Pour chaque mode  $k$  les perturbations de fréquences sur l'arc mineur et majeur sont données par :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_k = \frac{1}{2\pi} \oint \delta\omega_k(s) ds \\ \tilde{\omega}_k = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \delta\omega_k(s) ds \end{cases}$$

et peuvent être calculées en combinant les équations 2.11, 2.12 et 2.13, ceci conduit à :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_k = \sum_s \sum_j m_{js} B_j(r) \mathbf{M}_j^j \mathbf{L}_s^{\gamma,2}(\theta, \varphi), \\ \tilde{\omega}_k = \sum_s \sum_j m_{js} B_j(r) \mathbf{M}_j^j \mathbf{L}_s^{\gamma,1}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Les coefficients  $m_{js}$  étant stockés dans les fichiers de type « MODEL-NAME.A3d » et les noyaux de sensibilité calculés à l'aide du modèle 1D de référence, le « path-integral »  $\mathbf{L}$  est dont calculé en utilisant le code « *sphA1int* », qui lit les fichiers contenant les informations sur les événements et les stations (EVENT.wpd/wph). Le résultat de l'intégration est enfin stocké dans les fichiers (EVENT.wpH/wpN). Il est important de noter que peu de « path-integrals » sont non nulles pour chaque couple source-station.

## 2.2 Calcul des noyaux de sensibilité

Par définition le noyau de sensibilité est la prédiction de la région échantillonnée par une phase sismique précise le long de son trajet. Il est important de mentionner que les régions échantillonnées par les différentes phases sismiques enregistrées à une station à des instants différents ne sont pas toujours les mêmes.

Si nous considérons par exemple un sismogramme  $u(t)$ , sa sensibilité est définie par [Li and Tanimoto \(1993\)](#) comme suit :

$$\Delta u(\tau) = \int_S \mathbf{M}(r, \varphi, \tau) \delta \mathbf{m}(r, \varphi) dA \quad (2.14)$$

où  $\Delta u(\tau)$  est la perturbation du sismogramme à l'instant  $\tau$  due à la perturbation volumétrique du modèle  $\delta m$ , on intègre sur la section du grand cercle  $S$  ( $dA = r dr d\varphi$ ) à l'équateur, et le noyau de sensibilité du sismogramme  $\mathbf{M}(r, \varphi, \tau)$  est donné par ([Li and Tanimoto 1993](#)) :

$$\mathbf{M}(r, \varphi, \tau) = \frac{r}{2\pi} \sum_{kk'} \frac{\cos \omega_k \tau - \cos \omega_{k'} \tau}{\omega_k - \omega_{k'}} \mathbf{M}_{kk'} \sum_{NM} T_{kk'}^{NM} \cos[(\ell' - \ell)\phi + \lambda\Delta + \Pi_{NM}] \quad (2.15)$$

où nous avons :

$$T_{kk'} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{i^{N+M}}{\sqrt{\sin \Delta}} R_{kN} S_{k'M}; \quad \Pi_{NM} = \frac{N+M}{2} \pi - \frac{\pi}{4}; \quad \text{et } \lambda = \ell + 1/2$$

La sommation est faite ici sur les multiplets  $k$  et  $k'$  dans la bande de fréquence considérée.  $\mathbf{M}_{kk'}$  est la sensibilité des modes des multiplets  $k$  et  $k'$ .

### 2.2.1 Sensibilité dans le cadre de la théorie des rais

La théorie des rais est applicable dans le cadre de l'approximation haute-fréquence (lorsque la fréquence est infiniment grande). Elle est valide aussi pour **les ondes de surface**, lorsque la longueur d'onde du signal ( $\lambda_w = cT$ ) est de loin inférieure à la longueur d'onde caractéristique des hétérogénéités ( $\Lambda$ ) dans le milieu de propagation. Dans ce dernier cas de figure la perturbation de phase des ondes de surface est définie par :

$$\delta\phi(\omega) = -\frac{\omega}{c(\omega)} \int_0^\Delta \frac{\delta c(\omega, l)}{c(\omega)} dl \quad (2.16)$$

Ici,  $\omega$  est la fréquence,  $c(\omega)$  est la vitesse de phase des ondes de surfaces se propageant sur une Terre sphérique.  $\Delta$  est la distance épacentrale, et  $l$  est l'abscisse curviligne le long du grand cercle. Il faut noter que la perturbation de la vitesse de phase des ondes de surface entraîne la perturbation des ondes de compression et des ondes de cisaillement, car les ondes de Rayleigh résultent de l'interférence des ondes **P** (compressives, de vitesse  $\alpha$ ) et des ondes **S** (cisaillement, de vitesse  $\beta$ ) polarisées verticalement, plus la condition de la surface libre (i.e. sans contrainte); tandis que les ondes de Love sont une interférence des multiple réflexion des ondes **S**, plus la surface libre.

Pour les ondes de **Love**, perturbation de vitesse de phase  $\delta c$  de l'équation 2.16 peut alors s'écrire :

$$\delta c = \int_0^a \left( \frac{\partial c}{\partial \beta} \right) \delta \beta dr \quad (2.17)$$

Pour les ondes de **Rayleigh** :

$$\delta c = \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha + \left( \frac{\partial c}{\partial \beta} \right) \delta \beta \right] dr \quad (2.18)$$

les dérivées de Fréchet ( $\partial c/\partial \alpha$  et  $\partial c/\partial \beta$ ) dépendent du rayon ( $r$ ) et de la fréquence  $\omega$ . L'intégration se fait du centre de la Terre ( $r = 0$ ) à la surface ( $r = a$ ).

### 2.2.2 Sensibilité dans le cas de fréquence finie

Dans le cas des fréquences finies, la perturbation de la vitesse de phase des ondes de surface n'est plus seulement sensible aux hétérogénéités le long du raie entre la source et le récepteur, mais aussi aux hétérogénéités autour du raie. Dans ce cas on utilise l'approximation du « **scattering** » pour calculer les noyaux de sensibilité 3D. Les expressions des perturbations de **phase** des ondes de surface à une fréquence donnée, dans ce cas de figure (fréquence finie) peuvent être données en généralisant les équations 2.17, 2.18.

Pour les ondes de **Love** :

$$\delta\phi(\omega) = \int \int \int_{\oplus} K_\beta(\omega, X) \frac{\delta\beta}{\beta}(X) d^3\mathbf{X} \quad (2.19)$$

Pour les ondes de **Rayleigh** :

$$\delta\phi(\omega) = \int \int \int_{\oplus} \left[ K_{\alpha}(\omega, X) \frac{\delta\alpha}{\alpha}(X) + K_{\beta}(\omega, X) \frac{\delta\beta}{\beta}(X) \right] d^3\mathbf{X} \quad (2.20)$$

où  $\oplus$  représente le volume de la Terre, les dérivées de Fréchet et les noyaux de sensibilité sont exprimés en coordonnées sphériques. Pour plus de détails voir [Zhou et al. \(2005\)](#).

### 2.2.3 Sensibilité de la vitesse de groupe

Dans cette étude, nous avons contraints la croûte (uniquement avec les données de dispersion) et la partie supérieure du manteau (données de dispersion plus forme d'onde jusqu'à  $\sim 200$  km de profondeur) à l'aide des données de courbes de dispersion de vitesse de groupe entre 25-150s, à cet effet nous allons montrer comment les noyaux de sensibilité sont calculés dans ce cas de figure. Considérons une onde sismique dont la vitesse dépend de trois variables indépendantes : la fréquence  $\omega$ , la propriété élastique du milieu ( $m$ ) et du nombre d'onde ( $k$ ). La relation mathématique classique reliant ces trois paramètres indépendants est :

$$\left( \frac{\partial\omega}{\partial k} \right)_m \left( \frac{\partial k}{\partial m} \right)_\omega \left( \frac{\partial m}{\partial\omega} \right)_k = -1 \quad (2.21)$$

Partant de l'équation 2.21 nous pouvons écrire :

$$\left( \frac{\partial\omega}{\partial k} \right)_m \left( \frac{\partial k}{\partial m} \right)_\omega = - \left( \frac{\partial\omega}{\partial m} \right)_k$$

Par définition, les vitesses de groupe et de phase de l'onde sont données respectivement par :  $U = \left( \frac{\partial\omega}{\partial k} \right)_m$  et  $c = \frac{\omega}{k}$ ; en substituant  $U$  et  $k$  dans la relation précédente nous obtenons :

$$\frac{U}{c^2} \left( \frac{\partial c}{\partial m} \right)_\omega = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\partial\omega}{\partial m} \right)_k \quad (2.22)$$

La présence de la dérivée de la vitesse de phase par rapport au paramètre élastique à  $\omega$  constant, dans le terme de droite de l'équation 2.22 montre que l'on peut calculer le noyau de sensibilité de la vitesse de phase à une période constante, connaissant le noyau de sensibilité de la fréquence propre (terme de droite de l'équation 2.22) pour un nombre d'onde  $k$  constant. Plaçons nous par exemple uniquement dans le cas du couplage entre les modes d'un multiplet, le noyau de sensibilité  $\mathbf{M}_{kk}$  dans ce cas précis est  $1D$ , et représente l'effet de la perturbation relative du modèle ( $\delta m/m$ ).

$$\mathbf{M}_{kk} = 2m\omega \left( \frac{\partial\omega}{\partial m} \right)_k \quad (2.23)$$

Par ailleurs le noyau de sensibilité logarithmique de la vitesse de phase est quant-à-lui défini par :

$$\mathbf{K}^c = \frac{m}{c} \left( \frac{\partial c}{\partial m} \right)_\omega \quad (2.24)$$

En plaçant les dérivées qui apparaissent dans les équations 2.24 - 2.23 dans l'équation 2.22 on obtient :

$$\mathbf{K}^c = \frac{c}{2U\omega^2} \mathbf{M}_{kk}$$

qui est une nouvelle forme du noyau de sensibilité de la vitesse de phase dépendant de la sensibilité des modes d'un multiplet. Si l'on désire maintenant obtenir la sensibilité de la vitesse de groupe, nous devons pour cela exprimer  $U$  en fonction de  $c$  et de  $\left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m$  puis faire la différentiation par rapport à  $m$  à  $\omega$  constant. En faisant la différentiation de la relation  $kc = \omega$  membre à membre, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_m = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_m = \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m} \end{cases}$$

La différentiation de  $U = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_m$  par rapport à  $m$  et à  $\omega$  constant revient donc à la différentiation de la seconde équation du système d'équation ci-dessus à  $\omega$  constant. Ceci conduit à :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_\omega = \frac{\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)_\omega - \frac{2\omega}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)_\omega \left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m + \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_m \left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)_\omega}{\left[\frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m\right]^2} \quad (2.25)$$

Nous allons alors chercher la valeur de  $\left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m$  puis la substituer dans l'équation 2.25, pour cela on peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m &= \left(\frac{\partial c}{\partial k}\right)_m \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_m \\ &= \frac{1}{U} \left(\frac{\partial c}{\partial k}\right)_m \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si l'on reprend la différentiation de la relation  $kc = \omega$  membre à membre, on obtient :

$$\left(\frac{\partial c}{\partial k}\right)_m = \frac{1}{k} \left[ \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_m - c \right] = \frac{cU}{\omega} - \frac{c^2}{\omega}$$

En substituant la relation précédente dans l'équation 2.26 on obtient finalement :

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m = \frac{c}{\omega} - \frac{c^2}{U\omega} \quad (2.27)$$

par conséquent le dénominateur de la relation 2.25 prend la forme :

$$\left[\frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial \omega}\right)_m\right]^2 = \frac{1}{U^2}$$

La substitution des deux dernières relations dans l'équation 2.25 conduit à :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_\omega = \frac{U^2}{c^2} \left[ \left(-1 + \frac{2c}{U}\right) \left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)_\omega + \omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_m \left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)_\omega \right] \quad (2.28)$$

Le noyau de sensibilité logarithmique de la vitesse de groupe est défini par :

$$\mathbf{K}^U = \frac{m}{U} \left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_\omega \quad (2.29)$$

En plaçant l'équation 2.29 dans l'équation 2.28, puis en substituant les dérivées de la vitesse de phase par rapport à  $m$ , par sa valeur donnée par l'équation 2.24 on obtient :

$$\mathbf{K}^U = \frac{Um}{c^2} \left\{ \left( \frac{2c}{U} - 1 \right) \frac{c\mathbf{K}^c}{m} + \frac{\omega}{m} \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial \omega} \right)_m \mathbf{K}^c + c \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)_m \mathbf{K}^c \right] \right\}$$

En substituant  $(\partial c/\partial \omega)_m$  par l'expression donnée à l'équation 2.27 on obtient finalement :

$$\mathbf{K}^U = \mathbf{K}^c + \omega \frac{U}{c} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)_m \mathbf{K}^c \quad (2.30)$$

On remarque ici que le noyau de sensibilité de la vitesse de groupe dépend du noyau de sensibilité de la vitesse de phase. La mesure du noyau de sensibilité de la vitesse de groupe à une fréquence précise  $\omega_i$  à un point  $(\theta, \phi)$  latéral permet de savoir jusqu'à quel niveau la structure en-dessous de ce point est sensible à la vitesse de groupe. Dans le terme de droite de l'équation 2.28 nous remarquons l'apparition de la dérivée de la vitesse de phase par rapport aux paramètres du modèle, la technique utilisée pour évaluer cette dérivée est de calculer le noyau de sensibilité de la vitesse de phase pour deux fréquences voisines  $\omega + \delta\omega$  et  $\omega - \delta\omega$  puis de faire la différence. Dans la pratique nos données de courbe de dispersion de la vitesse de groupe sont obtenues par inversion du mode fondamental (des modes propres de la Terre), ce qui permet d'avoir à chaque fréquence  $\omega_i$  une vitesse de groupe  $U_i$ . Ainsi pour calculer le noyau de sensibilité de la vitesse de groupe à une fréquence précise correspondant à l'ordre angulaire  $l = l_i$ , on calcule le noyau de sensibilité de la vitesse de phase à la fréquence  $\omega_{i-1}$  (correspondant à l'ordre angulaire  $l_{i-1}$ ) puis à la fréquence  $\omega_{i+1}$  (correspondant à l'ordre angulaire  $l_{i+1}$ ) et on divise par la différence  $\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_{i-1}$ . L'équation 2.8 nous donne les coefficients  $m_{js}$  qui nous renseignent sur la structure de la Terre en un point  $(\theta, \phi, r)$  via les paramètres  $V_s$  et  $\xi$  décomposés dans la base des splines sphériques  $H_s(\theta, \phi)$  et cubique  $B_j(r)$ . La relation entre le vecteur  $\mathbf{m}_{js}$  (formé des coefficients  $m_{js}$ ) et la vitesse de groupe  $U_i(\theta, \phi, r)$  (où  $i$  est l'indice de la fréquence  $\omega_i$  à laquelle la vitesse de groupe est calculée) en un point  $(\theta, \phi, r)$  est donné par une fonction non linéaire  $\mathbf{g}(\mathbf{m})$ , si nous désignons par  $m_{js}^0$  le modèle de référence, le noyau de sensibilité  $K_i^U$  n'est pas considérablement sensible à une perturbation infinitésimale  $\delta m$  du modèle. dans ce cas de figure la variation de la vitesse de groupe par rapport à la valeur de référence est donnée par la relation suivante :

$$\sum_j \sum_s \frac{m_{js} - m_{js}^0}{m_{js}^0} H_s(\theta, \phi) \int_0^a K_i^U(r) B_j(r) dr = \frac{U_i(\theta, \phi, r) - U_j^0}{U_j^0} \quad (2.31)$$

Ici  $a$  est le rayon de la Terre, si nous posons :

$$\int_0^a K_i^U(r) B_j(r) dr = M_j^U$$

nous pouvons réécrire la relation précédente comme suit :

$$\sum_s H_s(\theta, \phi) \sum_j M_j^U d \ln m_{js} = d \ln U_j \quad (2.32)$$

En notation tensorielle nous pouvons écrire :

$$(\mathbf{M} \otimes \mathbf{H})\delta \ln \mathbf{m} = \mathbf{A}\delta \ln \mathbf{m} = \delta \ln U$$

Ici  $\otimes$  est le produit de Kronecker et  $\mathbf{H}$  est la matrice de splines sphériques des points délimitant notre région d'étude, et  $\mathbf{M}$  contient les noyaux de sensibilité de vitesse de groupe. La matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  (des données de dispersion) doit avoir la même dimension que celle construite à l'aide des formes d'ondes. Par conséquent la matrice finale est définie par :

$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} + \alpha \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  ; où  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$  est la matrice de forme d'onde et  $\alpha$  est le poids affecté à la matrice des données de dispersion. Il est important de noter que la matrice de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  (utilisée pour mieux contraindre le manteau supérieure) est introduite dans l'inversion qu'après plusieurs itérations.

#### 2.2.4 Sensibilité de $V_s$ et $\xi$

Nous allons maintenant procéder au calcul des noyaux de sensibilité des paramètres  $V_s$  et  $\xi$ , en partant de la définition du module d'élasticité  $\kappa$ , et du module de cisaillement  $\mu$ , donnée par Babuska and Cara (1991) et par Montagner and Anderson (1989), dans un milieu VTI (vertical transverse isotropic) avec un axe de symétrie vertical :

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{9}(C + 4A - 4N + 4F) \\ \mu &= \frac{1}{15}(C + A + 6L + 5N - 2F)\end{aligned}\quad (2.33)$$

où A, C, F, L, N sont les paramètres de Love définis plus haut ; nous pouvons alors réécrire les vitesses isotropes définies précédemment en fonction de  $\kappa$  et  $\mu$

$$V_{P_{iso}}^2 = \frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\quad (2.34)$$

$$V_{S_{iso}}^2 = \frac{\mu}{\rho}\quad (2.35)$$

Si nous remplaçons  $\kappa$  et  $\mu$  par leurs valeurs données par l'équation 2.33 nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\rho V_{P_{iso}}^2 = \frac{1}{15}[3C + (8 + 4\eta)A + 8(1 - \eta)L]\quad (2.36)$$

$$\rho V_{S_{iso}}^2 = \frac{1}{15}[C + (1 - 2\eta)A + (6 + 4\eta)L + 5N]\quad (2.37)$$

dans ces relations  $\eta$  est le paramètre prenant en compte l'anisotropie dans le premier coefficient de Lamé noté  $\lambda$  et défini par  $\eta = F/(A - 2L)$ , il est important de savoir que ce paramètre est égal à l'unité dans un milieu isotrope. Si nous rejetons un coup d'œil sur l'équation 2.5 qui définit les paramètres de Love (A,C,F,L,N), nous nous rendons compte que ces paramètres dépendent des vitesses observées ( $V_{PH}, V_{PV}, V_{SH}, V_{SV}$ ), pour

cette raison nous allons essayer de montrer que  $V_{P_{iso}}$  et  $V_{S_{iso}}$  dépendent de ces quatre vitesses observées (i.e. prédites par le modèle). En pratique pour y parvenir on suppose que l'anisotropie dans le paramètre de Lamé  $\lambda$  est faible (i.e.  $\eta \sim 1$ ). Ceci nous permet de réécrire les équations 2.36 et 2.37 sous la forme :

$\rho V_{P_{iso}}^2 = (3C + 12A)/15$  et  $\rho V_{S_{iso}}^2 = (C - A + 10L + 5N)/15$ ; en faisant l'approximation de premier ordre qui consiste à négliger la différence  $(C - A)$  devant le terme  $10L + 5N$  (i.e.  $(C - A) \ll (10L + 5N)$ ) puis en substituant A,C,L et N par les valeurs données à l'équation 2.5 nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_{P_{iso}}^2 &= \frac{C + 4A}{5\rho} = \frac{V_{PV}^2 + 4V_{PH}^2}{5} \\ V_{S_{iso}}^2 &= \frac{2L + N}{5\rho} = \frac{2V_{SV}^2 + V_{SH}^2}{3} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous allons maintenant calculer la différentielle logarithmique de ces vitesses isotropes et les paramètres anisotropes définis par l'équation 2.6 :

$$\begin{aligned} \delta \ln V_{P_{iso}} &= \frac{\delta C + 4\delta A}{2C + 8A} - \frac{1}{2} \delta \ln \rho \\ \delta \ln V_{S_{iso}} &= \frac{2\delta L + \delta N}{4L + 2N} - \frac{1}{2} \delta \ln \rho \\ \delta \ln \xi &= \delta \ln N - \delta \ln L \\ \delta \ln \phi &= \delta \ln C - \delta \ln A \\ \delta \ln \eta &= \delta \ln F - \frac{\delta A - 2\delta L}{A - 2L} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nous pouvons à partir d'ici calculer les noyaux de sensibilité des paramètres pour lesquels nous souhaitons inverser en utilisant la combinaison linéaire des noyaux de sensibilité donnés par [Li and Romanowicz \(1996\)](#)

$$\begin{aligned} &K^A \delta \ln A + K^C \delta \ln C + K^L \delta \ln L + K^N \delta \ln N + K^F \delta \ln F + K_{(1)}^\rho \delta \ln \rho = \\ &K_{V_{S_{iso}}} \delta \ln V_{S_{iso}} + K_{V_{P_{iso}}} \delta \ln V_{P_{iso}} + K_\xi \delta \ln \xi + K_\phi \delta \ln \phi + K_\eta \delta \ln \eta + K_{(2)}^\rho \delta \ln \rho \end{aligned} \quad (2.40)$$

où  $K_{(1)}^\rho$  est le noyau de sensibilité pour la paramétrisation donnée dans [Li and Romanowicz \(1996\)](#) et  $K_{(2)}^\rho$  est la noyau de sensibilité pour la nouvelle paramétrisation de notre modèle (différent du précédent) ; la substitution des termes de l'équation 2.39 dans l'équation 2.40 nous permet d'avoir les différents noyaux de sensibilité suivant :

$$\begin{aligned} K_{V_{S_{iso}}} &= 2 \left( K^L + K^N - \frac{2L}{A - 2L} K^F \right) \\ K_{V_{P_{iso}}} &= 2 \left( K^A + K^C + \frac{A}{A - 2L} K^F \right) \\ K_\xi &= \frac{1}{2L + N} \left( 2K^N - N.K^L + \frac{2L.N}{A - 2L} K^F \right) \\ K_\phi &= \frac{1}{C + 4A} \left( 4A.K^C - C.K^A + \frac{A.C}{A - 2L} K^F \right) \\ K_\eta &= K^F \end{aligned} \quad (2.41)$$

les noyaux de sensibilité  $K_{(1)}^\rho$  et  $K_{(2)}^\rho$  sont liées par la relation :

$K_{(2)}^\rho = K_{(1)}^\rho + K^A + K^C + K^L + K^N + K^F$ , où  $K^A$  par exemple est le noyau de sensibilité décrivant le « shift de fréquence » provoqué par la perturbation  $\delta \ln A$ .

**Dans le cadre de cette thèse les noyaux de sensibilité que nous utilisons correspondent aux dérivées des accélérations (par rapport aux paramètres du modèle) dérivant de la théorie de NACT (nonlinear asymptotic coupling theory).**

## 2.3 Approximation du Hessien au premier ordre pour une inversion hybride

Nous allons tout d'abord considérer l'exemple simple d'une fonction à une variable pour essayer d'expliquer comment chercher le minimum d'une fonction. Considérons une fonction deux fois dérivable sur l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ , le développement en série de Taylor de cette fonction est donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2} + o(\Delta x)^3 \quad (2.42)$$

La façon la plus simple de chercher le minimum de cette fonction est de résoudre l'équation  $f'(x) = 0$ , si nous dérivons la relation précédente, et nous égalons par la suite à zéro, on obtient :

$$\Delta x = -\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \quad (2.43)$$

Si nous considérons maintenant une fonction à deux variables  $F(x, y)$ , son développement en série de Taylor s'écrit :

$$\begin{aligned} F(x, y) = & F(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(x_0, y_0)} \\ & + (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{1}{2}(y - y_0)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{(x_0, y_0)} + (|x - x_0| + |y - y_0|)^2\epsilon(x, y) \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $\epsilon(x, y)$  est un infiniment petit (terme négligeable lorsqu'on s'intéresse seulement au développement limité d'ordre deux). Nous pouvons compacter l'écriture de l'équation 2.44 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x, y) = & F(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(x_0, y_0)} \\ & + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + (|x - x_0| + |y - y_0|)^2\epsilon(x, y) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Il est important de noter que le produit d'une matrice d'ordre deux par une matrice colonne donne une matrice colonne, et que le produit d'une matrice colonne par un vecteur donne un réel (ceci est important pour retrouver la relation 2.44 à partir de l'équation 2.45 en



faisant le produit de la droite vers la gauche). La matrice aux dérivées partielles évaluée au point  $(x_0, y_0)$  qui apparaît dans le terme de droite de l'équation 2.45 est appelée **matrice Hessienne** et notée :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

Pour généraliser posons :

$m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $m^T = (x, y)$  sa transposée ;  $m$  est l'ensemble des variables de la fonction  $F$ .

L'équation 2.45 peut alors prendre la forme suivante :

$$F(m) = F(m_0) + (m - m_0) \frac{\partial F}{\partial m}(m_0) + \frac{1}{2} (m - m_0)^T H(m_0) (m - m_0) + \dots \quad (2.46)$$

où  $H$  est la matrice Hessienne évaluée en  $m_0$ , comme nous l'avons montré précédemment à l'aide d'une fonction à une seule variable, nous allons chercher le minimum de la fonction  $F(m)$  en égalant sa dérivée (son gradient parce que  $F$  dépend de plusieurs variables) à zéro :

$$\nabla_m F(m) = \frac{\partial F}{\partial m}(m_0) + H(m_0)(m - m_0) = 0 \quad (2.47)$$

La résolution de l'équation 2.47 nous donne autour de  $m_0$  :

$$\Delta m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{H} = -H^{-1} \frac{\partial F}{\partial m} \quad (2.48)$$

Avec  $\Delta m = m - m_0$  et  $\gamma = \frac{\partial F}{\partial m}$  ; de façon générale on écrit :

$$m_{k+1} = m_k - H_k^{-1} \gamma_k$$

la comparaison de l'équation 2.48 à l'équation 2.43 nous permet d'écrire intuitivement **le Hessien en utilisant le gradient, car  $F$  est une fonction de plusieurs variables** :

$$H = \nabla_m \nabla_m F(m) = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{grad}} F(m)) \quad (2.49)$$

où  $H$  est le Hessien non plus seulement défini en  $m_0$ , mais à un point  $m$  quelconque, dans le cas où l'on considère la non unicité du point  $m_0$  (i.e. si la fonction admet plusieurs minimums). Il est important ici de savoir que le gradient d'un scalaire est un vecteur, et que le gradient d'un vecteur est un tenseur (matrice) d'ordre 2. Si nous nous plaçons dans le cadre de la géophysique en général et de la sismologie en particulier nous pouvons considérer que  $F$  dépend de la donnée mesurée (donnée réelle enregistrée par une station sismique) et de la donnée prédite (donnée calculée à l'aide d'un modèle de Terre). Supposons que la fonction  $F(m)$  soit définie comme suit :

$$F(m) = \frac{1}{2} \sum_i |d_i - g_i(m)|^2 \quad (2.50)$$

où  $d$  est l'ensemble des données mesurées et  $g(m)$  l'ensemble des données prédites à l'aide du modèle  $m$  (ensemble des paramètres physiques). Comme nous venons de voir plus haut comment transformer une somme en un produit de la transposée d'un vecteur par une

matrice et du vecteur (voir équation 2.45) nous pouvons écrire l'équation 2.50 sous la forme :

$$F(m) = \frac{1}{2} (d - g(m))^T (d - g(m)) \quad (2.51)$$

Le gradient de  $F(m)$  s'écrit :

$$\nabla F(m) = - \left( \frac{\partial g}{\partial m} \right)^T (d - g(m))$$

Posons  $G = \left( \frac{\partial g}{\partial m} \right)$ , nous réécrivons alors  $\nabla F(m)$  sous la forme :

$$\nabla_m F(m) = -G^T (d - g(m)) \quad (2.52)$$

Le Hessien peut s'écrire alors :

$$\begin{aligned} H &= \nabla_m \nabla_m F(m) \\ &= -\nabla_m [G^T (d - g(m))] \\ &= G^T G - \frac{\partial G^T}{\partial m} (d - g(m)) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le plus souvent au premier ordre on approxime le Hessien par  $\mathbf{H} \sim \mathbf{G}^T \mathbf{G}$  (qui est une matrice, comme nous venons de dire plus haut, le gradient du gradient d'un scalaire est une matrice) ; tout en négligeant le terme  $\frac{\partial G^T}{\partial m} (d - g(m))$  qui fait apparaître la dérivée de second ordre de  $g(m)$  multipliée par le résidu entre la donnée réelle et la donnée observée, ce terme pourrait quand même dans certains cas de figures contribuer significativement dans l'inversion de la forme d'onde.

Reprenons l'équation 2.47 que nous remplaçons  $\frac{\partial F}{\partial m}(m_0)$  par son expression donnée par l'équation 2.52 au point  $m_0$ , ainsi l'équation 2.47 prend la forme :

$$\nabla_m F(m) = -G^T (d - g(m_0)) + H(m_0)(m - m_0) = 0 \quad (2.54)$$

En remplaçant le Hessien par son approximation au premier ordre  $G^T G$  on obtient :

$$G^T G(m - m_0) = G^T (d - g(m_0)) \quad (2.55)$$

De manière générale, cette équation prend la forme :

$$G^T G \delta m = G^T \delta d$$

d'ici nous pouvons alors écrire :

$$\delta m = (G^T G)^{-1} G^T \delta d \quad (2.56)$$

Cette solution est la solution classique par moindres carrés. Nous allons maintenant redéfinir la fonction  $F$  de façon plus générale. Supposons tout d'abord que l'on ait une connaissance a priori de notre modèle de Terre, en géophysique cette connaissance a priori du modèle est le plus souvent représentée par la matrice de covariance du modèle notée  $C_m$ . Les données mesurées sont la collection d'une série discrète signée évidemment d'incerti-

tudes (de mesure, de lecture etc.). Les erreurs entre les données enregistrées à différentes stations étant indépendantes, on modélise ces incertitudes par une matrice de covariance notée  $C_d$ . Pour la généralisation de la fonction  $F$ , nous allons écrire à l'image du premier terme de l'équation 2.51 (terme actuel) un second terme prenant en compte la différence entre le modèle a priori et le modèle actuel, puis nous allons normaliser chacun des termes par la matrice de covariance correspondante et en fin nous allons sommer les deux termes. Ceci nous conduit à la fonction objective (aussi appelée fonction coût) généralisée définie par Tarantola and Valette (1982).

$$2\chi(m) = [d - g(m)]^T C_d^{-1} [d - g(m)] + [m_0 - m]^T C_m^{-1} [m_0 - m] \quad (2.57)$$

$\chi(m)$  est aussi appelée fonction coût, dans cette expression,  $d$  représente l'ensemble des données observées,  $g(m)$  les données synthétiques ou calculées,  $C_d^{-1}$  l'inverse de la matrice de covariance des données,  $C_m^{-1}$  l'inverse de la matrice de covariance des paramètres et  $m_0$  le modèle a priori.

Pour minimiser la fonction objective ci-dessus, il suffit de calculer son gradient puis, d'égaliser à zéro. Le minimum de  $\chi(m)$  est obtenu de l'équation :

$$\nabla_m \chi(m) = -G^T C_d^{-1} [d - g(m)] - C_m^{-1} (m_0 - m) = 0 \quad (2.58)$$

où  $G^T = (\partial g / \partial m)^T$  ; la résolution de l'équation précédente conduit à :

$$m - m_0 = C_m G^T C_d^{-1} [d - g(m)] \quad (2.59)$$

Si nous évaluons le Hessien relatif à la fonction objective  $\chi(m)$ , on obtient :

$$H = \nabla_m \nabla_m \chi(m) = -\frac{\partial G^T}{\partial m} C_d^{-1} [d - g(m)] + [C_m^{-1} + G^T C_d^{-1} G]$$

l'approximation au premier ordre de cette expression (i.e. en négligeant le premier terme) est :

$$H \sim C_m^{-1} (I + C_m G^T C_d^{-1} G)$$

où  $I$  est la matrice identité. Pour résoudre l'équation 2.59 en prenant en compte le Hessien, on se propose d'ajouter à chacun de ses membres le terme suivant :

$$C_m G^T C_d^{-1} G (m - m_0)$$

ceci conduit à :

$$(I + C_m G^T C_d^{-1} G)(m - m_0) = C_m G^T C_d^{-1} [d - g(m) + G.(m - m_0)] \quad (2.60)$$

où  $I$  est la matrice identité, dû au fait que la matrice du terme de droite est non singulière (i.e. inversible), l'équation 2.60 peut prendre la forme :

$$m = m_0 + (I + C_m G^T C_d^{-1} G)^{-1} C_m G^T C_d^{-1} [d - g(m) + G.(m - m_0)] \quad (2.61)$$

Pour résoudre l'équation 2.61 de façon itérative, on utilise la méthode de **Newton** définie par  $x_{k+1} = f(x_k)$ , en considérant le membre de droite de l'équation 2.61 comme notre

fonction  $f(x_k)$  nous avons :

$$m_{k+1} = m_0 + \underbrace{[(I + C_m G_k^T C_d^{-1} G_k) C_m^{-1}]^{-1}}_{\text{Inverse du Hessien}} G_k^T C_d^{-1} [d - g(m_k) + G_k \cdot (m_k - m_0)] \quad (2.62)$$

Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme généralisée comme suit :

$$m_{k+1} = m_k + (I + C_m G_k^T C_d^{-1} G_k)^{-1} \left[ C_m G_k^T C_d^{-1} (d - g(m_k)) - (m_k - m_0) \right] \quad (2.63)$$

Ici l'opérateur  $(I + C_m G_k^T C_d^{-1} G_k)$  a un noyau de sensibilité noté  $K(r, r')$ , en pratique pour obtenir l'inverse  $(I + C_m G_k^T C_d^{-1} G_k)^{-1}$  on discrétise le noyau de sensibilité  $K(r, r')$  sur une grille de points puis on inverse le système obtenu après discrétisation. Mais d'un point de vue numérique, cette méthode est très coûteuse. L'équation 2.63 peut s'écrire sous la forme :

$$m_{k+1} = m_k + H_k^{-1} [G_k^T C_d^{-1} (d - g(m_k)) - C_m^{-1} (m_k - m_0)]$$

Pour prendre en compte le Hessien complet dans cette équation il suffit de substituer  $H_k$  par la somme de ces deux termes (premier ordre et second ordre).

### 2.3.1 Sens physique du Hessien

Le Hessien étant une pièce maîtresse dans l'inversion de la forme d'onde, il est important de clarifier son sens physique. Nous allons tout d'abord l'approcher plus simplement, puis donner son rôle dans l'inversion. Considérons que l'on veut prédire une donnée sismique (forme d'onde, temps d'arrivée) par exemple, à l'aide d'un modèle (PREM, SEMuch) par exemple. Cette donnée (que nous appellerons  $d$ ) dépend du temps et de l'espace, et est évaluée dans un modèle ; cela se traduit par la relation mathématique suivante :

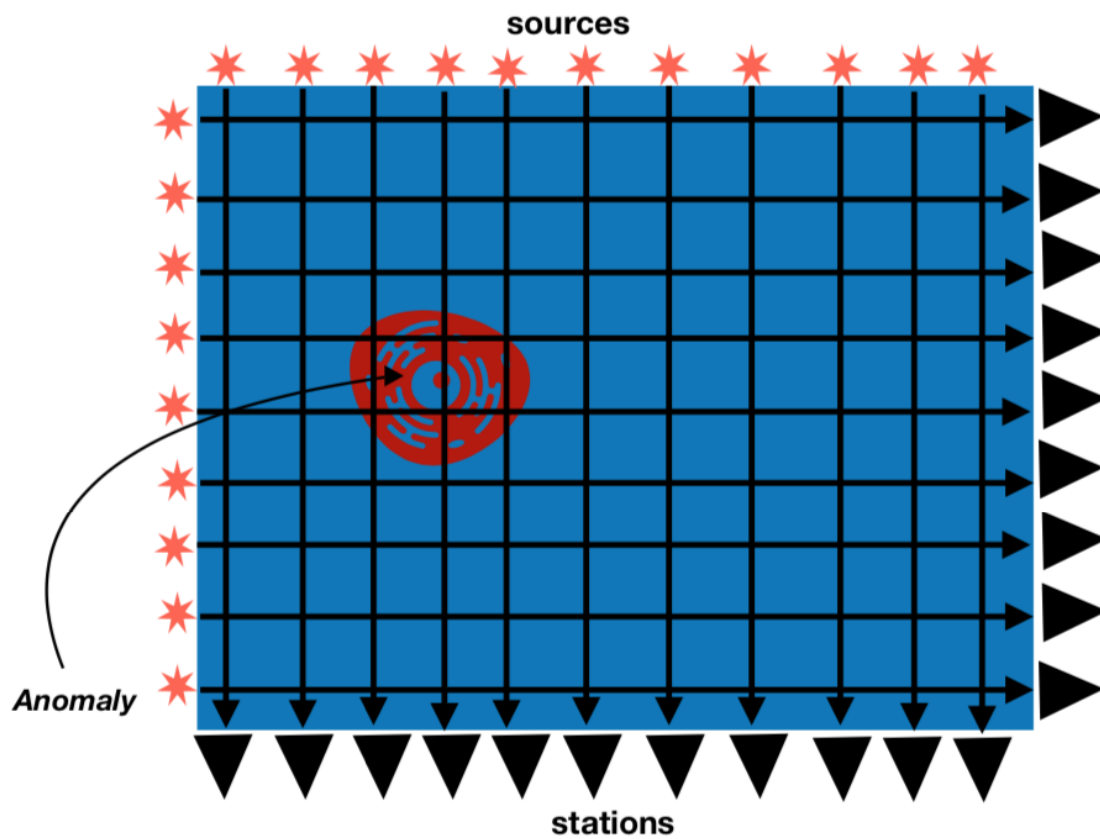
$$d(x, t) = g(m)$$

si nous faisons la différentielle de cette relation membre à membre nous obtenons :

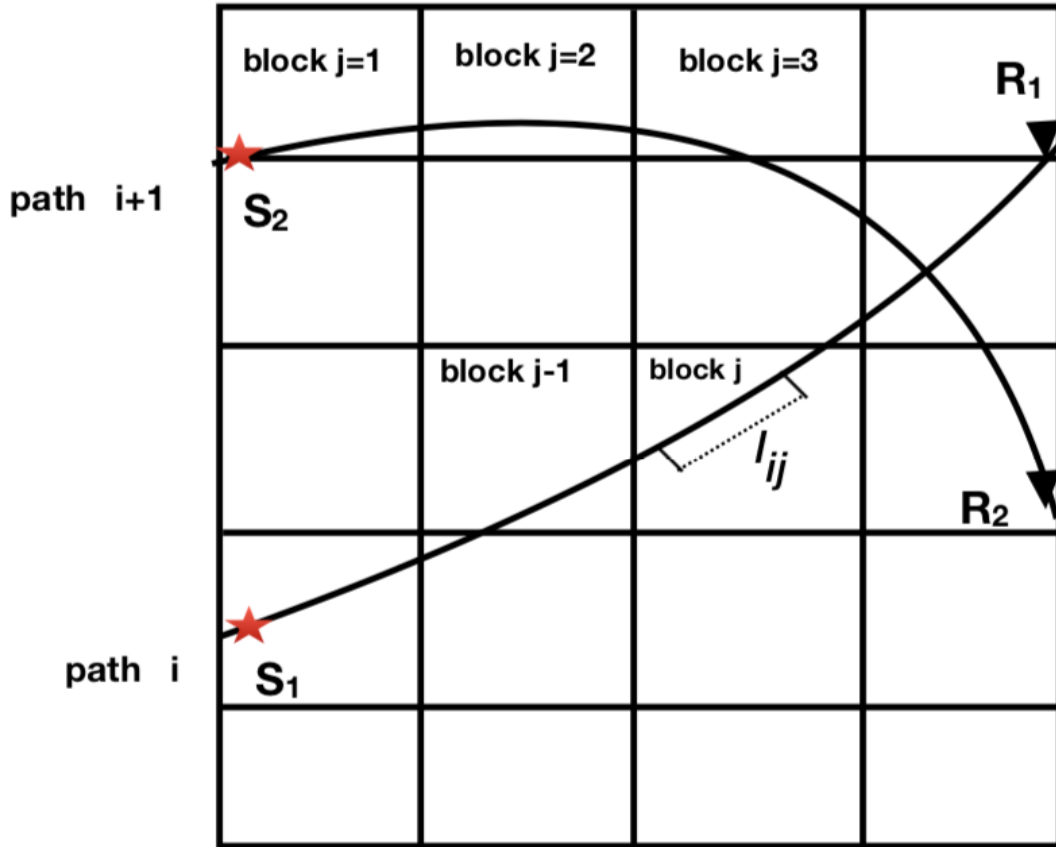
$$\delta d = \frac{\partial g(m)}{\partial m} \delta m$$

Ce qui s'écrit encore comme  $\delta d = G \delta m$  avec  $G = \frac{\partial g(m)}{\partial m}$ . Le but de la tomographie étant de trouver un nouveau modèle (une fois la donnée connue) ; nous nous proposons ici d'évaluer  $\delta m$ . Mais en pratique  $G$  est une matrice singulière (i.e. dont le déterminant est nul), pour cela nous devons multiplier membre à membre la relation précédente par la transposée de  $G$  (à fin qu'elle devienne inversible ou non singulière), ce qui conduit à :

$G^T \delta d = G^T G \delta m$  ; d'ici nous pouvons évaluer notre nouveau modèle  $\delta m = (G^T G)^{-1} G^T \delta d$ . Soit  $m - m_0 = (G^T G)^{-1} G^T (d_0 - u)$ , avec  $d_0 = g(m_0)$  où  $m, m_0, d_0, u$  sont respectivement le nouveau modèle, le modèle initial, la donnée réelle et la donnée synthétique. La matrice  $G^T G$  est l'approximation du Hessien au premier ordre. Le principe de la tomographie étant basé sur la couverture en nombre de trajets de la région à imager ; nous allons considérer pour mieux comprendre le cas le plus simple qui est la prédiction des temps d'arrivée, illustré par les figures 2.5 et 2.6



**Figure 2.5** – Différents trajets découpant une anomalie de vitesse lente par exemple (objet rouge supposé chaud), les stations sismiques sont représentées par des triangles noirs et sources par des étoiles rouges. Dans ce cas l'imagerie de l'anomalie est plus probable, parce que plusieurs trajets se croisent sur elle.



**Figure 2.6** – Paramétrisation en bloc, ici les blocs sont numérotés de  $j = 1, \dots, M$  et les trajets entre les sources (étoiles rouges) et les stations (triangles noirs) sont numérotés de  $i = 1, \dots, N$ . Cette paramétrisation permet de mieux échantillonner la région dans l'optique de retrouver l'anomalie de la figure 2.5

Si nous considérons que l'onde met le temps  $t_i$  pour parcourir l'élément de longueur  $l_{ij}$  situé sur le trajet  $i$  dans le  $j^{\text{ième}}$  block, avec la vitesse  $v_j(s)$  (pris comme modèle de départ) variant en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ . Par définition  $t_i = \frac{l_{ij}}{v_j(s)}$ , la différentiation de cette relation membre à membre conduit à :

$\delta t_i = -\frac{l_{ij}}{v_j^2(s)} \delta v_j$ , en posant  $G_{ij} = -\frac{l_{ij}}{v_j^2(s)}$  et en comparant à la relation  $\delta d = G \delta m$ , nous avons  $\delta t_i = G_{ij} \delta v_j$ , où la répétition d'indice  $j$  indique la sommation sur tout les blocs traversés par le trajet  $i$  (convention d'Einstein), c'est-à-dire que la relation précédente peut aussi s'écrire :  $\delta t_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} \delta v_j$ , avec  $\delta t_i^T = (\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_N)$  et  $\delta v_j^T = (\delta v_1, \delta v_2, \dots, \delta v_M)$ . L'idée ici est de mieux comprendre ce que représente physiquement les éléments de la matrice Hessienne. La matrice  $G_{ij}$  est calculée sur l'ensemble des blocs pour tout les trajets est donnée par :

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \cdots G_{1j} \cdots G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \cdots G_{2j} \cdots G_{2M} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \cdots G_{3j} \cdots G_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & G_{N3} \cdots G_{Nj} \cdots G_{NM} \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne  $G_{ij}^T G_{ij}$  de dimension  $M \times M$  calculée sur l'ensemble des blocs pour tout les trajets est donnée par :

$$G_{ij}^T G_{ij} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} \cdots G_{i1} \cdots G_{N1} \\ G_{21} & G_{22} & G_{32} \cdots G_{i2} \cdots G_{N2} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \cdots G_{i3} \cdots G_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{1M} & G_{2M} & G_{3M} \cdots G_{iM} \cdots G_{NM} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \cdots G_{1j} \cdots G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \cdots G_{2j} \cdots G_{2M} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \cdots G_{3j} \cdots G_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & G_{N3} \cdots G_{Nj} \cdots G_{NM} \end{pmatrix}$$

Si nous nous intéressons aux termes diagonaux, le premier terme de la diagonale est donné par :

$$G_{11}^2 + G_{21}^2 + G_{31}^2 + \cdots + G_{N1}^2 = \sum_{i=1}^N G_{i1}^2 \quad (\text{premier terme diagonal, avec } j = 1)$$

$$G_{12}^2 + G_{22}^2 + G_{32}^2 + \cdots + G_{N2}^2 = \sum_{i=1}^N G_{i2}^2 \quad (\text{second terme diagonal, avec } j = 2)$$

$$\vdots + \quad \vdots + \cdots + \quad = \quad \vdots$$

$$G_{1M}^2 + G_{2M}^2 + G_{3M}^2 + \cdots + G_{NM}^2 = \sum_{i=1}^N G_{iM}^2 \quad (N^{iem} \text{ terme diagonal, avec } j = M)$$

**D'ici il en ressort que chaque terme diagonal représente physiquement l'interaction d'un bloc avec l'ensemble des trajets** (i.e. pour un bloc considéré on évalue son interaction avec tous les trajets source-station couvrant notre région d'étude ; si l'évaluation vaut zéro, cela implique simplement qu'aucun trajet ne coupe le bloc considéré, et par conséquent pas de perturbation dans le bloc considéré, c'est-à-dire que le modèle dans ce bloc reste inchangé). Il est important de noter qu'il est plus probable que certains blocs n'interagissent (i.e. qui ne sont traversés par aucun trajet) avec aucun des trajets lorsque nous avons peu de données (i.e. peu de trajets qui couvrent notre domaine d'étude), voir équation 2.7.

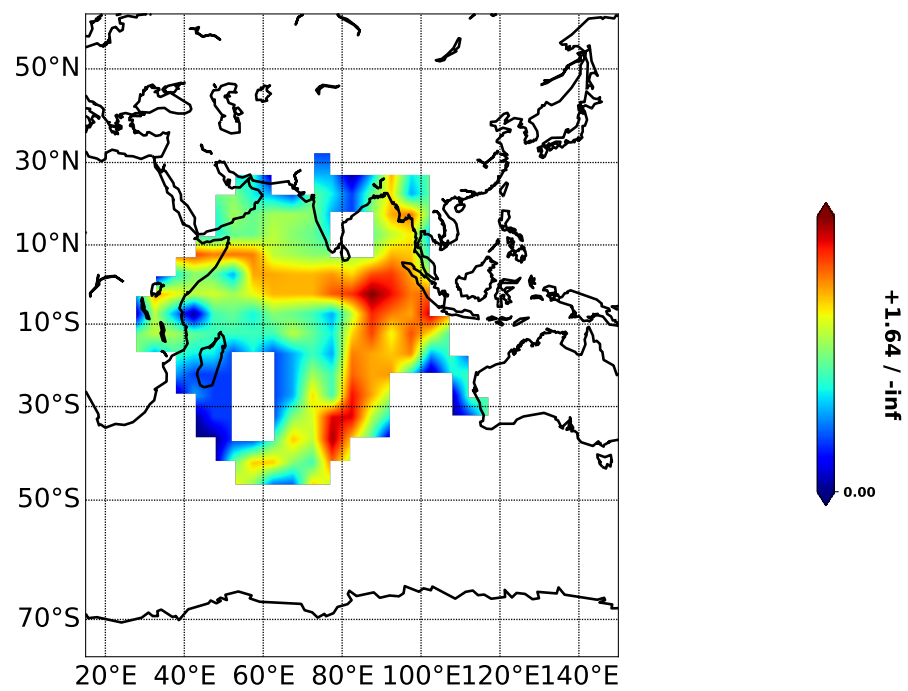
Intéressons nous à présent aux termes non diagonaux, comme par exemple les termes ci-dessous :

$$G_{12}G_{11} + G_{22}G_{21} + \cdots + G_{i2}G_{i1} = (G^T G)_{12} = \sum_{i=1}^N G_{i1}G_{i2} \quad (\text{avec } j = 1 \text{ et } j = 2)$$

$$G_{11}G_{13} + G_{21}G_{23} + \cdots + G_{i3}G_{i1} = (G^T G)_{13} = \sum_{i=1}^N G_{i3}G_{i1} \quad (\text{avec } j = 1 \text{ et } j = 3)$$

**D'ici on remarque que les termes hors diagonaux mettent en évidence les trajets qui coupent au moins deux blocs ; ainsi que les croisements entre les trajets.** Comme nous avons vu précédemment les perturbations de vitesses (nouveau modèle de vitesse) peuvent s'exprimer comme suit :  $\delta v_j = (G_{ij}^T G_{ij})^{-1} G_{ij}^T \delta t_i$

**Dans le cadre de cette thèse nous utilisons une paramétrisation en spline ; mais la matrice Hessienne reste la même, à la seule différence qu'on doit remplacer  $G_{ij}$  (égale à  $-\frac{l_{ij}}{v_j^2(s)}$ ) par  $G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial m_j}$ , où  $u_i$  est l'accélération (sismogramme synthétique) du sol au point  $i$  (calculée à l'aide de NACT et de PAVA) et  $m_j$  est le  $j^{ieme}$  modèle. Nous**



**Figure 2.7** – Exemple d'un problème sous déterminé où nous avons moins de trajets que de blocs ( $N < M$ ) ; La couleur rouge indique les blocs les plus traversés par les ondes sismiques et la couleur bleue des blocs les moins traversés par des trajets. Par contre les blocs blancs principalement situés entre les zones rouges et bleues, représentent ici des blocs qui n'ont pas été échantillonnés par les ondes sismiques.



pouvons alors réécrire la matrice  $G_{ij}$  comme suit :

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial m_1} & \frac{\partial u_1}{\partial m_2} & \frac{\partial u_1}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial m_M} \\ \frac{\partial u_2}{\partial m_1} & \frac{\partial u_2}{\partial m_2} & \frac{\partial u_2}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial m_M} \\ \frac{\partial u_3}{\partial m_1} & \frac{\partial u_3}{\partial m_2} & \frac{\partial u_3}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_3}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_3}{\partial m_M} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial u_N}{\partial m_1} & \frac{\partial u_N}{\partial m_2} & \frac{\partial u_N}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_M} \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne s'écrit comme suit :

$$G_{ij}^T G_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial m_1} & \frac{\partial u_2}{\partial m_1} & \frac{\partial u_3}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial m_2} & \frac{\partial u_2}{\partial m_2} & \frac{\partial u_3}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial m_3} & \frac{\partial u_2}{\partial m_3} & \frac{\partial u_3}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_3} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial u_1}{\partial m_M} & \frac{\partial u_2}{\partial m_M} & \frac{\partial u_3}{\partial m_M} & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial m_M} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_M} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial m_1} & \frac{\partial u_1}{\partial m_2} & \frac{\partial u_1}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial m_M} \\ \frac{\partial u_2}{\partial m_1} & \frac{\partial u_2}{\partial m_2} & \frac{\partial u_2}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial m_M} \\ \frac{\partial u_3}{\partial m_1} & \frac{\partial u_3}{\partial m_2} & \frac{\partial u_3}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_3}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_3}{\partial m_M} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial u_N}{\partial m_1} & \frac{\partial u_N}{\partial m_2} & \frac{\partial u_N}{\partial m_3} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_j} & \dots & \frac{\partial u_N}{\partial m_M} \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 Information a priori

d'une façon générale nous pouvons résumer la théorie du problème inverse détaillée ci-dessus par l'équation :

$$(G^T C_d^{-1} G + C_m^{-1})(m_{k+1} - m_k) = G^T C_d^{-1}(d - g(m_k)) + C_m^{-1}(m_p - m_k) \quad (2.64)$$

la matrice de covariance des données  $C_d$  est diagonale et détermine la qualité des données,  $m_p$  est le modèle a priori (notre modèle a priori est un modèle à coefficients nuls). Pour éviter de calculer le terme  $C_m^{-1}$  nous multiplions l'équation précédente par  $C_m$ .

$C_m$  est l'opérateur de covariance du modèle utilisé pour limiter la taille des hétérogénéités dans le modèle.

$C_m$  dépend essentiellement de la variance des paramètres du modèle, et des longueurs de corrélation, tout ceci implique une dépendance à la couverture spatiale des données.

$$(C_m)_{ij} = \sigma_{ij} \exp\left(\frac{\cos \Delta_{ij} - 1}{L_{ij}^2}\right) \exp\left(\frac{-2r_{ij}}{h_{ij}^2}\right) \quad (2.65)$$

$\Delta_{ij}$  est l'arc mineur entre les points (nœuds latéraux)  $i$  et  $j$ ,  $r_{ij}$  la distance radiale qui les sépare.

$L_{ij}$  et  $h_{ij}$  sont les longueurs de corrélation associées respectivement aux nœuds latéraux et radiaux ;  $\sigma_{ij}$  est un pré-facteur de variance (constitué des éléments diagonaux) assigné à  $V_s$  et  $\xi$ , et incluant la « norm-damping » (French et al. 2013). Les termes plus fastidieux à calculer sont la matrice  $G^T C_d^{-1} G$  et le vecteur  $G^T C_d^{-1}(d - g(m_k))$ .

Une fois ces termes calculés nous pouvons procéder à l'inversion, mais toutefois il faut garder à l'esprit que les éléments qui constituent la matrice sont des dérivées partielles de formes d'ondes calculées par les modes propres de la Terre tandis que les synthétiques utilisés dans le vecteur sont calculés à l'aide des éléments spectraux (RegSEM, voir Cupillard et al. (2012)).

### 2.3.3 Conclusion Préliminaire

Nous venons de détailler le problème inverse dans son ensemble, nous allons maintenant rappeler les procédures utilisées pour le problème direct et inverse dans cette étude. Pour le problème direct nous avons utilisé le code RegSEM (regional spectral element method) Cupillard et al. (2012) basé sur les éléments spectraux pour calculer les sismogrammes synthétiques pour un modèle de Terre 3D a priori (i.e. pour l'ensemble des paramètres connus). Nous avons ensuite utilisé ces sismogrammes synthétiques issues de RegSEM pour faire la sélection des données « picking », en cherchant les synthétiques qui « fittent » aux mieux les données. Par contre pour le problème inverse nous avons utilisé les perturbations des modes propres de la Terre (**PAVA** et **NACT**) pour calculer les sismogrammes qui ont servis pour le calcul des différents termes (des dérivées partielles par rapport aux paramètres du modèle) du Hessien (matrice de sensibilité). Mais toutefois il est important de savoir quand est ce qu'on utilise PAVA ou NACT pour calculer les dérivées partielles des sismogrammes par rapport aux éléments (paramètres) du modèle. Rappelons les expressions des sismogrammes calculés avec PAVA et NACT :

$$u_{pava} = \vec{v} \cdot \vec{u} = \Re e \left\{ \sum_{\ell} A_{\ell}(\Delta + \delta\Delta) e^{i(\omega_k + \delta\hat{\omega}_k)t} e^{-\alpha_k t} \right\}$$

où

$$A_{\ell}(\Delta) = a_{\ell}^0 Y_{\ell}^0(\Delta) + a_{\ell}^1 Y_{\ell}^1(\Delta) + a_{\ell}^2 Y_{\ell}^2(\Delta)$$

Nous avons montré à l'équation 1.10 que pour  $m \in [-\ell, \ell]$  on a :

$$Y_{\ell}^m(\Delta) \propto \frac{1}{\pi \sqrt{\sin(\Delta)}}$$

Ceci nous amène à écrire :

$$u_{pava} \propto \frac{1}{\sqrt{\sin(\Delta)}}$$

pour le calcul des sismogrammes synthétiques à l'aide de NACT (nonlinear asymptotic coupling theory) nous utilisons l'équation 1.42 :

$$u_{nact}(\tau) = \sum_k A_k \exp(i\hat{\omega}_k \tau) + u_1(\tau)$$

dû au fait que l'expression théorique du sismogramme calculé avec PAVA est inversement proportionnelle au sinus de la distance épacentrale. Pour les faibles distances épacentrales ( $\Delta < 5^\circ$ ) et de grandes distances épacentrales ( $\Delta > 169^\circ$ ), cette expression théorique qui prend en compte le couplage entre les modes d'une même branche devient indéterminée. Pour cette raison, les données enregistrées par les sismomètres dont les distances n'obéissent pas aux critères précédents ne sont pas sélectionnées pour l'inversion. Dans cette étude régionale, nous avons  $5^\circ < \Delta < 90^\circ$ , car RegSEM n'admet pas des distances supérieures à  $90^\circ$ . **Vu que nous travaillons avec les paquets d'ondes, cette méthode dite « path average approximation » est utilisée pour les paquets d'ondes à longues périodes ( $T \geq 40s$ ), c'est-à-dire le mode fondamental des ondes de surface.** En revanche pour les ondes de volume (dont la sensibilité est gé-

néralement concentrée le long du trajet théorique des rais) et des modes harmoniques (générés par les interactions entre les ondes de volume et de surface), la théorie **NACT (non linear asymptotic coupling theory) est mieux adaptée pour décrire leur sensibilité**. Une fois que le sismogramme synthétique (noté ici par  $u = g(m)$ ) est calculé avec PAVA ou NACT, nous nous intéressons par la suite aux calculs des dérivées de ces synthétiques par rapport aux paramètres du modèle (dans l'optique de former le Hessien, essentiel pour l'inversion). Souvenons nous que dans l'expression  $G^T G \delta m = G^T \delta d$ , où nous avons  $G = \partial u / \partial m$  (**dans cette expression les synthétiques u sont calculés avec PAVA ou NACT**) et  $\delta d = d_0 - u$  (**dans cette expression du gradient, nous utilisons les synthétiques u calculés avec RegSEM**).

**La méthode hybride doit son nom à cette association des sismogrammes synthétiques calculés avec les éléments spectraux (pour le problème direct) et avec les modes propres (PAVA et NACT), pour le calcul des dérivées partielles qui forment la matrice de sensibilité**. La dérivée de  $u$  (accélération du sol) par rapport à chaque paramètre du modèle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial m_j} = \frac{\partial u}{\partial \hat{\omega}_k} \frac{\partial \hat{\omega}_k}{\partial m_j} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}_k} \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial m_j} \quad (2.66)$$

Pour évaluer les perturbations de fréquences considérons l'oscillation d'un mode donné par la relation  $u_k = \Re[A_k \exp(i\omega_k t)]$ , la perturbation de ce mode s'écrit :

$$\omega_k = \underbrace{\omega_0}_{1D} + \underbrace{\delta\omega_k(r, \theta, \phi)}_{3D} = \omega_0 + \frac{1}{\Delta} \int_S^R \delta\omega_k ds, \text{ avec } \delta\omega_k \text{ défini précédemment (voir équation 1.9) comme suit :}$$

$$\delta\omega_k = \int_0^a \mathbf{M}_k(r) \delta m r^2 dr$$

avec

$$\hat{\omega}_k = \frac{1}{2\pi} \oint \delta\omega_k(s) ds$$

$$\tilde{\omega}_k = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \delta\omega_k(s) ds$$

Nous pouvons donc réécrire  $\omega_k$  comme :

$$\omega_k = \omega_0 + \frac{1}{\Delta} \int_S^R \int_0^a \mathbf{M}_k(r) \delta m r^2 dr ds \quad (2.67)$$

L'idée ici étant de voir la constitution des termes du Hessien qui dépendent de  $\partial u / \partial m$ , nous allons évaluer la dérivée du sismogramme synthétique  $u$  (calculé ici par PAVA ou NACT). Or lors qu'on regarde l'expression de  $u_k$  donnée par  $\Re[A_k \exp(i\omega_k t)]$ , on se rend compte qu'elle ne dépend pas directement de  $m$ ; mais qu'elle dépend directement de  $\omega_k$  et  $\omega_k$  dépend de  $m$  (voir équation 2.67). Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\frac{\partial u_k}{\partial m} = \frac{\partial u_k}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial m}$$

Souvenons nous de la paramétrisation du modèle donnée par (voir équation 2.8) :

$$\delta m = \sum_j \sum_s m_{js} B_j(r) H_s(\theta, \varphi)$$

En substituant cette relation dans l'équation 2.67, nous avons :

$$\omega_k = \omega_0 + m_{js} \sum_j \left( \underbrace{\sum_s \frac{1}{\Delta} \int_S^R H_s(\theta, \varphi) d\theta d\varphi}_{\text{path integral}=\mathbf{I}} \right) \left( \underbrace{\int_0^a \mathbf{M}_k(r) B_j(r) r^2 dr}_{\mathbf{K}_k(r)} \right) \quad (2.68)$$

d'ici nous avons :

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial m} = \frac{\partial \omega_k}{\partial m_{js}} = \sum_j \mathbf{I}_j \mathbf{K}_k^j = \mathbf{I}_j \mathbf{K}_k^j$$

Il est important de noter que la répétition d'indice  $j$  dans la relation précédente implique une sommation sur  $j$  (convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés). Nous avons alors :

$$\frac{\partial u_k}{\partial m} = \frac{\partial u_k}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial m} = A_k \omega_k \mathbf{I}_j \mathbf{K}_k^j$$

où  $\mathbf{K}_k^j$  est le noyau de sensibilité du mode  $k$  et  $\mathbf{I}_j$  le « path integral » calculé entre la source et la station (**l'intégration est faite sur chaque trajet source-station à l'aide de la paramétrisation spline**) ; d'ici il en ressort que les termes de la matrice Hessienne  $G^T G$  sont constitués du produit en chaque nœud (sphérique et radiale) du « path integral » et du noyau de sensibilité.

D'autre part en sommant la perturbation de fréquence locale  $\delta \omega_k(s)$  sur l'arc mineur nous obtenons  $\tilde{\omega}_k$ .

$$\tilde{\omega}_k = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \int_0^a \mathbf{M}_k(r) \delta m(\theta, \varphi, r) r^2 dr$$

La paramétrisation géographique (voir équation 2.8) du modèle nous permet d'écrire :

$$\tilde{\omega}_k = \frac{1}{\Delta} \sum_j \sum_s m_{js} \underbrace{\int_0^\Delta H_s(\theta, \varphi) d\theta d\varphi}_{I=\text{path integral}} \underbrace{\int_0^a \mathbf{M}_k(r) B_j(r) r^2 dr}_{K_k(r)=\text{Partial}}$$

Nous pouvons alors calculer la dérivée par rapport aux paramètres du modèle comme suit :

$$\frac{\partial \delta \tilde{\omega}_k}{\partial m_{js}} = \frac{1}{\Delta} \sum_j I_j K_k^j$$

Rappelons la relation entre la perturbation de fréquence de la sensibilité des autres paramètres :

$$\delta \omega_k = \int_0^a \left( K_{v_s}(r) \delta \ln V_{Siso}(r, \theta, \varphi) + K_{v_p}(r) \delta \ln V_{Piso}(r, \theta, \varphi) + K_\xi \delta \ln \xi + K_\rho(r) \delta \ln \rho \right) r^2 dr$$

## 2.4 Croûte et Homogénéisation

Considérons un milieu stratifié compris entre  $z = 0$  et  $z = h$ , comportant plusieurs couches fines. Dans ce type de milieu à courte longueur d'onde, les simulations avec SEM sont coûteuse, et donc l'idée serait de trouver un milieu équivalent de plus grande longueur d'onde (dit homogène) tel que par exemple :  $\lambda_w > h$  (où  $\lambda_w$  est la longueur d'onde du signal se propageant dans le milieu).

Backus (1962), puis Capdeville and Marigo (2007) ont mis au point la technique de l'homogénéisation qui consiste à passer d'un milieu complexe (comportant des hétérogénéités de courte échelle spatiale) à un milieu effectif (milieu sans discontinuité élastique ; de grande longueur d'onde spatiale). En homogénéisant le milieu complexe comportant des hétérogénéités de petites tailles, on retrouve un milieu effectif équivalent (dans lequel le coût de simulation est moindre). En effet l'objectif est de calculer les sismogrammes synthétiques à moindre coût dans un modèle de Terre ayant une croûte homogénéisée. Appelons  $\lambda_m$  la longueur d'onde minimale dans le milieu homogène et  $\lambda_0$  la taille caractéristique des hétérogénéités du milieu effectif, de façon à ce que toutes les hétérogénéités de taille inférieure à  $\lambda_0$  soit considérées microscopiques. On définit la grandeur sans dimension  $\varepsilon_0 = \lambda_0/\lambda_{min}$  considérée petit ; il est important de noter que si le paramètre  $\lambda_0$  est trop petit, alors les sismogrammes synthétiques calculés dans le milieu original et le milieu effectif peuvent être identiques jusqu'à la précision désirée. Si nous fixons par exemple  $\varepsilon_0 = 1/2$  et  $\lambda_{min} = 80$  km (la longueur d'onde minimale à propager dans notre milieu effectif) alors toutes les hétérogénéités de taille  $\leq \lambda_0 = 40$  km seront considérées comme microscopiques en milieu effectif. De manière générale on définit un modèle de Terre VTI, par les paramètres de Love :  $A, C, F, L, N$  et la densité volumique du milieu  $\rho$ . Dans la pratique ces paramètres sont liés à la vitesse des ondes sismiques dans le milieu considéré par les relations suivantes :

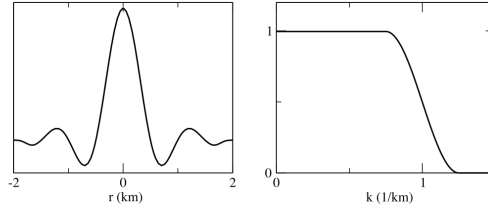
$Vpv = \sqrt{C/\rho}$  qui est la vitesse des ondes P se propageant verticalement et  $Vph = \sqrt{A/\rho}$  la vitesse des ondes P se propageant horizontalement. Les ondes S polarisées verticalement et horizontalement sont définies respectivement par  $Vsv = \sqrt{L/\rho}$  et  $Vsh = \sqrt{N/\rho}$  ; et  $\eta = F/(A - 2L)$ . Dans un milieu isotrope on a :  $A = C = \lambda + 2\mu$ ,  $L = N = \mu$  et  $\eta = 1$ . L'homogénéisation consiste tout simplement à chercher un milieu effectif défini par les paramètres  $A^{\varepsilon_0*}, C^{\varepsilon_0*}, F^{\varepsilon_0*}, L^{\varepsilon_0*}, N^{\varepsilon_0*}$ , ces paramètres définissant le milieu effectif sont donnés par les relations suivantes (Capdeville et al. 2013) :

$$\begin{cases} \rho^{\varepsilon_0*} = \mathcal{F}^{\varepsilon_0}(\rho) \\ N^{\varepsilon_0*} = \mathcal{F}^{\varepsilon_0}(N) \\ \frac{1}{C^{\varepsilon_0*}} = \mathcal{F}^{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{C}\right) \\ \frac{1}{L^{\varepsilon_0*}} = \mathcal{F}^{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L}\right) \\ \frac{F^{\varepsilon_0*}}{C^{\varepsilon_0*}} = \mathcal{F}^{\varepsilon_0}\left(\frac{F}{C}\right) \\ A^{\varepsilon_0*} - \frac{(F^{\varepsilon_0*})^2}{C^{\varepsilon_0*}} = \mathcal{F}^{\varepsilon_0*}\left(A - \frac{F^2}{C}\right) \end{cases}$$

$\mathcal{F}^{\varepsilon_0}$  est un filtre passe-bas de type ondelette, défini à partir de la base orthogonale de Fourier. Supposons par exemple que l'on veut filtrer le paramètre  $L$ , nous aurons  $\mathcal{F}^{\varepsilon_0}(L)(r) = L * w_{n_1, n_2}(r)$ , où  $*$  est le symbole de la convolution spatiale et  $w_{n_1, n_2}$  est défini par :

$$w_{n_1, n_2} = \begin{cases} 1 & si \quad |n| \leq n_1 \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{|n| - n_1}{n_2 - n_1} \right) \right) & si \quad |n| \in ]n_1, n_2] \\ 0 & si \quad |n| \geq n_2 \end{cases}$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont deux entiers naturels fixes et proches d'une certaine valeur  $n_0$ . La figure 2.8 montre un exemple d'ondelette de Fourier.



**Figure 2.8** – Exemple d'ondelette de Fourier  $w_{n_1, n_2}(r)$  (à gauche) et sa correspondance dépendant du vecteur d'onde (à droite)  $k$ ,  $w_{n_1, n_2}(k)$  avec  $k = n/(r_\Omega - r_a)$  pour  $n_0/(r_\Omega - r_a) \sim 1 \text{ km}^{-1}$  (Capdeville et al. 2013)

$r_\Omega$  est le rayon de la Terre et le  $r_a$  la profondeur à laquelle l'onde n'est plus sensible aux paramètres élastiques du milieu.

#### Remarques :

Si nous reprenons la relation  $\frac{1}{L^{\epsilon_0^*}} = \mathcal{F}^{\epsilon_0}\left(\frac{1}{L}\right)$  cette fois-ci dans un milieu isotrope (i.e.  $L = N = \mu$ ), dans un tel milieu  $V_{sv} = V_{sh} = V_s$  et  $\mu = \rho V_s^2$ ; et nous pouvons réécrire la relation précédente sous la forme  $\frac{1}{L^{\epsilon_0^*}} = \mathcal{F}^{\epsilon_0}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ , d'ici il est clair que si notre modèle contient une couche d'eau ( $\mu = 0$ ) l'homogénéisation ne marchera pas (dû au fait que le filtre est inversement proportionnel à  $1/\mu$ ). De même nous avons remarqué le long de cette étude que lorsque le modèle de l'océan indien (Maurya et al. 2016) contient des couches fines (i.e. ayant des vitesses assez faibles) comme dans la partie crustale de la Terre, il n'est pas possible d'homogénéiser à cause de ce facteur de  $1/\mu$ . Pour mieux comprendre cela, on peut réécrire la relation précédente sous la forme  $\frac{1}{L^{\epsilon_0^*}} = \mathcal{F}^{\epsilon_0}\left(\frac{1}{\rho V_s^2}\right)$ .

Il est aussi important de noter que généralement c'est la partie crustale qui est homogénéisée, dans le but de trouver une croûte équivalente dans le domaine de fréquence considéré.

**Jusqu'ici nous avons noté que cette méthode marche dans des régions continentales et moins bien pour des régions océaniques (à cause de la couche d'eau)**, vu que notre région d'étude est une région mixte (i.e. continent et océan) nous avons choisi de construire notre modèle de croûte homogénéisé en utilisant les données de courbes de dispersion de vitesse de groupe (Shapiro and Ritzwoller 2002), cette méthode sera détaillée dans la suite.

## 2.5 Construction de la croûte.

Nous utilisons les courbes de dispersion de vitesse de groupe pour contraindre notre modèle de croûte, qui est équivalent à une croûte réelle dans le domaine de fréquence (25-60s) où nous travaillons. Nous utilisons une méthode de numérisation non linéaire de l'espace des paramètres (i.e. un « grid search ») pour trouver le meilleur modèle initial de croûte isotrope, paramétrisé par les nœuds de Gauss-Lobatto-Legendre comme suit :

$$\begin{cases} V_s(r) = \sum_{n=0}^4 \hat{V}_s^n L^n(x(r)) \\ V_p(r) = \sum_{n=0}^4 \hat{V}_p^n L^n(x(r)) \\ \rho(r) = \sum_{n=0}^4 \hat{\rho}^n L^n(x(r)) \end{cases}$$

ici  $L^n$  représente le polynôme de Lagrange interpolé sur les nœuds de Gauss-Lobatto-Legendre,  $r$  est le rayon de la Terre à l'intérieur de chaque couche et  $\hat{V}_s^n, \hat{V}_p^n, \hat{\rho}^n$  sont des valeurs nodales, c'est-à-dire en chaque nœud  $x(r)$ , avec  $x(r) \in [-1, 1]$ . Pour l'interpolation latérale nous utilisons l'interpolation barycentrique linéaire nécessitant au moins trois points voisins du modèle. Il est important de noter que ces 5 nœuds correspondent aux 5 couches qui constituent la paramétrisation du modèle en profondeur. Nous partons d'un modèle de vitesse isotrope 1D dont les valeurs de vitesse isotrope sont telles que  $3.25 \leq V_s \leq 4.6 \text{ km s}^{-1}$ , ces valeurs sont identiques à celles du modèle de croûte Crust2.0, et les autres paramètres tels que la densité  $\rho$ , et  $V_p$  sont « scalés » à l'aide de  $V_s$ , d'après Brocher (2005), la géométrie du Moho dans notre modèle initial de croûte est celle de Crust2.0, les profondeurs du Moho sont telles que  $30.0 \leq h_{moho} \leq 60.0 \text{ km}$  et la topographie est telle que  $0.0 \leq h_{topo} \leq 6.0 \text{ km}$ , l'atténuation dans notre modèle de croûte provient du modèle QL6 de Durek and Ekström (1996). Les géométries du Moho et de la topographie sont celles utilisées dans SEM pour la simulation des synthétiques des formes d'ondes, dans cette procédure les couches océaniques sont remplacées par une pression comme dans SEM. Les données de courbes de dispersion de Shapiro and Ritzwoller (2002) sont rééchantillonnées sur une grille de  $2^\circ/2^\circ$  de façon à avoir la même paramétrisation que le manteau. Une fois le modèle de croûte initiale construit nous y associons le modèle moyen 1D du manteau (parce que les longues périodes sont aussi sensibles au manteau) pour calculer les courbes de dispersion synthétiques, puis on cherche le meilleur "fit" entre les données de dispersions réelles et celles prédites; les courbes de dispersion sont calculées pour des périodes de  $25 \leq T \leq 60 \text{ s}$ .

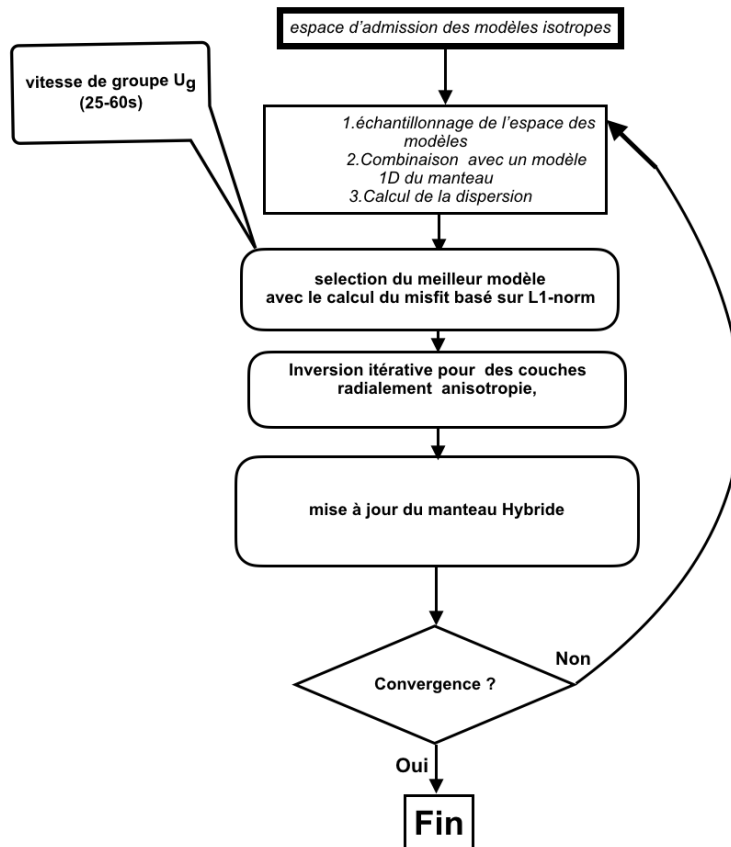
Par la suite nous procédons par une inversion itérative (au voisinage du modèle 3D du manteau) des couches radialement anisotropie pour essayer d'expliquer conjointement les ondes Rayleigh et de Love, car il n'est pas possible d'expliquer ces deux types d'ondes dans un modèle isotrope Backus (1962). Le paramètre  $\xi$  balaie une plage de 0.8 à 1.4 (i.e.  $0.8 \leq \xi \leq 1.4$ ) cherchant ainsi à compenser les effets de discontinuités fines dans la croûte à longue période (Backus (1962), Capdeville and Marigo (2007)).

Pour réduire la sensibilité à certaines mesures aberrantes très souvent observées à courtes périodes, nous calculons le « misfit » à l'aide de la norme L1 :

$$\phi(c_i) = \frac{N_p(\sigma_R + \sigma_L)}{\sigma_R \sigma_L} \sum_{c \in [R,L]} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{|U_c^{syn}[c_i](T_i) - U_c^{obs}(T_j)|}{\sigma_c} \quad (2.69)$$

Ici  $c_i$  représente la  $i^{ieme}$  couche dans la croûte,  $T_j$  représente la  $j^{ieme}$  période avec  $j \in [1, \dots, N_p]$ ,  $U_{R,L}^{syn}[c_i](T_i)$  et  $U_{R,L}^{obs}(T_j)$  sont les synthétiques (à la  $i^{ieme}$  couche, calculés à la période  $T_j$ ) et les vitesses de groupe observés des ondes Rayleigh et de Love,  $\sigma_R$  et  $\sigma_L$  sont des incertitudes sur les vitesses de groupe des ondes de Rayleigh et de Love respectivement (elles ont pour valeurs 40 et 50  $\text{ms}^{-1}$ , d'après Shapiro and Ritzwoller (2002)). Pour l'inversion de la croûte nous procédons comme pour l'inversion du manteau, c'est-à-dire une inversion linéaire de moindres carrés, avec une matrice de covariance du modèle  $C_m$  et une matrice de covariance des données  $C_d$ , les longueurs de corrélations sont fixées à 500km et 1000km respectivement pour  $\xi$  et  $V_s$ , et  $C_d$  est supposée diagonale et formée des incertitudes sur les vitesses de groupe des ondes de Rayleigh et de Love ( $\sigma_R$  et  $\sigma_L$ ).

En guise de résumé pour cette partie, nous présentons ci-dessous un « workflow » sur la construction du modèle de croûte (qui est utilisé dans les prochaines itérations pour le calcul des synthétiques par la méthode des éléments spectraux) à l'aide des données de dispersion de vitesse de groupe des ondes de Rayleigh et de Love entre 25-60s.



**Figure 2.9** – Workflow de la construction de la croûte homogénéisée à l'aide des données (mesurées entre 25-60s) de courbes de dispersion de vitesse de groupe des ondes de Rayleigh et de Love.

### 2.5.1 Correction de croûte

Pour minimiser les effets non linéaires de la croûte sur les ondes courtes périodes nous utilisons la technique **MLC** (modified linear correction) de [Lekić et al. \(2010\)](#). Cette technique permet d'éliminer les effets non linéaires et non modélisés de la croûte sur la structure du manteau. Elle permet également réduire le coût de simulation numérique des sismogrammes synthétiques à l'aide des éléments spectraux. [Montagner and Jobert \(1988\)](#) puis [Montagner and Tanimoto \(1991\)](#) ont montré que les effets de la croûte peuvent affecter de façon significative le modèle du manteau ; pour avoir un modèle (de vitesse ou d'anisotropie) du manteau plus fiable il serait donc intéressant de se débarrasser des effets non linéaires de la croûte. La **MLC** est basée sur la modification de façon empirique (à l'aide des données de courbes de dispersion) de la topographie des différentes discontinuités de la croûte dans l'optique de mieux approximer effets non linéaires de la croûte (corrections



de croûte) à l'aide de l'approximation linéaire. Pour cela nous calculons les fonctions et les fréquences propres **et on résout le problème inverse** en faisant le « scaling » des coefficients, ce qui minimise les effets non linéaires en appliquant les corrections standards linéaires de croûte. Les corrections sont paramétrisées de façon à refléter les variations latérales dans la croûte, si nous considérons un modèle de référence 1D ( $m_{ref}$ ) de la Terre et que nous supposons que le modèle de croûte est paramétrisé à l'aide de  $N$ -nœuds, les structures associées à chaque modèle de croûte, représentées en chacun des nœuds sont données par  $c_n$ , avec  $n = 1, \dots, N$ . Nous calculons par la suite les fréquences propres pour chacun des modèles (i.e. le modèle de référence  $m_{ref}$  et l'ensemble des  $N$  modèles 1D de croûte que nous noterons  $m_{ref}^n$  qui sera constitué de la structure crustale en provenance de  $c_n$  et de la structure mantellique venant de modèle de référence  $m_{ref}$ ). Si nous considérons un multiplet  $k$ , la perturbation de fréquence induit par la structure crustale au nœud  $n$  est donnée par :

$$\delta\omega_k^n = \omega_k[m_{ref}^n] - \omega_k[m_{ref}] \quad (2.70)$$

Cette perturbation de fréquence obtenue directement de la dispersion de fréquences propres dans un modèle perturbé est dite non-linéaire. Pour des raisons d'auto-couplage à l'intérieure d'un multiplet (i.e.  $k = k'$ ) dû à la perturbation du Moho, de la topographie des fonds marins et de la vitesse moyenne des ondes de cisaillement dans la croûte. Nous calculons les dérivées partielles des fréquences propres dans le modèle de référence donné. Elles sont désignées par  $H_{kk}^M$ ,  $H_{kk}^S$ ,  $\bar{M}_{kk}^c$  respectivement. Nous cherchons les perturbations linéaires de la profondeur du Moho ( $h_M$ ), de la topographie/bathymétrie ( $h_s$ ) et de la croûte ( $\bar{V}_S^c$ ) pour chacun des nœuds crustals. Cette perturbation s'écrit de façon vectorielle comme suit,  $\delta\mathbf{X}_n = (\delta h_M, \delta h_s, \delta \ln \bar{V}_S^c)^T$

Le système matriciel associé est donné par :

$$\begin{pmatrix} H_{k_1 k_1}^M & H_{k_1 k_1}^S & \bar{M}_{k_1 k_1}^c \\ H_{k_2 k_2}^M & H_{k_2 k_2}^S & \bar{M}_{k_2 k_2}^c \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \delta\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \delta\omega_{k_1}^n \\ \delta\omega_{k_2}^n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Cette matrice satisfait la méthode des moindres carrés pour les multiplets  $k_1, k_2, k_3 \dots$  dans la bande de fréquence considérée, l'ensemble des facteurs de corrections donnés par les coefficients de  $\delta\mathbf{X}_n$  permet de se débarrasser des effets non linéaire de la croûte, afin d'éviter la contamination du manteau par ces effets non désirés.

Notre dernier chapitre portera sur les résultats et interprétations du modèle de panache obtenus dans l'océan indien.

## Chapitre 3

# Tomographic Model of Indian Ocean

### 3.1 A narrow plume conduit anchored in lower mantle beneath la Réunion hotspot

We performed a regional tomography of Indian ocean by waveform inversion. Two principals low velocity anomalies are found in the upper mantle in the western (Mascarene Basin) and the Eastern (Central Indian Basin) part of the Ocean. The source that feeds the hotspot volcano of la Réunion is buried in the lower mantle and is connected to the latter with a thin conduit of about  $\sim 200$  km.

#### 3.1.1 Abstract

La Réunion island is well known as one of the most active hotspot on Earth. Its birth, 65Ma ago, created the Deccan volcanic traps in India (almost 2 million  $km^2$ ), associated with the Cretaceous-Tertiary boundary and with the extinction of about 90% of life on the Earth, including dinosaurs. However, the deep structure of the underlying mantle plume and its exact geometry are still the subject of controversies. The use of seismic data acquired by the French-German RHUM-RUM experiment in the Indian ocean around la Réunion volcanic hotspot (2012-2013) and the collection of broadband seismic data from FDSN (Federation of Digital Seismograph Networks) data center make it possible to investigate the deep structure of la Réunion plume along its complete track from its birth to its present stage in the Indian ocean. So far, no global seismic tomography model has provided high resolution image of the transition zone or lower mantle beneath la Réunion hotspot. In the framework of this study, we use spectral element method (SEM) to perform waveform forward modelling for several thousand paths across the Indian ocean. The sensitivity matrix (first order approximation of the Hessian matrix) is built from the coupling of normal modes along and across branches by using nonlinear asymptotic theory (NACT). This hybrid method based on the combination of SEM and

NACT, allows us to resolve deep structure of the Earth beneath the Indian ocean down to 1500 km depth. To accurately map deep heterogeneities, we derived regional tomographic model (with teleseismic and regional events) from simultaneous inversion of fundamental and higher modes. Our model retrieves a channel of low velocity zone extending from West to East on either side of central Indian ridge at 200-300km depth. It also reveals a plume conduit with a broad head in the upper mantle and narrow tail anchored in the lower mantle down to 1500km depth. The connection between la Réunion hotspot and the South-Africa LLSVP is also brought to light. Our findings suggest a long-lived la Réunion hotspot, since the lower part of the conduit anchored in the lower mantle is filled by the large low-shear-velocity province. Our result could also guide further geochemical and geodynamic studies on the interaction between the lower transition zone and the deep lower mantle below la Réunion hotspot.

## 3.2 Introduction

The Indian Ocean covers a tectonically interesting area of the world, involving 3 principal plates (Africa, Antarctica and Indo-Australian plate) with some remarkable, not yet fully understood features, such as the Indian Ocean Geoid Low (IOGL), the lowest large scale geoid anomaly in the world (cite references), or some recent unexpected events, such as the birth of a new volcano in Mayotte in 2018 and the low-velocity structure in the asthenosphere beneath the Mascarene basin, [Barruol et al. \(2019\)](#). Located on the African plate in the western Indian Ocean, the island of la Réunion is the result of one of the most debated cataclysmic volcanic eruptions in the world, which happened  $\sim 65$  Ma years ago and changed the global climate, affecting life at that time. The Piton de la Fournaise volcano is an active midplate hotspot volcano, which erupted 5 times as recently as 2019. It is thought to be the surface signature of a long-lasting mantle plume, however, the source that has fed this powerful hotspot almost continuously since cretaceous times is not well known, and many questions remain open. In particular, is there a mantle plume rooted at the core-mantle boundary directly beneath La Réunion as proposed by [Morgan \(1978\)](#)? Alternatively, does the plume conduit originate in the mid-mantle above the African large low shear velocity province (LLSVP) ? Or, is there a vertical conduit emanating from a reservoir closer to the surface within or above the transition zone ?

While numerous models of large scale upper mantle seismic structure have been produced ([Montagner and Jobert \(1988\)](#), [Montagner \(1986\)](#), [Mazzullo et al. \(2016\)](#), [Barruol et al. \(2019\)](#), [Bredow et al. \(2017\)](#), [Scholz et al. \(2016\)](#)), the seismic coverage of the upper mantle over the Indian Ocean has been greatly improved recently, owing to broadband seismic data from permanent land-based seismic stations accumulated over the last 20 years, and from a recent experiment that installed xx ocean bottom stations (**OBSs**) in the western Indian Ocean (French and German experiment, RHUM-RUM experiment). Many studies have been carried out over the last four years to extensively investigate upper mantle structure beneath and around the hotspot using various kinds of seismic data, such as surface wave dispersion ([Mazzullo et al. 2016](#)), noise correlation ([Hable et al. 2018](#)), or body wave travel times ([Scholz et al. 2016](#)) making it possible to constrain anisotropic structure in the upper mantle. Lower mantle structure has also been investigated through body-wave

tomography (Tsekmistrenko et al. EGU 2018). In particular, the improved data coverage allowed the construction of the first surface wave tomographic model (Mazzullo et al. 2016) with lateral resolution of  $\sim 400$  km down to 250km depth, showing the presence of a localized low shear velocity region beneath the Mascarene basin at depths between 100 and  $\sim 200$  km named **MBAR** (Mascarene Basin Asthenospheric Reservoir) (Barruol et al. (2019)). The discovery of this intriguing anomaly raised several questions about its origin and its relation with la Réunion hotspot. However, resolution remained poor below 250 km depth.

### 3.3 Methods

As in the case of many non-linear inverse problems solved using an optimisation approach, our waveform inversion consists of two steps at each iteration: a forward step in which the predicted seismic wavefield is computed in the current iteration model, and an inverse step in which the model is updated. For the forward modelling we used the spectral element method (SEM), as first developed for the spherical earth by Komatitsch and Tromp (1999). Here, we use the code RegSEM (Cupillard et al. (2012)), specifically suitable for large scale regional problems, to compute seismic waveforms up to and including the minor arc fundamental mode surface waves down to 40s period. Our calculation takes into account radial anisotropy and provides accurate 3D synthetic seismograms without restrictions on the scale or size of heterogeneity in the model. We consider the 3D model *SEMUCB\_WM1* (French and Romanowicz (2015)) as starting model for our study. Since the maximum domain allowed by RegSEM to propagate seismic waves is a  $90^\circ \times 90^\circ$  chunk. In order to extend the spatial coverage by including teleseismic events in our regional scale study, we use three overlapping RegSEM chunks, each of area  $89^\circ \times 89^\circ$  (Figure 3.2). Each chunk is a physical domain containing the sources and receivers (see red, blue and magenta domains in Figure 3.2), all the sources are triggered in each physical domain allowing thousands of paths intersecting across Indian Ocean. The synthetic wavefield artificially reflected at the edges of the physical domain is attenuated through the implemented Perfectly Matched Layers (PML), keeping a distance between the physical domain that contain sources and receivers, and the border of the absorption domain of at least  $1/2$  seismic-wavelength. The topography of the region is taken into account and for the oceanic part we substitute water layer by its load. The crust is replaced by an equivalent smooth homogenized crustal model. For the inverse part of the process, we use a Gauss-Newton least squares optimization approach Tarantola and Valette (1982) as opposed to a conditioned gradient method used in adjoint-based inversions. We construct the gradient and the Hessian approximately using physics based normal mode perturbation theory, specifically the path-average approximation (PAVA) for the fundamental mode surface waves, and non-linear asymptotic coupling theory (NACT, Li and Romanowicz (1995)) for overtone wavepackets. The latter takes into account coupling across mode branches and leads to 2D sensitivity kernels in the vertical plane containing the source and the receiver. Both PAVA and NACT contain multiple-forward scattering terms that take into account path-specific updates of the model in the calculation of the Frechet derivatives. The model is updated using Eq.,3.1:

$$(G^T C_d^{-1} G + C_m^{-1})(m_{k+1} - m_k) = G^T C_d^{-1} [d - g(m_k)] + C_m^{-1} [m_0 - m_k] \quad (3.1)$$

where the data covariance matrix  $\mathbf{C}_d$  is built from the weights applied to the individual wavepackets as described above and in [Li and Romanowicz \(1995\)](#), and the model covariance matrix  $\mathbf{C}_m$  provides for regularization of the model. In addition to norm damping, we consider a spatial and depth correlation length as follows:

$$(\mathbf{C}_m)_{ij} = \sigma_{ii} \exp\left(\frac{\cos \Delta_{ij} - 1}{L_{ij}^2}\right) \exp\left(\frac{-2r_{ij}}{h_{ij}^2}\right) \quad (3.2)$$

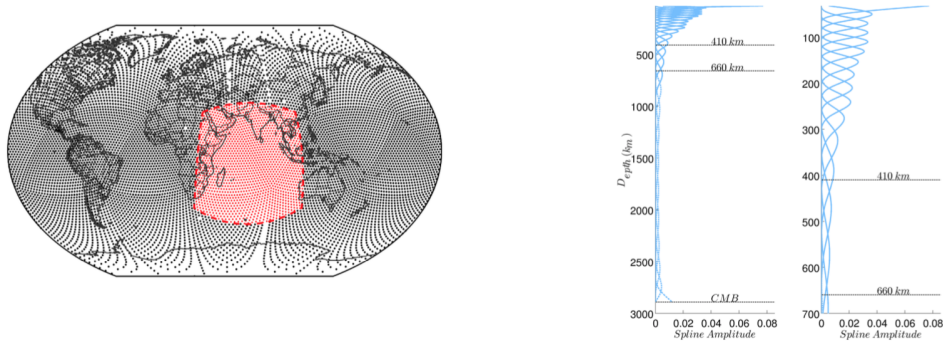
$\Delta_{ij}$  is the minor arc between lateral knots  $i$  and  $j$ ,  $r_{ij}$  is the radial distance between the knots,  $L_{ij}$  are the lateral and  $h_{ij}$  the depth correlation lengths.  $\sigma_{ii}$  includes norm damping. We also consider different weights applied at this step to different subsets of data, for example to balance the contribution of transverse component data versus data recorded on the vertical/longitudinal components and equalize the contribution of overtones as compared to fundamental modes to the Frechet derivatives. The expressions of the predicted seismograms (derived from PAVA and NACT formalism) are given by Eq. [3.7,3.9](#), more details can be found in [Lekić and Romanowicz \(2011\)](#).

### 3.4 Model parametrization

For spatial parametrization of the model  $\delta m(r, \theta, \varphi)$  we use spherical splines ([Wang and Dahlen 1995](#)) for lateral parametrization and cubic-splines for radial parametrization (Figure [3.1](#)) spanning the depth range 30-2900 km.

$$\delta m(r, \theta, \varphi) = \sum_q \sum_j m_{qj} B_q(r) S_j(\theta, \varphi) \quad (3.3)$$

where  $\theta, \varphi$  are respectively the latitude and longitude, and  $r$  the radius.  $S(\theta, \varphi)$  and  $B(r)$  are spherical and cubic splines, respectively and  $m_{qj}$  are coefficients defining the model perturbation at each iteration. The spherical spline basis has the advantage to be a local basis contrary to commonly used spherical harmonics. The lateral resolution of the model depends on the spherical knot spacing by  $2^\circ \times 2^\circ$  (Figure [3.1](#)).



**Figure 3.1** – Left: Spherical spline node distribution. The red dots delimited by the dashed red line represent the regional nodes that fall in the region of interest with spacing of  $2^\circ \times 2^\circ$ . Right: cubic-splines used for the vertical parametrization (with zoom from 100-700km showing the distribution of cubic splines in the upper mantle transition zone).

For the physical parametrization we start from the fact that the wave field propagation in the complex media is described by a tensor of elastic properties of 81 components, which can be reduced in 21 components using the symmetry properties. But so far it's not yet possible to determine all the 21 parameters of the Earth using the seismic data at our disposal; we use the traditional approximation that considers the Earth as a transversely isotropic medium with a vertical axis of symmetry. Such a medium is described by the 5 Love's parameters  $A, C, F, L, N$  plus density  $\rho$ .

$$A = \rho V_{PH}^2 ; C = \rho V_{PV}^2 ; N = \rho V_{SH}^2 ; L = \rho V_{SV}^2 ; \eta = \frac{F}{(A - 2L)} \quad (3.4)$$

Where  $\rho$  is the density of the media in which the wave propagates,  $V_{PH}, V_{PV}$  are the velocities of the P wave propagating horizontally and vertically respectively. Likewise  $V_{SH}$  and  $V_{SV}$  are the velocities of the S wave polarized horizontally and vertically, we can redefine the 5 parameters of Love with the help of the 3 isotropic parameters ( $V_{Piso}, V_{Siso}$ ), call "Voigt average isotropic velocities" and  $\eta$ .

$$\xi = V_{SH}^2/V_{SV}^2 ; \phi = V_{PV}^2/V_{PH}^2 ; \eta ; V_{Piso}^2 \simeq (V_{PV}^2 + 4V_{PH}^2)/5 ; V_{Siso}^2 \simeq (2V_{SV}^2 + V_{SH}^2)/3 \quad (3.5)$$

We are interested in inverting only  $V_{Siso}$  and  $\xi$  due to the fact that the parameters  $V_{Piso}, \phi, \rho$ , and  $\eta$  are usually not well constrained, for this reason we use the scaling laws from [Montagner and Anderson \(1989\)](#).

$$\frac{d \ln(V_{Piso})}{d \ln(V_{Siso})} = 0.5, \quad \frac{d \ln(\rho)}{d \ln(V_{Siso})} = 0.3, \quad \frac{d \ln \phi}{d \ln \xi} = -1.5, \quad \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} = -2.5 \quad (3.6)$$

### 3.5 Sensitivity kernel matrix

The synthetic waveform data used to perform partial derivatives for sensitivity kernel matrix ( $G^T C_d^{-1} G$  in eq.,3.1) are computed using path average approximation (for fundamental modes) and nonlinear asymptotic theory (for overtones). For **PAVA** the waveform is given by:

$$u = \Re e \left\{ \sum_{\ell} A_{\ell}(\Delta + \delta\Delta) e^{i(\omega_k + \delta\hat{\omega}_k)t} e^{-\alpha_k t} \right\} \quad (3.7)$$

Where

$$A_{\ell}(\Delta) = a_{\ell}^0 Y_{\ell}^0(\Delta) + a_{\ell}^1 Y_{\ell}^1(\Delta) + a_{\ell}^2 Y_{\ell}^2(\Delta) + . . .$$

Here the value of azimuthal order  $m = 2\ell + 1$ ,  $\ell$  is the radial order, and  $Y_{\ell}^m$  is defined asymptotically by:

$$Y_{\ell}^m(\Delta) \propto \frac{1}{\pi \sqrt{\sin(\Delta)}} \quad (3.8)$$

then this lead to  $u \propto 1/\sqrt{\sin(\Delta)}$ , due to the fact that the expression of seismogram computed with the path average approximation is inversely proportional to  $\sin(\Delta)$ . We applied some restrictions on certain data with very small or very large epicentral distance as explain in the privious chapters.

For **NACT** formalism the seismogram is given by the sum of standard displacement

derived from unperturbed model plus the perturbation term due to the model perturbation  $\delta m$ .

$$u(t) = \Re e \left\{ \sum_k \sum_m R_k^m S_k^m \exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_k t) + \delta u(t) \right\} \quad (3.9)$$

The perturbation term  $\delta u(t)$  is given below:

$$\delta u(t) = \sum_k \left[ -\mathbf{i}\delta\omega_k t A_k \exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_k t) + \sum_{k' \geq k} \frac{\exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_k t) - \exp(\mathbf{i}\hat{\omega}_{k'} t)}{(\omega_k + \omega_{k'}) + (\hat{\omega}_k - \hat{\omega}_{k'})} E_{kk'}(t) \right] \quad (3.10)$$

with

$$E_{kk'}(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q_{kk'}^{(1)} \int_0^{2\pi} \delta\omega_{kk'}^2 \cos[(\ell' - \ell)\varphi] d\varphi + Q_{kk'}^{(2)} \int_0^{2\pi} \delta\omega_{kk'}^2 \sin[(\ell' - \ell)\varphi] d\varphi \right\} \quad (3.11)$$

In equation 3.10, the first term takes into account the coupling of the modes within the multiplet  $k$  and the second term expresses the coupling between multiplets  $k'$  and  $k$ , corresponding to across branch coupling, which allows to reveal the ray character of body wave. where  $Q_{kk'}^{(1)}$  and  $Q_{kk'}^{(2)}$  depend on the source and receiver, and are given in the Appendix of Li and Romanowicz (1995).  $\ell'$  and  $\ell$  are angular order corresponding to the multiplets  $k'$  and  $k$ . The frequency shift due to self-coupling of the modes (induced by lateral heterogeneities) is given by the integral over the entire Earth.

$$\delta\omega_{kk'}(\theta, \phi) = \frac{1}{\omega_k - \omega_{k'}} \int_0^a \delta m(r, \theta, \phi) \mathbf{M}_{kk'}(r) r^2 dr \quad (3.12)$$

Where  $a$  is the radius of the Earth and  $M_{kk'}$  the kernel. In the equations 3.9 the frequency shift  $\hat{\omega}_k$  is defined as:

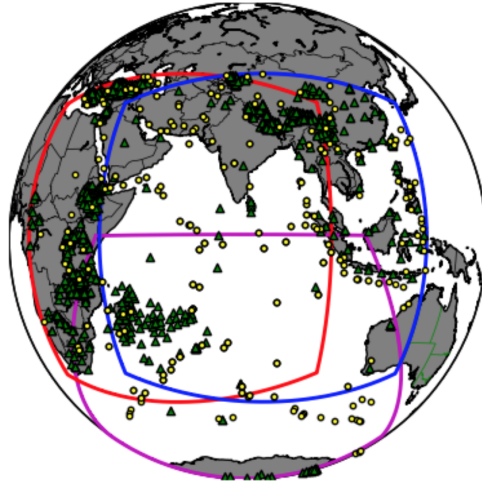
$$\hat{\omega}_k = \omega_k + \frac{1}{\Delta} \int_S^R \delta\omega_{kk'} \delta_{kk'} ds \quad (3.13)$$

$S$  and  $R$  are source and receiver, in this expression  $\delta\omega_{kk'}$  is the local frequency perturbation and  $\Delta$  the epicentral distance. The expression of the seismogram derived from the equations 3.7 and 3.9 are used to compute the partial derivatives with respect to the model parameters. These partial derivatives form the sensitivity kernel matrix  $G^T C_d^{-1} G$ .

## 3.6 Tomography dataset

Our data are from the various permanent networks and from some temporary experiments (SELASOMA, MACOMO). Several ocean bottom station (**OBSs**) installed at the Réunion island contributed to dense data coverage around the hotspot. This subset of data is from the RHUM-RUM experiment and consists of 57 broadband **OBSs** and 23 temporarily land stations deployed in 2012. We used data from  $\sim 200$  regional and teleseismic events of magnitude  $5.0 \leq M_w \leq 7.0$  recorded on three-components at a total of  $\sim 414$  stations. The waveforms are band-pass filtered with cut-off frequencies at 400s and 40s and corner frequencies at 53s and 250s. Based on group velocity windowing, the waveforms are divided into wavepackets roughly separating overtone energy from fundamental mode energy as described in Li and Romanowicz (1995). Typically, a particular wavepacket may contain primarily fundamental mode energy, or primarily overtone energy, or a mix of fundamental

mode and overtone energy, depending on the distance. Furthermore, the wavepackets are weighted in order to balance the amplitudes of different wavepackets in a given record, and the redundancy of wavepackets recorded on close-by paths. At each iteration, we compute the misfit and the correlation between the observed wavepackets and RegSEM synthetics. To avoid cycle-skipping, at each iteration, we reject those wavepackets for which the phase shift between data and synthetics is  $\geq \pi/2$ ; some of the wavepackets rejected at one iteration can be admitted at the next iteration as a result of model improvement. The number of additional wavepackets at each iteration is one measure of the progress of the model in fitting the data.



**Figure 3.2** – Sources (yellow dots) and receivers (blue triangles) used in this study. The three RegSEM chunks used to allow us to include teleseismic events are represented here by red, blue and magenta lines, respectively. Our dataset comprises 200 events and 414 seismic stations including 57 ocean bottom seismometers (**OBSs**) from the RHUM-RUM experiment around la Réunion hotspot.

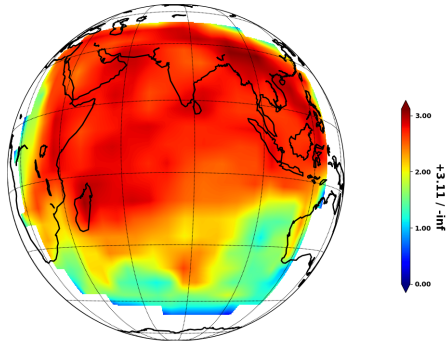
In Figure 3.3, we plot the ray coverage across Indian ocean showing  $\sim 1500$  paths with good azimuthal coverage.



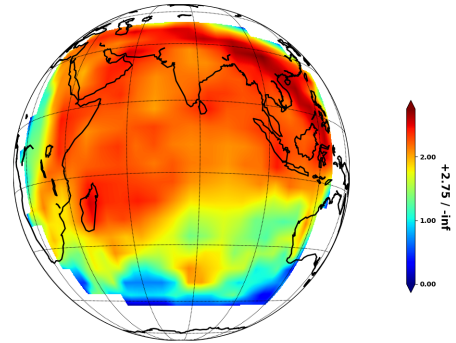
**Figure 3.3** – Path coverage for the entire dataset. It comprises about  $\sim 1500$  intersecting paths across Indian ocean, with denser coverage around the island of la Réunion.



The hit count maps for Rayleigh and Love waves are also plotted. The Rayleigh wave hit count map is denser than the Love wave one, due to the fact that Rayleigh waves are observed on two components, whereas the Love wave is only recorded on the transverse component, and more importantly, the transverse component is noisier than the vertical component.



**Figure 3.4** – Hit count map (per unit area) for fundamental, higher and mixed mode of Rayleigh waves (left). The red (resp. blue) areas correspond to regions where the path coverage is the denser (resp. poorer); the whole region is better sampled by Rayleigh wave than by Love wave.



**Figure 3.5** – Hit count map (per unit area) for fundamental, higher and mixed mode of Love wave, showing how the region is sampled by Love waves. The southern part is less covered because of the lack of seismic stations and sources.

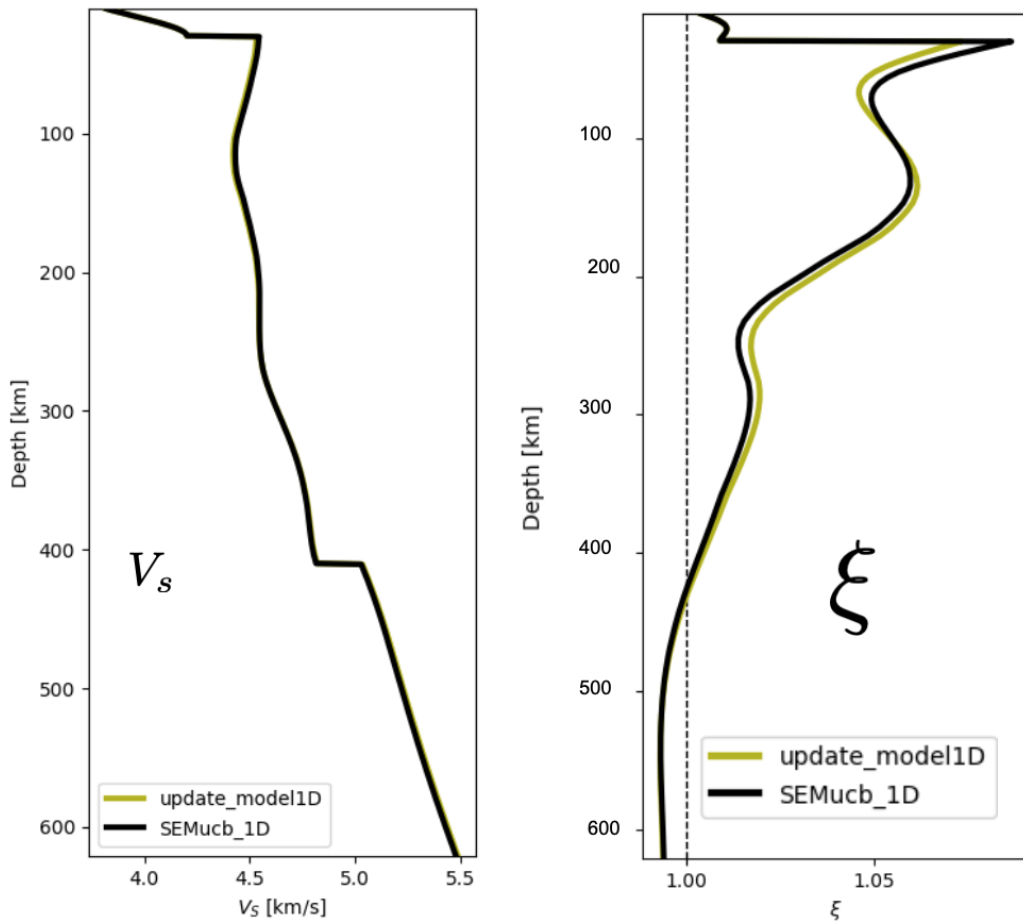
### 3.7 Deep structure beneath the Indian ocean inferred from wave-form inversion.

Here we present the model (SEMindo) obtained after two iterations of inversion, starting from model SEMUCB-WM1. Figure 3.6 shows a comparison of the average 1D model in  $V_S$  and  $\xi$ , compared to the global average in SEMUCB-WM1. Because the region is oceanic, the 1D model remains close to the starting global average. We will successively present SEMindo in the the different layers of the mantle, uppermost mantle down to 410km depth, the upper (410-660km) and lower (660-900km) transition zones and the lower mantle.

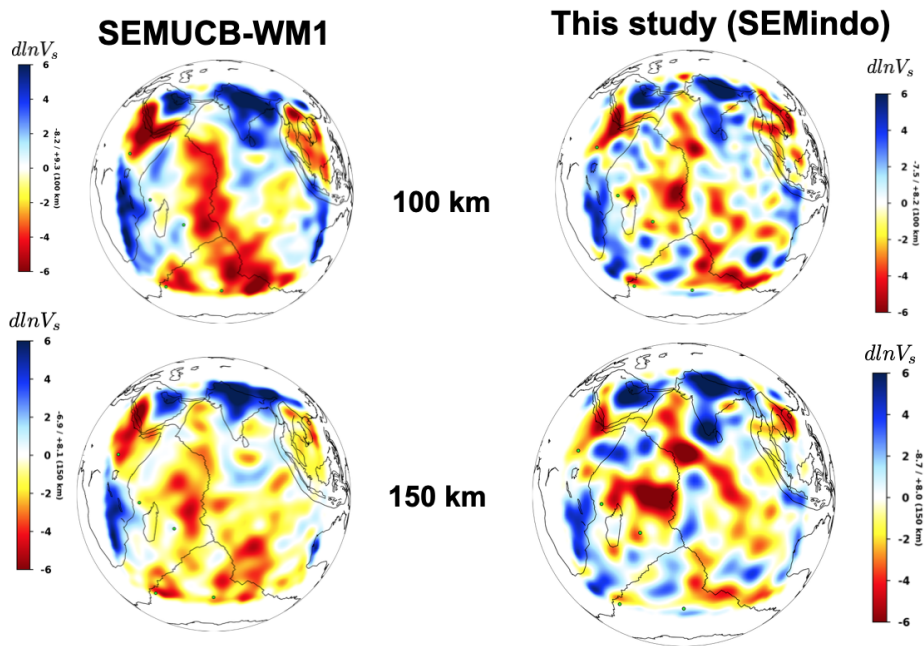
#### 3.7.1 uppermost mantle (down to 410km)

In Figure 3.7 we show a comparison of maps of  $V_S$  in the starting and final models at 100 km and 150km depth. Figure 3.8 presents the corresponding maps at 200, 300 and 400 km depth. Our final model shows two prominent low velocity anomalies at asthenospheric depth, on either side of the CIR (Central Indian Ridge). The anomaly located on the western side of CIR and interacting with the latter is connected to la Réunion and Comores by a small low velocity channel as shown at 200km depth (Figure 3.8(a), right panel).

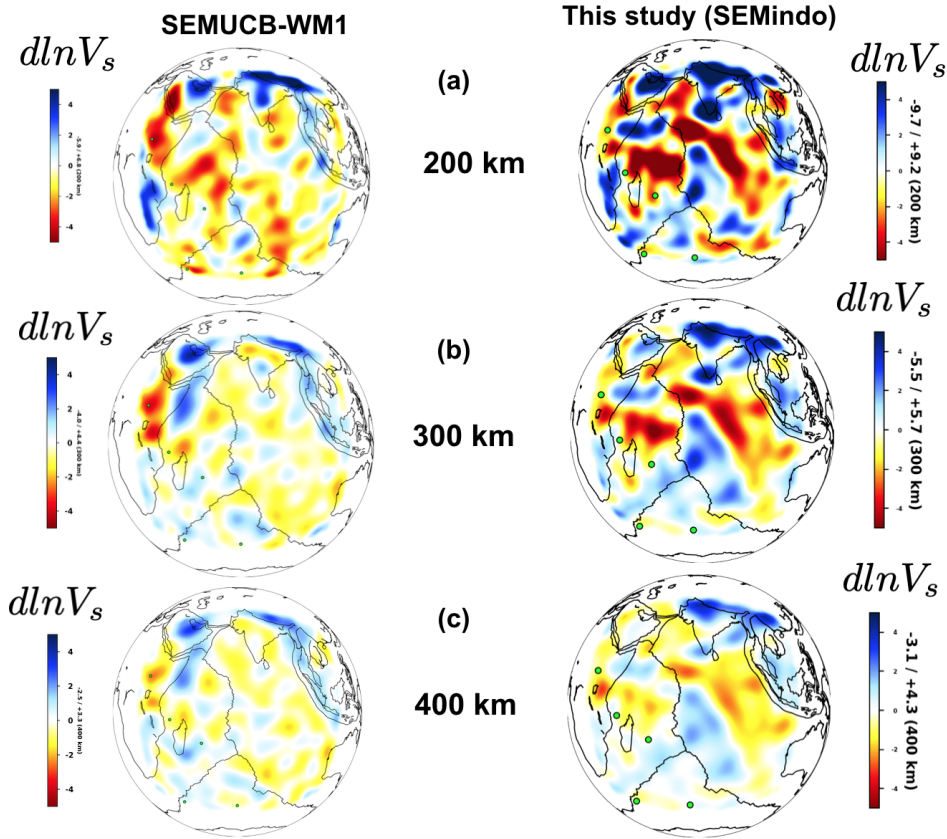
Although the signature of the anomaly located in the west is also present in the starting model (Figure 3.8(a), left panel), it is more prominent and in agreement with the structure named MBAR (Mascarene Basin Asihenospheric Reservoir) inferred from fundamental mode surface wave studies using data from the RHUM-RUM experiment (Mazzullo et al. (2016), Barruol et al. (2019)) and (Debayle and L ev eque 1997). It is larger and better resolved in our model, extending from the Somalian basin to the Mascarene basin and has an East-West extent of about  $\sim 2000$  km. The joint inversion of fundamental and higher modes is useful to map deep structure at higher resolution than the previous Rayleigh wave-based tomography, and to constrain the root of these anomalies. In our model, both structures are still well resolved at 300 km depth (Figure 3.8(b), right panel), although they vanish in the starting model SEMUCB-WM1.



**Figure 3.6** – Comparison of mean isotropic velocity of the starting model SEMUCB-WM1 (black) and updated model SEMindo (yellow) on the left, as well as radial anisotropy (rep. right) ( $\xi = V_{SH}^2/V_{SV}^2$ ).



**Figure 3.7** – Comparison of the starting model (SEMUCB-WM1) on the left, and the updated model (SEMIndo) on the right at depths of 100 and 150 km. The shear wave velocity perturbation is plotted relative to the regional average plotted on the **Figure 3.6** (left column).

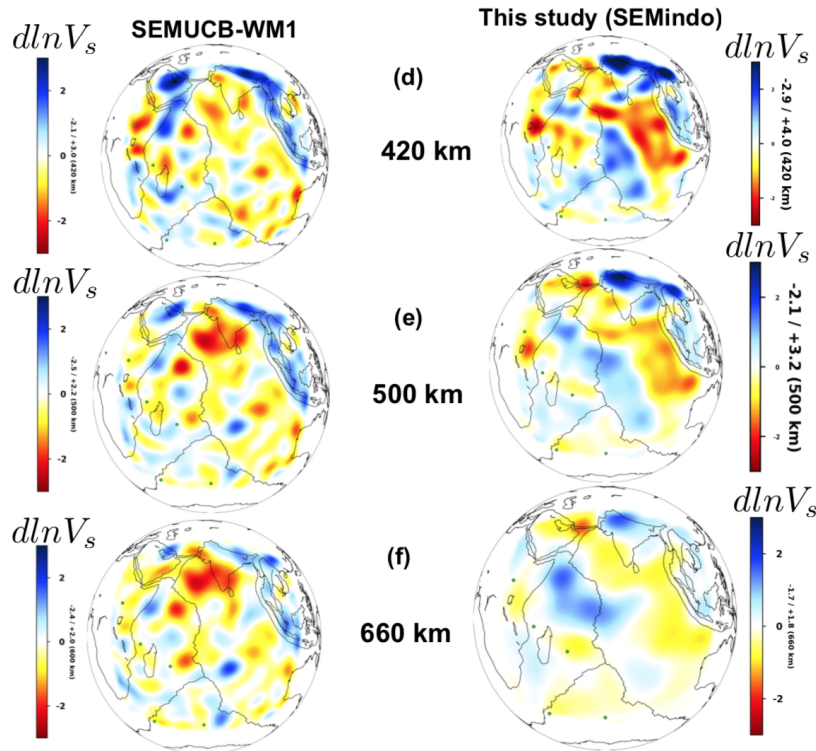


**Figure 3.8** – Comparison of the starting model (SEMUCB-WM1) on the left panel, and the updated model (SEMIndo) on the right panel at depths of 200, 300 and 400 km. The shear wave velocity perturbation is plotted relative to the regional average with the same color scale. The overall amplitudes of the anomalies decrease with depth but their signatures are still visible at the base of the asthenosphere at 400 km depth.

### 3.7.2 Transition zone and lower mantle

The joint use of the fundamental and higher modes of surface waves makes it possible to retrieve the structure in the transition zone and in the lower mantle. Interestingly, the slow structures visible on both sides of the CIR in the uppermost mantle are still visible in the upper mantle transition zone. The shape of the MBAR anomaly is preserved (Figure 3.9(d), right panel). Similarly to the MBAR low velocity anomaly, a low velocity anomaly located on the Eastern part of the CIR in our model (almost absent in SEMUCB-WM1) is also well resolved due to the good ray path coverage from the new dataset including events from the Eastern part of the region. The latter anomaly present in the uppermost mantle from the **Arabian basin** to the **Wharton basin** and across the **Chagos Laccadive ridge** and the **Ninetyeast ridge** (Figure 3.8(a), right panel at 200 km depth) spreads more eastward and is surrounded by two fast velocity anomalies (Figure 3.9(d), right panel). This anomaly persists in the transition zone beneath the Central Indian ocean basin (CIOB), we will name it the **Central Indian Basin Transition Zone Reservoir** (CIBTZR). The MBAR anomaly starts to vanish at 400 km and completely disappears at 500 km depth, only a low amplitude velocity anomaly remains beneath la Réunion hotspot with a West-East orientation (Figure 3.9(e), 3.9(f)). The low anomaly

beneath the south of the Indian continent visible in the starting model SEMUCB-WM1 at 500-660 km depth (see right panel of Figure 3.9) is completely degraded in our model.



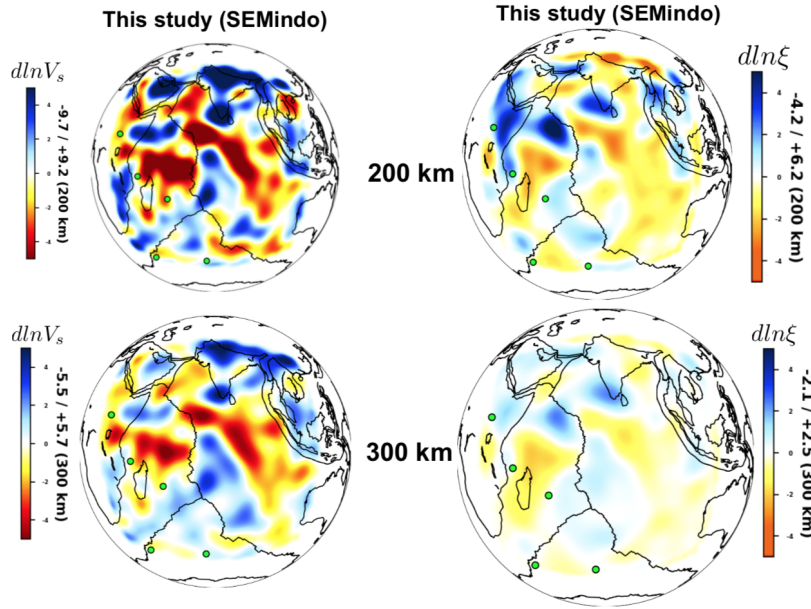
**Figure 3.9** – View of both models (SEMUCB-WM1, left panel) and updated model (SEMindo, right panel) in the upper mantle transition zone. Due to the decrease of the amplitude with the depth, the models are plotted with a color scale lower than the one used Fig 3.7, 3.8 for the uppermost mantle structures. The main low velocity structures on the both sides of the CIR are still visible in the transition zone, and the Eastern anomaly spreads more towards the East at 500-660 km depth as we can see on the right panel.

Fast velocity anomalies in our model are also well resolved and have the same localization as in SEMUCB-WM1, but with higher amplitudes. For example the Indian keel shows up clearly in this study (Figure 3.8(a), right panel). The figures 3.8(a) and 3.8(b) on the right panel, show that the thickness of the Indian continent lithosphere as manifested by the disappearance (with depth) of fast velocities within the continent, varies geographically, from  $\sim 250$  km in the center of Indian continent to  $< 200$  km in both the East and West borders of the continent. This result is in good agreement with a previous study (Maurya et al. 2016). The signature of the positive velocity anomaly located on the Arabian plate, between the Somalian and Carlsberg ridges and extending from the north to the south (around the triple junction of CIR) is present down to 660km depth (Figure 3.9). It is interpreted as the remnants of Carlsberg slab, arising from the tremendously oblique subduction of Indian lithosphere beneath the Arabian/African oceanic lithosphere in the late Cretaceous to Paleocene.

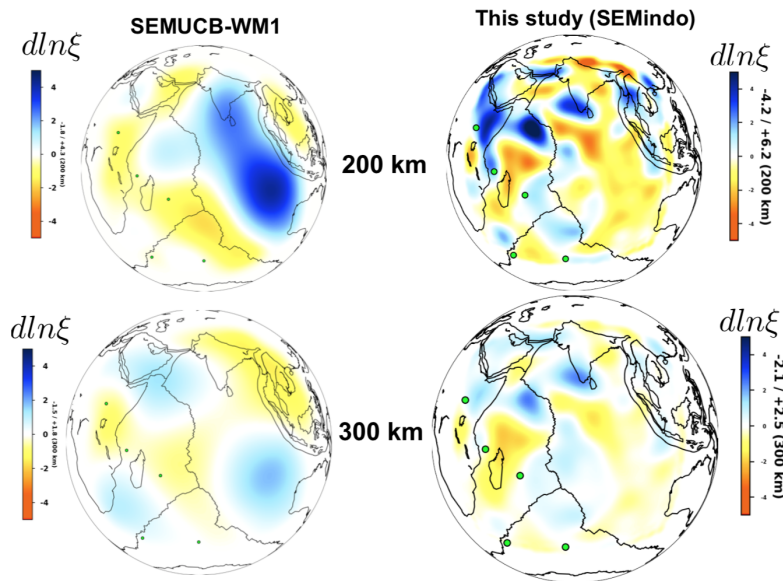
### 3.7.3 Correlation between shear velocity model and radial anisotropy

To first order, radial anisotropy indicates upwelling or downwelling of hot or cold material ( $\xi < 1$ ) and layering ( $\xi > 1$ ) respectively. Plotted relative to the regional average, one

observes low velocity anomalies on both sides of CIR (Figure 3.10, left panel), that correspond well with regions of  $\xi < 1$  in the radial anisotropy map, indicating upwelling in the Mascarene basin, and beneath the Central Indian Ocean Basin (Eastern part of central Indian ocean) (Figure 3.10, right panel).



**Figure 3.10** – Correlation between the velocity model (left panel) and radial anisotropy model (right panel), both are resolved on the same grid and they are in agreement on the continent as well as in the ocean, but more particularly on the two principal anomalies on either sides of the Central Indian Ocean.

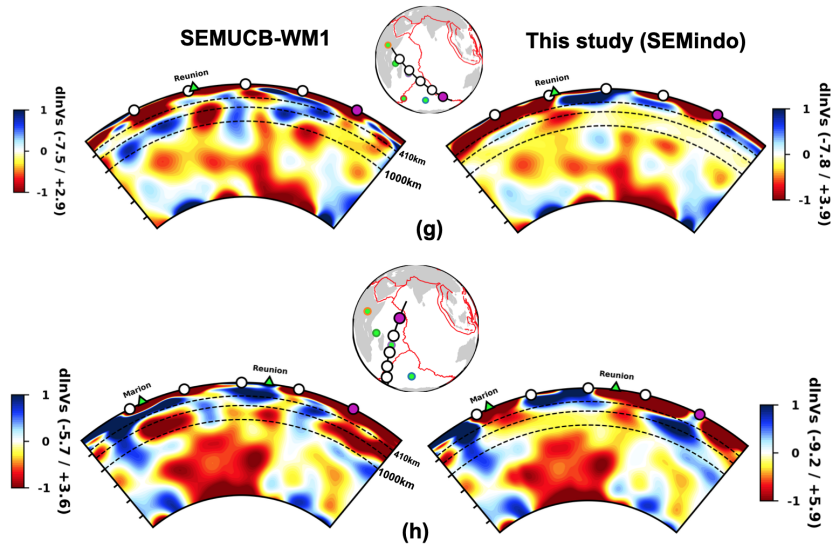


**Figure 3.11** – Comparison at 200-300 km depth of radial anisotropy of SEMUCB-WM1 model (left panel) and radial anisotropy model from this study (right panel), in our model we resolve more features. The two principal anomalies are not shown on the starting model.

As shown in Figure 3.11, the principal anomalies on both sides of the central Indian ridge are not resolved in the starting model (SEMUCB-WM1), but they are well resolved in our model (SEMindo) (Figure 3.10); that shows structures with more details. This is due to the fact that we inverted the radial anisotropy and the shear wave velocity ( $V_s$ ) on the same spherical spline grid with a spatial wavelength of  $\sim 200$  km; whereas they were inverted on grids of different spatial wavelength in the SEMUCB-WM1 model (i.e.  $\sim 200$  km for  $V_s$  and  $\sim 400$  km) for  $\xi$ ). The Carlsberg, Arabian and the triple junction fast velocity anomalies are also well recovered by the radial anisotropy model.

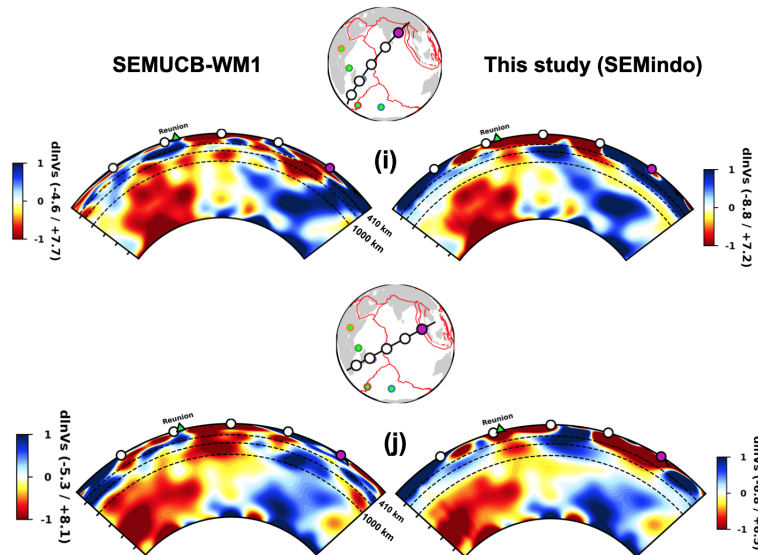
#### 3.7.4 Plume originating from the lower mantle.

The imaging of low velocity anomalies in the different depth ranges of the upper and lower mantles makes it possible to track down their origin and to locate their origin at depth. The dominant low-velocity anomalies show their signature down to the upper mantle transition zone (Figure 3.9). We present below some evidence that they are rooted in the transition zone or deeper. Depth cross-sections allow to better investigate whether they are connected vertically to corresponding structures in the lower mantle or alternatively rooted above the south African LLSVP or neither. The cross-sections presented in Figure 3.12 compare the background model (SEMUCB-WM1) and the updated model (SEMindo). The color scale is chosen in such a way that the lower mantle features are emphasized. To ensure that our regional tomography (that consists of regional perturbations of the starting global model) is viewed in continuity with the part of the background global model that has not been perturbed (below  $\sim 1500$  km depth), the cross-sections are presented down to the core-mantle boundary (CMB). The fast velocity observed beneath la Réunion in SEMUCB-WM1 (Figure 3.12(h), left panel) is no longer present in our model (SEMindo, Figure 3.12(h), right panel), which shows evidence of continuous low velocity structure beneath la Réunion, broadening in the TZ (transition zone) and thinning in the lower mantle. The Mascarene basin reservoir also appears to be connected to the lower mantle by a narrow conduit (Figure 3.12, right panel). The width of the plume conduit is  $\sim 200$  km in the lower mantle beneath la Réunion (that correspond to the lateral spatial wavelength), much smaller than those of Hawaii, Pitcairn and Samoa in model SEMUCB-WM1; the higher resolution attained in our model can explain why the conduit was not resolved in the previous global tomographic model of French and Romanowicz (2015).



**Figure 3.12** – Comparison of cross-sections of SEMUCB-WM1 model (left panel) and this study (right panel). In our model we resolve features beneath la Réunion and Marion hotspots. Both cross-sections pass through the Mascarene basin and show a narrow conduit connecting the border of the LLSVP. In the upper mantle, the low velocity anomaly then spreads beneath the Mascarene Basin, toward the CIR and beyond.

The cross-section presented in Figure 3.13 still exhibits narrow conduits in the lower mantle as observed in the previous cross-sections, with similar lateral dimensions. The small size of the conduit may be due to fact that the conduit has emptied with time into the upper mantle or may reflect a strong viscosity contrast with the surrounding mantle.



**Figure 3.13** – Cross-sections of SEMindo model (this study); the cross-sections still show a narrow conduit rooted above the South Africa LLSVP, the amplitude of the conduit is the same as in the previous cross-sections that can be related to the discharge of the conduit content in the upper mantle; the history of the carlsberg slab is well tracked (fast velocity anomaly on the cross-section, see (i) on both right and left panel) as well as the Sumatra subduction zone, see (j) right panel.



We plotted several cross-sections around la Réunion from different angles (Figure 3.13) that show a low-velocity anomaly starting from lower mantle and spreading into the upper mantle on both sides of the central Indian ridge (Figure 3.13(i)); a conduit with weak amplitude rooted at the base of the mantle appears clearly in SEMUCB-WM1 as well as in SEMindo (Figure 3.13). But the conduit in SEMindo model (Figure 3.13, right panel) links the base of la Réunion hotspot to the South Africa LLSVP as well as the base of the mantle in southeastern Indian towards Australia (Figure 3.12(g)). The fast velocity anomaly beneath la Réunion present in SEMUCB-WM1 has disappeared (Figure 3.13 and 3.12(h), right panel).

## 3.8 Discussion

For this regional tomography the inversion is performed down to  $\sim 1500$  km. The model between this depth and the base of mantle (CMB) is the background model (SEMUCB-WM1) that remains unchanged. The absence of the use of dispersion data in the uppermost mantle can explain why in SEMindo the CIR is not resolved as expected. We notice that the inclusion of dispersion data affect the fundamental mode at some point. Indeed, for this regional study more focused in the deep mantle structure beneath la Réunion hotspot we use only waveform in order to avoid the bias of the fundamental mode in the inversion. A study carried by [Gaina et al. \(2015\)](#) demonstrated that the North-West Indian ocean ophiolites belt (defined as a portion of oceanic lithosphere made of mantle peridotites and crust gabbros dolerites and basalts that are exported above the sea level) used to identify ancient subduction zones, was formed along Indian-Arabian/Africa plate boundary; thus showing the evidence of a former subduction zone between Indian-Arabian/Africa. Thus our interpretation of the fast velocity anomaly extended between the northern and the southern triple junction of CIR (Figure 3.9) as an indicator of the remnants slab of Carlsberg from the oblique subduction of Indian lithosphere beneath the Arabian/African oceanic lithosphere do agree with this study. These fast-velocity anomalies present in model SEMindo are at the same location as anomalies inferred from the reconstruction of the subducted Tethyan lithosphere ([Hafkenscheid et al. 2006](#)), although they are shallower, they can be thought to be remnants slab emanating from the northward Indian plate subduction below the Neotethyan lithosphere. Other findings suggest that an increase of water content in the upper mantle supplied by subduction, can cause extensive zones of low velocity in the upper mantle as shown at the US east coast by ([van der Lee et al. 2008](#)). But the position of the Eastern low velocity anomaly relative to the **Sunda Trench** can be an valuable argument to dismiss this idea from our interpretation. The connection between the MBAR and the central Indian Basin TZ Reservoir seems thinner than other anomalies, its resolution is lower. The cross-section of Figure 3.13(i), right panel shows the south Africa LLSVP as good source candidate of the MBAR and CITZB anomalies. The Mascarene Basin Asthenospheric Reservoir is anchored in the lower mantle with a narrow conduit, and may be the mantle source of the new volcano detected recently in Mayotte. The relationship between this anomaly and the new volcano should be further investigated in the future. Although the low velocity structure found beneath the Marion hotspot is better resolved (in the upper mantle, Figure 3.12(h), right panel)

than in background model; its poor resolution in the lower transition zone (660-1000 km) can be explained by sparser higher modes data coverage (in the updated model) in this region. The starting model SEMUCB-WM1 shows a connection between the lower transition zone (660-1000 km) and the south Africa LLSVP, this may be due to the inclusion of body wave data in the construction of SEMUCB-WM1 (Figure 3.12(h), left panel). The most intriguing result of SEMindo is the existence of narrow low velocity conduits ( with a width of  $\approx 200km$ ) in depth range 900-1500km, connecting deep large scale low velocity anomalies in the lower mantle and in the transition zone. It real these conduits might be the missing link of mantle upwellings between the lower and the upper mantles. We performed resolution tests using a synthetic plumes anomalies extending from the surface to the lower mantle (resp to the upper mantle) with different maximum amplitudes  $\pm 2\%$  and  $\pm 1\%$ . We applied the resolution matrix on the synthetic plume and this yields a structure with a similar shape (and the same depth),with refined tail in the lower mantle (Figure A.5, above). Reducing the amplitude of theinput plume ( $\pm 1\%$ ) led to an output structure with weaker amplitude than the one for  $\pm 2\%$  (Figure A.5, below). The resolution test is followed by the comparison of the data versus synthetic in SEMUCB-WM1 as well as in SEMindo and is given in the **Appendix (A.4)**. The root mean square calculated for a subset of 30 evants in starting and updated model is also presented in the **Appendix (see A.2)**.



# Conclusions et Perspectives

## Conclusions

The contribution of **OBSs** data included in the dataset used in our regional model SE-Mindo has been significant in this study. The inversion of this large dataset consisting of regional and teleseismic events included in the three chunks allows us to resolve two principal anomalies in the upper mantle located on the both sides of CIR: MBAR (located at the West of the CIR) and the CIBTZR (located at the East of CIR). The CIBTZR is rooted in the transition zone whereas the MBAR anomaly originates in the lower mantle. The higher modes have been useful for sampling deep mantle structures down to the lower mantle  $\sim 1500$  km. We map a plume with a tail of amplitude (anomaly amplitude) smaller than other major plumes (Hawaii, Samoa, etc) connecting the lower mantle and the uppermost mantle beneath la Réunion and the Mascarene basin. The diameter of the conduit is about  $\sim 200$  km. The remnant slab due the subduction of the Indian below the Neotethyan lithosphere during the northward Indian drift is well resolved. The shear velocity anomalies are well represented in the radial anisotropy model that shows upwelling/downwelling of hot/cold material and layering corresponding to low and fast velocity anomalies location. This regional study resolves mantle structure down to the lower mantle  $\sim 1500$  km, well beyond the previous fundamental mode tomographic model restricted to  $\sim 250$  km depth. This model with a particular geometry of a mantle plume can be a good candidate to guide further geochemistry and geodynamic studies underneath Indian ocean. The inversion of azimuthal anisotropy in the upper and lower transition zone will be an efficient way to shed some light on the deep convection underneath this region.

## Perspectives

Several studies have been conducted in la Réunion, including the investigation of azimuthal anisotropy in the upper mantle. Our model is the first regional model of surface waveform investigating the plume beneath la Réunion down to the lower mantle. But azimuthal anisotropy beneath la Réunion have never been investigated, its investigation will be an efficient way to shed some light on the deep convection underneath this region. Also inclusion of body wave in this regional tomography will be very important to track the shape of the conduit showing up in our model down to the core mantle boundary.



# Références

- Babuska, V. and Cara, M. (1991). *Seismic anisotropy in the Earth*, volume 10. Springer Science & Business Media.
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67(11) :4427–4440.
- Barruol, G., Sigloch, K., Scholz, J.-R., Mazzullo, A., Stutzmann, E., Montagner, J.-P., Kiselev, S., Fontaine, F., Michon, L., Deplus, C., et al. (2019). Large-scale flow of indian ocean asthenosphere driven by réunion plume. *Nature Geoscience*, pages 1–7.
- Bredow, E., Steinberger, B., Gassmüller, R., and Dannberg, J. (2017). How plume-ridge interaction shapes the crustal thickness pattern of the r éunion hotspot track. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 18(8) :2930–2948.
- Brocher, T. M. (2005). Empirical relations between elastic wavespeeds and density in the earth’s crust. *Bulletin of the seismological Society of America*, 95(6) :2081–2092.
- Campbell, I. H. and Griffiths, R. W. (1990). Implications of mantle plume structure for the evolution of flood basalts. *Earth and Planetary Science Letters*, 99(1-2) :79–93.
- Capdeville, Y. and Marigo, J.-J. (2007). Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media. *Geophysical Journal International*, 170(2) :823–838.
- Capdeville, Y., Stutzmann, E., Wang, N., and Montagner, J.-P. (2013). Residual homogenization for seismic forward and inverse problems in layered media. *Geophysical Journal International*, 194(1) :470–487.
- Cupillard, P., Delavaud, E., Burgos, G., Festa, G., Vilotte, J.-P., Capdeville, Y., and Montagner, J.-P. (2012). Regsem : a versatile code based on the spectral element method to compute seismic wave propagation at the regional scale. *Geophysical Journal International*, 188(3) :1203–1220.
- Dahlen, F. and Tromp, J. (1998). *Theoretical global seismology*. Princeton university press.
- Davaille, A., Stutzmann, E., Silveira, G., Besse, J., and Courtillot, V. (2005). Convective patterns under the indo-atlantic «box». *Earth and Planetary Science Letters*, 239(3-4) :233–252.

- Debayle, E. and Lévêque, J. (1997). Upper mantle heterogeneities in the indian ocean from waveform inversion. *Geophysical Research Letters*, 24(3) :245–248.
- Durek, J. J. and Ekström, G. (1996). A radial model of anelasticity consistent with long-period surface-wave attenuation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(1A) :144–158.
- Dziewonski, A. M. and Gilbert, F. (1976). The effect of small, aspherical perturbations on travel times and a re-examination of the corrections for ellipticity. *Geophysical Journal International*, 44(1) :7–17.
- Ekström, G., Nettles, M., and Dziewoński, A. (2012). The global cmt project 2004–2010 : Centroid-moment tensors for 13,017 earthquakes. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 200 :1–9.
- Farnetani, C. and Samuel, H. (2005). Beyond the thermal plume paradigm. *Geophysical Research Letters*, 32(7).
- Festa, G. and Vilotte, J.-P. (2005). The newmark scheme as velocity–stress time-staggering : an efficient pml implementation for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophysical Journal International*, 161(3) :789–812.
- French, S., Lekic, V., and Romanowicz, B. (2013). Waveform tomography reveals channelled flow at the base of the oceanic asthenosphere. *Science*, 342(6155) :227–230.
- French, S. W. and Romanowicz, B. (2015). Broad plumes rooted at the base of the earth’s mantle beneath major hotspots. *Nature*, 525(7567) :95.
- Gaina, C., Van Hinsbergen, D. J., and Spakman, W. (2015). Tectonic interactions between india and arabia since the jurassic reconstructed from marine geophysics, ophiolite geology, and seismic tomography. *Tectonics*, 34(5) :875–906.
- Hable, S., Sigloch, K., Barruol, G., Stähler, S. C., and Hadziioannou, C. (2018). Clock errors in land and ocean bottom seismograms : high-accuracy estimates from multiple-component noise cross-correlations. *Geophysical Journal International*, 214(3) :2014–2034.
- Hafkenscheid, E., Wortel, M., and Spakman, W. (2006). Subduction history of the tethyan region derived from seismic tomography and tectonic reconstructions. *Journal of geophysical research : Solid Earth*, 111(B8).
- Komatitsch, D. and Tromp, J. (1999). Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical journal international*, 139(3) :806–822.
- Komatitsch, D. and Tromp, J. (2002). Spectral-element simulations of global seismic wave propagation—i. validation. *Geophysical Journal International*, 149(2) :390–412.
- Kumar, P., Yuan, X., Kumar, M. R., Kind, R., Li, X., and Chadha, R. (2007). The rapid drift of the indian tectonic plate. *Nature*, 449(7164) :894–897.

- Lekić, V., Panning, M., and Romanowicz, B. (2010). A simple method for improving crustal corrections in waveform tomography. *Geophysical Journal International*, 182(1) :265–278.
- Lekić, V. and Romanowicz, B. (2011). Inferring upper-mantle structure by full waveform tomography with the spectral element method. *Geophysical Journal International*, 185(2) :799–831.
- Li, X.-D. and Romanowicz, B. (1995). Comparison of global waveform inversions with and without considering cross-branch modal coupling. *Geophysical Journal International*, 121(3) :695–709.
- Li, X.-D. and Romanowicz, B. (1996). Global mantle shear velocity model developed using nonlinear asymptotic coupling theory. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 101(B10) :22245–22272.
- Li, X.-D. and Tanimoto, T. (1993). Waveforms of long-period body waves in a slightly aspherical earth model. *Geophysical Journal International*, 112(1) :92–102.
- Maurya, S., Montagner, J.-P., Kumar, M. R., Stutzmann, E., Kiselev, S., Burgos, G., Rao, N. P., and Srinagesh, D. (2016). Imaging the lithospheric structure beneath the indian continent. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 121(10) :7450–7468.
- Mazzullo, A., Stutzmann, E., Montagner, J.-P., Barruol, G., Sigloch, K., and Maurya, S. (2016). Surface wave tomography on the indian plate under la réunion island from rhum-rum experiment data. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 18.
- Montagner, J.-P. (1986). 3-dimensional structure of the indian ocean inferred from long period surface waves. *Geophysical research letters*, 13(4) :315–318.
- Montagner, J.-P. and Anderson, D. L. (1989). Petrological constraints on seismic anisotropy. *Physics of the earth and planetary interiors*, 54(1-2) :82–105.
- Montagner, J.-P. and Jobert, N. (1988). Vectorial tomography—ii. application to the indian ocean. *Geophysical Journal International*, 94(2) :309–344.
- Montagner, J.-P. and Tanimoto, T. (1991). Global upper mantle tomography of seismic velocities and anisotropies. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 96(B12) :20337–20351.
- Morgan, W. J. (1971). Convection plumes in the lower mantle. *Nature*, 230(5288) :42–43.
- Morgan, W. J. (1978). Rodriguez, darwin, amsterdam,..., a second type of hotspot island. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 83(B11) :5355–5360.
- Panning, M. and Romanowicz, B. (2006). A three-dimensional radially anisotropic model of shear velocity in the whole mantle. *Geophysical Journal International*, 167(1) :361–379.
- Romanowicz, B. (1987). Multiplet-multiplet coupling due to lateral heterogeneity : asymptotic effects on the amplitude and frequency of the earth’s normal modes. *Geophysical Journal International*, 90(1) :75–100.



- Scholz, J.-R., Barruol, G., Fontaine, F. R., Sigloch, K., Crawford, W., and Deen, M. (2016). Orienting ocean-bottom seismometers from p-wave and rayleigh wave polarisations. *Geophysical Journal International*, page ggw426.
- Shapiro, N. and Ritzwoller, M. (2002). Monte-carlo inversion for a global shear-velocity model of the crust and upper mantle. *Geophysical Journal International*, 151(1) :88–105.
- Tarantola, A. and Valette, B. (1982). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20(2) :219–232.
- van der Lee, S., Regenauer-Lieb, K., and Yuen, D. A. (2008). The role of water in connecting past and future episodes of subduction. *Earth and Planetary Science Letters*, 273(1-2) :15–27.
- Wang, Z. and Dahlen, F. (1995). Spherical-spline parameterization of three-dimensional earth models. *Geophysical Research Letters*, 22(22) :3099–3102.
- Woodhouse, J. and Girnius, T. (1982). Surface waves and free oscillations in a regionalized earth model. *Geophysical Journal International*, 68(3) :653–673.
- Woodhouse, J. H. and Dziewonski, A. M. (1984). Mapping the upper mantle : Three-dimensional modeling of earth structure by inversion of seismic waveforms. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 89(B7) :5953–5986.
- Zhou, Y., Dahlen, F., Nolet, G., and Laske, G. (2005). Finite-frequency effects in global surface-wave tomography. *Geophysical Journal International*, 163(3) :1087–1111.

## Chapitre A

# Annexes

A.1	<b>Rappels importants de notions de dérivées</b> .....	112
A.1.1	<b>Obtention du modèle régional à partir du modèle SEMUCB-WM1</b> ..	112
A.2	Variance résiduelle des différentes phases .....	112
A.3	Comparaison des paquets d'ondes dans les différents modèles .....	112
A.4	<b>Comparison of observed data and synthetics computed in SEMUCB-WM1 and SEMindo</b> .....	113
A.5	<b>Resolution test</b> .....	115
A.6	Workflow of the methodology .....	118
A.7	Workflow description .....	119
A.8	Construction de la Croûte .....	121

## A.1 Rappels importants de notions de dérivées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s}(x-s)^T w(x-s) = -2w(x-s) \\ \frac{\partial}{\partial A}(x-As)^T w(x-As) = -2w(x-As)s^T \\ \frac{\partial}{\partial s}(x-As)^T w(x-As) = -2A^T w(x-As) \end{array} \right.$$

### A.1.1 Obtention du modèle régional à partir du modèle SEMUCB-WM1

Nous expliquons ci-dessous comment le modèle de vitesse 3D dans l'océan Indien est obtenu à partir du modèle globale SEMUCB-WM1.

$$V^{SEMindo}(r, \theta, \phi) = V_s^{SEMucb}(r, \theta, \phi) + \delta V_s(r, \theta, \phi) \quad (\text{A.1})$$

Par définition le modèle SEMUCB-WM1 est égale au modèle 1D plus des perturbations.

$$V_s^{SEMucb}(r, \theta, \phi) = V_s^{SEMucb}(r) + \delta V_s^{SEMucb}(\theta, \phi) \quad (\text{A.2})$$

$\bar{V}_s(\theta, \phi)$  est la perturbation moyenne en chaque profondeur, et les points  $(\theta, \phi)$  sont définis sur une grille régionale. Les modèles de vitesse isotrope sont représentés relativement au modèle régional moyen 1D:  $V_s^{SEMindo}(r)$

## A.2 Variance résiduelle des différentes phases

Nous présentons ci-dessous la comparaison des variances résiduelles des différentes phases dans le modèle de départ SEMUCB-WM1 et dans le modèle obtenu après inversion SEMindo. Elles sont bien meilleures (sur toutes les phases) dans SEMindo que dans SEMUCB-WM1 (voir tableaux ci-dessous).

	phases	Z	L	T		phases	Z	L	T
SEMUCB-WM1	Fund	1.7356	1.7578	1.0359	SEMindo	Fund	1.3570	0.8146	0.6310
	Mixed	1.5293	1.0256	1.0876		Mixed	1.3428	0.8720	0.9142
	high	1.6426	1.2393	1.3764		high	1.6018	0.7526	1.0480

## A.3 Comparaison des paquets d'ondes dans les différents modèles

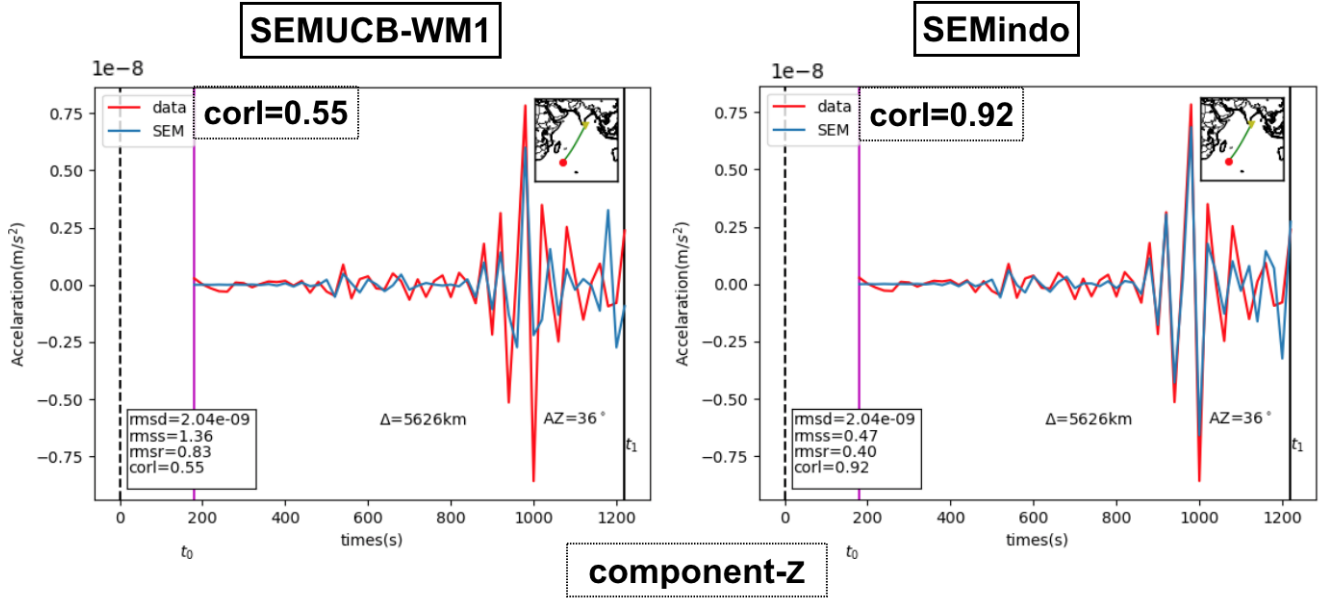
Les tableaux ci-dessous montrent la comparaison nombre de paquets d'ondes dans les différents modèle SEMUCB-WM1 et SEMindo. Nous avons plus de paquets d'ondes acceptés dans SEMindo que dans SEMUCB-WM1, comme le montre les deux tableaux ci-dessous.

SEMUCB-WM1	Z	L	T
	$N_{wp}$	$N_{wp}$	$N_{wp}$
Fundamental mode	1414	1160	984
Mixed mode	2711	1791	2543
Higher mode	1561	1171	130

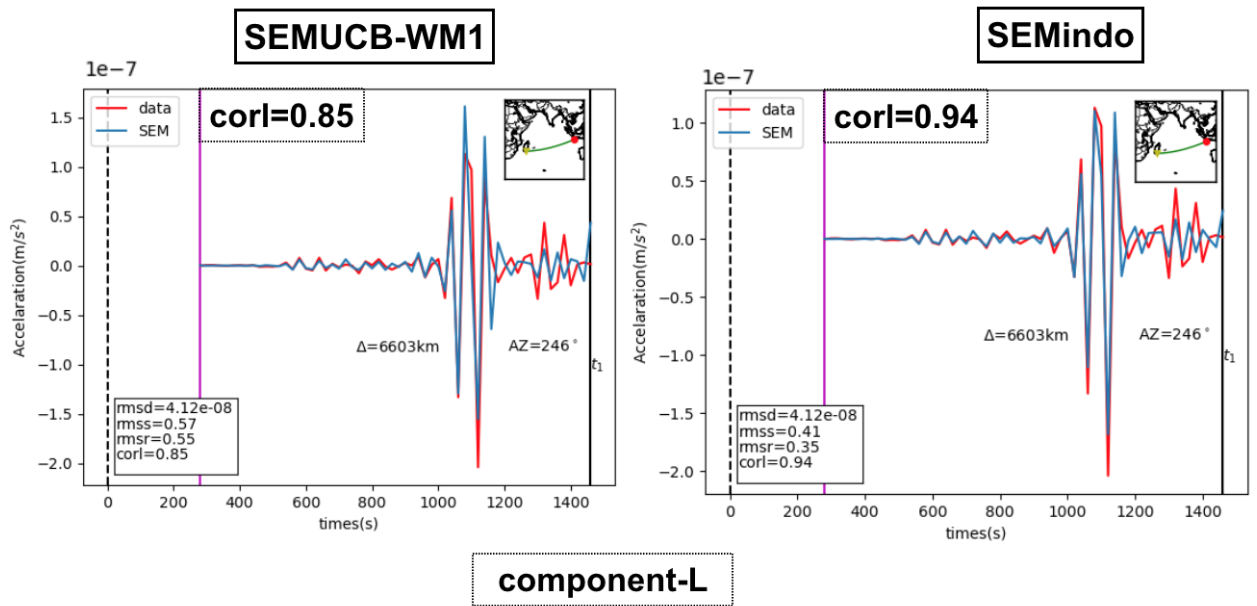
$SEMindo - Iter_2$	$Z$	$L$	$T$
	$N_{wp}$	$N_{wp}$	$N_{wp}$
Fundamental mode	1415	1165	1035
Mixed mode	2710	1743	2566
Higher mode	1583	1222	135

## A.4 Comparison of observed data and synthetics computed in SEMUCB-WM1 and SEMindo

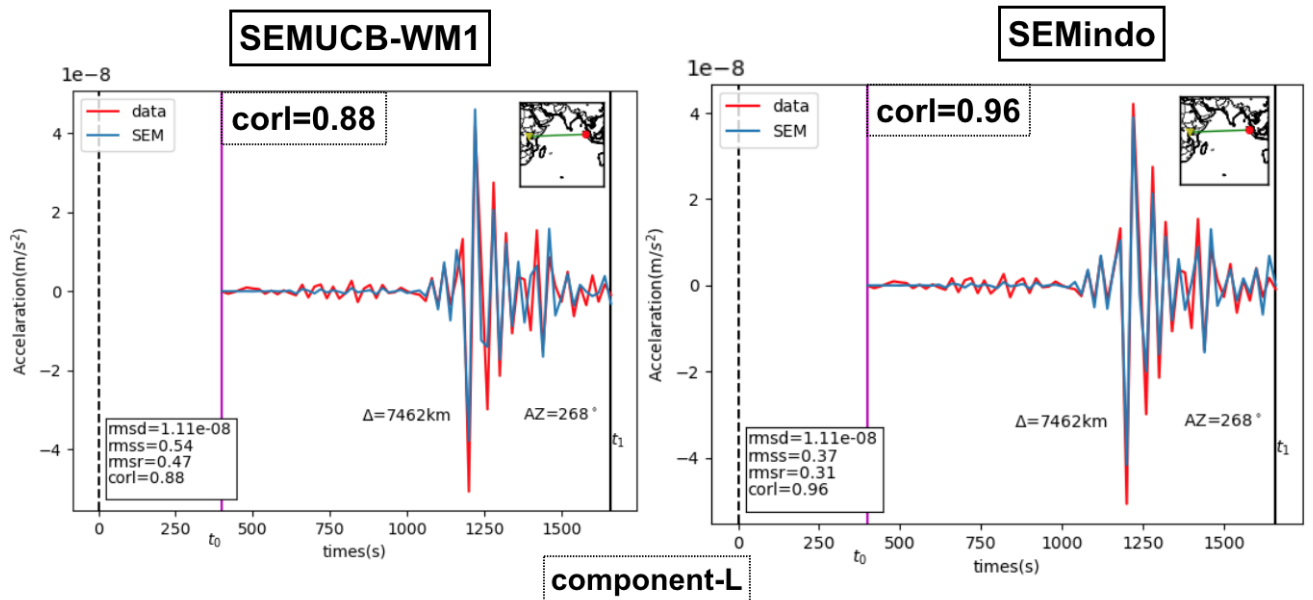
Nous montrons ici quelques exemples de comparaison entre la donnée observée en rouge et la donnée calculée (en blue) dans les modèles de départ (SEMUCB-WM1) et le modèle final (SEMindo).



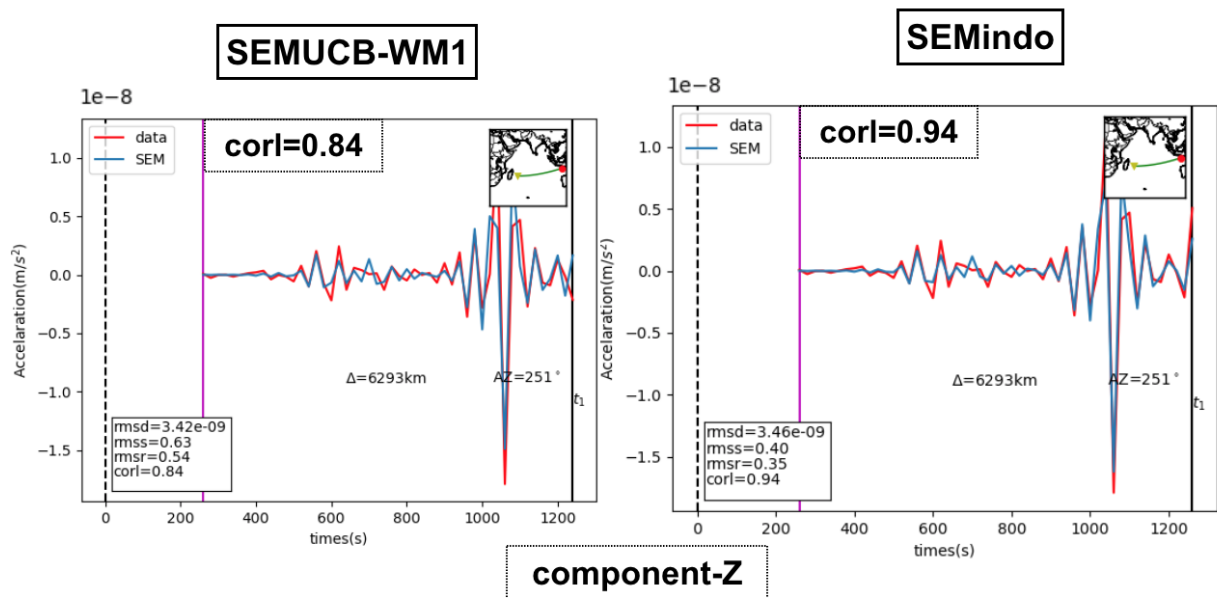
**Figure A.1** – Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMindo (this study, right panel). The correlation between the observed data and synthetic is close to the unity  $\sim 0.92$  in SEMindo, the comparison is done on the Z-component and the higher mode is compared along the path with epicentral distance  $\sim 5600$  km .



**Figure A.2** – Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMindo (this study, right panel) along a seismic path around la Réunion. The correlation between the observed data and synthetic is  $\sim 0.94$  in SEMindo, the higher mode is compared here on the radial component is compared (L-component) and the epicentral distance is about  $\sim 6600$  km.



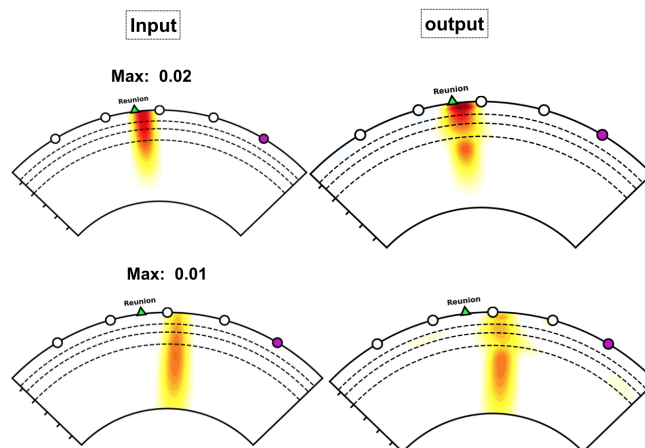
**Figure A.3** – Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMindo (this study, right panel) along mixed path (continental and oceanic). The correlation between the observed data and synthetic is  $\sim 0.96$  in SEMindo, the higher mode is compared here on the radial component is compared (L-component) and the epicentral distance is about  $\sim 7500$  km.



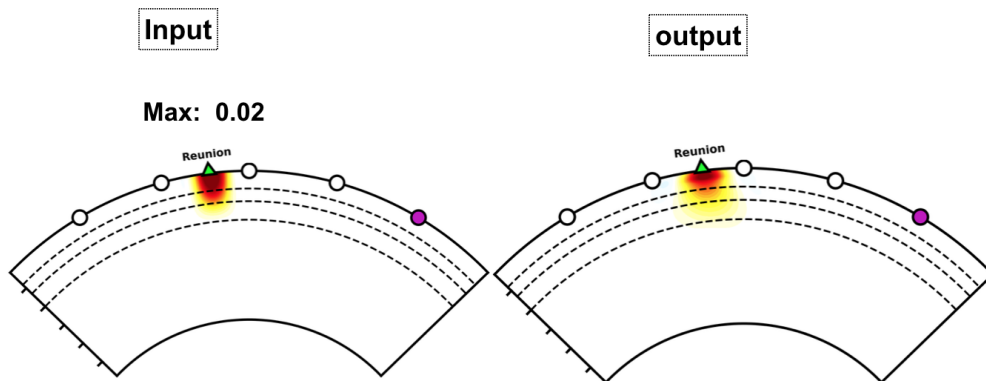
**Figure A.4** – Comparison of observed data (in red) with synthetic computed in SEMUCB-WM1 (left panel), and in SEMIndo (this study, right panel) around la Réunion (oceanic path). The correlation between the observed data and synthetic is  $\sim 0.94$  in SEMIndo, the higher mode is compared here on the radial component is compared (Z-component) and the epicentral distance is about  $\sim 6300$  km.

## A.5 Resolution test

We present below a resolution test performed in our regional tomographic model SEMIndo, the test is performed with the synthetic plume of different width (200 and 400 km) and different amplitude.



**Figure A.5** – Resolution of the test, the input plume models are shown in the left panel with the width of 400 km, the amplitudes are 0.002 (right panel above) and 0.01 (right panel below). The output are shown on the right panel.

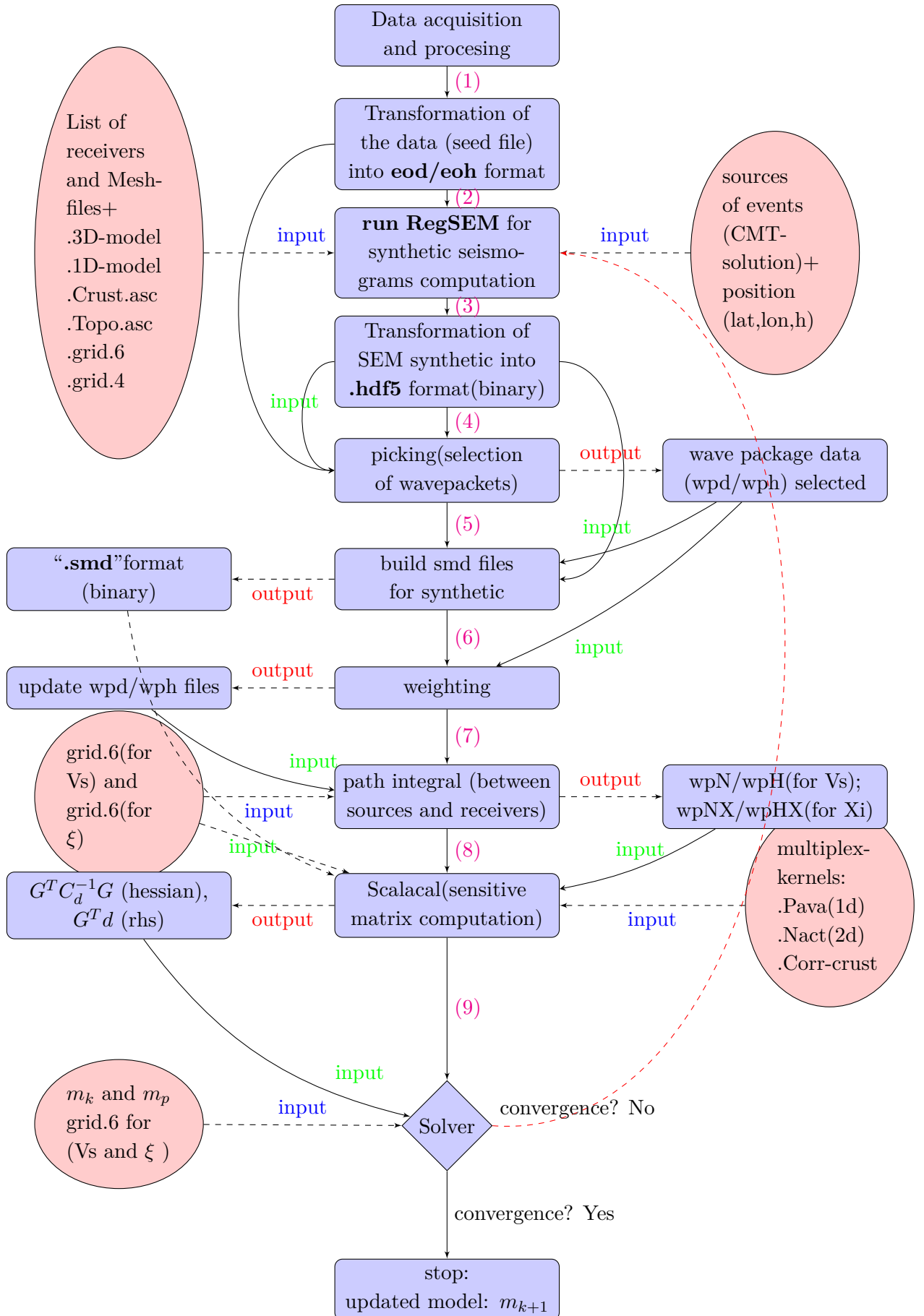


**Figure A.6** – Resolution test in the upper mantle, the input model (right panel) has a width of 200 km and the amplitude of 0.02. The output is shown on the right panel.





## A.6 Workflow of the methodology



## A.7 Workflow description

- (1) As a first step, you need to specify the region of your study and the download the data from the region of interest in the standard format such as: “mseed”, “seed” or “SAC” files.

- (2) We use our data processing tools to proceed the data (remove instrumental response, reject data with gap, etc . . .). The python scripts are ready to proceed the data and convert them into “eod/eoh” files, the conversion into “eod/eoh” is due to the fact that these files are more lighter weight than the standard files cited above. Each seismic event is described by two files: “eod” which contains seismic traces and “eoh” for header which contains the receivers informations (latitude, longitude, elevation, receiver name, etc . . .). The name of eod/eoh files are 8 characters instead of 14 characters. Now for each event create a file containing the station and the receiver informations as well as the frequency band pass in which you want to compute the corresponding synthetic.

- (3) **To run the spectral element code “RegSEM”**, you should first of all mesh the region of your study (note that RegSEM is devoted for the regional study). To do this you need as input, the files named “Moho.asc” (that contains the shape of the Moho in the Earth) and “Toho.asc” (that defined the Topography of the region). The output will be 64 text files named “mesh4spec.0\*”. You can find the example on Malbec (/gpfs/scratch/wamba/RegSEM/MESHES/). You can now provide other inputs such as:

- 3D Earth model named “A3d.dat”
- 1D Earth model named “model1D.dat”
- Crust model named “Crust.asc”
- Topography model named “Topo.asc”
- Spherical knots for isotropic velocity  $V_s$  (grid.6) named “hknots.dat”
- Spherical knots for radial anisotropy  $\xi$  (grid.4) named “hknots2.dat”
- The list of the stations that recorded the event named “EventName.sta”, example “D05EL3XA.sta”.
- The source parameters that are given in the files named “input.spec”, and contains also the duration of the simulation, and the time step.

You can now run the code and the output is will a “tar files” stored in the “output” directory, this an example of the output file: “D055CYTA.export.tar.gz”. Note that the outputs are compressed in order to save some space.

- (4) **Transform the synthetic data (in text file) computed with “RegSEM” into hdf5 (Hierarchical Data Format version 5) format.** The python scripts are ready to do this, just setup all the options in the configuration file named “import.conf” and the run the script named "generate\_synthetic\_archives.sh". The output should be binary files named “EventName.hdf5”, example of an output “D05EL3XA.hdf5”.

- (5) **“Run the Picking-code”**, At this stage you need the “eod/eoh” built at the step (2) and the “hdf5” from the step (4) to run the code name "Picking". This code allows us to select the data that fulfil certain criteria. As input we have to provide :

- The list of all the stations of interest with their coordinates.
- The CMT solution catalog (corresponding to the events of interest).
- eod/eoh files for the real data.
- hdf5 (Hierarchical Data Format version 5) for synthetics.

This step will produce as output the wavepackets files wpd/wph; the wpd files contain the data (traces) and wph files are the headers that contain the events and stations informations.

- (6) Here we need to build the **smd-format** for synthetics (“**.smd**”). As input we need the “hdf5” files built at the step (4) and the “wpd/wph” from the step (5), to run the python script that will produce the “.smd” files. This code allows us to set synthetics data in a format with the same structure as data format. As input we have to provide :  
-wpd/wph (files for the real data).  
-hdf5 (files for synthetic data).

Now you can decide to move to the "Path-integral" step (8) or to the "weighting" step (7), I decided here to start with the "Path-integral" as next step.

- (8) **For path integral**, you need to provide as inputs the all the spherical knots contain your region of study. The input file that contains the knots is named “lu\_knotloc” and contain 4 columns, the first 2 columns give you lateral knots, the third gives the level of the grid, and the last is defined as 1 or 0.

\* 1 indicates that the knot is included in your region of study.

\* 0 indicates that the knot is not included in your region of study.

\* The “lu\_knotloc” can be the same (i.e. same grid level) for  $V_s$  and  $\xi$  if you want to resolve the two parameters on the same grid.

You have to provide now the wavepackets (wpd/wph) files, and the path integral will be computed between sources and receivers, and the output files will be stored for "Scalacal step".

The output files for this step are name “EventName.wpN/EventName.wpH” for  $V_s$  and  $\xi$ ; but make a difference between them we transform the output of  $\xi$  parameter into “EventName.wpNX/EventName.wpHX”; for example “C091302C.wpN/C091302C.wpH” for  $V_s$  and “C091302C.wpNX/C091302C.wpHX” for  $\xi$ . These files are ready to compute the sensitive matrix  $G^T C_d^{-1} G$ .

- (7) **For the weighting**, we use the code named itself “weighting”, for this we need to provide as input the list of all the stations that recorded our events, the file should contains at the first line the total number of stations, from the second line we should have 3 columns:

-The first column is the latitude of the station.

-The second columns is the longitude of the station.

-The third column is the elevation of the station.

- I advise to do the link of “wpd/wph” (instead of copying them), where you are running the picking code, so these files will be updated directly, once the weighting code will be run. You should also provide the file named “lu\_data.par” that contains the "rms" cutoff (which is set to 2 here), the minimum and the maximum epicentral distance, in this case  $\Delta_{min} = 5^\circ$  and  $\Delta_{max} = 90^\circ$ .

- (9) **Run Scalacal code**, in order to build the sensitive matrix  $G^T C_d^{-1} G$

As input we need:

-Synthetic data in “.smd” format.

-Real weighted data in “wpd/wph” format.

-Path integral in “wpN/wpH” and “wpNX/wpHX” format.

-Multiplex kernels “PAVA/NACT”.

-Inversion grid “**grid.6/grid.4**”.

The output is the sensitive matrix ( $G^T C_d^{-1} G$ ) necessary in the solver.

• **(10) Run Solvercode**, in order to update the model.

As input we need:

-Sensitive matrix  $G^T C_d^{-1} G$

-Background 3D-model ( $m_k$ ) expanded in splines basis.

-Prior model ( $m_p$ ) expanded in splines basis.

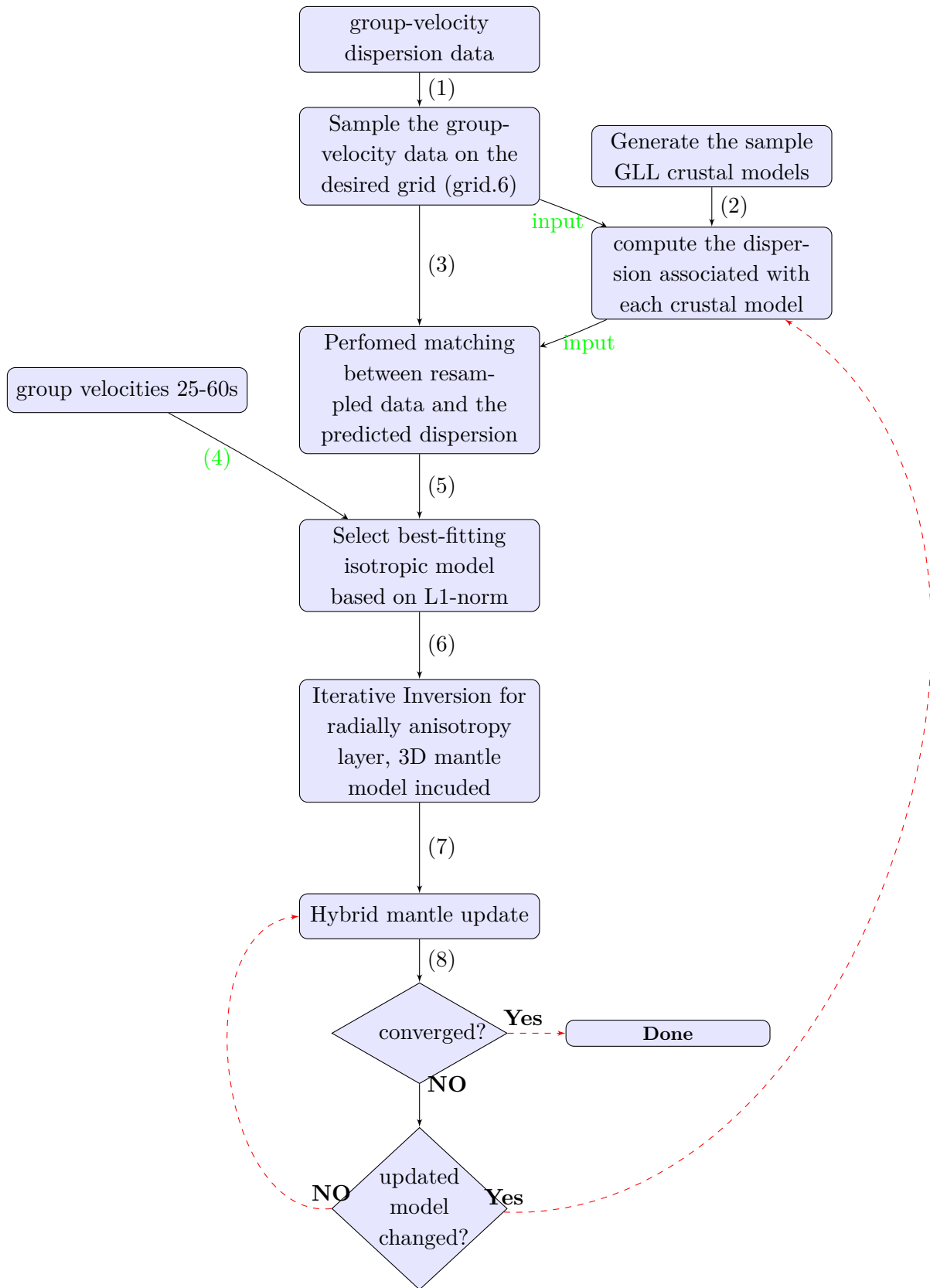
-Splines knots (grid.6 for  $V_s$ ; grid.4 for  $\xi$ ) or (grid.6 for  $V_s$  and  $\xi$ ).

The output is a new model (3D).

Then you need compute some synthectis in this new model in order to calculate the misfit between the synthetic and the data.

## A.8 Construction de la Croûte

Nous présentons ci-dessous la démarche utilisée dans le traitement de la croûte, elle est basée sur l'inversion de courbes de dispersion entre  $25 \leq T \leq 60s$ .



Crust construction workflow

**Résumé** – L'arrivée des panaches et la naissance des points chauds à la surface de la terre serait probablement la cause de la fragmentation de la Pangée il y a  $\sim 200$  Ma, au cours du jurassique. Le Gondwana était formé de plusieurs masses continentales telles que l'Afrique, l'Australie, l'Inde et l'Antarctique. La fin du crétacé a été affectée par une crise biologique causée par un cataclysme volcanique et/ou dû à astéroïde, qui a provoqué la disparition d'environ 90% des vies sur terre, y compris celle des dinosaures, et a produit les trapps du Deccan en Inde, d'une superficie d'environ 2 millions de  $\text{km}^2$  et d'une épaisseur de 2,5-3 km. C'est de ce désastre qu'à vu le jour le point chaud de la Réunion il y a  $\sim 65$  Ma, la plaque indienne a alors amorcé sa dérive vers le nord avec une vitesse d'environ **18-20 cm/an**, et la fermeture de l'océan Téthys s'amorça au devant de la plaque indienne, cependant la remontée des laves basaltiques sous les rides forma un nouveau plancher océanique derrière la plaque indienne: c'était alors la naissance de l'océan Indien. En 1953, le chercheur canadien Tuzo Wilson a suggéré qu'un tel volcan intra-plaque serait dû à un point chaud fixe dans le manteau capable de créer des chapelets d'îles volcaniques à la surface lorsqu'une plaque lithosphérique passe au-dessus; plus tard en 1971, Jason Morgan a suggéré que les points chauds sont alimentés par des panaches thermiques en provenance de la limite noyau-manteau dus à des instabilités thermiques. Le but de cette thèse est d'investiguer l'état actuel du panache Réunionnais dans toute l'étendue de l'océan indien, responsable de nombreuses îles volcaniques comme les Maldives, Maurice et La Réunion. En appliquant les techniques d'inversion de forme d'onde, nous sommes capables d'imager la structure de la terre sous la Réunion jusqu'au manteau inférieur. Nous utilisons les données RHUM-RUM ainsi que des données collectées via la **FDSN** (Federation of Digital Seismograph Networks) data center. Nous avons bâti le problème direct à l'aide des éléments spectraux. Pour ce cas régional, nous utilisons la code RegSEM (Regional spectral element method) afin de calculer des sismogrammes synthétiques qui sont ensuite comparés aux sismogrammes réels. Nous avons sectionné la forme d'onde en plusieurs paquets d'ondes, chaque paquet d'onde correspond à un mode spécifique. Nous inversons pour deux paramètres, la vitesse isotrope et l'anisotropie radiale. Le résultat montre une zone importante d'anomalie de vitesse lente s'étendant de l'Est à l'Ouest sur près de  $\sim 2100$  km dans le bassin des Mascareignes à une profondeur de 200 km. Notre modèle met également en évidence un panache sous le point chaud de la Réunion doté d'une tête épaisse dans le manteau supérieur et d'une queue étroite ancrée dans le manteau inférieur. Notre modèle apporte une lumière sur la connexion entre le panache Réunionnais et la LLSVP (Large Low Shear Velocity Province) Sud-Africaine, ainsi qu'entre l'anomalie des Mascareignes et la base du manteau inférieur.

**Summary** – The arrival of some plumes and the birth of hotspots at the Earth surface is more likely the cause of the break up of the Pangea  $\sim 200\text{Ma}$  ago, during the jurassic era. The Gondwana was formed by many continental masses like Africa, Australia, India and Antarctic. The late cretaceous was affected by a biological crisis caused by a volcanic and/or asteroid cataclysm which provoke the disappearance of 90% of life on the Earth including dinosaurs, and produced India Deccan trapps with an area of 2 millions  $\text{km}^2$  and thickness of 2.5-3 km. This volcanic disaster was associated with the birth of la Réunion hotspot  $\sim 65$  Ma years ago, from there the india plate entered into the northward migration with a velocity of about **18-20 cm/year**, and the closure of the Tethys ocean in front of the indian plate started; in the meantime the raising of basaltic lava from the indian ridges formed a new ocean floor behind the indian plate: this was the birth of indian ocean. In 1953 the Canadian researcher Tuzo Wilson suggested that such an intra-plate volcano may be due to a fixed hotspot in the mantle capable to create successive volcano on the surface; later in 1971 Jason Morgan suggested that the hotspot is fed by a mantle plume rising from the core-mantle boundary due to thermal instabilities. The goal of this thesis is to investigate the actual state of the plume in the entire indian ocean, responsible of many volcanic islands such as Maldives, Maurice and Réunion. By applying waveform inversion we are able to image the earth structure down to the lower mantle; we use Rhum-Rum data and also data collected from **FDSN** (Federation of Digital Seismograph Networks) data center to perform our inversion. We perform the forward modelling with the spectral element method. For this regional case we use RegSEM (regional spectral element method) to compute synthetic seismograms that were compared to real seismograms later on. We divided the waveform into several wavepackets, each wavepacket corresponds to a specific mode. We inverted for two parameters, isotropic velocity and radial anisotropy. The result shows a large velocity anomaly channel extending from East to West over nearly  $\sim 2100$  km in the Mascarene basin at a depth of 200 km. Our model also bring to light a plume under the Reunion hotspot with a broad head in the upper mantle and a narrow tail anchored in the lower mantle. Our model sheds light on the connection between the Reunion plume and the South African LLSVP (Large Low Shear Velocity Province), as well as between the Mascarene anomaly and the base of the lower mantle.