



HAL
open science

Modélisation multi-échelle par motifs et phénomènes non linéaires à haute température dans les composites à matrice céramique

Thomas-David Jayet

► **To cite this version:**

Thomas-David Jayet. Modélisation multi-échelle par motifs et phénomènes non linéaires à haute température dans les composites à matrice céramique. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST039 . tel-03234102

HAL Id: tel-03234102

<https://theses.hal.science/tel-03234102v1>

Submitted on 25 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation multi-échelle par motifs et
phénomènes non linéaires à haute température
dans les composites à matrice céramique

*Pattern-based multi-scale modeling and non-linear phenomena in
ceramic matrix composites under high temperatures*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n°579, sciences mécaniques et énergétiques, matériaux
et géosciences (SMEMAG)

Spécialité de doctorat: Solides, structures et matériaux

Unité de recherche : Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT - Laboratoire
de Mécanique et Technologie, 91190, Gif-sur-Yvette, France

Référent : ENS Paris-Saclay

**Thèse présentée et soutenue à l'ENS Paris-Saclay,
le 07/05/2021, par**

Thomas-David JAYET

Composition du Jury

Francisco CHINESTA

Professeur des Universités, PIMM

Président

Delphine BRANCHERIE

Professeur des Universités, UTC Roberval

Rapporteuse

Anthony GRAVOUIL

Professeur des Universités, LaMCoS

Rapporteur

Frédéric LAURIN

Ingénieur de Recherche, ONERA

Examineur

Direction de la thèse

Emmanuel BARANGER

Chargé de Recherche, CNRS-LMT

Directeur

Guillaume COUEGNAT

Ingénieur de Recherche, CNRS-LCTS

Co-encadrant de thèse

Sébastien DENNEULIN

Ingénieur de Recherche, Safran Ceramics

Co-encadrant industriel

Titre : Modélisation multi-échelle par motifs et phénomènes non linéaires à haute température dans les composites à matrice céramique

Mots clés : GFEM, Champ de phase, Fluage, CMC

Résumé : Les composites à matrice céramique constituent aujourd'hui de bons candidats pour remplacer les pièces en alliage métallique dans les parties chaudes des moteurs d'avion afin de limiter leur impact environnemental. En effet ces matériaux possèdent des propriétés thermo-mécaniques qui permettraient d'élever les températures d'utilisation des moteurs et ainsi augmenter leur rendement. Toutefois un défi réside dans la description de leur comportement dans un milieu soumis à de fortes températures. Les industriels de l'aéronautique cherchent donc à développer des outils de compréhension adaptés à ces composites pour aider au choix de l'architecture matériau et prédire les scénarios de dégradation. La démarche proposée dans cette thèse consiste **dans un premier temps** à mettre au point une méthode de description par motifs élémentaires des micro-structures. C'est une Méthode des Eléments Finis Généralisés (GFEM) qui a été adoptée. Cette stratégie issue des hypothèses de partition de l'unité permet d'utiliser des champs en tant que fonctions d'enrichissement numériques pour tenir compte de détails structuraux. Mieux, une version multi-échelle est retenue pour son caractère versatile et la possibilité de construire des motifs stockés

en amont et appelés lors du calcul en fonction du besoin. Une comparaison entre les résultats obtenus avec un calcul Eléments Finis et avec la GFEM est faite sur une structure élastique. **Dans un second temps** la possibilité de prendre en compte l'initiation et la propagation de fissure à travers une approche par champ de phase (*Phase-field*) a été proposée. Pour cela une variable continue d'endommagement est introduite à travers un potentiel de dissipation et une densité d'énergie élastique stockée. L'utilisation de principes thermodynamiques aboutit à l'écriture d'une loi d'évolution de l'endommagement. En particulier cette loi est mise à contribution dans le cadre de la simulation de la déviation de fissure à l'interface fibre-matrice du composite. Enfin **dans un troisième temps** la question du couplage entre la variable d'endommagement et la visco-plasticité à haute température a encouragé l'écriture d'un nouveau modèle thermodynamiquement cohérent qui lie ces deux quantités. Celui-ci a pu par la suite être intégré à la loi d'endommagement avant de proposer une application dans un cas unidimensionnel. Les codes développés pour ces travaux de thèse sont adaptés à une utilisation non-intrusive du logiciel Abaqus.

Title : Pattern-based multi-scale modeling and non-linear phenomena in ceramic matrix composites under high temperatures

Keywords : GFEM, Phase-field, Creep

Abstract : Ceramic matrix composites are now good candidates to replace metal alloy parts in hot parts of aircraft engines in order to limit their environmental impact. Indeed, these materials have thermo-mechanical properties that would allow to raise the operating temperatures of engines and thus increase their efficiency. However, a challenge lies in describing their behaviour in an environment subject to high temperatures. Aerospace manufacturers are therefore seeking to develop understanding tools adapted to these composites in order to help in the choice of material architectures and predict degradation scenarios. The approach proposed in this thesis consists **first** in developing a method for pattern-based description of the micro-structures. Then a Generalized Finite Element Method (GFEM) is adopted. Such strategy originate from the Partition of Unity hypotheses enables to use fields as numerical enrichment functions totake into account structural details. The better a multi-scale version of this method is retained for the possibility to build patterns stored upstream and called during the

simulation where appropriate. A comparison between the results obtained with a Finite Element Method and the ones obtained with the GFEM is suggested for an elastic structure. **In a second step** the possibility of taking into account crack initiation and propagation through a phase-field approach is presented. To this end a damage variable is introduced through the definition of a dissipative potential and density of stored elastic energy. The use of thermodynamic principles leads to a damage evolution law. In particular an application to crack deviation at the interface between a fiber and the matrix is suggested. **Finally**, the question of the coupling between this damage variable and visco-plasticity at high temperature has encouraged the writing of a thermodynamically consistent model that links these two quantities. This model is then integrated into the damage law and a unidimensional calculus is made with this law. The codes developed for these thesis works are adapted to a non-intrusive use of the Abaqus software.



Table des matières

Introduction	1
PARTIE I	13
1 Les outils numériques de description d'une structure	15
1 Définition du problème	16
2 Décomposition de Domaine	17
2.1 Cadre de la Décomposition de Domaine sans recouvrement . .	18
2.2 Différentes approches de résolution	19
3 Homogénéisation	22
3.1 Idée	22
3.2 Homogénéisation asymptotique	23
3.3 Méthodes par champs de transformation	26
3.4 Conclusion partielle	28
4 Enrichissement et superposition de modèles	29
5 Enrichissement cinématique par la Méthode de Partition de l'Unité .	30
5.1 Concept de Partition de l'Unité	30
5.2 Détails concernant la XFEM	38
5.3 Détails concernant la GFEM	42
6 Conclusion : choix d'une méthode numérique pour la description d'une micro-structure riche	47
2 Implémentation de la GFEM multi-échelle dans Abaqus	49
1 Outils disponibles sous Abaqus	50
1.1 Maillages géométriquement conformes	50
1.2 Cinématique macroscopique imposée au maillage local	51
1.3 Fonctions d'enrichissements vues comme des perturbations en déplacement	51
1.4 Cinématique GFEM imposée	52
1.5 Calcul de la rigidité GFEM	53
1.6 Connection de <i>patches</i> dans le cadre de la GFEMgl	54
1.7 Positionnement des sous-structures dans le cadre de la MS- GFEM	54

1.8	Conclusion partielle : choix d'une stratégie d'enrichissement	56
2	Application de la MS-GFEM	59
2.1	Problème de référence	59
2.2	Choix des motifs à stocker dans le <i>Handbook</i>	62
2.3	Arrangement des motifs et reconstruction de champ	64
2.4	Erreur globale	67
2.5	Ecart en déformation entre la MS-GFEM et le modèle Eléments Finis de référence	70
3	Conclusion de la Partie I	73
PARTIE II		75
1	Les stratégies de modélisation numérique de la rupture	77
1	Vue d'ensemble de la mécanique de la rupture et de l'endommagement	78
2	Approche discontinue de la fissuration dans un cadre Eléments Finis .	79
2.1	Représentation explicite de la fissuration	79
2.2	Représentation implicite de la fissure	79
3	Approche variationnelle de la fissuration	80
4	Un cadre thermodynamique pour la loi d'évolution de l'endommagement	82
4.1	Définition du problème	82
4.2	Loi d'endommagement pour une rupture fragile via une ap- proche thermodynamique	84
4.3	Outils Abaqus pour la modélisation <i>Phase-field</i>	90
2	Application de la loi d'endommagement par champ de phase à une micro-structure de CMC	93
1	Investigations menées	94
2	Choix d'une longueur caractéristique	95
2.1	En utilisant les paramètres matériaux	97
2.2	Avec un point de vue géométrique	99
3	Nécessité d'une régularisation visqueuse	100
3.1	Influence du paramètre de stabilisation	101
3.2	Critères pour choisir le paramètre de viscosité	102
4	Déviation de fissure pour une sollicitation longitudinale	106
4.1	Comportement pour un déplacement imposé	106
4.2	Comportement à effort imposé	110
5	Conclusion	115
3	Couplage fluage-endommagement via une approche champ de phase	117
1	Formulation des modèles	118
1.1	Définition des grandeurs utiles à l'étude	118
1.2	Ecriture des 3 principes	121
1.3	Lois d'endommagement	122
1.4	Conclusion partielle	127

2	Application à une fibre Hi-Nicalon-S	127
2.1	Observations par l'expérience	127
2.2	Formulation du comportement en fluage sans endommagement	128
2.3	Formulation du comportement en fluage avec endommagement	130
2.4	Dégradation d'une fibre Hi-Nicalon-S	131
3	Conclusion de la Partie II	136
	Conclusion générale	139
	Bibliographie	143

Introduction

Les considérations environnementales sont de plus en plus présentes dans le monde du transport. L'aviation civile ne fait pas exception et la question des émissions de polluants dans l'atmosphère est plus que jamais d'actualité d'autant plus que l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale prévoit environ 7,2 milliards de passagers à l'horizon 2035, soit presque le double qu'en 2016 [IAT, 2016]. En parallèle l'ACARE (Advisory Council for Aviation Research and Innovation in the EU) vise pour ce même horizon 2035 une diminution de 75% des émissions de CO₂ et de 90% des oxydes d'azote (appelés communément NOx) [ACA, 2014]. Evidemment ces prévisions étaient valables avant la pandémie de Covid-19 qui a très lourdement impacté le trafic aérien.

L'amélioration des performances des motorisations utilisées en aéronautique civile est donc une nécessité. Les grands motoristes travaillent aujourd'hui sur l'introduction de Composites à Matrice Céramique (CMC) en remplacement des alliages base Nickel actuellement employés dans les parties chaudes des moteurs. En effet l'expérience des industriels a montré que ces matériaux sont capables de tenir des températures plus élevées de 100K à 200K par rapport aux alliages base Nickel habituellement employés [Zok, 2016] tout en ayant une masse volumique 60% inférieure. Il en résulte une augmentation envisageable des températures de fonctionnement des moteurs ce qui améliorerait leur rendement et donc diminuerait les émissions de gaz polluants. Aussi utiliser des CMC dans les parties statiques des moteurs permettra de faciliter la technologie de refroidissement employée, mieux en introduire dans les pièces mobiles diminuera l'inertie des pièces en rotation. La **FIGURE 1** illustre des possibilités d'implantation de CMCs dans un moteur d'avion.

Après une longue expérimentation dans le cadre des turbines à gaz, General Electric (GE) a mis en service ses premières pièces SiC/SiC sur moteur LEAP engendrant le développement de deux usines aux Etats-Unis. Certains de ces développements ont été menés en collaboration avec la NASA, l'US Air Force et Rolls Royce. Space X développe de son côté des solutions Oxyde/Oxyde. La France n'est pas en reste, Safran Ceramics a une très longue expérience dans le domaine des CMC (SiC/SiC, C/C, C/SiC) dans le domaine des lanceurs et des applications militaires notamment comme les volets chauds du rafale par exemple [Spriet, 2014]. Le développement de composites Oxyde/Oxyde sont quant à eux plus récents pour l'entreprise. Il s'agit

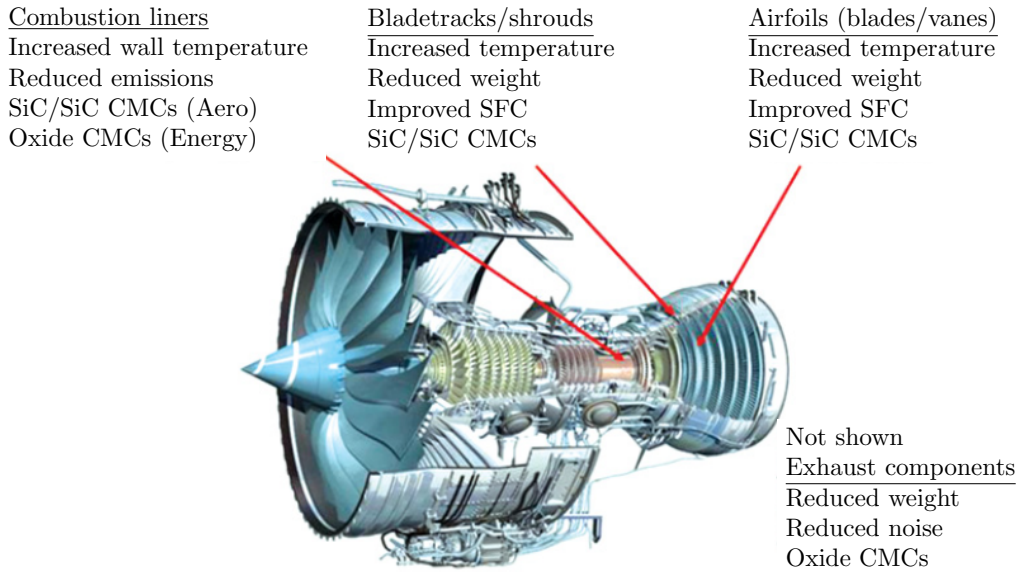


FIGURE 1 – Implantations envisagées de pièces en CMC dans un moteur d’avion. Image tirée de [Lee, 2014]

désormais pour le Groupe Safran d’introduire des CMC dans les moteurs civils afin de rester compétitif et de développer son activité.

Concernant les composites de type SiC/SiC, de nombreux procédés de fabrication ont été développés et n’offrent pas les mêmes performances pour la pièce obtenue. Par exemple en CVI, la matière est apportée sous phase gazeuse menant à des pièces bien densifiées mais avec des porosités de grande taille. Quant à lui le procédé MI permet une densification complète de la pièce avec très peu de porosité résiduelle, enfin la présence d’une interphase entre la fibre et la matrice apporte de la ductilité au matériau. En fait, tous ces procédés mènent à des micro-structures particulièrement riches (voir FIGURE 2) ainsi qu’à des matériaux plus ou moins tolérants aux agressions extérieures qu’elles soient mécaniques ou physico-chimiques [Zok, 2016]. Enfin le renfort choisi (unidirectionnel [Pryce et Smith, 1992], tissé 2D ou 3D [Yamada *et al.*, 2000, Boisse, 2014]) influence lui aussi le comportement de la structure.

Ainsi la problématique de la relation entre le procédé de fabrication et le comportement désiré du matériau produit reste fondamentale.

Afin d’assurer l’intégrité de la pièce lors de ses différentes phases de vie, il est nécessaire de pouvoir décrire précisément les différents mécanismes qui interviennent au sein des différentes échelles du matériau (illustrées en FIGURE 3). Puisque la micro-structure conditionne la tenue en fatigue statique, la description du composite à l’échelle de la fibre est nécessaire à la compréhension du comportement du

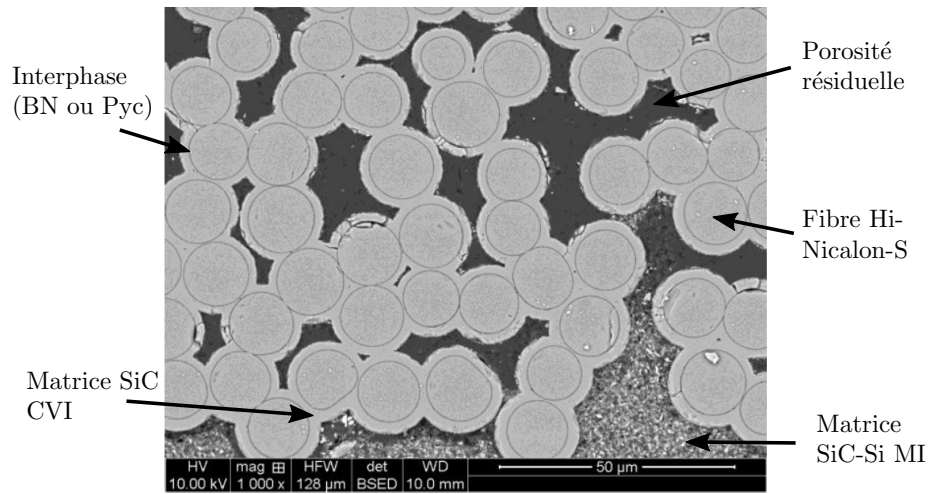


FIGURE 2 – Cliché au microscope électronique à balayage des différentes phases observables dans une micro-structure de composite SiC/SiC. Image tirée de [Griesser, 2012]

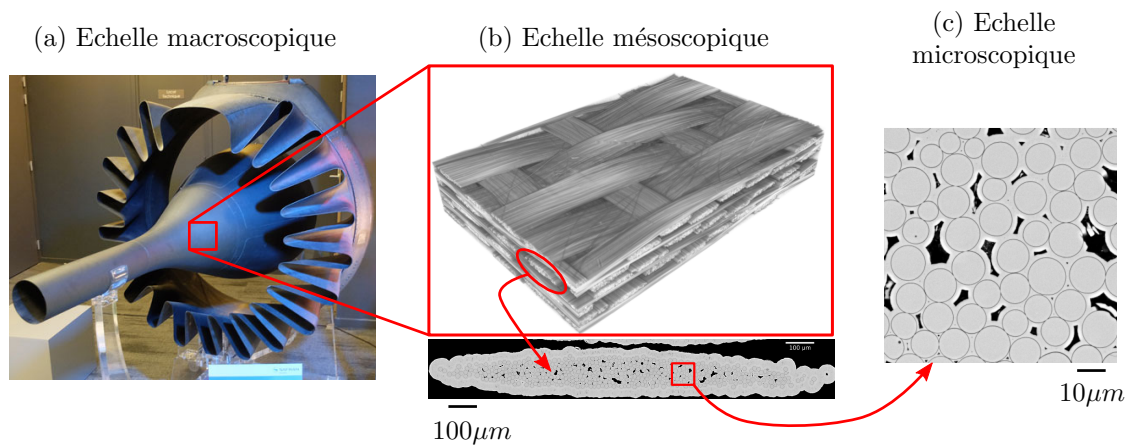


FIGURE 3 – Différentes échelles du composite. (a) Cône d'éjection ARCOCE et mélangeur développés par Safran en composite SiC/SiC (b) Tissage 3D [Couégnat *et al.*, 2013] et image MEB d'un toron [Chateau, 2011] (c) Microstructure d'un composite SiC/SiC pour applications dans le secteur nucléaire [Chateau, 2011]

matériau. De plus les phénomènes non-linéaires à haute température doivent aussi être connus et modélisés pour envisager des scénarios de dégradation sur la micro-structure. Il s'agit dans cette thèse de développer des outils numériques permettant :

1. la description morphologique d'une micro-structure riche ;
2. la modélisation des mécanismes de dégradation à l'échelle de la fibre.

En outre l'objectif des travaux proposés dans ce manuscrit est d'étudier l'effet

de l'architecture microscopique sur le comportement non linéaire du matériau. Par exemple Safran Ceramics s'intéresse à l'influence de l'épaisseur d'interphase sur la déviation de fissure à l'interface fibre-matrice. C'est donc un outil de compréhension des phénomènes qui doit être développé et fourni aux ingénieurs. Le développement d'un modèle versatile contenant les informations d'intérêt est à privilégier. Les sections qui vont suivre dans cette introduction auront pour objectif de donner les pistes de réflexion qui ont amené aux choix de méthodes numériques susceptibles de répondre à ces problématiques.

Description d'une micro-structure d'un CMC SiC/SiC

L'objectif de cette partie est de justifier le choix d'une méthode capable de retranscrire la richesse d'une micro-structure de CMC comme celle présentée en [FIGURE 2](#). La stratégie adoptée doit permettre de limiter le coût numérique de la résolution d'un problème éventuellement non linéaire tout en mettant en évidence les informations clés utiles à la compréhension des différents mécanismes en jeu et leurs couplages. Puisqu'à terme il serait intéressant d'étudier l'impact de la micro-structure sur le comportement de la pièce à l'échelle macroscopique, un aspect multi-échelle sera privilégié. Les paragraphes ci-dessous proposent un résumé des différentes classes de méthodes envisageables et justifient l'emploi de l'une d'elles en particulier.

Les Méthodes de Décomposition de Domaine (DDM en anglais) permettent de découper une structure globale en plusieurs sous-structures et interfaces. Ces sous-structures peuvent se chevaucher ou non. En plus du système matriciel à résoudre, des conditions de continuité et d'équilibre aux interfaces doivent être vérifiées. Trois types de méthodes apparaissent alors : les méthodes primales (comme l'approche BDD [[Mandel, 1993](#)]) qui présupposent la continuité du déplacement, les méthodes duales (comme la méthode FETI [[Farhat et Roux, 1991](#)]) qui reposent sur l'équilibre des efforts d'interface et les méthodes mixtes de type LaTIn [[Ladevèze, 1991](#)] par exemple. Toutes ces stratégies autorisent une description fine d'une structure large grâce à une parallélisation des calculs de sous-domaines. Le résultat ainsi obtenu pour la structure complète est précis. Des essais de propagation de fissures ont été menés sur des micro-structures composites découpées en sous-domaines [[Allix et al., 2011](#)]. Bien que l'application aux composites et à leurs mécanismes de fissuration ait été proposée, les méthodes de décomposition de domaine se heurtent toutefois à des difficultés concernant le tri des données issues du calcul : en effet la précision des résultats obtenus ne permet pas de rendre compte simplement des informations susceptibles de mieux comprendre le comportement du matériau et d'adapter le procédé de fabrication. Par conséquent la versatilité désirée pour la représentation du composite semble être perdue. Afin d'éviter des calculs non linéaires sur tous les sous-domaines, il est possible de réaliser ces calculs sur des zones d'intérêts spécifiques de la structure tout en considérant le reste dans son domaine élastique. Par conséquent

des techniques de couplage de modèles locaux non linéaires avec des structures macroscopiques restant dans leur domaine élastique ont été proposées, un exemple est donné dans [Gendre *et al.*, 2009]. Bien que cet algorithme de calcul global-local soit pratique et permet de diminuer le coût de simulation sur une structure, la position des zones d'intérêt doit être déjà connue en amont : cela entre en contradiction avec le besoin de développer un outil de compréhension des mécanismes de dégradation à l'échelle de la micro-structure du CMC.

Les techniques d'homogénéisation consistent de leur côté à moyenniser des quantités comme les contraintes et déformations au sein d'un Volume Élémentaire de Référence (VER) dont une définition est donnée dans [Nemat-Nasser, 1986]. Un VER satisfaisant doit être statistiquement représentatif, cela implique de mener en amont des études sur la fraction volumique des différents constituants ainsi que la disposition des fibres par exemple. De plus le VER doit avoir une taille caractéristique très petite comparée aux dimensions à l'échelle de la pièce : le VER est ainsi vu comme homogène à l'échelle macroscopique. Afin de mener des études sur des phénomènes non linéaires à l'échelle d'un VER périodique, des méthodes itératives basées sur une homogénéisation asymptotique [Sanchez-Palencia, 1983] peuvent être utilisées et couplées à des méthodes multi-échelles [Fish et Shek, 2000], FE² [Feyel, 1999] ou FFT (Fast Fourier Transform) [Gélébart et Mondon-Cancel, 2013] dans le cadre d'applications aux composites. Néanmoins ces stratégies souffrent de la limitation aux VER périodiques et des erreurs importantes peuvent apparaître dans les zones de forts gradients [Moulinec et Suquet, 1998]. Enfin l'information à fournir à la structure est trop riche comparée à celle obtenue via l'utilisation d'un comportement moyen, ce qui limite son intérêt pour l'étude que l'on souhaite mener.

Des méthodes d'enrichissement et de superposition de modèles peuvent aussi être évoquées pour la description de structures. Ces méthodes multi-échelles permettent d'enrichir un problème grossier sur une zone donnée ou sur toute la structure considérée. L'enrichissement est généralement effectué sur le champ de déplacement mais peut aussi être réalisé sur la formulation énergétique du problème avec la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998]. Parmi ces méthodes il est possible de mentionner les approches variationnelles multi-échelles proposées dans [Hughes, 1995]. L'idée est de rechercher une correction du champ global en tenant compte des phénomènes locaux. Des fonctions de Green peuvent aussi être utilisées, elles sont analytiques ou numériques [Hughes *et al.*, 1998]. Toutefois un tel enrichissement est localisé au niveau d'un élément du maillage et la condition de continuité au niveau des arêtes de l'élément est difficile à satisfaire, surtout en vue d'un emploi dans un code commercial. La Méthode des Éléments Finis par Superposition (S-FEM ou S-method en anglais) de [Fish, 1992] propose de séparer le déplacement approché en un déplacement global (associé à un maillage grossier) et un déplacement local (associé à un maillage fin). La conformité entre maillages n'est pas nécessaire et la continuité des déplacements est assurée par des conditions aux limites de Dirichlet.

Ce type de stratégie autorise la description d'une micro-structure riche grâce à des motifs (décrits par le maillage fin) mais tous les noeuds de tous les maillages fins utilisés sont impliqués dans le problème matriciel de la structure complète : le coût de calcul s'en trouve potentiellement augmenté.

Le concept de Partition de l'Unité (PU) [Melenk et Babuška, 1996] autorise l'utilisation de fonctions spéciales – appelées fonctions d'enrichissement – dans le but d'approcher des solutions plus ou moins régulières. Les hypothèses de Partition de l'Unité constituent une base de la PUFEM (Partition of Unity Finite Element Method) qui peut être vue comme une extension des versions h , p et hp de la méthode des éléments finis. La Méthode des Eléments Finis Etendus ou XFEM [Belytschko et Black, 1999, Moës *et al.*, 1999] ainsi que la Méthode des Eléments Finis Généralisés (GFEM) [Strouboulis *et al.*, 1998, Strouboulis *et al.*, 2001] sont deux versions dérivées de la PUFEM. Dans ces méthodes, les fonctions d'enrichissement sont ajoutées à l'espace d'approximation polynomiale, le nombre de degrés de liberté du problème est ainsi augmenté. Ce type d'enrichissement est qualifié d'*extrinsèque*. Une autre stratégie consiste à remplacer l'espace d'approximation polynomiale par des fonctions capturant directement la solution. Le nombre d'inconnues reste alors inchangé par rapport à l'approximation polynomiale et ce type d'enrichissement est qualifié d'*intrinsèque*. Des enrichissements s'appuyant sur des maillages (*meshbased*) ou non (*meshfree*) peuvent être distingués. Les termes *extrinsèque*, *intrinsèque*, *meshfree* et *meshbased* sont définis plus en détail dans [Nguyen *et al.*, 2008]. Comme souligné dans la revue [Fries et Belytschko, 2010], les variantes *meshfree* de la partition de l'unité ont un coût de calcul élevé et sont difficiles à intégrer tandis que les versions *meshbased* sont plus simples à construire, notamment grâce aux éléments de Lagrange. Bien qu'identiques dans l'écriture du déplacement approché, on distinguera la GFEM de la XFEM de la manière suivante :

- pour la GFEM on utilisera plutôt des fonctions d'enrichissement calculées numériquement.
- dans la XFEM on privilégiera les fonctions d'enrichissement connues analytiquement.

Bien sûr il est possible d'envisager une méthode mixte mélangeant enrichissements analytiques et numériques. Toutefois la XFEM se limite généralement à la description de discontinuités fortes ou faibles, ainsi décrire une micro-structure exclusivement avec cette méthode demanderait un ajout conséquent de degrés de liberté pour décrire les nombreuses interfaces dans la structure. Le point de vue adopté pour cette thèse est que la GFEM se situe dans un cadre plus général que la XFEM grâce aux enrichissements numériques capables potentiellement de décrire des détails structuraux de toutes sortes. La GFEM utilise à la fois des outils issus des méthodes DDM et ceux d'homogénéisation. En effet le calcul numérique des fonctions d'enrichissements demandera un passage d'une échelle locale (celle contenant les détails

structuraux) à une échelle macroscopique sur laquelle s'appuie le déplacement approché. Ce changement d'échelle rappelle celui fait en homogénéisation. De plus les interactions entre enrichissements adjacents sont conservées grâce à des conditions de continuité au même titre que pour les méthodes DDM. Aussi la souplesse donnée par le choix des motifs permet de ne sélectionner que ceux susceptibles d'aider à la compréhension du comportement du matériau, quitte à perdre d'autres informations. C'est cette stratégie qui sera adoptée dans le cadre de cette thèse pour la description de la micro-structure d'un CMC.

Plusieurs variantes de la Méthode des Eléments Finis Généralisés existent : la GFEM par problèmes *Handbook* (GFEM-H) [Strouboulis *et al.*, 2001], la GFEM globale-locale (GFEMgl) [Duarte et Kim, 2008] et la GFEM multi-échelle (MS-GFEM) [Tranquart *et al.*, 2012]. Leurs spécificités seront passées en revue dans le manuscrit mais c'est la thèse de Bastien Tranquart [Tranquart, 2012] effectuée au LMT qui sert de base aux travaux présentés. Dans la continuité de ses recherches, c'est l'utilisation de la MS-GFEM qui est adoptée afin de s'affranchir de problématiques inhérentes aux autres variantes de la GFEM. De plus les extensions à la mécanique de la rupture proposées par [Friderikos *et al.*, 2017] encouragent l'utilisation de la GFEM. Enfin puisque l'outil développé doit être utilisable par les ingénieurs, l'utilisation de leurs logiciels informatiques est nécessaire. Le défi consiste donc à implémenter la GFEM dans le code commercial Abaqus de manière non intrusive avant d'en proposer une application.

Modélisation des phénomènes non linéaires à l'échelle de la fibre

Les céramiques présentent un comportement élastique fragile. La mécanique de la rupture a été appliquée par de nombreux auteurs [Ming-Yuan et Hutchinson, 1989, Martin *et al.*, 1998, Pompidou et Lamon, 2005] souvent en mettant l'accent sur les aspects probabilistes de la rupture [Calard et Lamon, 2002, Lamon, 2007]. Au delà de 1000°C, certains comportements deviennent non-linéaires à cause de mécanismes de fluage [DiCarlo, 1994, Yoon *et al.*, 2000, Robertson *et al.*, 2020]. D'autre part, les conditions d'accès de l'oxygène ou de la vapeur d'eau au coeur du matériau dépendent fortement de la densification du composite (très poreux pour le tout CVI, dense pour le procédé MI). Cette compétition entre oxydation et accès des espèces chimiques à coeur [Quemard *et al.*, 2007] illustre bien la difficulté de faire le tri entre les différentes voies possibles. Ainsi la qualité des matériaux produits prend une place importante dans la tenue de ceux-ci à haute température.

La modélisation de l'initiation, de la propagation et de la déviation des fissures soulève la question du choix d'une stratégie numérique pertinente et adaptée à une micro-structure riche dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile. La modélisation des fractures fragiles comporte quatre difficultés principales :

1. la prédiction de l'amorçage des fissures ;
2. la détermination du cheminement des fissures ;
3. la possibilité de ramification des fissures ;
4. la description de la discontinuité.

L'objectif des paragraphes suivants est de passer en revue les difficultés et l'état de l'art des stratégies numériques liées à la modélisation des fissures afin de justifier le choix de l'outil numérique utilisé pour cette thèse. Aussi l'objectif à terme sera d'alimenter l'enrichissement GFEM avec les outils développés. L'utilisation du code Abaqus sera une fois de plus privilégiée.

La façon la plus naturelle de décrire une fissure est de la faire apparaître explicitement dans le maillage. La propagation de la fissure est assurée en dupliquant les nœuds du modèle de manière à créer une fissure explicite. L'initiation et la propagation de la fissure sont possibles grâce à un critère en contrainte (par exemple), une application aux CMCs avec interphase pyrocarbone a été proposée dans le cas d'un problème 2D [Pineau *et al.*, 2011]. Une telle méthode de description de la discontinuité implique une hypothèse sur le cheminement de la fissure puisqu'elle suit les bords des éléments du maillage. L'utilisation d'un maillage adaptatif peut alors être adoptée pour affiner le maillage à la pointe de la fissure et aider à identifier le chemin qu'elle est susceptible de prendre avant de dupliquer les nœuds, cette stratégie a déjà été appliquée pour une structure 3D [Chiaruttini *et al.*, 2013]. Malheureusement la modélisation explicite des fissures fait systématiquement appel à des algorithmes annexes, il semble donc difficile de réussir à développer un tel outil tout en le rendant versatile dans un code commercial.

La XFEM quant à elle permet de représenter une fissure dans un maillage de manière implicite. Des degrés de liberté associés à des fonctions de localisation (dites *level-set*) sont ajoutés pour décrire un élément traversé par une fissure. Des degrés de liberté supplémentaires associés à des fonctions d'enrichissement en pointe de fissure permettent de positionner celle-ci au sein de l'élément qui la contient. Le dédoublement de fissure peut être traité par l'introduction de fonctions d'enrichissement spécifiques [Daux *et al.*, 2000]. Une implémentation 3D de la XFEM a déjà été suggérée [Sukumar *et al.*, 2000] mais testée dans le cadre de problèmes plans, un algorithme de découpe d'éléments a été proposé pour des cas 3D plus complexes [Areias et Belytschko, 2005]. La XFEM s'émancipe de la conformité au maillage mais la qualité de l'enrichissement analytique dans un milieu hétérogène est limitée car les fonctions d'enrichissements utilisées en pointe de fissure sont bien connues uniquement dans des domaines homogènes et infinis [Fleming *et al.*, 1997]. Comme rappelé dans la revue de [Belytschko *et al.*, 2009], certains termes de la matrice de rigidité peuvent être singuliers si les fonctions de localisation prennent des valeurs très proches de 0. De plus l'initiation de fissures est impossible dans le cadre de la mécanique de la rupture, il est alors nécessaire d'utiliser des modèles annexes

comme ceux d'endommagements continus [Simone *et al.*, 2003] ou des lois cohésives [Wells *et al.*, 2002] afin de rendre possible ce phénomène. Enfin la richesse de la micro-structure étudiée nous détourne du choix de ces méthodes pour la description de discontinuités fortes dans ces travaux de thèse.

Les éléments cohésifs associés à une loi d'endommagement sont capables d'initier et de propager une fissure au sein d'une micro-structure. Si des fissures sont susceptibles d'apparaître dans des zones privilégiées connues à l'avance alors les éléments cohésifs peuvent être placés judicieusement dans la structure comme cela est fait dans [Herráez *et al.*, 2016] pour traiter la décohésion fibre-matrice dans Abaqus. Une autre possibilité est d'introduire des éléments cohésifs dans toute la structure [Wang *et al.*, 2015] si celle-ci est susceptible de s'endommager partout. Toutefois des limitations résident dans la dépendance au maillage, de plus les éléments cohésifs apportent de l'énergie élastique en excès.

Les difficultés liées à la description discrète de fissures motivent alors la recherche d'autres moyens numériques pour lesquels les trajets de fissuration font automatiquement partie de la solution. C'est dans ce cadre que se place l'approche variationnelle pour la rupture fragile de [Francfort et Marigo, 1998]. Le but est alors de rechercher en même temps le champ de déplacement et l'évolution du réseau de fissures grâce à la minimisation d'un potentiel énergétique. Une implémentation de cette généralisation de la théorie de Griffith [Griffith, 1921] a été proposée [Bourdin *et al.*, 2000] et introduit une longueur d'échelle caractérisant le passage continu de l'état sain vers l'état endommagé. Toutefois la formulation proposée n'est pas réaliste et peut faire apparaître une fissure pour une sollicitation de compression. En s'inspirant de la théorie de l'endommagement anisotrope [Ladevèze, 1983] différenciant la traction et la compression, une loi d'évolution anisotrope de l'endommagement similaire à l'équation de la chaleur peut être obtenue [Miehe *et al.*, 2010b]. On appellera "approche *Phase-field*" (ou champ de phase) la méthode qui permet d'obtenir cette loi d'endommagement. Celle-ci a été testée dans des essais numériques académiques [Miehe *et al.*, 2010b, Miehe *et al.*, 2010a, Zhang *et al.*, 2017] puis utilisée dans le cadre de matériaux plus complexes comme les composites [Espadas-Escalante *et al.*, 2018]. L'implémentation de cette loi dans le code commercial Abaqus a aussi été réalisée et exploitée [Msekh *et al.*, 2015, Molnár et Gravouil, 2017]. Enfin l'ajout de potentiels supplémentaires a permis de tenir compte des effets thermiques [Miehe *et al.*, 2015b] ou de la plasticité [Alessi *et al.*, 2015, Azinpour *et al.*, 2018]. La souplesse accordée par les potentiels thermodynamiques motive l'utilisation de l'approche *Phase-field* pour modéliser la rupture à l'échelle de la micro-structure.

L'influence des effets visco-plastiques sur le comportement endommageable du matériau étant souhaité, une proposition de couplage endommagement/fluage serait aussi appréciée par Safran Ceramics. Le comportement en fluage des CMCs est bien connu expérimentalement à l'échelle de la pièce [Jadaan, 1998, Yoon *et al.*,

2000, Ruggles-Wrenn et Pope, 2014] de même que celui des fibres seules [Bodet *et al.*, 1996, Sauder et Lamon, 2007, Robertson *et al.*, 2020], toutefois aucune formulation thermodynamique ne propose un couplage clair entre la variable interne d'endommagement et les variables associées à la déformation visco-plastique. Des éléments de réponse à cette problématique seront ainsi apportés dans ce manuscrit en s'inspirant des travaux portant de l'intégration de la plasticité ductile dans la formulation de la loi d'endommagement. En outre le comportement des fibres face à l'humidité ou à l'air sec a suffisamment été observé pour poser des modèles d'oxydation fiables [Hay et Chater, 2017, Hay et Mogilevsky, 2019] qui peuvent être pris en compte pour enrichir la loi d'endommagement.

Plan de thèse

Deux problématiques principales ont été mises en évidence dans cette introduction. Il a été choisi de séparer ce manuscrit en deux parties se divisant chacune en plusieurs chapitres comme présentés ci-dessous :

Partie 1 : Description d'une micro-structure riche par une approche multi-échelle

Chapitre 1 : Le premier chapitre aura pour objectif de présenter les différents outils numériques susceptibles de pouvoir décrire une micro-structure riche. Les méthodes d'enrichissement cinématiques seront explicitées et le choix d'une GFEM multi-échelle justifié.

Chapitre 2 : Le deuxième chapitre détaillera l'implémentation de la GFEM multi-échelle dans le code commercial Abaqus avant de proposer une application sur une micro-structure.

Partie 2 : Modélisation de la rupture au sein de la micro-structure d'un CMC

Chapitre 1 : Le premier chapitre aura pour objectif de rappeler les différentes stratégies de modélisation de la rupture au sein d'une structure virtuelle. En particulier l'emploi d'une méthode par champ de phase pour cette thèse sera justifié et la théorie développée.

Chapitre 2 : Le deuxième chapitre présentera l'exploitation de la méthode par champ de phase dans le logiciel Abaqus pour une micro-structure virtuelle puis une étude de déviation de fissure au niveau de l'interphase sera proposée.

Chapitre 3 : Le troisième chapitre se focalisera sur le phénomène de fluage au sein d'un CMC. Une analyse de l'existant concernant ce mécanisme sera menée puis une proposition d'enrichissement de la formulation par champ de phase sera présentée.

PARTIE I

Description d'une micro-structure riche par une approche multi-échelle

Chapitre 1

Les outils numériques de description d'une structure

DANS ce premier chapitre, un bilan des méthodes numériques utiles à la description d'une structure est présenté. Les avantages et faiblesses des différentes stratégies multi-échelles sont mis en avant et permettent de justifier le choix d'une méthode d'enrichissement cinématique de type GFEM pour la représentation d'une micro-structure de CMC.

Diverses études ont été menées dans le but de modéliser une structure. Dans le cadre de cette thèse c'est une micro-structure de CMC qui doit être décrite. Celle-ci étant riche par la présence de nombreux motifs et phases, un état de l'art des différents outils numériques de description d'une structure est alors proposé dans ce chapitre afin de justifier la stratégie employée dans le [Chapitre 2](#).

1 Définition du problème

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de bord $\partial\Omega = \partial\Omega_u + \partial\Omega_F$ où $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_F = \emptyset$. Il est soumis à un effort volumique interne \mathbf{f} , tout effet dynamique est négligé. En posant $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{Div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \quad (1.1)$$

Une condition aux limites en effort surfacique \mathbf{F}_d est appliquée sur le bord $\partial\Omega_F$ et est liée à la contrainte par la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (1.2)$$

Où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire à la surface $\partial\Omega_F$. Une condition aux limites en déplacement est appliquée sur le bord $\partial\Omega_u$, le déplacement prend donc la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_u \quad (1.3)$$

Le Composite à Matrice Céramique (CMC) considéré est rigide et sera amené à se déformer peu sous l'effet de la température, l'hypothèse des petites perturbations est alors adoptée et permet de lier linéairement le déplacement \mathbf{u} au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{u}) + \underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{u})^T) \quad (1.4)$$

Pour cette Partie I de la thèse, le problème sera supposé purement élastique. La contrainte est supposée être liée linéairement à la déformation par la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.5)$$

En notant \mathcal{U}_{adm} l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles tel que $\mathcal{U}_{adm} = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) | \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_u\}$, on considère $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{adm}$. L'espace vectoriel des déplacements cinématiquement admissibles à zéro est désigné par l'ensemble $\mathcal{U}_{adm}^0 = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) | \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$ et est aussi défini sur Ω , soit $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{adm}^0$. La formulation faible du problème 1.1 s'écrit :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{adm}$ tel que $\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{adm}^0$:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^* d(\partial\Omega_F) + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \quad (1.6)$$

2 Décomposition de Domaine

La simulation de structures de grandes tailles possédant aussi un grand nombre de détails structuraux mène à des limitations de mémoire qui empêchent la résolution du problème complet [Beckie *et al.*, 1993]. Les méthodes de décomposition de domaine visent alors à découper le problème global en sous-problèmes plus petits et donc moins gourmands en temps de calcul grâce à la répartition du travail sur plusieurs cœurs. Les sous-sections suivantes ont pour but de dresser un état de l'art des différentes variantes parmi les méthodes de Décomposition de Domaine. Celles-ci peuvent être scindées en deux familles : les méthodes avec recouvrement et sans recouvrement.

Historiquement les méthodes avec recouvrement et plus généralement la notion de Décomposition de Domaine ont été introduites par [Schwarz, 1870]. L'idée était de résoudre un problème aux dérivées partielles pour lequel une solution ne pouvait être trouvée que sur des domaines de forme rectangulaire ou circulaire. Il a alors été choisi de décomposer le problème en sous-problèmes élémentaires pour répondre à la problématique donnée, d'où le schéma classique proposé en [FIGURE 1.1](#). Cette structure est décomposée en deux sous-structures (une circulaire Ω_1 et une rectangulaire Ω_2) se recouvrant. La structure Ω_1 a une partie Γ_1 de son bord dans Ω_2 qui elle-même a une partie Γ_2 de son bord dans Ω_1 . L'enjeu est alors de faire le lien entre les solutions calculées sur les sous-domaines afin de reconstruire la solution sur l'ensemble du domaine, en tenant compte de l'éventuel recouvrement entre les sous-domaines.

Plusieurs stratégies ont été proposées pour résoudre le problème de la décomposition de Schwarz. Le détail de ces méthodes n'est pas donné dans ce manuscrit mais est disponible dans les thèses [Oumaziz, 2017, Negrello, 2017]. Il ressort toutefois des méthodes de Schwarz qu'augmenter la taille du recouvrement permet d'augmenter la vitesse de résolution au prix d'une grande quantité d'informations à échanger entre les sous-domaines, ce qui augmente le temps de calcul effectif. C'est pourquoi ce sont les approches sans recouvrement qui sont privilégiées pour la suite de cet état de l'art, le lecteur peut toutefois se référer à la revue de [Cai, 2003] qui traite des approches avec recouvrement.

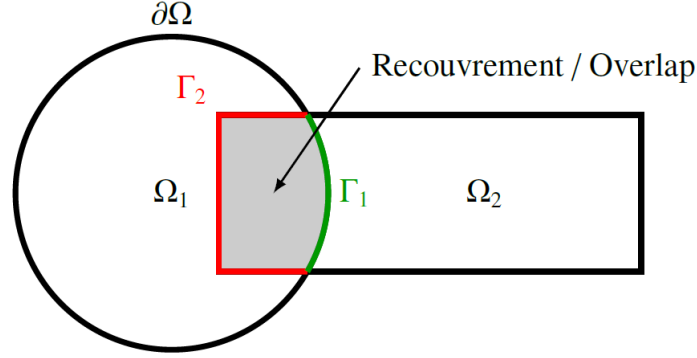


FIGURE 1.1 – Illustration de la décomposition de Schwarz. Image tirée de [Oumaziz, 2017]

2.1 Cadre de la Décomposition de Domaine sans recouvrement

Le domaine Ω considéré lors de la définition du problème (Section 1) est scindé ici en deux sous-domaines (il peut y en avoir plus) $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ séparés par une interface Γ . Des efforts $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$ ainsi que des déplacements $\mathbf{u}_\Gamma^{(1)}$ et $\mathbf{u}_\Gamma^{(2)}$ assurent la cohésion entre les 2 sous-domaines. Un schéma de principe d'une décomposition de domaine est donné en FIGURE 1.2.

La formulation faible 1.6 peut être reformulée en tenant compte des sous-domaines :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(1)}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega^{(2)}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}^*) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\lambda}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_\Gamma^{(1)} + \boldsymbol{\lambda}^{(2)} \cdot \mathbf{u}_\Gamma^{(2)} \right) dS + \int_{\partial\Omega_F} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^* d(\partial\Omega_F) + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \end{aligned} \quad (1.7)$$

Les quantités d'interface doivent en plus vérifier les conditions suivantes sur Γ :

$$\boldsymbol{\lambda}^{(1)} + \boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u}_\Gamma^{(1)} = \mathbf{u}_\Gamma^{(2)} \quad (1.9)$$

D'un point de vue Éléments Finis, le système matriciel suivant peut être obtenu pour chaque sous-structure $j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^{(j)} & \underline{\underline{K}}_{i\Gamma}^{(j)} \\ \underline{\underline{K}}_{\Gamma i}^{(j)} & \underline{\underline{K}}_{\Gamma\Gamma}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^{(j)} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{(j)} \\ \mathbf{f}_\Gamma^{(j)} + \boldsymbol{\lambda}_\Gamma^{(j)} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

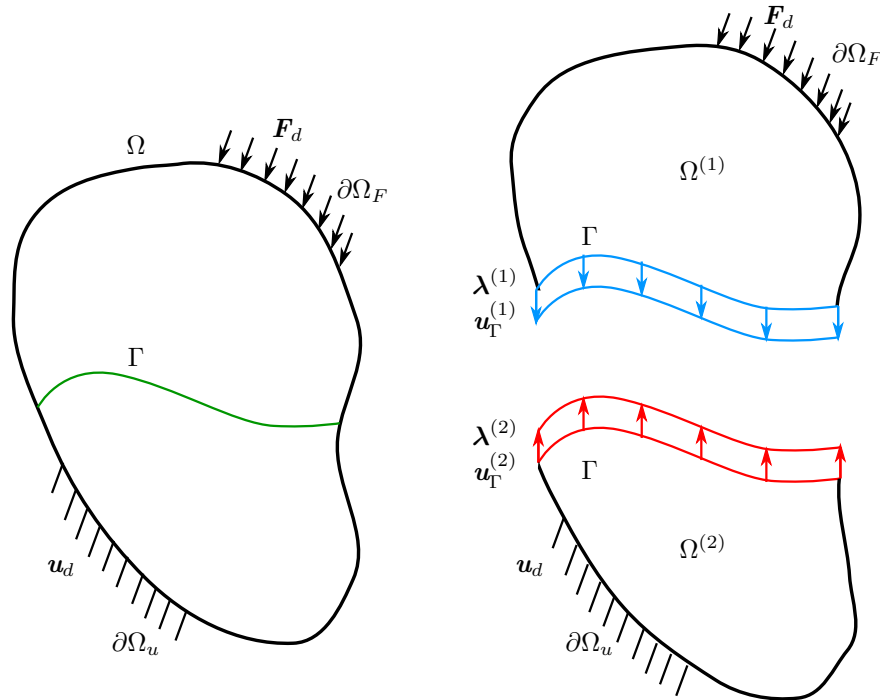


FIGURE 1.2 – Exemple de décomposition en deux sous-domaines et conditions aux limites associées

Le vecteur $\mathbf{u}_i^{(j)}$ compile les déplacements aux nœuds intérieurs au domaine $\Omega^{(j)}$, $\mathbf{u}_\Gamma^{(j)}$ est le vecteur contenant les déplacements sur l'interface Γ . $\mathbf{f}_i^{(j)}$ et $\mathbf{f}_\Gamma^{(j)}$ sont les efforts nodaux à l'intérieur d'un sous-domaine ou à l'interface. La condition d'équilibre d'interface 1.8 et la condition de continuité 1.9 ne peuvent pas être imposées simultanément sous peine d'avoir à la fois une condition aux limites en déplacement et en effort en même temps au niveau de l'interface Γ de chaque sous-domaine : le problème serait mal posé. Trois familles de stratégies apparaissent alors pour résoudre l'équation matricielle 1.10 : les approches primales, les approches duales et les approches mixtes. Celles-ci sont décrites par la suite.

2.2 Différentes approches de résolution

2.2.1 Méthode primale

Les méthodes primales consistent à imposer la condition de déplacement à l'interface 1.9, elles sont basées sur les algorithmes de type Neumann-Neumann [Bourgat *et al.*, 1988, Le Tallec *et al.*, 1991]. Il s'agit alors de chercher l'équilibre des efforts 1.8. En appelant $\underline{\underline{K}}_S^{(j)}$ le complément de Schur de chaque sous-domaine j et en notant

$\mathbf{f}_S^{(j)}$ le second membre condensé calculé à partir des efforts nodaux, il est possible de réécrire la condition d'équilibre 1.8 peut être reformulée :

$$\underbrace{\left(\underline{\underline{K}}_S^{(1)} + \underline{\underline{K}}_S^{(2)} \right)}_{\underline{\underline{S}}_\Gamma} \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{f}_S^{(1)} + \mathbf{f}_S^{(2)} \quad (1.11)$$

Ici $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma^{(1)} = \mathbf{u}_\Gamma^{(2)}$. Ce problème condensé est généralement résolu en utilisant une approche itérative à l'aide de solveurs de Krylov afin d'éviter un calcul explicite de l'inverse du complément de Schur global $\underline{\underline{S}}_\Gamma$. Celui-ci est approché par les inverses des compléments de Schur $\underline{\underline{K}}_S^{(j)}$ de chaque sous-structure. Cette approximation est un préconditionneur classique dans la méthode [Klawonn et Widlund, 2001]. Dans les approches primales de type BDD (*Balancing Domain Decomposition*) [Mandel, 1993], un problème grossier est introduit pour pré-équilibrer les efforts d'interface et accélérer la convergence de l'algorithme.

2.2.2 Méthode duale

Dans les approches duales, le choix est fait de présupposer l'équilibre des efforts d'interface. Il s'agit donc de vérifier la continuité des déplacements à l'issue de l'algorithme de résolution. Ce sont les méthodes FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) [Farhat et Roux, 1991] qui sont employées. En tenant compte des mouvements de corps rigide des sous-structures générés par l'inversion des compléments de Schur primal un système de la forme suivante doit être résolu :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\Gamma^{(j)} = \left(\underline{\underline{K}}_S^{(j)} \right)^+ \left(\mathbf{f}_S^{(j)} + \underline{\underline{B}}^{(j)T} \boldsymbol{\lambda}_B \right) + \underline{\underline{R}}_\Gamma^{(j)} \boldsymbol{\alpha}^{(j)} \\ \underline{\underline{R}}_\Gamma^{(j)} \left(\mathbf{f}_S^{(j)} + \underline{\underline{B}}^{(j)T} \boldsymbol{\lambda}_B \right) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.12)$$

En terme de notation une matrice $\underline{\underline{A}}^+$ est le pseudo-inverse de la matrice $\underline{\underline{A}}$. L'espace engendré par les modes rigides (ou noyau de la matrice de rigidité d'un sous-domaine) est pris en compte via l'ajout d'un terme de la forme $\underline{\underline{R}}_\Gamma^{(j)} \boldsymbol{\alpha}^{(j)}$ dans le membre de droite de 1.12. Le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_B = \sum_j \underline{\underline{B}}^{(j)} \boldsymbol{\lambda}_\Gamma^{(j)}$ est construit à partir

d'opérateurs d'assemblages duaux $\underline{\underline{B}}^{(j)}$. Une contrainte d'orthogonalité est à prendre en compte dans la résolution de ce problème afin de vérifier qu'il soit bien posé. L'approche FETI doit donc faire appel à un problème grossier garantissant la continuité des modes rigides $\underline{\underline{R}}_\Gamma^{(j)}$ à l'interface. Un algorithme de type gradient conjugué projeté peut être choisi de manière analogue à l'approche primale en utilisant un assemblage des compléments de Schur des sous-domaines.

La méthode FETI2 [Farhat *et al.*, 2000] formule le problème macroscopique de façon à imposer des conditions supplémentaires sur le déplacement à l'interface, en particulier au niveau des nœuds "coins" des sous-domaines. Cette variante de la méthode FETI équipée d'un préconditionneur de Dirichlet montre une

meilleure convergence de l'algorithme dans le cadre de problèmes poutre, plaque ou coque. Une version duale-primale (mixte) FETI-DP [Farhat *et al.*, 2001] s'affranchit de la détermination des mouvements de corps rigides et montre une convergence plus rapide que pour les méthodes FETI1 et FETI2. Pour des structures à fortes hétérogénéités (autrement dit dont les phases possèdent des rigidités très différentes), les méthodes FETI demandent un nombre d'itérations plus élevé qu'une méthode BDD. Il a été noté dans [Gosselet *et al.*, 2003] que ceci était dû à une mauvaise initialisation du problème. Une fois celle-ci améliorée, il a été montré dans le même article que les méthodes FETI et BDD avaient un coût de calcul proche pour le même critère de convergence.

2.2.3 Approche mixte

L'idée des approches mixtes est de réaliser une combinaison des conditions en efforts et déplacements imposés aux interfaces afin de résoudre le problème. Pour imposer ces relations aux interfaces des méthodes de type Lagrangien augmenté [Fortin et Glowinski, 2000], FETI-DP ou Lagrangien augmenté deux fois comme la méthode LaTIn (*Large Time Increment*) peuvent être adoptées. Ce paragraphe se focalisera toutefois sur la méthode LaTIn [Ladevèze, 1985]. Cette méthode (dont la schéma de principe est donné en FIGURE 1.3) réalise une séparation d'échelle et fait la distinction entre :

- des équations linéaires d'équilibre aux interfaces définissant l'espace d'admissibilité A_d ;
- des équations locales comprenant le comportement (éventuellement non linéaire) des matériaux mis en jeu et définissant l'espace Γ .

La résolution est itérative et utilise des directions de recherche pour relier successivement les deux espaces de solution. La direction de recherche E^+ permet de passer de A_d à Γ grâce à la connaissance d'une solution globale s_n . La solution obtenue \hat{s}_n sert de point de départ à la recherche de la solution s_{n+1} avec la direction de recherche E^- qui assure le passage de Γ à A_d . L'algorithme est terminé lorsque la solution théorique S est suffisamment bien approchée.

2.2.4 Conclusion partielle

Les méthodes de Décomposition de Domaine ont pour objectif principal de découper une structure en sous-structures afin de résoudre des problèmes plus petits de manière parallélisée. Des conditions en effort ou en déplacement doivent être vérifiées aux interfaces entre les différentes sous-structures pour assurer l'équilibre du système complet. Ainsi de larges problèmes peuvent être traités de manière efficace et fine. Néanmoins la quantité de données obtenue est grande et un tri doit être effectué dans le but de récupérer les informations dignes d'intérêt dans le cadre du développement d'un outil de compréhension des phénomènes non linéaires qui se

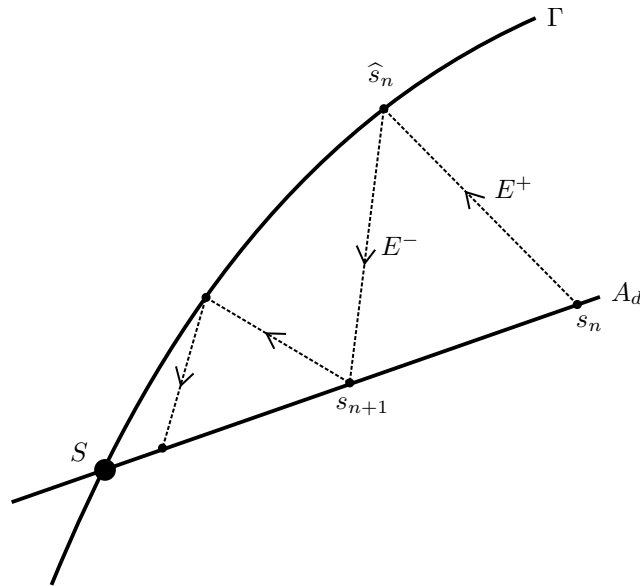


FIGURE 1.3 – Schéma de principe de la méthode LaTIn.

produisent au sein de la micro-structure d'un CMC. Par conséquent les stratégies de Décomposition de Domaine ne seront pas retenues dans cette thèse. La section suivante fait le bilan des méthodes d'homogénéisation, plus classiques dans l'étude des composites.

3 Homogénéisation

3.1 Idée

L'objectif des méthodes d'homogénéisation est de remplacer certains champs par des quantités plus simples comme des scalaires (par exemple) à travers une équivalence (en énergie). Puis dans l'idéal les équations bilan liant ces scalaires doivent être explicitées.

Dans le cadre de l'étude de pièces composites, les problèmes sont souvent traités en utilisant des propriétés homogénéisées au lieu des caractéristiques des différents composants de la structure. Ces quantités moyennées sont difficiles et coûteuses à mesurer dans le cadre de la conception d'un composite. Par conséquent de nombreux efforts ont été déployés dans le développement de modèles mathématiques et numériques pour obtenir des propriétés homogénéisées à partir de la connaissance des constituants et de la micro-structure du composite. Les méthodes décrites par la suite sont appliquées à un Volume Élémentaire de Référence (VER) dont une définition est fournie dans [Nemat-Nasser, 1986]. Les méthodes d'homogénéisation

peuvent se scinder en deux familles :

1. celle regroupant les stratégies se basant sur le champ complet ;
2. celle regroupant les stratégies se basant sur le champ moyen (modèle auto-cohérent).

Le principe des méthodes auto-cohérentes est d'assimiler un matériau hétérogène à un matériau homogène équivalent qui doit être caractérisé. Elles doivent alors répondre à une condition qui peut être énergétique ([Christensen et Lo, 1979]) ou portant sur des moyennes de champs ([Herve, 2002]). Parmi les modèles auto-cohérents pourront être cités celui à trois phases de [Herve et Zaoui, 1993] ou celui à quatre phases de [Saffré *et al.*, 1995] dans le cadre de composites à fibres courtes, le modèle de [Hervé-Luanco et Joannès, 2016] propose une extension aux fibres longues. Toutefois dans le cadre de ce manuscrit de thèse, ce sont les stratégies se basant sur le champ complet qui sont explicitées. Une comparaison entre modèle à champ moyen et modèle à champ complet est toutefois proposée dans [Gu *et al.*, 2015].

Les Eléments Finis ont permis de développer des routines permettant d'estimer une loi de comportement à l'échelle macroscopique à partir de calculs amont sur un VER. Bien que ces méthodes se montrent coûteuses en terme de performances de calculs, elles offrent la possibilité de simuler une réponse globale à partir d'une micro-structure arbitraire et du comportement de ses constituants. L'idée d'utiliser une discrétisation Eléments Finis de la microstructure liée à une échelle macroscopique via une procédure d'homogénéisation a été proposée par [Renard et Marmोनier, 1987]. Une généralisation et implémentation dans un code Eléments Finis a été proposée dans le cadre de la méthode FE² [Feyel, 1999]. Le principe de cette méthode est résumé par la suite dans la [Sous-section 3.2](#). La [Sous-section 3.3](#) résume quant à elle les méthodes par champ de transformation.

3.2 Homogénéisation asymptotique

3.2.1 Principe

Dans le cadre de l'homogénéisation asymptotique, les composites sont supposés être périodiques. Une cellule élémentaire de référence peut alors être définie et permet de décrire toute la structure. L'analyse asymptotique s'applique en général à des problèmes linéaires à deux échelles (micro et macro) mais peut aussi s'étendre à des cas non linéaires [Fish *et al.*, 1999, Michel et Suquet, 2003, Boso *et al.*, 2005]. Une particularité de cette méthode est que deux jeux de coordonnées spatiales peuvent être définis, chacun à une échelle différente. Pour cela un rapport d'échelle $\epsilon \ll 1$ est introduit. Un premier vecteur \mathbf{X} regroupe les coordonnées macroscopiques, un deuxième vecteur \mathbf{y} contient quant à lui les coordonnées à l'échelle du VER

périodique. Le rapport d'échelle ϵ sert à définir un "zoom" grâce à l'introduction d'une nouvelle variable macroscopique \mathbf{Y} comparable à \mathbf{X} et telle que :

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{y}}{\epsilon} \quad (1.13)$$

Un point \mathbf{M} de la structure peut alors être positionné précisément en utilisant les deux jeux de coordonnées :

$$\mathbf{M} = \mathbf{X} + \mathbf{y} \quad (1.14)$$

En admettant que la périodicité de la structure microscopique impose des conditions périodiques aux bords, la représentation suivante du champ de déplacement est adoptée :

$$\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^n \epsilon^i \mathbf{u}_i(\mathbf{X}, \mathbf{y}) \quad (1.15)$$

Le tenseur gradient de ce champ de déplacement s'écrit avec ces jeux de coordonnées :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{u}^\epsilon) = \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{X}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{Y}} \quad (1.16)$$

et par conséquent le tenseur des petites déformations s'écrit pour ce champ \mathbf{u}^ϵ :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{u}^\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right] + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{Y}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial \mathbf{Y}} \right)^T \right] = \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}^\epsilon) \quad (1.17)$$

Enfin en appliquant le développement asymptotique 1.15 :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{u}^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_0) + \sum_{i=0}^n \left(\epsilon^i \left[\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_i) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_{i+1}) \right] \right) \quad (1.18)$$

L'équation d'équilibre 1.1 ainsi que la loi de comportement 1.5 (telle que $\mathbf{H}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}(\mathbf{y})$) permettent d'aboutir à une équation de la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon^2} \text{Div}_{\mathbf{Y}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_0) \right] + \\ & \frac{1}{\epsilon} \left\{ \text{Div}_{\mathbf{Y}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \left(\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_1) \right) \right] + \text{Div}_{\mathbf{X}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_0) \right] \right\} + \\ & \left\{ \text{Div}_{\mathbf{Y}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \left(\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_1) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_2) \right) \right] + \text{Div}_{\mathbf{X}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \left(\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_1) \right) \right] + \mathbf{f} \right\} \\ & + \dots = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.19)$$

A cause du rapport d'échelle ϵ mis à différentes puissances, chaque terme de cette équation doit être nul, ainsi plusieurs équations d'équilibre sont définies :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\epsilon^2} \text{Div}_{\mathbf{Y}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_0) \right] = \mathbf{0} \\
& \frac{1}{\epsilon} \text{Div}_{\mathbf{Y}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \left(\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_1) \right) \right] + \text{Div}_{\mathbf{X}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_0) \right] = \mathbf{0} \\
& \text{Div}_{\mathbf{Y}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \left(\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_1) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_2) \right) \right] + \text{Div}_{\mathbf{X}} \left[\mathbf{H}(\mathbf{y}) : \left(\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}_0) + \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}_1) \right) \right] + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\
& \dots
\end{aligned} \tag{1.20}$$

La loi de comportement et l'équilibre mécanique permettent alors d'exhiber plusieurs problèmes indépendants dont une solution existe pour chacun d'entre eux : c'est la force de l'homogénéisation asymptotique. Enfin les phénomènes dépendant du temps peuvent être intégrés à l'homogénéisation asymptotique comme la propagation d'ondes [Chen et Fish, 2001] ou la conduction thermique [Zhang *et al.*, 2007]. Il faut néanmoins garder à l'esprit que ces méthodes utilisent des hypothèses fortes comme la périodicité de la micro-structure et un cadre élastique. Aussi les effets de bord doivent être pris en compte [Dumontet, 1986].

3.2.2 Une application de l'homogénéisation asymptotique : la méthode FE²

L'idée de la méthode FE² est de décrire le comportement d'une structure hétérogène en utilisant un modèle Eléments Finis à deux niveaux. A chaque point d'intégration est assigné un VER périodique contenant le comportement mécanique (qui peut être non linéaire). Deux maillages sont alors nécessaires : celui du VER périodique et celui de la structure macroscopique. Au sein d'un domaine Ω et à un instant t donné, le champ de déplacement solution \mathbf{u} est cherché sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{E}}\mathbf{x} + \mathbf{u}^L(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.21}$$

Le tenseur $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ est la déformation macroscopique calculée à partir de la moyenne de la déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ et \mathbf{u}^L est un champ de déplacement local défini sur le VER. La déformation macroscopique est ensuite utilisée pour définir les conditions aux limites sur le VER périodique dont le champ de contrainte local est déduit avant de remonter à l'échelle macroscopique par calcul du champ moyen. L'étape de calcul local peut être fait via un algorithme de Newton-Raphson pour un comportement non linéaire. La **FIGURE 1.4** illustre les étapes suivies par l'algorithme.

Par la suite une version parallélisée de la procédure a été proposée [Feyel et Chaboche, 2000]. Toutefois dans le cas où le VER périodique n'est pas de taille suffisamment faible comparée à celles des éléments macroscopiques, l'homogénéisation

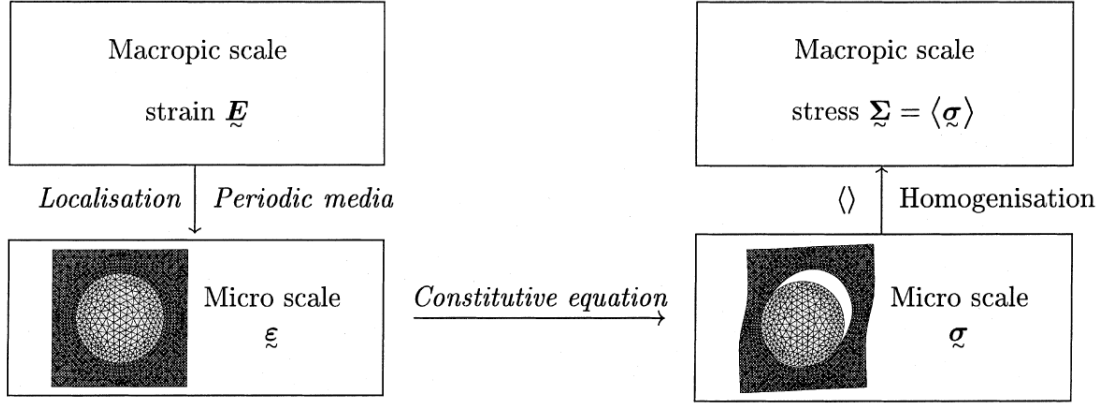


FIGURE 1.4 – Procédure d’homogénéisation FE^2 . Les tenseurs sont écrits ici avec un tilde $\tilde{\square}$. Image tirée de [Feyel, 1999].

à l’ordre 1 (ou premier gradient) utilisée dans la méthode FE^2 peut créer des effets d’échelles et de localisation des déformations. Cette limitation a été corrigée dans [Feyel, 2003] grâce à un couplage entre deux milieux continus différents à deux échelles différentes.

Les applications aux composites restent toutefois limitées car peu d’entre eux possèdent une micro-structure périodique. C’est le cas des composites à fibres SiC/Ti étudiés dans [Feyel, 1999] mais cette hypothèse ne s’applique pas aux CMCs.

3.3 Méthodes par champs de transformation

Les méthodes par champs de transformation ou TFA (pour *Transformation Field Analysis*) sont basées sur l’idée que les champs microscopiques sont constants par morceaux afin de réduire le nombre de variables internes macroscopiques. Ces méthodes ont été développées initialement dans le cadre de l’étude de composites élasto-plastiques [Dvorak et Rao, 1976, Dvorak et Benveniste, 1992, Dvorak et al., 1994b]. La version non-uniforme de la TFA (NTFA) a quant à elle été présentée par [Michel et Suquet, 2003, Michel et Suquet, 2004] et fera l’objet d’un second développement.

3.3.1 Méthode TFA

Soit un VER périodique de volume V . Les tenseurs des déformations et contraintes s’écrivent au sein de ce VER :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{x}, t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{in}(\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}^e(\mathbf{x}, t) + \underline{\underline{\sigma}}^{in}(\mathbf{x}, t) \quad (1.22)$$

Si le volume V est constitué de N phases bien distinctes, il est possible d'associer à chacune d'entre elles un volume V_r ($r \in \llbracket 1, N \rrbracket$). La déformation et la contrainte s'écrivent respectivement dans chaque phase :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_r(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_r^e(\mathbf{x}, t) + \underline{\underline{\varepsilon}}_r^{in}(\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_r(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}_r^e(\mathbf{x}, t) + \underline{\underline{\sigma}}_r^{in}(\mathbf{x}, t) \quad (1.23)$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}_r^e$ et $\underline{\underline{\sigma}}_r^e$ représentent la contribution élastique de la déformation et de la contrainte locales dans le VER. $\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{in}$ et $\underline{\underline{\sigma}}_r^{in}$ sont les contributions inélastiques qui peuvent être dues aux effets thermiques par exemple. Dans le cadre de la méthode TFA, les champs continus sont remplacés par des approximations constantes par morceaux sur les phases ou même des sous-volumes du VER. Dans ce qui va suivre seule une décomposition par phases sera considérée afin de simplifier les notations. Dans le cadre de la TFA les champs de déformation et contrainte moyennés sont écrits sous la forme :

$$\underline{\underline{E}}(t) = \sum_{r=1}^N c_r \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_r \rangle(t) \quad ; \quad \underline{\underline{\Sigma}}(t) = \sum_{r=1}^N c_r \langle \underline{\underline{\sigma}}_r \rangle(t) \quad (1.24)$$

Le coefficient c_r est défini de la manière suivante :

$$c_r = \frac{1}{|V|} \int_V \delta_r(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \delta_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in V_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.25)$$

Les champs moyennés $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_r \rangle$ et $\langle \underline{\underline{\sigma}}_r \rangle$ sont quant à eux définis comme suit :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_r \rangle(t) = \frac{1}{|V_r|} \int_{V_r} \underline{\underline{\varepsilon}}_r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad ; \quad \langle \underline{\underline{\sigma}}_r \rangle(t) = \frac{1}{|V_r|} \int_{V_r} \underline{\underline{\sigma}}_r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1.26)$$

Dans la TFA de [Dvorak *et al.*, 1994b, Dvorak *et al.*, 1994a], il est choisi de prendre une forme du tenseur de déformation inélastique uniforme par morceaux :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{in}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r(t) \delta_r(\mathbf{x}) \quad (1.27)$$

En utilisant cette décomposition, les relations constitutives du problème de mécanique se résument à un problème d'algèbre faisant intervenir l'opérateur de Green $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Il a été démontré [Dvorak et Benveniste, 1992] que le problème de mécanique pouvait se réécrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{E}}(t) + \frac{1}{|V|} \int_V \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \mathbf{H}(\mathbf{x}') : \underline{\underline{\varepsilon}}^{in}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}' \quad (1.28)$$

Le terme $\mathbf{A}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{E}}(t)$ s'interprète comme la déformation locale au point \mathbf{x} due à la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ et en l'absence de déformations inélastiques. Ce formalisme a été adopté dans le cadre de problèmes faisant intervenir des phénomènes

thermiques, de plasticité ou d'endommagement [Dvorak *et al.*, 1994b, Dvorak et Zhang, 2001, Chaboche *et al.*, 2001, Fish et Yu, 2002].

Il a néanmoins été noté que la méthode TFA demandait un découpage en sous-domaines de chaque phase afin d'obtenir une description satisfaisante du comportement homogénéisé avec plasticité [Dvorak *et al.*, 1994a, Chaboche *et al.*, 2001, Michel et Suquet, 2003]. Ce besoin d'un découpage plus fin provient du caractère fortement non-uniforme du champ de déformation plastique. Par conséquent le nombre d'inconnues du problème est drastiquement augmenté ce qui limite l'intérêt de la TFA. Le choix d'un découpage du champ de déformation inélastique en somme de contributions constantes par zones n'est pas suffisamment fin pour capturer l'information d'intérêt.

3.3.2 Méthode NTFA

La méthode NTFA (*Nonuniform Transformation Field Analysis*) est une réponse à la limitation évoquée dans le paragraphe précédent, elle a été suggérée par [Michel et Suquet, 2003]. Cette fois-ci le champ de déformation inélastique est décomposé comme suit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{in}(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^M \varepsilon_s^{in}(t) \underline{\underline{\mu}}_s(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

Les ε_s^{in} sont les coefficients de la décomposition sur les M sous-domaines de volume V_s ($s \in \llbracket 1, M \rrbracket$) et les $\underline{\underline{\mu}}_s$ sont des champs de transformation non-uniformes définis indépendamment de la phase du matériau. Ces champs ont pour but de mieux capturer les non-linéarités dus à la plasticité. Le problème de mécanique peut toujours s'écrire sous la forme présentée en 1.28. L'avantage de la NTFA sur la TFA a clairement été mise en avant dans [Michel et Suquet, 2004] dans le cadre d'un essai de cisaillement et de traction sur un domaine homogène avec inclusion circulaire plus rigide. L'utilisation du code Abaqus en vue de réaliser l'homogénéisation numérique d'un matériau 3D via la NTFA a été proposée par [Fritzen et Böhlke, 2010]. Des investigations ont été menées pour prendre en compte l'anisotropie de grains dans une microstructure [Fritzen et Böhlke, 2011] et récemment la NTFA a été transposée à un problème d'assemblage périodique à homogénéiser dans le cadre d'une application aux réacteurs à eau pressurisée [Leturcq *et al.*, 2019].

3.4 Conclusion partielle

Les méthodes basées sur l'homogénéisation permettent de résoudre un problème sur deux échelles différentes. En particulier l'homogénéisation périodique et ses extensions fournissent des informations sur les champs locaux au sein de la microstructure. De plus la possibilité de définir un nouveau problème de mécanique des milieux continus pour l'homogénéisation asymptotique rend cette méthode intéressante

dans le cadre de la modélisation de micro-structures de composites. Cependant l'observation au MEB de la micro-structure d'un CMC montre que celle-ci n'est pas périodique, un VER périodique n'est donc pas indiqué pour décrire le comportement d'un tel matériau. L'arrangement des fibres est aléatoire au sein d'un fil. Enfin une connaissance amont du matériau est nécessaire pour construire un VER statistiquement représentatif. Or l'objectif de cette partie est de proposer un outil permettant de décrire une micro-structure, par conséquent les méthodes d'homogénéisation par champ complet ne sont pas choisies pour ce travail de thèse. Les méthodes NTFA peuvent fournir des outils utiles à la description du matériau en choisissant judicieusement la forme des champs de transformation adoptés. Il reste néanmoins la problématique de la stratégie de calcul du champ de déformation homogénéisé \underline{E} dans 1.28.

4 Enrichissement et superposition de modèles

L'idée d'une séparation d'échelle dans l'écriture du champ de déplacement approché tel que formulé en 1.21 est aussi utilisée dans le cadre des méthodes d'enrichissement et de superposition de modèles. Les paragraphes qui suivent donnent des exemples de méthodes d'enrichissements et de superpositions de modèles, les méthodes d'enrichissement cinématique issues de la Partition de l'Unité font l'objet de la Section 5.

Les méthodes multi-échelles variationnelles permettent d'enrichir un problème grossier sur une zone donnée ou sur toute la structure considérée. L'enrichissement peut être effectué sur la formulation énergétique du problème comme c'est le cas avec la méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998] mais est plus souvent réalisé sur le champ de déplacement.

C'est le cas de la Méthode des Eléments Finis par Superposition (S-FEM ou *S-method* en anglais) de [Fish, 1992] qui propose de séparer le déplacement approché en un déplacement global (associé à un maillage grossier) et un déplacement local (associé à un maillage fin). La conformité entre maillages n'est pas nécessaire et la continuité des déplacements est assurée par des conditions aux limites de Dirichlet. Ce type de stratégie autorise la description d'une micro-structure riche grâce à des motifs (décrits par le maillage fin) mais tous les noeuds de tous les maillages fins utilisés sont impliqués dans le problème matriciel de la structure complète : le coût de calcul s'en trouve potentiellement augmenté.

Il est aussi possible de mentionner les approches variationnelles multi-échelles proposées dans [Hughes, 1995]. L'idée est de rechercher une correction du champ global en tenant compte des phénomènes locaux. Des fonctions de Green peuvent aussi être utilisées, elles sont analytiques ou numériques [Hughes *et al.*, 1998]. Tou-

tefois un tel enrichissement est localisé au niveau d'un élément du maillage et la condition de continuité au niveau des arêtes de l'élément est difficile à satisfaire, surtout en vue d'un emploi dans un code commercial.

5 Enrichissement cinématique par la Méthode de Partition de l'Unité

5.1 Concept de Partition de l'Unité

5.1.1 Définition d'un *patch* d'éléments

La méthode de Ritz-Galerkin consiste à approximer le problème continu 1.6 par un problème de dimension finie dont la solution approche de manière satisfaisante la solution exacte. Le domaine Ω initialement considéré est approché par un maillage Ω_h . Un ensemble d'éléments du maillage ayant un noeud k en commun sera appelé *patch* Ω_k . Il est à noter qu'un élément du maillage peut appartenir à plusieurs *patches* ($\Omega_p \cap \Omega_q \neq \emptyset$ sur la FIGURE 1.5) et que le nombre de *patches* $N_{patches}$ est égal au nombre total de noeuds N_{noeuds} , il y a donc un nombre fini de recouvrement de *patches*.

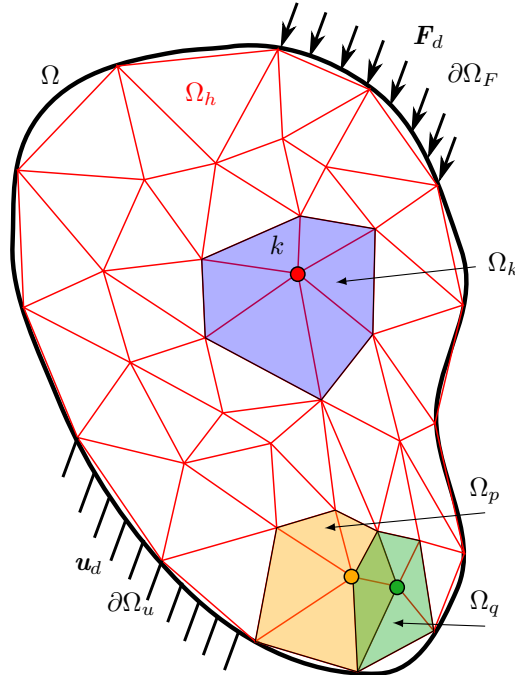


FIGURE 1.5 – Exemples de *patches* sur le maillage du domaine Ω

Sur un *patch* Ω_p , le déplacement approché prend la forme :

$$\mathbf{u}_h^{(p)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_p \widehat{\varphi}_p(\mathbf{x}) \quad (1.30)$$

L'ensemble $\{\widehat{\varphi}_p\}_{p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket}$ est appelé ensemble des fonctions de forme (ou fonctions "chapeau"), chaque $\widehat{\varphi}_p$ est un polynôme par morceaux de degré d . Une fonction de forme $\widehat{\varphi}_p$ est définie sur un *patch* d'éléments Ω_p centré sur le noeud p de coordonnées \mathbf{x}_p comme illustré en **FIGURE 1.6**. Sur le *patch* Ω_p , $\widehat{\varphi}_p$ respecte les conditions suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_p, \widehat{\varphi}_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_p \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_q \ (q \neq p) \end{cases} \quad (1.31)$$

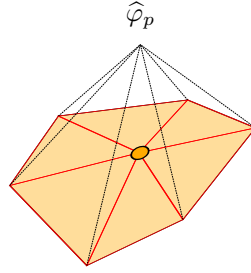


FIGURE 1.6 – Fonction "chapeau" sur un *patch* d'éléments

5.1.2 Méthode de Partition de l'Unité

Soit le *patch* d'éléments Ω_p ($p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket$) de la **FIGURE 1.6**, d'après [Melenk et Babuška, 1996] les fonctions de forme $\{\widehat{\varphi}_p\}_{p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket}$ constituent une partition de l'unité si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le patch } \Omega_p \text{ est un ouvert de } \Omega_h \\ \forall p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket, \text{supp}(\widehat{\varphi}_p) = \Omega_p \text{ (Support borné)} \\ \forall p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket, \widehat{\varphi}_p \text{ continues} \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_h, \sum_{p=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_p(\mathbf{x}) = 1 \text{ (Partition de l'unité)} \\ \exists C_\infty \text{ tel que } \forall p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket, \|\widehat{\varphi}_p\|_{L^\infty(\Omega_p)} \leq C_\infty \text{ (Fonction régulière)} \\ \exists C_G \text{ tel que } \forall p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket, \|\nabla \widehat{\varphi}_p\|_{L^\infty(\Omega_p)} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\Omega_p)} \text{ (Gradient régulier)} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Si les hypothèses de la PUM sont vérifiées, le déplacement nodal \mathbf{u}_p de 1.30 peut être décrit par des fonctions d'enrichissement $\psi_k^{(p)}(\mathbf{x})$ (avec $k \in \llbracket 1; n_{enr}^{(p)} \rrbracket$ où $n_{enr}^{(p)}$ est le nombre de fonctions d'enrichissement sur le noeud central du *patch* p). Alors en posant :

$$\forall p \in \llbracket 1; N_{patches} \rrbracket, \mathbf{u}_p \rightarrow \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)}(\mathbf{x}) \quad (1.33)$$

La forme du déplacement approché sur le *patch* Ω_p devient :

$$\mathbf{u}_h^{(p)}(\mathbf{x}) = \widehat{\varphi}_p(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_p$$

Cette écriture peut se généraliser à tous les *patches*, c'est-à-dire sur le domaine Ω_h entier :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{N_{patches}} \left[\widehat{\varphi}_p(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h \quad (1.34)$$

5.1.3 Influence de la qualité de l'enrichissement sur le déplacement calculé

Il a été démontré dans [Melenk et Babuška, 1996] que si les fonctions $\psi_k^{(p)}(\mathbf{x})$ de 1.34 décrivaient suffisamment bien le comportement local sur un *patch*, alors l'écart entre le champ de déplacement réel recherché \mathbf{u} et le champ approché \mathbf{u}_h était faible, à condition que $\left\| \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)} \right\|_{L^\infty(\Omega_p)}$ soit borné quel que soit p .

Démonstration. On calcule l'écart entre la solution exacte \mathbf{u} et la solution approchée $\underline{\mathbf{u}}_h$ pour la norme L^∞ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty} &= \left\| \mathbf{u} - \sum_{p=1}^{N_{patches}} \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \widehat{\varphi}_p \psi_k^{(p)} \right\|_{L^\infty(\Omega_p)} \\ &= \left\| \sum_{p=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_p \mathbf{u} - \sum_{p=1}^{N_{patches}} \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \widehat{\varphi}_p \psi_k^{(p)} \right\|_{L^\infty(\Omega_p)} \end{aligned}$$

Car $\sum_{p=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_p = 1$. On factorise ensuite par $\sum_{p=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_p$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty} &= \left\| \sum_{p=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_p \left(\mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)} \right) \right\|_{L^\infty(\Omega_p)} \\ &\leq \sum_{p=1}^{N_{patches}} \left\| \widehat{\varphi}_p \right\|_{L^\infty} \left\| \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)} \right\|_{L^\infty(\Omega_p)} \end{aligned}$$

Comme les $\widehat{\varphi}_p$ sont bornées pour la norme $L^\infty \exists C \geq 0$ tel que $\forall p \in \llbracket 1 ; N_{patches} \rrbracket \|\widehat{\varphi}_p\|_{L^\infty(\Omega_p)} \leq C$. Alors :

$$\sum_{p=1}^{N_{patches}} \|\widehat{\varphi}_p\|_{L^\infty(\Omega_p)} \left\| \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)} \right\|_{L^\infty(\Omega_p)} \leq C \sum_{p=1}^{N_{patches}} \left\| \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)} \right\|_{L^\infty(\Omega_p)}$$

En posant $\Psi_p = \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)}$ l'enrichissement total sur chaque *patch* p , on montre que comparer \mathbf{u} avec \mathbf{u}_h revient à comparer \mathbf{u} avec Ψ_p . Donc si les Ψ_p décrivent suffisamment bien le système, l'écart entre le champ réel et le champ approché est faible. □

5.1.4 Ecriture de l'enrichissement sur chaque *patch*

Il a été suggéré dans [Strouboulis *et al.*, 1998] d'ajouter à la formulation 1.34 un déplacement Eléments Finis non enrichi de la forme de 1.30 car rien ne l'interdit dans la méthode de partition de l'unité. Rien n'empêche non plus d'avoir les mêmes fonctions de forme dans la partie Eléments Finis et la partie enrichissement. Le déplacement approché obtenu sera appelé \mathbf{u}_h et s'écrira :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{I=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\mathbf{u}_{EF}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{N_{patches}} \widehat{\varphi}_p(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)}(\mathbf{x})}_{\mathbf{u}_{enr}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h \quad (1.35)$$

\mathbf{u}_{EF} est la partie Eléments Finis et \mathbf{u}_{enr} est la contribution d'enrichissement du champ de déplacement approché. Les fonctions $\widehat{\varphi}_I(\mathbf{x})$ et $\widehat{\varphi}_i(\mathbf{x})$ ne sont pas forcément des polynômes de même degré. Pour résumer, dans le cas de l'écriture du déplacement approché par *patches*, on a :

- \mathbf{u}_I est le déplacement nodal Eléments Finis associé au *patch* I ;
- $\widehat{\varphi}_I(\mathbf{x})$ est la fonction "chapeau" Eléments Finis associée au *patch* I ;
- $\widehat{\varphi}_p(\mathbf{x})$ est la fonction "chapeau" Eléments Finis associée au *patch* p dans la partie enrichie ;
- $\mathbf{a}_k^{(p)}$ est l'inconnue associée à l'enrichissement k associée au *patch* p ;
- $\psi_k^{(p)}(\mathbf{x})$ est la fonction d'enrichissement k associée au *patch* p .

Pour simplifier les développements qui suivent il est choisi de poser $\widehat{\varphi}_I = \widehat{\varphi}_I = \varphi_I$, autrement dit les mêmes fonctions "chapeau" sont utilisées dans la partie Eléments Finis et dans la partie enrichissement du champ de déplacement approché. Ainsi

c'est la forme suivante de l'écriture du déplacement approché qui est adoptée pour la suite :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{I=1}^{N_{patches}} \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\mathbf{u}_{EF}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{N_{patches}} \varphi_p(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n_{enr}^{(p)}} \mathbf{a}_k^{(p)} \psi_k^{(p)}(\mathbf{x})}_{\mathbf{u}_{enr}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h \quad (1.36)$$

Un parallèle peut être fait avec les *bubble functions* de [Brezzi *et al.*, 1992]. Dans la partie enrichie \mathbf{u}_{enr} , les fonctions φ_p jouent le rôle de fonctions "bulles" qui s'annulent au bord du *patch* et les $\mathbf{a}_k^{(p)}$ sont les valeurs nodales associées.

5.1.5 Différence entre XFEM et GFEM

La formulation du déplacement approché 1.34 constitue la base de la PUFEM (*Partition of Unity Finite Element Method* en anglais). C'est une extension des versions h , p et hp de la méthode des éléments finis. La XFEM (*eXtended Finite Element Method*) [Belytschko et Black, 1999, Moës *et al.*, 1999] ainsi que la GFEM (*Generalized Finite Element Method*) [Strouboulis *et al.*, 1998, Strouboulis *et al.*, 2001] sont deux méthodes utilisant des fonctions d'enrichissement et développées en parallèle. Bien que ces deux stratégies s'appuient sur les hypothèses de Partition de l'Unité, la distinction suivante sera faite dans le cadre de cette thèse :

- la XFEM désignera la méthode utilisant des fonctions d'enrichissement définies analytiquement ;
- la GFEM emploiera des fonctions d'enrichissement issues d'un calcul numérique.

La Section 5.1.6 met l'accent sur la forme de la matrice de rigidité issue du déplacement approché 1.36. Les difficultés liées au calcul des différents termes de la matrice sont explicitées et sont valables dans le cadre de la XFEM et de la GFEM.

5.1.6 Difficultés liées à l'écriture de l'enrichissement cinématique

Forme de la matrice de rigidité

La formulation faible 1.6 se traduit sous la forme du problème matriciel $\underline{\underline{K}} \mathbf{U} = \mathbf{F}$, où \mathbf{F} est le vecteur des efforts généralisés et \mathbf{U} est le vecteur contenant à la fois les déplacements aux noeuds \mathbf{u}_I et les inconnues d'enrichissement $\mathbf{a}_k^{(p)}$ dans la formulation du déplacement approché 1.36. Celui-ci s'écrit comme la somme d'une contribution Eléments Finis \mathbf{u}_{EF} et d'un enrichissement \mathbf{u}_{enr} , il est alors possible de montrer que la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{EF} & \underline{\underline{K}}^{EF/enr} \\ \underline{\underline{K}}^{EF/enr^T} & \underline{\underline{K}}^{enr} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

- $\underline{\underline{K}}^{EF}$ est la matrice de rigidité de la contribution Eléments Finis classiques ;
- $\underline{\underline{K}}^{EF/enr}$ et la matrice correspondant au couplage entre la contribution Eléments Finis classiques et l'enrichissement ;
- $\underline{\underline{K}}^{enr}$ est la matrice de rigidité issue des inconnues d'enrichissements.

Les composantes des matrices $\underline{\underline{K}}^{EF}$, $\underline{\underline{K}}^{EF/enr}$ et $\underline{\underline{K}}^{enr}$ seront détaillées ci-après, dans le cas où l'enrichissement est écrit sur des *patches* ou sur chaque élément du maillage Ω_h .

Composantes de la matrice à partir de l'écriture du déplacement sur chaque patch

En utilisant le déplacement approché par *patches* 1.36 les différents termes de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ peuvent être explicités. Par exemple pour la matrice $\underline{\underline{K}}^{EF}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}_{EF}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}_{EF}^*) d\Omega \\ &= \sum_{I=1}^{N_{patches}} \sum_{J=1}^{N_{patches}} \mathbf{u}_I \left[\int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_I(\mathbf{x})) \nabla(\varphi_J(\mathbf{x})) d\Omega \right] \mathbf{u}_J^* \end{aligned}$$

Or par définition des fonctions chapeau, l'intégrale est non nulle uniquement sur les *patches* qui se recouvrent, c'est-à-dire quand $\Omega_I \cap \Omega_J \neq \emptyset$. Donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}_{EF}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}_{EF}^*) d\Omega \\ &= \sum_{I=1}^{N_{patches}} \sum_{J=1}^{N_{patches}} \mathbf{u}_I \left[\int_{\Omega_I \cap \Omega_J} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_I(\mathbf{x})) \nabla(\varphi_J(\mathbf{x})) d\Omega \right] \mathbf{u}_J^* \end{aligned}$$

Les composantes de la matrice de rigidité Eléments Finis $\underline{\underline{K}}^{EF}$ s'écrivent alors :

$$K_{IJ}^{EF} = \int_{\Omega_I \cap \Omega_J} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_I(\mathbf{x})) \nabla(\varphi_J(\mathbf{x})) d\Omega \quad (1.38)$$

De même on peut calculer les termes des matrices $\underline{\underline{K}}^{EF/enr}$ et $\underline{\underline{K}}^{enr}$:

$$K_{I\gamma}^{EF/enr} = \int_{\Omega_I \cap \Omega_p} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_I(\mathbf{x})) \nabla(\varphi_p(\mathbf{x}) \psi_k^{(p)}(\mathbf{x})) d\Omega \quad (1.39)$$

$$K_{\alpha\beta}^{enr} = \int_{\Omega_p \cap \Omega_q} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_p(\mathbf{x}) \psi_k^{(p)}(\mathbf{x})) \nabla(\varphi_q(\mathbf{x}) \psi_l^{(q)}(\mathbf{x})) d\Omega \quad (1.40)$$

Les indices γ, α et β ont pour valeur :

$$\gamma = \sum_{m=1}^{p-1} n_{enr}^{(m)} + k \quad \alpha = \sum_{m=1}^{p-1} n_{enr}^{(m)} + k \quad \beta = \sum_{n=1}^{q-1} n_{enr}^{(n)} + l \quad (1.41)$$

Si $p = 1$ alors on choisit pour convention $\sum_{m=1}^{p-1} n_{enr}^{(m)} = 0$, de même si $q = 1$ on pose $\sum_{n=1}^{q-1} n_{enr}^{(n)} = 0$.

La principale difficulté associée au calcul des termes de la matrice de rigidité est l'intégration des produits croisés $\nabla(\varphi_I)\nabla(\varphi_p\psi_k^{(p)})$ et $\nabla(\varphi_p\psi_k^{(p)})\nabla(\varphi_q\psi_l^{(q)})$ entre les *patches* superposés $\Omega_I \cap \Omega_p$ et $\Omega_p \cap \Omega_q$ respectivement. Deux cas de figure se présentent alors :

1. si les enrichissements sont analytiques (XFEM), alors la superposition de *patches* ne pose pas de problème d'intégration mais des valeurs singulières (proches de zéro) prises par les fonctions d'enrichissements peuvent dégrader le conditionnement de la matrice de rigidité (typiquement sur des petits supports) ;
2. si les enrichissements $\psi_k^{(p)}$ sont numériques (GFEM), ceux-ci sont potentiellement issus de maillages explicites de support $\omega_k^{(p)}$ décrivant les détails structuraux et leur comportement. Des difficultés techniques d'intégration peuvent se produire du fait de la superposition de maillages locaux non conformes.

Problématique du mauvais conditionnement et remédiation

La question du conditionnement de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ a été soulevée dans [Babuška et Banerjee, 2012]. En notant $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{DAD}}$ où $\underline{\underline{D}}$ est une matrice diagonale telle que $(\underline{\underline{D}})_{ii} = (\underline{\underline{A}}^{-\frac{1}{2}})_{ii}$, le conditionnement modifié $\mathcal{R}(\underline{\underline{A}})$ est introduit et défini comme le conditionnement de la matrice $\underline{\underline{H}}$. Il a alors été montré que si $h \ll 1$ est la taille caractéristique du maillage alors l'inégalité 1.42 est vérifiée et prouve le mauvais conditionnement de la matrice $\underline{\underline{K}}$ comparé à celui de la matrice de rigidité EF $\underline{\underline{K}}^{EF}$.

$$\frac{\mathcal{R}(\underline{\underline{K}}^{EF})}{\mathcal{R}(\underline{\underline{K}})} = \mathcal{O}(h^2) \quad (1.42)$$

Par conséquent la convergence d'une méthode itérative s'en trouve détériorée. Des fonctions d'enrichissement modifiées ont été proposées [Babuška et Banerjee, 2012, Gupta et al., 2013] pour palier ce problème de mauvais conditionnement et atteindre le même ordre de grandeur que $\mathcal{R}(\underline{\underline{K}})$. Un tel résultat est obtenu en supprimant la partie linéaire déjà présente dans les Eléments Finis des fonctions d'enrichissements d'un *patch* donné 1.43, on appellera SGFEM cette variante.

$$\widehat{\psi}_k^{(j)}(\mathbf{x}) = \psi_k^{(j)}(\mathbf{x}) - \sum_{I=1}^{N_{patches}} \varphi_I(\mathbf{x}) \psi_k^{(j)}(\mathbf{x}_I) \quad (1.43)$$

La **FIGURE 1.7** montre un exemple de fonction d'enrichissement modifiée $\widehat{\psi}_k^{(j)}$ construite via cette méthode.

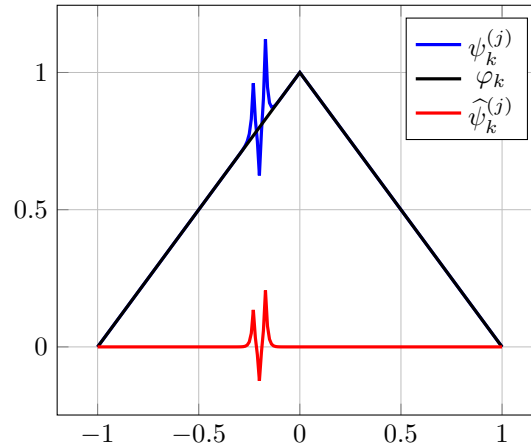


FIGURE 1.7 – Construction d'une fonction d'enrichissement SGFEM sur un *patch* localisé entre les abscisses -1 et 1. L'interpolation linéaire par morceaux est soustraite de l'enrichissement $\psi_k^{(j)}$ pour obtenir la version SGFEM de l'enrichissement $\widehat{\psi}_k^{(j)}$.

Conclusion partielle

La sous-section [Section 5.1.6](#) a mis en évidence des difficultés propres à la GFEM :

1. la problématique liée au calcul des produits croisés faisant intervenir des supports différents pour les fonctions impliquées ;
2. le mauvais conditionnement de la matrice de rigidité.

Dans le cadre de la XFEM, ce sont plutôt les valeurs singulières des enrichissements analytiques lors du passage de la discontinuité par un nœud du maillage qui dégraderont le conditionnement de la matrice de rigidité. La littérature propose toutefois une solution valable dans le cadre de la XFEM ou de la GFEM pour palier au problème du mauvais conditionnement.

Les sous-sections [Section 5.2](#) et [Section 5.3](#) mettent l'accent sur les spécificités des méthodes XFEM et GFEM ainsi que sur leurs applications et limitations propres. L'écriture généralisée [1.36](#) du déplacement approché sera adoptée.

5.2 Détails concernant la XFEM

La XFEM de [Moës *et al.*, 1999] est traditionnellement utilisée pour modéliser les discontinuités fortes et faibles au sein d'un domaine. L'utilisation de fonctions d'enrichissements adaptées à la modélisation de fissures ou d'interfaces permet de s'affranchir de la construction d'un maillage conforme pour représenter ces discontinuités dans un domaine donné.

5.2.1 Fonctions *level-set*

Pour illustrer ces fonctions, on considère un domaine traversé par une discontinuité Γ (forte ou faible) comme donné en FIGURE 1.8. La partie supérieure s'appelle Ω_1 tandis que la partie inférieure se nomme Ω_2 . Les vecteurs \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont les normales orientées à l'interface Γ . La fonction ϕ définie en 1.44 est une fonction distance signée. Son signe dépend de la position du point \mathbf{x} dans le domaine. Dans la FIGURE 1.8 le signe est positif si le point considéré se situe dans Ω_1 , il est négatif sinon.

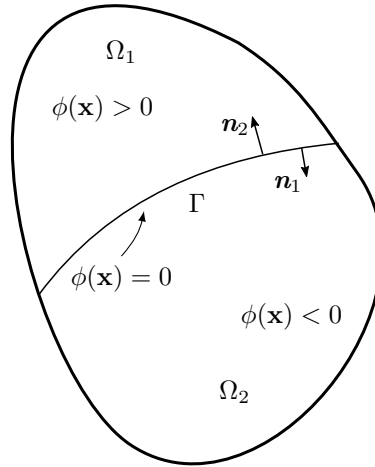


FIGURE 1.8 – Illustration de la fonction *level-set* permettant de se situer dans la zone Ω_1 ou Ω_2 d'un domaine coupé par une discontinuité Γ .

$$\phi(\mathbf{x}) = \pm \min_{\mathbf{y} \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.44)$$

Une fonction *level-set* notée ls peut alors être définie de la manière suivante :

$$ls(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{dis}} \varphi_k(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_k) \quad (1.45)$$

Ici N_{dis} est le nombre de nœuds appartenant aux éléments traversés par la discontinuité (forte ou faible).

5.2.2 Déplacement approché

a) Cas d'une fissure

Afin de décrire une fissure dans un maillage structuré macroscopique il est nécessaire de pouvoir :

1. situer la ligne de discontinuité traversant totalement un élément par rapport à ses nœuds grâce aux fonctions *level-sets* ;
2. positionner la pointe de fissure dans l'élément qui la contient.

Deux familles d'enrichissements sont définies pour répondre à ces contraintes, le déplacement approché prend donc la forme suivante $\forall \mathbf{x} \in \Omega_h$:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{I=1}^{N_{patches}} \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\mathbf{u}_{EF}} + \underbrace{\sum_{I=1}^{N_{jumps}} \varphi_I(\mathbf{x}) \psi_I^{(jump)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I}_{\mathbf{u}_{jump}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{N_{tips}} \varphi_p(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \psi_{p,k}^{(tip)}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k^{(p)}}_{\mathbf{u}_{tip}} \quad (1.46)$$

La contribution liée au saut de déplacement est notée \mathbf{u}_{jump} . N_{jumps} nœuds sont concernés par les éléments traversés par la discontinuité. Les fonctions d'enrichissements $\psi_I^{(jump)}$ et $\psi_{p,k}^{(tip)}$ doivent être nulles sur les nœuds macroscopiques, la forme suivante a alors été suggérée par [Belytschko *et al.*, 2003] :

$$\psi_I^{(jump)}(\mathbf{x}) = H(ls(\mathbf{x})) - H(ls(\mathbf{x}_I)) \quad (1.47a)$$

$$\psi_{p,k}^{(tip)}(\mathbf{x}) = F_k(\mathbf{x}) - F_k(\mathbf{x}_p) \quad (1.47b)$$

La fonction de Heaviside H définie en 1.48 permet de prendre en compte le saut de déplacement.

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

La contribution d'enrichissement qui quantifie la position de la pointe de fissure est notée \mathbf{u}_{tip} . Pour un matériau isotrope la base de fonctions $\{F_k\}_{k=1..4}$ est issue de la solution asymptotique de [Williams, 1957]. Il a été montré dans [Fleming *et al.*, 1997] qu'une base d'enrichissement satisfaisante pouvait s'écrire :

$$\{F_k\}_{k=1..4} = \sqrt{r} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (1.49)$$

La **FIGURE 1.9** illustre l'enrichissement lié à une fissure sur un maillage structuré. Les nœuds enrichis avec le développement asymptotiques peuvent se trouver dans une région plus étendue que le simple élément contenant la pointe de fissure comme schématisé au point A.

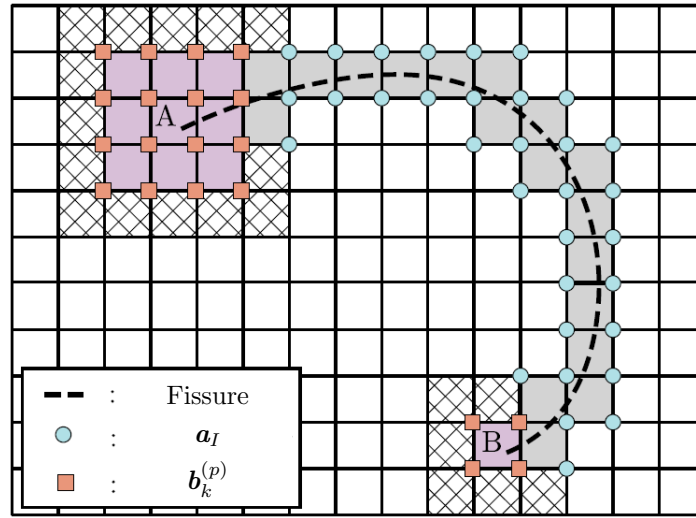


FIGURE 1.9 – Illustration des nœuds enrichis afin de tenir compte du saut de déplacement ou de la pointe d'une fissure. Image tirée de [Belytschko *et al.*, 2009].

b) Cas d'une interface entre deux matériaux

Pour situer implicitement une interface entre deux matériaux, le champ de déplacement suivant est proposé :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_h, \quad \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{I=1}^{N_{patches}} \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\mathbf{u}_{EF}} + \underbrace{\sum_{I=1}^{N_{ints}} \varphi_I(\mathbf{x}) \psi_I^{(int)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I}_{\mathbf{u}_{int}} \quad (1.50)$$

$$\psi_I^{(int)}(\mathbf{x}) = |ls(\mathbf{x})| - |ls(\mathbf{x}_I)| \quad (1.51)$$

La contribution d'enrichissement associée à l'interface Γ entre les deux matériaux est notée \mathbf{u}_{int} , N_{ints} nœuds sont concernés par les fonctions d'enrichissements $\psi_I^{(int)}$. Il a été proposé dans [Moës *et al.*, 2003] une version modifiée de cet enrichissement s'écrivant :

$$\widehat{\psi}_I^{(int)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{ints}} \varphi_k(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}_k)| - \left| \sum_{k=1}^{N_{ints}} \varphi_k(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_k) \right| \quad (1.52)$$

Il a alors été montré que cette fonction d'enrichissement permettait une meilleure convergence des algorithmes dans le cadre des petites déformations pour des matériaux dans leur domaine élastique et dont les modules de Young avaient des ordres de grandeur proches. Cette écriture est strictement similaire à l'enrichissement suggéré par la SGFEM (voir équation 1.43), celui-ci entrant dans un cadre plus général puisque applicable à n'importe quel enrichissement.

5.2.3 Difficultés liées à la XFEM et solutions proposées par la littérature

La Section 5.2.2 résume la possibilité de décrire une interface entre deux matériaux ou un saut de déplacement à travers des fonctions d'enrichissements analytiques. Elles sont toutefois discontinues dans les éléments traversés par une fissure et singulières en front de fissure. Par conséquent la quadrature de Gauss standard n'est plus adaptée au calcul des termes des matrices de rigidité \underline{K}^{enr} et $\underline{K}^{EF/enr}$. Une quadrature adaptée et une quadrature d'ordre supérieur ont été testées [Strouboulis *et al.*, 1998]. Subdiviser l'élément en plusieurs éléments représentant explicitement la fissure est aussi une solution qui a été envisagée [Moës *et al.*, 1999]. Utiliser le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale sur l'élément en intégrale de bord a montré des résultats positifs en terme de convergence et de précision [Ventura *et al.*, 2009].

Un autre phénomène dégradant la vitesse de convergence est celui de *blending elements* ou "éléments mélangés". Seuls certains nœuds de ces éléments sont enrichis, par conséquent les fonctions "chapeau" de la partie enrichie \mathbf{u}_{jump} , \mathbf{u}_{tip} ou \mathbf{u}_{int} ne respectent pas la partition de l'unité. Les fonctions d'enrichissements ne sont donc pas bien représentées dans ces éléments, ceux hachurés dans la FIGURE 1.9 sont des *blending elements*. Augmenter le degré des fonctions de forme dans ces éléments [Chessa *et al.*, 2003] ou utiliser une fonction rampe en facteur des fonctions d'enrichissement [Fries, 2008]. Les outils de type SGFEM, l'utilisation d'un préconditionneur adapté [Béchet *et al.*, 2005, Menk et Bordas, 2011] ou l'emploi d'une base de fonctions d'enrichissements quasi-orthogonales en pointe de fissure [Agathos *et al.*, 2019] permettent quant à eux d'améliorer le conditionnement de la matrice de rigidité XFEM.

Au delà des recherches visant à améliorer les performances relatives à la XFEM, il est nécessaire d'évaluer la pertinence de cette représentation de la cinématique dans le cadre de la description d'une micro-structure aussi riche que celle d'un CMC. Celle-ci possède de très nombreuses interfaces du fait de la présence de multiples phases (fibres, interphases, matrices SiC CVI et Si MI). Par conséquent une grande partie des nœuds du maillage structuré devraient être enrichis. Aussi des interfaces

proches traverseraient potentiellement un même élément macroscopique, des outils de type *multi-split* XFEM [Bansal *et al.*, 2019] doivent alors être utilisés. Le cas du dédoublement de fissure est aussi difficile à traiter puisque deux pointes de fissures peuvent se trouver dans un même élément, un algorithme de découpe d'éléments a alors été proposé et appliqué à la rupture fragile quasi-statique [Richardson *et al.*, 2011] pour gérer cette difficulté.

5.3 Détails concernant la GFEM

5.3.1 La GFEM par problèmes *Handbook* – GFEM de Strouboulis

Une idée naturelle introduite dans [Strouboulis *et al.*, 2001] consiste à générer des fonctions d'enrichissement à partir de chargements canoniques effectués sur des motifs choisis en amont comme illustrés en **FIGURE 1.10**. Ces chargements canoniques permettent aux motifs d'être utilisés dans un problème élastique avec un chargement quelconque. Ces solutions précalculées pour chaque motif considéré et pour chacun de leurs chargements canoniques sont stockées dans un *Handbook*. Ces motifs sont ensuite superposés au maillage grossier représentant la géométrie de la partie homogène. Une représentation CAO est requise afin que la géométrie du problème *Handbook* puisse être extraite et maillée. Néanmoins la non conformité entre les différents maillages superposés implique des développements particuliers puisque chaque élément du maillage macroscopique peut contenir plusieurs matériaux différents issus des différents motifs. Une procédure adaptative est proposée dans [Strouboulis *et al.*, 2001] pour palier cette difficulté.

5.3.2 La GFEM de Duarte

Principe de la méthode

Afin de résoudre le problème de non conformité, une autre idée consiste à construire un maillage fin contenant l'information locale et géométriquement conforme au maillage structuré. Ce maillage fin est généré sur toute la structure et permet d'assurer la conformité des descriptions locales entre deux *patches* qui se superposent. Ainsi la difficulté du calcul des produits croisés est évitée. Un calcul global est effectué et les déplacements obtenus en chaque nœud macroscopique sont utilisés comme conditions aux limites sur les bords de chaque *patch* pour construire les fonctions d'enrichissements numériques. Celles-ci sont ensuite associées à des inconnues d'enrichissements situées au niveau des nœuds macroscopiques. Cette variante globale-locale de la GFEM a été introduite par [Duarte et Kim, 2008] et est aussi notée GFEMgl. La fonction d'enrichissement $\psi_k^{(j)}$ ($j \in \llbracket 1, n_{enr}^{(k)} \rrbracket$) au sein d'un *patch* Ω_k est vue comme une perturbation en déplacement, ainsi en notant $\mathbf{u}_{tot}^{(j)}$ le déplacement total sur le *patch* (tenant compte des détails structuraux) et $\mathbf{u}_{hom}^{(j)}$ la partie homogène

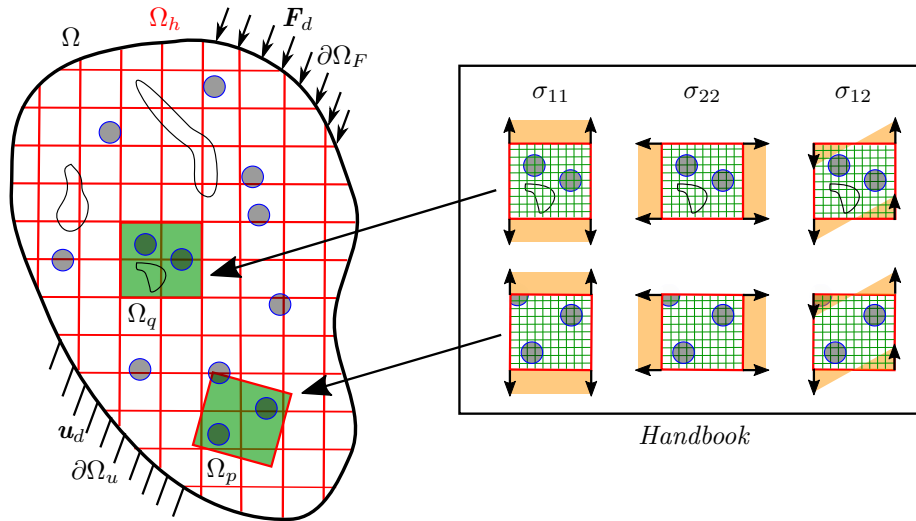


FIGURE 1.10 – Construction des enrichissements par chargements canoniques. Les motifs sont choisis en se basant sur un domaine homogène qui devrait contenir un certain nombre de détails structuraux. Une base canonique de chargement est ensuite appliquée sur un maillage fin tenant compte des détails structuraux afin de construire les fonctions d'enrichissements numériques. Enfin les motifs ainsi créés sont superposés à la structure macroscopique et le modèle désiré est créé.

du déplacement on a :

$$\psi_k^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{tot}^{(j)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{hom}^{(j)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_k \quad (1.53)$$

Cette construction des fonctions d'enrichissements respecte le principe de la SG-FEM puisque la partie linéaire du déplacement est retirée. Il est possible de noter que l'indice k n'apparaît pas dans le membre de droite de l'équation 1.53 : une seule fonction d'enrichissement est construite pour chaque *patch* Ω_k . Toutefois les enrichissements peuvent se superposer lorsqu'un élément est commun à deux *patches* comme schématisé en FIGURE 1.11. La FIGURE 1.11 montre deux *patches* superposés dont les nœuds enrichis sont représentés par des carrés pour un *patch* et par des triangles pour le deuxième *patch*. Les déplacements macroscopiques sont représentés par des cercles, les inconnues d'enrichissements sont soit carrés, soit triangulaires suivant le *patch*. L'élément macroscopique commun aux deux *patches* est en rouge et deux hétérogénéités circulaires sont représentées. Les nœuds de même forme géométrique et superposés doivent prendre la même valeur. L'ensemble des *patches* enrichis constituent le *Handbook*, ils sont ensuite réinjectés dans le modèle global. La FIGURE 1.12 résume les étapes de la GFEMgl de Duarte.

Limitations de la GFEMgl vis-à-vis de l'objectif de thèse

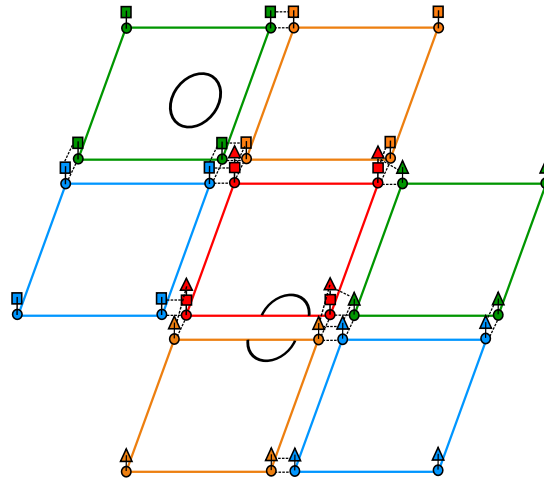


FIGURE 1.11 – Deux *patches* composés de quatre éléments macroscopiques chacun superposés. Les nœuds superposés (liés par les pointillés) et avec la même forme géométrique (rond, carré ou triangle) prennent les mêmes valeurs.

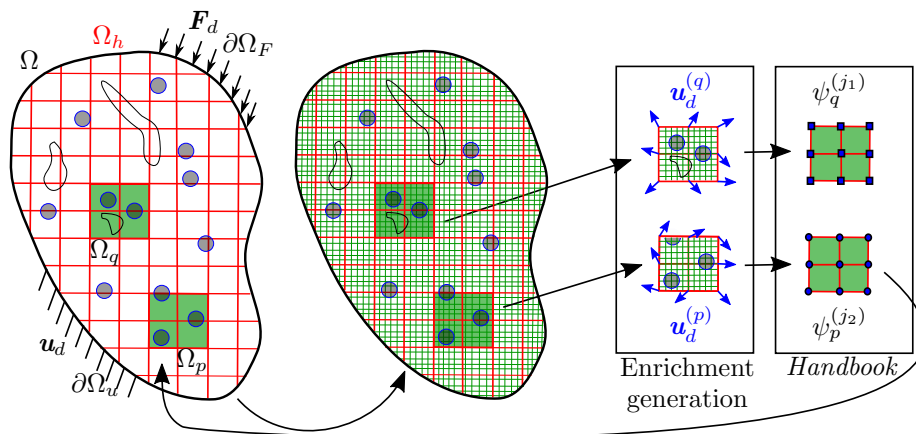


FIGURE 1.12 – Illustration des différentes étapes à suivre pour construire le *Handbook* selon Duarte. Dans un premier temps une simulation est réalisée sur un maillage grossier (à gauche). Puis un maillage local géométriquement conforme au maillage macroscopique est généré sur la totalité de la structure (au centre). Les *patches* sont ensuite extraits pour calculer les fonctions d'enrichissement numériques qui seront ensuite réinjectées dans le modèle global.

Il est à noter que chaque *patch* macroscopique susceptible de contenir un détail structural comme des fissures, des porosités ou un changement de matériau doit être enrichi. Sur une micro-structure riche comme celle d'un CMC, tous les *patches* macroscopiques doivent potentiellement suivre cette procédure globale-locale. Aussi les

fonctions d'enrichissement numériques sont recalculées à chaque simulation. Ainsi la GFEMgl est potentiellement coûteuse en temps de calcul si de très nombreux motifs sont présents.

Il est bon de noter que l'idée d'une GFEM utilisant un maillage conforme avait déjà été suggérée dans [Strouboulis *et al.*, 2001], elle a néanmoins été abandonnée par la suite au profit d'une description par motifs ([Strouboulis *et al.*, 2003]) lorsque le modèle étudié contient de nombreux détails structuraux identiques.

5.3.3 La GFEM multi-échelle

En plus des hypothèses de Partition de l'Unité, une séparation d'échelles a été envisagée dans [Tranquart *et al.*, 2012] et propose les hypothèses supplémentaires suivantes :

1. Le support $\omega_k^{(j)}$ de la fonction d'enrichissement $\psi_k^{(j)}$ est petit comparé au support Ω_k de la fonction chapeau φ_k ;
2. Les fonctions d'enrichissement n'interagissent entre elles, autrement dit il y a orthogonalité entre les différentes fonctions d'enrichissement.

L'hypothèse de petit support amène à supposer que les fonctions "chapeau" φ_k sont quasi constantes sur le support $\omega_k^{(j)}$. En notant $\mathbf{C}_k^{(j)}$ le centre du support $\omega_k^{(j)}$ l'approximation suivante peut être faite :

$$\varphi_k(\mathbf{x}) \approx \varphi_k(\mathbf{C}_k^{(j)}) \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_k^{(j)} \quad (1.54)$$

Ainsi sur un support $\omega_k^{(j)}$ le produit $\varphi_k \psi_k^{(j)}$ peut être approximé par une fonction d'enrichissement modifiée $\tilde{\psi}_k^{(j)} = \varphi_k(\mathbf{C}_k^{(j)}) \psi_k^{(j)}$. Par conséquent l'écriture du déplacement approché 1.36 peut être modifiée pour donner :

$$\tilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{patches}} \varphi_k(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k + \sum_{k=1}^{N_{patches}} \sum_{j=1}^{n_{enr}^{(k)}} \tilde{\psi}_k^{(j)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k^{(j)} \quad (1.55)$$

La deuxième affirmation se traduit par une intersection vide entre deux supports d'enrichissement. Les intégrations croisées sont alors simplifiées et les termes non nuls s'écrivent :

$$(\mathbf{K}_{FEM})_{IJ} = \int_{\Omega_I \cap \Omega_J} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_I) \nabla(\varphi_J) d\Omega \quad (1.56a)$$

$$(\mathbf{K}_{FEM/enr})_{k\gamma} = \int_{\omega_k^{(p)}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\varphi_k) \nabla(\tilde{\psi}_k^{(p)}) d\Omega \quad (1.56b)$$

$$(\mathbf{K}_{enr})_{\alpha\beta} = \int_{\omega_k^{(p)}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \nabla(\tilde{\psi}_k^{(p)}) \nabla(\tilde{\psi}_k^{(p)}) d\Omega \quad (1.56c)$$

Il peut aussi être remarqué que les contributions d'enrichissements deviennent indépendantes des fonctions "chapeau". Ainsi les nœuds additionnels $\mathbf{a}_k^{(j)}$ peuvent être situés n'importe où sur le *patch*. Par convention il est choisi de localiser ces inconnues supplémentaires aux centres $\mathbf{C}_k^{(j)}$ des supports d'enrichissements $\omega_k^{(j)}$. Les hypothèses de séparation d'échelle éliminent le problème des intégrations croisées et permettent la superposition de maillages non conformes utilisés comme support des motifs. La stratégie de construction des enrichissements de Strouboulis s'en trouve alors plus versatile, au prix d'une cinématique qui ne respecte pas totalement les hypothèses de Partition de l'Unité et donc d'une approximation de la matrice de rigidité. Néanmoins cette simplification est considérée satisfaisante dans le cadre d'un outil de compréhension comme l'a montré [Tranquart *et al.*, 2012]. Mieux des investigations concernant la propagation de fissures d'un motif à l'autre ont déjà été menées sous Cast3M [Friderikos *et al.*, 2017].

Pour résumer la GFEM multi-échelle (MS-GFEM) est une méthode proche de la GFEM-H de Strouboulis mais qui s'affranchit du problème de non conformité des maillages utilisés. Il est choisi ici d'utiliser plutôt une base canonique de déformation pour construire les différentes fonctions d'enrichissement comme illustré en **FIGURE 1.13**. Les principales différences entre la GFEM-H et la MS-GFEM sont :

1. Une séparation d'échelle est réalisée ;
2. Les interactions entre enrichissements sont négligées ;
3. La construction des enrichissements se fait à déformation imposée au lieu des conditions aux limites de Neumann comme dans la GFEM-H.

Il est à noter que contrairement à la S-FEM de [Fish, 1992] et à l'approche multi-échelle variationnelle de [Hughes, 1995], les degrés de liberté impliqués dans la construction des motifs (les problèmes *Handbook*) n'interviennent pas dans la résolution du problème complet qui est conditionné uniquement par le nombre de nœuds enrichis ajoutés.

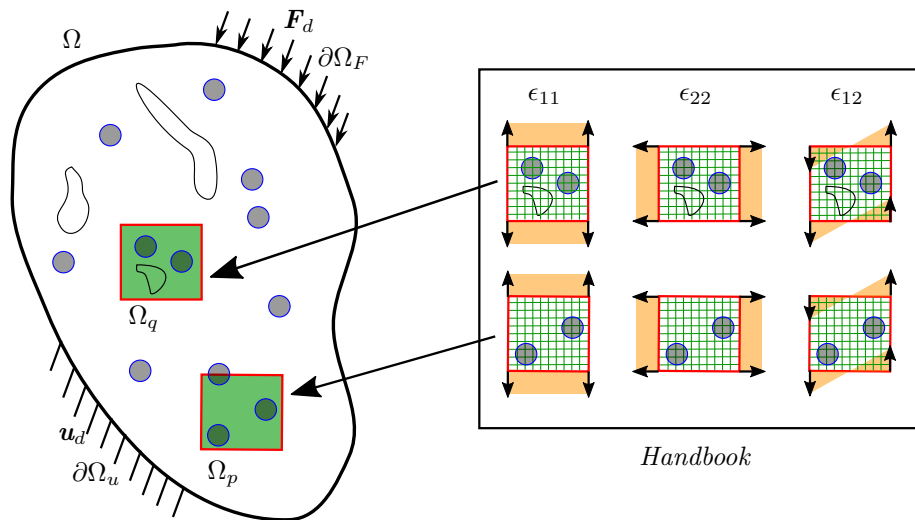


FIGURE 1.13 – Introduction de motifs enrichis dans un modèle macroscopique. Les fonctions d'enrichissements sont construites à partir d'une base canonique en déformation et en respectant les hypothèses de la MS-GFEM.

6 Conclusion : choix d'une méthode numérique pour la description d'une micro-structure riche

L'objectif de ce chapitre était de dresser un état de l'art des différentes méthodes numériques susceptibles de rendre compte de la richesse d'une micro-structure de CMC. La stratégie choisie doit :

1. pouvoir représenter à faible coût la structure en vue de réaliser des calculs non-linéaires ;
2. être suffisamment souple afin d'envisager des scénarios de dégradation sur des micro-structures variées en terme de morphologie et de propriétés matériaux ;
3. permettre le tri des informations issues d'une simulation afin de retenir celles utiles à la compréhension des mécanismes observables à l'échelle de la fibre.

Les techniques d'enrichissement semblent plus indiquées à l'ajout de la juste information mécanique afin de diminuer le coût de calcul. En effet dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine, il s'agit de résoudre un problème fin de manière efficace. Ces méthodes permettent de faire des calculs de grande taille mais l'exploitation d'un volume de données important reste une difficulté. A l'inverse les méthodes d'homogénéisation demandent de connaître assez finement la morphologie de la micro-structure qui doit respecter la définition de VER, elles sont aussi

généralement basées sur la périodicité de celui-ci. Ce dernier point est une hypothèse forte ne s'appliquant pas aux micro-structures de CMC dont l'illustration issue de l'Introduction de la thèse est rappelée en [FIGURE 1.14](#).

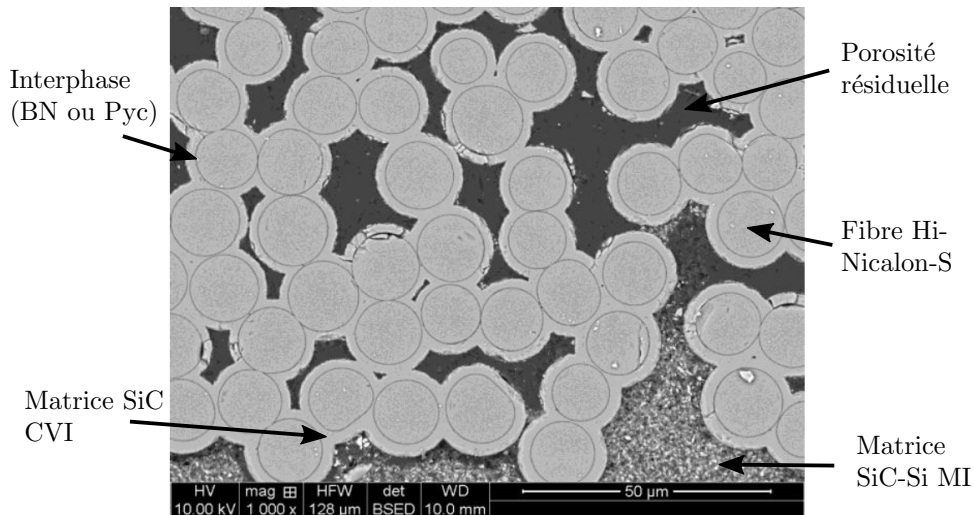


FIGURE 1.14 – Cliché au microscope électronique à balayage des phases observables dans une micro-structure de CMC SiC/SiC. Image de [\[Griesser, 2012\]](#)

Parmi les méthodes d'enrichissement cinématiques, les dérivées de la Méthode de Partition de l'Unité comme la XFEM ou la GFEM sont privilégiées. Ces stratégies s'affranchissent en partie de la génération de maillages conformes et permettent la description par motifs d'une structure. De nombreuses applications à la fissuration ont été proposées à travers l'utilisation de la XFEM, mais des pistes ont commencé à être explorées dans le cadre de la GFEM.

Les travaux qui sont présentés dans le chapitre suivant ont pour objectif de démontrer la faisabilité d'une implémentation de la GFEM dans un code commercial en utilisant uniquement les outils qui y sont déjà disponibles. L'objectif à terme est de démocratiser l'usage de la GFEM à travers une routine utilisable par un industriel et permettant de tester différentes configurations de micro-structures de composites. Puisque Safran utilise le code Abaqus, c'est dans celui-ci que sera implantée cette méthode éléments finis généralisés.

Chapitre 2

Implémentation de la GFEM multi-échelle dans Abaqus

D^{ANS} ce deuxième chapitre, une proposition d'implémentation de la cinématique GFEM dans le logiciel commercial Abaqus est détaillée. L'apport scientifique de ce travail n'est pas fondamentalement d'amener des éléments de compréhension quant au comportement des CMCs, mais plutôt de proposer un outil simple d'utilisation afin de pouvoir tester plusieurs configurations de micro-structures construites à partir de motifs positionnés par l'utilisateur. Une liste des outils déjà disponibles sous Abaqus et utiles à la construction d'une cinématique GFEM multi-échelle est dressée. Puis une application sur une micro-structure virtuelle est proposée dans un cadre élastique et linéaire.

1 Outils disponibles sous Abaqus

La section suivante présente les outils d'Abaqus utiles à la démonstration de l'implémentation des différentes variantes de la GFEM présentées dans le chapitre précédent avant d'en choisir une en particulier en vue d'une application sur micro-structure. Les dénominations spécifiques à Abaqus seront soulignés et écrits en *italique*.

1.1 Maillages géométriquement conformes

Un maillage fin géométriquement conforme avec un maillage macroscopique autorise une description locale identique à l'intersection entre deux *patches*. Cela a pour avantage de simplifier l'intégration des produits croisés dans la matrice de rigidité GFEM. Toutefois dans l'environnement graphique d'Abaqus plusieurs maillages peuvent être associés à une même structure tout en restant indépendants les uns des autres. Par conséquent il n'est pas possible de réaliser à la fois un maillage grossier et un maillage local dans un même *Model*. Une solution consiste alors à opérer une *Partition* de la structure faisant apparaître les futures arêtes macroscopiques du maillage. Dans un second temps le *Model* peut être dupliqué et un maillage fin peut être construit sur la nouvelle structure. La géométrie partitionnée impose la forme du maillage local et le rend conforme au maillage macroscopique du premier *Model*. Cela est illustré au point ② de la **FIGURE 2.1**.

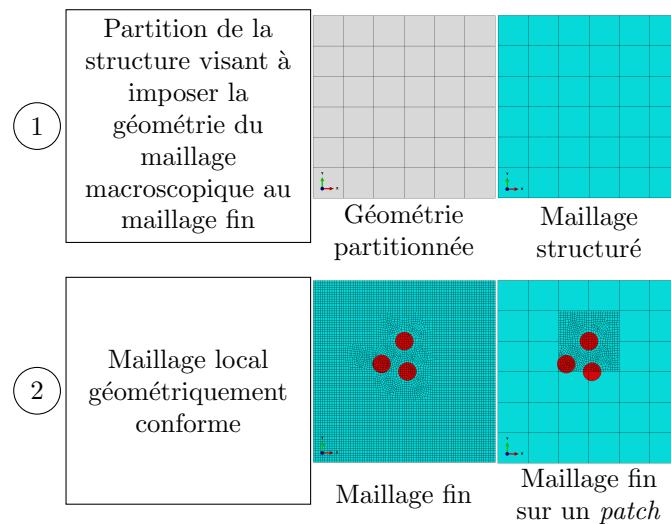


FIGURE 2.1 – Partition de la structure. L'outil Abaqus de partition va créer des arêtes sur la structure macroscopique, cela va alors imposer au maillage fin et au maillage global d'être géométriquement conformes. Les hétérogénéités telles que les inclusions sont en rouge et apparaissent sur le maillage local.

1.2 Cinématique macroscopique imposée au maillage local

Dans la GFEMgl et la MS-GFEM, les fonctions d'enrichissements numériques peuvent être construites à partir de la réponse locale de la structure à un chargement macroscopique. Il est alors nécessaire de pouvoir interpoler le champ de déplacement global sur le maillage fin. Dans Abaqus c'est l'outil *Submodeling* qui permet de piloter un modèle local à partir des résultats issus d'une solution macroscopique. Dans la **FIGURE 2.2** le point ① illustre une fonction "chapeau" sur un *patch* macroscopique : les nœuds au bord du *patch* sont fixes et un déplacement unitaire selon les deux directions du plan est appliqué au nœud central. Le point ② montre les déplacements calculés sur le sous-modèle à partir du champ macroscopique. Pour un maillage fin de taille caractéristique 60 fois plus petite que celle du maillage macroscopique le temps utilisateur (ou *Elapsed user time* dans le fichier *.msg* écrit par Abaqus) pour projeter le champ macro est d'environ 0,85 secondes.

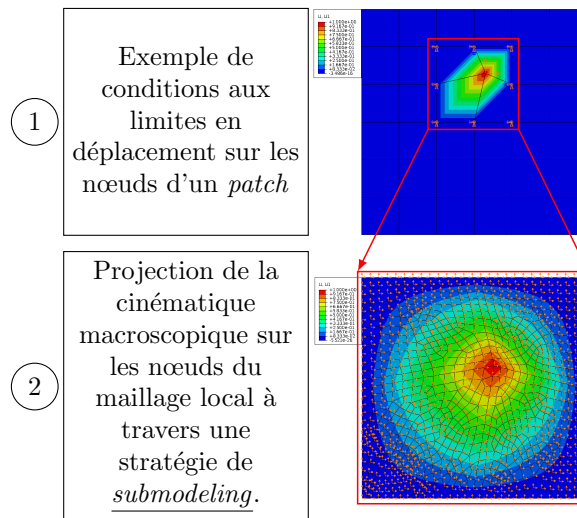


FIGURE 2.2 – Projection d'un champ global sur un maillage local à travers une stratégie de *submodeling*. Le maillage local est un sous-modèle du maillage structuré et suit sa cinématique (les flèches en orange).

1.3 Fonctions d'enrichissements vues comme des perturbations en déplacement

Comme les fonctions d'enrichissements numériques peuvent être considérées comme des perturbations entre la structure hétérogène et la structure homogène, la question se pose de savoir comment soustraire deux champs de déplacement différents à partir de deux simulations Abaqus différentes. Il est possible d'extraire les déplacements nodaux et de les stocker dans une liste Python qui peut lire des fichiers résultats d'Abaqus (au format *.odb*). Par exemple dans les points ① et ② de la **FIGURE 2.3**

la même cinématique macroscopique est imposée d'un part au *patch* homogène et d'autre part au *patch* hétérogène. La différence entre les 2 champs de déplacements est ensuite réalisée et illustrée avec le point ③.

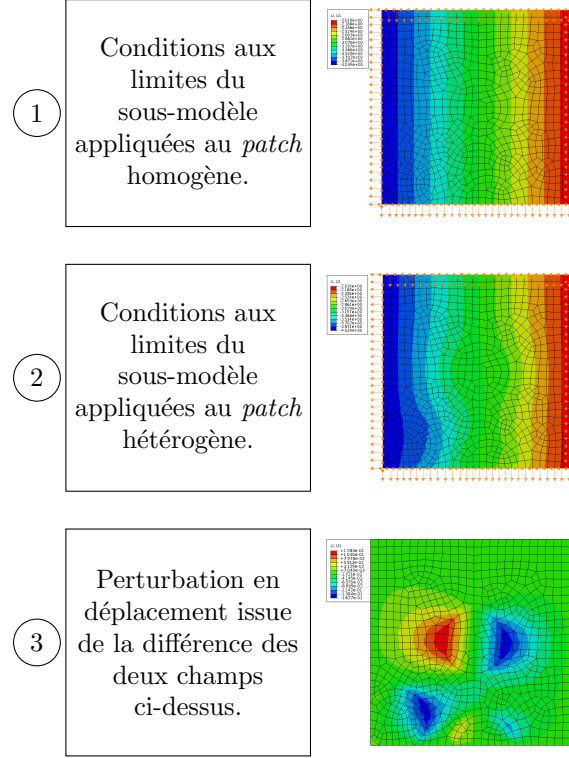


FIGURE 2.3 – Fonction d'enrichissement numérique vue comme une perturbation calculée à partir de la différence entre les champs de déplacement obtenus pour la structure hétérogène et la structure homogène, pour des conditions aux limites identiques.

1.4 Cinématique GFEM imposée

Le déplacement approché GFEM doit être implémenté dans Abaqus pour élargir l'espace d'approximation. Si $\mathbf{u}_i^{(local)}$ désigne le déplacement d'un nœud du maillage local au point \mathbf{x}_i (avec $i \in \llbracket 1, N_{local}^{(p)} \rrbracket$), si \mathbf{u}_k (avec $k \in \llbracket 1, N_{global}^{(p)} \rrbracket$) représente le déplacement macroscopique au nœud k et $\mathbf{a}_k^{(j)}$ est une inconnue d'enrichissement associée à la fonction d'enrichissement $j \in \llbracket 1, n_{enr}^{(p)} \rrbracket$, alors il est possible d'imposer la cinématique GFEM (ou MS-GFEM) grâce à l'outil *Equation* disponible dans le module *Constraint* en écrivant (ici pour la cinématique GFEM) :

$$\mathbf{u}_i^{(local)} - \sum_{k=1}^{N_{global}^{(p)}} \varphi_k^{(i)} \mathbf{u}_k - \sum_{k=1}^{N_{global}^{(p)}} \varphi_k^{(i)} \sum_{j=1}^{n_{enr}^{(p)}} \psi_k^{(j,i)} \mathbf{a}_k^{(j)} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

Sur un *patch* Ω_p , $N_{local}^{(p)}$, $N_{global}^{(p)}$ et $n_{enr}^{(p)}$ font référence respectivement au nombre de nœuds du maillage local associé, le nombre de nœuds du maillage macroscopique et le nombre de fonctions d'enrichissements. $\varphi_k^{(i)}$ indique la valeur de la fonction "chapeau" macroscopique à la coordonnée \mathbf{x}_i et $\psi_k^{(j,i)}$ la valeur de l'enrichissement j au même point. Les déplacements nodaux \mathbf{u}_k et les inconnues $\mathbf{a}_k^{(j)}$ doivent être définis comme des *Reference Points* afin de ne pas être effacés de la mémoire par Abaqus lors de la résolution de l'équation 2.1 pour chaque *patch* Ω_p , le logiciel prenant en compte les équations par élimination/substitution dans un souci de gain de temps. Assimiler les nœuds macroscopiques à des *Reference Points* interdit à Abaqus de les supprimer.

1.5 Calcul de la rigidité GFEM

Il est nécessaire qu'Abaqus intègre de manière automatique les différentes composantes de la matrice de rigidité GFEM. Chaque *patch* à intégrer possède des inconnues \mathbf{u}_k et $\mathbf{a}_k^{(j)}$ qui sont définies sur des nœuds macroscopiques. Ce sont aussi ces inconnues qui interviennent dans la formulation du champ de déplacement approché GFEM. Les nœuds du maillage fin associés aux déplacements locaux $\mathbf{u}_i^{(local)}$ doivent quant à eux être éliminés. En notant \mathbf{U}_l le vecteur contenant les déplacements locaux $\mathbf{u}_i^{(local)}$ et \mathbf{U}_b le vecteur contenant les quantités \mathbf{u}_k et $\mathbf{a}_k^{(j)}$, alors le problème linéaire à résoudre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{ll} & \underline{\underline{K}}_{lb} \\ \underline{\underline{K}}_{bl} & \underline{\underline{K}}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_l \\ \mathbf{f}_b \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Les vecteurs \mathbf{f}_l et \mathbf{f}_b représentent les forces nodales. Or la cinématique GFEM a déjà été imposée à chaque nœud local via la relation 2.1 et la procédure évoquée en [Sous-section 1.4](#) élimine chaque $\mathbf{u}_i^{(local)}$. Par conséquent le vecteur \mathbf{U}_l est nul et le problème se réduit simplement à $\underline{\underline{K}}_{bb} \mathbf{U}_b = \mathbf{f}_b$.

Numériquement une étape de condensation statique est nécessaire pour intégrer la rigidité du maillage fin vers le maillage macroscopique. L'outil *Substructuring* réalise cette opération en ne gardant que les *Retained Nodal Degrees of Freedom* qui ont été associés au préalable aux nœuds macroscopiques \mathbf{u}_k et $\mathbf{a}_k^{(j)}$. L'opération de sous-structuration est illustrée en [FIGURE 2.4](#) et la sous-structure créée conserve la partie linéaire du comportement. Pour résumer l'outil *Substructuring* utilisé en concordance avec les relations 2.1 permet la construction simple d'un objet macroscopique respectant la cinématique GFEM avec la bonne matrice de rigidité.

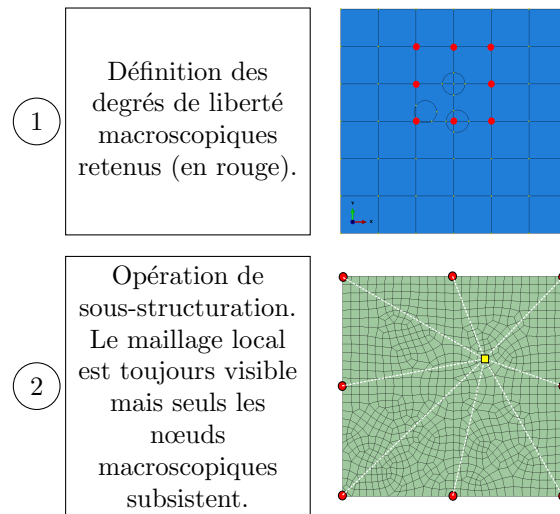


FIGURE 2.4 – Opération de sous-structuration. Une condensation statique est réalisée afin de construire la matrice de rigidité sur les nœuds macroscopiques d’un *patch* (en rouge sur la figure).

1.6 Connection de *patches* dans le cadre de la GFEMgl

Ce paragraphe est spécifique à la GFEMgl puisque la problématique de la connexion des *patches* enrichis se pose. Une fois chaque *patch* enrichi construit séparément avec la variante globale-locale de la GFEM, ceux-ci doivent être repositionnés correctement afin de reconstruire la structure désirée. La difficulté réside alors dans la superposition des nœuds macroscopiques telle que montrée en [FIGURE 1.11](#). C’est l’outil *Tie* qui permet d’imposer le même déplacement entre deux nœuds de mêmes coordonnées.

1.7 Positionnement des sous-structures dans le cadre de la MS-GFEM

Dans le cadre d’une application spécifique à la MS-GFEM, une fois que les *patches* enrichis ont été générés et stockés dans le *Handbook*, la question du raccord avec la cinématique macroscopique se pose. Une idée naturelle est de superposer les *patches* à une structure globale homogène comme illustré en [FIGURE 2.5](#) mais deux problèmes peuvent être soulignés à cause de la procédure d’enrichissement :

1. la matrice de rigidité de chaque motif prend en compte le comportement complet \mathbf{H} dans la partie Eléments Finis $\underline{\underline{K}}^{EF}$ de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$;
2. l’opération de sous-structuration interdit l’interpolation d’un déplacement macroscopique d’une structure Eléments Finis globale sur les nœuds des différents *patches* assimilés à des super-éléments pour Abaqus.

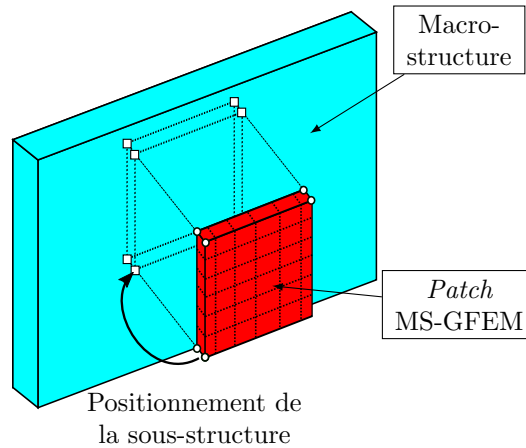


FIGURE 2.5 – Superposition d’un motif enrichi sur une structure macroscopique homogène.

La première difficulté réside dans une rigidification de la structure à cause de la superposition de la rigidité du support macroscopique homogène avec la rigidité du *patch* enrichi qui contient déjà le comportement désiré. Si au sein d’un motif Ω_{motif} on décompose le comportement \mathbf{H} comme la somme d’un comportement homogène \mathbf{H}_0 associé à la matrice MI et d’un comportement de perturbation $\Delta\mathbf{H}$ associé aux détails structuraux tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{motif}}, \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_0 + \Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

Et si la macro-structure possède le comportement homogène de la matrice MI \mathbf{H}_0 alors celui-ci sera en double dans la partie *Eléments Finis* de la matrice de rigidité. Par conséquent \mathbf{H}_0 doit être enlevé de la matrice \underline{K}^{EF} . Ceci est possible en insérant un élément macroscopique de même dimensions que le *patch* et de comportement homogène négatif $-\mathbf{H}_0$. Mettre une rigidité négative sous Abaqus est possible en spécifiant un comportement anisotrope. Ensuite une procédure de nœud maître/esclave avec la fonction *Tie* impose le même déplacement nodal du support homogène vers le *patch* enrichi.

Pour interpoler un champ de déplacement d’une structure sur les nœuds d’une autre structure, la fonction *Embedded Elements* est utilisée. Abaqus crée des relations géométriques entre les nœuds intégrés (“*embedded*”) et les nœuds de l’élément hôte. Si un nœud intégré est compris dans un élément hôte, alors ses composantes en déplacement sont déduites par interpolation des valeurs prises par les degrés de liberté des nœuds de l’élément hôte. Toutefois la fonction *Embedded Elements* ne fonctionne pas sur un super-élément issu d’une opération de sous-structuration. Heureusement le support *Elément Fini* de comportement homogène négatif introduit pour palier la première difficulté énoncée autorise l’utilisation de cette fonction. Le

raccord avec le motif enrichi est réalisé avec la fonction *Tie*. La procédure de positionnement des *patches* est illustrée en FIGURE 2.6.

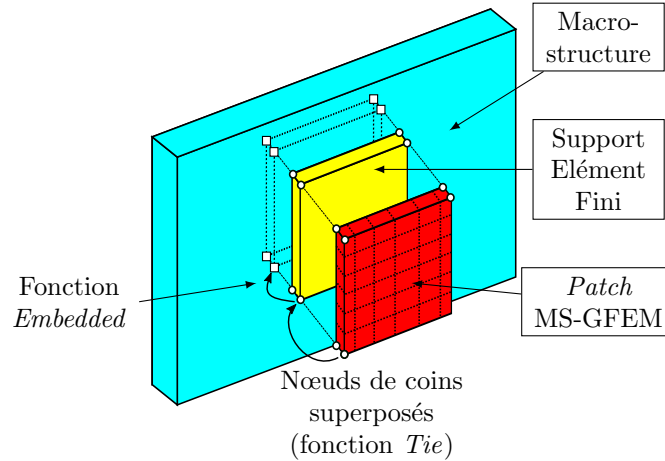


FIGURE 2.6 – Superposition d’un motif enrichi sur un support Élément Fini intermédiaire de comportement homogène négatif lui-même incorporé dans une macro-structure.

1.8 Conclusion partielle : choix d’une stratégie d’enrichissement

Dans la GFEM-H, les motifs précalculés sont superposés à un même maillage structuré. Toutefois le pré-traitement par procédure adaptative et les contraintes d’utilisation imposées par le logiciel Abaqus découragent de l’emploi de cette stratégie.

L’approche GFEMgl offre un résultat précis grâce au respect des hypothèses de Partition de l’Unité dans la cinématique GFEM à condition que la description locale capture suffisamment bien le comportement. De plus la génération des enrichissements sur chaque motif peut être parallélisée et la reconnection des *patches* entre eux est simple. Toutefois plusieurs limitations à cette stratégie sont à relever :

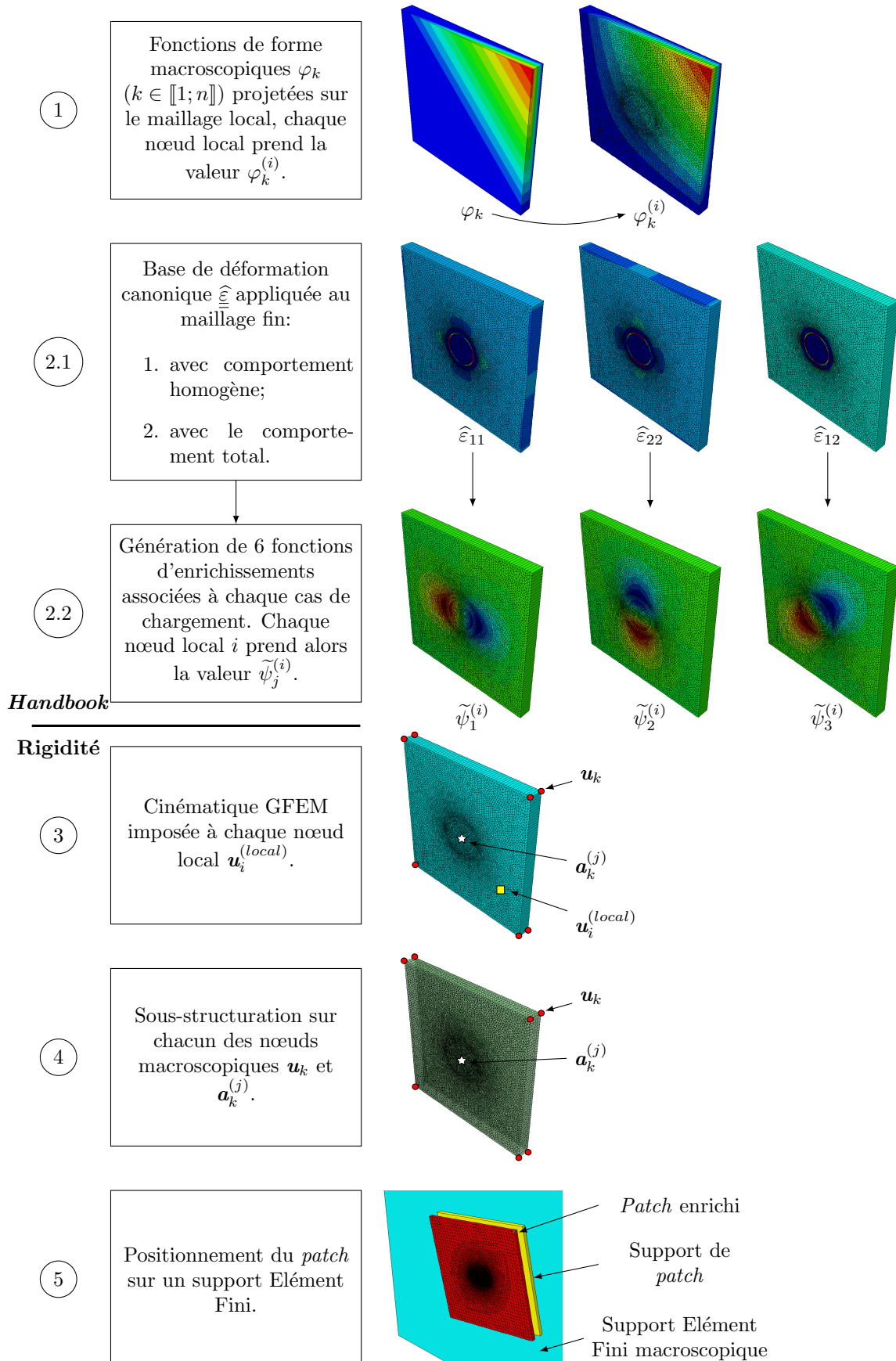
1. si un détail structural est commun à plusieurs *patches*, ceux-ci doivent tous subir les étapes de construction des fonctions d’enrichissements numériques associées à ce détail. Des étapes de lecture et d’écriture sur disque dur sont ajoutées ;
2. Une procédure d’enrichissement doit être réalisée pour chaque motif, même s’il apparaît plusieurs fois de manière identique dans le domaine étudié ;
3. La parallélisation sous Abaqus est gourmande en licences et donc coûte cher ¹.

1. Si N_{Proc} est le nombre de processeurs utilisés pour le calcul, le nombre de licences Abaqus correspondant est le suivant : $5.(N_{proc})^{0.442}$

Dans le cadre de la MS-GFEM, des motifs précalculés et stockés dans un *Handbook* peuvent être appelés dans un domaine macroscopique comme fonctions d'enrichissement pour construire le modèle désiré. Les hypothèses de séparation d'échelle ont pour avantage de s'affranchir des problèmes de conformité de maillage et un même motif peut être appelé plusieurs fois.

En ce qui concerne les outils Abaqus les fonctions d'enrichissements peuvent être générées dans le cadre de la GFEM-H, la GFEMgl et la MS-GFEM. En effet pour chacune de ces méthodes un chargement macroscopique est appliqué aux bords des motifs et autorisent le calcul d'une fonction perturbation qui sera l'enrichissement numérique. L'outil de sous-structuration permet la création d'un super-élément contenant le comportement désiré à l'échelle macroscopique. La MS-GFEM sera une méthode privilégiée à la GFEMgl de par le caractère réutilisable et précalculé des motifs. La MS-GFEM sera aussi bien évidemment plus versatile que la GFEM-H grâce à l'émancipation de la conformité des maillages supports.

L'automatisation de toutes les procédures décrites jusqu'ici est possible via Python. La construction d'une base de données *Handbook* est rendue simple, la seule difficulté étant le choix de motifs à y intégrer en vue de les utiliser pour la description d'un micro-structure réaliste de CMC. Les différents outils introduits dans cette section prouvent l'implémentabilité de la GFEM sous Abaqus, que ce soit la GFEMgl ou la MS-GFEM. La procédure à suivre pour l'application de la MS-GFEM est donnée en page suivante.



2 Application de la MS-GFEM

2.1 Problème de référence

Une micro-structure de CMC de référence est considérée en [FIGURE 2.7](#), elle sera désignée comme Cellule Élémentaire de Référence (CER). Elle est composée de 17 fibres Hi-Nicalon-S enrobées d'une interphase BN. La matrice est hétérogène et se compose d'une couche SiC CVI complétée par un procédé MI déposant du silicium Si. L'arrangement des fibres est construit à partir d'une microtomographie d'un CMC SiC/SiC réel. Un essai de traction est réalisé : un glissement surfacique est défini sur 3 surfaces de la structure tandis qu'un déplacement imposé selon l'axe \mathbf{x} est défini sur un quatrième surface.

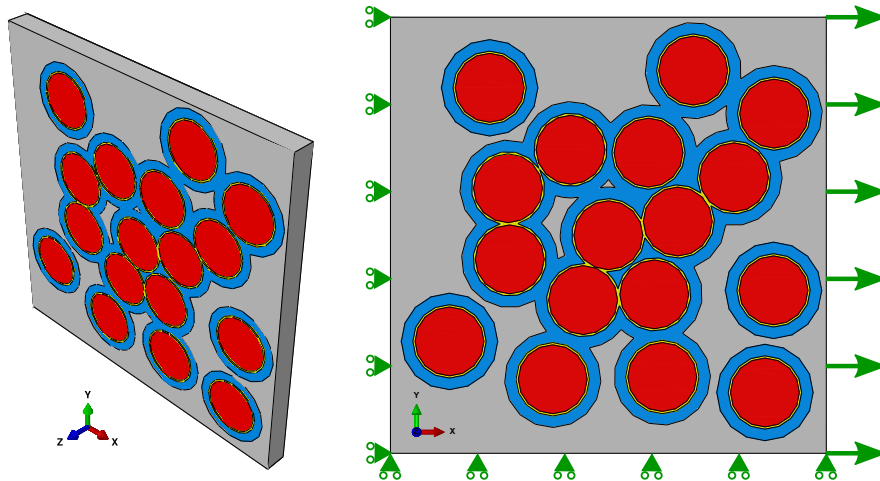


FIGURE 2.7 – Structure de référence considérée. Les fibres sont en rouge, l'interphase en jaune, la matrice SiC CVI en bleu et la matrice Si MI en gris. Un déplacement unitaire selon \mathbf{x} est appliqué avec $\mathbf{u}_d = 1.\mathbf{x}$.

Les propriétés matériaux sont résumées dans la [Table 2.1](#). Les dimensions géométriques sont connues via les micrographies issues de la littérature et sont données dans la [Table 2.2](#). Le rayon des fibres est supposé constant et donné par le fabricant [[HiNicalonS, nd](#)].

Des éléments hexaédraux sont utilisés pour la simulation Eléments Finis de référence qui compte 524 588 degrés de liberté. L'épaisseur de la structure est balayée par un seul élément. La première composante $\varepsilon_{11}^{(ref)}$ du tenseur des petites déformations est donnée en [FIGURE 2.9](#), la visualisation est issue d'un post-traitement Matlab lisant les valeurs de déformation aux points de Gauss et les interpolant aux nœuds. La simulation pour un cœur dure 89 secondes, ce temps

inclut l'écriture des résultats dans le fichier contenant les valeurs des déformations aux points de Gauss.

	Module de Young	Coefficient de Poisson	Référence
Fibre Hi-Nicalon TM -S	$E_{fib} = 420 \text{ GPa}$	$\nu_{fib} = 0.2$	[HiNicalonS, nd]
Interphase BN	$E_{BN} = 62 \text{ GPa}$	$\nu_{BN} = 0.17$	[Ünal et Bansal, 2002a]
Matrice SiC CVI	$E_{SiC} = 400 \text{ GPa}$	$\nu_{SiC} = 0.3$	[Guillaumat et Lamon, 1996]
Matrice Si MI	$E_{Si} = 165 \text{ GPa}$	$\nu_{Si} = 0.3$	[Mazars, 2018]

TABLE 2.1 – Propriétés matériaux utilisées pour cette étude.

Profondeur	$5 \mu m$	
Longueur d'un côté	$c = 60 \mu m$	
Rayon de fibre	$R = 6 \mu m$	[HiNicalonS, nd]
Épaisseur d'interphase	$e_{BN} = 0.4 \mu m$	[Naslain <i>et al.</i> , 2010]
Épaisseur de matrice SiC CVI	$e_{SiC} = 2 \mu m$	[Katoh <i>et al.</i> , 2014]

TABLE 2.2 – Dimensions adoptées dans ce modèle

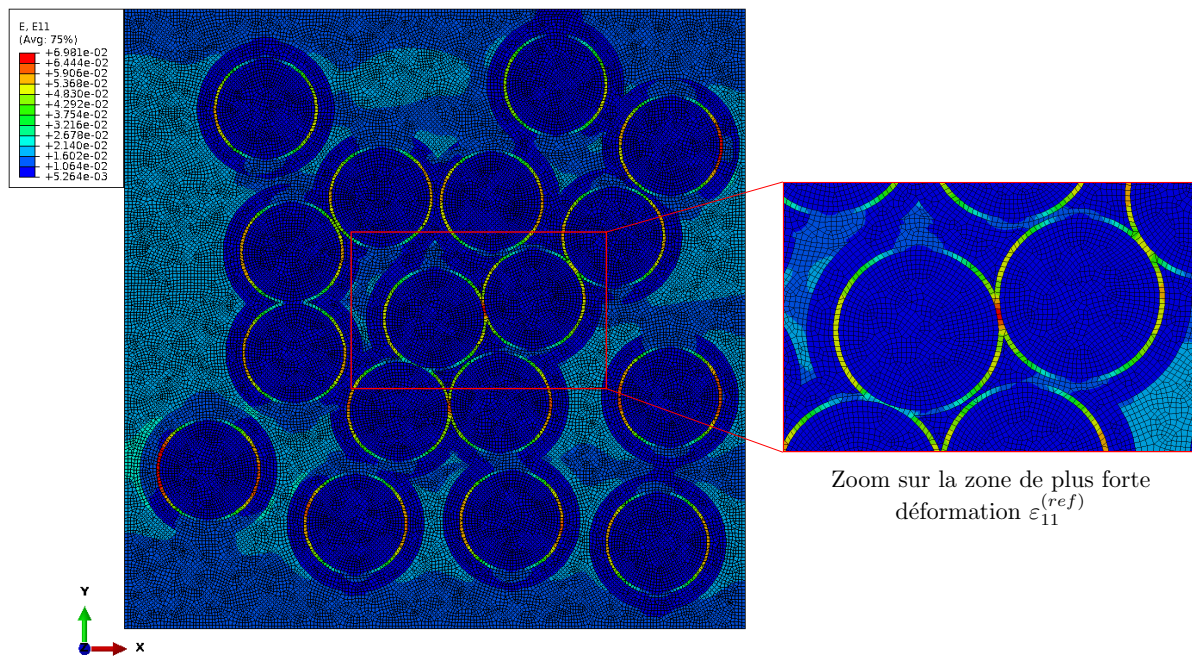


FIGURE 2.8 – Première composante $\varepsilon_{11}^{(ref)}$ du tenseur des déformations dans le logiciel Abaqus.

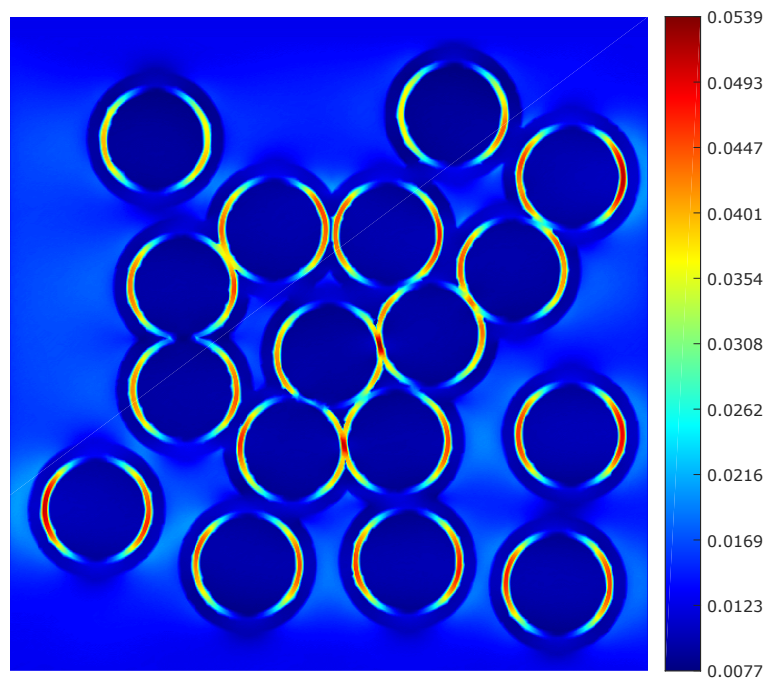


FIGURE 2.9 – Première composante $\varepsilon_{11}^{(ref)}$ du tenseur des déformations écrite aux nœuds du maillage dans le logiciel Matlab.

2.2 Choix des motifs à stocker dans le *Handbook*

En vue de reconstruire la structure de référence et de retrouver un champ de déformation similaire, il est nécessaire de choisir des motifs pertinents pour nourrir le *Handbook*. Ces motifs doivent capturer l'information d'intérêt pour aider les ingénieurs dans leur compréhension du matériau. Il est possible d'en distinguer plusieurs d'après l'observation de la structure de référence :

- une inclusion circulaire unique ;
- deux inclusions circulaires proches.

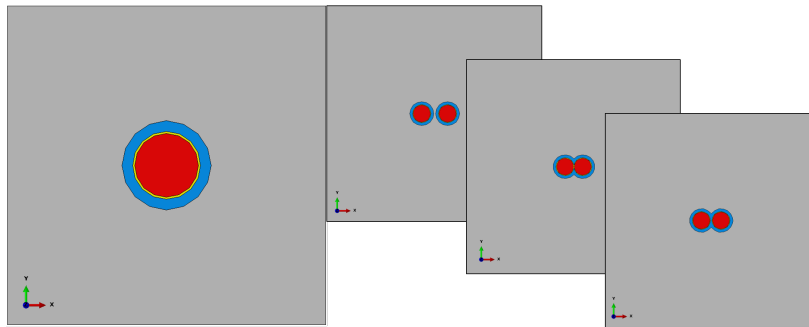


FIGURE 2.10 – Exemples de *patches* extraits de la structure de référence. Plusieurs motifs avec deux fibres doivent être considérés compte tenu des différentes distances possibles entre ces fibres. La fibre est rouge, l'interphase jaune, la matrice SiC CVI bleue et la matrice Si MI grise. Chaque *patch* est un carré dont il faut dimensionner le côté.

Ce choix de motifs élémentaires est inspiré des travaux de [Tranquart *et al.*, 2012]. Ils sont illustrés en FIGURE 2.10. Concernant les *patches* à deux fibres, l'écartement des fibres est choisi de manière à respecter le critère de distance d'interaction défini dans [Tranquart *et al.*, 2012, Tranquart, 2012]. Une inclusion est composée d'une fibre Hi-Nicalon-S, d'une interphase BN et de la matrice SiC CVI. Il est à noter que les interphases et les couches de matrice SiC CVI peuvent s'interpénétrer dans un motif contenant plusieurs inclusions. L'objectif pour la suite de l'étude est de définir un critère permettant de choisir la longueur c d'un côté d'un support d'enrichissement. Dans le cas particulier d'un chargement plan il est possible de s'inspirer du travail de [Lekhnitskii, 1968]. Pour une hétérogénéité circulaire plongée dans un domaine infini soumis à un chargement comme illustré en FIGURE 2.11, le champ de contrainte est donné analytiquement grâce à des fonctions de potentiels et aux coefficients de Dundurs [Dundurs, 1969].

Les motifs sélectionnés contiennent plusieurs phases, mais l'inclusion utilisée dans le modèle de Lekhnitskii n'en comporte qu'une seule. Pour une sollicitation extérieure en contrainte, plus la rigidité de l'inclusion est grande, plus le champ de

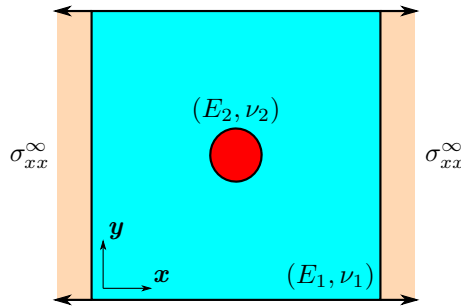


FIGURE 2.11 – Mise en données du modèle de Lekhnitskii pour le calcul analytique d’un champ de contrainte autour d’une inclusion circulaire plongée dans un milieu infini. Un chargement de traction est illustré ici.

contrainte autour de celle-ci sera étendu. Par conséquent le rayon choisi pour l’inclusion circulaire du modèle analytique peut être pris tel que $R_{inc} = R + e_{BN} + e_{SiC}$ et son module de Young peut être fixé à $E_{fib} = 420 \text{ GPa}$. Si un *patch* avec deux fibres est dimensionné, le modèle analytique fera appel à une inclusion de taille suffisante pour contenir les deux hétérogénéités du motif. Ce dernier choix permet de surdimensionner le *patch* pour qu’il contienne le plus d’information possible de la part des hétérogénéités à l’intérieur. Un critère en énergie de déformation est choisi pour définir la quantité d’information contenue dans le *patch*. La connaissance analytique de la densité d’énergie de déformation $\omega(\mathbf{x})$ permet aussi de connaître sa valeur minimale ω_∞ atteinte à une distance infinie de l’inclusion. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est le vecteur position du centre de l’inclusion et si c est la longueur du *patch* à dimensionner, alors le critère suivant est défini pour un essai de traction selon l’axe \mathbf{x} :

$$\omega\left(\mathbf{x}, \mathbf{x} = \frac{c}{2}\right) = (1 + \epsilon)\omega_\infty \quad (2.4)$$

La constante ϵ est un paramètre d’ajustement. La [FIGURE 2.12](#) montre l’évolution de la densité d’énergie de déformation selon l’axe \mathbf{x} de la plaque pour $\epsilon = 10\%$. Pour un *patch* ne contenant qu’une seule fibre la taille calculée est environ $c = 60 \mu\text{m}$ ce qui est dix fois le rayon de la fibre. Pour un *patch* avec deux fibres la taille calculée maximale est $c = 150 \mu\text{m}$ ce qui est vingt-cinq fois le rayon de la fibre.

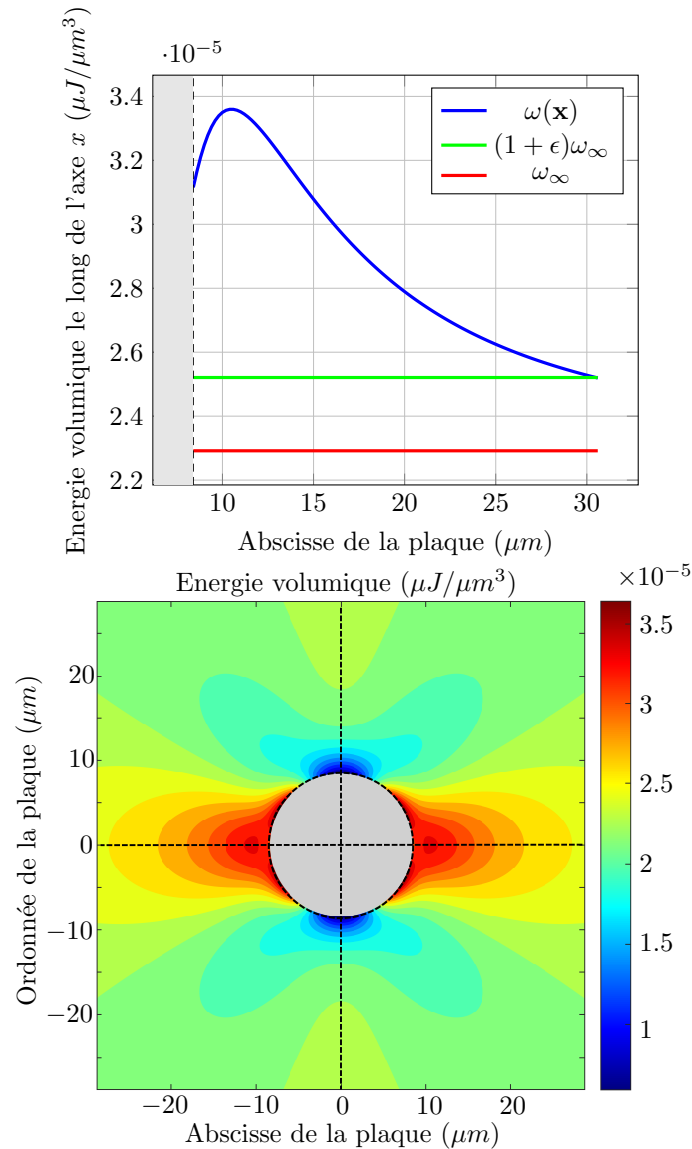


FIGURE 2.12 – Variation de la densité d'énergie de déformation selon l'axe \mathbf{x} pour un essai de traction d'amplitude σ_{xx}^∞ . A la position $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{c}{2}$ cette densité vaut $(1 + \epsilon)\omega_\infty$.

2.3 Arrangement des motifs et reconstruction de champ

Une fois que le *Handbook* est défini, celui-ci doit servir à reconstruire la structure de référence de la FIGURE 2.7. Dans cette optique les différents motifs enrichis sont placés sur un élément macroscopique en suivant la procédure décrite dans la section Section 1. Le choix de leur positionnement est décrit dans la FIGURE 2.13. Il est intéressant de remarquer que comme le *Handbook* est pré-fabriquée en amont, il n'est pas possible de placer les centres de fibres très exactement dans la même

configuration que sur la structure de référence. Des erreurs locales doivent donc être attendues. En pratique l'arrangement des fibres est aléatoire et il suffit simplement de respecter les bonnes distributions des différents constituants du CMC pour comparer plusieurs réalisations. En observant aussi le choix des motifs et leur positionnement dans la [FIGURE 2.13](#) il est possible de s'attendre à de mauvaises interactions entre fibre car cette information n'est pas ajoutée dans le modèle à construire. C'est un choix assumé ici, il est possible d'ajouter les motifs manquants pour augmenter la quantité d'informations.

La structure macroscopique sur laquelle s'accrochent les motifs a des dimensions plus grandes que la structure de référence pour contenir tous les supports d'enrichissements. En effet la fonction *Embedded Element* est fiable si les nœuds dont le déplacement est calculé grâce à l'interpolation sont localisés à l'intérieur de cette structure macroscopique. Pour se ramener aux conditions d'étude du modèle de référence, la même déformation homogène est appliquée. Le nombre de degrés de liberté du modèle MS-GFEM est de 708, ce qui est à peu près mille fois moins que pour le modèle de référence.

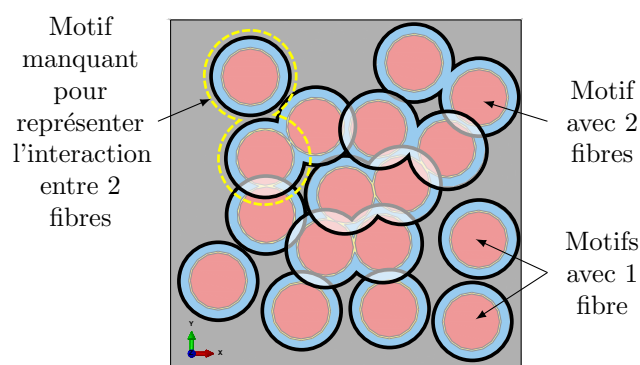


FIGURE 2.13 – Arrangement des motifs pour reconstruire la structure de référence. Ils peuvent contenir une ou deux fibres et peuvent se superposer légèrement.

La simulation permet d'obtenir les champs de contrainte sur chaque patch, néanmoins les outils Abaqus ne permettent pas de visualiser sur un même plan les différents apports des motifs impliqués dans le modèle. Une première idée consiste à projeter les contributions des motifs enrichis sur une grille unique avec la fonction *Submodel* d'Abaqus. Cependant, le problème de la projection de champ énoncé dans l'évaluation des difficultés liées au calcul de la matrice de rigidité du GFEM est à nouveau rencontré : une telle opération est potentiellement coûteuse. Une autre idée est de convertir les champs de déformations en une carte de couleurs dans laquelle à chaque pixel est associé une valeur de déformation. Cette carte de couleur est réalisée sous Matlab en lisant les fichiers de résultats d'Abaqus qui sont simples à générer. La [FIGURE 2.14](#) montre un échantillon de conversion d'un champ Abaqus en carte de couleurs Matlab pour plusieurs *patches*. Une résolution de 512 couleurs

est utilisée et l'échelle de couleurs est calculée à partir des extrema relevés pour chaque *patch*.

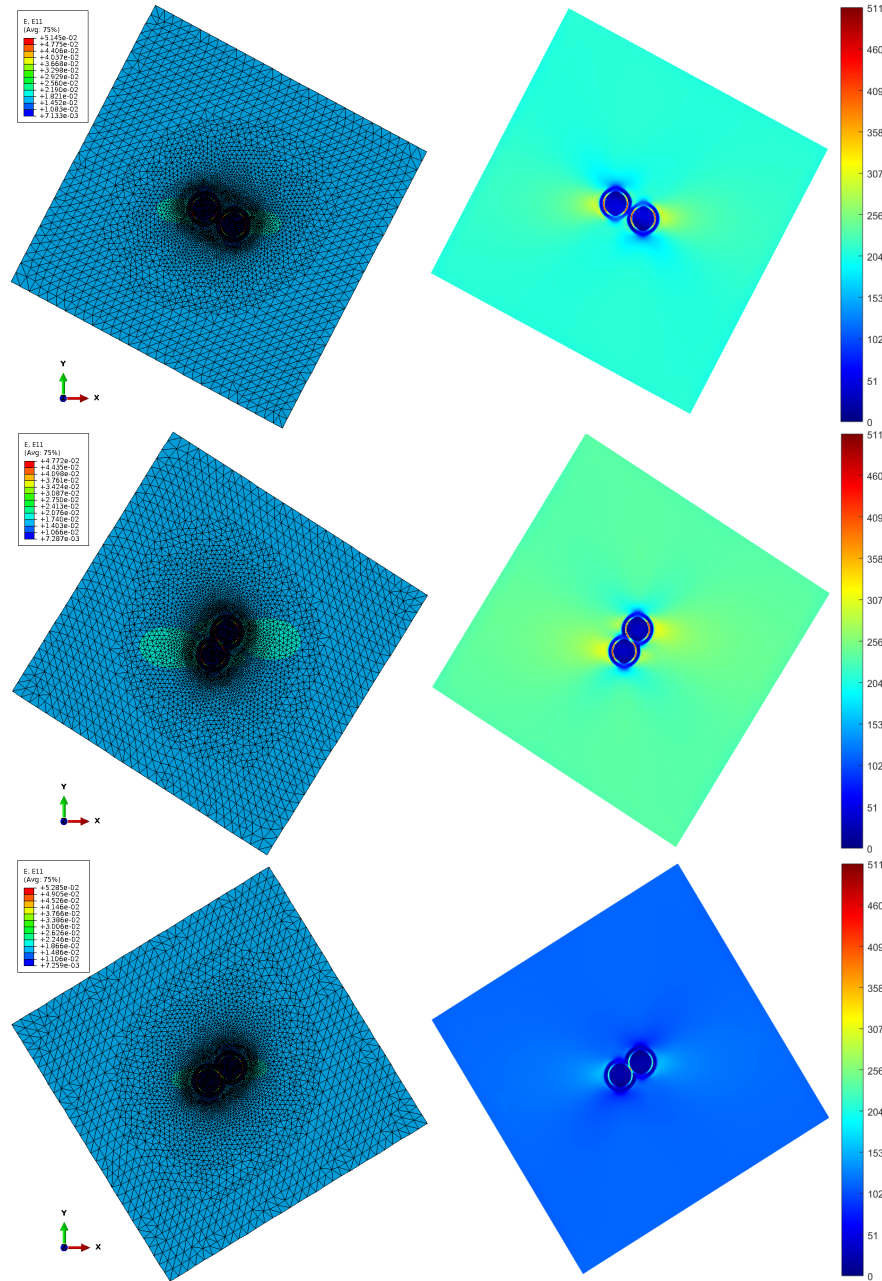


FIGURE 2.14 – Exemple de conversion d'un champ de déformation Abaqus en carte de couleurs Matlab. La première composante du tenseur des déformation est tracée ici.

Après avoir enlevé la contribution homogène de la déformation, les cartes de couleurs peuvent être superposées : cela revient à sommer les contributions d'enrichissement. Une fois cette opération terminée la contribution homogène peut être

réintroduite et le champ reconstruit est donné en [FIGURE 2.15](#). Il est possible de remarquer que la plage de valeurs prises par les déformations est plus large que celle du calcul de référence. Ce résultat s'explique par la superposition des enrichissements quand deux motifs s'intersectent comme cela est visible dans la [FIGURE 2.13](#). Néanmoins il y a une correspondance dans la localisation des maxima de déformation entre le modèle reconstruit et le modèle de référence. Une fois que le champ de déformation est reconstruit, il est possible d'évaluer l'erreur globale et l'erreur locale dans la cellule de référence.

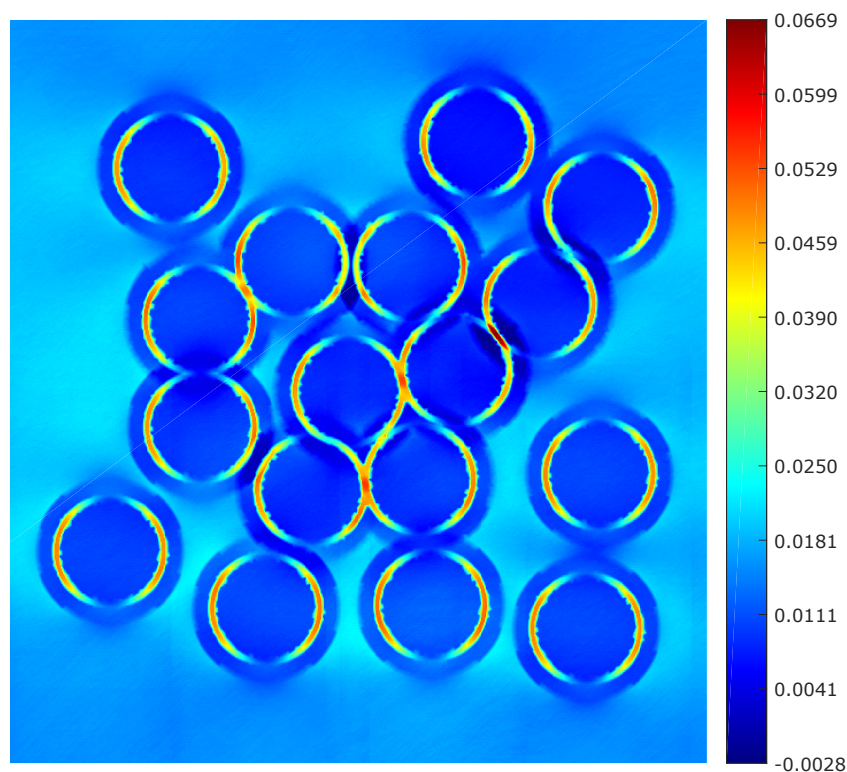


FIGURE 2.15 – Champ de déformation obtenu après le post-traitement de toutes les contributions des *patches*.

2.4 Erreur globale

Si $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne, l'erreur relative L_2 entre le champ de déplacement MS-GFEM $\mathbf{u}^{(\text{MS-GFEM})}$ et le déplacement de référence $\mathbf{u}^{(\text{ref})}$ est donnée par :

$$e_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \|\mathbf{u}^{(\text{MS-GFEM})} - \mathbf{u}^{(\text{ref})}\|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} \|\mathbf{u}^{(\text{ref})}\|^2 d\Omega}} \quad (2.5)$$

D'un point de vue pratique calculer $\mathbf{u}^{(\text{MS-GFEM})} - \mathbf{u}^{(\text{ref})}$ revient à calculer la différence entre le champ de perturbation reconstruit par superposition des enrichissements (FIGURE 2.16) et le champ de perturbation de référence obtenu en supprimant la partie homogène du résultat de référence (FIGURE 2.17). Le post-traitement Matlab a pour avantage de permettre l'utilisation des pixels (tous de même taille) pour calculer l'erreur e_{L_2} . Si N_{pixels} est le nombre de pixels de l'image à traiter et si $\mathbf{u}_p^{(\text{MS-GFEM})}$ et $\mathbf{u}_p^{(\text{ref})}$ sont les vecteurs déplacements au pixel numéro p alors l'erreur relative L_2 se reformule :

$$e_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N_{pixels}} \|\mathbf{u}_p^{(\text{MS-GFEM})} - \mathbf{u}_p^{(\text{ref})}\|^2}{\sum_{p=1}^{N_{pixels}} \|\mathbf{u}_p^{(\text{ref})}\|^2}} \quad (2.6)$$

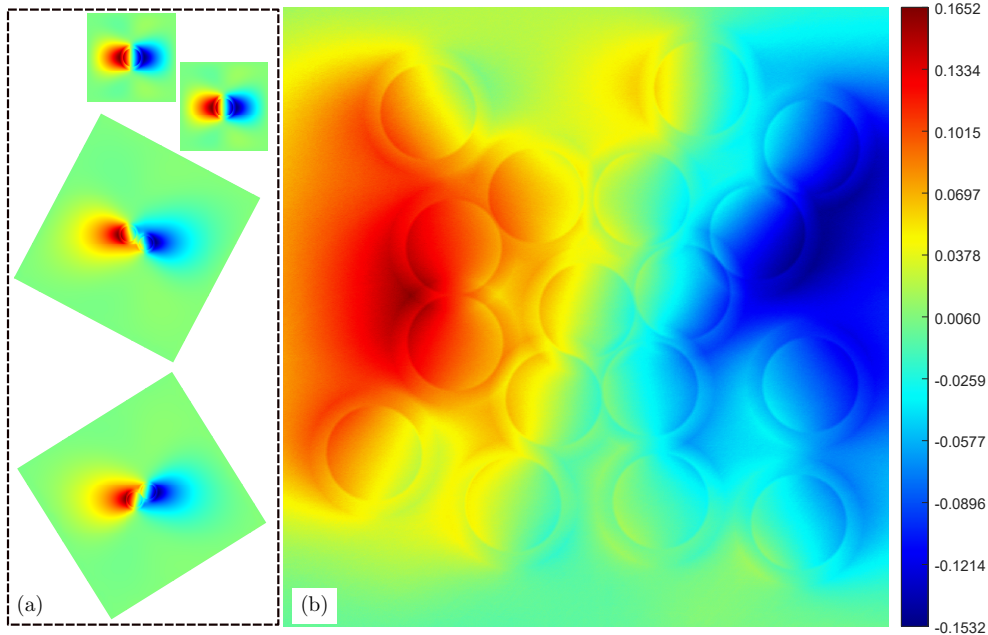


FIGURE 2.16 – (a) Exemples de champs de perturbation $\sum_{j=1}^{n_{enr}^{(k)}} \tilde{\psi}_k^{(j)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k^{(j)}$ obtenus sur différents $patches$ désignés par l'indice k (b) Superposition de ces champs de perturbation.

Pour ce cas test, $e_{L_2} = 8.49\%$. A l'échelle de la structure la MS-GFEM donne une erreur relative L_2 satisfaisante au regard des simplifications faites tout au long de cette Partie I de la thèse :

1. les fonctions d'enrichissement sont orthogonales deux à deux ;
2. les motifs proposés pour le *Handbook* sont très simples ;
3. toutes les interactions entre fibres ne sont pas prises en compte.

Afin de vérifier si le champ de déformation local issu de la superposition de motifs correspond de manière satisfaisante au champ de référence, la section qui suit propose d'évaluer l'erreur locale au sein de la structure.

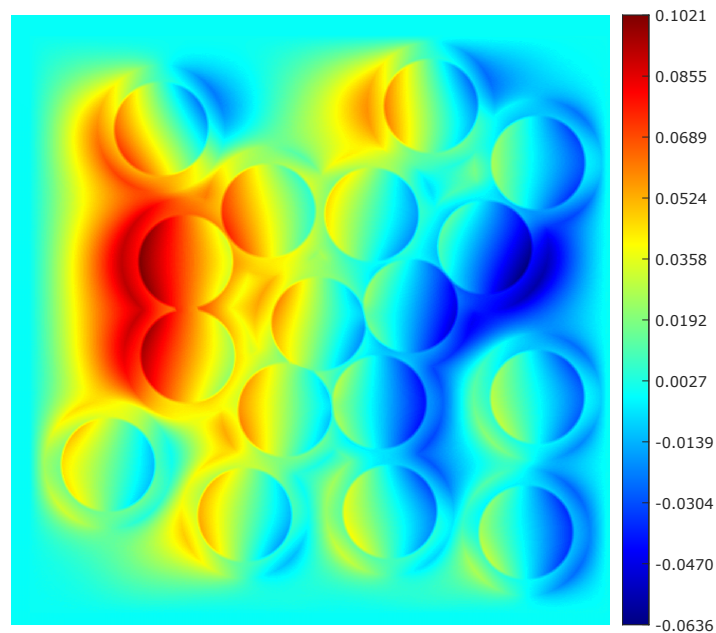


FIGURE 2.17 – A partir de la structure de référence, première composante du champ de déplacement perturbé obtenu en soustrayant la partie homogène du déplacement au champ complet.

2.5 Ecart en déformation entre la MS-GFEM et le modèle Eléments Finis de référence

La différence de déformation $\varepsilon_{11}^{(gap)}$ entre le champ de référence $\varepsilon_{11}^{(ref)}$ et le champ MS-GFEM $\varepsilon_{11}^{(MS-GFEM)}$ s'écrit :

$$\varepsilon_{11}^{(gap)} = \varepsilon_{11}^{(ref)} - \varepsilon_{11}^{(MS-GFEM)} \quad (2.7)$$

Ce champ $\varepsilon_{11}^{(gap)}$ est montré en [FIGURE 2.18](#) et permet d'illustrer deux résultats anticipés plus tôt :

1. de grandes différences se situent dans les zones où les motifs se superposent ;
2. des écarts importants sont visibles au niveau des interfaces entre les différentes phases du fait de l'impossibilité de reconstruire parfaitement la structure de référence à cause du choix des motifs à deux fibres proches.

Un écart relatif est proposé en [FIGURE 2.19](#) en divisant simplement $\varepsilon_{11}^{(gap)}$ par $\varepsilon_{11}^{(ref)}$. Cela permet de mettre en évidence une erreur de plus de 400% dans certaines zones très localisées. Pour éviter un effet d'uniformisation des couleurs du fait des très grandes erreurs quasi-ponctuelles, une version de l'écart relatif avec seuil est proposée en [FIGURE 2.20](#) et un zoom de ce champ est donné en [FIGURE 2.21](#). L'erreur dans les zones éloignées des interfaces ou superposition d'enrichissements est inférieure à 10%, que ce soit dans la matrice, les interphases ou les fibres. Ceci illustre bien l'importance du choix des motifs et de leur disposition pour minimiser l'erreur locale faite lors de la reconstruction d'une structure de référence.

Toutefois l'étude menée ici montre que regarder l'erreur locale n'est pas forcément pertinent compte tenu

1. de la simplification de cinématique opérée dans la MS-GFEM ;
2. de la non correspondance parfaite entre les centres de fibres du modèle de référence et du modèle reconstruit.

Il est intéressant toutefois de vérifier qu'à l'échelle de la structure l'information globale est suffisamment retranscrite.

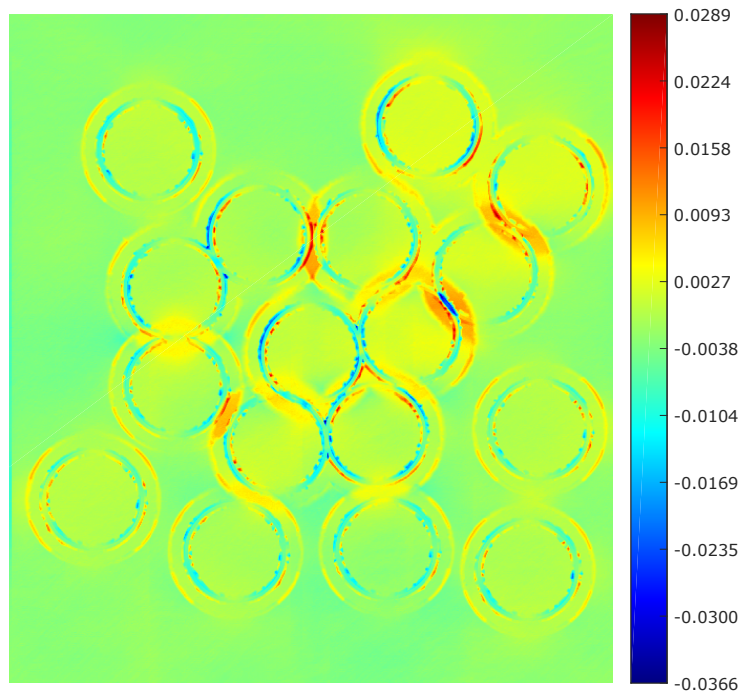
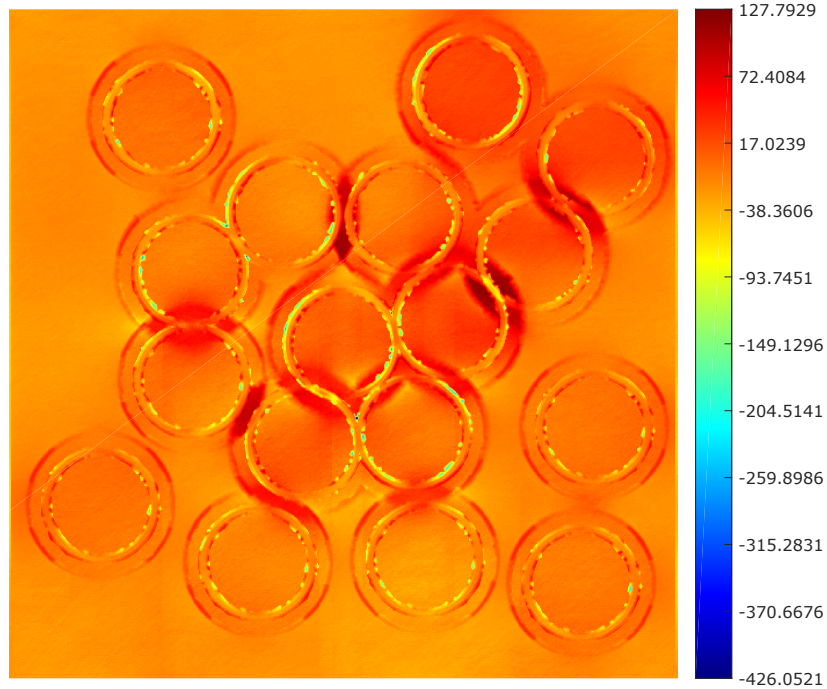
FIGURE 2.18 – Ecart en déformation $\varepsilon_{11}^{(gap)}$.

FIGURE 2.19 – Erreur relative (%).

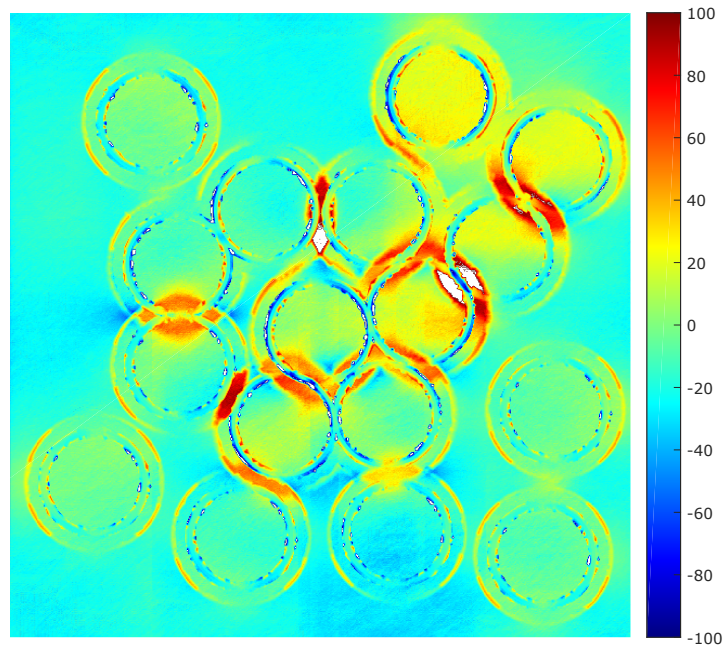


FIGURE 2.20 – Erreur relative avec un seuil si la valeur dépasse 100% en valeur absolue.

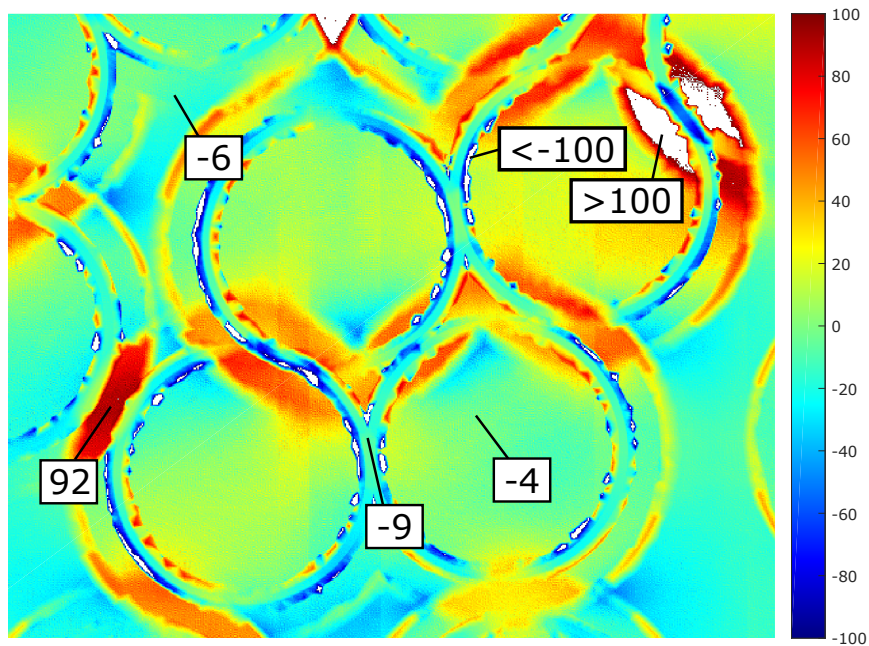


FIGURE 2.21 – Quelques valeurs d'intérêt (en %) dans le champ montrant l'erreur relative.

3 Conclusion de la Partie I

Il est rappelé que dans le cadre de cette thèse, un outil de compréhension des phénomènes non-linéaires à haute température est souhaité par Safran Ceramics. Cet outil doit être implémentable dans un logiciel commercial largement utilisé. Ainsi dans un premier temps une étude bibliographique des différentes méthodes numériques multi-échelles utiles à la description d'une structure a été menée. Il ressort que les méthodes de décomposition de domaine réalisent un calcul trop riche pour pouvoir isoler l'information susceptible d'aider à la compréhension du comportement matériau. Du côté des méthodes d'homogénéisation leurs limitations résident dans l'hypothèse forte de périodicité du VER considéré et dans leur incapacité à fournir un outil capable de décrire une micro-structure. Enfin les méthodes de superposition de modèles posent des difficultés d'un point de vue mise en œuvre sur un logiciel commercial comme Abaqus.

Ce sont les méthodes d'enrichissement cinématiques qui se montrent les plus prometteuses par leur capacité à se focaliser sur un phénomène en particulier. En effet les stratégies liées à la XFEM mettent l'accent sur la description d'interfaces ou de fissures et celles liées à la GFEM mettent en évidence la possibilité de décrire une micro-structure en utilisant des problèmes *Handbook* pré-calculés et dont les motifs sont choisis en amont. Plus particulièrement la MS-GFEM semble être la variante la plus souple parmi les différentes versions de la GFEM, c'est alors cette méthode qu'il est choisi d'implémenter dans le logiciel commercial Abaqus. Le chapitre 2 a alors détaillé les étapes permettant d'obtenir la cinématique MS-GFEM en utilisant les outils mis à disposition dans le logiciel. Un exemple de calcul élastique sur micro-structure est présenté ainsi qu'un post-traitement pour montrer les forces et limitations de la méthode actuellement.

Forces :

- les motifs peuvent être générés et stockés en amont du calcul ;
- un même motif peut être utilisé plusieurs fois dans un même modèle ;
- le coût en mémoire est bien plus faible que pour un calcul Eléments Finis grâce à un nombre de degrés de liberté faible ;
- l'erreur commise à l'échelle de la structure est faible.

Faiblesses :

- la méthode demande un post-traitement sur un logiciel annexe pour visualiser les champs ;
- le choix des motifs conditionne la qualité de la solution au niveau local ;
- la procédure de sous-structuration ne conserve que le comportement linéaire.

Par conséquent des recherches supplémentaires peuvent être menées en vue de prendre en compte le comportement non-linéaire, une première étape dans ce sens a été présentée dans [Friderikos *et al.*, 2017] où le logiciel Castem avait été utilisé.

Enfin le choix du positionnement des *patches* doit être fait judicieusement pour obtenir les résultats les plus fidèles possibles.

Malgré la nécessité de rechercher un moyen de tenir compte du comportement non linéaire de la structure, l'apport scientifique de cette première partie réside surtout dans la possibilité :

1. de construire des motifs de manière automatisée simplement à partir de la connaissance de leur géométrie ;
2. d'utiliser ces motifs à volonté dans un code commercial pour créer une structure à part entière, simplement en les important dans la CAO ;
3. d'imaginer des micro-structures avec différentes distributions de fibres ou différentes fractions volumiques des différentes phases du matériau.

Ainsi un outil de compréhension utilisant une cinématique enrichie est fabriqué en utilisant les outils présents dans un code commercial.

PARTIE II

Modélisation de la rupture au sein de la micro-structure d'un CMC

Chapitre 1

Les stratégies de modélisation numérique de la rupture

D^{ANS} ce premier chapitre, un bilan des méthodes numériques de modélisation de la rupture est présenté. Les méthodes explicites et implicites de fissuration sont passées en revue et le choix d'une stratégie de modélisation par champ de phase sera justifié et développé pour la suite des investigations.

Diverses études numériques ont été menées afin de décrire les mécanismes de rupture fragile au sein des composites SiC/SiC. Les paragraphes suivants dressent un état de l'art des différents outils permettant de décrire une discontinuité forte et les stratégies utilisées pour modéliser le comportement des fissures. Une telle évaluation permettra de justifier le choix d'une modélisation de fissures par champ de phase dans cette thèse.

1 Vue d'ensemble de la mécanique de la rupture et de l'endommagement

Prévenir la défaillance induite par les fissures est une contrainte majeure dans les conceptions mécaniques. Être capable de modéliser le comportement d'une fissure ne permet pas seulement de prédire la ruine de la structure étudiée, mais aussi d'éclairer la compréhension du processus de dégradation lié à la fissuration. Ce domaine de la mécanique a longuement été étudié depuis les travaux de [Griffith, 1921] et de [Irwin, 1957] qui constituent les fondements de la mécanique de la rupture élastique linéaire, ou LEFM (*Linear Elastic Fracture Mechanics*). Ce terme "mécanique de la rupture" est une branche de la mécanique du solide qui apporte des outils pour trouver des relations entre :

1. la longueur de la fissure ;
2. la capacité du matériau à résister à la propagation de la fissure.

La théorie de [Griffith, 1921] s'appuie sur le calcul d'une énergie globale et établit que la fissure se propage si l'énergie libérable est suffisamment grande pour étendre la surface fissurée. [Irwin, 1957] introduit quant à lui le facteur d'intensité de contrainte utile pour l'étude des contraintes autour de la pointe de fissure : c'est une approche locale de la rupture. Dans les deux cas l'initiation de fissure n'est pas possible, une fissure pré-existante doit être présente dans le modèle.

En parallèle de la mécanique de la rupture a été développée la mécanique de l'endommagement continu, ou CDM (*Continuum Damage Mechanics*). Les travaux fondateurs ont été réalisés par [Kachanov, 1958]. Tandis que la mécanique de la rupture porte plutôt sur les fissures macroscopiques, la mécanique de l'endommagement continu introduit une variable d'endommagement qui traduit l'influence des micro-fissures sur le comportement de la structure. Comme soulignée dans la review de [Jirásek, 2007], une limitation de cette approche continue est la dépendance forte de la solution calculée vis-à-vis de la taille de maille dans un modèle Eléments Finis (si localisation) à cause de l'absence d'une longueur caractéristique dans la formulation de la méthode. Ainsi de nombreuses stratégies de régularisation ont vu le jour comme la régularisation visqueuse [Simo et Ju, 1987], la théorie de l'endommagement non local [Bažant *et al.*, 1984] et les modèles à gradient d'endommagement

[Frémond et Nedjar, 1996, Peerlings *et al.*, 1996].

Dans ce qui suit, la [Section 2](#) traite des méthodes de description d'une fissure par une approche discontinue. Un saut de déplacement est alors autorisé au niveau d'une discontinuité forte. La [Section 3](#) se focalise sur les approches continues dans lesquelles c'est la contrainte qui est diminuée grâce à une variable d'endommagement pour modéliser le phénomène de dégradation.

2 Approche discontinue de la fissuration dans un cadre Eléments Finis

2.1 Représentation explicite de la fissuration

Dans un cadre Eléments Finis, la façon la plus naturelle de décrire une fissure est de la faire apparaître explicitement dans le maillage. La propagation de la fissure est assurée en dupliquant les nœuds du modèle de manière à créer une fissure explicite. L'initiation est possible grâce à un critère de contrainte seuil, une application aux CMCs avec interphases en pyrocarbone a été proposée dans le cas d'un problème 2D [[Pineau *et al.*, 2011](#)]. Une telle méthode de description de la discontinuité implique une hypothèse sur le cheminement de la fissure puisqu'elle suit les bords de la maille. L'utilisation d'un maillage adaptatif peut être adoptée pour affiner le maillage à la pointe de la fissure et aider à identifier le chemin de la fissure avant de dupliquer les nœuds, cette stratégie a déjà été appliquée pour une structure 3D [[Chiaruttini *et al.*, 2013](#)]. La trajectoire de la fissure peut également être déterminée en calculant une force de pilotage qui maximise la dissipation à la pointe de la fissure [[Gürses et Miehe, 2009](#)] mais cette stratégie doit être couplée avec un algorithme r-adaptatif déplaçant les nœuds avant de les dupliquer. La modélisation explicite des fissures utilise de nombreux outils différents qui rendent le processus de résolution plus lourd sans le rendre polyvalent dans un code commercial. Cette solution n'est donc pas retenue dans le cadre de cette thèse.

2.2 Représentation implicite de la fissure

Enrichir la formulation du déplacement approché est une autre stratégie pour inclure l'information de la fissure dans une structure. Basée sur la Méthode de Partition de l'Unité (PUM), La méthode des éléments finis étendus (XFEM) ajoute des degrés de liberté supplémentaires associés à des fonctions de niveau (dits *level-set*) pour décrire les éléments traversés par la fissure, qui sera cette fois implicite. Des degrés de liberté sont encore ajoutés en pointe de fissure où les fonctions d'enrichissement analytiques sont issues d'un développement asymptotique de la solution ([[Williams, 1957](#)]). Il est possible aussi d'inclure des fonctions permettant de prendre en compte les dédoublement de fissure [[Daux *et al.*, 2000](#)]. Des implémentations Eléments Finis

3D de la XFEM ont été suggérées mais pour des chargements plans [Sukumar *et al.*, 2000] et un algorithme de découpe d'éléments a été développé pour des cas 3D plus complexes [Areias et Belytschko, 2005]. La XFEM s'affranchit de la conformité au maillage mais cette méthode est limitée par la qualité des enrichissements analytiques qui ne sont bien connus que pour des domaines homogènes et infinis [Fleming *et al.*, 1997]. D'après la revue de [Belytschko *et al.*, 2009] certaines composantes de la matrice de rigidité peuvent être proches de zéro si la discontinuité passe près d'un nœud du maillage. De plus l'initiation et la propagation de fissures ne peuvent être réalisées qu'avec l'ajout de lois supplémentaires comme des modèles d'endommagement continu (*Continuum Damage Models*) [Simone *et al.*, 2003] ou des lois cohésives [Wells *et al.*, 2002] doivent être définies pour tenir compte de l'apparition possible de fissures. Finalement la richesse de la micro-structure étudiée nous détourne de l'idée d'utiliser cette méthode d'enrichissement cinématique associée aux traditionnelles lois de comportement pour les fissures.

Les éléments cohésifs associés à une loi d'endommagement sont capables d'initier et de propager une fissure au sein d'une micro-structure. Si une fissure est susceptible d'apparaître dans des zones bien connues à l'avance (les interfaces typiquement) alors il est possible de placer judicieusement des éléments cohésifs dans la structure comme cela a déjà été fait dans Abaqus dans le cadre d'un essai de décohésion fibre-matrice [Herráez *et al.*, 2016]. De tels éléments peuvent aussi être introduits dans toute la structure [Wang *et al.*, 2015]. Les limites résident toutefois dans la dépendance au maillage et les éléments cohésifs apportent une énergie élastique supplémentaire qui contribue à diminuer le conditionnement de la matrice de rigidité.

Enfin tous les phénomènes liés à la fissuration ne peuvent pas être représentés via la XFEM. Par exemple il a été noté par [Przybyla *et al.*, 2015] que la XFEM implémentée dans Abaqus n'était pas capable de traiter la coalescence de fissures (limitation logicielle), phénomène pourtant observable expérimentalement ([Evans et Dalglish, 1985]).

3 Approche variationnelle de la fissuration

L'initiation, la distance de propagation et la détermination du chemin de fissuration sont des difficultés qui ne peuvent être outrepassées que par l'ajout de critères supplémentaires dans les modèles discrets de fissuration. Cela motive la recherche d'autres techniques de calcul dans lesquelles la détermination du chemin suivi par la fissure ferait automatiquement partie de la solution du problème. Deux familles de modèles peuvent être cités :

1. les modèles à gradient d'endommagement [Frémond et Nedjar, 1996, Peerlings *et al.*, 1996] ;

2. le modèle par champ de phase (*Phase-field*) de [Aranson *et al.*, 2000].

Le modèle *Phase-field* est proche des modèles à gradient d'endommagement et de l'approche variationnelle de l'endommagement de [Francfort et Marigo, 1998], réécrite par la suite dans [Pham et Marigo, 2010a, Pham et Marigo, 2010b]. Le champ de déplacement solution ainsi que le champ d'endommagement sont ainsi recherchés simultanément. La formulation du problème introduit aussi une longueur d'échelle, ou longueur caractéristique, qui définit une zone de dissipation d'énergie. Si cette longueur caractéristique tend vers 0, le modèle de Francfort et Marigo converge vers le modèle de rupture fragile de Griffith grâce au principe de Γ -convergence [Braides *et al.*, 1998]. Cette constatation est aussi soulevée plus en détail dans [Bourdin *et al.*, 2008]. Ces modèles à gradient d'endommagement ou *Phase-field* s'inscrivent dans le cadre plus général des modèles d'endommagement non locaux dont une revue est proposée par [Wu *et al.*, 2018]. Dans l'article de [Jirásek et Desmorat, 2019], les termes "*Phase-field*" et gradient d'endommagement γ sont confondus.

La loi d'évolution de l'endommagement obtenue à partir de ces modèles permet l'initiation et la propagation d'une fissure tout en respectant le caractère irréversible de la propagation de fissure. De plus la méthode permet le dédoublement de fissures [Liu *et al.*, 2016] et la déviation de fissures [Espadas-Escalante *et al.*, 2018]. Enfin il est prouvé dans [Miehe *et al.*, 2010b] que l'évolution de la variable d'endommagement est indépendante du maillage si la taille caractéristique h de celui-ci est inférieure à la moitié d'une longueur caractéristique l qui sera explicitée plus loin :

$$h \leq \frac{l}{2} \quad (1.1)$$

Considérant cette condition respectée des investigations classiques consistent à étudier l'évolution de la variable d'endommagement pour des essais de traction à déplacement imposé sur des structures avec une entaille, ou alors sur des essais de flexion 3 points. Ces essais numériques permettent de vérifier l'indépendance au maillage, ainsi que l'influence d'un terme de stabilisation η pour un chargement quasi-statique [Miehe *et al.*, 2010b] ou dynamique [Hofacker et Miehe, 2013]. Ces essais ont aussi constitué la base de l'implémentation de la loi d'évolution de l'endommagement dans un code commercial tel qu'Abaqus [Msekh *et al.*, 2015]. Plus tard les effets thermiques sur la propagation de fissure ont été envisagés et testés sur des structures bi-matériaux [Miehe *et al.*, 2015b]. Dans un cas particulier d'essais de traction unidimensionnels il est possible de lier la longueur caractéristique l aux paramètres matériau comme cela est fait dans [Nguyen *et al.*, 2016, Zhang *et al.*, 2017]. Toutefois la relation explicite obtenue est valide uniquement en 1D bien qu'elle prouve que l est un paramètre matériau à part entière. Une étude par champ de phase réalisée sur une structure bi-matériau à comportement élastique a été menée afin de comparer les résultats obtenus par décomposition spectrale [Miehe *et al.*, 2010b] et par décomposition hydrostatique-déviatorique suggérée dans [Amor *et al.*, 2009]. De plus un dédoublement de fissure a été réalisé dans Abaqus à l'inter-

face entre 2 matériaux [Molnár et Gravouil, 2017] et l'endommagement ductile a été implémenté [Azinpour *et al.*, 2018] mais aucune application concrète aux composites n'a été réalisée en utilisant ce logiciel commercial. La méthode *Phase-field* a aussi été implémentée dans Matlab [Nguyen *et al.*, 2019]. Toutefois la plupart des auteurs utilisent des codes maison ou ne précisent pas s'ils emploient un code commercial, c'est le cas dans [Miehe *et al.*, 2010b, Heister *et al.*, 2015, Wu, 2018] par exemple.

Dans cette thèse il est choisi d'utiliser une approche par champ de phase au regard de la robustesse de la méthode, de son contenu mécanique et de la convergence vers la rupture tout en supprimant les problèmes de dépendance au maillage. La [Section 4](#) qui suit donne une démonstration de la loi d'évolution de l'endommagement qui sera par la suite implémentée dans Abaqus. La méthode *Phase-field* étant largement adoptée dans les problèmes de fissuration depuis [Miehe *et al.*, 2010b], un état de l'art des techniques d'implémentation de cette stratégie dans le logiciel commercial Abaqus est ensuite proposé en [Sous-section 4.3](#). Ce travail de bibliographie sert alors à justifier la stratégie d'implémentation adoptée dans le Chapitre 2.

4 Un cadre thermodynamique pour la loi d'évolution de l'endommagement

Parmi les différentes variantes en formulation résumées dans [Ambati *et al.*, 2015], cette section mets l'accent sur la formulation introduite par Miehe [Miehe *et al.*, 2010b]. Dans un premier temps les hypothèses du modèle sont rappelées, puis en deuxième lieu la démonstration de la loi d'évolution de l'endommagement est faite en utilisant les formalismes de Francfort et Marigo ([Francfort et Marigo, 1998, Francfort et Marigo, 2005]) ainsi que celui de Mielke [Mielke, 2003].

4.1 Définition du problème

Un domaine Ω est considéré. Des conditions aux limites au bord $\partial\Omega = \partial\Omega_F \oplus \partial\Omega_u$ peuvent être appliquées :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_u \quad (1.3)$$

Des forces volumiques \mathbf{f}_v peuvent être prises en compte au sein de la structure. Une illustration du problème est donnée en [FIGURE 1.1](#). La déformation est supposée petite et donc donnée par le gradient symétrique en déplacement \mathbf{u} :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{u}) + \underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{u})^T) \quad (1.4)$$

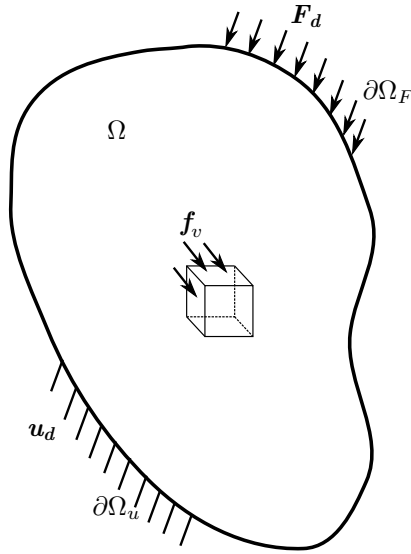


FIGURE 1.1 – Forces volumiques et conditions aux limites appliquées à la structure Ω

Pour l'état non endommagé, le tenseur d'élasticité de Hooke à la coordonnée \mathbf{x} est noté $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$. Alors le tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_0$ est lié à la partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ du tenseur de déformation par :

$$\underline{\underline{\sigma}}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}) \quad (1.5)$$

La densité d'énergie élastique pour l'état non endommagé est définie par :

$$\psi_0(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}) : \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}) \quad (1.6)$$

Le tenseur de déformation élastique peut s'exprimer comme une fonction de ses déformations principales $\varepsilon_i^e(\mathbf{u})$ et des directions principales associées $\mathbf{v}_i(\mathbf{u})$ comme montré dans la décomposition spectrale 1.7 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^e(\mathbf{u}) \mathbf{v}_i(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v}_i(\mathbf{u}) \quad (1.7)$$

Il est alors possible de séparer la contribution en tension de la contribution en compression en considérant :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}) \rangle_{\pm} = \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i^e(\mathbf{u}) \rangle_{\pm} \mathbf{v}_i(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v}_i(\mathbf{u}) \quad (1.8)$$

Ici $\langle x \rangle_+$ (respectivement $\langle x \rangle_-$) représente la partie positive (respectivement négative) d'un réel x . Par conséquent l'énergie élastique pour un état non endommagé ψ_0 peut

être séparé en une somme d'une contribution ψ_0^+ issue des déformations principales positives avec une contribution ψ_0^- issue des déformations principales négatives avec :

$$\psi_0^\pm(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1+\nu} \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i^e(\mathbf{u}) \rangle_\pm^2 + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}) : \underline{\underline{I}} \rangle_\pm^2 \right) \quad (1.9)$$

Les paramètres E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau, $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité. Il est à noter que ψ_0^\pm est une fonction convexe de $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ comme montré dans [Ladevèze, 1983]. Pour la suite un chargement quasi-statique sera considéré et les différentes phases du composite sont considérées fragiles, seules les fibres seront considérées élastiques dans le cadre d'un chargement transverse. La variante utilisant la décomposition hydrostatique-déviatorique a été testée sur une volume élémentaire de référence d'un composite [Espadas-Escalante et al., 2018].

4.2 Loi d'endommagement pour une rupture fragile via une approche thermodynamique

Afin de retrouver la loi d'évolution de l'endommagement telle qu'écrite dans [Miehe et al., 2010b], il est proposé dans un premier temps de définir :

1. un potentiel de dissipation associé à un pseudo-potentiel de dissipation ;
2. une densité d'énergie élastique stockée ;
3. un travail des actions mécaniques extérieures.

Une fois que ces quantités et leurs variables internes associées sont définies, la définition de trois principes dits de *Stabilité* (\mathcal{S}), d'*Inégalité énergétique* (\mathcal{E}) et d'*Irréversibilité* (\mathcal{I}) permet de retrouver :

- l'équilibre mécanique du système ;
- les conditions aux limites du problème ;
- la loi d'évolution de l'endommagement telle qu'écrite dans [Miehe et al., 2010b].

4.2.1 Densité d'énergie élastique stockée

Puisque seule la partie positive des déformations principales est susceptible de dégrader la structure, une densité d'énergie élastique à l'état courant peut être défini tel que suggéré dans [Miehe et al., 2010b] :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) = (1-d)^2 \psi_0^+(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) + \psi_0^-(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) \quad (1.10)$$

Ce potentiel effectue un couplage entre la variable d'endommagement et la contribution élastique. C'est une fonction convexe de la variable \mathbf{u} mais aussi de la variable d'endommagement d . Sans endommagement, la convexité permet d'affirmer qu'une contrainte est associée à une déformation unique. Le tenseur des contraintes à l'état endommagé $\underline{\underline{\sigma}}$ se déduit de 1.10 en utilisant la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = (1 - d)^2 \underline{\underline{\sigma}}_0^+ + \underline{\underline{\sigma}}_0^- \quad (1.11)$$

Ici $\underline{\underline{\sigma}}_0^+$ (respectivement $\underline{\underline{\sigma}}_0^-$) est la contrainte élastique calculée à partir des déformations principales positives (respectivement négatives) obtenues si le matériau n'était pas endommagé. Il est à noter que le choix d'une formulation en déformation est motivé par la possibilité d'écrire un Principe des Puissances Virtuelles plus simple à résoudre via les Eléments Finis. Toutefois l'écriture de la densité d'énergie élastique stockée existe aussi en prenant la contrainte comme variable interne ([Ladevèze, 1983]).

4.2.2 Travail des actions mécaniques extérieures

Le travail des actions mécaniques extérieures peut s'exprimer en faisant intervenir les forces surfaciques \mathbf{F}_d issues des conditions aux limites de Neumann et les forces volumiques \mathbf{f}_v :

$$W(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u} \, d(\partial\Omega) \quad (1.12)$$

4.2.3 Pseudo-potentiel de dissipation

En notant d la variable d'endommagement et l la longueur d'échelle (ou longueur caractéristique) et G_c l'énergie critique de libération du matériau, il est possible d'introduire un pseudo-potentiel de dissipation $\phi_d^{(\eta)}$ faisant intervenir une régularisation visqueuse $\eta \dot{d}^2$:

$$\phi_d^{(\eta)}(d, \dot{d}, \nabla d, \nabla \dot{d}) = G_c \left(\frac{1}{l} d \dot{d} + l \nabla d \nabla \dot{d} \right) + \eta \dot{d}^2 \quad (1.13)$$

$\phi_d^{(\eta)}$ est convexe au regard des variables internes $d, \dot{d}, \nabla d$ et $\nabla \dot{d}$. De plus si le terme de stabilisation η est nul alors $\phi_d^{(0)}$ devient une fonction homogène de degré 1 pour les variables internes \dot{d} et $\nabla \dot{d}$. L'homogénéité de degré 1 est représentative d'un phénomène instantané, cette propriété est définie par :

$$\forall \alpha \geq 0, \phi_d^{(0)}(d, \alpha \dot{d}, \nabla d, \alpha \nabla \dot{d}) = \alpha \phi_d^{(0)}(d, \dot{d}, \nabla d, \nabla \dot{d}) \quad (1.14)$$

D'après [Mielke, 2003], un tel pseudo-potentiel peut être vu comme une métrique infinitésimale sur \mathbb{R} qui définit une distance de dissipation entre deux états atteints aux temps t_1 et t_2 (avec $t_1 \leq t_2$) :

$$\begin{aligned} \varphi_d^{(\eta)}(d_1, d_2, \nabla d_1, \nabla d_2) &= \inf_d \left(\int_{t_1}^{t_2} \phi_d^{(\eta)}(d(s), \dot{d}(s), \nabla d(s), \nabla \dot{d}(s)) ds, \right. \\ d : [t_1, t_2] &\mapsto \mathbb{R}, d \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \text{ et } [d(t_1) = d_1, d(t_2) = d_2], \\ \nabla d : [t_1, t_2] &\mapsto \mathbb{R}, \nabla d \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \text{ et } [\nabla d(t_1) = \nabla d_1, \nabla d(t_2) = \nabla d_2] \left. \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

L'intégration de $\varphi_d^{(\eta)}$ sur le domaine Ω donne une quantité minimale d'énergie de dissipation lorsque la variable interne d_1 change de manière continue vers l'état d_2 . Il faut remarquer que pour un état d_1 donné, un plus court chemin pour $d(s)$ n'est pas unique comme expliqué dans [Mielke, 2002] mais il en existe au moins un. Un plus court chemin est obtenu si le pseudo-potentiel est solution des équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_d^{(\eta)}}{\partial d} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_d^{(\eta)}}{\partial \dot{d}} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_d^{(\eta)}}{\partial \nabla d} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_d^{(\eta)}}{\partial \nabla \dot{d}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ces deux équations sont satisfaites simultanément seulement si le paramètre de stabilisation η est nul. En effet le terme ηd^2 ajoute de l'énergie supplémentaire au système, il ne contribue pas à trouver un plus court chemin. L'usage de cette régularisation visqueuse est justifié dans le chapitre 2, mais une valeur très faible pour η est préférable en pratique pour respecter au mieux les équations d'Euler-Lagrange.

4.2.4 3 principes à respecter

Le couple de variables internes (\mathbf{u}, d) doit satisfaire les principes de *Stabilité* (\mathcal{S}) et d'*Inégalité énergétique* (\mathcal{E}) tels que définis dans [Mielke, 2003] auxquels on ajoute le principe d'*Irréversibilité* (\mathcal{I}) introduit par [Francfort et Marigo, 1998] :

(\mathcal{S}) **Stabilité** $\forall t \in [0, T]$ et pour un couple local de variations $(\mathbf{u} + h\dot{\mathbf{u}}, d + h\dot{d})$ autour de la solution (\mathbf{u}, d) (avec $h \geq 0$ et $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{d})$ des champs admissibles), alors la variation d'énergie de Gibbs doit être inférieure à la variation d'énergie dissipée sur tout le domaine Ω étudié :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) \, d\Omega - \int_{\Omega} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u} + h\dot{\mathbf{u}}), d + h\dot{d}) \, d\Omega \\
 & + W(\mathbf{u} + h\dot{\mathbf{u}}) - W(\mathbf{u}) \\
 & \leq \int_{\Omega} \varphi_d^{(\eta)}(d, d + h\dot{d}) \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

(\mathcal{E}) **Inégalité énergétique** : En se plaçant sur une solution (\mathbf{u}, d) , $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ et en considérant un phénomène continu, le système doit dissiper moins d'énergie que la différence entre le travail des efforts extérieurs et l'énergie élastique entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) \, dt \, d\Omega + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \phi_d^{(\eta)}(d, \dot{d}) \, dt \, d\Omega \\
 & \leq \int_{t_1}^{t_2} W(\dot{\mathbf{u}}) \, dt
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

(\mathcal{I}) **Irreversibilité** : $\forall t \in [0, T]$ et en tout point du domaine Ω , l'endommagement ne peut que croître avec le temps :

$$\dot{d} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq d \leq 1 \tag{1.19}$$

Mielke traite l'irréversibilité en introduisant une variable additionnelle dans l'écriture du pseudo-potentiel [Mielke et Roubíček, 2006]. Marigo utilisant seulement le potentiel de dissipation, le principe d'irréversibilité doit être défini. Il est choisi dans le cadre de ce travail de thèse d'adopter la formulation de l'irréversibilité de Marigo, plus simple d'utilisation. En divisant la condition de *Stabilité* 1.17 par h et en passant à la limite $h \rightarrow 0$, la stabilité au premier ordre est obtenue :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[\eta \dot{d}^2 - 2\dot{d}(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d\dot{d} + l^2 \nabla d \nabla \dot{d}) \right] \, d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega - W(\dot{\mathbf{u}}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Enfin arranger les termes de l'*Inégalité Énergétique* 1.18 sous le signe $\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega}$ et calculer la dérivée temporelle $\dot{\psi}$ mènent à la nouvelle écriture de l'inégalité énergétique :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\eta \dot{d}^2 - 2\dot{d}(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d\dot{d} + l^2 \nabla d \nabla \dot{d}) \right] d\Omega dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\mathbf{Div}(\underline{\sigma}) + \mathbf{f}_v] \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_d) \cdot \dot{\mathbf{u}} d(\partial\Omega) dt \leq 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Une intégration par parties du produit de gradients dans 1.20 donne :

$$\int_{\Omega} \nabla d \nabla \dot{d} \cdot d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \nabla d}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \dot{d} \cdot d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \Delta d \dot{d} \cdot d\Omega \tag{1.22}$$

Ici \mathbf{n} est un vecteur normal unitaire sortant de la surface élémentaire $d(\partial\Omega)$. Une relation similaire peut être obtenue dans 1.21 en intégrant par parties le terme $\nabla d \nabla \dot{d}$. Par conséquent il est possible de déduire de 1.20 et de 1.21 les conditions locales suivantes :

(\mathcal{S}_{loc}) **Stabilité locale** : $\forall t \in [0, T]$ et pour tout champ admissible $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{d})$:

$$\begin{aligned}
& \left[\eta \dot{d} - 2(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d - l^2 \Delta d) \right] \dot{d} \\
& - (\mathbf{Div}(\underline{\sigma}) + \mathbf{f}_v) \cdot \dot{\mathbf{u}} \geq 0 \text{ dans } \Omega
\end{aligned} \tag{1.23a}$$

$$\frac{\partial \nabla d}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \dot{d} + (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_d) \cdot \dot{\mathbf{u}} \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{1.23b}$$

(\mathcal{E}_{loc}) **Inégalité énergétique locale** : En considérant un processus continu et en se plaçant sur une solution (\mathbf{u}, d) :

$$\begin{aligned}
& \left[\eta \dot{d} - 2(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d - l^2 \Delta d) \right] \dot{d} \\
& - (\mathbf{Div}(\underline{\sigma}) + \mathbf{f}_v) \cdot \dot{\mathbf{u}} \leq 0 \text{ dans } \Omega
\end{aligned} \tag{1.24a}$$

$$\frac{\partial \nabla d}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \dot{d} + (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_d) \cdot \dot{\mathbf{u}} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{1.24b}$$

(\mathcal{I}) **Irreversibilité** : $\forall t \in [0, T]$ et en tout point du domaine Ω :

$$\dot{d} \geq 0 ; \quad 0 \leq d \leq 1 \tag{1.25}$$

Puisque 1.23 doit être vérifiée pour tout couple de variables admissibles $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{d})$, en particulier en prenant $(\mathbf{0}, \dot{d})$ on obtient le critère d'amorçage de fissure :

$$\left[\eta \dot{d} - 2(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d - l^2 \Delta d) \right] \dot{d} \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.26a)$$

$$\frac{\partial \nabla d}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \dot{d} \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.26b)$$

En prenant $(\dot{\mathbf{u}}, 0)$, 1.23 donne :

$$(\mathbf{Div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \mathbf{f}_v) \cdot \dot{\mathbf{u}} \leq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.27a)$$

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_d) \cdot \dot{\mathbf{u}} \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.27b)$$

Sur Ω , les inégalités 1.26a et 1.27a imposent que l'inégalité énergétique locale devienne une égalité appelée équilibre énergétique. C'est le principe de dissipation maximale : tout a été dissipé. De la même manière sur $\partial\Omega$ l'inégalité énergétique doit être une égalité. Par conséquent l'équilibre énergétique transforme les inégalités 1.26a et 1.27a en égalités. Cela permet de retrouver l'équilibre mécanique d'une part (puisque aucune condition n'est donnée pour $\dot{\mathbf{u}}$) :

$$\mathbf{Div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.28)$$

D'autre part la condition de cohérence est elle aussi retrouvée :

$$\left[\eta \dot{d} - 2(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d - l^2 \Delta d) \right] \dot{d} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.29)$$

Cette égalité appelée condition de consistance est vérifiée si :

- l'endommagement n'évolue pas avec le temps ($\dot{d} = 0$) ;
- l'endommagement évolue avec le temps vérifie l'équation aux dérivées partielles $\eta \dot{d} - 2(1-d)\psi_0^+ + \frac{G_c}{l}(d - l^2 \Delta d) = 0$.

Les inégalités sur $\partial\Omega$ deviennent aussi des égalités : les conditions aux limites sont obtenues. Il est à noter que 1.21 est une égalité, par conséquent la positivité du terme $2\dot{d}(1-d)\psi_0^+$ et la relation 1.28 permettent de prouver la positivité du pseudo-potential de dissipation $\phi_d^{(\eta)}$. L'évolution de l'endommagement est pilotée par la densité d'énergie élastique ψ_0^+ obtenue en prenant les déformations principales positives à l'état non endommagé. Pour assurer l'irréversibilité de l'évolution de l'endommagement (c'est-à-dire $\dot{d} \geq 0$), une astuce est de prendre en compte l'histoire du chargement en définissant une force de pilotage \mathcal{H} telle que suggérée dans [Miehe et al., 2010a] :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} [\psi_0^+ (\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)))] \quad (1.30)$$

Pour conclure la loi d'évolution de l'endommagement s'écrit :

$$\eta \dot{d} - G_c l \Delta d = 2\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) - \left(2\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \frac{G_c}{l} \right) d \quad (1.31)$$

Une telle formulation est pratique en vue d'une implémentation dans un code commercial tel qu'Abaqus grâce à la similitude entre cette loi et l'équation de la chaleur (comme illustré dans [Table 1.1](#)). En effet les outils de résolution d'une telle équation sont déjà disponibles dans ce logiciel. Il est à remarquer que cette loi d'évolution de l'endommagement vient d'un modèle à gradient d'endommagement tel que décrit dans la revue de [\[Pham et Marigo, 2010b\]](#).

	Equation de la chaleur	Loi d'évolution de l'endommagement
Equation	$\rho c_p \dot{\theta} - \lambda \Delta \theta = S$	$\eta \dot{d} - G_c l \Delta d = 2\mathcal{H} - \left(2\mathcal{H} + \frac{G_c}{l} \right) d$
Température	θ	d
Capacité calorifique volumique	ρc_p	η
Conductivité	λ	$G_c l$
Terme source	S	$2\mathcal{H} - \left(2\mathcal{H} + \frac{G_c}{l} \right) d$

TABLE 1.1 – Similitude entre l'équation de la chaleur et la loi d'évolution de l'endommagement.

4.3 Outils Abaqus pour la modélisation *Phase-field*

Deux stratégies se dégagent de ces recherches concernant la méthode d'endommagement par champ de phase dans le logiciel Abaqus. Une idée naturelle est de considérer la variable d'endommagement d comme une inconnue sur chaque noeud du maillage. Toutefois ce modeleur ne permet pas un ajout aisé de degrés de libertés. Par conséquent une première méthode consiste à implémenter des Eléments Utilisateur (UEL) ainsi qu'une routine de type Matériau Utilisateur (UMAT) pour résoudre le problème de l'endommagement aux points de Gauss avant d'interpoler la valeur de l'endommagement aux noeuds. Cette idée a été mise en œuvre dans [\[Msekh et al., 2015, Molnár et Gravouil, 2017\]](#). Une limitation des UEL réside toutefois dans leur incapacité à tracer les champs sur l'interface graphique du logiciel. Pour afficher les champs les données UEL doivent être retransférées vers des éléments standards,

cela constitue une étape de calcul supplémentaire.

Une deuxième stratégie consiste à prendre avantage de la similarité entre la loi d'évolution de l'endommagement et l'équation de la chaleur. Il est alors possible d'utiliser une routine de type HETVAL [Azinpour *et al.*, 2018] ou UMATHHT pour résoudre le problème de thermique, par conséquent la variable d'endommagement d est vue comme la variable de température par Abaqus. Il est possible de noter que ces deux routines de thermique sont utilisables en conjonction de la routine UMAT. La différence entre HETVAL et UMATHHT réside dans le fait que la première découple la résolution thermo-mécanique tandis que la deuxième résout le problème de manière monolithique si celui-ci est instationnaire, le logiciel prend alors en compte les termes de couplage dans la matrice de rigidité du système. La prise en compte de la variable d'endommagement sur chaque nœud du maillage augmente le nombre de degrés de liberté dans le problème et le temps écoulé dans la résolution du problème, des stratégies adaptatives ont été développées pour affiner le maillage uniquement autour de la zone endommagée et dans la zone qui le sera au prochain incrément de temps [Heister *et al.*, 2015]. Enfin si l'évolution de la température n'a pas atteint le régime permanent, il faut alors résoudre l'équation de la chaleur en plus de l'équation d'évolution de l'endommagement. Néanmoins la variable d'endommagement d est déjà considérée comme étant la température par Abaqus, le développement d'une stratégie consistant à découpler la résolution thermique et la résolution mécanique doit dans ce cas être envisagé.

Comme la loi d'évolution de l'endommagement n'est pas linéaire, un algorithme incrémental et itératif utilisant l'approche de Newton-Raphson est adopté. Dans ce cas la question de la robustesse de l'algorithme se pose. La principale stratégie adoptée dans la littérature, initiée dans [Bourdin *et al.*, 2000] puis démocratisée par [Miehe *et al.*, 2010a], consiste à utiliser un schéma alterné (ou *staggered scheme* dans la littérature). L'idée est de considérer la force de pilotage maximale à l'incrément de temps précédent afin de créer un schéma explicite pour la résolution du champ de phase et de permettre une résolution séquentielle du problème de fracture/déplacement. Il en résulte un algorithme robuste au prix d'un calcul plus lent par rapport à un schéma monolithique, bien qu'il ait été prouvé avec l'aide d'Abaqus que les schémas échelonné et monolithique donnent des résultats proches si le pas de temps est géré par l'utilisateur [Liu *et al.*, 2016]. Toutefois il est remarqué dans [Reinoso *et al.*, 2017, Paggi *et al.*, 2018] que l'approche monolithique permettait une convergence plus rapide que l'approche échelonnée. Une limite a été trouvée à l'utilisation de la résolution découplée et réside dans la dépendance de la solution par rapport à l'incrément de temps (ou de déplacement) [Molnár et Gravouil, 2017], par conséquent des analyses préliminaires doivent être menées pour évaluer un bon ordre de grandeur du pas de temps.

A la lumière de cette étude bibliographique, le chapitre suivant traitera de l'implémentation de la méthode *Phase-field* dans le code commercial Abaqus. L'idée d'une résolution monolithique est conservée afin de laisser le code libre de choisir son pas de temps.

Chapitre 2

Application de la loi d'endommagement par champ de phase à une micro-structure de CMC

DANS ce deuxième chapitre, la loi d'évolution de l'endommagement établie précédemment est implémentée sous Abaqus. Une application à une micro-structure de CMC est ensuite présentée en mettant en évidence les difficultés et moyens de les franchir. Enfin la capacité de l'interphase à dévier une fissure lors d'un essai de traction longitudinale est évaluée en tenant compte de la valeur de la longueur caractéristique de chaque phase du CMC.

1 Investigations menées

Dans ce chapitre, un problème de mécanique appliqué à une micro-structure de CMC SiC/SiC est proposé en tenant compte de son possible endommagement. Dans un premier temps une Cellule Élémentaire de Référence (CER) est présentée et montrée dans la [FIGURE 2.1](#). Celle-ci est composée de fibres Hi-Nicalon-S recouvertes d'une interphase BN, d'une matrice SiC déposée par procédé CVI et d'une matrice Si déposée par procédé MI. Cette structure ne peut pas être considérée comme un VER statistiquement représentatif à cause de sa petite taille (moins de huit fibres sont contenues dans la structure). Le choix d'une cellule de petite taille est motivé par le désir de limiter le nombre de degrés de liberté du problème non linéaire afin de réduire les temps de calculs. La [Table 2.1](#) et la [Table 2.2](#) compilent les propriétés matériaux utilisées pour les études proposées dans ce chapitre. Il n'y a pas de référence bibliographique précise proposée pour les différentes énergies critiques de libération, mais les valeurs écrites dans la [Table 2.2](#) sont inspirées des travaux de [\[Rebillat *et al.*, 2000\]](#) et [\[Mazars, 2018\]](#). Il faut néanmoins rester critique vis-à-vis des valeurs de G_c choisies pour cette thèse car c'est une quantité difficile à évaluer.

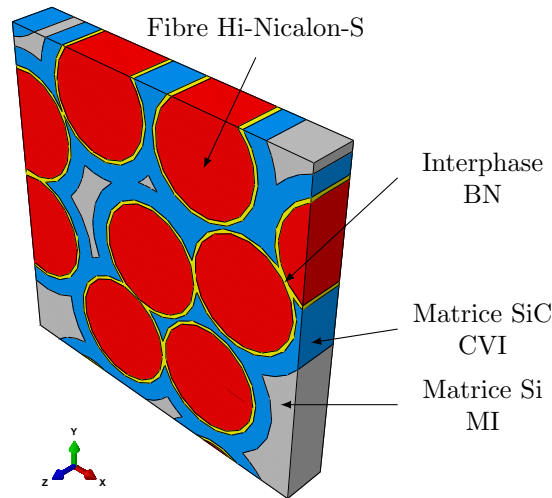


FIGURE 2.1 – Cellule Élémentaire de Référence utilisée pour l'étude.

Une première étude se focalisera sur l'initiation et la propagation d'une fissure transverse dans une CER soumise à un chargement mécanique (dont les conditions aux limites sont données en [FIGURE 2.2](#)). Les fibres seront considérées purement élastiques pour ce chargement. Au vu de la loi d'évolution de l'endommagement, deux critères doivent être définis :

1. un pour choisir une longueur caractéristique l ;
2. un autre pour définir un paramètre de stabilisation η .

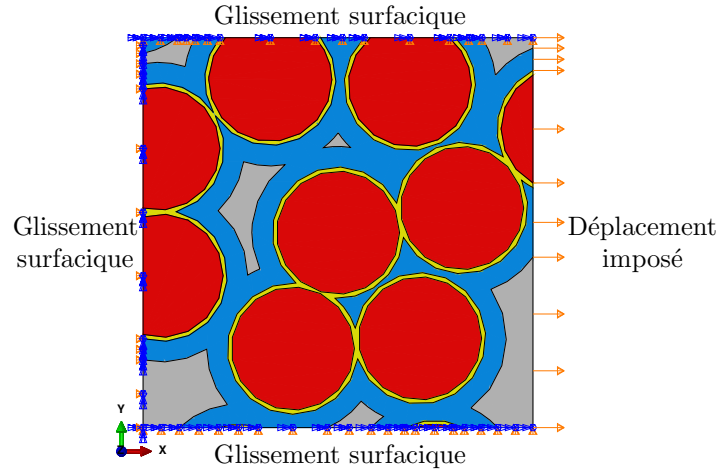


FIGURE 2.2 – Conditions aux limites appliquées à la structure.

Dans le but de considérer la possible déviation de fissure au niveau de l'interphase comme observée dans [Naslain *et al.*, 2010], une seconde étude s'appuiera sur un modèle simple montré en FIGURE 2.3. La fibre sera admise comme fragile et deux types de chargements différents seront testés. Il sont donnés en FIGURE 2.4 et FIGURE 2.5. En particulier l'influence de l'épaisseur d'interphase sur la tenue mécanique sera évaluée. Pour ce chapitre les effets thermiques ne sont pas considérés pour se focaliser sur le dimensionnement de la longueur caractéristique l , du paramètre η et la possibilité de dévier une fissure avec l'approche champ de phase adoptée pour cette thèse.

Matériau	Module de Young	Coefficient de Poisson	Référence
Fibre Hi-Nicalon-S	$E_{fib} = 420 \text{ GPa}$	$\nu_{fib} = 0.2$	[HiNicalonS, nd]
Interphase BN	$E_{BN} = 62 \text{ GPa}$	$\nu_{BN} = 0.17$	[Ünal et Bansal, 2002b]
Matrice SiC CVI	$E_{SiC} = 400 \text{ GPa}$	$\nu_{SiC} = 0.3$	[Guillaumat et Lamon, 1996]
Matrice Si MI	$E_{Si} = 165 \text{ GPa}$	$\nu_{Si} = 0.22$	[Mazars, 2018]

TABLE 2.1 – Propriétés matériaux utilisées dans cette étude.

2 Choix d'une longueur caractéristique

Puisque la longueur caractéristique l impose la taille de maille comme spécifié dans 1.1, il est nécessaire de trouver un critère en accord avec la structure étudiée.

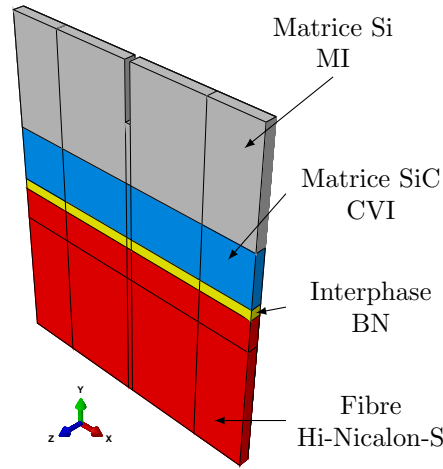


FIGURE 2.3 – Structure considérée pour les recherches portant sur la déviation de fissure dans l'interphase.

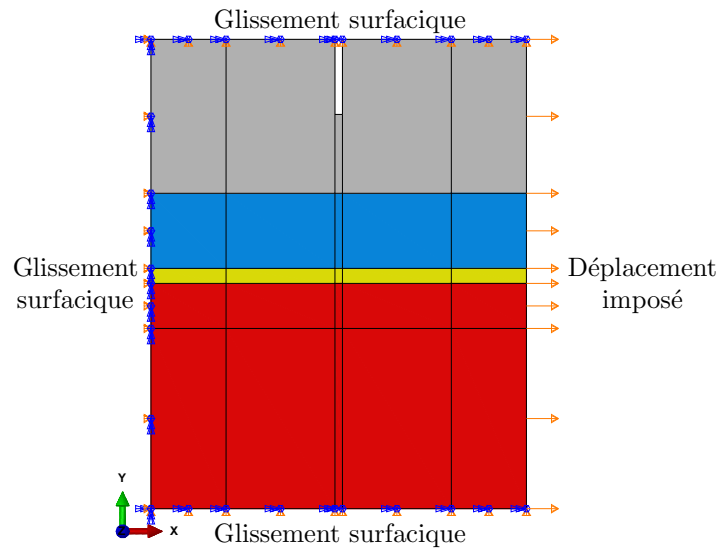


FIGURE 2.4 – Conditions aux limites pour le cas du déplacement imposé.

Matériau	Energie critique de libération	Référence
Interphase BN	$G_c = 2 \text{ J.m}^{-2}$	[Rebillat <i>et al.</i> , 2000]
Matrices CVI et MI	$G_c = 5 \text{ J.m}^{-2}$	[Mazars, 2018]

TABLE 2.2 – Energies critiques de libération des différentes phases du composite.

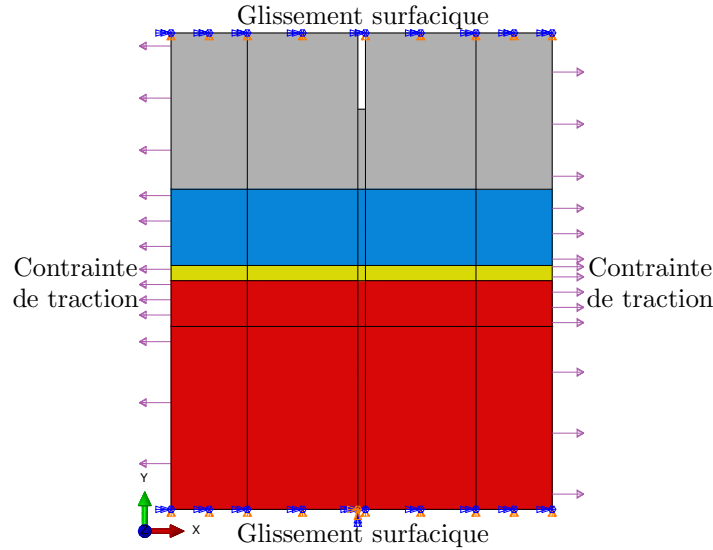


FIGURE 2.5 – Conditions aux limites pour le cas du pilotage en contrainte.

Les sections qui suivent proposent différentes pistes pour choisir l tout en gardant à l'esprit que ce paramètre peut varier d'une phase à l'autre de la micro-structure.

2.1 En utilisant les paramètres matériaux

Il est bien connu que ce sont les défauts intrinsèques qui sont à même d'initier l'endommagement dans la structure. Ces défauts peuvent être représentés par les grains présents dans chaque phase du matériau étudié [Parthasarathy *et al.*, 2016]. La taille de grain peut être très variable au sein d'une matrice SiC : d'une dizaine à une centaine de nanomètres [Carroll *et al.*, 1996]. Cela impose une très bonne connaissance des phases de la micro-structure. Il a été montré dans [Nguyen *et al.*, 2016] que la longueur caractéristique pouvait être liée aux propriétés matériaux, en particulier dans le cas d'un essai de traction sur fibre :

$$l = \frac{27}{256} \frac{EG_c}{\sigma_c^2} \quad (2.1)$$

Cette relation montre que la contrainte critique σ_c est inversement proportionnelle à la racine carrée de la longueur caractéristique. Par conséquent si σ_c augmente, l diminue. Les propriétés matériaux des fibres Hi-Nicalon-S sont bien connues, il est alors possible de fournir une valeur précise de l'énergie critique de libération G_c grâce à la connaissance du facteur d'intensité de contrainte K_c . La méthodologie pour obtenir K_c est donnée plus en détail dans [Youngblood *et al.*, 2001]. D'après [Gauthier et Lamon, 2009] pour une fibre Hi-Nicalon-S $K_c = 1.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ et [Irwin, 1957] donne un lien avec l'énergie critique de libération : $G_c = \frac{K_c^2}{E} = 4.67 \text{ J.m}^{-2}$.

Avec une contrainte critique à température ambiante $\sigma_c^{fib} = 2.6 \text{ GPa}$ ([Parthasarathy *et al.*, 2016]) l'équation 3.40 permet de déduire la longueur caractéristique de la fibre $l_{fib} = 0.03 \text{ }\mu\text{m}$. [Toury *et al.*, 2002] fournit un ordre de grandeur de la contrainte critique dans l'interphase : $\sigma_c^{int} \approx 510 \text{ MPa}$. Par conséquent la longueur caractéristique correspondante vaut $l_{int} \approx 0.05 \mu\text{m}$, ce qui est à peu près dix fois plus petit que l'épaisseur d'interphase d'après [Lv *et al.*, 2019]. Pour la matrice SiC CVI, la contrainte critique se situe dans l'intervalle suivant : $\sigma_c^{SiC} \in [200, 300] \text{ MPa}$ ([Pineau *et al.*, 2011]). Par conséquent la longueur caractéristique calculée est $l_{SiC} \in [2.8, 6.3] \mu\text{m}$. Malheureusement la littérature ne fournit pas d'information matérielle claire concernant la matrice Si MI, la longueur caractéristique correspondante l_{Si} sera supposée égale à celle de la matrice SiC CVI l_{SiC} . La Table 2.3 résume les différentes longueurs caractéristiques calculées avec les paramètres matériaux des différentes phases présentes dans la micro-structure. Il peut être remarqué que l'utilisation des propriétés matériaux impose la création d'un maillage très fin dans l'interphase et les fibres. Cela va considérablement augmenter le coût de calcul. Pour l'exemple d'après le Table 2.3, une taille de maille $h_{int} \approx 0.025 \text{ }\mu\text{m}$ générerait 16 éléments dans une épaisseur d'interphase de $0.4 \text{ }\mu\text{m}$, sachant que celle-ci peut être plus grande. Un remaillage adaptatif pourrait être envisagé comme dans [Heister *et al.*, 2015] mais une telle fonction n'est pas disponible dans Abaqus dans le cadre d'un problème de thermo-mécanique. Par conséquent il peut être intéressant de considérer un autre critère de choix de la longueur caractéristique pour modérer le nombre de degrés de liberté du problème, c'est l'objet de la Sous-section 2.2 qui suit.

Il est intéressant de noter que la possibilité d'utiliser à la fois des éléments cohésifs et un modèle *Phase-field* pour représenter la fissuration dans un composite a été exploitée dans Abaqus (voir [Zhang *et al.*, 2020]). Il est alors envisageable de considérer une interphase constituée d'éléments cohésifs tandis que la loi d'endommagement *Phase-field* est appliquée aux autres phases du matériau. Toutefois à l'heure de l'écriture de ce manuscrit, cette piste n'a pas été suivie bien qu'elle puisse apporter des éléments de compréhension .

	H-Nicalon-S	interphase	SiC	Si
Longueur l (μm)	$l_{fib} = 0.03$	$l_{int} \approx 0.05$	$l_{SiC} \in [2.8, 6.3]$	$l_{Si} \in [2.8, 6.3]$
Taille de maille h maximale (μm)	$h_{fib} = 0.015$	$h_{int} \approx 0.025$	$h_{SiC} \in [1.4, 3.15]$	$h_{Si} \in [1.4, 3.15]$

TABLE 2.3 – Résumé des différentes longueurs caractéristiques calculées à partir des propriétés matériaux.

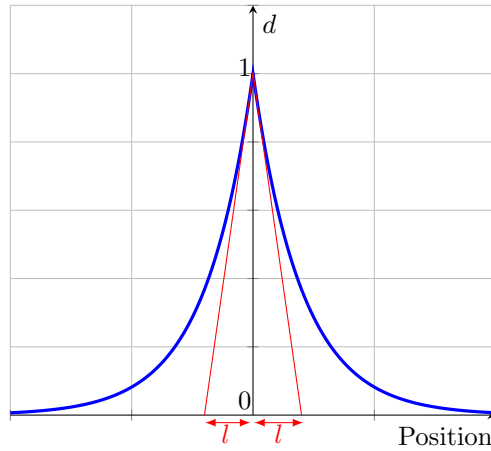


FIGURE 2.6 – Fissure diffuse centrée sur l’origine et de longueur caractéristique l .

2.2 Avec un point de vue géométrique

Pour la micro-structure soumise au chargement transverse de la [FIGURE 2.2](#), un décollement fibre-matrice est attendu au sein de l’interphase. Il est alors légitime de se demander où exactement se situe ce décollement : entre la fibre et l’interphase, entre l’interphase et la matrice ou à l’intérieur de l’interphase ? La réponse à cette question va aider à choisir une longueur caractéristique pour la micro-structure étudiée. Puisque le décollement fibre-matrice peut se situer n’importe où dans l’épaisseur de l’interphase d’après [[Naslain et al., 2010](#)], un possible critère géométrique consiste à prendre pour longueur caractéristique l’épaisseur de l’interphase :

$$l = e_{BN} \quad (2.2)$$

Il est aussi envisageable de prendre la moitié de l’épaisseur d’interphase en se basant sur le schéma classique de la fissure diffuse ([FIGURE 2.6](#)). Le choix des tailles de maille dans la matrice et l’interphase est donné en [Table 2.4](#), un extrait du maillage obtenu est montré en [FIGURE 2.7](#). Il n’y a qu’un seul élément dans l’épaisseur de la structure, ce n’est pas limitant pour la suite puisque le chargement est plan. Dans les essais numériques qui suivent pour l’essai transverse, c’est le critère géométrique [2.2](#) qui est retenu et toutes les phases ont la même longueur caractéristique. L’influence de cette grandeur sera étudiée plus en détail dans l’essai de déviation de fissure.

Il faut garder à l’esprit qu’avec le critère géométrique, la longueur caractéristique choisie ne correspondra pas à la bonne contrainte critique des différentes phases de la micro-structure de CMC. En d’autres termes si l n’est pas le bon, σ_c n’est pas le bon non plus d’après [3.40](#).

Longueur caractéristique dans l'interphase	$l_{int} = 0,2 \mu m$
Longueur caractéristique dans la matrice	$l_{mat} = 0,4 \mu m$
Taille d'élément dans l'interphase	$h_{int} = 0,1 \mu m$
Taille d'élément dans la matrice	$h_{mat} = 0,2 \mu m$
Nombre d'éléments	36 812
Nombre de degrés de liberté	269 656

TABLE 2.4 – Paramètres de maillage pour le chargement transverse. Le nombre de degrés de liberté inclut la variable d'endommagement d .

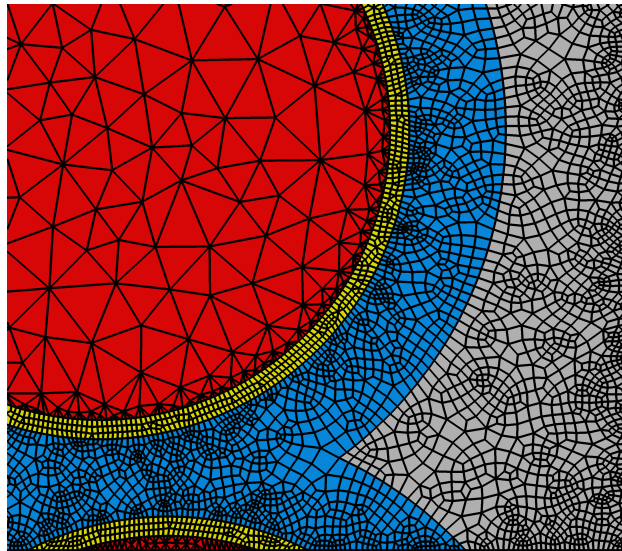


FIGURE 2.7 – Zoom sur le maillage pour la structure étudiée. Les fibres sont supposées être purement élastiques d'où leur maillage plus grossier.

3 Nécessité d'une régularisation visqueuse

La propagation de fissure pour un matériau fragile avec un chargement quasi-statique peut engendrer un phénomène de *snap-back* afin de respecter l'équilibre mécanique. Ce phénomène a été observé dans [Singh *et al.*, 2016, Wu, 2018] en utilisant un algorithme de poursuite (*path-following algorithm*). Ce travail de recherche est déjà réalisé dans le cadre de la thèse de Florian Marconi [Marconi *et al.*, 2019]. Par conséquent il est choisi de combler le *snap-back* en introduisant de l'énergie supplémentaire dans le problème. Le terme ηd^2 dans la définition du pseudo-potential de dissipation 1.13 fait office d'ersatz d'énergie cinétique artificielle qui a pour fonction d'éviter le *snap-back*. Néanmoins il est important de bien choisir la valeur du paramètre η afin de conserver une physique acceptable pour le problème, autrement dit le terme ηd^2 doit avoir une influence négligeable comparée à l'influence du

pseudo-potentiel $\phi_d^{(0)} = G_c \left(\frac{1}{l} d \dot{d} + l \nabla d \nabla \dot{d} \right)$ en dehors des *snap-backs*. La quantité d'énergie nécessaire pour éviter le *snap-back* peut être plus ou moins grande en fonction de l'allure du retour arrière à combler. Les sous-sections qui suivent traitent la problématique du choix du paramètre η .

3.1 Influence du paramètre de stabilisation

Le terme de stabilisation $\eta \dot{d}$ dans la loi d'évolution de l'endommagement n'a pas de sens physique. Des essais numériques ont alors été réalisés pour différentes valeurs de η (en $J.s.m^{-3}$ pour la suite). Le choix du paramètre de stabilisation influence le profil de fissure obtenu comme illustré dans la [FIGURE 2.9](#). De plus un "effet retard" peut être mis en évidence à travers le tracé de la force de réaction en [FIGURE 2.8](#) : plus η est grand, plus la diminution de rigidité se produit tard dans l'essai de traction. La courbe obtenue pour $\eta = 10^{-9} J.s.m^{-3}$ permet le remplissage du *snap-back* sans apporter d'énergie de manière excessive, d'où la chute verticale de la force de réaction dans la [FIGURE 2.8](#).

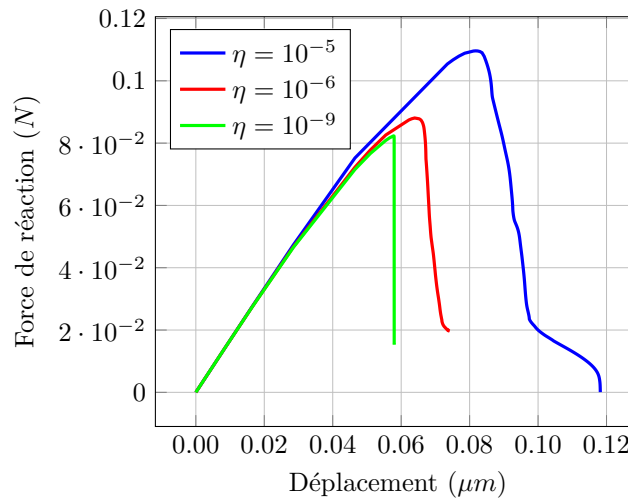


FIGURE 2.8 – Force de réaction de la structure en fonction du déplacement imposé et pour différentes valeurs du paramètre de stabilisation η .

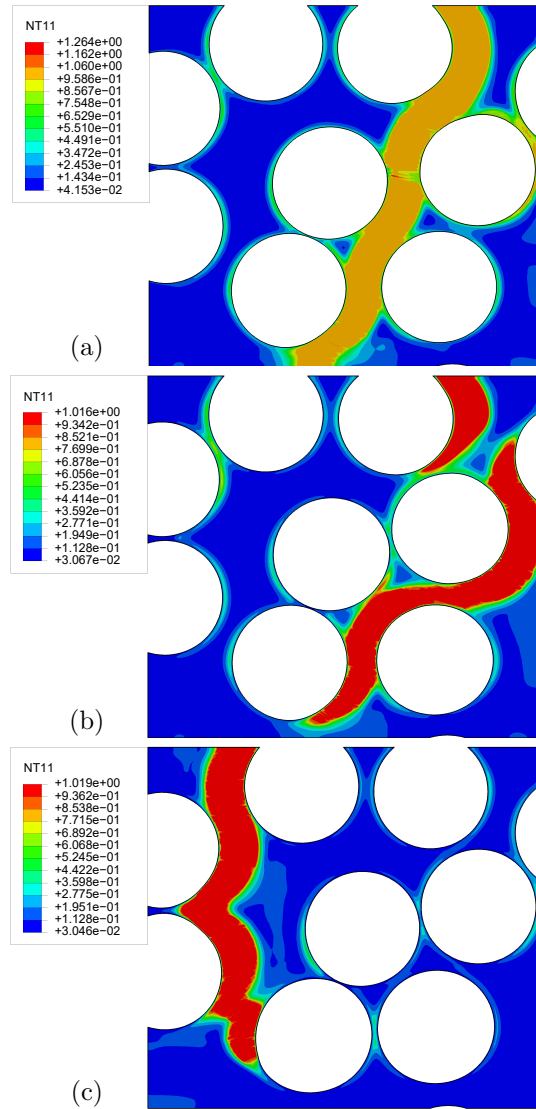


FIGURE 2.9 – Différents profils de fissures (maillage déformé) obtenus pour différentes valeurs de η (en $J.s.\mu m^{-3}$) : (a) $\eta = 10^{-5}$, (b) $\eta = 10^{-6}$, (c) $\eta = 10^{-9}$.

3.2 Critères pour choisir le paramètre de viscosité

Deux critères permettant de définir une valeur acceptable pour le paramètre de stabilisation η sont proposés dans cette section. Le premier est un critère intégral *a posteriori* qui impose que l'énergie volumique artificielle ajoutée $\eta \dot{d}^2$ ne doit pas être significative pendant toute la durée de la simulation. Le deuxième critère (*a priori*) est plus pragmatique et propose de dimensionner la valeur de η en utilisant les ordres de grandeur des différentes quantités intervenant dans la définition du pseudo-potential $\phi_d^{(\eta)}$.

3.2.1 Critère intégral

Pour une propagation stable, l'influence du terme $\eta \dot{d}^2$ doit être négligeable par rapport au terme en gradient d'endommagement de $\phi_d^{(0)}$ pendant toute la durée de l'essai. En d'autres termes $\forall t \in [0, T]$:

$$\underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \eta \dot{d}^2 d\Omega dt}_{D_{stabilisation}} \ll \underbrace{G_c \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{1}{l} d\dot{d} + l \nabla d \nabla \dot{d} \right) d\Omega dt}_{D_{optimal}} \quad (2.3)$$

Cette inégalité limite la plage de valeurs que le coefficient η peut prendre mais la réalisation de cette condition impose de réaliser un calcul sur toute la structure Ω .

3.2.2 Critère utilisant des ordres de grandeur

Afin d'éviter cette simulation il est possible de regarder si la condition $\eta \dot{d}^2 \ll G_c \left(\frac{1}{l} d\dot{d} + l \nabla d \nabla \dot{d} \right)$ est réalisable, cela donnera un ordre de grandeur *a priori* pour η . En posant les ordres de grandeur $d \sim 1$, $\dot{d} \sim \Delta t^{-1}$, et $\nabla d \sim l^{-1}$ alors la condition simplifiée devient :

$$\eta \ll \frac{2G_c}{l} \Delta t \quad (2.4)$$

Δt représente l'incrément de temps. Une première idée naturelle consiste à supposer constant le terme η et à trouver une limite d'acceptabilité du critère 2.4. A G_c et l fixés, seul l'incrément de temps permet de dimensionner η . Il suffit alors de prendre le plus petit incrément de temps possible, dont il est possible de définir une valeur minimale dans Abaqus. Ce critère se montre alors simple d'utilisation.

3.2.3 Comparaison des deux critères

La FIGURE 2.10 et la FIGURE 2.11 montrent la part de $D_{stabilisation}$ sur le total $D_{optimal} + D_{stabilisation}$ pour $\eta = 10^{-6} \text{ J.s.m}^{-3}$ et pour $\eta = 10^{-9} \text{ J.s.m}^{-3}$. L'évolution du ratio $\frac{2G_c}{l} \Delta t$ en fonction du déplacement imposé y est aussi montrée, seul l'incrément de temps Δt varie. Le cas $\eta = 10^{-5} \text{ J.s.m}^{-3}$ n'est pas tracé car la FIGURE 2.8 suggère déjà par l'absence de chute brutale de la force de réaction que cette valeur de paramètre de stabilisation apporte une quantité d'énergie supplémentaire trop importante.

Le rapport $\frac{2G_c}{l} \Delta t$ maximal est sans surprise obtenu pour la plus petite valeur du paramètre de stabilisation, soit $\eta = 10^{-9} \text{ J.s.m}^{-3}$. Cette valeur est considérée comme suffisante pour respecter le critère 2.3. Il peut être remarqué que le critère simplifié

n'est pas forcément validé si l'incrément de temps est trop petit, typiquement au moment de l'ouverture de fissure. C'est pourquoi le critère intégral 2.3 donne une information plus fiable bien qu'il demande un calcul sur la structure pour valider la valeur adoptée pour η .

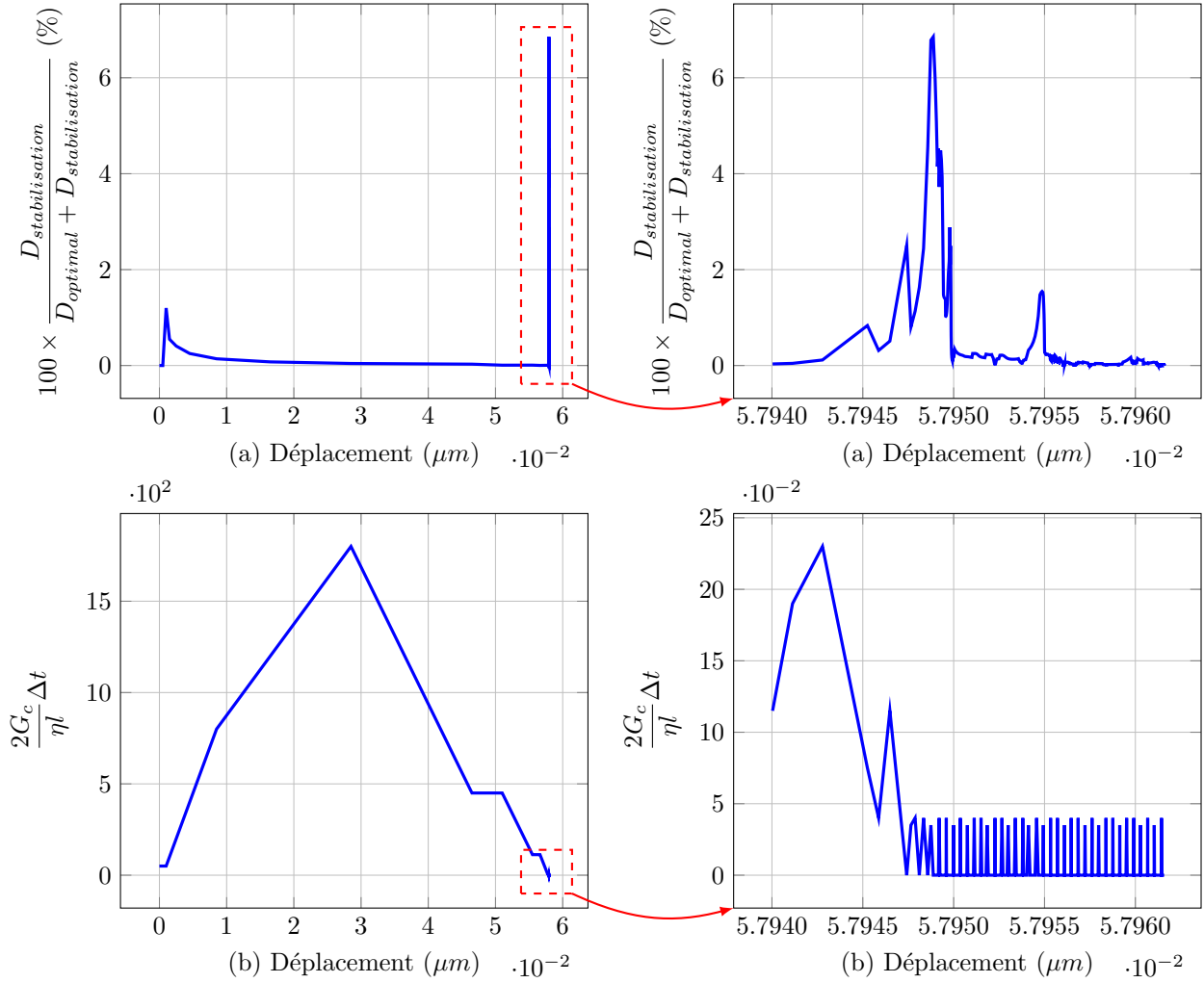


FIGURE 2.10 – (a) Quantité de puissance ajoutée $D_{stabilisation}$ comparée à la puissance de dissipation totale pour $\eta = 10^{-9}$, (b) Evolution du rapport $\frac{2G_c}{\eta l} \Delta t$ comme fonction du déplacement imposé.

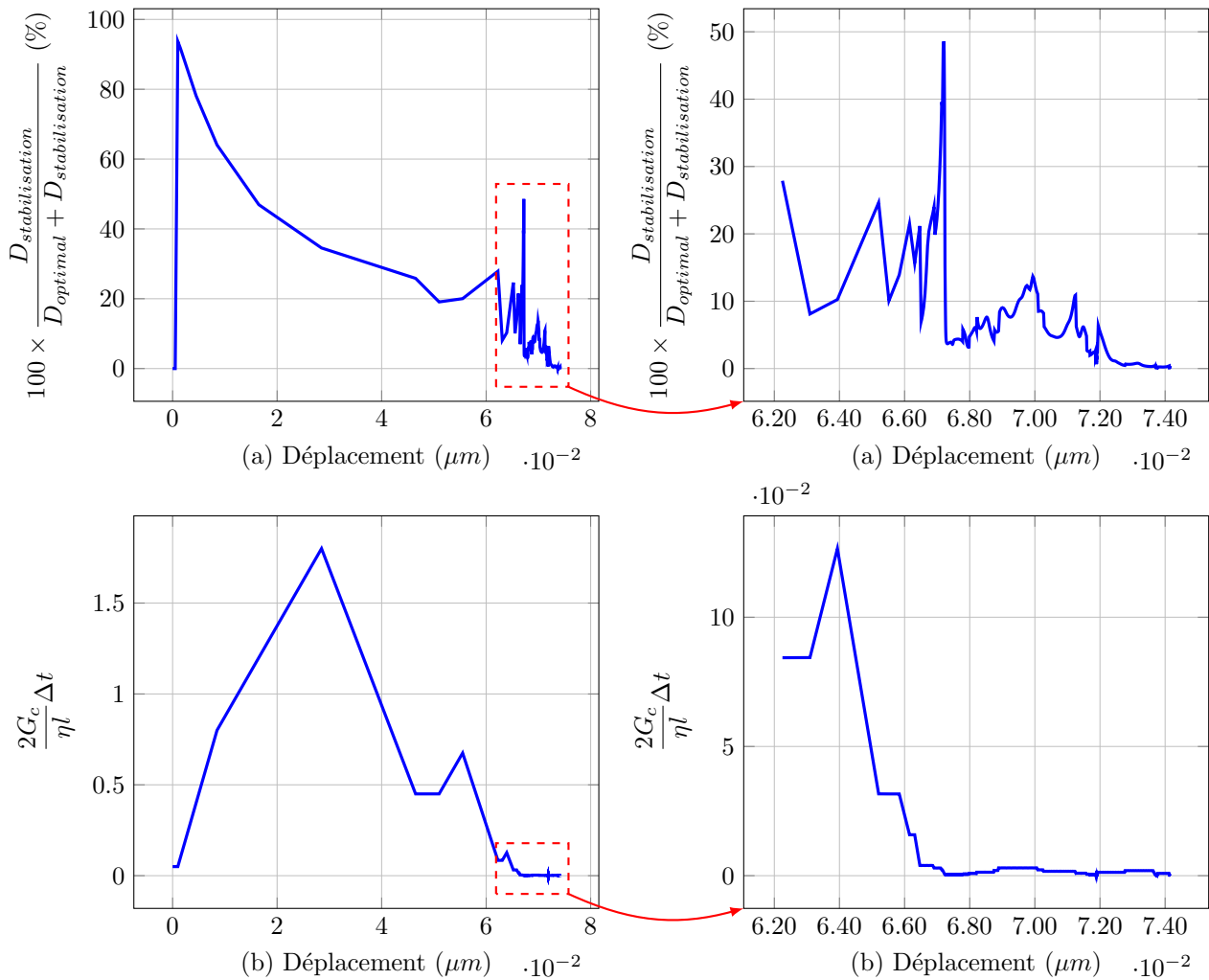


FIGURE 2.11 – (a) Quantité de puissance ajoutée $D_{stabilisation}$ comparée à la puissance de dissipation totale pour $\eta = 10^{-6}$, (b) Evolution du rapport $\frac{2G_c}{\eta l} \Delta t$ comme fonction du déplacement imposé.

4 Déviation de fissure pour une sollicitation longitudinale

Dans cette section ce sont les longueurs caractéristiques calculées à partir des propriétés matériaux qui sont considérées. Il a été montré par [Nguyen *et al.*, 2019] que la longueur caractéristique avait une influence sur la capacité à dévier une fissure au niveau de l'interface entre deux matériaux. L'interface modélisée dans [Nguyen *et al.*, 2019] possède sa propre longueur caractéristique et possède une résistance à la rupture bien définie. Pour la structure représentée en **FIGURE 2.3**, il est alors possible d'interpréter l'interphase BN comme étant une interface régularisée. Les énergies critiques de libération des différentes phases sont supposées constantes mais l'épaisseur d'interphase e_{BN} , la longueur caractéristique de l'interphase l_{int} ainsi que celle (unique) assignée à toutes les autres phases l_{pha} peuvent varier. Par conséquent quatre études sont menées afin d'évaluer l'influence des différents paramètres sur la réponse de la structure et la déviation de fissure :

1. pour une épaisseur d'interphase fixée ($e_{BN} = 0.4\mu m$) mais pour des longueurs caractéristiques l_{int} et l_{pha} variables mais respectant la condition $l_{int} = l_{pha}$;
2. pour une valeur l_{pha} choisie égale à l'épaisseur d'interphase elle-même fixe ($l_{pha} = e_{BN} = 0.4\mu m$) et une longueur caractéristique l_{int} variable ;
3. en fixant de manière arbitraire $l_{pha} = l_{int} = 0.2\mu m$ et en faisant varier l'épaisseur d'interphase e_{BN} ;
4. en fixant $l_{pha} = 0.2\mu m$ et en faisant varier les paramètres l_{int} et e_{BN} tels que $l_{int} = e_{BN}$.

Dans un premier temps, des essais à déplacement imposé sont envisagés dans l'espoir d'obtenir des courbes de réponses comparables à celles obtenues dans [Nguyen *et al.*, 2019]. Les conditions aux limites sont montrées en **FIGURE 2.4**. Dans un second temps la même étude est menée avec cette fois des contraintes imposées aux bords comme illustrées en **FIGURE 2.5**. Le paramètre de stabilisation η est fixé à $10^{-12} J.s.m^{-3}$ pour toutes les investigations menées. La longueur caractéristique de toutes les phases exceptées l'interphase est elle aussi fixée à $l_{pha} = 0.2\mu m$.

4.1 Comportement pour un déplacement imposé

L'évolution de l'énergie élastique globale $\int_{\Omega} \psi d\Omega$ est donnée dans la **FIGURE 2.12** pour des valeurs de longueurs caractéristiques respectant $\frac{l_{int}}{l_{pha}} = 1$. Le profil de fissure ainsi que les zones de perte de rigidité sont montrées en **FIGURE 2.13** pour $l_{int} = l_{pha} = 0.2\mu m$. Quelles que soient les valeurs prises pour les essais numériques, la fissure traverse systématiquement toute la structure. Toutefois plus la longueur caractéristique est grande, plus la rupture se produit tôt. C'est cohérent avec la re-

lation 3.40 qui indique que la contrainte critique diminue avec l'augmentation de l_{pha} .

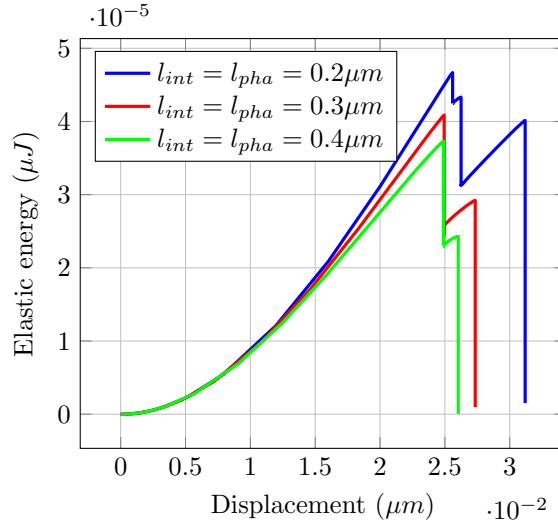


FIGURE 2.12 – Evolution de l'énergie élastique globale au cours de l'essai à déplacement imposé. L'épaisseur d'interphase est fixée à $e_{BN} = 0.4\mu m$.

Choisir une longueur caractéristique l_{int} pour l'interphase qui est différente de celle choisie pour les autres phases pourrait aider à dévier la fissure. Les résultats de simulation pour trois ratios $\frac{l_{int}}{l_{pha}}$ différents sont montrés en FIGURE 2.14 pour une épaisseur d'interphase fixée $e_{BN} = l_{pha} = 0.4\mu m$ ainsi que $l_{pha} = 0.2\mu m$. Il peut être remarqué que si ce rapport diminue, la fissure dans la matrice apparaît plus tôt mais la fibre rompt pour un déplacement imposé plus grand. Si c'est l'épaisseur d'interphase qui varie et que les longueurs caractéristiques sont fixées à $l_{pha} = l_{int} = 0.2\mu m$, alors l'augmentation de e_{BN} retarde significativement la rupture de la fibre bien que celle-ci ne soit jamais évitée. Enfin puisque le critère géométrique 2.2 suggère de prendre une longueur caractéristique égale à l'épaisseur d'interphase ($l_{int} = e_{BN}$), des essais ont été réalisés en fixant $l_{pha} = 0.2\mu m$. Les résultats obtenus en FIGURE 2.16 montrent que pour une petite épaisseur d'interphase ($e_{BN} = 0.2\mu m$ et $e_{BN} = 0.3\mu m$), la rupture de la fibre est retardée. Toutefois pour les autres valeurs de e_{BN} , les valeurs de déplacement à rupture de la fibre sont très similaires et la chute de rigidité se produit en une seule fois.

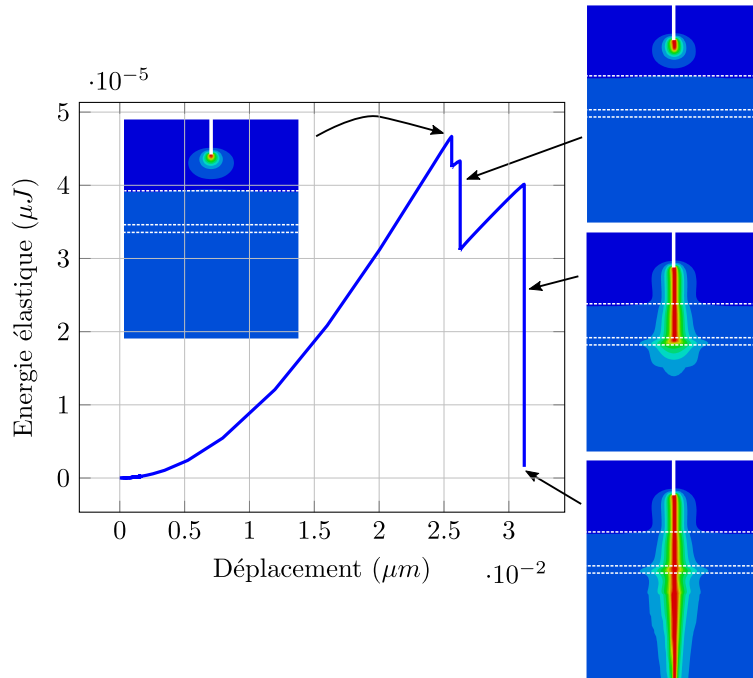


FIGURE 2.13 – Points d'intérêt au cours de l'essai de traction à déplacement imposé. Les longueurs caractéristiques sont $l_{int} = l_{pha} = 0.2\mu m$ et l'épaisseur d'interphase est fixée à $e_{BN} = 0.4\mu m$.

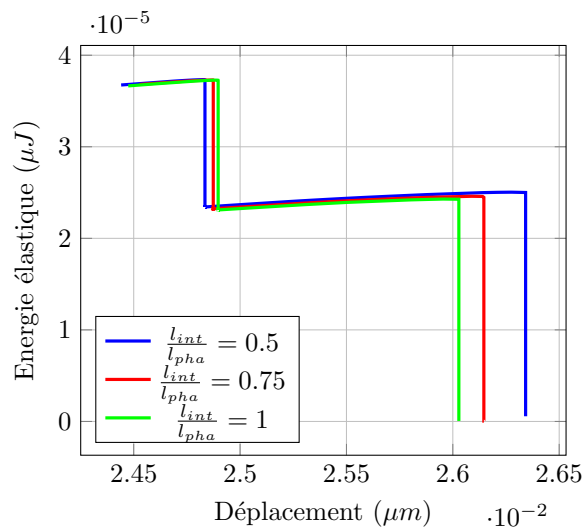


FIGURE 2.14 – Zoom sur la perte d'énergie élastique pour différents rapports de longueurs caractéristiques ($e_{BN} = l_{pha} = 0.4\mu m$).

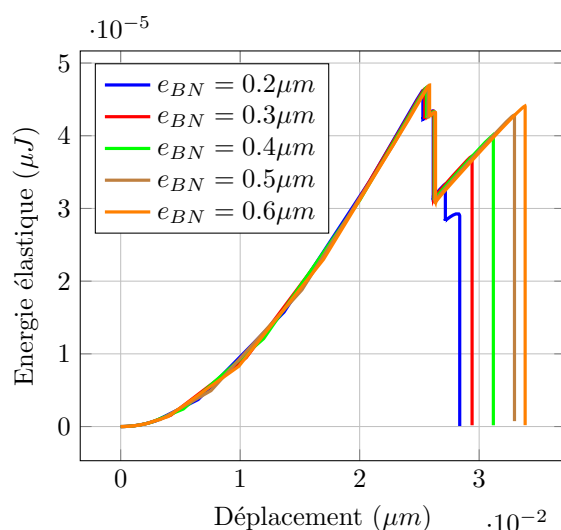


FIGURE 2.15 – Energies élastiques globales pour différentes épaisseurs d’interphases et pour une longueur caractéristique $l_{int} = l_{pha} = 0.2\mu m$ fixée.

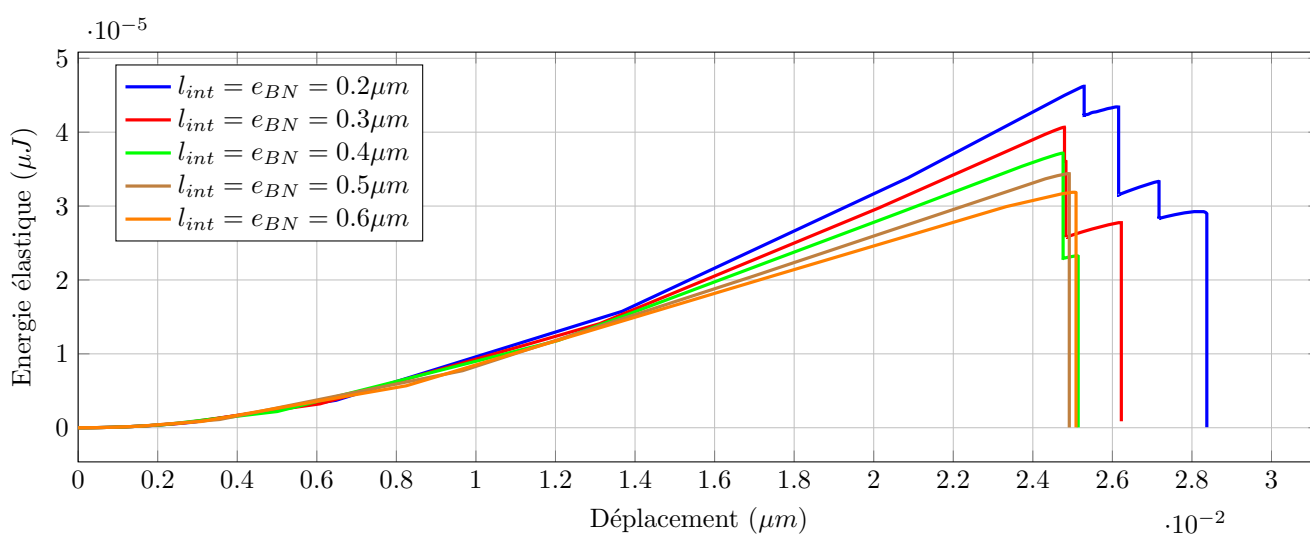


FIGURE 2.16 – Energies élastiques globales obtenues pour différentes épaisseurs d’interphases et pour différentes longueurs caractéristiques dans l’interphase. Les valeurs prises sont $l_{int} = e_{BN}$ et $l_{pha} = 0.2\mu m$.

Cette première étude à déplacement imposé a montré que le chemin de fissuration n’était jamais dévié dans l’interphase et que la fibre était systématiquement rompue. Néanmoins cette rupture peut être retardée si de petites valeurs de l_{pha} et l_{int} sont adoptées, ce qui est cohérent avec l’idée qu’une petite longueur caractéristique correspond à une grande contrainte à rupture d’après 3.40. Les principales limitations de cette étude sont les suivantes :

1. la taille de maille qui doit respecter le critère 1.1 et qui rend chaque simulation longue malgré la petite taille de la structure ;
2. des effets de bords influent peut-être sur le comportement de fissuration.

Il est possible d'envisager les mêmes essais avec une structure plus étendue afin que les conditions aux limites en déplacement soient plus éloignées de la fissure. Toutefois la durée de calcul s'en trouve multipliée et il ne restait pas suffisamment de temps à la thèse pour refaire tous ces essais avec une structure test plus grande. Enfin la géométrie 2D n'aide pas à la déviation de la fissure puisque l'aspect cylindrique de la fibre est perdu. Il reste alors à espérer que des conditions aux limites en contraintes donneront suffisamment de souplesse à la structure pour observer la déviation de fissure dans l'interphase.

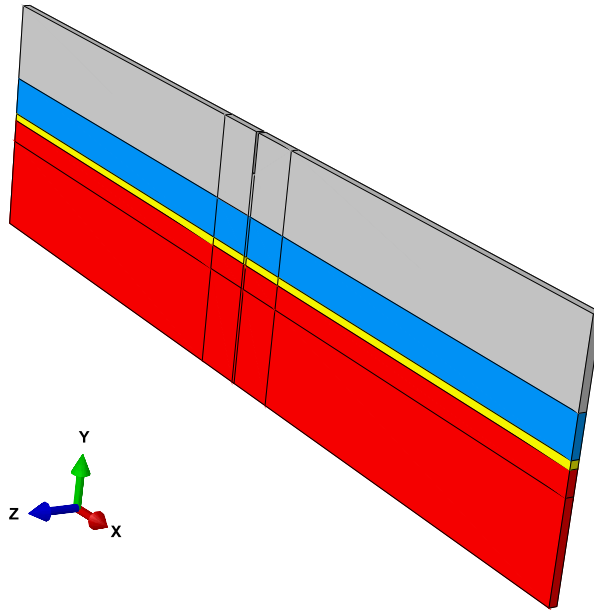


FIGURE 2.17 – Proposition de structure allongée pour les essais de déviation à déplacement imposé.

4.2 Comportement à effort imposé

De même que précédemment, l'influence des paramètres l_{pha} , l_{int} et e_{BN} sur la déviation de fissure dans l'interphase est étudiée. Toutefois ce n'est plus un déplacement qui est imposé aux bords mais une contrainte. Dans tous les cas envisagés la

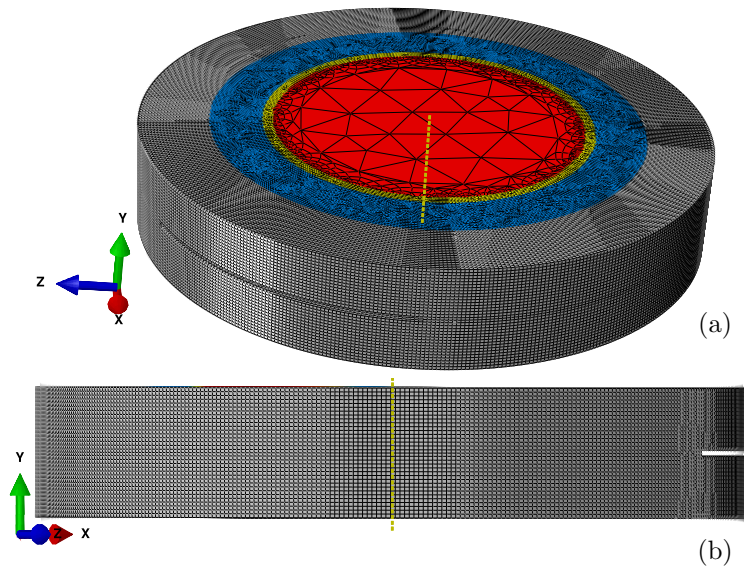


FIGURE 2.18 – Proposition de structure 3D tenant compte de l’aspect cylindrique de la fibre. (a) Vue de la fibre et des différentes couches matricielles (b) vue mettant en évidence la pré-fissure.

déviations de fissure est observée, les grandes étapes de la propagation de fissure sont données en FIGURE 2.19. La FIGURE 2.20 illustre alors l’évolution de la fissure sur le tracé de l’énergie élastique. La structure déformée est donnée en FIGURE 2.21. La contrainte imposée aux bords permet de créer de la traction localement perpendiculaire aux interfaces, ce qui aide à la déviation de fissure.

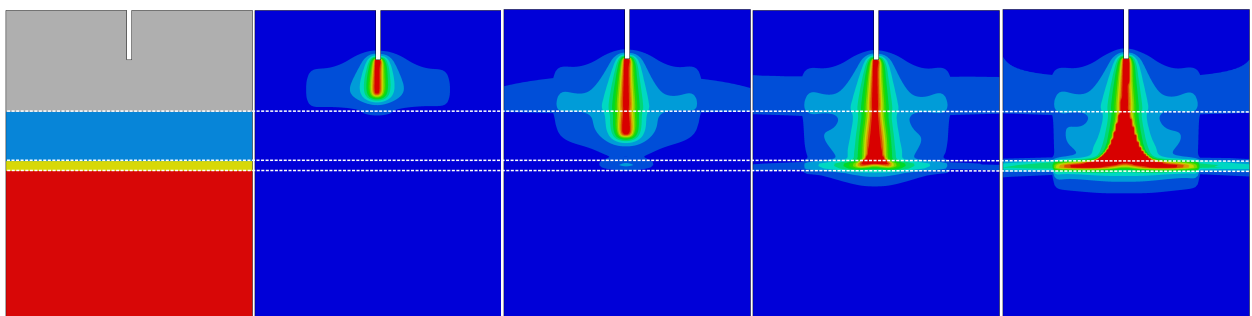


FIGURE 2.19 – Evolution du profil de fissure durant l’essai de traction.

Pour une interphase d’épaisseur fixée ($e_{BN} = 0.4\mu m$) et pour un ratio $\frac{l_{int}}{l_{pha}} = 1$, la rupture est retardée si les valeurs de longueurs caractéristiques sont prises petites. Cette observation est illustrée de deux manières sur la FIGURE 2.22 : d’un côté l’évolution de l’énergie en fonction de la contrainte appliquée est donnée mais comme

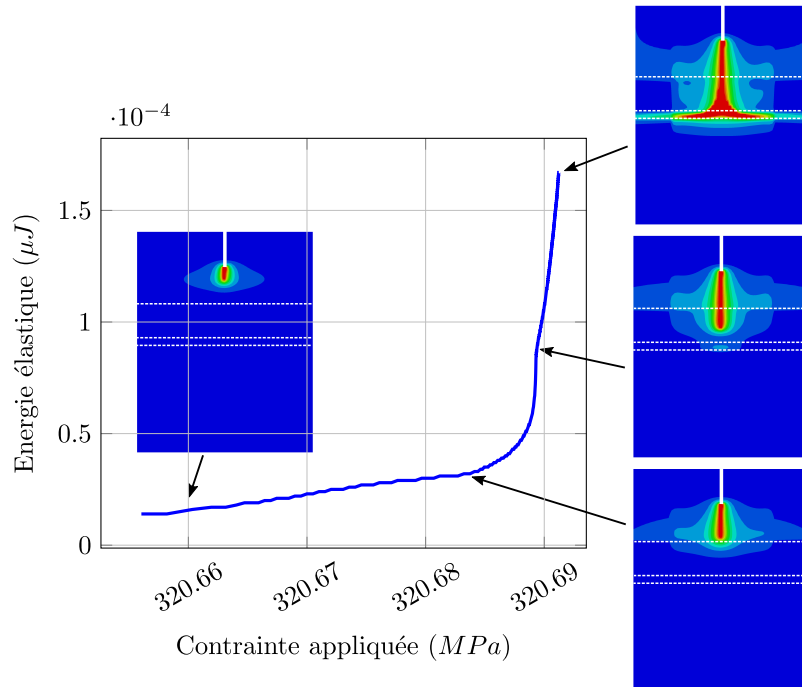


FIGURE 2.20 – Points d'intérêt au cours de l'essai de traction à contrainte imposée. Les longueurs caractéristiques sont $l_{int} = l_{pha} = 0.2\mu m$ et l'épaisseur d'interphase est fixée à $e_{BN} = 0.4\mu m$.

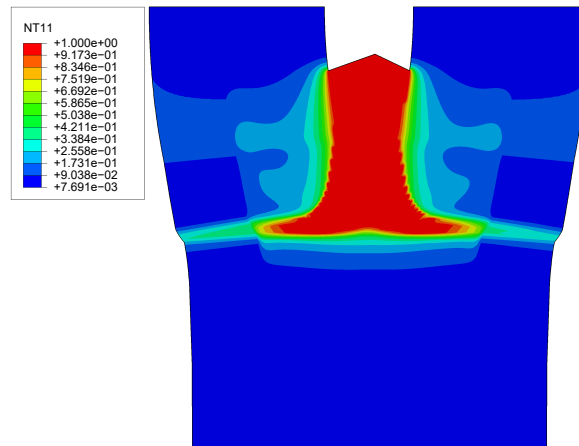


FIGURE 2.21 – Structure déformée pour la contrainte appliquée.

l'énergie augmente brusquement, un histogramme se focalisant sur la contrainte à rupture est aussi proposé. Le résultat obtenu reste une fois encore cohérent avec l'idée qu'une petite longueur caractéristique est associée à une grande contrainte à rupture. Au contraire si $l_{pha} = 0.4\mu m$ est fixé et que l_{int} diminue, alors la rupture se

produit plus tôt (FIGURE 2.23).

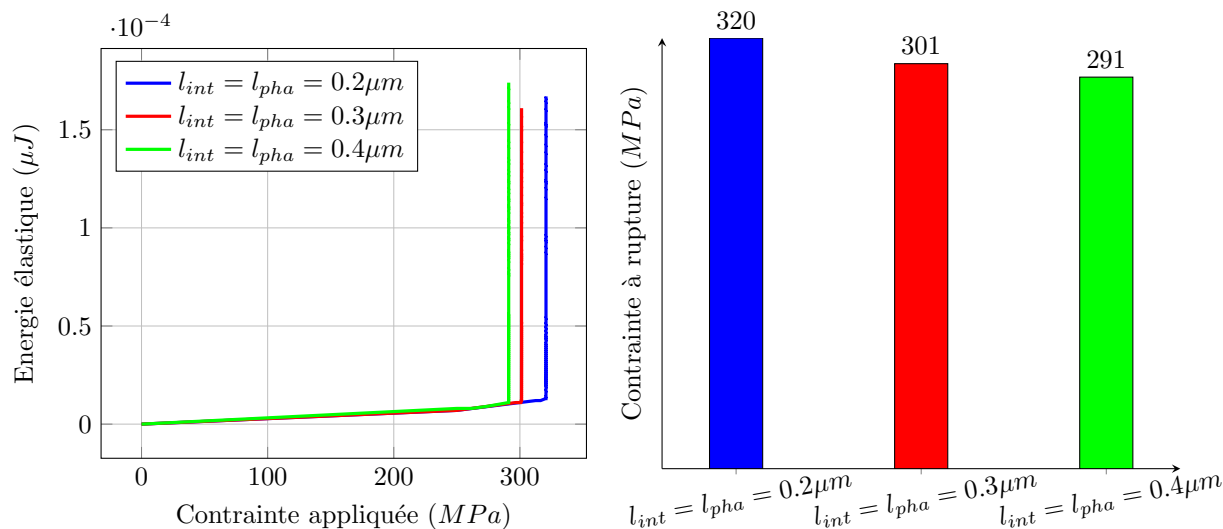


FIGURE 2.22 – Evolution de l'énergie élastique globale durant l'essai de traction à contrainte imposée dans le cas d'une même longueur caractéristique pour toutes les phases de la structure ($e_{BN} = 0.4 \mu m$) et histogramme des contraintes à rupture. La contrainte à rupture diminue d'environ 10% lorsque l_{int} passe de $0.2 \mu m$ à $0.4 \mu m$.

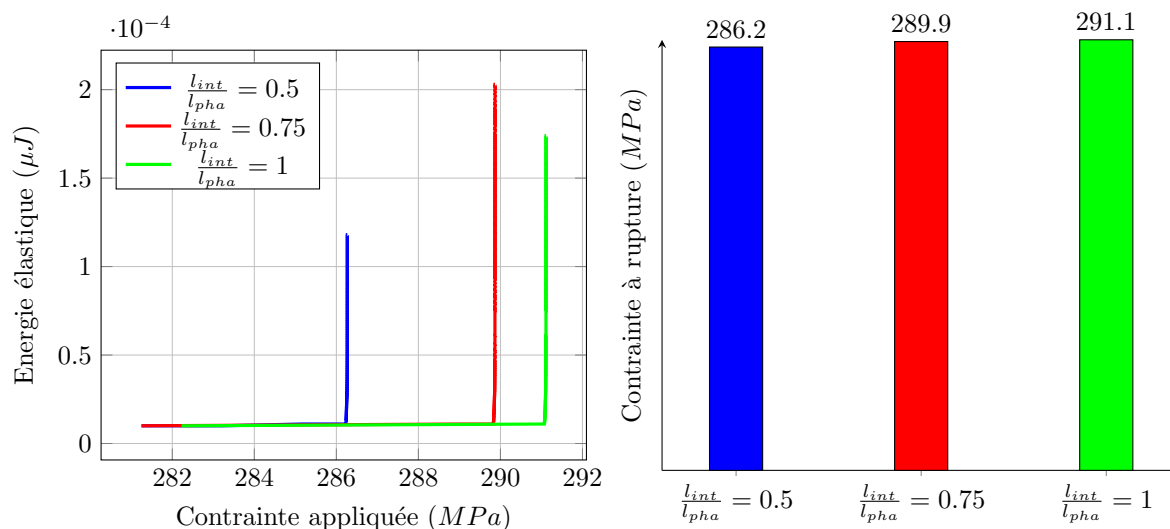


FIGURE 2.23 – Evolution de l'énergie élastique globale au cours de l'essai de traction pour $l_{pha} = 0.4 \mu m$ et $e_{BN} = 0.4 \mu m$. La différence de contrainte à rupture obtenue pour les différents ratios $\frac{l_{int}}{l_{pha}}$ n'est pas significative.

La FIGURE 2.24 et la FIGURE 2.25 montrent l'influence de l'épaisseur d'interphase sur la déviation de fissure pour des longueurs caractéristiques d'une part, et pour $l_{int} = e_{BN}$ d'autre part. Seul le cas $l_{int} = e_{BN}$ a une réelle influence sur la contrainte à rupture qui diminue d'environ 15% lorsque l_{int} passe de $0.2\mu m$ à $0.6\mu m$. De plus l'initiation de la fissure dans la matrice se produit à des contraintes proches des valeurs critiques $\sigma_c \in [200, 300]MPa$ données dans la littérature [Pineau *et al.*, 2011]. Une limitation réside néanmoins dans la signification physique des longueurs caractéristiques, en effet la Table 2.3 pousserait à prendre un ratio $\frac{l_{int}}{l_{pha}}$ de l'ordre de grandeur de 10^{-2} mais un tel écart entre les valeurs caractéristiques l_{pha} et l_{int} causerait des difficultés à réaliser les essais numériques car le nombre de degrés de liberté du problème serait trop grand. Enfin un maillage trop fin rend difficile la propagation de la fissure ainsi que son dédoublement à l'interphase à cause d'erreurs numériques.

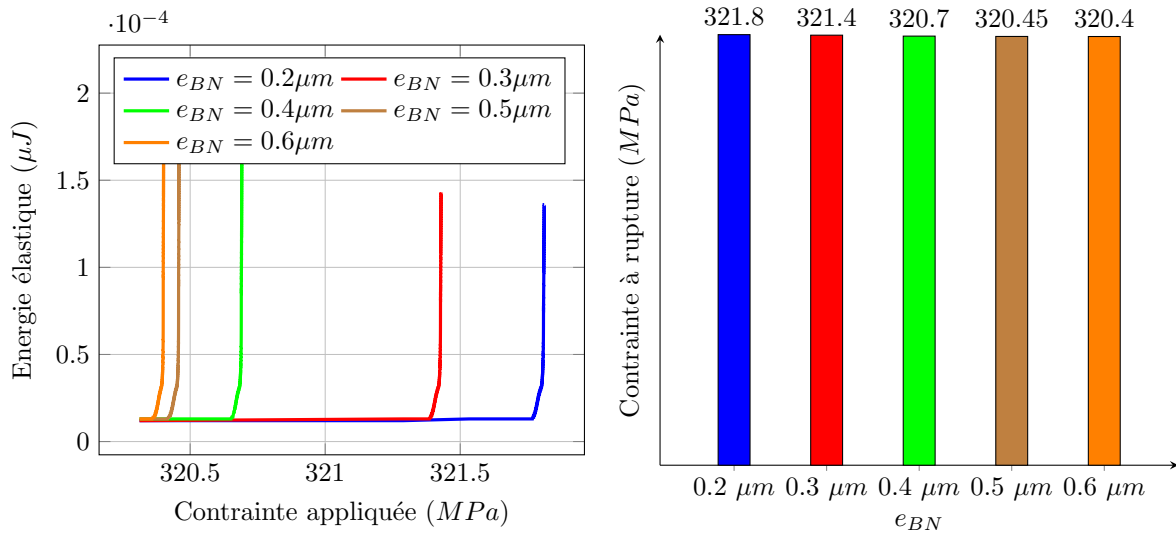


FIGURE 2.24 – Evolution de l'énergie élastique pendant l'essai de traction à contrainte imposée pour des longueurs caractéristiques l_{pha} et l_{int} fixées à $l_{pha} = l_{int} = 0.2\mu m$ et une épaisseur d'interphase e_{BN} variable. La variation de e_{BN} n'a pas une grande influence sur la contrainte à rupture mesurée (qui reste à peu près constante).

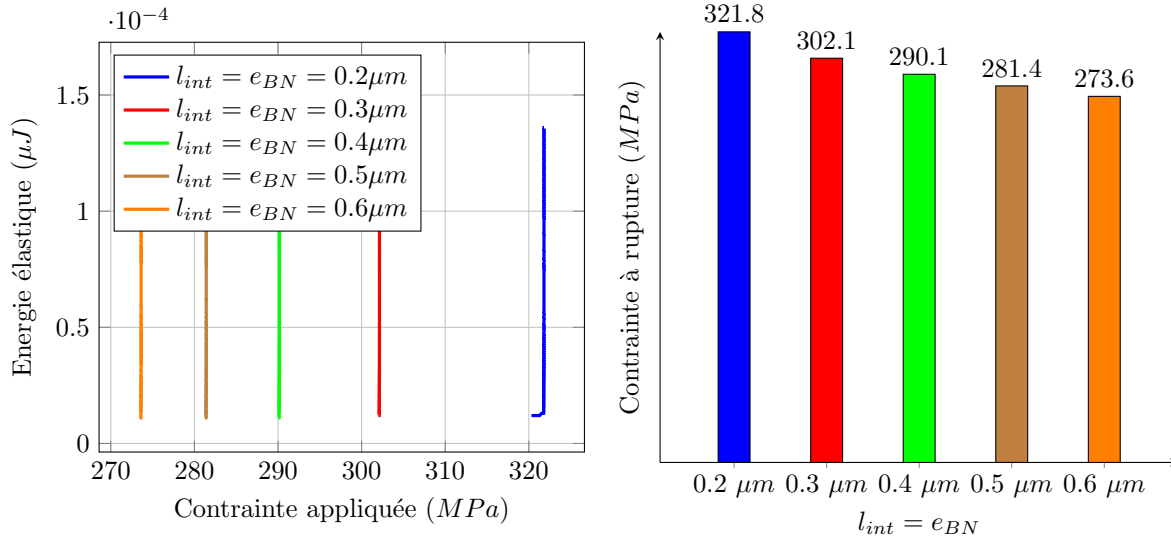


FIGURE 2.25 – Evolution de l'énergie élastique pendant l'essai de traction à contrainte imposée pour une longueur caractéristique $l_{pha} = 0.2\mu m$ fixée, une longueur caractéristique l_{int} variable et une épaisseur d'interphase variable telle que $l_{int} = e_{BN}$.

5 Conclusion

L'objectif ici a été de mettre en œuvre la loi d'évolution de l'endommagement établie dans le chapitre précédent. Le choix d'une approche monolithique pour traiter le problème d'endommagement dans le code Abaqus était justifié par la complexité de la structure étudiée et par la volonté de laisser le code libre de choisir son propre pas de temps dans la résolution incrémentale. Une première application à une microstructure de CMC a été suggérée et la nécessité d'utiliser un apport énergétique artificiel a été discutée. Deux critères de choix quant à la quantité d'énergie de stabilisation à apporter ont été proposés : l'un basé sur le calcul global de la structure, l'autre s'appuyant sur les ordres de grandeur des différents termes intervenant dans la définition du pseudo-potential de dissipation $\phi_d^{(\eta)}$.

Une deuxième série d'études a été menée afin d'évaluer la capacité de l'interphase à dévier une fissure perpendiculaire à celle-ci selon qu'une contrainte ou un déplacement est défini comme condition aux limites. La principale difficulté résidait dans le choix des longueurs caractéristiques qui ne pouvaient pas prendre les valeurs cohérentes avec les propriétés des matériaux utilisés. En effet il a été montré que ce choix impliquerait l'utilisation d'un maillage trop fin pour la définition d'une structure simple visant à réaliser des essais de développements numériques.

Chapitre 3

Couplage fluage-endommagement via une approche champ de phase

C^E dernier chapitre propose deux modèles de couplage entre les effets visco-plastiques et l'endommagement à travers l'approche thermodynamique de Mielke. Bien que restant théoriques de par le manque d'informations expérimentales existantes, ce chapitre propose une ouverture originale vers de prochains travaux expérimentaux sur le fluage 3D dans les composites.

1 Formulation des modèles

1.1 Définition des grandeurs utiles à l'étude

1.1.1 Choix des variables internes

Puisque les effets thermiques et visco-plastiques doivent être pris en compte, le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est choisi comme étant la somme d'une contribution élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$, visco-plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ et thermique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} \quad (3.1)$$

La déformation d'origine thermique est considérée constante pour la suite du chapitre car la température est supposée fixe. La déformation visco-plastique cumulée p est aussi une variable interne de l'étude, son expression est donnée ci-dessous :

$$p(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp}(\tau) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp}(\tau)} d\tau \quad (3.2)$$

Pour un essai de traction ou compression, la vitesse de déformation visco-plastique cumulée est simplement égale à la valeur absolue de la vitesse de déformation visco-plastique : $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^{vp}|$. Evidemment le champ de déplacement \mathbf{u} et la variable d'endommagement d sont aussi des variables internes de l'étude. Pour résumer $(\mathbf{u}, d, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, p)$ constitue le jeu de variables internes pour ce chapitre.

1.1.2 Densités d'énergie stockées

L'expression de la densité d'énergie stockée est reprise directement de [Miehe et al., 2010b] :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) = (1-d)^2 \psi_0^+(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) + \psi_0^-(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) \quad (3.3)$$

Il est aussi possible d'introduire une densité d'énergie visco-plastique stockée $\psi_p(d, p)$ dont l'expression s'inspire de celle de ψ (équation 3.3) afin de différencier les effets de la traction et de la compression :

$$\psi_p(d, p) = (1-d)^2 \psi_p^+(p) + \psi_p^-(p) \quad (3.4)$$

Ce choix de densité d'énergie visco-plastique stockée reste arbitraire, il est tout à fait possible d'imaginer un autre couplage entre endommagement et visco-plasticité. Les densités d'énergie ψ_p^+ et ψ_p^- sont choisies comme des fonctions linéaire de la déformation visco-plastique cumulée p :

$$R^\pm = \frac{\partial \psi_p^\pm}{\partial p} \quad (3.5)$$

Les constantes R^+ et R^- sont des écrouissages isotropes pour les sollicitations en traction et en compression respectivement.

1.1.3 Potentiels de dissipation

Pour ce chapitre le pseudo-potential de dissipation à gradient d'endommagement s'écrit comme la version non visqueuse du pseudo-potential défini en 1.13 :

$$\phi_d^{(0)}(d, \dot{d}, \nabla d, \nabla \dot{d}) = G_c \left(\frac{1}{l} d \dot{d} + l \nabla d \nabla \dot{d} \right) \quad (3.6)$$

Le terme de stabilisation $\eta \dot{d}^2$ n'apparaît pas ici. On rappelle que celui-ci avait pour but d'apporter une énergie artificielle supplémentaire servant à éviter l'effet *snap-back* lors de l'initiation de la fissure. Ce chapitre ayant pour but de proposer un modèle théorique de couplage entre l'endommagement et la visco-plasticité, le terme de stabilisation n'est pas utile.

Contrairement aux autres potentiels, choisir un potentiel de dissipation visco-plastique φ_p est moins évident puisqu'il faut proposer un pseudo-potential ϕ_p faisant intervenir à la fois la variable d'endommagement d ainsi que les termes de visco-plasticité $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ et p . La formulation suivante est proposée :

$$\begin{aligned} & \varphi_p \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_1^{vp}, d_1, p_1, \underline{\underline{\varepsilon}}_2^{vp}, d_2, p_2 \right) \\ &= \inf_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}, d, p} \left(\int_{t_1}^{t_2} \phi_p \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}(s), d(s), p(s), \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(s), \dot{d}(s), \dot{p}(s) \right) ds, \right. \\ & d : [t_1, t_2] \mapsto \mathbb{R}, d \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \text{ et } [d(t_1) = d_1, d(t_2) = d_2], \\ & p : [t_1, t_2] \mapsto \mathbb{R}, p \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \text{ et } [p(t_1) = p_1, p(t_2) = p_2], \\ & \left. \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} : [t_1, t_2] \mapsto \text{M}_3(\mathbb{R}), \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \text{ et } [\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}(t_1) = \underline{\underline{\varepsilon}}_1^{vp}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}(t_2) = \underline{\underline{\varepsilon}}_2^{vp}] \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans ce qui suit, deux structures de pseudo-potentiels visco-plastiques sont suggérés. Ils permettent d'aboutir à deux modèles :

- (A) un modèle d'équivalence en déformation comme dépeint dans [Chaboche, 1982] ;
- (B) un modèle d'équivalence en énergie comme adopté dans [Ladevèze et Lubineau, 2001].

(A) Modèle d'équivalence en déformation

On définit la contrainte effective $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^\pm = \underline{\underline{\sigma}}_0^\pm$, la déformation visco-plastique effective $\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_\pm^{vp} = \underline{\underline{\varepsilon}}_\pm^{vp} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ et la déformation visco-plastique effective $\tilde{p}_\pm = p_\pm = p$. Avec ces quantités effectives, les quantités énergétiques d'intérêt pour ce modèle d'équivalence en déformation s'écrivent :

Densité d'énergie stockée : $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) = (1-d)^2 \psi_0^+(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) + \psi_0^-(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}))$

Densité d'énergie visco-plastique stockée : $\psi_p(d, \tilde{p}_\pm) = (1-d)^2 \psi_p^+(\tilde{p}_+) + \psi_p^-(\tilde{p}_-)$

Potentiel de dissipation visco-plastique : $\varphi_p(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}, \tilde{p}_\pm, d) = (1-d)^2 \varphi_p^+(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}, \tilde{p}_+) + \varphi_p^-(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}, \tilde{p}_-)$

Le pseudo-potentiel ϕ_p satisfaisant le problème de minimisation 3.7 s'écrit alors : $\phi_p = \frac{d\varphi_p}{dt}$. On associe les pseudo-potentiels ϕ^+ et ϕ^- aux deux potentiels φ_p^+ et φ_p^- respectivement grâce aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi^+ &= \dot{\varphi}_p^+ \\ \phi^- &= \dot{\varphi}_p^-\end{aligned}\tag{3.8}$$

Les pseudo-potentiels ϕ^+ et ϕ^- vérifient les équations d'Euler-Lagrange. Ce choix de pseudo-potentiel visco-plastique ϕ_p est motivé par les travaux conduits par [Alessi et al., 2015, Miehe et al., 2015a] qui couplent la variable d'endommagement d avec la plasticité pour des matériaux ductiles en multipliant une fonction de d avec une fonction des variables visco-plastiques. Dans le cadre de cette thèse l'idée est poussée plus loin en faisant la distinction entre traction et compression comme cela est fait pour les équations 3.3 et 3.4. En effet il est rappelé que seules les sollicitations de traction sont susceptibles d'ouvrir une fissure.

(B) Modèle d'équivalence en énergie

Cette fois-ci les quantités effectives doivent vérifier la relation suivante :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} : \left[(1-d)^2 \underline{\underline{\sigma}}_0^+ + \underline{\underline{\sigma}}_0^- \right] = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}_+ : \underline{\underline{\sigma}}^+ + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}_- : \underline{\underline{\sigma}}^- \tag{3.9}$$

Les quantités effectives s'expriment alors :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}_+ = (1-d)^2 \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}_- = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad ; \quad \tilde{p}_+ = (1-d)^2 \dot{p} \quad ; \quad \tilde{p}_- = \dot{p} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}^\pm = \underline{\underline{\sigma}}_0^\pm$$

Les quantités énergétiques sont alors choisies de la manière suivante :

Densité d'énergie stockée : $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) = (1-d)^2 \psi_0^+(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u})) + \psi_0^-(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}))$

Densité d'énergie visco-plastique stockée : $\psi_p(d, \tilde{p}_\pm) = \psi_p^+(d, \tilde{p}_+) + \psi_p^-(\tilde{p}_-)$

Potentiel de dissipation visco-plastique : $\varphi_p(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}, \tilde{p}_\pm, d) = \varphi_p^+(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}, \tilde{p}_+, d) + \varphi_p^-(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}, \tilde{p}_-)$

le pseudo-potentiel ϕ_p dérivant du potentiel φ_p est choisi comme une fonction faisant intervenir deux autres pseudo-potentiels ϕ^+ et ϕ^- :

$$\phi_p \left(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \tilde{p}_{\pm}, d, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \dot{\tilde{p}}_{\pm}, \dot{d} \right) = \phi^+ \left(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_{+}^{vp}, \tilde{p}_{+}, d, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{+}^{vp}, \dot{\tilde{p}}_{+}, \dot{d} \right) + \phi^- \left(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_{-}^{vp}, \tilde{p}_{-}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{-}^{vp}, \dot{\tilde{p}}_{-} \right) \quad (3.10)$$

ϕ^- ne dépend pas de la variable d'endommagement d contrairement à ϕ^+ , les effets de la traction et de la compression sont donc différenciés. Les pseudo-potentiels ϕ^+ et ϕ^- doivent satisfaire les équations d'Euler-Lagrange. Il est possible ici aussi d'introduire des potentiels φ_p^+ et φ_p^- vérifiant 3.8.

Remarque quant au nom choisi pour chacun des modèles (A) et (B)

La [Sous-section 1.2](#) reprend les trois principes introduits dans le Chapitre 1 de la Partie II en ajoutant les contributions liées à la visco-plasticité. Puis la [Sous-section 1.3](#) propose une démonstration de la loi d'endommagement obtenue pour chacun modèles (A) et (B).

1.2 Ecriture des 3 principes

Que ce soit pour le premier modèle ou le deuxième, les deux pseudo-potentiels ϕ^+ et ϕ^- représentent un phénomène dépendant du temps. Ils ne sont donc pas homogènes de degré 1 pour le jeu de variables $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \dot{p})$. Les variables internes $(\mathbf{u}, d, \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}, p)$ doivent satisfaire les principes de *Stabilité* (\mathcal{S}), *Inégalité énergétique* (\mathcal{E}) tels qu'explicités dans [\[Mielke, 2003\]](#) auxquels est ajouté le principe d'*Irréversibilité* (\mathcal{I}) de Marigo :

(S) Stabilité : $\forall t \in [0, T]$, pour des variations locales définies sur chaque variable interne $\left(\mathbf{u} + h\dot{\mathbf{u}}, d + h\dot{d}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{\pm}^{vp} + h\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \tilde{p}_{\pm} + h\dot{\tilde{p}}_{\pm}\right)$ avec $h \geq 0$ et $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{d}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \dot{\tilde{p}}_{\pm})$ qui sont des champs admissibles, alors la variation d'énergie libre de Gibbs doit être inférieure à la variation de dissipation sur le domaine Ω :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) \, d\Omega - \int_{\Omega} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u} + h\dot{\mathbf{u}}), d + h\dot{d}) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \psi_p(d, \tilde{p}_{\pm}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \psi_p(d + h\dot{d}, \tilde{p}_{\pm} + h\dot{\tilde{p}}_{\pm}) \, d\Omega \\
& + W(\mathbf{u} + h\dot{\mathbf{u}}) - W(\mathbf{u}) \\
& \leq \int_{\Omega} \varphi_d^{(0)}(d, d + h\dot{d}) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \varphi_p(\underline{\underline{\varepsilon}}_{\pm}^{vp}, d, \tilde{p}_{\pm}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{\pm}^{vp} + h\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, d + h\dot{d}, \tilde{p}_{\pm} + h\dot{\tilde{p}}_{\pm}) \, d\Omega
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(E) Inégalité énergétique : $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, sur la solution $(\mathbf{u}, d, \underline{\underline{\varepsilon}}_{\pm}^{vp}, \tilde{p}_{\pm})$ et considérant des fonctions régulières :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \dot{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}), d) \, d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \dot{\psi}_p(d, \tilde{p}_{\pm}) \, d\Omega dt \\
& + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \phi_d^{(0)}(d, \dot{d}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \phi_p(\underline{\underline{\varepsilon}}_{\pm}^{vp}, d, \tilde{p}_{\pm}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \dot{d}, \dot{\tilde{p}}_{\pm}) \, d\Omega \\
& \leq \int_{t_1}^{t_2} W(\dot{\mathbf{u}}) \, dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

(I) Irréversibilité : $\forall t \in [0, T]$ et en tout point du domaine Ω :

$$\dot{d} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq d \leq 1 \tag{3.13}$$

On rappelle que $W(\mathbf{u})$ est le travail des actions mécaniques extérieures dont la définition a été donnée en 1.12. Dans les sections qui suivent les modèles d'équivalence en déformation et d'équivalence énergétique sont employés pour obtenir deux lois d'endommagement distinctes.

1.3 Lois d'endommagement

(A) Modèle d'équivalence en déformation

Diviser 3.11 par h et passer à la limite $h \rightarrow 0$ donne la condition de stabilité au premier ordre :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\frac{G_c}{l} \left(d\dot{d} + l^2 \nabla d \nabla \dot{d} \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} -2(1-d)\dot{d} (\psi_0^+ + \psi_p^+ + \varphi_p^+) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (1-d)^2 \left(-\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}} \right) : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^+ d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left(-\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{vp}} \right) : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^- d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (1-d)^2 \left(R^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \dot{\underline{\underline{p}}}_+} \right) \dot{\underline{\underline{p}}}_+ d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left(R^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \dot{\underline{\underline{p}}}_-} \right) \dot{\underline{\underline{p}}}_- d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\mathbf{u}}) d\Omega - W(\dot{\mathbf{u}}) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De plus l'inégalité énergétique 3.12 peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\frac{G_c}{l} \left(d\dot{d} + l^2 \nabla d \nabla \dot{d} \right) \right] d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} -2(1-d)\dot{d} (\psi_0^+ + \psi_p^+ + \varphi_p^+) d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (1-d)^2 \left(R^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \tilde{p}_+} \right) \dot{\tilde{p}}_+ d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(R^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \tilde{p}_-} \right) \dot{\tilde{p}}_- d\Omega dt \tag{3.15} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (1-d)^2 \left(-\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_+^{vp}} \right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_+^{vp} d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(-\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_-^{vp}} \right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_-^{vp} d\Omega dt \\
& \leq \int_{t_1}^{t_2} W(\dot{\mathbf{u}}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\mathbf{u}) d\Omega dt
\end{aligned}$$

Puisque l'inégalité obtenue dans 3.14 est vraie pour n'importe quel champ admissible parmi $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{d}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, \dot{\tilde{p}}_{\pm})$, alors par hypothèse de découplage les cas particuliers $(\dot{\mathbf{u}}, 0, 0, 0)$, $(0, \dot{d}, 0, 0)$, $(0, 0, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\pm}^{vp}, 0)$ et $(0, 0, 0, \dot{\tilde{p}}_{\pm})$ imposent toutes les intégrales d'être positives. Par conséquent l'usage de l'inégalité énergétique 3.15 permet de retrouver l'équilibre mécanique ainsi que les conditions aux limites (où \mathbf{n} est un vecteur normal unitaire sortant de la surface élémentaire $d(\partial\Omega)$) :

$$\mathbf{Div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \tag{3.16a}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_d = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_F \tag{3.16b}$$

$$\frac{\partial \nabla d}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \dot{d} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{3.16c}$$

Les lois de normalité sont retrouvées pour le modèle d'équivalence en déformation :

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_+^{vp}} = \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^+ \tag{3.17a}$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_-^{vp}} = \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^- \tag{3.17b}$$

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial \tilde{p}_+} = -R^+ \tag{3.18a}$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial \dot{p}_-} = -R^- \quad (3.18b)$$

Les équations d'Euler-Lagrange permettent quant à elles de retrouver l'expression des potentiels de dissipation φ_p^+ et φ_p^- :

$$\varphi_p^\pm = \underline{\underline{\sigma}}^\pm : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p} - R^\pm \tilde{p}_\pm \quad (3.19)$$

Le choix des quantités effectives justifie la désignation de "modèle d'équivalence en déformation". Enfin la condition de cohérence peut aussi être déduite des deux inégalités 3.14 et 3.15 :

$$\left[\frac{G_c}{l} (d - l^2 \Delta d) - 2(1 - d) (\psi_0^+ + \psi_p^+ + \varphi_p^+) \right] \dot{d} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (3.20)$$

Le terme $(\psi_0^+ + \psi_p^+ + \varphi_p^+)$ est la force de pilotage de l'endommagement d , cette quantité est égale à $\psi_0^+ + \underline{\underline{\sigma}}_0^+ : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p}$ au vu des relations 3.19 and 3.5. Pour assurer l'irréversibilité de l'évolution de l'endommagement, l'histoire du chargement doit être prise en compte d'après [Miehe *et al.*, 2010a]. La force de pilotage \mathcal{H} est introduite :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \left[\psi_0^+ (\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau))) + \underline{\underline{\sigma}}_0^+(\mathbf{x}, \tau) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p}(\mathbf{x}, \tau) \right] \quad (3.21)$$

(B) Modèle d'équivalence en énergie

Diviser 3.11 par h et passer à la limite $h \rightarrow 0$ donne la condition de stabilité au premier ordre :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{G_c}{l} (d\dot{d} + l^2 \nabla d \nabla \dot{d}) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(-2(1 - d)\dot{d} (\psi_0^+ + \psi_p^+) + \frac{\partial \varphi_p^+}{\partial d} \dot{d} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(-\underline{\underline{\sigma}}^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(-\underline{\underline{\sigma}}^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\dot{v}p} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(R^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \tilde{p}_+} \right) \tilde{p}_+ d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(R^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \tilde{p}_-} \right) \tilde{p}_- d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\mathbf{u}}) d\Omega - W(\dot{\mathbf{u}}) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

De plus l'inégalité énergétique 3.12 peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\frac{G_c}{l} \left(d\dot{d} + l^2 \nabla d \nabla \dot{d} \right) \right] d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(-2(1-d)\dot{d} (\psi_0^+ + \psi_p^+) + \frac{\partial \varphi_p^+}{\partial d} \dot{d} \right) d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(R^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \dot{p}_+} \right) \dot{p}_+ d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(R^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \dot{p}_-} \right) \dot{p}_- d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(-\underline{\tilde{\sigma}}^+ + \frac{\partial \phi^+}{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}_+^{vp}} \right) : \underline{\dot{\varepsilon}}_+^{vp} d\Omega dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(-\underline{\tilde{\sigma}}^- + \frac{\partial \phi^-}{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}_-^{vp}} \right) : \underline{\dot{\varepsilon}}_-^{vp} d\Omega dt \\
& - \leq \int_{t_1}^{t_2} W(\dot{\mathbf{u}}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\mathbf{u}) d\Omega dt
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De même que pour le modèle d'équivalence en déformation, l'équilibre mécanique et les conditions aux limites sont retrouvées. La condition de stabilité et l'inégalité énergétique aboutissent à une condition de cohérence différente que précédemment :

$$\left[\frac{G_c}{l} (d - l^2 \Delta d) - 2(1-d) (\psi_0^+ + \psi_p^+) + \frac{\partial \varphi_p^+}{\partial d} \right] \dot{d} = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}_+^{vp}} = \underline{\tilde{\sigma}}^+ \tag{3.25a}$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}_-^{vp}} = \underline{\tilde{\sigma}}^- \tag{3.25b}$$

La déformation plastique cumulée effective qui dérive ϕ^+ and ϕ^- donne l'écroutissage isotrope :

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial \dot{p}_+} = -R^+ \tag{3.26a}$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial \dot{p}_-} = -R^- \tag{3.26b}$$

Le potentiel de dissipation visco-plastique φ_p garde la même expression que dans 3.19. La quantité $\frac{\partial \varphi_p^+}{\partial d}$ s'exprime quant à elle par :

$$\frac{\partial \varphi_p^+}{\partial d} = -2(1-d) \left(\underline{\underline{\sigma}}_0^+ : \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} - R^+ p \right) \quad (3.27)$$

Cette relation permet alors de retrouver la même force de pilotage \mathcal{H} que pour le modèle d'équivalence en déformation.

1.4 Conclusion partielle

Les principes de *Stabilité*, *Inégalité énergétique* and *Irréversibilité* ainsi que deux suggestions de pseudo-potentiels de dissipation visco-plastique permettent d'obtenir un loi d'évolution de l'endommagement similaire à celle établie dans [Miehe *et al.*, 2010b] :

$$\boxed{-G_c l \Delta d = 2\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) - \left(2\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \frac{G_c}{l} \right) d} \quad (3.28)$$

L'évolution de la variable d'endommagement et de la visco-plasticité est conditionnée par le choix du modèle d'équivalence. Celui-ci impacte la force de pilotage puisque la déformation visco-plastique n'intervient que dedans dans la loi d'endommagement.

2 Application à une fibre Hi-Nicalon-S

L'objectif est ici de choisir un modèle de fluage adapté à la formulation thermodynamique tout en étant fidèle aux résultats expérimentaux présentés dans la littérature. Des essais sur fibres constitueront une base de développement pour un cas unidimensionnel dans un premier temps. Les deux modèles basés sur l'équivalence en déformation et l'équivalence en énergie seront comparés, puis une généralisation théorique au cas 3D sera proposée comme ouverture à de futures recherches.

2.1 Observations par l'expérience

Les résultats expérimentaux sur les déformations de fluage des fibres Hi-Nicalon-S obtenus par [DiCarlo et Yun, 2005] et [Sauder et Lamon, 2007] peuvent être décrits par une loi de Norton-Bailey [Norton, 1929, Bailey, 1935, Dorn, 1955] ou une loi de Norton-McVetty [Norton, 1929, McVetty, 1943, Dorn, 1955]. Ces deux lois sont utiles pour décrire les deux premières phases du fluage (les trois qui existent sont définies dans [DiCarlo, 1994]). Un exemple de résultats expérimentaux sur le fluage pour différents types de fibres utilisées dans les CMC est donné en **FIGURE 3.1**.

Dans le cadre de cette thèse, une loi de Norton-Bailey est choisie pour décrire l'évolution visco-plastique car c'est la loi utilisée le plus fréquemment dans la littérature. Sans endommagement, si une température constante T ainsi qu'une contrainte en

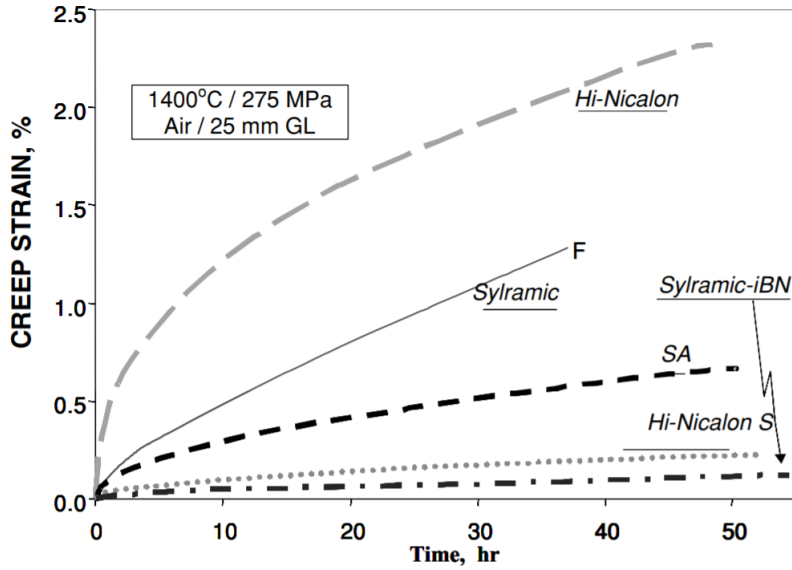


FIGURE 3.1 – Courbes classiques montrant le comportement en fluage jusqu’à rupture de différents types de fibres SiC à 1400°C et 275MPa , [DiCarlo et Yun, 2005]

traction constante σ^+ sont appliquées à la fibre alors l’évolution unidimensionnelle de la déformation de fluage est donnée par :

$$\varepsilon^{vp}(t) = A^+ \cdot e^{-\frac{m^+ Q^+}{RT}} [\sigma^+]^{n^+} t^{m^+} \quad (3.29)$$

Les paramètres A^+ , n^+ et m^+ sont supposés constants, il en est de même de l’énergie d’activation Q^+ . R est la constante universelle des gaz parfaits. Puisque la majorité des paramètres sont identifiés dans [Robertson *et al.*, 2020] pour un essai sous air sec à une température de 1100°C , la courbe de fluage de référence est tracée en FIGURE 3.2 avec le modèle analytique de Norton-Bailey 3.29 dont les paramètres numériques sont fournis dans Table 1.

2.2 Formulation du comportement en fluage sans endommagement

Pour un essai de traction sans endommagement, la variable d est fixée à 0 et la contrainte effective $\tilde{\sigma}^+$ est égale à la contrainte appliquée σ^+ . Les quantités viscoplastiques effectives $\tilde{\varepsilon}^{vp}$ et \tilde{p} sont égales à ε^{vp} et p respectivement. Pour garder une cohérence dans les notations et pour anticiper l’étude tenant compte de l’endommagement, l’écriture par quantités effectives est adoptée ici.

Il est généralement plus pratique d’exprimer les lois d’évolution comme une fonction de la contrainte plutôt que de la déformation plastique d’autant plus que le comportement de fluage est caractérisé via une contrainte extérieure. C’est dans le

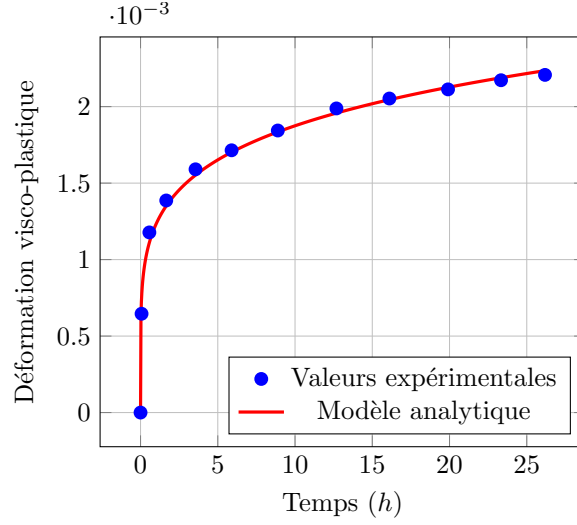


FIGURE 3.2 – Comparaison entre les résultats expérimentaux d'un essai de fluage sous atmosphère sèche et le modèle analytique de Norton-Bailey associé. La contrainte appliquée est $\sigma^+ = 650 \text{ MPa}$, la température est $T = 1100^\circ\text{C}$. Le résultat expérimental est repris de [Robertson *et al.*, 2020].

but d'écrire les potentiels comme des fonctions de la contrainte qu'est utilisée la transformée de Legendre-Fenchel. Le pseudo-potential dual ϕ_*^+ s'écrit alors :

$$\phi_*^+ = \sup_{(\dot{\varepsilon}^{vp}, \dot{p})} \left[\left(\tilde{\sigma}^+ \cdot \dot{\varepsilon}^{vp} - R^+ \dot{p} \right) - \phi^+ \left(\dot{\varepsilon}^{vp}, \dot{p} \right) \right] \quad (3.30)$$

Un choix possible pour le dual ϕ_*^+ est de l'écrire comme une fonction puissance comme suggéré dans [Lemaitre et Chaboche, 1994] :

$$\phi_*^+ = \frac{(K^+)^{-N^+}}{N^+ + 1} \langle \tilde{\sigma}^+ - R^+ - \sigma_y \rangle^{N^+ + 1} \tilde{p}^{-\frac{N^+}{M^+}} \quad (3.31)$$

Les quantités effectives $\tilde{\sigma}^+$ et \tilde{p} ont été choisies comme variables internes. K^+, M^+ et N^+ sont des paramètres supposés constants pour les conditions de l'essai. La contrainte seuil σ_y est elle aussi constante. Grâce à la transformée de Legendre-Fenchel, le dual satisfait les relations de normalité suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\partial \phi_*^+}{\partial \tilde{\sigma}^+} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \phi_*^+}{\partial R^+} \end{cases} \quad (3.32)$$

La relation $|\dot{\varepsilon}^{vp}| = \dot{p}$ est immédiatement obtenue pour un essai de traction unidimensionnel. Le caractère positif de la dissipation φ_p^+ explicitée en 3.19 est assurée si l'écroissage isotrope R^+ est nul. Si le phénomène de fluage apparaît dès le début de l'expérience pour la température de 1100°C fixée, la contrainte critique σ_y peut

être supposée négligeable. Sous ces hypothèses les équations 3.32 donnent l'équation différentielle suivante en \tilde{p} :

$$\dot{\tilde{p}} = \left(\frac{\tilde{\sigma}^+}{K^+} \right)^{N^+} \tilde{p}^{-\frac{N^+}{M^+}} \quad (3.33)$$

Dans le cas général la résolution de cette équation donne :

$$\tilde{p}(t) = \left[\frac{N^+ + M^+}{M^+} \int_0^t \left(\frac{\tilde{\sigma}^+(\tau)}{K^+} \right)^{N^+} d\tau \right]^{\frac{M^+}{N^+ + M^+}} \quad (3.34)$$

Si la contrainte $\tilde{\sigma}^+ = \sigma^+$ est constante, la loi de Norton-Bailey 3.29 est retrouvée et les paramètres K^+ , N^+ et M^+ peuvent être liés aux constantes de Norton-Bailey :

$$N^+ = \frac{n^+}{m^+} \quad (3.35a)$$

$$M^+ = \frac{n^+}{1 - m^+} \quad (3.35b)$$

$$K^+ = \left(\frac{e^{\frac{m^+ Q^+}{RT}}}{A^+ (m^+)^{m^+}} \right)^{\frac{1}{n^+}} \quad (3.35c)$$

Le manque d'informations plus précises dans la littérature incite au choix (plus simple) d'une valeur constante pour N^+ , M^+ et K^+ . Leur valeur numérique est donnée dans Annexe 1. Seul un pseudo-potential dual permettant de retrouver la loi de Norton-Bailey est exprimé explicitement, il en existe certainement un aboutissant à Norton-McVetty mais son expression ne nous est pas connue.

2.3 Formulation du comportement en fluage avec endommagement

2.3.1 Loi d'endommagement 1D

Pour le problème de traction à contrainte constante, le laplacien Δd disparaît dans 3.28. La loi d'évolution de l'endommagement devient alors :

$$d(t) = \frac{2\mathcal{H}(t)}{2\mathcal{H}(t) + \frac{G_c}{l}} \quad (3.36)$$

De plus la contrainte de traction σ^+ est liée à la contrainte effective $\tilde{\sigma}^+$ et à la variable d'endommagement d via la relation :

$$\sigma^+ = (1 - d)^2 \tilde{\sigma}^+ \quad (3.37)$$

Pour cet essai de traction l'expression de la force de pilotage peut être explicitée, elle est nécessairement une fonction croissante du temps dans ce cadre d'étude :

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2E} \frac{(\sigma^+)^2}{(1-d(t))^4} + \frac{\sigma^+}{(1-d(t))^2} \varepsilon^{vp}(t) \quad (3.38)$$

Les propriétés mécaniques des fibres Hi-Nicalon-S sont bien connues, il est alors possible de fournir une valeur précise de l'énergie critique de libération G_c grâce à la connaissance du facteur d'intensité de contrainte critique K_c . D'après [Gauthier et Lamon, 2009] la valeur de K_c pour ce type de fibre est connu et [Irwin, 1957] donne un lien entre cette quantité et l'énergie critique de libération G_c :

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \quad (3.39)$$

Les données de la littérature donnent $G_c = 4.67 \text{ J.m}^{-2}$. Pour rappel vis-à-vis du chapitre précédent il a été montré dans [Nguyen *et al.*, 2016] que la longueur caractéristique l pouvait être liée aux paramètres du matériau dans le cadre d'un essai de traction 1D :

$$l = \frac{27}{256} \frac{EG_c}{\sigma_c^2} \quad (3.40)$$

La longueur caractéristique peut être vue comme la taille d'un défaut critique. Avec une valeur de σ_c prise de l'article [Parthasarathy *et al.*, 2016], l'équation 3.40 donne un ordre de grandeur pour cette longueur : $l = 0.03 \text{ } \mu\text{m}$. Les valeurs calculées ou issues de la littérature sont compilées dans l'Annexe 1.

2.3.2 Evolution de la déformation visco-plastique

La Table 3.1 résume les différentes équations utiles pour le calcul de la variable d'endommagement et de la déformation visco-plastique en fonction du modèle de couplage choisi. La loi d'évolution de l'endommagement 3.36 est commune au modèle d'équivalence en déformation et au modèle d'équivalence en contrainte. De manière similaire la forme de la force de pilotage 3.38 reste identique quel que soit le modèle adopté.

L'intérêt de raisonner en terme de quantités effectives $(\tilde{\sigma}^+, \tilde{p})$ est que l'équation différentielle donnant l'évolution de la déformation visco-plastique cumulée effective 3.33 garde la même structure. Seule la définition des quantités effectives change d'un modèle à l'autre.

2.4 Dégradation d'une fibre Hi-Nicalon-S

Dans cette section les modèles d'équivalence sont comparés dans le but d'évaluer la durée de vie d'une fibre Hi-Nicalon-S sous chargement statique. Une contrainte

	Equivalence en déformation	Equivalence énergétique
Endommagement	$d(t) = \frac{1}{1 + \frac{G_c}{2l\mathcal{H}(t)}}$	
Force de pilotage	$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2E} \frac{(\sigma^+)^2}{(1-d(t))^4} + \frac{\sigma^+}{(1-d(t))^2} \varepsilon^{vp}(t)$	
Déformation visco-plastique cumulée effective	$\dot{p}(t) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^+}{K^+} \right)^{N^+} \tilde{p}^{-\frac{N^+}{M^+}}$	
Quantités effectives	$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^+ &= \frac{\sigma^+}{(1-d)^2} \\ \tilde{\varepsilon}^{vp} &= \varepsilon^{vp} \\ \tilde{p} &= p \\ \tilde{\tilde{p}} &= \tilde{\varepsilon}^{vp} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^+ &= \frac{\sigma^+}{(1-d)^2} \\ \tilde{\varepsilon}^{vp} &= (1-d)^2 \varepsilon^{vp} \\ \tilde{p} &= (1-d)^2 p \\ \tilde{\tilde{p}} &= \tilde{\varepsilon}^{vp} \end{aligned}$

TABLE 3.1 – Comparaison des comportements visco-plastiques obtenus pour les deux modèles explicités dans ce chapitre.

de traction constante $\sigma^+ = 650MPa$ est appliquée, la température est fixée à $T = 1373K$ et la fibre est sous air sec. D'après [Robertson *et al.*, 2020], la durée de vie attendue est de $26h$. A cause de la présence d'oxygène, une couche de silice (SiO_2) peut se former durant l'essai. La cinétique de la formation de ce verre peut être modélisée par une équation de Deal-Grove dont l'expression est donnée par :

$$e(t) = \frac{1}{2}A \left(\sqrt{1 + \frac{4B}{A^2}t} - 1 \right) \quad (3.41)$$

$$A = A_0 \exp \left[-\frac{Q_a}{RT} \right] \quad (3.42a)$$

$$B = B_0 \exp \left[-\frac{Q_b}{RT} \right] \quad (3.42b)$$

A et B sont deux paramètres qui dépendent des termes pré-exponentiels A_0 et B_0 ainsi que des énergies d'activation Q_a et Q_b . Les valeurs de ces paramètres sont fournies dans l'Annexe 1 et sont tirées de [Hay *et al.*, 2011]. L'évolution de l'épaisseur du verre au cours du temps est donnée en FIGURE 3.3. Il peut être noté que l'épaisseur attendue de SiO_2 après 100 heures est d'environ $1\mu m$ ce qui est cohérent avec les observations réalisées dans [Hay et Chater, 2017]. Enfin la rigidité du verre est négligée et la loi des mélanges permet d'écrire une contrainte effective modifiée comme suggéré dans [Sauder et Lamon, 2007] :

$$\hat{\sigma}^+(t) = \frac{\tilde{\sigma}^+}{\left(1 - \frac{e(t)}{R_f}\right)^2} \quad (3.43)$$

La **FIGURE 3.4** compare l'évolution de la déformation visco-plastique et de la variable d'endommagement pour le modèle d'équivalence en déformation et pour le modèle d'équivalence énergétique. De plus les effets de l'oxydation et le modèle de Deal-Grove sont pris en compte. Il est clair que sans ces dernières hypothèses la durée de vie est très supérieure aux 26 heures initialement attendues, elle est supérieure à 1000 heures pour les deux modèles. Ce résultat est irréaliste en présence d'air sec. Si les effets de l'oxydation sont considérés alors le modèle d'équivalence en énergie prévoit une durée de vie d'environ 29 heures ce qui est bien plus proche de la durée de vie issue de l'expérience.

Toutefois la courbe de déformation visco-plastique ne représente pas bien la courbe expérimentale présentée en **FIGURE 3.2**. Cela s'explique par le fait que pour ce calcul unidimensionnel, l'endommagement évolue uniformément sur toute la longueur de la fibre : d'où la déformation qui diverge lorsque l'endommagement approche de 1. L'endommagement se produisant localement au sein de la fibre, de telles courbes seraient attendues au niveau de la fissure dans un modèle 3D de fibre avec entaille. La déformation visco-plastique macroscopique attendue devrait être proche de celle tracée en **FIGURE 3.2**.

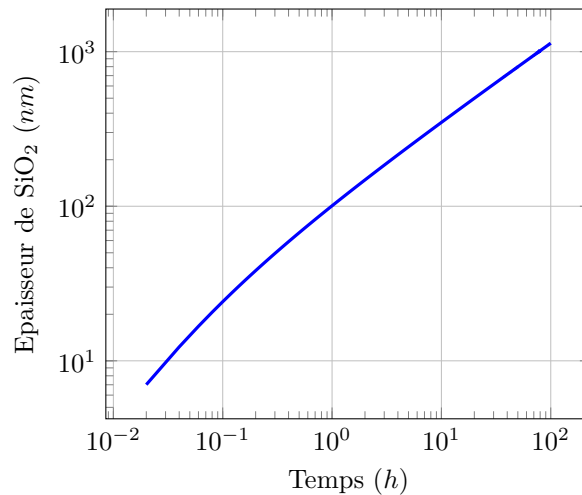


FIGURE 3.3 – Prédiction de l'évolution de l'épaisseur du dioxyde de silicium avec le modèle de Deal-Grove en fatigue statique à 1373K.

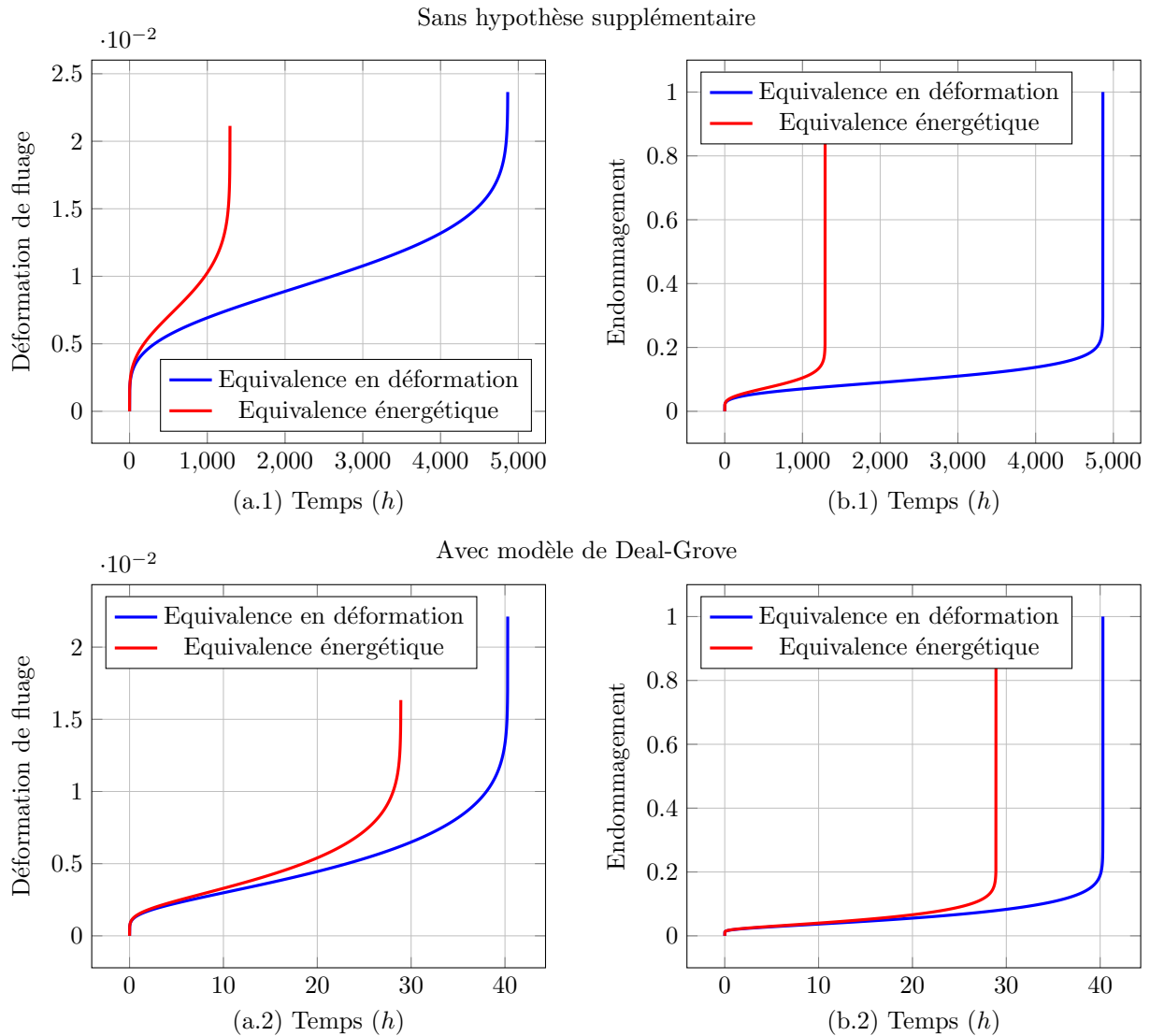


FIGURE 3.4 – Comparaison entre les résultats donnés par les deux modèles de pseudo-potentiels proposés dans ce chapitre et pour les différentes hypothèses formulées.

3 Conclusion de la Partie II

Afin de tenir compte des mécanismes de dégradation à l'échelle de la micro-structure d'un CMC, une approche continue de la fissuration a été choisie afin d'outrepasser les problématiques classiques que sont l'initiation, la propagation et le chemin pris par une fissure. Plus précisément la loi d'évolution de l'endommagement établie par [Miehe *et al.*, 2010b] a été redémontrée dans un cadre thermodynamique faisant intervenir les principes de *Stabilité*, *Inégalité énergétique* et d'*Irréversibilité* de [Francfort et Marigo, 1998] ainsi qu'un lien entre potentiel de dissipation et pseudo-potentiel de dissipation établi dans [Mielke, 2003]. La loi obtenue étant similaire à l'équation de la chaleur, elle est facilement implémentable dans Abaqus grâce à une UMATHT : la variable d'endommagement est ainsi vue par Abaqus comme la variable de température.

Puisqu'un calcul implicite est envisagé pour laisser le logiciel libre de choisir ses incréments de temps pour le calcul quasi-statique, une régularisation visqueuse faisant intervenir une constante de stabilisation η doit être utilisée. Cette régularisation ne devant pas apporter trop d'énergie au système, la constante η a été dimensionnée via un essai sur une micro-structure de référence. Une deuxième difficulté mise en évidence est celle du choix de la longueur caractéristique introduite dans la définition du pseudo-potentiel de dissipation, en effet cette longueur conditionne la taille de maille à utiliser dans le modèle. Bien qu'un ordre de grandeur de la taille caractéristique soit calculable pour chaque phase de la micro-structure grâce à une relation avec les paramètres matériaux, les valeurs obtenues via cette approche imposeraient un maillage bien trop fin pour pouvoir réaliser des simulations dans un temps raisonnable avec un faible coût en terme de cœurs. Un critère géométrique se basant sur l'épaisseur d'interphase a alors été choisi dans le cadre d'un essai de traction transverse vis-à-vis des fibres. Quant au cas de la déviation de fissure, il a déjà été montré dans la littérature que la longueur caractéristique avait une influence sur la réponse d'une structure sujette à une fissure se dédoublant à l'interface entre deux matériaux. Des essais numériques sur une structure simple ont alors été menés en faisant varier trois paramètres : l'épaisseur d'interphase, la longueur caractéristique associée à celle-ci et la longueur caractéristique des autres phases de la micro-structure. Il ressort de ces investigations :

- que faire varier la longueur caractéristique de l'interphase a une influence mineure sur la contrainte à rupture ;
- que faire varier l'épaisseur d'interphase à longueurs caractéristiques fixées n'a pas d'influence sur la contrainte à rupture ;
- qu'imposer une longueur caractéristique d'interphase égale à son épaisseur permettait de faire varier la contrainte à rupture, celle-ci étant plus grande si l'épaisseur d'interphase est plus petite.

Enfin la problématique du couplage des effets visco-plastiques avec la variable d'endommagement a été abordée. La formulation de la loi d'évolution de l'endommagement a alors été modifiée grâce à la prise en compte d'un potentiel de dissipation visco-plastique et d'une densité d'énergie plastique stockée dont les écritures sont choisies judicieusement. Ainsi un modèle d'équivalence énergétique a été proposé d'une part, un modèle d'équivalence en déformation a été établi d'autre part. Afin de contrôler la validité des modèles un essai de traction expérimental sur fibre Hi-Nicalon-S a servi de référence. L'effet de l'oxydation des fibres sous atmosphère oxygénée a été pris en compte à travers un modèle de Deal-Grove qui contribue à dégrader la rigidité de la fibre. Le modèle d'équivalence en énergie a alors montré une bonne correspondance avec la durée de vie expérimentale de la fibre.

Annexes

Annexe 1

Données géométriques		Valeur	Référence
Rayon de fibre	R_f	$6 \mu m$	[HiNicalonS, nd]
Propriétés mécaniques		Valeur	Référence
Résistance à la rupture	K_c	$1.4 MPa\sqrt{m}$	[Gauthier et Lamon, 2009]
Module de Young	E	$420 GPa$	[HiNicalonS, nd]
Contrainte critique	σ_c	$2.6 GPa$	[Parthasarathy et al., 2016]
Energie critique de libération	G_c	$4.67 J.m^{-2}$	Calculée avec 3.39
Longueur d'échelle	l	$0.03 \mu m$	Calculée avec 3.40
Paramètres de fluage		Valeur	Référence
Paramètre pré-exponentiel	A^+	$1.2192.10^{-13} MPa^{-n^+} h^{-m^+}$	[Robertson et al., 2020]
Exposant en temps	m^+	0.1827	[Robertson et al., 2020]
Exposant en contrainte	n^+	3.9	[Robertson et al., 2020]
Energie d'activation	Q^+	$139 kJ.mol^{-1}$	[Robertson et al., 2020]
Paramètres de Deal-Grove		Valeur	Référence
Paramètre pré-exponentiel	A_0	$4.7.10^{-4} m$	[Hay et al., 2011]
Paramètre pré-exponentiel	B_0	$4.32.10^{-5} m^2 h^{-1}$	[Hay et al., 2011]
Energie d'activation	Q_a	$110 kJ.mol^{-1}$	[Hay et al., 2011]
Energie d'activation	Q_b	$248 kJ.mol^{-1}$	[Hay et al., 2011]

TABLE 1 – Valeurs numériques utilisées pour les applications de ce chapitre.

Conclusion générale

L'utilisation de composites à matrice céramique (CMC) en aéronautique civile est un enjeu actuel important pour le développement de moteurs plus performants. En effet leurs performances spécifiques à haute température remarquables font des CMC de bons candidats pour les parties chaudes des moteurs. L'enjeu pour le groupe Safran est de pouvoir introduire des CMC dans les moteurs civils afin de rester compétitif et de développer son activité. Concernant les composites de type SiC/SiC, de nombreux procédés de fabrication ont été développés. Par exemple en CVI, la matière est apportée sous phase gazeuse menant à des pièces poreuses de bonne qualité ; quant à lui le procédé MI permet une densification complète de la pièce avec très peu de porosité résiduelle. En fait, tous ces procédés mènent à des micro-structures particulières ainsi qu'à des matériaux plus ou moins tolérants aux agressions extérieures qu'elles soient mécaniques ou physico-chimiques.

Objectif initial de la thèse

L'objectif de cette thèse était d'étudier l'influence des architectures microscopiques et mésoscopiques sur le comportement non-linéaire (endommagement, fluage) du matériau. La morphologie seule ne peut expliquer le comportement du matériau compte tenu de l'état de contrainte initial généré par le procédé et des interfaces entre constituants. Il s'agissait alors de développer un modèle suffisamment versatile pour introduire les différents motifs élémentaires (morphologie, comportement, état initial, etc.), prédire les scénarios de dégradation aux échelles micro et méso et donc aider au choix des architectures matériaux. Les travaux initialement envisagés étaient les suivants :

D'un point de vue industriel :

1. étudier l'influence de l'épaisseur d'interphase et des propriétés des constituants sur la déviation de fissure, avec la prise en compte des contraintes résiduelles ;
2. regarder l'impact de l'architecture à l'échelle micro sur le comportement pour envisager des scénarios de dégradation ;
3. propager numériquement des fissures à l'échelle micro et échelle méso sous sollicitations d'origine thermique extérieures en tenant compte des contraintes

résiduelles, du fluage etc...

D'un point de vue scientifique :

1. développer un outil de modélisation versatile qui permet une représentation correcte de la cinématique du problème de mécanique et une prise en compte du comportement des différentes phases du matériau ;
2. définir avec cet outil des motifs élémentaires associés à la fissuration, aux contraintes résiduelles, à la décohésion et au fluage ;
3. classer les scénarios de dégradation et leurs éléments déclencheurs.

Avancées et perspectives vis-à-vis des deux points de vue

Un outil de description de la cinématique (la MS-GFEM) a été implémenté dans le code commercial Abaqus et a fait l'objet d'une publication [Jayet *et al.*, 2021] dans le cadre d'un problème élastique. Cet outil donne la possibilité à un industriel de construire une morphologie de micro-structure complexe à partir de motifs élémentaires piochés dans un *Handbook*, celui-ci devant être suffisamment bien fourni. Le point numéro 1 du point de vue scientifique est partiellement complété puisque le comportement non linéaire n'a pas été intégré aux motifs.

En vue de répondre au deuxième item du point de vue scientifique et afin de proposer des pistes pour aider à la compréhension du CMC SiC/SiC, il a été choisi de mettre de côté le développement de motifs élémentaires et la génération de micro-structures pour réfléchir à une stratégie de modélisation numérique de la rupture fragile du composite. Il sera alors possible d'envisager la création de motifs élémentaires associés à la fissuration. C'est l'approche par champ de phase qui a été privilégiée et implémentée dans Abaqus. Cette méthode est largement décrite dans la littérature et a déjà été utilisée à travers ce code commercial. Toutefois l'ajout d'un artifice numérique a été nécessaire au bon déroulement de la résolution itérative et incrémentale du problème non linéaire de fissuration. Une seule micro-structure numérique issue de l'observation d'une micro-structure réelle a servi de test pour la décohésion fibre-matrice. Il aurait été intéressant de réaliser des essais de dégradation sur d'autres morphologies mais l'accent a surtout été mis sur la possibilité de dévier ou de dédoubler une fissure afin de répondre au point de vue industriel numéro 1. Toutefois la configuration choisie (fissure perpendiculaire à l'interphase) semble poser problème quant à la convergence de l'algorithme, aussi la présence d'une longueur caractéristique vue comme un autre paramètre matériau ajoute de la difficulté à étudier l'influence des paramètres matériau sur la déviation de fissures. En l'état actuel des choses, et sachant que la longueur caractéristique conditionne la taille de maille et est une fonction de la contrainte à rupture, il a été choisi de privilégier la convergence du code au détriment de la valeur réelle de la

contrainte à rupture.

La propagation de fissures sous sollicitations thermiques ou en tenant compte des contraintes résiduelles n'a pas été traitée. L'accent a été mis sur le phénomène de fluage. Il a été montré que la prise en compte des effets visco-plastiques survenant à haute température ne changeait pas l'écriture de la loi d'évolution de l'endommagement, seule la force de pilotage est modifiée. Toutefois 2 modèles d'équivalence ont été mis en évidence (équivalence énergétique et équivalence en déformation) et doivent donc être comparés pour voir lequel correspond le mieux à la réalité. Pour cela il a été choisi de s'appuyer sur les résultats expérimentaux de fluage sur fibre SiC disponibles dans la littérature. Les données ainsi extraites ont permis de réaliser un essai numérique qui avait pour but d'évaluer la durée de vie d'une fibre soumise à une contrainte constante sous haute température. En tenant compte de la création d'un verre de rigidité négligeable en peau de fibre, il a été montré à l'échelle micro que le modèle d'équivalence énergétique donnait une durée de vie proche de celle obtenue par essai.

Pistes en vue de compléter les items des points de vue industriel et scientifique

Le paragraphe qui suit reprend les différents points qui ont servi de cahier des charges pour cette thèse et propose des pistes d'amélioration dans les travaux à venir.

Point de vue industriel :

1. étudier l'influence de l'épaisseur d'interphase et des propriétés des constituants sur la déviation de fissure, avec la prise en compte des contraintes résiduelles :

afin de passer outre la difficulté à dévier la fissure, il serait intéressant de réaliser un essai pour une structure test 3D et d'y intégrer les contraintes résiduelles en tant que conditions initiales.

2. regarder l'impact de l'architecture à l'échelle micro sur le comportement pour envisager des scénarios de dégradation :

pour évaluer pleinement l'impact de l'architecture sur le comportement en fissuration il faut pouvoir mener des essais numériques sur plusieurs microstructures plus grandes assimilables à des VER.

3. propager numériquement des fissures à l'échelle micro et échelle méso sous sollicitations d'origine thermique extérieures en tenant compte des contraintes

résiduelles, du fluage etc... :

une campagne d'essais visant à proposer une structure à l'échelle méso permettant de réaliser de nouveaux essais numériques de fissuration par champ de phase, en y intégrant les sollicitations thermiques extérieures, les contraintes résiduelles et le fluage en 3D répondrait à ce point.

D'un point de vue scientifique :

1. développer un outil de modélisation versatile qui permet une représentation correcte de la cinématique du problème de mécanique et une prise en compte du comportement des différentes phases du matériau :

il reste à étoffer le *Handbook*, le comportement non linéaire pourrait être intégré de manière similaire à la méthode NTFA.

2. définir avec cet outil des motifs élémentaires associés à la fissuration, aux contraintes résiduelles, à la décohésion et au fluage :

un lourd travail visant à construire de nouveaux motifs plus complexes peut être mené grâce à des méthodes d'apprentissage sur micro-structures réelles.

3. classer les scénarios de dégradation et leurs éléments déclencheurs :

pour cela il faut considérer de nombreuses micro-structures différentes et jouer sur les sollicitations extérieures pour des paramètres matériaux bien connus (dont la longueur caractéristique), tout en prenant la bonne contrainte à rupture. Cela imposera toutefois un maillage très fin de la structure.

Bibliographie

- [ACA, 2014] (2014). Aviation in europe : A vision for 2050.
- [IAT, 2016] (2016). L'iata prévoit que le nombre de passagers va doubler d'ici 20 ans. <https://www.iata.org/contentassets/d4b60cffceeb4213bb5993d5fa2f358f/french-pr-2016-10-18-01.pdf>.
- [Agathos *et al.*, 2019] AGATHOS, K., BORDAS, S. P. et CHATZI, E. (2019). Improving the conditioning of XFEM/GFEM for fracture mechanics problems through enrichment quasi-orthogonalization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 346:1051–1073.
- [Alessi *et al.*, 2015] ALESSI, R., MARIGO, J.-J. et VIDOLI, S. (2015). Gradient damage models coupled with plasticity : variational formulation and main properties. *Mechanics of Materials*, 80:351–367.
- [Allix *et al.*, 2011] ALLIX, O., KERFRIDEN, P. et GOSSELET, P. (2011). A relocation technique for the multiscale computation of delamination in composite structures. *arXiv preprint arXiv :1109.4799*.
- [Ambati *et al.*, 2015] AMBATI, M., GERASIMOV, T. et DE LORENZIS, L. (2015). A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 55(2):383–405.
- [Amor *et al.*, 2009] AMOR, H., MARIGO, J.-J. et MAURINI, C. (2009). Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8):1209–1229.
- [Aranson *et al.*, 2000] ARANSON, I., KALATSKY, V. et VINOKUR, V. (2000). Continuum field description of crack propagation. *Physical review letters*, 85(1):118.
- [Areias et Belytschko, 2005] AREIAS, P. M. et BELYTSCHKO, T. (2005). Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 63(5):760–788.
- [Azinpour *et al.*, 2018] AZINPOUR, E., FERREIRA, J., PARENTE, M. P. et de SA, J. C. (2018). A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(1):15.

- [Babuška et Banerjee, 2012] BABUŠKA, I. et BANERJEE, U. (2012). Stable generalized finite element method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201:91–111.
- [Bailey, 1935] BAILEY, R. (1935). The utilization of creep test data in engineering design. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers*, 131(1):131–349.
- [Bansal et al., 2019] BANSAL, M., SINGH, I., PATIL, R., CLAUS, S. et BORDAS, S. (2019). A simple and robust computational homogenization approach for heterogeneous particulate composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 349:45–90.
- [Bažant et al., 1984] BAŽANT, Z. P., BELYTSCHKO, T. B., CHANG, T.-P. et al. (1984). Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(12):1666–1692.
- [Béchet et al., 2005] BÉCHET, É., MINNEBO, H., MOËS, N. et BURGARDT, B. (2005). Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International journal for numerical methods in engineering*, 64(8):1033–1056.
- [Beckie et al., 1993] BECKIE, R., WOOD, E. F. et ALDAMA, A. A. (1993). Mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique. *Water resources research*, 29(9):3145–3157.
- [Belytschko et Black, 1999] BELYTSCHKO, T. et BLACK, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5):601–620.
- [Belytschko et al., 2009] BELYTSCHKO, T., GRACIE, R. et VENTURA, G. (2009). A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4):043001.
- [Belytschko et al., 2003] BELYTSCHKO, T., PARIMI, C., MOËS, N., SUKUMAR, N. et USUI, S. (2003). Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International journal for numerical methods in engineering*, 56(4):609–635.
- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, 12(326):899–904.
- [Bodet et al., 1996] BODET, R., LAMON, J., JIA, N. et TRESSLER, R. E. (1996). Microstructural stability and creep behavior of Si-C-O (Nicalon) fibers in carbon monoxide and argon environments. *Journal of the American Ceramic Society*, 79(10):2673–2686.
- [Boisse, 2014] BOISSE, P. (2014). Textile reinforcements : Architectures, mechanical behavior, and forming. *Ceramic Matrix Composites : Materials, Modeling and Technology*, pages 65–84.

- [Boso *et al.*, 2005] BOSO, D. P., LEFIK, M. et SCHREFLER, B. A. (2005). A multilevel homogenised model for superconducting strand thermomechanics. *Cryogenics*, 45(4):259–271.
- [Bourdin *et al.*, 2000] BOURDIN, B., FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J. (2000). Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4):797–826.
- [Bourdin *et al.*, 2008] BOURDIN, B., FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J. (2008). The variational approach to fracture. *Journal of elasticity*, 91(1-3):5–148.
- [Bourgat *et al.*, 1988] BOURGAT, J.-F., GLOWINSKI, R., LE TALLEC, P. et VIDRASCU, M. (1988). Variational formulation and algorithm for trace operation in domain decomposition calculations.
- [Braides *et al.*, 1998] BRAIDES, A. *et al.* (1998). *Approximation of free-discontinuity problems*. Numéro 1694. Springer Science & Business Media.
- [Brezzi *et al.*, 1992] BREZZI, F., BRISTEAU, M.-O., FRANCA, L. P., MALLET, M. et ROGÉ, G. (1992). A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 96(1):117–129.
- [Cai, 2003] CAI, X. (2003). Overlapping domain decomposition methods. In *Advanced Topics in Computational Partial Differential Equations*, pages 57–95. Springer.
- [Calard et Lamon, 2002] CALARD, V. et LAMON, J. (2002). A probabilistic-statistical approach to the ultimate failure of ceramic-matrix composites—part I : experimental investigation of 2D woven SiC/SiC composites. *Composites Science and Technology*, 62(3):385–393.
- [Carroll *et al.*, 1996] CARROLL, L., STERNITZKE, M. et DERBY, B. (1996). Silicon carbide particle size effects in alumina-based nanocomposites. *Acta Materialia*, 44(11):4543–4552.
- [Chaboche, 1982] CHABOCHE, J. (1982). Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. In *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*, pages 737–760. Springer.
- [Chaboche *et al.*, 2001] CHABOCHE, J., KRUCH, S., MAIRE, J. et POTTIER, T. (2001). Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *International Journal of Plasticity*, 17(4):411–439.
- [Chateau, 2011] CHATEAU, C. (2011). *Analyse expérimentale et modélisation micromécaniques du comportement élastique et de l'endommagement de composites SiC/SiC unidirectionnels*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X.
- [Chen et Fish, 2001] CHEN, W. et FISH, J. (2001). A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *J. Appl. Mech.*, 68(2):153–161.

- [Chessa *et al.*, 2003] CHESSA, J., WANG, H. et BELYTSCHKO, T. (2003). On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7):1015–1038.
- [Chiaruttini *et al.*, 2013] CHIARUTTINI, V., RIOLO, V. et FEYEL, F. (2013). Advanced remeshing techniques for complex 3D crack propagation. *In Icf13*.
- [Christensen et Lo, 1979] CHRISTENSEN, R. et LO, K. (1979). Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4):315–330.
- [Couégnat *et al.*, 2013] COUÉGNAT, G., AYADI, H., SAURAT, C. et ROHMER, E. (2013). Towards realistic geometric modeling of woven fabrics.
- [Daux *et al.*, 2000] DAUX, C., MOËS, N., DOLBOW, J., SUKUMAR, N. et BELYTSCHKO, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 48(12):1741–1760.
- [DiCarlo, 1994] DICARLO, J. A. (1994). Creep limitations of current polycrystalline ceramic fibers. *Composites science and technology*, 51(2):213–222.
- [DiCarlo et Yun, 2005] DICARLO, J. A. et YUN, H.-M. (2005). Non-oxide (silicon carbide) fibers. *In Handbook of ceramic composites*, pages 33–52. Springer.
- [Dorn, 1955] DORN, J. E. (1955). Some fundamental experiments on high temperature creep. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 3(2):85–116.
- [Duarte et Kim, 2008] DUARTE, C. A. et KIM, D.-J. (2008). Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6):487–504.
- [Dumontet, 1986] DUMONTET, H. (1986). Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 20(2):265–286.
- [Dundurs, 1969] DUNDURS, J. (1969). Mathematical theory of dislocations. *American Society of Mechanical Engineers (ASME), New York*, pages 70–115.
- [Dvorak *et al.*, 1994a] DVORAK, G., BAHEI-EL-DIN, Y. et WAFI, A. (1994a). The modeling of inelastic composite materials with the transformation field analysis. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2(3A):571.
- [Dvorak *et al.*, 1994b] DVORAK, G., WAFI, A. et BAHEI-EL-DIN, Y. (1994b). Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite materials. *Computational mechanics*, 14(3):201–228.
- [Dvorak et Benveniste, 1992] DVORAK, G. J. et BENVENISTE, Y. (1992). On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 437(1900):291–310.

- [Dvorak et Rao, 1976] DVORAK, G. J. et RAO, M. M. (1976). Axisymmetric plasticity theory of fibrous composites. *International Journal of Engineering Science*, 14(4):361–373.
- [Dvorak et Zhang, 2001] DVORAK, G. J. et ZHANG, J. (2001). Transformation field analysis of damage evolution in composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11):2517–2541.
- [Espadas-Escalante et al., 2018] ESPADAS-ESCALANTE, J. J., van DIJK, N. et ISAKSSON, P. (2018). A phase-field model for strength and fracture analyses of fiber-reinforced composites. *Composites Science and Technology*.
- [Evans et Dalgleish, 1985] EVANS, A. et DALGLEISH, B. (1985). Influence of shear bands on creep rupture in ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, 68(1):44–48.
- [Farhat et al., 2001] FARHAT, C., LESOINNE, M., LETALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). FETI-DP : a dual-primal unified FETI method—part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(7):1523–1544.
- [Farhat et al., 2000] FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (2000). The second generation feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 184(2-4):333–374.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.
- [Feyel, 1999] FEYEL, F. (1999). Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Computational Materials Science*, 16(1-4):344–354.
- [Feyel, 2003] FEYEL, F. (2003). A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in applied Mechanics and engineering*, 192(28-30):3233–3244.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183(3-4):309–330.
- [Fish, 1992] FISH, J. (1992). The S-version of the finite element method. *Computers & Structures*, 43(3):539–547.
- [Fish et Shek, 2000] FISH, J. et SHEK, K. (2000). Multiscale analysis of composite materials and structures. *Composites Science and Technology*, 60(12-13):2547–2556.
- [Fish et Yu, 2002] FISH, J. et YU, Q. (2002). Computational mechanics of fatigue and life predictions for composite materials and structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(43):4827–4849.

- [Fish *et al.*, 1999] FISH, J., YU, Q. et SHEK, K. (1999). Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenization. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(11):1657–1679.
- [Fleming *et al.*, 1997] FLEMING, M., CHU, Y., MORAN, B. et BELYTSCHKO, T. (1997). Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International journal for numerical methods in engineering*, 40(8):1483–1504.
- [Fortin et Glowinski, 2000] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (2000). *Augmented Lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems*. Elsevier.
- [Francfort et Marigo, 2005] FRANCFORT, G. et MARIGO, J.-J. (2005). Griffith theory of brittle fracture revisited : merits and drawbacks. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2(1):57–64.
- [Francfort et Marigo, 1998] FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1319–1342.
- [Frémond et Nedjar, 1996] FRÉMOND, M. et NEDJAR, B. (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International journal of solids and structures*, 33(8):1083–1103.
- [Friderikos *et al.*, 2017] FRIDERIKOS, O., BARANGER, E. et LADEVÈZE, P. (2017). Multiscale GFEM with superposition of crack enrichment functions driven by finite fracture mechanics : Theory, first computation and open problems. *Composite Structures*, 164:145–157.
- [Fries, 2008] FRIES, T.-P. (2008). A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5):503–532.
- [Fries et Belytschko, 2010] FRIES, T.-P. et BELYTSCHKO, T. (2010). The extended/generalized finite element method : an overview of the method and its applications. *International journal for numerical methods in engineering*, 84(3):253–304.
- [Fritzen et Böhlke, 2010] FRITZEN, F. et BÖHLKE, T. (2010). Three-dimensional finite element implementation of the nonuniform transformation field analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(7):803–829.
- [Fritzen et Böhlke, 2011] FRITZEN, F. et BÖHLKE, T. (2011). Nonuniform transformation field analysis of materials with morphological anisotropy. *Composites Science and Technology*, 71(4):433–442.
- [Gauthier et Lamon, 2009] GAUTHIER, W. et LAMON, J. (2009). Delayed failure of Hi-Nicalon and Hi-Nicalon S multifilament tows and single filaments at intermediate temperatures (500–800° C). *Journal of the American Ceramic Society*, 92(3):702–709.

- [Gélébart et Mondon-Cancel, 2013] GÉLÉBART, L. et MONDON-CANCEL, R. (2013). Non-linear extension of FFT-based methods accelerated by conjugate gradients to evaluate the mechanical behavior of composite materials. *Computational Materials Science*, 77:430–439.
- [Gendre *et al.*, 2009] GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245.
- [Gosselet *et al.*, 2003] GOSSELET, P., REY, C. et RIXEN, D. J. (2003). On the initial estimate of interface forces in FETI methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(25):2749–2764.
- [Griesser, 2012] GRIESSER, A. (2012). *Réalisation de matériaux composites à conductivité thermique accrue pour l'aéronautique*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1.
- [Griffith, 1921] GRIFFITH, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221:163–198.
- [Gu *et al.*, 2015] GU, T., HERVÉ-LUANCO, E., PROUDHON, H., THILLY, L., DUBOIS, J.-B., LECOUTURIER, F., CASTELNAU, O. et FOREST, S. (2015). Modélisation multi-échelle du comportement électrique de nano-composites cub. *Matériaux & Techniques*, 103(3):309.
- [Guillaumat et Lamon, 1996] GUILLAUMAT, L. et LAMON, J. (1996). Probabilistic-statistical simulation of the non-linear mechanical behavior of a woven SiC/SiC composite. *Composites science and technology*, 56(7):803–808.
- [Gupta *et al.*, 2013] GUPTA, V., DUARTE, C. A., BABUŠKA, I. et BANERJEE, U. (2013). A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 266:23–39.
- [Gürses et Miehe, 2009] GÜRSES, E. et MIEHE, C. (2009). A computational framework of three-dimensional configurational-force-driven brittle crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(15-16):1413–1428.
- [Hay *et al.*, 2011] HAY, R., FAIR, G., BOUFFIOUX, R., URBAN, E., MORROW, J., HART, A. et WILSON, M. (2011). Hi-Nicalon™-S SiC fiber oxidation and scale crystallization kinetics. *Journal of the American Ceramic Society*, 94(11):3983–3991.
- [Hay et Chater, 2017] HAY, R. S. et CHATER, R. J. (2017). Oxidation kinetics strength of Hi-Nicalon™-S SiC fiber after oxidation in dry and wet air. *Journal of the American Ceramic Society*, 100(9):4110–4130.
- [Hay et Mogilevsky, 2019] HAY, R. S. et MOGILEVSKY, P. (2019). Model for SiC fiber strength after oxidation in dry and wet air. *Journal of the American Ceramic Society*, 102(1):397–415.

- [Heister *et al.*, 2015] HEISTER, T., WHEELER, M. F. et WICK, T. (2015). A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290:466–495.
- [Herráez *et al.*, 2016] HERRÁEZ, M., GONZÁLEZ, C., LOPES, C., de VILLORIA, R. G., LLORCA, J., VARELA, T. et SÁNCHEZ, J. (2016). Computational micromechanics evaluation of the effect of fibre shape on the transverse strength of unidirectional composites : an approach to virtual materials design. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 91:484–492.
- [Herve, 2002] HERVE, E. (2002). Thermal and thermoelastic behaviour of multiply coated inclusion-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 39(4):1041–1058.
- [Herve et Zaoui, 1993] HERVE, E. et ZAOUI, A. (1993). N-layered inclusion-based micromechanical modelling. *International journal of engineering science*, 31(1):1–10.
- [Hervé-Luanco et Joannès, 2016] HERVÉ-LUANCO, E. et JOANNÈS, S. (2016). Multiscale modelling of transport phenomena for materials with n-layered embedded fibres. part i : Analytical and numerical-based approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 97:625–636.
- [HiNicalonS, nd] HINICALONS (n.d.). <http://www.coicceramics.com/pdfs/HiNicalon-Type-S.pdf>.
- [Hofacker et Miehe, 2013] HOFACKER, M. et MIEHE, C. (2013). A phase field model of dynamic fracture : Robust field updates for the analysis of complex crack patterns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(3):276–301.
- [Hughes, 1995] HUGHES, T. J. (1995). Multiscale phenomena : Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 127(1-4):387–401.
- [Hughes *et al.*, 1998] HUGHES, T. J., FEIJÓO, G. R., MAZZEI, L. et QUINCY, J.-B. (1998). The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 166(1-2):3–24.
- [Irwin, 1957] IRWIN, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. appl. Mech.*
- [Jadaan, 1998] JADAAN, O. M. (1998). Deterministic multiaxial creep and creep rupture enhancements for cares/creep integrated design code.
- [Jayet *et al.*, 2021] JAYET, T.-D., BARANGER, E., COUÉGNAT, G. et DENNEULIN, S. (2021). Feasibility of a weakly intrusive generalized finite element method implementation in a commercial code : Application to ceramic matrix composite micro-structures. *Computers & Structures*, 242:106374.

- [Jirásek, 2007] JIRÁSEK, M. (2007). Mathematical analysis of strain localization. *Revue européenne de génie civil*, 11(7-8):977–991.
- [Jirásek et Desmorat, 2019] JIRÁSEK, M. et DESMORAT, R. (2019). Localization analysis of nonlocal models with damage-dependent nonlocal interaction. *International Journal of Solids and Structures*, 174:1–17.
- [Kachanov, 1958] KACHANOV, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions, *izy akad. Nank SSR Otd Tech Nauk*, 8:26–31.
- [Katoh *et al.*, 2014] KATOH, Y., OZAWA, K., SHIH, C., NOZAWA, T., SHINAVSKI, R. J., HASEGAWA, A. et SNEAD, L. L. (2014). Continuous SiC fiber, CVI SiC matrix composites for nuclear applications : Properties and irradiation effects. *Journal of Nuclear Materials*, 448(1-3):448–476.
- [Klawonn et Widlund, 2001] KLAWONN, A. et WIDLUND, O. (2001). FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : connections and new results. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 54(1):57–90.
- [Ladevèze, 1983] LADEVÈZE, P. (1983). *Sur une théorie de l'endommagement anisotrope*. Laboratoire de Mécanique et Technologie.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 300(2):41–44.
- [Ladevèze, 1991] LADEVÈZE, P. (1991). New advances in the large time increment method. *New advances in computational structural mechanics*. Elsevier, Amsterdam, pages 3–21.
- [Ladevèze et Lubineau, 2001] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2001). On a damage mesomodel for laminates : micro–meso relationships, possibilities and limits. *Composites Science and Technology*, 61(15):2149–2158.
- [Lamon, 2007] LAMON, J. (2007). Mechanics of brittle fracture and damage : statistical-probabilistic approaches. *Editions Hermès-Lavoisier, Paris, France*.
- [Le Tallec *et al.*, 1991] LE TALLEC, P., DE ROECK, Y.-H. et VIDRASCU, M. (1991). Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 34(1):93–117.
- [Lee, 2014] LEE, K. N. (2014). Environmental barrier coatings for SiCf/SiC. *Ceramic matrix composites : materials, modeling and technology*, pages 430–451.
- [Lekhnitskii, 1968] LEKHNITSKII, S. G. (1968). Anisotropic plates. Rapport technique, Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh.
- [Lemaitre et Chaboche, 1994] LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.-L. (1994). *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press.
- [Leturcq *et al.*, 2019] LETURCQ, B., PASCAL, S. et LE TALLEC, P. (2019). Réduction de modèle viscoplastique par application de la méthode NTFA à un

- VER de structure. In *CSMA 2019-14^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*.
- [Liu *et al.*, 2016] LIU, G., LI, Q., MSEKH, M. A. et ZUO, Z. (2016). Abaqus implementation of monolithic and staggered schemes for quasi-static and dynamic fracture phase-field model. *Computational Materials Science*, 121:35–47.
- [Lv *et al.*, 2019] LV, X., QI, Z., JIANG, Z., ZHOU, Y., ZHAO, W. et JIAO, J. (2019). The microstructure and mechanical properties of silicon carbide fibers with boron nitride interphase. In *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, volume 678, page 012061. IOP Publishing.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(3):233–241.
- [Marconi *et al.*, 2019] MARCONI, F., BARANGER, E. et DESMORAT, R. (2019). Non intrusive implementation of a gradient formulation based on the nonlocal eikonal approach.
- [Martin *et al.*, 1998] MARTIN, E., PETERS, P., LEGUILLON, D. et QUENISSET, J. (1998). Conditions for matrix crack deflection at an interface in ceramic matrix composites. *Materials Science and Engineering : A*, 250(2):291–302.
- [Mazars, 2018] MAZARS, V. (2018). *Étude des endommagements sur CMC par une approche de modélisation micro-méso alimentée par des essais in-situ*. Thèse de doctorat.
- [McVetty, 1943] MCVETTY, P. (1943). *Creep of metals at elevated temperatures-the hyperbolic sine relation between stress and creep rate*. na.
- [Melenk et Babuška, 1996] MELENK, J. M. et BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4):289–314.
- [Menk et Bordas, 2011] MENK, A. et BORDAS, S. P. (2011). A robust preconditioning technique for the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(13):1609–1632.
- [Michel et Suquet, 2003] MICHEL, J.-C. et SUQUET, P. (2003). Nonuniform transformation field analysis. *International journal of solids and structures*, 40(25): 6937–6955.
- [Michel et Suquet, 2004] MICHEL, J.-C. et SUQUET, P. (2004). Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(48-51):5477–5502.
- [Miehe *et al.*, 2015a] MIEHE, C., HOFACKER, M., SCHÄNZEL, L.-M. et ALDAKHEEL, F. (2015a). Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part II. Coupled brittle-to-ductile failure criteria and crack propagation in thermo-elastic-plastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294:486–522.

- [Miehe *et al.*, 2010a] MIEHE, C., HOFACKER, M. et WELSCHINGER, F. (2010a). A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48):2765–2778.
- [Miehe *et al.*, 2015b] MIEHE, C., SCHAENZEL, L.-M. et ULMER, H. (2015b). Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part I. Balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294:449–485.
- [Miehe *et al.*, 2010b] MIEHE, C., WELSCHINGER, F. et HOFACKER, M. (2010b). Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10):1273–1311.
- [Mielke, 2002] MIELKE, A. (2002). Finite elastoplasticity Lie groups and geodesics on $SL(d)$. In *Geometry, mechanics, and dynamics*, pages 61–90. Springer.
- [Mielke, 2003] MIELKE, A. (2003). Energetic formulation of multiplicative elastoplasticity using dissipation distances. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15(4):351–382.
- [Mielke et Roubíček, 2006] MIELKE, A. et ROUBÍČEK, T. (2006). Rate-independent damage processes in nonlinear elasticity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(02):177–209.
- [Ming-Yuan et Hutchinson, 1989] MING-YUAN, H. et HUTCHINSON, J. W. (1989). Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *International journal of solids and structures*, 25(9):1053–1067.
- [Moës *et al.*, 2003] MOËS, N., CLOIREC, M., CARTRAUD, P. et REMACLE, J.-F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(28-30):3163–3177.
- [Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1):131–150.
- [Molnár et Gravouil, 2017] MOLNÁR, G. et GRAVOUIL, A. (2017). 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, 130:27–38.
- [Moulinec et Suquet, 1998] MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1998). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157(1-2):69–94.
- [Msekh *et al.*, 2015] MSEKH, M. A., SARGADO, J. M., JAMSHIDIAN, M., AREIAS, P. M. et RABCZUK, T. (2015). Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture. *Computational Materials Science*, 96:472–484.

- [Naslain *et al.*, 2010] NASLAIN, R. R., PAILLER, R. J.-F. et LAMON, J. L. (2010). Single- and multilayered interphases in SiC/SiC composites exposed to severe environmental conditions : an overview. *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 7(3):263–275.
- [Negrello, 2017] NEGRELLO, C. (2017). *Méthodes fortement parallèles pour la simulation numérique en mécanique non linéaire des structures*. Thèse de doctorat.
- [Nemat-Nasser, 1986] NEMAT-NASSER, S. (1986). Overall stresses and strains in solids with microstructure. In *Modelling Small Deformations of Polycrystals*, pages 41–64. Springer.
- [Nguyen *et al.*, 2016] NGUYEN, T. T., YVONNET, J., BORNERT, M., CHATEAU, C., SAB, K., ROMANI, R. et LE ROY, R. (2016). On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation. *International Journal of Fracture*, 197(2):213–226.
- [Nguyen *et al.*, 2019] NGUYEN, T.-T., YVONNET, J., WALDMANN, D. et HE, Q.-C. (2019). Phase field modeling of interfacial damage in heterogeneous media with stiff and soft interphases. *Engineering Fracture Mechanics*, 218:106574.
- [Nguyen *et al.*, 2008] NGUYEN, V. P., RABCZUK, T., BORDAS, S. et DUFLLOT, M. (2008). Meshless methods : a review and computer implementation aspects. *Mathematics and computers in simulation*, 79(3):763–813.
- [Norton, 1929] NORTON, F. H. (1929). *The creep of steel at high temperatures*. Numéro 35. McGraw-Hill Book Company, Incorporated.
- [Oumaziz, 2017] OUMAZIZ, P. (2017). *Une méthode de décomposition de domaine mixte non-intrusive pour le calcul parallèle d'assemblages*. Thèse de doctorat, Paris Saclay.
- [Paggi *et al.*, 2018] PAGGI, M., CORRADO, M. et REINOSO, J. (2018). Fracture of solar-grade anisotropic polycrystalline silicon : A combined phase field-cohesive zone model approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330:123–148.
- [Parthasarathy *et al.*, 2016] PARTHASARATHY, T. A., PRZYBYLA, C. P., HAY, R. S. et CINIBULK, M. K. (2016). Modeling environmental degradation of SiC-based fibers. *Journal of the American Ceramic Society*, 99(5):1725–1734.
- [Peerlings *et al.*, 1996] PEERLINGS, R. H., de BORST, R., BREKELMANS, W. M. et DE VREE, J. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for numerical methods in engineering*, 39(19):3391–3403.
- [Pham et Marigo, 2010a] PHAM, K. et MARIGO, J.-J. (2010a). Approche variationnelle de l'endommagement : I. Les concepts fondamentaux. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4):191–198.
- [Pham et Marigo, 2010b] PHAM, K. et MARIGO, J.-J. (2010b). Approche variationnelle de l'endommagement : II. Les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4):199–206.

- [Pineau *et al.*, 2011] PINEAU, P., COUÉGNAT, G. et LAMON, J. (2011). Virtual testing applied to transverse multiple cracking of tows in woven ceramic composites. *Mechanics Research Communications*, 38(8):579–585.
- [Pompidou et Lamon, 2005] POMPIDOU, S. et LAMON, J. (2005). A crack deflection criterion in CMCs and multilayers. *COMPTES RENDUS MECANIQUE*, 333(5): 405–411.
- [Pryce et Smith, 1992] PRYCE, A. et SMITH, P. (1992). Behaviour of unidirectional and crossply ceramic matrix composites under quasi-static tensile loading. *Journal of materials science*, 27(10):2695–2704.
- [Przybyla *et al.*, 2015] PRZYBYLA, C. P., BRICKER, S., SIMMONS, J., HARDIE, R., UCHIC, M., KRISHNAMURTHY, R., MOGILEVSKY, P., BRAGINSKY, M., WHITLOW, T., PARTHASARATHY, T. *et al.* (2015). Microstructure-sensitive enviro-mechanical response characterization and simulation in SiC/SiC ceramic matrix composites.
- [Quemard *et al.*, 2007] QUEMARD, L., REBILLAT, F., GUETTE, A., TAWIL, H. et LOUCHET-POUILLERIE, C. (2007). Self-healing mechanisms of a SiC fiber reinforced multi-layered ceramic matrix composite in high pressure steam environments. *Journal of the European Ceramic Society*, 27(4):2085–2094.
- [Rebillat *et al.*, 2000] REBILLAT, F., LAMON, J. et GUETTE, A. (2000). The concept of a strong interface applied to SiC/SiC composites with a BN interphase. *Acta materialia*, 48(18-19):4609–4618.
- [Reinoso *et al.*, 2017] REINOSO, J., PAGGI, M. et LINDER, C. (2017). Phase field modeling of brittle fracture for enhanced assumed strain shells at large deformations : formulation and finite element implementation. *Computational Mechanics*, 59(6):981–1001.
- [Renard et Marmonier, 1987] RENARD, J. et MARMONIER, M. (1987). Etude de l'initiation de l'endommagement dans la matrice d'un matériau composite par une méthode d'homogénéisation. *La Recherche aérospatiale*, (6):43–51.
- [Richardson *et al.*, 2011] RICHARDSON, C. L., HEGEMANN, J., SIFAKIS, E., HELLRUNG, J. et TERAN, J. M. (2011). An XFEM method for modeling geometrically elaborate crack propagation in brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(10):1042–1065.
- [Robertson *et al.*, 2020] ROBERTSON, S. J., RUGGLES-WRENN, M. B., HAY, R. S., SHILLIG, T., MITCHELL, R., KROEGER, B. et GUMUCIO, L. (2020). Static fatigue of Hi-Nicalon™-S fiber at elevated temperature in air, steam, and silicic acid-saturated steam. *Journal of the American Ceramic Society*, 103(2):1358–1371.
- [Ruggles-Wrenn et Pope, 2014] RUGGLES-WRENN, M. et POPE, M. (2014). Creep behavior in interlaminar shear of a SiC/SiC ceramic composite with a self-healing matrix. *Applied Composite Materials*, 21(1):213–225.

- [Saffré *et al.*, 1995] SAFFRÉ, P., BERGERET, A., LIGIER, J.-L. et PASTOR, J. (1995). Un modèle d'homogénéisation autocohérent à quatre phases appliqué aux composites biphasiques.
- [Sanchez-Palencia, 1983] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1983). Homogenization method for the study of composite media. *In Asymptotic Analysis II*—, pages 192–214. Springer.
- [Sauder et Lamon, 2007] SAUDER, C. et LAMON, J. (2007). Tensile Creep Behavior of SiC-Based Fibers With a Low Oxygen Content. *Journal Of The American Ceramic Society*, 90(4):1146–1156.
- [Schwarz, 1870] SCHWARZ, H. A. (1870). *Ueber einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren*. Zürcher u. Furrer.
- [Simo et Ju, 1987] SIMO, J. C. et JU, J. (1987). Strain-and stress-based continuum damage models—I. Formulation. *International journal of solids and structures*, 23(7):821–840.
- [Simone *et al.*, 2003] SIMONE, A., WELLS, G. N. et SLUYS, L. J. (2003). From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(41-42):4581–4607.
- [Singh *et al.*, 2016] SINGH, N., VERHOESEL, C., DE BORST, R. et VAN BRUMMELEN, E. (2016). A fracture-controlled path-following technique for phase-field modeling of brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, 113:14–29.
- [Spriet, 2014] SPRIET, P. (2014). CMC applications to gas turbines. *Ceramic Matrix Composites : Materials, Modeling and Technology*, pages 591–608.
- [Strouboulis *et al.*, 1998] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I. et COPPS, K. (1998). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 181(1):43–69.
- [Strouboulis *et al.*, 2001] STROUBOULIS, T., COPPS, K. et BABUŠKA, I. (2001). The generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(32):4081–4193.
- [Strouboulis *et al.*, 2003] STROUBOULIS, T., ZHANG, L. et BABUŠKA, I. (2003). Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3109–3161.
- [Sukumar *et al.*, 2000] SUKUMAR, N., MOËS, N., MORAN, B. et BELYTSCHKO, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International journal for numerical methods in engineering*, 48(11):1549–1570.
- [Toury *et al.*, 2002] TOURY, B., MIELE, P., CORNU, D., VINCENT, H. et BOUIX, J. (2002). Boron nitride fibers prepared from symmetric and asymmetric alkylaminoborazines. *Advanced Functional Materials*, 12(3):228–234.

- [Tranquart, 2012] TRANQUART, B. (2012). *Vers un matériau virtuel pour l'optimisation qualitative d'une nouvelle famille de CMCs*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan.
- [Tranquart *et al.*, 2012] TRANQUART, B., LADEVÈZE, P., BARANGER, E. et MOURRET, A. (2012). A computational approach for handling complex composite microstructures. *Composite Structures*, 94(6):2097–2109.
- [Ünal et Bansal, 2002a] ÜNAL, Ö. et BANSAL, N. P. (2002a). In-plane and interlaminar shear strength of a unidirectional Hi-Nicalon fiber-reinforced celsian matrix composite. *Ceramics international*, 28(5):527–540.
- [Ünal et Bansal, 2002b] ÜNAL, Ö. et BANSAL, N. P. (2002b). In-plane and interlaminar shear strength of a unidirectional Hi-Nicalon fiber-reinforced celsian matrix composite. *Ceramics international*, 28(5):527–540.
- [Ventura *et al.*, 2009] VENTURA, G., GRACIE, R. et BELYTSCHKO, T. (2009). Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 77(1):1–29.
- [Wang *et al.*, 2015] WANG, X., YANG, Z., YATES, J., JIVKOV, A. et ZHANG, C. (2015). Monte carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores. *Construction and Building Materials*, 75:35–45.
- [Wells *et al.*, 2002] WELLS, G. N., SLUYS, L. J. et de BORST, R. (2002). Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(5):1235–1256.
- [Williams, 1957] WILLIAMS, M. (1957). The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech*, 24:109–14.
- [Wu, 2018] WU, J.-Y. (2018). Robust numerical implementation of non-standard phase-field damage models for failure in solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Wu *et al.*, 2018] WU, J.-Y., NGUYEN, V. P., NGUYEN, C. T., SUTULA, D., BORDAS, S. et SINAIE, S. (2018). Phase field modeling of fracture. *Advances in Applied Mechancis : Multi-scale Theory and Computation*, 52.
- [Yamada *et al.*, 2000] YAMADA, R., TAGUCHI, T. et IGAWA, N. (2000). Mechanical and thermal properties of 2D and 3D SiC/SiC composites. *Journal of nuclear materials*, 283:574–578.
- [Yoon *et al.*, 2000] YOON, K. J., WIEDERHORN, S. M. et LUECKE, W. E. (2000). Comparison of tensile and compressive creep behavior in silicon nitride. *Journal of the American Ceramic Society*, 83(8):2017–2022.
- [Youngblood *et al.*, 2001] YOUNGBLOOD, G. E., LEWINSOHN, C., JONES, R. H. et KOHYAMA, A. (2001). Tensile strength and fracture surface characterization of hi-nicalon™ sic fibers. *Journal of nuclear materials*, 289(1-2):1–9.

- [Zhang *et al.*, 2007] ZHANG, H., ZHANG, S., BI, J. Y. et SCHREFLER, B. (2007). Thermo-mechanical analysis of periodic multiphase materials by a multiscale asymptotic homogenization approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(1):87–113.
- [Zhang *et al.*, 2020] ZHANG, P., FENG, Y., BUI, T. Q., HU, X. et YAO, W. (2020). Modelling distinct failure mechanisms in composite materials by a combined phase field method. *Composite Structures*, 232:111551.
- [Zhang *et al.*, 2017] ZHANG, X., VIGNES, C., SLOAN, S. W. et SHENG, D. (2017). Numerical evaluation of the phase-field model for brittle fracture with emphasis on the length scale. *Computational Mechanics*, 59(5):737–752.
- [Zok, 2016] ZOK, F. W. (2016). Ceramic-matrix composites enable revolutionary gains in turbine engine efficiency. *Am Ceram Soc Bull*, 95(5):22–8.