



HAL
open science

Impact du magnétisme et de la rotation différentielle sur les marées dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses

Aurélie Astoul

► To cite this version:

Aurélie Astoul. Impact du magnétisme et de la rotation différentielle sur les marées dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Cité, 2020. Français. NNT : 2020UNIP7073 . tel-03223074

HAL Id: tel-03223074

<https://theses.hal.science/tel-03223074>

Submitted on 10 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PARIS

ÉCOLE DOCTORALE 127 : ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ILE-DE-FRANCE

AIM - DÉPARTEMENT D'ASTROPHYSIQUE

Impact du magnétisme et de la rotation différentielle sur les marées dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses

par

AURÉLIE ASTOUL

THÈSE DE DOCTORAT D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE

Thèse dirigée par

DR. STÉPHANE MATHIS

et

DR. CLÉMENT BARUTEAU

Jury composé de :

DR. STÉPHANE LE DIZÈS RAPPORTEUR
DR. PHILIPPE STEE RAPPORTEUR
PR. SYLVAIN CHATY PRÉSIDENT DU JURY
PR. ADRIAN BARKER EXAMINATEUR
PR. CORINNE CHARBONNEL EXAMINATRICE
DR. CLAIRE MOUTOU EXAMINATRICE
DR. STÉPHANE MATHIS DIRECTEUR DE THÈSE
DR. CLÉMENT BARUTEAU CO-DIRECTEUR DE THÈSE

Résumé

Plus de 4000 exoplanètes ont été découvertes au cours de ces 25 dernières années, pour la plupart en orbite autour d'étoiles de faible masse. Dans les systèmes planétaires à très courte période orbitale, les interactions de marée étoile-planète sont connues pour gouverner l'évolution tardive de l'architecture orbitale des systèmes et de la rotation de leur étoile hôte, comme c'est aussi le cas dans les systèmes serrés planète-satellite(s) de notre système solaire tels que les systèmes jovien et saturnien. Les temps caractéristiques de variation des paramètres orbitaux et de rotation des corps sont dictés par l'amplitude de la dissipation des marées qui varie considérablement avec la masse, la rotation et la métallicité des étoiles ainsi qu'avec la structure et la dynamique internes des étoiles et des planètes.

Pour modéliser et caractériser de manière réaliste la dissipation de marée dans les enveloppes convectives de ces objets astrophysiques, deux mécanismes physiques clés sont étudiés dans cette thèse : la rotation différentielle et le magnétisme, au travers de leur influence sur les flots de marées en milieu convectif. Ces deux aspects sont explorés à l'aide d'approches semi-analytiques et numériques, tout en appliquant nos résultats à l'intérieur des étoiles au cours de leur évolution, et des planètes géantes gazeuses telles que Jupiter et Saturne.

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à l'impact du magnétisme sur l'excitation et la dissipation des ondes magnéto-inertielles de marée, le long de l'évolution des étoiles de faible masse, de type spectral M à F, en examinant les limites de leur enveloppe convective, à savoir l'interface entre la zone radiative et convective et les régions proches de leur surface. Pour ce faire, nous avons utilisé en synergie la physique des ondes de marée, les lois d'échelle issues de la théorie dynamo qui nous permettent d'estimer l'amplitude d'un champ magnétique à grande échelle, et les grilles de modèles numériques d'évolution stellaire prenant en compte la rotation. On montre ainsi que la contribution du magnétisme sur le forçage de marée, c'est-à-dire sur l'excitation des ondes, reste négligeable devant la contribution hydrodynamique classiquement utilisée, et ce quelle que soit la position dans l'enveloppe convective, la masse, ou l'âge de l'étoile de faible masse étudiée. A contrario, le mécanisme de dissipation Ohmique des ondes magnéto-inertielles est un mécanisme très efficace, voire prépondérant devant la dissipation visqueuse, pour des étoiles de type M à F, de la pré-séquence principale à la fin de la séquence principale, dans toute leur enveloppe convective. Ces résultats s'appliquent aussi dans le cas de Jupiter et de ses satellites galiléens.

Parallèlement à ce travail, nous avons développé un modèle local de boîte cisailée, incliné par rapport à l'axe de rotation du corps étudié, afin de comprendre l'interaction complexe entre les ondes inertielles de marée et les flots zonaux au voisinage des couches critiques, et en particulier à la résonance de corotation, qui sont des régions où la fréquence des ondes de marée est nulle ou commensurable avec la fréquence de rotation locale du corps considéré. Ce modèle nous a permis d'étudier l'impact de différents profils de rotation réalistes, comme ceux que l'on peut observer dans les étoiles de type solaire, ou dans les planètes géantes telles que Jupiter et Saturne. Grâce à ce travail, nous avons identifié différents régimes de transmission du flux d'énergie transporté par les ondes, pour lesquels l'onde peut, au voisinage d'une couche critique, soit déposer de l'énergie et être amortie, soit extraire de l'énergie du flot moyen et ainsi être amplifiée. Ces différents régimes de transmission existent pour chacun des profils de rotation examinés, coniques et cylindriques, et dépendent du niveau critique rencontré, des propriétés des ondes et du profil de l'écoulement moyen.

Abstract

More than 4000 exoplanets have been discovered in the last 25 years, most of them around low-mass stars. In close planetary systems, star-planet tidal interactions are known to govern the late evolution of the systems' orbital architecture and the rotation of their host star, as is also the case in the tight planet-satellite systems of our solar system such as the Jovian and Saturnian systems. The characteristic times of variation of orbital parameters and bodies' rotation are dictated by the magnitude of tidal dissipation, which varies considerably with the mass, rotation and metallicity of stars and with the structure and internal dynamics of stars and planets.

In order to model and realistically characterise the tidal dissipation in the convective envelopes of these astrophysical objects, two key physical mechanisms are studied in this thesis : differential rotation and magnetism, through their influence on tidal flows in convective regions. These two aspects are explored using semi-analytical and numerical approaches, while applying our results inside stars during their evolution, and gas giant planets such as Jupiter and Saturn.

First of all, we have been interested in the impact of magnetism on the excitation and dissipation of tidal magneto-inertial waves along the evolution of low-mass stars of spectral type M to F, by examining the limits of their convective envelope, i.e. the interface between the radiative and convective zones and the regions close to their surface. To do so, we have used in synergy tidal wave physics, the scaling laws from dynamo theory that allow us to estimate the amplitude of a large-scale magnetic field, and the grids of numerical models of stellar evolution taking into account rotation. We thus show that the contribution of magnetism on tidal forcing, i.e. on wave excitation, remains negligible compared to the hydrodynamic contribution classically used, whatever the position in the convective envelope, the mass, or the age of the studied low mass star. On the other hand, the Ohmic dissipation mechanism of magneto-inertial waves is a very efficient mechanism, even preponderant in front of the viscous dissipation, for M to F type stars, from the pre-main sequence to the end of the main sequence, in all their convective envelope. These results also apply in the case of Jupiter and its Galilean satellites.

In parallel to this work, we have developed a local shear-box model, inclined with respect to the axis of rotation of the studied body, in order to understand the complex interaction between tidal inertial waves and zonal flows in the vicinity of critical layers, and in particular at the corotation resonance, which are regions where the tidal wave frequency vanishes or is commensurable with the local rotation frequency of the considered body. This model has allowed us to study the impact of different realistic rotation profiles, such as those observed in solar-type stars, or in giant planets such as Jupiter and Saturn. Thanks to this work, we have identified different transmission regimes of the wave energy flux, for which the wave can, in the vicinity of a critical layer, either deposit energy and be damped, or extract energy from the mean flow and thus be amplified. These different transmission regimes exist for each of the examined conical and cylindrical rotational profiles, and depend on the critical level encountered, the wave properties and the mean flow profile.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du Jury qui ont accepté de lire et discuter mon manuscrit de thèse, fruit d'un travail de trois ans, et d'assister en visio-conférence à ma soutenance, tout particulièrement dans ce contexte pandémique particulier. Je remercie ainsi mes rapporteurs, MM. Stéphane Le Dizès et Philippe Stee, pour leur expertise en mécanique des fluides et en astrophysique, Mmes Claire Moutou, Corinne Charbonnel et M. Adrian Barker, examinatrices/teur de ma thèse, pour leurs questions pertinentes et variées, et aussi M. Sylvain Chaty, président du Jury, grâce à qui cette soutenance a pu se tenir en présentiel.

Je tiens maintenant à remercier très sincèrement mes encadrants de thèse, Stéphane Mathis (mon directeur) et Clément Baruteau (mon co-directeur), qui me suivent depuis mon stage de fin de Master 2 au DAp (département d'Astrophysique du CEA). Ces années d'encadrement et de collaboration ont été très formatrices pour moi, grâce aux conseils qu'ils m'ont prodigués, que ce soit sur la science, sur la rédaction d'articles ou bien sur les présentations orales, mais aussi pour leur soutien continu et la confiance qu'ils m'ont accordés durant ces 3 années et demi. J'ai beaucoup aimé travailler avec eux et su apprécier la complémentarité de leur approches : d'un côté le pragmatisme et l'efficacité de Stéphane, pour qui, à chaque problème, sa solution, ou à minima une stratégie pour y répondre, d'un autre la douceur et l'exigence de Clément. J'insiste aussi sur la disponibilité dont ils ont fait preuve avec moi à chaque échéance, ainsi que leur réactivité à chaque échange de message. Ce sont des qualités dont j'aimerais m'inspirer dans la suite de mon parcours.

Dans la liste exhaustive des personnes qui ont joué un rôle sur mon parcours de thèse, je voudrais aussi exprimer ma gratitude envers tout les autres membres du LDE3, à commencer par les permanents. Je remercie ainsi Sacha, directeur de ce laboratoire, pour sa bienveillance durant mon travail de thèse et avec qui j'ai pu échanger sur le magnétisme. Je remercie aussi pour cela Antoine, et pour avoir fait le pont entre les différentes générations, Rafa, qui a instauré avec Barbara la tradition du chocolat made in destination exotique de la pause café et naturellement pour nous avoir tous rendu accro à la pata negra. J'ai aussi une profonde reconnaissance et affection envers tout les post-doctorants du LDE3, notamment Kyle, pour sa générosité, ses réflexions poétiques et approfondies sur n'importe quel sujet, Vincent, pour m'avoir embrigadé durablement dans le jeu de rôle (et me laisser exprimer mon moi profond), Émeline pour son entrain et sa bienveillance, et enfin Junho pour son espièglerie, et en particulier pour son soutien concernant l'aspect numérique du papier sur les couches critiques, qui a donné un second souffle à ce projet. Pour continuer, je vais me décaler légèrement d'un bureau et remercier Lisa, pour les conseils de BD et jeux de société, Sylvain pour son amour de l'accent des campagnes du Sud-Ouest (!), et Mansour pour ses qualités de conteur. Dans le bâtiment face au 709, j'ai une pensée pour le pôle exoplanète avec Pierre-Olivier, Camilla, Giuseppe, et évidemment Marine toujours rayonnante.

Je dédie ce paragraphe à mes co-bureaux du 232, passés et futurs, des plus sages aux plus impertinents. En commençant par les piliers de maturité, les grandes sœurs et grand frère, je pense bien sûr à Constance aux fines analyses sur les questions de société, Barbara que j'admire pour ses critiques tout aussi cinéphile que Netflixphile et bien sûr pour son combat féministe, et Quentin A. avec qui je partage les idéaux écologiques, merci à vous pour toutes ces discussions allant de l'astrophysique à la permaculture. J'en viens aux membres actuels moins disciplinés, mais tout aussi appréciables. Merci Jérémy pour ces moments de franche camaraderie, co-représentant avec moi des doctorants (malheureusement parti trop tôt.), esprit incisif et indomptable sache que je porte avec fierté et reconnaissance le poncho du Chili (la raclette a ses vertus). Quentin N., un Quentin remplace un Quentin, merci pour ton franc-parler et pour avoir apporté

un air Suisse Savoyard dans ce bureau d'ascendance Toulousaine, que les courts séjours de Florian (des près au 232) n'auront pas suffi pas à rééquilibrer. Florian, merci pour avoir essayé, et pour défendre les valeurs Linuxiennes de l'Open-Source, que je partage ardemment.

Plus largement, j'ai aussi beaucoup apprécié l'environnement stimulant et accueillant du DAp et du CEA-Saclay, et je veux remercier pour cela Anne Décourchelle, Philippe Ferrando et Pascale Delbourgo, Emeric Le Floc'h pour avoir été un parrain attentif, un immense merci aussi à Marie Ricci pour tous ces sauvetages informatiques. Je garderais aussi le souvenir d'un environnement riche et engagé, des petits déjeuners du mardi, aux séminaires climats, et aux PhD/pizzas-meeting que j'ai eu la chance de pouvoir organiser avec les doctorants motivés du DAp, Baptiste, Jérémy, Hamza, puis Mathilde E. et Quentin. Merci enfin aux autres doctorants, post-doctorants et stagiaires du DAp, anciens et nouveaux, qui se reconnaîtront, Bilal, Antigone, et Nicolas ; Bruno et Anne-Cécile, Alexis, Antoine et Raphaël du LMPA ; Roxane, Victor et Delphine, Maxime, Rui et Suzanna, Aurélien et Virgile, Paul et Mathilde T., Achène et Hachem, tous du LDE3 ; et j'en oublie. Je souhaite également remercier, pour terminer ce paragraphe, les collaborateurs extérieurs, Florian Gallet et Louis Amard, pour m'avoir gracieusement fourni les grilles Starevol, Victor See et Pierre Auclair-Desrotour avec qui j'ai pu discuter avec plaisir lors des conférences.

J'adresse aussi mes remerciements chaleureux au groupe PS2E pour m'avoir accueillie lors de mes séjours à l'IRAP et pour m'avoir invitée aux workshops du groupe, merci Pascal Petit, dans des lieux toujours plus impressionnants ! Merci aussi aux doctorants (et anciens) de ce groupe, notamment Louise, Baptiste, Gaylord, et Aurore pour les bons moments passés.

Un grand merci également à toutes les personnes impliquées dans l'enseignement à l'Observatoire de Paris et Meudon qui m'ont accompagnées dans le monitorat. Pour ne citer qu'eux, je pense en particulier à Caroline Barban et Jean-Baptiste pour m'avoir guidée dans le parrainage de classes ; à Sophie Masson et Cédric Leyrat responsables du diplôme Lumière sur l'Univers (DULU) qui ont répondu avec gentillesse à mes questions récurrentes, et grâce à qui j'ai eu la chance d'encadrer des personnes très motivées ; enfin merci beaucoup à Nicolas Lesté-Lasserre et Yann Clénet pour m'avoir aidée à avoir accès aux coupoles et aux salles de l'Observatoire, ce qui n'a pas été si simple ne faisant pas ma thèse à l'Observatoire.

Pour clore ces remerciements, "last but not least", je pense bien évidemment à ma famille, pour qui tout ce que je fais sera toujours formidable ; dans leur havre de paix et sous un ciel toujours impeccable, je viens me ressourcer. Et par dessus tout, enfin, je pense à mon quantum, qui a partagé avec moi les peines mais surtout les joies de nos 2 thèses intriquées.

Résumé	iii
Abstract	iii
Remerciements	v
Sommaire	vii
Liste des Figures	xi
Liste des Tableaux	xix
I Interactions de marée en astrophysique	1
1 Interactions de marée dans les systèmes serrés planétaires	3
1.1 Des marées dans les astres	3
1.2 Interaction de marée dans notre système solaire	7
1.2.1 Dans le système Terre-Lune	7
1.2.1.1 Les marées océaniques	7
1.2.1.2 Architecture du système Terre-Lune	8
1.2.2 Dans les systèmes jovien et saturnien	9
1.3 Jusque dans les systèmes exoplanétaires en interaction	10
1.3.1 Statistique et diversité des systèmes découverts à ce jour	12
1.3.2 Les Jupiter chauds, des cibles privilégiées pour étudier les interactions de marée	14
1.3.2.1 L'impact des marées sur les orbites : période orbitale et excentricité	14
1.3.2.2 Coplanarité dans les systèmes de Jupiter chauds	15
1.4 Modélisation des marées dans les étoiles et les planètes géantes	17
1.4.1 Modèles de dissipation avec marée d'équilibre	17
1.4.2 Ajout de la marée dynamique dans ces modèles	18
1.4.3 Importance de la structure interne et de la dynamique du corps perturbé	20
1.4.3.1 dans les zones convectives des étoiles	20
1.4.3.2 et dans les planètes	21
1.4.4 Processus manquants	23
1.4.4.1 Investigation récente des effets de la rotation différentielle et du magnétisme	23
1.4.4.2 (Autres) questions ouvertes	26
1.5 Organisation du manuscrit	27
2 Traitement analytique et numérique de l'interaction de marée	29
2.1 Potentiel de marée dans le cas idéal d'un système à deux corps	29
2.1.1 Formalisme mathématique	29
2.1.2 Variation des paramètres orbitaux et rotationnels	31
2.2 Flots de marée	34
2.2.1 La marée d'équilibre : un ajustement quasi-hydrostatique	34

2.2.2	La marée dynamique : excitation d'ondes internes	35
2.3	Propriétés des ondes inertielles excitées par la marée	37
2.3.1	Analyse des équations de base	37
2.3.2	Propagation le long des caractéristiques	39
2.3.3	Dissipation des modes résonnants	41
2.3.4	Processus dissipatifs en zone convective	43
2.3.4.1	Modélisation d'une viscosité turbulente	43
2.3.4.2	Vers un traitement non-linéaire des marées en zone convective	45
II	Influence du magnétisme stellaire sur l'interaction de marée	47
3	Magnétisme dans les étoiles de faible masse	49
3.1	Préliminaire : évolution de la rotation dans les étoiles de faible masse	49
3.1.1	STAREVOL : un code 1D d'évolution stellaire prenant en compte la rotation	49
3.1.2	Histoire rotationnelle des étoiles	50
3.2	Origine et diversité du magnétisme stellaire	51
3.2.1	Détection des champs magnétiques de surface	52
3.2.2	Des simulations 3D pour contraindre le magnétisme interne	55
3.3	Prescriptions d'un champ magnétique à grande échelle	56
3.3.1	Lois d'échelle magnéto-hydrodynamiques	56
3.3.2	Extrapolation d'un champ dipolaire grande échelle près de la surface	60
3.3.3	Estimation des champs magnétiques à la base de la zone convective et à la surface	60
4	Excitation et dissipation des ondes de marée magnéto-inertielles	65
4.1	Propriétés des ondes magnéto-inertielles forcées par la marée	65
4.1.1	Propagation et dissipation	65
4.2	Impact du magnétisme stellaire sur le forçage de marée	68
4.2.1	Critère analytique	68
4.2.2	Evolution du nombre de Lehnert dans les étoiles	70
4.2.3	Estimation des forçages effectifs de marée pour des Jupiter chauds observés	72
4.3	Influence du magnétisme sur les mécanismes de dissipation des ondes de marée	74
4.4	Discussion sur l'échelle du champ magnétique	75
4.5	Autre application : le système Jovien	77
4.6	Conclusion	78
	Article Astoul et al. (2019, A&A, 631, A111)	79
III	Impact de la rotation différentielle sur l'interaction de marée	93
5	Profils de rotation dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses	95
5.1	Dans les étoiles de faible masse	95
5.1.1	État de l'art	95
5.1.2	Rotation différentielle et simulations numériques	97
5.1.2.1	Des lois d'échelle pour contraindre le profil de rotation différentielle	97
5.1.2.2	Évolution paramétrique de la rotation différentielle à l'aide de STAREVOL	99
5.2	Profil de rotation dans Jupiter et Saturne	100
6	Comprendre l'interaction de marée en présence de rotation différentielle	103
6.1	Rotation différentielle et couches critiques	104
6.1.1	État de l'art en géophysique et en astrophysique	104
6.1.2	Dans l'étude des interactions de marées	105
6.2	Traitement analytique des ondes inertielles en présence de couches critiques	108
6.2.1	Le modèle de la boîte cisailée et hypothèses principales	108

6.2.2	Équilibre du flot moyen	109
6.2.3	Système d'équations	110
6.2.3.1	Équations hydrodynamiques linéarisées	110
6.2.3.2	Solutions modales et adimensionalisation	111
6.2.3.3	Équation de Poincaré en présence de friction et avec une stratification latitudinale	111
6.2.3.4	Relations de polarisation	112
6.2.4	Propriétés de propagation	113
6.2.4.1	Approximation des courtes longueurs d'onde	113
6.2.4.2	Relation de dispersion, vitesse de phase et de groupe	113
6.2.4.3	Domaine de propagation	115
6.2.5	Quantifier les transferts d'énergie grâce au flux d'action d'onde	117
6.2.6	Étude analytique du comportement des ondes aux niveaux critiques	119
6.2.6.1	Avec un profil de cisaillement latitudinal	119
6.2.6.2	Avec un profil de rotation cylindrique	122
6.3	Discussion à propos des instabilités	125
6.4	Approche numérique des ondes inertielles en présence de couches critiques	126
6.4.1	Un modèle numérique à trois zones	126
6.4.2	Étude numérique avec rotation différentielle conique	127
6.4.3	Etude de la rotation différentielle cylindrique	131
6.5	Application aux étoiles de type solaire et aux planètes géantes gazeuses	134
6.5.1	Analogie entre modèles local et global	134
6.5.2	Dans les étoiles de type solaire	135
6.5.3	Modèle équatorial pour les planètes géantes et les étoiles en rotation rapide	135
6.6	Conclusion	137
	Article Astoul et al. (submitted)	138
7	Conclusion et perspectives	165
7.1	Synthèse des résultats	165
7.1.1	Impact du magnétisme sur les flots de marée	166
7.1.2	Impact de la rotation différentielle	167
7.2	Perspectives	168
7.2.1	Dissipation de marée dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse	168
7.2.2	Dissipation de marée dans les planètes géantes	169
A	Autres contributions	171
A.1	Excitation stochastique des ondes gravito-inertielles	171
A.2	Formation et évolution des champs magnétiques fossiles	171
B	Équation de Poincaré	173
B.1	Obtention de l'équation de Poincaré dans un milieu stratifié, cisailé, visqueux	173
	Bibliographie	177

1.1	[Tiré de Remus et al. (2012a)]. Gauche : Représentation schématique de l'interaction de marée dans un système à deux corps. Le compagnon B exerce une force gravitationnelle en chaque point du corps primaire A, ce qui a pour effet de créer un renflement, déphasé d'un angle 2δ par rapport à l'axe qui relie les centres de masse des deux corps lorsque l'on prend en compte les mécanismes de friction visqueuse ou de dissipation thermique. Droite : Champ de vitesse de la marée d'équilibre à la surface du corps perturbé A lorsque ce dernier est complètement convectif. Les vecteurs rouge et orange sont respectivement l'axe de rotation de A et l'axe qui relie les deux centres de masse. Le gradient de couleur correspond à l'amplitude normalisée du potentiel de marée, allant du rouge (amplitude forte) vers le bleu (amplitude plus faible).	4
1.3	[Adapté de Ogilvie (2014)]. Évolution (par interaction de marée) de la fréquence de rotation Ω_A d'une étoile en fonction de l'évolution de la fréquence orbitale Ω_o de sa planète, normalisées à la fréquence critique Ω_c qui correspond au moment cinétique critique total L_c , et dans le cas où l'orbite de la planète est circulaire et coplanaire. Les contours à moment cinétique total fixé L sont tracés en traits noirs fléchés. La ligne pointillée symbolise la synchronisation de la rotation de l'étoile avec la révolution de sa planète. Les points noirs représentent les équilibres de marée stables. Les systèmes tels que $L < L_c$ évoluent vers la destruction de la planète. On précise que le moment cinétique de spin de la planète est négligé.	5
1.2	Illustration d'un système (de haut en bas) circulaire, coplanaire, et synchrone. $\Omega_{A,B}$ et n sont les fréquences de rotation des corps A et B et de révolution du corps B, et $\lambda_{A,B}$ sont les angles entre l'axe de rotation de chacun des deux corps et la perpendiculaire à l'orbite de B (angles spin-orbite).	5
1.4	[Adapté de Mathis & Remus (2013)]. Principe, effets séculaires et rétro-actions de l'interaction de marée. Le potentiel de marée induit des flots de marée dans l'ensemble du corps perturbé, transformant l'énergie potentielle gravitationnelle en énergie cinétique. Grâce aux processus de friction (moléculaire, turbulente, diffusion thermique ou Ohmique) propres à l'astre, la dissipation d'énergie cinétique va induire un couple de marée de moyenne non nulle sur la période orbitale du compagnon, ce qui va modifier l'architecture du système. La quantité d'énergie dissipée va dépendre de la structure et de la dynamique internes, et des processus dissipatifs à l'œuvre dans l'étoile, qui vont eux même être perturbés par le couple de marée. Les paramètres structurels, rotationnels et orbitaux du système étant ainsi modifiés, le potentiel va évoluer à son tour, jusqu'à ce que la moyenne du couple de marée soit nulle dans le cas d'une configuration d'équilibre.	6
1.5	Cartographie de l'élévation (à gauche, OSU TPXO Tide Models) et de la dissipation en Mégawatt par mètre (à droite, tiré de Egbert & Ray, 2013) des océans dues à l'interaction de marée avec la Lune (et le Soleil pour l'élévation). L'amplitude de l'élévation du niveau des océans a été mesurée par l'altimètre spatial TOPEX/POSEIDON (NASA, CNES). Les données recueillies ont été traitées à l'aide du formalisme d'inversion globale de Egbert & Ray (2001) afin de déterminer la dissipation de la composante principale de la marée lunaire M_2 semi-diurne.	7
1.6	[Tiré de Dickey et al. (1994).] Angles caractéristiques du système Terre-Lune et orientation de la Lune par rapport à l'état de Cassini.	8
1.7	[Crédit NASA/JPL/Caltech]. Montage des principaux satellites de Saturne du plus proche au plus éloigné (en partant de la gauche), d'après les images des sondes Voyager. L'échelle des tailles est respectée. Seuls les quatre premiers satellites ont été sélectionnés dans la table 1.1.	9

1.8	Représentation de la plupart des exoplanètes détectées à ce jour avec en abscisse la période orbitale (en jour), en ordonnée la masse de la planète (en masse jovienne) et en couleur l'excentricité lorsqu'elle est mesurée (dans le cas contraire les planètes sont représentées par des points noirs). Ce graphique a été réalisé à l'aide de la base de donnée www.exoplanets.org rassemblant les paramètres orbitaux et rotationnels des systèmes exoplanétaires détectés (Han et al., 2014). À titre de comparaison, Mercure, la Terre, Neptune et Jupiter sont aussi représentés.	12
1.9	Schéma détaillant la structure interne des étoiles et des planètes géantes tel Jupiter. <i>Gauche</i> : [Crédit @sun.org]. Schéma catégorisant les étoiles selon leur masse. <i>Droite</i> : [Crédit Q. André (PhD, 2019)]. Schéma de l'intérieur de Jupiter tel que modélisé par Debras & Chabrier (2019) grâce aux contraintes observationnelles les plus récentes issues de la sonde Juno de la NASA (Guillot et al., 2018; Kaspí et al., 2018).	14
1.10	[Inspiré de Albrecht et al. (2012)]. Valeur absolue de l'obliquité spin-orbite projetée sur la ligne de visée en fonction de la température effective T_{eff} de l'étoile (en rouge $T_{\text{eff}} > 6500$ K et en bleu sinon). Données issues du catalogue Tepcat ¹ au 05/04/2020 (voir Southworth, 2011, pour plus de détails).	16
1.11	[Adapté à partir de la figure 2 de McQuillan et al. (2013)]. Période de rotation de l'étoile hôte (lorsqu'elle est mesurée) en fonction de la période orbitale de sa planète. La couleur donne la température effective de l'étoile. La taille des points est proportionnelle au rayon au carré de la planète. La droite en noir indique le rayon de corotation, la droite en rouge vérifie $P_{\text{orb}} = 1/2P_{\star}$ qui correspond à la limite de propagation des ondes inertielles (voir chapitre 2), et la droite violette discontinue donne la meilleure interpolation qui délimite la présence ou l'absence d'exoplanètes.	18
1.12	[PhD Q. André (PhD, 2019)]. Simulation numérique 3D d'une étoile massive avec propagation d'ondes gravito-inertielles dans l'enveloppe radiative et convection turbulente dans le cœur.	19
1.13	[Tiré de Bolmont & Mathis (2016)]. Évolution du demi-grand axe de la planète (en unité astronomique). Les modèles d'évolution colorés en traits pleins sont calculés avec la théorie de la marée dynamique de Bolmont & Mathis (2016), et ceux en pointillés fins utilisent la calibration d'Hansen (2012) avec la dissipation de la marée d'équilibre. Le rayon de corotation est représenté en pointillés noir gras, et le rayon tel que $P_{\text{orb}} = P_{\star}/2$ est en pointillé noir fin.	20
1.14	[Tiré de Baruteau & Rieutord (2013)]. Simulation numérique montrant la dissipation de l'énergie cinétique d'une onde inertielle se propageant dans l'enveloppe convective d'une étoile de type solaire dont on a ici une coupe méridionale.	20
1.15	[Tiré de Gallet et al. (2017)]. Dissipation de marée moyennée en fréquence en fonction de l'âge d'étoiles de masse différente avec prise en compte de leur évolution rotationnelle.	21
1.16	[Graphes tirés de Lainey et al. (2017)]. Rapport du nombre de Love quadripolaire k_2 sur le facteur de qualité Q , donc de la dissipation (voir chapitre 2), en fonction de la fréquence de marée. <i>Gauche</i> : Dissipation pour six valeurs différentes de la taille du cœur de Saturne. <i>Droite</i> : Dissipation dans Saturne pour les fréquences de marée de ses principaux satellites. Les valeurs en rouge et verte correspondent respectivement aux dissipations déduites des observations astrométriques de l'IMCCE et du JPL. Les lignes horizontales oranges correspondent aux dissipation prédites par le modèle bi-couche avec un cœur visco-élastique stratifié en densité.	22
1.17	[Tiré de García et al. (2007)] Fréquence de rotation à l'intérieur du Soleil en fonction du rayon normalisé au rayon de surface et de la latitude.	24
1.18	[Tiré de Gregory et al. (2010).] Reconstruction de la topologie du champ de surface de l'étoile de faible masse $M = 0.7 M_{\odot}$ BP Tau, en pré-séquence principale.	25
1.19	Masse de planètes (plutôt massives) versus leur rayon et leur densité en couleur. Pour comparaison, la densité moyenne de Jupiter est d'environ $1,3 \text{ g/cm}^3$	26

- 2.1 [Adapté de Ogilvie (2014)]. Géométrie de l'interaction des marées dans un système à deux corps de masses $M_1 \gg M_2$, où le corps 1 déformé présente un bourrelet équatorial (ellipse en trait plein noir, par rapport à un corps sans déformation en cercle pointillé). On se place dans le référentiel centré sur le corps 1 et on représente les coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On note par ailleurs R_1 le rayon du corps 1 et d la distance entre les deux corps. Les fréquences Ω_s et Ω_o sont les vecteurs de rotation du corps 1 et de révolution du corps 2, respectivement. 31
- 2.2 [Adapté de Ogilvie (2014)]. Amplitude des composantes quadripolaires du potentiel de marée, i.e. pour $l = 2$, à l'ordre zéro et au premier ordre en excentricité e et en obliquité λ . 32
- 2.3 Gauche : [Remus et al. (2012a)]. Modélisation semi-analytique 3D du champ de vitesse total (poloïdal et toroïdal) de la marée d'équilibre adiabatique (flèches blanches). Les flèches rouge et orange indiquent respectivement la direction de l'axe de rotation du primaire et la ligne des centres entre les deux corps. Droite : [Maciejewski et al. (2020)]. Bas : Vitesse radiale attribuée aux déplacements de la marée d'équilibre générés par la planète WASP-12 b dans son étoile hôte au cours d'une période de rotation de WASP-12. Dans cette vitesse, la contribution en vitesse radiale du mouvement orbital de la planète WASP-12 b a été filtrée (Haut). 35
- 2.4 [Aerts et al. (2019)]. Types d'onde selon le milieu de propagation et les forces de rappel en présence, en fonction des fréquences caractéristiques associées ; S_l est la fréquence de Lamb pour une onde acoustique ; N est la fréquence de Brunt-Väisälä pour une onde de gravité ; 2Ω est la fréquence inertielle pour une onde inertielle ; V_A et k sont respectivement la vitesse d'Alfvén et la norme du vecteur d'onde. L'ordre des fréquences ici présentées sur la flèche est valable dans les intérieurs stellaires le long de leur séquence principale. 36
- 2.5 Schémas de gauche : [Adapté de Messio et al. (2008)]. Schéma du comportement d'une onde inertielle émise à partir d'un cylindre de taille l oscillant à la fréquence σ avec $\sigma \sim 2\Omega$ (schéma de gauche) et $\sigma \ll 2\Omega$ (schéma de droite), d'amplitude A , dans un milieu sans conditions aux limites. Figure de droite : [Tiré de Hoff et al. (2016)]. Dispositif expérimental permettant la visualisation d'ondes inertielles (possédant des phases dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) dans une coquille sphérique en rotation à la fréquence Ω qui sont excitées grâce aux oscillations de la sphère interne, avec les pulsations, du haut vers le bas, $\Omega/5$, $2\Omega/5$, $3\Omega/5$, $4\Omega/5$. Le nombre d'Ekman est fixé à $\sim 4 \times 10^{-5}$ 38
- 2.6 [Tiré de Hoff et al. (2016)]. Comparaison entre la méthode de tracé de rayons des caractéristiques (gauche) et la visualisation expérimentale des couches de cisaillement pour $Ek \sim 4 \times 10^{-5}$ (droite). La fréquence d'excitation est $\sim 1.6\Omega$. Les lignes continues matérialisent des ondes excitées à la latitude critique de l'hémisphère nord et les lignes pointillées à la latitude critique de l'hémisphère sud. 41
- 2.7 [Adapté de Ogilvie (2009)]. Dissipation de marée pour un potentiel de marée de composante Y_2^2 , dans corps homogène avec une enveloppe fluide incompressible et un noyau solide parfaitement rigide de rapport d'aspect en rayon $\alpha = 0.5$ (panneau du haut) et $\alpha = 0.9$ (panneau du bas). Le fluide subit une force de frottement $-\sigma_f v$ avec un coefficient d'amortissement σ_f tel que $\gamma/\Omega = 10^{-2}$ (ligne rouge), $10^{-2.5}$ (ligne verte) ou 10^{-3} (ligne bleue). 42
- 2.8 [Tiré de Favier et al. (2014)]. Simulation numérique de la vitesse moyenne azimutale dans le plan méridien d'un quart de coquille sphérique. La fréquence d'excitation est $\sigma/\Omega = \sqrt{2}$ et E est le nombre d'Ekman. Le trait noir indique l'emplacement de la latitude critique. La ligne blanche pointillée est tangente à la sphère interne et correspond à l'attracteur de caractéristique et à la direction de propagation des ondes inertielles émises à la latitude critique. 43
- 2.9 [Tiré de Duguid et al. (2020)]. Gauche : Simulation de flots convectifs faiblement turbulents dans une boîte locale. Le nombre de Rayleigh, normalisé au Rayleigh critique (seuil entre convection laminaire et turbulente), est fixé à 100 (ce qui reste néanmoins très loin des régimes convectifs attendus dans les étoiles de type solaire). Droite : Viscosité turbulente associée aux simulations 3D en fonction de la fréquence de marée ω normalisée par la fréquence de convection ω_c 44

- 3.1 Taux de rotation normalisé à celui du Soleil $\Omega_{\odot} = 430$ nHz (ordonnée de gauche) et période de rotation en jours (ordonnée de droite), en fonction de l'âge de l'étoile en années. *Gauche* : Pour une étoile de $1 M_{\odot}$ avec différentes rotations initiales : rapide (1.6 jours), moyenne (4.5 jours), et lente (9 jours). *Droite* : Pour des étoiles de type spectral M à F avec une rotation initiale moyenne. 50
- 3.2 [Gregory et al. (2010)]. Reconstruction de la magnétosphère de l'étoile F V2129 Oph de $1.35 M_{\odot}$. Les lignes de champ ouvertes sont en bleu, celles fermées en blanc. 52
- 3.3 [Boro Saikia et al. (2016)]. Projection polaire jusqu'à la latitude -30° de la géométrie magnétique de l'étoile 61 Cygni A de $0.66 M_{\odot}$ en séquence principale (age = 6 milliards d'années), au travers de ses trois composantes (radiale, azimuthale, et méridionale), reconstruite à deux dates (été 2007 et été 2015). 53
- 3.4 *Gauche* : [Vidotto et al. (2014)]. Intensité moyenne du champ magnétique à grande échelle $|\langle B_V \rangle|$ en fonction du nombre de Rossby convectif Ro , pour des étoiles qui ne possèdent plus de disques d'accrétion (fin de PMS, MS). Les symboles ouverts sont des naines M ; \square : $M \geq 0.4 M_{\odot}$ (début de MS), \circ : $0.2 < M_*/M_{\odot} < 0.4$ (milieu de MS) ; \bullet : $M \leq 0.2 M_{\odot}$ (fin de MS). *Droite* : [Folsom et al. (2018)]. "Confusogramme" : nombre de Rossby convectif en fonction de l'âge d'étoiles jeunes (en phase T Tauri) jusqu'en début de séquence principale. La taille du symbole correspond à l'intensité du champ magnétique, la couleur du symbole encode le caractère plutôt poloïdal ou toroïdal du champ magnétique, et la forme représente le degré d'axisymétrie de la composante poloïdale du champ magnétique. 54
- 3.5 *Gauche* : [Strugarek et al. (2017a)]. Simulation 3D non-linéaire et globale d'un cycle magnétique régulier pour une étoile de type solaire. Le tube de flux rouge représente les lignes de champ internes de grande échelle. *Droite* (a,b,c) : [Brown et al. (2010)]. Tracés des lignes de champ des couronnes magnétiques, les couleurs indiquant l'amplitude et la polarité du champ toroïdal (rouge, positif ; bleu, négatif). 55
- 3.6 *Gauche* : [Christensen et al. (2009)]. Densité d'énergie magnétique (échelle de gauche), champ magnétique de surface (échelle de droite) par rapport à une fonction de la densité et du flux bolométrique (i.e. le flux qui prend en compte la totalité du spectre électromagnétique). Les étoiles T-Tauri accrétantes (Johns-Krull, 2007) sont en bleu, les naines M âgées en rose (Morin et al., 2008) et rouge (Reiners & Basri, 2007). Les étoiles de 0.6 à $1.1 M_{\odot}$ (Saar, 1996) sont en vert pour les périodes de rotation $P_{\text{rot}} > 10$ jours, jaune pour $4 \text{ jours} < P_{\text{rot}} < 10$ jours et orange pour $P_{\text{rot}} < 4$ jours. Les ellipses brunes et grises indiquent les emplacements prévus d'une naine brune avec une température de surface de 1500 K et une planète géante gazeuse de sept masses de Jupiter, respectivement. *Droite* : [Augustson et al. (2019)]. Rapport énergétique ME/KE/Pm en fonction de l'inverse du nombre de Rossby Ro^{-1} . On a notamment $c_2 = -1.0 \pm 0.4$. Les données sont issues de simulations numériques de dynamo, pour le cœur convectif des étoiles massives en bleu (Augustson et al., 2016), pour des étoiles de faible masse en vert (Varela et al., 2016), pour des étoiles de type solaire en indigo (Käpylä et al., 2017) et en orange (Strugarek et al., 2018). 59
- 3.7 Adapté de [Astoul et al. (2019)]. Champ magnétique d'une étoile de $0.9 M_{\odot}$ en fonction de son âge, pour trois périodes de rotation initiale et les trois lois d'échelle dynamo décrites en section 3.3.1, à la base de la zone convective (CZ) dans le *panneau du haut* et près de la surface dans le *panneau du bas* en utilisant l'équation (3.12). Les symboles \star représentent les champs magnétiques dipolaires moyens observés à l'aide de la technique ZDI pour des étoiles de $0.9 M_{\odot}$, et sont issues de l'article de See et al. (2019a). 61
- 3.8 Rapport de l'amplitude du champ moyen dipolaire $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}$ (See et al., 2019b) sur le champ dipolaire estimé à la surface $B_{\text{dip}}^{\text{sim}}$ à l'aide du régime magnétostrophique et d'une rotation initiale moyenne, en fonction de la masse de l'étoile. L'âge des étoiles est indiqué en couleur (Vidotto et al., 2014). Les observations multiples de champ magnétique pour une étoile sont reliées par une ligne. 62

- 4.1 [Tiré de Lin & Ogilvie (2018)]. Simulations magnéto-hydrodynamiques 2D réalisées à l'aide d'un code spectral, qui calcule les modes propres d'oscillation magnéto-inertiels dans une coquille sphérique enserrant un fluide convectif incompressible, magnétisé, et en rotation. Dans chaque coupe méridienne est illustrée l'amplitude des perturbations en vitesse $|u|$ et en champ magnétique $|b|$ correspondant au mode propre d'oscillation de fréquence inertielle $\omega = 1.1$ (normalisée à la fréquence de rotation du corps). Un champ magnétique moyen dipolaire est utilisé dans les panneaux du haut et de droite, et un champ moyen axial (parallèle à l'axe de rotation) dans le panneau de gauche, chacun à différent nombre de Lehnert Le . Les autres paramètres sont le nombre d'Ekman visqueux $Ek = 10^{-9}$, le nombre d'Ekman magnétique $Em = 10^{-5}$, et le rapport d'aspect en rayon $\alpha = 0.5$ 67
- 4.2 [Tiré de Lin & Ogilvie (2018)]. Taux de dissipation total (Ohmique + visqueux) en fonction de la fréquence du forçage de marée dans le référentiel du fluide (similairement à la figure ??). Le champ magnétique est un champ uniforme axial. Le rapport d'aspect est fixé à $\alpha = 0.5$, le nombre d'Ekman visqueux à $Ek = 10^{-8}$ et celui magnétique à $Em = 10^{-4}$. La courbe en bleu est tracée avec $Le = 0.1$ et celle en rouge avec $Le = 0.42$. En noir, seule la dissipation visqueuse est tracée ($Le = 0$). 68
- 4.3 Nombre de Lehnert au carré à la base de la zone convective (*panneau gauche*) et près de la surface (*panneau droit*) en fonction de l'âge d'une étoile de $0.9 M_{\odot}$, pour les trois lois d'échelle détaillées au chapitre précédent (équipartition, "buoyancy dynamo" ou MAC, et magnétostrophie) permettant d'estimer le champ magnétique dynamo-induit à grande échelle, et pour différentes périodes initiales de rotation, rapide ($P = 1.6$ jours) et lente ($P = 9$ jours). 71
- 4.4 Évolution de Le^2 à la base (*traits pleins*) et au sommet (*traits pointillés hachurés*) de la zone convective pour différentes masses et une rotation initiale lente (*gauche*) et rapide (*droite*). L'équilibre magnétostrophique a été utilisé pour calculer Le^2 dans les deux graphes. 72
- 4.5 Évolution du rayon à la base de la zone convective (*gauche*) et de la longueur convective (*droite*), normalisés par le rayon de l'étoile pour différentes masses d'étoile. 72
- 4.6 Rapport des forçages marémoteurs magnétique et hydrodynamique en fonction de la masse de l'étoile hôte dans des systèmes observés possédant un Jupiter chaud d'orbite quasi circulaire et coplanaire, à la base et au sommet de la zone convective, en utilisant un régime dynamo magnétostrophique et une période de rotation initiale lente ($P = 9$ jours). 73
- 4.7 Nombre de Lehnert à la base (*gauche*) et au sommet (*droite*) de la zone convective en fonction de l'âge d'étoiles de masse différente, avec une rotation initiale lente et en supposant le régime dynamo magnétostrophique pour l'établissement du champ magnétique à grande échelle. Les seuils qui délimitent les deux régimes de dissipation visqueuse et Ohmique sont estimés avec différents nombres d'Ekman magnétiques, moléculaire Em_{mol} et turbulent Em_{tur} 75
- 4.8 *Gauche* : Fréquence de retournement convectif $\omega_c = 2\pi/\tau_c$ calculée pour une étoile de $1 M_{\odot}$ à la moitié de sa séquence principale (âge ~ 5.4 milliard d'années). Le point d'intersection entre la fréquence de marée σ_t pour chacun des 5 systèmes de type Jupiter chauds (possédant une étoile hôte voisine de $1 M_{\odot}$) et ω_c est indiqué par une croix. *Droite* : Largeur de la couche de cisaillement l_s (voir la figure 6 de l'article associé au chapitre) calculée avec une diffusivité magnétique turbulente (*traits hachurés*) ou moléculaire (*traits pointillés*), et longueur convective l_c (*traits pleins*), dans l'enveloppe convective d'une étoile de $1 M_{\odot}$ à différents stades évolutifs (moitié de la PMS, ZAMS, moitié de la MS, TAMS). Les croix indiquent les intersections entre l_s (turbulent et moléculaire) et l_c pour chaque période. 76
- 4.9 Champ magnétique d'étoiles de $1 M_{\odot}$ (*gauche*) et de $0.4 M_{\odot}$ (*droite*) dans leur enveloppe convective, à différents stades d'évolution et pour deux lois d'échelle dynamo avec une rotation initiale moyenne ($P = 4.5$ jours). Dans le calcul du champ magnétique, les paramètres convectifs (vitesse et longueur) ainsi que la densité, dépendent de la position r dans l'enveloppe convective. 76
- 5.1 [Adapté de Barnes et al. (2017)]. Magnitude du cisaillement (en radians par jours) définie entre l'équateur et le pôle en fonction de la température effective d'étoiles de faible masse. Pour comparaison, la vignette jaune donne la magnitude de cisaillement du Soleil. 97

5.2	<p><i>Gauche</i> : [Brun et al. (2015)]. Profil de rotation $\Omega(r, \Theta)$ pour différentes masses et nombre de Rossby fluide d'une étoile de faible masse. <i>De gauche à droite</i> : la masse et la rotation moyenne de l'étoile valent (i) $0.5 M_{\odot}$ et $5 \Omega_{\odot}$, (ii) $0.9 M_{\odot}$ et $3 \Omega_{\odot}$, (iii) $0.9 M_{\odot}$ et Ω_{\odot}, (iv) $1.1 M_{\odot}$ et Ω_{\odot}. Les couleurs rouges et blanches symbolisent une rotation rapide, tandis que les couleurs noires et bleues correspondent à une rotation des couches concernées plus lente. <i>Droite</i> : [Brun et al. (2017)]. Contraste de cisaillement entre l'équateur et la latitude 60°, normalisé par la rotation de l'étoile, en fonction du nombre de Rossby fluide de l'étoile. Le code des symboles est : \circ : $5 \Omega_{\odot}$, \square : $3 \Omega_{\odot}$, \diamond : Ω_{\odot}, \triangle : modèle 'S' (pour "slow rotation" : $\Omega_{\odot}/2$ pour $0.9 M_{\odot}$, $\Omega_{\odot}/4$ pour $0.7 M_{\odot}$ et $\Omega_{\odot}/8$ pour $0.5 M_{\odot}$).</p>	98
5.3	<p>[Astoul et al. in prep.]. Contraste de cisaillement entre l'équateur et le pôle, normalisé par la rotation au pôle, en fonction de l'âge d'étoiles de type spectral K et G. Le critère (5.4) permet d'identifier des étoiles présentant un profil de rotation de type cylindrique (<i>traits pointillés</i>), solaire (<i>traits pleins</i>), et anti-solaire (<i>traits atténués</i>). Les "trous" dans les courbes reflètent simplement le faible échantillonnage dans les grilles fournies par STAREVOL à certains âges pour lesquels le découpage en terme de profil de rotation empêche l'extrapolation.</p>	99
5.4	<p>Modèles de la composition interne de Jupiter et Saturne d'après les dernières données fournies par Juno et Cassini. <i>Gauche</i> : [Tiré de Miltzer et al. (2019)]. Modèle à 5 zones pour Jupiter. <i>Droite</i> : [Tiré de la thèse de Q. André (2019)]. Modèle à 4 zones pour Saturne. La différence principale entre les deux modèles est le cœur dilué de Jupiter représenté par des bandes grises concentriques.</p>	101
5.5	<p><i>Gauche</i> : [Miltzer et al. (2019)]. Comparaison des moments de gravité mesurés par Juno et Cassini pour Jupiter et Saturne, respectivement, avec les prédictions des modèles supposant une rotation uniforme dans l'intérieur des deux planètes. <i>Milieu</i> : [Galanti et al. (2019)]. Vents zonaux observés (en traits noirs) à la surface de Saturne au niveau des nuages, auquel s'ajoute un profil de vent optimisé (en traits rouges), ainsi que son incertitude (ombres rouges). <i>Droite</i> : [Galanti et al. (2019)]. Profil de rotation estimé dans la partie haute de l'enveloppe convective externe de Saturne, et qui découle de la solution en trait rouge dans la figure du milieu, ainsi que du profil radial de décroissance des vents zonaux (non présenté ici).</p>	102
6.1	<p>Simulation hydrodynamique illustrant le dépôt d'énergie cinétique E_k d'ondes inertielles dans une enveloppe convective (coupe méridienne) en présence d'une résonance de corotation. Les quantités affichées sont la fréquence de l'onde dans le référentiel inertiel ω, le taux d'amortissement τ (négatif pour un mode stable), le nombre de polynômes de Chebyshev dans la direction radiale N_r, le nombre d'harmoniques sphériques L, le nombre d'onde azimuthal M de l'onde, le nombre d'Ekman E, le rapport d'aspect de la coquille sphérique η, et le contraste de cisaillement ϵ (noté χ dans le chapitre précédent) <i>Gauche</i> : [Baruteau & Rieutord (2013)]. Avec un profil de rotation cylindrique. <i>Droite</i> : [Guenel et al. (2016a)]. Avec un profil de rotation conique, où l'on notera que τ est positif.</p>	106
6.2	<p>[Guenel et al. (2016b)]. Spectre du taux de dissipation, en fonction de la fréquence de marée ω_p dans un référentiel inertiel, intégré dans le volume d'une coquille sphérique de rapport d'aspect et de cisaillement de type solaire $\eta = 0.71$ et $\epsilon = 0.3$ respectivement, pour différentes valeurs du nombre d'Ekman E.</p>	107
6.3	<p>Représentation de la boîte cisailée, centrée en un point C, et de son système de coordonnées locales. Cette boîte cisailée modélise une parcelle fluide de l'enveloppe convective d'une étoile de faible masse ou d'une planète géante gazeuse. On s'intéresse aux ondes inertielles en un point M de cette boîte.</p>	108
6.4	<p>Droites de retournement $\Delta(y, \omega, R_o) = 0$ dans l'approximation des courtes longueurs d'onde, qui permettent d'identifier le type de PDE ("Partial Differential Equation") selon la région considérée. À nombre de Rossby R_o fixé (couleur fixée), la PDE est hyperbolique entre ω_- (<i>en traits pleins</i>) et ω_+ (<i>en trait pointillés</i>), et elliptique au delà. La boîte est inclinée d'un angle $\theta = 10^{\circ}$, et le cisaillement constant prend les valeurs $R_o \in \{-0.3, 0.3, 0\}$, où le dernier cas constitue la rotation solide.</p>	116

- 6.5 [Tiré de Guenel et al. (2016a)]. Simulation hydrodynamique illustrant le dépôt d'énergie cinétique E_k , dans une enveloppe convective (coupe méridienne) sans résonance de corotation, d'un mode axisymétrique ($M = 0$) D (*gauche*) et DT (*droite*), en présence de rotation différentielle conique. Les quantités physiques et numériques sont les mêmes que celles décrites en figure 6.1. On notera que le rapport d'aspect η est celui du Soleil, et le contraste de cisaillement conique ϵ est anti-solaire. L'attracteur des caractéristiques pour ces paramètres est tracé en traits solides blanc. La surface de retournement est indiquée en trait pointillé dans le panneau de droite. 117
- 6.6 Taux de transmission T_{θ_0} du flux d'action d'onde en fonction de la valeur absolue du nombre de Rossby $|R_o| = |U'|$ (avec U' normalisé par 2Ω), le rapport des nombres d'onde $\alpha_k = k_z/k_x$, et pour différentes colatitudes de la boîte, de gauche à droite, $\theta_0 = 10^\circ$, $\theta_0 = 45^\circ$, et $\theta_0 = 80^\circ$ 122
- 6.7 Signe de $1/4 - R$ lorsque la boîte est au pôle Nord ou Sud, en fonction du nombre de Rossby R_o et du rapport des nombres d'onde horizontaux α_k , d'après l'équation (6.44). Les traits pleins et hachurés correspondent à l'équation $R = 1/4$ aux pôles Nord et Sud, respectivement. En violet, $R < 1/4$ et en blanc $R > 1/4$ quel que soit le pôle concerné. En rouge foncé $R > 1/4$ au pôle Nord et $R < 1/4$ au pôle Sud et vice versa dans la région orange. 123
- 6.8 Taux de transmission T_F du flux d'action d'onde après le passage de la corotation lorsque $R > 1/4$, en fonction de R_o et $\alpha_k = k_z/k_x$. La région où $R < 1/4$ est en blanc, et le cône rouge foncé correspond à des valeurs de T_F inférieures à 10^{-9} . *Gauche* : La boîte est au pôle Nord. *Droite* : La boîte est au pôle Sud. Les configurations pôles Nord/Sud sont symétriques par rapport à $R_o = 0$ 125
- 6.9 Vitesse latitudinale v (*panneau de gauche*) et flux d'action d'onde \mathcal{A} (*panneau de droite*) en fonction de la latitude locale y , pour $\theta = 45^\circ$, $n_y = 1$, $k_x = k_z = 2\pi$, $\omega = 0.86$ et $\sigma_f = 10^{-8}$. *Gauche* : Les quantités v_{num} , v_I , v_R , et v_T sont respectivement la vitesse "numérique", incidente, réfléchi et transmise. *Droite* : Les quantités \mathcal{A}_{num} , \mathcal{A}_T , \mathcal{A}_{I-R} , \mathcal{A}_F sont les flux d'action d'onde numérique, transmis, incident-réfléchi, et de Frobenius, respectivement. Trois niveaux critiques existent dans la zone de cisaillement (*en gris*) et sont indiqués par des lignes verticales, $\sigma = -\hat{f}$ (*en pointillés et tirets*), $\sigma = 0$ (*en tirets*), et $\sigma = \hat{f}$ (*en pointillés*). 128
- 6.10 Perturbations de la vitesse verticale w (*panneau de gauche*) et de la pression p (*panneau de droite*) dans le plan (y, z) , avec les mêmes paramètres (θ , n_y , k_x , k_z , ω , σ_f) qu'en figure 6.9. 129
- 6.11 Densité d'énergie cinétique \mathcal{E} (*panneau de gauche*) et vitesse de groupe latitudinale v_g (*panneau de droite*) dans le plan (y, z) , avec les mêmes paramètres qu'en figure 6.9. 129
- 6.12 *Gauche* : Description similaire au panneau de gauche de la figure 6.9 mais avec avec un nombre de Rossby et une fréquence inertielle opposés : $R_o = -0.3$, $\omega = -0.86$. Attention, l'onde de vitesse v_I est l'onde réfléchi ici, et inversement pour v_R . Cette propriété est vérifiée grâce au signe de $\omega\mathcal{A}_I (< 0)$ et $\omega\mathcal{A}_R (> 0)$. *Droite* : Vitesse de groupe latitudinale v_g dans le plan (y, z) 130
- 6.13 Cas similaires à la figure 6.9 mais pour $n_y = 2$ (panneaux (A) en haut), et avec en plus $\sigma_f = 10^{-3}$ (panneaux (B) en bas). 131
- 6.14 Rapport des flux d'action d'onde dans la zone III et I en fonction du nombre de Rossby R_o et de la fréquence inertielle ω , pour $R > 1/4$ (*panneau de gauche*) et $R < 1/4$ (*panneau de droite*), lorsque la boîte est au pôle pour un cisaillement constant. Les nombres d'onde sont fixés à $k_x = k_z = 0.1$, et les zones hachurées ne possèdent pas de niveaux critiques. Les croix indiquent le couple de paramètre (R_o, ω) choisi pour une analyse individuelle dans le code numérique à trois couches. 132
- 6.15 Les trois cas de l'article pour $\theta = 0^\circ$, avec un flot moyen linéaire, des nombres d'onde horizontaux fixés à $k_x = k_z = 0.1$. (A) $\omega = 0.02$, $R_o = 0.3$ ($R > 1/4$); (B) $\omega = 0.002$ et $R_o = 0.8$ ($R > 1/4$); (C) $\omega = 0.09$ et $R_o = 1.8$ ($R < 1/4$). *Haut* : Flux d'action d'onde par rapport à y (comme pour le panneau de droite de la figure 6.9). *Bas* : Vitesse latitudinale de propagation de l'énergie dans le plan (y, z) 133

6.16	Les quantités affichées sont les mêmes que dans la figure 6.12, mais ici $\theta = 0^\circ$, $R_o = -0.3$, $\omega = 0.01$ et $k_x = k_z = 0.1$. Il n'y a pas de niveau critique dans la zone II. Ce cas particulier illustre le fait qu'il peut exister des ondes sur-transmises (ou sur-réfléchies) dans notre modèle sans lien avec une amplification causée par la présence d'un niveau critique. . . .	133
6.17	Nombre de Rossby R_o en fonction de l'inclinaison de la boîte θ_0 pour différentes valeurs de contraste de cisaillement normalisé χ	135
6.18	[Mathis et al. in prep.]. Gauche : Fréquence de rotation dans Jupiter et Saturne en fonction de la distance à l'axe. Droite : Nombre de Rossby local en coordonnées cylindriques dans l'intérieur de Jupiter et Saturne, en fonction de la distance à l'axe s . Ces graphes ont été réalisés à l'aide des données de Kaspi et al. (2017), Guillot et al. (2018) et Galanti et al. (2019).	136
7.1	Schéma de la prise en compte simultané du magnétisme et de la rotation différentielle pour étudier la réponse dynamique de marée dans les étoiles de faible masse, à l'aide d'un code de simulation haute-résolution linéaire ou non-linéaire.	169
7.2	Vision de l'intérieur de Jupiter issue des résultats obtenus par la mission spatiale Juno. . .	170

- 1.1 Paramètres keplériens des satellites galiléens et de Saturne les plus remarquables, parmi lesquels : l'excentricité e , la période orbitale du satellite autour de sa planète P_{orb} , la période rotationnelle du satellite P_{rot} et son inclinaison par rapport au plan de Laplace i . Les valeurs sont tirées de Rambaux & Castillo-Rogez (2013) et de la base de données du JPL ([Jet Propulsion Laboratory website](#)). 10
- 6.1 Table comparative de trois conditions permettant l'existence de niveaux critiques, et leurs implications en terme de vitesse de phase et de vitesse de groupe. Baruteau & Rieutord (2013) et Guenel et al. (2016a) utilisent les coordonnées cylindriques dont le repère orthonormé est noté (e_s, e_ϕ, e_z) , où e_z est le vecteur colinéaire au vecteur rotation. Par ailleurs, κ_s est la fréquence épicyclique² qui dépend de la distance à l'axe et du contraste en cisaillement χ , et \mathcal{B}^3 est un terme analogue à notre coefficient γ , qui dépend de θ , χ , ainsi que des nombres d'onde k_s et k_z (Guenel et al., 2016b). 115

Première partie

Interactions de marée en astrophysique

Sommaire

1.1 Des marées dans les astres	3
1.2 Interaction de marée dans notre système solaire	7
1.2.1 Dans le système Terre-Lune	7
1.2.2 Dans les systèmes jovien et saturnien	9
1.3 Jusque dans les systèmes exoplanétaires en interaction	10
1.3.1 Statistique et diversité des systèmes découverts à ce jour	12
1.3.2 Les Jupiter chauds, des cibles privilégiées pour étudier les interactions de marée	14
1.4 Modélisation des marées dans les étoiles et les planètes géantes	17
1.4.1 Modèles de dissipation avec marée d'équilibre	17
1.4.2 Ajout de la marée dynamique dans ces modèles	18
1.4.3 Importance de la structure interne et de la dynamique du corps perturbé	20
1.4.4 Processus manquants	23
1.5 Organisation du manuscrit	27

“Et de aquarum natura complura dicta sunt, sed aestus mari accedere ac reciprocare maxime mirum, pluribus quidem modis, uerum causa in sole lunaque.”

— Pline l’Ancien, Histoire naturelle, livre II

1.1 Des marées dans les astres

Les marées sur Terre, c’est-à-dire les déformations qu’elles engendrent sur les océans (et dans une moindre mesure sur la croûte terrestre), sont un phénomène bien connu, et ce depuis l’Antiquité. En effet, de nombreux philosophes et astronomes grecs et romains se sont appliqués à décrire et théoriser le mouvement de flux et de reflux des océans. C’est le cas par exemple de Pythéas, explorateur et scientifique Massaliote (~ 380–310 av. J.-C.), qui aura le premier mis en évidence le rôle clef de la Lune dans les marées océaniques, ou de Pline l’Ancien (23–79 ap. J.-C.) qui décrira avec précision dans son encyclopédie “*Naturalis Historia*” le décalage temporel entre la position de la Lune et les effets qu’elle engendre sur la Terre. Après cette période faste d’idées éclairées, suit une ère de désintérêt où ces découvertes seront remises en question. Il faudra attendre Isaac Newton et son traité sur la gravitation “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” (Newton, 1760) pour remettre à l’ordre du jour les découvertes des anciens, et expliquer à l’aide de son principe de la gravitation universelle la source de ces déformations fluides, à savoir l’attraction gravitationnelle de la Lune principalement, et celle du Soleil de façon moins importante. Aidés par

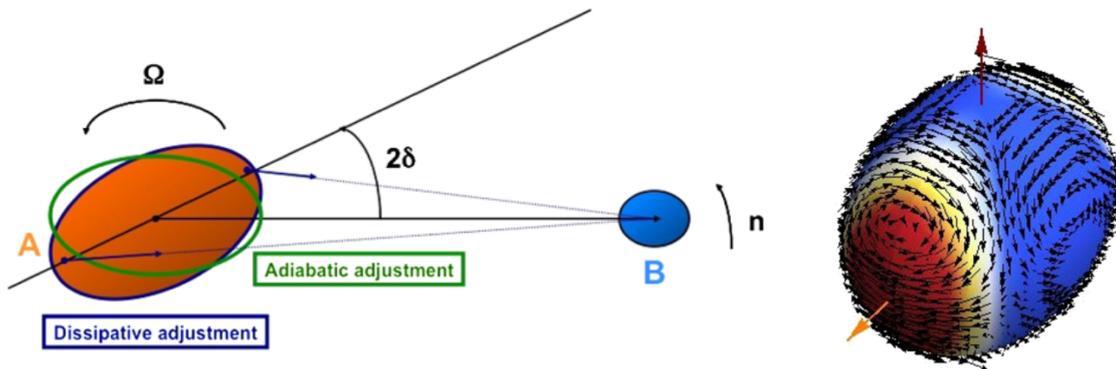


FIGURE 1.1: [Tiré de Remus et al. (2012a)]. Gauche : Représentation schématique de l'interaction de marée dans un système à deux corps. Le compagneon B exerce une force gravitationnelle en chaque point du corps primaire A, ce qui a pour effet de créer un renflement, déphasé d'un angle 2δ par rapport à l'axe qui relie les centres de masse des deux corps lorsque l'on prend en compte les mécanismes de friction visqueuse ou de dissipation thermique. Droite : Champ de vitesse de la marée d'équilibre à la surface du corps perturbé A lorsque ce dernier est complètement convectif. Les vecteurs rouge et orange sont respectivement l'axe de rotation de A et l'axe qui relie les deux centres de masse. Le gradient de couleur correspond à l'amplitude normalisée du potentiel de marée, allant du rouge (amplitude forte) vers le bleu (amplitude plus faible).

cette nouvelle approche de la physique, plusieurs scientifiques compléteront et amélioreront la théorie des marées en utilisant une approche analytique, tel Bernoulli (Bernoulli, 1740) et Euler (Euler, 1740). C'est enfin Laplace qui donnera à la théorie des marées terrestres la vision moderne qu'on lui connaît maintenant (pour plus de détails historiques sur les marées et leur traitement, le livre de Cartwright, 1999, constitue un document de référence).

On voit ainsi que l'on s'est tout d'abord intéressé aux conséquences, pouvant être appréhendées par nos sens, puis aux causes par une approche inductive; ce sont ces dernières que nous allons détailler maintenant. L'interaction de marée est le résultat des forces différentielles gravitationnelles exercées par un corps astrophysique B sur la structure étendue d'un autre corps A (donc non-ponctuel), quelle que soit sa nature ou sa composition (corps solide, fluide, gazeux ou à l'état de plasma). Le panneau de gauche, figure 1.1, schématise cette interaction. Ces forces sont à l'origine de flots à grande échelle, se propageant dans l'ensemble du corps perturbé et redistribuant ainsi la matière afin de rétablir l'équilibre hydrostatique. C'est ce qu'on appelle en astrophysique la marée d'équilibre, car elle est le fruit d'un ajustement quasi-hydrostatique en réponse à l'attraction gravitationnelle du perturbateur (voir figure 1.1, et Remus et al., 2012a). Ce type de marée a notamment été formalisé par les travaux de Love (1911) et de Zahn (1966a,b,c) en ce qui concerne la Terre et les étoiles binaires, respectivement.

Une conséquence directe de ces flots de marée est la création d'un bourrelet équatorial dirigé vers le compagneon si l'on ne prend pas en compte la rhéologie et la viscosité des matériaux qui composent le corps perturbé (ajustement adiabatique dans la figure 1.1, panneau de gauche). Moyenné au cours d'une période orbitale du compagneon, le couple exercé sur ce bourrelet est par ailleurs nul si l'on néglige les processus de friction. Lorsque l'on prend en compte ces processus de friction, la réponse du corps perturbé n'est plus immédiate mais retardée, ce qui se traduit dans le panneau de gauche de la figure 1.1 par le déphasage 2δ (ajustement dissipatif). En outre, la marée d'équilibre n'est pas la seule réponse à la force de marée. Différentes familles d'ondes vont ainsi être excitées par la force de marée au sein du corps primaire perturbé. La nature de ces oscillations, qui dépend du milieu et des forces en présence, sera détaillée dans le chapitre suivant (section 2.2.2).

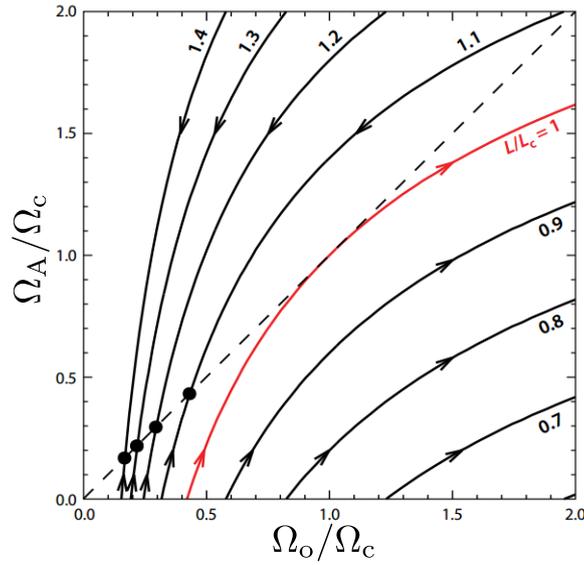


FIGURE 1.3: [Adapté de Ogilvie (2014)]. Évolution (par interaction de marée) de la fréquence de rotation Ω_A d'une étoile en fonction de l'évolution de la fréquence orbitale Ω_o de sa planète, normalisées à la fréquence critique Ω_c qui correspond au moment cinétique critique total L_c , et dans le cas où l'orbite de la planète est circulaire et coplanaire. Les contours à moment cinétique total fixé L sont tracés en traits noirs fléchés. La ligne pointillée symbolise la synchronisation de la rotation de l'étoile avec la révolution de sa planète. Les points noirs représentent les équilibres de marée stables. Les systèmes tels que $L < L_c$ évoluent vers la destruction de la planète. On précise que le moment cinétique de spin de la planète est négligé.

On appelle la marée dynamique cette seconde réponse car, dans sa définition, les termes inertiels ne sont pas négligés dans l'équation du moment comme c'est le cas pour la marée d'équilibre qui n'est donc pas une solution complète des équations de l'hydrodynamique (voir par exemple Cowling, 1941; Zahn, 1975).

À cause des processus de friction, la moyenne au cours d'une période orbitale du couple de marée n'est pas nulle. Par ailleurs, il faut savoir qu'un système à deux corps soumis à des perturbations est le plus souvent résilient, dans le sens où il va tenter d'atteindre ou de revenir à un état d'équilibre d'énergie minimale (Zahn, 2013). Dans un tel système, l'équilibre est atteint lorsque le système est coplanaire (angles spin-orbite des deux corps nuls), circulaire (l'orbite a une excentricité nulle) et synchrone (les périodes rotationnelles des deux corps sont égales à la période orbitale), comme représenté dans la figure 1.2. Notons que la détermination de cet équilibre inclut l'interaction de marée de A sur B (en utilisant les notations du schéma); l'orbite reçoit la contribution de marée des deux corps tandis que l'évolution de la rotation et de l'obliquité de A (respectivement B) ne dépend que du couple de marée appliqué sur A (B). L'évolution du système, possiblement vers cet état d'équilibre, va donc dépendre des échanges de moment cinétique et d'énergie entre le corps perturbé et l'orbite. Dans ce cadre, Hut (1980) a démontré que cet état d'équilibre stable peut être atteint, dans le cas des systèmes binaires, si et seulement si le moment cinétique orbital est trois fois supérieur au moment cinétique de spin du corps perturbé. On notera ce moment cinétique critique L_c , et le moment cinétique total du système L qui est la somme des moments cinétiques orbital

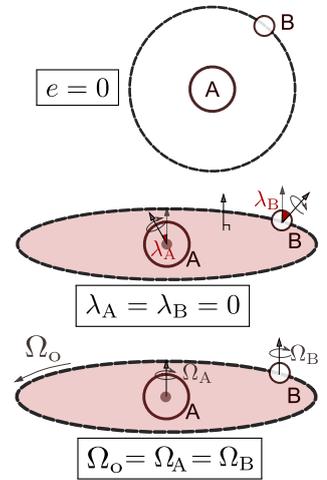


FIGURE 1.2: Illustration d'un système (de haut en bas) circulaire, coplanaire, et synchrone. $\Omega_{A,B}$ et n sont les fréquences de rotation des corps A et B et de révolution du corps B, et $\lambda_{A,B}$ sont les angles entre l'axe de rotation de chacun des deux corps et la perpendiculaire à l'orbite de B (angles spin-orbite).

et la somme des moments cinétiques orbital

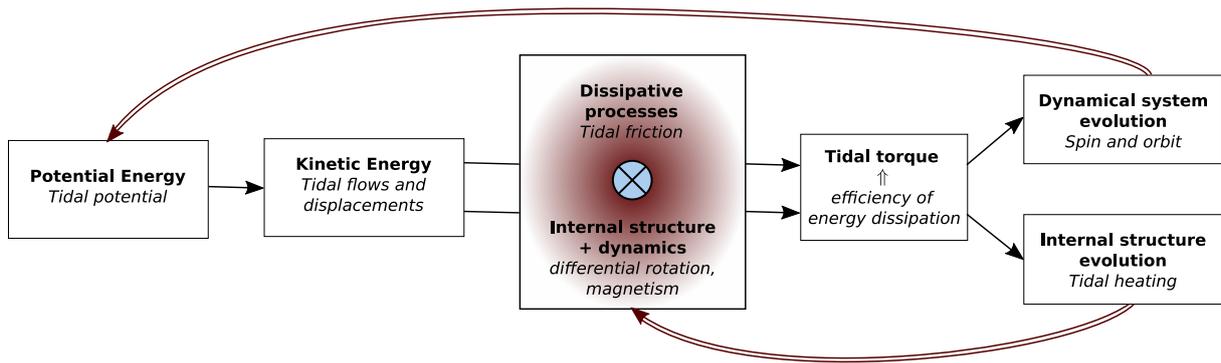


FIGURE 1.4: [Adapté de Mathis & Remus (2013)]. Principe, effets séculaires et rétro-actions de l'interaction de marée. Le potentiel de marée induit des flots de marée dans l'ensemble du corps perturbé, transformant l'énergie potentielle gravitationnelle en énergie cinétique. Grâce aux processus de friction (moléculaire, turbulente, diffusion thermique ou Ohmique) propres à l'astre, la dissipation d'énergie cinétique va induire un couple de marée de moyenne non nulle sur la période orbitale du compagnon, ce qui va modifier l'architecture du système. La quantité d'énergie dissipée va dépendre de la structure et de la dynamique internes, et des processus dissipatifs à l'œuvre dans l'étoile, qui vont eux même être perturbés par le couple de marée. Les paramètres structurels, rotationnels et orbitaux du système étant ainsi modifiés, le potentiel va évoluer à son tour, jusqu'à ce que la moyenne du couple de marée soit nulle dans le cas d'une configuration d'équilibre.

et de spin de l'étoile et de sa planète. Plusieurs cas de figure sont alors à distinguer d'après Hut (1980, et voir figure 1.3) :

- le compagnon orbite à l'intérieur du rayon de corotation¹ ($\Omega_o > \Omega_A$) :
 - si cette condition sur les moments est remplie (i.e. $L > L_c$), le compagnon migre vers l'intérieur pour atteindre un état d'équilibre stable (circularisé, synchronisé et aligné) tandis que la rotation du corps central augmente ;
 - si cette condition n'est pas remplie, ce dernier va alors spiraler vers le corps primaire dont la rotation augmente, et sera disloqué dès qu'il dépasse la limite de Roche² de ce dernier ; c'est le destin de certains Jupiter chauds (voir section 1.3 ; Yee et al., 2020) ;
- dans le cas opposé où le compagnon orbite au delà du rayon de corotation ($\Omega_o < \Omega_A$), on a toujours $L > L_c$. Le compagnon s'éloigne progressivement du corps primaire qui va, en réponse, freiner sa rotation propre jusqu'à ce que la période de rotation du primaire soit synchrone avec la période de révolution du compagnon (comme dans le premier cas). C'est le cas dans le système Terre-Lune, ou dans les systèmes Jovien et saturnien en ce qui concerne certains des satellites naturels principaux.

Nous présenterons dans les sections qui suivent des observations, à la fois dans le système solaire et les systèmes extra-solaires, qui illustrent ces prédictions. Pour autant, tous les systèmes astrophysiques rencontrés ne sont pas dans cet état d'équilibre. Deux raisons principales expliquent cela. D'une part, un système à deux corps complètement isolé est un modèle pratique pour étudier les interactions gravitationnelles de marée mais n'existe pas dans la réalité ; en effet, la présence d'autres corps (même éloignés) peut perturber gravitationnellement ce système. D'autre part, le couple de marée dépend de l'efficacité des processus de friction. Cela se traduit par des temps caractéristiques de modification des paramètres orbitaux et rotationnels du système plus ou moins courts (de quelques millions à plusieurs milliards d'années, Ogilvie, 2014) que l'on explicitera dans le chapitre suivant (section 2.1.2 ; voir aussi Mathis et al., 2013) et qui doivent être comparés aux temps d'évolution des corps considérés.

1. C'est le rayon orbital du corps B pour lequel $\Omega_o = \Omega_A$.

2. Distance théorique en deçà de laquelle le compagnon commencerait à se disloquer sous l'action des forces différentielles de marée du corps primaire.

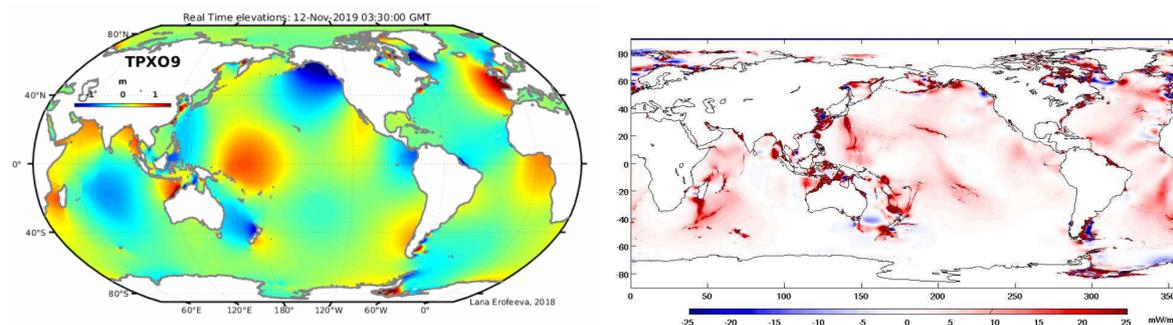


FIGURE 1.5: Cartographie de l'élévation (à gauche, OSU TPX0 Tide Models) et de la dissipation en Méga-watt par mètre (à droite, tiré de Egbert & Ray, 2013) des océans dues à l'interaction de marée avec la Lune (et le Soleil pour l'élévation). L'amplitude de l'élévation du niveau des océans a été mesurée par l'altimètre spatial TOPEX/POSEIDON (NASA, CNES). Les données recueillies ont été traitées à l'aide du formalisme d'inversion globale de Egbert & Ray (2001) afin de déterminer la dissipation de la composante principale de la marée lunaire M_2 semi-diurne.

Nous avons résumé en figure 1.4 les différentes étapes de l'interaction de marée, des causes aux conséquences séculaires qu'elle engendre.

1.2 Interaction de marée dans notre système solaire

1.2.1 Dans le système Terre-Lune

Le système Terre-Lune est le système le plus évident pour tester la théorie des marées en vérifiant ses implications, que celles-ci soient à court terme comme l'élévation des océans ou de la croûte terrestre, ou bien à plus long terme comme la modification de la période de rotation de la Terre ou de la distance Terre-Lune.

1.2.1.1 Les marées océaniques

Les bourrelets étant symétriques par rapport au centre de masse, on observe en général deux marées hautes au cours d'une journée³ que l'on appelle marées semi-diurne (périodicité voisine de la demi-journée) et diurne (périodicité de l'ordre de la journée). L'amplitude de la force de marée est d'autant plus importante que la distance entre les deux corps est faible (car l'intensité du champ gravitationnel de marée est inversement proportionnelle au cube de la distance⁴), que la masse du compagnon est grande, et que la taille caractéristique du corps soumis au champ différentiel de marée est grande. Pour illustrer ces points, on remarquera dans l'ordre que :

- bien que le Soleil soit nettement plus massif que la Lune, le module de son champ gravitationnel de marée est plus de deux fois plus faible que celui exercé par la Lune, plus proche, sur la Terre. Il reste néanmoins non négligeable. On distingue par exemple les marées de vives-eaux, lorsque la Lune et le Soleil sont en conjonction (nouvelle et pleine Lune), des marées de mortes-eaux lorsqu'ils sont en quadrature (premier et dernier quartiers). Dans le premier cas, les forces de marée de la Lune et du Soleil se cumulent, occasionnant une élévation des océans plus importante, alors qu'elles se retranchent dans le second cas.

3. En 24h50 plus exactement, dues au mouvement de la Lune autour de la Terre.

4. Cela sera vu lors de la description du potentiel de marée, section 2.1.1.

- la réponse de l'interaction de marée est visuellement appréciable en ce qui concerne les océans terrestres (la déformation verticale est de plusieurs mètres, [Simon et al., 2013](#), voir aussi la carte de gauche de la figure 1.5), tandis qu'elle l'est beaucoup moins pour les mers et les lacs car leurs dimensions sont plus faibles (leur élévation est de l'ordre du décimètre et du centimètre, respectivement). Il est important de préciser que la réponse au champ de marée n'est pas directement proportionnelle à son intensité, elle dépend aussi de la rhéologie des matériaux (la viscosité pour les fluides et la rigidité pour les solides) sur lesquels s'exerce ce champ ([Baker, 1984](#); [Jentzsch, 1997](#); [Remus et al., 2012b](#)). La croûte se soulève par exemple de quelques dizaines de centimètres seulement chaque demi-journée.

L'énergie des marées océaniques est dissipée par frottement des courants de marée sur le fond des océans. Comme on peut s'y attendre, la dissipation est particulièrement importante dans les régions littorales. Cependant, il a aussi été montré qu'une contribution importante à la dissipation de marée océanique vient des fonds marins à la topographie accidentée dans les océans profonds ([Egbert & Ray, 2001](#)). Dans la mappemonde de droite, figure 1.5, est représentée la dissipation de la composante principale semi-diurne M_2 du potentiel de marée lunaire qui compte pour 2/3 dans la dissipation totale de marée du système Terre-Lune-Soleil. La dissipation est élevée en eaux peu profondes, notamment en zone côtière, et au niveau des dorsales et points chauds volcaniques comme autour de l'archipel d'Hawaï. En outre, la dissipation de marée dans les océans peut être particulièrement importante pour les fréquences d'oscillation qui sont résonnantes avec les modes propres du fluide ([Webb, 1980](#); [Ward, 1982](#)), propriété partagée par la dissipation de marée dans les intérieurs d'étoiles comme on le verra au chapitre 2 et plus loin dans ce chapitre ([Savonije & Witte, 2002](#); [Ogilvie & Lin, 2004, 2007](#)). La dissipation des marées dynamiques océaniques, en prenant en compte leur caractère résonnant, a notamment été modélisée par [Auclair-Desrotour et al. \(2018\)](#) et [Auclair-Desrotour et al. \(2019\)](#) à l'aide d'un modèle semi-analytique pour des planètes ressemblant à la Terre, i.e. avec un cœur solide recouvert d'eau ou pour des planètes "océan" constituées uniquement d'eau.

1.2.1.2 Architecture du système Terre-Lune

La Lune se situant bien au delà de son rayon de corotation, les échanges de moment cinétique par effets de marée entre la Terre et la Lune font que cette dernière s'éloigne de nous d'approximativement 3.8 cm par an ([Dickey et al., 1994](#)). Pour compenser cet éloignement, la fréquence de rotation de la Terre diminue, à raison de 1.6 ms par siècle. Par ailleurs, l'excentricité de la Lune est faible mais n'est pas entièrement nulle; en outre, son axe de rotation et celui de la Terre ne sont pas normaux au plan orbital de la Lune (à peu près 5° pour la Lune et 24° pour la Terre, voir figure 1.6). Notre satellite naturel est dit dans un état de Cassini, état stable pour lequel l'axe de rotation, la normale au plan orbital et la normale à l'écliptique (plan orbital terrestre) restent dans le même plan, les deux premiers axes précessant autour du troisième. Le couple de marée appliqué par la Terre sur la Lune étant beaucoup plus fort que celui appliqué par la Lune sur la Terre, il est cohérent d'observer une obliquité faible pour la Lune et une obliquité plus importante pour la Terre ([Ward, 1982](#)). Ces observations soulignent aussi le fait que le système Terre-Lune n'est pas isolé et que l'attraction gravitationnelle du Soleil est aussi à l'œuvre, ce qui rend plus complexe la détermination d'un état d'équilibre.

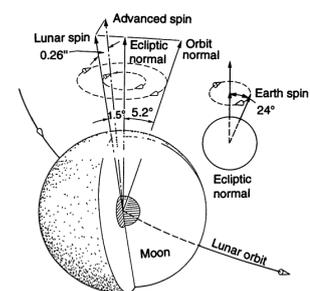


FIGURE 1.6: [Tiré de [Dickey et al. \(1994\)](#).] Angles caractéristiques du système Terre-Lune et orientation de la Lune par rapport à l'état de Cassini.

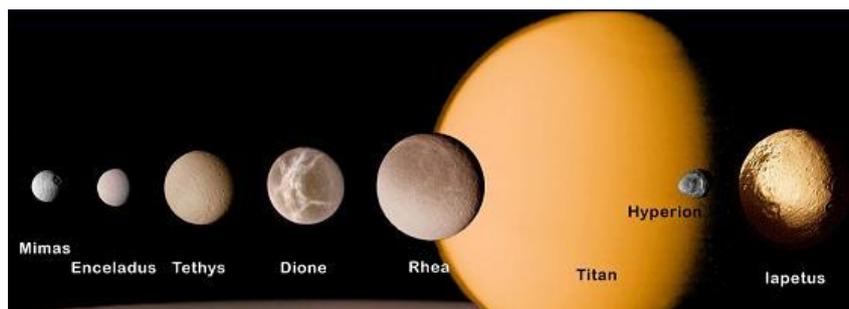


FIGURE 1.7: [Crédit NASA/JPL/Caltech]. Montage des principaux satellites de Saturne du plus proche au plus éloigné (en partant de la gauche), d'après les images des sondes Voyager. L'échelle des tailles est respectée. Seuls les quatre premiers satellites ont été sélectionnés dans la table 1.1.

Nous avons beaucoup parlé du champ de marée créé par la Lune sur la Terre, mais peu de la réciproque. Comme pour la Terre, la Lune présente un bourrelet équatorial en direction de notre planète. Néanmoins, ce bourrelet n'est pas déphasé par rapport à l'axe des centres, car la période de rotation de la Lune est synchronisée avec sa période orbitale (la Lune nous présente en effet toujours la même face). En fait, c'est précisément le champ de marée terrestre (de forte amplitude) qui est à l'origine de cette synchronisation. Elle s'est produite sur un intervalle de temps assez court, de l'ordre du million d'année, dès la formation de la Lune (Peale, 1999; Rambaux & Castillo-Rogez, 2013). Cette dernière, qui orbitait initialement autour de la Terre en quelques heures en deçà du rayon de corotation, aurait migré sous l'effet du couple de marée terrestre de sorte à atteindre sa position actuelle.

1.2.2 Dans les systèmes jovien et saturnien

Les effets des interactions de marée dans notre système solaire sont particulièrement visibles dans les systèmes planète-satellites naturels de nos géantes gazeuses Jupiter et Saturne. Ces dernières rassemblent autour d'elles plusieurs dizaines de satellites qui subissent à la fois le champ différentiel de la planète (marées créées dans les satellites) et la rétro-action de leur propre champ différentiel (marées créées dans les géantes), comme c'est le cas pour le système Terre-Lune. Cela a des conséquences sur la dynamique de ces satellites ainsi que sur leur structure interne.

Nous avons listé dans le tableau 1.1 les paramètres orbitaux moyens des quatre satellites les plus gros et les plus proches des deux géantes pour lesquels les effets dynamiques des interactions gravitationnelles mutuelles sont les plus importants. On remarque tout d'abord que les périodes de révolution et de rotation propre des satellites coïncident. Ces synchronisations, ou résonances spin-orbite, sont la conséquence des marées dans les satellites comme pour la Lune. Par ailleurs, les excentricités sont pratiquement nulles. Là aussi, les marées "satellitaires" sont à l'origine de cette quasi-circularisation, le temps caractéristique de circularisation (voir section 2.1.2) induit par ces marées étant plus court que celui déterminé par les marées planétaires. Comme c'est aussi le cas pour la Lune, l'état de coplanarité des satellites n'est pas tout à fait atteint. Les inclinaisons résiduelles restent inférieures au degré dans le plan de Laplace⁵, situé entre le plan équatorial de la planète et celui de l'écliptique (en sachant que l'angle entre ces deux plans est par exemple de l'ordre de quelques degrés pour Jupiter, comme indiqué par Peale, 1999). Ces excentricités et inclinaisons résiduelles sont soutenues par les interactions gravitationnelles entre satellites. L'état d'équilibre stable pour ces satellites n'est alors plus à obliquité et excentricité nulles mais défini par la résonance orbitale de Laplace (Peale et al., 1979), dont l'une des conséquences est

5. Ce plan est rigoureusement défini comme le plan moyen qu'occupe l'orbite d'un satellite au cours d'un cycle de précession nodale, i.e. la précession du plan orbital du compagnon autour de l'axe de rotation du corps primaire.

satellites de Jupiter	e	P_{orb} (jours)	P_{rot} (jours)	i (°)	satellites de Saturne	e	P_{orb} (jours)	P_{rot} (jours)	i (°)
Io	0.0041	1.769	1.769	0.036	Mimas	0.0196	0.942	0.942	1.574
Europa	0.0094	3.551	3.551	0.466	Enceladus	0.0047	1.370	1.370	0.03
Ganymède	0.0013	7.155	7.155	0.177	Tethys	0.0001	1.888	1.888	1.091
Callisto	0.0074	16.69	16.69	0.192	Dione	0.0022	2.737	2.737	0.028

TABLE 1.1: Paramètres keplériens des satellites galiléens et de Saturne les plus remarquables, parmi lesquels : l'excentricité e , la période orbitale du satellite autour de sa planète P_{orb} , la période rotationnelle du satellite P_{rot} et son inclinaison par rapport au plan de Laplace i . Les valeurs sont tirées de [Rambaux & Castillo-Rogez \(2013\)](#) et de la base de données du JPL ([Jet Propulsion Laboratory website](#)).

de rendre les périodes orbitales commensurables entre elles : autrement dit, leur rapport est un nombre rationnel comme on peut le voir dans la table 1.1 (on parle aussi de résonances de moyen mouvement). Pour ne citer qu'un exemple de l'impact des marées planétaires sur les satellites, notons que ces derniers orbitent au delà du rayon de corotation des géantes qui, elles, tournent en moins d'une demi-journée autour de leur axe. Les marées planétaires vont donc contribuer à éloigner⁶ les satellites par échanges de moment cinétique ce qui ralentit ainsi la vitesse de rotation des géantes. Nous verrons dans la section 1.4.3.2 que notre compréhension des marées dans Jupiter et Saturne a connu une révolution durant la dernière décennie. En effet, en utilisant l'astrométrie de haute précision, [Lainey et al. \(2009, 2012, 2017, 2020\)](#) démontrent que la dissipation de marée dans Jupiter et Saturne domine d'un ordre de grandeur les estimations réalisées dans un scénario où les satellites auraient été formés à la naissance du système solaire et où la dissipation de marée serait constante depuis ce temps là.

Conserver une faible excentricité, ainsi qu'une faible inclinaison, n'est pas sans conséquence sur la structure des satellites. Le bourrelet créé par les marées dans les satellites (de l'ordre de 3 km pour Mimas et Io, [Rambaux & Castillo-Rogez, 2013](#)) n'étant pas en phase, il est source de tension sur les matériaux qui composent ces derniers et est donc à l'origine d'une forte dissipation de marée. Sur Io, le chauffage engendré par ces marées est si important qu'il est à même de déclencher du volcanisme ([Moore et al., 2007](#)). Sur les Lunes glacées comme Europe et Encelade, il provoque des fractures qui s'étendent sur toute leur surface ainsi que des geysers détectés par le satellite Cassini, initiant l'étude de la tectonique de marée ([Poirier, 1982](#)).

1.3 Jusque dans les systèmes exoplanétaires en interaction

À ce jour, plus de 4200 exoplanètes (i.e. orbitant en dehors de notre système solaire) ont été détectées dans notre galaxie, et ce depuis la première détection confirmée en 1995 par M. Mayor et D. Queloz d'une planète moitié moins massive que Jupiter orbitant en seulement quelques jours autour de l'étoile 51 Pegasi ([Mayor & Queloz, 1995](#)). Cette découverte leur a valu le prix Nobel de physique en 2019. Leur détection a été réalisée grâce à la méthode des vitesses radiales, utilisant l'effet Doppler, c'est-à-dire les variations de la vitesse radiale de l'étoile perturbée par une planète. La seconde méthode la plus utilisée pour détecter des exoplanètes est la méthode par transit, qui se base sur la diminution périodique du flux photosphérique d'une étoile causée par le passage d'une planète devant elle. Les techniques de détection

6. Dans le cas de Io, les effets du chauffage de marée provoqué par Jupiter dans ce satellite sont suffisamment importants pour contrebalancer les effets de la dissipation dans Jupiter, ce qui induit une accélération nette positive de Io sur son orbite, et donc son rapprochement vers Jupiter ([Lainey et al., 2009](#)).

par vitesse radiale (au sol) et par transit (le plus souvent dans l'espace) restent complémentaires quand elles sont réalisables simultanément pour un même système car outre la détection, elles permettent la mesure de paramètres planétaires différents en plus de la période orbitale : le rapport des rayons de la planète et de son étoile pour la méthode par transit, et le rapport de leur masse pour la méthode par vitesse radiale. En outre, le rayon, la masse, ainsi que l'âge de l'étoile, peuvent être estimés précisément par l'astérosismologie (la sismologie appliquée aux étoiles autres que le Soleil ; [Aerts et al., 2010](#); [Lebreton & Goupil, 2014](#)), ce qui permet ainsi d'accéder à la masse et au rayon de la planète. Les méthodes par vitesse radiale et transit ont cependant des limitations qui peuvent introduire des biais importants dans les observations. Premièrement, tous les systèmes ne sont pas détectables par la méthode des transits, car la ligne de visée doit être faiblement inclinée par rapport au plan orbital afin de permettre un transit. Deuxièmement, ces techniques favorisent la détection de planètes massives et proches de leur étoile hôte à cause de la précision limitée de l'instrument de mesure, à laquelle s'ajoute la durée de l'observation. Par exemple, la probabilité d'observer le transit d'une exo-Terre autour d'une étoile de type solaire est très faible sachant qu'il ne dure que 13h, c'est-à-dire 0.1% du temps de révolution de l'exo-Terre. Par ailleurs, les télescopes au sol sont contraints à une précision photométrique pour les transits de l'ordre de 1% à cause de la turbulence atmosphérique, c'est-à-dire ne permettant que la détection de Jupiter (ultra-)chauds et de naines brunes ([Perryman, 2018](#)). La précision des meilleurs spectromètres, pour la méthode des vitesses radiales, est aujourd'hui de l'ordre du mètre par seconde (par exemple pour les instruments HARPS et SPIRou, [Queloz et al., 2001](#); [Donati et al., 2018](#), respectivement). Il faudrait ainsi gagner un ordre de grandeur si l'on veut détecter des planètes analogues à la Terre orbitant autour d'étoiles de type solaire. Enfin, les limitations ne sont pas que technologiques mais aussi "physiques" dans le sens où l'activité propre de l'étoile hôte (taches, plages magnétiques, etc.) engendre un bruit dans les courbes de vitesse radiale communément appelé "jitter" d'activité, justement de l'ordre du m/s. L'accent est donc mis sur la modélisation de ce "jitter" d'activité afin de le soustraire aux courbes de vitesse radiale pour détecter un éventuel signal venant d'une planète (voir p.e. [Meunier & Lagrange, 2019](#); [Yu et al., 2019](#)).

Pour détecter un grand nombre de planètes de masse plus faible que nos géantes gazeuses, il a fallu organiser des campagnes d'observations depuis l'espace. On citera par exemple les télescopes spatiaux CoRoT (CNES/ESA) et KEPLER (NASA), lancés respectivement en 2006 et 2009 et qui ne sont plus en service aujourd'hui, permettant à eux deux la détection de plus de la moitié des exoplanètes actuellement confirmées ([Baglin et al., 2009](#); [Thompson et al., 2018](#)). Le succès de ces missions a fait naître de nouveaux programmes spatiaux et télescopes. Certains sont en activité, comme le télescope à champ large TESS (NASA/MIT) et son complémentaire CHEOPS (ESA), qui ont été mis en service ces deux dernières années et qui sont consacrés respectivement à la détection et à la caractérisation des planètes de courte période autour d'étoiles proches et lumineuses ([Ricker et al., 2015](#); [Gaidos et al., 2017](#)). D'autres sont à venir, comme les télescopes PLATO (ESA, [Rauer et al., 2014](#)) et ARIEL ([Tinetti et al., 2018](#)) destinés respectivement à la détection de planètes rocheuses à grande période orbitale et à la caractérisation des atmosphères. On citera aussi le successeur de Hubble, le JWST ("James Webb Space Telescope", NASA/ESA), qui caractérisera les atmosphères des exoplanètes (lancement prévu en 2021, [Greene et al., 2016](#)), ou encore, au sol, le spectropolarimètre SPIRou ([Donati et al., 2018](#)) récemment installé au télescope Canada-France-Hawaï (CFHT), qui est conçu pour étudier les interactions magnétiques dans les systèmes exoplanétaires jeunes, et comprendre comment elles influent sur la formation et la migration des planètes.

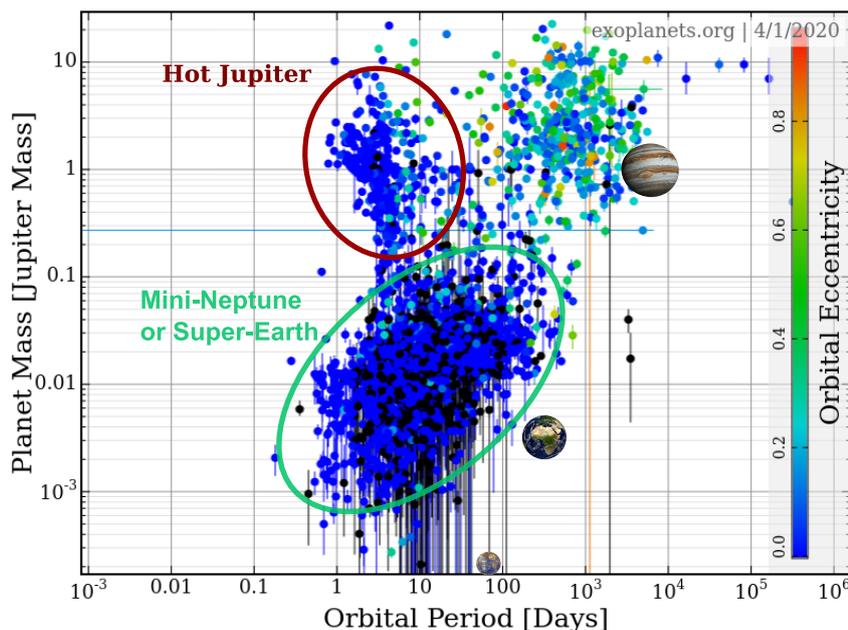


FIGURE 1.8: Représentation de la plupart des exoplanètes détectées à ce jour avec en abscisse la période orbitale (en jour), en ordonnée la masse de la planète (en masse jovienne) et en couleur l'excentricité lorsqu'elle est mesurée (dans le cas contraire les planètes sont représentées par des points noirs). Ce graphique a été réalisé à l'aide de la base de donnée www.exoplanets.org rassemblant les paramètres orbitaux et rotationnels des systèmes exoplanétaires détectés (Han et al., 2014). À titre de comparaison, Mercure, la Terre, Neptune et Jupiter sont aussi représentés.

1.3.1 Statistique et diversité des systèmes découverts à ce jour

L'accumulation de données sur les systèmes exoplanétaires et l'étude de leur architecture orbitale a notamment permis la remise en cause du paradigme de formation du système solaire. En effet, la théorie prévalente depuis les années 60 est que les planètes se forment in-situ par accrétion de planétésimaux, avec des planètes telluriques sous la ligne des glaces et des géantes au delà (Safronov & Zvjagina, 1969; Winn & Fabrycky, 2015). Néanmoins, la découverte de nombreux systèmes planétaires très différents du nôtre a bouleversé cette conception. Le graphe de la figure 1.8 rassemble la plupart des exoplanètes confirmées à ce jour dont nous connaissons la période orbitale et la masse minimale ($\gtrsim 3200$ dans ce graphe). À cause des biais observationnels présentés dans la section précédente, les premières planètes détectées ont tout d'abord été des géantes gazeuses nommées Jupiter chauds car elles possèdent une masse proche de celle de Jupiter et une faible période orbitale, $P_{\text{orb}} < 7J$, ce qui signifie une température effective élevée, supérieure à 1500K (Pass et al., 2019). Cependant, ces dernières ne représenteraient qu'une faible part du nombre total d'exoplanètes. Leur fréquence est estimée à tout juste 1% (Wright et al., 2012; Laughlin, 2018). Une autre population de géantes, à orbite plus grande et excentrique se détache en haut à droite sur le graphe. Ces planètes à "longue" période ont pour la plupart été détectées par la méthode des vitesses radiales. Elles possèdent une masse moyenne plusieurs fois celle de Jupiter et des périodes de révolution plus courtes allant de 100 à 1000 jours, contre $\sim 4\,332$ jours pour Jupiter. Comme Jupiter se positionne à la frontière de cette famille de géantes et d'après ce qui a été dit précédemment sur les biais observationnels, on pourrait penser l'exploration des masses et des périodes largement incomplète, mais ce n'est pas ce qui ressort des campagnes de suivi sur le long terme d'après Butler et al. (2017). Les planètes analogues à Jupiter ne représenteraient par exemple que 3% de l'ensemble des planètes (Rowan et al., 2016).

La population qui concentre le plus de planètes actuellement (ellipse verte sur le graphe 1.8) est constituée de planètes de type super-Terre présentant une masse inférieure à $10 M_{\oplus}$, ou de type mini-Neptune, c'est-à-dire de densité comparable à celle de Neptune mais de masse similaire à nos planètes rocheuses. La probabilité d'observer une planète de ce type autour d'une étoile naine est assez grande, et peut même s'élever à quasiment une chance sur deux pour des étoiles de type M, qui sont des étoiles de très faible masse (voir en particulier le panneau de gauche de la figure 1.9 et [Kopparapu, 2013](#); [Bonfils et al., 2013](#); [Winn & Fabrycky, 2015](#)). Notons aussi l'existence de planètes telluriques atypiques qui orbitent en moins d'un jour, "les mondes de lave", tandis que les planètes géantes de si courte période sont appelées Jupiter ultra-chauds ([Bell & Cowan, 2018](#)). Ces nouvelles classes de planètes, qui n'existent pas dans notre système solaire, restent encore mystérieuses de par leur origine et leur composition, et leur caractérisation est l'un des objectifs scientifiques des missions CHEOPS et PLATO ([Gaidos et al., 2017](#); [Rauer et al., 2014](#)). Cette analyse permet donc de se rendre compte que les planètes de notre système solaire ne sont pas représentatives des exoplanètes que l'on peut trouver dans notre galaxie, car elles se placent à la lisière de chaque population actuellement détectée. Pour les planètes telluriques, cette tendance resterait imputée aux biais observationnels. Le satellite PLATO espère combler ce manque en suivant des étoiles de type solaire sur plusieurs années, avec une précision estimée à 34 ppm/h (la précision pour détecter une exo-Terre étant d'environ 80 ppm/h).

Ce foisonnement de découvertes a favorisé l'émergence de théories alternatives à la vision statique des systèmes planétaires que l'on avait avant les premières détections d'exoplanètes il y a 25 ans. Par exemple, l'existence même des Jupiter chauds pourrait s'expliquer par le fait qu'elles ne sont pas formées à leur position actuelle mais ont migré, le plus probablement par interactions gravitationnelles avec le gaz du disque protoplanétaire ou bien avec un troisième corps ([Lin et al., 1996](#); [Juric & Tremaine, 2008](#)). Rappelons que la vision même de la formation de notre système solaire a beaucoup évolué au cours des dernières décennies, notamment grâce à trois études ([Tsiganis et al., 2005](#); [Morbidelli et al., 2005](#); [Gomes et al., 2005](#)), que l'on appelle communément le modèle de Nice. Ce scénario de formation, créé au départ pour expliquer le grand bombardement tardif⁷, peut rendre compte de l'architecture orbitale des parties externes de notre système solaire. Il explique notamment la position actuelle des planètes géantes à l'aide d'une instabilité dynamique entre ces planètes, initialement sur des orbites plus compactes, et le disque de Kuiper primordial. Pour justifier l'origine de cette configuration originelle plus compacte du système solaire, [Walsh et al. \(2011\)](#) se sont notamment appuyés sur les simulations de migration planétaire cherchant à comprendre l'origine des Jupiter chauds. Leur scénario, qui précède le modèle de Nice dans la formation du système solaire et est connu sous le nom du modèle du grand Tack, suppose que Jupiter et Saturne auraient migré vers l'intérieur depuis leur lieu de formation en interagissant avec le disque protoplanétaire. Cette migration se serait poursuivie jusqu'à l'orbite de Mars environ, en dépeuplant sa zone d'alimentation, jusqu'à ce que les deux géantes gazeuses partagent le même sillon et rentrent en résonance 3 : 2 de moyen mouvement. Elles auraient alors migré vers l'extérieur, pour atteindre les positions "initiales" prévues par le modèle de Nice. Ce scénario explique pourquoi Mars est moins massive que la Terre, et aussi le fait qu'il n'existe pas de planètes de type Jupiter chaud et super-Terre dans le système solaire (voir en particulier [Raymond & Morbidelli, 2020](#), pour une revue récente des scénarios de formation du système solaire).

7. Cette période aurait eu lieu il y a environ 4 milliards d'années d'après la datation des roches lunaires. D'après le modèle de Nice, elle est provoquée par la traversée de la résonance de moyen mouvement 1 : 2 entre Jupiter et Saturne, après une lente phase de migration divergente des planètes due à leur interaction gravitationnelle avec une ceinture de planétésimaux résiduelle du disque protoplanétaire ayant engendré le Système Solaire ([Morbidelli et al., 2005](#)).

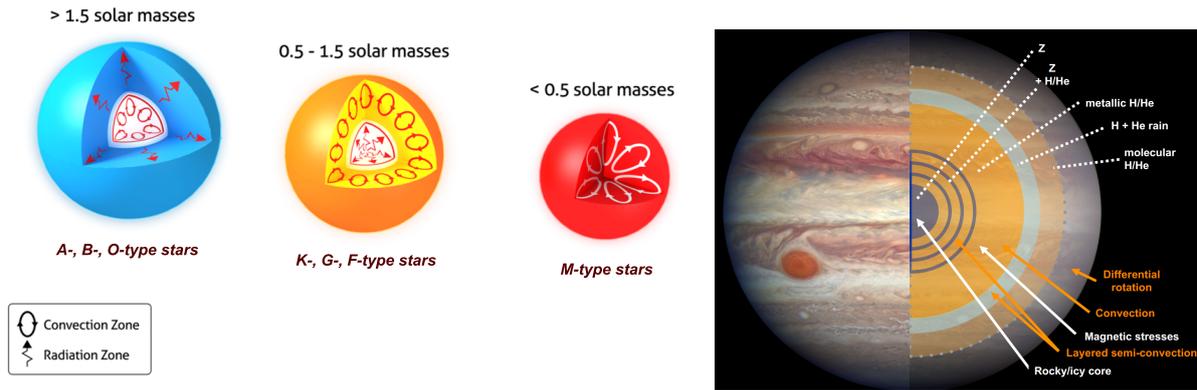


FIGURE 1.9: Schéma détaillant la structure interne des étoiles et des planètes géantes tel Jupiter. *Gauche* : [Crédit @sun.org]. Schéma catégorisant les étoiles selon leur masse. *Droite* : [Crédit Q. André (PhD, 2019)]. Schéma de l'intérieur de Jupiter tel que modélisé par Debras & Chabrier (2019) grâce aux contraintes observationnelles les plus récentes issues de la sonde Juno de la NASA (Guillot et al., 2018; Kaspi et al., 2018).

1.3.2 Les Jupiter chauds, des cibles privilégiées pour étudier les interactions de marée

Même s'ils ne représentent qu'un faible pourcentage de la population totale des exoplanètes, les Jupiter chauds restent les objets planétaires extra-solaires les mieux connus (Laughlin, 2018). Ceci s'explique par leur taille et leur faible période orbitale qui rendent leur détection plus simple, même par de petits télescopes terrestres (comme j'ai pu m'en rendre compte en utilisant le télescope de 80 cm à l'Observatoire de Haute Provence), et permettent une détermination précise de leurs paramètres orbitaux et structuraux si jamais elles transitent.

Par ailleurs, les interactions étoiles-planètes comme les marées stellaires sont particulièrement importantes dans ces systèmes. Pour s'en rendre compte, on peut calculer le paramètre d'amplitude de la marée stellaire ϵ ⁸ tel que défini par Ogilvie (2014). Physiquement, il compare les amplitudes des forces gravitationnelles avec et sans potentiel de marée à la surface du corps perturbé. Pour un Jupiter chaud typique en rotation autour d'une étoile de type solaire⁹, ce rapport est de l'ordre de $\epsilon \simeq 2 \times 10^{-6}$ et peut monter jusqu'à 2×10^{-4} par exemple pour WASP-18b qui est un Jupiter ultra-chaud 10 fois plus massif que Jupiter (Hellier et al., 2009). Pour comparaison, ce même rapport calculé pour les marées terrestres (i.e. l'interaction de marée de la Lune sur la Terre) est de l'ordre de $\epsilon \simeq 6 \times 10^{-8}$. On voit ainsi que le champ de marée créé par ces Jupiter chauds dans leur étoile hôte est suffisamment important pour induire d'importantes déformations structurales et dynamiques dans le système.

1.3.2.1 L'impact des marées sur les orbites : période orbitale et excentricité

Dès la découverte des Jupiter chauds, s'est posée la question de leur formation à des périodes orbitales si courtes. L'idée de leur formation in-situ a tout d'abord été rapidement abandonnée car ces géantes orbitent bien en deçà de la ligne des glaces et la quantité de gaz pouvant être accrétée à cet endroit ne semble pas suffisante pour former l'enveloppe d'une planète aussi massive que Jupiter (bien que cette idée reste défendue par Batygin et al., 2016). La théorie concurrente alors explorée est que ces

8. $\epsilon = M_B/M_A (R_A/d)^3$ avec $M_{A,B}$ les masses du corps primaire et du compagnon, R_A le rayon du corps primaire et d la distance entre les deux astres.

9. en prenant par exemple $M_A = M_\odot$, $M_B = M_J$, $d = 0.04$ UA, et $R_A = R_\odot$.

planètes, initialement sur des orbites plus grandes, aient été perturbées par un compagnon plus éloigné (par exemple une autre planète) afin qu'elles acquièrent une orbite très excentrique. Dès lors, l'interaction de marée étoile-planète devient non-négligeable quand la planète atteint son périastre, enclenchant le transfert de moment cinétique entre l'étoile et sa planète qui agit efficacement pour circulariser une orbite à plus courte période (Ford & Rasio, 2006). Plusieurs mécanismes sont proposés pour déclencher cette migration dite par excentricité de marée, parmi lesquels la diffusion rapide planète-planète (Jurić & Tremaine, 2008), des effets plus lents de type Lidov-Kozai (Fabrycky & Tremaine, 2007), ou de migration séculaire faisant appel à la théorie du chaos dans les systèmes planétaires (Wu & Lithwick, 2011; Lanza & Shkolnik, 2014). Un mécanisme pouvant naturellement expliquer la migration des planètes vers des orbites serrées est l'interaction avec le disque protoplanétaire (p.e. Lin et al., 1996). Selon la masse des planètes et les propriétés physiques du disque (p.e. sa température), cette interaction peut entraîner la migration convergente de deux planètes (par opposition p.e. à la migration divergente de Jupiter et Saturne dans le système solaire due à l'interaction avec un disque de planétésimaux). Si cette migration convergente est suffisamment rapide, elle peut entraîner une rencontre suffisamment proche entre les planètes pour envoyer l'une d'elles sur une orbite très excentrique, malgré la propension du disque à amortir l'excentricité des planètes. Plusieurs observations vont dans le sens d'un scénario de migration par excentricité. Tout d'abord, on remarquera sur la figure 1.8 que les excentricités des Jupiter chauds sont proches de zéro alors que celles des géantes plus éloignées sont en moyenne beaucoup plus élevées. Sur le même graphe, on peut aussi constater un déficit de planètes de type Neptune à période courte, alors qu'on retrouve des super-Terre orbitant en quelques jours. Ce désert de planètes de type Neptune mis en évidence par Mazeh et al. (2016) a été notamment théorisé par les travaux de Matsakos & Königl (2016) en utilisant le scénario de formation par haute excentricité pour expliquer les lignes de démarcation de pentes opposées dans le graphe masse-période. On constate par ailleurs que peu de Jupiter chauds orbitent en moins d'un jour. Il ne faut en effet pas oublier que si la planète se situe en deçà du rayon de corotation, les marées stellaires peuvent conduire à deux destins drastiquement opposés, fonction du moment cinétique total (voir section 1.1). Pour rappel, le système peut tendre vers un état d'équilibre stable (c'est le cas du gros de la distribution des Jupiter chauds), ou instable qui se solde par la destruction de la planète (p.e. Teitler & Königl, 2014; Benbakoura et al., 2019). Cette condition sur le moment cinétique total peut-être traduite en terme de distance, et c'est ce qui a été fait dans les travaux de Ford & Rasio (2006). Ces auteurs ont déterminé la distance caractéristique correspondant à la limite interne du diagramme masse-période, et elle correspond à deux fois la limite de Roche. Ce rayon limite est par exemple déjà atteint par plusieurs Jupiter ultra chauds, comme c'est le cas pour WASP-18b qui remplit son lobe de Roche (Pillitteri et al., 2014). Dans quelque 100 millions d'années, cette planète sera engloutie par son étoile hôte. Le phénomène de décroissance orbitale a même été directement observé pour WASP-12b en analysant les courbes de transit sur plus de dix ans, et son échappement atmosphérique est d'ailleurs visible en ultra-violet par le télescope Hubble (Haswell et al., 2012; Patra et al., 2020).

1.3.2.2 Coplanarité dans les systèmes de Jupiter chauds

Expliquer l'effet des marées sur l'obliquité (angle entre l'axe de rotation de l'étoile et la normale à l'orbite) est plus délicat. Pour des systèmes serrés, on s'attend à ce que cet angle soit faible de sorte que le système soit proche de la coplanarité. De plus, les scénarios de formation planétaire prévoient un angle initial faible entre l'axe de rotation de l'étoile et la normale au disque protoplanétaire dans lequel les planètes se forment.

Il faut tout d'abord savoir que la mesure de l'obliquité est difficile, et que pour beaucoup de systèmes on a seulement accès à la projection de cet angle sur la ligne de visée. La méthode généralement utilisée

est celle de Rossiter-MacLaughlin (Rossiter, 1924; McLaughlin, 1924) qui analyse la courbe de vitesse radiale de l'étoile au cours du transit d'une exoplanète afin d'en extraire le sens de rotation de l'étoile ainsi que l'angle spin-orbite. Elle se base sur l'effet Doppler dû à la rotation de l'étoile, car la planète va "bloquer" les fréquences décalées vers le bleu et vers le rouge de l'étoile en rotation le long de la ligne de visée durant son transit.

Les travaux de Winn et al. (2010) et ceux de Albrecht et al. (2012) ont montré qu'il y avait une dichotomie dans la distribution des obliquités : les étoiles plus massives que le Soleil, et donc plus chaudes, auraient un angle spin-orbite plus important. J'ai représenté dans la figure ci-contre 1.10 l'obliquité projetée sur la ligne de visée (qui reste dans la plupart des cas comparable à l'obliquité) des Jupiter chauds qui transitent, en fonction de la température effective de l'étoile hôte. On distingue en rouge les étoiles hôtes de type spectral F et A pour lesquelles $T_{\text{eff}} > 6250$ K et en bleu les étoiles plus froides M, K et G. Cette frontière témoigne simplement de la disparition de l'enveloppe convective au delà des étoiles de type F, sachant que le rétrécissement de la zone convective est progressif de M à F (comme représenté sur le schéma de gauche de la figure 1.9). L'idée est que la dissipation des flots de marée est plus importante dans la zone convective que dans la zone radiative des étoiles et que cela va se répercuter sur l'atténuation de l'obliquité. Il semblerait donc cohérent d'observer dans le graphe des obliquités projetées d'autant plus faibles que les étoiles sont froides, car la dissipation de marée serait d'autant plus importante que leur enveloppe convective est profonde (voir aussi Lai, 2012). Néanmoins, cette vision est quelque peu remise en question à ce jour par la détection d'un certain nombre de Jupiter chauds de faible obliquité orbitale projetée autour d'étoiles de température effective élevée (comme on peut le voir à la figure 1.10) et par le fait que ce modèle, qui se fonde sur les estimations de Zahn (1977) et qui fonctionne pour les systèmes d'étoiles binaires, ne soit pas directement applicable pour les systèmes exoplanétaires (Ogilvie & Lin, 2004; Baruteau et al., 2016). D'autres pistes sont explorées pour expliquer la gamme étendue d'obliquités observées, en favorisant par exemple le basculement de l'axe de rotation (causé par exemple par l'instabilité elliptique, cf. Cébron et al., 2013 et dernière section du chapitre 2), ou en avantageant les interactions entre l'étoile et son environnement turbulent lors de sa formation (p.e. Fielding et al., 2015).

On clôt cette section en mentionnant que la mesure systématique de l'angle spin-orbite non projeté sur la ligne de visée (seulement une trentaine de mesures) ainsi que la détection d'exoplanètes orbitant autour d'étoiles n'ayant pas encore dissipées leur disque (seulement quelques planètes à ce jour) sont fondamentales, dans le sens où elles vont nous permettre de mieux contraindre le (ou les) scénario(s) de formation des systèmes planétaires, qui pourraient être différents voire multiples pour chaque système exoplanétaire (p.e. Crida & Batygin, 2014).

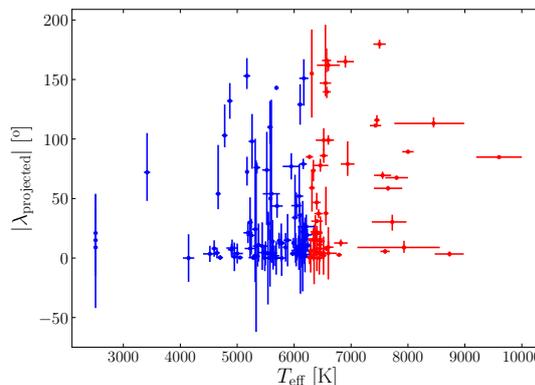


FIGURE 1.10: [Inspiré de Albrecht et al. (2012)]. Valeur absolue de l'obliquité spin-orbite projetée sur la ligne de visée en fonction de la température effective T_{eff} de l'étoile (en rouge $T_{\text{eff}} > 6500$ K et en bleu sinon). Données issues du catalogue [Tepcat](#)¹⁰ au 05/04/2020 (voir [Southworth, 2011](#), pour plus de détails).

10. Lorsque qu'une planète possède plusieurs mesures, on prend la valeur qui se rapproche le plus de la médiane des mesures.

1.4 Modélisation des marées dans les étoiles et les planètes géantes

Afin de connaître l'efficacité de la dissipation des marées stellaires ou planétaires, et ainsi son impact sur la structure et la dynamique orbitale et rotationnelle des systèmes planétaires (ou stellaire pour les étoiles binaires), on se sert souvent d'une quantité appelée facteur de qualité de la marée (MacDonald, 1964) qui est largement inspirée de la théorie des oscillateurs harmoniques forcés (Greenberg, 2009). Ce facteur Q est proportionnel au rapport de l'énergie cinétique totale contenue dans les flots de marée, et de l'énergie qui va être dissipée pendant une période orbitale (Zahn, 2008). Par conséquent, plus ce facteur est petit, plus le "rendement" des processus de friction sera bon. On peut calculer ce facteur de qualité à la fois pour la planète et pour l'étoile, et il est souvent combiné au nombre de Love (Love, 1911) qui lui prend en compte la réponse linéaire du corps perturbé par le potentiel de marée. Le nombre de Love est rigoureusement défini comme le rapport de la perturbation du potentiel gravitationnel du corps déformé, par le potentiel de marée du perturbateur évalué à la surface de l'astre. Avec ces deux grandeurs caractéristiques, on peut calculer la dissipation engendrée par les interactions de marée. Néanmoins, les déterminer n'est pas toujours chose aisée, car elles sont sensibles à la structure interne, aux mécanismes de dissipation, ainsi qu'aux fréquences de forçage du compagnon comme on va pouvoir le constater dans les sections qui suivent. Le facteur de qualité, le nombre de Love et la dissipation de marée seront explicités lors de la description formelle de l'interaction de marée en chapitre 2.

1.4.1 Modèles de dissipation avec marée d'équilibre

Les modèles les plus souvent utilisés qui estiment l'amplitude de la dissipation de marée se basent sur la théorie de la marée d'équilibre initiée par les travaux de Jean-Paul Zahn sur les étoiles binaires au cours de sa thèse (Zahn, 1966a,b,c). Les flots de marée d'équilibre, décrits en section 1.1, s'établissent dans l'ensemble du corps perturbé (panneau de droite, figure 1.1). Dans le cœur radiatif des étoiles de faible masse et dans les enveloppes radiatives des étoiles plus massives (voir schéma de gauche, figure 1.9), l'énergie des flots de marée va être dissipée par diffusion thermique, tandis que dans l'enveloppe (le cœur) des étoiles de faible (grande) masse, ces flots de marée vont être soumis à l'action des mouvements convectifs turbulents et ainsi perdre une partie de leur énergie par friction turbulente. Pour modéliser cette viscosité effective, Zahn (1966b, 1989) ainsi que Goldreich & Keeley (1977) utilisent la théorie de la longueur de mélange (Spiegel, 1963) dans les cas où les longueurs typiques des structures convectives et dues à la marée ne sont pas du même ordre de grandeur (nous renvoyons le lecteur à la section 2.3.4.1 pour une description détaillée de cette modélisation). À l'aide de ces prescriptions, Zahn (1966b,c, 1977) montre l'importance de la dissipation de la marée d'équilibre dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse, de type spectral M à F, et son caractère négligeable dans les cœurs convectifs ou les enveloppes radiatives des étoiles de masses plus importantes (types spectraux de A à O). Par ailleurs, dans les géantes rouges (qui sont des étoiles en fin de vie, voir en particulier section 3.1), la dissipation de la marée d'équilibre (dominante devant la marée dynamique) permet d'expliquer la circularisation de ces étoiles dans des systèmes binaires (Verbunt & Phinney, 1995; Beck et al., 2018).

Cette compréhension des marées dans les systèmes d'étoiles binaires a été transposée dans les systèmes exoplanétaires, motivée par l'existence de planètes à très courte période orbitale. Les efforts se sont concentrés sur la détermination du facteur de qualité et du nombre de Love par l'approfondissement des modèles théoriques (p.e. Rasio et al., 1996; Marcy et al., 1997) et l'analyse statistique des populations de planètes (Penev et al., 2012); l'enjeu étant de comprendre dans quelle mesure le système planétaire a été modelé par les interactions de marée. Pour l'aspect empirique, on citera par exemple les travaux majeurs

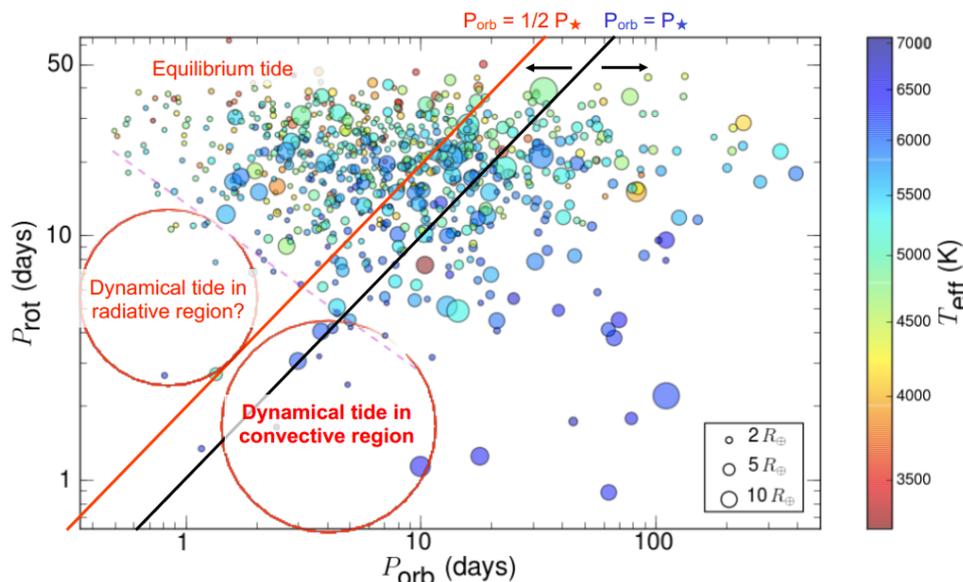


FIGURE 1.11: [Adapté à partir de la figure 2 de McQuillan et al. (2013)]. Période de rotation de l'étoile hôte (lorsqu'elle est mesurée) en fonction de la période orbitale de sa planète. La couleur donne la température effective de l'étoile. La taille des points est proportionnelle au rayon au carré de la planète. La droite en noir indique le rayon de corotation, la droite en rouge vérifie $P_{\text{orb}} = 1/2 P_{\star}$ qui correspond à la limite de propagation des ondes inertielles (voir chapitre 2), et la droite violette discontinue donne la meilleure interpolation qui délimite la présence ou l'absence d'exoplanètes.

de Hansen (2010, 2012) inspirés par les théories de la marée d'équilibre de Zahn (1977, 1989) et de Eggleton et al. (1998), et qui bousculent la vision que l'on avait du facteur de qualité, calibré auparavant à partir du système solaire seul (p.e. Goldreich & Soter, 1966). Dans les travaux de Hansen (2010, 2012), le facteur Q est tout d'abord étalonné à partir des populations d'exoplanètes en fonction de leur demi-grand axe et excentricité, puis en fonction des âges et masses de la planète et de son étoile hôte. Ainsi, de plus en plus, ce facteur Q prend en compte la spécificité des systèmes exoplanétaires, leur microphysique (p.e. l'équation d'état des intérieurs planétaires) comme on va le voir en section 1.4.3, et aussi leur macrophysique (rotation différentielle, magnétisme) qui fait l'objet de cette thèse, afin d'expliquer au mieux la diversité des architectures orbitales ainsi que la structure interne des étoiles et des planètes.

1.4.2 Ajout de la marée dynamique dans ces modèles

Considérer que la dissipation de la marée d'équilibre est une bonne approximation de la dissipation totale de marée peut cependant s'avérer erroné dans certains cas. La théorie de la marée d'équilibre échoue par exemple à expliquer les systèmes d'étoiles binaires de faibles masses circularisées âgées de plus d'un milliard d'années (alors qu'elle fonctionne bien en deçà de 1 Myr, Meibom & Mathieu, 2005; Zahn, 2013). Pour les étoiles binaires massives (de type A, B, O), les processus de dissipation de la marée dynamique (décrite en section 1.1) dans les enveloppes radiatives expliquent par contre très bien la circularisation de ces systèmes (North & Zahn, 2003; Savonije & Witte, 2002), car l'amplitude de cette marée est plus forte que celle de la marée d'équilibre (Zahn, 1977). Pour revenir aux étoiles binaires plus froides, il devient nécessaire de prendre en compte la marée dynamique à la fois dans l'enveloppe convective et le cœur radiatif. En effet, l'amplitude de la dissipation de ces marées peut être aussi comparable ou dépasser celle de la marée d'équilibre de plusieurs ordres de grandeur (Terquem et al., 1998; Ogilvie & Lin, 2007; Mathis, 2015).

Pour être plus précis sur la marée dynamique, ce sont des ondes inertielles, dont la force de rappel est la pseudo-force de Coriolis, qui vont être excitées par le potentiel de marée dans les milieux en rotation tandis que des ondes de gravité, dont la force de rappel est la poussée d'Archimède, vont se développer dans les milieux stablement stratifiés (voir chapitre 2). Les milieux radiatifs stellaires sont donc le lieu de propagation des ondes gravito-inertielles, alors que les milieux convectifs stellaires voient se propager des ondes inertielles.

Concernant les ondes gravito-inertielles (voir figure 1.12), elles sont généralement excitées à l'interface entre les zones radiative et convective et sont dissipées par diffusion thermique et friction turbulente. Ces processus dissipatifs permettent un échange de moment cinétique avec la planète (ou l'étoile dans un système binaire), et l'accélération de l'étoile (primaire) si la dissipation est suffisamment importante. On peut notamment relever deux mécanismes de dissipation efficace, la dissipation de ondes gravito-inertielles à des fréquences résonnantes (Ivanov et al., 2013; Chernov et al., 2013), ou bien leur déferlement non-linéaire au cœur des étoiles de faible masse (Barker & Ogilvie, 2010; Guillot et al., 2014) et à la surface des étoiles massives (Rogers et al., 2013). Ce deuxième mécanisme pourrait expliquer la raréfaction des géantes d'environ $10 M_J$ (en masse de Jupiter) à très courtes périodes autour d'étoiles de type M possédant un cœur radiatif, qui auraient donc pu migrer en des temps très courts vers leur étoile (Guillot et al., 2014). A contrario, on constate la survie des Jupiter chauds à de telles périodes autour des étoiles de type F, qui ne possèdent pas un cœur radiatif mais convectif et où il n'y a donc pas de déferlement.

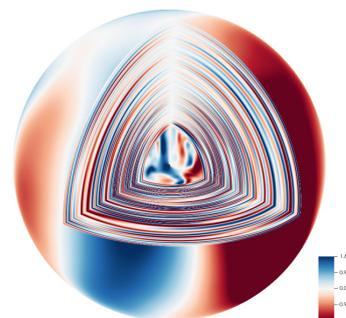


FIGURE 1.12: [PhD Q. André (PhD, 2019)]. Simulation numérique 3D d'une étoile massive avec propagation d'ondes gravito-inertielles dans l'enveloppe radiative et convection turbulente dans le cœur.

En ce qui concerne la marée dynamique dans les zones convectives, la fréquence de forçage des ondes inertielles est contrainte par la fréquence de rotation de l'étoile. Dans le cas simple où le système planétaire est déjà coplanaire et circulaire, les ondes inertielles ne peuvent être excitées que si la période orbitale est supérieure à la moitié de la période rotationnelle de l'étoile (cela sera démontré au chapitre suivant, section 2.3). Cette condition est facilement réalisée pour les étoiles jeunes et en rotation rapide comme on peut le voir sur la figure 1.11 (voir aussi l'évolution de la rotation stellaire en section 3.1). On attribue ainsi en partie la rareté des planètes autour des étoiles en rotation rapide (mise en évidence par McQuillan et al., 2013, et réaffirmée par Ahuir et al. in prep.) à l'influence des marées dynamiques, autant les ondes inertielles que les ondes gravito-inertielles, qui agissent efficacement pour dépeupler ces régions (Teitler & Königl, 2014). Ces marées peuvent en effet favoriser la décroissance orbitale, et donc "l'engloutissement" de la planète par son étoile, ou au contraire induire un éloignement rapide de la planète amenée proche de son étoile par les marées d'excentricité, suivant la position relative de la planète par rapport à l'orbite de corotation du fait de la dissipation efficace étoile-planète (Benbakoura et al., 2019, voir aussi section 1.3.2.1).

Dans les systèmes exoplanétaires, la prise en compte ou non de la marée dynamique peut avoir un impact considérable sur l'évolution et l'état final de la planète. La démonstration a été apportée par Bolmont & Mathis (2016) en confrontant différents modèles de calcul de dissipation avec prise en compte ou non de la marée dynamique. Leur étude montre que la dissipation des ondes inertielles excitées par des planètes proches peut être plus importante de plusieurs ordres de grandeur que la dissipation de la marée d'équilibre, et ce d'autant plus que le système est jeune.

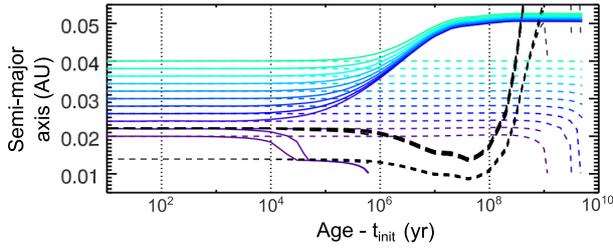


FIGURE 1.13: [Tiré de Bolmont & Mathis (2016)]. Évolution du demi-grand axe de la planète (en unité astronomique). Les modèles d'évolution colorés en traits pleins sont calculés avec la théorie de la marée dynamique de Bolmont & Mathis (2016), et ceux en pointillés fins utilisent la calibration d'Hansen (2012) avec la dissipation de la marée d'équilibre. Le rayon de corotation est représenté en pointillés noir gras, et le rayon tel que $P_{\text{orb}} = P_{\star}/2$ est en pointillé noir fin.

En effet, du fait de la rotation rapide de l'étoile hôte durant ses phases jeunes d'évolution, les ondes inertielles de marée sont efficacement excitées et dissipées. On voit ainsi sur la figure 1.13 que suivant la prescription utilisée pour le calcul de la dissipation, une planète de type Jupiter chaud peut soit migrer rapidement vers l'intérieur et être détruite par son étoile, soit au contraire migrer rapidement vers l'extérieur et atteindre une orbite stable.

1.4.3 Importance de la structure interne et de la dynamique du corps perturbé

1.4.3.1 dans les zones convectives des étoiles

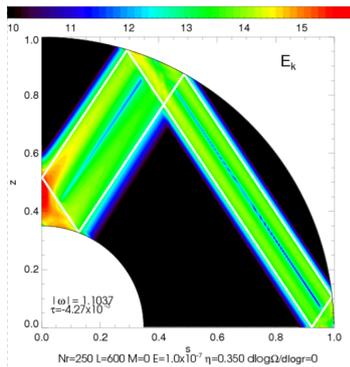


FIGURE 1.14: [Tiré de Baruteau & Rieutord (2013)]. Simulation numérique montrant la dissipation de l'énergie cinétique d'une onde inertielle se propageant dans l'enveloppe convective d'une étoile de type solaire dont on a ici une coupe méridionale.

Nous ne l'avons pas évoqué dans la section précédente, mais l'efficacité de la dissipation de marée dans les zones convectives des étoiles et des planètes dépend de la géométrie du milieu de propagation et des fréquences de forçage du potentiel de marée. Dans une sphère pleine ou un ellipsoïde, suivant leur fréquence, les ondes inertielles ont la possibilité de former des modes propres normaux et stationnaires. Comme pour les oscillateurs harmoniques, si l'onde excitée par la marée possède une fréquence proche d'une fréquence propre de la sphère (ou de l'ellipsoïde), il y a résonance, et la dissipation est importante à cette fréquence là (Bryan, 1889; Braviner & Ogilvie, 2014). Cela concerne les étoiles entièrement convectives de type M, et celles possédant un cœur convectif comme les étoiles plus massives que le Soleil (voir figure 1.9, panneau de gauche).

Le problème est différent lorsque des ondes inertielles se propagent dans une coquille sphérique, comme c'est le cas des étoiles de type M ayant une masse $M \gtrsim 0.4 M_{\odot}$, K, G et F qui possèdent un cœur radiatif et une enveloppe convective. Il n'y a plus de modes normaux réguliers et les ondes vont se focaliser et déposer leur énergie le long de chemins caractéristiques pouvant être déterminés analytiquement (voir figure 1.14). Ces cycles, appelées attracteurs, sont le lieu d'une dissipation plus intense encore que dans les cas sphère pleine, comme cela a été montré en particulier par Rieutord & Valdetaro (1997) et Ogilvie (2005, voir en particulier le chapitre 2). Par ailleurs, ces cycles et leur dissipation associée dépendent fortement de la viscosité effective issue des mouvements convectifs turbulents d'une part (p.e. Auclair Desrotour et al., 2015), et de la taille relative des couches convectives et radiatives d'autre part, c'est-à-dire du rapport d'aspect en rayon¹¹ de l'astre (Goodman & Lackner, 2009; Ogilvie, 2013).

11. Le rapport d'aspect en rayon est défini comme $\alpha = R_c/R_*$, où R_* et R_c sont respectivement les rayons de l'étoile et de son cœur.

Dans ce contexte, l'étude de Mathis (2015) a permis de montrer, en utilisant le formalisme d'Ogilvie (2013) ainsi que les grilles d'évolutions stellaires de Siess et al. (2000), que la dissipation était maximale, à rotation fixée, pour des rapports d'aspect en masse et en rayon intermédiaires (i.e. un cœur radiatif aussi épais que l'enveloppe convective). Les étoiles qui se rapprochent le plus de ce rapport durant la séquence principale¹² sont les étoiles de type K de $0.6 M_{\odot}$. Elles présentent donc la dissipation maximale (par rapport aux autres masses) durant cette période de leur vie pour une rotation fixée. En poursuivant ce raisonnement, la dissipation est donc minimale pour les étoiles ayant la plus petite zone convective, c'est-à-dire les F; cela avait déjà été pointé par exemple par Barker & Ogilvie (2009).

Cependant, ce rapport d'aspect évolue au cours de la vie d'une étoile. En effet, toutes les étoiles sont entièrement convectives lors de leur formation, puis un cœur radiatif se développe au cours de la pré-séquence principale jusqu'à atteindre la valeur de rapport d'aspect en rayon qui caractérise son type spectral sur la séquence principale. De plus, la rotation de l'étoile change au cours de son évolution (Gallet & Bouvier, 2013, 2015, voir aussi section 3.1). Ces évolutions structurelles et rotationnelles simultanées ont été prises en compte par Bolmont & Mathis (2016) et Gallet et al. (2017). Ces auteurs ont montré que la dissipation était maximale en pré-séquence principale pour tout type spectral, et qu'elle pouvait varier de plusieurs ordres de grandeurs selon la masse et l'âge de l'étoile. Ces résultats importants sont illustrés figure 1.15. L'effet de la métallicité¹³ de l'étoile a également été explorée par Bolmont et al. (2017). Là aussi, l'impact sur la dissipation est significatif, pouvant modifier l'issue de la migration de la planète selon l'âge de l'étoile, sa masse et sa métallicité. Ces différents travaux rendent donc la prise en compte des aspects dynamiques et structurels des étoiles essentiels pour comprendre la formation et l'évolution d'un système.

1.4.3.2 et dans les planètes

Lorsque l'on trace le diagramme masse-rayon des exoplanètes découvertes (voir figure 1.19), on s'aperçoit que la dispersion est importante à masse ou à rayon donné. Cela traduit une grande diversité de la densité moyenne et donc de la composition de ces planètes. Or, l'étude des interactions de marée dans notre système solaire montre que la réponse au champ gravitationnel différentiel de marée, et donc que la dissipation, est différente selon la structure et la composition du corps perturbé¹⁴. De plus, les parties les plus internes comme les cœurs compacts supposés dans les géantes gazeuses (voir figure 1.9, panneau de droite) peuvent aussi contribuer de manière significative à la dissipation de marée dans ces planètes. C'est ce qui a été démontré pour Jupiter et Saturne que l'on a souvent modélisées en première approximation avec un modèle bi-couche : un cœur solide de roches et de glaces, et une large enveloppe convective gazeuse constituée d'hélium et d'hydrogène qui le recouvre (p.e. Pollack et al., 1996; Guillot, 1999). À l'aide de relevés astrométriques acquis sur plus de dix ans sur l'architecture orbitale des satellites des

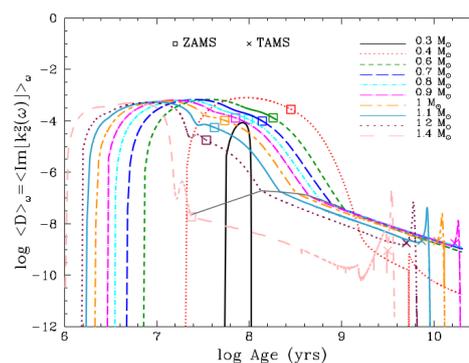


FIGURE 1.15: [Tiré de Gallet et al. (2017)]. Dissipation de marée moyennée en fréquence en fonction de l'âge d'étoiles de masse différente avec prise en compte de leur évolution rotationnelle.

12. La vie d'une étoile est marquée par différents stades d'évolution, parmi lesquels la pré-séquence principale (formation de l'étoile) et la séquence principale (phase durant laquelle l'hydrogène est converti en hélium). Ces phases seront plus amplement décrites dans le chapitre 3.

13. La métallicité est la fraction massique des éléments plus lourds que l'hydrogène et l'hélium.

14. On citera l'exemple des fines couches océaniques terrestres qui contribuent majoritairement à la dissipation de marée totale (fluide+solide) dans la Terre, alors qu'elles ne font que 4 km d'épaisseur en moyenne, en comparaison des 6371 km de rayon moyen volumétrique.

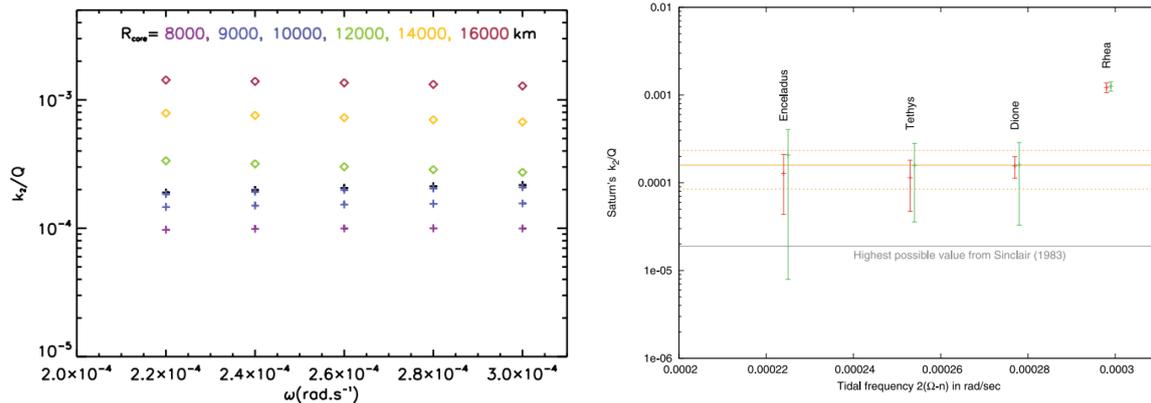


FIGURE 1.16: [Graphes tirés de Lainey et al. (2017)]. Rapport du nombre de Love quadripolaire k_2 sur le facteur de qualité Q , donc de la dissipation (voir chapitre 2), en fonction de la fréquence de marée. *Gauche* : Dissipation pour six valeurs différentes de la taille du cœur de Saturne. *Droite* : Dissipation dans Saturne pour les fréquences de marée de ses principaux satellites. Les valeurs en rouge et verte correspondent respectivement aux dissipation déduites des observations astrométriques de l'IMCCE et du JPL. Les lignes horizontales oranges correspondent aux dissipation prédites par le modèle bi-couche avec un cœur visco-élastique stratifié en densité.

géantes gazeuses, les travaux de Lainey et al. (2009) dans le système jovien, et ceux de Lainey et al. (2012) dans le système saturnien, ont établi que la dissipation déduite de ces observations était dix fois supérieure à celle prédite par la théorie qui calibre la dissipation de marée planétaire en considérant que les satellites se sont formés en même temps que la planète, pour ensuite migrer vers leur position actuelle en ~ 4.5 milliards d'années (Goldreich & Soter, 1966). L'étude de Remus et al. (2012b) a permis de lever en partie le voile sur cette contradiction en étudiant la dissipation générée par un cœur solide dans un modèle bi-couche en fonction de la visco-élasticité du cœur et de la taille respective des couches solide et fluide. Si il est simplifié, leur modèle permet d'atteindre les facteurs de qualité déduits des observations de Jupiter, Saturne et de leurs satellites. Il a par ailleurs été appliqué avec succès aux exoplanètes par Storch & Lai (2014, 2015) et Remus et al. (2015), et permet notamment d'expliquer la présence des planètes géantes à très courte période à l'aide du mécanisme de migration à haute excentricité. Sur la même voie, Guenel et al. (2014) ont complété ce modèle en ajoutant la dissipation associée aux processus de friction turbulente appliquée aux ondes inertielles de marée dans l'enveloppe convective. La dissipation y est certes plus faible (que celle associée à un cœur solide), mais elle ne peut néanmoins pas être négligée. La version plus complète de Lainey et al. (2017) pour Saturne, qui incorpore les variations de densité dans son cœur et utilise des mesures astrométriques plus précises grâce aux données de la sonde Cassini, permet de conforter les résultats de Remus et al. (2012b), avec des conséquences importantes sur les mécanismes de chauffage, l'évolution et même la formation des satellites de Saturne¹⁵. Le graphe de gauche de la figure 1.16 permet de se rendre compte de la variation d'amplitude de la dissipation pour différentes tailles du cœur en fonction de la fréquence de marée. On a ici la confirmation que la dissipation peut varier sur plus d'un ordre de grandeur en fonction de la structure interne de la planète. Par ailleurs, un calcul plus fin de la dissipation totale dans différents modèles (modèle multi-couches, avec p.e. un cœur solide et des zones convectives et éventuellement radiatives etc.) et sa confrontation avec la dissipation de marée déduite du suivi astrométrique des satellites, pourrait permettre de mieux contraindre la structure interne des géantes gazeuses, ainsi que la taille d'un cœur compact si il existe (voir chapitre 7, et Debras & Chabrier, 2019, qui parle notamment d'un cœur dilué enrichi en métaux lourds). Les auteurs parviennent à retrouver le bon ordre de grandeur de la dissipation dans Saturne

15. Pour plus de détails, voir la vidéo de l'équipe Encelade <https://www.issibern.ch/teams/>, et Charnoz et al. (2011), Crida & Charnoz (2012).

aux fréquences d'Encelade, de Thétys et de Dione (voir panneau de droite dans la figure 1.16). Nous reviendrons sur le cas de Rhéa dans la section qui suit. On remarque par ailleurs sur les deux graphes de la figure 1.16 que l'on est peu sensible aux fréquences de marée, comme cela avait déjà été remarqué par [Lainey et al. \(2012\)](#). Ceci est en faveur d'une forte dissipation au niveau du cœur, car la dissipation y est pratiquement indépendante de la fréquence alors qu'en zone convective et radiative, la dissipation n'est vraiment efficace qu'à des fréquences spécifiques résonnantes (p.e. [Ogilvie & Lin, 2004](#), voir aussi chapitre 2). Ici, un modèle de dissipation de marée moyennée en fréquence semble donc suffire si l'on se restreint aux trois premiers satellites, ce qui n'est pas forcément le cas dans tous les systèmes exoplanétaires.

Dans les zones convectives, l'hypothèse selon laquelle la dissipation de marée ne dépend pas des fréquences de forçage qui légitime l'utilisation de la dissipation moyennée en fréquence, est seulement raisonnable lorsque la viscosité n'est pas excessivement faible. En effet, [Ogilvie & Lin \(2004\)](#) et [Auclair Desrotour et al. \(2015\)](#) ont montré que l'intensité de la dissipation de marée aux fréquences résonnantes dans une coquille convective est d'autant plus forte que la viscosité est faible. Pour montrer l'importance de cette dépendance en fréquence, il faut s'intéresser à la dissipation de marée dans les systèmes exoplanétaires. Si la dissipation de marée était aussi efficace sur la période orbitale qu'elle ne l'est sur l'obliquité des systèmes, on verrait peu de planètes à très courte période, car ces dernières auraient pu migrer vers l'intérieur en à peine quelques millions d'années (p.e. [Ogilvie, 2014](#)). L'idée ici est que les transferts de moment cinétique entre l'étoile et sa planète ne sont pas les mêmes pour les processus de décroissance orbitale ou d'alignement spin-orbite, car les fréquences mises en jeu pour ces processus sont différentes ([Barker & Ogilvie, 2009](#); [Lai, 2012](#)).

On terminera par souligner que ce qui est vrai pour Jupiter et Saturne ne l'est pas forcément pour des exoplanètes comparables à nos géantes gazeuses. Le calcul du facteur de qualité dans des systèmes de Saturne chauds (découverts par TESS, voir notamment les articles de [Van Eylen et al., 2018](#); [Huber et al., 2019](#)) montre que la dissipation de marée y est plus faible, et donc que la structure, la composition, la dynamique interne et plus généralement les processus de dissipation dans ces géantes sont sans doute très différents de ce que l'on connaît dans notre système solaire. Cela témoigne une fois de plus de la spécificité de chaque système et implique la nécessité de les caractériser au mieux afin d'avoir une vision cohérente de leur évolution depuis leur formation.

Cet inventaire des effets structurels et dynamiques sur la dissipation de marée dans les étoiles et les planètes amène à réfléchir sur la portée de l'étude des interactions de marée. D'une part, si l'on connaît la structure de la planète (ce qui est rarement le cas), on peut contraindre l'efficacité de la dissipation de marée et donc remonter au scénario de formation. D'autre part, en ayant une bonne connaissance des processus de dissipation selon les milieux, cela peut permettre d'en déduire la structure de la planète.

1.4.4 Processus manquants

1.4.4.1 Investigation récente des effets de la rotation différentielle et du magnétisme

Dans cette quête pour améliorer notre compréhension des effets de marée, certains processus pouvant affecter la dissipation de marée n'ont pas été discutés dans la section précédente. Nous allons nous intéresser ici à deux nouveaux mécanismes qui ont récemment suscité l'intérêt, et qui font l'objet de cette thèse, à savoir la rotation différentielle et le magnétisme stellaire, et leur influence sur l'excitation, la propagation et la dissipation des flots de marée dans l'enveloppe convective des étoiles de faible masse ou des planètes géantes (voir figure 1.4).

La rotation des étoiles de faible masse et des planètes n'est en général pas uniforme, autant en surface que dans leur enveloppe convective. Ce phénomène a tout d'abord été observé à la surface du Soleil, dès que l'on s'est aperçu que les taches solaires ne tournaient pas à la même vitesse en fonction de leur latitude. L'équateur tourne en environ 25 jours alors que le pôle tourne en plus de 35 jours. L'héliosismologie, discipline qui étudie principalement les modes de vibration acoustiques du Soleil, a permis dans ce contexte de sonder plus en profondeur notre étoile. Grâce à cette technique et plus précisément en utilisant la perturbation des fréquences propres d'oscillation par la rotation, [Schou et al. \(1998\)](#) et [Couvidat et al. \(2003\)](#) ont établi le profil de rotation du Soleil jusqu'à $0.2 R_{\odot}$ pour la seconde étude, mettant en évidence une rotation différentielle qui dépend principalement de la latitude dans toute l'enveloppe convective et une rotation uniforme dans la zone radiative (voir figure 1.17). Dans le cœur, [García et al. \(2007\)](#) prévoient une potentielle remontée du profil de rotation, avec une fréquence de rotation 3 ou 4 fois plus forte que celle de la zone radiative. L'astérosismologie a dévoilé que les étoiles analogues au Soleil présentaient aussi un gradient de rotation dépendant de la latitude dans leur enveloppe convective ([Benomar et al., 2018](#)), avec pour beaucoup des cisaillements plus forts que ceux observés dans le Soleil, mais avec un faible contraste de rotation entre la zone radiative et convective dans les étoiles de type solaire ([Benomar et al., 2015](#)), cohérent avec ce que l'on observe dans le Soleil (figure 1.17).

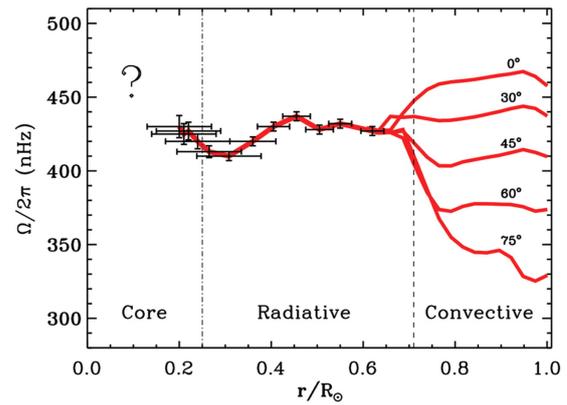


FIGURE 1.17: [Tiré de [García et al. \(2007\)](#)] Fréquence de rotation à l'intérieur du Soleil en fonction du rayon normalisé au rayon de surface et de la latitude.

Dans les planètes géantes de notre système solaire, on observe aussi des profils de rotation non uniformes dans les couches convectives de sous-surface. Ces planètes qui tournent en moins d'un jour présentent un profil de rotation qui dépend de la distance à l'axe de rotation, c'est-à-dire un profil cylindrique, ce qui serait un trait commun avec les étoiles en rotation rapide (p.e. [Brown et al., 2008](#); [Brun et al., 2017](#)). Les profils de rotation et même le taux de rotation des planètes extrasolaires restent pour l'instant largement inconnus. Récemment, le plongeon final de la sonde Cassini dans Saturne a révélé, à l'aide de la mesure des moments gravitationnels qui nous renseignent sur la rotation différentielle, que les forts vents zonaux que l'on observe sous forme de bandes longitudinales à la surface de Saturne (et Jupiter) s'étendent en fait jusqu'à 9000 km sous la surface ([Galanti et al., 2019](#)). Grâce à la sonde Juno (toujours en service), on avait découvert par la même technique que ceux de Jupiter s'étendaient jusqu'à 3000 km sous la surface ([Kaspi et al., 2017](#); [Guillot et al., 2018](#)). L'influence de profils de rotation réalistes sur la propagation des flots de marée et leur dissipation a été examiné en premier par [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#). En utilisant des profils de rotation dit "shellular" (c'est-à-dire ne dépendant que du rayon) et cylindriques, ces auteurs ont montré que les propriétés de propagation et de dissipation des ondes inertielles dans une coquille convective pouvaient être très affectées par les gradients de vitesse angulaire. En utilisant cette fois-ci un profil de rotation latitudinale conique (solaire ou anti-solaire), [Guenel et al. \(2016a\)](#) se sont aussi intéressés à cette problématique, et en particulier aux résonances dites de corotation, régions pour lesquelles la fréquence de forçage de la marée est proportionnelle à la fréquence locale de rotation du fluide. Ces auteurs ont souligné que les ondes de marée à ces fréquences pouvaient interagir fortement avec les flots zonaux, donnant lieu à une forte dissipation de l'énergie cinétique de l'onde et d'importants échanges de moment cinétique (voir aussi [Guenel et al., 2016b](#); [Favier et al., 2014](#)). Par ailleurs, [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) et [Guenel et al. \(2016a\)](#) ont aussi remarqué qu'en présence d'une résonance de corotation dans l'enveloppe convective, les modes propres d'oscillation peuvent devenir instables à faible viscosité turbulente. Ces différents phénomènes autour des résonances de corotation en zone convective

restent encore mal compris, et méritent de plus amples investigations. On ajoutera, pour conclure sur le cisaillement, que le domaine d'excitation des ondes inertielles se propageant dans un astre en rotation différentielle est élargi. Cela signifie qu'une planète d'orbite coplanaire et circulaire et qui possède une période orbitale P_{orb} telle que $P_{\text{orb}} < 1/2P_{\text{rot}}$ (régime évanescent pour les ondes inertielles sans rotation différentielle) peut potentiellement exciter des ondes inertielles si l'étoile est en rotation différentielle. Ceci constitue un réservoir de dissipation d'énergie non pris en compte par les modèles actuels (voir par exemple la figure 1.11).

Les régions convectives des étoiles et des planètes géantes gazeuses de notre système solaire sont aussi le siège d'un effet dynamo puissant capable de générer des champs magnétiques très forts à l'intérieur et à la surface¹⁶ de l'astre (p.e. le livre et la revue de [Glatzmaier, 2013](#); [Brun & Browning, 2017](#), respectivement). L'activité magnétique peut donner lieu à des phénomènes très divers que l'on sait bien caractériser pour le Soleil, comme les taches, les éruptions solaires ou encore les boucles coronales. Notre étoile possède un cycle magnétique de 22 ans, avec une activité magnétique qui fluctue et peut atteindre des minima pendant lesquels le Soleil est calme avec peu de phénomènes éruptifs et de taches à sa surface. Dans ces moments, la topologie externe du champ magnétique est simple, presque dipolaire¹⁷.

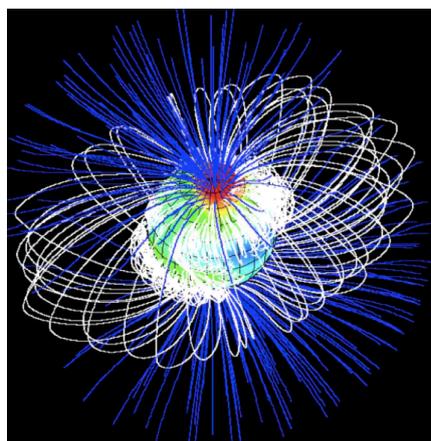


FIGURE 1.18: [Tiré de [Gregory et al. \(2010\)](#).] Reconstruction de la topologie du champ de surface de l'étoile de faible masse $M = 0.7 M_{\odot}$ BP Tau, en pré-séquence principale.

Cependant, la géométrie et l'amplitude des champs magnétiques de surface et dans les régions internes varient beaucoup au cours du temps et selon la masse et l'âge des étoiles. Pour détecter ces champs à la surface des étoiles, on se sert de spectropolarimètres de haute précision qui recueillent les spectres optiques et dans l'infrarouge proche des astres en question, comme NARVAL installé au Pic du Midi, et SPIRou le successeur d'ESPaDOnS au CFHT d'Hawaï. Grâce à ces instruments, on applique l'imagerie Zeeman-Doppler, qui est une technique tomographique permettant de retrouver la géométrie et l'amplitude du champ magnétique de grande échelle à la surface d'une étoile (p.e. [Donati et al., 2006](#), voir aussi chapitre 3, section 3.2.1). La figure 1.18 ci-contre montre un exemple de la topologie des champs de surface que l'on peut reconstruire, où les lignes de champs ouvertes (en bleu) et fermées (en blanc) sont le résultat de l'extrapolation potentielle de ce champ. Pour cette étoile jeune et peu massive, les composantes dipolaire et octupolaire du champ magnétique sont dominantes.

Une première conséquence de l'impact du magnétisme sur les flots de marée est le fait qu'il modifie la nature des ondes excitées : on parle désormais d'ondes magnéto-inertielles dans la zone convective et magnéto-gravito-inertielles dans la zone radiative, dont le domaine de propagation n'est bien sûr plus le même du fait de l'action de la force de Lorentz. Deuxièmement, les propriétés de propagation et de dissipation de ces ondes sont, comme en présence de rotation différentielle, d'autant plus modifiées que le champ magnétique est fort, comme l'ont montré [Wei \(2016\)](#) et [Lin & Ogilvie \(2018\)](#). De plus, le mécanisme de dissipation diffère à champ fort, car le réservoir dominant d'énergie n'est plus l'énergie

16. À la surface du Soleil coexistent des champs de grande échelle d'amplitude modérée (de l'ordre du Gauss, [DeRosa et al., 2012](#)) et des champs de petite échelle d'intensité plus importante (par exemple de l'ordre du kilo-Gauss dans les taches solaires, [Brun & Browning, 2017](#)).

17. Comme j'ai pu le constater en observant la couronne solaire lors de l'éclipse totale de 2019 au Chili, en déplacement pour le symposium IAU 354.

cinétique mais l'énergie magnétique qui est dissipée par chauffage Ohmique. À ce propos, [Wei \(2018\)](#) a établi un résultat intéressant dans le contexte des étoiles en rotation rapide : l'énergie magnétique et la dissipation de marée totale seraient proportionnelles, ce qui pourrait permettre de contraindre l'une grâce à l'autre. Néanmoins, ces différents résultats s'appuient sur des topologies assez simples du champ magnétique, i.e. uniforme, avec un champ vertical, ou dipolaire, et pas de prise en compte de la variation de densité dans la zone convective. Enfin, l'évolution structurelle et dynamique des corps n'est pas prise en compte.

1.4.4.2 (Autres) questions ouvertes

Je conclus ce chapitre introductif par une liste non exhaustive des interrogations qui demeurent, et pour lesquelles une caractérisation plus complète des processus de marée, dont ceux discutés dans la section précédente, pourraient permettre la résolution.

L'anomalie en rayon des planètes géantes à courte période (p.e. [Smalley et al., 2012](#)), fait partie des questions qui restent non-tranchées (population en bleu foncé sur la figure 1.19). En effet, on observe que ces planètes possèdent des densités inférieures à 1/10 de la densité de Jupiter et des rayons plus grands. Certains y voient la conséquence du rayonnement intense de leur étoile hôte proche qui conduit à l'évaporation des couches supérieures des enveloppes des planètes, et donc un élargissement du rayon et une perte de masse rendant ainsi les densités plus faibles ([Baraffe et al., 2005](#)). D'autres mettent en avant le chauffage thermique de marée ([Arras & Socrates, 2010](#)) dans les régions internes (comme c'est le cas pour Encelade) afin de maintenir un rayon plus élevé que celui auquel on s'attend. D'autres encore expliquent ce rayon plus élevé par des modèles de composition et de mélange différents du modèle bi-couche standard (cœur solide + enveloppe convective) souvent employé pour modéliser la dissipation de marée dans les exoplanètes ([Chabrier & Baraffe, 2007](#)).

Par ailleurs, si l'on peut donner une évaluation rapide de la puissance des effets de marée à l'aide de la dissipation moyennée en fréquence, il est certain qu'elle ne convient pas à tous les problèmes comme évoqué en section 1.4.3.2. Le facteur de qualité, le nombre de Love, et donc la dissipation possèdent une dépendance en fréquence ([Ogilvie, 2014](#); [Auclair Desrotour et al., 2015](#)), qui pourrait jouer un rôle important dans certains systèmes serrés. [Damiani & Mathis \(2018\)](#), qui se sont penchés sur les marées d'obliquité avec un modèle bi-couche sans stratification de densité, ont montré que ces marées étaient trop efficaces, forçant la coplanarité pour tous les systèmes, ce qu'on ne constate pas pour les étoiles chaudes (voir figure 1.10). Dans ce cas particulier, un modèle de dissipation avec une dépendance en fréquence et un profil réaliste en densité pourraient donner des résultats plus robustes. Au contraire, on observe de "trop" faibles obliquités pour des planètes qui orbitent loin de leur étoile hôte, ce qui va au delà de la portée des interactions de marée ([Mazeh et al., 2015](#)).

Enfin, même si les récents modèles d'intérieur planétaire pour Jupiter et Saturne donnent des résultats globalement probants, ils n'expliquent par exemple pas le surplus de dissipation calculée à la fréquence de marée de Rhéa (voir figure 1.16, panneau de droite), un ordre de grandeur plus haute que celle

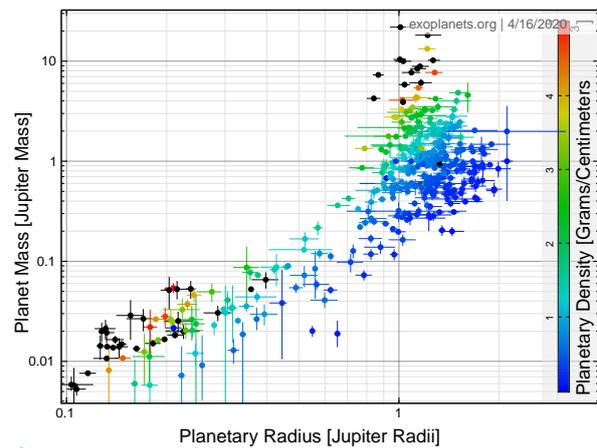


FIGURE 1.19: Masse de planètes (plutôt massives) versus leur rayon et leur densité en couleur. Pour comparaison, la densité moyenne de Jupiter est d'environ $1,3 \text{ g/cm}^3$.

attendue par les observations. Plusieurs mécanismes ont été étudiés pour expliquer cet écart, dont le piégeage en résonance des ondes gravito-inertielles (Fuller et al., 2016; Luan et al., 2018), les instabilités double-diffusives (André et al., 2017a, 2019), ou l'effet de la rotation rapide sur la convection turbulente (Mathis et al., 2016). Pour le premier, l'excès de dissipation de marée implique les marées dynamiques et s'explique par l'adéquation entre une fréquence de forçage de marée d'un satellite et la fréquence d'une onde interne dans le corps primaire pour laquelle la dissipation d'énergie est importante. Les ondes candidates peuvent tout aussi bien être des modes de gravité amortis par diffusion thermique dans les régions stablement stratifiées, ou bien des ondes inertielles dans les régions convectives focalisées le long des attracteurs ou au niveau des couches critiques qui dissipent leur énergie par amortissement turbulent (ce processus est en particulier privilégié en ce qui concerne la dissipation induite par Titan dans Saturne, Lainey et al., 2020). Dans le second cas, l'existence de couches semi-convectives (d'après les tout derniers modèles d'intérieur des planètes géantes par Debras & Chabrier, 2019, voir aussi figure 1.9, panneau de droite) avec alternance de zones stablement stratifiée et convective est susceptible d'accroître la dissipation des ondes internes dans cet environnement. Enfin, Mathis et al. (2016) ont constaté que dans les étoiles en rotation rapide la viscosité effective turbulente (issue du modèle de la longueur de mélange) était plus faible, favorisant des pics de dissipation plus intense à des fréquences spécifiques (Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015).

Tout ce qui a été dit plus haut (notamment en section 1.4) concerne un traitement linéaire des flots de marée. Or, un traitement non-linéaire de ces flots pourrait apporter un réservoir de dissipation supplémentaire. On peut citer par exemple le déferlement non-linéaire des modes de gravité (processus analogue pour les ondes internes dans les océans terrestres) attendu dans les zones radiatives des étoiles de faible masse. C'est en tout cas ce processus que mettent en avant Barker & Ogilvie (2010) et Essick & Weinberg (2016) et qui suscite dernièrement beaucoup d'intérêt car il pourrait expliquer la rareté des planètes plus massives que Jupiter de période orbitale inférieure à deux jours, comme le système de Jupiter ultra-chaud WASP-12(b) (Weinberg et al., 2017). Par ailleurs, pour les systèmes d'étoiles binaires qui possèdent un rapport d'amplitude de marée tel que $\epsilon \lesssim 1$, un traitement non-linéaire est requis (Ogilvie, 2014).

Les différents travaux sur les effets séculaires de l'interaction de marée, avec prise en compte de l'évolution stellaire (p.e. Bolmont & Mathis, 2016; Bolmont et al., 2017; Gallet et al., 2017) ont souligné la nécessité de coupler évolution orbitale et stellaire. C'est le travail qu'ont réalisé Benbakoura et al. (2019) avec l'utilisation d'un code numérique 1D qui modélise un système exoplanétaire coplanaire et circulaire en considérant l'évolution structurelle de l'étoile, son freinage par vent, ainsi que les interactions de marée. Ces auteurs mettent notamment en exergue le cas où l'étoile "avale" sa planète, ce qui perturbe fortement la rotation de cette étoile en l'accéléralant et en modifiant son évolution rotationnelle.

1.5 Organisation du manuscrit

Cette thèse porte sur l'influence du magnétisme et de la rotation différentielle sur l'excitation, la propagation et la dissipation des flots de marée, et s'intéresse en particulier aux ondes inertielles en zone convective modifiées par ces deux processus. Ces aspects sont principalement étudiés à travers le prisme stellaire, mais des applications sont faites pour les planètes géantes gazeuses Jupiter et Saturne. Le manuscrit est découpé en trois parties de deux chapitres chacune, dont une partie I introductive sur les marées (dont ce chapitre dépend), une partie II sur le magnétisme, et une partie III sur la rotation différentielle, chaque partie étant appliquées aux marées dans les régions convectives des systèmes étoile-planète ou planète-satellite.

En chapitre 1, nous avons inventorié les applications observationnelles touchant aux interactions de marée dans les systèmes étoile-planète ou binaires d'étoiles. En chapitre 2, le formalisme analytique linéaire associé aux interactions de marée sera détaillé : nous exprimerons le potentiel de marée et la dissipation associée à la réponse de marée que sont les flots de marée d'équilibre et dynamique. Nous rentrerons plus dans les détails quant à la nature des ondes excitées par le forçage de marée dans les milieux en rotation, et en particulier sur leurs propriétés de propagation et de dissipation. Pour finir, nous discuterons les limites de l'approche linéaire de ce formalisme.

La partie II concerne le magnétisme stellaire et son impact sur les marées. Le chapitre 3 fait l'état de l'art sur la caractérisation du magnétisme en région convective dans les étoiles de faible masse, du point de vue observationnel et des simulations numériques. À l'aide de modèles d'évolution stellaire et de lois d'échelle issues de la théorie dynamo, nous construirons des champs à grande échelle à la base et au sommet de l'enveloppe convective d'étoiles de faible masse au cours de leur évolution. Ces estimations nous seront utiles en chapitre 4, pour évaluer l'influence d'un champ magnétique de grande échelle, d'abord sur l'excitation d'ondes de marée, puis sur le régime de dissipation de ces ondes, dans le contexte d'étoiles de différentes masses et stades évolutifs, et aussi pour Jupiter.

En partie III, nous nous intéresserons à l'influence de la rotation différentielle sur la propagation des ondes inertielles en zone convective et tout particulièrement au voisinage de lieux singuliers appelés résonances de corotation ou couches critiques. En chapitre 5, nous discuterons des profils de rotation que l'on peut rencontrer dans les enveloppes convectives des étoiles et des planètes géantes grâce aux observations héliosismiques et astérosismiques et aux missions spatiales d'exploration planétaire, ou attendues dans les simulations numériques 3D. Nous essaierons de comprendre en chapitre 6 les interactions complexes entre le flot moyen cisailé selon la latitude ou la distance à l'axe de rotation et les ondes inertielles, à l'aide d'un modèle simple de boîte cartésienne, de manière à utiliser des approches à la fois analytique et numérique. Des applications aux intérieurs des étoiles et des planètes géantes seront effectuées en fin de chapitre.

Enfin, en chapitre 7, nous résumerons les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse, et nous décrirons les perspectives envisagées qui s'inscrivent dans la poursuite de ces travaux.

Sommaire

2.1 Potentiel de marée dans le cas idéal d'un système à deux corps	29
2.1.1 Formalisme mathématique	29
2.1.2 Variation des paramètres orbitaux et rotationnels	31
2.2 Flots de marée	34
2.2.1 La marée d'équilibre : un ajustement quasi-hydrostatique	34
2.2.2 La marée dynamique : excitation d'ondes internes	35
2.3 Propriétés des ondes inertielles excitées par la marée	37
2.3.1 Analyse des équations de base	37
2.3.2 Propagation le long des caractéristiques	39
2.3.3 Dissipation des modes résonnants	41
2.3.4 Processus dissipatifs en zone convective	43

Dans ce chapitre, nous allons prendre un point de vue plus formel que dans le chapitre précédent pour décrire les interactions de marée, afin de comprendre dans quel contexte analytique et numérique s'inscrivent les travaux des chapitres qui suivent.

2.1 Potentiel de marée dans le cas idéal d'un système à deux corps

2.1.1 Formalisme mathématique

Considérons un système à deux corps isolé, un système étoile-planète ou une planète et son satellite naturel comme le système Terre-Lune. Comme illustré à la figure 1.1, on s'intéresse à l'interaction gravitationnelle entre un corps primaire (plus massif) de masse M_1 , et un compagnon (moins massif) de masse M_2 . Pour simplifier l'écriture du potentiel gravitationnel, le compagnon est considéré comme ponctuel, approximation valable pourvu que la distance d entre les deux corps soit suffisamment grande, ce qui en pratique est le cas pour $d > 5R_1$ avec R_1 le rayon physique du corps primaire (voir par exemple [Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009](#)). Cette condition, qui nécessite une distance mutuelle légèrement supérieure à la limite de Roche¹, est en général vérifiée (nous discuterons le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée en section 2.3.4.2). Le potentiel gravitationnel dont est issue la force que le compagnon (corps 2) exerce en un point M du corps primaire (corps 1) s'écrit :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = -\frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} = -\frac{GM_2}{d} \left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{d^2} + \frac{r^2}{d^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.1)$$

1. La limite de Roche est $d_R \simeq 2.5R_1(\rho_1/\rho_2)^{1/3}$, où $\rho_{1,2}$ sont les densités volumiques de masse des deux corps.

dans le référentiel centré sur le corps 1, et en utilisant les notations de la figure 2.1. À noter que l'on considère, à la différence de la revue de [Ogilvie \(2014\)](#), que le centre de masse du système à deux corps est confondu avec le centre du corps 1, ce qui suppose $M_2 \ll M_1$, condition en général vérifiée pour les systèmes planétaires considérés ici mais pas par exemple pour des étoiles binaires dont le rapport de masse des composantes est proche de 1 (p.e. [Zahn, 1966a](#)). Étant donné que $r \ll d$, on peut développer le potentiel (2.1) en puissances de r/d :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = -\frac{GM_2}{d} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{d^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})^2 - r^2 d^2}{2d^4} + \dots \right). \quad (2.2)$$

Les deux premiers termes correspondent au potentiel orbital responsable du mouvement képlérien du primaire. Ces termes peuvent être retrouvés en intégrant par rapport à \mathbf{r} la force centrale qu'exerce B sur A, i.e. $-GM_B \mathbf{d}/d^3$, car elle dérive du potentiel orbital. Les termes qui suivent concernent le potentiel de marée. Le potentiel en série de Taylor (2.2) peut s'écrire sous forme exacte à l'aide des polynômes de Legendre P_l :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = -\frac{GM_2}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{d^l} P_l(\cos \gamma), \quad (2.3)$$

où l correspond au degré du polynôme et $\gamma = \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}/(rd)$ est appelé l'angle zénithal du perturbateur. À noter que les trois premiers termes de degrés $l = \{0, 1, 2\}$ permettent de retrouver les trois premiers termes de l'expression (2.2). Par ailleurs, le terme de degré 2, terme dominant quadripolaire du potentiel de marée, sert souvent d'approximation au potentiel de marée que l'on notera Ψ :

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = \underbrace{-\frac{GM_2 r^2}{d^3} P_2(\cos \gamma)}_{\Psi_2} - \frac{GM_2}{d} \sum_{l=3}^{\infty} \frac{r^l}{d^l} P_l(\cos \gamma). \quad (2.4)$$

Lorsque seul Ψ_2 est considéré, on parle d'approximation quadripolaire. Ce potentiel de marée peut être écrit encore différemment, à l'aide de séries de Fourier en remarquant que le vecteur de séparation \mathbf{d} varie de manière périodique en raison du mouvement orbital képlérien du corps 2. Cela permet de découpler les variables de temps et d'espace. Cette nouvelle écriture fait intervenir les paramètres képlériens orbitaux du système, à savoir l'excentricité e , le moyen mouvement du corps 1 Ω_o , l'obliquité λ qui est l'angle entre les vecteurs Ω_o et Ω_s , et le demi-grand-axe a ($= d$, en supposant l'orbite circulaire). L'angle zénithal γ s'exprime alors en fonction de ces paramètres et des coordonnées θ, φ du référentiel sphérique centré sur le corps 1. À l'aide du formalisme de [Kaula \(1961\)](#) et [Polfiet & Smeyers \(1990\)](#) repris par [Ogilvie \(2014\)](#), le potentiel de marée s'écrit ainsi, avec \Re la partie réelle (\Im la partie imaginaire) :

$$\Psi = \Re \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{GM_2}{a} A_{l,m,n}(e, \lambda) \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-in\Omega_o t} \right\}, \quad (2.5)$$

projeté sur la base des harmoniques sphériques $r^l Y_l^m$, où l et m sont respectivement le degré et l'ordre de l'harmonique sphérique (m est aussi appelé nombre d'onde azimuthal dans la suite), et n étiquette l'harmonique temporelle du mouvement orbital. On notera que les harmoniques sphériques $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont simplement une réécriture des polynômes de Legendre $P_l(\gamma)$ grâce au théorème d'addition des harmoniques sphériques (cf., par exemple, l'annexe A.1 de [Guanel, 2016](#)). Le coefficient $A_{l,m,n}$ est une fonction à valeurs complexes, sans dimension, de l'excentricité et de l'obliquité ([Ogilvie & Lin, 2004](#); [Barker & Ogilvie, 2009](#); [Ogilvie, 2014](#)). La fréquence inertielle (i.e. dans un repère galiléen) d'excitation des ondes est $\omega = n\Omega_o$, tandis que la fréquence d'excitation des ondes décalée par l'effet Doppler dans

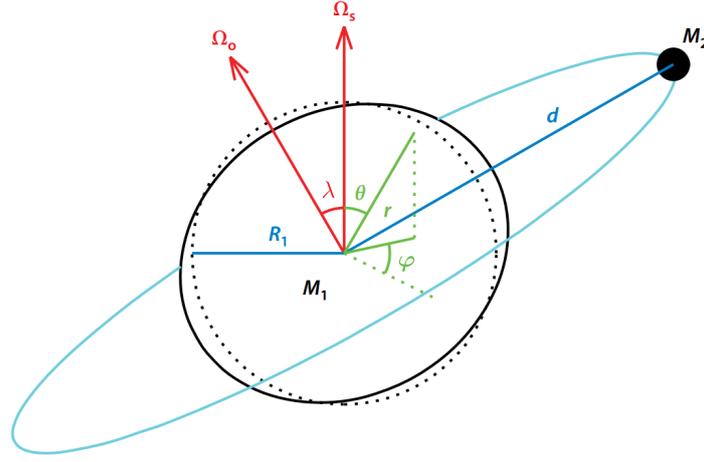


FIGURE 2.1: [Adapté de Ogilvie (2014)]. Géométrie de l'interaction des marées dans un système à deux corps de masses $M_1 \gg M_2$, où le corps 1 déformé présente un bourrelet équatorial (ellipse en trait plein noir, par rapport à un corps sans déformation en cercle pointillé). On se place dans le référentiel centré sur le corps 1 et on représente les coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On note par ailleurs R_1 le rayon du corps 1 et d la distance entre les deux corps. Les fréquences Ω_s et Ω_o sont les vecteurs de rotation du corps 1 et de révolution du corps 2, respectivement.

un référentiel tournant en co-rotation Ω_s avec le corps 1, s'écrit :

$$\sigma_{m,n} = n\Omega_o - m\Omega_s, \quad (2.6)$$

où l'on soustrait donc m fois la vitesse angulaire solide Ω_s du corps principal perturbé.

Pour $l = 2$, les valeurs de m dans le potentiel de marées (2.5) sont restreintes à $\{0, 1, 2\}$, et l'amplitude du coefficient $A_{2,m,n}$ peut s'exprimer d'une manière simple pour les ordres les plus bas en excentricité et obliquité (voir tableau 2.2). En particulier, pour une orbite coplanaire ($\lambda = 0$) et circulaire ($e = 0$), seule la marée dite statique (composante du potentiel de marée indépendante du temps, ($l = 2; m, n = 0$)) et asynchrone ($l, m, n = 2$) agissent sur le corps 1, en faisant tendre le système vers la synchronisation. L'unique fréquence de marée décalée Doppler pour un système asynchrone est alors $\sigma_{2,2} = 2(\Omega_o - \Omega_s)$. Lorsque l'orbite est excentrique et/ou inclinée par rapport à l'axe de rotation du primaire, on peut définir les marées d'excentricité et d'obliquité à l'ordre p en e et λ pour des valeurs de l'indice n qui vérifient $n \leq l + p$ (Ogilvie, 2014).

2.1.2 Variation des paramètres orbitaux et rotationnels

Chaque composante de marée $A_{l,m,n}$ est excitée et déclenche une réponse qui lui est propre dans le corps perturbé, ceci dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire (Kaula, 1964). Ce dernier va ainsi réorganiser la distribution de sa masse, car son potentiel auto-gravitant est modifié par le potentiel de marée Ψ . On notera Φ la perturbation du potentiel gravitationnel propre Φ_0 par Ψ . On peut relier directement cette réponse au potentiel de marée Ψ , pourvu que le paramètre d'amplitude de la marée $\epsilon = M_2/M_1(R_1/d)^3$ utilisé au chapitre 1 soit petit ($\epsilon \ll 1$), ou, dit autrement, que le rapport des masses M_2/M_1 soit faible et que les deux corps soient suffisamment bien séparés, deux hypothèses que nous avons faites en début de chapitre. La perturbation Φ s'écrit ainsi (pour un corps à symétrie sphérique ;

2. Dans le cas des ondes hydrodynamiques de marée, cette fréquence est obtenue du fait de l'opérateur $D_t = \partial_t + \Omega_s \partial_\varphi$, le second terme étant le terme d'entraînement par la rotation Ω_s , écrit dans un référentiel inertiel (Zahn, 1966a).

l	m	n	$ A $	Description
2	0	0	$\sqrt{\frac{\pi}{5}}$	Marée statique
2	2	2	$\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$	Marée asynchrone
2	0	1	$3e\sqrt{\frac{\pi}{5}}$	Marée d'excentricité
2	2	1	$\frac{1}{2}e\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$	
2	2	3	$\frac{7}{2}e\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$	
2	1	0	$\lambda\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$	Marée d'obliquité
2	1	2	$\lambda\sqrt{\frac{6\pi}{5}}$	

FIGURE 2.2: [Adapté de Ogilvie (2014)]. Amplitude des composantes quadripolaires du potentiel de marée, i.e. pour $l = 2$, à l'ordre zéro et au premier ordre en excentricité e et en obliquité λ .

voir p.e. Ogilvie, 2013) :

$$\Phi_l^m = k_l^m(\omega)\Psi_l^m, \quad (2.7)$$

où k_l^m est une fonction de transfert associée au mode (l, m, n) . Cette fonction complexe et sans dimension est appelé le nombre de Love (Love, 1911). Elle quantifie la réponse fréquentielle du corps principal au forçage de marée. Tandis que sa partie réelle représente la réponse adiabatique du corps perturbé (i.e. sans processus dissipatifs, ce qui correspond à la définition originelle de Love, 1911), sa partie imaginaire permet d'évaluer le couple de marée séculaire exercé sur le corps perturbé ainsi que la dissipation d'énergie interne associée (p.e. Ogilvie, 2013, 2014). Lorsqu'elle est non nulle, on obtient un déphasage temporel entre l'action du forçage de marée sur le corps 1 et la réponse qu'il déclenche dans ce corps, ce qui se traduit par un déphasage spatial entre la ligne reliant les centres de masse des deux corps et le bourrelet de marée correspondant à la réponse du corps 1, représenté par l'angle de marée 2δ en figure 1.1 (Zahn, 2013). Plus formellement, on peut exprimer ce retard de la réponse de marée et le déphasage spatial à l'aide du facteur de qualité Q , défini au chapitre 1, pour chaque mode (l, m, n) dans l'approximation des faibles frictions (Hut, 1981) :

$$\tau_l^m \propto \frac{1}{Q_l^m(\omega)|\sigma_{m,n}|}, \quad (2.8)$$

$$2\delta_l^m \propto \frac{1}{Q_l^m(\omega)} \propto |\sigma_{m,n}|\tau_l^m, \quad (2.9)$$

respectivement. Pour une orbite circulaire et coplanaire, $\delta_2^2 = |\Omega_o - \Omega_s|\tau_2^2$, et on remarque que le déphasage de marée traduit simplement l'absence de synchronisme entre période orbitale du perturbateur et période de rotation du perturbé (Zahn, 2013). Par ailleurs, le facteur de qualité pour le mode (l, m, n) est relié au nombre de Love via la formule :

$$Q_l^m(\omega) = \frac{\Re[k_l^m(\omega)]}{\Im[k_l^m(\omega)]}. \quad (2.10)$$

Dans les faits, le facteur de qualité n'est en général pas calculé pour chaque mode, car il dépend de manière complexe de la structure interne du corps perturbé, et de sa vitesse de rotation, comme c'est aussi le cas du nombre de Love. On lui préfère un facteur Q constant qui peut être calculé suivant différentes méthodes en le calibrant par exemple, comme discuté au chapitre 1, suivant les positions actuelles des compagnons (comme cela a été fait pour le système Jovien et Saturnien par Lainey et al., 2009, 2012), et/ou le scénario de formation (Goldreich & Soter, 1966), ou encore les propriétés des

orbites (Hansen, 2012). On peut pour cela utiliser le modèle à retard géométrique constant introduit par Kaula (1964), et utilisé par MacDonald (1964) et Goldreich & Soter (1966). Dans ce modèle, δ est constant et caractérise le déphasage géométrique moyen pour un unique bourrelet, comme ce qui est schématisé en figure 1.1. Cette méthode a l'avantage de permettre l'intégration temporelle analytique de la variation des paramètres orbitaux comme l'excentricité, le demi-grand axe ou encore l'obliquité du système (Efroimsky & Lainey, 2007, voir aussi les équations (2.12)). Elle a néanmoins le désavantage d'être discontinue de part et d'autre de la synchronisation, car chaque paramètre orbital et rotationnel est fonction de $\text{sign}(\sigma)$ (voir aussi Ogilvie, 2014). Une seconde méthode pour calculer un facteur Q simplifié, est le modèle à retard temporel constant (Jeffreys, 1961; Singer, 1968; Mignard, 1979, 1980; Hut, 1981), qui résout la question de la discontinuité en posant un déphasage géométrique directement proportionnel à la fréquence d'excitation de la marée σ (Efroimsky & Lainey, 2007). Ce modèle a tout de même l'inconvénient de diverger aux hautes fréquences.

En raison des multiples définitions du facteur de qualité, la tendance est plutôt à l'utilisation du nombre de Love, et en particulier sa partie imaginaire, que l'on réécrit pour condenser l'écriture $\kappa_{l,m,n} = \Im[k_l^m(n\Omega_o)]$. La dissipation de marée $D_{l,m,n}$, c'est-à-dire l'énergie des flots de marée dissipée par les mécanismes internes de friction qui permettent les transferts de moment cinétique entre la rotation des composantes d'un système et les orbites, s'exprime comme :

$$D_{l,m,n} \propto (2l + 1)\sigma_{m,n}\kappa_{l,m,n}, \quad (2.11)$$

dans la limite où le corps perturbé est en rotation uniforme (Ogilvie, 2013, 2014). Lorsque l'on parle de dissipation totale moyennée en fréquence, on parle souvent de l'intégration fréquentielle sur les $\omega = n\Omega_o$ du facteur de Love quadripolaire pour un système coplanaire $\kappa_{2,2,n}$ comme ce qui a été fait dans Ogilvie (2013) et Mathis (2015).

En utilisant simplement les composantes quadripolaires du potentiel de marée, comme dans le tableau 2.2 aux ordres les plus bas en excentricité et en obliquité, on peut enfin établir les taux de variation du demi-grand axe, de la fréquence de rotation du corps principal, de l'excentricité et de l'obliquité du système (Ogilvie, 2014), respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= -3\kappa_{2,2,2} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o, \\ \frac{1}{\Omega_s} \frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{3}{2}\kappa_{2,2,2} \frac{L_o}{L_s} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o, \\ \frac{1}{e} \frac{de}{dt} &= \frac{3}{16} (4\kappa_{2,2,2} - 6\kappa_{2,0,1} + \kappa_{2,2,1} - 49\kappa_{2,2,3}) \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o, \\ \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{3}{4} \left[\kappa_{2,2,2} \left(1 - \frac{L_o}{L_s}\right) + (\kappa_{2,1,0} - \kappa_{2,1,2}) \left(1 + \frac{L_o}{L_s}\right) \right] \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ces différents taux font intervenir le rapport des moments cinétiques orbital L_o du perturbateur, et rotationnel L_s du corps perturbé, qui peut s'écrire :

$$\frac{L_o}{L_s} = \frac{GM_1 M_2 \sqrt{1 - e^2}}{I_1 \Omega_s \Omega_o a}, \quad (2.13)$$

où I_1 est le moment d'inertie du primaire, supposé constant. Lorsque ce rapport est supérieur à 3 dans le cas coplanaire et circulaire (cf section 1.1; Hut, 1980), un équilibre stable peut être atteint lorsque la période orbitale du corps 2 se synchronise avec la période rotationnelle du corps 1. Par ailleurs, ces taux de variations (2.12), qui peuvent être positifs ou négatifs, permettent de définir les temps caractéristiques

de synchronisation $t_{\text{syn}} = |\sigma|/|d\Omega_s/dt|$, de circularisation $t_{\text{circ}} = e/|de/dt|$, et d'alignement (coplanarité) $t_{\text{align}} = |\lambda|/|d\lambda/dt|$ (Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009; Remus et al., 2012a). Dans le cas particulier des systèmes coplanaires, Zahn (1989) démontre que ces temps caractéristiques peuvent s'exprimer plus simplement : $1/t_{\text{circ}} \propto q(1+q)(R_1/a)^8$ et $1/t_{\text{sync}} \propto q^2(R_1/a)^6$ avec $q = M_2/M_1$.

Dans les systèmes binaires, la synchronisation est beaucoup plus rapide que la circularisation, car le moment cinétique contenu dans l'orbite est en général beaucoup plus important que celui dans le spin des étoiles, ce qui n'est pas forcément le cas pour les systèmes planétaires, où il est plus difficile de tirer des prédictions simples des relations (2.12).

2.2 Flots de marée

Comme discuté en introduction (chapitre 1), la réponse au potentiel de marée dans le corps primaire est traditionnellement décomposée en deux composantes qui possèdent des propriétés différentes. Nous allons décrire plus en détails ces deux flots de marée, vecteurs des échanges énergétiques pour l'interaction de marée du fait de la dissipation de leur énergie cinétique.

2.2.1 La marée d'équilibre : un ajustement quasi-hydrostatique

La marée d'équilibre en tant qu'ajustement hydrostatique ($\omega = 0$) ou quasi-hydrostatique ($\omega \approx 0$) au potentiel de marée exercé par le compagnon, est une bonne approximation de la réponse à l'interaction de marée dans la limite des basses fréquences ω (Zahn, 1966a,b; Goldreich & Nicholson, 1989a; Ivanov & Papaloizou, 2004). Les perturbations en densité ρ , pression p et potentiel gravitationnel Φ satisfont l'équilibre hydrostatique pour la marée d'équilibre adiabatique :

$$-\nabla p + \rho_0 \nabla(\Phi + \Psi) + \rho \nabla \Phi_0 = 0, \quad (2.14)$$

où ρ_0 est la densité moyenne, et dans un référentiel tournant à la fréquence $n\Omega_o/m$ ($m = 2$ chez Remus et al., 2012a; Ogilvie, 2014). Dans ce référentiel, la marée d'équilibre est stationnaire contrairement au référentiel inertiel. Les flots induits sont à grande échelle : leur variation spatiale se fait sur une échelle de l'ordre de grandeur du rayon de l'étoile. On peut le voir à l'aide des champs de vitesse sur la figure 2.3 (panneau de gauche) ainsi que sur la figure 1.1, qui sont des représentations tri-dimensionnelles du champ de vitesse des flots induits par la marée d'équilibre pour des objets entièrement convectifs. Ces flots à grande échelle peuvent être détectés par des observations photométriques ou par des mesures de vitesse radiale à la surface des étoiles. Cela a été réalisé très récemment pour l'étoile WASP-12 ($M_1 \approx 1.434 M_\odot$), hôte d'un Jupiter chaud (WASP-12b, $M_2 \approx 1.47 M_J$) à très courte période orbitale ≈ 1.1 jours et pratiquement circularisé. La figure 2.3, panneau de droite, montre la vitesse radiale mesurée à la surface de l'étoile qui se décompose en une vitesse orbitale due aux mouvements de la planète et reproduisant l'essentiel de la vitesse radiale (le graphe en haut à droite), et une petite contribution temporelle de l'ordre de 7m/s (ce qui correspond à une élévation verticale de ~ 150 km) de périodicité la moitié de la période de rotation de l'étoile (graphe en bas à droite). Cette modulation de la vitesse radiale serait une manifestation de la déformation de l'étoile hôte par la marée d'équilibre, et plus précisément son bourrelet équatorial qui suit le mouvement orbital de la planète.

3. On précise que la convention de signe devant les potentiels gravitationnels et de marée n'est pas la même dans Remus et al. (2012a) et dans Zahn (1966a), Guenel (2016) et Astoul et al. (2019), du fait de choix opposés pour les signes des potentiels.

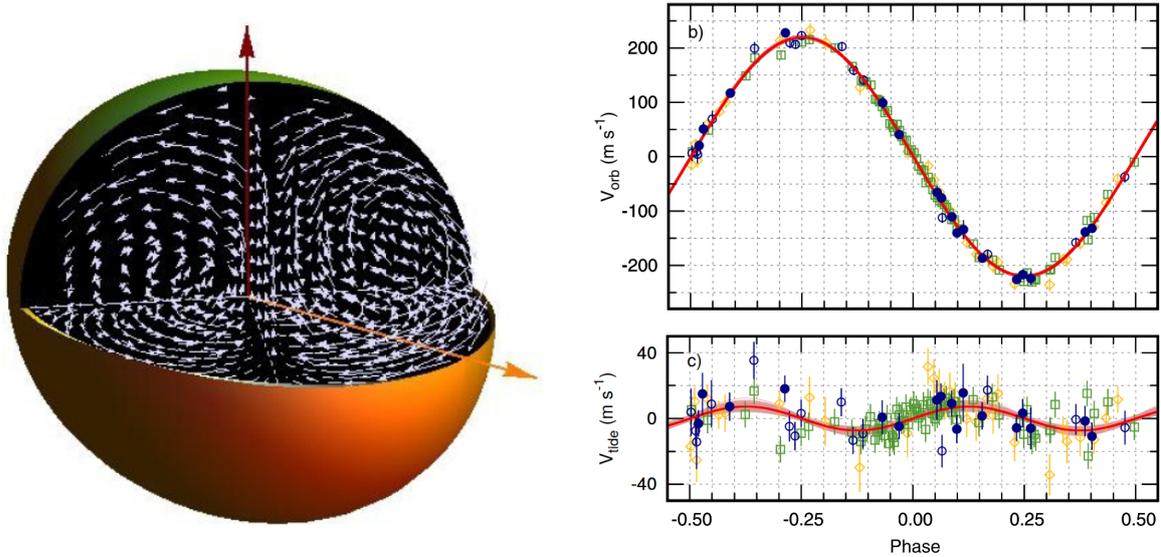


FIGURE 2.3: *Gauche* : [Remus et al. (2012a)]. Modélisation semi-analytique 3D du champ de vitesse total (poloïdal et toroïdal) de la marée d'équilibre adiabatique (flèches blanches). Les flèches rouge et orange indiquent respectivement la direction de l'axe de rotation du primaire et la ligne des centres entre les deux corps. *Droite* : [Maciejewski et al. (2020)]. *Bas* : Vitesse radiale attribuée aux déplacements de marée d'équilibre générés par la planète WASP-12 b dans son étoile hôte au cours d'une période de rotation de WASP-12. Dans cette vitesse, la contribution en vitesse radiale du mouvement orbital de la planète WASP-12 b a été filtrée (*Haut*).

On soulignera que la décomposition en deux parties de la réponse de marée n'est pas la même dans toutes les études. Par exemple, Ogilvie (2013) préfère définir une marée non ondulatoire ("non wave-like tide") par opposition à la marée dynamique, qui diffère légèrement de la marée d'équilibre. En effet, Terquem et al. (1998), Goodman & Dickson (1998) ont montré que le concept de marée d'équilibre ne s'applique pas bien dans les régions convectives barotropes, y compris dans le régime des basses fréquences, et Ogilvie (2013) souligne que les conditions aux limites rigides (i.e. déplacement nul aux interfaces) dans un corps à deux zones constitué d'un cœur radiatif et d'une enveloppe convective, ne sont pas bien vérifiées par la marée d'équilibre.

2.2.2 La marée dynamique : excitation d'ondes internes

La marée d'équilibre doit généralement être complétée par une partie ondulatoire : la marée dynamique (car $\omega \neq 0$ en général; Zahn, 1975, 1977; Goldreich & Nicholson, 1989a). Ceci est la cause des forces inertielles⁴ qui s'appliquent au flot de marée d'équilibre \mathbf{u}_e , à savoir sa dérivée temporelle ainsi que son accélération de Coriolis : l'ajustement quasi-hydrostatique de la marée d'équilibre ne constitue pas une solution complète de l'équation de Navier-Stokes. C'est pour cette raison que l'on fait intervenir un flot perturbé additionnel, $\mathbf{u}_d = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$, associé à la marée dynamique, avec \mathbf{u} la perturbation de marée totale (Ogilvie, 2005). Cette marée dynamique, qui présente un caractère ondulatoire, correspond aux modes d'oscillation du milieu en question (les modes propres dans le cas de modes réguliers). L'analogie avec le cas académique de l'oscillateur harmonique forcé est ainsi appropriée : la marée dynamique correspond à des ondes qui sont excitées par le potentiel de marée Ψ du perturbateur, assimilable à un forçage extérieur, et entretenues par une ou des forces de rappel. Ces forces, et donc la nature des ondes, diffèrent selon le milieu dans lequel les ondes se propagent. Par ailleurs, la valeur de la fréquence de marée σ , différente

4. Dans le chapitre 4, nous étudierons l'importance de la force de Lorentz, par rapport aux forces inertielles, qui s'applique au flot de marée d'équilibre dans un milieu magnétisé.

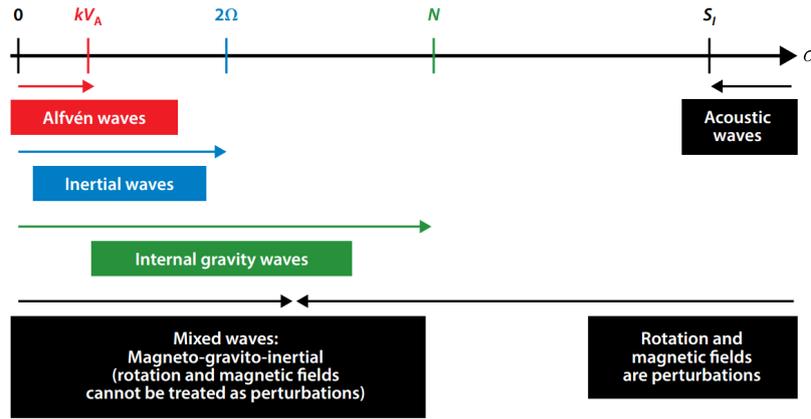


FIGURE 2.4: [Aerts et al. (2019)]. Types d'onde selon le milieu de propagation et les forces de rappel en présence, en fonction des fréquences caractéristiques associées ; S_l est la fréquence de Lamb pour une onde acoustique ; N est la fréquence de Brunt-Väisälä pour une onde de gravité ; 2Ω est la fréquence inertielle pour une onde inertielle ; V_A et k sont respectivement la vitesse d'Alfvén et la norme du vecteur d'onde. L'ordre des fréquences ici présentées sur la flèche est valable dans les intérieurs stellaires le long de leur séquence principale.

pour chaque mode ou composante du potentiel de marée, conditionne aussi l'existence de ces ondes : elles peuvent se développer au delà où en deçà d'une fréquence de coupure qui est propre à la nature de l'onde. On distingue par exemple (voir figure 2.4) :

- les ondes inertielles dans les milieux en rotation, entretenues par l'accélération de Coriolis et qui se propagent en deçà de la fréquence 2Ω . On précise qu'en présence de rotation différentielle, cet intervalle de propagation est élargi (p.e. Baruteau & Rieutord, 2013; Guenel et al., 2016a; Prat et al., 2018) ;
- les ondes internes de gravité dans les milieux stablement stratifiés en densité et en température, où la force d'Archimède (i.e. de flottabilité) est la force de rappel dominante. Ces ondes sont excitées si $\sigma < N$, avec N la fréquence de Brunt-Väisälä :

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln \rho}{dz} \right), \quad (2.15)$$

avec g la gravité selon l'axe vertical (Oz), p la pression, ρ la densité et γ l'indice adiabatique⁵ ;

- les ondes d'Alfvén ou magnétiques, pour $\sigma < kV_A$ où k est la norme du vecteur d'onde car la relation de dispersion pour les ondes d'Alfvén s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu_0} = (V_A \cdot \mathbf{k})^2 \quad (2.16)$$

avec $V_A = \mathbf{B} / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ la vitesse d'Alfvén, en introduisant le champ magnétique \mathbf{B} et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Ces ondes se propagent dans les milieux fortement magnétisés, où la force de Lorentz, et plus précisément la tension magnétique, agit comme une force de rappel pour ces ondes ;

- les ondes acoustiques, se propageant au-delà de la fréquence de Lamb :

$$S_l = \sqrt{l(l+1)} \frac{c_s}{r}, \quad (2.17)$$

5. γ correspond au rapport des capacités thermiques à pression et à volume constants, et sa valeur dépend du type de gaz considéré, p.e. monoatomique ($\gamma = 5/3$), diatomique ($\gamma = 7/5$) etc. (Maeder & Stahler, 2009).

où l désigne (à nouveau) le degré de l'harmonique sphérique considérée. Ces ondes sont animées par les mouvements adiabatiques de compression des couches fluides étudiées.

Bien entendu, plusieurs forces de rappel peuvent agir de concert. Par exemple, dans un milieu stablement stratifié en rotation, des ondes gravito-inertielles vont se propager (p.e. [Dintrans & Rieutord, 2000](#); [Ogilvie & Lin, 2007](#)), alors que dans un milieu en rotation magnétisé ce sont des ondes magnéto-inertielles qui se propagent (chapitre 4 et p.e. [Finlay, 2008](#); [Lin & Ogilvie, 2018](#)). Les fréquences de marée σ étant en général faibles, les ondes acoustiques ne sont généralement⁶ pas excitées par le potentiel de marée dans les étoiles de la séquence principale.

Les régions convectives dans les étoiles et les planètes sont des zones super-adiabatiques (ou convectivement instable). Le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä y est légèrement négatif, ce qui garantit la présence de mouvements convectifs turbulents dans ces régions ([Maeder & Stahler, 2009](#); [Kippenhahn et al., 2012](#)). Cependant, on considère en général que $N \approx 0$ en première approximation pour l'étude des ondes inertielles dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse et des planètes géantes gazeuses ([Ogilvie & Lin, 2004, 2007](#)). Par conséquent, les ondes excitées par l'interaction de marée dans les régions convectives (magnétisées) sont des ondes (magnéto-)inertielles. Dans les zones radiatives internes, stablement stratifiées (éventuellement en rotation et magnétisées) des étoiles de faible masse et des planètes géantes gazeuses, ce sont des ondes internes de gravité (ou gravito-inertielles, ou magnéto-gravito-inertielles) qui vont se développer. Ce sont ces différentes familles d'onde, excitées par la marée, qui vont efficacement transporter et transférer le moment cinétique.

Cette thèse étant consacrée à l'étude de la réponse de marée dans les régions convectives des étoiles de faible masse et des planètes géantes gazeuses, nous nous concentrons dans ce chapitre sur le cas des ondes inertielles pour une rotation uniforme du corps perturbé. Notre propos se généralisera au chapitre 4 par la prise en compte du champ magnétique du corps perturbé, et au chapitre 6 par la prise en compte de sa rotation différentielle.

2.3 Propriétés des ondes inertielles excitées par la marée

2.3.1 Analyse des équations de base

Nous allons décrire ici les propriétés principales des ondes inertielles dans un milieu fluide en rotation solide (i.e. sans rotation différentielle) de vecteur de rotation $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$. Le champ de vitesse \mathbf{v} du fluide dans un référentiel inertiel (i.e. galiléen) peut se décomposer en deux composantes, l'une traduisant l'écoulement moyen dû à la rotation du corps, l'autre reflétant les mouvements fluides dans un référentiel en co-rotation, de sorte que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{u}$, respectivement. Dans le repère tournant en co-rotation, les équations de Navier-Stokes et de continuité s'écrivent ainsi :

$$\rho \left[\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \right] = -\nabla p + \mathbf{F}_\nu + \mathbf{F}_t, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

avec, de gauche à droite dans l'équation du mouvement, la dérivée totale du flot, l'accélération de Coriolis, l'accélération centrifuge, le terme de gradient de pression, la force visqueuse où ν est la viscosité cinématique, et enfin le forçage de marée. Sans une hypothèse sur la densité, ou l'ajout d'une équation

6. Mais elle peuvent par exemple être excitées dans l'atmosphère terrestre où on parle d'ondes gravito-acoustiques ([Auclair-Desrotour et al., 2017](#))

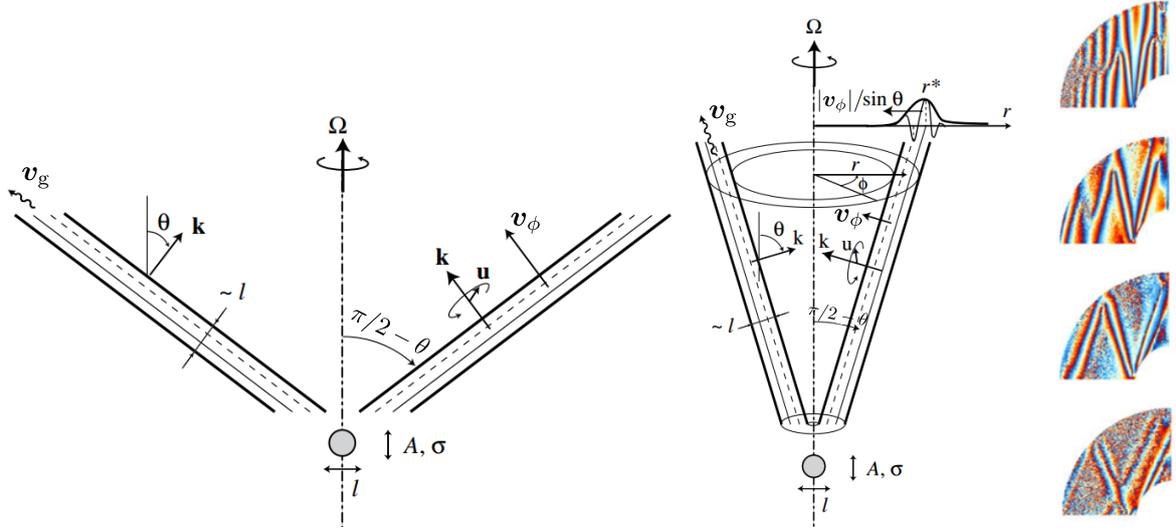


FIGURE 2.5: Schémas de gauche : [Adapté de Messio et al. (2008)]. Schéma du comportement d'une onde inertielle émise à partir d'un cylindre de taille l oscillant à la fréquence σ avec $\sigma \sim 2\Omega$ (schéma de gauche) et $\sigma \ll 2\Omega$ (schéma de droite), d'amplitude A , dans un milieu sans conditions aux limites. Figure de droite : [Tiré de Hoff et al. (2016)]. Dispositif expérimental permettant la visualisation d'ondes inertielles (possédant des phases dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) dans une coquille sphérique en rotation à la fréquence Ω qui sont excitées grâce aux oscillations de la sphère interne, avec les pulsations, du haut vers le bas, $\Omega/5$, $2\Omega/5$, $3\Omega/5$, $4\Omega/5$. Le nombre d'Ekman est fixé à $\sim 4 \times 10^{-5}$.

d'énergie, le système n'est pas fermé. Par souci de simplicité, on fait maintenant l'approximation d'un fluide incompressible. L'accélération centrifuge peut être négligée dans la limite où la rotation du corps est faible devant sa fréquence critique de libération, à savoir $\Omega \ll \Omega_c$ où $\Omega_c = \sqrt{GM_1/R^3}$ (Braviner & Ogilvie, 2014). Si elle dérive d'un potentiel comme $\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r}) = -\nabla[(\Omega \wedge \mathbf{r})^2/2]$ ⁷, on peut introduire la pression réduite $\Pi = p/\rho - (\Omega \wedge \mathbf{r})^2/2$ dans l'approximation d'un fluide incompressible. Les équations de base (2.18) se réécrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} &= -\nabla \Pi + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

en séparant dérivée temporelle et terme d'advection, avec $\mathbf{F}_\nu = \nu \Delta \mathbf{u}$ grâce à l'hypothèse d'incompressibilité, et $\mathbf{f} = \mathbf{F}_t/\rho$. En adimensionnant ces équations avec L , $1/2\Omega$ et V , respectivement la longueur, le temps et la vitesse, grandeurs caractéristiques du problème, on peut faire apparaître des paramètres clés sans dimension que l'on va pouvoir ajuster, comme le nombre de Rossby (Ro) et le nombre d'Ekman (Ek) :

$$\text{Ro} = \frac{V}{2\Omega L} \quad \text{et} \quad \text{Ek} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}. \quad (2.20)$$

Le premier compare les termes d'advection (éventuellement non-linéaires sans écoulement moyen) à l'accélération de Coriolis, le second compare la force visqueuse avec celle de Coriolis. L'équation de Navier-Stokes adimensionnée⁸ est :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{Ro}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \text{Ek} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (2.21)$$

Lorsqu'un écoulement est dominé par la rotation, c'est à dire lorsque $\text{Ro} \ll 1$ et $\text{Ek} \ll 1$, on peut négliger le terme d'advection et la force visqueuse. C'est typiquement le cas des flots de vitesse modérée et de

7. C'est par exemple toujours le cas en rotation solide.

8. En réécrivant chaque variable $t \rightarrow t/2\Omega$; $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} \times V$; $\nabla \rightarrow \nabla/L$; $\Pi \rightarrow \Pi \times 2\Omega LV$; $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} \times 2\Omega V$.

grande échelle que l'on peut trouver sur Terre comme le Gulf Stream dans les océans et les courants-jets (ou courant d'altitude, aussi appelés "jet stream") dans l'atmosphère, et pour lesquels la rotation terrestre joue un rôle important (p.e. [Rieutord, 2015](#)). On fait désormais l'hypothèse d'un flot dominé par la rotation, afin de donner les propriétés de l'écoulement ondulatoire linéaire (et non-stationnaire) entretenu par la pseudo-force de Coriolis, à savoir les ondes inertielles que l'on prendra libres, i.e. sans terme de forçage. En effet, le terme de forçage f vient seulement affecter l'amplitude des ondes et de l'énergie dissipée, comme c'est le cas pour un oscillateur harmonique forcé, mais les propriétés intrinsèques des ondes restent inchangées comme leur relation de dispersion (dans le cas des modes réguliers). On décompose ainsi vitesse et pression selon une composante de Fourier de nombre d'onde \mathbf{k} :

$$(p(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) = (p, \mathbf{U}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \sigma t)], \quad (2.22)$$

où σ est la fréquence de marée adimensionnée par 2Ω dans le référentiel en co-rotation. Avec cette forme particulière de solution, l'équation de continuité se réduit à $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$, ce qui signifie que les ondes inertielles sont transverses par rapport au champ de vitesse dans le référentiel tournant. L'équation de Navier-Stokes se réduit quant-à elle à :

$$-i\sigma\mathbf{u} + \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u} = -k\Pi. \quad (2.23)$$

En prenant successivement la divergence, le rotationnel, et le produit scalaire par 2Ω de l'équation (2.23), et en injectant l'équation de continuité, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\sigma^2 = \frac{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} \Rightarrow \sigma = \pm \cos \theta, \quad (2.24)$$

où θ est l'angle entre l'axe de rotation et le vecteur d'onde \mathbf{k} , comme indiqué dans les schémas de la figure 2.5. D'après cette relation de dispersion, les ondes inertielles pures ne peuvent se propager que si leur fréquence dimensionnée satisfait $\sigma \in [-2\Omega, 2\Omega]$. Vitesse de phase et vitesse de groupe s'écrivent alors

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\phi = \frac{\sigma}{k^2} \mathbf{k} = \pm \cos \theta \frac{\mathbf{k}}{k^2}, \\ \mathbf{v}_g = \nabla_k \sigma = \frac{\mathbf{k} \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{k})}{k^3}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Ces vitesses vérifient la relation $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}_\phi = 0$, ce qui signifie que l'énergie de l'onde se propage perpendiculairement à la vitesse de phase, donc de manière anisotrope, comme représenté en figure 2.5. On remarquera par ailleurs que les ondes inertielles sont dispersives car la vitesse de phase dépend du nombre d'onde k . Cela implique que chaque onde associée à un mode d'oscillation ne se propage pas à la même vitesse.

2.3.2 Propagation le long des caractéristiques

On établit maintenant l'équation différentielle qui régit la propagation des ondes inertielles, en relaxant l'hypothèse d'onde plane selon r : seule l'hypothèse d'une périodicité temporelle est faite pour s'abstraire de la dérivée temporelle du flot \mathbf{u} . On procède de même que pour obtenir la relation de dispersion, avec ces nouvelles hypothèses, et on obtient :

$$\Delta\Pi - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.26)$$

que l'on appelle l'équation de Poincaré (Cartan, 1922). On peut réécrire cette équation dans un plan méridien en utilisant les coordonnées cylindriques (s, φ, z) , et en faisant l'approximation des courtes longueurs d'onde de manière à filtrer les termes qui ne sont pas en dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial s^2} + \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.27)$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associée s'écrit $\Delta = 4(1/\sigma^2 - 1)$, et il est indépendant des coordonnées cylindriques dans le plan méridien. Puisque $\sigma < 1$ d'après la relation de dispersion, l'équation (2.27) est dite hyperbolique, i.e. $\Delta > 0$, comme l'équation d'onde de D'Alembert (Lighthill, 1969). Deux caractéristiques font de la résolution des équations différentielles (2.27) et (2.26) un problème relativement complexe en astrophysique et en géophysique. Premièrement, l'équation (2.27) doit être complétée par des conditions aux limites telles que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, où \mathbf{n} est le vecteur normal aux limites du domaine en chaque point, autrement dit la vitesse de l'onde aux abords des frontières du domaine est tangentielle. Cela implique que le problème est mal-posé dans le sens d'Hadamard⁹ (voir aussi Rieutord et al., 2000). Deuxièmement, le problème (2.26) n'est en général pas à variables séparables, et donc doit être résolu au minimum dans un plan 2D.

Malgré ces difficultés, la trajectoire des ondes inertielles dans un volume, sphère ou coquille sphérique, peut être déterminée grâce à la méthode des caractéristiques (p.e. Rieutord, 2015). La vitesse étant constante le long des caractéristiques, leur pente est donnée par :

$$\frac{ds}{dz} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2}} = \pm |\tan \theta|, \quad (2.28)$$

en utilisant la relation de dispersion (2.24). Les trajectoires des ondes inertielles sont des cônes autour de l'axe de rotation, inclinés d'un angle $\theta = \arccos(\sigma)$ par rapport au plan $z = 0$, ou de manière équivalente d'un angle $\pi/2 - \theta = \arcsin(\sigma)$ par rapport à l'axe de rotation. Les caractéristiques suivent donc la direction de la vitesse de groupe et donc de la propagation de l'énergie de l'onde (voir les schémas de la figure 2.5). En particulier, comme illustré dans ces deux schémas, pour $\sigma \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ (les caractéristiques sont des droites de plus en plus verticales dans une coupe méridienne), et, inversement, pour $\sigma \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow 0$ (les caractéristiques sont de plus en plus horizontales). On retrouve ainsi la propriété des flots stationnaires alignés avec l'axe de rotation pour $\sigma \rightarrow 0$. Cette tendance est correctement retrouvée dans les simulations numériques et même expérimentalement comme on peut le voir à droite de la figure 2.5. On remarque que les ondes se focalisent sur des cycles limites réguliers, visibles aussi en figure 1.14, que l'on appelle attracteurs de caractéristiques. Les ondes inertielles qui suivent ces trajectoires périodiques sont stationnaires, et sont donc des modes inertiels réguliers (Tilgner, 1999; Rieutord et al., 2000).

Dans une sphère pleine, par exemple une étoile de masse $M < 0.4 M_\odot$ ou une étoile très jeune qui possèdent toutes deux la particularité d'être entièrement convectives, il existe des modes propres d'oscillations inertiels pour un fluide incompressible et inviscide en rotation, ce sont des modes globaux dits 'normaux' qui ne sont pas associés à des attracteurs. Dans des volumes tels que les coquilles sphériques, inspirées par exemple des enveloppes convectives des étoiles de type solaire et des planètes géantes gazeuses, la présence d'une frontière interne impose des réflexions supplémentaires aux ondes, ce qui contraint d'avantage l'existence de modes propres. En effet, le conflit entre la géométrie sphérique du conteneur et la géométrie cylindrique lié à la rotation (typique des flots géostrophiques dans le cas d'une sphère pleine; voir Rieutord, 2015) conduit à l'absence de modes réguliers et au développement des

9. Les trois critères d'un problème bien posé selon Hadamard (Hadamard, 1902) sont : (1) une solution existe; (2) la solution est unique; (3) le comportement de la solution change continûment avec les conditions initiales.

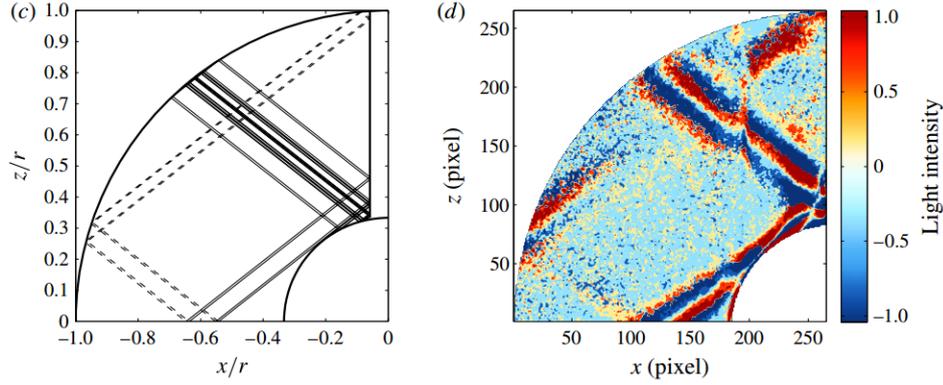


FIGURE 2.6: [Tiré de Hoff et al. (2016)]. Comparaison entre la méthode de tracé de rayons des caractéristiques (*gauche*) et la visualisation expérimentale des couches de cisaillement pour $\text{Ek} \sim 4 \times 10^{-5}$ (*droite*). La fréquence d'excitation est $\sim 1.6\Omega$. Les lignes continues matérialisent des ondes excitées à la latitude critique de l'hémisphère nord et les lignes pointillées à la latitude critique de l'hémisphère sud.

attracteurs et de leur couche de cisaillement. Pour déterminer les fréquences spécifiques σ qui correspondent à des modes inertiels, on quantifie le degré de convergence des ondes sur des cycles limites en fonction de leur fréquence (notamment grâce au calcul des exposants de Lyapunov; Rieutord et al., 2000, 2001; Baruteau & Rieutord, 2013; Guenel et al., 2016a).

2.3.3 Dissipation des modes résonnants

Lors de l'ajout d'une viscosité, même faible, des couches de cisaillement (Stewartson, 1972; Rieutord & Valdettaro, 1997) se développent autour des attracteurs de caractéristique, et émergent préférentiellement d'une latitude critique définie comme le point de tangence entre les attracteurs et la sphère intérieure (Kerswell, 1995; Hollerbach & Kerswell, 1995; Tilgner, 1999; Ogilvie, 2009), et identique à l'angle θ précédemment explicité (voir figure 2.6). Les études numériques (p.e., Rieutord et al., 2001; Ogilvie, 2009) et expérimentales (Koch et al., 2013; Hoff et al., 2016) des ondes inertielles en coquille sphérique dans le régime linéaire avec l'ajout d'une viscosité (ce qui garantit un problème "bien posé") montrent un bon accord avec la théorie des attracteurs.

La largeur de ces couches est d'autant plus élevée que la viscosité est grande. Notons l la largeur caractéristique (transverse) de ces couches, et L leur longueur caractéristique (typiquement de l'ordre du rayon de l'étoile). Un ordre de grandeur de l peut être obtenu en écrivant que le temps de diffusion visqueuse au travers de la couche (τ_ν) est égal au temps de propagation de l'onde inertielle le long de la couche de cisaillement (τ_i). Ces deux temps sont estimés par (p.e., Rieutord et al., 2001) :

$$\begin{aligned}\tau_\nu &= \frac{l^2}{\nu} \sim \left(\frac{l}{L}\right)^2 \frac{1}{\text{Ek} \Omega}, \\ \tau_i &= \frac{L}{v_g} \sim \left(\frac{L}{l}\right) \frac{1}{\Omega},\end{aligned}\tag{2.29}$$

ce qui donne¹⁰

$$\frac{l}{R} \sim \text{Ek}^{1/3}.\tag{2.30}$$

10. Un résultat similaire sera présenté au chapitre 4 pour les ondes magnéto-inertielles, impliquant la résistivité magnétique et le nombre d'Ekman magnétique.

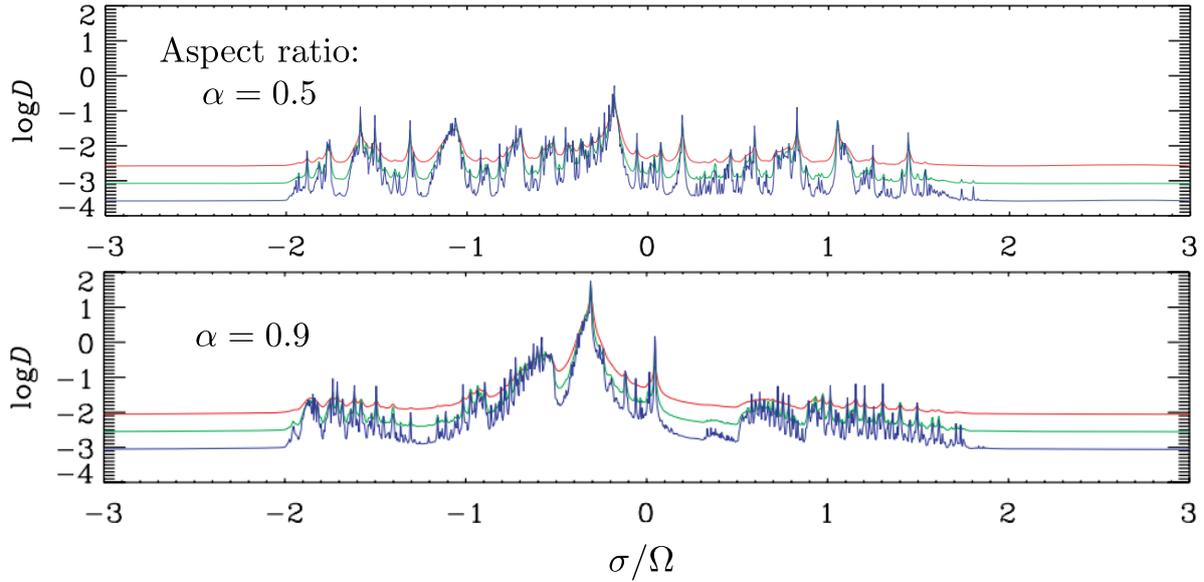


FIGURE 2.7: [Adapté de Ogilvie (2009)]. Dissipation de marée pour un potentiel de marée de composante Y_2^2 , dans corps homogène avec une enveloppe fluide incompressible et un noyau solide parfaitement rigide de rapport d'aspect en rayon $\alpha = 0.5$ (panneau du haut) et $\alpha = 0.9$ (panneau du bas). Le fluide subit une force de frottement $-\sigma_f \mathbf{v}$ avec un coefficient d'amortissement σ_f tel que $\gamma/\Omega = 10^{-2}$ (ligne rouge), $10^{-2.5}$ (ligne verte) ou 10^{-3} (ligne bleue).

Néanmoins, ce résultat n'est pas applicable à l'ensemble des modes dans une coquille sphérique, et d'autres lois d'échelle faisant intervenir le nombre d'Ekman avec des exposants plus faibles peuvent contrôler la forme des couches de cisaillement (voir en particulier Rieutord & Valdettaro, 2018).

Afin de déterminer la réponse fréquentielle de la marée dynamique, on peut calculer le spectre en fréquence de la dissipation de marée comme ce qui est fait en figure 2.7, ou de manière analogue la partie imaginaire du nombre de Love complexe (voir par exemple Ogilvie, 2013). On a dans la figure 2.7 l'illustration de plusieurs propriétés énoncées plus haut. Premièrement, le domaine de propagation des ondes inertielles est restreint à l'intervalle $[-2\Omega, 2\Omega]$ dans lequel la dissipation de marée est importante pour les fréquences de marée proche des modes propres de la coquille, les couches de cisaillement qui se développent autour de ces modes étant des régions de dissipation intense (voir p.e. figure 2.8). Deuxièmement, la dissipation de la marée d'équilibre, seule contribution à la dissipation totale en dehors de l'intervalle de propagation des ondes inertielles, est d'amplitude modérée par rapport à la contribution de la marée dynamique dans l'ensemble de l'intervalle exploré. Troisièmement, la diminution de la viscosité, et donc du nombre d'Ekman puisque rayon et fréquence de rotation sont constants, a pour effet "d'aiguiser" la dissipation aux résonances avec les modes propres de la coquille, et dans le même temps d'affiner la largeur des couches de cisaillement (Eq. (2.30) et figure 2.8). Enfin, ce constat est d'autant plus vrai, et la dissipation d'autant plus importante, que l'épaisseur de la coquille est faible comme on peut le constater en figure 2.7 (voir Ogilvie, 2009, 2013).

Considérer la dissipation moyennée en fréquence a pour conséquence de filtrer le détail de ces résonances et des processus dissipatifs associés, car cette quantité est indépendante de la viscosité dans la limite asymptotique des faibles viscosités moléculaires que l'on peut trouver en astrophysique (Ogilvie, 2005). Pour être plus précis sur cette quantité, elle évalue la capacité d'un corps de structure et de rotation donnée à dissiper ses ondes inertielles de marée (Mathis, 2015; Gallet et al., 2017). Comme cela a été démontré par Ogilvie & Lin (2004, 2007) pour le cas des coquilles sphériques stellaires et planétaires, et par Wu (2005a,b) et Braviner & Ogilvie (2014, 2015) dans le cas des sphères et des sphéroïdes pleins,

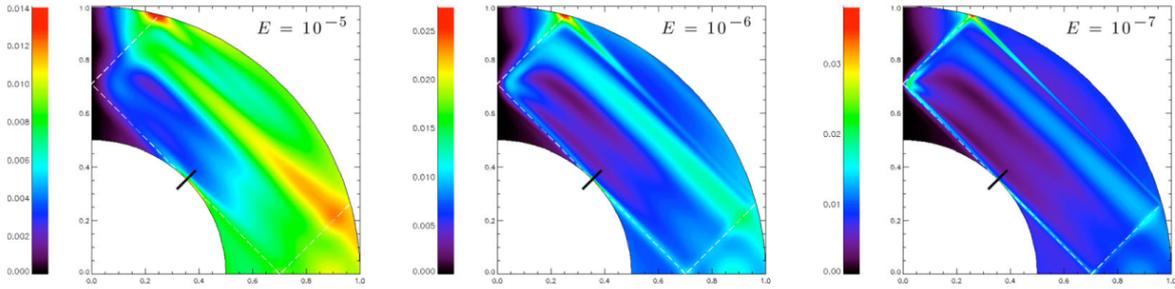


FIGURE 2.8: [Tiré de Favier *et al.* (2014)]. Simulation numérique de la vitesse moyenne azimutale dans le plan méridien d'un quart de coquille sphérique. La fréquence d'excitation est $\sigma/\Omega = \sqrt{2}$ et E est le nombre d'Ekman. Le trait noir indique l'emplacement de la latitude critique. La ligne blanche pointillée est tangente à la sphère interne et correspond à l'attracteur de caractéristique et à la direction de propagation des ondes inertielles émises à la latitude critique.

les ondes inertielles sont donc un des acteurs clefs (avec la marée d'équilibre) de la dissipation de marée dans les intérieurs convectifs stellaires et planétaires. Il reste alors à modéliser leur dissipation par la friction turbulente résultant de leur interaction avec la convection.

2.3.4 Processus dissipatifs en zone convective

2.3.4.1 Modélisation d'une viscosité turbulente

Si l'on introduit assez aisément une force de friction associée à des nombres d'Ekman relativement élevés dans l'équation de Navier-Stokes pour la marée d'équilibre et la marée dynamique (généralement de l'ordre de 10^{-5}), il est moins évident de justifier son origine. En effet, les nombres d'Ekman calculés avec la viscosité moléculaire dans les intérieurs des étoiles et des planètes possèdent des valeurs très faibles, typiquement dans l'intervalle $[10^{-20} - 10^{-10}]$ (Rieutord *et al.*, 2001), ce qui rend difficile la résolution des fines couches de cisaillement qui, comme on l'a vu plus haut, ont une largeur transverse qui décroît en diminuant le nombre d'Ekman.

Cependant, on décrit souvent l'action des écoulements turbulents et instables dans les régions convectives sur les flots de marée par une viscosité effective. Cette dernière modélise l'action des tourbillons convectifs de petite échelle sur les flots de marée, qui sont eux à plus grande échelle (voir p.e. la discussion de Zahn, 1966a, 2013; Mathis *et al.*, 2016). On parle de séparation des échelles spatiales. Les fluctuations turbulentes de petites échelles impliquent une dissipation d'énergie essentiellement sous forme de chocs, que l'on suppose agir localement sous forme d'une dissipation locale d'énergie. C'est l'essence même de la modélisation de la turbulence par un processus de dissipation visqueuse équivalente, la viscosité étant précisément une dissipation locale d'énergie. On rappelle par ailleurs que l'approximation $N \approx 0$ dans l'étude des ondes inertielles revient à négliger la turbulence des flots convectifs d'où la nécessité de modéliser l'action des mouvements turbulents sur les flots de marée.

La modélisation d'une viscosité effective est particulièrement adaptée aux flots de marée de grande échelle comme c'est le cas pour la marée d'équilibre, dont l'échelle de variation est de l'ordre de grandeur du rayon de l'étoile, et donc cette marée est peu sensible aux détails des petites et moyennes échelles de la convection. Pour la marée dynamique, l'approximation d'une viscosité effective est plus sujette à caution car cette marée possède deux échelles caractéristiques bien distinctes : une échelle commensurable à la longueur d'un attracteur, donc similaire au rayon de l'étoile, et une échelle transverse correspondant à l'épaisseur d'une couche de cisaillement, donc plutôt petite d'après l'équation (2.30) pour des nombres

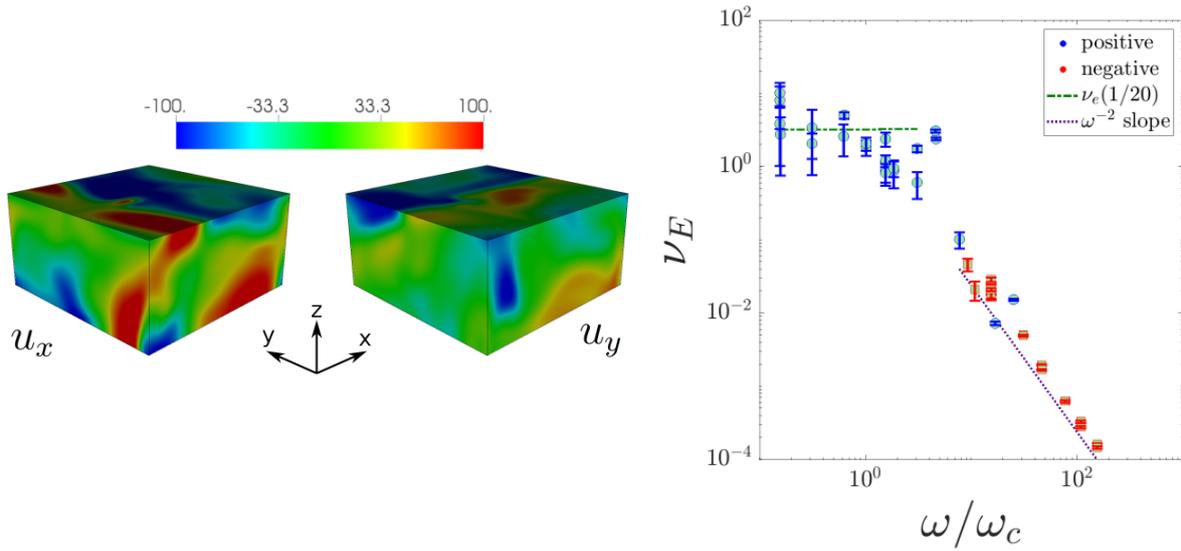


FIGURE 2.9: [Tiré de Duguid et al. (2020)]. Gauche : Simulation de flots convectifs faiblement turbulents dans une boîte locale. Le nombre de Rayleigh, normalisé au Rayleigh critique (seuil entre convection laminaire et turbulente), est fixé à 100 (ce qui reste néanmoins très loin des régimes convectifs attendus dans les étoiles de type solaire). Droite : Viscosité turbulente associée aux simulations 3D en fonction de la fréquence de marée ω normalisée par la fréquence de convection ω_c .

d'Ekman turbulents $Ek \lesssim 10^{-5}$ (Ogilvie & Lin, 2004, 2007). Encore faut-il connaître l'amplitude précise de la viscosité effective turbulente et son expression explicite. Sur ce point, plusieurs régimes sont à distinguer en fonction de la fréquence de marée. Pour des marées lentes, c'est à dire lorsque la fréquence de marée dans le référentiel inertiel ω est plus faible que la fréquence des mouvements convectifs ω_c (autrement dit $P_t \gg P_c$, où P_t et P_c sont les périodes de marée et de la convection respectivement), il est convenu que la théorie de la longueur de mélange estime convenablement cette viscosité effective (Zahn, 1966b; Mathis et al., 2016; Duguid et al., 2020) :

$$\nu_E = \frac{1}{3} v_c l_c f \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right), \quad (2.31)$$

où l_c et v_c sont respectivement les longueur et vitesse convectives, et avec $f = 1$ dans ce régime ($\omega \ll \omega_c$). Dans le régime opposé (i.e. pour des marées rapides telles que $P_t \ll P_c \Leftrightarrow \omega \gg \omega_c$), l'action de la convection sur les flots de marée est moins efficace, ce que traduit la fonction f . Plusieurs lois d'échelle s'opposent pour l'estimation de cette fonction : pour Zahn (1966b, 1989), $f \propto \omega^{-1}$, ce qui est favorisé dans les simulations numériques 3D locales cartésiennes à haute résolution de Penev et al. (2007), alors que pour Goldreich & Nicholson (1977) et Goldreich & Keeley (1977), $f \propto \omega^{-2}$, ce qui est privilégié dans les simulations de Ogilvie & Lesur (2012). Ces deux lois d'échelle mettent en jeu des temps d'évolution des systèmes planétaires très différents (p.e. Duguid et al., 2020). Il se pourrait que la question soit tranchée par les résultats les plus récents de Duguid et al. (2020) et Vidal & Barker (2020) grâce à des simulations 3D de flots convectifs dans une boîte locale et un modèle global sphérique respectivement, dans les régimes laminaires et turbulents, et dans lesquels plusieurs lois d'échelle sont clairement identifiées (voir figure 2.9). Pour $\omega < \omega_c$ la prescription sans dépendance à la fréquence de marée ($f \approx 1$) se vérifie bien, tandis que pour $\omega > 10\omega_c$ c'est la prescription en $f \propto \omega^{-2}$ qui est bien vérifiée. Un régime intermédiaire, non mis en évidence par Duguid et al. (2020) mais qui semble se dessiner à la figure 2.9 (panel de droite) pour des fréquences de marée de l'ordre de $\omega_c < \omega < 10\omega_c$, est plutôt favorable à la loi en $f \propto \omega^{-1}$. Cela a été démontré dans le travail de Vidal & Barker (2020, voir en particulier la figure 7) qui s'appliquent notamment aux systèmes binaires d'étoiles purement convectives. Néanmoins, le débat

sur l'expression de la viscosité effective est loin d'être terminé, car certains processus ne sont pas pris en compte dans les lois d'échelles et pourraient encore modifier ν_E , comme l'effet de la rotation (Barker et al., 2014; Mathis et al., 2016), la présence d'un champ magnétique (Barker & Lithwick, 2014) ou de la rotation différentielle (Baruteau & Rieutord, 2013; Favier et al., 2014). Par ailleurs, la modélisation d'une viscosité turbulente varie aussi selon les domaines d'études. Dans les disques protoplanétaires, elle est approximée par $\nu \propto c_s H_p$ (Shakura & Sunyaev, 1973; Baruteau et al., 2016), où H_p est l'échelle de pression. Là aussi, l'efficacité du processus de friction turbulente dépend d'un facteur de proportionnalité inconnu, dont l'amplitude pourrait fortement affecter les conclusions sur la migration des proto-planètes dans les disques.

2.3.4.2 Vers un traitement non-linéaire des marées en zone convective

L'étude qui est faite des marées dans ce chapitre est linéaire, et néglige donc notamment le terme d'advection non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, avec \mathbf{u} la perturbation en vitesse du flot de marée d'équilibre ou de marée dynamique, dans l'équation de Navier-Stokes. Cette approximation est à priori bien vérifiée pour la plupart des Jupiter chauds qui ne possèdent pas des périodes ultra-courtes de l'ordre du jour ou moins. Lorsque le paramètre d'amplitude de marée ϵ n'est plus suffisamment petit, comme c'est le cas par exemple pour WASP-19 b qui tourne en environ 19 h ($\epsilon \sim 0.05$), les effets non-linéaires des marées d'équilibre et dynamique deviennent non négligeables et doivent être considérés dans la réponse de marée (p.e., Ogilvie, 2014; Barker, 2016). Pour étudier les effets non-linéaires de l'interaction de marée, une méthode utilisée est de faire croître l'amplitude du forçage de marée, afin de passer continûment d'un régime linéaire à un régime non-linéaire (aussi appelé "supercritique", voir figure 1 de Hoff et al., 2016). En adoptant cette méthode, Jouve & Ogilvie (2014, voir aussi Wei, 2016) montre numériquement que les couches de cisaillement, dans un modèle de boîte 2D, deviennent instables et disparaissent pratiquement dans le régime non-linéaire (on parle ici d'instabilité sub-harmonique car l'énergie de l'onde excitée est transférée à une onde de plus faible fréquence). Cependant, le taux de dissipation moyen ne semble pas sensiblement affecté par ces instabilités par rapport au régime linéaire. Les simulations non-linéaires à haute résolution dans une coquille sphérique 3D de Favier et al. (2014) partagent certains de ces résultats, comme l'altération des propriétés de propagation des ondes inertielles, mais montrent aussi une modification importante du taux de dissipation de marée normalisé, à cause du développement de flot zonaux dans une coquille initialement en rotation solide (les instabilités observées sont dites de cisaillement). En introduction, nous avons aussi parlé du déferlement non-linéaire des ondes de gravité dans les cœurs radiatifs des étoiles de faible masse (Barker & Ogilvie, 2010; Barker, 2011) avec des implications importantes pour la survie des Jupiter chauds en fonction du type spectral de l'étoile hôte (Guillot et al., 2014). Ce déferlement, associé à des dissipations fortes, est aussi possible pour les ondes inertielles au niveau des latitudes critiques, comme examiné par Goodman & Lackner (2009).

Un des effets non-linéaires les plus étudiés dans les enveloppes convectives, pour ses implications sur la dissipation de marée, est l'instabilité elliptique (Kerswell, 2002; Barker & Lithwick, 2013, 2014; Le Bars et al., 2015; Barker, 2016; Barker et al., 2016). Cette instabilité hydrodynamique affecte les flots de grande échelle qui forment des champs de vitesse elliptiques dans un plan globalement dirigé vers le compagnon, comme c'est le cas pour le flot généré par la marée d'équilibre (voir figure 2.3). Dans cette configuration, une paire d'ondes inertielles, excitées par les oscillations périodiques des flots elliptiques, peut être déstabilisée en se couplant à la marée d'équilibre. Le surplus de dissipation engendrée par ce mécanisme non-linéaire est susceptible d'expliquer la synchronisation des planètes de très courte période, ainsi que l'absence d'alignement spin-orbite strict (Barker et al., 2016; Barker, 2016) observé dans les systèmes de Jupiter chauds (e.g. relativement aux observations de Albrecht et al., 2012). Comme pour les

instabilités de cisaillement (Favier et al., 2014), ces effets non-linéaires entraînent un dépôt de moment cinétique localisé qui engendre des flots zonaux et donc de la rotation différentielle. La turbulence induite par ces instabilités permet alors de transporter efficacement le moment cinétique des interactions de marée.

Dans la suite de cette thèse, on se concentrera sur un traitement linéaire des interactions de marée dans le corps primaire, sujet qui est loin d'avoir été entièrement exploré de par les interactions possibles avec certains processus non pris en compte, comme les effets du magnétisme et de la rotation différentielle sur la réponse de marée qui sont au cœur de cette thèse.

Nous renvoyons aux chapitres 4 et 6 pour un examen de l'influence respective de ces deux processus sur les propriétés des flots de marée d'équilibre et dynamique, et de leur dissipation.

Deuxième partie

Influence du magnétisme stellaire sur l'interaction de marée

Sommaire

3.1 Préliminaire : évolution de la rotation dans les étoiles de faible masse	49
3.1.1 STAREVOL : un code 1D d'évolution stellaire prenant en compte la rotation	49
3.1.2 Histoire rotationnelle des étoiles	50
3.2 Origine et diversité du magnétisme stellaire	51
3.2.1 Détection des champs magnétiques de surface	52
3.2.2 Des simulations 3D pour contraindre le magnétisme interne	55
3.3 Prescriptions d'un champ magnétique à grande échelle	56
3.3.1 Lois d'échelle magnéto-hydrodynamiques	56
3.3.2 Extrapolation d'un champ dipolaire grande échelle près de la surface	60
3.3.3 Estimation des champs magnétiques à la base de la zone convective et à la surface	60

Comme expliqué dans l'introduction, je me suis tout d'abord intéressée à l'impact du magnétisme sur l'interaction de marée, et ce plus particulièrement tout au long de l'évolution d'étoiles de faible masse, tant à la surface qu'à la base de leur région convective, un aspect qui n'a pas été traité dans les études analytiques et numériques de [Lin & Ogilvie \(2018\)](#) et [Wei \(2016, 2018\)](#). Pour ce faire, il est important de connaître les processus à l'origine du magnétisme stellaire, l'amplitude et la topologie des champs magnétiques à l'intérieur des étoiles, ici dans les enveloppes convectives, en s'appuyant sur les observations de ces paramètres à la surface des étoiles. L'objectif de ce chapitre est de construire des lois d'échelle qui permettent d'estimer ces champs en fonction de paramètres stellaires globaux comme la période de rotation, la masse, ou l'âge de l'étoile, et de paramètres dynamiques locaux caractérisant les mouvements convectifs internes (comme le nombre de Reynolds ou le nombre de Rossby).

3.1 Préliminaire : évolution de la rotation dans les étoiles de faible masse

J'introduis dès à présent le code d'évolution stellaire qui a fourni les grilles de paramètres stellaires nécessaires à l'exploration de l'impact du magnétisme sur l'interaction de marée. Il va en effet nous servir de support pour dépeindre les différentes phases de l'évolution rotationnelle des étoiles de faible masse, dont la compréhension est nécessaire pour toute la suite de la discussion.

3.1.1 STAREVOL : un code 1D d'évolution stellaire prenant en compte la rotation

Nous avons utilisé la dernière version du code Franco-Suisse STAREVOL, qui est un code numérique 1D d'évolution stellaire pour des étoiles de faible masse et massive. On se concentre cependant ici sur les

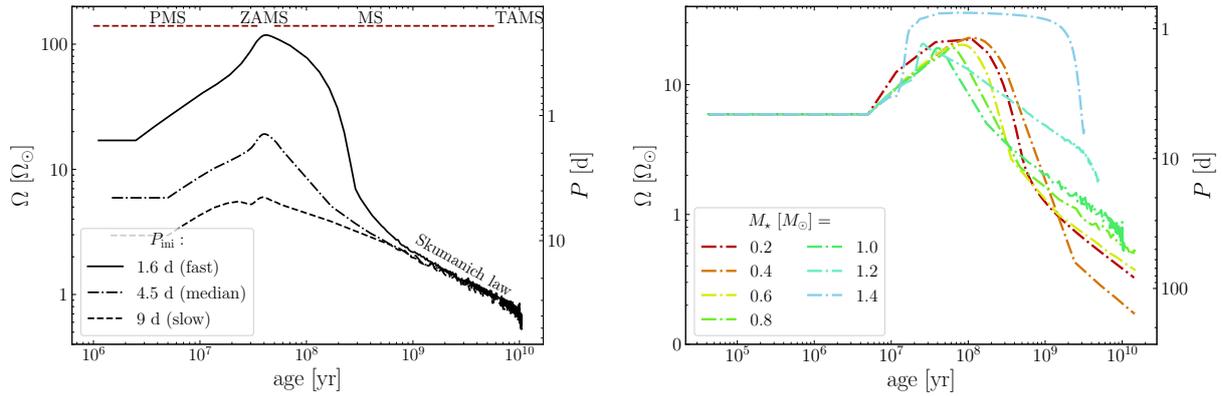


FIGURE 3.1: Taux de rotation normalisé à celui du Soleil $\Omega_{\odot} = 430$ nHz (ordonnée de gauche) et période de rotation en jours (ordonnée de droite), en fonction de l'âge de l'étoile en années. *Gauche* : Pour une étoile de $1 M_{\odot}$ avec différentes rotations initiales : rapide (1.6 jours), moyenne (4.5 jours), et lente (9 jours). *Droite* : Pour des étoiles de type spectral M à F avec une rotation initiale moyenne.

étoiles de faible masse de 0.2 à $1.4 M_{\odot}$, comme dans l'article de [Amard et al. \(2019\)](#), voir aussi [Siess et al., 2000](#); [Palacios et al., 2006](#); [Decressin et al., 2009](#); [Amard et al., 2016](#)). Contrairement à l'étude précédemment citée, la métallicité est fixée, et définie à la métallicité solaire photosphérique de référence $Z = 0.013446$. Le paramètre de longueur de mélange¹ $\alpha = 1.973$ est lui aussi fixé; il a été calibré pour retrouver les paramètres solaires (rayon et luminosité) pour $1 M_{\odot}$ à l'âge du Soleil. Ce paramètre est notamment utilisé pour calculer les vitesses et longueurs caractéristiques des mouvements convectifs d'après la théorie de la longueur de mélange ([Asplund et al., 2009](#); [Amard et al., 2019](#)). Nous ne détaillerons pas davantage les prescriptions pour la micro-physique (abondances initiales, opacités, équations d'état, réactions nucléaires etc...) et la macro-physique (freinage par vent, transport du moment cinétique, temps caractéristique de couplage avec le disque protoplanétaire calibrés à l'aide des propriétés de jeunes amas ouverts observés) utilisées dans STAREVOL et présentées dans [Amard et al. \(2016, 2019\)](#).

La force du modèle STAREVOL est qu'il traite de manière réaliste l'évolution du profil de rotation moyenné en latitude et en rayon dans l'enveloppe convective d'une part, et dans la zone radiative d'autre part. Cependant, l'évolution en rayon et en latitude de la rotation ne sont pas prises en compte (i.e. pas de rotation différentielle dans chacune des deux zones). Dans ce code, trois modèles de rotation sont utilisés, avec des taux de rotation initiaux lent, médian et rapide, associés à des durées de vie des disques protoplanétaires différentes. Ces modèles ont été choisis de sorte à couvrir la dispersion des périodes de rotation observée pour des étoiles de masse et d'âge variables dans des amas ouverts jeunes ([Gallet & Bouvier, 2013, 2015](#); [Amard et al., 2016](#); [Sadeghi Ardestani et al., 2017](#)).

Je n'ai pas eu à faire tourner le code STAREVOL, les grilles de paramètres stellaires (comme les grandeurs convectives, la rotation, la densité et le rayon de l'étoile) m'ont été fournies via ma collaboration avec Florian Gallet, pour différentes masses et rotations initiales en fonction de l'âge de l'étoile.

3.1.2 Histoire rotationnelle des étoiles

Une étoile naît de l'effondrement d'un nuage interstellaire devenu gravitationnellement instable après avoir excédé la masse de Jeans ([Kippenhahn et al., 2012](#)). Dès que les régions centrales deviennent

1. $\alpha = \ell/H_p$, où ℓ est le libre parcours moyen, ou longueur de mélange, des tourbillons turbulents convectifs (lorsque l'on cherche à modéliser la turbulence), et $H_p = |\frac{dr}{d \ln p}|$ la hauteur de l'échelle de pression ([Zahn, 1966b, 1989](#)).

assez denses, leur opacité empêche l'énergie interne du gaz de s'échapper, et l'objet commence à se réchauffer. La matière en chute libre sur le nuage central, initialement uniformément répartie autour de l'objet accrétant, s'accumule dans un disque d'accrétion, par conservation du moment cinétique. Pendant ce temps, le cœur central continue à se réchauffer et sa pression et sa densité à augmenter, jusqu'à former ce que l'on appelle une proto-étoile, en équilibre hydrostatique. Cette proto-étoile est plus froide que la température de surface actuelle du Soleil, de rayon similaire mais moins massive de 3 ordres de grandeur. La phase dite de pré-séquence principale ("pre-main sequence" en anglais ou PMS) débute dès la formation de cette proto-étoile jusqu'au démarrage de la fusion nucléaire de l'hydrogène, l'âge zéro de la séquence principale ("zero age main sequence" ou ZAMS) qui marque la véritable naissance de l'étoile (voir panel de gauche, figure 3.1). Durant la PMS, qui dure plusieurs millions d'années, deux phases se distinguent. La première phase concerne les premiers millions d'années ; le taux de rotation de surface est constant car la matière accrétée du disque circumstellaire qui "tombe" sur la proto-étoile compense la contraction de cette dernière. On appelle cela le verrouillage du disque (p.e. [Rebull et al., 2004](#); [Bell et al., 2013](#); [Zanni & Ferreira, 2013](#); [Gallet & Bouvier, 2015](#)). Quand la matière du disque est épuisée (deuxième phase de la PMS), l'étoile a atteint sa masse finale mais continue à se contracter. Par conservation du moment cinétique, le taux de rotation de surface augmente. Il faut savoir que lorsqu'une proto-étoile se forme, elle est entièrement convective, quelle que soit sa masse. Un cœur radiatif pour les étoiles de type spectral K à F se forme en général pendant les premiers millions d'années de la vie de la proto-étoile, et durant la 2^{ème} phase de la PMS pour certaines des étoiles M qui possèdent un petit cœur radiatif ($M \sim 0.4 M_{\odot}$; [Mayne, 2010](#); [Gregory et al., 2012](#), figure 8). La différence principale entre la pré-séquence principale et la séquence principale ("main sequence" ou MS), est que dans la première la luminosité vient de l'énergie de contraction de l'étoile, alors que dans la seconde elle vient de la fusion nucléaire. Durant la MS, l'étoile est en équilibre hydrostatique et radiatif et ne se contracte plus ; cependant, l'action du vent stellaire magnétisé tend à freiner la rotation de l'étoile (voir [Matt et al., 2015](#), pour les prescriptions de vent dans STAREVOL). Pour des étoiles bien établies dans la séquence principale, âgées de l'ordre du milliard d'années, l'âge et la rotation de l'étoile suivent une loi simple décrite par [Skumanich \(1972\)](#), à savoir $\Omega \propto \text{age}^{-1/2}$. Cette loi permet ainsi d'estimer l'âge d'une étoile en séquence principale à partir de sa fréquence de rotation, ce qui constitue la base de la gyrochronologie ([Barnes, 2003](#)). La séquence principale se termine lorsque l'étoile a consommé son réservoir central d'hydrogène, ce qui est suivi d'une phase de fusion de l'hydrogène en coquille, et de la fusion centrale de l'hélium durant les phases de sous géante et de géante rouge. Ce changement de régime est indiqué sur la figure 3.1 par la fin de la séquence principale TAMS ("terminal age main sequence"). J'ai tracé en figure 3.1, panneau de droite, l'évolution de la rotation pour différentes étoiles de faible masse. Même si les durées des différents processus diffèrent, les étapes principales de la vie d'une étoile décrites plus haut sont les mêmes pour ces étoiles de masse différente.

3.2 Origine et diversité du magnétisme stellaire

Le magnétisme stellaire est un processus crucial qui va modéliser la vie des étoiles dès leur formation en favorisant l'effondrement du nuage moléculaire initial ([Bate et al., 2014](#); [Brun & Browning, 2017](#)), jusqu'aux stades avancés de la vie d'une étoile. Dans la section précédente, on a en effet évoqué que le champ magnétique permettait de freiner, via son vent, la rotation de l'étoile ([MacGregor & Brenner, 1991](#)), et favorise ainsi la redistribution du moment cinétique dans l'enveloppe convective et dans le cœur radiatif (grâce par exemple à différentes instabilités magnétiques dont l'instabilité de Tayler ; voir à ce sujet [Mestel & Weiss, 1987](#); [Spruit, 1999](#); [Fuller et al., 2019](#)). Dans les étoiles de faible masse, typiquement de type spectral M à F, le magnétisme doit principalement son origine à l'effet dynamo causé par les mouvements

convectifs turbulents dans l’enveloppe de l’étoile (ou dans l’ensemble de l’étoile pour les étoiles de type spectral plus tardif que M). Cet effet hydromagnétique convertit l’énergie cinétique des flots turbulents (énergie cinétique de rotation et des mouvements fluides de petite échelle) en énergie magnétique. Ce processus s’effectue de manière pérenne, auto-entretenu par un mécanisme d’auto-induction contre la dissipation ohmique qui s’oppose à l’établissement et à l’amplification du champ magnétique. Malgré l’absence de consensus, deux mécanismes restent privilégiés : l’effet α et le mécanisme de Babcock-Leighton (voir par exemple les revues de [Brun & Browning, 2017](#); [Charbonneau, 2020](#)) qui sont des processus de régénération d’un champ poloidal à partir d’un champ toroidal issu de l’action de la rotation différentielle sur un champ poloidal initial (effet Ω ; voir par exemple la figure 1 de [Sanchez et al., 2014](#)). Dans le cœur radiatif des étoiles de faible masse, le champ magnétique n’est plus auto-entretenu par les flots turbulents convectifs et la rotation différentielle ; il devient alors un champ dit fossile, vestige de l’époque où l’étoile était entièrement convective comme évoqué dans la section précédente. Ce champ fossile dans la zone radiative, décroît lentement suivant un temps caractéristique Ohmique de l’ordre de la dizaine de milliards d’années pour une étoile de type solaire ([Mestel & Weiss, 1987](#); [Brun et al., 2017](#)). Dans la suite, nous nous concentrerons sur les champs dynamo de la zone convective dans laquelle se propage les ondes inertielles et magnéto-inertielles de marées.

3.2.1 Détection des champs magnétiques de surface

Pour détecter le champ magnétique à la surface des étoiles, on se sert généralement de l’effet Zeeman ([Zeeman, 1897](#)), c’est-à-dire de la séparation des raies spectrales d’absorption des atomes à la surface d’une étoile, due au champ magnétique ([Donati & Landstreet, 2009](#); [Reiners, 2012](#)). Néanmoins cette méthode qui utilise la lumière non-polarisée ne permet pas la mesure de la topologie des champs de surface. Il faut pour cela la compléter de l’effet Doppler, c’est ce qu’on appelle communément la technique d’imagerie Zeeman-Doppler (ZDI, [Semel, 1989](#)), qui cartographie le champ magnétique photosphérique de grande échelle des étoiles. Cette technique s’applique aussi bien aux étoiles de faible masse qu’aux étoiles massives de type spectral A B ou O à zone radiative externe, et ce à différents stades d’évolution stellaire ([Donati et al., 2007, 2008b](#); [Petit et al., 2008](#); [Fares et al., 2013](#)). Elle a notamment permis la détection de deux planètes de type Jupiter-chaud autour d’étoiles T-Tauri qui viennent de dissiper leur disque d’accrétion, seules détections à l’aide de cette méthode autour d’étoiles si jeunes ([Donati et al., 2016](#); [Yu et al., 2017](#)). On précisera par ailleurs que les méthodes Zeeman et ZDI sont complémentaires dans le sens où la méthode ZDI, qui travaille avec la lumière polarisée circulairement, ne permet pas la mesure des champs de petite échelle, ce que permet la première technique ([Kochukhov et al., 2017](#); [See et al., 2019b](#)). Plus précisément, la technique ZDI permet de donner la répartition de l’énergie totale dans chacune des composantes du champ magnétique, i.e. celles radiale et latitudinale (champ poloidal dans le cas axisymétrique²), et azimuthale (champ toroidal dans le cas axisymétrique). Elle permet aussi de quantifier les contributions axisymétriques (symétrie par rapport à l’axe de rotation) et non-axisymétriques du champ, ainsi que la proportion énergétique dipolaire, octupolaire etc. C’est justement cette dernière composante qui domine dans l’extrapolation potentielle du champ, figure 3.2, d’une étoile de type F en phase d’accrétion T Tauri. Cette géométrie des

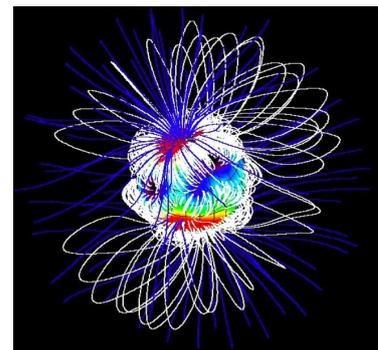


FIGURE 3.2: [[Gregory et al. \(2010\)](#)]. Reconstruction de la magnétosphère de l’étoile F V2129 Oph de $1.35 M_{\odot}$. Les lignes de champ ouvertes sont en bleu, celles fermées en blanc.

2. C’est à dire symétrique par rapport à l’axe de rotation.

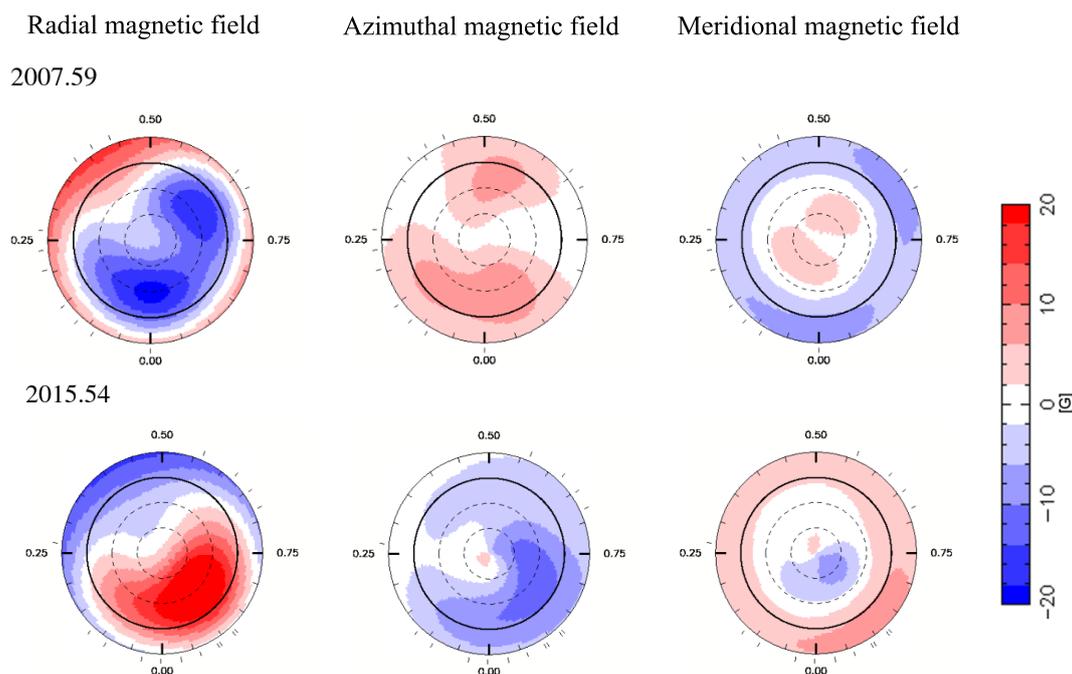


FIGURE 3.3: [Boro Saikia et al. (2016)]. Projection polaire jusqu'à la latitude -30° de la géométrie magnétique de l'étoile 61 Cygni A de $0.66 M_\odot$ en séquence principale (age = 6 milliards d'années), au travers de ses trois composantes (radiale, azimuthale, et méridionale), reconstruite à deux dates (été 2007 et été 2015).

lignes de champ est finalement assez différente de celle présentée en figure 1.18, aussi pour une étoile jeune mais moins massive (de masse $0.7 M_\odot$) qui ne possède pas encore de cœur radiatif. Cette diversité de topologies est aussi temporelle dans le sens où il a été observé, pour les quelques étoiles qui ont pu être suivies sur plusieurs années, une évolution de l'activité chromosphérique et des cycles magnétiques comme c'est le cas pour le Soleil (p.e., See et al., 2016). On trouve par exemple un cycle voisin de celui du Soleil pour l'étoile de type spectral K 61 Cygni A, dans laquelle s'opère un renversement des polarités poloïdale et toroïdale au bout de 7-8 ans (comparé à 11 ans pour le Soleil) comme on le devine en figure 3.3. D'autres étoiles possèdent un cycle magnétique beaucoup plus court, parfois de l'ordre de l'année, potentiellement lié à la période de rotation de l'étoile (Morgenthaler et al., 2011; Mengel et al., 2016).

La technique tomographique ZDI repose sur l'inversion des séries temporelles des spectres polarisés mesurés, au minimum au cours d'une période de rotation, à l'aide de spectropolarimètres comme NARVAL installé au pic du midi, ou EPSPaDOn et maintenant SPIROU au CFHT d'Hawaï. On utilise le plus souvent le paramètre de Stokes V , qui est une mesure de la différence entre les polarisations circulaires droite et gauche de la lumière (Reiners, 2012). Les composantes du champ magnétique de grande échelle, exprimées sur la base des harmoniques sphériques, sont alors contraintes grâce à des méthodes d'optimisation (typiquement la méthode des moindres carrés et la méthode de maximisation de l'entropie, voir par exemple à ce sujet Donati et al., 2006; Folsom et al., 2018).

Grâce à cet effort de suivi et de caractérisation des champs magnétiques sur plusieurs dizaines et centaines d'étoiles, de nombreuses études comme celles de Vidotto et al. (2014) et Folsom et al. (2016, 2018, voir aussi Petit et al., 2008; Donati, 2013; Seach et al., 2020) se sont intéressées à la caractérisation de ces champs en fonction de la masse de l'étoile, de sa température effective, de son âge ou de sa période de rotation. La diversité et la variabilité temporelle des amplitudes et des topologies des champs magnétiques de surface de grande échelle fait qu'il est difficile de trouver une loi simple reliant les paramètres intrinsèques de l'étoile et son champ magnétique, bien que certaines tendances semblent

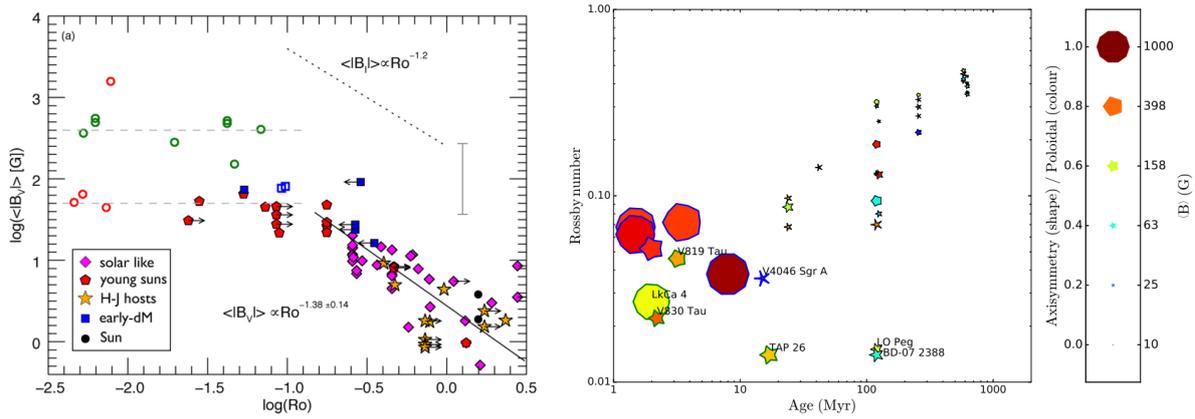


FIGURE 3.4: *Gauche* : [Vidotto et al. (2014)]. Intensité moyenne du champ magnétique à grande échelle $\langle |B_V| \rangle$ en fonction du nombre de Rossby convectif Ro , pour des étoiles qui ne possèdent plus de disques d'accrétion (fin de PMS, MS). Les symboles ouverts sont des naines M; \square : $M \geq 0.4 M_\odot$ (début de MS), \circ : $0.2 < M_*/M_\odot < 0.4$ (milieu de MS); \circ : $M \leq 0.2 M_\odot$ (fin de MS). *Droite* : [Folsom et al. (2018)]. "Confusogramme" : nombre de Rossby convectif en fonction de l'âge d'étoiles jeunes (en phase T Tauri) jusqu'en début de séquence principale. La taille du symbole correspond à l'intensité du champ magnétique, la couleur du symbole encode le caractère plutôt poloïdal ou toroïdal du champ magnétique, et la forme représente le degré d'axisymétrie de la composante poloïdale du champ magnétique.

ressortir. Dans le panel de gauche de la figure 3.4, il semble se dégager une anti-corrélation du champ moyen à grande échelle avec le nombre de Rossby convectif $Ro = P_{\text{rot}}/\tau_{\text{conv}}$ au dessus d'un certain seuil, où P_{rot} est la période de rotation de l'étoile et τ_{conv} est le temps caractéristique des mouvements convectifs (temps de retournement, voir Landin et al., 2010; Charbonnel et al., 2017). Le nombre de Rossby seuil, fixé à $Ro \sim 0.1$ par de précédentes études utilisant le champ moyen de petite échelle $\langle |B_1| \rangle$ (paramètre de Stokes I non polarisé, voir à ce propos Reiners et al., 2009), délimite un régime avec des paliers de saturation (Donati et al., 2008b) qui concerne des naines M majoritairement en séquence principale, et un régime en loi de puissance pour des étoiles de type spectral F, G, K et M (en phase PMS mais une fois le disque d'accrétion dissipé, ou MS). Dans le panneau de droite de la figure 3.4, Folsom et al. (2018) ont représenté l'amplitude, la topologie (toroïdale ou poloïdale) et le caractère axisymétrique des champs d'étoile jeune (PMS et début de MS) en fonction de leur âge. Pour les étoiles T-Tauri, qui sont des proto-étoiles jeunes de la PMS, l'amplitude du champ de grande échelle est globalement très forte, de l'ordre du kilo-Gauss (Donati et al., 2007, 2008a,b; Gregory et al., 2010), et ces étoiles possèdent un champ plutôt axisymétrique et poloïdal. Ces caractéristiques très spécifiques semblent disparaître à des âges plus avancés (mais toujours en PMS, début de MS), avec un champ qui devient davantage non-axisymétrique, toroïdal, et avec une amplitude qui décroît (les tendances sont similaires pour un taux de rotation décroissant; Petit et al., 2008; Vidotto et al., 2014). De plus, les champs préférentiellement toroïdaux sont axisymétriques ce qui n'est pas forcément le cas pour les champs poloïdaux, omniprésents chez les étoiles de faible masse de type M (voir notamment la figure 5 de See et al., 2015; Folsom et al., 2016). Il a par ailleurs été montré que les étoiles en rotation modérément rapides, $P_{\text{rot}} < 15 - 20$ jours ou de manière équivalente telles que $Ro \sim 1$ (i.e. toutes les étoiles du panel de droite de la figure 3.4) présentent un ratio toroïdal sur poloïdal assez variable selon les étoiles par rapport aux rotateurs plus lents qui possèdent une topologie quasi-exclusivement poloïdale (Petit et al., 2008; See et al., 2016; Folsom et al., 2016, 2018). C'est le cas par exemple pour le Soleil qui possède une rotation moyenne de surface de l'ordre de 30 jours, et qui affiche une structure magnétique de surface dipolaire lors des minima d'activité (tous les 11 ans) et une structure plus complexe lors des maxima d'activité, quadrupolaire ou octupolaire, mais donc toujours poloïdale (DeRosa et al., 2012).

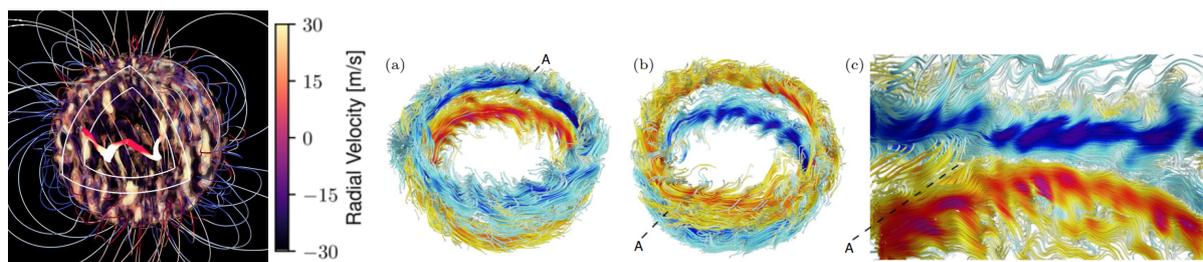


FIGURE 3.5: *Gauche* : [Strugarek et al. (2017a)]. Simulation 3D non-linéaire et globale d'un cycle magnétique régulier pour une étoile de type solaire. Le tube de flux rouge représente les lignes de champ internes de grande échelle. *Droite (a,b,c)* : [Brown et al. (2010)]. Tracés des lignes de champ des couronnes magnétiques, les couleurs indiquant l'amplitude et la polarité du champ toroidal (rouge, positif; bleu, négatif).

Ainsi, grâce aux techniques ZDI et à "l'élargissement" Zeeman, on arrive maintenant à assez bien caractériser les champs de surface aux grandes échelles et à mieux décrire les champs aux petites échelles (See et al., 2019b). Cependant, on ne sait encore peu de chose de l'intérieur de ces étoiles où prend place l'effet dynamo. C'est sur ce point que les simulations numériques tri-dimensionnelles prennent le relais et nous aident ainsi à aller plus loin dans la compréhension et la caractérisation de l'origine du magnétisme stellaire.

3.2.2 Des simulations 3D pour contraindre le magnétisme interne

Le magnétisme n'est pas seulement présent en surface, comme en témoignent les régions actives telles que les taches solaires (ou stellaires) qui présentent des champs très forts de l'ordre du kilo-Gauss. Cette activité intense est la marque d'un mécanisme dynamo puissant dans les couches internes de ces étoiles.

Comme évoqué en début de chapitre, les mécanismes qui régissent l'action de la dynamo ne sont pas bien connus, et il en est de même de l'endroit où la dynamo opère. Dans le Soleil, on pense que cet effet aurait principalement lieu au niveau de la tachocline, qui est l'interface entre la zone radiative et convective et une zone de cisaillement très importante (Spiegel & Zahn, 1992; Charbonneau, 2010, 2020). Néanmoins cette vision est mise à l'épreuve par l'observation de champs de grande échelle forts (de l'ordre du kilo-Gauss) avec des topologies de surface relativement simples, i.e. majoritairement dipolaires et axisymétriques, dans les étoiles jeunes en tout début de PMS (certaines des T Tauri) et les étoiles de type M qui sont entièrement convectives et donc ne possèdent pas de tachocline (p.e., Gregory et al., 2012). Comme le souligne Morin et al. (2011), l'effet dynamo qui s'établit dans ces étoiles pourrait avoir des similarités avec la dynamo terrestre caractérisée par une contribution dipolaire dominante. Cela peut montrer deux choses :

- soit les processus dynamo sont différents selon la structure de l'étoile et ses paramètres dynamiques (en particulier le taux de rotation),
- soit l'effet dynamo n'a pas lieu dans les couches de fort cisaillement proches de la tachocline mais plutôt dans le cœur de la zone convective, comme le suggère Wright & Drake (2016) par l'observation des émissions en rayons X d'étoiles purement convectives, qui présenteraient selon cette étude une dynamo de type solaire.

Dans ce cadre, les simulations numériques des intérieurs des étoiles pourraient aider à trancher cette question. D'une part, les modèles 2D de dynamo en champ moyen permettent une large exploration de l'espace des paramètres (p.e. Jouve & Brun, 2007). D'autre part, on arrive maintenant à avoir des simulations 3D auto-consistantes qui modélisent les mouvements convectifs et l'action de la dynamo,

c'est à dire qui résolvent de manière couplée l'équation de Navier-Stokes avec la rétroaction de la force de Lorentz, et l'équation de l'induction. Ces simulations reproduisent par exemple les propriétés attendues dans le Soleil (notamment la cyclicité de l'activité solaire pour les taches et le champ magnétique), mais aussi chez des étoiles jeunes, et/ou entièrement convectives. Les simulations non-linéaires de [Strugarek et al. \(2017a\)](#), qui utilisent le code Eulag-MHD adapté aux écoulements globaux multi-échelles, retrouvent notamment, pour une étoile ayant les caractéristiques structurelles du Soleil, le cycle complet de 22 ans associé au nombre de taches solaires, ainsi que l'accumulation d'un champ de grande échelle axisymétrique de l'ordre du kilo-Gauss à la base de la zone convective (voir figure 3.5, panel de gauche). Pour les étoiles entièrement convectives de faible masse ($M \sim 0.3M_{\odot}$), [Browning \(2008\)](#) et [Yadav et al. \(2015\)](#) vérifient, à l'aide des codes MHD anélastiques ASH et MagIC respectivement, les propriétés de champ fort et de topologie simple, où l'énergie est majoritairement transportée par les petites échelles. Par ailleurs, on observera que dans les simulations globales 3D de [Brown et al. \(2010\)](#), voir aussi [Nelson et al., 2014](#)) pour des étoiles de type solaire en rotation rapide, les auteurs observent la persistance d'un ruban toroïdal à grande échelle à l'intérieur de la zone convective (représenté dans le panneau de droite de la figure 3.5), sans que cela ne soit lié à la présence d'une tachocline à l'interface entre les zones convective et radiative. Cela remet en cause l'importance de cette région dans l'établissement de l'effet dynamo pour les étoiles de faible masse possédant un cœur radiatif. Pour ce qui est des étoiles jeunes évoluant depuis la PMS jusqu'à la ZAMS, la complexification de la topologie du champ, à taux de rotation ou âge croissant et décrite dans la section précédente (voir en particulier le panneau de droite de la figure 3.4), a été aussi vérifiée à l'aide de simulations 3D (code ASH) par [Emeriau-Viard & Brun \(2017\)](#). On renvoie en particulier aux revues de [Brun et al. \(2015\)](#) et de [Charbonneau \(2020\)](#) pour un état des lieux plus exhaustif des simulations numériques modélisant les dynamos solaire et stellaires, les mouvements convectifs turbulents multi-échelles, et la rotation différentielle.

On terminera par une constatation globale, partagée par les différentes études observationnelles et numériques, à savoir le rôle crucial que joue l'évolution de la structure et de la rotation sur le magnétisme. Selon [Folsom et al. \(2016\)](#), l'évolution magnétique des étoiles de type solaire au cours de la PMS est ainsi majoritairement due à des changements structurels, alors que le magnétisme suit plutôt l'évolution de la rotation en MS.

3.3 Prescriptions d'un champ magnétique à grande échelle

À l'aide du code STAREVOL présenté en section 3.1, nous avons cherché à estimer les champs magnétiques de grande échelle à la surface et dans l'enveloppe convective des étoiles de faible masse au cours de leur évolution. À cet égard, les lois d'échelle des dynamos stellaires ([Christensen et al., 2009](#); [Augustson et al., 2019](#)) peuvent nous donner des relations simples faisant intervenir les paramètres stellaires des grilles du modèle STAREVOL pour estimer l'amplitude d'un champ magnétique interne de grande échelle.

3.3.1 Lois d'échelle magnéto-hydrodynamiques

Les lois d'échelle pour les dynamos convectives sont semi-analytiques, c'est-à-dire qu'elles découlent de conditions d'équilibre simples de force ou d'énergie et sont ensuite calibrées sur des observations ou des simulations 2D ou 3D, comme c'est le cas dans les études de [Christensen et al. \(2009\)](#), [Christensen \(2010\)](#), [Davidson \(2013\)](#), et [Augustson et al. \(2019\)](#), pour les dynamos des étoiles de faible masse et des planètes. Un élément central dans l'estimation du champ magnétique est sa dépendance à la période de rotation, comme on peut le pressentir d'après les précédentes sections. D'autres éléments clefs qui

encodent l'évolution structurelle de l'étoile sont ses propriétés convectives (vitesse, longueur ou temps de retournement convectif). Pris ensemble, ces éléments déterminants pour l'estimation d'un champ magnétique sont souvent combinés en un seul paramètre : le nombre de Rossby convectif (voir figure 3.4, et, p.e., Vidotto et al., 2014; See et al., 2015). C'est justement le cœur du sujet des lois d'échelle que nous allons établir. Nous n'allons pas calibrer une loi en particulier, mais plutôt développer trois lois d'échelle analytiques qui illustrent la diversité des champs magnétiques observés et simulés. Trois régimes différents sont utilisés pour composer ces lois d'échelle dynamo qui sont évaluées à la tachocline. Même s'il y n'a pas de consensus sur le lieu d'une dynamo grande échelle dans les étoiles (comme cela a été expliqué dans la section précédente), faire cette hypothèse nous permet de déterminer une valeur maximale de l'amplitude du champ magnétique dans l'enveloppe convective d'une étoile. Les trois régimes, classés par champ dynamo induit B_{dyn} croissant, sont les suivants :

- le régime d'équipartition

Il repose sur le fait que l'intégralité de l'énergie cinétique des mouvements convectifs turbulents est convertie en énergie magnétique, sans perte d'énergie, ce qui implique une diffusivité visqueuse et une résistivité magnétique faibles, et ainsi des fluctuations turbulentes d'amplitude modérée. Ce régime d'équipartition est très utilisé pour donner un ordre de grandeur raisonnable du champ magnétique de grande échelle dans les plages actives à la surfaces des étoiles (et éventuellement dans les taches) et dans l'enveloppe convective interne (Donati & Landstreet, 2009; Brun & Browning, 2017). L'ordre de grandeur souvent évoqué dans ces objets est le kilo-Gauss. En posant $\text{KE} = \rho v_c^2 / 2$ la densité volumique d'énergie cinétique, et $\text{ME} = B_{\text{dyn}}^2 / (2\mu_0)$ la densité volumique d'énergie magnétique (en unité du système international), avec ρ la densité moyenne et v_c la vitesse convective, la loi d'échelle se résume à :

$$\text{ME} \sim \text{KE} \Rightarrow B_{\text{dyn}} \sim \sqrt{2\mu_0 \text{KE}}. \quad (3.1)$$

- le régime dit de "buoyancy dynamo"

Ce régime est aussi appelé équilibre de MAC ("Magneto-Archimedean-Coriolis") par Braginskiy (1967), Christensen (2010), et par Augustson et al. (2019), car les forces de Coriolis, d'Archimède et de Lorentz sont considérées de même amplitude. Ce régime est particulièrement utilisé dans le cadre de la dynamo terrestre (Christensen et al., 2009; Christensen, 2010; Davidson, 2013). De nouveau, les termes visqueux sont négligés. La loi d'échelle s'établit d'ailleurs dans le régime où le nombre de Prandtl magnétique moléculaire $\text{Pm} = \nu / \eta$ est petit (Davidson, 2013; Augustson et al., 2019), avec ν la viscosité cinématique et η la résistivité magnétique. Ce régime se vérifie pour les étoiles de faible masse, car Pm varie par exemple de 10^{-1} dans le cœur à 10^{-6} au niveau de la photosphère pour le Soleil et similairement pour les autres étoiles (Zeldovich, 1983; Augustson et al., 2019, voir en particulier la figure 2 de cette étude). De plus, les termes non-linéaire (de type $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$) ne sont pas considérés ici, contrairement à la loi d'échelle précédente, ce qui revient à faire l'hypothèse d'un nombre de Rossby faible (comme montré en chapitre 2). En faisant cette hypothèse, on peut considérer que le flot convectif s'établit le long de colonnes parallèles à l'axe de rotation du fait du théorème de Taylor-Proudman, assurant ainsi que $l_{\perp} < l_{\parallel}$ où l_{\parallel} et l_{\perp} sont deux échelles de longueur caractéristiques parallèle et perpendiculaire à l'axe de rotation, respectivement. La loi d'échelle s'établit en prenant le rotationnel de chacune des forces de Coriolis, de Lorentz, et d'Archimède :

$$\rho(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} \sim \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}_{\text{dyn}}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_{\text{dyn}} \right) \sim \nabla \rho \times \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

de gauche à droite, où Ω est le vecteur rotation et g l'accélération de la pesanteur. En utilisant les longueurs caractéristiques définies plus haut, l'équation (3.2) se réécrit :

$$\frac{\Omega v_c}{l_{\parallel}} \sim \frac{g}{l_{\perp}} \sim \frac{B_{\text{dyn}}^2}{\rho \mu_0 l_{\perp}^2}, \quad (3.3)$$

où l'on a utilisé $\Omega \cdot \nabla \sim \Omega/l_{\parallel}$ et $\nabla \times \propto l_{\perp}^{-1}$ par construction de l_{\parallel} et l_{\perp} , sachant que $l_{\perp} < l_{\parallel}$. D'autre part, on peut aussi écrire une équivalence énergétique additionnelle sachant que les forces de Lorentz et d'Archimède sont d'amplitude comparable. La densité d'énergie magnétique par unité de masse est ainsi équivalente à la puissance de la force d'Archimède par unité de masse $w_B = g v_c$ selon la relation suivante (Davidson, 2013; Augustson et al., 2019) :

$$\frac{B_{\text{dyn}}^2}{\rho \mu_0} \sim l_{\parallel}^{2/3} w_B^{2/3}, \quad (3.4)$$

où l_{\parallel} apparaît par souci d'homogénéité, et pour construire un champ magnétique de relativement grande échelle ($l_{\perp} < l_{\parallel}$). On notera par ailleurs que dans le régime des faibles nombres de Prandtl magnétique, l'énergie magnétique est principalement stockée dans les grandes échelles (voir p.e. la figure 1 de Augustson et al., 2019). La puissance w_B peut aussi s'écrire en utilisant les deux équivalences de l'équation (3.3) :

$$w_B^2 \sim \frac{\Omega v_c^3 B_{\text{dyn}}^2}{l_{\parallel} \rho \mu_0}, \quad (3.5)$$

où l'on retrouve la densité d'énergie magnétique par unité de masse $B_{\text{dyn}}^2/(\rho \mu_0)$ à un facteur 2 près. En injectant la relation (3.5) dans (3.4), on tire :

$$\left(\frac{B_{\text{dyn}}^2}{\rho \mu_0} \right)^2 = l_{\parallel} \Omega v_c^3. \quad (3.6)$$

En faisant intervenir le nombre de Rossby convectif $R_o = v_c/(2\Omega l_{\parallel})$, et les densités d'énergie cinétique et magnétique, l'équation (3.6) se réécrit finalement :

$$\frac{\text{ME}}{\text{KE}} = R_o^{-1/2} \Rightarrow B_{\text{dyn}} = \sqrt{2\mu_0 \text{KE} \times R_o^{-1/2}}. \quad (3.7)$$

Dans le panneau de gauche à la figure 3.6, une loi d'échelle analogue à celle-ci (Eq. (3.7)) est tracée par Christensen et al. (2009). Elle reproduit correctement les données de la dynamo terrestre, de Jupiter, des naines M, d'étoiles T-Tauri qui possèdent encore un disque, et des étoiles en rotation rapide. Ces différents objets ont en commun une topologie relativement simple de champ magnétique.

- Magnétostrophie

L'équilibre magnétostrophique est réalisé lorsque les forces de Coriolis et de Lorentz sont d'amplitudes comparables. Comme les champs magnétiques déduits dans ce régime sont d'amplitude plus élevée que ceux estimés à l'aide du régime d'équipartition, on parle de régime en super-équipartition (Brun et al., 2015; Augustson et al., 2016; Brun & Browning, 2017; Augustson et al., 2019). On a ainsi l'équivalence :

$$\nabla \times B_{\text{dyn}}/\mu_0 \times B_{\text{dyn}} \sim 2\rho \Omega \times v. \quad (3.8)$$

En gardant en tête que les lois d'échelle dynamo sont évaluées à la base de la zone convective, $\nabla \approx l_c^{-1}$ et $\|\mathbf{v}\| \approx v_c$ avec l_c la longueur convective. Ainsi, on obtient l'équivalence :

$$\frac{B^2}{\mu_0 l_c} \sim \rho 2\Omega v_c \Rightarrow \frac{ME}{KE} \sim R_o^{-1} \Rightarrow B \sim \sqrt{2\mu_0 KE \times R_o^{-1}}, \quad (3.9)$$

en écrivant le nombre de Rossby convectif $R_o = v_c/(2\Omega l_c)$. Il faut souligner ici que notre définition du nombre de Rossby diffère des nombreuses définitions de la littérature, car l_c est évaluée à la base de la zone convective. Par exemple, dans Vidotto et al. (2014), il est calculée à la moitié de la longueur de mélange $\ell/2$ au-dessus de la base de la zone convective (Landin et al., 2010; Gilliland, 1986).

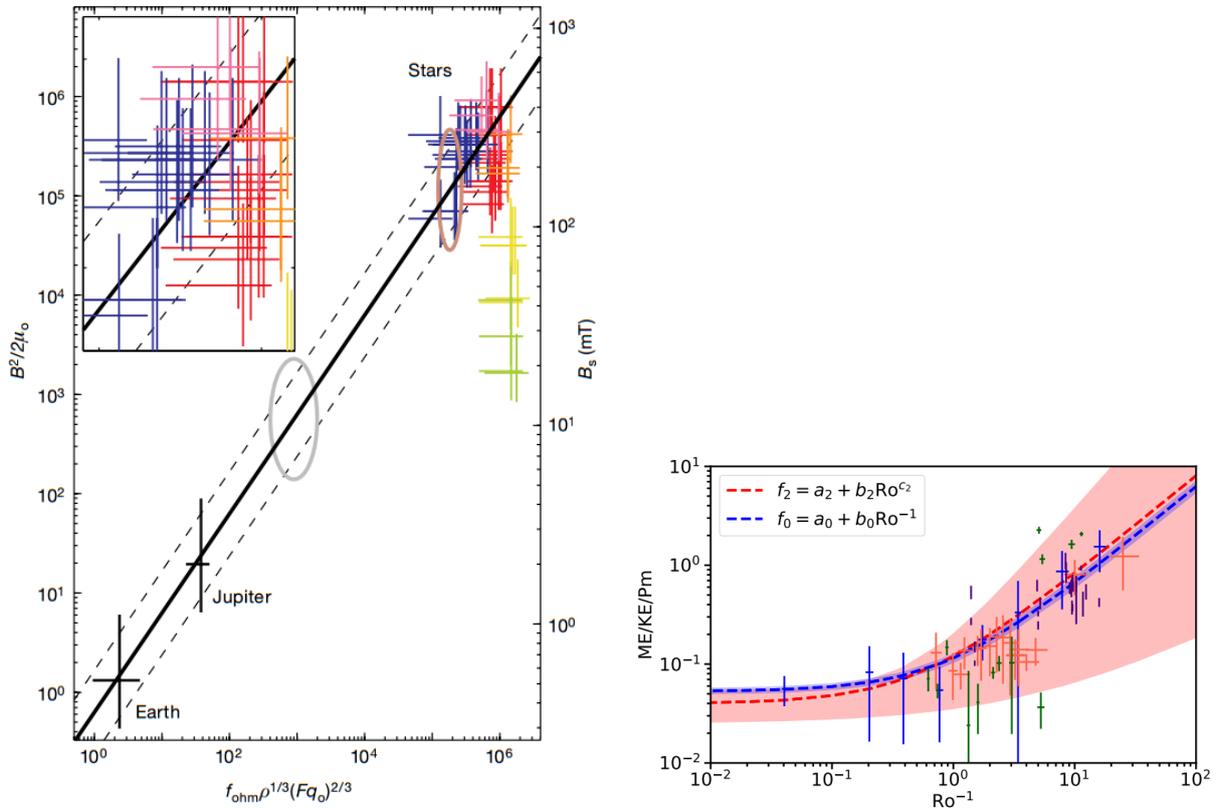


FIGURE 3.6: *Gauche* : [Christensen et al. (2009)]. Densité d'énergie magnétique (échelle de gauche), champ magnétique de surface (échelle de droite) par rapport à une fonction de la densité et du flux bolométrique (i.e. le flux qui prend en compte la totalité du spectre électromagnétique). Les étoiles T-Tauri accrétantantes (Johns-Krull, 2007) sont en bleu, les naines M âgées en rose (Morin et al., 2008) et rouge (Reiners & Basri, 2007). Les étoiles de 0.6 à $1.1 M_\odot$ (Saar, 1996) sont en vert pour les périodes de rotation $P_{\text{rot}} > 10$ jours, jaune pour $4 \text{ jours} < P_{\text{rot}} < 10$ jours et orange pour $P_{\text{rot}} < 4$ jours. Les ellipses brunes et grises indiquent les emplacements prévus d'une naine brune avec une température de surface de $1\,500$ K et une planète géante gazeuse de sept masses de Jupiter, respectivement. *Droite* : [Augustson et al. (2019)]. Rapport énergétique $ME/KE/Pm$ en fonction de l'inverse du nombre de Rossby Ro^{-1} . On a notamment $c_2 = -1.0 \pm 0.4$. Les données sont issues de simulations numériques de dynamo, pour le cœur convectif des étoiles massives en bleu (Augustson et al., 2016), pour des étoiles de faible masse en vert (Varela et al., 2016), pour des étoiles de type solaire en indigo (Käpylä et al., 2017) et en orange (Strugarek et al., 2018).

En figure 3.6 (panneau de droite), Augustson et al. (2019) ont interpolé les données issues des simulations numériques 3D de dynamo stellaire, à l'aide de deux lois d'échelle. Il semblerait que le régime MAC qui fonctionne bien pour les dynamos planétaires, et est construit dans le cadre d'un nombre de

Prandtl magnétique faible cohérent avec les valeurs des étoiles de faible masse, ne fonctionne pas bien pour les dynamos stellaires. Par contre, on s’aperçoit que le régime magnétostrophique fonctionne assez bien. De plus, [Augustson et al. \(2019\)](#) relève un régime asymptotique en nombre de Rossby élevé proche de l’équipartition.

3.3.2 Extrapolation d’un champ dipolaire grande échelle près de la surface

Le champ magnétique de (plutôt³) grande échelle construit à l’aide des lois d’échelle détaillées dans la section précédente est un champ d’amplitude élevée enfoui profondément dans l’enveloppe convective des étoiles de faible masse. Intéressons-nous maintenant à un champ de surface, et cela pour deux raisons : premièrement cela nous permet de confronter nos lois d’échelle aux observations de champs photosphériques ; deuxièmement, cela permet d’établir une valeur minimale au champ magnétique dans l’enveloppe convective d’une étoile, comme on va le voir. Nous avons fait le choix d’extrapoler vers la surface un champ dipolaire, à partir du champ magnétique déduit des lois d’échelle dynamo à la base de la zone convective. Ce choix est une première approximation au regard de la complexité des topologies magnétiques, mais il est justifié par le fait qu’une topologie dipolaire est une bonne approximation pour les étoiles très jeunes en PMS, et les étoiles dans la majeure partie de la séquence principale, comme évoqué en section 3.2.1.

Pour estimer un champ dipolaire à la surface, on fait l’approximation que la composante dipolaire du champ magnétique (B_{dip}) de l’étoile à la base de la zone convective (r_{base}) est une fraction γ du champ magnétique total induit par la dynamo. Formellement, cela revient à supposer que :

$$B_{\text{dip}}(r_{\text{base}}) = \gamma B_{\text{dyn}}(r_{\text{base}}). \quad (3.10)$$

Le champ magnétique dipolaire à la surface s’écrit ainsi à partir du champ dipolaire à la base par une simple extrapolation dipolaire :

$$B_{\text{dip}}(R) = (r_{\text{base}}/R)^3 B_{\text{dip}}(r_{\text{base}}), \quad (3.11)$$

où R est le rayon de l’étoile. Grâce à ces deux prescriptions, γ est calibré pour retrouver la composante dipolaire du champ magnétique de grande échelle solaire, $B_{\text{dip}}(R) \sim 4 \text{ G}$ ([DeRosa et al., 2012](#)) à l’aide des grilles du code STAREVOL, pour chacune des trois lois d’échelle utilisées.

Au final, le champ magnétique dipolaire d’une étoile à sa surface s’écrit à l’aide des expressions (3.10) et (3.11) comme suit :

$$B_{\text{dip}}(R) = \gamma (r_{\text{base}}/R)^3 B_{\text{dyn}}(r_{\text{base}}). \quad (3.12)$$

3.3.3 Estimation des champs magnétiques à la base de la zone convective et à la surface

J’ai tracé en figure 3.7 l’évolution du champ magnétique d’une étoile de $0.9 M_{\odot}$ de la PMS à la fin de la MS, à la base et au sommet de l’enveloppe convective, pour trois taux de rotation initiale (voir figure 3.1), en utilisant les différentes prescriptions dynamo des deux dernières sections. Sur ces deux graphes, on reconnaît l’empreinte de l’évolution rotationnelle tracée en figure 3.1 pour les régimes “buoyancy

3. On sous-entend que les champs magnétiques “dynamo” de la section précédente ont été calculés à l’aide de la longueur convective à la base de la zone convective qui est de l’ordre du dixième du rayon de l’étoile.

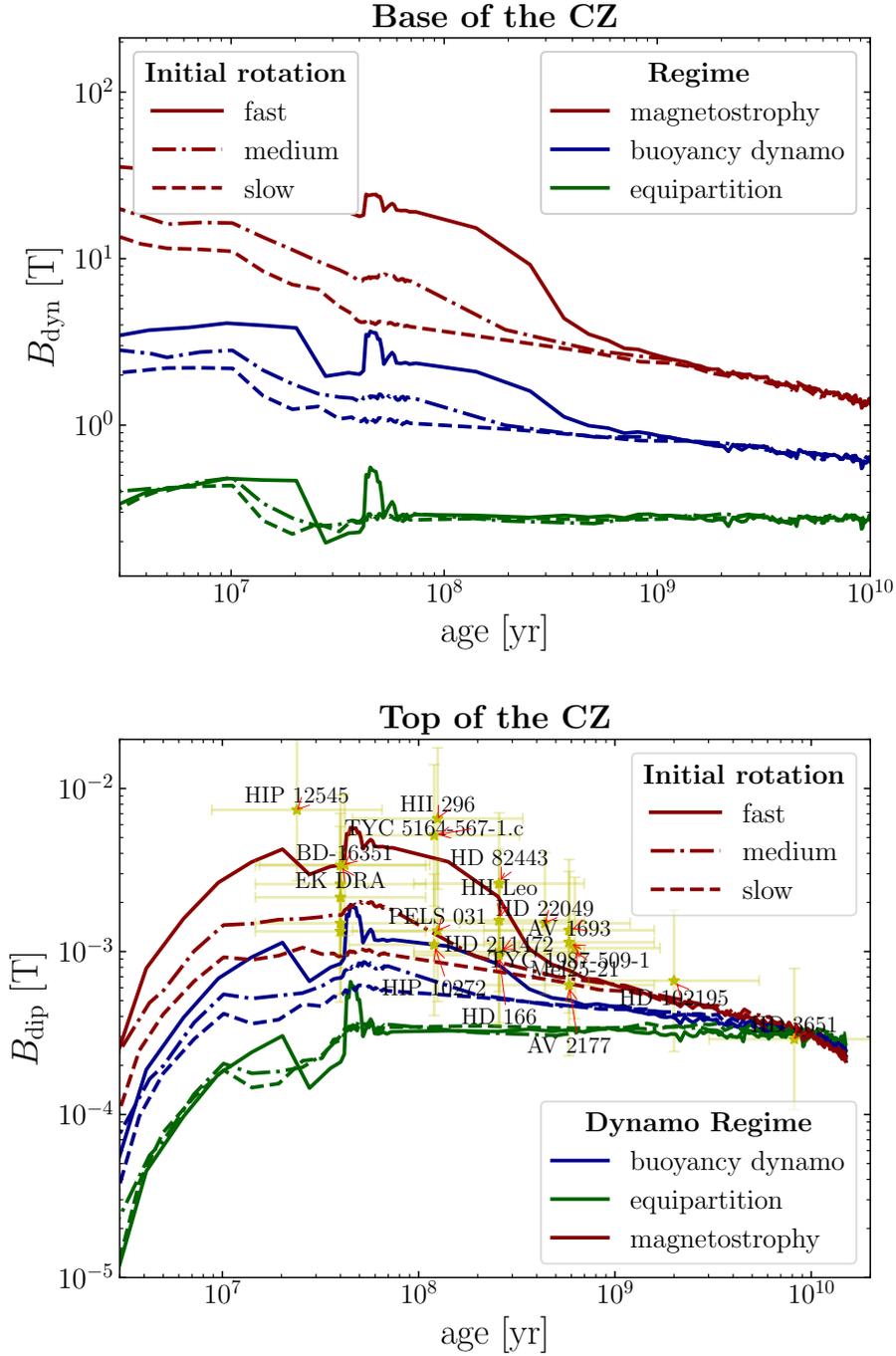


FIGURE 3.7: Adapté de [Astoul et al. (2019)]. Champ magnétique d’une étoile de $0.9 M_{\odot}$ en fonction de son âge, pour trois périodes de rotation initiale et les trois lois d’échelle dynamo décrites en section 3.3.1, à la base de la zone convective (CZ) dans le *panneau du haut* et près de la surface dans le *panneau du bas* en utilisant l’équation (3.12). Les symboles \star représentent les champs magnétiques dipolaires moyens observés à l’aide de la technique ZDI pour des étoiles de $0.9 M_{\odot}$, et sont issues de l’article de See et al. (2019a).

dynamo” et magnétostrophique. À la base de la zone convective (image du haut), on remarque que les champs dynamo induits sont d’autant plus forts que l’étoile est jeune et que la rotation initiale est rapide. Le régime d’équipartition donne comme attendu des champs de l’ordre du kilo-Gauss, tandis que le régime “buoyancy dynamo” et magnétostrophique donnent des champs en super-équipartition, de l’ordre

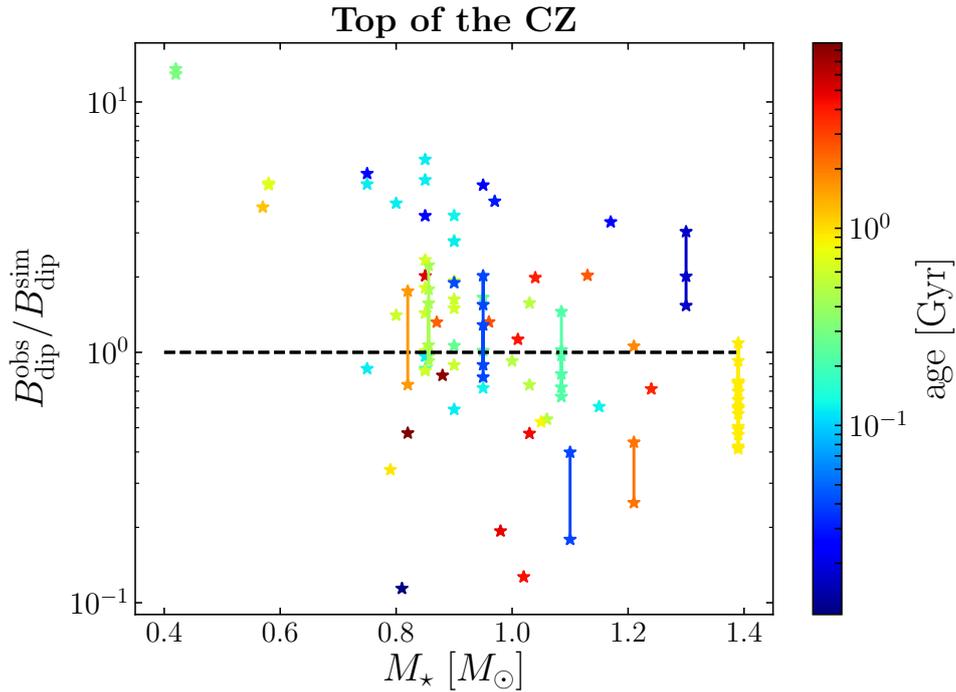


FIGURE 3.8: Rapport de l'amplitude du champ moyen dipolaire $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}$ (See et al., 2019b) sur le champ dipolaire estimé à la surface $B_{\text{dip}}^{\text{sim}}$ à l'aide du régime magnétostrophique et d'une rotation initiale moyenne, en fonction de la masse de l'étoile. L'âge des étoiles est indiqué en couleur (Vidotto et al., 2014). Les observations multiples de champ magnétique pour une étoile sont reliées par une ligne.

du Tesla en séquence principale, ce qui est cohérent avec les champs de composante toroïdale dominante à la tachocline estimés par Charbonneau (2013) pour le Soleil. Par ailleurs, l'amplitude maximale d'un tel champ a été déterminée par Gough & Thompson (1990) et Antia et al. (2000) pour le Soleil, grâce à la mesure de la séparation entre fréquences d'oscillations acoustiques solaires, portant ce champ à 30 Tesla maximum. Dans le graphe du bas de la figure 3.7, un champ dipolaire de grande échelle est tracé grâce à l'équation (3.12), auquel s'ajoutent les amplitudes de champs dipolaires moyens mesurés pour des étoiles de $0.9M_{\odot}$ (See et al., 2019b). Des points ont été ajoutés par rapport à la figure 1 de Astoul et al. (2019), qui se basait sur See et al. (2017). L'impact principal de cette modification est d'abaisser la moyenne des amplitudes des champs magnétiques en fin de PMS et en début de MS, de sorte que le régime magnétostrophique en rotation initiale rapide n'est plus le seul à reproduire les observations, ce qui semble plus cohérent, car nous n'avons pas connaissance d'un biais vers les rotations initiales rapides pour la mesure de ces champs. En figure 3.8, le rapport entre les champs magnétiques dipolaires observés et estimés est évalué pour des étoiles de masses différentes, distribuées entre les phases d'évolution PMS et MS. Le champ magnétique B_{sim} est calculé à partir du régime magnétostrophique, qui semble le mieux reproduire les champs de grande échelle dipolaires pour une étoile de $0.9M_{\odot}$ en figure 3.7, et une rotation initiale médiane. Cet accord semble se vérifier pour d'autres masses, car les rapports des champs restent de l'ordre de l'unité, avec des variations qui sont cantonnées à cet ordre de grandeur.

*— Dans ce chapitre, nous avons donc établi les lois d'échelle magnétohydrodynamiques nous permettant de calculer l'amplitude de champs magnétiques de grande échelle, dynamo et dipolaire, des étoiles de faible masse tout au long de leur évolution, respectivement à la base et au sommet de l'enveloppe convective. Nous allons maintenant utiliser ces estimations pour évaluer l'impact du magnétisme sur l'excitation et la dissipation des ondes de marées.

Sommaire

4.1 Propriétés des ondes magnéto-inertielles forcées par la marée	65
4.1.1 Propagation et dissipation	65
4.2 Impact du magnétisme stellaire sur le forçage de marée	68
4.2.1 Critère analytique	68
4.2.2 Evolution du nombre de Lehnert dans les étoiles	70
4.2.3 Estimation des forçages effectifs de marée pour des Jupiter chauds observés	72
4.3 Influence du magnétisme sur les mécanismes de dissipation des ondes de marée	74
4.4 Discussion sur l'échelle du champ magnétique	75
4.5 Autre application : le système Jovien	77
4.6 Conclusion	78
Article Astoul et al. (2019, A&A, 631, A111)	79

Dans ce chapitre, nous exploitons les champs magnétiques de grande échelle estimés au chapitre précédent pour comprendre si, et comment, ils peuvent affecter l'excitation et la dissipation des ondes de marée dans l'enveloppe convective magnétisée d'étoiles de faible masse, de différent âge, type spectral et rotation initiale, ainsi que dans l'enveloppe convective de Jupiter.

4.1 Propriétés des ondes magnéto-inertielles forcées par la marée

4.1.1 Propagation et dissipation

Comme on l'a évoqué au chapitre 1, les travaux de Wei (2016) avec un modèle de boîte locale Cartésienne, et ceux de Lin & Ogilvie (2018) et Wei (2018) en géométrie sphérique globale, ont montré que le magnétisme modifiait fortement la structure des flots de marée et leurs propriétés de dissipation dans les régions convectives. Ces résultats ont été établis avec des topologies magnétiques relativement simples, à savoir un champ magnétique moyen uniforme et parallèle à l'axe de rotation ou un champ dipolaire. Les principales modifications apportées par un champ magnétique sont les suivantes :

- La nature des ondes change, car la force de Lorentz s'ajoute en tant que force de rappel à la pseudo-force de Coriolis dans l'équation de Navier-Stokes. En présence de ces deux forces, les ondes à considérer sont une combinaison d'ondes d'Alfvén et d'ondes inertielles, appelées ondes magnéto-inertielles¹. En écrivant les équations linéarisées qui gouvernent la propagation de ces

1. ou ondes "magnetic Coriolis", ondes MC dans Finlay (2008) et Lin & Ogilvie (2018).

ondes magnéto-inertielles (i.e. l'équation de Navier-Stokes avec la force de Lorentz, l'équation d'induction, l'équation de continuité pour un fluide incompressible ainsi que la divergence nulle du champ magnétique), et en y injectant l'ansatz d'onde plane pour les quantités perturbées, on peut obtenir la relation de dispersion suivante (Finlay, 2008; Lin & Ogilvie, 2018) :

$$\omega = \pm \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \pm \left[\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{|\mathbf{k}|^2} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu_0} \right]^{1/2}, \quad (4.1)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$, \mathbf{k} et \mathbf{B} sont respectivement les vecteurs rotation, d'onde et champ magnétique moyen, avec ρ_0 la densité moyenne et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. On remarque qu'il existe quatre modes (au lieu de deux pour les ondes inertielles). Les deux modes de signe opposé définissent les modes lents² (les forces de Coriolis et de Lorentz agissant dans des directions opposées), et ceux de même signe les modes rapides³ (les forces de Coriolis et de Lorentz agissant selon la même direction). On remarquera aussi que dans les limites asymptotiques à champ fort ou à rotation rapide, on retrouve respectivement les relations de dispersion des ondes d'Alfvén et des ondes inertielles. Si l'on adimensionne la relation de dispersion en équation (4.1) par 2Ω , on obtient :

$$\omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \pm \left[\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2}{|\mathbf{k}|^2} + \text{Le}^2 k_B^2 \right]^{1/2}, \quad (4.2)$$

avec k_B la composante du vecteur d'onde colinéaire au champ magnétique \mathbf{B} , et où l'on a fait apparaître un paramètre clef permettant de comparer la pseudo-force de Coriolis et la force de Lorentz, à savoir le nombre de Lehnert (Lehnert, 1954) :

$$\text{Le} = \frac{B}{\sqrt{\rho_0 \mu_0} \Omega R}, \quad (4.3)$$

avec R le rayon de l'étoile. On peut aussi voir ce nombre sans dimension comme une comparaison entre la vitesse d'Alfvén $B/\sqrt{\rho_0 \mu_0}$ et la vitesse moyenne de rotation du corps ΩR .

- La force de Lorentz travaille, l'énergie magnétique s'ajoute au bilan énergétique et le processus de dissipation associé, la diffusion ohmique, doit être pris en compte car il peut concurrencer la dissipation visqueuse, même à champ magnétique faible (Lin & Ogilvie, 2018).
- La propagation et la dissipation des ondes excitées par la marée dans une coquille sphérique est modifiée, d'autant plus que la valeur du champ magnétique moyen est forte. C'est ce que montre la figure 4.1, où l'on voit l'énergie se déposer le long d'attracteurs des ondes inertielles à faible nombre de Lehnert (comme dans le cas purement hydrodynamique), et le long des lignes de champ magnétique lorsque Le est élevé, ce qui est aussi constaté par Wei (2018) pour des rotateurs rapides. La modification des couches de cisaillement par rapport au cas hydrodynamique pur s'observe à partir d'un nombre de Lehnert de 0.1 (Lin & Ogilvie, 2018; Wei, 2018).
- L'intervalle de fréquences de marée dans lequel les ondes inertielles sont excitées est élargi par un champ magnétique d'après l'équation (4.2), et sa largeur dépend de l'amplitude du nombre de Lehnert (Wei, 2016; Lin & Ogilvie, 2018), comme on le voit dans le spectre de dissipation totale (la somme des dissipations Ohmique et visqueuse) présenté en figure 4.2.
- La présence d'un champ magnétique atténue la dépendance fréquentielle du taux de dissipation des ondes de marée (i.e. moins de pics) par rapport au cas purement hydrodynamique (Lin & Ogilvie, 2018), ce qui est aussi visible en figure 4.2.

2. aussi connus sous le nom de "slow MC".

3. aussi connus sous le nom de "fast MC".

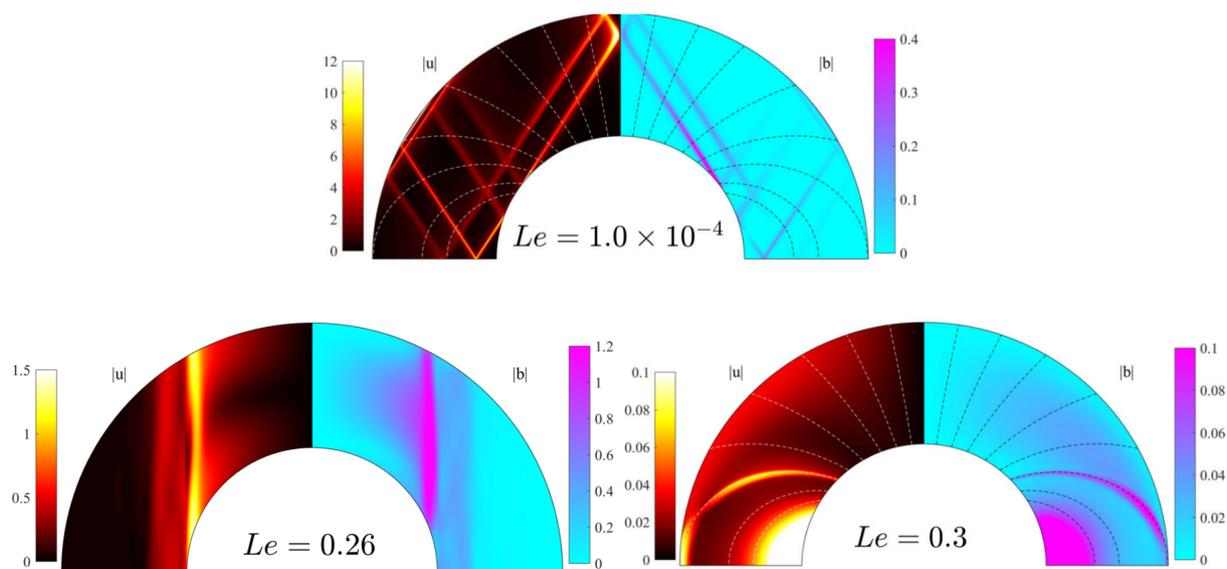


FIGURE 4.1: [Tiré de Lin & Ogilvie (2018)]. Simulations magnéto-hydrodynamiques 2D réalisées à l’aide d’un code spectral, qui calcule les modes propres d’oscillation magnéto-inertiels dans une coquille sphérique enserrant un fluide convectif incompressible, magnétisé, et en rotation. Dans chaque coupe méridienne est illustrée l’amplitude des perturbations en vitesse $|u|$ et en champ magnétique $|b|$ correspondant au mode propre d’oscillation de fréquence inertielle $\omega = 1.1$ (normalisée à la fréquence de rotation du corps). Un champ magnétique moyen dipolaire est utilisé dans les panneaux du haut et de droite, et un champ moyen axial (parallèle à l’axe de rotation) dans le panneau de gauche, chacun à différent nombre de Lehnert Le . Les autres paramètres sont le nombre d’Ekman visqueux $Ek = 10^{-9}$, le nombre d’Ekman magnétique $Em = 10^{-5}$, et le rapport d’aspect en rayon $\alpha = 0.5$.

- Wei (2018) a montré que la dissipation totale moyennée en fréquence est proportionnelle à l’énergie magnétique pour des rotateurs rapides. En outre, selon Wei (2016) et Lin & Ogilvie (2018) la dissipation moyennée en fréquence serait indépendante du mécanisme de dissipation (Ohmique ou visqueux) de l’énergie des ondes.

Plusieurs points n’ont néanmoins pas été approfondis par les trois études susmentionnées. D’une part, ces études supposent que la réponse ondulatoire de l’interaction de marée, i.e. l’excitation des ondes magnéto-inertielles, n’est provoquée que par l’action de la force de Coriolis agissant sur la marée d’équilibre : la force de Lorentz n’est pas incluse dans ce “forçage” de marée. Dans ce cadre, Lin & Ogilvie (2018) suggère qu’un champ magnétique de grande échelle pourrait potentiellement interagir avec la marée d’équilibre pour des nombres de Lehnert suffisamment grands, c’est-à-dire là aussi typiquement pour $Le \gtrsim 0.1$. D’autre part, la question du régime de dissipation dominant dans différents objets astrophysiques le long de leur évolution n’est que peu explorée. Elle est pourtant primordiale pour savoir quel traitement, hydrodynamique ou magnétohydrodynamique, doit être appliqué aux marées pour évaluer leur impact sur l’évolution des systèmes planétaires.

Ce sont ces deux aspects qui nous intéressent dans ce chapitre et que nous allons traiter, en répondant aux deux questions suivantes :

- quel est l’impact du champ magnétique du corps primaire, étoile ou planète géante gazeuse sur l’excitation des ondes forcées par la marée dans leur enveloppe convective, le long de l’évolution de ces objets ?
- quel est le processus dominant, dans ces corps, entre la dissipation de l’énergie cinétique induite par la friction turbulente appliquée aux ondes de marée par la convection, et la dissipation de l’énergie

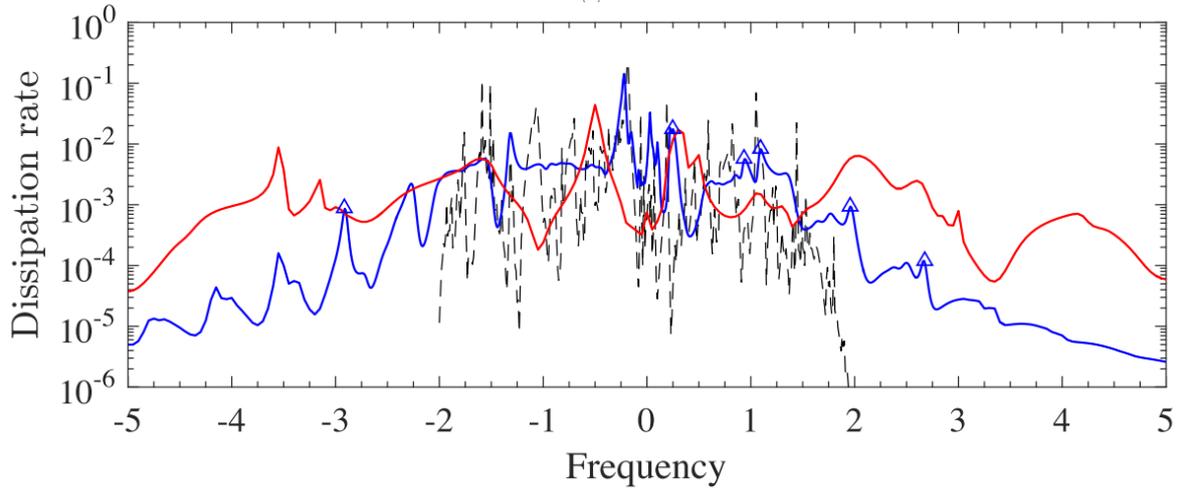


FIGURE 4.2: [Tiré de Lin & Ogilvie (2018)]. Taux de dissipation total (Ohmique + visqueux) en fonction de la fréquence du forçage de marée dans le référentiel du fluide (similairement à la figure ??). Le champ magnétique est un champ uniforme axial. Le rapport d'aspect est fixé à $\alpha = 0.5$, le nombre d'Ekman visqueux à $Ek = 10^{-8}$ et celui magnétique à $Em = 10^{-4}$. La courbe en bleu est tracée avec $Le = 0.1$ et celle en rouge avec $Le = 0.42$. En noir, seule la dissipation visqueuse est tracée ($Le = 0$).

magnétique provoquée par la résistivité magnétique dans leur enveloppe convective, le long de l'évolution de ces objets ?

4.2 Impact du magnétisme stellaire sur le forçage de marée

4.2.1 Critère analytique

Conventionnellement, les ondes de marée sont excitées dans l'équation du mouvement par une force effective, qui vient de l'accélération de Coriolis agissant sur le flot de la marée d'équilibre (Ogilvie, 2005). En présence d'un champ magnétique, la force de Lorentz est susceptible de jouer un rôle dans l'excitation des ondes de marée, en agissant également sur le flot de la marée d'équilibre. Afin de quantifier ce rôle, nous allons établir de manière analytique un critère qui fait intervenir le nombre de Lehnert ainsi qu'un nombre de Rossby marémoteur. Pour cela, on va linéariser les équations de Navier-Stokes et de l'induction qui régissent la propagation et la dissipation des ondes magnéto-inertielles excitées par la marée, dans l'enveloppe convective d'une étoile ou d'une planète.

Plaçons nous dans le référentiel tournant, à vitesse angulaire supposée ici uniforme Ω , de l'enveloppe convective d'une étoile ou d'une planète. On introduit son potentiel gravifique moyen Φ_0 correspondant à l'équilibre hydrostatique, et sa perturbation au premier ordre Φ , ainsi que le potentiel de marée externe Ψ (voir par exemple Zahn, 1966a; Ogilvie, 2013; Guenel, 2016). On modélise la dissipation induite par les mouvements convectifs turbulents sur le flot de marée par une force visqueuse, de viscosité effective ν , tel que $\mathbf{F}_\nu = \rho_0 \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ (p.e. Zahn, 1966b, 1989; Ogilvie & Lesur, 2012; Mathis et al., 2016). Nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour une discussion de cette modélisation. L'équation de Navier-Stokes pour le flot de marée perturbé au premier ordre (i.e. sans terme non-linéaire) dans le référentiel tournant, s'écrit :

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho_0 \nabla(\Phi + \Psi) + \rho \nabla \Phi_0 + \mathbf{F}_\nu + \mathbf{F}_L, \quad (4.4)$$

où ρ_0 est la densité moyenne et \mathbf{u} , p , et ρ sont respectivement la vitesse, la pression et la densité perturbées. On introduit aussi la force de Lorentz linéarisée :

$$\mathbf{F}_L = \frac{\nabla \times \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times \mathbf{b} + \frac{\nabla \times \mathbf{b}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0, \quad (4.5)$$

avec \mathbf{B}_0 le champ magnétique moyen de l'étoile (ou de la planète), que l'on suppose à grande échelle, et \mathbf{b} la perturbation de ce champ au premier ordre. Par ailleurs, l'équation d'induction linéarisée est :

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (4.6)$$

avec η la diffusivité magnétique turbulente. Comme expliqué au chapitre 2, le flot de marée est décomposé en deux composantes : le flot de marée d'équilibre d'une part, et une composante ondulatoire reliée à la marée dynamique d'autre part (Ogilvie, 2005, 2013). En utilisant la définition de la marée d'équilibre décrite en chapitre 2, nous négligeons les effets de l'accélération centrifuge et de la force de Lorentz associée au champ magnétique moyen sur la structure hydrostatique du corps en question. Notons que l'on pourrait imaginer (même si cela n'a pas été fait ici) un corps déformé par un champ magnétique moyen et par la rotation, et dans lequel la marée d'équilibre est calculée à partir de la structure déformée (cela a déjà été fait par exemple par Braviner & Ogilvie, 2014, 2015, dans le cas des rotateurs rapides). L'équation d'induction se réécrit ainsi pour les deux types de marées :

$$\mathbf{b}_e = \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}_0) \quad (4.7)$$

$$\partial_t \mathbf{b}_d = \nabla \times (\mathbf{u}_d \times \mathbf{B}_0) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}_d, \quad (4.8)$$

où $\boldsymbol{\xi}_e$ est le déplacement eulérien induit par la marée d'équilibre, défini par $\mathbf{u}_e = \partial_t \boldsymbol{\xi}_e$, et \mathbf{u}_d , le flot perturbé de la marée dynamique. On suppose que le champ \mathbf{B}_0 est stationnaire durant l'échelle de temps caractéristique de la marée. Supposer un champ moyen de grande échelle stationnaire n'est pas illogique, au regard de l'échelle de temps des cycles magnétiques qui est plutôt commensurable à l'année, voire à la dizaine d'années (comme discuté dans le chapitre précédent), et du temps caractéristique de marée de l'ordre de quelques jours (car de l'ordre de grandeur de la période orbitale du compagnon perturbateur qui orbite par exemple en moins de 10 jours pour les systèmes de Jupiter chauds). Un argument similaire est utilisé pour négliger la diffusion Ohmique qui agit sur le flot de marée d'équilibre ; son temps typique de diffusion magnétique R^2/η étant très long, en considérant le rayon de l'étoile R son échelle spatiale de variation, devant le temps caractéristique de la marée. En utilisant de plus l'approximation de Cowling (Cowling, 1941) pour la marée dynamique qui revient à négliger la redistribution du potentiel gravitationnel associé à cette marée, et en négligeant la force de flottabilité étant donné la quasi-adiabaticité de l'enveloppe convective (i.e. $N \approx 0$), l'équation (4.4) se réécrit :

$$\underbrace{\rho_0 (\partial_t \mathbf{u}_d + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_d) + \nabla p_d - \mathbf{F}_\nu(\mathbf{u}_d) - \mathbf{F}_L(\mathbf{b}_d)}_{\text{ondes magnéto-inertielles}} = \underbrace{\mathbf{f}_{\text{hydro}}(\mathbf{u}_e) + \mathbf{f}_{\text{mag}}(\boldsymbol{\xi}_e)}_{\text{forçage}}. \quad (4.9)$$

C'est une équation du mouvement pour les ondes magnéto-inertielles excitées par un forçage effectif piloté par les mouvements de la marée d'équilibre. Les composantes hydrodynamique $\mathbf{f}_{\text{hydro}}$ et magnétique \mathbf{f}_{mag} de ce forçage s'écrivent (voir aussi les annexes B de Ogilvie, 2005; Lin & Ogilvie, 2018) :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{hydro}}(\mathbf{u}_e) = -\rho_0 (\partial_t \mathbf{u}_e + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_e), \\ \mathbf{f}_{\text{mag}}(\boldsymbol{\xi}_e) = \frac{\nabla \times \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}_0)] + \frac{\nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}_0)]}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

où l'on a injecté l'expression (4.7) d'un champ magnétique induit par les déplacements hydrostatiques

de la marée d'équilibre, dans la force de Lorentz linéarisée pour la marée dynamique. On néglige de nouveau l'action d'une force de friction effective (ici visqueuse) sur la marée d'équilibre, étant donné les faibles valeurs du nombre d'Ekman turbulent et moléculaire dans les étoiles et les planètes (discutées au chapitre 2).

Pour comparer l'importance relative de ces forçages de marée, nous utilisons les échelles caractéristiques de chacune des variables et opérateurs. Plus précisément, $\nabla \sim R$ et $\partial_t \sim \sigma_t$ sont les échelles de variation spatiale et temporelle de la marée d'équilibre, avec $\sigma_t = u_e/\xi_e$ la fréquence de marée. Les forçages (4.10) s'approximent ainsi par :

$$\begin{cases} f_{\text{hydro}} \sim \rho_0 u_e \sigma_{\text{max}} & \text{avec } \sigma_{\text{max}} = \max[\sigma_t, 2\Omega], \\ f_{\text{mag}} \sim B_0^2 \xi_e / (\mu_0 R^2). \end{cases} \quad (4.11)$$

Le rapport des forçages $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ est donc :

$$\frac{f_{\text{mag}}}{f_{\text{hydro}}} \simeq \frac{\text{Le}^2}{\text{Ro}_t \hat{\sigma}_{\text{max}}}, \quad (4.12)$$

où un facteur 2 intervient dans notre définition du nombre de Lehnert par rapport à celui utilisé par Lin & Ogilvie (2018) et Wei (2016) :

$$\text{Le} = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0 2\Omega R}}, \quad (4.13)$$

et où on a introduit le nombre de Rossby de marée :

$$\text{Ro}_t = \frac{\sigma_t}{2\Omega} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{\text{max}} = \max[\text{Ro}_t, 1]. \quad (4.14)$$

Il reste maintenant à évaluer le rapport des forçages (4.12) pour les étoiles (et les planètes géantes) le long de leur évolution stellaire afin de déterminer si le forçage magnétique mérite désormais d'être pris en compte dans un traitement MHD des marées stellaires (et planétaires).

4.2.2 Evolution du nombre de Lehnert dans les étoiles

Trois régimes ont été décrits dans le chapitre précédent, et détaillés en section 3.3.1, qui permettent d'estimer l'amplitude d'un champ magnétique induit par la théorie dynamo à la base de la zone convective d'étoiles de masse et d'âge différents, ainsi que celle d'un champ dipolaire de grande échelle à la surface de ces étoiles (section 3.3.2). On peut faire de même pour le nombre de Lehnert défini à l'équation (4.13). À la base de la zone convective, il s'exprime à l'aide des équations (3.1), (3.7), et (3.9), pour chaque régime. Nous obtenons ainsi :

- équipartition $\rightarrow \text{Le}_{\text{base}} = \text{Ro}_o \frac{l_c}{R}$;
- MAC $\rightarrow \text{Le}_{\text{base}} = \text{Ro}_o^{3/4} \frac{l_c}{R}$;
- magnétostrophie $\rightarrow \text{Le}_{\text{base}} = \sqrt{\text{Ro}_o} \frac{l_c}{R}$;

où la longueur convective l_c et le nombre de Rossby convectif Ro_o sont évalués à la base de la zone convective. De plus, le nombre de Lehnert s'exprime à la surface en utilisant l'expression du champ

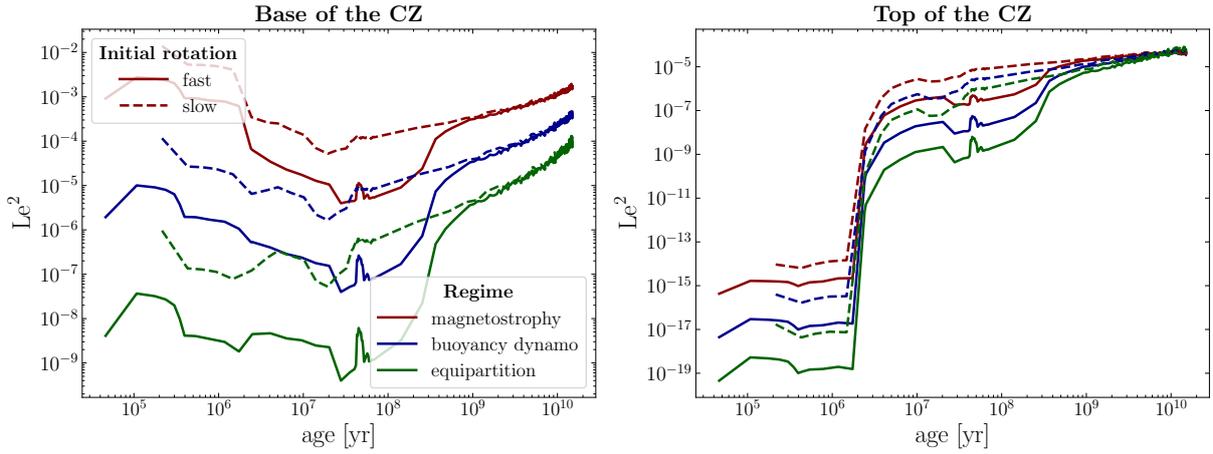


FIGURE 4.3: Nombre de Lehnert au carré à la base de la zone convective (*panneau gauche*) et près de la surface (*panneau droit*) en fonction de l'âge d'une étoile de $0.9 M_{\odot}$, pour les trois lois d'échelle détaillées au chapitre précédent (équipartition, "buoyancy dynamo" ou MAC, et magnétostrophie) permettant d'estimer le champ magnétique dynamo-induit à grande échelle, et pour différentes périodes initiales de rotation, rapide ($P = 1.6$ jours) et lente ($P = 9$ jours).

magnétique dipolaire donné en équation (3.12) :

$$Le_{\text{top}} = \gamma \left(\frac{r_{\text{base}}}{R} \right)^3 \sqrt{\frac{\rho_{\text{base}}}{\rho_{\text{top}}}} Le_{\text{base}}. \quad (4.15)$$

À la figure 4.3, j'ai tracé le nombre de Lehnert pour une étoile de $0.9 M_{\odot}$ de la PMS à la TAMS⁴, à la base de la zone convective et à la surface pour les trois lois d'échelle, avec une rotation initiale lente ou rapide (de période de rotation $P = 9$ jours et $P = 1.6$ jours respectivement). Le^2 suit bien les tendances attendues : à la base, il décroît en PMS et croît en MS avec l'âge car inversement proportionnel à la fréquence de rotation (à une puissance positive, voir figure 3.1). Il est plus important à la base qu'à la surface comme pour le champ magnétique (voir figure 3.7). Au sommet de la zone convective, Le^2 est aussi modulé en PMS par la position de la tachocline, inexistante lors de la formation de l'étoile car cette dernière est alors entièrement convective, et qui apparaît dans les premiers millions d'années pour une étoile de type solaire. Dans chacun des panneaux, on reste néanmoins en dessous des régimes à champ fort $Le \gtrsim 0.1$ (puisque $Le^2 \gtrsim 10^{-2}$) mis en évidence par Lin & Ogilvie (2018) et Wei (2016, 2018) comme étant déterminant pour l'impact du magnétisme sur la propagation et la dissipation des ondes de marées (voir section 4.1.1).

L'évolution du nombre de Lehnert au carré est illustrée en figure 4.4 pour différentes étoiles de faible masse, de type spectral M à F⁵ avec une limite inférieure en masse à $0.4 M_{\odot}$ pour garder la structure cœur radiatif+enveloppe convective⁶. Le régime magnétostrophique a été choisi car il reflète le mieux l'amplitude des champs de grande échelle à la base de l'enveloppe convective et près de la surface (cf. figure 3.7), et car il a été validé par Augustson et al. (2019) à l'aide de simulations numériques 3D de dynamo stellaire (cf. figure 3.6). Le comportement général de Le^2 reste le même que sur la figure 4.3, quelle que soit la masse, avec tout de même une légère croissance en masse en MS pour $M \lesssim 1 M_{\odot}$. Le^2 décroche en MS pour les masses entre $1.2 M_{\odot}$ et $1.4 M_{\odot}$, car la tachocline se déplace vers la surface à

4. À noter que l'intervalle temporel n'a pas été coupé aux âges jeunes, en dessous de quelques dizaines de millions d'années contrairement à ce qui a été fait dans l'article associé à ce travail car le comportement des grandeurs structurelles convectives numériques sont plus sujettes à caution en début d'évolution.

5. Les grilles pour une rotation initiale rapide s'arrêtent à $1.2 M_{\odot}$.

6. En dessous de cette masse, l'étoile est entièrement convective et par conséquent les valeurs de Le^2 sont très faibles.

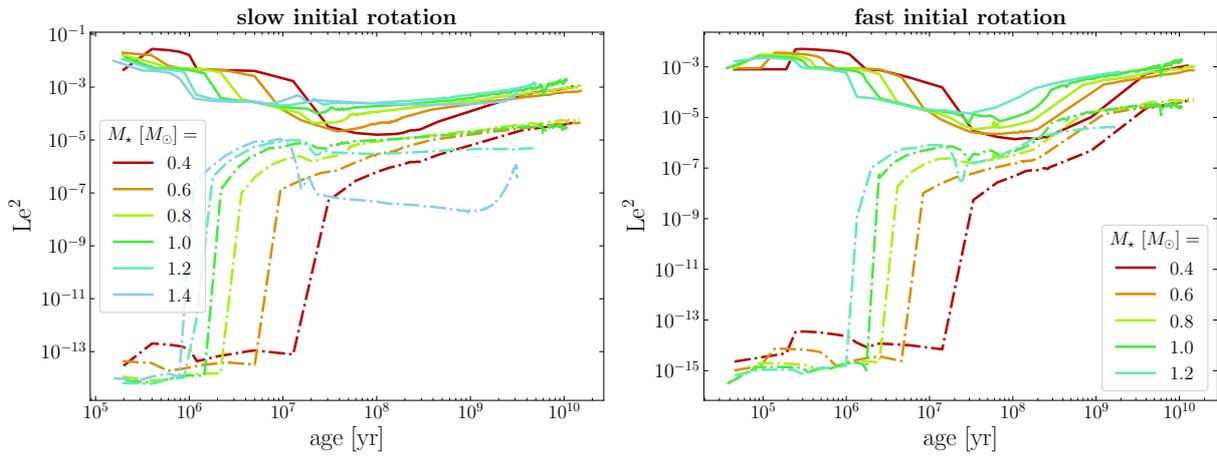


FIGURE 4.4: Évolution de Le^2 à la base (traits pleins) et au sommet (traits pointillés hachurés) de la zone convective pour différentes masses et une rotation initiale lente (gauche) et rapide (droite). L'équilibre magnétostrophique a été utilisé pour calculer Le^2 dans les deux graphes.

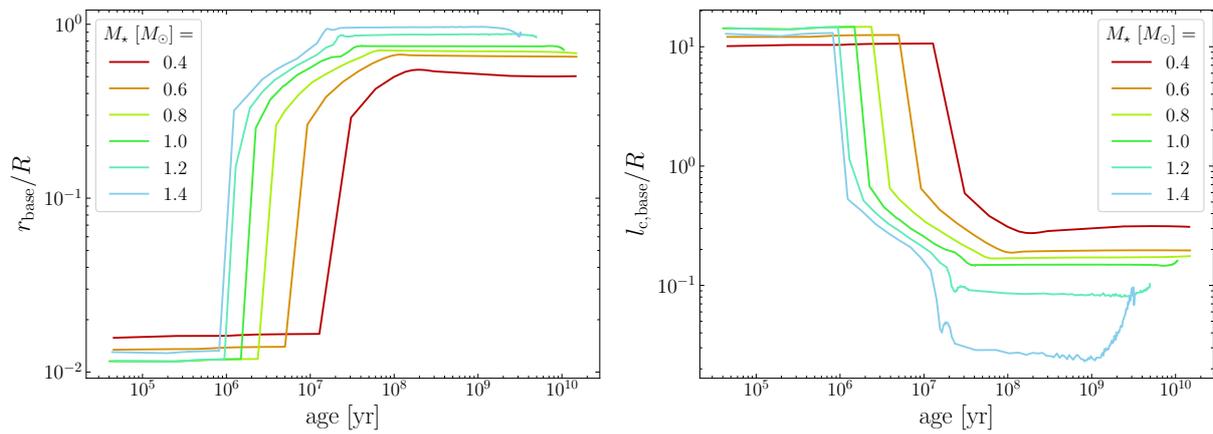


FIGURE 4.5: Évolution du rayon à la base de la zone convective (gauche) et de la longueur convective (droite), normalisés par le rayon de l'étoile pour différentes masses d'étoile.

mesure que la masse augmente (panneau de gauche, figure 4.5) et la longueur convective à la base de la zone convective diminue conjointement (panneau de droite, figure 4.5).

4.2.3 Estimation des forçages effectifs de marée pour des Jupiter chauds observés

Je n'ai pas fait le même travail d'exploration de l'espace des paramètres pour le nombre de Rossby de marée Ro_t , en équation (4.14), car ce dernier dépend de la fréquence orbitale du compagnon. Il faudrait un code numérique à deux corps du type ESPEM (Benbakoura et al., 2019) pour effectuer ce travail, ce qui n'a pas été fait ici. Pour estimer Ro_t et ainsi le rapport des forçages (cf. Eq. (4.12)), j'ai utilisé les paramètres orbitaux de Jupiter chauds observés. Ces derniers ont été choisis de sorte à posséder une orbite quasi-coplanaire et circulaire, afin de contraindre la fréquence de marée associée aux indices (ordre azimuthal et harmonique temporelle) du terme quadrupolaire dominant dans le potentiel de marée (voir chapitre 2). La fréquence de marée dans le référentiel du fluide s'écrit alors (Mathis & Le Poncin-Lafitte,

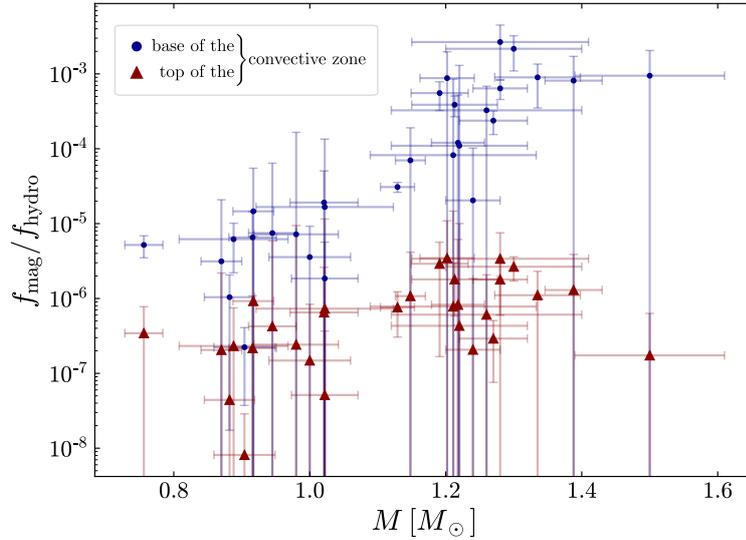


FIGURE 4.6: Rapport des forçages marémoteurs magnétique et hydrodynamique en fonction de la masse de l'étoile hôte dans des systèmes observés possédant un Jupiter chaud d'orbite quasi circulaire et coplanaire, à la base et au sommet de la zone convective, en utilisant un régime dynamo magnétostrophique et une période de rotation initiale lente ($P = 9$ jours).

2009; Ogilvie, 2014) :

$$\sigma_t = 2\Omega_o - 2\Omega, \quad (4.16)$$

avec Ω_o la fréquence de rotation du compagnon. Écrite de cette manière, σ_t est la fréquence de la marée asynchrone (i.e. de la marée faisant tendre le système vers la synchronisation) dans un système coplanaire et circulaire⁷. Dans le tableau B.1. de l'article en fin de ce chapitre, on peut trouver la liste des systèmes de type Jupiter chauds, sélectionnés⁸ de manière à présenter une orbite quasi-circulaire en utilisant le catalogue en ligne exoplanet.eu (p.e. [Schneider et al., 2011](#)), et quasi-coplanaire grâce au catalogue [TEPcat](#)⁹ ([Southworth, 2011](#)). Le travail le plus long a été de trouver les périodes de rotation des étoiles hôtes pour chacun de ces systèmes dans la littérature grâce à la base de données ADS, car les catalogues de systèmes exoplanétaires ne possèdent pas, à ce jour, ce paramètre. Cela est peut-être dû aux techniques trop variées¹⁰ et aux larges incertitudes associées à cette période de rotation difficilement mesurable.

En figure 4.6, j'ai représenté le rapport entre forçage magnétique et hydrodynamique, $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}} = \text{Le}^2 \text{Ro}_t^{-1} \hat{\sigma}_{\text{max}}^{-1}$, en fonction de la masse de l'étoile hôte, en utilisant les paramètres orbitaux et rotationnels des systèmes sélectionnés. Pour calculer le nombre de Lehnert, la période de rotation de l'étoile hôte et son rayon ont été utilisés, couplés à la densité, la longueur et la vitesse convectives données par nos grilles de modèles STAREVOL pour des âges et des masses les plus proches de celles de l'étoile hôte. Pour chaque système, Le^2 est évalué à la base et au sommet de l'enveloppe convective en utilisant le régime magnétostrophique. Comme pour les figures 4.3 et 4.4 avec le nombre de Lehnert, le rapport $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ est plus grand à la base qu'au sommet de la zone convective. On remarque aussi que ce rapport croît

7. Les marées d'excentricité et d'obliquité (table 2.2, [Ogilvie, 2014](#)), non-dominantes ici, et qui agissent dans des systèmes excentriques et non-coplanaires, font intervenir d'autres fréquences qui ont été introduites dans l'article associé à ce chapitre.

8. à l'aide d'un programme python qui va parcourir les différents catalogues pour choisir les systèmes qui remplissent les bons critères pour une marée asynchrone (voir [Astoul et al., 2019](#)).

9. www.astro.keele.ac.uk/jkt/tepcat/tepcat.html

10. parmi lesquelles figurent la méthode de gyrochronologie, l'utilisation des isochrones de modèles stellaires, le suivi photométrique des tâches stellaires, le "splitting" rotationnel (dans le sens de séparation des fréquences) des modes d'oscillation acoustiques, ainsi que la spectroscopie.

avec la masse pour des masses d'étoile hôte inférieures à $1.2 M_{\odot}$, avec une croissance plus marquée à la base de la zone convective. On précise par ailleurs qu'étant donné l'âge avancé des systèmes (dans la seconde moitié de la MS), le choix de la rotation initiale n'impacte que peu les résultats (voir figure 3.1) puisque nous sommes dans la phase de convergence des rotations stellaires (Gallet & Bouvier, 2013, 2015). Ce qu'il faut surtout retenir de la figure 4.6, c'est l'ordre de grandeur du rapport $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ qui est dans tous les cas très petit, ce qui laisse présager un rôle négligeable du magnétisme sur l'excitation des ondes magnéto-inertielles dans toute l'enveloppe convective et au cours de l'évolution d'étoiles de faible masse. Les seuls systèmes exoplanétaires qui pourraient présenter un rapport de forçage élevé sont ceux proches d'une résonance de moyen mouvement, dans le cas présent lorsque $\Omega_o \approx \Omega$ (i.e. proche de la synchronisation) car R_{o_t} présent au dénominateur dans l'expression du rapport des forçages (équation 4.12) serait alors très petit et pourrait "booster" ce rapport, ce qui n'était pas le cas des systèmes sélectionnés ici.

4.3 Influence du magnétisme sur les mécanismes de dissipation des ondes de marée

Comme présenté à la section 4.2.1 via les équations (4.8) et (4.9), le magnétisme agit aussi directement sur la marée dynamique, via la force de Lorentz dans l'équation du mouvement, et sur sa dissipation à cause du terme de diffusion Ohmique dans l'équation d'induction. Wei (2016) et Lin & Ogilvie (2018) ont chacun mis en avant, de manière différente, un nombre de Lehnert seuil, signe de la transition entre un régime dominé par la dissipation visqueuse et un régime dominé par la dissipation Ohmique. Lin & Ogilvie (2018) ont formalisé cette transition à l'aide d'arguments heuristiques qui viennent de la méthode du tracé de rayon dans la limite d'un nombre de Prandtl magnétique $P_m = \nu/\eta$ faible (ce qui est généralement vrai dans les étoiles de faible masse, comme on l'a vu au chapitre précédent). Lin & Ogilvie (2018) distinguent ainsi ¹¹ :

- un régime dominé par la dissipation visqueuse lorsque $Le \ll Em^{2/3}$,
- un régime dominé par la dissipation Ohmique lorsque $Le \gg Em^{2/3}$,

avec $Em = \frac{\eta}{2\Omega R^2}$ le nombre d'Ekman magnétique.

À la figure 4.7, l'évolution temporelle du nombre de Lehnert est à nouveau illustrée pour des étoiles de $0.4 M_{\odot}$ à $1.2 M_{\odot}$, à la base de la zone convective et près de la surface, mais cette fois-ci avec le nombre de Lehnert de transition $Le \sim Em^{2/3}$ obtenu pour des résistivités magnétiques moléculaire (η_{mol}) et turbulente (η_{tur} , estimé de la même façon que la viscosité turbulente au chapitre 2). Le paramètre η_{mol} a été calculé pour différentes masses grâce à la prescription de Braginskii pour les diffusivités magnétiques (Braginskii, 1965; Augustson et al., 2019, Annexe B) en utilisant ici les grilles du code STAREVOL. Le paramètre η_{tur} est quant à lui estimé comme :

$$\eta_{\text{tur}} = v_c l_c / 3. \quad (4.17)$$

Cela revient donc à supposer un nombre de Prandtl magnétique turbulent $\eta_{\text{tur}}/\nu_{\text{tur}}$ de l'ordre de l'unité (ce qui est l'hypothèse communément admise, voir p.e. Augustson et al., 2019), puis $\nu_{\text{tur}} = v_c l_c / 3$. Cette dernière hypothèse se vérifie lorsque le temps caractéristique de marée P_{tide} est bien plus long que le temps de retournement convectif $\tau_c = l_c/v_c$, i.e. $P_{\text{tide}} \gg \tau_c$ (marées lentes) ou de manière équivalente $\sigma_t \ll \omega_c$ avec $\omega_c = 2\pi/\tau_c$, comme expliqué en section 2.3.4.1. Dans le cas contraire où les marées

11. La démonstration de ces régimes de dissipation a été refaite dans la section 3 de l'article associé à ce chapitre.

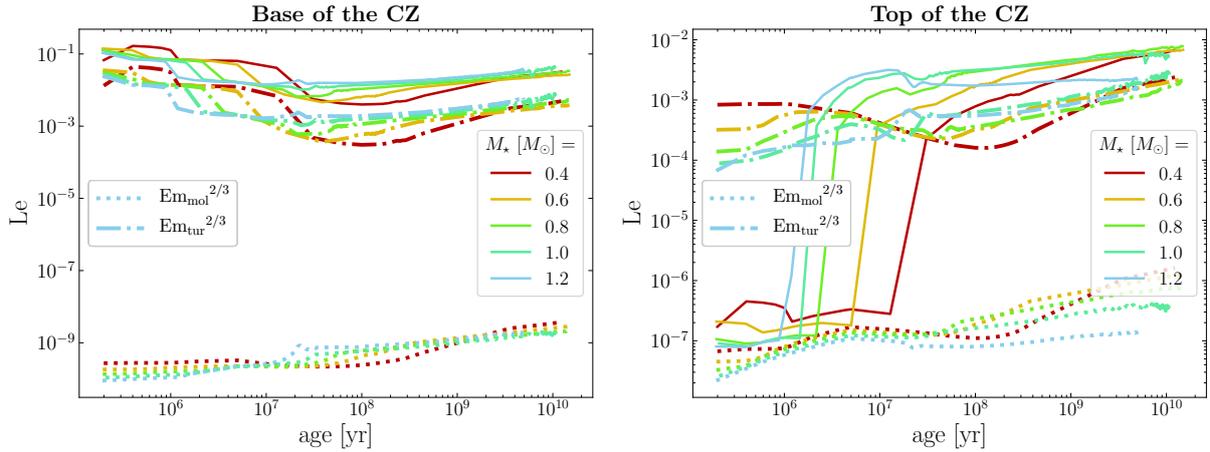


FIGURE 4.7: Nombre de Lehnert à la base (*gauche*) et au sommet (*droite*) de la zone convective en fonction de l'âge d'étoiles de masse différente, avec une rotation initiale lente et en supposant le régime dynamo magnétostrophique pour l'établissement du champ magnétique à grande échelle. Les seuils qui délimitent les deux régimes de dissipation visqueuse et Ohmique sont estimés avec différents nombres d'Ekman magnétiques, moléculaire Em_{mol} et turbulent Em_{tur} .

sont considérées “rapides”, ν_{tur} est modulée par un facteur de perte d'efficacité de la friction turbulente (voir en particulier la discussion à ce sujet en section 2.3.4.1). J'ai tracé sur l'image de gauche à la figure 4.8 la fréquence convective ω_c pour une étoile de $1 M_{\odot}$ en séquence principale, dans toute son enveloppe convective. J'ai ajouté les fréquences de marée pour quelques Jupiter chauds observés en orbite quasi-coplanaire et quasi-circulaire, possédant une étoile hôte d'à peu près $1 M_{\odot}$. Grâce à ce graphe, on réalise que les marées peuvent être considérées comme lentes dans la partie supérieure de l'enveloppe convective, et rapides dans le restant de l'enveloppe convective. Ce qui signifie qu'utiliser $\nu_{tur} = v_c l_c / 3$ n'est justifié seulement lorsque les ondes de marée sont proches de la surface.

Revenons maintenant à la figure 4.7. Si l'on se réfère au seuil impliquant Em_{mol} ¹², nous voyons que le processus de dissipation est majoritairement Ohmique, quelle que soit la masse et l'âge de l'étoile, à la base de l'enveloppe convective comme près de la surface. En revanche, le seuil estimé avec le nombre d'Ekman magnétique turbulent est du même ordre de grandeur que le nombre de Lehnert pour les étoiles en MS près de la surface, voire supérieur pour les étoiles en PMS. Cela signifie à minima que la dissipation Ohmique doit donc désormais être prise en compte au même titre que la dissipation visqueuse, dans les simulations à venir des ondes inertielles excitées par la marée ainsi que dans le calcul de la dissipation totale de marée, quelque soit la masse et l'âge de l'étoile de faible masse considérée.

4.4 Discussion sur l'échelle du champ magnétique

La dynamo stellaire est un processus à plusieurs échelles (p.e. [Brandenburg & Subramanian, 2005](#); [Strugarek et al., 2013](#)), et on distingue en général les champs magnétiques à grande échelle et les champs à petite échelle dans les observations menées grâce aux techniques de ZDI et d'élargissement Zeeman, respectivement, comme évoqué au chapitre précédent.

Bien que l'échelle de variation de la marée d'équilibre soit de l'ordre de R (voir par exemple [Remus et al., 2012a](#)), et donc que cette marée ressentie a priori un champ de grande échelle, les composantes à petite

12. Peut-être plus pertinent ici car le nombre de Lehnert seuil de [Lin & Ogilvie \(2018\)](#) a été construit dans la limite $Pm \ll 1$, ce qui n'est pas forcément vérifié si $\eta_{tur} = v_c l_c / 3$.

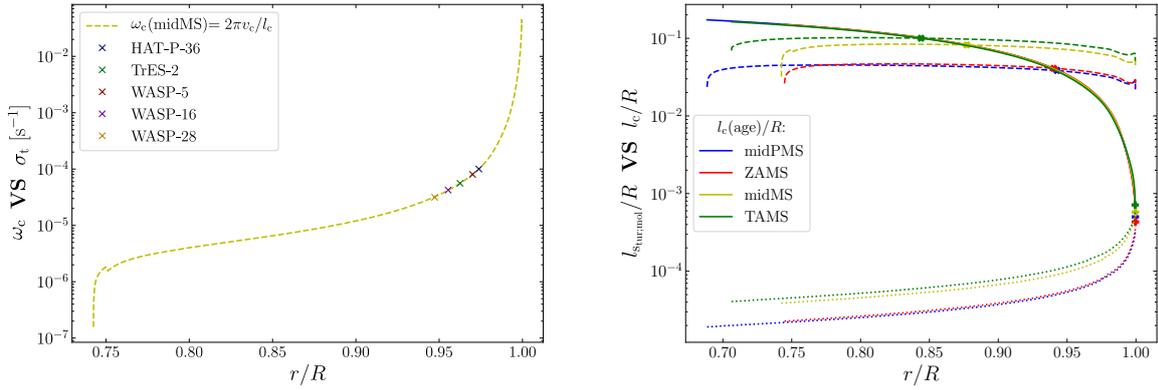


FIGURE 4.8: *Gauche* : Fréquence de retournement convectif $\omega_c = 2\pi/\tau_c$ calculée pour une étoile de $1 M_\odot$ à la moitié de sa séquence principale (âge ~ 5.4 milliard d'années). Le point d'intersection entre la fréquence de marée σ_t pour chacun des 5 systèmes de type Jupiter chauds (possédant une étoile hôte voisine de $1 M_\odot$) et ω_c est indiqué par une croix. *Droite* : Largeur de la couche de cisaillement l_s (voir la figure 6 de l'article associé au chapitre) calculée avec une diffusivité magnétique turbulente (*traits hachurés*) ou moléculaire (*traits pointillés*), et longueur convective l_c (*traits pleins*), dans l'enveloppe convective d'une étoile de $1 M_\odot$ à différents stades évolutifs (moitié de la PMS, ZAMS, moitié de la MS, TAMS). Les croix indiquent les intersections entre l_s (turbulent et moléculaire) et l_c pour chaque période.

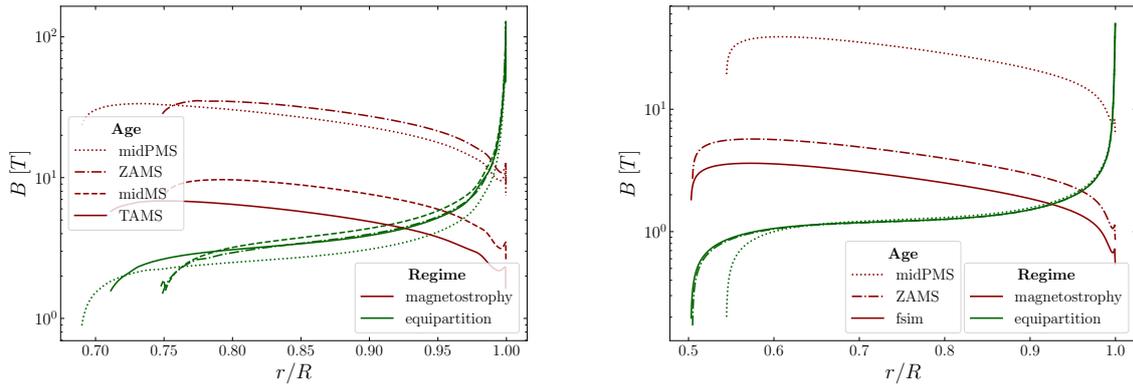


FIGURE 4.9: Champ magnétique d'étoiles de $1 M_\odot$ (*gauche*) et de $0.4 M_\odot$ (*droite*) dans leur enveloppe convective, à différents stades d'évolution et pour deux lois d'échelle dynamo avec une rotation initiale moyenne ($P = 4.5$ jours). Dans le calcul du champ magnétique, les paramètres convectifs (vitesse et longueur) ainsi que la densité, dépendent de la position r dans l'enveloppe convective.

échelle du champ magnétique peuvent collectivement affecter la marée d'équilibre, à condition que leurs corrélations soutiennent une force de Lorentz efficace à grande échelle.

Discutons les échelles de la marée dynamique. Cette marée possède deux échelles de longueur caractéristiques : une échelle le long des couches de cisaillement, typiquement de l'ordre de R (comme évoqué dans la section 2.3.4.1), et une échelle transverse qui mesure la largeur des couches de cisaillement et est donc directement reliée au processus de dissipation dominant. On procède alors de même qu'en section 2.3.3 pour déterminer l_s ici avec la diffusion Ohmique. Si l'on note τ_η le temps caractéristique de diffusion Ohmique dans la direction transversale de la couche de cisaillement de largeur l_s , ce temps est équivalent à τ_g , le temps de propagation de l'énergie d'une onde magnéto-inertielle. Les deux échelles de

temps s'expriment (Lin & Ogilvie, 2018) :

$$\begin{cases} \tau_g = \frac{R}{V_g} \sim \frac{R}{l_s} \Omega^{-1} \\ \tau_\eta = \frac{l_s^2}{\eta} \sim \left(\frac{l_s}{R}\right)^2 \text{Em}^{-1} \Omega^{-1} \end{cases} \quad (4.18)$$

En égalisant ces deux échelles temporelles, on obtient une estimation de la largeur transverse d'une couche de cisaillement :

$$l_s = \text{Em}^{1/3} R. \quad (4.19)$$

Dans l'image de droite à la figure 4.8, on peut trouver cette longueur estimée à l'aide des nombres d'Ekman magnétique moléculaire et turbulent, pour une étoile de $1 M_\odot$ à différentes périodes de sa vie. l_s est comparée avec la longueur convective l_c dans toute l'enveloppe de l'étoile. Grâce à ce graphe, on vérifie à posteriori une hypothèse nécessaire à l'application du principe de viscosité turbulente, et discutée à la section 2.3.4.1, à savoir que la longueur caractéristique de la convection turbulente (l_c) soit plus petite que l'échelle spatiale caractéristique de la marée l_s . Cela est valable proche de la surface lors de l'utilisation d'une résistivité magnétique turbulente, comme pour les échelles fréquentielles de marée et de la convection discutées dans la section qui précède. Dans le cas où la séparation des échelles n'est pas vérifiée (i.e. $l_c \approx l_s$), une étude dédiée aux interactions ondes-vortex/structures convectives est requise (Dandoy et al. in prep.).

Discutons les échelles du champ magnétique. Le champ calculé à l'aide des lois d'échelles dynamo en section 3.3.1 est plutôt de grande échelle, car il fait intervenir la longueur convective à la base de l'enveloppe convective qui vaut quelques dixièmes du rayon stellaire, en fonction de la masse de l'étoile comme on l'a vu figure 4.5 (image de droite). Comme l_c diminue vers la surface de l'étoile, et devient de l'ordre de grandeur de la dimension des tâches solaires, une approche simple consisterait à calculer un champ magnétique associé aux mouvements turbulents de petite échelle spatiale l_c . Cependant, les champs magnétiques calculés près de la surface avec cette méthode restent très élevés, comme on peut le voir en figure 4.9 pour une étoile de type solaire et une naine M à différents stades de leur évolution. Par exemple, en milieu de séquence principale pour $1 M_\odot$, le régime magnétostrophique donne un champ de 3 T et le régime d'équipartition un champ de 100 T près de la surface. On est donc bien au dessus des valeurs de champs de l'ordre du kilo-Gauss dans les tâches solaires (stellaires) pour une étoile de $1 M_\odot$. De même, pour les champs de petite échelle on trouve grâce à la technique d'élargissement Doppler des champs de surface pour les étoiles de faible masse de l'ordre de la centaine de Gauss et du kilo-Gauss pour les naines M (p.e. Shulyak et al., 2017; See et al., 2019b, table 2), ce qui reste plus faible que les champs estimés à la figure 4.9 (panneau de droite) près de la surface.

Malgré tout, dans l'hypothèse où ce modèle a un sens, un champ de petite échelle peut éventuellement affecter la marée dynamique dans sa longueur caractéristique transverse pour $l_c \gtrsim l_s$, ce qui se vérifie en profondeur dans l'enveloppe convective (figure 4.8 panneau de droite), lorsque l'on utilise une viscosité turbulente.

4.5 Autre application : le système Jovien

Nous avons traité jusqu'ici l'influence du magnétisme stellaire sur l'excitation et la dissipation des ondes de marée au cours de l'évolution stellaire. Est-il possible de mener la même analyse dans les systèmes

planète-satellites ? La réponse est oui pour des systèmes bien connus et dans lesquels l'interaction de marée est importante, comme c'est le cas pour le système Jovien (notamment Jupiter et ses quatre plus gros satellites). Dans ce système, Io, Europa, Ganymède et Callisto présentent des orbites quasi-coplanaires et circulaires. On notera que les satellites au-delà de Callisto ressentent moins les effets de marée, car ils possèdent notamment des orbites excentriques, fortement inclinées et sont loin de la synchronisation. Par ailleurs, Jupiter possède une amplitude moyenne de champ magnétique de surface comparable à celui du Soleil, qui varie entre 2 et 20 Gauss à la surface (Moore et al., 2018), et monte jusqu'à 60-70 Gauss à l'intérieur de la zone convective à un rayon de $\sim 0.85 R_J$ où R_J est le rayon de Jupiter (Gastine et al., 2014; Moore et al., 2018; Connerney et al., 2018). On pense que l'effet dynamo opère en deçà de ce rayon spécifique où l'hydrogène moléculaire devient métallique (voir figure 5.4 et les trois références précédemment citées).

Les éléments orbitaux des satellites et la rotation de Jupiter pour calculer Ro_t sont tirés de la base de données du JPL¹³. Pour les valeurs de la densité, j'ai utilisé $\rho \sim 500 \text{ kg/m}^3$ à $\sim 0.85 R_J$ d'après Wahl et al. (2017, voir en particulier la figure 1), et $\rho \sim 100 \text{ kg/m}^3$ près de la surface. Pour chacun des satellites, l'ordre de grandeur du rapport des forçages est :

satellites		Io	Europa	Ganymède	Callisto
$f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$	surface	10^{-10}	10^{-10}	2×10^{-10}	5×10^{-10}
	$0.85 R_J$	2×10^{-10}	3×10^{-10}	4×10^{-10}	10^{-9}

en utilisant les valeurs maximales des champs magnétiques pour calculer le nombre de Lehnert, à savoir 70 et 20 Gauss à, respectivement, $0.85 R_J$ et près de la surface. Les valeurs de $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ sont plus faibles que les valeurs précédemment trouvées et montrées à la figure 4.6. Là aussi, la contribution du magnétisme n'a donc pratiquement aucun impact sur l'excitation des ondes magnéto-inertielles.

Concernant la dissipation de marée, Zhang et al. (1996) et Papaloizou (2007) utilisent une estimation de la diffusivité magnétique moléculaire dans Jupiter $\eta \sim 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, ce qui se traduit par un nombre d'Ekman magnétique moléculaire de l'ordre de 10^{-13} (10^{-11} , 10^{-12} dans Gastine et al., 2014). Sachant que le nombre de Lehnert est d'environ 10^{-5} dans l'enveloppe convective externe de Jupiter, le processus de dissipation Ohmique des ondes magnéto-inertielles forcées par la marée est prédominant par rapport au processus de dissipation visqueuse pour toutes les valeurs du nombre d'Ekman magnétique moléculaire.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'influence du magnétisme sur l'interaction de marée le long de l'évolution des étoiles de faible masse (ainsi que dans Jupiter) a été étudiée à travers son impact sur l'excitation et la dissipation des ondes magnéto-inertielles qu'elle génère.

13. https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_elem#jupiter et <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html>

✦ L'importance relative des forçages de type Coriolis par rapport aux forçages de type Lorentz repose sur le nombre de Lehnert qui compare les forces de Lorentz et de Coriolis, et les fréquences caractéristiques des systèmes étoile-planète, c'est-à-dire la fréquence de marée et la fréquence de rotation du corps principal. Nous avons donc estimé le nombre de Lehnert avec les lois d'échelle pour la dynamo stellaire (équipartition, MAC, magnétostrophie) qui nous permettent d'estimer un champ magnétique de grande échelle, à la base et au sommet de la zone convective. Comme dans le chapitre précédent, nous avons utilisé les grilles de modèles d'évolution stellaire (STAREVOL) pour différentes masses d'étoiles, à différents stades évolutifs et périodes de rotation initiale (lente, moyenne, rapide). En utilisant de plus les paramètres orbitaux de systèmes de Jupiter chauds observés quasi-coplanaires et circulaires, ainsi que la période de rotation de leur étoile hôte, nous avons pu calculer l'importance relative des forçages de marée. Dans chaque système étudié, et pour des étoiles hôtes de type K à F, le rapport des forçages est faible par rapport à l'unité. Cela signifie que le magnétisme ne joue pas un rôle significatif dans le forçage de la marée quelque soit le système de Jupiter chaud considéré.

En revanche, la dissipation de la marée dynamique est fortement influencée par le magnétisme stellaire. En effet, nous avons montré que la dissipation visqueuse n'est plus le principal processus de dissipation d'énergie. La dissipation Ohmique est au moins aussi importante que la dissipation visqueuse dans l'ensemble de la zone convective pour une étoile de $1 M_{\odot}$ ainsi que pour les autres étoiles de faible masse le long de leur évolution. Cela signifie qu'un traitement MHD complet est désormais nécessaire pour modéliser de manière réaliste la propagation et la dissipation des ondes magnéto-inertielles de marée à l'intérieur de l'enveloppe convective d'une étoile de faible masse. Les mêmes conclusions sur le forçage et la dissipation de marée s'appliquent au cas de Jupiter.

Does magnetic field impact tidal dynamics inside the convective zone of low-mass stars along their evolution?

A. Astoul¹, S. Mathis¹, C. Baruteau², F. Gallet³, A. Strugarek¹, K. C. Augustson¹, A. S. Brun¹, and E. Bolmont⁴

¹ AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 91191 Gif-sur-Yvette, France
e-mail: aurelie.astoul@cea.fr

² IRAP, Observatoire Midi-Pyrénées, Université de Toulouse, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

³ Univ. Grenoble Alpes, CNRS, IPAG, 38000 Grenoble, France

⁴ Observatoire de Genève, Université de Genève, 51 chemin des Maillettes, 1290 Sauverny, Switzerland

Received 7 August 2019 / Accepted 21 September 2019

ABSTRACT

Context. The dissipation of the kinetic energy of wave-like tidal flows within the convective envelope of low-mass stars is one of the key physical mechanisms that shapes the orbital and rotational dynamics of short-period exoplanetary systems. Although low-mass stars are magnetically active objects, the question of how the star's magnetic field impacts large-scale tidal flows and the excitation, propagation and dissipation of tidal waves still remains open.

Aims. Our goal is to investigate the impact of stellar magnetism on the forcing of tidal waves, and their propagation and dissipation in the convective envelope of low-mass stars as they evolve.

Methods. We have estimated the amplitude of the magnetic contribution to the forcing and dissipation of tidally induced magneto-inertial waves throughout the structural and rotational evolution of low-mass stars (from M to F-type). For this purpose, we have used detailed grids of rotating stellar models computed with the stellar evolution code STAREVOL. The amplitude of dynamo-generated magnetic fields is estimated via physical scaling laws at the base and the top of the convective envelope.

Results. We find that the large-scale magnetic field of the star has little influence on the excitation of tidal waves in the case of nearly-circular orbits and coplanar hot-Jupiter planetary systems, but that it has a major impact on the way waves are dissipated. Our results therefore indicate that a full magneto-hydrodynamical treatment of the propagation and dissipation of tidal waves is needed to properly assess the impact of star-planet tidal interactions throughout the evolutionary history of low-mass stars hosting short-period massive planets.

Key words. magnetohydrodynamics (MHD) – waves – planet-star interactions – stars: evolution – stars: magnetic field – stars: rotation

1. Introduction

Over the last two decades, a large variety of exoplanetary systems has been discovered, primarily through photometric transit and radial velocity observations (e.g. Perryman 2018). Among these systems, several populations of exoplanets orbit very close to their host stars (with orbital periods of a few days), such as hot-Jupiters, super-Earths, and mini-Neptunes (Mayor et al. 1997; Schlichting 2014). In these short period systems as well as in tight binary stars, tides induced by each other's body drive the rotational and orbital evolutions of the system through dissipation mechanisms (the so-called tidal dissipation, see e.g. Zahn 1977; Hut 1980; Zahn & Bouchet 1989; Goldreich & Nicholson 1989; Witte & Savonije 2002).

Usually, tides are split into two components following the work of Zahn (1966a,b,c, 1975, 1977). First, the equilibrium tide is the quasi-hydrostatic response of the main body to tidal perturbations induced by the companion. It is materialised by a large-scale deformation in the perturbed body, that is displayed as a near-equatorial tidal bulge in the direction of the companion. In addition, waves are excited in its interior as the equilibrium tide is not an exact solution to the equations of motion, providing an additional driving force (Ogilvie 2014). The tidally-forced waves correspond to the dynamical tides. The convective zone (CZ) of a perturbed rotating body is the seat of inertial waves

that get dissipated by turbulent friction (e.g. Ogilvie & Lin 2004, 2007), while the radiative zone supports gravito-inertial waves which are dissipated by thermal damping and turbulent friction (e.g. Zahn 1975; Terquem et al. 1998; Goodman & Dickson 1998; Barker & Ogilvie 2010).

The dissipation of the dynamical tides in the CZ is very efficient in young stars (pre-main sequence and early main sequence) whereas for older stars the dissipation of the equilibrium tide dominates mainly because of the slower stellar rotation, as demonstrated for instance by Bolmont & Mathis (2016) (see also Strugarek et al. 2017; Gallet et al. 2017; Beck et al. 2018). The efficiency of the tidal excitation and viscous dissipation of inertial and gravito-inertial waves can be measured with the tidal quality factor Q . This quantity reflects the fact that the perturbed body undergoes a forced oscillation and dissipates a fraction of the associated energy during each oscillation period. It has been evaluated by Ogilvie & Lin (2004, 2007), with and without differential rotation (see also Guenel et al. 2016a,b, for this particular topic), in the case of giant planets and solar-type stars. Recently, Mathis (2015) and Gallet et al. (2017) explored the influence of mass, age and rotation based on the frequency-averaged dissipation estimates of Ogilvie (2013) to understand the behaviour of tidal dissipation along the evolution of stars. They emphasised that the variation of these parameters could drastically modify the strength of tidal dissipation with a higher

frequency-averaged tidal dissipation for low-mass stars. Similarly, [Bolmont et al. \(2017\)](#) highlighted the importance of the stellar metallicity. Within this context, the variations of tidal dissipation along stellar evolution have a strong impact on the orbital architecture of compact planetary systems and the planet survival ([Bolmont & Mathis 2016](#); [Benbakoura et al. 2019](#)).

In the aforementioned studies of star-planet tidal interactions, an important ingredient is missing though: stellar magnetism. In the Sun and solar-like stars, magnetism is revealed by external magnetic features such as sunspots, prominences or flares ([Donati & Landstreet 2009](#)). The magnetic fields of solar-like stars originates from a powerful dynamo mechanism, sustained by turbulent convection and differential rotation in the convective envelope of the star ([Brun & Browning 2017](#)). Recent endeavours have been carried out to assess the effects of magnetism on tidally-excited inertial waves in stars ([Wei 2016, 2018](#); [Lin & Ogilvie 2018](#)). In the presence of a magnetic field, tidal waves excited in the CZ become magneto-inertial waves. Moreover, they feel the magnetic tension of the large-scale magnetic field which affects their propagation and dissipation ([Finlay 2008](#)). These magnetically modified inertial waves have a broader range of propagation frequencies, compared to the hydrodynamical case, and can be dissipated through both viscous and Ohmic processes. Specifically, the transition between hydrodynamical and magneto-hydrodynamical (MHD) regimes have been explored in a shearing box model with a uniform magnetic field ([Wei 2016](#)) and in spherical geometry with both a uniform field directed along the z -axis and a dipolar magnetic field ([Lin & Ogilvie 2018](#)). The authors of these studies both stressed that the Lehnert number Le ([Lehnert 1954](#)) determines how important magnetism is to tidal dissipation. This dimensionless number compares the Alfvén velocity to the rotation speed of the body. Additionally, how magnetism influences the effective tidal force to excite magneto-inertial waves remains to be addressed, as mentioned in [Lin & Ogilvie \(2018, Appendix B\)](#). In practice, given the equation of motion tidal waves are excited by an effective body force driven by the Coriolis acceleration of the equilibrium tidal flow in the non-magnetised case ([Ogilvie 2005](#)). In the presence of a magnetic field, the Lorentz force acting on the equilibrium tide is likely to play a role in the excitation of tidal waves. Thus, this motivates the study of the impact of stellar magnetism on both dissipation and excitation of dynamical tides inside the CZ and along the evolution of low-mass stars.

The paper is organised as follows. In Sect. 2.1 we work out the contribution of magnetism to tidal forcing and derive a criterion to assess its importance relative to non-magnetised forces. This criterion features the Lehnert number and thus the magnetic field and the rotation speed of the body, as well as the tidal forcing frequency. Simple scaling laws are applied in Sect. 2.2 to estimate the dynamo-driven magnetic field in the convective envelope of low-mass stars. Thanks to the stellar evolution code STAREVOL (Sect. 2.3, see also [Amard et al. 2019](#), and references therein), the strength of a mean magnetic field is given, in Sect. 2.4, at the base and top of the CZ for various low-mass stars. Thus, we evaluate in Sect. 2.5 the Lehnert number as a function of age, mass, initial rotation, and radius in the CZ of these stars. We then estimate in Sect. 2.6 the Lehnert number along with the rotation and tidal frequencies in several observed short-period exoplanetary systems to assess the importance of the star’s magnetic field on the tidal forcing. Based on our estimates of the Lehnert number, we compare in Sect. 3 the relative importance of Ohmic over viscous dissipations of tidally induced magneto-inertial waves throughout the evolution of low-mass stars. In Sect. 4, we examine how small-scale magnetic fields

impact tidal forcing. Finally, we present in Sect. 5 the conclusions and perspectives of this work.

2. The Lorentz force influence on tidal forcing

The purpose of this section is to quantify the contribution of the stellar magnetic field to the tidal excitation of magneto-inertial waves in the CZ of low-mass stars.

2.1. A criterion to settle the importance of magnetism

We aim for an approach as general as possible, yet we restrict our model adopting a solid-body rotation with an angular frequency Ω . In particular, we do not assume a specific geometry for the magnetic field. We linearise the momentum and induction equations to derive the magnitude of the magnetic tidal forcing (the effective tidal force arising from the Lorentz force) and compare it with the classical hydrodynamical tidal forcing. We introduce the self-gravitational potential Φ_0 , as well as the gravitational potential perturbation Φ , and the external tidal potential Ψ (see e.g. [Zahn 1966a](#); [Ogilvie 2013](#)). The continuity and entropy equations are as given in Zahn’s paper, with the addition of Ohmic heating to the entropy equation. The momentum equation for tidal perturbations in the co-rotating frame can be written as:

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho_0 \nabla(\Phi + \Psi) + \rho \nabla \Phi_0 + \mathbf{F}_\nu + \mathbf{F}_L, \quad (1)$$

where ρ_0 is the mean density and \mathbf{u} , p , and ρ are the perturbed velocity, pressure, and density, respectively. We include the volumetric viscous force $\mathbf{F}_\nu = \rho_0 \nu \nabla^2 \mathbf{u}$, which represents the effective action of turbulent convection on tidal flows with ν the effective so-called eddy-viscosity (e.g. [Zahn 1966b, 1989](#); [Ogilvie & Lesur 2012](#); [Mathis et al. 2016](#)) which we assume to be constant in the CZ. Moreover,

$$\mathbf{F}_L = \frac{\nabla \times \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times \mathbf{b} + \frac{\nabla \times \mathbf{b}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0$$

is the linearised Lorentz force, where \mathbf{B}_0 and \mathbf{b} are the large-scale and perturbed magnetic fields, respectively. Note also that we have no background flow ($\mathbf{u}_0 = 0$) as we work in the rotating frame, the action of the convective flows is parametrised as a diffusion, and any differential rotation and associated meridional flows are neglected. Furthermore, the linearised induction equation is:

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2)$$

with η the magnetic turbulent diffusivity, related to the eddy-viscosity by the relationship $\eta = \nu / Pm$, where Pm is the turbulent magnetic Prandtl number often chosen close to unity (e.g. [Camargo & Tasso 1992](#); [Jurčišinová et al. 2013](#); [Käpylä et al. 2019](#)).

Following [Ogilvie \(2005, 2013\)](#), we decompose all physical perturbed quantities X into a non-wave like part associated with the equilibrium tide denoted as X_e , and a wave-like part X_d related to the dynamical tides. The equilibrium tidal flow \mathbf{u}_e is defined as the velocity resulting from the hydrostatic adjustment of the primary due to the perturbation induced by the companion in the rotating frame of the tidal bulge. This frame rotates at the corresponding tidal frequency $n\Omega_o/2$ (see [Remus et al. 2012](#)), where n labels the temporal harmonic of the orbital motion of the perturber (when projecting the tidal potential on the spherical harmonics basis) and Ω_o is the associated orbital frequency.

In the adiabatic case, this hydrostatic equilibrium leads to (Zahn 1966a):

$$-\nabla p_e + \rho_0 \nabla(\Phi_e + \Psi) + \rho_e \nabla \Phi_0 = 0. \quad (3)$$

This equation comes from Eq. (1) without the left hand side and dissipative terms. As a first step, we also neglect the deformation of the stellar structure induced by rotation and magnetic field. In the case of magnetic fields this is a reasonable assumption except in the low density region near the stellar surface (Duez et al. 2010). For the centrifugal acceleration, this is a fair hypothesis for slow and median rotators while potentially strong deformation should be taken into account for young rapid rotators (see e.g. Gallet & Bouvier 2013, Fig. 7). We split the equation of induction in the co-rotating frame, accounting for the equilibrium and dynamical tides decomposition:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_e = \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}_0) \\ \partial_t \mathbf{b}_d = \nabla \times (\mathbf{u}_d \times \mathbf{B}_0) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}_d, \end{cases} \quad (4a)$$

where $\boldsymbol{\xi}_e$ is the equilibrium tide displacement, defined by $\mathbf{u}_e = \partial_t \boldsymbol{\xi}_e$, given a mean static magnetic field \mathbf{B}_0 . We also introduce \mathbf{u}_d , the perturbed flow of the dynamical tide. We assume here that \mathbf{B}_0 does not vary over the tidal timescale which is a few days. This is corroborated by the fact that the large-scale magnetic field varies very little (far below one order of magnitude) within several years for the majority of observed stars (Vidotto et al. 2014). Moreover, we choose to define the magnetic field associated with the equilibrium tide as the field it induces by the advection of \mathbf{B}_0 . We neglect the Ohmic diffusion acting on the equilibrium tide because its time scale R^2/η , where R is the radius of the star which is also the length of variation of this flow, is much larger than its typical time of variation (in the range of a few days for Hot Jupiter), even when considering a turbulent magnetic diffusivity. One can not do the same assumption for dynamical tides since they involve potentially smaller length scales, for example along waves' attractors. The equation of induction for dynamical tides (Eq. (4b)) follows from this definition when writing the equation of induction for the sum of the equilibrium and dynamical tide perturbations (Eq. (2)) since it is a linear equation.

In the momentum equation, we use the Cowling approximation (Cowling 1941) for the dynamical tides i.e. we neglect their perturbed gravitational potential Φ_d . In addition, as our model applies to a convective region (i.e. adiabatically stratified), the term $\rho_d \nabla \Phi_0$ is neglected because it is related to the buoyancy force associated with gravity waves. Using Eq. (3), the momentum equation for tidally-forced magneto-inertial waves becomes:

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u}_d + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_d) + \nabla p_d - \mathbf{F}_v(\mathbf{u}_d) - \mathbf{F}_L(\mathbf{b}_d) = f(\mathbf{u}_e), \quad (5)$$

where the wave-like part encompassing the propagation of tidal waves (on the left hand side of the equation), is excited by an effective force driven by the equilibrium tidal flow (on the right hand side). This force can be written as:

$$f(\mathbf{u}_e) = \underbrace{-\rho_0(\partial_t \mathbf{u}_e + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_e)}_{f_{\text{hydro}}} + \underbrace{\frac{\nabla \times \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}_0)] + \frac{\nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}_0)]}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0}_{f_{\text{mag}}}.$$

It is worth noting that the action of turbulent friction on the hydrostatic flow has been neglected for the same reasons we ignored the ohmic diffusion in Eq. (4a). The term f_{hydro} comprises the driving inertial force and the Coriolis acceleration (see

the Appendix B in Ogilvie 2005) while f_{mag} embodies the action of the Lorentz force on the hydrostatic displacement and has been derived by Lin & Ogilvie (2018, see Appendix B). These authors studied the propagation and dissipation of magneto-inertial waves excited by the effective forcing induced solely by the Coriolis acceleration of the equilibrium tide (in short $f(\mathbf{u}_e) = f_{\text{hydro}}$). However, they also suggest that a large-scale magnetic field can potentially interact with the equilibrium tide for sufficiently large Lehnert numbers (typically $\text{Le} > 0.1$). For this reason, we propose to examine the relative importance of both forcings f_{mag} and f_{hydro} . We use R as the typical length scale of the large-scale magnetic field and of the equilibrium tide, which involves large-scale flows. Henceforth, we can give the order of magnitude of the different forcings:

$$\begin{cases} f_{\text{hydro}} \sim \rho_0 u_e \sigma_{\text{max}} & \text{with } \sigma_{\text{max}} = \max[\sigma_t, 2\boldsymbol{\Omega}] \\ f_{\text{mag}} \sim B_0^2 \xi_e / (\mu_0 R^2) \end{cases},$$

and their ratio:

$$\frac{f_{\text{mag}}}{f_{\text{hydro}}} \simeq \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0 (2\boldsymbol{\Omega} R)^2} \times \frac{2\boldsymbol{\Omega} \xi_e}{u_e} \times \frac{2\boldsymbol{\Omega}}{\sigma_{\text{max}}} \equiv \text{Le}^2 \times \text{Ro}_t^{-1} \times \hat{\sigma}_{\text{max}}^{-1}, \quad (6)$$

where we define the Lehnert number as $\text{Le} = B_0 / (\sqrt{\rho_0 \mu_0} 2\boldsymbol{\Omega} R)$. We also introduce the Doppler-shifted tidal Rossby number $\text{Ro}_t = \sigma_t / (2\boldsymbol{\Omega})$ with $\sigma_t = u_e / \xi_e$ the related tidal frequency, and a dimensionless frequency ratio $\hat{\sigma}_{\text{max}} = \sigma_{\text{max}} / (2\boldsymbol{\Omega}) = \max[\text{Ro}_t, 1]$. According to Eq. (6), magnetism needs to be taken into account in the tidal forcing whenever $\text{Le}^2 / (\text{Ro}_t \hat{\sigma}_{\text{max}}) \gtrsim 1$.

2.2. Scaling laws to estimate stellar magnetic fields

The determination of the Lehnert number inside the convective envelope of low-mass stars requires knowledge of the internal magnetic field of these stars. However, we are currently only able to constrain the magnetic field of stars at their surface. Indeed, thanks to Zeeman-Doppler Imaging, one can reconstruct the topology and strength of large-scale, stellar magnetic fields (Donati et al. 2006, 2007).

Regarding the Sun, internal magnetic fields can be assessed indirectly from surface tracers like sunspots, as a manifestation of flux ropes emerging through the surface (Charbonneau 2013). This approach is based on the so-called interface dynamo theory where the magnetic field is generated by a convective dynamo and pumped into the tachocline (the interface between the radiative and convective zones), where it eventually becomes strong enough to be buoyantly unstable, rise through the convection zone, and emerge at the surface as sunspots (Spiegel & Zahn 1992; Charbonneau 2014; Brun & Browning 2017). This picture has been recently questioned, especially by Wright & Drake (2016) by studying fully convective stars. It is indeed possible that the spot-forming magnetic fields can be generated in the bulk (Strugarek et al. 2017) or in the shallow layers (Basu 2016) of the CZ instead of overshoot layers beneath the core-envelope interface. Through helioseismology, Gough & Thompson (1990) and Antia et al. (2000) have placed an upper bound of 30 T on the toroidal magnetic field strength at the base of the CZ. On the contrary, the mean magnetic field at the Sun's surface is significantly smaller, about a few Gauss ($\sim 10^{-4}$ T), even though sunspots are the seats of local intense magnetic fields (several tenths of a Tesla).

As far as younger or smaller stars than the Sun are concerned, Vidotto et al. (2014) gives an overview of known large-scale surface magnetic fields, that appear to vary from the globally weak fields of the order of the Gauss for solar-like stars to the strong

Table 1. Magnetic fields derived from simple balances (forces or energies) written in the second column.

Regime	Balance	Estimation of B_{dyn}
Equipartition	ME = KE	$\sqrt{\mu_0 2\text{KE}}$
Buoyancy dynamo	$\frac{\text{ME}}{\text{KE}} = \text{Ro}^{-1/2}$	$\sqrt{\mu_0 2\text{KE}/\text{Ro}^{1/2}}$
Magnetostrophy	$F_L = 2\rho_0\Omega \times \mathbf{u}$	$\sqrt{\mu_0 2\text{KE}/\text{Ro}}$

Notes. Details of the calculations are given in the Appendix A. KE and ME are the kinetic and magnetic energy densities of the convective flow, respectively.

Tesla-strength fields of M dwarf and T Tauri stars. They establish a relationship between surface magnetic field and the convective Rossby number $\text{Ro} = u_c/(2\Omega l_c)$, where u_c and l_c are the convective velocity and length, respectively. This dimensionless quantity is generally calculated at half the mixing-length $\alpha H_p/2$ (Landin et al. 2010; Gilliland 1986) above the base of the CZ, with H_p the pressure scale height and α the mixing-length theory coefficient.

Nonetheless, as indicated above, it is difficult to estimate the magnetic field inside stars. In this context, 3D global non-linear simulations (Strugarek et al. 2017; Emeriau-Viard & Brun 2017) and scaling relationships for stellar dynamos (Augustson et al. 2019, and references therein) can help us to estimate the internal magnetic field strength in the convective envelope of low-mass stars. Three scaling laws are described hereafter and the derivation of the related dynamo-induced magnetic field is detailed in Appendix A. We have:

- the (turbulent) equipartition, that is often used to give an averaged, rough estimate of the magnetic field’s amplitude in the bulk of the CZ (Brun & Browning 2017). It assumes that the dynamo is efficient i.e. that the system is equally good at generating magnetic field as it is at generating flows. This balance is also used in moderately active plages at the solar surface, while in the active sunspots superequipartition (i.e. magnetic energy is greater than kinetic energy) can be fairly common (Donati & Landstreet 2009).

- the buoyancy dynamo regime, in which the Coriolis, buoyancy and Lorentz forces are taken to have the same order of magnitude assuming a low atomic magnetic Prandtl number, that is the ratio of atomic viscosity to magnetic diffusivity (Davidson 2013; Augustson et al. 2019). This assumption is well verified for fast rotating giant planets, young contracting stars like T-Tauri and rapidly-rotating low-mass stars (Christensen et al. 2009).

- the magnetostrophic regime, for which the force balance is realised between the Coriolis and Lorentz forces. This balance, also called magnetostrophy, gives an upper estimate of the magnetic field. The magnetostrophic regime generally gives fields in super-equipartition (Brun et al. 2015; Augustson et al. 2019).

We summarise in Table 1 the order of magnitude estimation of the magnetic field (named hereafter B_{dyn}) within the convective envelope of a low-mass star as obtained by the three aforementioned scaling laws. These relationships involve the kinetic and magnetic energy densities of the convective flow $\text{KE} = \rho u_c^2/2$ and $\text{ME} = B_{\text{dyn}}^2/(2\mu_0)$ respectively, along with the convective Rossby number $\text{Ro} = u_c/(2\Omega l_c)$ at the base of the CZ.

The main objective of this paper is to determine and quantify the impact of a large-scale magnetic field on the excitation and dissipation of the dynamical tides. We still discuss in Sect. 4 to what extent the small-scale component of the stellar magnetic

field can influence the tidal flows. To allow comparison with the amplitude of observed surface magnetic fields of low-mass stars, we extrapolate a large-scale, dipolar, surface magnetic field from the scaling laws at the base of the CZ (Table 1). First, we suppose that the dipolar component of the star’s magnetic field at the base of the CZ is a fraction γ of the dynamo-induced magnetic field at that location:

$$B_{\text{dip}}(r_{\text{base}}) = \gamma B_{\text{dyn}}(r_{\text{base}}). \quad (7)$$

The factor γ encapsulates both the ratio of large-scale to small-scale magnetic fields (similarly to the filling factor in Reiners 2012; See et al. 2019) and the part of the total energy that is available in the dipolar component of the magnetic field.

Then, we infer the dipolar component of the surface magnetic field simply as:

$$B_{\text{dip}}(r_{\text{top}}) = (r_{\text{base}}/R)^3 B_{\text{dip}}(r_{\text{base}}), \quad (8)$$

where R is the radius of the star, the subscripts “base” and “top” are the position inside the CZ, and “dip” and “dyn” refer to the dipolar and dynamo-induced magnetic fields, respectively. As the dipolar magnetic field at the surface of the Sun is well known, typically 4 G (DeRosa et al. 2012), γ can be estimated for the Sun by using Eqs. (7) and (8):

$$\gamma = \frac{B_{\text{dip},\odot}(r_{\text{top}})}{B_{\text{dyn},\odot}(r_{\text{base}})} \times \left(\frac{r_{\text{base},\odot}}{R_{\odot}}\right)^{-3}, \quad (9)$$

with R_{\odot} , $B_{\text{dyn},\odot}(r_{\text{base}})$ and $r_{\text{base},\odot}$ obtained from the grid models of the STAREVOL evolution code (see the Sect. 2.3 below) for a $1 M_{\odot}$ star of the age of the Sun. In the following we assume that γ in Eq. (7) is independent of the mass and the age of the star, and that it takes the Sun’s current value as in Eq. (9). This is a strong assumption since γ is close to a filling factor that depends on the Rossby number and therefore on the angular frequency of the star (See et al. 2019). Nevertheless, refining the expression of this factor would not change the final conclusions of this paper which are robust to several orders of magnitude, as we see later. The factor γ however depends on the scaling law used to estimate $B_{\text{dyn},\odot}$.

Finally, the dipolar component of a star’s surface magnetic field will be estimated as

$$B_{\text{dip}}(r_{\text{top}}) = \gamma (r_{\text{base}}/R)^3 B_{\text{dyn}}(r_{\text{base}}). \quad (10)$$

2.3. The stellar evolution code STAREVOL

To estimate the magnetic field and then the Lehnert number in the convective envelope of low-mass stars of different ages via the scaling laws described in Sect. 2.2, we use the 1D stellar evolution code STAREVOL (Amard et al. 2019). Initial masses of the stars range from 0.4 to $1.4 M_{\odot}$, given a solar metallicity $Z = 0.0134$ (Asplund et al. 2009), and a mixing length parameter $\alpha = 1.9730$. This latter is defined by the calibration of the standard solar model and used to model convective regions according to the mixing length theory. Basic input microphysics like the equation of state, nuclear reactions or opacities, are described in Amard et al. (2016) and Lagarde et al. (2012). The initial rotation periods are fixed using the calibration for fast (1.6 days), median (4.5 days) and slow (9 days) rotators from Amard et al. (2019). The rotation is assumed to be uniform inside the CZ but varies dramatically with stellar ages (Gallet & Bouvier 2013). As a result, the evolution of the surface angular velocity dictates that of the Lehnert number. During the first few Myr of the pre-main

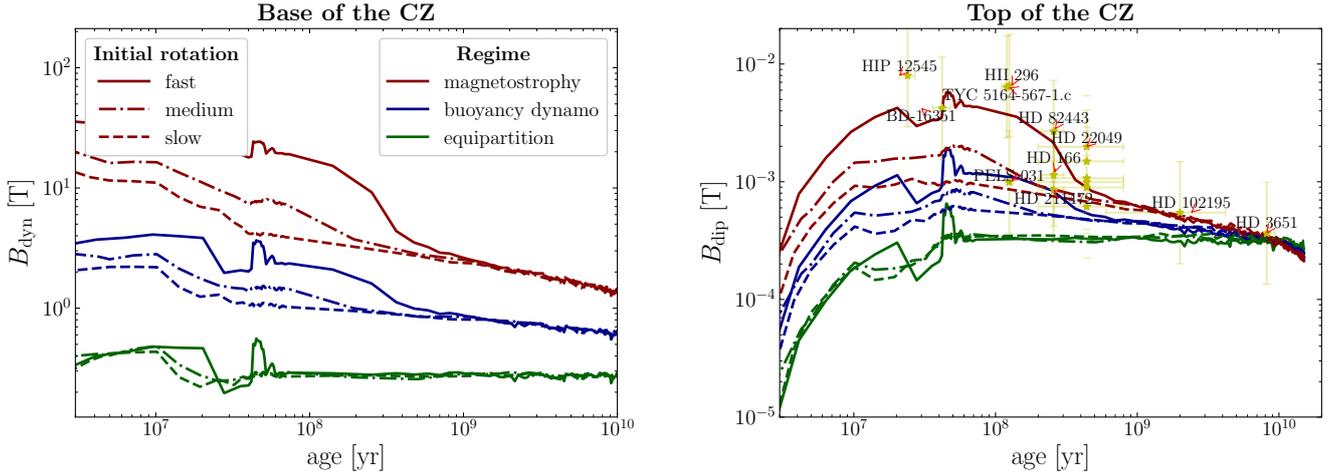


Fig. 1. Magnetic field versus the age of a $0.9 M_{\odot}$ star for three different initial rotation periods. At the base of the CZ (*left panel*), the magnetic field is estimated from the scaling laws listed in Table 1. At the top of the CZ (*right panel*), the same scaling laws are used to extrapolate a dipolar magnetic field near the surface (see Eq. (10)). The “stars” symbols (★) that represent mean dipolar magnetic fields at the surface of $0.9 M_{\odot}$ stars are taken from See et al. (2017), and the age of the stars are from Ge et al. (2006), Janson et al. (2008), Line et al. (2015), and Folsom et al. (2016). Multiple observations of the dipolar magnetic field of a star are joined by a line.

sequence (PMS), the surface angular velocity of the stars remains stationary as the result of star-disk magnetic interactions (Zanni & Ferreira 2013; Gallet & Bouvier 2015; Amard et al. 2016). This holds over the disk lifetime, typically a few Myr (Rebull et al. 2004; Bell et al. 2013; Gallet & Bouvier 2015). After the dissipation of the disk, the gravitational contraction of the star leads to an increase in the angular velocity, in order to conserve angular momentum, until the star begins hydrogen fusion at the zero-age main sequence (ZAMS). From this stage onward, magnetised stellar winds apply a torque on the star, spinning it down throughout its main sequence (MS) lifetime. In the STAREVOL code, the effects of a stellar wind acting from the early PMS to the tip of the MS are implemented using the prescription given by Matt et al. (2015). In the following, the base of the CZ refers to a height that is located $0.002R$ above the bottom of the CZ as computed in the STAREVOL model. This convention avoids erratic numerical behaviour of the mixing length convective velocity at the interface between the radiative and convective zones. Furthermore, the top of the CZ refers to the radius where the convective velocity vanishes in the STAREVOL models.

2.4. Estimation of the dipolar magnetic field at the base and the top of a CZ

Figure 1 shows the evolution of the magnetic field of a $0.9 M_{\odot}$ star along its lifetime for the three different initial rotation rates stated in Sect. 2.3. It should be specified that we chose a $0.9 M_{\odot}$ star rather than $1 M_{\odot}$ to add measurements of the mean dipolar magnetic fields at the surface of stars in the early MS (see next paragraph). At the base of the CZ (*left panel*), the magnetic field is calculated with the scaling laws listed in Table 1. At the top of the CZ (*right panel*), we use these dynamo-induced magnetic fields to extrapolate dipolar magnetic fields near the surface by using Eq. (10). The results obtained with fast (1.6 days), median (4.5 days), and slow (9 days) initial rotations are plotted with solid, dash-dotted, and dashed curves, respectively. We note that the magnetic field decreases in time after about 50 Myr in the two panels for both the magnetostrophic and buoyancy dynamo regimes. It is due to the fact that these regimes depend on a positive power of the angular velocity (in the denominator of the

Rossby number, see Table 1) that decreases after the ZAMS as a result of the stellar wind action on the star’s surface. After 1 Gyr, this decline is well described by the empirical Skumanich relationship (Weber & Davis 1967; Skumanich 1972). At the age of the present Sun (~ 4.6 Gyr), the buoyancy dynamo and magnetostrophic regime at the base of the CZ give the order of magnitude of the toroidal magnetic field strength expected in the Sun at the tachocline, typically a few to a few tens of Tesla (Charbonneau 2013).

We have added on the plot for the top of the CZ (*right-hand panel*) the average unsigned measured dipolar field strength of $0.9 M_{\odot}$ stars (See et al. 2017). We have adopted a conservative error estimate of 0.434 dex in $\log B_{\text{dip}}$ for all stars. Note that HD 22049 displays several values of the amplitude of the dipolar magnetic field measured at different times. The ages of the stars and their errors are taken from Folsom et al. (2016) for the early MS stars and Ge et al. (2006), Janson et al. (2008), Line et al. (2015) for the three oldest stars. It is interesting to note that the strength of the observed dipolar magnetic fields seems to be steady for end PMS and early MS stars. This finding is consistent with the saturation levels observed by Vidotto et al. (2014), See et al. (2017) for the large-scale and dipolar surface magnetic fields at low Rossby numbers. As a matter of fact, low Rossby numbers means high angular frequencies and therefore stars in the vicinity of the ZAMS. However, whether or not this observed saturation level is an atmospheric effect or a dynamo related phenomenon has yet to be determined (Vilhu 1984; Jardine & Unruh 1999).

Dipolar fields of young stars seem to fit quite well with the magnetostrophic regime along with fast initial rotation. We must nevertheless specify that we realised the same plot with more observed dipolar magnetic fields (See et al., in prep., priv. comm.) featuring weaker magnetic fields for PMS and early MS stars, and so consistent with median and slow initial rotation. That being said, we have to bear in mind that several strong assumptions have been made to derive the dipolar magnetic field near the surface (Eq. (10), see also Appendix B). These prescriptions are nonetheless sufficient for this work given the robustness of our results as we see in Sect. 2.6.

We have plotted in Fig. 2 the ratio of the observed and estimated dipolar magnetic fields versus the mass of various

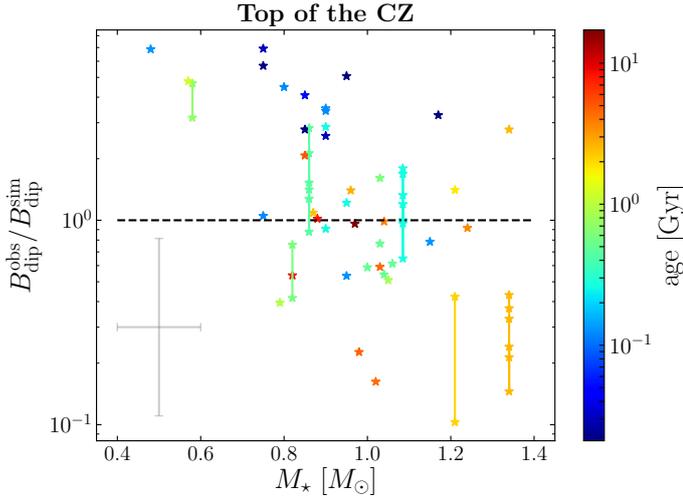


Fig. 2. Ratio of the mean unsigned observed dipolar magnetic field $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}$ (See et al. 2017; Vidotto et al. 2014) over estimated dipolar magnetic field $B_{\text{dip}}^{\text{sim}}$ as a function of the mass of the star. The age of the stars is indicated in colour and ranges from 21 Myr to 17.2 Gyr. Magnetostrophic regime and median initial rotation have been used to plot the ratio $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}/B_{\text{dip}}^{\text{sim}}$. Multiple observations of the dipolar magnetic field of a star are again joined by a line. A typical error bar for M_{\star} and $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}/B_{\text{dip}}^{\text{sim}}$ is indicated in grey. We have adopted a conservative error estimate of 0.434 dex in $\log B_{\text{dip}}$ and 0.1 M_{\odot} in M_{\star} .

low-mass stars distributed from PMS to MS stages. The magnetic field B_{sim} is calculated with the magnetostrophic regime and a median initial rotation. The magnetic field B_{obs} is again taken from See et al. (2017) and ages are from Vidotto et al. (2014) based on different methods (see the last quoted paper for more details). We note that the surface dipolar magnetic field of stars is well reproduced by B_{sim} within an order of magnitude. The estimate $B_{\text{dip}}^{\text{sim}}$ tends to deviate from $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}$ for relatively massive ($M_{\star} \gtrsim 1.2 M_{\odot}$) or very low-mass ($M_{\star} \lesssim 0.6 M_{\odot}$) stars, which is not surprising considering that the ratio γ of dipolar/non dipolar magnetic field is determined from solar parameters (see Eq. (9)).

2.5. Lehnert number for a low-mass star along its evolution

Using the estimates of the dynamo-induced magnetic field in Table 1, we can express the related Lehnert number at the base of the CZ (see Table 2). Within each regime, Le depends on the convective Rossby number, and the ratio between the convective length scale and the stellar radius l_c/R . This ratio results from the different length scales used in the magnetic scaling laws and in the definition of the Lehnert number (the length scales l_c and R respectively). Specifically, we choose a definition of the Lehnert number that is consistent with the previous works of Lin & Ogilvie (2018) and Wei (2018).

At the top of the CZ, we use the dipolar magnetic field derived in Eq. (10) to estimate the Lehnert number near the surface:

$$\text{Le}_{\text{top}} = \frac{B_{\text{dip}}(r_{\text{top}})}{\sqrt{\mu_0 \rho_{\text{top}} 2\Omega R}} = \gamma \left(\frac{r_{\text{base}}}{R} \right)^3 \sqrt{\frac{\rho_{\text{base}}}{\rho_{\text{top}}}} \text{Le}_{\text{base}}, \quad (11)$$

where we recall that “top” and “base” refer to the position in the CZ and that Le_{base} is taken from Table 2.

In Fig. 3, the Lehnert number squared of a 1 M_{\odot} star is shown as a function of age, at the base (left panel, see Table 2) and top (right panel, Eq. (11)) of the CZ. The different scaling laws, with

Table 2. Lehnert number scaling laws depending on magnetic field regimes, detailed in Table 1.

Regime	Le scaling
Equipartition	$\text{Ro} \times l_c/R$
Magnetostrophy	$\sqrt{\text{Ro}} \times l_c/R$
Buoyancy dynamo	$\text{Ro}^{3/4} \times l_c/R$

fast and slow initial rotations, are shown with the same layout as Fig. 1. First, we note that Le^2 remains always smaller than unity, consistent with the previous works of Lin & Ogilvie (2018) and Wei (2018). Whether we look at the base or the top, Le^2 increases with decreasing initial rotation speed from the PMS until about 1 Gyr. This is the opposite behaviour to the magnetic field strength, since the Lehnert number decreases with the angular velocity (see Table 2 and Eq. (11)). Finally, Le^2 is greater at the base than at the top of the CZ as it scales with B^2 .

The mass dependence of the Lehnert number is illustrated in Fig. 4, which displays Le^2 against age for stars ranging from 0.7 to 1.4 M_{\odot} . We have used slow initial rotation and the magnetostrophic regime to plot Le^2 at both the base and the top of the CZ. At the base of the CZ, we obtain the same features as in Fig. 3 i.e. Le^2 reaches a minimum at the ZAMS and increases during the MS. We highlight a quite small dispersion of the curves, though Le^2 still grows slightly with mass for $M_{\star} \lesssim 1.2 M_{\odot}$ stars. This trend is driven mostly by the decay of the convective turnover time $\tau_c = l_c/u_c$ when the mass grows (note that $\text{Ro} = (\tau_c 2\Omega)^{-1}$ in Table 2). When $M_{\star} \gtrsim 1.2 M_{\odot}$, the decrease in l_c/R at the base of the CZ for growing masses helps to reverse this behaviour. The drop in Le^2 with mass is even more pronounced at the top of the CZ for $M_{\star} \gtrsim 1 M_{\odot}$. These changes simply reflect the fact that the convective envelope shrinks with mass, which naturally leads to an increase in convective length and a decrease in convective turnover time and density at the base of the CZ (see Table 2 and Eq. (11)).

2.6. The influence of magnetism on tidal forcing for observed star-planet systems

The ratio of the magnitude of the Lorentz forcing to the hydrodynamical forcing (Eq. (6)) does not only depend on the Lehnert number, but also on the Doppler-shifted Rossby number Ro_t and the ratio of frequencies $\hat{\sigma}_{\text{max}}$ which need to be estimated from a two-body system. Ogilvie (2014) gives the expression of the tidal frequency in the fluid frame, σ_t in our notations, using the integers l, m, n coming from the spherical harmonics functions on which the gravitational potential is projected (we refer the reader to Sect. 2.1 in Ogilvie 2014). The tidal frequency is $\sigma_t = n\Omega_o - m\Omega$, where m is the azimuthal order of the spherical harmonics, and n and Ω_o have been introduced in Sect. 2.1. In the previous section, it has been shown that Le^2 does not go much beyond 10^{-3} , regardless of the age and the mass of the star at the base and top of the CZ (Figs. 3 and 4). This means that the ratio $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ (Eq. (6)) is likely to be small compared to unity, unless the rotation frequency is much greater (by at least a factor of a thousand) than the tidal frequency. Given the definition of the tidal frequency introduced above, the closer we get to a resonance between orbital and rotation frequencies, the more important the ratio $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ will be.

For the sake of simplicity we consider here systems with an almost circular and coplanar orbit. This allows us to reduce the

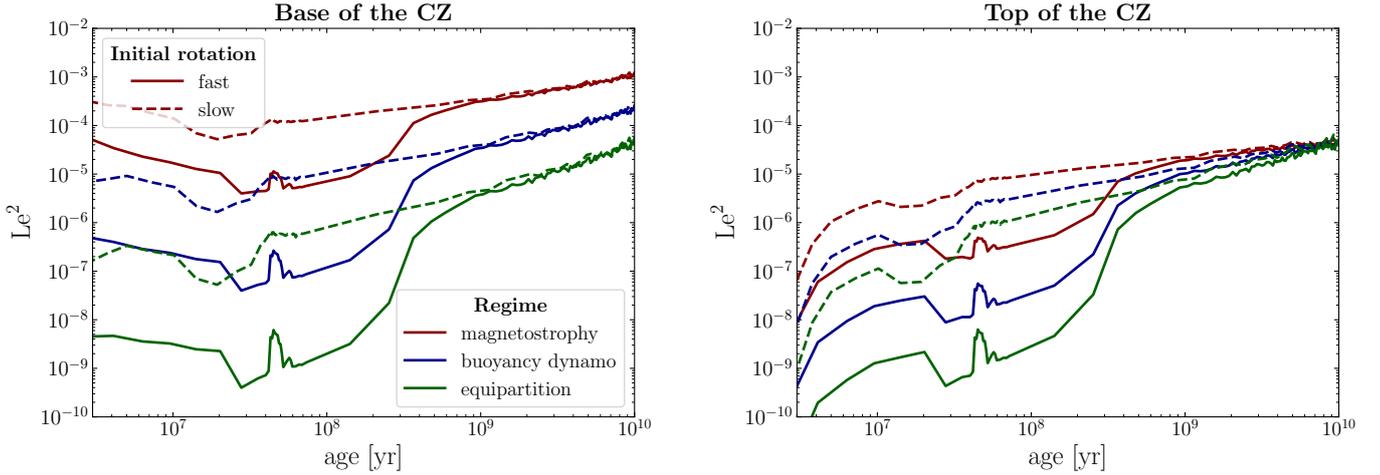


Fig. 3. Lehnert number squared at the base (left panel) and the top (right panel) of the CZ as a function of age for a $1 M_{\odot}$ star, and for different magnetic scaling laws and initial rotations (see the legends in the left panel).

number of pairs (m, n) because the tidal potential components are labelled by these integers and depend on eccentricity and stellar obliquity. Moreover, the dominant term in the tidal potential is the quadrupolar component as long as the planet and its host star are well separated, namely $l = 2$ with l the degree of the spherical harmonics (Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009; Ogilvie 2014). Within this assumption and the limits of low eccentricity and obliquity, $(m, n) \in \{(2, 2), (0, 1), (2, 1), (2, 3), (1, 0), (1, 2)\}$ (see Ogilvie 2014, for more mathematical details). When the orbit is strictly circularised and coplanar, the asynchronous tide acts alone and the only matching pair of integers is $(2, 2)$. For the other pairs, the eccentricity or obliquity tides can be dominant.

In Table B.1, we have thus listed known star-planet systems satisfying the following conditions:

- a near-circular orbit: we choose the eccentricity such as $e < 0.1$.
- a low sky-projected obliquity: $|\lambda| < 30^{\circ}$. λ is the sky-projected angle between the stellar spin axis and the axis perpendicular to the planet orbit. Ideally, we should use the true obliquity ψ but this quantity is more difficult to determine than λ and too few measurements exist. However, when both values of ψ and λ exist for the selected systems, they are quite similar and far from the threshold of 30° .
- a planet orbiting close to its host star: $P_o < 10$ days, where P_o is the orbital period of the planet, so that stellar tidal effects are important.

Under these conditions the chosen systems are mostly hot-Jupiter-like systems, with host stars ranging from 0.7 to $1.4 M_{\odot}$ in order to have a similar structure to that of the Sun (namely with a convective envelope and a radiative region below it during the MS). They have been picked out using the Extrasolar Planets Encyclopaedia¹ (e.g. Schneider et al. 2011) which presents the orbital period and eccentricity of the planet, along with the TEPcat² (Southworth 2011) database to find the sky-projected obliquity. Then, we removed the systems for which the age of the star was not known. For the remaining systems, stellar period has been found in the literature: the related references are reported in the last column of Table B.1.

In Fig. 5, we present the ratio of the magnetic to hydrodynamic forcings $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}} = \text{Le}^2 \text{Ro}_t^{-1} \hat{\sigma}_{\text{max}}^{-1}$ as a function of

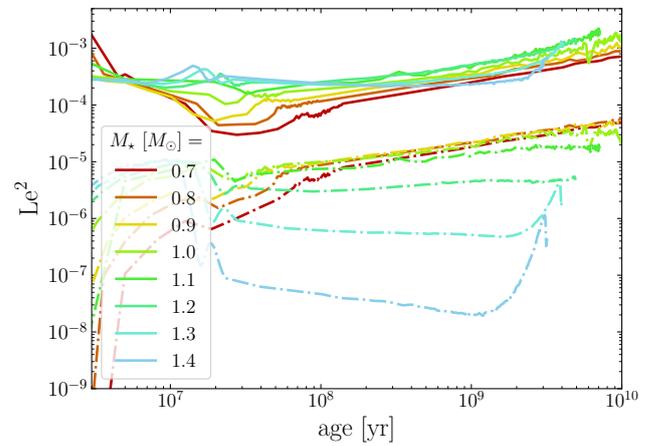


Fig. 4. Evolution of the Lehnert number squared over time, at the base (solid lines) and the top (dotted dashed lines) of the CZ, for various low-mass stars sorted from 0.7 to $1.4 M_{\odot}$. Slow initial rotation has been used here and a magnetostrophic balance has been assumed.

the mass of the host star. The quantity $\text{Ro}_t \hat{\sigma}_{\text{max}}$ has been calculated using orbital and stellar rotation periods (see Table B.1) for the pair (m, n) that minimises this quantity and thus maximises $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$. To calculate the Lehnert number squared, we have used the star’s rotation period and radius displayed in Table B.1, coupled with density, convective length and velocity given by our grid of STAREVOL models at the closest age and mass of the host star. For each system, Le^2 is evaluated at the base and the top of the CZ. Moreover, the magnetostrophic regime has been selected because it best reproduces the observed surface magnetic fields (see Figs. 1 and 2). As expected, the ratio $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ at the base is greater than at the top of the CZ, consistent with the relative magnitude of the large-scale magnetic field inside the convective envelope. Moreover, at the base of the CZ the higher the mass, the greater this ratio. On the contrary, we observe a drop in $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ at the top of the CZ for stars more massive than $1.2 M_{\odot}$, similar to what we notice in Fig. 4. More importantly, we point out that $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ is always smaller than unity, regardless of the mass of star and the position inside the stellar envelope. Only HAT-P-24 (b) may feature the ratio of forcings around unity within the error bar for $(m, n) = (2, 1)$ at the base of the CZ. Indeed, the rotation period of the star HAT-P-24 is nearly

¹ <http://www.exoplanet.eu>

² www.astro.keele.ac.uk/jkt/tepcat/tepcat.html

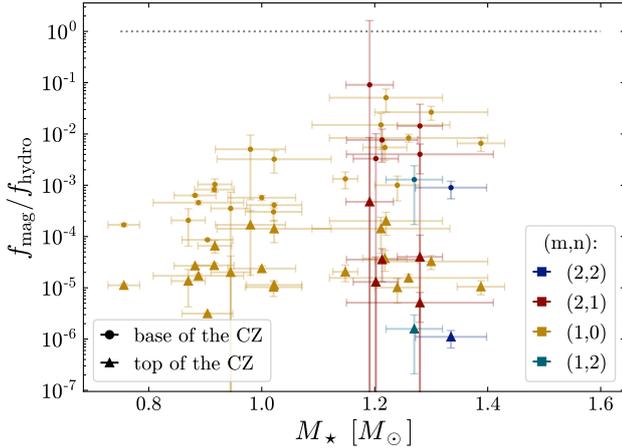


Fig. 5. Dependence of the ratio of the Lorentz forcing relative to the hydrodynamic forcing with respect to the mass of the host star for the selected star-planet systems (see Table B.1). The magnetic forcing term f_{mag} is estimated with the magnetostrophic balance at the base and the top of the CZ and a stellar model evolved with a slow initial rotation. The tidal frequency has been calculated with the pair (m, n) that minimises $\text{Ro}_t \hat{\sigma}_{\text{max}}$ and thus maximises $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$.

twice the orbital period of the planet HAT-P-24 b, which implies that Ro_t is very close to zero, thereby making $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ close to unity, despite the small value of Le^2 . It is worth noticing that Ogilvie (2009) and Lin & Ogilvie (2018) mentioned a significant impact of the magnetic field on non-wave like motions as soon as $\text{Le} > 0.1$. In our study, some star-planet systems (like HAT-P-13 and HD 149026) feature a Lehnert number greater than 10^{-1} and yet a ratio $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ far below unity. This stresses the fact that the Lehnert number is not the only quantity to come into play and that the relative amplitude of the tidal and rotation frequencies has to be considered to conclude on the impact of magnetism on the tidal forcing.

From the results of this section, we conclude that the tidal forcing arising from the Lorentz force remains small in comparison to a pure hydrodynamical forcing. This conclusion is important, as it stresses that adopting a Coriolis-driven tidal forcing is justified to study the propagation and dissipation of tidally-forced magneto-inertial waves in the convective envelope of low-mass stars, despite the presence of a large-scale, dynamo generated magnetic field, as was done in Wei (2016, 2018) and Lin & Ogilvie (2018).

3. The relative importance of viscous over Ohmic dissipation for magneto-inertial waves

In the previous section, we have demonstrated that the Lorentz force has a weak contribution to the tidal forcing of (magneto-) inertial waves. It can, however, affect their propagation (hence the name magneto-inertial waves) and dissipation as the Lorentz force acts on the wave-like part of the equation of motion and we have introduced the Ohmic diffusion in the induction equation (see Eqs. (5) and (4b), respectively). Wei (2016) studied the dissipation of these waves by turbulent friction and magnetic diffusion processes using a local Cartesian model of an isentropic convective region. He compared the importance of Ohmic versus viscous dissipations, especially at resonances. Varying the Lehnert number, Wei (2016) found that the transition from a viscous-dominated regime to a regime dominated by Ohmic dissipation occurs when the Lehnert number is greater than $\sim 10^{-4}$ – 10^{-3} ,

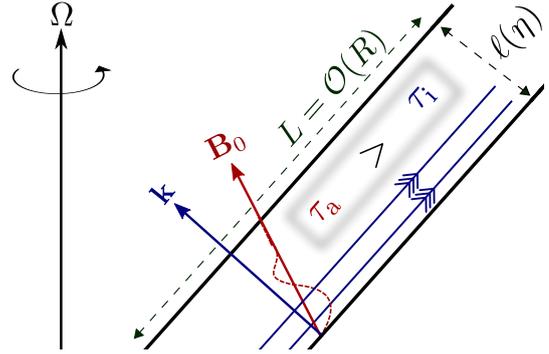


Fig. 6. Sketch of an inertial wave beam with a magnetic field (red arrow), an Alfvén wave (dashed red line) and an inertial wave propagating from the left to the right (blue arrows). The time for an Alfvén wave to transversely cross the wave beam of length ℓ ($\tau_i = \tau_\eta$), is greater than the time for an inertial wave to go through the wave beam of length $L \sim R$.

for average atomic Ekman and Prandtl numbers close to those expected in the Sun or in Jupiter. This led him to the conclusion that when Le is larger than 10^{-3} , magnetic effects on tidal dissipation should be taken into account.

This work has been taken up by Lin & Ogilvie (2018) in which they studied the propagation and the kinetic and magnetic energy dissipations of tidally forced magneto-inertial waves in a spherical shell. They showed that, at high Lehnert numbers, dissipation is no longer focused along the shear layers that are shaped by rotation and viscosity following attractors of characteristics as in the pure hydrodynamical case. Once again, they identified a critical Lehnert number that separates the regimes dominated by viscosity or by Ohmic dissipation. They expressed this critical Lehnert number with the help of characteristic timescales of ray tracing. Specifically, the width of an inertial wave beam ℓ is deduced by equating the magnetic diffusion timescale $\tau_\eta = \ell^2/\eta$ and the inertial wave propagation time $\tau_i = R/|V_g|$, where $|V_g| \sim \ell\Omega$ is the group velocity (see Fig. 6). Indeed, the higher the Ohmic diffusion (or the viscosity), the larger the spread of the inertial wave beam. Furthermore, hydrodynamical terms prevail over MHD ones when Alfvén waves (produced by the deformation of the magnetic field by the inertial flow) do not have time to distort the wave beam. In other words the hydrodynamical terms dominate when $\tau_a > \tau_i$ where $\tau_a = \ell/|V_a| \sim \text{Le}^{-1}\Omega^{-1}\ell/R$,

is the typical time for an Alfvén wave to transversely cross the wave beam (see Fig. 6). Using these heuristic considerations, Lin & Ogilvie (2018) have shown that the propagation of inertial waves is little influenced by a magnetic field as long as

$$\text{Le} \ll \text{Em}^{2/3},$$

with $\text{Em} = \eta/(2\Omega R^2)$ the magnetic Ekman number. This prediction has been inferred in the context of a low Pm. This condition is generally satisfied in solar-like stars. In the Sun, the atomic magnetic Prandtl number varies from 10^{-6} at the surface to 10^{-1} at the base of the CZ (Zeldovich 1983). When viscosity dominates, for instance in the core of massive stars (see Fig. 2 in Augustson et al. 2019), the same relationship holds with the viscous Ekman number Ek instead of Em .

In Fig. 7, the Lehnert number is illustrated as a function of stellar age, where the threshold defined in Lin & Ogilvie (2018) is included with atomic and turbulent magnetic diffusivities: $\text{Em}_{\text{ato}}^{2/3}$ and $\text{Em}_{\text{tur}}^{2/3}$ being the atomic and turbulent magnetic

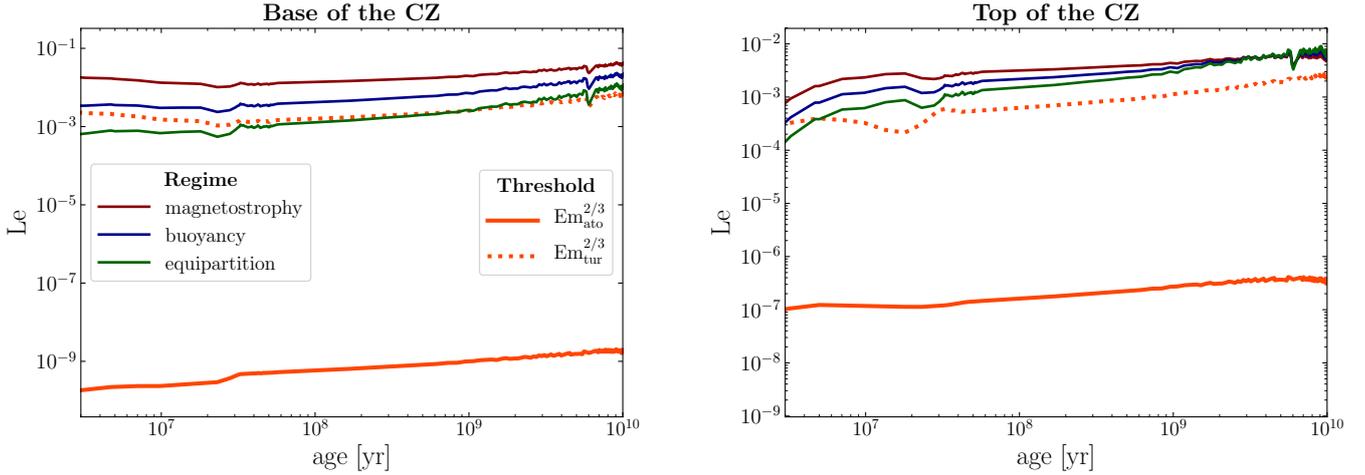


Fig. 7. Lehnert number at the base (*left panel*) and top (*right panel*) of the CZ versus the age of a $1 M_{\odot}$ star. Slow initial rotation has been used in both panels. The thresholds for which magnetic field impacts the propagation of inertial waves is estimated with different Ekman numbers and drawn in orange (see the legend).

Ekman numbers, respectively. The parameter Em_{ato} has been computed thanks to the Braginskii prescription for plasma diffusivities (Appendix B, [Braginskii 1965](#); [Augustson et al. 2019](#)) using the grid of STAREVOL models. The turbulent magnetic Ekman number (Em_{tur}) is derived assuming that the eddy-magnetic diffusivity takes the simple form: $\eta_{\text{tur}} = u_c l_c / 3$. In this approach, η_{tur} is equivalent to the eddy-viscosity that means a magnetic turbulent Prandtl number of the order of unity (see e.g. [Camargo & Tasso 1992](#)). We highlight that in both panels of Fig. 7, the threshold calculated with an atomic magnetic diffusivity is much lower than Le derived in the various regimes, by at least three order of magnitudes near the surface and six order of magnitude at the base of the CZ. Consequently, the Ohmic dissipation largely outbalances the viscous dissipation along the lifetime of a $1 M_{\odot}$ when taking Lin and Ogilvie’s threshold assessed with a magnetic atomic diffusivity η_{ato} . In contrast, the limit estimated with the turbulent magnetic Ekman number is of the same order of magnitude as the Lehnert number in the equipartition regime at the base of the CZ, whereas the threshold is slightly smaller than the Lehnert number curves at the top. Note that the turbulent magnetic Ekman number is close to the value of the magnetic Ekman number used in Lin & Ogilvie’s (previously quoted) paper for their simulations. This explains why the transition from an hydrodynamical to a fully magnetic regime is carried out at similar Lehnert number in their case and in ours when using Em_{tur} here (see Figs. 2–4 in [Lin & Ogilvie 2018](#)). By choosing an eddy-magnetic diffusivity, both Ohmic and viscous dissipations have to be taken into account in the dissipation calculation.

4. The impact of a smaller-scale magnetic field

The stellar dynamo is a multi-scale process. Indeed, large-scale and small-scale dynamos coexist inside a star’s CZ and produce magnetic fields at different length scales ([Brandenburg & Subramanian 2005](#); [Strugarek et al. 2013](#), and references therein). At the base of the CZ, the convective length scale computed by STAREVOL is about one tenth of the radius of the star and decreases drastically towards the top of the CZ ($\sim 10^{-4} R$ in our model). In Sect. 2.2, we have made the assumption that a dynamo-like magnetic field is the result of turbulent convective motions featured by the convective velocity at the base of the CZ,

associated to a relatively large-scale convective length. Then, we have used this dynamo-induced magnetic field to extrapolate a dipolar magnetic field near the surface of the star (see Eq. (10)). However, one can question the role of the small-scale dynamo fields on tidal excitation and dissipation throughout the convective envelope.

The dynamical tides will possibly interact with the smaller-scale magnetic field. Indeed, the scale of variation of dynamical tides along the inertial wave beam is of order R (Sect. 3), but the transverse length scale l of this beam is smaller. The balance between magnetic diffusion and inertial timescales (see also Sect. 3) leads to $l = \sqrt[3]{Em} R$ i.e. the transverse length scale of the beam varies from one hundredth to one tenth of the stellar radius when using typical values of the turbulent Ekman number (see Fig. 7). This orthogonal length scale is thus comparable to the length scale of the convection and of the corresponding magnetic field.

The scale of variation of the equilibrium tide is also of order R (see e.g. [Remus et al. 2012](#)). The small-scale components of the star’s magnetic field can collectively affect the large-scale flow of the equilibrium tide provided their correlations sustain a large-scale effective Lorentz force. We plot Le^2 associated with a small-scale magnetic field in Fig. 8 as a function of the normalised radius in the whole CZ. The typical length to be used in the expression of f_{mag} (Eq. (6)) is no longer R but l_c which represents the characteristic length of the fluctuating component of the dynamo-generated magnetic field. We redefine the Lehnert number here as $Le = B_{\text{dyn}} / (\sqrt{\mu_0 \rho} 2 \Omega l_c)$, where B_{dyn} (Table 1) depends upon l_c , which in turn varies inside the CZ. In the three regimes listed in Table 2, Le now depends only on the Rossby number (i.e. each scaling has to be multiplied by R/l_c). The profile of Le^2 is shown for magnetostrophic and equipartition regimes at different evolutionary stages. In both regimes, the Lehnert number follows the Rossby number tendency obtained in [Mathis et al. \(2016\)](#). Indeed, the authors pointed out that Ro always increases with radius, regardless of the changes in mass and stellar evolutionary phases. In the early stages of the $1 M_{\odot}$ star’s evolution (PMS and ZAMS), the probability of having a significant magnetic forcing e.g. $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}} > 1$ is weak at the base of the CZ ($Le^2 < 10^{-3}$), but becomes high near the surface ($Le^2 > 10$) based on the analyses of Sects. 2.5 and 2.6. The chances are even higher when the star is older (from the midpoint

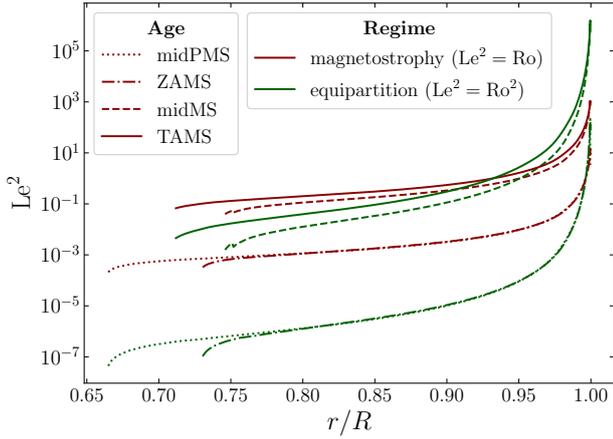


Fig. 8. Lehnert number squared against the normalised radius in the magnetostrophic (dark red) and equipartition (green) regimes, for a $1 M_{\odot}$ star. The reader is referred to the body of Sect. 4 for the new definition of Le that involves a small-scale magnetic field. The Lehnert number squared is plotted at different epochs: amid the pre-main sequence (midPMS; ~ 30 Myr), at zero-age main sequence (ZAMS; ~ 60 Myr), amid the main sequence (midMS; ~ 5.3 Gyr), and toward the end of the main sequence (TAMS; ~ 10.5 Gyr).

to the end of the MS) since Le^2 is already greater than 10^{-3} at the base of the CZ in both regimes.

From this analysis, we should keep in mind that small-scale magnetic fields can affect the equilibrium and dynamical tides. Indeed, Le^2 can be significantly enhanced near the surface of the star, a fortiori for all three regimes described in Table 1. This may change the results of Sect. 2.6, namely boost the effect of magnetism on tidal forcing so that f_{mag} is no longer negligible in front of f_{hydro} .

5. Conclusions and discussions

The influence of magnetism on tidal interaction along the evolution of low-mass stars has been investigated through its impact on tidal excitation and dissipation. We have first derived an analytic criterion to quantify the Lorentz contribution to the tidal forcing. The relative importance of Coriolis-like versus Lorentz-like forcings relies on the Lehnert number and characteristic frequencies of star-planet systems, i.e. the tidal frequency and the rotation frequency of the main body. With the help of simple scaling laws, we have estimated the magnitude of a dynamo-generated magnetic field near the tachocline. Then, a large-scale dipolar magnetic field has been inferred near the surface of the star from these scaling relationships. For this purpose, we have used grids of low-mass stars computed by the stellar evolution code STAREVOL (Amard et al. 2019). This allowed us to compare our magnetic field estimates at the surface with the observations of the surface dipolar magnetic field. We find that the magnetostrophic regime (resulting from the balance between Coriolis and Lorentz forces) gives a good estimate, within an order of magnitude, of the magnetic fields of PMS and MS stars when assuming a median or fast initial rotation. Nevertheless, improvements still need to be made in terms of magnetic scaling laws in order to better reproduce the observed magnetic fields of Vidotto et al. (2014) and See et al. (2017) (see Appendix B).

Subsequently, we have estimated the Lehnert number with these prescriptions for the stellar dynamo at the base and the top of the CZ. We have explored how it varies for different

stellar masses and initial rotation speeds as a function of time. In all cases, the Lehnert number is small compared to unity. This means that magnetism can play a role in tidal forcing only for small tidal to rotational frequency ratios. In practice, this condition is verified neither at the base nor at the top of the CZ when using the large-scale magnetic fields in the primary component of quasi-circular and coplanar star-planet systems. Although the ratio $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ increases with the mass of the host star until $1.2 M_{\odot}$ (see Fig. 5) and is greater at the base of the CZ, it remains below 1 for all the studied systems. Indeed, only specific and sharp enough resonances between the tidal and the rotational frequency can increase the $f_{\text{mag}}/f_{\text{hydro}}$ ratio. This statement is also valid for non-circular and non-coplanar systems, the tidal frequency being just a different combination of orbital and rotation frequencies. Eventually, one should note that all the selected systems (Table B.1) have a host star on the mid and late MS. But it should not change the fact that large-scale magnetic fields have little influence on the tidal excitation because Le^2 is even weaker for younger stars (as we have seen in Fig. 4).

In contrast, the dissipation of the dynamical tide is strongly affected by stellar magnetism. Indeed, we have shown that viscous dissipation is no longer the main process of energy dissipation. Ohmic dissipation is at least as important as viscous dissipation (see Fig. 7) in the whole CZ for a $1 M_{\odot}$ star as well as other low-mass stars. This means that a full MHD treatment is needed to analyse the propagation and dissipation of tidally-forced (magneto-) inertial waves inside the CZ of a low-mass star.

It can be added that whatever the energy mix distributed in the toroidal and poloidal components of the large-scale magnetic field at the surface (which is also variable over time Kochukhov et al. 2017), it does not change the main conclusions of our paper because these energies are comparable within an order of magnitude (See et al. 2015).

In Sect. 4, we have addressed the question of the effect of small-scale components of the dynamo-induced magnetic field on tidal interactions. We have pointed out that they are likely to play a role on both dynamical and equilibrium tides and consequently on the tidal forcing and dissipation. We first demonstrated that the transverse component of the typical length scale of the dynamical tide is commensurate with the convective mixing length in the bulk of the CZ. In this respect, it would also mean that the modelling of the friction applied by turbulent convection on the dynamical tides should go beyond an eddy viscosity model (Ogilvie & Lesur 2012) to incorporate magnetic effects. Then, we showed that the Lehnert number squared estimated with a small-scale magnetic field can be much greater than Le^2 calculated with a large-scale field. As a result, the impact of a small-scale dynamo induced magnetic field on tidal forcing could be not as negligible as the effect of a larger-scale magnetic field. Quantifying this impact now requires ab-initio modelling of tidal forcing in turbulent convective envelopes sustaining a small-scale dynamo.

Acknowledgements. We would like to thank the anonymous referee for the helpful comments and suggestions regarding our work. A. Astoul, K. Augustson, E. Bolmont, and S. Mathis acknowledge funding by the European Research Council through the ERC grant SPIRE 647383. The authors acknowledge the PLATO CNES funding at CEA/IRFU/DAP and IRAP. The authors further thank V. See for fruitful discussions and the use of his data. F. Gallet acknowledges financial support from a CNES fellowship. A. S. Brun acknowledges funding by ERC WHOLESUN 810218 grant, INSU/PNST, and CNES Solar Orbiter. This work has been carried out within the framework of the NCCR PlanetS supported by the Swiss National Science Foundation. This research has made use of NASA's Astrophysics Data System.

References

- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, *A&A*, **587**, A105
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., et al. 2019, *A&A*, **631**, A77
- Anderson, D. R., Barros, S. C. C., Boisse, I., et al. 2011, *PASP*, **123**, 555
- Anderson, D. R., Brown, D. J. A., Collier Cameron, A., et al. 2014, *MNRAS*, submitted [arXiv:1410.3449]
- Antia, H. M., Chitre, S. M., & Thompson, M. J. 2000, *A&A*, **360**, 335
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, *ARA&A*, **47**, 481
- Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2019, *ApJ*, **876**, 83
- Barker, A. J., & Ogilvie, G. I. 2010, *MNRAS*, **404**, 1849
- Basu, S. 2016, *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **13**, 2
- Beck, P. G., Mathis, S., Gallet, F., et al. 2018, *MNRAS*, **479**, L123
- Bell, C. P. M., Naylor, T., Mayne, N. J., Jeffries, R. D., & Littlefair, S. P. 2013, *MNRAS*, **434**, 806
- Benbakoura, M., Réville, V., Brun, A. S., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2019, *A&A*, **621**, A124
- Bolmont, E., Gallet, F., Mathis, S., et al. 2017, *A&A*, **604**, A113
- Bolmont, E., & Mathis, S. 2016, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **126**, 275
- Braginskii, S. I. 1965, *Rev. Plasma Phys.*, **1**, 205
- Brandenburg, A., & Subramanian, K. 2005, *Phys. Rep.*, **417**, 1
- Brown, D. J. A. 2014, *MNRAS*, **442**, 1844
- Brun, A. S., & Browning, M. K. 2017, *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **14**, 4
- Brun, A. S., García, R. A., Houdek, G., Nandy, D., & Pinsonneault, M. 2015, *Space Sci. Rev.*, **196**, 303
- Camargo, S. J., & Tasso, H. 1992, *Phys. Fluids B*, **4**, 1199
- Charbonneau, P. 2013, *Solar and Stellar Dynamos: Saas-Fee Advanced Course 39 Swiss Society for Astrophysics and Astronomy* (Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg), 39
- Charbonneau, P. 2014, *ARA&A*, **52**, 251
- Christensen, U. R., Holzwarth, V., & Reiners, A. 2009, *Nature*, **457**, 167
- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, **101**, 367
- Czesla, S., Salz, M., Schneider, P. C., Mittag, M., & Schmitt, J. H. M. M. 2017, *A&A*, **607**, A101
- Davidson, P. A. 2013, *Geophys. J. Int.*, **195**, 67
- DeRosa, M. L., Brun, A. S., & Hoeksema, J. T. 2012, *ApJ*, **757**, 96
- Donati, J. F., Catala, C., Landstreet, J. D., & Petit, P. 2006, in *ASP Conf. Ser.*, ed. R. Casini, 358, 362
- Donati, J.-F., & Landstreet, J. D. 2009, *ARA&A*, **47**, 333
- Donati, J.-F., Jardine, M. M., Gregory, S. G., et al. 2007, *MNRAS*, **380**, 1297
- Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010, *MNRAS*, **402**, 271
- Emeriau-Viard, C., & Brun, A. S. 2017, *ApJ*, **846**, 8
- Esposito, M., Covino, E., Desidera, S., et al. 2017, *A&A*, **601**, A53
- Ferraz-Mello, S., Tadeu dos Santos, M., Folonier, H., et al. 2015, *ApJ*, **807**, 78
- Finlay, C. C. 2008, in *Dynamos*, eds. P. Cardin, & L. Cugliandolo (Amsterdam: Elsevier), *Les Houches*, **88**, 403
- Folsom, C. P., Petit, P., Bouvier, J., et al. 2016, *MNRAS*, **457**, 580
- Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, *A&A*, **556**, A36
- Gallet, F., & Bouvier, J. 2015, *A&A*, **577**, A98
- Gallet, F., Bolmont, E., Mathis, S., Charbonnel, C., & Amard, L. 2017, *A&A*, **604**, A112
- Gandolfi, D., Hébrard, G., Alonso, R., et al. 2010, *A&A*, **524**, A55
- Ge, J., van Eyken, J., Mahadevan, S., et al. 2006, *ApJ*, **648**, 683
- Gilliland, R. L. 1986, *ApJ*, **300**, 339
- Goldreich, P., & Nicholson, P. D. 1989, *ApJ*, **342**, 1079
- Goodman, J., & Dickson, E. S. 1998, *ApJ*, **507**, 938
- Gough, D. O., & Thompson, M. J. 1990, *MNRAS*, **242**, 25
- Granata, V., Nascimbeni, V., Piotto, G., et al. 2014, *Astron. Nachr.*, **335**, 797
- Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016a, *A&A*, **589**, A22
- Guenel, M., Mathis, S., Baruteau, C., & Rieutord, M. 2016b, *ArXiv e-prints* [arXiv:1612.05071]
- Hébrard, G., Collier Cameron, A., Brown, D. J. A., et al. 2013, *A&A*, **549**, A134
- Hirano, T., Sanchis-Ojeda, R., Takeda, Y., et al. 2012, *ApJ*, **756**, 66
- Hut, P. 1980, *A&A*, **92**, 167
- Janson, M., Reffert, S., Brandner, W., et al. 2008, *A&A*, **488**, 771
- Jardine, M., & Unruh, Y. C. 1999, *A&A*, **346**, 883
- Jurčíšínová, E., Jurčíšin, M., Remecký, R., & Zalom, P. 2013, *Phys. Rev. E*, **87**, 043010
- Käpylä, P. J., Rheinhardt, M., Brandenburg, A., & Käpylä, M. J. 2019, *A&A*, submitted [arXiv:1901.00787]
- Kochukhov, O., Petit, P., Strassmeier, K. G., et al. 2017, *Astron. Nachr.*, **338**, 428
- Lagarde, N., Decressin, T., Charbonnel, C., et al. 2012, *A&A*, **543**, A108
- Landin, N. R., Mendes, L. T. S., & Vaz, L. P. R. 2010, *A&A*, **510**, A46
- Lanza, A. F., Damiani, C., & Gandolfi, D. 2011, *A&A*, **529**, A50
- Lehnert, B. 1954, *ApJ*, **119**, 647
- Lin, Y., & Ogilvie, G. I. 2018, *MNRAS*, **474**, 1644
- Line, M. R., Teske, J., Burningham, B., Fortney, J. J., & Marley, M. S. 2015, *ApJ*, **807**, 183
- Mancini, L., Esposito, M., Covino, E., et al. 2015, *A&A*, **579**, A136
- Mancini, L., Esposito, M., Covino, E., et al. 2018, *A&A*, **613**, A41
- Mathis, S. 2015, *A&A*, **580**, L3
- Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, *A&A*, **497**, 889
- Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., Gallet, F., & Le Poncin-Lafitte, C. 2016, *A&A*, **592**, A33
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, **799**, L23
- Maxted, P. F. L., Serenelli, A. M., & Southworth, J. 2015, *A&A*, **577**, A90
- Mayor, M., Queloz, D., Udry, S., & Halbwachs, J. L. 1997, in *IAU Colloq. 161: Astronomical and Biochemical Origins and the Search for Life in the Universe*, eds. C. Batalli Cosmovici, S. Bowyer, & D. Werthimer, 313
- Mohler-Fischer, M., Mancini, L., Hartman, J. D., et al. 2013, *A&A*, **558**, A55
- Ogilvie, G. I. 2005, *J. Fluid Mech.*, **543**, 19
- Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, **396**, 794
- Ogilvie, G. I. 2013, *MNRAS*, **429**, 613
- Ogilvie, G. I. 2014, *ARA&A*, **52**, 171
- Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, *MNRAS*, **422**, 1975
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, **610**, 477
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, **661**, 1180
- Perryman, M. 2018, *The Exoplanet Handbook* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Rebull, L. M., Wolff, S. C., & Strom, S. E. 2004, *AJ*, **127**, 1029
- Reiners, A. 2012, *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **9**, 1
- Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J. P. 2012, *A&A*, **544**, A132
- Schlichting, H. E. 2014, *ApJ*, **795**, L15
- Schneider, J., Dedieu, C., Le Sidaner, P., Savalle, R., & Zolotukhin, I. 2011, *A&A*, **532**, A79
- See, V., Jardine, M., Vidotto, A. A., et al. 2015, *MNRAS*, **453**, 4301
- See, V., Jardine, M., Vidotto, A. A., et al. 2017, *MNRAS*, **466**, 1542
- See, V., Matt, S. P., Folsom, C. P., et al. 2019, *ApJ*, **876**, 118
- Skumanich, A. 1972, *ApJ*, **171**, 565
- Southworth, J. 2011, *MNRAS*, **417**, 2166
- Spiegel, E. A., & Zahn, J. P. 1992, *A&A*, **265**, 106
- Strugarek, A., Brun, A. S., Mathis, S., & Sarazin, Y. 2013, *ApJ*, **764**, 189
- Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., Brun, A. S., & Nascimento, J. D. 2017, *Science*, **357**, 185
- Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, *ApJ*, **502**, 788
- Tregloan-Reed, J., Southworth, J., & Tappert, C. 2013, *MNRAS*, **428**, 3671
- Tregloan-Reed, J., Southworth, J., Burgdorf, M., et al. 2015, *MNRAS*, **450**, 1760
- Vidotto, A. A., Gregory, S. G., Jardine, M., et al. 2014, *MNRAS*, **441**, 2361
- Vilhu, O. 1984, *A&A*, **133**, 117
- Weber, E. J., & Davis, Jr., L. 1967, *ApJ*, **148**, 217
- Wei, X. 2016, *ApJ*, **828**, 30
- Wei, X. 2018, *ApJ*, **854**, 34
- Winn, J. N., Noyes, R. W., Holman, M. J., et al. 2005, *ApJ*, **631**, 1215
- Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2002, *A&A*, **386**, 222
- Wright, N. J., & Drake, J. J. 2016, *Nature*, **535**, 526
- Zahn, J. P. 1966a, *Ann. Astrophys.*, **29**, 313
- Zahn, J. P. 1966b, *Ann. Astrophys.*, **29**, 489
- Zahn, J. P. 1966c, *Ann. Astrophys.*, **29**, 565
- Zahn, J. P. 1975, *A&A*, **41**, 329
- Zahn, J. P. 1977, *A&A*, **500**, 121
- Zahn, J. P. 1989, *A&A*, **220**, 112
- Zahn, J. P., & Bouchet, L. 1989, *A&A*, **223**, 112
- Zanni, C., & Ferreira, J. 2013, *A&A*, **550**, A99
- Zeldovich, Y. B. 1983, *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach)

Appendix A: Magnetic field scaling laws

Several estimates of the magnetic field of stars can be derived thanks to energetic or force balances in the equations for heat transport (items ii and iii below) or for momentum (items i, and also ii and iii). Based on the MHD equations, and assuming stationarity, the Navier-Stokes equation of convective motions is

$$\frac{2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}{(1)} + \frac{\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}{(2)} = -\nabla p + \rho\nu\Delta\mathbf{u} + \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B} + \rho\mathbf{g}, \quad (\text{A.1})$$

where we have introduced \mathbf{g} the gravitational acceleration of the star. At the base of the CZ, we assume that the gradient and the velocity scale like $\nabla \approx l_c^{-1}$ and $\|\mathbf{u}\| \approx u_c$.

i Magnetostrophy

In this regime, the Lorentz force balances the Coriolis force i.e. (3) \approx (1) in Eq. (A.1). Thus,

$$\frac{B^2}{\mu_0 l_c} \approx \rho 2\Omega u_c \Rightarrow B \approx \sqrt{2\mu_0 \text{KE} \times \text{Ro}^{-1}}, \quad (\text{A.2})$$

where $\text{KE} = \rho u_c^2/2$ is the kinetic energy density associated with convective motions, and $\text{Ro} = u_c/(2\Omega l_c)$ the convective Rossby number.

ii Equipartition regime

In this regime we assume that the dynamo is efficient enough such that the convective kinetic energy density KE of the fluid is equivalent to the magnetic energy density $\text{ME} = B^2/(2\mu_0)$ i.e. (3) \approx (2) in Eq. (A.1):

$$\text{ME} \approx \text{KE} \Rightarrow \frac{B^2}{\mu_0} \approx \rho u_c^2 \Rightarrow B \approx \sqrt{2\mu_0 \text{KE}}. \quad (\text{A.3})$$

iii Buoyancy dynamo

Taking the curl of Eq. (A.1) and neglecting viscous and inertial forces we obtain

$$\rho(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B} \right) + \nabla \rho \times \mathbf{g}, \quad (\text{A.4})$$

assuming that the velocity is divergence-free. The buoyancy dynamo lies on the fact that each term in Eq. (A.4) has the same order of magnitude (Davidson 2013; Augustson et al. 2019). If the Rossby number is small enough, namely the rotation frequency of the body is larger than the convective frequency (the inverse of the convective turnover time), the convective flows become almost columnar, and aligned along the rotation axis. In the stellar evolution grids we use, this assumption is at least verified in the first half of the CZ from the base. As a consequence, two characteristic length scales appear, l_{\parallel} and l_{\perp} : these lengths are parallel and perpendicular to the rotation axis, respectively. A direct result is that $l_{\perp} < l_{\parallel}$, and we assume that $l_c \approx l_{\parallel}$ so that the convective Rossby number is now $\text{Ro} = u_c/(2\Omega l_{\parallel})$. It seems consistent with the high values of the convective length scale we find at the base of the envelope for different stars (several tenths as the CZ thickness). Thus, taking the characteristic scales of each quantities in Eq. (A.4):

$$\frac{\Omega u_c}{l_{\parallel}} \approx \frac{g}{l_{\perp}} \approx \frac{B^2}{\rho \mu_0 l_{\perp}^2}, \quad (\text{A.5})$$

where $\boldsymbol{\Omega} \nabla \approx \Omega/l_{\parallel}$ by definition of l_{\parallel} , otherwise $\nabla \propto l_{\perp}^{-1}$

because $l_{\perp} < l_{\parallel}$. Then, we set up $p_g = gu_c$ the buoyancy power (or rate of buoyancy work) per unit of mass. We can also express the magnetic energy in term of buoyancy power because of the equivalence of forces in Eq. (A.4). Therefore, in order to respect dimensional homogeneity, the magnetic energy per unit of mass satisfies the following relationship:

$$\frac{B^2}{\rho \mu_0} = l_{\parallel}^{2/3} p_g^{2/3}, \quad (\text{A.6})$$

where we are only using l_{\parallel} , again because $l_{\parallel} > l_{\perp}$ since we are looking for the large-scale dynamo magnetic field. From the equivalences in Eq. (A.5), we can express g as a function of Ω , u_c , l_{\parallel} and the energy by unit of mass $B^2/(\rho\mu_0)$:

$$g^2 = \frac{\Omega u_c}{l_{\parallel}} \frac{B^2}{\rho \mu_0}. \quad (\text{A.7})$$

Injecting Eq. (A.7) in $p_g^2 = (gu_c)^2$, and all of this in Eq. (A.6), one can find:

$$\left(\frac{B^2}{\rho \mu_0} \right)^2 = l_{\parallel} \Omega u_c^3. \quad (\text{A.8})$$

Considering that $\text{Ro} = u_c/(2\Omega l_{\parallel})$, Eq. (A.8) can be written finally in the form:

$$\frac{\text{ME}}{\text{KE}} = \text{Ro}^{-1/2}, \text{ or } B = \sqrt{2\mu_0 \text{KE} \times \text{Ro}^{-1/2}}. \quad (\text{A.9})$$

Appendix B: Limitations of the best scaling for $B_{\text{dip}}^{\text{obs}}$

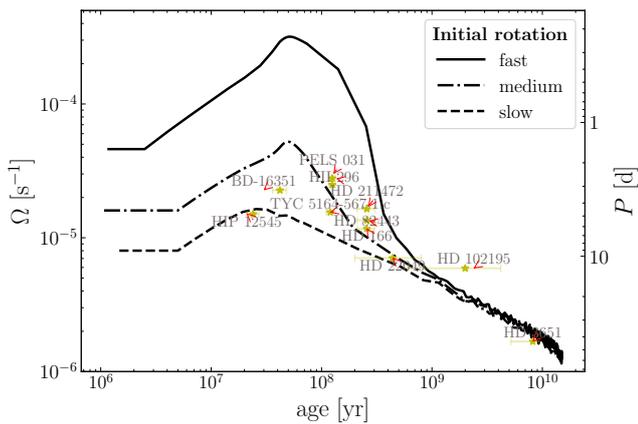
In Figs. 1 and 2, we observe that B_{dip} calculated with the magnetostrophic regime and a fast initial rotation at the top of the CZ is in adequacy with the observed dipolar magnetic field at the surface. We present here some limitations of this comparison. In Fig. B.1, we display the angular velocity (and the period in the vertical right axis) of the $0.9 M_{\odot}$ stars featured in Fig. 1 against their age, compared to the different rotational evolutions given by STAREVOL. The angular velocities are found in See et al. (2017) and references therein. They are obtained mainly through photometry while the age of the stars are mostly determined by the comparison between isochrones and colour-magnitude diagrams. Note that the error bars of the angular velocities are too small to be visible on the graph. We point out that the rotation periods of the stars seem to be in agreement with the slow or median rotation profiles provided by STAREVOL, unlike what we observed for the surface dipolar magnetic fields in Fig. 1. To some extent, the same assessment is made when displaying rotation versus time diagram for other low-mass stars (not presented here). There are several possible explanations for this result. The discrepancy could be first attributed to the simplicity of our dynamo-induced magnetic fields models. Then, it is possible that the metallicity affects the rotation evolution models as it has been demonstrated by Amard et al. (in prep.) (we remind the reader that the metallicity is fixed in Sect. 2.3 to the solar value). Furthermore, as we said in Sect. 2.4, this observation tends to be more nuanced with increasing data. As a result, we have to cautiously interpret the fact that B_{dip} estimated with the magnetostrophic regime and a fast initial rotation match the observed values of the dipolar magnetic field at the surface.

Table B.1. Star-planet systems with a quasi-circular and quasi-coplanar orbit, $e < 0.1$ and $|\lambda| < 30^\circ$ with e and λ the eccentricity and the sky-projected spin-orbit misalignment angle, respectively.

Systems	$M_\star [M_\odot]$	age [Gyr]	$R [R_\odot]$	P_o [d]	P_\star [d]	References
CoRoT-11 (b)	1.27 ± 0.05	2.0 ± 1.0	1.43 ± 0.033	$2.994325 \pm 2.1 \times 10^{-5}$	1.73 ± 0.22	1
HAT-P-3 (b)	0.917 ± 0.03	1.6 ± 1.3	0.827 ± 0.055	$2.899703 \pm 5.4 \times 10^{-5}$	20.2 ± 2.0	2
HAT-P-4 (b)	1.26 ± 0.14	$4.2^{+2.6}_{-0.6}$	1.27 ± 0.05	$3.0565114 \pm 2.8 \times 10^{-6}$	$14.0^{+1.0}_{-0.9}$	3
HAT-P-8 (b)	1.28 ± 0.04	3.4 ± 1.0	1.5 ± 0.06	$3.0763402 \pm 1.5 \times 10^{-6}$	$5.9^{+0.5}_{-0.4}$	3
HAT-P-9 (b)	1.28 ± 0.13	1.6 ± 1.4	1.4 ± 0.06	$3.922814 \pm 2 \times 10^{-6}$	5.61 ± 0.78	4
HAT-P-13 (b)	1.22 ± 0.1	5.0 ± 0.8	1.28 ± 0.079	$2.916243 \pm 3 \times 10^{-6}$	$47.4^{+14.1}_{-8.9}$	3
HAT-P-16 (b)	1.218 ± 0.039	2.0 ± 0.8	1.289 ± 0.066	$2.77596 \pm 3 \times 10^{-6}$	$16.0^{+4.1}_{-2.8}$	3
HAT-P-20 (b)	0.756 ± 0.028	6.7 ± 3.8	0.867 ± 0.033	$2.875317 \pm 4 \times 10^{-6}$	14.48 ± 0.02	5, 6
HAT-P-22 (b)	0.916 ± 0.035	12.4 ± 2.6	1.08 ± 0.058	$3.21222 \pm 9 \times 10^{-6}$	28.7 ± 0.4	2
HAT-P-24 (b)	1.191 ± 0.042	2.8 ± 0.6	1.242 ± 0.067	$3.35524 \pm 7 \times 10^{-6}$	6.67 ± 0.68	4
HAT-P-27 (b)	0.945 ± 0.035	4.4 ± 2.6	1.055 ± 0.036	$3.0395803 \pm 1.5 \times 10^{-6}$	17.8 ± 7.8	7
HAT-P-36 (b)	1.022 ± 0.049	6.6 ± 1.8	1.264 ± 0.071	$1.327347 \pm 3 \times 10^{-6}$	15.3 ± 0.4	8
HATS-2 (b)	0.882 ± 0.037	9.7 ± 2.9	1.168 ± 0.03	$1.354133 \pm 1 \times 10^{-6}$	24.98 ± 0.04	9, 10
HD 149026 (b)	1.3 ± 0.1	2.0 ± 0.8	0.718 ± 0.065	$2.8758916 \pm 1.4 \times 10^{-6}$	$10.0^{+1.2}_{-1.0}$	3
HD 209458 (b)	1.148 ± 0.022	4.0 ± 2.0	1.38 ± 0.018	$3.52472 \pm 2.82 \times 10^{-5}$	14.4 ± 2.1	20, 21
KELT-1 (b)	1.335 ± 0.063	1.75 ± 0.25	$1.15^{+0.1}_{-0.16}$	$1.217514 \pm 1.5 \times 10^{-5}$	1.35 ± 0.04	11
Kepler-8 (b)	1.213 ± 0.063	3.84 ± 1.5	1.419 ± 0.058	$3.52254 \pm 5 \times 10^{-5}$	7.5 ± 0.3	12
TrES-2 (b)	0.98 ± 0.062	5.1 ± 2.7	1.189 ± 0.025	$2.4706133738 \pm 1.87 \times 10^{-8}$	$48.7^{+56.0}_{-17.8}$	3
TrES-4 (b)	1.388 ± 0.042	2.9 ± 0.3	1.706 ± 0.056	$3.5539268 \pm 3.2 \times 10^{-6}$	$10.7^{+1.7}_{-1.3}$	3
WASP-5 (b)	1.0 ± 0.06	3.0 ± 1.4	1.171 ± 0.057	$1.6284246 \pm 1.3 \times 10^{-6}$	16.2 ± 0.4	9
WASP-6 (b)	0.888 ± 0.08	11.0 ± 7.0	$1.224^{+0.051}_{-0.052}$	$3.361006 \pm 3.5 \times 10^{-6}$	23.8 ± 0.15	15
WASP-14 (b)	1.211 ± 0.122	0.75 ± 0.25	$1.281^{+0.075}_{-0.082}$	$2.2437661 \pm 1.1 \times 10^{-6}$	23.68 ± 6.35	4
WASP-16 (b)	1.022 ± 0.101	2.3 ± 2.2	1.008 ± 0.071	$3.1186009 \pm 1.31 \times 10^{-5}$	$33.8^{+8.9}_{-6.1}$	3
WASP-18 (b)	1.24 ± 0.04	0.63 ± 0.53	1.165 ± 0.077	$0.9414518 \pm 4 \times 10^{-7}$	5.6 ± 1.11	4
WASP-19 (b)	0.904 ± 0.045	11.5 ± 2.7	1.395 ± 0.025	$0.78884 \pm 3 \times 10^{-7}$	11.76 ± 0.09	9, 16
WASP-20 (b)	1.202 ± 0.04	$7.0^{+1.0}_{-2.0}$	1.459 ± 0.057	$4.8996285 \pm 3.4 \times 10^{-6}$	$8.1^{+3.0}_{-2.7}$	3
WASP-28 (b)	1.021 ± 0.05	$5.0^{+2.0}_{-3.0}$	1.213 ± 0.042	$3.40883 \pm 6 \times 10^{-6}$	$13.0^{+2.3}_{-1.8}$	3
WASP-52 (b)	0.87 ± 0.03	0.4 ± 0.3	1.27 ± 0.03	$1.7497798 \pm 1.2 \times 10^{-6}$	11.8 ± 3.3	18
WASP-111 (b)	1.5 ± 0.11	2.6 ± 0.6	1.442 ± 0.094	$2.310965 \pm 3.4 \times 10^{-6}$	8.4 ± 0.7	19

Notes. All the planets are hot Jupiters, denoted (b), and characterised by an orbital period P_o found in the <http://exoplanet.eu/> catalogue, along with the age, the radius R , and the mass M_\star of the host star. The errors of these parameters (coming from the catalogue) generally refer to 1σ errors (Schneider et al. 2011). The references are for the stellar rotation period P_\star .

References. (1) Gandolfi et al. (2010); (2) Mancini et al. (2018); (3) Brown (2014); (4) Lanza et al. (2011); (5) Esposito et al. (2017); (6) Granata et al. (2014); (7) Anderson et al. (2011); (8) Mancini et al. (2015); (9) Maxted et al. (2015); (10) Mohler-Fischer et al. (2013); (11) Ferraz-Mello et al. (2015); (12) Hirano et al. (2012); (15) Tregloan-Reed et al. (2015); (16) Tregloan-Reed et al. (2013); (18) Hébrard et al. (2013); (19) Anderson et al. (2014); (20) Winn et al. (2005); (21) Czesla et al. (2017).



Troisième partie

Impact de la rotation différentielle sur l'interaction de marée

PROFILS DE ROTATION DANS LES ÉTOILES DE FAIBLE MASSE ET LES PLANÈTES GÉANTES GAZEUSES

Sommaire

5.1 Dans les étoiles de faible masse	95
5.1.1 État de l'art	95
5.1.2 Rotation différentielle et simulations numériques	97
5.2 Profil de rotation dans Jupiter et Saturne	100

5.1 Dans les étoiles de faible masse

5.1.1 État de l'art

Comme on l'a évoqué en introduction, le Soleil présente un gradient de rotation qui dépend principalement de la latitude, dans son enveloppe convective et à la surface, avec un faible gradient radial (voir p.e. les revues de [Schou et al., 1998](#); [Thompson et al., 2003](#)). Ces découvertes ont été rendues possibles grâce à la technique d'héliosismologie, c'est à dire l'analyse des modes d'oscillations acoustiques (aussi appelés modes p) et de leur séparation en fréquence du fait de l'accélération de Coriolis, à partir de laquelle on peut déduire les propriétés de la rotation interne d'une étoile. Ce profil de rotation devient quasiment uniforme dans la zone radiative interne jusqu'à $0.2 R_{\odot}$ ([Couvidat et al., 2003](#)), avec des incertitudes sur la rotation du cœur, qui selon certaines études tournerait quatre fois plus vite que la zone radiative (voir par exemple [García et al., 2007](#); [Fossat et al., 2017](#)). Si l'on connaît bien le profil de rotation interne du Soleil, il n'en est pas de même pour les autres étoiles de faible masse. Les avancés récentes dans le domaine de l'astérosismologie et le suivi des tâches stellaires par effet Doppler ont néanmoins permis de contraindre le profil de rotation des enveloppes convectives des étoiles de type solaire ([Benomar et al., 2018](#)), et des étoiles analogues au Soleil qui présentent un taux de rotation moyen comparable à celui du Soleil ([Bazot et al., 2019](#)). Ces dernières possèdent une rotation différentielle latitudinale de surface très proche de celle observée à la surface du Soleil. Par contre, parmi les 40 étoiles de type solaire sélectionnées dans la première étude, les mieux contraintes possèdent un gradient de surface plus fort que celui du Soleil. Plus précisément, les couches situées à l'équateur tournent deux fois plus vite que celles situées aux latitudes moyennes (à une latitude de $\sim 45^{\circ}$), ce qui équivaut à une magnitude en cisaillement de 50%, tandis que celle du Soleil n'est que de 11% prise aux mêmes latitudes (p.e. en utilisant les valeurs de [García et al., 2007](#)). La magnitude du contraste de la rotation différentielle latitudinale (aussi appelée dans la suite cisaillement latitudinal) prise entre l'équateur et la latitude d'angle $\Theta = \pi/2 - \theta$ (où θ est la colatitude) et normalisée par la fréquence de rotation de l'équateur Ω_{eq} , se définit comme (p.e. [Barnes et al., 2005](#); [Brun et al., 2017](#)) :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{\text{eq}}} = \frac{\Omega_{\text{eq}} - \Omega_{\Theta}}{\Omega_{\text{eq}}}. \quad (5.1)$$

On définit parfois ce contraste en utilisant la fréquence de rotation au pôle $\Omega_{\text{pôle}}$ (p.e. [Barnes et al., 2017](#); [Benomar et al., 2018](#)), mais cette dernière reste plus difficilement calculable, car la moyenne azimutale et temporelle du flot à cette latitude est mal définie (du fait d'importantes fluctuations), tant dans les observations que dans les simulations numériques ([Thompson et al., 2003](#); [Brun et al., 2017](#)). Un biais observationnel ne peut pas être exclu pour expliquer les forts cisaillements observés, puisque les cisaillements plus faibles sont moins facilement détectables. C'est aussi le cas des profils de rotation anti-solaires, c'est à dire lorsque le pôle tourne plus rapidement que l'équateur. En effet, on s'attend à ce que ce type de rotation se développe pour des rotateurs lents, tandis qu'un profil de rotation de type solaire est attendu pour des rotateurs plus rapides, conformément aux résultats donnés par les simulations 3D qui modélisent les mouvements convectifs dans une sphère ([Gastine et al., 2013](#); [Brun et al., 2017](#)). Pour des étoiles en rotation très rapides (de deux à six fois plus rapides que le Soleil), les simulations 3D montrent que la morphologie des profils de rotation n'est plus de type-solaire (conique) avec une dépendance en latitude, mais présente plutôt un profil de rotation cylindrique, c'est à dire avec une dépendance principale à la distance à l'axe de rotation ([Ballot et al., 2007](#); [Hotta & Yokoyama, 2011](#); [Gastine et al., 2013](#)). Ceci dit les études observationnelles ont encore du mal à retrouver des profils de rotation dits cylindriques (voir en particulier [Benomar et al., 2018](#)), et les simulations magnétohydrodynamiques à reproduire des magnitudes de cisaillement aussi fortes que celles observées dans certaines étoiles. Cela pourrait être provoqué par le transport de moment cinétique vers les petites échelles d'écoulement dans les simulations, qui tend à diminuer, par dissipation turbulente, le gradient de rotation ([Hotta et al., 2016](#)). Le contraste de cisaillement semble aussi lié à la masse ou du moins à la température effective de l'étoile comme le montre l'étude de [Barnes et al. \(2017\)](#) qui traquent les tâches stellaires à l'aide des techniques d'imagerie Doppler dans des étoiles de type M. Comme on le voit en figure 5.1, le cisaillement en surface est d'autant plus important que la température effective de surface de l'étoile est importante, ce qui revient à des cisaillements d'autant plus importants que l'étoile est massive et jeune. Pour les étoiles de type M, la rotation différentielle est très faible (on est proche de la rotation solide comme observé dans les simulations MHD 3D de [Browning, 2008](#)), alors que les étoiles de type F présentent un gradient de rotation plus fort que celui du Soleil (ce qui est aussi observé dans les simulations MHD 3D de [Augustson et al., 2012](#)). Par ailleurs, quelques études se sont attachées à contraindre l'amplitude de la rotation différentielle radiale dans les étoiles entre la base et le haut de l'enveloppe convective. C'est le cas de l'étude de [Benomar et al. \(2015\)](#), qui a montré que la différence de rotation entre les zones radiative et convective des étoiles de type F et G, avec l'hypothèse d'une rotation uniforme dans ces zones, ne devait pas être supérieure à 2, et de celle de [Nielsen et al. \(2017\)](#) qui montre que le taux de rotation interne ne diffère pas dans l'enveloppe de plus de $\pm 30\%$ environ dans des étoiles de type solaire. Comme dans le Soleil, le gradient de rotation radial dans les enveloppes convectives semblerait donc moindre par rapport au gradient latitudinal.

Soulignons enfin qu'il est possible de comprendre de manière détaillée les processus physiques à l'origine de la rotation différentielle dans les enveloppes convectives stellaires, soit dans un cadre hydrodynamique ([Brun et al., 2017](#), on invoque alors les flots méridiens, les Reynolds stresses et la viscosité effective) ou dans un cadre MHD ([Varela et al., 2016](#), on évalue alors en plus le couple de Lorentz associé au champ moyen axisymétrique et les Maxwell stresses associés aux fluctuations du champ). Dans le cas de la rotation rapide, l'accélération de Coriolis conduit la rotation différentielle à devenir cylindrique, suivant ainsi le théorème de Taylor-Proudman qui montre qu'en présence de rotation rapide, les flots deviennent indépendants de la coordonnée le long de l'axe de rotation. La présence ou non d'une tachocline, zone de fort cisaillement, s'avère aussi très importante pour la dynamique et le magnétisme des enveloppes convectives des étoiles de type solaire ([Browning et al., 2006](#); [Brun et al., 2011](#)).

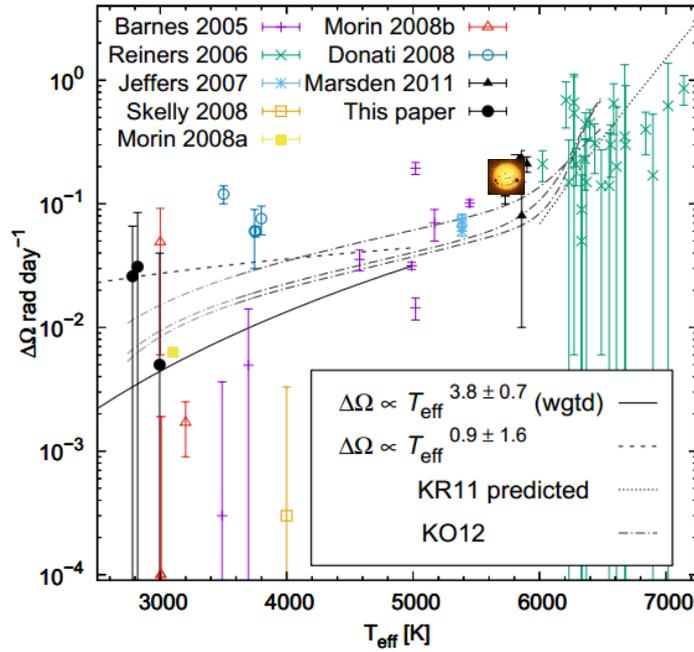


FIGURE 5.1: [Adapté de Barnes et al. (2017)]. Magnitude du cisaillement (en radians par jours) définie entre l'équateur et le pôle en fonction de la température effective d'étoiles de faible masse. Pour comparaison, la vignette jaune donne la magnitude de cisaillement du Soleil.

5.1.2 Rotation différentielle et simulations numériques

5.1.2.1 Des lois d'échelle pour contraindre le profil de rotation différentielle

De nombreuses études se sont données pour objectif d'établir des lois d'échelle qui permettraient de contraindre la rotation différentielle. On peut par exemple citer celle de Donahue et al. (1996) qui met en évidence une des premières expressions reliant contraste latitudinal et période de rotation dans un large échantillon d'étoiles de la séquence principale, et celle de Barnes et al. (2005) qui exprime plutôt ce contraste en fonction de la température effective de l'étoile. Les simulations 3D d'étoiles de type solaire ont aussi permis de trouver des lois échelle en fonction de la masse et de la rotation (voir Varela et al., 2016; Brun et al., 2017, dans un cadre MHD et hydrodynamique respectivement). Plus particulièrement, les études de Brun et al. (2015, 2017) ont contraint le cisaillement en fonction du nombre de Rossby fluide de l'enveloppe convective. Cette quantité se définit comme $R_{of} = v_{MLT}/(2\Omega R)$, où R et Ω sont le rayon et la fréquence de rotation moyennes de l'étoile, et où v_{MLT} est la vitesse convective dans l'enveloppe stellaire déterminée à partir de la théorie de la longueur de mélange (voir p.e. Augustson et al., 2012) :

$$v_{MLT} \propto \left(\frac{L}{\rho_{base} R^2} \right)^{1/3} \quad (5.2)$$

avec L la luminosité de l'étoile, ρ_{base} la densité à la base de la zone convective. R_{of} ne doit pas être confondu avec le nombre de Rossby dit stellaire (ou convectif), caractérisé à l'aide du temps de retournement convectif, et utilisé dans les chapitres précédents sur le magnétisme. Les lois d'échelle d'évolution stellaire (Kippenhahn & Weigert, 1994) permettent d'exprimer la luminosité, le rayon, et la densité en fonction de la masse de l'étoile M de sorte à ce que $R_{of} \propto M^{1.7}/\Omega$ (Brun et al., 2017). En particulier, Brun et al. (2017) calibrent cette loi avec les simulations 3D obtenues à l'aide du code ASH (Clune et al.,

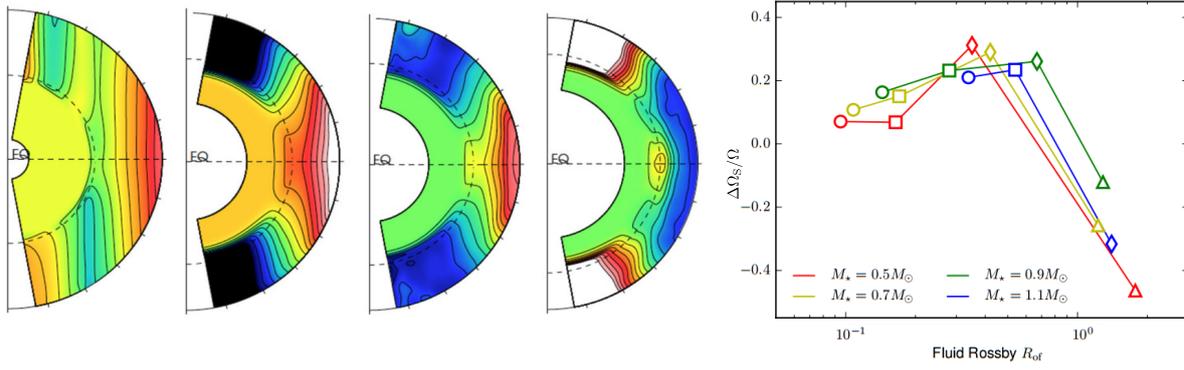


FIGURE 5.2: *Gauche* : [Brun et al. (2015)]. Profils de rotation $\Omega(r, \Theta)$ pour différentes masses et nombre de Rossby fluide d'une étoile de faible masse. *De gauche à droite* : la masse et la rotation moyenne de l'étoile valent (i) $0.5 M_{\odot}$ et $5 \Omega_{\odot}$, (ii) $0.9 M_{\odot}$ et $3 \Omega_{\odot}$, (iii) $0.9 M_{\odot}$ et Ω_{\odot} , (iv) $1.1 M_{\odot}$ et Ω_{\odot} . Les couleurs rouges et blanches symbolisent une rotation rapide, tandis que les couleurs noires et bleues correspondent à une rotation des couches concernées plus lente. *Droite* : [Brun et al. (2017)]. Contraste de cisaillement entre l'équateur et la latitude 60° , normalisé par la rotation de l'étoile, en fonction du nombre de Rossby fluide de l'étoile. Le code des symboles est : \circ : $5 \Omega_{\odot}$, \square : $3 \Omega_{\odot}$, \diamond : Ω_{\odot} , \triangle : modèle 'S' (pour "slow rotation" : $\Omega_{\odot}/2$ pour $0.9 M_{\odot}$, $\Omega_{\odot}/4$ pour $0.7 M_{\odot}$ et $\Omega_{\odot}/8$ pour $0.5 M_{\odot}$).

1999) :

$$R_{\text{of}} = 0.89 \left(\frac{\Omega_*}{\Omega_{\odot}} \right)^{0.82 \pm 0.05} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{1.53 \pm 0.22}. \quad (5.3)$$

Dans cette extrapolation, la constante de proportionnalité représente le nombre de Rossby fluide du Soleil $R_{\text{of}, \odot} = 0.89$, calibrée à l'aide des simulations numériques. Les valeurs du nombre de Rossby fluide permettent de contraindre les trois profils de rotation différentielle :

- un profil de rotation conique solaire tel que $\Delta\Omega/\Omega \gtrsim 0.3$ pour : $0.3 < R_{\text{of}} < 0.9$,
- un profil de rotation cylindrique tel que $|\Delta\Omega/\Omega| \ll 1$ pour : $R_{\text{of}} \lesssim 0.3$, (5.4)
- un profil de rotation conique anti-solaire tel que $\Delta\Omega/\Omega < 0$ pour : $R_{\text{of}} > 1$.

Ces profils sont retrouvés à l'aide de simulations 3D comme celles de Brun et al. (2015, 2017), et ils sont illustrés en figure 5.2, panneau de gauche. On y voit des coupes méridiennes de l'enveloppe convective d'étoiles de faible masse (type spectral K et G) possédant différents rapports d'aspect en masse et en rayon et présentant, de gauche à droite, un profil de rotation de type cylindrique, deux profils de rotation coniques de type solaire (avec un gradient de rotation moins important pour le troisième profil), et enfin un profil de rotation de type anti-solaire. Dans le panneau de droite de la figure 5.2, est indiqué le contraste de cisaillement

$$\Delta\Omega_S = \Omega_{\text{eq}} - \Omega(\Theta = 60^{\circ}), \quad (5.5)$$

pour différentes simulations d'étoiles, et notamment celles représentées dans le panneau de gauche, en fonction du nombre de Rossby fluide (Eq. 5.3). On retrouve bien le fait que les rotateurs les plus rapides ($\Omega = 5 \Omega_{\odot}$) exhibent un profil de rotation de type cylindrique, tandis que les plus lents (modèle 'S') affichent des profils de rotation anti-solaire pour les quatre masses étudiées. Pour des rotations intermédiaires, la masse joue un rôle déterminant sur le profil de rotation. On précise que ces simulations, à l'heure actuelle, ne permettent pas de retrouver un profil de rotation solaire pour des étoiles de $1 M_{\odot}$ et $1 \Omega_{\odot}$ lorsque la turbulence est élevée (c'est pourquoi ces modèles ne sont pas représentés). Ce problème semblerait lié à une différence d'amplitude entre les vitesses convectives obtenues dans les simulations numériques globales d'étoiles de type solaire et les vitesses convectives issues des observations héliosismiques (Hanasoge et al., 2010, 2012). Néanmoins, ces désaccords pourraient être résolus en augmentant

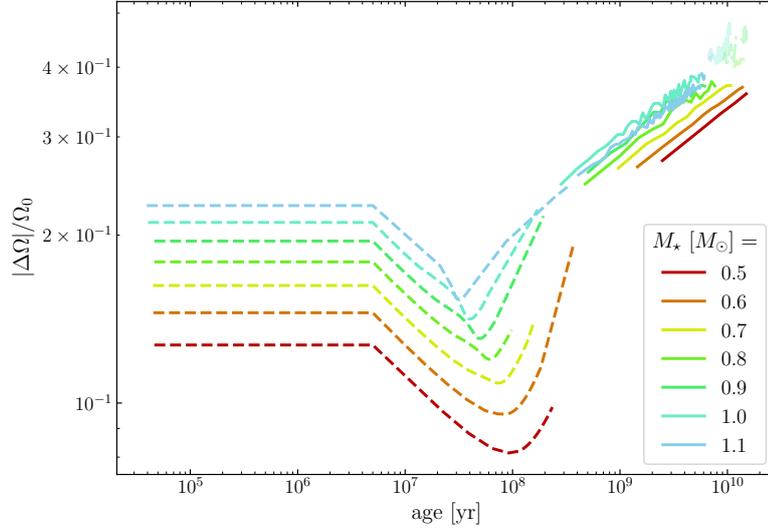


FIGURE 5.3: [Astoul et al. in prep.]. Contraste de cisaillement entre l'équateur et le pôle, normalisé par la rotation au pôle, en fonction de l'âge d'étoiles de type spectral K et G. Le critère (5.4) permet d'identifier des étoiles présentant un profil de rotation de type cylindrique (*traits pointillés*), solaire (*traits pleins*), et anti-solaire (*traits atténués*). Les "trous" dans les courbes reflètent simplement le faible échantillonnage dans les grilles fournies par STAREVOL à certains âges pour lesquels le découpage en terme de profil de rotation empêche l'extrapolation.

la valeur du nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ dans les simulations numériques, où ν est la viscosité cinématique et κ la diffusivité thermique. À l'aide des modèles simulés d'étoiles K et G, Brun et al. (2017) extrapolent une loi d'échelle qui relie $\Delta\Omega_S$ avec la masse et la rotation moyenne de l'étoile (ou le nombre de Rossby fluide de l'étoile), de la manière suivante :

$$|\Delta\Omega_S| = \Delta\Omega_{S,\odot} \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{0.73 \pm 0.39} \left(\frac{\Omega}{\Omega_\odot}\right)^{0.66 \pm 0.10}, \quad (5.6)$$

avec $\Delta\Omega_{S,\odot} \sim 0.3$ pour le Soleil (calibré avec les valeurs de García et al., 2007).

5.1.2.2 Évolution paramétrique de la rotation différentielle à l'aide de STAREVOL

À l'aide du code d'évolution stellaire STAREVOL, utilisé au chapitre précédent (voir aussi Amard et al., 2019), on peut faire l'exercice d'estimer le nombre de Rossby fluide tel que défini par (Brun et al., 2017, équation 5.3) pour différentes masses et stades évolutifs des étoiles de type spectral G et K. On prédit ainsi, pour les trois critères listés plus hauts en terme de nombre de Rossby fluide (Eqs. (5.4)), le profil de rotation différentielle attendu. J'ai tracé en figure 5.3, la valeur absolue du contraste de cisaillement entre l'équateur et le pôle $|\Delta\Omega|$, normalisée à la fréquence de rotation du pôle Ω_0 . Il a été estimé grâce au contraste de cisaillement de "simulation" $|\Delta\Omega_S|$ définis en équation (5.6), en utilisant la relation $|\Delta\Omega| = 4/3|\Delta\Omega_S|$, étant donné un profil de rotation différentielle de la forme

$$\Omega(\theta) = \Omega_0 + \Delta\Omega \sin^2 \theta, \quad (5.7)$$

où on rappelle que θ désigne la colatitude. Ce profil de rotation est souvent utilisé pour modéliser en première approche la rotation différentielle des étoiles de type solaire (p.e. Guenel et al., 2016a; Barnes

et al., 2017). Dans la mesure où STAREVOL ne prend pas en compte la rotation différentielle latitudinale (ou cylindrique) et radiale dans les régions convectives, la fréquence de rotation donnée dans les grilles d'évolution est une rotation moyenne, qui correspond pour une étoile de $1 M_{\odot}$ à l'âge du Soleil à peu ou prou à la fréquence de rotation à une colatitude de 60° (équivalent à 440 nHz à une latitude de 30° , voir p.e. García et al., 2007). Pour obtenir des fréquences de rotation au pôle pour chaque étoile, les fréquences de rotation moyenne Ω sont ainsi mises à l'échelle de la manière suivante :

$$\Omega_0 = \frac{\Omega}{1 + \frac{3}{4}\chi_{\odot}}, \quad (5.8)$$

en introduisant $\chi = \Delta\Omega/\Omega_0$, et $\chi_{\odot} \simeq 0.5$ pour le Soleil en supposant une rotation de 38 jours au pôle (Stenflo, 1990). La relation (5.8) a été tirée du profil de rotation adopté en Eq. (5.7) pour $\theta = 60^{\circ}$. En calculant le nombre de Rossby fluide donné par l'équation (5.3) pour chaque étoile le long de sa vie, où l'on utilise les valeurs de la masse et de la fréquence de rotation moyenne du Soleil, on peut circonscrire les différents profils de rotation grâce au critère (5.4). On s'aperçoit alors grâce à la figure 5.3, que le profil de rotation varie au cours de la vie d'une étoile, avec une dépendance forte au stade évolutif de l'étoile, et une dépendance plus faible à la masse de l'étoile. On peut ainsi prédire

- un profil de rotation cylindrique pour les étoiles en pré-séquence principale, ce qui se comprend d'autant mieux que les étoiles sont en rotation rapide pendant cette période avant d'être freinées par leur vent magnétisé en séquence principale (voir section 3.1 et, p.e. Gallet & Bouvier, 2013, 2015) ;
- un profil de rotation conique de type solaire en séquence principale, cohérent avec une fréquence de rotation moins importante ;
- un profil de rotation de type anti-solaire en fin de séquence principale pour des masses $M \geq 0.8 M_{\odot}$, lorsque l'étoile a été suffisamment décélérée.

On imagine que, par continuité, ces résultats sont aussi valables au début de la phase des sous-géantes pour toutes les masses de $0.5 M_{\odot}$ à $1.1 M_{\odot}$. Ces résultats, principalement liés à l'évolution de la rotation de surface dans les étoiles (Gallet & Bouvier, 2013, 2015; Amard et al., 2019), sont par ailleurs en accord avec ceux obtenus grâce aux simulations 3D d'étoiles de type solaire (p.e., Gastine et al., 2013; Brun et al., 2017; Beaudoin et al., 2018). Néanmoins, de récentes simulations numériques magnétohydrodynamiques 3D (Brun, Strugarek et al. in prep.), dans la continuité des travaux hydrodynamiques de Brun et al. (2017), semblent montrer que l'ajout du magnétisme a un fort impact dans le cas des rotateurs rapides en rotation différentielle cylindrique, en atténuant l'amplitude du gradient de la vitesse angulaire. Si ce point est confirmé, cela pourrait expliquer la difficulté des détections observationnelles de ce type de rotation dans les étoiles (p.e. Benomar et al., 2018, dans "supplementary material").

5.2 Profil de rotation dans Jupiter et Saturne

Comme pour les étoiles de type solaire, des gradients de rotation sont aussi détectés dans l'enveloppe convective des planètes géantes gazeuses de notre système solaire, Jupiter et Saturne, et on pourrait s'attendre à ce que ce soit aussi le cas dans les exoplanètes de type Jupiter-chaud, même si à ce jour nous avons peu de mesures directes de la rotation différentielle dans ces planètes. Les missions spatiales Cassini (NASA/ESA) et Juno (NASA), dont l'objectif est de sonder les géantes gazeuses Saturne et Jupiter respectivement ainsi que leurs satellites, ont révélé la complexité de la structure interne de ces planètes en mettant en évidence leur aspect multicouche. Alors que l'on ne connaissait pas l'extension radiale des vents zonaux observés à la surface de ces planètes, le grand final de Cassini et les données gravifiques

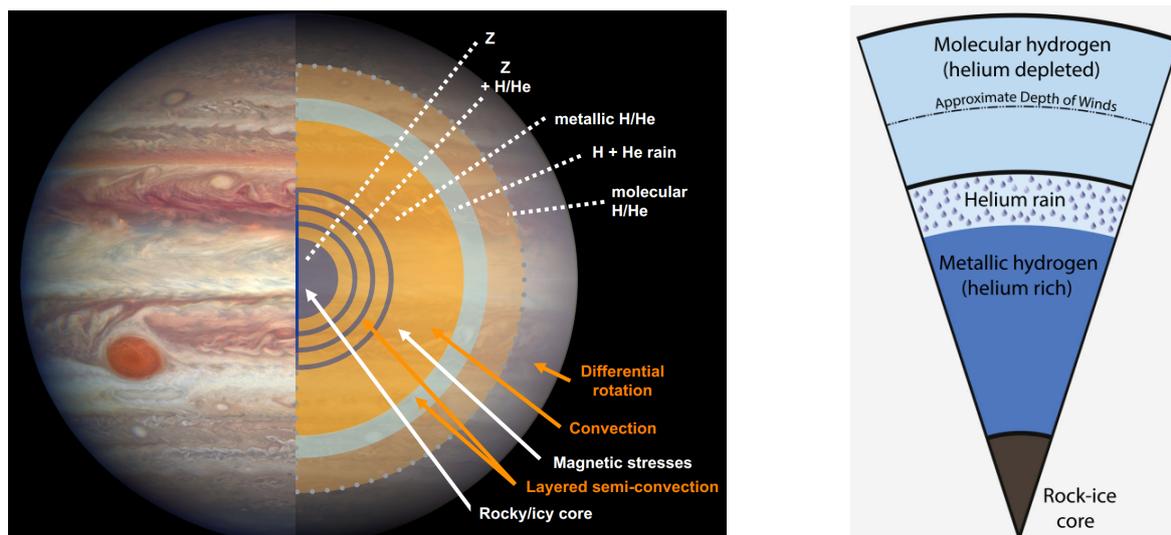


FIGURE 5.4: Modèles de la composition interne de Jupiter et Saturne d'après les dernières données fournies par Juno et Cassini. Gauche : [Tiré de Militzer et al. (2019)]. Modèle à 5 zones pour Jupiter. Droite : [Tiré de la thèse de Q. André (2019)]. Modèle à 4 zones pour Saturne. La différence principale entre les deux modèles est le cœur dilué de Jupiter représenté par des bandes grises concentriques.

de la mission Juno toujours en cours ont montré qu'ils s'étendaient jusqu'à une profondeur d'environ 9000 km pour Saturne (Galanti et al., 2019), et 3000 km pour Jupiter (Kaspi et al., 2017; Guillot et al., 2018). Les modèles d'intérieur ont évolué en conséquence, modifiant ainsi drastiquement la vision d'un modèle à deux couches cœur solide + enveloppe convective que l'on avait auparavant (Dermott, 1979), et raffinant celle du modèle tri-couche de Guillot et al. (1994, cœur solide + enveloppe convective + atmosphère stablement stratifiée). Les modèles les plus récents prédisent maintenant 4 ou 5 couches (Debras & Chabrier, 2019; Militzer et al., 2019) avec par exemple pour Jupiter, de la surface vers l'intérieur : une enveloppe gazeuse siège de mouvements convectifs et de rotation différentielle, une zone de transition qui pourrait être semi-convective¹ (aussi appelée double-diffusive, p.e. Leconte & Chabrier, 2012), une zone convective interne magnétisée (car constituée d'hydrogène et d'hélium métalliques) et en rotation solide (du fait de la rétro-action de la force de Lorentz sur le cisaillement), une nouvelle zone potentiellement semi-convective (ou un noyau dilué) ; et enfin un noyau solide fait de roche ou de glace (voir le panneau de gauche de la figure 5.4). Un modèle similaire à 4 couches (i.e. sans le cœur dilué) peut être construit pour Saturne, et est présenté dans le panneau de droite de la figure 5.4.

Jupiter et Saturne tournant respectivement en environ 9 h 54 min et 10 h 42 min², elles sont considérées comme des rotateurs rapides. Les résultats de la section précédente fonctionnent pour ces planètes géantes qui présentent un profil de rotation cylindrique. La détermination précise des moments multipolaires de gravité J_n (aussi appelés harmoniques gravitationnelles) de faible degré n , a permis de contraindre leur profil de rotation grâce à des modèles théoriques, car ces moments dépendent du profil de densité et de la rotation différentielle. Dans le graphe de gauche de la figure 5.5, Militzer et al. (2019) comparent des profils de rotation uniforme avec les J_n déduits des mesures de Juno et Cassini. Alors que les écarts à la rotation solide sont assez modérés pour Jupiter, on constate des écarts importants pour Saturne. Ceci montre que les effets de la rotation différentielle restent plus importants pour Saturne. Les panneaux du milieu et de gauche montrent les profils de rotation de surface et dans les 9000 premiers kilomètres de l'enveloppe convective de Saturne, respectivement (Galanti et al., 2019). À noter

1. définie par une distribution inhomogène d'éléments lourds et un fort gradient d'entropie qui induisent l'alternance de couches convectives et stablement stratifiées.

2. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>

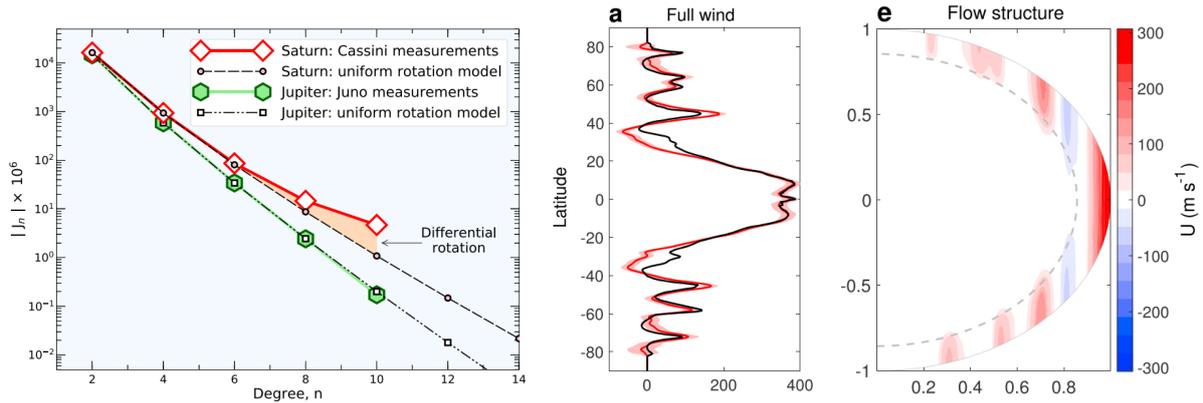


FIGURE 5.5: *Gauche* : [Militzer et al. (2019)]. Comparaison des moments de gravité mesurés par Juno et Cassini pour Jupiter et Saturne, respectivement, avec les prédictions des modèles supposant une rotation uniforme dans l'intérieur des deux planètes. *Milieu* : [Galanti et al. (2019)]. Vents zonaux observés (en traits noirs) à la surface de Saturne au niveau des nuages, auquel s'ajoute un profil de vent optimisé (en traits rouges), ainsi que son incertitude (ombres rouges). *Droite* : [Galanti et al. (2019)]. Profil de rotation estimé dans la partie haute de l'enveloppe convective externe de Saturne, et qui découle de la solution en trait rouge dans la figure du milieu, ainsi que du profil radial de décroissance des vents zonaux (non présenté ici).

que l'enveloppe convective de Saturne, contrairement à celle de Jupiter, serait deux fois plus épaisse que la profondeur des vents zonaux actuellement mesurée (Galanti et al., 2019). En effet, la présence de la rotation différentielle dans une zone convective n'est pas systématique, elle dépend fortement de la valeur conductivité électrique (voir par exemple Guillot et al., 2018; Galanti et al., 2019). Une conductivité élevée empêche l'existence de forts vents zonaux (Cao & Stevenson, 2017), car la force de Lorentz, alors élevée, tend à s'opposer aux gradients de vitesse. Les flots zonaux sont alors confinés dans les régions externes de faible conductivité (voir aussi Varela et al., 2016; Guillot et al., 2018). C'est pour cette raison que l'on ne s'attend pas à trouver un gradient de rotation important dans les régions convectives internes de Jupiter et Saturne (voir figure 5.4). Il a été observé que la conductivité s'étend d'autant plus vers la surface que la planète est massive (Guillot et al., 2018); c'est en effet le cas si l'on compare Jupiter et Saturne. On peut donc en déduire que la rotation différentielle dans les exoplanètes de type Jupiter-chauds, si elle existe, est cantonnée aux couches de sous-surface de faible profondeur.

👉 Dans ce chapitre, nous avons discuté des profils de rotation réalistes que l'on peut trouver dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse suivant leur âge et leur masse en utilisant notamment les grilles des modèles d'évolution stellaire STAREVOL, et dans les planètes géantes gazeuses comme Jupiter et Saturne. Ce travail va nous permettre, dans le chapitre 6 qui suit, d'appliquer à ces objets nos résultats analytiques sur le comportement des ondes inertielles en présence de rotation différentielle et de couches critiques, afin de donner des prédictions sur les échanges énergétiques et de moment cinétique de marée.

Sommaire

6.1	Rotation différentielle et couches critiques	104
6.1.1	État de l'art en géophysique et en astrophysique	104
6.1.2	Dans l'étude des interactions de marées	105
6.2	Traitement analytique des ondes inertielles en présence de couches critiques	108
6.2.1	Le modèle de la boîte cisailée et hypothèses principales	108
6.2.2	Équilibre du flot moyen	109
6.2.3	Système d'équations	110
6.2.4	Propriétés de propagation	113
6.2.5	Quantifier les transferts d'énergie grâce au flux d'action d'onde	117
6.2.6	Étude analytique du comportement des ondes aux niveaux critiques	119
6.3	Discussion à propos des instabilités	125
6.4	Approche numérique des ondes inertielles en présence de couches critiques	126
6.4.1	Un modèle numérique à trois zones	126
6.4.2	Étude numérique avec rotation différentielle conique	127
6.4.3	Étude de la rotation différentielle cylindrique	131
6.5	Application aux étoiles de type solaire et aux planètes géantes gazeuses	134
6.5.1	Analogie entre modèles local et global	134
6.5.2	Dans les étoiles de type solaire	135
6.5.3	Modèle équatorial pour les planètes géantes et les étoiles en rotation rapide	135
6.6	Conclusion	137
	Article Astoul et al. (submitted)	138

Dans ce chapitre, nous allons explorer l'impact de la rotation différentielle, via différents profils de rotation détaillés au chapitre précédent, sur la propagation des ondes inertielles dans un modèle local de boîte Cartésienne cisailée située dans l'enveloppe convective d'une étoile de faible masse ou d'une planète géante gazeuse. En particulier, nous nous concentrerons sur les couches critiques rencontrées par l'onde inertielle dans la boîte, et sur les transferts de flux d'énergie de l'onde qui résultent de cette rencontre, grâce à des approches analytique et numérique. Nous essaierons ensuite d'extrapoler ces résultats aux étoiles de faible masse et aux planètes géantes gazeuses.

6.1 Rotation différentielle et couches critiques

6.1.1 État de l'art en géophysique et en astrophysique

En rotation solide, la dissipation d'énergie et les échanges de moment cinétique induits par les marées dans les étoiles s'effectuent principalement par des processus visqueux de friction moléculaire et/ou turbulente dans la zone convective, ou par des mécanismes de diffusion thermique dans la zone radiative. Dès lors que les différentes couches d'une étoile ne tournent pas à la même vitesse, l'énergie de l'onde de marée peut aussi être dissipée par travail des flots cisailés (on le démontrera en section 6.2.5), et tout particulièrement lorsque l'onde rencontre une résonance de corotation, aussi appelée niveau critique¹ ou même couche critique en présence de viscosité et/ou de diffusion thermique. La résonance de corotation est rencontrée lorsque la fréquence de l'onde de marée dans le référentiel du fluide s'annule ($\sigma = 0$ d'après les notations du chapitre 2 dans un référentiel tournant à la même vitesse que le corps), ou dit de manière analogue lorsque la vitesse du fluide est égale à la vitesse de phase de l'onde.

De nombreuses études se sont intéressées aux interactions entre ondes et flot moyen à l'approche d'une couche critique, et ce dans différents domaines. Ce thème a émergé en géophysique, pour étudier les phénomènes de mélange, de transport de moment cinétique, de turbulence, et de propagation des ondes, à travers différentes couches dans la haute atmosphère (par exemple, Bretherton, 1966; Hines & Reddy, 1967; Yamanaka & Tanaka, 1984), et dans les océans (Booker & Bretherton, 1967; Winters & D'Asaro, 1989). Ces études ont en commun qu'elles s'intéressent à la propagation d'ondes de gravité dans des milieux stablement stratifiés en présence d'un cisaillement vertical, c'est-à-dire une rotation différentielle qui dépend de la profondeur. D'autres se sont ensuite intéressées aux effets de la rotation sur le rôle de ces couches critiques dans cette configuration, comme c'est le cas de Jones (1967, 1968) dans l'approximation traditionnelle² et Grimshaw (1975b,a) dans l'approche non-traditionnelle³. Dans les couches atmosphériques et océaniques en rotation potentiellement instable vis-à-vis de la convection, les ondes de Rossby⁴ au voisinage des couches critiques ont aussi été très étudiées (Lindzen & Tung, 1978; Stewartson, 1977) dans le contexte d'un cisaillement horizontal. Plus récemment, l'intérêt s'est porté sur l'analyse de la stabilité des vortex dans les milieux (fortement) stablement stratifiés et en rotation, avec un cisaillement radial (p.e. Le Dizès & Billant, 2009; Billant & Le Dizès, 2009; Le Dizès & Riedinger, 2010). De nouveaux critères d'instabilités, comme l'instabilité radiative pour les vortex columnaires, ou strato-rotationnelle dans les flots de type Taylor-Couette, ont été décrits analytiquement, numériquement et expérimentalement pour les ondes gravito-inertielles. Dans ces études, les points critiques joueraient un rôle déterminant dans le développement de ces instabilités.

En astrophysique, les résonances de corotation jouent un rôle important dans les disques d'accrétion. Par exemple, elles pourraient être à l'origine des modes d'oscillations quasi-périodiques observés dans les objets compacts comme les étoiles à neutrons et les trous noirs (Li et al., 2003; Latter & Balbus, 2009). Dans les disques protoplanétaires, les résonances de corotation sont particulièrement étudiées pour leurs implications sur la migration des planètes de faible masse, typiquement jusqu'à quelques dizaines de masses terrestres (Baruteau et al., 2014). Similairement au rayon de corotation défini au chapitre 1, les

1. Terme plus général qui regroupe les singularités de l'équation d'onde adiabatique

2. Dans cette approximation, on néglige la composante horizontale du vecteur rotation lorsque la force d'Archimède domine l'accélération de Coriolis dans la direction de la stratification d'entropie (p.e. Eckart, 1960; Gerkema et al., 2008; Mathis & Prat, 2019).

3. Par opposition à l'approximation traditionnelle, on prend ici en compte la composante horizontale du vecteur rotation.

4. Les ondes de Rossby sont une sous classe (bi-dimensionnelle) d'ondes inertielles qui se propagent du fait de la conservation de la vorticité potentielle. Dans le cas de la géométrie globale sphérique, on les appelle aussi modes planétaires (Rieutord, 2015).

résonances de corotation dans les disques se produisent lorsque la vitesse azimuthale du gaz en rotation autour de l'étoile centrale est égale à celle du perturbateur – ici dans notre exemple une planète. On voit d'ailleurs une analogie intéressante entre effets de marée étoile-planète et interactions de marée disque-planète. Une différence principale est que, dans les interactions disque-planète, la planète est immergée dans le fluide perturbé (le gaz dans le disque), tandis que dans les effets de marée étoile-planète, la planète est à l'extérieur du fluide perturbé (le gaz dans l'étoile). Une autre différence importante est que le gaz des disques protoplanétaires est un fluide compressible, tandis qu'en bonne approximation pour les études d'effets de marée, le gaz dans les étoiles peut être considéré comme anélastique, voire incompressible. Toujours est-il que, dans le contexte des interactions disque-planète, les résonances de corotation correspondent à une discontinuité du flux de moment cinétique transporté par les ondes induites par la planète dans le disque (p.e., [Goldreich & Tremaine, 1979](#); [Baruteau & Masset, 2008](#)). À cette discontinuité est associée un couple gravitationnel que le disque exerce sur la planète, appelé couple de corotation, et qui joue un rôle primordial dans la migration des planètes de faible masse.

Dans le cadre de notre étude, [Goldreich & Nicholson \(1989b\)](#) ont montré que ces résonances étaient essentielles pour la synchronisation des étoiles massives dans les systèmes binaires en rotation différentielle. Cet état d'équilibre, qui correspond on le rappelle à une période de rotation de l'objet perturbé égale à la période orbitale du perturbateur, ne s'applique pas uniformément à l'ensemble de l'étoile. Il se fait par synchronisation successive, de la surface vers la base de la zone radiative, des différentes couches de l'étoile, qui est donc le siège d'une rotation différentielle de type shellular (c'est à dire qui dépend de la coordonnée radiale sphérique). Plus précisément, [Goldreich & Nicholson \(1989b\)](#) ont ainsi démontré que le dépôt du moment cinétique transporté par les ondes internes de gravité qui sont excitées à l'interface entre la zone radiative et convective et réfléchies à la surface, a lieu à la résonance de corotation. Suite au ralentissement des couches de sous-surface de l'étoile, cette dernière migre progressivement vers la base de la zone radiative, jusqu'à la synchronisation totale de l'étoile.

Ces différentes études ont mis en évidence le fait que les couches critiques, ou résonances de corotation, qui apparaissent en présence de rotation différentielle sont une source potentielle d'instabilité et d'échanges importants de moment cinétique entre les ondes et le flot moyen. Un dernier point important est que ces échanges peuvent s'effectuer dans deux les sens : les ondes peuvent aussi bien donner leur énergie et leur moment cinétique au flot moyen au niveau de la couche critique (par exemple dans [Booker & Bretherton, 1967](#); [Grimshaw, 1975b](#)), ou au contraire prendre de l'énergie cinétique au flot moyen (comme dans [Lindzen & Barker, 1985](#); [Alvan et al., 2013](#)), selon certains critères, comme les propriétés de l'onde (sa fréquence, ses nombres d'onde) ainsi que le profil du flot moyen.

Comme dans les travaux qui étudient les résonances de corotation dans les disques protoplanétaires, nous allons étudier la réponse linéarisée du fluide, son comportement singulier aux résonances de corotation, et mettre en évidence une grandeur qui quantifie le flux d'énergie à la corotation et qui pourra y être discontinue. À la différence de ces travaux dans les disques, les ondes considérées dans notre cas sont inertielles et non acoustiques (donc aucune hypothèse d'incompressibilité n'est faite dans leur cas contrairement à nous). En outre, notre analyse n'est pas restreinte à un plan comme souvent dans les disques mais bien tridimensionnelle.

6.1.2 Dans l'étude des interactions de marées

Ces questions de transport et d'échange de moment cinétique sont particulièrement importantes dans le domaine des interactions de marées, où il est nécessaire de quantifier avec précision la dissipation de marée afin de contraindre au mieux son impact sur les paramètres orbitaux et rotationnels du système.

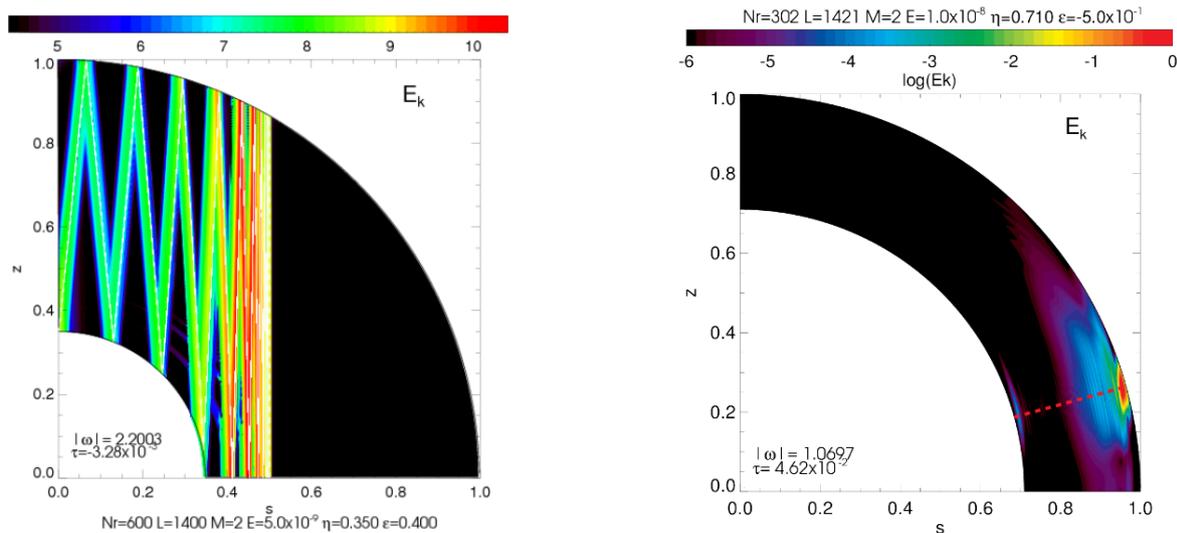


FIGURE 6.1: Simulation hydrodynamique illustrant le dépôt d'énergie cinétique E_k d'ondes inertielles dans une enveloppe convective (coupe méridienne) en présence d'une résonance de corotation. Les quantités affichées sont la fréquence de l'onde dans le référentiel inertiel ω , le taux d'amortissement τ (négatif pour un mode stable), le nombre de polynômes de Chebyshev dans la direction radiale N_r , le nombre d'harmoniques sphériques L , le nombre d'onde azimuthal M de l'onde, le nombre d'Ekman E , le rapport d'aspect de la coquille sphérique η , et le contraste de cisaillement ϵ (noté χ dans le chapitre précédent) *Gauche* : [Baruteau & Rieutord (2013)]. Avec un profil de rotation cylindrique. *Droite* : [Guenel et al. (2016a)]. Avec un profil de rotation conique, où l'on notera que τ est positif.

Baruteau & Rieutord (2013) ont été parmi les premiers à s'intéresser aux propriétés de propagation et de dissipation des ondes inertielles en présence de rotation différentielle et, en particulier, en présence d'une résonance de corotation. Ils ont utilisé pour cela des profils de rotation de type cylindrique et "shellular" (aussi dit sphérique) en utilisant (i) une approche semi-analytique avec traitement des ondes dans l'approche des courtes longueurs d'ondes, et (ii) une approche numérique à l'aide d'un code spectral 2D à haute résolution pour résoudre les équations hydrodynamiques linéarisées en présence de rotation (le code LSB, pour plus de détails voir Valdetaro et al., 2007). Guenel et al. (2016a) ont ensuite étendu les travaux de Baruteau & Rieutord (2013) en utilisant un profil de rotation conique, typique des étoiles analogues au Soleil comme on l'a vu au chapitre précédent (chapitre 5). Les deux cartes graphiques couleur de la figure 6.1 montrent des résultats de simulations issus de ces deux études, dans lesquelles des ondes inertielles se focalisent et déposent leur énergie au niveau des résonances de corotation. Dans le cas cylindrique (voir panneau de gauche), l'onde concentre son énergie dans les couches de cisaillement le long des attracteurs de caractéristique, comme expliqué au chapitre 2, avant de rencontrer (et d'être arrêtée par) la résonance de corotation caractérisée par un cylindre critique de position $s \approx 0.5$. Au voisinage de ce cylindre, les attracteurs de caractéristique deviennent de plus en plus verticaux et l'onde y dépose une grande partie de son énergie. Dans le cas conique, les attracteurs de caractéristique peuvent disparaître (comme on le voit dans le panneau de droite), et l'onde est alors entièrement amortie autour de la résonance de corotation, caractérisée ici par une latitude "critique" (à ne pas confondre avec la latitude critique de Kerswell, 1995, voir aussi chapitre 2). Dans les cas sphérique et conique, Baruteau & Rieutord (2013) et Guenel et al. (2016a) mettent en plus en évidence l'existence de modes instables d'oscillations à la corotation pour des ondes inertielles libres, ou forcées par la marée dans le travail préliminaire de Guenel et al. (2016b). Contrairement au cas cylindrique, ces cas ont en commun le fait que le gradient de rotation selon la coordonnée verticale ne s'annule pas à la corotation, ce qui permettrait à l'onde de "traverser" le niveau critique, ainsi que le développement de modes instables. De plus, ces modes instables n'existent que si la viscosité est suffisamment faible (Baruteau & Rieutord, 2013; Guenel

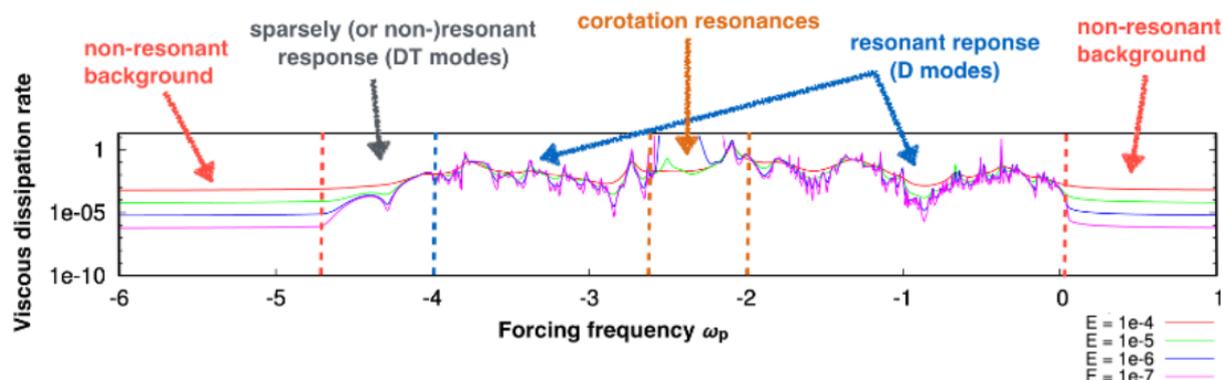


FIGURE 6.2: [Guenel et al. (2016b)]. Spectre du taux de dissipation, en fonction de la fréquence de marée ω_p dans un référentiel inertiel, intégré dans le volume d'une coquille sphérique de rapport d'aspect et de cisaillement de type solaire $\eta = 0.71$ et $\epsilon = 0.3$ respectivement, pour différentes valeurs du nombre d'Ekman E .

et al., 2016a,b), comme cela peut s'observer dans le spectre de dissipation pour des ondes inertielles forcées par l'interaction de marée, avec un cisaillement conique (figure 6.2). Un pic de dissipation est remarquable pour l'intervalle de fréquences de marée où existe une résonance de corotation à l'intérieur du fluide et pour des viscosités en dessous d'un certain seuil, ici de l'ordre de $E = 10^{-6}$, où E est le nombre d'Ekman. On notera par ailleurs que l'intervalle de propagation des ondes inertielles en présence de rotation différentielle est modifié par rapport à celui en rotation solide (voir chapitre 2). Nous reviendrons sur ce point en section 6.2.4.3, où nous expliquerons en détail la signification des modes de propagation D et DT.

Ces différents résultats, observés et décrits majoritairement à l'aide de simulations numériques, amènent cependant de nombreuses questions, que nous pouvons formuler comme suit :

- comment décrire la propagation des ondes à travers ces niveaux critiques ?
- comment quantifier la dissipation engendrée par la présence des niveaux critiques ?
- quelle est l'origine des instabilités ?
 - pourquoi les observe-t-on lorsque l'on utilise un profil conique ou sphérique, mais pas avec un profil cylindrique ?
 - pourquoi se déclenchent-elles en dessous d'une viscosité seuil ?

Bien que de nombreuses études aient exploré le comportement des ondes de gravité et de Rossby au niveau des couches critiques, très peu se sont intéressées aux ondes inertielles au voisinage de ces couches, qui présentent comme nous le verrons un comportement différent de celui des ondes de Rossby. C'est pourquoi nous avons développé un modèle local de boîte cisillée original qui a vocation à étudier ces niveaux critiques pour différents profils de rotation en zone convective. Un tel concept a été introduit en particulier dans le domaine des marées par Ogilvie & Lesur (2012) pour comprendre l'interaction entre flots convectifs et de marée, et permet notamment une compréhension physique détaillée de chaque processus.

Les parties suivantes se veulent comme une synthèse du travail effectué dans l'article ⁵ (joint à la fin de ce chapitre) ; certains détails techniques ne seront pas revisités dans le manuscrit mais sont donnés dans l'article, tandis que certains points non discutés dans l'article seront présentés ici.

5. Soumis au mois d'août dans la revue Astronomy & Astrophysics.

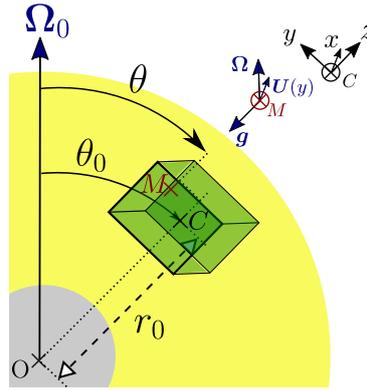


FIGURE 6.3: Représentation de la boîte cisailée, centrée en un point C , et de son système de coordonnées locales. Cette boîte cisailée modélise une parcelle fluide de l'enveloppe convective d'une étoile de faible masse ou d'une planète géante gazeuse. On s'intéresse aux ondes inertielles en un point M de cette boîte.

6.2 Traitement analytique des ondes inertielles en présence de couches critiques

6.2.1 Le modèle de la boîte cisailée et hypothèses principales

Comment anticipé au paragraphe précédent, on utilise un modèle local Cartésien de boîte cisailée, inclinée ou non par rapport à l'axe de rotation (voir [Jouve & Ogilvie, 2014](#); [Auclair Desrotour et al., 2015](#); [André et al., 2017a](#), pour d'autres utilisations d'un modèle de boîte inclinée) et en co-rotation dans l'enveloppe convective d'une étoile ou d'une planète géante. Un tel modèle est représenté à la figure 6.3. On précise que l'on traite en première approche dans ce chapitre le cas des ondes libres, c'est à dire non forcées par la marée. Comme on l'a expliqué au chapitre 2, rajouter un forçage de marée ne modifie pas les propriétés intrinsèques de propagation de l'onde, mais par exemple l'amplitude de leur dissipation (comme c'est le cas dans les études de [Guenel et al., 2016a,b](#), qui traitent séparément le cas libre et forcé).

On travaille dans la base Cartésienne (e_x, e_y, e_z) assimilable localement au système de référence global sphérique $(e_\varphi, -e_\theta, e_r)$ lorsque la boîte est inclinée, et cylindrique $(-e_\varphi, -e_s, e_z)$ lorsque la boîte est aux pôles. Lorsque la boîte est inclinée, les coordonnées x, y et z du modèle local sont donc la longitude, la latitude et le rayon sphérique, tandis que lorsque la boîte est au pôle, il s'agit de la longitude, du rayon cylindrique et de la hauteur sur l'axe de rotation (toutes ces quantités sont définies positives). La rotation différentielle est prise en compte par un flot moyen azimuthal $\mathbf{U} = U(y)e_x$ qui dépend de la latitude locale. La distinction boîte inclinée, boîte au pôle, nous permet ainsi de prendre en compte deux types de profils de rotation :

1. un profil de rotation conique lorsque la boîte est inclinée, reproduisant ainsi une rotation de type solaire ou anti-solaire comme expliqué au chapitre 5 ;
2. un profil de rotation cylindrique lorsque la boîte est aux pôles (Nord ou Sud), que l'on peut trouver dans Jupiter et Saturne et dans les étoiles en rotation rapide (voir chapitre 5).

Par ailleurs, on effectue les approximations suivantes :

- l'approximation non-traditionnelle, c'est-à-dire que l'on garde la composante horizontale du vecteur rotation, souvent négligée dans le cas des modèles couches minces (eaux peu profondes) ou

fortement stratifiées (voir p.e. la revue de [Gerkema et al., 2008](#)). Dans le modèle local, le vecteur rotation s'écrit ainsi :

$$2\mathbf{\Omega}_0 = (0, 2\Omega_0 \sin \theta_0, 2\Omega_0 \cos \theta_0)^T = 2\Omega_0 (0, \tilde{f}, f)^T, \quad (6.1)$$

où $2\Omega_0$ est la fréquence de rotation au pôle, f et \tilde{f} les composantes radiale et latitudinale normalisées du vecteur de rotation, respectivement, et T la transposée ;

- les dimensions de la boîte sont considérées faibles par rapport à la taille de la coquille convective pour justifier le fait que l'on utilise un modèle local (i.e. que l'on néglige les effets de courbures) ;
- on néglige l'accélération centrifuge. Cela pourrait se discuter pour les rotateurs rapides que sont Jupiter et Saturne, mais cette pseudo-force s'applique plutôt à l'échelle globale ;
- on inclut une force dissipative qui prend la forme d'une force d'amortissement linéaire par frottement (voir en particulier [Ogilvie, 2009](#)) : $-\sigma_f \mathbf{u}$, où σ_f est le coefficient de friction de Rayleigh, analogue à une fréquence, et \mathbf{u} la perturbation en vitesse. Cela permet d'avoir un problème plus facilement tractable analytiquement et numériquement que si la dissipation est modélisée par une force visqueuse proportionnelle à $\Delta \mathbf{u}$. On précise que [Ogilvie \(2005\)](#) a montré que le taux asymptotique de dissipation le long d'un attracteur était le même, en utilisant une telle force de friction, que celui calculé en utilisant une force visqueuse classique. Néanmoins, on ne sait pas ce qu'il en est au niveau de la résonance de corotation ;
- l'enveloppe convective est considérée "neutralement" stratifiée. Formellement, cela donne $N = 0$, où l'on rappelle que N est la fréquence de Brunt-Väisälä (voir chapitre 2, section 2.2.2). Par conséquent, la stratification verticale n'est pas considérée, mais on conserve néanmoins des termes de stratification le long de la latitude pour assurer l'équilibre du flot moyen comme nous allons le voir tout de suite.

6.2.2 Équilibre du flot moyen

Il est intéressant de discuter le choix du flot moyen car il a des conséquences pour le développement du modèle. Dans les travaux de [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) et [Guenel et al. \(2016b\)](#), les auteurs s'interrogent sur l'équilibre géostrophique de leur flot moyen en rotation différentielle, c'est à dire l'équilibre entre l'accélération de Coriolis et le gradient de pression, en négligeant le forçage, la force visqueuse et les termes non-linéaires. Lorsqu'il est satisfait, le flot géostrophique est stable et vérifie le théorème de Taylor-Proudman : les mouvements sont cantonnés dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation ([Davidson, 2013](#); [Rieutord, 2015](#)). Formellement, l'équilibre géostrophique pour les quantités d'équilibre s'écrit :

$$2\rho_0 \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{U} = -\nabla p_0, \quad (6.2)$$

où p_0 et ρ_0 sont respectivement la pression et la densité d'équilibre. Pour un profil de rotation cylindrique, cet équilibre est satisfait naturellement ([Baruteau & Rieutord, 2013](#)). Néanmoins, pour un profil de rotation sphérique ou conique, satisfaire cet équilibre implique d'introduire des forces additionnelles ([Baruteau & Rieutord, 2013](#); [Guenel et al., 2016a](#)) comme les tenseurs de Reynolds venant des mouvements convectifs turbulents (p.e. [Zahn, 1992](#); [Brun & Toomre, 2002](#); [Brown et al., 2008](#)). En faisant le choix de satisfaire cet équilibre dans notre modèle pour le flot moyen $U(y)e_x$, l'équation (6.2) se réécrit comme :

$$(2\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)(\rho_0 U) = 0, \quad (6.3)$$

ce qui signifie que le flot d'équilibre ne peut pas être incompressible, i.e. :

$$(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\rho_0 \neq 0. \quad (6.4)$$

Cela implique de conserver des termes de stratification, au moins latitudinaux, si l'hypothèse d'une enveloppe neutralement stratifiée (selon la verticale) est faite. C'est pourquoi dans la suite, je conserve le terme de flottabilité dans l'équation du moment pour le flot d'équilibre, et j'utilise ainsi l'équilibre hydrostatique selon l'axe z et géostrophique dans le plan (y, z) (équilibre de vent thermique, voir p.e. Grimshaw, 1975b; Yamanaka & Tanaka, 1984). Le flot considéré est donc barocline. Cela permet par ailleurs la construction d'un invariant (par rapport à y) crucial : le flux d'action d'onde, qui va nous servir à mettre en évidence le rôle du niveau critique.

Notons pour finir que si l'on souhaite considérer un flot incompressible, et satisfaire en même temps l'équilibre géostrophique, on peut utiliser un flot moyen qui dépend de plusieurs variables, comme $U = U(y, z)e_x$.

6.2.3 Système d'équations

6.2.3.1 Équations hydrodynamiques linéarisées

On développe ici les équations hydrodynamiques vérifiées par les ondes libres dans un milieu convectif cisailé latitudinalement. Notons ρ et p les perturbations respectives en densité et en pression par rapport aux quantités d'équilibres ρ_0 et p_0 , et $\vec{u} = (u, v, w)^T$ le vecteur vitesse perturbé dans le référentiel local. Les équations hydrodynamiques linéarisées s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - f \right) v + \tilde{f} w = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma_f u, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + f u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} - \sigma_f v, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} - \tilde{f} u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\rho}{\bar{\rho}} - \sigma_f w, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} v + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w = 0, \quad (6.9)$$

où l'on a introduit $\bar{\rho}$ la densité de référence (qui est une constante) car on utilise l'approximation de Boussinesq, c'est à dire que l'on filtre les perturbations en densité qui ne sont pas liées à la force de flottabilité d'Archimède. Nous avons, de haut en bas, l'équation de continuité, l'équation du moment projetée dans les trois directions (x, y, z) , ainsi que l'équation de la chaleur, et dans lesquelles nous avons filtré les ondes acoustiques grâce à l'approximation de Boussinesq. Pour plus de détails sur l'obtention de ce système (et en particulier sur le développement en ϵ des termes de densité ρ_0), on renvoie à la section 2.3 de l'article en fin de chapitre. Par ailleurs, le flot moyen $U(y)$ satisfait l'équilibre de vent thermique :

$$\tilde{f} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, \quad (6.10)$$

et on introduit la fréquence de Brunt-Väisälä au carrée qui s'écrit, en filtrant les termes en $1/c_s^2$ (ce qui revient à filtrer les ondes acoustiques) :

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (6.11)$$

Après l'obtention de l'équation différentielle qui régit la propagation des ondes en présence de rotation différentielle, nous nous placerons dans la limite $N \rightarrow 0$.

6.2.3.2 Solutions modales et adimensionalisation

L'ensemble des équations Eqs. (6.5) à (6.11) est adimensionné à l'aide des grandeurs caractéristiques suivantes : L l'échelle de longueur, $1/2\Omega$ l'échelle de temps, $\bar{\rho}L^2/2\Omega^2$ l'échelle de pression, et $\bar{\rho}$ l'échelle de densité.

On considère ensuite que les quantités perturbées s'écrivent selon le mode normal :

$$M(x, y, z, t) = m(y) \exp [i (k_x x + k_z z - \omega t)] + c.c., \quad (6.12)$$

où M est la variable perturbée, m l'enveloppe du mode, k_x et k_z les nombres d'onde azimuthal et radial réels, et ω la fréquence inertielle complexe de l'onde. On note *c.c.* le complexe conjugué.

Avec cette hypothèse de solutions locales périodiques selon x, z, t , les équations adimensionnées Eqs. (6.5) à (6.9) deviennent, en utilisant les relations qui mettent en jeu la densité moyenne Eqs. (6.11) et (6.10) :

$$ik_x u + v' + ik_z w = 0, \quad (6.13)$$

$$-isu + (U' - f)v + \tilde{f}w = -ik_x p, \quad (6.14)$$

$$-isv + fu = -p', \quad (6.15)$$

$$-isw - \tilde{f}u = -ik_z p - \rho, \quad (6.16)$$

$$-is\rho + \tilde{f}U'v - N^2 w = 0, \quad (6.17)$$

où l'on a introduit $s = \sigma + i\sigma_f$, avec σ la fréquence de l'onde dans le référentiel du fluide et où le symbole ' désigne la dérivée par rapport à y .

6.2.3.3 Équation de Poincaré en présence de friction et avec une stratification latitudinale

On rajoute maintenant l'hypothèse d'un milieu convectif adiabatique, c'est-à-dire sans terme de stratification verticale, i.e. $N = 0$, comme lors de la présentation des hypothèses principales en section 6.2.1. L'ensemble des équations Eqs. (6.13) à (6.17) peut se réduire à une Équation Différentielle Ordinaire (ODE dans la suite) du second ordre du type :

$$Av''(y) + Bv'(y) + Cv(y) = 0, \quad (6.18)$$

où les coefficients s'écrivent, en l'absence de terme de friction :

$$\begin{aligned}
 A &= \sigma^2 - \tilde{f}^2, \\
 B &= -2k_x \tilde{f}^2 \frac{U'}{\sigma} - 2ik_z \tilde{f} f, \\
 C &= -k_{\perp}^2 \sigma^2 + k_z^2 f(f - U') - 2ik_x k_z \tilde{f} f \frac{U'}{\sigma} \\
 &\quad - 2k_x^2 \tilde{f}^2 \frac{U'^2}{\sigma^2} + \frac{k_x U''}{\sigma} (\sigma^2 - \tilde{f}^2).
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Les détails des étapes qui permettent d'obtenir ces coefficients sont donnés en Annexe B, où l'on détermine les coefficients A , B , et C en gardant les termes de friction et de stratification verticale. On précise que notre étude analytique est effectuée sans le terme dissipatif, qui ne sera inclus que lors de l'exploration numérique.

En plus de la corotation $\sigma = 0$, on a l'apparition de deux nouvelles singularités $\sigma = \pm \tilde{f}$ du fait de l'inclinaison du vecteur rotation par rapport au vecteur gravité, et dont on ne trouve pas d'analogie dans l'étude des ondes gravité en présence d'un cisaillement vertical (p.e., Booker & Bretherton, 1967). Des singularités similaires ont déjà été observées et étudiées dans des milieux stratifiés en rotation et cisailés verticalement, par Jones (1967) dans l'approximation traditionnelle et Grimshaw (1975b) dans l'approximation non-traditionnelle. À noter que dans leur cas, les deux singularités additionnelles sont suivant la composante verticale du vecteur rotation, tandis que dans le nôtre ces singularités sont définies avec la composante "horizontale" (dans le sens latitudinal) du vecteur rotation, ce qui est relié au choix du cisaillement. Nous reviendrons sur les résultats des études sus-mentionnées dans la partie analytique, section 6.2.6.

6.2.3.4 Relations de polarisation

Lors de l'obtention de l'ODE (6.18) et de ses coefficients (6.19), les étapes intermédiaires de calcul en Annexe B ont permis d'exprimer les quantités perturbées u , w et p en fonction de v et v' . C'est ce que l'on appelle communément les relations de polarisation. Dans la limite où $N \rightarrow 0$ et $\sigma_f \rightarrow 0$ (i.e. $s = \sigma$), la pression, ainsi que les vitesses verticale et longitudinale s'écrivent :

$$p = \frac{1}{\sigma k_{\perp}^2} \left\{ iA v' + \left[ik_x \frac{U'}{\sigma} A + f(k_z \tilde{f} - ik_x \sigma) \right] v \right\}, \tag{6.20}$$

$$w = \frac{1}{\sigma k_{\perp}^2} \left\{ (i\sigma k_z - k_x \tilde{f}) v' + k_x \left[ik_z (U' - f) - k_x \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \right] v \right\}, \tag{6.21}$$

$$u = \frac{1}{\sigma k_{\perp}^2} \left\{ (i\sigma k_x + k_z \tilde{f}) v' + k_z \left[ik_z (f - U') + k_x \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \right] v \right\}, \tag{6.22}$$

et sont obtenues à partir des relations (B.5), (B.6), et (B.7), respectivement. On rappelle que $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_z^2$. Ces expressions seront utiles pour la suite, afin de calculer un invariant par rapport à y appelé le flux d'action d'onde qui permet de poser un diagnostic sur les échanges de flux d'énergie au voisinage des niveaux critiques, ainsi que pour calculer la vitesse latitudinale de propagation de l'énergie que l'on exprimera en fonction du flux d'action d'onde et de la densité d'énergie.

6.2.4 Propriétés de propagation

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés de propagation des ondes inertielles en faisant l'approximation des courtes longueurs d'onde. Cette approximation permet d'aller plus loin dans la compréhension physique du comportement des ondes dans leur domaine de propagation et notamment aux couches critiques, car la relation de dispersion, la vitesse de phase et de groupe, ainsi que le critère de propagation des ondes (expressions détaillées en chapitre 2 dans le cas des ondes inertielles en rotation solide), prennent des formes relativement simples dans cette approximation. Elle permet par ailleurs une comparaison avec les résultats analytiques des travaux de [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) et [Guenel et al. \(2016a\)](#) obtenus dans la même limite des courtes longueurs d'onde mais dans une géométrie sphérique globale.

6.2.4.1 Approximation des courtes longueurs d'onde

L'approximation des courtes longueurs d'onde consiste à supposer que l'onde oscille rapidement par rapport aux variations du flot moyen, ou dit autrement, que la longueur de variation du flot moyen est grande devant la longueur d'onde i.e. :

$$\omega \gg U' \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{k_x} \ll \frac{U}{U'}, \quad (6.23)$$

pour une onde qui se propage temporellement le long de l'axe (Ox). Si l'on utilise une solution modale uniquement selon la direction longitudinale (Ox), l'approximation des courtes longueurs d'onde revient à négliger les termes qui ne sont pas du second ordre (i.e. qui ne sont pas en dérivées secondes selon y et z), dans le sens où les variations des termes en dérivée seconde sont plus importantes que les variations du flot moyen. On obtient alors à partir des équations (6.5) à (6.9), l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante :

$$\left(\sigma^2 - \tilde{f}^2\right) \partial_{y,y} v - 2\tilde{f}f \partial_{y,z} v + \left[\sigma^2 + f(U' - f)\right] \partial_{z,z} v = 0, \quad (6.24)$$

où l'on remarque que la dérivée seconde du flot moyen n'intervient pas. On peut ainsi examiner les propriétés locales de l'onde dans le plan (y, z), de la même manière que [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) (voir en particulier l'annexe B) et [Guenel et al. \(2016a\)](#).

6.2.4.2 Relation de dispersion, vitesse de phase et de groupe

En supposant $v \propto \exp(ik_y y)$ (cette hypothèse sera relaxée à partir de la section 6.2.5) en plus de la solution modale décrite en équation (6.12), la relation de dispersion adimensionnée pour la fréquence prenant en compte le décalage Doppler, dans l'approximation des courtes longueurs d'onde s'écrit :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\|\mathbf{k}\|^2} \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2 - k_z^2 f U' \right], \quad (6.25)$$

où $\|\mathbf{k}\| = k_y^2 + k_z^2$ est la norme du nombre d'onde local dans le plan (y, z). On reconnaît une forme similaire à la relation de dispersion en rotation solide (voir équation (2.24) du chapitre 2), avec un terme de cisaillement supplémentaire $k_z^2 f U'$.

En se concentrant sur les valeurs positives de $\gamma^2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2 - k_z^2 f U'$, on peut écrire la vitesse de phase \mathbf{v}_ϕ et la vitesse de groupe \mathbf{v}_g dans le plan azimuthal selon l'approximation des courtes longueurs d'onde :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\phi = \frac{\sigma}{\|\mathbf{k}\|^2} \mathbf{k} = \pm \frac{\gamma}{\|\mathbf{k}\|^3} \mathbf{k}. \\ \mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma = \pm \frac{\gamma}{\|\mathbf{k}\|^3} \left[-\mathbf{k} + \left(\frac{\|\mathbf{k}\|}{\gamma} \right)^2 [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) - k_z f U' \mathbf{e}_z] \right]. \end{cases} \quad (6.26)$$

Comme en rotation solide, vitesse de groupe et vitesse de phase résident dans des plans perpendiculaires.

Lorsque la boîte est située au pôle Nord ($\theta_0 = 0$ dans la figure 6.3), la relation de dispersion ainsi que les vitesses de phase et de groupe se simplifient de sorte que :

$$\begin{cases} \sigma^2 = \frac{k_z^2}{\|\mathbf{k}\|^2} \kappa^2, \\ \mathbf{v}_\phi = \pm \kappa \frac{k_z \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|^3}, \\ \mathbf{v}_g = \pm \kappa \frac{k_y}{\|\mathbf{k}\|^3} (-k_z \mathbf{e}_y + k_y \mathbf{e}_z), \end{cases} \quad (6.27)$$

en introduisant $\kappa = 1 - U'$ analogue à une fréquence épicyclique normalisée (similairement à [Latter & Balbus, 2009](#) et [Baruteau & Rieutord, 2013](#)). Au pôle Sud, les relations (6.27) restent les mêmes en écrivant la fréquence épicyclique $\kappa = 1 + U'$.

Dans la table (6.1), nous avons examiné comment se comportent les vitesses de phase et de groupe aux niveaux critiques $\sigma = 0$ et $\sigma = \pm \tilde{f}$, en regard des résultats obtenus par [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) et [Guenel et al. \(2016a\)](#) dans l'approximation des courtes longueurs d'onde. On remarque tout d'abord que dans les trois études, trois conditions⁶ en terme de nombres d'onde ou de fréquences caractéristiques (κ_s , κ , \mathcal{B} et γ) permettent d'atteindre les niveaux critiques. Lorsque la boîte est au pôle (i.e. $\tilde{f} = 0$), nos résultats sont analogues à ceux de [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) dans le cas d'un profil de rotation cylindrique global, et seule la résonance de corotation est présente. Lorsque la boîte est inclinée par rapport à l'axe de rotation dans notre étude, les trois conditions se partagent entre les différents niveaux critiques, alors que seule la résonance de corotation a été identifiée dans l'étude de [Guenel et al. \(2016a\)](#) sous l'approximation des courtes longueurs d'onde. On notera par ailleurs que pour les deux premières conditions du tableau, des comportements similaires des ondes entre profil de rotation global conique et profil de rotation local latitudinal, sont déduits des vitesses de phase et de groupe au voisinage des niveaux critiques, à savoir que l'énergie de l'onde est totalement ou partiellement dissipée à ce niveau-là. Pour la troisième condition, c'est à dire à la résonance de corotation dans le profil conique global et local, la vitesse de groupe diverge, ce qui n'est pas constaté dans les modèles cylindriques global et local. On fera aussi remarquer que le cas de la rotation différentielle sphérique (non présenté dans le tableau) de [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) fait intervenir les mêmes trois conditions en terme de nombres d'onde (et aussi un paramètre similaire à \mathcal{B}) pour atteindre la corotation, et le même comportement de la vitesse de phase et de groupe est observé que dans le cas conique global de [Guenel et al. \(2016a\)](#).

On précise pour terminer que notre modèle local latitudinal et le modèle global conique de [Guenel et al. \(2016a\)](#) sont légèrement différents dans le sens où ces derniers ne font pas intervenir de manière explicite une force visant à équilibrer le flot moyen (en faisant l'hypothèse de son existence, mais sans la spécifier à proprement parler ; voir discussion en section 6.2.2), alors que nous considérons l'équilibre

6. On précise que la condition $\kappa_s \rightarrow 0$ n'a pas été formellement décrite par [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) car il s'agit du cas limite aux fréquences épicycliques négatives, pour lesquelles le fluide peut potentiellement être instable sous l'instabilité de Rayleigh.

Baruteau & Rieutord (2013)	Guenel et al. (2016a)	Astoul et al. (in prep.)	
cylindrique global	conique global	cylindrique local	latitudinal local
$ k_s \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow 0$		$ k_y \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow 0$	$ k_y \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}$
$ k_z \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_s \rightarrow 0 \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{\kappa_s}{k_s} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow 0$	$ k_z \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_s \rightarrow 0 \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow \infty \end{cases}$	$ k_z \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_y \rightarrow 0 \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{\kappa}{k_y} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow 0$	$ k_z \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \cdot \mathbf{e}_y \rightarrow \frac{\tilde{f}}{k_y} \\ \mathbf{v}_\phi \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow 0 \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_y \rightarrow 0 \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{f}{k_y} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}$
$\kappa_s \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow 0$	$\mathcal{B} \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_s \rightarrow \infty \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow \infty \end{cases}$	$\kappa \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0} \end{cases}$ $\sigma \rightarrow 0$	$\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_y \rightarrow \infty \\ \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow \infty \end{cases}$

TABLE 6.1: Table comparative de trois conditions permettant l'existence de niveaux critiques, et leurs implications en terme de vitesse de phase et de vitesse de groupe. Baruteau & Rieutord (2013) et Guenel et al. (2016a) utilisent les coordonnées cylindriques dont le repère orthonormé est noté $(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$, où \mathbf{e}_z est le vecteur colinéaire au vecteur rotation. Par ailleurs, κ_s est la fréquence épicyclique⁷ qui dépend de la distance à l'axe et du contraste en cisaillement χ , et \mathcal{B} ⁸ est un terme analogue à notre coefficient γ , qui dépend de θ , χ , ainsi que des nombres d'onde k_s et k_z (Guenel et al., 2016b).

géostrophique du flot moyen qui fait ainsi intervenir un terme de stratification latitudinale se retrouvant dans les équations perturbées.

6.2.4.3 Domaine de propagation

La nature de l'équation différentielle (6.24), c'est à dire son caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique, permet de déterminer si l'onde va se propager (comme dans l'équation d'onde de D'Alembert) ou au contraire être évanescence dans le domaine considéré (i.e. à θ et profil du flot fixés). Pour répondre à cette question, il faut examiner le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée⁹, Δ , qui varie selon y . L'équation Eq. (6.24) est alors dite mixte, et son discriminant est

$$\Delta(y) = -4\sigma^4 + 4\sigma^2(1 - U'f) + 4U'\tilde{f}^2f \quad (6.28)$$

en utilisant le fait que $\tilde{f}^2 + f^2 = 1$. Si Δ is positif, égal à zéro ou négatif, l'équation est respectivement hyperbolique, parabolique ou elliptique. Pour un cisaillement du type $U = R_\circ y$ avec $R_\circ = U'$ le nombre de Rossby¹⁰ constant (où U' est adimensionnée par $1/(2\Omega)$), l'équation bi-quadratique $\Delta = 0$ satisfaite

7. $\kappa_s^2(s) = 4\Omega^2(s) \left[1 + \frac{\chi(s/R)^2}{1 + \chi(s/R)^2} \right]$, avec la fréquence de rotation adimensionnée $\Omega(s) = 1 + \chi(s/R)^2$ où R est le rayon de l'étoile et χ le contraste de cisaillement dans nos notations (Baruteau & Rieutord, 2013).

8. $\mathcal{B}^2 = 1 + \frac{\chi \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \chi \sin^2 \theta} + \frac{k_s \chi \cos \theta \sin^3 \theta}{k_z (1 + \chi \sin^2 \theta)}$ (Guenel et al., 2016a).

9. Le discriminant Δ d'une équation aux dérivées partielle d'ordre 2 à deux variables du type $\mathcal{A}\partial_{yy}v + \mathcal{B}\partial_{yz}v + \mathcal{C}\partial_{zz}v = 0$ s'écrit comme pour les équations du 2nd ordre $\Delta(y) = \mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}$.

10. On rappelle qu'en variables dimensionnées, $R_\circ = U'/(2\Omega)$, qui évalue l'importance respective du cisaillement et de la fréquence de rotation de Coriolis.

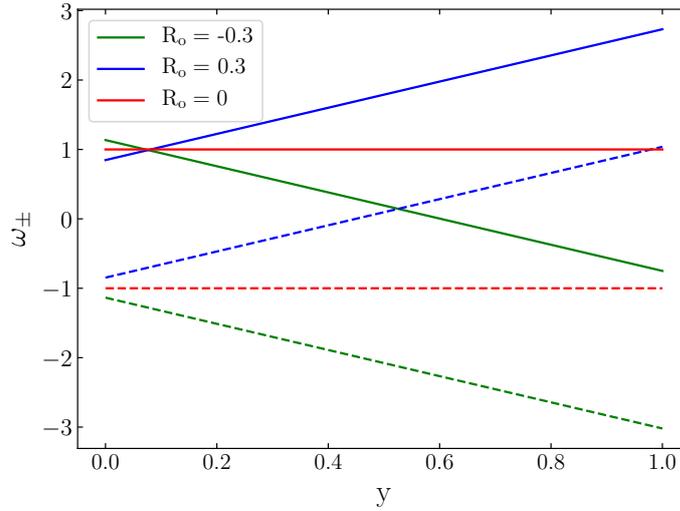


FIGURE 6.4: Droites de retournement $\Delta(y, \omega, R_o) = 0$ dans l'approximation des courtes longueurs d'onde, qui permettent d'identifier le type de PDE ("Partial Differential Equation") selon la région considérée. À nombre de Rossby R_o fixé (couleur fixée), la PDE est hyperbolique entre ω_- (en traits pleins) et ω_+ (en trait pointillés), et elliptique au delà. La boîte est inclinée d'un angle $\theta = 10^\circ$, et le cisaillement constant prend les valeurs $R_o \in \{-0.3, 0.3, 0\}$, où le dernier cas constitue la rotation solide.

par la fréquence de l'onde σ dans le référentiel fluide donne les solutions suivantes :

$$\sigma_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - R_o f \pm \sqrt{(1 - R_o f)^2 + 4R_o \tilde{f}^2 f} \right). \quad (6.29)$$

Pour $\theta \in [0, \pi/2]$, on remarquera que $\sigma_-^2 \leq 0$ et par conséquent les ondes sont propagatives dans l'intervalle $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$, avec

$$\omega_- = k_x R_o y - \sqrt{\sigma_+^2}, \quad (6.30)$$

$$\omega_+ = k_x R_o y + \sqrt{\sigma_+^2}, \quad (6.31)$$

en sachant que $\omega = k_x U + \sigma$ d'après la définition de la fréquence σ décalée par l'effet Doppler.

En rotation solide (i.e. pour $R_o = 0$), on retrouve l'intervalle attendu de propagation des ondes inertielles, c'est à dire les fréquences $\pm 2\Omega$ pour des variables dimensionnées. À nombre de Rossby fixé, on peut tracer cet intervalle en fonction de la coordonnée latitudinale, comme cela est fait à la figure 6.4. Les ondes peuvent se propager entre les lignes en trait plein et en trait pointillé de même couleur. Au delà de ces régions, l'onde est évanescence. Selon les dimensions de la boîte, on remarque que certaines ondes à fréquence fixée ne peuvent pas se propager dans l'ensemble du domaine. Par exemple, si l'on considère un cisaillement tel que $R_o = 0.3$ et une onde excitée à la fréquence $\omega = 0.5$, dans une boîte de dimension 1, l'onde devient évanescence au delà de $y \geq 0.7$. En prenant $R_o = -0.3$, une onde de fréquence $\omega = -1$ se propage quant-à elle dans l'ensemble de la boîte. Cela rappelle les différents modes de propagation mis en évidence par Baruteau & Rieutord (2013) et Guenel et al. (2016a), à savoir les modes D, qui se propagent dans l'ensemble du domaine, et les modes DT¹¹, qui se propagent dans une zone réduite du domaine, délimitée par une surface de retournement (voir figure 6.5) qui sépare les régions où l'onde se propage des régions où l'onde est évanescence. Avec nos notations, cette surface ou point de retournement chez

11. D pour "differential rotation" et T pour "turning surface" ou surface de retournement en français.

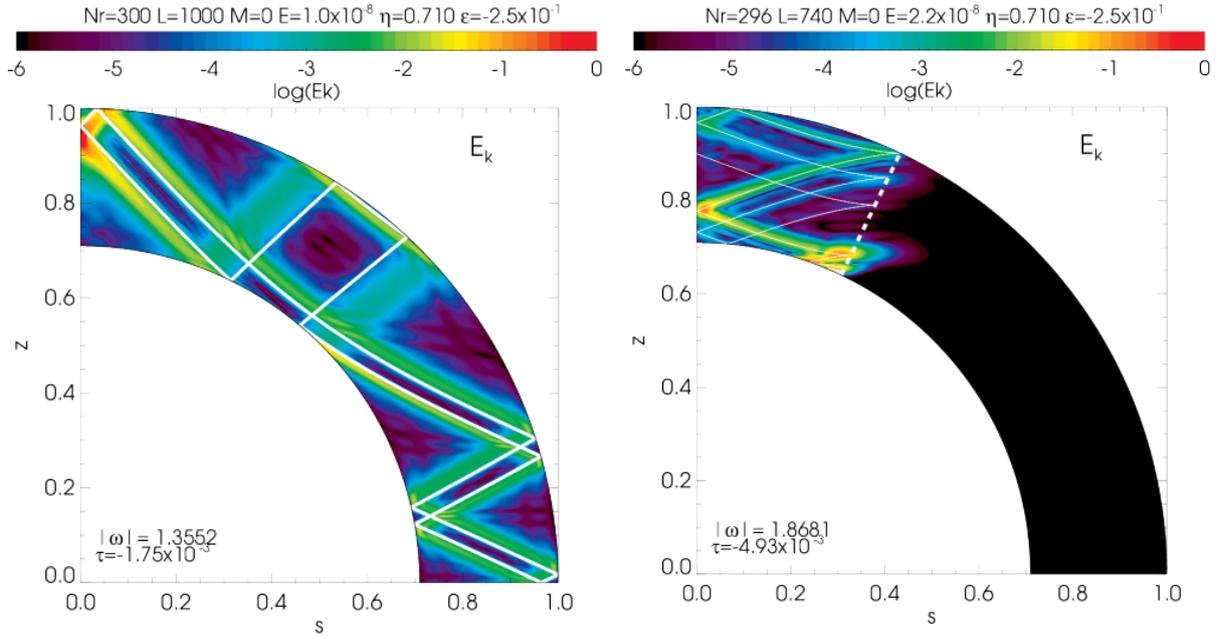


FIGURE 6.5: [Tiré de Guenel et al. (2016a)]. Simulation hydrodynamique illustrant le dépôt d'énergie cinétique E_k , dans une enveloppe convective (coupe méridienne) sans résonance de corotation, d'un mode axisymétrique ($M = 0$) D (gauche) et DT (droite), en présence de rotation différentielle conique. Les quantités physiques et numériques sont les mêmes que celles décrites en figure 6.1. On notera que le rapport d'aspect η est celui du Soleil, et le contraste de cisaillement conique ϵ est anti-solaire. L'attracteur des caractéristiques pour ces paramètres est tracé en traits solides blanc. La surface de retournement est indiquée en trait pointillé dans le panneau de droite.

nous, est défini par l'équation $\Delta = 0$ (représenté par les droites inclinées en figure 6.4 lorsque l'on varie la fréquence inertielle).

6.2.5 Quantifier les transferts d'énergie grâce au flux d'action d'onde

On relaxe maintenant l'approximation des courtes longueurs d'onde. Pour pouvoir analyser les transferts de flux d'énergie dans la boîte et en particulier aux niveaux critiques, il est nécessaire de déterminer une quantité qui identifie et caractérise ces flux. Faisons tout d'abord un bilan d'énergie. On introduit pour cela les déplacements δ , η , et ζ le long de l'axe longitudinal, vertical, et latitudinal respectivement. On peut ainsi exprimer les vitesses perturbées à l'aide de la dérivée particulaire des déplacements comme :

$$\begin{cases} u = \frac{d\delta}{dt} = -\frac{\sigma}{k_x} \partial_x \delta, \\ v = \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\sigma}{k_x} \partial_x \zeta, \\ w = \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\sigma}{k_x} \partial_x \eta. \end{cases} \quad (6.32)$$

Cela permet en particulier d'exprimer la densité perturbée de manière simple à l'aide du déplacement latitudinal : $\rho = -\zeta \tilde{f} U'$. On multiplie alors l'équation du moment vectorielle (p.e. (6.14), (6.15), (6.16)) par la perturbation de la vitesse vectorielle afin d'obtenir l'équation du bilan énergétique :

$$-i\sigma \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = -vU'u + \zeta \tilde{f} U'w - \sigma_f \mathbf{u}^2, \quad (6.33)$$

où les deux premiers termes sont la densité d'énergie cinétique et la divergence du flux acoustique (normalisés). On intègre ensuite cet équilibre énergétique dans une boîte de dimension $L_x = 2\pi/k_x$, L_y , et $L_z = 2\pi/k_z$ pendant une période $T = 2\pi/\omega$. L'utilisation de solutions modales selon x , z , et t , comme via l'équation (6.12), permet de filtrer plusieurs termes de l'équation (6.33) dans un tel volume, à savoir l'énergie cinétique de l'onde, et le flux "acoustique" d'énergie selon x et z . L'équation d'équilibre énergétique dans la boîte s'écrit donc :

$$\underbrace{\left[\overline{p\bar{v}} \right]_{-\delta/2}^{\delta/2}}_{\mathcal{P}_{\text{ext}}} = - \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} U' (\overline{u\bar{v}} - \tilde{f} \overline{w\zeta}) dy}_{\mathcal{P}_{\text{shear}}} - \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_f \overline{u^2} dy}_{D_{\text{visc}}}, \quad (6.34)$$

où la barre horizontale représente la moyenne dans le plan (x, z) et suivant le temps t sur les périodes spatiales L_x , L_z et temporelle T . La quantité \mathcal{P}_{ext} est la puissance du flux acoustique aux interfaces de la boîte (sans lien avec les ondes acoustiques décrites au chapitre 2; Miles, 1961), $\mathcal{P}_{\text{shear}}$ la puissance associée à la force du cisaillement, et D_{visc} la puissance dissipée par la force de friction. On voit ainsi que la force de friction n'est pas la seule à dissiper et à transférer de l'énergie au flot moyen en présence de rotation différentielle. Le cisaillement permet aussi des échanges d'énergie, des ondes vers le flot moyen ou inversement, selon le signe de $\mathcal{P}_{\text{shear}}$, grâce au tenseur des contraintes de Reynolds (normalisé) :

$$\tau = \overline{u\bar{v}} - \tilde{f} \overline{w\zeta} = \overline{v(u + \tilde{f}\eta)}, \quad (6.35)$$

où nous avons utilisé la définition des déplacements donnée en équation (6.32), et effectué une intégration par parties occasionnant un changement de signe. Dans le contexte des flots stratifiés et cisailés verticalement, le stress de Reynolds est aussi appelé flux vertical de moment horizontal (Booker & Bretherton, 1967; Bretherton, 1969; Broad, 1995). Dans notre modèle, τ peut être vu comme un flux latitudinal de moment horizontal (dans le plan perpendiculaire à y). Seul le premier terme dans l'équation (6.35) est présent en l'absence de la pseudo-force de Coriolis (voir par exemple Miles, 1961, pour l'étude de flots 2D cisailés selon y et stratifiés). Dès l'introduction de cette force, un ou plusieurs termes similaires font leur apparition dans le cas des flots longitudinaux ou dans un plan horizontal par rapport à l'axe vertical, stratifiés et cisailés verticalement (Jones, 1967; Bretherton, 1969; Broad, 1995). Sans terme de friction (et sans intégrer selon y), la variation du flux énergétique latitudinal de l'onde est ainsi contrôlé par le travail du cisaillement via le stress de Reynolds :

$$\frac{d}{dy} \overline{p\bar{v}} = -U' v \overline{(u + \tilde{f}\eta)}. \quad (6.36)$$

Le flux énergétique latitudinal moyenné sans friction s'obtient en multipliant par $-\zeta\sigma/k_x$ la projection selon x de l'équation du moment (6.14) :

$$\overline{p\bar{v}} = \frac{\sigma}{k_x} v \overline{(u + \tilde{f}\eta)}. \quad (6.37)$$

Afin d'obtenir l'équation (6.36) en dérivant selon y l'équation (6.37), la relation suivante doit être vérifiée :

$$\sigma \frac{d}{dy} \left\{ v \overline{(u + \tilde{f}\eta)} \right\} = 0, \quad (6.38)$$

autrement dit $\sigma \frac{d\tau}{dy} = 0$. Bien que le flux latitudinal d'énergie $\overline{p\bar{v}}$ ne soit pas conservé à cause de la rotation différentielle latitudinale (équation (6.36), voir aussi Eliassen & Palm, 1961), on peut déterminer une autre quantité qui l'est dans la quasi-totalité du domaine, excepté à la résonance de corotation $\sigma = 0$,

ici le stress de Reynolds. L'étude de Booker & Bretherton (1967) a montré que τ était discontinu à la corotation, mettant en exergue les échanges de flux d'énergie entre les ondes et le flot moyen. D'après l'équation (6.37), le stress de Reynolds est relié à la quantité $\mathcal{A} = \overline{pv}/\sigma$ comme $\mathcal{A} = \tau/k_x$, où \mathcal{A} est aussi un invariant par rapport à y , et qui est appelé le flux d'action d'onde (Grimshaw, 1975b; Andrews & McIntyre, 1978). On peut démontrer sa conservation d'une manière différente, à partir des équations (6.13) à (6.17) qui gouvernent la propagation des ondes en milieu cisailé. Cela a été fait en annexe ???. Le flux d'action d'onde s'écrit de manière explicite en fonction de v et v' grâce à l'expression de la pression Eq. (6.20) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{pv^*}{\sigma} \right\} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{iAv_y v^* + f \tilde{f} k_z |v|^2}{\sigma^2 k_\perp^2} \right\}. \quad (6.39)$$

Dans l'approximation traditionnelle, c'est-à-dire en l'absence de composante horizontale du vecteur rotation, et dans le contexte d'un flot moyen horizontal stratifié et cisailé selon z , le flux d'action d'onde est directement proportionnel au flux vertical de moment cinétique (Jones, 1967; Broad, 1995). Dans le même contexte, mais dans l'approximation non-traditionnelle, Grimshaw (1975b) ne trouve pas d'analogie simple entre cet invariant et un flux de moment horizontal ou cinétique. Il faut préciser qu'en plus de travailler avec un cisaillement différent, notre flot est unidirectionnel contrairement au leur qui possède une composante méridionale.

La construction d'un tel invariant est particulièrement importante dans le sens où $\sigma \mathcal{A} = \overline{pv}$ est la densité de flux énergétique transporté par les ondes à travers la surface (z, x) , et est donc équivalent à la densité locale d'énergie \mathcal{E} transportée par la vitesse de groupe v_g dans la direction latitudinale (p.e., Bretherton, 1966; Bretherton & Garrett, 1968; Bretherton, 1969; Grimshaw, 1975b; Mathis & de Brye, 2012). Dans la suite, on utilisera donc la quantité $\sigma \mathcal{A}$ afin de déterminer la direction vers laquelle l'énergie de l'onde est transportée, et \mathcal{A} servira de diagnostic pour évaluer les échanges de flux d'énergie aux niveaux critiques. On rappelle en effet que le flux d'action d'onde est conservé dans l'ensemble du domaine dans un milieu non dissipatif à l'exception potentielle des niveaux critiques.

6.2.6 Étude analytique du comportement des ondes aux niveaux critiques

6.2.6.1 Avec un profil de cisaillement latitudinal

L'équation de Poincaré (6.18) n'admet pas de solutions évidentes dans le cas général, i.e. sans simplifications. Néanmoins, étant donné que l'on s'intéresse au comportement des ondes inertielles proches des niveaux critiques, il est raisonnable, dans un certain voisinage autour de ces niveaux critiques, d'approximer cette ODE à l'aide d'un développement de Taylor des coefficients (6.19) afin de garder seulement les termes dominants à l'ordre le plus bas. L'ODE simplifiée au voisinage des niveaux critiques est alors soluble par la méthode de Frobenius (voir par exemple Morse & Feshbach, 1953), où l'on se base notamment sur les travaux réalisés par Jones (1967), Grimshaw (1975b) et Booker & Bretherton (1967).

Comme expliqué précédemment, pour un profil de rotation qui dépend de la composante y , c'est à dire lorsque la boîte est inclinée, trois niveaux critiques sont à étudier, à savoir la corotation $\sigma = 0$, et deux singularités additionnelles dues à la présence de la rotation $\sigma = \pm \tilde{f}$. On note respectivement la latitude de ces niveaux (points) critiques y_0 , et y_\pm , respectivement, et par y_c celle d'un point critique quelconque.

Le développement de Taylor aux ordres les plus bas de l'ODE (6.18) avec ses coefficients (6.19) au voisinage des points critiques y_{\pm} et y_0 donne dans chaque cas ¹² :

$\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}$	$\sigma \rightarrow 0$
$v'' + \frac{B_{\pm}}{y - y_{\pm}} v' + \left[\frac{E_{\pm}}{y - y_{\pm}} + F_{\pm} \right] v = 0,$	$v'' + \left[\frac{B_0}{y - y_0} + C_0 \right] v' + \left[\frac{D_0}{(y - y_0)^2} + \frac{E_0}{y - y_0} + F_0 \right] v = 0,$
$\begin{cases} B_{\pm} = 1 \pm i \frac{k_z f}{k_x U'(y_{\pm})}, \\ E_{\pm} = \pm \frac{\tilde{f}^2 k_{\perp}^2 - k_z^2 f [f - U'(y_{\pm})]}{2 \tilde{f} k_x U'(y_{\pm})} \\ \quad + \frac{1}{\tilde{f}} [i k_z f \pm k_x U'(y_{\pm})], \\ F_{\pm} = \pm \frac{k_x U''(y_{\pm})}{\tilde{f}}, \end{cases}$	$\begin{cases} B_0 = -2, \\ C_0 = 2i k_z \frac{f}{\tilde{f}}, \\ D_0 = 2, \\ E_0 = -\frac{2i k_z f}{\tilde{f}} - \frac{U''(y_0)}{U'(y_0)}, \\ F_0 = -k_z^2 \frac{f [f - U'(y_0)]}{\tilde{f}^2}, \end{cases}$

où on suppose que les dérivées première et seconde du flot moyen U ne divergent pas en y_{\pm} et y_0 . La méthode de Frobenius est applicable sous réserve que les pré-facteurs devant v' et v soient des fonctions analytiques aux points singuliers y_{\pm} et y_0 dans chacune des équations, ce qui est le cas ici. Les points y_{\pm} et y_0 sont alors appelés des singularités régulières. Les termes en rouge ci-dessus sont déterminants dans l'application de cette méthode, car ils permettent d'obtenir les deux exposants de plus bas degré des fonctions puissances, solutions de ces équations, à partir de l'équation indicelle (voir l'article associé pour plus de détails, ou [Morse & Feshbach, 1953](#)). Les autres termes permettent quant à eux de déterminer certains des coefficients de ces solutions. Ainsi, les solutions totales et exactes des équations différentielles écrites ci-dessus dans la table sont de la forme :

$\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}$	$\sigma \rightarrow 0$
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (y - y_{\pm})^n + b_n (y - y_{\pm})^{n \mp i k_z f / (k_x U'(y_{\pm}))}$ $\simeq a_0 + b_0 (y - y_{\pm})^{\mp i k_z f / (k_x U'(y_{\pm}))}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (y - y_0)^{n+1} + \frac{U''(y_0)}{U'(y_0)} \ln(y - y_0) d_n (y - y_0)^{n+2}$ $\simeq c_0 (y - y_0) + c_1 (y - y_0)^2 + \frac{U''(y_0)}{U'(y_0)} \ln(y - y_0) d_0 (y - y_0)^2$

où les coefficients a_n , b_n , c_n , et d_n sont des constantes complexes. On indique en seconde ligne la solution approchée de plus bas degré au voisinage des niveaux critiques dans les deux cas. Proche de la corotation, il est nécessaire de faire intervenir la fonction logarithme afin de créer une solution indépendante ([Schmid et al., 2002](#)). On fait remarquer que $d_0 = c_0$, ce qui se vérifie simplement en injectant les solutions dans l'équation différentielle pour la corotation de la première table. C'est d'ailleurs la méthode à utiliser pour obtenir tous les autres coefficients, excepté a_0 , b_0 , et $(c_0) c_1$ qui dépendent des conditions limites.

12. **Attention**, des termes ont été omis dans les coefficients non dominants (en noir) des équations différentielles de la table. Cela affecte la solution de Frobenius à la corotation dans la seconde table ci-dessus. Pour une version correcte des équations différentielles au voisinage des niveaux critiques, se référer à l'article associé à ce travail.

Afin de comprendre comment les ondes inertielles traversent les niveaux critiques, ils faut s'intéresser aux flux d'énergie entrant et sortant. Les points y_{\pm} et y_0 qui sont des singularités régulières sont aussi des points de branchement¹³ pour les fonctions $(y - y_{\pm})^{\mp ik_z f(k_x U')}$ et $\ln(y - y_0)$, respectivement. La reconnection des solutions de part et d'autre de la couche critique est donc délicate. La méthode généralement utilisée est d'injecter une partie complexe ω_{\Im} dans la fréquence inertielle, i.e. $\omega = \omega_{\Re} + i\omega_{\Im}$ en supposant $\omega_{\Im} > 0$. Cette inégalité signifie que l'on applique la condition de radiation qui assure la causalité, i.e. $|\exp(-i\omega t)| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ ou dit autrement il n'existe pas de perturbation croissante et divergente dans le passé (Miles, 1961; Booker & Bretherton, 1967; Grimshaw, 1975b; Ringot, 1998). En utilisant cet artifice physique, on brise la "dégénérescence" induite par les fonctions multivaluées $(y - y_{\pm})^{\mp ik_z f(k_x U')}$ et $\ln(y - y_0)$ pour $y - y_{\pm} \leq 0$ et $y - y_0 \leq 0$. On note ainsi le chemin emprunté (au dessus, ou en dessous du niveau critique) par l'argument complexe lorsque l'on décroît $y - y_c$. Les solutions en dessous des points critiques $y < y_c$ sont donc, par reconnection, (voir les sections 3.3.1 et 3.3.2 dans l'article en fin de chapitre pour plus de détails techniques) :

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}} \\ a_0 + b_0 |y - y_{\pm}|^{\mp ik_z f(k_x U')} e^{\mp \pi k_z f / |k_x U'|} \end{array} \right| \begin{array}{c} \boxed{\sigma \rightarrow 0} \\ c_0 \left[|y - y_0| + \frac{U''}{U'} (\ln |y - y_0| - i\pi) |y - y_0|^2 \right] + c_1 |y - y_0|^2 \end{array},$$

où U' et U'' sont évaluées à y_{\pm} ou y_0 . Ainsi, le flux d'action d'onde \mathcal{A} (équation (6.39)) de chaque côté des niveaux critiques est discontinu et égal à¹⁴ :

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}} \\ \frac{k_z f}{2\tilde{f}k_{\perp}^2} \begin{cases} |a_0|^2 - |b_0|^2, & y > y_{\pm} \\ |a_0|^2 - |b_0|^2 e^{\mp 2\pi k_z f / |k_x U'|}, & y < y_{\pm} \end{cases} \end{array} \right| \begin{array}{c} \boxed{\sigma \rightarrow 0} \\ \frac{\tilde{f}^2}{2k_x^2 U'^2 k_{\perp}^2} \left[\Im\{c_0^* c_1\} + |c_0|^2 \times \begin{cases} \frac{f}{\tilde{f}} k_z, & y > y_0 \\ \frac{f}{\tilde{f}} k_z + \pi \frac{U''}{U'} \end{cases} \right] \end{array}.$$

D'après l'analyse réalisée en section 6.2.5, la direction de propagation de l'énergie est donnée par le signe de $\sigma \mathcal{A}$, c'est à dire $\pm(\mp$ pour l'onde de coefficient $b_0)$ $\text{sign}(f k_z)$ aux points critiques y_{\pm} et $-\text{sign}(k_x U \mathcal{A})$ à la corotation. Il est cependant difficile de tirer le raisonnement plus loin au niveau critique y_0 , car les coefficients de l'onde c_0 et c_1 , inconnus et contraints par les conditions aux limites, sont indispensables pour connaître le signe de \mathcal{A} . Sans cette information, on ne peut pas savoir si le saut entraîne une atténuation ou au contraire une amplification de l'énergie des ondes lorsque ces dernières traversent le point de corotation¹⁵. On remarquera néanmoins que pour un cisaillement linéaire, le flux d'action d'onde est continu dans l'ensemble du domaine, et donc aucun échange d'énergie n'a lieu à la corotation (cela avait déjà été remarqué pour les ondes de gravité dans un milieu cisailé verticalement par Grimshaw, 1975b).

A contrario, on peut approfondir les échanges d'énergie aux niveaux critiques y_{\pm} . Pour des nombres d'onde réels et positifs et dans l'intervalle $\theta \in]0, \pi/2]$, l'onde de coefficient b_0 transporte de l'énergie vers $y - y_- > 0$ (le haut) lorsqu'elle rencontre le niveau critique y_- et vers $y - y_+ < 0$ (le bas) lorsqu'elle rencontre le niveau critique y_+ . Le raisonnement est inverse pour l'onde de coefficient a_0 à cause de la

13. Des points de branchement sont des points singuliers d'une fonction analytique complexe multivaluée ou multiforme, c'est à dire une fonction qui peut posséder zéro ou plusieurs images. C'est le cas de la fonction logarithme complexe : $\ln(z) = \ln|z| + i[\arg(z) + 2\pi n]$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

14. Pour le flux d'action à la corotation, consulter l'article associé (voir note de bas de page 12).

15. Dans la version corrigée du flux d'action d'onde à la corotation (voir note de bas de page 12, 14 et l'article associé), le terme $\pi U''/U'$ n'apparaît plus, ce qui signifie qu'il n'y a pas de discontinuité du le flux d'onde et donc pas d'échange d'énergie à la corotation, quel que soit le profil du flot moyen.

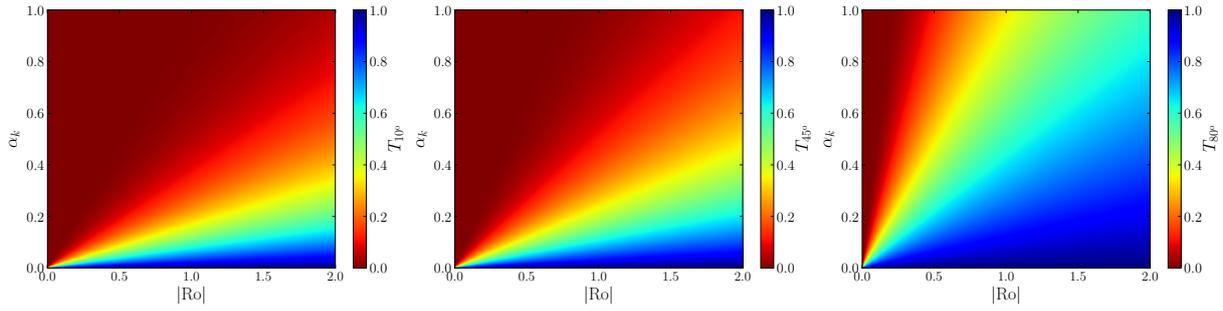


FIGURE 6.6: Taux de transmission T_{θ_0} du flux d'action d'onde en fonction de la valeur absolue du nombre de Rossby $|R_o| = |U'|$ (avec U' normalisé par 2Ω), le rapport des nombres d'onde $\alpha_k = k_z/k_x$, et pour différentes colatitudes de la boîte, de gauche à droite, $\theta_0 = 10^\circ$, $\theta_0 = 45^\circ$, et $\theta_0 = 80^\circ$.

différence de signe. Par ailleurs, on notera que seule l'onde de coefficient b_0 subit une discontinuité dans son flux d'action d'onde, qui est dans tous les cas atténué. Le facteur de transmission de son flux d'action d'onde s'écrit :

$$T_{\theta_0} = \exp(-2\pi|k_z f|/|k_x U'|) = \exp(-2\pi|\alpha_k \cos \theta_0|/|R_o|), \quad (6.40)$$

avec $\alpha_k = k_z/k_x$ et $R_o = U'(y_{\pm})$, quel que soit l'angle $\theta_0 \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$. Ce facteur est représenté en figure 6.6 pour différentes inclinaisons de la boîte, valeurs des nombres d'onde et nombre de Rossby R_o . On constate que plus la boîte se rapproche du pôle (Nord), plus il est probable que l'énergie de l'onde soit fortement absorbée quelle que soit la valeur α_k , pour des gradients de rotation faibles et des rotateurs rapides. Proche de l'équateur, l'onde peut être entièrement transmise, à condition que $\alpha_k \lesssim 0.1$ pour des valeurs de R_o modérées. Les cas où $\theta_0 = \{0, \pi\}$ ne sont pas bien décrits par l'analyse de cette section et nécessitent un traitement spécifique, comme cela sera discuté dans la section suivante.

On note par ailleurs que pour chaque niveau critique y_{\pm} , selon le signe de $k_z f$, l'atténuation du flux d'action d'onde ne concerne que les ondes se propageant dans une direction privilégiée, comme récapitulé dans le tableau ci-dessous,

	$k_z f > 0$		$k_z f < 0$	
	y_+	y_-	y_+	y_-
a_0	$\rightarrow \rightarrow$	$\leftarrow \leftarrow$	$\leftarrow \leftarrow$	$\rightarrow \rightarrow$
b_0	$\leftarrow\leftarrow \leftarrow$	$\rightarrow \rightarrow\rightarrow$	$\rightarrow \rightarrow\rightarrow$	$\leftarrow\leftarrow \leftarrow$

où $|$ symbolise le niveau critique, $\rightarrow\rightarrow$ ($\leftarrow\leftarrow$) l'onde atténuée, et un sens vers la droite indique une onde qui se propage vers les $y - y_{\pm}$ positifs. C'est ce qui est appelé l'effet valve notamment par [Acheson \(1972\)](#), [McKenzie \(1973\)](#) et [Grimshaw \(1975b, 1979\)](#). Ce phénomène est directement lié à l'approche non-traditionnelle, car [Jones \(1967\)](#) ne l'observe pas dans l'approximation traditionnelle.

6.2.6.2 Avec un profil de rotation cylindrique

Lorsque la boîte est située au pôle Nord ou Sud ($\theta = 0$ ou π), y est identifiable à la coordonnée radiale cylindrique : le profil de rotation $U(y)$ est ainsi dit cylindrique et la résonance de corotation est le seul niveau critique. Dans ce cas particulier, l'équation de Poincaré Eq. (6.18) et ses coefficients (6.19) prennent une forme simple, car $\tilde{f} = 0$ et $f = 1$:

$$v'' + \left[\frac{k_z^2(1 + \vartheta U')}{\sigma^2} + \frac{k_x U''}{\sigma} - k_{\perp}^2 \right] v = 0, \quad (6.41)$$

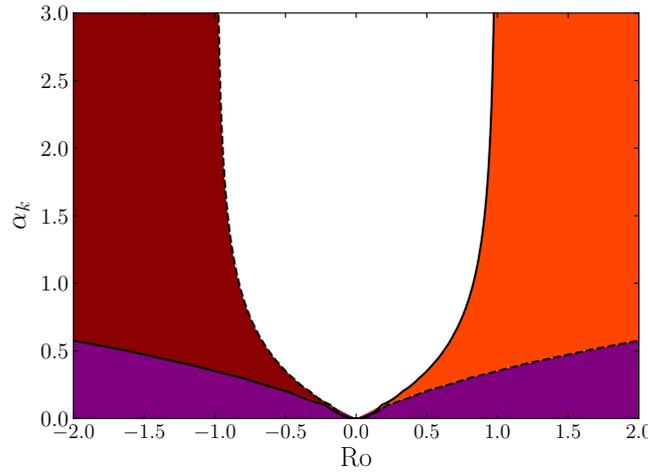


FIGURE 6.7: Signe de $1/4 - R$ lorsque la boîte est au pôle Nord ou Sud, en fonction du nombre de Rossby R_o et du rapport des nombres d'onde horizontaux α_k , d'après l'équation (6.44). Les traits pleins et hachurés correspondent à l'équation $R = 1/4$ aux pôles Nord et Sud, respectivement. En violet, $R < 1/4$ et en blanc $R > 1/4$ quel que soit le pôle concerné. En rouge foncé $R > 1/4$ au pôle Nord et $R < 1/4$ au pôle Sud et vice versa dans la région orange.

où $\vartheta = -1$ au pôle Nord et $\vartheta = 1$ au pôle Sud. Lorsque le cisaillement est linéaire, l'équation (6.41) admet des solutions du type fonctions de Whittaker (Abramowitz & Stegun, 1972). Ce cas particulier qui est traité dans l'article associé (section 3.4.1), n'est pas approfondi ici. Comme dans la section précédente, nous ne faisons pas d'hypothèse sur l'écriture du flot moyen.

On approxime l'équation différentielle (6.41) au premier ordre au voisinage du niveau critique y_0 par ¹⁶ :

$$v'' + \left[\frac{\alpha_k^2 (1 + \vartheta R_o) / R_o^2}{(y - y_0)^2} - \frac{R_o' / R_o}{y - y_0} - k_{\perp}^2 \right] v = 0, \quad (6.42)$$

avec $R_o = U'(y_0)$ et $R_o' = U''(y_0)$. Les solutions à l'ordre le plus bas de cette équation s'écrivent de part et d'autre de la corotation :

$$v(y) \simeq \begin{cases} a_0 (y - y_0)^{\frac{1}{2} + \mu} + b_0 (y - y_0)^{\frac{1}{2} - \mu}, & y > y_0 \\ -i_{\varsigma} \left[e^{-i_{\varsigma} \pi \mu} a_0 (y - y_0)^{\frac{1}{2} + \mu} + e^{i_{\varsigma} \pi \mu} b_0 (y - y_0)^{\frac{1}{2} - \mu} \right], & y < y_0 \end{cases} \quad (6.43)$$

en appliquant la méthode de Frobenius, avec à nouveau a_0, b_0 des constantes complexes, $\varsigma = \text{sign}(k_x R_o)$, et où

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} - R}, \quad \text{avec} \quad R = \frac{\alpha_k^2 (1 + \vartheta R_o)}{R_o^2}, \quad (6.44)$$

μ étant réel ou complexe. Cette propriété a des conséquences importantes pour le comportement des ondes traversant la corotation. En effet, dans le cas où μ est complexe, les solutions Eq. (6.43) peuvent être assimilées à des fonctions d'onde exhibant une enveloppe évanescence, et un déphasage de $\pm\pi/2$ après le passage de la corotation. Dans le cas opposé où μ est réel, l'interprétation physique de la solution est beaucoup moins évidente. Cette quantité est représentée à la figure 6.7.

16. Ici aussi, des termes (non dominants) ont été omis (voir l'article associé en fin de chapitre). Cependant, cela n'a pas d'impact sur la résolution de l'Eq. (6.42) et l'analyse qui suit.

Le flux d'action d'onde à l'équation (6.39) prend une forme simple dans la limite où $\tilde{f} = 0$:

$$\mathcal{A} = -\frac{\Im(v_y v^*)}{2k_\perp^2}. \quad (6.45)$$

On notera l'écriture simplifiée de la contrainte de Reynolds au pôle, $\tau = \overline{uv}$ ($= k_x \mathcal{A}$), ce qui se vérifie aisément en utilisant l'expression de u donnée par les relations de polarisation (Eq. (6.22)).

Pour l'écriture du flux d'action d'onde \mathcal{A} , il est nécessaire de distinguer les cas où μ est réel ou complexe, i.e. $R \lesseqgtr 1/4$:

Régime stable ($R > 1/4$)	Régime possiblement instable ($R < 1/4$)								
$\mathcal{A} = -\frac{ \mu }{2k_\perp^2} \begin{cases} a_0 ^2 - b_0 ^2, & y > y_0 \\ - a_0 ^2 e^{2\varsigma\pi \mu } + b_0 ^2 e^{-2\varsigma\pi \mu }, & y < y_0 \end{cases}$	$\mathcal{A} = -\frac{\mu}{k_\perp^2} \begin{cases} \Im(a_0 b_0^*), & y > y_0 \\ -\Im(a_0 b_0^* e^{-2i\pi\mu\varsigma}), & y < y_0 \end{cases}$								
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$k_x U' > 0$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">$k_x U' < 0$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">y_0</td> <td style="border-left: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">y_0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$a_0 \rightarrow \dashrightarrow$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">$\leftarrow \dashleftarrow \leftarrow$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$b_0 \leftarrow \dashleftarrow \leftarrow$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">$\rightarrow \dashrightarrow$</td> </tr> </table>	$k_x U' > 0$	$k_x U' < 0$	y_0	y_0	$a_0 \rightarrow \dashrightarrow$	$\leftarrow \dashleftarrow \leftarrow$	$b_0 \leftarrow \dashleftarrow \leftarrow$	$\rightarrow \dashrightarrow$	$\text{sign}(\sigma \mathcal{A}) = \varsigma \text{sign}[\Im(a_0 b_0^*)] = ?$
$k_x U' > 0$	$k_x U' < 0$								
y_0	y_0								
$a_0 \rightarrow \dashrightarrow$	$\leftarrow \dashleftarrow \leftarrow$								
$b_0 \leftarrow \dashleftarrow \leftarrow$	$\rightarrow \dashrightarrow$								

- Dans le cas où $R > 1/4$, la direction de la propagation de l'énergie se détermine aisément en utilisant le fait que $\text{sign}(\sigma) = -\varsigma \text{sign}(y - y_0)$. Dans chaque situation schématisée dans le tableau, l'onde est amortie après son passage à la corotation, ce qui se traduit pas un facteur de transmission inférieur à 1 :

$$T_F = \exp\{-2\pi|\mu|\}, \quad (6.46)$$

tracé en figure 6.8 par rapport à R_o et α_k , dans les cas où la boîte est aux pôles Nord et Sud. On remarque que, quel que soit le pôle, le flux d'action d'onde est très fortement absorbé pour la plupart des valeurs de α_k et R_o , ce qui fait de la corotation un mur pour la propagation des ondes et de l'énergie dans le cas ou $R > 1/4$. L'onde transmet ainsi le moment cinétique qu'elle transporte au flot moyen.

- Dans la configuration où $R < 1/4$, il n'est pas possible de déterminer le signe du flux d'action d'onde sans connaître les conditions aux limites. Cela laisse la possibilité d'une amplification du flux d'action d'onde. Par exemple pour $\varsigma = +1$ ($\varsigma = -1$), il suffit que $\Im(a_0 b_0^*) > 0$ ($\Im(a_0 b_0^*) < 0$) pour que le flux d'action d'onde soit amplifié après son passage à la corotation, auquel cas l'onde extrait cette fois-ci de l'énergie (et du moment cinétique) du flot moyen.

Le critère $R \lesseqgtr 1/4$ est une forme analogue au théorème de Miles-Howard (Miles & Howard, 1964), qui s'applique pour les ondes de gravité se propageant dans des flots cisailés verticalement. Ce théorème fait intervenir le nombre de Richardson Ri , qui est le rapport quadratique entre la fréquence de Brunt-Väisälä et le cisaillement vertical, et s'écrit similairement $Ri \lesseqgtr 1/4$. Le théorème de Miles-Howard assure la stabilité du flot moyen lorsque $Ri > 1/4$, mais pas lorsque $Ri < 1/4$. Sous des conditions très spécifiques concernant la géométrie du modèle et les conditions aux limites, le flot peut se révéler instable sous ce critère-là. Dans les travaux de Lindzen & Barker (1985) et Alvan et al. (2013), le régime $R < 1/4$ est étudié sous le prisme des mécanismes de sur-transmission et sur-réflexion de l'onde après son passage à la corotation, avec l'utilisation d'un modèle à trois couches (voir aussi la revue de Lindzen, 1988). Nous verrons dans la suite que ces mécanismes existent aussi pour les ondes inertielles avec rotation différentielle cylindrique dans un modèle à trois couches légèrement différent du leur.

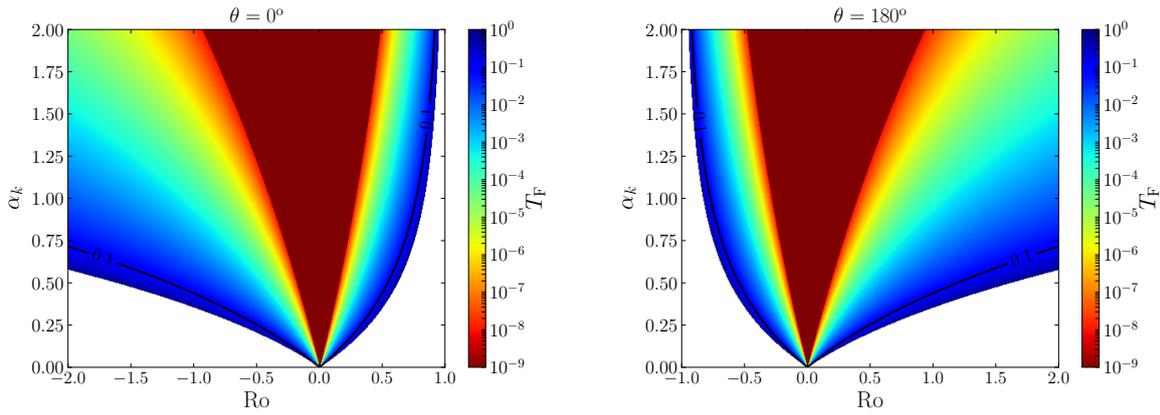


FIGURE 6.8: Taux de transmission T_F du flux d'action d'onde après le passage de la corotation lorsque $R > 1/4$, en fonction de R_o et $\alpha_k = k_z/k_x$. La région où $R < 1/4$ est en blanc, et le cône rouge foncé correspond à des valeurs de T_F inférieures à 10^{-9} . *Gauche* : La boîte est au pôle Nord. *Droite* : La boîte est au pôle Sud. Les configurations pôles Nord/Sud sont symétriques par rapport à $R_o = 0$.

6.3 Discussion à propos des instabilités

En rotation cylindrique, l'équation différentielle (6.41) est similaire à celle qui gouverne les ondes de gravité se propageant en présence de rotation différentielle verticale (p.e., Lindzen, 1988). C'est pourquoi on arrive à déterminer ce qui pourrait être une condition de stabilité proche du théorème de Miles-Howard. On insiste néanmoins sur le fait que notre critère est établi à nombres d'onde vertical et azimutal fixés (car R dépend de α_k), alors que le théorème de Miles-Howard ne dépend pas des nombres d'onde. Par ailleurs, la condition $Ri < 1/4$ est nécessaire mais pas suffisante pour avoir une instabilité du flot moyen (quoique des études aient montré que cela était possible pour $Ri > 1/4$ en présence de viscosité, p.e. Miller & Lindzen, 1988). Dans notre cas, le critère $R < 1/4$ se traduit de manière générale par des cisaillements forts, i.e. $|R_o| > 1$, comme le montre la figure 6.7. Le mécanisme de sur-réflexion et sur-transmission peut être à l'origine de ces instabilités comme écrit plus haut, mais il nécessite des conditions très particulières en terme de géométrie : les modèles à une ou même deux zones (une zone où $Ri < 1/4$ et éventuellement une zone où les ondes sont progressives) ne permettent pas de tels phénomènes (Rosenthal & Lindzen, 1983; Knobloch, 1984; Lindzen & Barker, 1985). Un modèle à trois zones est obligatoire pour obtenir ce phénomène d'amplification, dans lequel la zone où $Ri < 1/4$ est entourée d'une zone "propagative" et d'une zone soit propagative soit "aspirante" qui force l'onde à traverser la corotation. En plus de cette géométrie particulière, il faut des conditions aux limites spécifiques permettant le retour successif de l'onde inchangée à la corotation (on dit aussi que l'onde doit être quantifiée).

Pour ce qui est de la rotation différentielle conique, l'étude analytique a montré qu'une amplification du flux d'action d'onde était éventuellement possible¹⁷ à la corotation pour un flot non-linéaire, à cause du terme logarithmique. Néanmoins, de là à montrer qu'il pourrait être à l'origine d'instabilités, il faudrait envisager une étude temporelle aux valeurs initiales pour répondre correctement à cette question comme cela a été réalisé par exemple dans Watts et al. (2003, 2004) pour des ondes de Rossby en présence de rotation différentielle conique.

17. Ceci n'est plus possible avec la solution de l'équation différentielle corrigée proche de la corotation lorsque la boîte est inclinée par rapport à l'axe de rotation (voir section 3.3.2 de l'article en fin de chapitre).

6.4 Approche numérique des ondes inertielles en présence de couches critiques

6.4.1 Un modèle numérique à trois zones

Afin de tester les prédictions analytiques présentées aux sections précédentes pour différents profils de cisaillement, nous avons aussi utilisé une approche numérique afin de modéliser la propagation d'ondes traversant des niveaux critiques. Cette approche se fonde sur un modèle numérique à trois zones (comme dans Jones, 1967; Lindzen & Barker, 1985; Alvan et al., 2013) dans lequel une zone (couche) de cisaillement est entourée de deux zones sans rotation différentielle. L'intérêt d'un tel modèle est d'avoir le contrôle sur les ondes incidentes, réfléchies et transmises grâce à la forme simple de l'équation de Poincaré dans les régions sans cisaillement, car l'ODE admet des solutions analytiques et ondulatoires (voir en particulier l'appendice D de l'article en fin de chapitre). Ainsi, nous imposons un flot moyen (continu) du type :

$$U(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 : & \text{zone I,} \\ \Lambda y^{n_y} & \text{for } 0 \leq y \leq 1 : & \text{zone II,} \\ \Lambda & \text{for } y > 1 : & \text{zone III.} \end{cases} \quad (6.47)$$

où Λ est une constante que l'on appelle paramètre de cisaillement dans la suite, et où le flot moyen dans la zone II est en loi de puissance ($n_y = 1$ pour un profil linéaire). En particulier, on se restreint aux cas $n_y \in \{1, 2, 3\}$. Cette définition du flot permet une implémentation numérique simple sans se restreindre à un flot linéaire, et une interprétation analytique à l'aide de la méthode de Frobenius toujours compatible. Dans les zones I et III qui présentent des solutions analytiques, nous avons sélectionné deux ondes se propageant en sens inverse, i.e. avec des nombres d'onde différents, et une seule onde montante (vers les y positifs) dans la zone III. On considère en effet qu'une onde incidente provenant de la région I et rencontrant la région II, peut être soit réfléchie soit transmise à la région III.

Pour ce qui est de fixer l'amplitude de ces ondes, seule inconnue, nous imposons la continuité de la vitesse latitudinale et de la pression aux interfaces entre chaque zone (situées en $y = 0$ et $y = 1$). À noter que ce choix est porté par la volonté d'assurer la continuité du flux d'action d'onde $\mathcal{A} = \overline{pv}/\sigma$ aux interfaces, et il diffère des conditions aux limites ("interfaciales") choisies par Lindzen & Barker (1985) et Alvan et al. (2013) qui imposent la continuité de la vitesse et de sa dérivée première aux interfaces. Ce faisant, \mathcal{A} est continu dans l'ensemble du domaine, excepté aux niveaux critiques. En outre, nous fixons l'amplitude de l'onde transmise $A_T = 1$ et l'amplitude des ondes incidente et réfléchie sont déduites des solutions numériques v et p de la zone de cisaillement à l'interface $y = 0$, ce qui simplifie la mise en œuvre numérique sans perte de généralité.

Concernant les solutions numériques, nous avons choisi de résoudre deux équations différentielles du premier ordre en (v, p) , analogues à l'ODE du 2nd ordre (6.18), au lieu de cette dernière, et ceci pour deux raisons. D'une part, cette alternative est plus cohérente de par notre choix des conditions aux interfaces. D'autre part, pour certains niveaux critiques, l'intégrateur utilisé (ode15s de MATLAB) n'arrive pas à résoudre l'équation différentielle du 2nd ordre (6.18) au delà de ces niveaux critiques, car la tolérance d'intégration fixée (même élevée) ne peut pas être respectée au niveau de ces singularités. L'intégrateur numérique résout ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} F_{1,v}v + F_{1,p}p = Av', \\ F_{2,v}v + F_{2,p}p = Ap', \end{cases} \quad (6.48)$$

où

$$\begin{aligned}
F_{1,v} &= \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \left(k_x \tilde{f} + i k_z s \right) - (U' - f) \left(k_x s + i k_z \tilde{f} \right), \\
F_{1,p} &= -i k_{\perp}^2 s, \\
F_{2,v} &= i s \left[s^2 + f(U' - f) \right] - i \tilde{f}^2 \left(s + f \frac{U'}{\sigma} \right), \\
F_{2,p} &= i k_z f \tilde{f} - k_x f s,
\end{aligned} \tag{6.49}$$

en se plaçant désormais dans un milieu dissipatif, avec $s = \sigma + i\sigma_f$ la fréquence Doppler-shiftée modifiée par la force de friction. En plus de l'étude de l'effet de la viscosité sur le comportement des ondes aux niveaux critiques, l'addition d'une petite viscosité nous permet d'éviter les singularités strictes pour $\sigma = \pm \tilde{f}$, qui bloquent la résolution numérique des équations (6.48).

On impose dans le modèle que les ondes soient progressives dans les régions I et III, ce qui se traduit par des nombres d'onde latitudinaux k_I , k_T et k_R de l'onde incidente, transmise, et réfléchie réels dans ces régions (en l'absence de friction). On précise d'ailleurs que les valeurs des nombres d'onde k_x et k_z (réels et positifs) sont choisies en fonction de ce critère, et aussi pour garder un caractère oscillatoire "visible" de ces ondes dans un espace restreint autour de la couche de cisaillement. Par ailleurs, ω est aussi choisi réel, positif ou négatif, et sa valeur est conditionnée par la présence et la position (optimalement loin des interfaces $y = 0$ ou $y = 1$) d'un ou plusieurs niveaux critiques dans la zone de cisaillement. Les paramètres que nous faisons varier sont :

- l'inclinaison de la boîte θ ,
- la fréquence inertielle ω ,
- les nombres d'onde k_x et k_z ,
- le paramètre de cisaillement Λ ,
- le coefficient de friction (normalisé) σ_f ,
- l'exposant n_y du flot moyen en loi de puissance.

Pour chaque cas numérique étudié au voisinage d'un niveau critique, la solution déterminée à l'aide de la méthode de Frobenius (à l'ordre le plus bas) en section 6.2.6 a été incluse. Pour chaque solution, les coefficients a_0 et b_0 ont été estimés en résolvant analytiquement le système simple proche du niveau critique en question :

$$\begin{cases} v_F = v_{\text{num}} \\ v'_F = v'_{\text{num}} \end{cases} \tag{6.50}$$

où v_F est la vitesse de Frobenius à l'ordre le plus bas et v_{num} est la vitesse extraite de la résolution numérique. De manière générale on s'est placé à $y - y_c = 10^{-4}$ pour trouver a_0 et b_0 .

6.4.2 Étude numérique avec rotation différentielle conique

On étudie ici la propagation des ondes à travers les différents niveaux critiques y_0 , y_+ et y_- lorsque la boîte est inclinée par rapport à l'axe de rotation, en utilisant le modèle numérique présenté à la section précédente. On précise que le paramètre de cisaillement Λ est souvent fixé à $\Lambda = 0.3$ dans la suite en référence au contraste de cisaillement moyen du Soleil. Malgré tout, on verra en section 6.5.1 que par analogie au modèle global, ce paramètre de cisaillement prend des valeurs plus faibles pour les étoiles de type solaire d'après les simulations numériques d'étoiles comme détaillé au chapitre précédent.

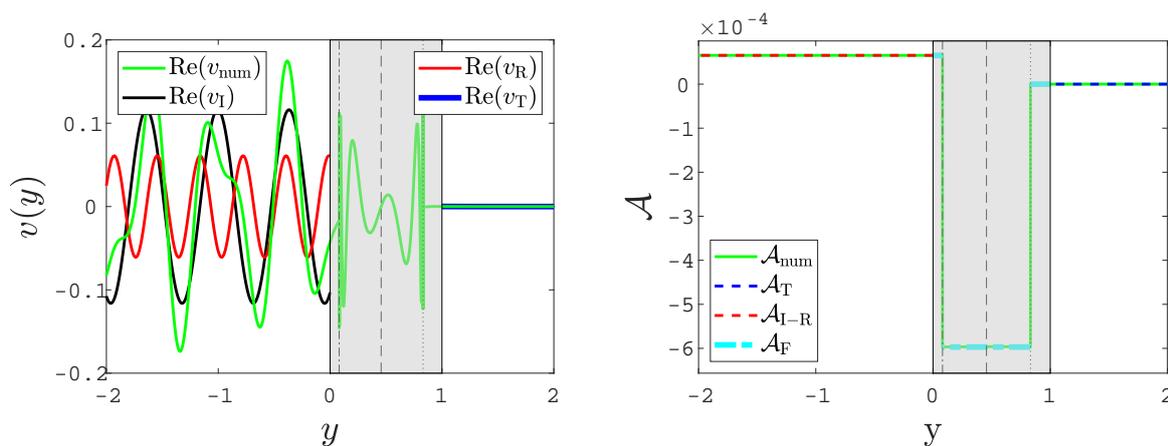


FIGURE 6.9: Vitesse latitudinale v (panneau de gauche) et flux d'action d'onde \mathcal{A} (panneau de droite) en fonction de la latitude locale y , pour $\theta = 45^\circ$, $n_y = 1$, $k_x = k_z = 2\pi$, $\omega = 0.86$ et $\sigma_f = 10^{-8}$. Gauche : Les quantités v_{num} , v_I , v_R , et v_T sont respectivement la vitesse “numérique”, incidente, réfléchi et transmise. Droite : Les quantités \mathcal{A}_{num} , \mathcal{A}_T , \mathcal{A}_{I-R} , \mathcal{A}_F sont les flux d'action d'onde numérique, transmis, incident-réfléchi, et de Frobenius, respectivement. Trois niveaux critiques existent dans la zone de cisaillement (en gris) et sont indiqués par des lignes verticales, $\sigma = -\tilde{f}$ (en pointillés et tirets), $\sigma = 0$ (en tirets), et $\sigma = \tilde{f}$ (en pointillés).

• Deux cas synthèses à cisaillement constant

Lorsque la boîte est inclinée de $\theta = 45^\circ$, on peut trouver un jeu de paramètres $(\omega, k_x, k_z, \Lambda)$ de sorte à avoir les trois niveaux critiques dans la zone II, comme présenté en figure 6.9 pour un profil de rotation linéaire dans cette zone. La corotation est entourée des deux niveaux critiques y_- (à droite) et y_+ (à gauche). L'effet valve discuté en section 6.2.6.1 est bien visible dans le panneau de gauche qui représente la vitesse latitudinale en fonction de y . En effet, l'onde qui se propage vers la zone III n'est pas absorbée au premier niveau critique y_+ mais bien à l'approche de y_- . On remarquera que l'onde réfléchi en rouge dans la zone I n'est pas complètement atténuée par rapport à l'onde transmise dans la zone III, sans doute dû au fait qu'une “partie” de l'onde incidente est réfléchi avant d'atteindre le premier niveau critique. On remarquera que le flux d'action d'onde \mathcal{A}_F donné par les solutions de Frobenius au degré le plus bas et au voisinage des trois niveaux critiques est une bonne estimation du flux d'action d'onde réel \mathcal{A}_{num} dans le panneau de droite de la figure 6.2.6.1. Grâce à cette concordance, on peut dire que la première discontinuité du flux d'action d'onde dans le panneau de droite de la figure 6.9 témoigne de l'absorption d'une onde “descendante” (vers les y négatifs), tandis que la seconde discontinuité montre l'absorption de l'onde “montante” (vers la zone III). Aucun flux ne semble être échangé à la corotation, en accord avec les résultats analytiques de la section 6.2.6.1 avec un cisaillement constant. Par ailleurs, une transmission quasi-nulle de l'onde et du flux d'action d'onde est cohérent avec le facteur de transmission représenté en figure 6.6, panneau du milieu et pour $\alpha_k = 1$.

Aux figures 6.10 et 6.11, on représente des cartes dans le plan (y, z) des perturbations en pression et vitesse verticale, ainsi que de la vitesse latitudinale de propagation de l'énergie pour l'ensemble des

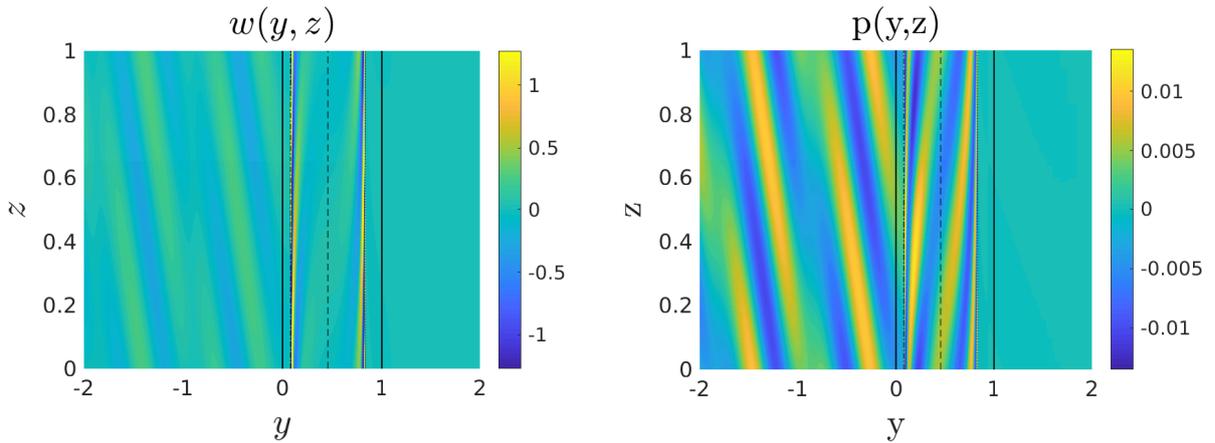


FIGURE 6.10: Perturbations de la vitesse verticale w (panneau de gauche) et de la pression p (panneau de droite) dans le plan (y, z) , avec les mêmes paramètres $(\theta, n_y, k_x, k_z, \omega, \sigma_f)$ qu'en figure 6.9.

longueurs d'onde¹⁸ $v_g = \overline{p\bar{v}}/\mathcal{E}$, qui fait intervenir la densité d'énergie cinétique :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2), \quad (6.51)$$

laquelle est représentée dans le panneau de gauche de la figure 6.11. Comme expliqué précédemment, nous avons utilisé une solution modale selon z , en utilisant le nombre d'onde k_z , ici fixé à 2π . On remarque en figure 6.10 que la pression et la vitesse verticale deviennent nulles après le troisième niveau critique y_- comme attendu. Une grande partie de l'énergie des ondes incidente et réfléchiée est déposée aux niveaux critiques y_- et y_+ mais pas à la corotation, d'après la divergence de \mathcal{E} dans le panneau de gauche de la figure 6.11, et il n'y a pas d'énergie transmise par l'onde au delà de y_- (i.e. pour $y - y_- > 0$) d'après le panneau de droite de la figure 6.11.

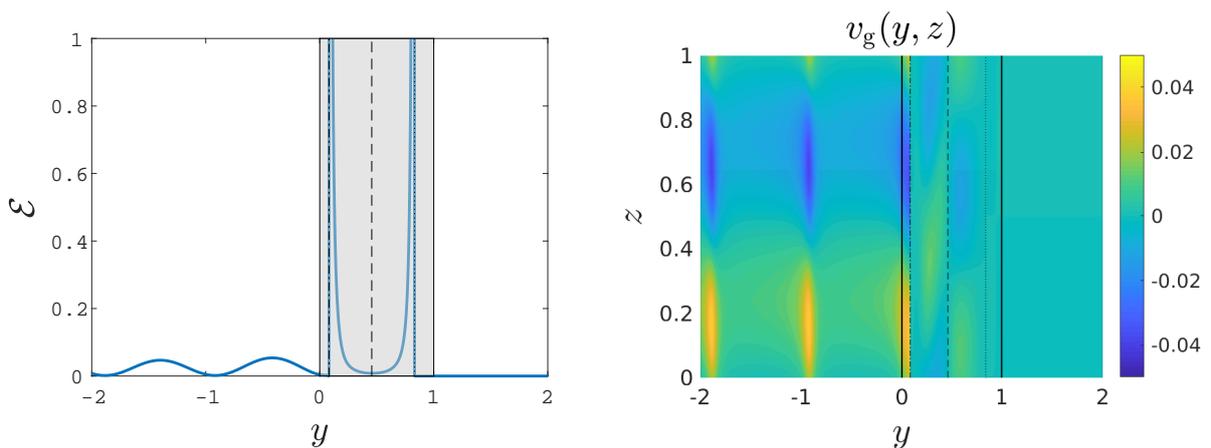


FIGURE 6.11: Densité d'énergie cinétique \mathcal{E} (panneau de gauche) et vitesse de groupe latitudinale v_g (panneau de droite) dans le plan (y, z) , avec les mêmes paramètres qu'en figure 6.9.

18. Bien que cette vitesse soit différente de la vitesse de groupe définie en section 6.2.4.2 à vecteur d'onde fixé, elle est parfois appelée vitesse de groupe (suivant une direction de référence, p.e. vitesse de groupe verticale) car elle transporte l'énergie de l'onde suivant la direction contrainte par la définition du flux d'action d'onde (p.e. Grimshaw, 1975b).

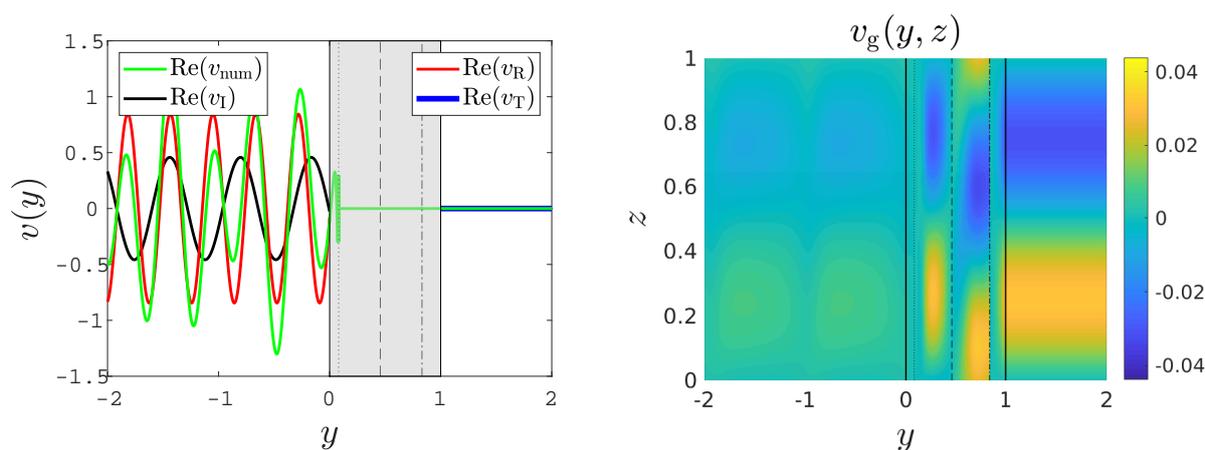


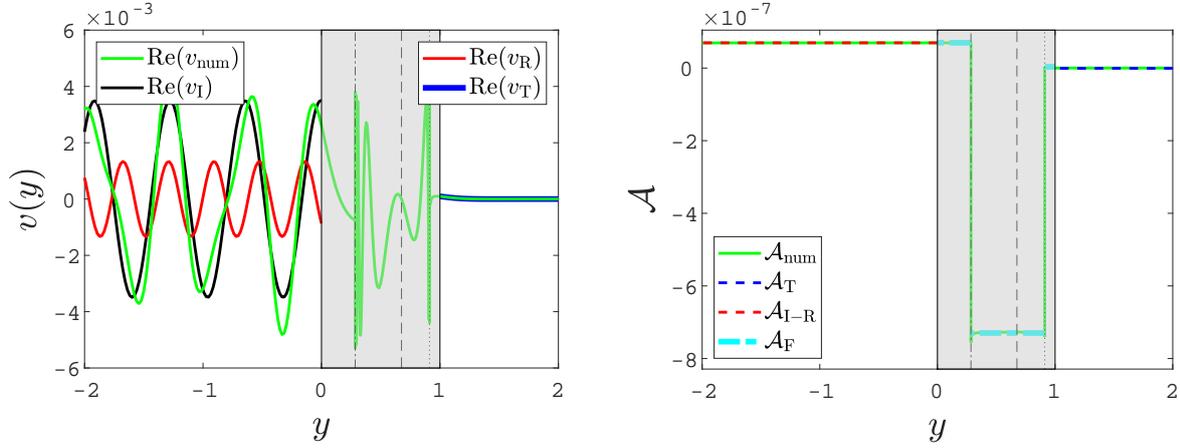
FIGURE 6.12: *Gauche* : Description similaire au panneau de gauche de la figure 6.9 mais avec un nombre de Rossby et une fréquence inertielle opposés : $R_o = -0.3$, $\omega = -0.86$. Attention, l'onde de vitesse v_I est l'onde réfléchie ici, et inversement pour v_R . Cette propriété est vérifiée grâce au signe de $\omega A_I (< 0)$ et $\omega A_R (> 0)$. *Droite* : Vitesse de groupe latitudinale v_g dans le plan (y, z) .

En figure 6.12, un cas similaire avec trois niveaux critiques est présenté, mais pour lequel y_- et y_+ sont inversés. On a ainsi une autre confirmation de l'effet valve, le niveau critique y_- agissant en “premier” en absorbant l'onde incidente (panneau de gauche). Il faut cependant relever que la vitesse latitudinale de propagation de l'énergie (panneau de droite) n'est pas déposée dans la zone I, où l'amplitude de l'onde est importante, contrairement à ce à quoi l'on s'attendrait. De plus amples investigations sont nécessaires pour une meilleure compréhension de cette quantité, ainsi que son possible lien avec la vitesse de groupe définie à l'équation 6.27.

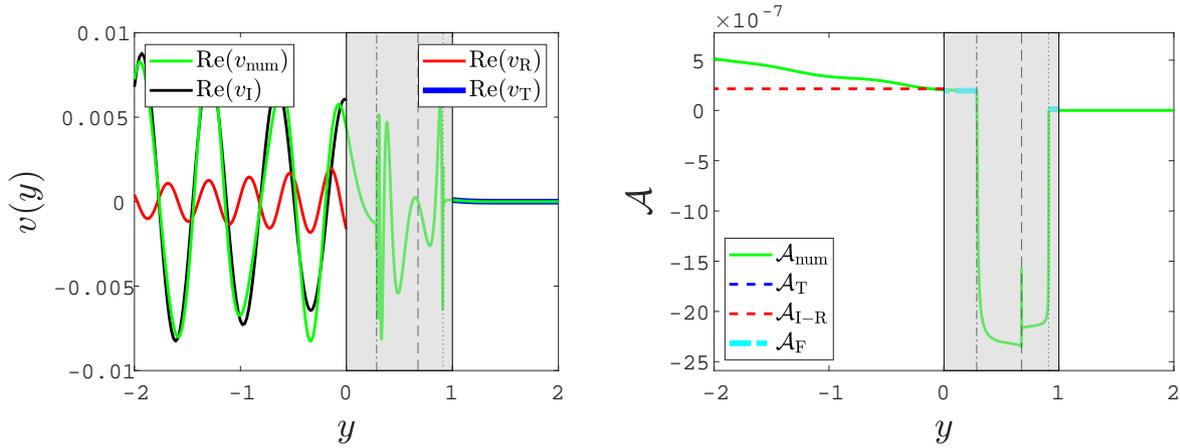
Pour finir, on présente des cas analogues au premier cas de la figure 6.9, mais en utilisant à présent une dépendance quadratique pour le champ de vitesse dans la zone II ($n_y = 2$, cf. panneaux (A) en haut de la figure 6.13) et en augmentant le coefficient de friction à 10^{-3} (panneaux (B) en bas de la figure 6.13). Hormis les valeurs des amplitudes des différentes ondes, et le flux d'action d'onde qui n'est plus tout à fait conservé pour une valeur relativement forte de la friction, il n'y a pas de réels changements concernant le comportement des ondes aux trois niveaux critiques lorsque l'on utilise un profil de rotation non-linéaire et une friction plus élevée. On remarque par ailleurs que la méthode de Frobenius fonctionne toujours pour un cisaillement non constant, mais est mal définie pour des valeurs élevées de viscosité à cause des fluctuations de la vitesse. La légère discontinuité que l'on observe à la corotation dans le panneau en bas à gauche de la figure 6.13 est fortement dépendante de la résolution choisie, et semblerait donc être davantage reliée à un effet numérique que physique, même si l'on fait remarquer que l'application de la méthode de Frobenius en présence de viscosité pourrait potentiellement expliquer ce léger saut observé. Elle reste, dans tous les cas, négligeable par rapport aux autres discontinuités aux niveaux critiques y_{\pm} .

En ce qui concerne l'effet de la viscosité, on rejoint ainsi les conclusions de Alvan et al. (2013) pour les ondes de gravité en milieu cisailé et stratifié verticalement, à savoir que l'inclusion et la variation de la viscosité n'a que peu d'impact sur le comportement général de l'onde. Par contre, il est plus surprenant de ne pas voir de discontinuité à la corotation dans le flux d'action d'onde dès lors que le profil de rotation n'est plus linéaire. Nous rappelons que c'était un résultat analytique attendu à la corotation en présence de rotation différentielle conique, et décrit dans la section 6.2.6.1, dû à la présence d'un terme logarithmique dans la solution approximée par la méthode de Frobenius. Une piste pour résoudre cette

contradiction a notamment été explorée : l'implémentation directe de l'ODE d'ordre 2 (6.18), avec l'idée que la différence vienne du fait que les deux ODE d'ordre 1 (6.48) ne font pas intervenir la dérivée seconde du flot moyen U'' . À cette heure, la question n'est pas tranchée et nécessite plus de travail¹⁹.



(A)



(B)

FIGURE 6.13: Cas similaires à la figure 6.9 mais pour $n_y = 2$ (panneaux (A) en haut), et avec en plus $\sigma_f = 10^{-3}$ (panneaux (B) en bas).

6.4.3 Etude de la rotation différentielle cylindrique

Dans cette section, on s'intéresse au cas de la rotation différentielle cylindrique, c'est à dire lorsque la boîte est placée au pôle Nord ou au pôle Sud (i.e., $\theta = 0$ ou π). Dans cette configuration, il a été tout d'abord difficile de trouver des cas qui admettaient des nombres d'onde réels pour les ondes incidente, réfléchie et transmise. Néanmoins, c'est possible en fixant $k_x = k_z = 0.1$ pour un large espace de paramètres

¹⁹. La question a été tranchée depuis, suite à la modification de l'équation différentielle au voisinage de la corotation lorsque la boîte est inclinée (voir en particulier la note de bas de page 15, ainsi que la section 3.3.2 de l'article associé à cette étude). Le nouveau flux d'action d'onde est désormais cohérent avec sa version numérique.

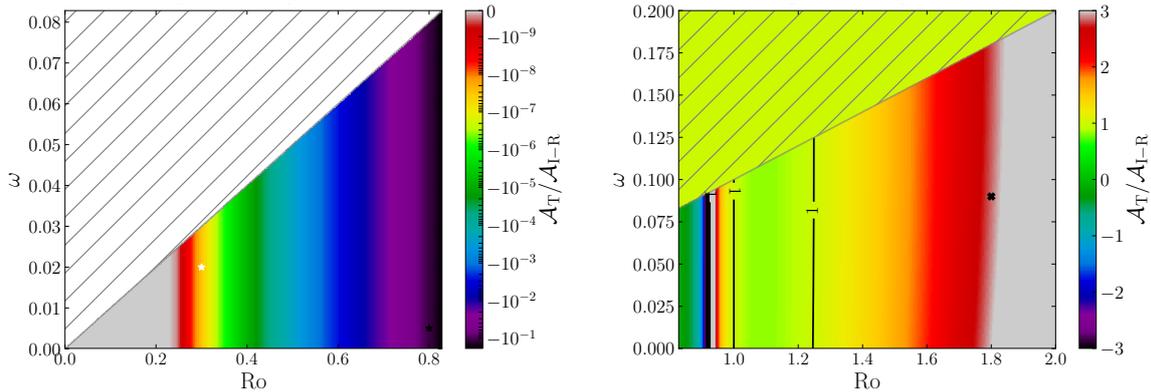


FIGURE 6.14: Rapport des flux d'action d'onde dans la zone III et I en fonction du nombre de Rossby R_o et de la fréquence inertielle ω , pour $R > 1/4$ (panneau de gauche) et $R < 1/4$ (panneau de droite), lorsque la boîte est au pôle pour un cisaillement constant. Les nombres d'onde sont fixés à $k_x = k_z = 0.1$, et les zones hachurées ne possèdent pas de niveaux critiques. Les croix indiquent le couple de paramètre (R_o, ω) choisi pour une analyse individuelle dans le code numérique à trois couches.

en terme de valeurs de ω et Λ . Pour ces nombres d'onde fixés, nous nous sommes intéressés à trois cas particuliers dans les régimes $R \lesssim 1/4$ et indiqués dans la figure 6.14.

La figure 6.14 représente le rapport des flux d'action d'onde avant et après le niveau critique, pour un cisaillement linéaire, et calculé avec les solutions exactes de l'équation (6.41) au pôle Nord (voir les sections 4.2.1 et 4.2.2 de l'article associé pour plus de détails). Le panneau de gauche correspond au régime dit stable où $R > 1/4$, tandis que le panneau de droite au régime potentiellement instable où $R < 1/4$. Ces deux dénominations sont cohérentes ici car dans le premier régime, l'atténuation du flux d'action d'onde transmis se vérifie toujours et est très forte (comme prédit dans les graphes de la figure 6.8), tandis que dans le second régime, on remarque des zones de sur-réflexion (rapport de flux positif) et de sur-transmission (valeur absolue du rapport supérieure à 1).

La figure 6.15 rassemble l'étude individuelle, à l'aide du modèle numérique à trois zones, des trois cas sélectionnés dans la figure 6.14 et détaillés dans l'article associé. Dans les panneaux du haut, le flux d'action d'onde est calculé dans l'ensemble du domaine et présente une discontinuité à la corotation dans chacun des cas. Les valeurs des trois sauts sont cohérentes avec les facteurs de transmissions donnés par la figure 6.14, avec une atténuation plus ou moins forte du flux d'action d'onde pour les deux premiers cas qui sont dans le régime $R > 1/4$, et une sur-transmission et sur-réflexion pour le troisième cas dans le régime $R < 1/4$. Les panneaux du bas dépeignent la propagation latitudinale de l'énergie dans chacun des trois cas. Dans le premier cas, on a un bon accord avec le comportement du flux d'action d'onde à la couche critique : l'énergie se propage dans la zone I jusqu'à la corotation et est entièrement déposée à ce niveau. Le deuxième cas est plus complexe, car l'énergie se propage exclusivement dans la zone III, alors qu'on attendrait un comportement analogue au premier cas. C'est ce que l'on a appelé dans l'article un cas d'amplification "géométrique" où la forme exponentielle des solutions dans la zone II contribue à amplifier l'onde, indépendamment du niveau critique. Dans une configuration où le facteur d'atténuation de flux d'action d'onde à la corotation n'est pas extraordinairement faible comme c'est le cas ici, ce phénomène d'amplification "prend le dessus" sur le phénomène d'amortissement à la corotation, bien que $R > 1/4$. On en a d'ailleurs la preuve grâce à figure 6.16 qui est un cas particulier sans niveau critique dans la zone de cisaillement. Pour autant, une sur-transmission de l'onde incidente est observée, ce qui met en évidence le rôle important de la géométrie de ce modèle sur le comportement des ondes. Le dernier cas (C) de la figure 6.15 est plutôt cohérent avec ce que l'on s'imagine : l'énergie se propage de part et d'autre de la corotation car l'onde est sur-réfléchi et sur-transmise.

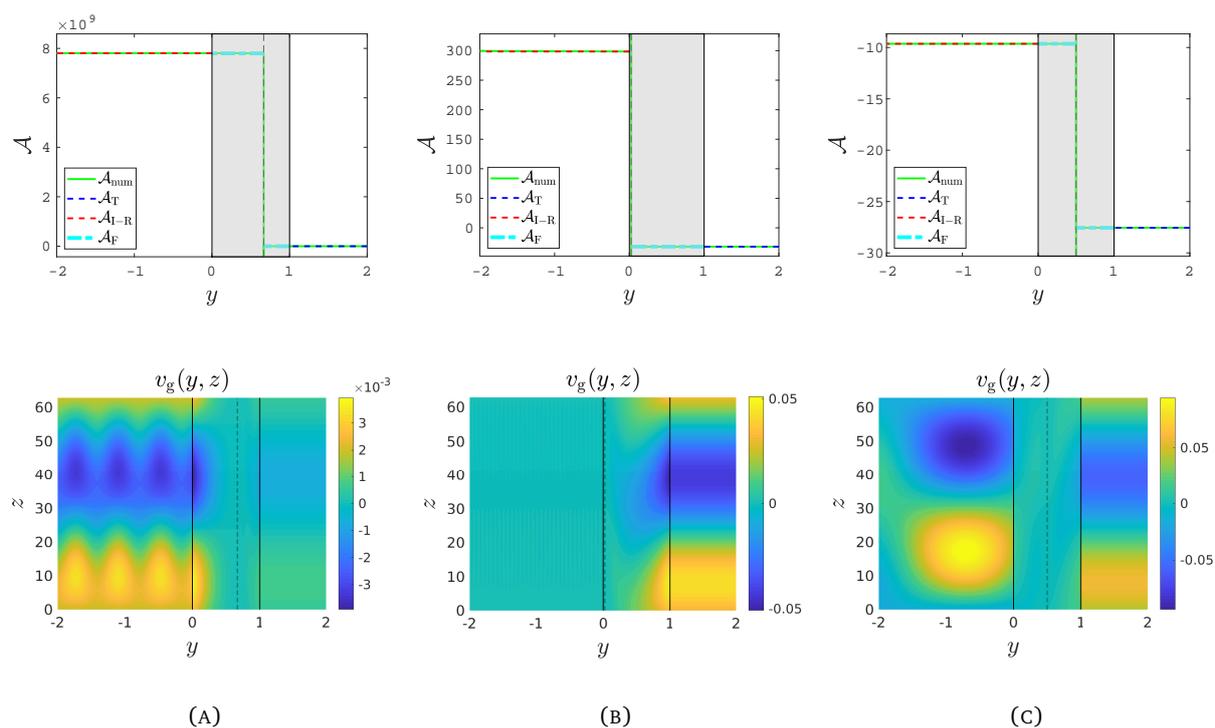


FIGURE 6.15: Les trois cas de l'article pour $\theta = 0^\circ$, avec un flot moyen linéaire, des nombres d'onde horizontaux fixés à $k_x = k_z = 0.1$. (A) $\omega = 0.02$, $\text{Ro} = 0.3$ ($R > 1/4$); (B) $\omega = 0.002$ et $\text{Ro} = 0.8$ ($R > 1/4$); (C) $\omega = 0.09$ et $\text{Ro} = 1.8$ ($R < 1/4$). *Haut* : Flux d'action d'onde par rapport à y (comme pour le panneau de droite de la figure 6.9). *Bas* : Vitesse latitudinale de propagation de l'énergie dans le plan (y, z) .

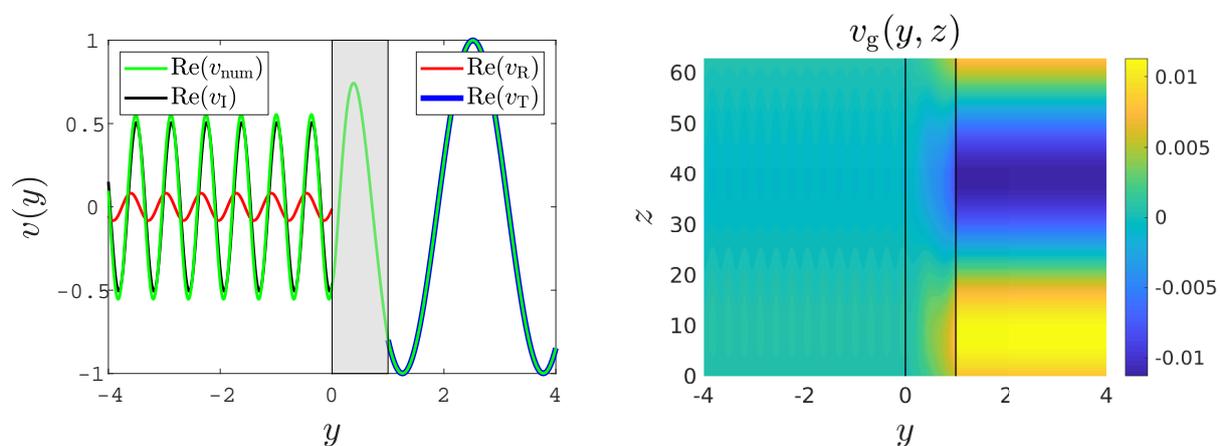


FIGURE 6.16: Les quantités affichées sont les mêmes que dans la figure 6.12, mais ici $\theta = 0^\circ$, $\text{Ro} = -0.3$, $\omega = 0.01$ et $k_x = k_z = 0.1$. Il n'y a pas de niveau critique dans la zone II. Ce cas particulier illustre le fait qu'il peut exister des ondes sur-transmises (ou sur-réfléchies) dans notre modèle sans lien avec une amplification causée par la présence d'un niveau critique.

Pour terminer, on précise que les cas (B) et (C) pour $n_y = 3$ ne présentent plus de sur-transmission et sur-réflexion (pour (C)) de l'onde incidente, cependant la carte de propagation de l'énergie reste dans les deux cas très proche du cas $n_y = 1$. On ajoute aussi que les variations de viscosité à n_y fixé ne modifient pas fondamentalement le comportement des ondes, similairement aux résultats de la section précédente.

6.5 Application aux étoiles de type solaire et aux planètes géantes gazeuses

6.5.1 Analogie entre modèles local et global

Afin de pouvoir appliquer nos résultats aux objets astrophysiques que sont les étoiles de type solaire et les planètes géantes gazeuses, il est nécessaire de relier notre nombre de Rossby R_o , qui est une mesure locale du cisaillement, à des quantités globales tel que le contraste de cisaillement défini au chapitre 5.

En géométrie sphérique globale, le flot moyen en rotation différentielle conique s'écrit (p.e. Baruteau & Rieutord, 2013; Guenel et al., 2016a) :

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = r \sin \theta \Omega(\theta) \mathbf{e}_\varphi. \quad (6.52)$$

Le modèle local de la boîte est en corotation, et tourne à la vitesse globale $\mathbf{u}_0 = r \sin \theta \Omega_0 \mathbf{e}_\varphi$ (en variables dimensionnées), vitesse qui ne prend pas en compte la rotation différentielle. Dans le modèle local en corotation, le flot moyen local $U(y)$ prend en compte la rotation différentielle en se superposant au flot moyen global \mathbf{u}_0 , de sorte que si l'on veut faire l'analogie entre les différents flots on a :

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0. \quad (6.53)$$

Ainsi, en utilisant le profil de rotation conventionnel utilisé pour les étoiles de type solaire, i.e. l'équation 5.7 du chapitre 5, le flot moyen local se réécrit avec les coordonnées sphériques, en rappelant que χ est le contraste de cisaillement normalisé :

$$U = \frac{1}{2} r_0 \chi \sin^3 \theta, \quad (6.54)$$

en adimensionnant par la fréquence 2Ω , et en négligeant les variations radiales dans le cadre de ce modèle. Par ailleurs, en utilisant les notations de la boîte schématisée figure 6.3, $y \simeq r_0(\theta_0 - \theta)$ pour θ (l'inclinaison d'un point dans la boîte) proche de θ_0 (l'inclinaison de la boîte) au premier ordre. On approxime de même le flot moyen local U au troisième ordre en y :

$$U(y) = \frac{\chi}{2} \left[r_0 \sin^3 \theta_0 - 3 \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 y + \frac{y^2}{r_0} \left(3 \cos \theta_0^2 \sin \theta_0 - \frac{3}{2} \sin^3 \theta_0 \right) + \frac{y^3}{r_0^2} \left(\frac{7}{2} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 \right) + o(y^3) \right]. \quad (6.55)$$

Le nombre de Rossby $R_o = U'(y)$ (en variables adimensionnées) s'écrit alors :

$$R_o = \frac{\chi}{2} \left[-3 \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 + \frac{y}{r_0} (6 \cos \theta_0^2 \sin \theta_0 - 3 \sin^3 \theta_0) + 3 \frac{y^2}{r_0^2} \left(\frac{7}{2} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 \right) + o(y^2) \right]. \quad (6.56)$$

On utilise dans la suite le nombre de Rossby exprimé à l'ordre le plus bas,

$$R_o \simeq -\frac{3}{2} \chi \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0, \quad (6.57)$$

pour θ_0 non nul, et

$$R_o \simeq -\frac{3}{2} \vartheta \chi \frac{y^2}{r_0^2}, \quad (6.58)$$

aux pôles, en se rappelant que $\vartheta = -1$ au pôle Nord et que $\vartheta = 1$ au pôle Sud.

6.5.2 Dans les étoiles de type solaire

Au chapitre précédent, des valeurs de contraste de cisaillement normalisé par la rotation au pôle (i.e. χ) ont été estimées pour des étoiles de type spectral K et G, à l'aide de lois d'échelle données par les simulations numériques 3D des intérieurs de ces étoiles (Brun et al., 2017). D'après la figure 5.3 tracée grâce aux grilles STAREVOL, on obtient l'intervalle de variation du paramètre $|\chi|$ le long de la vie d'étoiles de 0.5 à $1.1 M_{\odot}$: $\chi \in [0.08, \sim 0.23]$ en pré-séquence principale et début de séquence principale (rotation cylindrique), $\chi \in [\sim 0.23, 0.4]$ en milieu et fin de séquence principale (profil conique de type solaire) et $\chi \in [-0.5, -0.4]$ en fin de séquence principale, début de la phase des sous-géantes (profil de rotation anti-solaire).

Par conséquent, en calculant le nombre de Rossby $R_o = U'$ à l'aide de la formule (6.57), ce dernier est contenu dans l'intervalle $[-0.3, 0.3]$ d'après la figure 6.17 pour les différentes valeurs de χ de profil de rotation solaire et anti-solaire. Connaissant les valeurs de R_o pour ces étoiles, on peut en déduire les facteurs de transmission du flux d'action d'onde aux niveaux critiques $\pm \tilde{f}$ selon l'inclinaison de la boîte d'après la figure 6.6. Il faut néanmoins préciser qu'il est délicat d'interpréter les nombres d'onde locaux k_x et k_z dans un modèle global d'étoile. On peut néanmoins dire qu'étant donné les valeurs relativement faibles (en valeur absolue) du nombre de Rossby, l'onde est préférentiellement absorbée pour $\alpha_k \gtrsim 1$, quelle que soit l'inclinaison de la boîte. Dans les cas où $\alpha_k \ll 1$, l'onde est partiellement (ou totalement) transmise après avoir traversée les niveaux critiques $\pm \tilde{f}$.

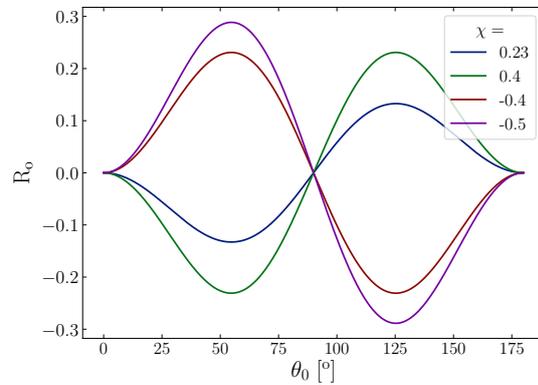


FIGURE 6.17: Nombre de Rossby R_o en fonction de l'inclinaison de la boîte θ_0 pour différentes valeurs de contraste de cisaillement normalisé χ .

6.5.3 Modèle équatorial pour les planètes géantes et les étoiles en rotation rapide

L'expression du nombre de Rossby dans le cas cylindrique, donnée par l'équation (6.58), n'est pas commode car elle fait intervenir y , sachant que $y \ll r_0$ par définition du modèle de boîte locale. Par ailleurs, χ n'est pas la quantité la plus appropriée pour quantifier le cisaillement dans un profil de rotation différentielle cylindrique.

Un modèle analytique équatorial en coordonnées cylindriques, applicable à Jupiter, Saturne, et aux étoiles en rotation rapide, est en cours de développement par Mathis et al. (in prep.). En effet, on a montré au chapitre 5 que ces objets présentent un profil de rotation cylindrique dans leur enveloppe convective externe. Il est donc pertinent de développer un tel modèle pour traiter la propagation et la dissipation d'ondes inertielles excitées par l'interaction de marées pour ces rotateurs rapides. Ce modèle fait l'hypothèse anélastique (les ondes acoustiques sont filtrées) ainsi que l'approximation des courtes longueurs d'onde de sorte à négliger les termes qui ne sont pas en dérivé seconde dans l'ODE du second ordre pour $\Psi = \sqrt{\rho} s^2 v_s$, où ρ représente la densité moyenne, v_s la vitesse axiale et s est la coordonnée radiale

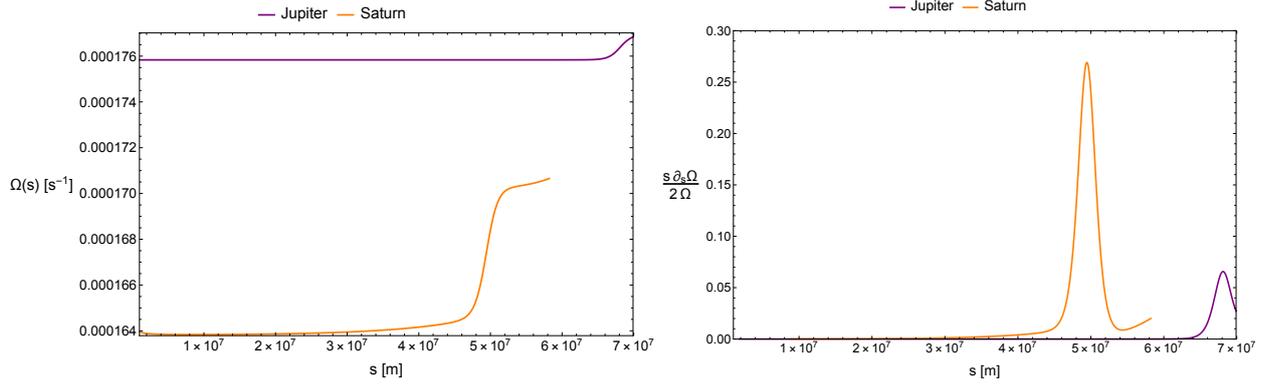


FIGURE 6.18: [Mathis et al. in prep.]. Gauche : Fréquence de rotation dans Jupiter et Saturne en fonction de la distance à l'axe. Droite : Nombre de Rossby local en coordonnées cylindriques dans l'intérieur de Jupiter et Saturne, en fonction de la distance à l'axe s . Ces graphes ont été réalisés à l'aide des données de Kaspi et al. (2017), Guillot et al. (2018) et Galanti et al. (2019).

cylindrique ($s = r \sin \theta$). Cette équation différentielle s'écrit, pour des ondes inertielles libres :

$$\frac{d^2 \Psi}{ds^2} + \left(\frac{\kappa_s^2 l_\Theta^2}{\hat{\sigma}^2 s^2} - \frac{l_\Theta^2 + m^2}{s^2} \right) \Psi = 0, \quad (6.59)$$

où l_Θ et m sont les nombres d'onde équatorial et azimutal, respectivement, $\hat{\sigma} = \omega + m\Omega(s)$ la fréquence Doppler-shiftée, et κ_s la fréquence épicyclique axiale donnée par $\kappa_s^2 = 4\Omega^2 + 2\Omega s \frac{d\Omega}{ds}$.

Proche de la corotation, cette équation prend la forme de l'équation différentielle d'ordre 2 que l'on a déterminée pour v dans la boîte située au pôle Sud (équation (6.41)) pour un flot moyen linéaire, à condition de poser :

- s_c la coordonnée radiale cylindrique où se situe la corotation (cylindre critique pour $\hat{\sigma} = 0$) ;
- $R_o = \frac{s_c}{2\Omega_c} \frac{d\Omega}{ds} \Big|_{s=s_c}$, le nombre de Rossby local en coordonnées cylindriques, où $\Omega_c = \Omega(s_c)$;
- $\alpha_k^2 = l_\Theta^2/m^2$ le rapport des nombres d'onde horizontaux.

En figure 6.18, sont montrés des profils de rotation de Jupiter et Saturne, à l'aide des données de Cassini et Juno (Kaspi et al., 2017; Guillot et al., 2018; Galanti et al., 2019) ; avec à gauche la fréquence de rotation des géantes et à droite le nombre de Rossby en coordonnée cylindrique, tous deux en fonction de la distance à l'axe s . On retrouve notamment le fait que la rotation différentielle est plus forte pour Saturne que pour Jupiter et s'étend aussi plus loin en profondeur (~ 9000 km pour Saturne et ~ 3000 km pour Jupiter). D'après le panneau de gauche de la figure 6.18 :

- $R_o \lesssim 0.27$ pour Saturne,
- $R_o \lesssim 0.07$ pour Jupiter.

En considérant ces intervalles, on se reporte à la figure 6.7 pour déterminer le régime de propagation des ondes dans le cas où la boîte est au pôle Sud. Dans le cas où $\alpha_k \gtrsim 0.1$, on est dans le régime dit stable et les ondes sont quasi-exclusivement très fortement atténuées à la corotation, comme on le constate sur le panneau de droite de la figure 6.8. Dans le cas où $\alpha_k \lesssim 0.1$, les ondes peuvent être sur-réfléchies ou sur-transmises ce qui peut éventuellement mener à des instabilités si la géométrie le permet. Une connaissance plus fine des nombres d'onde l_Θ et m est nécessaire pour trancher l'existence de ces différents régimes. Dans le cadre des marées d'excentricité, d'obliquité et asynchrone (voir Ogilvie, 2014, ainsi que l'article associé à ce chapitre), les valeurs des nombres d'onde qui décrivent les termes dominants dans le potentiel de marée sont connus et peuvent être reliées aux nombres d'onde du modèle équatorial.

On montre ainsi que le régime potentiellement instable n'est jamais atteint pour ces différents types de marées, et que les ondes sont fortement amorties et déposent leur énergie au niveau du cylindre critique. Vraisemblablement, on devrait donc obtenir une synchronisation progressive des différentes couches dans l'enveloppe convective du rotateur rapide, comme dans l'étude de [Goldreich & Nicholson \(1989b\)](#) pour les ondes de gravité en zone radiative. En ayant connaissance de profils de rotation cylindriques pour des étoiles en rotation rapide (ce qui n'est pas encore le cas d'un point de vue observationnel comme on la évoqué au chapitre 5), la même démarche pourrait être appliquée.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la transmission des ondes inertielles libres modifiées par la rotation différentielle et vérifiant l'équilibre géostrophique, à la résonance de corotation, et plus largement aux niveaux critiques en utilisant une approche analytique, et aux couches critiques en utilisant un modèle numérique prenant en compte une force de frottement caractérisée par une friction de Rayleigh. À cette fin, nous avons construit un nouveau modèle local Cartésien de boîte cisailée, qui modélise une petite parcelle de la zone convective d'une étoile de faible masse ou d'une planète géante gazeuse en rotation différentielle. L'inclinaison de la boîte par rapport à l'axe de rotation nous permet d'examiner l'effet d'un profil de rotation conique (lorsque la boîte est inclinée) ou cylindrique (lorsque la boîte est aux pôles) sur la propagation des ondes à travers un niveau critique. Ces profils de rotation sont inspirés de ceux observés dans le Soleil, les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses de notre système solaire comme nous l'avons vu au chapitre précédent. En présence d'une rotation différentielle qui dépend de la latitude, trois niveaux critiques peuvent être rencontrés : la résonance de corotation ainsi que deux niveaux critiques supplémentaires qui traduisent l'inclinaison de la boîte (et ainsi du vecteur de gravité) par rapport à l'axe de rotation, similairement aux travaux de [Jones \(1967\)](#) et de [Grimshaw \(1975b\)](#). En présence d'une rotation différentielle qui dépend de la distance à l'axe, seule la résonance de corotation existe.

✿ Afin de déterminer le comportement d'une onde inertielle rencontrant un niveau critique, nous avons construit un invariant appelé flux d'action d'onde, indépendant de la latitude locale. Cet invariant, qui n'est possiblement discontinu qu'aux niveaux critiques, nous a permis de caractériser plusieurs régimes de transmission des ondes et du flux d'action d'onde. Ainsi, les ondes peuvent être soit entièrement transmises, soit partiellement ou complètement amorties, soit même amplifiées après leur passage aux niveaux critiques. Ces différents régimes de transmission sont présents autant en présence d'un profil de rotation localement conique²⁰ que cylindrique, et dépendent du niveau critique rencontré dans le cas conique, et dans les deux cas des propriétés des ondes (direction, nombres d'onde) ainsi que du profil, linéaire ou non-linéaire, du flot moyen utilisé.

En particulier, nous avons montré que pour les ondes inertielles en présence d'une rotation différentielle cylindrique, il existe un critère analogue au critère de stabilité de Miles-Howard pour les flots stratifiés verticalement (Miles & Howard, 1964). Notre critère dépend du nombre de Rossby (ici le rapport du cisaillement sur la fréquence de rotation du corps) et des nombres d'ondes vertical et localement longitudinal dans la boîte. Il convient de noter que ce critère dérivé pour les ondes inertielles se propageant dans les trois directions de la boîte est différent du théorème du point d'inflexion de Rayleigh pour les ondes de Rossby (Bretherton, 1966; Lindzen & Tung, 1978). Par analogie avec le critère de Miles-Howard, le nôtre permettrait donc de distinguer un niveau critique dit stable, où l'on s'attend à une forte atténuation des ondes et à un transfert de l'énergie et du moment cinétique transportés par ces ondes au flot moyen, d'un niveau critique pouvant engendrer des instabilités, et caractérisé par un transfert d'énergie du flot moyen à l'onde. Il faut cependant pointer qu'à la différence du théorème de Miles-Howard, notre critère dépend des nombres d'onde locaux dans la boîte, ce qui freine l'analogie avec ce critère de stabilité pour les ondes de gravité.

Pour les ondes inertielles en présence d'un profil de rotation localement conique, nous avons identifié un phénomène de valve pour les niveaux critiques autres que la corotation, où l'onde est soit entièrement transmise soit atténuée selon sa direction, comme pour les ondes gravito-inertielles dans un flot stratifié et cisailé verticalement (Acheson, 1972; Grimshaw, 1975b). Pour ces niveaux critiques là, l'onde ne peut pas subir d'amplification et dépose éventuellement son flux d'action d'onde au flot moyen, contrairement à la corotation où l'onde n'est pas altérée, conformément à ce qui a été observé numériquement.

Sur la base de cette analyse, nous avons aussi discuté les applications possibles aux intérieurs stellaires et planétaires. Pour les étoiles à rotation différentielle conique solaire ou anti-solaire, et les objets en rotation rapide à profil de cisaillement cylindrique comme Jupiter et Saturne, un régime où les ondes inertielles sont fortement amorties est largement préféré dans l'enveloppe convective de ces objets. Des conclusions similaires avaient déjà été trouvées par Alvan et al. (2013) pour les ondes de gravité interne à travers les couches critiques au cœur des étoiles de type solaire.

Contrairement aux analyses de Guenel et al. (2016a,b) dans un modèle global et pour un profil de rotation différentielle conique, nous n'avons pas observé d'incidence de la viscosité aux couches critiques pour ce profil. Cela vient possiblement de notre hypothèse d'équilibre du flot moyen géostrophique (on parle aussi d'un équilibre de vent thermique), qui n'a pas été adopté dans les études citées. Par ailleurs, nous mettons en évidence de possibles instabilités en présence de rotation différentielle cylindrique, non observées par Baruteau & Rieutord (2013) avec un profil de rotation cylindrique. Cette étude ab-initio constitue cependant une première étape nécessaire dans la compréhension de l'interaction ondes inertielles/couches critiques, en présence de profil de rotation différentielle que l'on peut trouver dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses. Contrairement à l'étude des résonances dans les disques, aucune étude de l'impact sur la planète ou le satellite de la dissipation des ondes inertielles excitées par la marée aux couches de critiques, n'a été réalisé à ce jour.

²⁰ Relativement à la note de bas de page numéro 15, les ondes ne peuvent pas être amplifiées après un niveau critique avec un profil de rotation conique.

The complex interplay between tidal inertial waves and zonal flows in differentially rotating stellar and planetary convective regions

I. Free waves

Aurélie Astoul^{1,2}, Junho Park^{1,3}, Stéphane Mathis¹, Clément Baruteau⁴, and Florian Gallet⁵

¹ Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DRF - CNRS - Université Paris Diderot, IRFU/DAP Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

² Department of Applied Mathematics, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK

³ Fluid and Complex Systems Research Centre, Coventry University, Coventry CV1 5FB, UK

⁴ IRAP, Observatoire Midi-Pyrénées, Université de Toulouse, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

⁵ Université Grenoble Alpes, CNRS, IPAG, 38000 Grenoble, France

ABSTRACT

Context. Quantifying tidal interactions in close-in two-body systems is of prime interest since they have a crucial impact on the architecture and the rotational history of the bodies. Various studies have shown that the dissipation of tides in either body is very sensitive to its structure and to its dynamics. Furthermore, solar-like stars and giant gaseous planets in our Solar System experience differential rotation in their outer convective envelopes. In this respect, numerical simulations of tidal interactions in these objects have shown that the propagation and dissipation properties of tidally excited inertial waves can be strongly modified in the presence of differential rotation.

Aims. In particular, tidal inertial waves may strongly interact with zonal flows at the so-called co-rotation resonances, where the wave's Doppler-shifted frequency is cancelled out. The energy dissipation at such resonances could deeply modify the orbital and spin evolutions of tidally interacting systems. In this context, we aim to provide a deep physical understanding of the dynamics of tidal waves at co-rotation resonances in the presence of differential rotation profiles that are typical of low-mass stars and giant planets.

Methods. In this work, we have developed an analytical local model of an inclined shearing box that describes a small patch of the differentially rotating convective zone of a star or a planet. We investigate the propagation and the transmission of free inertial waves at co-rotation, and more generally at critical levels, which are singularities in the governing wave differential equation. Through the construction of an invariant called the wave action flux, we identify different regimes of wave transmission at critical levels, which are confirmed with a one-dimensional three-layer numerical model.

Results. We find that inertial waves can be fully transmitted, strongly damped, or even amplified after crossing a critical level. The occurrence of these regimes depends on the assumed profile of differential rotation, on the nature as well as the latitude of the critical level, and on wave parameters such as the inertial frequency and the longitudinal and vertical wavenumbers. Waves can thus either deposit their action flux in the fluid when damped at critical levels, or they can extract action flux from the fluid when amplified at critical levels. Both situations can lead to significant angular momentum exchange between the tidally interacting bodies.

Key words. hydrodynamics – waves – planet-star interactions – stars: rotation – planets and satellites: interiors – planets and satellites: dynamical evolution and stability

1. Introduction

Tidal interactions are known to drive the late evolution of short-period planetary systems, such as hot Jupiters orbiting around their host star and, in our Solar System, the satellites around Jupiter and Saturn (e.g. Ogilvie 2014; Mathis 2019). In particular, the dissipation of tides in the convective envelope of low-mass host stars and giant planets can modify the spin of the tidally perturbed body, the orbital period, and the spin-orbit angle of the perturber (e.g. Hut 1980; Ford & Rasio 2006; Lai 2012; Bolmont & Mathis 2016; Damiani & Mathis 2018). Inertial waves, which are driven by tidal forcing and restored by the Coriolis acceleration, are an important source of tidal dissipation in stellar (Ogilvie & Lin 2007; Barker & Ogilvie 2009; Bolmont & Mathis 2016) and planetary convective zones (Ogilvie & Lin 2004), where the action of turbulent motions on tidal flows is most often modelled as an effective frictional force or a vis-

cus force with an effective viscosity that is much larger than the molecular viscosity (e.g. Zahn 1966, 1977; Duguid et al. 2020). For coplanar and circular systems, inertial waves are excited so long as the companion orbits beyond half its co-rotation radius (the orbit where the host's rotation frequency is equal to the mean motion). Low-mass stars from K to F spectral type and giant gaseous planets both harbour a convective envelope surrounding a radiative and a solid (or diluted) core, respectively (e.g. Kippenhahn et al. 2012; Debras & Chabrier 2019). In these objects, inertial waves then propagate in a spherical shell and do not form regular normal modes of oscillation as they do in spherical and ellipsoidal geometries (Greenspan 1969; Bryan 1889, respectively). In contrast, they can focus on limit cycles, also called attractors of characteristics (Maas & Lam 1995), that are confined within the convective envelope (see also Rieutord & Valdetaro 1997). With a non-zero viscosity, attractors take the form of shear layers where the tidal wave's energy and angular

momentum can be deposited via viscous dissipation (Rieutord et al. 2001). Furthermore, viscous dissipation across shear layers can be more important as viscosity is weaker, as demonstrated notably by Ogilvie & Lin (2004) and Auclair-Desrotour et al. (2015). In that respect, the tidal dissipation of inertial waves can compete with the dissipation of gravito-inertial waves in the radiative core, or it can be greater by several orders of magnitude than the dissipation of equilibrium tidal flows in the convective zone (i.e. the non-wave-like fluid’s response; see, e.g. Ogilvie & Lin 2007). The dissipation of tidally forced waves can have a great impact on the orbital and rotational evolution of the system (Auclair-Desrotour et al. 2014; Bolmont & Mathis 2016; Gallet et al. 2018; Benbakoura et al. 2019). Moreover, the dissipation of the stellar dynamical and equilibrium tides varies significantly along the evolution of the star and is highly dependent on stellar parameters, such as the mass, the angular velocity, and the metallicity of stars (Mathis 2015; Gallet et al. 2017; Bolmont et al. 2017). This makes it desirable to include all stellar processes on tidal interaction, in particular differential rotation.

The frequency-averaged tidal dissipation is often used to quantify the response of a body subject to tidal perturbations (Ogilvie & Lin 2004; Jackson et al. 2008). Yet, the dissipation of a tidally forced inertial wave is strongly correlated with the presence of an attractor at a specific eigenfrequency of the spherical shell (see Ogilvie 2009; Rieutord & Valdetaro 2010). Tidal dissipation at a given frequency may then alter each orbital and spin element of the two-body systems differently, as postulated, for instance, by Lai (2012) to explain the survival of hot Jupiters with completely damped spin-orbit angles; this idea was revisited by Damiani & Mathis (2018) with an improved treatment of dynamical tides in the convective region. Additionally, in the context of the Jupiter and Saturn moon systems, Fuller et al. (2016) and Luan et al. (2018) also investigated the dependence of tidal dissipation on frequency to explain the rapid outward migration of the moons through the resonant locking of tidally forced internal modes in the giant gaseous planets. This concept could, for example, explain the high dissipation observed in Saturn as derived from astrometric measurements at the frequency of Rhea (Lainey et al. 2017) and at the frequency of Titan (Lainey et al. 2020).

Furthermore, the fact that all layers in a star or a planet do not rotate at the same speed (i.e. differential rotation) is rarely taken into account in the determination of tidal dissipation. Yet, differential rotation seems ubiquitous in low-mass stars and giant gaseous planets. The Sun’s surface rotates in ~ 25 days at the equator versus ~ 35 days near the poles, and a latitude-dependent rotational gradient has also been observed in the Sun’s convective envelope thanks to helioseismology (Schou et al. 1998; Thompson et al. 2003). Through asteroseismology, latitudinal shears have been found to be comparable to that of the Sun for Sun analogues (Bazot et al. 2019), and they can be even larger for solar-like stars (Benomar et al. 2018). Essentially, differential rotation in low-mass stars depends on the effective temperature (Barnes et al. 2005, 2017) and seems to be more important when the convective envelope is thinner. Solar-like rotation profiles and anti-solar-like rotation profiles (with faster poles and a slower equator) are expected in G- and K-type stars depending on their rotation rates, based on three-dimensional numerical simulations (see in particular Brun et al. 2017; Beaudoin et al. 2018), while cylindrical rotation profiles are expected for fast rotators (Gastine et al. 2013). Regarding giant gaseous planets in our Solar System, the extent of zonal winds, which are visible on their surface as bands that run lengthwise, has been recently constrained by the probes Cassini and Juno. They extend to a depth

of 3000 km for Jupiter (Kaspi et al. 2017) and penetrate down to 9000 km in Saturn (Galanti et al. 2019). Thus, the outermost molecular convective envelopes (Militzer et al. 2019; Debras & Chabrier 2019) are the seat of cylindrical differential rotation.

The study of the impact of differential rotation on the propagation and dissipation properties of inertial modes of oscillation began with the work of Baruteau & Rieutord (2013). They examined the impact of either a shellular (radial) or a cylindrical rotation profile on free inertial waves in an incompressible background by means of a Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys (WKBJ) linear analysis for an inviscid fluid and by solving the linearised hydrodynamics equations for a viscous fluid via a spectral code. Their linear analysis highlighted major differences relative to the case of solid-body rotation. Two regimes of propagation have been found in which inertial modes of oscillation can develop along curved paths of characteristics in the entire convective shell (which the authors named ‘D modes’) or in a restricted region of the convective shell, located between a turning surface and one of the shell’s boundaries (DT modes). Compared to solid-body rotation, the frequency range of the propagation of inertial modes is broader. Baruteau & Rieutord (2013) also pointed out the strong dissipation of wave energy at co-rotation resonances where the Doppler-shifted wave frequency vanishes within the fluid. All these new properties have been retrieved by Guenel et al. (2016a), who in turn examined a conical (latitudinal) rotation profile, which is typical of low-mass (F- to K-type) stars. They also confirmed the existence of unstable inertial modes (i.e. modes with positive growth rates) at co-rotation resonances, which were only found for shellular rotation in Baruteau & Rieutord (2013). Tidal forcing of inertial waves with conical rotation was introduced by Guenel et al. (2016b) within a linear numerical exploration, which also highlighted the strong dissipation of inertial waves at co-rotation resonances, particularly at low viscosities. Favier et al. (2014) also studied tidally forced inertial waves, but through non-linear numerical simulations. Differential rotation was triggered in their simulations by tidal waves depositing energy and angular momentum in an initially uniformly rotating spherical shell. In some cases, they observed hydrodynamical shear instabilities when the Ekman number (the ratio between the viscous and Coriolis accelerations) is sufficiently small.

Understanding how inertial waves interact with co-rotation resonances is thus a key issue in quantifying tidal dissipation, especially since waves may deeply interact with the background flow at this particular location, which in turn may alter the background flow (as was proposed first by Eliassen & Palm 1961, for terrestrial mountain waves). In binary systems and for late-type stars, Goldreich & Nicholson (1989) showed that the angular momentum transported by gravity waves and exchanged at co-rotation can lead to the successive synchronisation of the layers, from the base to the top of the radiative envelope. More generally, a body of work in various domains, from astrophysical disks (e.g. Goldreich & Tremaine 1979; Baruteau & Masset 2008; Latter & Balbus 2009; Tsang & Lai 2009) to geophysical fluid dynamics (e.g. Bretherton 1966; Yamanaka & Tanaka 1984), has tried to understand the properties of wave propagation and dissipation around co-rotation and, more generally, at all special locations in fluids that correspond to singularities in the linear wave propagation equation. We will refer to them as ‘critical levels’ in the following (Maslowe 1986), or as ‘critical layers’ in the case of a viscous medium. This distinction is analogous to the distinction between shear layers and attractors of characteristics that are kinds of singularities for the governing equation of inertial waves in a spherical shell. The aforemen-

tioned singularities can act very differently, with either severe absorption at the critical level (as in Booker & Bretherton 1967, for stratified vertical shear flows) or no attenuation if the wave propagates in a peculiar direction (Jones 1967; Acheson 1972; Grimshaw 1975b, for stratified vertical shear flows with rotation and magnetism). In other cases, a critical level may even give rise to wave amplification under certain conditions related to the first and second derivatives of the mean flow velocity (Lindzen & Tung 1978; Lindzen & Barker 1985, for barotropic and stratified shear flows, respectively). These studies all used an invariant quantity (the Reynolds stress or the wave action for rotating or magnetic flows) as a diagnostic tool to interpret the role of the critical level in terms of energy transmission and to quantify exchanges between the wave and the mean flow (Eliassen & Palm 1961; Bretherton 1966).

In light of these various studies, it is necessary to carefully consider co-rotation in differentially rotating convective zones. A local model can notably provide us a detailed understanding of physical processes at critical levels. While the propagation through a critical level of gravito-inertial waves in stratified shear flows and of Rossby waves in baroclinic and barotropic flows has been widely studied in the past decades, the behaviour of inertial waves in a latitudinal sheared flow with critical levels has so far been poorly investigated (e.g. Lindzen 1988, for a review). This is why we develop in this work a local Cartesian shearing box model to understand the complex interplay between tidal waves and zonal flows near critical levels. The concept of a shearing box for tidal flows was introduced by Ogilvie & Lesur (2012) to investigate the interactions between large-scale tidal perturbations and convective motions. In our model, we focus on the latitudinal differential rotation of the mean flow, varying the box orientation to model either cylindrical or conical rotation. The behaviour of free inertial waves in this framework is then examined near critical levels using both analytical and numerical approaches.

This paper is organised as follows. In Sect. 2, we describe the local shear model with its main assumptions and the system of governing equations. In Sect. 3, we establish a second-order ordinary differential equation (ODE) for the latitudinal perturbed velocity, and we derive the propagation properties of inertial waves for an inviscid fluid. This ODE is solved near each critical level for both conical and cylindrical rotation profiles, and we interpret energy flux exchanges between the waves and the mean flow. We use, in Sect. 4, a three-layer numerical model to test our analytical predictions at critical levels. Frictional damping is included, and non-linear mean flow profiles are also used. Astrophysical applications with implications for low-mass stars hosting close exoplanets and for giant gaseous planets in our Solar System are discussed in Sect. 5. In Sect. 6, we summarise the main results of the paper and discuss some perspectives and caveats.

2. Local Cartesian model including differential rotation

2.1. Presentation of the model

The local model takes the form of an inclined sheared box, centred at a point C of a convective shell, as illustrated in Fig. 1. The inclined box model has already been used by Auclair Desrotour et al. (2015) to analytically characterise the properties of tidal gravito-inertial waves in the presence of viscous and thermal diffusion in stably stratified or convective regions, as well as by André et al. (2017) in layered semi-convective regions in

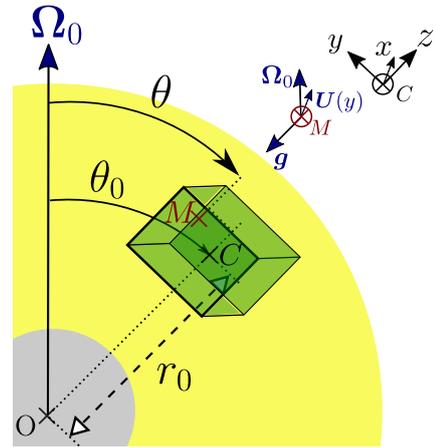


Fig. 1. Sketch of the local Cartesian box in the convective region of a low-mass star or giant planet. Global spherical coordinates, including the depth r_0 , the inclination of the box θ_0 , and the co-latitude θ of a point of interest M inside the box, are shown to facilitate the analogy between the spherical and the Cartesian geometries.

giant planet interiors (see also Jouve & Ogilvie 2014, for two-dimensional numerical simulations of inertial wave attractors). The local coordinate system (x, y, z) corresponds to the local azimuthal, latitudinal, and radial directions of global spherical coordinates, respectively, as presented in Table 1. The mean flow velocity \mathbf{U} is directed along the local azimuthal axis \mathbf{e}_x (we neglect possible meridional flows), and differential rotation is embodied by a latitudinal shear $\partial_y U$. As the box is tilted by an angle θ_0 relative to the rotation axis, the rotation vector in the local coordinate system is

$$2\mathbf{\Omega}_0 = (0, 2\Omega_0 \sin \theta_0, 2\Omega_0 \cos \theta_0) = 2\Omega_0 (0, \tilde{f}, f), \quad (1)$$

where Ω_0 is the rotation frequency of the star at the pole and \tilde{f} and f are the normalised horizontal and vertical Coriolis components, respectively. It should be noted that the inclusion of both of these components means that we have gone beyond the traditional f -plane approximation (see also, Gerkema et al. 2008). Furthermore, we made several hypotheses to model wave propagation in a latitudinal shear flow. The buoyancy acceleration was kept in the fluid equations for the background flow. The effective gravity acceleration \mathbf{g} also includes the centrifugal acceleration, and the fluid's angular velocity is assumed to be small compared to the critical angular velocity $\sqrt{GM/R^3}$, where G , M , and R are the gravitational constant, the mass, and the radius of the body, respectively. Thus, the geometry of the body is close to spherical. Furthermore, the vector \mathbf{g} is supposed to be uniform and constant in the whole box. This requires that the typical length of the box L satisfies $L \ll H_p$, where $H_p = -p/(dz/dp)$ is the vertical pressure scale height, with p being the pressure. We can assume this because tidally excited waves are expected to have small-scale structures (Ogilvie & Lin 2004; Rieutord & Valdettaro 2010; André et al. 2017). Moreover, the dimensions of the box were chosen to be small compared to the depth of the convective envelope so as to remove curvature effects.

2.2. Mean flow profile

In global spherical geometry, the mean flow based on a conical rotation profile $\Omega(\theta)$ is written (e.g. in Guenel et al. 2016a) as:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = r \sin \theta \Omega(\theta) \mathbf{e}_\varphi, \quad (2)$$

Geometry	Local Cartesian	Global Spherical
Basis	$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$	$(\mathbf{e}_\varphi, -\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$
Conical coordinate	y/r_0	$\theta_0 - \theta$
Mean flow	\mathbf{U}	$\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$
Conical shear	$\partial_y U$	$-\partial_\theta(\sin \theta \delta\Omega)$

Table 1. Correspondence between local and global coordinate systems.

where \mathbf{e}_φ is the azimuthal unit vector and r and θ are the radius and co-latitude, respectively. We introduce $\mathbf{u}_0 = r \sin \theta \Omega_0 \mathbf{e}_\varphi$, the mean flow at a point M inside the box (see Fig. 1), without differential rotation. We also use the shear contrast $\delta\Omega = \Omega(\theta) - \Omega_0$ (i.e. the difference between the angular frequency at co-latitude θ and at the pole). The shear contrast is positive for the Sun since the equator rotates faster than the pole, and negative for anti-solar-like rotating stars. Using the notations of Fig. 1, the centre C of the box is located at a distance $r_0 \sin \theta_0$ from the rotation axis. Accordingly, the latitudinal coordinate of the point M in the local frame is

$$y = r \sin(\theta_0 - \theta). \quad (3)$$

It should be noted that the radial coordinate r of the point M in spherical geometry can be written as $r = r_0 + z$. Nevertheless, we neglected vertical displacements in the expression of the local shear because we are interested in how the (one-dimensional) horizontal shear affects the wave dynamics, contrary to many studies on differential rotation in stars that have focused on the vertical shear (e.g. Mathis et al. 2004; Decressin et al. 2009; Alvan et al. 2013; Mathis et al. 2018). Since y/r and thus $\theta_0 - \theta$ are small, we provide the correspondences in terms of mean flows and shears between the two geometries in Table 1.

As an example, the shear contrast from solid-body rotation used by Guenel et al. (2016a) was:

$$\delta\Omega(\theta) = \Omega_0 \chi \sin^2 \theta, \quad (4)$$

where χ is the magnitude of the shear between the equator and the pole. Performing a second-order Taylor expansion around a fixed co-latitude θ_0 , such that $\theta = \theta_0 - y/r_0$, and at a specified depth r_0 inside the convective region, the local mean flow U can be recast as

$$\begin{aligned} u - u_0 &= r_0 \Omega_0 \chi \sin^3 \theta \\ &\simeq \Omega_0 \chi \left[r_0 \sin^3 \theta_0 - 3 \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 y \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^2}{r_0} \left(3 \cos \theta_0^2 \sin \theta_0 - \frac{3}{2} \sin^3 \theta_0 \right) + O(y^3) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

We point out that the Taylor expansion must be pushed further at the pole $\theta_0 = 0$ (and at the pole $\theta_0 = \pi$ with an opposite sign):

$$u - u_0 \simeq -\frac{\Omega_0 \chi}{r_0^2} y^3 + O(y^4). \quad (6)$$

Accordingly, we can approximate a conical shear as a linear mean flow at the first order when the box is tilted. We recall that conical shear has been observed in the solar convective zone and is expected in slowly and moderately rotating solar-like stars (we refer the reader to Sect. 5.1 for a detailed discussion; see also Brun et al. 2015; Beaudoin et al. 2018; Benomar et al. 2018; Bazot et al. 2019). When the box is at the pole, y becomes the

distance from the rotation axis (hereafter the ‘axial distance’). Thus, the mean flow mimics a cylindrical differential rotation that can be modelled using a cubic y -profile given by Eq. (6). This rotation profile is found in Jupiter and Saturn, as well as in rapidly rotating stars, as demonstrated, for instance, by Gastine et al. (2013) and Brun et al. (2015).

2.3. System of equations

To derive the system of governing equations for tidal waves in the local reference frame, we made several hypotheses. Stratification terms, which usually drive the propagation of internal gravity waves, were kept for the sake of clarity and will be methodically kept or removed after applying the Boussinesq approximation and setting the equations for inertial waves. Moreover, we assume that the action of turbulence can be modelled as a Rayleigh friction term in the momentum equation with an effective frictional damping rate σ_f . This simplifies the analytical solution of the fluid equations compared to the usual modelling of turbulence as an effective viscous force (see in particular Ogilvie 2009). The momentum, continuity, and thermodynamic equations for tidal waves in a differentially rotating Cartesian framework are thus:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} - \sigma_f \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{c_s^2} \frac{dp}{dt} = 0, \quad (9)$$

where \mathbf{u} , p , ρ , and \mathbf{f} denote the velocity, pressure, density, and volumetric tidal forcing, respectively. We have also introduced c_s , the sound speed, and $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ is the total derivative operator.

All variables are then linearised at the first order: Zero-order terms correspond to background equilibrium quantities, and first-order terms represent the leading perturbation. The local velocity, density, and pressure are therefore written as:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = U(y) \mathbf{e}_x + \mathbf{u}' \\ \rho = \rho_0 + \epsilon \rho' \\ p = p_0 + \epsilon p' \end{cases}, \quad (10)$$

where $\mathbf{u} = (u, v, w)$ in the local Cartesian basis. We have introduced the dimensionless parameter ϵ :

$$\epsilon = \frac{(2\Omega_0)^2 L}{g}, \quad (11)$$

where we use $1/(2\Omega_0)$, a characteristic time scale, and L , a characteristic length scale of the mean flow. These notations are based on those of Grimshaw (1975b) and adapted to our model. In the following, we will work with dimensionless variables using the above scaling, including $2\Omega_0 L$ to scale velocity and $\rho_T g L$ to scale pressure, with ρ_T the reference density. The dimensionless momentum equation of the mean flow is:

$$\epsilon \mathbf{n} \times \mathbf{U} = -\frac{\nabla p_0}{\rho_0} - \mathbf{e}_z, \quad (12)$$

with \mathbf{n} the unit vector parallel to the rotation axis. Projecting Eq. (12) into Cartesian coordinates, one can derive:

$$\begin{cases} \partial_x p_0 = 0, \\ \partial_y p_0 = -\epsilon \rho_0 f U, \\ \partial_z p_0 = -\rho_0 + \epsilon \rho_0 \tilde{f} U. \end{cases} \quad (13)$$

At the leading order in ϵ , one can recognise the hydrostatic balance and, at the first order, the geostrophic balance (the set is akin to the thermal-wind equilibrium assumption, see e.g. Grimshaw 1975b; Yamanaka & Tanaka 1984). We underline that tending ϵ to zero is similar to assuming the Boussinesq approximation. Indeed, all density variations are neglected, except the ones involved in the buoyancy force. The dimensionless Brunt-Väisälä frequency is

$$N^2 = \epsilon^{-1} \left(F \frac{\partial_z p_0}{\rho_0} - \partial_z \ln \rho_0 \right), \quad (14)$$

where we introduce the dimensionless number $F = gL/c_s^2$, which is small when filtering acoustic waves. Consequently, the curl of Eq. (12) gives

$$\begin{cases} \partial_x \rho_0 = 0, \\ \partial_y \ln \rho_0 = \epsilon (\tilde{f} \partial_y U - f U F), \\ \partial_z \ln \rho_0 = \epsilon (F \tilde{f} U - N^2) - F, \end{cases} \quad (15)$$

where we neglect the second-order terms in ϵ .

Now, we make several assumptions to treat the propagation of inertial waves. As the convective motions are essentially adiabatic, the convective zone can be assumed to be neutrally stratified to a first approximation. Hence, the Brunt-Väisälä frequency N is cancelled out in the third density relationship of Eq. (15). Moreover, we make the Boussinesq approximation, which means that we neglect terms in ϵ and F in the final set of perturbed equations. Thus, the dimensionless linearised momentum, continuity, and thermodynamic equations are ultimately:

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} + v \partial_y U + \mathbf{n} \times \mathbf{u}' = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{e}_z - \sigma_f \mathbf{u}' + \mathbf{f}, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d\rho'}{dt} = -\rho_0 v \tilde{f} \partial_y U, \quad (18)$$

where v is the latitudinal velocity perturbation. We emphasise that, although vertical stratification has been filtered in the limit where N goes to zero, a horizontal stratification term remains in Eq. (18). As a result, we consider the inertial waves propagating in the inclined shear box where the mean flow is maintained by the thermal-wind balance.

2.4. Equilibrium state of the background flow

It is worthwhile discussing the choice of keeping buoyancy forces in the zero-order momentum equation. Without gravitational forces, the momentum equation for mean dimensional variables is written as a geostrophic balance:

$$2\rho_0 \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{U} = -\nabla p_0. \quad (19)$$

This balance satisfies the Taylor-Proudman theorem (Rieutord 2015), namely the geostrophic flow is independent of the coordinate parallel to the rotation axis. When taking the x-axis (the only non-zero) projection of the curl of this equation, one obtains the following relationship:

$$(2\boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla)(\rho_0 U) = 0. \quad (20)$$

Without the vertical stratification embodied by the Brunt-Väisälä frequency, nor latitudinal stratification, the equilibrium of a y-dependent mean flow is thus not ensured for an incompressible

fluid. An alternative to conserve the equilibrium without stratification would be to consider a z -dependence of the mean flow. Such a possibility is not considered in this paper since we are mainly interested in latitudinal mean flow profiles. Furthermore, in addition to maintaining differential rotation, the latitudinal stratification can allow for the construction of an invariant that is useful for studying energy transfer at critical levels: the wave action flux. This will be discussed further in Sect. 3. Lastly, since $\tilde{f} = 0$ at the poles, the latitudinal stratification term will not appear in the perturbed fluid equations (as we can see from Eq. (18)).

3. Dynamics of inertial waves at critical levels: Analytical predictions

In this section, we analytically investigate the behaviour of inertial waves at critical levels in a non-dissipative fluid at various co-latitudes. For this purpose, we consider perturbations q in the normal mode

$$q(x, y, z, t) = q(y) \exp i(k_x x + k_z z - \omega t) + \text{c.c.}, \quad (21)$$

where ω is the complex inertial frequency, k_x and k_z are the real streamwise and vertical wavenumbers, respectively, and c.c. is the complex conjugate.

3.1. Wave propagation equation in the latitudinal direction

Using the modal form (21) for ρ , p , and \mathbf{u} , we solved the set of hydrodynamic equations, Eqs. (16) to (18), for the latitudinal velocity v . Considering free inertial waves (i.e. without forcing terms), the set of perturbation equations can be recast into a single second-order ODE for v :

$$Av'' + Bv' + Cv = 0, \quad (22)$$

where the prime now denotes the derivative according to y , and A , B , and C are the coefficients that can be simplified without friction as follows:

$$\begin{aligned} A &= \sigma^2 - \tilde{f}^2, \\ B &= -2k_x \tilde{f}^2 \frac{U'}{\sigma} - 2ik_z \tilde{f} f, \\ C &= -k_\perp^2 \sigma^2 + k_z^2 f(f - U') - 2ik_x k_z \tilde{f} f \frac{U'}{\sigma} \\ &\quad - 2k_x^2 \tilde{f}^2 \frac{U'^2}{\sigma^2} + \frac{k_x U''}{\sigma} (\sigma^2 - \tilde{f}^2), \end{aligned} \quad (23)$$

where $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ is the absolute wavenumber in the direction perpendicular to the y direction and $\sigma = \omega - k_x U$ is the (dimensionless) Doppler-shifted wave frequency. We refer the reader to Appendix A for the detailed ODE derivation with friction and tidal source terms. Equation (22) becomes singular when $A = 0$ or $\sigma = 0$, and these singular points are called critical levels (see e.g. Bretherton 1966; Grimshaw 1975b). The critical level where the Doppler-shifted frequency equals zero (i.e. $\sigma = 0$) can be met when the mean flow matches the local phase velocity, and this is also known as ‘co-rotation resonance’ (e.g. in Goldreich & Nicholson 1989; Goldreich & Tremaine 1979; Ogilvie & Lin 2004). When the Coriolis acceleration is not taken into account (i.e. when treating internal gravity waves), the co-rotation resonance is the unique critical level (see e.g. Booker & Bretherton 1967). At co-latitudes other than the poles, the critical levels come in three flavours, the co-rotation $\sigma = 0$ and two

other critical levels that are defined, in our model, by $\sigma = \pm \tilde{f}$ (we recall that \tilde{f} is the latitudinal component of the rotation vector). These critical levels were similarly reported for vertical shear flows, as in the studies of Jones (1967) and Grimshaw (1975b) for vertical and inclined rotation vectors, respectively. In these works, the Doppler-shifted frequency at critical levels other than the co-rotation resonance equals $\pm 2\Omega_v$, where Ω_v is the vertical component of the rotation vector.

3.2. Propagation properties

3.2.1. Dispersion relation, group, and phase velocities

The three-dimensional dispersion relation is a fourth-order equation in Doppler-shifted frequency when injecting wave-like solutions into the three directions, x , y , and z , in Eq. (22). In order to understand the main properties of waves at the critical level, we made the short-wavelength approximation in the meridional plane, as in Baruteau & Rieutord (2013) and Guenel et al. (2016a). This involves keeping only the second-order derivatives in the y and z directions, and it reduces the relation dispersion to a second-order equation when injecting plane wave-like solutions. In the local meridional plane, the differential equation reduces to a Poincaré-like equation:

$$(\sigma^2 - \tilde{f}^2) \partial_{y,y} v - 2\tilde{f}f \partial_{y,z} v + [\sigma^2 + f(U' - f)] \partial_{z,z} v = 0, \quad (24)$$

where we recover the Poincaré equation (for the propagation of inertial waves in the inviscid limit; Cartan 1922) in the meridional plane when there is no shear ($U' = 0$) and at the poles ($\tilde{f} = 0$ and $f = 1$). Moreover, we set $v \propto \exp -i(k_z z - k_x x)$ so as to write the wave dispersion relation for the Doppler-shifted frequency σ :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\|\mathbf{k}\|^2} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2 - k_z^2 f U'], \quad (25)$$

where $\|\mathbf{k}\| = k_y^2 + k_z^2$ is the norm of the wave vector in the meridional plane (e.g. for fixed k_x), as in Baruteau & Rieutord (2013). Compared to solid-body rotation (see e.g. Rieutord 2015), an additional term ($k_z^2 f U'$) is present, which accounts for the latitudinal shear. Assuming that σ^2 takes positive values (as in Baruteau & Rieutord 2013; Guenel et al. 2016a), we therefore introduce

$$\gamma = \sqrt{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2 - k_z^2 f U'}. \quad (26)$$

We can then specify the phase velocity in the meridional plane:

$$\mathbf{v}_\phi = \frac{\sigma}{\|\mathbf{k}\|^2} \mathbf{k} = \pm \frac{\gamma}{\|\mathbf{k}\|^3} \mathbf{k}. \quad (27)$$

In the same way, we can derive the expression for the group velocity in the meridional plane:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma = \pm \frac{\gamma}{\|\mathbf{k}\|^3} \left\{ -\mathbf{k} + \left(\frac{\|\mathbf{k}\|}{\gamma} \right)^2 [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) - k_z f U' \mathbf{e}_z] \right\}. \quad (28)$$

We note that without differential rotation, the group velocity reduces to its well-known expression for solid-body rotation (e.g. see Rieutord 2015):

$$\mathbf{v}_g = \pm \frac{\mathbf{k} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|^3}. \quad (29)$$

Moreover, as in solid-body rotation, the group velocity (Eq. 28) and the phase velocity (Eq. 27) lie in perpendicular planes: $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}_\phi = 0$.

When the box is located at the north pole ($\theta_0 = 0$ in Fig. 1), by setting $\kappa = 1 - U'$, we recover

$$\begin{cases} \sigma^2 = \frac{k_z^2}{\|\mathbf{k}\|^2} \kappa^2 \\ \mathbf{v}_\phi = \pm \kappa \frac{k_z \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|^3} \\ \mathbf{v}_g = \pm \kappa \frac{k_y}{\|\mathbf{k}\|^3} (-k_z \mathbf{e}_y + k_y \mathbf{e}_z), \end{cases} \quad (30)$$

as in Latter & Balbus (2009) and Baruteau & Rieutord (2013), where κ can be identified with the epicyclic frequency of Baruteau & Rieutord (2013) and k_y corresponds to the cylindrical component of the wavenumber (k_s).

3.2.2. Phase and group velocity at singularities

In this section, we derive the conditions required to meet singularities in terms of wavenumbers and shear, and we examine the implications for the phase and group velocities. When the box is inclined, for $\sigma \rightarrow 0$ we must have $\gamma \rightarrow 0$, meaning that $\mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0}$ while $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_y| \rightarrow \infty$ and $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z| \rightarrow \infty$ (possibility 1).

Guenel et al. (2016a) found similar results by studying the propagation of free inertial waves in a global frame with conical shear, namely, when their parameter \mathcal{B} (which is homogeneous to a frequency and equivalent to our γ parameter) goes to zero, the group velocity goes to infinity while the phase velocity is cancelled out. According to their work, an inertial wave may propagate across the co-rotation.

Now to get $\sigma \rightarrow \pm \tilde{f}$, we either need $|k_y| \rightarrow \infty$ at fixed k_z , which implies $\mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0}$ and $\mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0}$ and means that inertial waves cannot get through the critical level (possibility 2), or $|k_z| \rightarrow 0$ at fixed k_y , which gives $\mathbf{v}_\phi \cdot \mathbf{e}_z \rightarrow 0$ and $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_y \rightarrow 0$, while $|\mathbf{v}_\phi \cdot \mathbf{e}_y| \rightarrow f/k_y$ and $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z| \rightarrow f/k_y$; the wave may then cross the critical level with some preferential direction (possibility 3).

Again, these conditions share some similarities with those observed for co-rotation in a global spherical geometry. The first of the three possibilities is analogous to the global phase and group velocities tending to zero when $k_s \rightarrow \infty$, with k_s the axial wavenumber in cylindrical coordinates (Baruteau & Rieutord 2013; Guenel et al. 2016a). This makes sense since here the axial distance is $s = r \sin \theta$ and $y \sim r_0(\theta_0 - \theta)$. However, the second possibility is slightly different from both these previous works, in that $|k_z| \rightarrow 0$ at fixed k_s , where k_z is the global vertical wavenumber along the rotation axis, unlike our local vertical wavenumber k_z which is along the spherical radial coordinate.

We point out that the singularities at $\sigma = \pm \tilde{f}$ arise in our model because the rotation vector is inclined with respect to the local vertical axis of the box. In the global model of Guenel et al. (2016a), three conditions for a wave to meet the co-rotation exist, and these conditions are actually quite similar to the three above possibilities for waves in our model to interact either with the co-rotation $\sigma = 0$ or with the other critical levels at $\sigma = \pm \tilde{f}$. Hence, the local critical levels at $\sigma = \pm \tilde{f}$ behave somewhat similarly to the co-rotation in the global framework, as if we partially broke the degeneracy in the local framework of the origin of the co-rotation found in the global framework.

When the box is at the north pole, the three possibilities to meet co-rotation are similar but lead to different relationships for the phase and group velocities: (i) $\kappa \rightarrow 0$ (i.e. $U' \rightarrow 1$), meaning that $\mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0}$ and $\mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0}$: The wave is totally absorbed at co-rotation. (ii) $|k_y| \rightarrow \infty$ at fixed k_z , which implies $\mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0}$ and

$\mathbf{v}_g \rightarrow \mathbf{0}$: We can draw the same conclusion as in the previous case and this case is also analogous to the second possibility when the box is tilted. (iii) $|k_z| \rightarrow 0$ at fixed k_y , which gives $\mathbf{v}_\phi \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_y \rightarrow 0$ while $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z| \rightarrow \kappa/k_y$: The wave energy does not cross the co-rotation in the latitudinal direction (equivalent to the vertical paths of characteristic in global cylindrical geometry, as in Baruteau & Rieutord 2013). At the north pole¹, we actually have a perfect match with the conditions given by Baruteau & Rieutord (2013) when using a cylindrical rotation profile for the mean flow.

3.2.3. Energetical aspects

In this section, we examine the energetic balance associated with inertial waves in our inclined shear box model, without assuming the short-wavelength approximation. This energetic balance does not include potential energy because of the adiabaticity of the convective region, but two additional terms relative to the solid-body rotation case appear, which come from the differential rotation. We denote the displacements along the vertical and latitudinal directions with η and ζ , respectively. Considering that $\omega = k_x c$, where c is the longitudinal phase velocity (e.g. as in Booker & Bretherton 1967), we can use the first-order definition

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\zeta}{dt} = (U - c)\zeta_x, \\ w &= \frac{d\eta}{dt} = (U - c)\eta_x. \end{aligned} \quad (31)$$

This first allows us to express the perturbed density from Eq. (18) as $\rho = -\rho_0 \zeta \tilde{f} U'$ (as a reminder, the symbol $'$ has been dropped for perturbed quantities). Then, by multiplying the momentum equation, Eq. (16), by $\rho_0 \mathbf{u}$, we get the energy balance equation:

$$(U - c) \partial_x e_k + \nabla \cdot (\mathbf{p}\mathbf{u}) = \rho_0 \left[-v U' u + \zeta \tilde{f} U' w - \sigma_f \mathbf{u}^2 + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right], \quad (32)$$

where $e_k = \rho_0 \mathbf{u}^2 / 2$ is the kinetic energy density and $\mathbf{p}\mathbf{u}$ is the so-called acoustic flux. We now integrate the above energy balance equation over x and z , as well as over one wave period as the perturbed quantities have a wave-like form in these directions. Further assuming that the box is δ thick in the y direction, the energetic balance yields:

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}_{\text{shear}} + D_{\text{visc}} + \mathcal{P}_f, \quad (33)$$

where we introduce, from left to right, the power of the external pressures at the boundaries $-\delta/2$ and $\delta/2$ on the perturbed latitudinal flow, the work of the shear, the viscous dissipation, and the forcing power, which read, respectively:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}} &= \left[\overline{p v} \right]_{-\delta/2}^{\delta/2}, \\ \mathcal{P}_{\text{shear}} &= - \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \rho_0 U' (\overline{u v} - \overline{f w \zeta}) dy, \\ D_{\text{visc}} &= - \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \rho_0 \sigma_f \overline{\mathbf{u}^2} dy, \\ \mathcal{P}_f &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \rho_0 \overline{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}} dy, \end{aligned} \quad (34)$$

¹ We note that a similar analysis can be undertaken at the south pole by using $\kappa = 1 + U'$.

where the bar represents the average in the (z, x) plane over one period. We note that the energy density and the acoustic flux in the x and z directions drop out in Eq. (33) when integrating because of the wave periodicity in those directions. The quantity $\mathcal{P}_{\text{shear}}$ can also be seen as the power transferred from the mean flow to the perturbation (or conversely) by the Reynolds stress:

$$\tau = -\rho_0 (\overline{u v} - \overline{f w \zeta}) = -\rho_0 v \overline{(u + f \eta)}, \quad (35)$$

where we use partial integration and the periodicity of perturbations in the x and z directions. At the pole, $\tilde{f} = 0$, so we recover the definition of the Reynolds stress in Miles (1961), who studied the stability of a two-dimensional stratified y -sheared flow (i.e. $\tau = -\rho_0 \overline{u v}$). This quantity can also be called the latitudinal flux of horizontal momentum (in the (z, x) plane sense) in reference to the vertical flux of horizontal momentum in stratified z -sheared flows. Moreover, we emphasise that the latitudinal flux of energy $\overline{p v}$ is not conserved, even in the inviscid free-wave problem. This is due to the presence of the shear, as already stated for example by Eliassen & Palm (1961), who studied stratified vertically sheared flows. They underline that when the mean flow varies with height, the kinetic energy of the mean motion can be converted into wave energy. Without friction and forcing, the y -derivative of the latitudinal flux is:

$$\frac{d}{dy} \overline{p v} = -\rho_0 U' v \overline{(u + f \eta)}. \quad (36)$$

Using the same method as Broad (1995), we multiplied the x -projection of the inviscid force-free momentum equation by ζ :

$$-p_x \zeta = \rho_0 (U - c) \zeta u_x + \rho_0 (U' - f) v \zeta + \rho_0 \tilde{f} w \zeta. \quad (37)$$

By multiplying by $(U - c)$, the latitudinal flux of energy can thus be written as:

$$\overline{p v} = -\rho_0 (U - c) \overline{v (u + f \eta)}. \quad (38)$$

By differentiating this relationship with respect to y , and by equalising with Eq. (36), one can obtain:

$$-\rho_0 (U - c) \frac{d}{dy} \left\{ v \overline{(u + f \eta)} \right\} = 0, \quad (39)$$

that is $(U - c) \frac{d\tau}{dy} = 0$ with τ the Reynolds stress. Equation (39)

is naturally satisfied at co-rotation, where $U - c = 0$, or if the Reynolds stress is uniform. Booker & Bretherton (1967) have shown that the Reynolds stress is discontinuous at a critical level, highlighting exchanges between wave energy and the mean flow. Compared to the analysis of Broad (1995) for three-dimensional stratified shear flows, Eq. (39) is not vectorial, because our base flow is unidirectional.

3.2.4. Polarisation relations

For the forthcoming analysis, it is useful to derive expressions of the perturbed projected velocities and the perturbed reduced pressure² $\Pi = p/\rho_0$, namely the polarisation relations (see Appendix B for more details). In the inviscid free-wave problem,

² The quantity Π is actually the enthalpy perturbation, but we will use the denomination 'reduced pressure' in the following.

these perturbed quantities can be written in terms of the latitudinal velocity, its derivative, and the shear:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{\sigma k_{\perp}^2} \left\{ iA v' + \left[ik_x \frac{U'}{\sigma} A + f(k_z \tilde{f} - ik_x \sigma) \right] v \right\}, \\ w &= \frac{1}{\sigma k_{\perp}^2} \left\{ (i\sigma k_z - k_x \tilde{f}) v' + k_x \left[ik_z (U' - f) - k_x \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \right] v \right\}, \\ u &= \frac{1}{\sigma k_{\perp}^2} \left\{ (i\sigma k_x + k_z \tilde{f}) v' + k_z \left[ik_z (f - U') + k_x \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \right] v \right\}.\end{aligned}\quad (40)$$

Without shear and at $\theta_0 = 0$, we recover the polarisation relations in the solid-body rotation case (see e.g. Rieutord 2015).

3.2.5. Conservation of the wave action flux

While the latitudinal flux of energy is not conserved in the whole domain, there is a conserved quantity, called the wave action flux, as introduced in Grimshaw (1975b):

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{p\bar{v}}}{\sigma} = \frac{\rho_0}{2} \Re \left\{ \frac{\Pi v^*}{\sigma} \right\}, \quad (41)$$

which is the latitudinal flux averaged over vertical and longitudinal wavelengths divided by the Doppler-shifted frequency. A general treatment for the derivation of the wave action as a conserved quantity can similarly be found in Andrews & McIntyre (1978). The wave action flux is related to the Reynolds stress τ as $\mathcal{A} = -\tau/k_x$. By using the expression for the perturbed reduced pressure Π derived in the previous section, the wave action flux now reads:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \rho_0 \Re \left\{ \frac{iA v_y v^* + f \tilde{f} k_z |v|^2}{\sigma^2 k_{\perp}^2} \right\}. \quad (42)$$

Unlike the latitudinal flux of energy, but similarly to the Reynolds stress, this wave action flux is conserved along the latitudinal direction. One can demonstrate that $\mathcal{A}' = 0$ in the whole domain except at critical levels by using the expression for the reduced pressure in Eq. (40) and the ODE (Eq. (22)). Several works have shown that a properly defined (i.e. conserved) angular momentum transport parameter can be found in z -sheared mean flows without rotation (Booker & Bretherton 1967), with rotation under the traditional approximation (Jones 1967), and with rotation under the non-traditional approximation (Grimshaw 1975b). Verifying the conservation in the whole domain except at critical levels is really important because it brings to the fore energy transfers that are due to the critical levels. We specify that \mathcal{A} is a measure of wave energy through a surface (in the (z, x) plane) since $\overline{p\bar{v}}$ is the energy density transported by the group velocity³ V_g in the latitudinal direction (e.g. Bretherton & Garrett 1968; Mathis & de Brye 2012). It should be underlined that the wave action flux has been defined in the inviscid limit and is not conserved when the friction is taken into account.

3.3. Inertial waves at critical levels when the box is tilted

In this section, we analytically investigate waves passing through the various critical levels in the tilted box. We examine the behaviour of the waves around the co-rotation $\sigma = 0$ and the critical levels $\sigma = \pm f$ when the box is tilted (for the co-rotation when the box is at the pole, see Sect. 3.4).

³ We note that the velocity of energy density, V_g , in the latitudinal direction has been named the ‘group velocity’ for obvious physical reasons, but it differs from the group velocity defined in Sect. 3.2, which, unlike V_g , depends on latitudinal and vertical wavenumbers.

3.3.1. Critical levels at $\sigma = \pm \tilde{f}$

In this subsection, we treat both singularities, $\sigma = \pm \tilde{f}$, simultaneously. Although Eq. (22) does not have analytical solutions in general, it is still possible to study the behaviour of an inertial wave close to the critical levels defined by $\sigma = \pm \tilde{f}$ by approximating the ODE through its first-order Taylor expansion in the vicinity of these singularities, and then by applying the Frobenius method. We introduced y_{\pm} , the location of the related critical level $\sigma = \pm \tilde{f}$. For a linear mean flow profile $U = \Lambda y$, with Λ a constant, y_{\pm} are given by:

$$y_{\pm} = \frac{\omega \mp \tilde{f}}{k_x \Lambda}. \quad (43)$$

Without any assumption on the mean flow profile, the first-order Taylor expansion of the ODE (Eq. (22)) near y_{\pm} is:

$$v'' + \frac{\mathcal{B}}{y - y_{\pm}} v' = 0, \quad (44)$$

with

$$\mathcal{B} = 1 \pm i \frac{k_z f}{k_x U'_{\pm}}, \quad (45)$$

where the symbol \pm refers to the regular singularities⁴ y_{\pm} and y_{\pm} and U'_{\pm} is U' evaluated at these singularities. The Frobenius method consists in injecting the power function $(y - y_{\pm})^{\lambda}$ into Eq. (44), with λ a constant to be determined (see e.g. Morse & Feshbach 1953). The corresponding indicial equation is then

$$\lambda(\lambda - 1) + \mathcal{B}\lambda = 0, \quad (46)$$

with solutions:

$$\lambda_{\pm} = \left\{ 0, \mp i \frac{k_z f}{k_x U'_{\pm}} \right\}. \quad (47)$$

Therefore, the two independent solutions of Eq. (44) can be written as follows:

$$v_{1,\pm}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (y - y_{\pm})^n \quad \text{and} \quad v_{2,\pm}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (y - y_{\pm})^{n+\lambda_{\pm}}, \quad (48)$$

where a_n and b_n are complex constants. Both solutions are valid in the vicinity of the critical level around which they are built in the complex plane, up to the next singularity if it exists. The coefficients a_0 and b_0 are unconstrained and depend on boundary conditions, unlike the other factors that can be determined by injecting the solutions from Eq. (48) into the linearised ODE (Eq. (22)) around y_{\pm} at the right order for the desired coefficients.

Near the critical points y_{\pm} , the total solution v_{\pm} is well approximated by the lowest orders of $v_{1,\pm}$ and $v_{2,\pm}$:

$$v_{\pm}(y) \simeq a_0 + b_0 (y - y_{\pm})^{\lambda_{\pm}}. \quad (49)$$

Owing to the existence of a branch point at y_{\pm} (since λ_{\pm} is complex), reconnecting solutions on either side of the critical levels is not straightforward. This requires both physical and mathematical arguments (see in particular Miles 1961; Booker & Bretherton 1967; Ringot 1998). In order to remove the degeneracy of the path from positive to negative $y - y_{\pm}$ (i.e. choosing

⁴ A singular point y_0 of the second-order ODE $v''(y) + p(y)v'(y) + q(y)v(y) = 0$ is said to be regular when the function $p(y)(y - y_0)$ and $q(y)(y - y_0)^2$ are analytical at $y = y_0$.

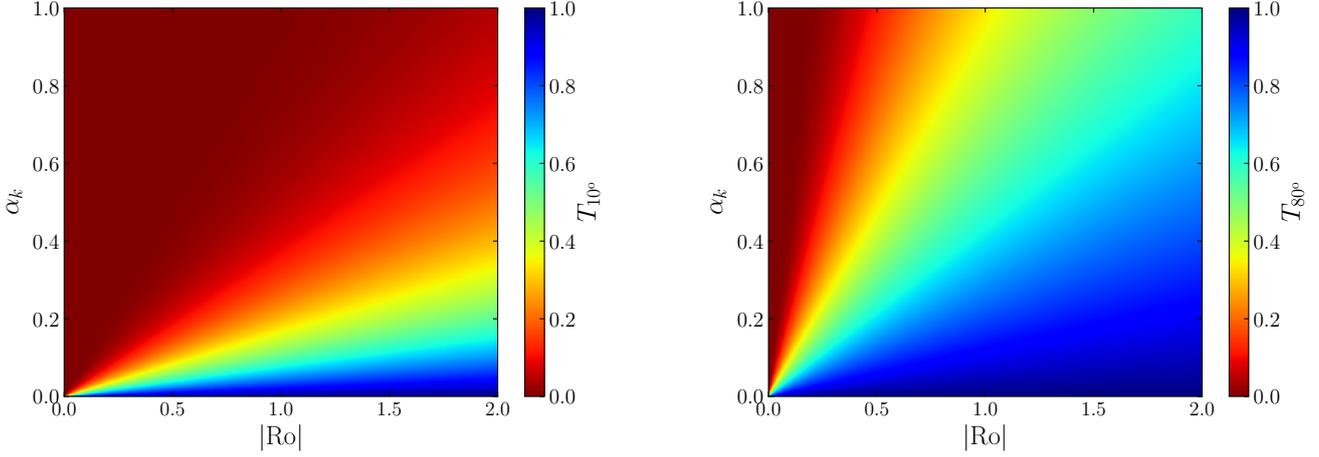


Fig. 2. Transmission rate T_{θ_0} of a wave passing through any of the critical levels defined by $\sigma = \pm \tilde{f}$ as a function of the absolute value of the shear Rossby number $|R_0| = |U'|$ (where U' is scaled by $2\Omega_0$) and the ratio of the horizontal wavenumbers $\alpha_k = k_z/k_x$ for a co-latitude of the box $\theta_0 = 10^\circ$ (left panel) and $\theta_0 = 80^\circ$ (right panel).

either $e^{+i\pi}$ or $e^{-i\pi}$), we made use of a complex inertial frequency $\omega = \omega_R + i\omega_I$, assuming the radiation condition $\omega_I > 0$. This condition ensures a non-growing wave towards infinity. The Taylor expansion of the base flow at the first order in $y - y_\pm$ gives

$$y - y_\pm = \frac{U(y) - U_\pm}{U'_\pm}, \quad (50)$$

and, by definition, we have

$$U_\pm = \frac{\omega \mp \tilde{f}}{k_x}. \quad (51)$$

Consequently, the solution below the critical level is unambiguous in terms of the above solution coefficients and depends on

$$\text{sign}[\Im\{y - y_\pm\}] = -\text{sign}[k_x U'_\pm]. \quad (52)$$

In other words, when taking $y - y_\pm$ to decrease from positive to negative values, its complex argument changes continuously from 0 to $-\text{sign}[k_x U'_\pm]\pi$. Thus, the appropriate path for determining the branch of $(y - y_\pm)^{\pm}$ passes under (above) y_\pm as long as $k_x U'_\pm > 0$ ($k_x U'_\pm < 0$) (the same reasoning can be found in Grimshaw 1975b). Therefore, the solution on both sides of the critical level y_\pm is:

$$v_\pm(y) \simeq \begin{cases} a_0 + b_0|y - y_\pm|^{\mp ik_z f/k_x U'_\pm} & \text{for } y > y_\pm \\ a_0 + b_0|y - y_\pm|^{\mp ik_z f/k_x U'_\pm} \exp(\mp \pi k_z f/|k_x U'_\pm|) & \text{for } y < y_\pm \end{cases}. \quad (53)$$

The remaining issue is now to know in which direction the wave is propagating. The second part of the solution can be assimilated to a wave-like solution with the varying latitudinal wavenumber $\mp(k_z f/k_x U'_\pm) \log|y - y_\pm|$. Moreover, according to Eq. (42), the wave action flux on either side of y_\pm is:

$$\mathcal{A} = \frac{\rho_0 k_z f}{2f k_\perp^2} \begin{cases} |a_0|^2 - |b_0|^2 & \text{for } y > y_\pm \\ |a_0|^2 - |b_0|^2 \exp(\mp 2\pi k_z f/|k_x U'_\pm|) & \text{for } y < y_\pm \end{cases}. \quad (54)$$

The group velocity gives the direction towards which the energy is transported (we recall that $V_g \mathcal{E} = \overline{p v}$, with V_g the

group velocity and \mathcal{E} the local energy density). By consequence, $\text{sign}(V_g) = \text{sign}(\mathcal{A}\sigma) = \mp \text{sign}(fk_z)$ for the solution featuring the coefficient b_0 . If $k_z f$ is positive, this wave transports energy downwards (upwards) across the critical level $\sigma = \tilde{f}$ ($\sigma = -\tilde{f}$). If $k_z f$ is negative, the wave transports energy upwards (downwards) across the critical level $\sigma = \tilde{f}$ ($\sigma = -\tilde{f}$). In all cases, the action flux of the wave with the amplitude $|b_0|$ will be transmitted (in the direction given by the sign of $k_z f$ and the critical level y_+ or y_-) by a factor T_{θ_0} , where

$$T_{\theta_0} = \exp(-2\pi \frac{|k_z f|}{|k_x U'_\pm|}) = \exp(-2\pi \frac{|\alpha_k \cos \theta_0|}{|R_0|}), \quad (55)$$

with $\alpha_k = k_z/k_x$ and $R_0 = U'_\pm$, after passing through the critical level. Such a wave will always be attenuated since $T_{\theta_0} \leq 1$. The transmission factors $T_{\theta_0=10^\circ}$ and $T_{\theta_0=80^\circ}$ are displayed in Fig. 2 in terms of the absolute value of the shear Rossby number $|R_0|$ and the ratio of wavenumbers α_k . The lower the amplitude of the Rossby number and the lower the inclination, the more likely the wave is to be strongly attenuated at any α_k . We reiterate that a low Rossby number refers either to fast-rotating stars or to low differential rotation. At the equator, one should note that $f = 0$, thus there is no transmission nor exchange of wave action flux near the critical levels y_\pm in the inviscid limit (see Eq. (54)). Results are the same for $\theta_0 + k\pi/2$ with $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ and for negative Rossby numbers. However, it has to be emphasised that the cases where the inclination satisfies $\theta_0 = k\pi$ with $k \in \{0, 1\}$ are not well described by the attenuated factor T_{θ_0} and require a specific treatment, as discussed in Sect. 3.4.

It is important to note that, with fixed parameters $\{k_z, \theta_0, R_0\}$, the attenuation of the wave action flux is specific to a single direction of wave propagation (i.e. the solution featuring the coefficient b_0). The solution of coefficient a_0 is not affected by the attenuation. This is the so-called valve effect introduced by Acheson (1972) in the context of hydromagnetic waves in a rotating fluid. It was also evidenced by Grimshaw (1975b) and further discussed in Grimshaw (1979) for magneto-gravito-inertial waves in an inviscid and compressible z -sheared fluid.

3.3.2. Inertial wave crossing co-rotation

We performed the same analysis as in the previous section to treat the co-rotation point y_0 where $\sigma = 0$ (i.e. $U(y_0) = U_0 = \omega/k_x$). The linearised ODE (22) near the co-rotation using the Taylor expansion of σ and U at the lowest orders is:

$$v'' + \left(-\frac{2}{y-y_0} + 2ik_z \frac{f}{f} - \frac{U''_0}{U'_0} \right) v' + \left[\frac{2}{(y-y_0)^2} - \frac{2ik_z f}{f(y-y_0)} + \frac{U''_0}{U'_0(y-y_0)} \right] v = 0, \quad (56)$$

where U'_0 and U''_0 are the first and second derivatives of the mean flow profile U evaluated at the critical level y_0 . The singularity at the co-rotation is a regular singularity, and we can again use the Frobenius method. The indicial equation has solutions $\lambda = \{2, 1\}$. Since the difference between the two values of the exponent λ is an integer, one expects a second independent solution v_2 of Eq. (56) that includes a logarithmic part, such as (e.g. Schmid et al. 2002)

$$v_2(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (y-y_0)^{n+1} + L \ln(y-y_0) v_1(y), \quad (57)$$

with $v_1(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (y-y_0)^{n+2}$ the first solution and $a_n, b_n,$ and L complex coefficients. However, when injecting $v_1 + v_2$ into Eq. (56), one finds $L = 0$, meaning that a sole polynomial solution in the form

$$v(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (y-y_0)^{n+1} \quad (58)$$

includes all the solutions of Eq. (56), with $c_0 = b_0$ and $a_1 = b_1 + a_0$ determined by boundary conditions, and $c_n, n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\} = b_n + a_{n-1}$ determined by recurrence via the expansion of Eq. (22) around y_0 . As a result, the wave action flux given by Eq. (42) becomes

$$\mathcal{A} = \frac{\rho_0}{2k_x^2 U_0'^2 k_\perp^2} \left[\tilde{f}^2 \Im c_0^* c_1 + f \tilde{f} k_z |c_0|^2 \right] \quad (59)$$

just below and above the co-rotation, and it is continuous there, similarly as in Grimshaw (1975b), but here without being restricted to a linear mean flow profile. Hence, no transfer of wave action flux is expected at co-rotation in the inviscid limit when the box is inclined relative to the rotation axis (i.e. for conical differential rotation), regardless of the mean flow profile. This result also holds true when the box is located at the equator.

As in the works of Grimshaw (1975b) and Jones (1967), it is tempting to investigate the asymptotic behaviour of a wave when $y \rightarrow \infty$ in order to better constrain the propagation of waves through one or multiple critical levels. Nevertheless, the term $-\sigma^2 k_\perp^2$ in the ODE (Eq. (22)), which cannot be overlooked as it was in the aforementioned studies since we do not have vertical stratification, makes the singularity $y = \infty$ an essential (or irregular) singularity, and the Frobenius method cannot be applied. This term also prevents us from applying an analysis such as the WKB approximation because, even far from critical levels, the coefficients C of the ODE (in Eq. (22)) still have a strong dependence on the latitudinal coordinate when the box is tilted.

3.4. Inertial waves when the box is at the poles

When the box is located at the north or south pole, $\tilde{f} = 0$ and the ODE (Eq. (22)) is greatly simplified. For $\theta_0 = 0$, the dimensionless wave propagation equation becomes

$$v'' + \left[\frac{k_z^2 (1 - U')}{\sigma^2} + \frac{k_x U''}{\sigma} - k_\perp^2 \right] v = 0. \quad (60)$$

At the south pole (i.e. $\theta_0 = \pi$), the term $1 - U'$ in Eq. (60) is replaced by $1 + U'$. We note that this equation is reminiscent of the differential equation for Rossby waves in the β -plane, that is, $2\Omega = (0, \tilde{f}, f)$ and there is a constant $df/dy = \beta$, with f the Coriolis parameter (e.g. Miles 1961; Grimshaw 1975a; Gliatto & Held 2020). However, we cannot make a direct comparison at co-rotation, because the singularity in the equations for Rossby waves and inertial waves is not of the same order. We have a second-order pole around the co-rotation, while only first-order poles are found in the aforementioned studies. In fact, Eq. (60) is similar to the wave equation in stratified z -sheared flows (e.g. Jones 1968).

In our polar configuration, the y -coordinate is now the axial distance, and this means that the mean flow has a cylindrical profile. Such a rotation profile is expected in giant planets such as Jupiter and Saturn (Kaspi et al. 2017; Galanti et al. 2019, respectively) as a natural outcome of the Proudman-Taylor theorem for fast-rotating bodies. The propagation and dissipation of inertial modes of oscillations in the presence of critical levels for this kind of mean flow have been investigated by Baruteau & Rieutord (2013) in a spherical shell.

3.4.1. Analytical solutions with constant shear

Analytical solutions of the ODE Eq. (60) are difficult to find for general profiles of the mean flow (e.g. a quadratic mean flow profile). A linear mean flow profile, on the other hand, has analytic solutions, which is why we use such a profile in this section (i.e. $U = R_0 y$, with R_0 the shear Rossby number that is taken as constant here). Equation (60) then becomes:

$$v'' + \left[\frac{\alpha_k^2 (1 - R_0)/R_0^2}{(y-y_0)^2} - k_\perp^2 \right] v = 0, \quad (61)$$

where $y_0 = \omega/(k_x R_0)$ and $\alpha_k = k_z/k_x$ is the vertical to longitudinal wavenumber ratio. When the box is located at the south pole, the left-hand term in the bracket is $\alpha_k^2 (1 + R_0)/R_0^2$ in the numerator. This equation takes the form of Whittaker's equation (see Abramowitz & Stegun 1972), and solutions can be written in terms of the Whittaker functions M :

$$v(y) = AM_{0,\mu}(\tilde{y}) + BM_{0,-\mu}(\tilde{y}), \quad (62)$$

where $\tilde{y} = 2k_\perp (y - y_0)$,

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha_k^2 (1 - R_0)}{R_0^2}}, \quad (63)$$

and A and B are complex constants given by boundary conditions. The Whittaker function $M_{0,-\mu}$ allows a quite straightforward analytic continuation:

$$M_{0,\mu}(e^{-i\pi} \tilde{y}) = -i e^{-i\pi\mu} M_{0,\mu}(\tilde{y}). \quad (64)$$

By consequence, the solution below the critical point $y = y_0$ is:

$$v_W(y) = -i\zeta A e^{-i\zeta\pi\mu} M_{0,\mu}(-\tilde{y}) - i\zeta B e^{i\zeta\pi\mu} M_{0,-\mu}(-\tilde{y}). \quad (65)$$

Although the Whittaker functions do not feature precisely as wave-like forms, we can already get a good idea of the attenuation factor thanks to analytic continuation, as will be shown in the following section.

It is important to point out that μ can be real or complex depending on the value of

$$R_{\theta_0=0,\pi} = \alpha_k^2(1 \mp R_0)/R_0^2, \quad (66)$$

which will simply be denoted by R in the following. This can drastically change the behaviour of a wave passing through the co-rotation. A necessary, but not sufficient, condition to find an instability is that $R < 1/4$, as we will demonstrate in Sect. 3.4.4. This condition is similar to the Miles-Howard theorem for stratified z -sheared flow (Miles & Howard 1964; Lindzen 1988). In these studies, the prerequisite for instability is that $Ri < 1/4$, where Ri is the Richardson number, namely the squared ratio of the Brunt-Vaisala frequency to the vertical (or radial in global spherical geometry, Alvan et al. 2013) shear. In our model, unlike cases where the box is tilted, a WKBJ analysis can typically be performed for a linear mean flow, provided that $|R| \gg 1/4$, in line with the condition of stability derived in the coming sections and detailed in Appendix C.

These various situations regarding the value of $R_{\theta_0=0,\pi}$ at the north and south poles are illustrated in Fig. 3. We stress the particular case where $R_0 = 1$ ($R_0 = -1$) at the north (south) pole, and where the differential equation and its solutions take a quite simple form:

$$v'' - k_{\perp}^2 v = 0, \quad \text{with } v \propto e^{\pm k_{\perp} y}. \quad (67)$$

Solutions are then fully evanescent for such shears. One can notice that Eq. (67) is the same far from co-rotation for any mean flow.

Finally, it is clear from Fig. 3 that wave propagation is the same at the north and south poles provided a Rossby number of opposite sign. As a result, only the equations at the north pole will be treated in the following, and the word ‘pole’ now refers to the north pole.

3.4.2. Frobenius method at the pole

Though analytic solutions are known, it is still useful to determine Frobenius solutions near co-rotation for two main reasons. First, these solutions can be derived for any mean flow profile near the co-rotation. Close to co-rotation, the mean flow is approximated by a Taylor expansion at the first-order $U = U'_0(y - y_0)$. Secondly, Frobenius solutions may feature wave-like forms, which is helpful for physical interpretation. Therefore, Eq. (60) can be written near co-rotation as

$$v'' + \frac{\alpha_k^2(1 - R_0)/R_0^2}{(y - y_0)^2} v = 0, \quad (68)$$

where $R_0 = U'_0$ and $R'_0 = U''_0$. The indicial equation gives:

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \mu. \quad (69)$$

In the two next subsections, we examine the two cases where μ is imaginary or real.

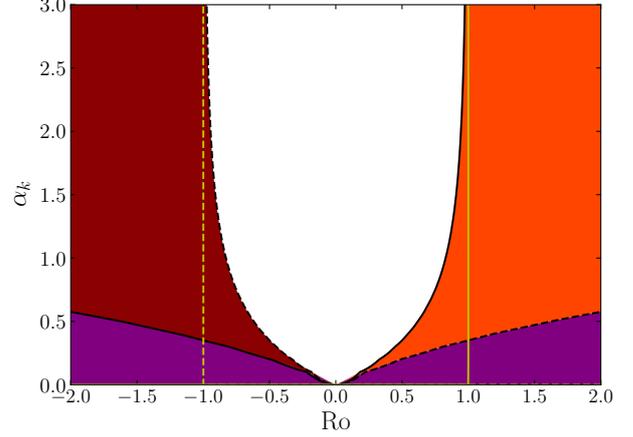


Fig. 3. Diagram showing how $R_{\theta_0=0,\pi} \equiv R$ compares to $1/4$ for two positions of the box ($\theta_0 = 0$ and π), as well as for a range of Rossby numbers R_0 and a range of the vertical to longitudinal wavenumber ratio α_k . The solid and dashed black lines mark where $R_{\theta_0=0,\pi} = 1/4$ at the north and south poles, respectively. The purple domain shows where $R_{\theta_0=0,\pi} < 1/4$, and the white region where $R_{\theta_0=0,\pi} > 1/4$, regardless of whether the box is at the north or the south pole. In the dark red region, $R_{\theta_0=0} > 1/4$ and $R_{\theta_0=\pi} < 1/4$, and vice versa in the orange region.

3.4.3. Theoretical stable regime ($R > 1/4$)

We address here the case where $R > 1/4$. The same analysis from Sect. 3.3 can be carried out to determine how a wave behaves upon crossing the co-rotation. The solutions of the indicial equation can be recast as

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i|\mu|. \quad (70)$$

The first-order solutions to Eq. (68) in the vicinity of y_0 are :

$$\begin{cases} a_0(y - y_0)^{\frac{1}{2} + i|\mu|} + b_0(y - y_0)^{\frac{1}{2} - i|\mu|}, & y > y_0 \\ -i\mathcal{S} \left[a_0(y_0 - y)^{\frac{1}{2} + i|\mu|} e^{\mathcal{S}\pi|\mu|} + b_0(y_0 - y)^{\frac{1}{2} - i|\mu|} e^{-\mathcal{S}\pi|\mu|} \right], & y < y_0 \end{cases} \quad (71)$$

for $a_0, b_0 \in \mathbb{C}$. One can recover the same form of Frobenius solutions as in Alvan et al. (2013), who examined radially stratified mean flows in spherical geometry. As $\tilde{f} = 0$, the wave action flux Eq. (42) reduces to

$$\mathcal{A} = -\frac{\rho_0}{2k_{\perp}^2} \Im v_y v^*, \quad (72)$$

that is, injecting the solutions on both sides of the critical level:

$$\mathcal{A} = -\frac{\rho_0}{2k_{\perp}^2} |\mu| \begin{cases} |a_0|^2 - |b_0|^2, & y > y_0 \\ -|a_0|^2 e^{2\mathcal{S}\pi|\mu|} + |b_0|^2 e^{-2\mathcal{S}\pi|\mu|}, & y < y_0 \end{cases}. \quad (73)$$

This formulation is quite similar to the expression of the Reynolds stress (τ) in vertically stratified mean flows, which can be found in Booker & Bretherton (1967) in Cartesian geometry. We recall that, indeed, $\tau = -k_x \mathcal{A}$. Moreover, given Eq. (35), the Reynolds stress in our model reads $\tau = -\rho_0 \overline{uv}$. Using the polarisation relations for u , we recover the wave action flux in Eq. (72).

The pre-factor i in the solutions (71) below the co-rotation does not affect the energy flow and simply indicates that the

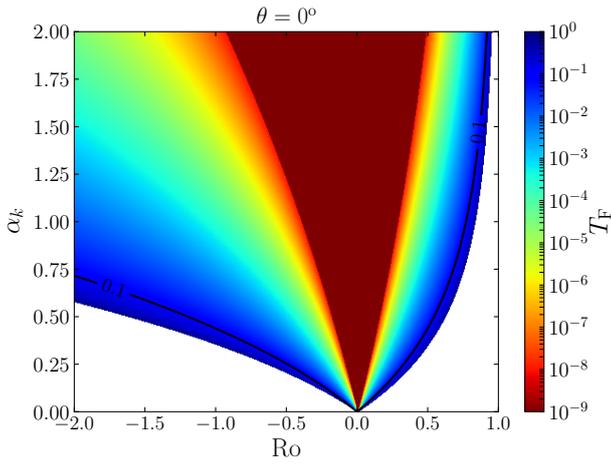


Fig. 4. Transmission rate T_F of the wave action flux across the co-rotation when the box is located at the pole for $R > 1/4$. It is displayed against the Rossby number R_o and the ratio of the horizontal wavenumbers $\alpha_k = k_z/k_x$. The forbidden region where $R < 1/4$ is shown in white, and the dark red cone corresponds to values of T_F that are lower than 10^{-9} .

wave undergoes a phase shift of $\pi/2$ through the critical level (see also Alvan et al. 2013). Above the critical level, the normalised Doppler-shifted frequency satisfies $\text{sign}(\sigma) = -\zeta$, as was the case for the co-rotation in the inclined box. The sign is reversed below the critical level. Thus, the first solution of main amplitude $|a_0|$ carries its latitudinal flux of energy upwards (downwards) for $\zeta = +1$ ($\zeta = -1$), while the second solution transfers its energy in the opposite direction in the various cases. Therefore, the energy flux of an upward or downward wave is always attenuated by a factor

$$T_F = \exp\{-2\pi|\mu|\}. \quad (74)$$

This attenuation factor is shown versus R_o and α_k in Fig. 4. We observe that the wave is largely absorbed at the critical level and thus deposits most, if not all, its energy for most couples (α_k, R_o) .

3.4.4. Possible unstable regime ($R < 1/4$)

We now deal with the case where $R < 1/4$ (i.e. μ is real). Contrary to the situation where $R > 1/4$, we can no longer assimilate solutions to wave-like functions. The exponential form of solutions for $R < 1/4$ near the critical level reads

$$v(y) = \begin{cases} a_0(y - y_0)^{\frac{1}{2} + |\mu|} + b_0(y - y_0)^{\frac{1}{2} - |\mu|}, & y > y_0 \\ -i\zeta \left[e^{-i\zeta\pi|\mu|} a_0(y - y_0)^{\frac{1}{2} + |\mu|} \right. \\ \quad \left. + e^{i\zeta\pi|\mu|} b_0(y - y_0)^{\frac{1}{2} - |\mu|} \right], & y < y_0 \end{cases} \quad (75)$$

and makes this region fully evanescent. Furthermore, the associated wave action flux is

$$\mathcal{A} = -\frac{\rho_0}{k_\perp^2} \mu \begin{cases} \Im a_0 b_0^*, & y > y_0 \\ -\Im a_0 b_0^* e^{-2i\zeta\pi\mu}, & y < y_0 \end{cases}. \quad (76)$$

Without knowing the direction of the wave or the energy flux, since $\text{sign}(V_g) = \zeta \text{sign}(\Im a_0 b_0^*)$, it is difficult to assess the impact of the critical level on wave propagation, that is, whether it will attenuate waves or, on the contrary, amplify them.

Lindzen & Barker (1985) found a way to investigate the behaviour of internal gravity waves in the presence of a vertical shear, passing through a critical level in a regime similar to ours ($Ri < 1/4$) where solutions are fully evanescent. Their work, which was carried out in local Cartesian geometry, was taken up by Alvan et al. (2013) in global spherical geometry applied to the radiative zone of solar-like stars and evolved stars. The goal of the method is to determine the reflection and transmission coefficients in a three-zone model. The evanescent region where the Richardson number satisfies $Ri < 1/4$ and where the critical level is located (zone II) is sandwiched between two propagating wave layers (zones I and III). Using a linear mean flow profile so as to establish solutions inside zone II, Lindzen & Barker (1985) and Alvan et al. (2013) both used continuity relations of the perturbed vertical (or radial) velocity and its derivatives at the interfaces between zones in order to get the transmission and reflection coefficients. The critical level is located in the middle of zone II which has a width δ . By consequence, the reflection and transmission coefficients depend, in their works, on the shear and, more precisely, the Richardson number, as well as on the width δ . They both found that, depending on the Richardson number and δ , the reflection and transmission coefficients can be greater than one, meaning that the wave can be over-reflected and/or over-transmitted and thus extract energy and angular momentum fluxes from the mean flow, which can, in turn, lead to potential shear instabilities after successive encounters of the wave with the critical layer. However, this result is conditioned by the geometry of the model. As shown by Lindzen (1988) in his review, and references therein, models with one or even two layers with evanescent waves, and potentially a wave-like region, do not allow such phenomena. A first region that allows the wave propagation is mandatory and is combined with a ‘sink’ that pulls the wave to cross the critical level. According to Lindzen & Barker (1985) and Lindzen (1988), the nature of the sink for wave flux can be either another propagative region or an evanescent region that is, as in zone II, subject to friction processes. Given this peculiar geometry, instabilities can occur under boundary conditions that allow the wave to successively return to the critical level. Many studies have tried to relate over-reflection and shear instability for a specific wave geometry (see in particular the reviews of Lindzen 1988; Harnik & Heifetz 2007, for internal gravity waves and Rossby waves).

In the present study, we do not further investigate shear instability by doing, for instance, a temporal analysis to estimate the waves’ growth rate (as in Lindzen & Barker 1985; Watts et al. 2004, who considered an initial value problem). On the contrary, we give arguments of necessary but not sufficient conditions to find instabilities, such as $R < 1/4$. It is important to note that R is constant in the whole domain for a linear mean flow profile, and thus one is stuck with either a propagative (stable) or an evanescent regime. Therefore, finding an adequate geometry to allow over-reflection and over-transmission requires at minimum that the Rossby number is not the same in the whole domain by using, for instance, a non-linear mean flow profile. Furthermore, in the particular case where $R = 0$ (i.e. $R_o = 1$ or $\alpha_k = 0$ in Eq. (60) when the wave with $k_z = 0$ propagates in the (x, y) -plane), a necessary condition for instability is given by the inflection point theorem (Schmid et al. 2002). This theorem is particularly used to study barotropic instabilities for Rossby waves (see e.g. Lindzen & Tung 1978). In other words, a necessary condition to have unstable modes for $R_o = 1$ is that U''' is cancelled out in the domain of wave propagation.

Box	critical level	attenuation	amplification
Inclined box ($\theta_0 \in]0, \pi/2[$)	$\sigma = \tilde{f}$	yes for waves \downarrow	no
	$\sigma = -\tilde{f}$	yes for waves \uparrow	no
	$\sigma = 0$	no	no
Pole ($\theta_0 = 0$)	$\sigma = 0$	yes if $R < 1/4$ yes if $\begin{cases} R > 1/4 \\ \zeta \mathcal{A}^+ > 0 \end{cases}$	yes if $\begin{cases} R > 1/4 \\ \zeta \mathcal{A}^+ < 0 \end{cases}$
Equator ($\theta_0 = \pi/2$)	$\sigma = \pm 1$	\setminus	\setminus
	$\sigma = 0$	no	no

Table 2. Summary of analytical results at each critical level when the box is inclined or not with respect to the rotation axis, in the $[0, \pi/2]$ quadrant, and for positive wavenumbers. The table indicates whether each critical level can cause attenuation or amplification of the (upward \uparrow and downward \downarrow) travelling wave in the y direction, which depends, notably at the pole, on $R = \alpha_k(1 - R_0)/R_0^2$ and on the wave action flux above the critical level \mathcal{A}^+ . The symbol \setminus indicates that no wave action flux is carried across the critical level. Moreover, the results are analogous in the other quadrants of the spherical body (with the direction of the attenuated wave through $\sigma = \pm \tilde{f}$ varying according to $\text{sign}(k_z f)$).

We summarise in Table 2 the main analytical results of Sects. 3.3 and 3.4 regarding wave and wave action flux transmission, when the box is tilted relative to the rotation axis with a random angle, at the north pole, and at the equator, in the inviscid limit. We note that when ‘no’ is given in both the attenuation and amplification columns, the wave is fully transmitted across the critical level, regardless of the wavenumbers and of the mean flow profile.

4. A three-zone numerical model

In order to test the analytical predictions of the previous section, we built up a three-zone numerical model to simulate waves passing through critical levels. A similar model has been used, for instance, by Jones (1967) to explore the behaviour of internal gravity waves passing through critical levels in a fluid with rotation and vertical shear. In our model, we solve the two first-order ODEs satisfied by v and Π , the combination of which led to the wave propagation equation, Eq. (22). By imposing boundary conditions such that waves satisfy the dispersion relations (see also Appendix D.1), we examine the dynamics of inertial waves propagating in the shear region. Also, whenever possible, we analytically calculate the wave transmission and reflection coefficients as the wave-like solution crosses the shear region.

4.1. Description of the model

The mean flow profile that is used in the three-zone model is illustrated in Fig. 5. The zone with shear (zone II) is surrounded by two no-shear regions, one with no mean flow (zone I) and one with a uniform mean flow (zone III). In the whole domain, the mean flow profile that we adopt is expressed as

$$U(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 : & \text{zone I,} \\ \Lambda y^n & \text{for } 0 \leq y \leq 1 : & \text{zone II,} \\ \Lambda & \text{for } y > 1 : & \text{zone III,} \end{cases} \quad (77)$$

where $U(y)$ is continuous at each interface and n is an integer: $n = 1$ for a linear shear flow, $n = 2$ for a square shear flow,

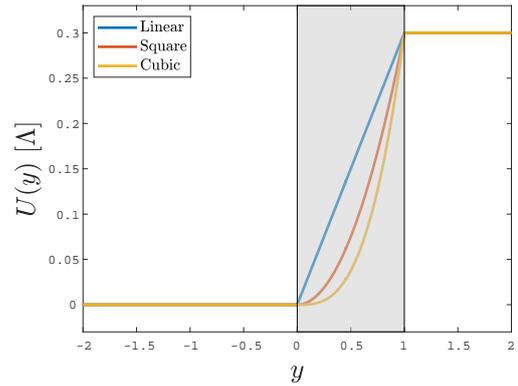


Fig. 5. Mean flow profiles used in the three-zone numerical model against y . In the no-shear regions I ($y < 0$) and III ($y > 1$), the mean flow is uniform and set respectively to $U = 0$ and $U = \Lambda$. The sheared region II (grey-shaded) can have a linear, square, or cubic mean flow profile.

or $n = 3$ for a cubic shear flow (see also Fig. 5). In zone I, we assume that there is an incident wave that enters the shear zone as well as a wave that is reflected at the interface between zones I and II or in zone II, that is:

$$v(y) = A_I \exp(ik_I y) + A_R \exp(ik_R y), \quad (78)$$

where A_I and A_R are the amplitudes and k_I and k_R are the wavenumbers of the incident and reflected waves, respectively. We further imposed as a boundary condition in zone III a transmitted wave that propagates towards positive y -values:

$$v(y) = A_T \exp(ik_T y), \quad (79)$$

where A_T and k_T are the amplitude and wavenumber of the transmitted wave, respectively. We imposed $A_T = 1$ without loss of generality and computed the remaining amplitudes A_I and A_R . More details on the solutions and the dispersion relations of the

waves in zones I and III can be found in Appendix D.1. We ensured that the transmitted wave carries energy upwards by deriving the wave action flux in zones I and III (see Appendix D.2).

We imposed the continuity of the latitudinal velocity and reduced pressure at the interfaces (at $y = 0$ and $y = 1$). By doing so, the wave action flux is continuous at both interfaces. Thus, in the absence of critical points, the wave action flux is conserved in the whole domain, namely $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_{I-R}$, where \mathcal{A}_T is the wave action flux of the transmitted wave, and $\mathcal{A}_{I-R} = \mathcal{A}_I - \mathcal{A}_R$, where \mathcal{A}_I and \mathcal{A}_R are the incident and reflected wave action fluxes, respectively.

To solve the ODE in the three zones, and in particular near singularities, we used MATLAB's solver `ode15s`, which is suitable for solving stiff differential equations (Shampine & Reichelt 1997). To avoid strict singularities at $\sigma^2 = \tilde{f}^2$, we added a small friction, $\sigma_f = 10^{-8}$, to our set of units. Given the boundary conditions, the numerical solver deals with two first-order ODEs for v and Π , which take the form

$$\begin{cases} F_{1,v}v + F_{1,p}\Pi = Av', \\ F_{2,v}v + F_{2,p}\Pi = A\Pi', \end{cases} \quad (80)$$

where

$$\begin{aligned} F_{1,v} &= \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} (k_x \tilde{f} + ik_z s) - (U' - f)(k_x s + ik_z \tilde{f}), \\ F_{1,p} &= -ik_{\perp}^2 s, \\ F_{2,v} &= is \left[s^2 + f(U' - f) \right] - i\tilde{f}^2 \left(s + f \frac{U'}{\sigma} \right), \\ F_{2,p} &= ik_z f \tilde{f} - k_x f s, \end{aligned} \quad (81)$$

and where we recall that $s = \sigma + i\sigma_f$ is the modified Doppler-shifted frequency due to Rayleigh friction. While $A_T = 1$ is imposed by the boundary condition, we computed A_I and A_R by comparing numerical solutions of the system Eq. (80) at $y = 0$ with the definition of velocity in zone I (Eq. (78)) and its associated reduced pressure (see Eq. (D.9)).

4.2. Numerical exploration at the pole for a constant shear

4.2.1. Reflection and transmission coefficients

In most cases, for any inclination of the box and any mean flow profile, there is no analytical solutions in zone II. Nevertheless, we have shown in Sect. 3.4.1 that, when the box is at the pole and for a linear mean shear flow, solutions can be found in terms of Whittaker functions. In this section, we will find reflection and transmission coefficients similarly to how it was done in Lindzen & Barker (1985) and Alvan et al. (2013), though there are a few differences. In particular, our present study differs from the latter due to the treatment of inertial waves in convective regions (instead of gravity waves in stably stratified radiative regions in their case) with a latitudinal shear (instead of a vertical or radial shear). Our study, however, uses a local Cartesian model as in Lindzen & Barker (1985). Moreover, our boundary conditions are different, as detailed in Sect. 3.4.4, and the thickness of our shear region is fixed to one in scaled units, while Lindzen & Barker (1985) and Alvan et al. (2013) leave the thickness δ as a control parameter. We also checked for the existence of a critical level in the shear zone and the frequency range that delineates the regimes with and without the critical level.

We considered the perturbed reduced pressure Π and velocity v to be continuous at the interfaces $y = 0$ and $y = 1$. In the presence of the critical level y_0 in zone II, we have a set of four

analytical solutions whose values at $y = 0$ and $y = 1$ allow us to determine the reflection and transmission coefficients. The solutions to the wave propagation equation in zones I, II (below and after the critical level), and III are:

$$v = \begin{cases} A_I e^{ik_I y} + A_R e^{ik_R y}, & \text{for } y < 0 \\ -i \left[A e^{-i\pi\mu} M_{0,\mu}(-\tilde{y}) + B e^{i\pi\mu} M_{0,-\mu}(-\tilde{y}) \right], & \text{for } 0 < y < y_0 \\ AM_{0,\mu}(\tilde{y}) + BM_{0,-\mu}(\tilde{y}), & \text{for } y_0 < y < 1 \\ A_T e^{ik_T y}, & \text{for } y > 1 \end{cases}, \quad (82)$$

where A and B are complex coefficients that we will express below. We recall that $A_T = 1$ in our numerical model. In the shear region (zone II), the reduced pressure perturbation is given by Eqs. (40), which, at the pole, can be recast as

$$\Pi = \frac{i}{k_{\perp}^2} \left[\sigma v_y + k_x (R_0 - 1)v \right], \quad (83)$$

with $R_0 = \Lambda$. In the regions with no shear (zones I and III), Π takes a simpler expression, with $R_0 = 0$ and $\sigma = \omega$ in zone I, and $\sigma = \omega - k_x U(1) = \omega - k_x R_0$ in zone III (noted as σ_3 in the following). We note that while the reduced pressure is kept continuous to conserve the wave action flux across the interfaces, the first derivative of the latitudinal velocity v' is not necessarily continuous at the interfaces. To find the transmission and reflection coefficients, we solved the system of equations that consists of matching conditions at interfaces as follows:

1. v is continuous at $y = 0$:
 $A_I + A_R = v_W(0)$;
2. Π is continuous at $y = 0$:
 $(ik_I \omega - k_x) A_I + (ik_R \omega - k_x) A_R = \omega v'_W(0) + k_x (R_0 - 1)v_W(0)$,
3. v is continuous at $y = 1$:
 $e^{ik_T} = v_W(1)$,
4. Π is continuous at $y = 1$:
 $(ik_T \sigma_3 - k_x) e^{ik_T} = \sigma_3 v'_W(1) + k_x (R_0 - 1)v_W(1)$,

with the Whittaker functions v_W . At the interfaces below and above the critical level y_0 (i.e. $y = 0$ and $y = 1$), we have

$$\begin{aligned} v_W(0) &= -i \left[A e^{-i\pi\mu} M_{0,\mu}(2k_{\perp} y_0) + B e^{i\pi\mu} M_{0,-\mu}(2k_{\perp} y_0) \right], \\ v_W(1) &= AM_{0,\mu}(2k_{\perp}(1 - y_0)) + BM_{0,-\mu}(2k_{\perp}(1 - y_0)). \end{aligned} \quad (84)$$

It should be noted that the first derivative of the Whittaker functions can be computed either numerically or analytically via the relationships in Abramowitz & Stegun (1972).

The equations in the above continuity relationships 1 to 4 are independent two by two (1 & 2 and 3 & 4), and A and B can be found first:

$$\begin{aligned} A &= e^{ik_T} \frac{\sigma_3 (M'_{-\mu,1} - ik_T M_{-\mu,1}) + M_{-\mu,1} k_x R_0}{\sigma_3 (M_{\mu,1} M'_{-\mu,1} - M'_{\mu,1} M_{-\mu,1})}, \\ B &= e^{ik_T} \frac{\sigma_3 (M'_{\mu,1} - ik_T M_{\mu,1}) + M_{\mu,1} k_x R_0}{\sigma_3 (M'_{\mu,1} M_{\mu,1} - M_{\mu,1} M'_{\mu,1})}. \end{aligned} \quad (85)$$

The amplitude of the incident and reflected waves can be written, in terms of A and B , as:

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{A e^{-i\mu\pi} X_{\mu}(k_R) + B e^{i\mu\pi} X_{-\mu}(k_R)}{\omega(k_R - k_I)}, \\ A_R &= \frac{A e^{-i\mu\pi} X_{\mu}(k_I) + B e^{i\mu\pi} X_{-\mu}(k_I)}{\omega(k_I - k_R)}, \end{aligned} \quad (86)$$

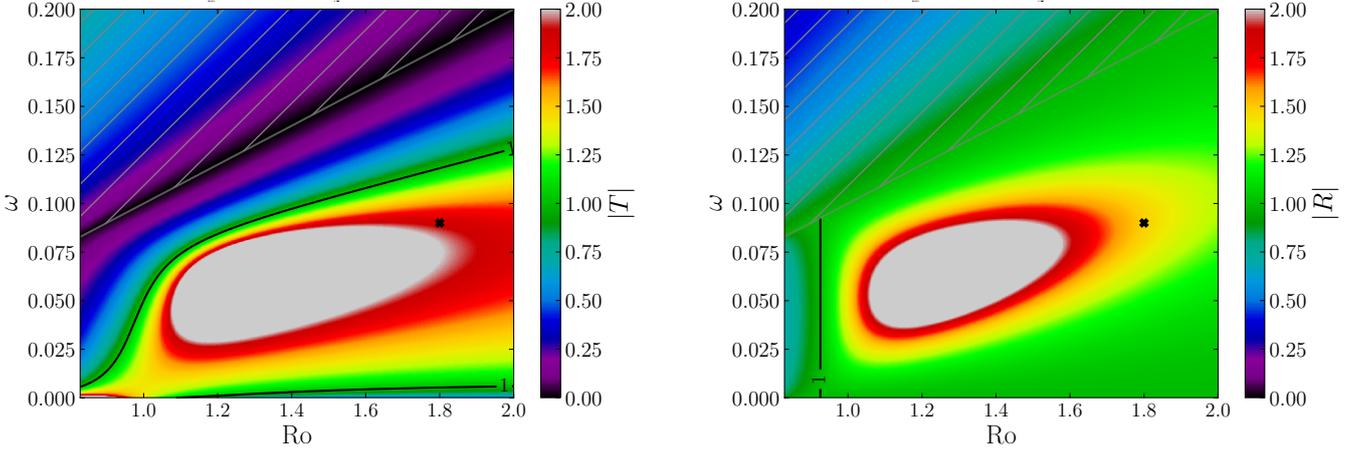


Fig. 6. Transmission coefficient ($|T|$, left panel) and reflection coefficient ($|R|$, right panel) when the box is at the pole. The coefficients are plotted in the regime $R < 1/4$ (a possibly unstable case, see Sect. 3.4.4) as a function of the Rossby number R_o and the inertial frequency ω . The hatched areas do not feature critical points and correspond to regions where $\omega > k_x R_o$ in our peculiar geometry (see Appendix D.2 for this particular matter). Vertical and longitudinal wave numbers are fixed: $k_x = 0.1$ and $k_z = 0.1$. Moreover, the contours that correspond to coefficients $|R|$ and $|T|$ that are equal to one are indicated by solid black lines. Crosses mark the set of parameters used in Fig. 9 for the analysis of the behaviour of the velocity in the three-layer model.

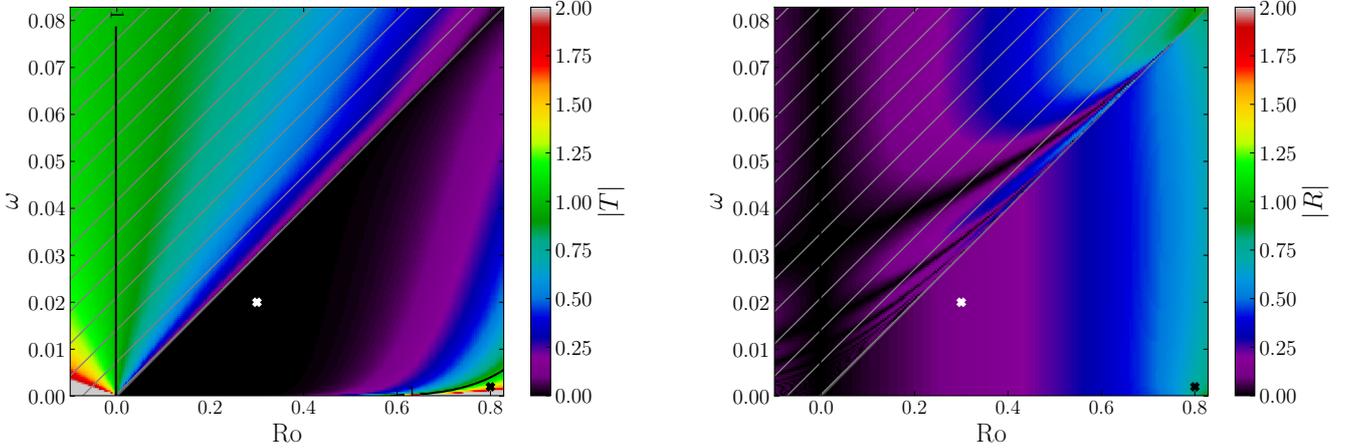


Fig. 7. Same as Fig. 6, but for $R > 1/4$. When $R_o < 0$ in these panels, hatched areas mark instances where $\omega > 0$ (see Appendix D.2).

where

$$X_\mu(k) = \omega(M'_{\mu,0} - ikM_{\mu,0}) + k_x R_o M_{\mu,0}. \quad (87)$$

The transmission and reflection coefficients are then:

$$|T| = \frac{|A_T|}{|A_I|} = \frac{1}{|A_I|} \quad \text{and} \quad |R| = \frac{|A_R|}{|A_I|}. \quad (88)$$

We emphasise that these factors depend notably on the location of the critical level and on the inertial frequency, which was not the case in Lindzen & Barker (1985) and Alvan et al. (2013).

We display in Figs. 6 and 7 the transmission and reflection coefficients as a function of the Rossby number R_o and the normalised inertial frequency ω in the regimes $R < 1/4$ and $R > 1/4$, respectively. We chose $k_x = k_z = 0.1$ in these plots, and $R = 1/4$ gives $R_o = -2 \pm \sqrt{8} \approx \{-4.8, 0.8\}$, which delineates the two regimes, as we can see in Fig. 3. Areas that are hatched do not possess the co-rotation point $\sigma = 0$. In addition, the wavenumber k_T was chosen with a positive sign in these regions to maintain an upward propagating wave (see Appendices D.1 and D.2). Areas that are not hatched feature a critical level, according to the Table D.1 in Appendix D.2. In the case where $R < 1/4$, over-reflection and over-transmission are both possible

(see Fig. 6). One should notice that for $R_o > 1$, we always have by definition of R

$$\frac{R}{(y - y_0)^2} - k_\perp^2 < 0, \quad (89)$$

regardless of y , which makes the solutions of Eq. (61) tend towards pure exponential functions (i.e. without any imaginary part). Also, we do not see any over-reflection, nor over-transmission, in the hatched areas where there is no co-rotation point. This highlights the essential role of the critical level in inducing the over-reflection or over-transmission of inertial waves crossing the shear region in this regime.

The analysis of the regime where $R > 1/4$ (in Fig. 7) is trickier. According to our discussion in Sect. 3.4.3, we expect a strong attenuation of the wave and of the wave action flux, as shown in Fig. 4. From this figure and for $\alpha_k = 0.1$, the damping is very strong for low positive Rossby numbers. This tendency is also found for both transmission and reflection coefficients. Nevertheless, one can also observe an unexpected regime of over-transmission near $R_o = 0.8$ and low frequency ω . Still, we must not forget that solutions in this regime, even near the critical level (see Eq. (71)), are not rigorously equivalent to wave-like functions. In particular, the amplification term $(y - y_0)^{1/2}$ that can

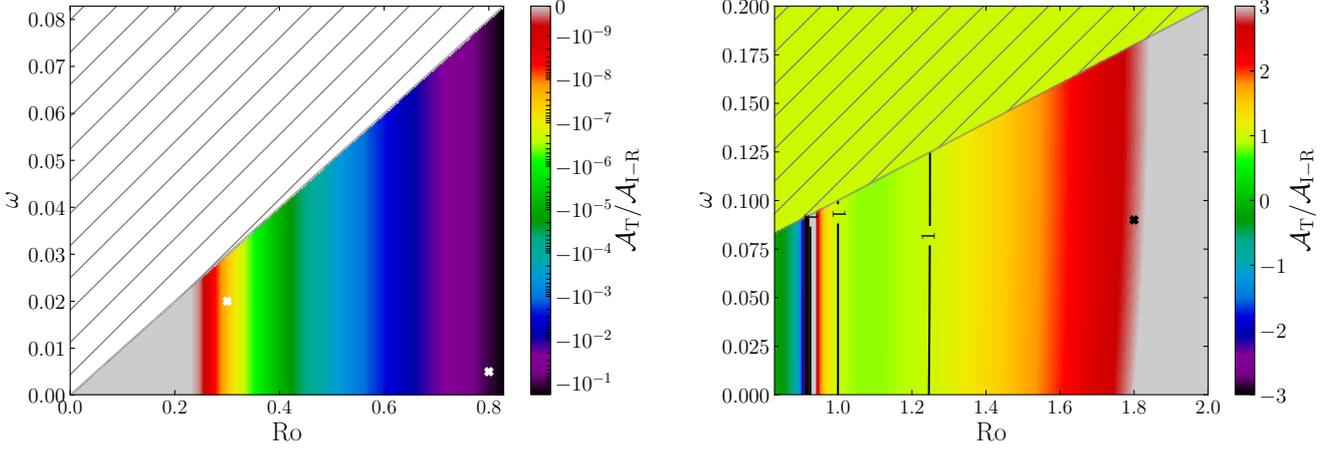


Fig. 8. Ratio of the wave action flux above and below the critical level against the Rossby number and the inertial frequency for $R > 1/4$ (left panel) and $R < 1/4$ (right panel) when the box is at the pole. As in Fig. 7, $k_x = k_z = 0.1$ and hatched zones represent areas without critical levels. Again, crosses indicate the set of parameters chosen to analyse the behaviour of the velocity in the three-layer model.

be found at the first order in the Frobenius solutions becomes more prominent as the thickness of the shear zone is larger. This is especially true for the transmission coefficient. Assuming that Eq. (71) holds throughout zone II and corresponds to upward and downward waves, the transmission coefficient is modulated by $|1 - y_0|^{1/2}/|0 - y_0|^{1/2}$, the amplitude ratio between the transmitted and incident waves. This term can be greater than one in the shear region. In particular, it is always greater than one when $y_0 < 0$ (i.e. no critical level in the regime $R > 1/4$; hatched areas in Fig. 7). On the contrary, this ratio is not present for the reflection coefficient since $|R|$ is a function of the incident and reflected waves evaluated at $y = 0$. Though this hand-waving explanation does not formally demonstrate the origin of this amplification, it stresses the important role of the shear-region thickness and, more generally, of the geometry of the model.

In order to clarify whether the amplification is due to the geometry or the critical level, we need to investigate how the wave action flux changes before and after the critical level. The wave action flux is indeed the relevant quantity to investigate energy flux exchanges at a critical level.

4.2.2. Wave action fluxes below and above the shear region

Since v and Π are continuous at the interfaces between the shear and no-shear regions, the wave action flux is preserved and continuous in all three zones in the absence of friction and critical levels. However, it is discontinuous at the co-rotation point, as demonstrated in Sects. 3.4.3 and 3.4.4. Given the amplitude of the incident and reflected waves (Eq. (86)), we can calculate the ratio of the wave action flux below and after the co-rotation (see Appendix D.2 for the detailed calculation):

$$\frac{\mathcal{A}_T}{\mathcal{A}_{I-R}} = \pm \frac{\omega^2 \sqrt{\sigma_3^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - \sigma_3^2)]}}{\sigma_3^2 \sqrt{\omega^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - \omega^2)]} (|A_I|^2 - |A_R|^2)}. \quad (90)$$

The signs $+$ or $-$ can be chosen in regards to the wave action flux of the transmitted wave that can be positive or negative, depending on the presence of the critical level, while the energy flux is always positive in order to have an upward propagating wave in zone III (see Appendix D.2 for a more detailed discussion). This wave action flux ratio is displayed in Fig. 8 in the two regimes, $R \lesssim 1/4$. As expected, this ratio is equal to one when no critical

level is present (hatched areas). Unlike in the previous section, the regime where $R > 1/4$ no longer has amplification areas, and $|\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}| < 1$ everywhere. This supports the idea that the critical level has nothing to do with the amplification phenomenon observed in the left panel of Fig. 7. As already observed in Fig. 4, the damping due to the critical level is strong except for Rossby numbers close to the threshold between the two regimes. Moreover, $\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R} < 0$ means that $|A_I|^2 > |A_R|^2$ since the minus sign is taken in Eq. (90). Therefore, no over-reflection due to the critical level is expected in this regime. The other regime ($R < 1/4$, right panel) features areas where the wave is over-reflected for $|A_I|^2 < |A_R|^2$ (i.e. when $\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R} > 0$) and areas where the wave is over-transmitted for $|\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}| > 1$. For the first inequality ($|A_I|^2 < |A_R|^2$), the threshold between under- and over-reflection (around $R_0 \approx 0.9$) is the same as for the reflection factor (in the right panel of Fig. 6). For the second one ($|\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}| > 1$), the comparison with the transmission factor (in the left panel of Fig. 6) is more questionable. Still, these two points suggest that the critical level can induce the over-reflection and over-transmission phenomena in the regime where $R < 1/4$.

4.2.3. Numerical solutions

In the previous sections, we examined how the shear parameter and the inertial wave frequency impact the reflection and transmission coefficients as well as the wave action flux. We now study particular cases of wave propagation through the critical level for fixed sets of parameters in both regimes, $R \lesssim 1/4$. To do that, we numerically solved Eqs. (80) for the three-layer model described in Sect. 4.1, for $\theta_0 = 0$ and a linear shear flow ($n = 1$ in zone II). We selected three pairs of values for the inertial frequency and the shear, two in the regime $R > 1/4$ and one in the regime $R < 1/4$. These values are marked by crosses in Figs. 6, 7, and 8. In each case, the latitudinal velocity and the wave action flux were successively calculated through the three zones and plotted in Fig. 9. The numerical solution, which was computed by imposing the boundary condition $A_T = 1$ and the continuous interfacial conditions for v and Π at $y = \{0, 1\}$, is the sum of the incident and reflected waves in zone I and is equal to a transmitted wave in zone III. The expressions for the incident, reflected, and transmitted waves are given by Eqs. (78) and (79) (see also Appendix D.1). In the shear region (zone II) of the upper panel of Fig. 9, the Whittaker solution has been added and it

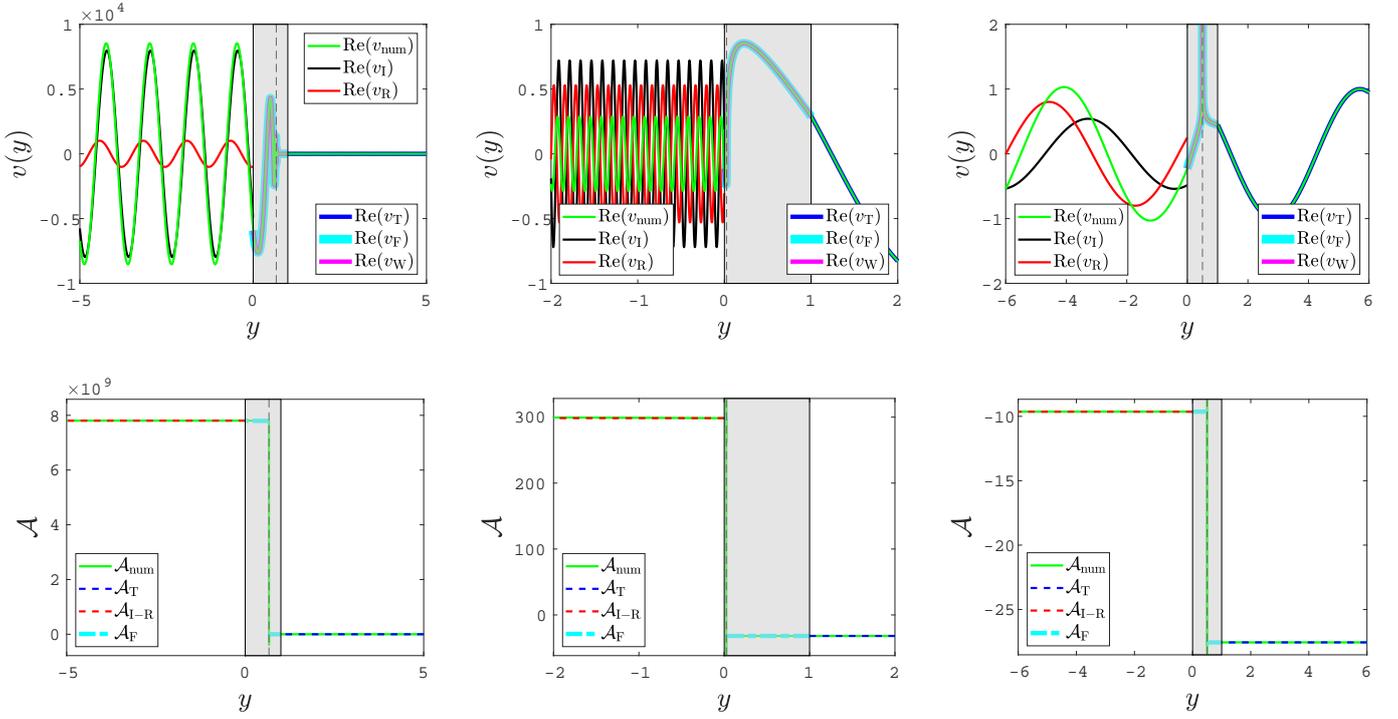


Fig. 9. Numerical outputs of the three-layer model. *Top:* Real part of the latitudinal velocity v against y . The quantities v_{num} , v_{I} , v_{R} , v_{T} , v_{F} , and v_{W} are the numerical, incident, reflected, transmitted, first-order Frobenius, and Whittaker velocities, respectively. *Bottom:* Wave action flux against y . The quantities \mathcal{A}_{num} , \mathcal{A}_{T} , $\mathcal{A}_{\text{I-R}}$, and \mathcal{A}_{F} are the numerical, transmitted, incident and reflected, and Frobenius wave action fluxes, respectively. For all panels, $\theta_0 = 0$, the mean flow is linear in the grey-shaded shear regions, and the critical level is marked by dashed lines. The horizontal wave numbers are set to $k_x = k_z = 0.1$. *From left to right:* (i) $\omega = 0.02$ and $R_0 = 0.3$ ($R > 1/4$), (ii) $\omega = 0.002$ and $R_0 = 0.8$ ($R > 1/4$), and (iii) $\omega = 0.09$ and $R_0 = 1.8$ ($R < 1/4$).

matches perfectly with the numerical solution below and above the critical level in each case. Moreover, Frobenius approximations for the latitudinal velocity (Eq. (71) when $R > 1/4$ and Eq. (75) when $R < 1/4$) and for the wave action flux (Eq. (73) when $R > 1/4$ and Eq. (76) otherwise) have also been included. The coefficients a_0 and b_0 were determined by matching the numerical solution and its derivative to the Frobenius approximation for the velocity close to the critical level. For both the latitudinal velocity and the wave action flux, this first-order approximation gives satisfactory agreement with numerical solutions, although a slight deviation (regarding velocity) from the numerical solution can be observed as one moves away from the critical level. In particular, it should be mentioned that for the far left panels, $a_0(y - y_c)^{1/2 + i|\mu|}$ corresponding to an upward wave is sufficient to correctly fit the numerical solution, meaning that the counter-propagating wave in zone I is reflected at $y = 0$. However, for the middle and right panels, it is not clear whether the first-order Frobenius solutions can be reconnected to the incident and reflected waves at $y = 0$.

We now examine attenuation or amplification phenomena in each column of panels in Fig. 9. In the left panels, for which $R > 1/4$, the latitudinal velocity is strongly attenuated at the critical levels and so is the wave flux action, as we can expect from the left panel of Fig. 8. While the transmitted wave is totally absorbed, the reflected wave remains, which is consistent with analytical values of the transmission and reflection coefficients in Fig. 7 (see white crosses). In the middle panels, where we also have $R > 1/4$, the wave is over-transmitted but not over-reflected, which is also consistent with Fig. 7 (see black crosses). In view of the wave action flux, the amplification of the transmit-

ted wave does not seem to be related to the critical level because this quantity is greatly reduced after the critical level (see also the white cross in the left panel of Fig. 8). The third column of panels now depicts the regime where $R < 1/4$. The wave is over-reflected by a factor of ~ 1.5 and over-transmitted by a factor of ~ 2 , in concordance with the reflection and transmission coefficients plotted in Fig. 6. The wave action flux is negative, and $|\mathcal{A}_{\text{I-R}}| < |\mathcal{A}_{\text{T}}|$ as observed in Fig. 8. These three case studies reinforce the idea from Booker & Bretherton (1967) in the case of stratified z -sheared flows: that the wave energy can be lost to the mean flow or, on the contrary, that the wave can take energy from the mean flow.

4.3. Numerical exploration at constant shear when the box is inclined

We now investigate wave propagation through the different critical levels when the box is inclined with respect to the rotation axis. We still assume that the shear region (zone II) has a linear shear flow profile ($n = 1$). In contrast to the polar configuration, we do not have analytical solutions to the ordinary differential equation. Instead of going for an extensive numerical investigation of the parameter space, we instead focus on the dynamics of inertial waves in our three-layer model as they cross the critical levels $\sigma = \pm f$ and $\sigma = 0$. Our results are presented in Fig. 10 for a box inclination of 10° relative to the rotation axis, a shear fixed to $R_0 = 0.3$, and wavenumbers set to $k_x = k_z = 1$. The value of the frequency ω determines the existence and the nature of the critical level as detailed in the Table D.1 of Appendix D.2. As in Fig. 9, we plot in each column of Fig. 10 the latitu-

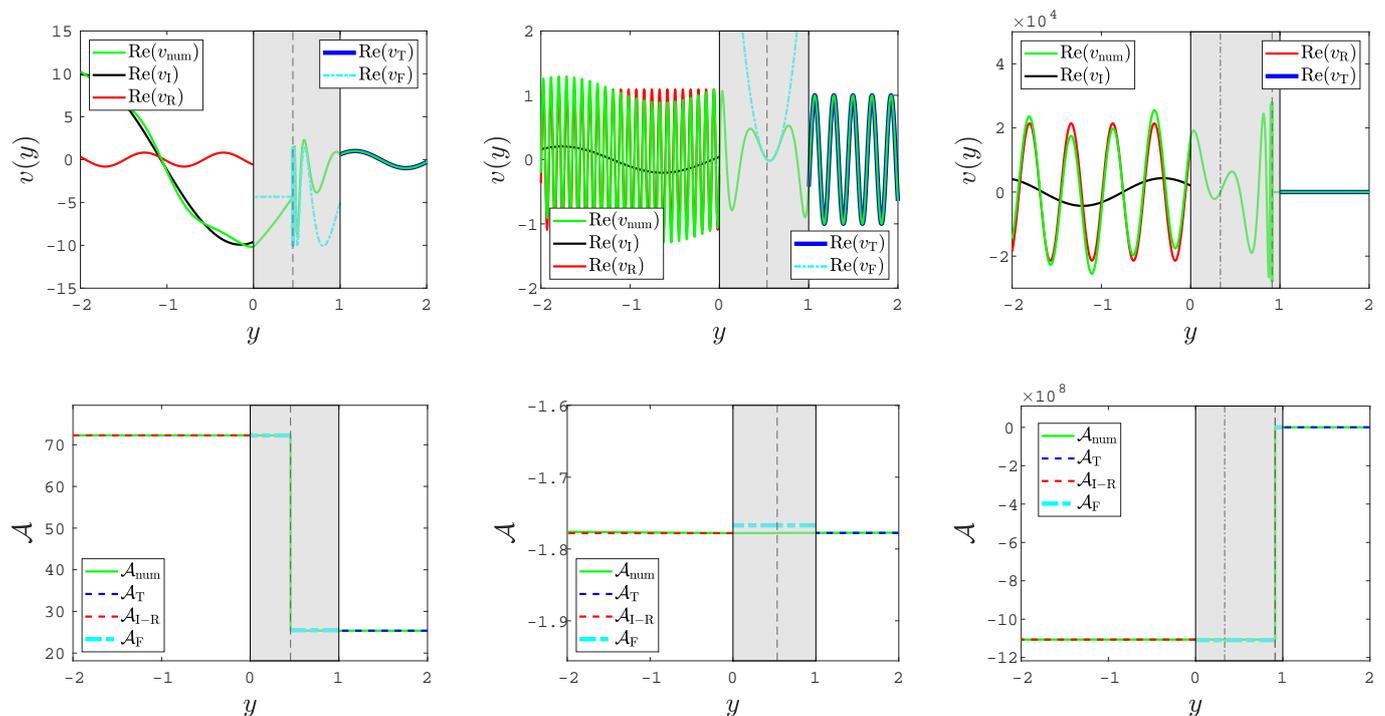


Fig. 10. Same quantities as in Fig. 9 (when the box is at the pole), but for a box tilted by 10 degrees relative to the pole and for different values of the shear, wavenumbers, and inertial frequencies. We note that, unlike Fig. 9, we do not have analytical solutions in the shear region. In all panels, the horizontal wavenumbers are set to $k_x = k_z = 1$ and the shear is $R_0 = 0.3$. From left to right: Inertial frequencies set to $\omega = 0.31$, $\omega = 0.16$, and $\omega = 0.1$. In the third panels, we indicate y_0 and y_- with dashed dotted and vertical dashed lines, respectively.

dinal velocity and the wave action flux. From left to right, we illustrate our results for the critical levels $\sigma = +\tilde{f}$, $\sigma = 0$, and $\sigma = \{0, -\tilde{f}\}$ (i.e. there are two critical levels in the rightmost panels). One can notice that the first-order Frobenius approximation is no longer in good agreement with the numerical solution in the entire shear region, though it remains a reasonable approximation in the vicinity of a critical level. Unlike the polar case, the discrepancy far outside the critical levels is due to the linear approximation that the governing ODE takes around critical levels (see Eqs. (44) and (56)).

In the left panels of Fig. 10, the reflected and transmitted waves are strongly attenuated at the critical level $y = y_+$. Part of the wave energy is laid down to the mean flow, as corroborated by the drop in the wave action flux. In the middle panels, we do not see any discontinuity at the co-rotation $y = y_0$, which is in line with the theoretical analysis in Sect. 3.3.2 for a constant shear. However, the wave is over-reflected and over-transmitted, possibly due to the polynomial form of the solutions in the Frobenius series around $y = y_0$. In the right panels, the wave encounters successively critical levels at $y = y_0$ and at $y = y_-$. Although the wave going through the shear region is not attenuated at the co-rotation $y = y_0$, it is completely absorbed at the second critical level $y = y_-$ where the wave action flux drops to zero. This is consistent with the transmission coefficient in the left panel of Fig. 2. The latitudinal velocities displayed in the top-left and top-right panels of Fig. 10 support the concept of a valve effect. Indeed, according to our analysis with the Frobenius method in Sect. 3.3.1, and given the shear and wavenumbers of Fig. 10, the attenuation is strong for a downward wave meeting the critical level y_+ (first panel), while the attenuation is strong for an upward wave that meets the critical level y_- (third panel). Before the critical level y_- and after the critical level y_+ ,

we observe fast oscillations of shorter and shorter periods close to the critical level, as already evidenced by Booker & Bretherton (1967). The analysis to determine how the wave is reflected in the shear zone can hardly be taken any further because Frobenius solutions are not fully separable into upward and downward waves.

We emphasise that the behaviour of the wave at co-rotation $y = y_0$ when the box is at the pole stands out as being clearly different from the case when the box is inclined for a linear mean flow profile. This is particularly true in terms of the absolute value of the wave action flux that is subject to rise and drop in the polar configuration, whereas it remains conserved when the box is inclined. In this inclined case, the only way for a wave to be attenuated without friction is for it to meet critical levels $\sigma = \pm f$. Depending on the critical level encountered, an upward or downward wave will not be attenuated in the same way, which is a phenomenon also known as the valve effect. In addition, we no longer observe amplification due to the critical level, but there is still ‘geometric’ amplification (for instance, in the middle panels where we can observe over-transmission and over-reflection), which can be explained by the exponential form of the Frobenius series.

4.4. Numerical results with a non-constant shear

The choice of a linear mean flow profile allows the resolution of the ordinary differential equation at the pole and a simpler implementation of the Frobenius method. Nevertheless, the correspondence between a global and a local mean flow as presented in Sect. 2.2 involves higher-order terms than a simple linear dependence. Therefore, it is important to examine the effect of different mean flow profiles with non-zero U'' . Now assuming $n > 1$

case \ n =		R			T			$\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}$		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\theta_0 = 0^\circ$	$R_o = 0.3$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$-3.2 \cdot 10^{-8}$	$-1.6 \cdot 10^{-4}$	$-1.1 \cdot 10^{-2}$
	$R_o = 0.8$	$7.4 \cdot 10^{-1}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	1.4	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-6}$	$-1.1 \cdot 10^{-1}$	$-2.1 \cdot 10^{-10}$	$-4.1 \cdot 10^{-13}$
	$R_o = 1.8$	1.5	$6.4 \cdot 10^{-1}$	$7.0 \cdot 10^{-1}$	1.8	1.1	$9.7 \cdot 10^{-1}$	2.9	-1.9	-1.8
$\theta_0 = 10^\circ$	y_+	$8.2 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-1}$	$2.7 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^{-1}$
	y_0	5.3	4.9	4.7	4.9	4.4	4.3	1.0	1.0	1.0
	y_0 and y_-	5.0	6.2	6.1	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$

Table 3. Reflection R and transmission T coefficients and the ratio of the wave action flux above and below a critical level $\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}$ for a linear, square, and cubic mean flow ($n = 1, 2,$ and $3,$ respectively). The six cases presented here are, in order, the three cases examined at the pole in Fig. 9 and the three cases of a tilted configuration examined in Fig. 10.

for the shear flow profile in zone II (see Eq. 77), the Frobenius method in the inclined and polar cases still holds provided that

$$\begin{cases} y_0 = \sqrt[n]{\frac{\omega}{k_x \Lambda}}, \text{ and } y_{\pm} = \sqrt[n]{\frac{\omega \mp \tilde{f}}{k_x \Lambda}} \\ R_o = \Lambda n (y_{0,\pm})^{n-1}. \end{cases} \quad (91)$$

Moreover, we specify that the critical level in $y < 0$ for even values of n is not examined given our numerical set-up where the shear region is located in the range $y \in [0, 1]$. The conditions to have critical levels inside the shear region (zone II) are the same as those for a constant shear (see Appendix D.2).

We show in Table 3 numerical values of the reflection and transmission coefficients along with the ratio of the wave action flux below and after the critical level in the six parameter sets illustrated in Figs. 9 and 10 for linear, square, and cubic mean flow profiles. For all cases, $R, T,$ and $\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}$ change quite significantly between $n = 1, 2,$ and $3.$ At the pole, the (‘geometric’) over-transmission found for $R_o = 0.8$ disappears for $n = 2$ and $n = 3,$ where the reflected and transmitted waves are strongly attenuated. Similarly, in the case where $R_o = 1.8,$ the over-transmission and over-reflection disappear when $n = 3,$ whereas $|\mathcal{A}_T/\mathcal{A}_{I-R}| > 1,$ which entails that the transmitted wave has taken wave action flux from the mean flow just after the critical level. We find that the Frobenius method does not give consistent results for the case where $R_o = 1.8$ and $n = \{2, 3\}.$ When the box is tilted and for the critical level $y_+,$ the reflected wave is more attenuated than the transmitted one, which is consistent with the stronger attenuation of the counter-propagating wave discussed in the previous section. At the co-rotation and when the box is inclined (fifth row of Table 3), the wave action flux remains the same in the whole domain for linear or non-linear mean flow profiles, in agreement with the wave action flux derived analytically in Eq. (59). We speculate that the over-transmission and over-reflection are due to the polynomial form of the solutions in the shear region. These wave amplifications may be related to shear instabilities in this particular three-layer configuration, and they are probably not linked with the presence of a critical level whose implications on the flow are well diagnosed by the wave action flux. In the last case (sixth row), where two critical levels co-exist, the transmitted wave is less attenuated at $y = y_-$ from $n = 1$ to $n = 3,$ but it remains more attenuated than the reflected wave, as discussed in the previous section. Again, no

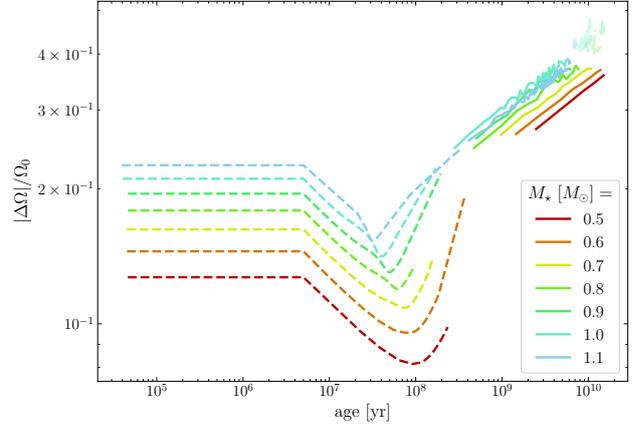


Fig. 11. Absolute values of the shear contrast normalised by the rotation at the pole against the age of K and G spectral type stars. Solid lines feature $0.3 < R_{of} < 0.9,$ dashed lines $R_{of} \lesssim 0.3,$ and transparent lines $R_{of} > 1.$

jump is found in the wave action flux at the co-rotation despite analytical predictions.

The same analysis was carried out for different amplitudes of the Rayleigh friction force, up to $\sigma_f = 10^{-2}.$ Of course, the wave action flux is no longer constant, but we observe that all three parameters of Table 3 change very little compared to the case where $\sigma_f = 10^{-8}.$ This result is consistent with Alvan et al. (2013) in the context of gravity waves and vertical shear. We comment that while a low friction is mandatory in the numerical code to solve the ODE at singularities $y_{\pm},$ it is not the case at the co-rotation $y = y_0.$

5. Astrophysical discussion

5.1. Latitudinal differential rotation in stars

In stars, latitudinal differential rotation is often characterised by the difference in rotation frequency between the equator and the pole, that is the quantity $\Delta\Omega = \Omega_{eq} - \Omega_0,$ where Ω_{eq} is the rotation frequency at the equator (e.g. Barnes et al. 2017). We will now refer to $\Delta\Omega$ as the shear contrast. Different regimes are distinguished according to the value of $\Delta\Omega:$ anti-solar-like rotation for

$\Delta\Omega < 0$, cylindrical rotation for $|\Delta\Omega| \ll 1$, and solar-like rotation for (not-too-low) positive $\Delta\Omega$ (e.g. $\Delta\Omega/\Omega_0 \simeq 0.3$ for the Sun). Several works based on three-dimensional numerical simulations have explored the range of physical parameters leading to each aforementioned regime in stars and in giant planets (e.g. Gastine et al. 2013; Varela et al. 2016; Beaudoin et al. 2018). In particular, Brun et al. (2017) derived a criterion based on mixing length theory and calibrated with three-dimensional simulations that determines the rotation profile of a solar-like star. This criterion is based on the fluid Rossby number R_{of} , defined as

$$R_{\text{of}} = R_{\text{of},\odot} \Omega_*^{-0.82} M_*^{1.53}, \quad (92)$$

where $R_{\text{of},\odot} = 0.89$ is the solar fluid Rossby number and Ω_* and M_* are the mean rotation and the mass of the star respectively, normalised with their solar values. Brun et al. (2017) highlighted the following three regimes: (i) $R_{\text{of}} > 1$ for anti-solar-like rotation, (ii) $0.3 < R_{\text{of}} < 0.9$ for solar-like rotation, and (iii) $R_{\text{of}} \lesssim 0.3$ for cylindrical rotation. Furthermore, they introduced the shear contrast $\Delta\Omega_S$ at the co-latitude 30° as

$$\Delta\Omega_S = \Omega_{\text{eq}} - \Omega(\theta = 30^\circ) \quad (93)$$

since the rotation frequency is often ill-defined at low co-latitudes in three-dimensional numerical simulations in spherical geometry. From their three-dimensional simulations, Brun et al. (2017) obtained the following scaling:

$$\Delta\Omega_S = \Delta\Omega_{S,\odot} M_*^{0.73} \Omega^{0.66}, \quad (94)$$

where $\Delta\Omega_{S,\odot} \simeq 565 \times 10^{-9} \text{s}^{-1}$ is the solar value of $\Delta\Omega_S$ calculated from García et al. (2007). Using the mean flow profile (Eq. (4)), $\Delta\Omega_S$ can be related to our shear contrast $\Delta\Omega$ via

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \chi = \frac{4}{3} \frac{\Delta\Omega_S}{\Omega_0}. \quad (95)$$

We show in Fig. 11 the quantity $\Delta\Omega/\Omega_0$, expressed in Eq. (95), versus the age of solar-like stars for K to G spectral types. To compute this quantity, we used grids of the one-dimensional stellar evolution code STAREVOL (see Amard et al. 2019, for details of the code). In light of Fig. 11, the stars in the pre-main sequence (age $\lesssim 100$ Myr) exhibit cylindrical rotation as they are fast rotating. During the main sequence, stars mostly feature solar-like rotation, while anti-solar-like rotation is observed at the end of the main sequence from 0.8 to $1.1 M_\odot$. According to Fig. 11, a limit on the absolute value of the normalised shear contrast can be set to $|\Delta\Omega|/\Omega_0 < 0.5$. However, as already stressed by Benomar et al. (2018), the latitudinal shear inferred by asteroseismology can be much larger than predicted by numerical simulations. This can actually be inferred by comparing the shear factors in their work (see Table S3 from the supplementary materials in Benomar et al. 2018) with ours given in Fig. 11. Moreover, according to their study, cylindrical and anti-solar differential rotation are hardly unambiguously detectable. Finally, one should recall that the Brun et al. (2017) scaling laws given in Eqs. (92) and (94) are derived for K and G spectral type stars only.

Since we now know values of the shear contrast, we can calculate the ‘shear’ Rossby number, $R_o = U'/(2\Omega)$, given by the following relationship:

$$R_o = -\frac{3}{2} \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \chi, \quad (96)$$

which has been derived from Eq. (5) by keeping only zero-order terms in y . Taking $\chi \simeq 0.3$ as a representative value of the

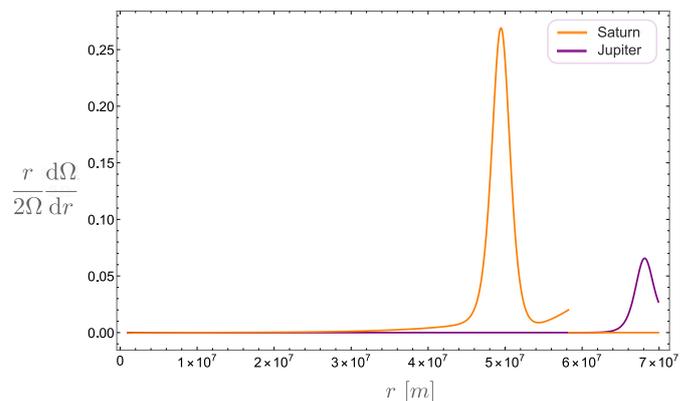


Fig. 12. Rossby numbers $R_o = \frac{r}{2\Omega} \frac{d\Omega}{dr}$ for Jupiter and Saturn as a function of the axial distance r .

shear contrast for main sequence G and K stars, we find that the Rossby number is maximal when $\theta_0 \simeq 55^\circ$, its maximum value being $R_o \simeq -0.17$. In particular, $R_o \simeq -0.013$ for $\theta_0 = 10^\circ$ and $R_o \simeq -0.076$ for $\theta_0 = 80^\circ$. These values are useful for interpreting wave flux action transmission at critical levels $\sigma = \pm \tilde{f}$, considering Fig. 2 (we recall that at the co-rotation the wave action flux is fully transmitted). A downward (upward) propagating wave through $\sigma = \tilde{f}$ ($\sigma = -\tilde{f}$) is: (1) totally absorbed provided that $k_z \gtrsim 0.1 k_x$ ($\alpha_k \gtrsim 0.1$) at $\theta_0 = 10^\circ$, and that $k_z \gtrsim k_x$ ($\alpha_k \gtrsim 1$) at $\theta_0 = 80^\circ$, (2) strongly attenuated for $k_z \sim 0.1 k_x$ ($\alpha_k \sim 0.1$) at $\theta_0 = 80^\circ$, and (3) fully transmitted given that $k_z \ll 10^{-1} k_x$ ($\alpha_k \ll 10^{-1}$) for both inclinations.

These results also hold for anti-solar-like differential rotation since the transmission factor T_{θ_0} is a function of $|R_o|$. For larger values of $|R_o|$ (i.e. for larger values of the shear contrast), waves are less damped at critical levels $\sigma = \pm \tilde{f}$ at a given $\alpha_k = k_z/k_x$. The connection between this ratio of the vertical and azimuthal wavenumbers in the local model and an equivalent ratio of global wavenumbers in the spherical geometry is not straightforward. A first hint can be to state that $k_z \sim k_r$, where k_r is the wavenumber in the global radial direction, while $k_x \sim m/(r_0 \sin \theta_0)$, where m is the azimuthal order of the considered mode of the tidal potential (when $m \neq 0$; Zahn et al. 1997). Then, we get $\alpha_k \equiv k_r r_0 \sin \theta_0 / m \equiv 2\pi r_0 / \lambda_r \times \sin \theta_0 / m$ by introducing λ_r , the radial wavelength of the tidal wave. In the case where $r_0 > \lambda_r m$, we should thus be in the regime where the tidal wave is attenuated.

5.2. Cylindrical differential rotation in Jupiter and Saturn

Mathis et al. (in prep.) have developed an equatorial model to examine inertial wave properties in the outer convective layers of giant gaseous planets, such as Saturn and Jupiter, which are subject to cylindrical differential rotation. In their model (built in cylindrical coordinates), they derived a Schrödinger-like differential equation for $\Psi = \sqrt{\rho} r^2 v_r$ under the anelastic approximation, where ρ is the density, r the axial distance coordinate, and v_r the axial velocity. For free inertial waves, their second-order differential equation is:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left(\kappa_r^2 \frac{l_\theta^2}{\hat{\sigma}^2 r^2} - \frac{l_\theta^2 + m^2}{r^2} \right) \Psi = 0, \quad (97)$$

where l_θ and m denote the equatorial and azimuthal wavenumbers, respectively, $\hat{\sigma} = \omega + m\Omega(r)$ is the (linear) Doppler-shifted frequency, and κ_r is the ‘axial’ epicyclic frequency defined as

	spherical		equatorial		α_k	Regime
	l	m	m	l_Θ		
asynchronous	2	2	2	2	1	total absorption
inclined	2	1	1	2	2	total absorption
eccentric	2	0	0	2	$\rightarrow \infty$	total absorption

Table 4. Regime of wave transmission at co-rotation deduced from Figs. 3 and 4 for three orbital states of a satellite around a giant gaseous planet.

$\kappa_r^2 = 4\Omega^2 + 2\Omega r \frac{d\Omega}{dr}$. For cylindrical differential equation, the co-rotation resonance $\hat{\sigma} = 0$ results in critical cylinders (see Baruteau & Rieutord 2013) characterised by a critical axial distance $r = r_c$. The Taylor expansion of Eq. (97) at the first order around r_c gives:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left(\frac{l_\Theta^2(1+R_0)}{m^2R_0^2(r-r_c)^2} - \frac{l_\Theta^2+m^2}{r_c^2} \right) \Psi = 0 \quad (98)$$

by setting $R_0 = r_c \frac{d\Omega}{dr} \Big|_{r=r_c} / (2\Omega_c)$, the local Rossby number in cylindrical coordinates. By writing $\alpha_k^2 = l_\Theta^2/m^2$, Eq. (98) becomes very similar to our ODE Eq. (22) when the box is located at the south pole and for a constant shear (i.e. with $\tilde{f} = 0$, $f = -1$, and $U'' = 0$). We note that, when the local shear box model is located at the equator, the latitudinal coordinate y is directed along the (vertical) rotation axis, whereas when the box is at the poles, y is the axial distance. That is why a polar configuration of the box best reproduces the ‘equatorial’ model of Mathis et al. (in prep.). Moreover, the convention of a plus sign in the Doppler-shifted frequency explains why Eq. (98) is analogous to our wave propagation equation when the box is at the south pole rather than at the north pole.

In Fig. 12, we show Jupiter’s and Saturn’s local Rossby number from Mathis et al. (in prep.). Cylindrical differential rotation extends in the outer layer of the convective envelope of both planets, in agreement with the Juno and Cassini Grand Finale observations (Kaspi et al. 2017; Galanti et al. 2019, respectively). According to Fig. 3, where we notably plotted $R = \alpha_k^2(1+R_0)/R_0^2$ at the south pole (dark red and purple areas), we can assess the role of the critical level for wave transmission across the co-rotation, in terms of the wavenumber ratio α_k . In Fig. 12, the Rossby number satisfies $R_0 \lesssim 0.27$ for Saturn and $R_0 \lesssim 0.07$ for Jupiter. Given this range of values, two regimes can be evidenced for waves and wave action fluxes through the co-rotation: (1) waves are strongly attenuated for $l_\Theta \gtrsim m$ (see also Fig. 4 for $R_0 = -|R_0|$ as the transmission factor in this figure is plotted for the north pole) and (2) waves can be over-reflected and over-transmitted for $l_\Theta \ll m$ and can potentially lead to instabilities given specific boundary conditions.

To give an idea of the values these wavenumbers can take, we have listed in Table 4 three typical orbital states, where, in order, the asynchronous, eccentricity, and obliquity tides are supposed to be dominant (Ogilvie 2014). These states are described by the ‘spherical’ quadrupolar components of the dominant terms in the tidal potential, namely the degree l and the order m of the spherical harmonics. The analogy with the equatorial model is then made to get m , and l_Θ is chosen to approximate, as best as possible, the behaviour of the Legendre polynomial $P_l^m(\cos \Theta)$ around the equator with a simple trigonometric function $\Re\{\exp[i(l_\Theta \Theta + \phi)]\}$, where ϕ is the appropriate phase (Mathis et al. in prep.). To find the associated wave attenuation

at co-rotation for the three main tides, one can use Figs. 3 and 4 for $\alpha_k \geq 1$ and $R_0 \lesssim 0.27$ and look at the south pole (as Fig. 4 is plotted at the north pole, one has to take the opposite Rossby number). From Fig. 3, we can assess that waves excited by these tides are always in the so-called stable regime for these ranges of R_0 and α_k , which excludes an amplification of these waves. Moreover, in Fig. 4, we also observe that waves are completely absorbed at co-rotation for our given ranges of parameters. By consequence, waves excited by the asynchronous, inclined, or eccentric tides in Jupiter and Saturn are expected to transfer all their wave action flux to the mean flow at co-rotation.

6. Conclusion and perspectives

The present study was motivated by the works of Baruteau & Rieutord (2013) and Guenel et al. (2016a,b), who showed that differential rotation can strongly affect the propagation and dissipation properties of (tidal) linear inertial waves. They considered different rotation profiles typical of stellar and planetary interiors and pointed out that tidal waves can deeply interact with zonal flows at co-rotation resonances, leading to intense wave energy dissipation, along with possible instabilities. In this paper, we have investigated the transmission of free inertial waves with latitudinal stratification and differential rotation at the co-rotation resonance (characterised by a zero Doppler-shifted wave frequency) and, more broadly, at critical levels (any singularities of the governing second-order wave propagation equation in the inviscid limit). For this purpose, we built a new local Cartesian box model with horizontal shear, modelling a small patch of the convective zone of a low-mass star or a giant planet. By considering the inclination of the local reference frame relative to the rotation axis, we have examined the effect on wave propagation through a critical level of a conical rotation profile at a general co-latitude when the box is tilted, or of a cylindrical rotation profile when the box is at the north or south poles. These rotation profiles are inspired by those observed or expected in the Sun, low-mass stars, and the giant gaseous planets in our Solar System. Three critical levels can be identified when the box is inclined relative to the rotation axis: the co-rotation resonance and two other critical levels that arise from the inclination between the gravity and the rotation vectors, which are defined by a Doppler-shifted frequency equal to plus or minus the latitudinal component of the rotation frequency. When the box is at the poles, critical levels are restricted to the co-rotation.

In order to diagnose the behaviour of a wave passing through a critical level for both aforementioned rotation profiles, we made use of an invariant called the wave action flux, which is independent of the latitudinal coordinate in a non-dissipative fluid flow. This invariant was used when the ‘directional’ flux of angular momentum (here latitudinal) cannot be constructed easily from the mean perturbed velocity, as is the case, for ex-

ample, in Lindzen & Tung (1978) for Rossby waves in plane-parallel shear flows. The wave action flux has already been used in vertically stratified shear flows in the presence of rotation or magnetic fields to interpret the role of critical levels (Grimshaw 1975b; Andrews & McIntyre 1978; Grimshaw 1979; Mathis 2009; Mathis & de Brye 2012). Using the condition that this invariant is discontinuous at critical levels, we demonstrated in Sect. 3 that waves can be either fully transmitted, damped, or even amplified after passing through critical levels as a result of wave action flux exchanges. These different regimes of wave transmission are found with both conical and cylindrical rotation profiles; they depend on the critical level encountered, on the wave properties (e.g. the propagation direction and wavenumbers), and on the profile of the mean flow. Table 2 summarises the main analytical results.

We then compared our analytical results with a three-layer numerical model that comprises a shear zone, where the critical level is located, and two surrounding shear-free zones that allow incident, reflected, and transmitted waves. A difference with the analytical model is the introduction of a small dissipative force under the form of a Rayleigh friction (also called frictional force by Ogilvie 2009) to avoid strict singularities. This does not seem to affect the results since analytical and numerical results match quite well when using a power-law mean flow profile and varying the friction. This conclusion is also shared by the work of Alvan et al. (2013), who studied co-rotation resonances for gravity waves propagating in stratified and vertically shear flows.

Based on the analytical results, we discussed possible applications to stellar and planetary interiors in Sect. 5. We have estimated the rate of differential rotation in solar-like stars using the shear contrast (the rotation difference between the pole and the equator) and in giant gaseous planets through the local Rossby number (the ratio between the shear and the rotation frequency in cylindrical coordinates). We find that throughout the lifetimes of K- and G-type stars, as well as for Jupiter and Saturn at the present time, a regime where inertial waves are strongly damped is largely preferred in the convective envelope of these objects. Similar conclusions were found by Alvan et al. (2013) for internal gravity waves through critical levels in the core of solar-like stars.

It is interesting to discuss different regimes of the wave transmission in terms of angular momentum transfer for cases of strong damping and wave amplification. First, we have to underline that the theoretical analysis presented in Section 3 (using the Frobenius method) does not adequately characterise wave (over-)reflection as similarly observed in the numerical section (Sect. 4). What we can access is the wave action flux on either side of the critical level. The analysis of the changes in the wave action flux across the critical level allows us to understand whether energy is deposited into or extracted from the mean flow, in line with the work carried out by Miles (1961), Booker & Bretherton (1967), Grimshaw (1975b), and Lindzen & Barker (1985). We have demonstrated that, in the presence of a locally conical differential rotation, a valve effect can be found for critical levels other than the co-rotation, analogous to the results of Acheson (1972) and Grimshaw (1975b) for hydromagnetic and gravito-inertial waves with a vertical shear. For these peculiar critical levels, waves can be attenuated when going in one direction, mainly featured by the sign of the rotation components in the box, or fully transmitted when going in the other direction. For cylindrical differential rotation, we have found a criterion analogous to the Miles-Howard theorem for stratified shear flows (Miles & Howard 1964), which, for inertial waves such as

those studied in this work, can be formulated as:

$$R = \frac{k_z}{k_x} \frac{1 - R_0}{R_0^2} \left. \begin{array}{l} > 1/4: \text{ wave attenuation;} \\ < 1/4: \text{ possible wave over-} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{reflection,} \\ \text{transmission.} \end{array} \quad (99)$$

The above criterion depends on the shear Rossby number $R_0 = U'/(2\Omega)$ and the vertical (k_z) and longitudinal (k_x) wavenumbers. This last point is an important difference with the Miles-Howard criterion, which does not involve wavenumbers. For this reason, the analogy between Eq.(99) and the Miles-Howard stability criterion must be taken with care. We also stress that Eq. (99) is very different from the Rayleigh's inflection point theorem for Rossby waves, which are a sub-class of inertial waves, when neglecting the vertical or the radial perturbed velocity (Bretherton 1966; Lindzen & Tung 1978). The Miles-Howard criterion allows us to distinguish between critical levels where strong wave attenuation is expected for $Ri > 1/4$ (where Ri is the Richardson number) and those where over-reflection and over-transmission can lead to potential shear instabilities for $Ri < 1/4$. Lindzen (1988) warns, however, that over-reflection and over-transmission are a necessary but not sufficient condition for shear instability. Such amplifications leading to the instability require peculiar conditions in a three-layer model, where the shear zone that features the critical level is surrounded by a region of incoming propagating waves and by a 'sink' zone to force waves to cross the evanescent shear zone. Special boundary conditions are necessary for the wave to successively return to the critical level and induce wave amplitude growth. Recent studies (see e.g. Carpenter et al. 2012, for a review) have revisited instabilities in stratified shear flows by studying multiple counter-propagating waves that can interact with one another to grow in amplitude with time (with conditions such as phase-locking). A parallel was drawn between over-reflection mechanisms and interacting counter-propagating waves by Harnik & Heifetz (2007) to describe baroclinic instabilities for Rossby waves.

Contrary to what our results predict, Baruteau & Rieutord (2013) did not observe any instabilities of inertial waves when using cylindrical differential rotation. Several reasons can be put forward to explain this discrepancy, such as boundary conditions (as discussed in the previous paragraph) or the values of the shear and horizontal wavenumbers, since the inertial waves may not be in the regime which allows instabilities, according to the criterion in Eq. (99), which needs to be adapted further to the global cylindrical geometry used in the work of Baruteau & Rieutord (2013). We stress that when exploring different power-laws for the mean flow profiles, over-reflection was not retrieved for a non-linear mean flow in cylindrical differential rotation. Guenel et al. (2016a,b) did observe instabilities with conical differential rotation, but only for sufficiently low viscosities, whereas our study shows little dependence on the friction and rather highlights possible over-transmission for non-linear flows. Lastly, we underline that a temporal analysis on the growth rate of perturbations should be undertaken to unravel instabilities, which has not been performed in this paper but has been in other separate papers (Park, J. et al. 2020a,b).

This ab initio analytical study is thus a first step towards understanding how inertial waves interact with a mean flow subject to latitudinal differential rotation at critical levels in the context of tidal dissipation in differentially rotating stars and planets. Possible feedbacks of the perturbed wave on equilibrium quantities and the mean flow are not taken into account in this

study, nor are non-linearities in the perturbed hydrodynamical wave equations. Nonetheless, they should be considered in future studies since Barker & Ogilvie (2010) and Baruteau & Rieutord (2013) suggested important non-linear effects for inertial waves at co-rotation. Finally, magnetism may also play an important role in dissipating or redistributing angular momentum at critical levels through magnetic stresses (e.g. Wei 2016, 2018; Lin & Ogilvie 2018; Astoul et al. 2019).

Acknowledgements. We would like to thank the anonymous referee, as well as A. Barker, for the helpful comments and suggestions regarding our work. A. Astoul, J. Park, and S. Mathis acknowledge funding by the European Research Council through the ERC grant SPIRE 647383. The authors acknowledge the PLATO CNES funding at CEA/IRFU/DAP and IRAP. This research has made use of NASA's Astrophysics Data System and of the software MATLAB version R2018a. Finally, we thank Quentin André and Jérémy Ahuir for fruitful discussions on the details of the analytical model.

References

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, *Handbook of Mathematical Functions*
- Acheson, D. J. 1972, *Journal of Fluid Mechanics*, 53, 401
- Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, *A&A*, 553, A86
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., et al. 2019, arXiv e-prints, arXiv:1905.08516, *A&A*, in press, 10.1051/0004-6361/201935160
- André, Q., Barker, A. J., & Mathis, S. 2017, *A&A*, 605, A117
- Andrews, D. G. & McIntyre, M. E. 1978, *Journal of Fluid Mechanics*, 89, 647
- Astoul, A., Mathis, S., Baruteau, C., et al. 2019, *A&A*, 631, A111
- Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, in SF2A-2014: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, ed. J. Ballet, F. Martins, F. Bournaud, R. Monier, & C. Reylé, 199–203
- Auclair-Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, *A&A*, 581, A118
- Barker, A. J. & Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 395, 2268
- Barker, A. J. & Ogilvie, G. I. 2010, *MNRAS*, 404, 1849
- Barnes, J. R., Collier Cameron, A., Donati, J. F., et al. 2005, *MNRAS*, 357, L1
- Barnes, J. R., Jeffers, S. V., Haswell, C. A., et al. 2017, *MNRAS*, 471, 811
- Baruteau, C. & Masset, F. 2008, *ApJ*, 672, 1054
- Baruteau, C. & Rieutord, M. 2013, *Journal of Fluid Mechanics*, 719, 47
- Bazot, M., Benomar, O., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2019, *A&A*, 623, A125
- Beaudoin, P., Strugarek, A., & Charbonneau, P. 2018, *ApJ*, 859, 61
- Benbakoura, M., Réville, V., Brun, A. S., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2019, *A&A*, 621, A124
- Benomar, O., Bazot, M., Nielsen, M. B., et al. 2018, *Science*, 361, 1231
- Bolmont, E., Gallet, F., Mathis, S., et al. 2017, *A&A*, 604, A113
- Bolmont, E. & Mathis, S. 2016, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 126, 275
- Booker, J. R. & Bretherton, F. P. 1967, *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 513
- Bretherton, F. P. 1966, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 92, 325
- Bretherton, F. P. & Garrett, C. J. R. 1968, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 302, 529
- Broad, A. S. 1995, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 121, 1891
- Brun, A. S., García, R. A., Houdek, G., Nandy, D., & Pinsonneault, M. 2015, *Space Sci. Rev.*, 196, 303
- Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, *ApJ*, 836, 192
- Bryan, G. H. 1889, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 180, 187
- Carpenter, J. R., Tedford, E. W., Heifetz, E., & Lawrence, G. A. 2012, *Applied Mechanics Reviews*, 64, 061001
- Cartan, E. 1922, *Bull. Sci. Math.*, 46, 317
- Damiani, C. & Mathis, S. 2018, *A&A*, 618, A90
- Debras, F. & Chabrier, G. 2019, *ApJ*, 872, 100
- Decressin, T., Mathis, S., Palacios, A., et al. 2009, *A&A*, 495, 271
- Duguid, C. D., Barker, A. J., & Jones, C. A. 2020, *MNRAS*, 491, 923
- Eliassen, A. & Palm, E. 1961, *On the Transfer of Energy in Stationary Mountain Waves*, (Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo. Geofysiske publikasjoner) (I kommisjon hos Aschehoug)
- Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, 439, 845
- Ford, E. B. & Rasio, F. A. 2006, *ApJ*, 638, L45
- Fuller, J., Luan, J., & Quataert, E. 2016, *MNRAS*, 458, 3867
- Galanti, E., Kaspi, Y., Miguel, Y., et al. 2019, *Geophys. Res. Lett.*, 46, 616
- Gallet, F., Bolmont, E., Bouvier, J., Mathis, S., & Charbonnel, C. 2018, *A&A*, 619, A80
- Gallet, F., Bolmont, E., Mathis, S., Charbonnel, C., & Amard, L. 2017, *A&A*, 604, A112
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
- Gastine, T., Wicht, J., & Aurnou, J. M. 2013, *Icarus*, 225, 156
- Gerkema, T., Zimmerman, J. T. F., Maas, L. R. M., & van Haren, H. 2008, *Reviews of Geophysics*, 46, RG2004
- Gliatto, M. T. & Held, I. M. 2020, *Journal of Atmospheric Sciences*, 77, 859
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989, *ApJ*, 342, 1075
- Goldreich, P. & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, 233, 857
- Greenspan, H. P. 1969, Cambridge University Press.
- Grimshaw, R. 1979, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 14, 303
- Grimshaw, R. H. J. 1975a, *Tellus Series A*, 27, 351
- Grimshaw, R. H. J. 1975b, *Journal of Fluid Mechanics*, 70, 287
- Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016a, *A&A*, 589, A22
- Guenel, M., Mathis, S., Baruteau, C., & Rieutord, M. 2016b, arXiv e-prints, arXiv:1612.05071
- Harnik, N. & Heifetz, E. 2007, *Journal of Atmospheric Sciences*, 64, 2238
- Hut, P. 1980, *A&A*, 92, 167
- Jackson, B., Greenberg, R., & Barnes, R. 2008, *ApJ*, 678, 1396
- Jones, W. L. 1967, 30, 439
- Jones, W. L. 1968, *Journal of Fluid Mechanics*, 34, 609
- Jouve, L. & Ogilvie, G. I. 2014, *Journal of Fluid Mechanics*, 745, 223
- Kaspi, Y., Guillot, T., Galanti, E., et al. 2017, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 5960
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, *Stellar Structure and Evolution*
- Lai, D. 2012, *MNRAS*, 423, 486
- Lainey, V., Casajus, L. G., Fuller, J., et al. 2020, *Nature Astronomy*, TBD, TBD
- Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2017, *Icarus*, 281, 286
- Latter, H. N. & Balbus, S. A. 2009, *MNRAS*, 399, 1058
- Lin, Y. & Ogilvie, G. I. 2018, *MNRAS*, 474, 1644
- Lindzen, R. S. 1988, *Pure and Applied Geophysics*, 126, 103
- Lindzen, R. S. & Barker, J. W. 1985, *Journal of Fluid Mechanics*, 151, 189
- Lindzen, R. S. & Tung, K. K. 1978, *Journal of Atmospheric Sciences*, 35, 1626
- Luan, J., Fuller, J., & Quataert, E. 2018, *MNRAS*, 473, 5002
- Maas, L. R. M. & Lam, F. P. A. 1995, *Journal of Fluid Mechanics*, 300, 1
- Maslowe, S. A. 1986, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18, 405
- Mathis, S. 2009, *A&A*, 506, 811
- Mathis, S. 2015, *A&A*, 580, L3
- Mathis, S. 2019, in *EAS Publications Series*, Vol. 82, EAS Publications Series, 5–33
- Mathis, S. & de Brye, N. 2012, *A&A*, 540, A37
- Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J. P. 2004, *A&A*, 425, 243
- Mathis, S., Prat, V., Amard, L., et al. 2018, *A&A*, 620, A22
- Miles, J. W. 1961, *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 496
- Miles, J. W. & Howard, L. N. 1964, *Journal of Fluid Mechanics*, 20, 331
- Militzer, B., Wahl, S., & Hubbard, W. B. 2019, *ApJ*, 879, 78
- Morse, P. M. & Feshbach, H. 1953, *Methods of theoretical physics*
- Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 396, 794
- Ogilvie, G. I. 2014, *ARA&A*, 52, 171
- Ogilvie, G. I. & Lesur, G. 2012, *MNRAS*, 422, 1975
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, 610, 477
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, 661, 1180
- Park, J., Prat, V., & Mathis, S. 2020a, *A&A*, 635, A133
- Park, J., Prat, V., Mathis, S., & Bugnet, L. 2020b, to be submitted to *A&A*
- Press, W. H. 1981, *ApJ*, 245, 286
- Rieutord, M. 2015, *Fluid Dynamics: An Introduction*
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdettaro, L. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 103
- Rieutord, M. & Valdettaro, L. 1997, *Journal of Fluid Mechanics*, 341, 77
- Rieutord, M. & Valdettaro, L. 2010, *Journal of Fluid Mechanics*, 643, 363
- Ringot, O. 1998, PhD thesis, thèse de doctorat dirigée par Schatzman, Évry Terre, océan, espace Paris 7 1998
- Schmid, P., Henningson, D., & Jankowski, D. 2002, *Applied Mechanics Reviews*, 55, B57
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390
- Shampine, L. F. & Reichelt, M. W. 1997, *SIAM J. Sci. Comp.*, 18, 1
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *ARA&A*, 41, 599
- Tsang, D. & Lai, D. 2009, *MNRAS*, 400, 470
- Varela, J., Strugarek, A., & Brun, A. S. 2016, *Advances in Space Research*, 58, 1507
- Watts, A. L., Andersson, N., & Williams, R. L. 2004, *MNRAS*, 350, 927
- Wei, X. 2016, *ApJ*, 828, 30
- Wei, X. 2018, *ApJ*, 854, 34
- Yamanaka, M. & Tanaka, H. 1984, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 62, 1
- Zahn, J. P. 1966, *Annales d'Astrophysique*, 29, 313
- Zahn, J. P. 1977, *A&A*, 500, 121
- Zahn, J. P., Talon, S., & Matias, J. 1997, *A&A*, 322, 320

Appendix A: Derivation of the wave propagation equation

In this section, we detail the derivation of the ODE (cf. Eqs. (22) and (23)) in a dissipative medium and for forced inertial waves. Writing the perturbation variables as wave-like functions in x and z directions, the hydrodynamic equations, (16), (17), and (18), are, respectively:

$$-isu + vU'e_x + \mathbf{n} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{e}_z + \mathbf{f}, \quad (\text{A.1})$$

$$ik_x u + v' + ik_z w = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$-i\sigma\rho + v\tilde{f}U' = 0, \quad (\text{A.3})$$

with $s = \sigma + i\sigma_f$ a complex frequency that includes the Rayleigh friction frequency σ_f . We have removed the symbol ' in each perturbed quantity, and it now refers to the derivative with respect to y . The projection of the curl of the perturbed momentum equation (A.1) on the $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ basis is:

$$is(ik_z v - w') - is'w - (\mathbf{n} \cdot \nabla)u = -\rho'/\rho_0 + (\nabla \times \mathbf{f})_x \quad (\text{A.4})$$

$$is(ik_x w - ik_z u) + ik_z vU' - (\mathbf{n} \cdot \nabla)v = ik_x \rho/\rho_0 + (\nabla \times \mathbf{f})_y, \quad (\text{A.5})$$

$$is(u' - ik_x v) + is'u - (vU')' - (\mathbf{n} \cdot \nabla)w = (\nabla \times \mathbf{f})_z. \quad (\text{A.6})$$

We note that the term $-\nabla \times (\nabla p/\rho_0) = (\nabla \rho_0 \times \nabla p)/\rho_0^2$ is of order ϵ and thus neglected. This enables us to define and use the quantity $\Pi = p/\rho_0$, which we call reduced pressure in the present study. Using the continuity equation, the linear combination $ik_z(\text{A.4}) - ik_x(\text{A.6})$ reads:

$$is(v'' - k_{\perp}^2 v) + is'v' + ik_x(vU')' + (\mathbf{n} \cdot \nabla)(-ik_z u + ik_x w) = -ik_z \rho'/\rho_0 + [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})]_y, \quad (\text{A.7})$$

where $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_z^2$. Thus, $is \left[(\mathbf{n} \cdot \nabla) \frac{(A.5)}{is} - (A.7) \right]$ gives a second-order ordinary differential equation on the latitudinal velocity v , with a source term S :

$$Av'' + Bv' + Cv = S. \quad (\text{A.8})$$

Coefficients are written as:

$$A = s^2 - \tilde{f}^2,$$

$$B = ik_z \tilde{f} U' \left(1 - \frac{s}{\sigma} \right) - k_x \tilde{f}^2 \frac{U'}{\sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{s} \right) - 2ik_z f \tilde{f},$$

$$C = -k_{\perp}^2 s^2 + k_z^2 f(f - U') - ik_x k_z \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{s} \right) - k_x^2 \tilde{f}^2 \frac{U'^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma}{s} \right) - ik_x k_z \tilde{f} \frac{U'^2}{\sigma^2} s \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2} \right) + U'' \left[\frac{k_x}{\sigma} (s\sigma - \tilde{f}^2) + ik_z \tilde{f} \left(1 - \frac{s}{\sigma} \right) \right], \quad (\text{A.9})$$

$$S = -is[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})]_y + \left(k_x \frac{U'}{s} \tilde{f} + \mathbf{n} \cdot \nabla \right) (\nabla \times \mathbf{f})_y.$$

Appendix B: Derivation of the polarisation relations

The Navier-Stokes equation with Rayleigh friction, without forcing, and projected onto the Cartesian basis reads:

$$-isu + (U' - f)v + \tilde{f}w = -ik_x \Pi, \quad (\text{B.1})$$

$$-isv + fu = -\Pi', \quad (\text{B.2})$$

$$-isw - \tilde{f}u + v\tilde{f}\frac{U'}{i\sigma} = -ik_z \Pi, \quad (\text{B.3})$$

where we use Eq. (A.3) to replace the perturbed density. In order to obtain an equation for the reduced pressure and the latitudinal velocity perturbations only, we applied the following linear combination:

$$\partial_z [\tilde{f}(B.1) - is(B.3)] - \partial_x [is(B.1) + \tilde{f}(B.3)], \quad (\text{B.4})$$

which yields, using the continuity equation (A.2):

$$\Pi = \frac{1}{sk_{\perp}^2} \left\{ iAv' + \left[(U' - f)(ik_x s - k_z \tilde{f}) + \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} (k_z s - ik_x \tilde{f}) \right] v \right\}. \quad (\text{B.5})$$

To get the perturbed vertical velocity, one can use the linear combination $-\tilde{f}(B.1) + is(B.3)$, which yields, after some algebra:

$$w = \frac{1}{sk_{\perp}^2} \left\{ (isk_z - k_x \tilde{f}) v' + k_x \left[ik_z (U' - f) - k_x \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \right] v \right\}. \quad (\text{B.6})$$

Furthermore, $is(B.1) + \tilde{f}(B.3)$ gives the perturbed longitudinal velocity:

$$u = \frac{1}{sk_{\perp}^2} \left\{ (isk_x + k_z \tilde{f}) v' + k_z \left[ik_z (f - U') + k_x \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \right] v \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Appendix C: The WKBJ approximation

Rapidly oscillating solutions are often studied within the WKBJ approximation (Press 1981). At the pole, the solution of the ODE (60) in this approximation takes the form:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\kappa(y)}} \left(A e^{i \int \kappa(y') dy'} + B e^{-i \int \kappa(y') dy'} \right), \quad (\text{C.1})$$

where A and B are the complex amplitudes of the wave function Ψ and $\kappa(y)$ is the complex potential associated with the ODE. We can determine the validity domain of this approximation in the same way Alvan et al. (2013) did. In the WKBJ approximation, Ψ satisfies

$$\frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} = f(y) \Psi(y), \quad (\text{C.2})$$

where $f(y) = -\kappa(y)^2 \approx -R/(y - y_0)^2$ for a constant shear. The WKBJ approximation is valid provided that: (i) $R_0 < 1$ so that $R > 0$, and (ii) k_{\perp}^2 is negligible in front of $-R/(y - y_0)^2$. Then, we introduce the Liouville transformation:

$$W(y) = f^{1/4} \Psi \quad \text{and} \quad \xi(y) = \int^y f^{1/2} dy'. \quad (\text{C.3})$$

We deduce

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{1}{4} f^{-5/4} f' \Psi + f^{-1/4} \Psi', \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = \frac{-5}{16} f^{-11/4} f'^2 \Psi + \frac{1}{4} f^{-7/4} f'' \Psi + f^{-3/4} \Psi''.$$

Equation (C.2) thus becomes:

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = [1 + \Phi(y)] W \quad \text{with} \quad \Phi = \frac{4ff'' - 5f'^2}{16f^3}. \quad (\text{C.5})$$

The WKBJ approximation states that $|\Phi| \ll 1$. Given the definition of f , this leads to the validity condition $|R| \gg 1/4$.

Appendix D: Analytical properties in the no-shear regions (zones I and III)

Appendix D.1: Wave-like solutions

The ordinary differential equation without shear can be written as:

$$(s^2 - \tilde{f}^2) \frac{d^2 v}{dy^2} - 2ik_z f \tilde{f} \frac{dv}{dy} + [k_z^2 (f^2 - s^2) - k_x^2 s^2] v = 0. \quad (\text{D.1})$$

For the following, we introduce $s_1 = \omega + i\sigma_f$ in zone I, and $s_3 = \omega - k_x \Lambda + i\sigma_f$ in zone III. In the no-flow region I, the analytic solution of Eq. (D.1) can be written in the form:

$$v(y) = A_I \exp(ik_I y) + A_R \exp(ik_R y), \quad (\text{D.2})$$

which is the sum of an incident wave and a reflected wave of amplitudes A_I and A_R and wavenumbers:

$$k_I = \frac{-k_z f \tilde{f} + \sqrt{s_1^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - s_1^2)]}}{\tilde{f}^2 - s_1^2}, \quad (\text{D.3})$$

$$k_R = \frac{-k_z f \tilde{f} - \sqrt{s_1^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - s_1^2)]}}{\tilde{f}^2 - s_1^2},$$

respectively. These relationships are given by the dispersion relation satisfied by the incident and reflected waves:

$$s^2 = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{k^2} = \frac{(k_{I,R} \tilde{f} + k_z f)^2}{k_x^2 + k_{I,R}^2 + k_z^2}. \quad (\text{D.4})$$

Similarly, we write the latitudinal velocity in the uniform mean flow region III as:

$$v(y) = A_T \exp(ik_T y), \quad (\text{D.5})$$

where A_T is the amplitude of the transmitted wave and

$$k_T = \frac{-k_z f \tilde{f} \pm \sqrt{s_3^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - s_3^2)]}}{\tilde{f}^2 - s_3^2} \quad (\text{D.6})$$

is its wavenumber, also given by the dispersion relation of the transmitted wave. It is important to stress that all varying parameters in the model, such as Λ , k_x , k_z , and ω , have been chosen such that k_I , k_R , and k_T are not complex without friction. This prevents widely diverging waves in zones I or III.

Appendix D.2: Wave action flux

As we did in Sect. 3.2.5, one can also determine the wave action flux (Eq. (41)) in region I,

$$\mathcal{A}_{I-R}/\rho_0 = \frac{\sqrt{\omega^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - \omega^2)]}}{2k_\perp^2 \omega^2} (|A_I|^2 - |A_R|^2), \quad (\text{D.7})$$

and in region III,

$$\mathcal{A}_T/\rho_0 = \pm \frac{\sqrt{\sigma_3^2 [k_z^2 f^2 + k_\perp^2 (\tilde{f}^2 - \sigma_3^2)]}}{2k_\perp^2 \sigma_3^2} |A_T|^2, \quad (\text{D.8})$$

with $\sigma_3 = \omega - k_x \Lambda$, and where we use the reduced pressure for all three waves:

$$\Pi = \frac{1}{sk_\perp^2} [(\tilde{f}^2 - s^2)k_{I,R,T} + f(k_z \tilde{f} - ik_x s)] A_{I,R,T} e^{ik_{I,R,T} y}. \quad (\text{D.9})$$

It is noteworthy that in the no-shear regions the latitudinal flux of energy $\overline{p v}$ is preserved (see also Eliassen & Palm 1961), and so is the wave action flux. Indeed, the characteristic frequencies (ω and σ_3) in both zones (I and III, respectively) are constants. Furthermore, as we stated in Sect. 3.2.5, the direction of the group velocity is given by $\text{sign}(\overline{p v}) = \text{sign}(\sigma \mathcal{A})$. By consequence, the direction of energy propagation is constrained by the sign of the Doppler-shifted frequency σ_3 in zone III, and by the sign of inertial frequency ω in zone I. Considering $\omega > 0$, the incident wave is properly named since the group velocity is positive; likewise, the reflective wave has negative group velocity and is thus moving downwards. It is a little more complicated for the so-called transmitted wave. The sign of σ_3 is directly related to the presence or the absence of a critical level inside zone II.

Table D.1 summarises which frequency has to be exited so that waves can meet one or several critical points in the shear region of range $0 < y < 1$ for a linear mean flow profile. Thus, if

critical point	$\Lambda > 0$	$\Lambda < 0$
$\sigma = 0$	$0 < \omega < k_x \Lambda$	$k_x \Lambda < \omega < 0$
$\sigma = \tilde{f}$	$\tilde{f} < \omega < k_x \Lambda + \tilde{f}$	$k_x \Lambda + \tilde{f} < \omega < \tilde{f}$
$\sigma = -\tilde{f}$	$-\tilde{f} < \omega < k_x \Lambda - \tilde{f}$	$k_x \Lambda - \tilde{f} < \omega < -\tilde{f}$

Table D.1. Requirements on ω for the existence of critical points inside the shear region II depending on the sign of the shear Λ .

co-rotation is met in zone II with $\Lambda > 0$, we automatically have a negative Doppler-shifted frequency in zone III (i.e. $\sigma_3 < 0$). Therefore, one must choose the $-$ sign in the expression of k_T (Eq. (D.6)) in order to construct a wave that moves away from the critical level. The same reasoning applies for the critical level $\sigma = -\tilde{f}$. It is trickier for the singularity $\sigma = \tilde{f}$ because $\tilde{f} - k_x \Lambda < \sigma_3 < \tilde{f}$, so σ_3 can be either positive or negative in the interval $[0, \pi/2]$ depending on the values of \tilde{f} and $k_x \Lambda$.

Sommaire

7.1 Synthèse des résultats	165
7.1.1 Impact du magnétisme sur les flots de marée	166
7.1.2 Impact de la rotation différentielle	167
7.2 Perspectives	168
7.2.1 Dissipation de marée dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse	168
7.2.2 Dissipation de marée dans les planètes géantes	169

7.1 Synthèse des résultats

Dans cette thèse, nous nous sommes attachés à comprendre l'influence du magnétisme et de la rotation différentielle, stellaire mais aussi planétaire, sur l'interaction de marée. Ces deux processus ne sont en général pas pris en compte pour quantifier la réponse au potentiel de marée du perturbateur (planète ou satellite) dans le corps perturbé (étoile ou planète). Pour autant, les études de ces dernières années se sont multipliées dans le sens d'une modélisation plus réaliste de cette interaction. En effet, l'influence de différents processus sur la dissipation de marée, comme l'évolution structurelle et rotationnelle de l'étoile (Ogilvie, 2013; Mathis, 2015; Gallet et al., 2017), l'impact de sa métallicité (Bolmont et al., 2017), ainsi que le détail de la structure d'une planète (Remus et al., 2012b, 2015; Guenel et al., 2014; Storch & Lai, 2014, 2015; Bolmont & Mathis, 2016; André et al., 2017b; Auclair-Desrotour et al., 2017, 2018; André et al., 2019), peuvent avoir des conséquences importantes sur le destin du corps orbitant et l'évolution finale du système étoile-planète (Gallet et al., 2017; Damiani & Mathis, 2018; Gallet et al., 2018; Benbakoura et al., 2019) ou planète-satellite (Auclair-Desrotour et al., 2014; Fuller et al., 2016; Lainey et al., 2017; Auclair-Desrotour et al., 2019). Le choix du mécanisme de dissipation peut aussi se révéler déterminant, avec notamment des effets non-linéaires non négligeables dans les systèmes très serrés (Barker & Ogilvie, 2010; Jouve & Ogilvie, 2014; Favier et al., 2014; Barker, 2016). Pour les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses dans lesquelles un traitement linéaire des marées reste satisfaisant (i.e. dans des systèmes compacts, mais pas trop), la dissipation des flots de marée est importante dans l'enveloppe convective, et s'effectue grâce à des processus de friction turbulente (p.e. Zahn, 1966b, 1977, 1989). Ces régions convectives sont aussi souvent le siège d'un effet dynamo puissant et d'un gradient de rotation, deux mécanismes qui peuvent altérer la structure de ces flots de marée, et par conséquent les propriétés de leur dissipation, et possiblement le processus de dissipation dominant, comme montré récemment par Wei (2016, 2018) et Lin & Ogilvie (2018) pour le magnétisme et par Baruteau & Rieutord (2013) et Guenel et al. (2016a,b) pour la rotation différentielle. **Notre travail s'inscrit ainsi dans la poursuite de ces différents travaux, et est motivé par l'enjeu de raffiner la caractérisation de la dissipation de marée dans le but de mieux contraindre le, ou les, scénario(s) d'évolution des planètes (satellites) proches de leur étoile (planète).**

Cette bonne connaissance de la réponse de marée dans un environnement donné peut servir d'autres intérêts, en adoptant le raisonnement inverse, c'est-à-dire la détermination de paramètres intrinsèques directement à partir de la dissipation de marée. Cela peut être l'amplitude d'un champ magnétique moyen à la surface des étoiles en rotation rapide (Wei, 2018), une borne supérieure pour la rotation différentielle radiale dans l'enveloppe convective des binaires (Jermyn et al., 2020), ou même la détermination de l'âge des étoiles dans les systèmes serrés (Gallet & Delorme, 2019), technique qui a le mérite de combler les carences de la gyrochronologie et de la magnétochronologie qui ne prennent pas en compte les échanges de moment cinétique entre les membres d'un système serré. Ces études sont néanmoins récentes, et d'avantage de recul et d'approfondissement sont nécessaires pour garantir ou améliorer la robustesse des méthodologies utilisées.

7.1.1 Impact du magnétisme sur les flots de marée

Dans les régions convectives magnétisées des étoiles de faible masse et des planètes géantes comme Jupiter et Saturne, le potentiel de marée du perturbateur va exciter des ondes magnéto-inertielles. D'un point de vue analytique, on considère que le forçage de ces ondes résulte de l'action de forces inertielles, comme l'accélération de Coriolis, sur l'écoulement à grande échelle de la marée d'équilibre (p.e. Ogilvie, 2005). Néanmoins, en principe, le champ magnétique de l'étoile peut aussi agir sur ce forçage de marée, via la force de Lorentz linéarisée associée à la marée d'équilibre. Cela pose la question de la pertinence d'une approche purement hydrodynamique de l'excitation des ondes par la marée. C'est dans ce contexte que nous avons tout d'abord explicité, de manière semi-analytique, la contribution magnétique au forçage des marées dynamiques. Le rapport de ce forçage magnétique et du forçage classique hydrodynamique dépend essentiellement du nombre de Lehnert, qui compare la force de Lorentz et la pseudo-force de Coriolis, et d'un nombre de Rossby de marée, qui compare les fréquences de marée et de rotation du corps perturbé. Pour estimer ce rapport, des champs magnétiques de relativement grande échelle ont été déterminés à la base de la zone convective à partir de la théorie dynamo et de la longueur de mélange, en utilisant trois lois d'échelle représentatives de la diversité des amplitudes de champs magnétiques que l'on peut trouver dans les étoiles de faible masse et les planètes (Davidson, 2013; Brun et al., 2015; Augustson et al., 2019). Un champ magnétique de grande échelle dipolaire a aussi été extrapolé au sommet de la zone convective. Ces champs ont alors été évalués à l'aide de grilles de modèles d'évolution stellaire via le code 1D STAREVOL (Amard et al., 2019) permettant de traiter simultanément l'évolution structurelle et rotationnelle des étoiles, de sorte à prédire l'amplitude du nombre de Lehnert tout au long de l'évolution des étoiles de faible masse de type spectral M à F. L'utilisation des paramètres de systèmes observés de type Jupiter chauds présentant des orbites quasi-circulaires et coplanaires, nous ont par la suite permis d'évaluer le nombre de Rossby de marée. En couplant ces deux approches d'estimation du nombre de Lehnert et de Rossby de marée (avec des paramètres observationnels et issus de modèles numériques), une estimation du rapport de forçage a pu être donnée pour chaque système planétaire étudié.

Nos résultats montrent qu'un champ magnétique de grande échelle dans les étoiles hôtes de Jupiter chauds n'a finalement que peu d'influence sur l'excitation des ondes magnéto-inertielles de marée. Cette conclusion forte est valable pour des étoiles de type spectral M à F de la pré-séquence principale jusqu'au début de la branche des sous-géantes.

Le magnétisme stellaire peut-il cependant jouer un rôle important dans la dissipation des ondes de marée, comme le prédisent Lin & Ogilvie (2018) et Wei (2018) ? À cet égard, Lin & Ogilvie (2018) ont établi une prescription indiquant que, de la dissipation Ohmique de l'énergie magnétique ou visqueuse de l'énergie cinétique des ondes magnéto-inertielles, domine.

En utilisant leur loi d'échelle, ainsi que les grilles de paramètres stellaires structurels et dynamiques calculés avec STAREVOL, nous avons montré que la dissipation ohmique est au moins aussi importante que la dissipation visqueuse lorsqu'une viscosité et une résistivité magnétique turbulentes sont supposées. La dissipation ohmique devient même prépondérante lorsqu'une viscosité et une résistivité magnétique moléculaires sont considérées. Ces conclusions sont valables tant à la base qu'au sommet de la zone convective pour des étoiles de type M à F, tout au long de leur vie.

Ainsi, bien que le magnétisme stellaire ait un impact négligeable sur l'excitation des ondes magnéto-inertielles de marée, son impact reste majeur sur le mécanisme de dissipation de ces ondes, tant à la base qu'au sommet de la zone convective au cours de l'évolution d'étoiles de type spectral M à F. Par conséquent, ces résultats indiquent qu'un traitement magnéto-hydrodynamique de la propagation et de la dissipation des ondes de marée est nécessaire pour évaluer l'impact des interactions de marée étoile-planète pour toutes les étoiles de faible masse au cours de leur évolution. Des conclusions similaires peuvent être tirées pour le système Jovien en utilisant les valeurs de champs magnétiques de grande échelle obtenus dans les régions convectives magnétisées grâce à la mission Juno (Cao & Stevenson, 2017; Connerney et al., 2018).

7.1.2 Impact de la rotation différentielle

En ce qui concerne la rotation différentielle des étoiles de faible masse et des planètes géantes, Baruteau & Rieutord (2013) et Guenel et al. (2016a,b) ont souligné le caractère singulier et l'importance des résonances de corotation d'un point de vue de la dissipation de marée générée à ces résonances et par les instabilités qu'elles peuvent engendrer en interagissant avec le flot zonal moyen. Ces résonances apparaissent pour une fréquence de l'onde de marée nulle dans le référentiel local en co-rotation avec le corps perturbé. Pour mieux comprendre ce phénomène qui donne lieu à une dissipation visqueuse intense et localisée dans les modèles numériques globaux, nous avons utilisé un concept de boîte locale cartésienne cisailée, qui modélise une petite parcelle de l'enveloppe convective d'une étoile de faible masse ou d'une planète géante. L'inclinaison de la boîte par rapport à l'axe de rotation nous permet d'étudier l'impact d'un profil de rotation cylindrique lorsque la boîte est au pôle (similaire au profil de rotation que l'on peut trouver dans Jupiter, Saturne et dans les étoiles en rotation rapide ; cf. p.e. Gastine et al., 2013), et d'un profil de rotation différentielle conique solaire et anti-solaire lorsque la boîte est inclinée (que l'on peut trouver dans le Soleil et dans les étoiles de type solaire ; p.e. Brun & Browning, 2017). Dans ces configurations, nous avons examiné la transmission des ondes inertielles linéaires libres, dans un fluide en équilibre de vent thermique, aux résonances de corotation et plus largement aux niveaux critiques qui sont des singularités dans l'équation différentielle régissant la propagation des ondes. En utilisant un invariant du flux d'énergie, on peut poser un diagnostic sur chaque niveau critique rencontré, et distinguer différents régimes de transmission des ondes et de l'énergie.

Selon le niveau critique rencontré, les propriétés des ondes (direction, nombre d'onde) et le profil de l'écoulement moyen utilisé, les ondes inertielles peuvent être soit entièrement transmises, soit amorties, soit même amplifiées avec de fortes conséquences sur les échanges de moment cinétique de marée. En particulier, le phénomène de valve décrit par Acheson (1972) et Grimshaw (1975b) pour un flot en rotation magnétisé ou stratifié et avec un cisaillement vertical, c'est-à-dire la transmission intégrale de l'énergie suivant une direction et son amortissement dans la direction opposée, est aussi observé dans notre modèle en présence d'une rotation différentielle latitudinale (i.e. localement conique). De plus, nous démontrons qu'un critère analogue au théorème de Miles-Howard pour la stabilité des ondes de gravité avec cisaillement vertical (Miles & Howard,

1964; Lindzen & Barker, 1985; Alvan et al., 2013) est attendu pour les ondes inertielles lors de l'utilisation d'un profil de rotation localement cylindrique.

Parallèlement à cette étude analytique, nous avons résolu numériquement les équations gouvernant les ondes inertielles libres dans un milieu dissipatif, où la friction turbulente est prise en compte grâce à une force de friction de type amortissement de Rayleigh (Ogilvie, 2009). Nous observons une bonne cohérence entre les résultats analytiques et numériques, bien que certaines différences soient remarquées lors de l'utilisation d'un profil d'écoulement moyen non-linéaire à la corotation. Sur la base de ces résultats, nous avons aussi discuté des applications possibles à l'intérieur des planètes géantes gazeuses et des étoiles de type solaire. Grâce aux valeurs de contraste de cisaillement données par les observations astérosismologiques ou les simulations numériques 3D pour les étoiles de type solaire, et à un modèle analytique équatorial pour les planètes géantes gazeuses, nous déterminons ainsi quel régime de transmission des ondes et de leur énergie est attendu à chaque niveau critique, dans l'enveloppe convective de ces objets.

Il s'avère que pour les étoiles de type K et G de la pré-séquence principale à la fin de la séquence principale, et pour Jupiter et Saturne à l'heure actuelle, un régime où les ondes inertielles sont fortement amorties est largement attendu dans l'enveloppe convective externe de ces objets, de façon similaire à ce qui avait été constaté pour les ondes de gravité par Alvan et al. (2013) dans le cœur radiatif des étoiles de type solaire.

Une prochaine étape pour poursuivre ce travail consistera à réaliser des simulations numériques locales ou globales avec rotation différentielle cylindrique ou conique pour étudier les modes inertiels forcés par la marée et leur dissipation dans une boîte cartésienne ou une coquille sphérique, conformément aux travaux de André et al. (2019) et Guenel et al. (2016b), respectivement. En outre, il serait intéressant d'étudier la rétroaction non linéaire des ondes de marée sur le profil de vent zonal, comme l'ont fait Favier et al. (2014).

7.2 Perspectives

7.2.1 Dissipation de marée dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse

Les différents résultats obtenus dans cette thèse démontrent la nécessité d'un traitement magnéto-hydrodynamique complet des flots de marée et de la prise en compte de la rotation différentielle dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes gazeuses. L'un des projets qu'il serait ainsi intéressant de mener, et qui n'a jamais été entrepris, est la prise en compte simultanée de ces deux processus, en utilisant par exemple une méthode spectrale 2D à haute résolution (p.e. le code LSB développé par Valdetaro et al., 2007) pour identifier les propriétés de propagation des ondes magneto-inertielles excitées par la marée en présence d'un gradient de rotation et estimer leur dissipation avec une dépendance fréquentielle ou moyennée en fréquence (comme dans Mathis, 2015; Guenel et al., 2016b). Une telle approche pourrait fournir des estimations plus précises du couple de marée et des échelles de temps caractéristiques de l'évolution orbitale et rotationnelle de la planète et de son étoile hôte, dans un contexte observationnel riche où les techniques et missions spatiales actuelles et futures de détection et de caractérisation des exoplanètes (SPIRou, TESS, CHEOPS, PLATO, ARIEL, JWST) vont apporter de nouvelles contraintes sur

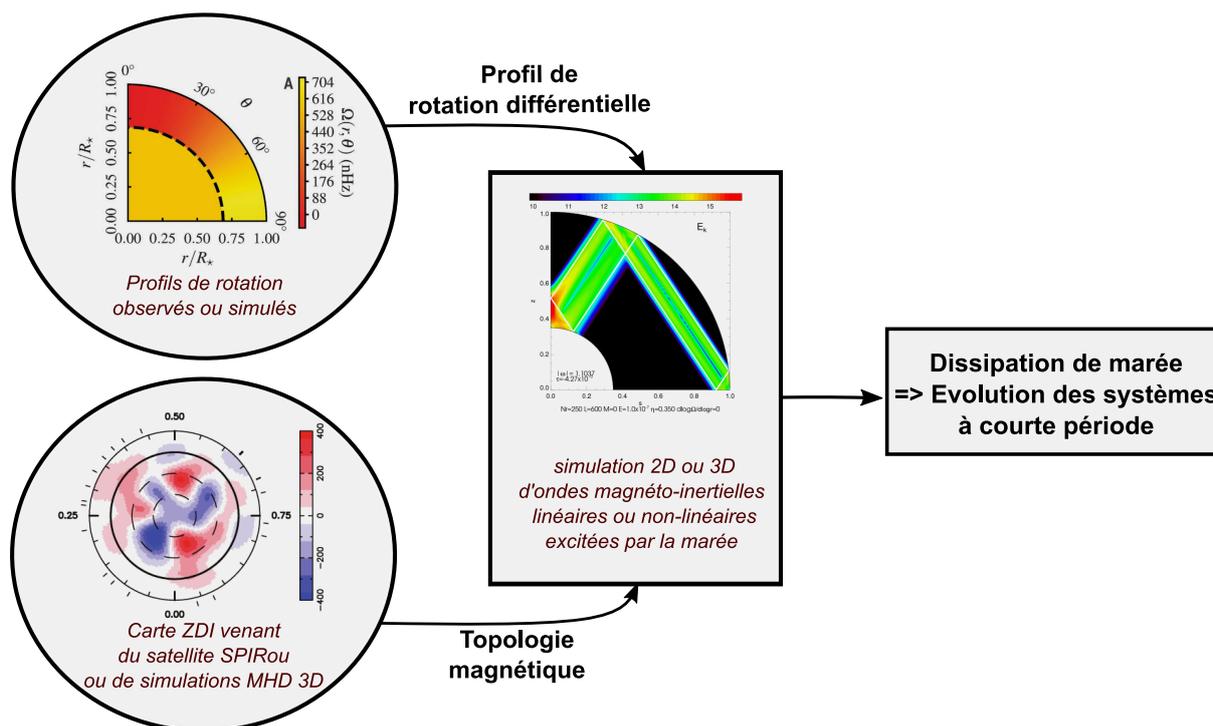


FIGURE 7.1: Schéma de la prise en compte simultanée du magnétisme et de la rotation différentielle pour étudier la réponse dynamique de marée dans les étoiles de faible masse, à l'aide d'un code de simulation haute-résolution linéaire ou non-linéaire.

les étapes de formation et d'évolution pour chaque système exoplanétaire. Les mêmes enjeux se posent dans le contexte des planètes géantes gazeuses de notre système solaire et de leurs nombreux satellites, avec la moisson de résultats des satellites Cassini et Juno.

Une stratégie serait d'utiliser des topologies et des amplitudes réalistes de champs magnétiques de grande échelle. Pour cela, il est possible de se baser sur les cartes de champ magnétique obtenues par la technique ZDI (par exemple celles issues des nouveaux résultats du spectropolarimètre SPIRou) ou via des simulations numériques MHD tridimensionnelles (p.e. Brun et al., 2017). L'avantage de l'utilisation de cartes magnétiques est que la structure et l'intensité du champ magnétique de l'étoile sont exprimées sur la base des harmoniques sphériques (voir par exemple Donati et al., 2006), la même base étant utilisée dans le code LSB, ce qui facilitera la mise en œuvre des topologies magnétiques dans le code numérique. Simultanément, je pourrais prendre en compte une rotation non uniforme dans ces nouveaux modèles, conforme aux profils de rotation observés ou attendus d'après les simulations numériques (conique avec un profil solaire ou anti-solaire, et cylindrique; p.e. Benomar et al., 2018; Beaudoin et al., 2018, respectivement). Ce potentiel projet, schématisé en figure 7.1, s'inscrit aussi dans l'effort global de modéliser l'évolution des systèmes étoile-planète avec prise en compte simultanée des marées et des interactions magnétiques (Strugarek et al., 2017b, 2019).

7.2.2 Dissipation de marée dans les planètes géantes

Cette approche pourra aussi être appliquée aux planètes géantes gazeuses comme Jupiter et Saturne, avec une approche plus ambitieuse qui serait de créer un modèle à quatre ou cinq zones, en prenant en compte ou non le magnétisme et la rotation différentielle, et inspirée des récents résultats de Juno et Cassini en matière de structure interne (voir Debras & Chabrier, 2019; Militzer et al., 2019). Un code

numérique spectral ou pseudo-spectral de haute résolution serait à nouveau utilisé. Le modèle pourrait comprendre, de la surface au noyau, comme représenté en figure 7.2 :

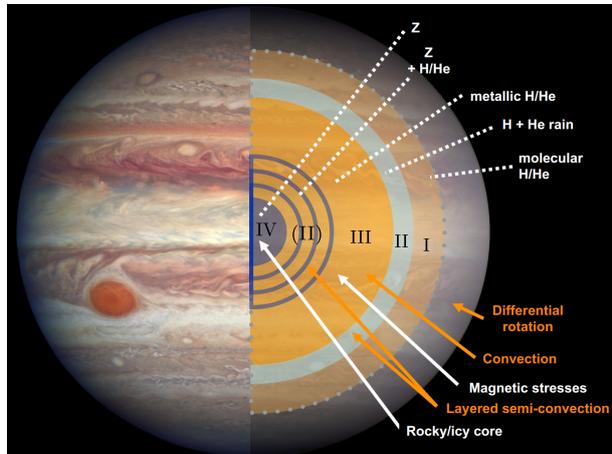


FIGURE 7.2: Vision de l'intérieur de Jupiter issue des résultats obtenus par la mission spatiale Juno.

- I - une enveloppe externe convective soumise à une rotation différentielle cylindrique, représentant la haute atmosphère de planètes géantes gazeuses dans laquelle se développent des vents zonaux ;
- II - éventuellement une région semi-convective caractérisée par l'alternance de zones stablement stratifiées et convectives, et incluse dans le code grâce à un "escalier" en densité comme dans [André et al. \(2019\)](#) ;
- III - une zone convective interne magnétisée où l'effet dynamo est attendu. Des topologies réalistes simples comme la combinaison des géométries dipolaire et quadripolaire peuvent être calculées ([Gastine et al., 2014](#)) ;
- IV - un noyau solide soumis à la dissipation en utilisant le modèle viscoélastique de Maxwell comme dans [Remus et al. \(2012b\)](#), [Storch & Lai \(2015\)](#) et [Lainey et al. \(2017\)](#).

Un tel modèle, si il est réalisé, pourra permettre d'estimer la dissipation totale de marée afin de la comparer aux résultats observationnels ([Lainey et al., 2009, 2012](#)). Cela permettrait ainsi d'avoir une vision cohérente de la structure interne de ces planètes géantes et de la formation et de l'évolution de leur système de satellites.

Tous ces efforts contribueront activement à l'établissement d'une modélisation ab-initio de l'évolution des systèmes étoile-planète ou planète-satellite en support des instruments au sol et des missions spatiales en cours et à venir, précédemment cités.

Durant cette thèse, j'ai été impliquée dans deux projets scientifiques connexes à mon sujet de thèse, du fait de mon expertise en dynamique des fluides astrophysiques.

A.1 Excitation stochastique des ondes gravito-inertielles

En premier lieu, j'ai collaboré avec le Dr. Kyle Augustson (chercheur post-doc au Département d'Astrophysique) sur la problématique de l'excitation stochastique par la convection des ondes gravito-inertielles dans les intérieurs stellaires. Dans ce projet, j'ai fourni le calcul du nombre de Rossby convectif en fonction de la masse et de l'âge des étoiles de faible masse. Ceci permet de prédire pour quels stades évolutifs stellaires l'action de l'accélération de Coriolis sur la convection turbulente et l'excitation des ondes gravito-inertielles doit être prise en compte. Sans surprise, c'est pour les stades jeunes de l'évolution des étoiles de faible masse que cette action se révélera importante. Ce travail fait l'objet d'un article soumis dans *Astrophysical Journal* en cours de révision dont nous rapportons ci-après la première page.

A.2 Formation et évolution des champs magnétiques fossiles

En second lieu, j'ai collaboré avec Lisa Bugnet (Doctorante au Département d'Astrophysique) pour établir une compréhension de la formation et de la dissipation des champs fossiles dans les régions radiatives des étoiles de faible masse. Nous calculons ainsi, en utilisant mes travaux publiés dans Astoul et al. (2019), l'amplitude plausible des champs magnétiques aux interfaces entre zones convective et radiative, où les champs générés par la dynamo relaxent sous forme de champs fossiles lorsqu'une couche convective devient stablement stratifiée le long de l'évolution des étoiles. Nous évaluons alors le temps de relaxation de ces champs et nous démontrons qu'ils se forment sur des temps très courts par rapport aux temps caractéristiques d'évolution des étoiles considérées. Ensuite, nous démontrons que leur temps de diffusion Ohmique est très long par rapport au temps de vie des étoiles. Tout ceci démontre donc la vraisemblance de la présence d'un champ magnétique fossile initial dans les régions radiatives des étoiles de faible masse. Ce travail fait l'objet d'un article en cours de rédaction pour la revue *Astronomy & Astrophysics* qui sera soumis dans le courant du mois de septembre.

A model of rotating convection in stellar and planetary interiors: II - gravito-inertial wave generation

K. C. AUGUSTSON,¹ S. MATHIS,¹ AND A. ASTOUL¹

¹AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

ABSTRACT

Gravito-inertial waves are excited at the interface of convective and radiative regions and by the Reynolds stresses in the bulk of the convection zones of rotating stars and planets. Such waves have notable asteroseismic signatures in the frequency spectra of rotating stars, particularly among rapidly rotating early-type stars, which provides a means of probing their internal structure and dynamics. They can also transport angular momentum, chemical species, and energy from the excitation region to where they dissipate in radiative regions. To estimate the excitation and convective parameter dependence of the amplitude of those waves, a monomodal model for stellar and planetary convection as described in Paper I is employed, which provides the magnitude of the rms convective velocity as a function of rotation rate. With this convection model, two channels for wave driving are considered: excitation at a boundary between convectively stable and unstable regions and excitation due to Reynolds-stresses. Parameter regimes are found where the sub-inertial waves may carry a significant energy flux, depending upon the convective Rossby number, the interface stiffness, and the wave frequency. The super-inertial waves can also be enhanced, but only for convective Rossby numbers near unity. Interfacially excited waves have a peak energy flux near the lower cutoff frequency when the convective Rossby number of the flows that excite them are below a critical Rossby number that depends upon the stiffness of the interface, whereas that flux decreases when the convective Rossby number is larger than this critical Rossby number.

Keywords: Convection, Instabilities, Turbulence, Waves – Stars: Evolution, Rotation

1. INTRODUCTION

Gravito-inertial waves (hereafter GIWs) are low-frequency internal gravity waves (hereafter IGWs) that propagate in the stably stratified regions of rotating stars and planets (Dintrans & Rieutord 2000). They propagate under the simultaneous restoring action of the buoyancy and Coriolis forces. Such waves are currently detected at the surface of rapidly rotating intermediate-mass and massive stars thanks to high-precision asteroseismology (e.g., Neiner et al. 2012; Moravveji et al. 2016; Van Reeth et al. 2018; Christophe et al. 2018; Aerts et al. 2018, 2019, and references therein). Moreover, GIWs and IGWs have been detected through multiple observational techniques in the atmosphere, interior, and oceans of Earth (e.g., Melchior & Ducarme 1986; Gerkema et al. 2008; Gubenko & Kirillovich 2018; Maksimova 2018), and the atmospheres of Mars (e.g., Gubenko et al. 2015), Jupiter (e.g., Young et al. 1997; Fletcher et al. 2018), Titan (e.g., Hinson & Tyler 1983), and Venus (e.g., Tellmann et al. 2012; Ando et al. 2018). In intermediate-mass and massive stars, GIWs

and IGWs constitute a powerful probe of the chemical stratification and the radial differential rotation at the boundary between the convective core and the radiative envelope (e.g., Van Reeth et al. 2016; Ouazzani et al. 2017; Van Reeth et al. 2018; Christophe et al. 2018; Li et al. 2019). While propagating in the convectively stable zones of stars and planets, they are able to transport angular momentum, energy, and chemicals to the regions where they dissipate through thermal diffusion (e.g., Schatzman 1993; Zahn et al. 1997; Mathis et al. 2008; Mathis 2009), co-rotation resonances (e.g., Goldreich & Kumar 1990; Alvan et al. 2013), and non-linear wave breaking (e.g., Rogers et al. 2013; Rogers & McElwaine 2017). Thus, GIWs, alongside magnetic fields, provide a possible explanation for the weak radial differential rotation revealed by space-based helioseismology and asteroseismology observations of stellar radiative zones across the Hertzsprung-Russel diagram (e.g., García et al. 2007; Beck et al. 2012; Deheuvels et al. 2012; Mosser et al. 2012; Deheuvels et al. 2014; Kurtz et al. 2014; Benomar et al. 2015; Saio et al. 2015; Murphy et al. 2016; Spada et al. 2016; Van Reeth et al. 2016; Aerts et al. 2017; Fossat et al. 2017; Gehan et al. 2018). Indeed, IGWs have been shown to be potentially efficient at angular momentum redistribution in the radiative core of the Sun (e.g., Talon & Charbonnel

B.1 Obtention de l'équation de Poincaré dans un milieu stratifié, cisailé, visqueux

Dans cette annexe, on dérive l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la vitesse latitudinale v d'ondes libres dans un milieu stratifié, cisailé latitudinalement, et avec une force de friction $-\sigma_f \Delta \mathbf{u}$. Des solutions modales suivant les directions x et z ont été choisies pour les quantités perturbées, et injectées dans l'équation de continuité, du moment, et de la chaleur. Le système à résoudre est le suivant :

$$ik_x u + v' + ik_z w = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$-isu + (U' - f)v + \tilde{f}w = -ik_x p, \quad (\text{B.2})$$

$$-isv + fu = -p', \quad (\text{B.3})$$

$$\left(-is + i\frac{N^2}{\sigma}\right)w - \tilde{f}u = -ik_z p + i\frac{\tilde{f}U'}{\sigma}v, \quad (\text{B.4})$$

qui vient du système d'équations linéarisées et adimensionnées 6.13 à 6.17, et où ρ a été exprimée à l'aide de l'équation de la chaleur et injectée dans l'équation du moment Eq. (6.17). À partir de ce système d'équations, on peut exprimer u et w à partir de v et v' :

$$\left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right)u = \left[\frac{k_x k_z \tilde{f} U'}{\sigma} - ik_z^2 (U' - f)\right]v + \left(k_z \tilde{f} + ik_x s - \frac{ik_x N^2}{\sigma}\right)v', \quad (\text{B.5})$$

$$\left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right)w = \left[ik_x k_z (U' - f) - \frac{k_x^2 \tilde{f} U'}{\sigma}\right]v + (ik_z s - k_x \tilde{f})v'. \quad (\text{B.6})$$

Pour obtenir ces relations, on a effectué les combinaisons linéaires suivantes :

- $-i\partial_z [(\nabla \wedge (\text{N.S.})) \cdot \mathbf{e}_y]$ pour obtenir (B.5),

- $i\partial_x [(\nabla \wedge (\text{N.S.})) \cdot \mathbf{e}_y]$ pour obtenir (B.6),

avec (N.S.) l'équation vectorielle du moment ((B.2), (B.3), (B.4)), et où l'on a utilisé l'équation de continuité Eq. (B.1). Pour trouver une expression qui relie p avec v et v' , on effectue simplement

- $\left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right) \times \frac{(\text{B.2})}{-ik_x}$,

équation dans laquelle on injecte (B.5) et (B.6) :

$$\begin{aligned} \left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right) p &= \left\{ k_z \tilde{f} \left[\frac{sU'}{\sigma} - (U' - f) \right] + ik_x \left[s(U' - f) - \frac{\tilde{f}^2 U' + N^2(U' - f)}{\sigma} \right] \right\} v \\ &+ i \left[s \left(s - \frac{N^2}{\sigma} \right) - \tilde{f}^2 \right] \frac{dv}{dy}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

On dérive ensuite (B.7) par rapport à y :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[\left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right) p \right] &= \left\{ k_z \tilde{f} \left[\frac{k_x U'}{\sigma} \left(\frac{sU'}{\sigma} - U' \right) + U'' \left(\frac{s}{\sigma} - 1 \right) \right] + ik_x \left[U'' \left(s - \frac{N^2 + \tilde{f}^2}{\sigma} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. k_x U' \left(f - U' - \frac{\tilde{f}^2 U' + N^2(U' - f)}{\sigma^2} \right) \right] \right\} v \\ &+ \left\{ k_z \tilde{f} \left(\frac{sU'}{\sigma} - U' + f \right) - ik_x \left[s(f + U') + \frac{\tilde{f}^2 U' - N^2 f}{\sigma} + \frac{sN^2 U'}{\sigma^2} \right] \right\} v' \\ &+ i \left\{ s \left(s - \frac{N^2}{\sigma} \right) - \tilde{f}^2 \right\} v''. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

On injecte alors les équations (B.5) à (B.8) dans l'équation du moment Eq. (B.3) en utilisant le fait que

$$- \left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right) p' = - \frac{d}{dy} \left[\left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right) p \right] - k_x U' \left(k_{\perp}^2 + \frac{k_x^2 N^2}{\sigma^2} \right). \quad (\text{B.9})$$

Ainsi, $-i \left(k_{\perp}^2 s - \frac{k_x^2 N^2}{\sigma}\right)$ (B.3) donne l'équation différentielle du second ordre pour la vitesse latitudinale v dans un milieu stratifié latitudinalement et verticalement, et cisailé latitudinalement :

$$Av'' + Bv' + Cv = 0, \quad (\text{B.10})$$

où les coefficients s'écrivent :

$$\begin{aligned} A &= s^2 - \tilde{f}^2 - \frac{N^2 s}{\sigma}, \\ B &= \frac{Q'}{Q} \left(\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{s}{\sigma} N^2 + \tilde{f}^2 \right) - ik_z \tilde{f} \left[2f + U' \left(\frac{s}{\sigma} - 1 \right) \right], \\ C &= - \frac{s}{\sigma} Q - ik_x k_z \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} \left[f + U' \left(\frac{s}{\sigma} - 1 \right) \right] + k_z^2 f (f - U') + ik_x^2 \frac{U'}{\sigma^2} \left[-\tilde{f}^2 U' + (f - U') (N^2 + \sigma^2) \right] \\ &- ik_x \frac{U'}{\sigma Q} \left[k_{\perp}^2 \sigma^2 + k_x^2 N^2 \right] \left\{ \tilde{f} k_z \left[\frac{U'}{\sigma} \left(\frac{s}{\sigma} - 1 \right) + f \right] - ik_x \left[\tilde{f}^2 \frac{U'}{\sigma} + (U' - f) \left(\frac{N^2}{\sigma} - s \right) \right] \right\} \\ &+ U'' \left[\frac{k_x}{\sigma} \left(s\sigma - \tilde{f}^2 - N^2 \right) - ik_z \tilde{f} \left(\frac{s}{\sigma} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Pour plus de lisibilité, on a introduit la quantité $Q = k_{\perp}^2 s \sigma - k_x^2 N^2$. Notons enfin que, sans terme de friction, i.e. $s = \sigma$, les coefficients se simplifient grandement :

$$\begin{aligned}
 A &= \sigma^2 - \tilde{f}^2 - N^2 \\
 B &= \frac{Q'}{Q} \left(\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} N^2 + \tilde{f}^2 \right) - 2ik_z f \tilde{f} \\
 C &= -Q - ik_x k_z f \tilde{f} \frac{U'}{\sigma} + k_z^2 f (f - U') + ik_x^2 \frac{U'}{\sigma^2} \left[-\tilde{f}^2 U' + (f - U') (N^2 + \sigma^2) \right] \\
 &\quad - ik_x \frac{U' [k_{\perp}^2 \sigma^2 + k_x^2 N^2]}{\sigma^2 Q} \left\{ \sigma f \tilde{f} k_z + ik_x [U' A + f (N^2 - \sigma^2)] \right\} + U'' \frac{A k_x}{\sigma}.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions
- Acheson, D. J. 1972, Journal of Fluid Mechanics, 53, 401
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, Asteroseismology
- Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, ARA&A, 57, 35
- Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, ApJ, 757, 18
- Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, A&A, 553, A86
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, A&A, 587, A105
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., et al. 2019, arXiv e-prints, arXiv :1905.08516, A&A, in press, 10.1051/004-6361/201935160
- André, Q., Barker, A. J., & Mathis, S. 2017a, A&A, 605, A117
- André, Q., Barker, A. J., & Mathis, S. 2017b, A&A, 605, A117
- André, Q., Mathis, S., & Barker, A. J. 2019, A&A, 626, A82
- Andrews, D. G. & McIntyre, M. E. 1978, Journal of Fluid Mechanics, 89, 647
- Antia, H. M., Chitre, S. M., & Thompson, M. J. 2000, A&A, 360, 335
- Arras, P. & Socrates, A. 2010, ApJ, 714, 1
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 47, 481
- Astoul, A., Mathis, S., Baruteau, C., et al. 2019, A&A, 631, A111
- Auclair-Desrotour, P., Laskar, J., & Mathis, S. 2017, A&A, 603, A107
- Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, A&A, 561, L7
- Auclair-Desrotour, P., Leconte, J., Bolmont, E., & Mathis, S. 2019, A&A, 629, A132
- Auclair-Desrotour, P., Mathis, S., Laskar, J., & Leconte, J. 2018, A&A, 615, A23
- Auclair Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, A&A, 581, A118
- Augustson, K. C., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2012, ApJ, 756, 169
- Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2016, ApJ, 829, 92
- Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2019, ApJ, 876, 83
- Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2009, in IAU Symposium, Vol. 253, Transiting Planets, ed. F. Pont, D. Sasselov, & M. J. Holman, 71–81

- Baker, T. F. 1984, *Science Progress* (1933-), 69, 197
- Ballot, J., Brun, A. S., & Turck-Chièze, S. 2007, *ApJ*, 669, 1190
- Baraffe, I., Chabrier, G., Barman, T. S., et al. 2005, *A&A*, 436, L47
- Barker, A. & Ogilvie, G. I. 2010, in *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting #41*, AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting, 4.06
- Barker, A. J. 2011, *MNRAS*, 414, 1365
- Barker, A. J. 2016, *MNRAS*, 459, 939
- Barker, A. J., Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2016, *MNRAS*, 459, 924
- Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, *ApJ*, 791, 13
- Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2013, *MNRAS*, 435, 3614
- Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2014, *MNRAS*, 437, 305
- Barker, A. J. & Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 395, 2268
- Barnes, J. R., Collier Cameron, A., Donati, J. F., et al. 2005, *MNRAS*, 357, L1
- Barnes, J. R., Jeffers, S. V., Haswell, C. A., et al. 2017, *MNRAS*, 471, 811
- Barnes, S. A. 2003, *ApJ*, 586, 464
- Baruteau, C., Bai, X., Mordasini, C., & Mollière, P. 2016, *Space Sci. Rev.*, 205, 77
- Baruteau, C., Crida, A., Paardekooper, S. J., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 667
- Baruteau, C. & Masset, F. 2008, *ApJ*, 672, 1054
- Baruteau, C. & Rieutord, M. 2013, *Journal of Fluid Mechanics*, 719, 47
- Bate, M. R., Tricco, T. S., & Price, D. J. 2014, *MNRAS*, 437, 77
- Batygin, K., Bodenheimer, P. H., & Laughlin, G. P. 2016, *ApJ*, 829, 114
- Bazot, M., Benomar, O., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2019, *A&A*, 623, A125
- Beaudoin, P., Strugarek, A., & Charbonneau, P. 2018, *ApJ*, 859, 61
- Beck, P. G., Mathis, S., Gallet, F., et al. 2018, *MNRAS*, 479, L123
- Bell, C. P. M., Naylor, T., Mayne, N. J., Jeffries, R. D., & Littlefair, S. P. 2013, *MNRAS*, 434, 806
- Bell, T. J. & Cowan, N. B. 2018, *ApJ*, 857, L20
- Benbakoura, M., Réville, V., Brun, A. S., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2019, *A&A*, 621, A124
- Benomar, O., Bazot, M., Nielsen, M. B., et al. 2018, *Science*, 361, 1231
- Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, *MNRAS*, 452, 2654
- Bernoulli, D. 1740, *Traité sur le flux et le reflux de la mer*. In : *Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1740*. Martin, Coignard et Guérin, Paris, pp. 55–191

- Billant, P. & Le Dizès, S. 2009, *Physics of Fluids*, 21, 106602
- Bolmont, E., Gallet, F., Mathis, S., et al. 2017, *A&A*, 604, A113
- Bolmont, E. & Mathis, S. 2016, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 126, 275
- Bonfils, X., Delfosse, X., Udry, S., et al. 2013, *A&A*, 549, A109
- Booker, J. R. & Bretherton, F. P. 1967, *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 513
- Boro Saikia, S., Jeffers, S. V., Morin, J., et al. 2016, *A&A*, 594, A29
- Braginskii, S. I. 1965, *Reviews of Plasma Physics*, 1, 205
- Braginskiy, S. I. 1967, *Geomagnetism and Aeronomy*, 7, 851
- Brandenburg, A. & Subramanian, K. 2005, *Phys. Rep.*, 417, 1
- Braviner, H. J. & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, 441, 2321
- Braviner, H. J. & Ogilvie, G. I. 2015, *MNRAS*, 447, 1141
- Bretherton, F. P. 1966, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 92, 325
- Bretherton, F. P. 1969, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 95, 213
- Bretherton, F. P. & Garrett, C. J. R. 1968, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 302, 529
- Broad, A. S. 1995, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 121, 1891
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2008, *ApJ*, 689, 1354
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2010, *ApJ*, 711, 424
- Browning, M. K. 2008, *ApJ*, 676, 1262
- Browning, M. K., Miesch, M. S., Brun, A. S., & Toomre, J. 2006, *ApJ*, 648, L157
- Brun, A. S. & Browning, M. K. 2017, *Living Reviews in Solar Physics*, 14, 4
- Brun, A. S., García, R. A., Houdek, G., Nandy, D., & Pinsonneault, M. 2015, *Space Sci. Rev.*, 196, 303
- Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2011, *ApJ*, 742, 79
- Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, *ApJ*, 836, 192
- Brun, A. S. & Toomre, J. 2002, *ApJ*, 570, 865
- Bryan, G. H. 1889, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 180, 187
- Butler, R. P., Vogt, S. S., Laughlin, G., et al. 2017, *AJ*, 153, 208
- Cao, H. & Stevenson, D. J. 2017, *Icarus*, 296, 59
- Cartan, E. 1922, *Bull. Sci. Math.*, 46, 317
- Cartwright, D. E. 1999, *Tides : a scientific history*
- Cébron, D., Le Bars, M., Le Gal, P., et al. 2013, *Icarus*, 226, 1642
- Chabrier, G. & Baraffe, I. 2007, *ApJ*, 661, L81

- Charbonneau, P. 2010, *Living Reviews in Solar Physics*, 7, 3
- Charbonneau, P. 2013, *Solar and Stellar Dynamos : Saas-Fee Advanced Course 39 Swiss Society for Astrophysics and Astronomy, Saas-Fee Advanced Courses, Volume 39*. ISBN 978-3-642-32092-7. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, 39
- Charbonneau, P. 2020, *Living Reviews in Solar Physics*, 17, 4
- Charbonnel, C., Decressin, T., Lagarde, N., et al. 2017, *A&A*, 605, A102
- Charnoz, S., Crida, A., Castillo-Rogez, J. C., et al. 2011, *Icarus*, 216, 535
- Chernov, S. V., Papaloizou, J. C. B., & Ivanov, P. B. 2013, *MNRAS*, 434, 1079
- Christensen, U. R. 2010, *Space Sci. Rev.*, 152, 565
- Christensen, U. R., Holzwarth, V., & Reiners, A. 2009, *Nature*, 457, 167
- Clune, T., Elliott, J., Miesch, M., Toomre, J., & Glatzmaier, G. 1999, *Parallel Computing*, 25, 361
- Connerney, J. E. P., Kotsiaros, S., Oliverson, R. J., et al. 2018, *Geophysical Research Letters*, 45, 2590
- Couvidat, S., García, R. A., Turck-Chièze, S., et al. 2003, *ApJ*, 597, L77
- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367
- Crida, A. & Batygin, K. 2014, *A&A*, 567, A42
- Crida, A. & Charnoz, S. 2012, *Science*, 338, 1196
- Damiani, C. & Mathis, S. 2018, *A&A*, 618, A90
- Davidson, P. A. 2013, *Geophysical Journal International*, 195, 67
- Davidson, P. A. 2013, *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press)
- Debras, F. & Chabrier, G. 2019, *ApJ*, 872, 100
- Decressin, T., Mathis, S., Palacios, A., et al. 2009, *A&A*, 495, 271
- Dermott, S. F. 1979, *Icarus*, 37, 310
- DeRosa, M. L., Brun, A. S., & Hoeksema, J. T. 2012, *ApJ*, 757, 96
- Dickey, J. O., Bender, P. L., Faller, J. E., et al. 1994, *Science*, 265, 482
- Dintrans, B. & Rieutord, M. 2000, *Astronomy and Astrophysics*, 354, 86
- Donahue, R. A., Saar, S. H., & Baliunas, S. L. 1996, *ApJ*, 466, 384
- Donati, J. F. 2013, in *EAS Publications Series, Vol. 62, EAS Publications Series*, ed. P. Hennebelle & C. Charbonnel, 289–305
- Donati, J. F., Howarth, I. D., Jardine, M. M., et al. 2006, *MNRAS*, 370, 629
- Donati, J.-F., Jardine, M. M., Gregory, S. G., et al. 2007, *MNRAS*, 380, 1297
- Donati, J. F., Jardine, M. M., Gregory, S. G., et al. 2008a, *MNRAS*, 386, 1234

- Donati, J.-F., Kouach, D., Lacombe, M., et al. 2018, SPIRou : A NIR Spectropolarimeter/High-Precision Velocimeter for the CFHT, 107
- Donati, J. F. & Landstreet, J. D. 2009, ARA&A, 47, 333
- Donati, J. F., Morin, J., Petit, P., et al. 2008b, MNRAS, 390, 545
- Donati, J. F., Moutou, C., Malo, L., et al. 2016, Nature, 534, 662
- Duguid, C. D., Barker, A. J., & Jones, C. A. 2020, MNRAS, 491, 923
- Eckart, C. 1960, Physics of Fluids, 3, 421
- Efroimsky, M. & Lainey, V. 2007, Journal of Geophysical Research (Planets), 112, E12003
- Egbert, G. D. & Ray, R. D. 2001, J. Geophys. Res., 106, 22,475
- Egbert, G. D. & Ray, R. D. 2013, in ESA Special Publication, Vol. 710, 20 Years of Progress in Radar Altimetry, 9
- Eggleton, P. P., Kiseleva, L. G., & Hut, P. 1998, ApJ, 499, 853
- Eliassen, A. & Palm, E. 1961, On the Transfer of Energy in Stationary Mountain Waves, (Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo. Geofysiske publikasjoner) (I kommisjon hos Aschehoug)
- Emeriau-Viard, C. & Brun, A. S. 2017, ApJ, 846, 8
- Essick, R. & Weinberg, N. N. 2016, ApJ, 816, 18
- Euler, L. 1740, Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris. In : Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1740. Martin, Coignard et Guérin, Paris, pp. 235–350
- Fabrycky, D. & Tremaine, S. 2007, ApJ, 669, 1298
- Fares, R., Moutou, C., Donati, J. F., et al. 2013, MNRAS, 435, 1451
- Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, MNRAS, 439, 845
- Fielding, D. B., McKee, C. F., Socrates, A., Cunningham, A. J., & Klein, R. I. 2015, MNRAS, 450, 3306
- Finlay, C. C. 2008, in Les Houches, Vol. 88, Dynamos, ed. P. Cardin & L. Cugliandolo (Elsevier), 403 – 450
- Folsom, C. P., Bouvier, J., Petit, P., et al. 2018, MNRAS, 474, 4956
- Folsom, C. P., Petit, P., Bouvier, J., et al. 2016, MNRAS, 457, 580
- Ford, E. B. & Rasio, F. A. 2006, ApJ, 638, L45
- Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, A&A, 604, A40
- Fuller, J., Luan, J., & Quataert, E. 2016, MNRAS, 458, 3867
- Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, MNRAS, 485, 3661
- Gaidos, E., Kitzmann, D., & Heng, K. 2017, MNRAS, 468, 3418
- Galanti, E., Kaspi, Y., Miguel, Y., et al. 2019, Geophys. Res. Lett., 46, 616
- Gallet, F., Bolmont, E., Bouvier, J., Mathis, S., & Charbonnel, C. 2018, A&A, 619, A80

- Gallet, F., Bolmont, E., Mathis, S., Charbonnel, C., & Amard, L. 2017, *A&A*, 604, A112
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2013, *A&A*, 556, A36
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2015, *A&A*, 577, A98
- Gallet, F. & Delorme, P. 2019, *A&A*, 626, A120
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
- Gastine, T., Wicht, J., & Aurnou, J. M. 2013, *Icarus*, 225, 156
- Gastine, T., Wicht, J., Duarte, L. D. V., Heimpel, M., & Becker, A. 2014, *Geophys. Res. Lett.*, 41, 5410
- Gerkema, T., Zimmerman, J. T. F., Maas, L. R. M., & van Haren, H. 2008, *Reviews of Geophysics*, 46, RG2004
- Gilliland, R. L. 1986, *ApJ*, 300, 339
- Glatzmaier, G. A. 2013, *Introduction to Modelling Convection in Planets and Stars*
- Goldreich, P. & Keeley, D. A. 1977, *ApJ*, 211, 934
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1977, *Icarus*, 30, 301
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989a, *ApJ*, 342, 1079
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989b, *ApJ*, 342, 1075
- Goldreich, P. & Soter, S. 1966, *Icarus*, 5, 375
- Goldreich, P. & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, 233, 857
- Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Morbidelli, A. 2005, *Nature*, 435, 466
- Goodman, J. & Dickson, E. S. 1998, *ApJ*, 507, 938
- Goodman, J. & Lackner, C. 2009, *ApJ*, 696, 2054
- Gough, D. O. & Thompson, M. J. 1990, *MNRAS*, 242, 25
- Greenberg, R. 2009, *ApJ*, 698, L42
- Greene, T. P., Line, M. R., Montero, C., et al. 2016, *ApJ*, 817, 17
- Gregory, S. G., Donati, J. F., Morin, J., et al. 2012, *ApJ*, 755, 97
- Gregory, S. G., Jardine, M., Gray, C. G., & Donati, J. F. 2010, *Reports on Progress in Physics*, 73, 126901
- Grimshaw, R. 1979, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 14, 303
- Grimshaw, R. H. J. 1975a, *Tellus Series A*, 27, 351
- Grimshaw, R. H. J. 1975b, *Journal of Fluid Mechanics*, 70, 287
- Guenel, M. 2016, *Theses, Université Paris-Saclay*
- Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016a, *A&A*, 589, A22
- Guenel, M., Mathis, S., Baruteau, C., & Rieutord, M. 2016b, *ArXiv e-prints*, arXiv :1612.05071

- Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, *A&A*, 566, L9
- Guillot, T. 1999, *Science*, 286, 72
- Guillot, T., Chabrier, G., Morel, P., & Gautier, D. 1994, *Icarus*, 112, 354
- Guillot, T., Lin, D. N. C., Morel, P., Havel, M., & Parmentier, V. 2014, in *EAS Publications Series*, Vol. 65, *EAS Publications Series*, 327–336
- Guillot, T., Miguel, Y., Militzer, B., et al. 2018, *Nature*, 555, 227
- Hadamard, J. 1902, *Princeton University Bulletin*, 13, 49
- Han, E., Wang, S. X., Wright, J. T., et al. 2014, *PASP*, 126, 827
- Hanasoge, S. M., Duvall, Thomas L., J., & DeRosa, M. L. 2010, *ApJ*, 712, L98
- Hanasoge, S. M., Duvall, T. L., & Sreenivasan, K. R. 2012, *Proceedings of the National Academy of Science*, 109, 11928
- Hansen, B. M. S. 2010, *ApJ*, 723, 285
- Hansen, B. M. S. 2012, *ApJ*, 757, 6
- Haswell, C. A., Fossati, L., Ayres, T., et al. 2012, *The Astrophysical Journal*, 760, 79
- Hellier, C., Anderson, D. R., Collier Cameron, A., et al. 2009, *Nature*, 460, 1098
- Hines, C. O. & Reddy, C. A. 1967, *J. Geophys. Res.*, 72, 1015
- Hoff, M., Harlander, U., & Egbers, C. 2016, *Journal of Fluid Mechanics*, 789, 589
- Hollerbach, R. & Kerswell, R. R. 1995, *Journal of Fluid Mechanics*, 298, 327
- Hotta, H., Rempel, M., & Yokoyama, T. 2016, *Science*, 351, 1427
- Hotta, H. & Yokoyama, T. 2011, *ApJ*, 740, 12
- Huber, D., Chaplin, W. J., Chontos, A., et al. 2019, *AJ*, 157, 245
- Hut, P. 1980, *A&A*, 92, 167
- Hut, P. 1981, *A&A*, 99, 126
- Ivanov, P. B. & Papaloizou, J. C. B. 2004, *MNRAS*, 353, 1161
- Ivanov, P. B., Papaloizou, J. C. B., & Chernov, S. V. 2013, *MNRAS*, 432, 2339
- Jeffreys, H. 1961, *MNRAS*, 122, 339
- Jentzsch, G. 1997, *Earth tides and ocean tidal loading*, ed. H. Wilhelm, W. Zürn, & H.-G. Wenzel (Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg), 145–171
- Jermyn, A. S., Tayar, J., & Fuller, J. 2020, *MNRAS*, 491, 690
- Johns-Krull, C. M. 2007, *ApJ*, 664, 975
- Jones, W. L. 1967, 30, 439
- Jones, W. L. 1968, *Journal of Fluid Mechanics*, 34, 609

- Jouve, L. & Brun, A. S. 2007, *A&A*, 474, 239
- Jouve, L. & Ogilvie, G. I. 2014, *Journal of Fluid Mechanics*, 745, 223
- Jurić, M. & Tremaine, S. 2008, *ApJ*, 686, 603
- Käpylä, P. J., Käpylä, M. J., Olsper, N., Warnecke, J., & Brandenburg, A. 2017, *A&A*, 599, A4
- Kaspi, Y., Galanti, E., Hubbard, W. B., et al. 2018, *Nature*, 555, 223
- Kaspi, Y., Guillot, T., Galanti, E., et al. 2017, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 5960
- Kaula, W. M. 1961, *Geophysical Journal*, 5, 104
- Kaula, W. M. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661
- Kerswell, R. R. 1995, *Journal of Fluid Mechanics*, 298, 311
- Kerswell, R. R. 2002, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34, 83
- Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1994, *Stellar Structure and Evolution*
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, *Stellar Structure and Evolution*
- Knobloch, E. 1984, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 29, 105
- Koch, S., Harlander, U., Egbers, C., & Hollerbach, R. 2013, *Fluid Dynamics Research*, 45, 035504
- Kochukhov, O., Petit, P., Strassmeier, K. G., et al. 2017, *Astronomische Nachrichten*, 338, 428
- Kopparapu, R. K. 2013, *ApJ*, 767, L8
- Lai, D. 2012, *MNRAS*, 423, 486
- Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, *Nature*, 459, 957
- Lainey, V., Casajus, L. G., Fuller, J., et al. 2020, *Nature Astronomy*, TBD, TBD
- Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2017, *Icarus*, 281, 286
- Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, *ApJ*, 752, 14
- Landin, N. R., Mendes, L. T. S., & Vaz, L. P. R. 2010, *A&A*, 510, A46
- Lanza, A. F. & Shkolnik, E. L. 2014, *MNRAS*, 443, 1451
- Latter, H. N. & Balbus, S. A. 2009, *MNRAS*, 399, 1058
- Laughlin, G. 2018, *Mass-Radius Relations of Giant Planets : The Radius Anomaly and Interior Models*, 1
- Le Bars, M., Cébron, D., & Le Gal, P. 2015, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47, 163
- Le Dizès, S. & Billant, P. 2009, *Physics of Fluids*, 21, 096602
- Le Dizès, S. & Riedinger, X. 2010, *Journal of Fluid Mechanics*, 660, 147
- Lebreton, Y. & Goupil, M. J. 2014, *A&A*, 569, A21
- Leconte, J. & Chabrier, G. 2012, *A&A*, 540, A20
- Lehnert, B. 1954, *ApJ*, 119, 647

- Li, L.-X., Goodman, J., & Narayan, R. 2003, *ApJ*, 593, 980
- Lighthill, M. J. 1969, *Science*, 164, 938
- Lin, D. N. C., Bodenheimer, P., & Richardson, D. C. 1996, *Nature*, 380, 606
- Lin, Y. & Ogilvie, G. I. 2018, *MNRAS*, 474, 1644
- Lindzen, R. S. 1988, *Pure and Applied Geophysics*, 126, 103
- Lindzen, R. S. & Barker, J. W. 1985, *Journal of Fluid Mechanics*, 151, 189
- Lindzen, R. S. & Tung, K. K. 1978, *Journal of Atmospheric Sciences*, 35, 1626
- Love, A. E. H. 1911, *Some Problems of Geodynamics*
- Luan, J., Fuller, J., & Quataert, E. 2018, *MNRAS*, 473, 5002
- MacDonald, G. J. F. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 467
- MacGregor, K. B. & Brenner, M. 1991, *ApJ*, 376, 204
- Maciejewski, G., Niedzielski, A., Villaver, E., Konacki, M., & Pawłaszek, R. K. 2020, *ApJ*, 889, 54
- Maeder, A. & Stahler, S. 2009, *Physics Today*, 62, 52
- Marcy, G. W., Butler, R. P., Williams, E., et al. 1997, *ApJ*, 481, 926
- Mathis, S. 2015, *A&A*, 580, L3
- Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., Gallet, F., & Le Poncin-Lafitte, C. 2016, *A&A*, 592, A33
- Mathis, S. & de Brie, N. 2012, *A&A*, 540, A37
- Mathis, S. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, *A&A*, 497, 889
- Mathis, S., Le Poncin-Lafitte, C., & Remus, F. 2013, *Tides in Planetary Systems*, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, Vol. 861, 255
- Mathis, S. & Prat, V. 2019, *A&A*, 631, A26
- Mathis, S. & Remus, F. 2013, *Tides in Planetary Systems and in Multiple Stars : a Physical Picture*, ed. J.-P. Rozelot & C. E. Neiner, Vol. 857, 111–147
- Matsakos, T. & Königl, A. 2016, *ApJ*, 820, L8
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, 799, L23
- Mayne, N. J. 2010, *MNRAS*, 408, 1409
- Mayor, M. & Queloz, D. 1995, *Nature*, 378, 355
- Mazeh, T., Holczer, T., & Faigler, S. 2016, *A&A*, 589, A75
- Mazeh, T., Perets, H. B., McQuillan, A., & Goldstein, E. S. 2015, *ApJ*, 801, 3
- McKenzie, J. F. 1973, *Journal of Fluid Mechanics*, 58, 709
- McLaughlin, D. B. 1924, *ApJ*, 60, 22
- McQuillan, A., Mazeh, T., & Aigrain, S. 2013, *ApJ*, 775, L11

- Meibom, S. & Mathieu, R. D. 2005, *ApJ*, 620, 970
- Mengel, M. W., Fares, R., Marsden, S. C., et al. 2016, *MNRAS*, 459, 4325
- Messio, L., Morize, C., Rabaud, M., & Moisy, F. 2008, *Experiments in Fluids*, 44, 519
- Mestel, L. & Weiss, N. O. 1987, *MNRAS*, 226, 123
- Meunier, N. & Lagrange, A. M. 2019, *A&A*, 628, A125
- Mignard, F. 1979, *Moon and Planets*, 20, 301
- Mignard, F. 1980, *Moon and Planets*, 23, 185
- Miles, J. W. 1961, *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 496
- Miles, J. W. & Howard, L. N. 1964, *Journal of Fluid Mechanics*, 20, 331
- Militzer, B., Wahl, S., & Hubbard, W. B. 2019, *ApJ*, 879, 78
- Miller, R. L. & Lindzen, R. S. 1988, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 42, 49
- Moore, K. M., Yadav, R. K., Kulowski, L., et al. 2018, *Nature*, 561, 76
- Moore, W. B., Schubert, G., Anderson, J. D., & Spencer, J. R. 2007, *The interior of Io*, ed. R. M. C. Lopes & J. R. Spencer, 89
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. 2005, *Nature*, 435, 462
- Morgenthaler, A., Petit, P., Morin, J., et al. 2011, *Astronomische Nachrichten*, 332, 866
- Morin, J., Donati, J.-F., Petit, P., et al. 2008, *MNRAS*, 390, 567
- Morin, J., Dormy, E., Schrunner, M., & Donati, J. F. 2011, *MNRAS*, 418, L133
- Morse, P. M. & Feshbach, H. 1953, *Methods of theoretical physics*
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2014, *Buoyant Magnetic Loops Generated by Global Convective Dynamo Action*
- Newton, I. 1760, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 1 - 4
- Nielsen, M. B., Schunker, H., Gizon, L., Schou, J., & Ball, W. H. 2017, *A&A*, 603, A6
- North, P. & Zahn, J. P. 2003, *A&A*, 405, 677
- Ogilvie, G. I. 2005, *Journal of Fluid Mechanics*, 543, 19
- Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 396, 794
- Ogilvie, G. I. 2013, *MNRAS*, 429, 613
- Ogilvie, G. I. 2014, *ARA&A*, 52, 171
- Ogilvie, G. I. & Lesur, G. 2012, *MNRAS*, 422, 1975
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, 610, 477
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, 661, 1180
- Palacios, A., Charbonnel, C., Talon, S., & Siess, L. 2006, *A&A*, 453, 261

- Papaloizou, J. C. B. 2007, *A&A*, 463, 775
- Pass, E. K., Cowan, N. B., Cubillos, P. E., & Sklar, J. G. 2019, *MNRAS*, 489, 941
- Patra, K. C., Winn, J. N., Holman, M. J., et al. 2020, *AJ*, 159, 150
- Peale, S. J. 1999, *ARA&A*, 37, 533
- Peale, S. J., Cassen, P., & Reynolds, R. T. 1979, in *Lunar and Planetary Science Conference, Lunar and Planetary Science Conference*, 964–966
- Penev, K., Jackson, B., Spada, F., & Thom, N. 2012, *ApJ*, 751, 96
- Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2007, *ApJ*, 655, 1166
- Perryman, M. 2018, *The Exoplanet Handbook*
- Petit, P., Dintrans, B., Solanki, S. K., et al. 2008, *MNRAS*, 388, 80
- Pillitteri, I., Wolk, S. J., Sciortino, S., & Antoci, V. 2014, *A&A*, 567, A128
- Poirier, J. P. 1982, *Nature*, 299, 683
- Polfliet, R. & Smeyers, P. 1990, *A&A*, 237, 110
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., et al. 1996, *Icarus*, 124, 62
- Prat, V., Mathis, S., Augustson, K., et al. 2018, *A&A*, 615, A106
- Queloz, D., Mayor, M., Udry, S., et al. 2001, *The Messenger*, 105, 1
- Rambaux, N. & Castillo-Rogez, J. 2013, *Tides on Satellites of Giant Planets*, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, Vol. 861, 167
- Rasio, F. A., Tout, C. A., Lubow, S. H., & Livio, M. 1996, *ApJ*, 470, 1187
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *Experimental Astronomy*, 38, 249
- Raymond, S. N. & Morbidelli, A. 2020, *arXiv e-prints*, arXiv :2002.05756
- Rebull, L. M., Wolff, S. C., & Strom, S. E. 2004, *AJ*, 127, 1029
- Reiners, A. 2012, *Living Reviews in Solar Physics*, 9, 1
- Reiners, A. & Basri, G. 2007, *ApJ*, 656, 1121
- Reiners, A., Basri, G., & Browning, M. 2009, *ApJ*, 692, 538
- Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J. P. 2012a, *A&A*, 544, A132
- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J. P., & Lainey, V. 2012b, *A&A*, 541, A165
- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J. P., & Lainey, V. 2015, *A&A*, 573, A23
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2015, *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 1, 014003
- Rieutord, M. 2015, *Fluid Dynamics : An Introduction*
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetaro, L. 2000, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 4277

- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdettaro, L. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 103
- Rieutord, M. & Valdettaro, L. 1997, *Journal of Fluid Mechanics*, 341, 77
- Rieutord, M. & Valdettaro, L. 2018, *Journal of Fluid Mechanics*, 844, 597
- Ringot, O. 1998, PhD thesis, thèse de doctorat dirigée par Schatzman, Évry Terre, océan, espace Paris 7 1998
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, 772, 21
- Rosenthal, A. J. & Lindzen, R. S. 1983, *Journal of Atmospheric Sciences*, 40, 521
- Rossiter, R. A. 1924, *ApJ*, 60, 15
- Rowan, D., Meschiari, S., Laughlin, G., et al. 2016, *ApJ*, 817, 104
- Saar, S. H. 1996, in *IAU Colloq. 153 : Magnetodynamic Phenomena in the Solar Atmosphere - Prototypes of Stellar Magnetic Activity*, ed. Y. Uchida, T. Kosugi, & H. S. Hudson, 367–374
- Sadeghi Ardestani, L., Guillot, T., & Morel, P. 2017, *MNRAS*, 472, 2590
- Safronov, V. S. & Zvjagina, E. V. 1969, *Icarus*, 10, 109
- Sanchez, S., Fournier, A., & Aubert, J. 2014, *ApJ*, 781, 8
- Savonije, G. J. & Witte, M. G. 2002, *A&A*, 386, 211
- Schmid, P., Henningson, D., & Jankowski, D. 2002, *Applied Mechanics Reviews*, 55, B57
- Schneider, J., Dedieu, C., Le Sidaner, P., Savalle, R., & Zolotukhin, I. 2011, *A&A*, 532, A79
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390
- Seach, J. M., Marsden, S. C., Carter, B. D., et al. 2020, *MNRAS*, 494, 5682
- See, V., Jardine, M., Vidotto, A. A., et al. 2016, *MNRAS*, 462, 4442
- See, V., Jardine, M., Vidotto, A. A., et al. 2017, *MNRAS*, 466, 1542
- See, V., Jardine, M., Vidotto, A. A., et al. 2015, *MNRAS*, 453, 4301
- See, V., Matt, S. P., Finley, A. J., et al. 2019a, arXiv e-prints, arXiv :1910.02129
- See, V., Matt, S. P., Folsom, C. P., et al. 2019b, *ApJ*, 876, 118
- Semel, M. 1989, *A&A*, 225, 456
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 500, 33
- Shulyak, D., Reiners, A., Engeln, A., et al. 2017, *Nature Astronomy*, 1, 0184
- Siess, L., Dufour, E., & Forestini, M. 2000, *A&A*, 358, 593
- Simon, B., Lemaitre, A., & Souchay, J. 2013, *Oceanic Tides*, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, Vol. 861, 83
- Singer, S. F. 1968, *Geophysical Journal International*, 15, 205
- Skumanich, A. 1972, *ApJ*, 171, 565

- Smalley, B., Anderson, D. R., Collier-Cameron, A., et al. 2012, *A&A*, 547, A61
- Southworth, J. 2011, *MNRAS*, 417, 2166
- Spiegel, E. A. 1963, *ApJ*, 138, 216
- Spiegel, E. A. & Zahn, J. P. 1992, *A&A*, 265, 106
- Spruit, H. C. 1999, *A&A*, 349, 189
- Stenflo, J. O. 1990, *A&A*, 233, 220
- Stewartson, K. 1972, *Journal of Fluid Mechanics*, 54, 749
- Stewartson, K. 1977, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 9, 185
- Storch, N. I. & Lai, D. 2014, *MNRAS*, 438, 1526
- Storch, N. I. & Lai, D. 2015, *MNRAS*, 450, 3952
- Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., & Brun, A. S. 2018, *ApJ*, 863, 35
- Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., Brun, A. S., & do Nascimento, J. D. 2017a, *Science*, 357, 185
- Strugarek, A., Bolmont, E., Mathis, S., et al. 2017b, *ApJ*, 847, L16
- Strugarek, A., Brun, A. S., Donati, J. F., Moutou, C., & Réville, V. 2019, *ApJ*, 881, 136
- Strugarek, A., Brun, A. S., Mathis, S., & Sarazin, Y. 2013, *ApJ*, 764, 189
- Teitler, S. & Königl, A. 2014, *ApJ*, 786, 139
- Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, *ApJ*, 502, 788
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *ARA&A*, 41, 599
- Thompson, S. E., Coughlin, J. L., Hoffman, K., et al. 2018, *ApJS*, 235, 38
- Tilgner, A. 1999, *Phys. Rev. E*, 59, 1789
- Tinetti, G., Drossart, P., Eccleston, P., et al. 2018, *Experimental Astronomy*, 46, 135
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005, *Nature*, 435, 459
- Valdettaro, L., Rieutord, M., Braconnier, T., & Fraysse, V. 2007, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205, 382
- Van Eylen, V., Dai, F., Mathur, S., et al. 2018, *MNRAS*, 478, 4866
- Varela, J., Strugarek, A., & Brun, A. S. 2016, *Advances in Space Research*, 58, 1507
- Verbunt, F. & Phinney, E. S. 1995, *A&A*, 296, 709
- Vidal, J. & Barker, A. J. 2020, *ApJ*, 888, L31
- Vidotto, A. A., Gregory, S. G., Jardine, M., et al. 2014, *MNRAS*, 441, 2361
- Wahl, S. M., Hubbard, W. B., Militzer, B., et al. 2017, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 4649
- Walsh, K. J., Morbidelli, A., Raymond, S. N., O'Brien, D. P., & Mandell, A. M. 2011, *Nature*, 475, 206

- Ward, W. R. 1982, *Icarus*, 50, 444
- Watts, A. L., Andersson, N., Beyer, H., & Schutz, B. F. 2003, *MNRAS*, 342, 1156
- Watts, A. L., Andersson, N., & Williams, R. L. 2004, *MNRAS*, 350, 927
- Webb, D. J. 1980, *Geophysical Journal*, 61, 573
- Wei, X. 2016, *ApJ*, 828, 30
- Wei, X. 2018, *ApJ*, 854, 34
- Weinberg, N. N., Sun, M., Arras, P., & Essick, R. 2017, *ApJ*, 849, L11
- Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, *ApJ*, 718, L145
- Winn, J. N. & Fabrycky, D. C. 2015, *ARA&A*, 53, 409
- Winters, K. B. & D'Asaro, E. A. 1989, *J. Geophys. Res.*, 94, 12,709
- Wright, J. T., Marcy, G. W., Howard, A. W., et al. 2012, *ApJ*, 753, 160
- Wright, N. J. & Drake, J. J. 2016, *Nature*, 535, 526
- Wu, Y. 2005a, *ApJ*, 635, 674
- Wu, Y. 2005b, *ApJ*, 635, 688
- Wu, Y. & Lithwick, Y. 2011, *ApJ*, 735, 109
- Yadav, R. K., Christensen, U. R., Morin, J., et al. 2015, *ApJ*, 813, L31
- Yamanaka, M. & Tanaka, H. 1984, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 62, 1
- Yee, S. W., Winn, J. N., Knutson, H. A., et al. 2020, *ApJ*, 888, L5
- Yu, L., Donati, J. F., Grankin, K., et al. 2019, *MNRAS*, 489, 5556
- Yu, L., Donati, J. F., Hébrard, E. M., et al. 2017, *MNRAS*, 467, 1342
- Zahn, J. P. 1966a, *Annales d'Astrophysique*, 29, 313
- Zahn, J. P. 1966b, *Annales d'Astrophysique*, 29, 489
- Zahn, J. P. 1966c, *Annales d'Astrophysique*, 29, 565
- Zahn, J. P. 1975, *A&A*, 41, 329
- Zahn, J. P. 1977, *A&A*, 500, 121
- Zahn, J. P. 1989, *A&A*, 220, 112
- Zahn, J. P. 1992, *A&A*, 265, 115
- Zahn, J. P. 2008, in *EAS Publications Series*, Vol. 29, *EAS Publications Series*, ed. M. J. Goupil & J. P. Zahn, 67–90
- Zahn, J.-P. 2013, *Stellar Tides*, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, Vol. 861, 301
- Zanni, C. & Ferreira, J. 2013, *A&A*, 550, A99

Zeeman, P. 1897, ApJ, 5, 332

Zeldovich, Y. B. 1983, Magnetic fields in astrophysics

Zhang, K., Jones, C. A., & Chen, D. 1996, Earth Moon and Planets, 73, 221