



Internal field and external field of wind instruments

Jean Kergomard

► To cite this version:

Jean Kergomard. Internal field and external field of wind instruments. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1981. Français. NNT: . tel-03238419

HAL Id: tel-03238419

<https://theses.hal.science/tel-03238419>

Submitted on 27 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques
présentée
à l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 -

par M. Jean KERGOMARD
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

Sujet de la thèse: CHAMP INTERNE ET CHAMP EXTERNE DES INSTRUMENTS A VENT

soutenue le 2 septembre 1981

devant le jury composé de::

MM. A. BERGASSOLI
J.J. BERNARD
J. BOSQUET
M. JESSEL
E. LEIPP
R. SIESTRUNCK

REMERCIEMENTS

Il me semble naturel de remercier d'abord les membres du jury, qui ont consacré beaucoup de temps à lire ce texte en détail. J'ai essayé de tenir compte au mieux de leurs critiques et suggestions, et j'espère de ce point de vue ne pas les avoir déçus; leurs observations, concernant tant la forme que le fond, me seront d'ailleurs largement utiles dans l'avenir.

De surcroît, leur aide ne date pas d'hier: je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur Bernard d'avoir dirigé mes recherches depuis le début, ainsi qu'à Monsieur M. Jessel de les avoir "parrainées". N'ayant pas reçu de formation spécifique en acoustique, je ne peux oublier que Monsieur Bergassoli m'a permis de combler de nombreuses lacunes en ce domaine, comme plus récemment, Monsieur le Professeur J. Bosquet.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Siestrunk et Monsieur Leipp, qui dirigent le laboratoire où j'ai pu mener à bien ce travail. Depuis huit ans, leur aide m'a été très précieuse; bien que mon orientation de recherche se soit révélée davantage physique et théorique que celle du laboratoire, je suis certain que la "doctrine" de ce dernier en matière d'acoustique musicale et de perception laissera des traces profondes dans ma façon d'aborder les problèmes scientifiques, grâce aux discussions avec Monsieur Leipp et Michèle Castellengo.

J'en viens à présent aux moyens concrets de mon travail: en plus du C.N.R.S. et du laboratoire d'acoustique de l'Université Pierre et Marie Curie, je dois mentionner spécialement l'Institut de Recherche et de Coordination Acoustique Musique (I.R.C.A.M.), dirigé par Monsieur Pierre Boulez: j'ai eu en effet accès aux installations de mesures acoustiques (chambre anéchoïque et appareils de mesure) et à l'ordinateur PDP10. J'ai ainsi bénéficié de conditions idéales pour effectuer expériences et calculs numériques, et surtout confronter leurs résultats, à propos de l'impédance

d'entrée des instruments à vent.

Mais, seul, je n'aurais pu mener à bien cette partie du travail: elle est le résultat d'une collaboration à la fois riche et étroite, avec René Caussé, Ingénieur à l'I.R.C.A.M., et Xavier Lurton, qui a soutenu en 1979 sa thèse de 3^e cycle sur les instruments à embouchure, à l'Université du Mans. En outre l'idée de départ de notre montage expérimental est de Monsieur A.H. Benade, de la Case Western Reserve University de Cleveland; nous devons le remercier, de même que plusieurs chercheurs, ingénieurs et techniciens de l'I.R.C.A.M. qui nous ont aidé: Michel Ducoureau pour la réalisation de l'expérience, Raymond Bara, Xavier Rodet et Jean-Louis Richier pour l'utilisation de l'ordinateur.

Je voudrais exprimer aussi ma gratitude à tous ceux qui m'ont apporté des idées, des suggestions pour l'orientation de ce travail et sa rédaction: j'ai eu en effet la chance de pouvoir discuter d'acoustique physique, et en particulier du problème de l'amortissement avec Michel Bruneau, de l'Université du Mans; de plusieurs sujets importants pour mon travail (champ d'interférences, facteur de qualité,...) avec Monsieur le Professeur Péro et son équipe de l'Université d'Orsay; de la rédaction du chapitre IV sur les lignes finies avec Monsieur le Professeur Bouix, B. Poirée, A. Chaigne, P. Gagnol. Je n'oublie pas non plus Messieurs les Professeurs Fletcher, de l'Université de Nouvelle Angleterre (Australie) et Ando, de l'Université de Kobé (Japon), dont les correspondances m'ont aidé à propos du fonctionnement des flûtes et du rayonnement.

Enfin, ce qui n'est pas le moins important, ma thèse n'a pu être dactylographiée et tirée que grâce au dévouement de Mademoiselle Brulé, à l'Université du Mans, de Madame Girardey et Monsieur Segouat, à l'Université Pierre et Marie Curie: je les en remercie vivement.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

1. Définition du sujet. Généralités sur les instruments à vent.	1
2. Recherche sur la physique des instruments à vent : rappel historique sommaire.	2
3. Position de notre travail par rapport aux recherches récentes.	5
4. Connaissances sur la physique des instruments à vent et facture instrumentale.	6
5. Méthodes d'investigation. Plan de la thèse.	8
<u>CHAPITRE I - CADRE THEORIQUE DE L'ETUDE</u>	17
1. <u>Introduction</u>	17
2. <u>Equations de propagation des ondes acoustiques avec amortissement</u>	19
2.1. Les équations de l'acoustique linéaire avec amortissement visco-thermique	19
2.2. Les équations de propagation pour la pression, la température et la vitesse	20
3. <u>Ondes planes dans un tuyau cylindrique avec amortissement visco-thermique aux parois : constante de propagation et impédance itérative</u>	23
3.1. La solution complète classique pour la constante de propagation	23
3.2. La solution complète pour l'impédance itérative	24
3.3. Les solutions approchées de l'équation de Kirchhoff	25
3.4. La solution réduite	26
3.4.1. Calcul de la solution réduite	26
3.4.2. Etude des conditions de validité de la solution	28

3.4.3. Signification physique de la solution réduite	32
3.5. La solution pour les tuyaux larges	34
3.6. Les modes supérieurs	36
4. <u>Discontinuité dans un tuyau cylindrique</u>	38
4.1. Les discontinuités de section	38
4.1.1. Théorie unidimensionnelle	38
4.1.2. Les corrections à la théorie unidimensionnelle : utilisation de la théorie modale	39
4.2. Dérivation	44
4.2.1. Théorie unidimensionnelle	44
4.2.2. Corrections à la théorie unidimensionnelle pour les trous latéraux	45
4.3. Validité de la théorie unidimensionnelle	46
5. <u>L'équation des pavillons</u>	47
5.1. L'équation des pavillons avec amortissement	47
5.1.1. L'équation pour l'admittance	47
5.1.2. L'équation de l'énergie	48
5.2. Solutions exactes et solutions approchées de l'équation des pavillons	50
5.2.1. L'équation des pavillons sans amortissement	50
5.2.2. L'équation des pavillons avec amortissement	53
5.3. Discussion de la validité de l'équation des pavillons	55
5.3.1. Ondes planes et ondes sphériques dans un cône	55
5.3.2. Ondes planes et ondes sphériques dans un pavillon	56
5.3.3. Discussion sur la réflexion des ondes dans un pavillon	59
5.4. Discontinuités dans un pavillon	61
5.4.1. Discontinuités de section	61
5.4.2. Dérivation	62
6. <u>Le rayonnement</u>	64
6.1. L'impédance de rayonnement d'un tuyau cylindrique	64
6.2. Rayonnement d'un tuyau cylindrique	
6.3. Rayonnement d'un pavillon	71

7. <u>Tuyau muni de trous latéraux (utilisation de la théorie des filtres)</u>	73
7.1. Tuyau cylindrique	73
7.2. Tuyau conique	76
8. <u>Conclusion : bilan des hypothèses faites</u>	78
 <u>CHAPITRE II - CHAMP INTERNE DES INSTRUMENTS A VENT</u>	 81
1. <u>L'approximation des ondes stationnaires : fréquences de résonance</u>	82
1.1. Introduction	82
1.2. Définitions	83
1.3. Tuyaux de formes simples et principales corrections.	85
1.4. Etudes d'instruments complets : trous latéraux, pavillons, petites modifications	85
2. <u>Ondes quasi-stationnaires dans les instruments à vent</u>	88
2.1. Introduction	88
2.2. <u>Ondes quasi-stationnaires dans un pavillon sans amortissement</u>	90
2.2.1. Equation de l'admittance	90
2.2.2. Méthode approchée de calcul de $Re(Y)$ et $Im(Y)$	94
2.2.3. Les extremums du module de l'admittance	96
2.2.4. L'exemple du tronc de cône	98
2.2.5. Champ de pression et de vitesse dans un pavillon sans amortissement	101
2.3. <u>Le cylindre avec pertes visco-thermiques aux parois</u>	104
2.3.1. Système exact à résoudre	104
2.3.2. Simplification du système (S1) dans le cas d'ondes quasi-stationnaires	105
2.3.3. Résolution du système (S4)	106
2.3.4. "Courbe des pics" de Z d'un tuyau étroit : le problème du 2d ordre	106
2.3.5. Courbe des creux d'impédance d'un tuyau étroit	108
2.3.6. Le tuyau à cheminée axiale	109
2.4. <u>Ondes quasi-stationnaires dans un pavillon avec amortissement</u>	112

2.4.1. Méthode approchée de résolution	113
2.4.2. Approximation pour les hautes fréquences	114
2.4.3. L'exemple du pavillon exponentiel	115
2.4.5. Champ de pression et de vitesse dans un pavillon avec amortissement	122
2.4.6. Conclusions	134
2.5. <u>Ondes quasi-stationnaires dans une ligne de transmission</u>	136
2.6. <u>Tuyau muni de trous latéraux</u>	138
2.6.1. Position du problème.- Hypothèses	138
2.6.2. Détermination de la fréquence de coupure	140
2.6.3. Fréquences inférieures à la fréquence de coupure (première bande d'arrêt)	141
2.6.4. Fréquences supérieures à la fréquence de coupure (première bande passante)	148
2.6.5. Fréquences aiguës (deuxième bande d'arrêt et deuxième bande passante)	155
2.6.6. Conclusion	155
3. <u>Mesure de l'impédance d'entrée</u>	157
3.1. <u>Présentation de la méthode expérimentale</u>	157
3.1.1. Introduction	157
3.1.2. L'utilisation d'un tube capillaire : conditions idéales à remplir	158
3.1.3. Le problème de la dynamique	162
3.1.4. Choix du test	163
3.1.5. Description de l'ensemble de l'expérience	164
3.2. <u>Les constantes de l'air et leur précision</u>	165
3.2.1. La vitesse du son dans l'air libre	166
3.2.2. La masse volumique	166
3.2.3. L'impédance caractéristique de l'air	166
3.2.4. Le coefficient de viscosité	167
3.2.5. Le coefficient de conduction thermique	167
3.2.6. L'amortissement visco-thermique aux parois d'un tuyau cylindrique	168
3.3. <u>Problèmes posés par la méthode expérimentale</u>	169
3.3.1. Problèmes liés à l'excitateur	169

3.3.2. La dynamique	175
3.3.3. Fiabilité de l'appareillage	176
3.3.4. Problèmes particuliers	176
3.3.5. Le problème du tracé des courbes expérimentales	178
3.3.6. Les problèmes fondamentaux dus à l'utilisation d'un tube capillaire	180
3.3.7. Conclusion	182
3.4. Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux	183
3.4.1. Le tuyau cylindrique	183
3.4.2. Le tuyau à cheminée axiale	184
3.4.3. Le cône	193
3.4.4. Les pavillons	194
3.5. Conclusion	200
CHAPITRE III - CHAMP EXTERNE DES INSTRUMENTS A VENT	205
1. Généralités sur le champ externe - Etudes antérieures	206
1.1. Le paradoxe des instruments à vent	206
1.2. Le champ externe proche : directionnalité et champ d'interférences	207
1.3. Le champ externe lointain dans une salle	208
2. Relation entre le champ externe et le champ interne	210
2.1. Tuyau émettant par une seule source	210
2.2. Tuyau émettant par plusieurs sources	213
2.3. Discussion de la notion de "fonction de transformation"	213
2.4. Calcul de la fonction de transformation pour un instrument à anche	215
3. Rayonnement d'un tuyau percé de trous latéraux	217
3.1. Tuyau cylindrique percé d'un trou	217
3.1.1. Rapport d'amplitude des sources	217
3.1.2. Différences de phase des sources	220
3.2. Tuyau percé d'un réseau régulier de trous latéraux : étude des sources	221
3.2.1. Fréquences inférieures à la fréquence de coupure	222

3.2.2. Fréquences supérieures à la fréquence de coupure	227
3.3. Tuyau percé d'un réseau de trous latéraux : mélange des sons rayonnés par les différentes sources	233
3.3.1. Fréquences inférieures à la fréquence de coupure	236
3.3.2. Fréquences supérieures à la fréquence de coupure	238
4. Rayonnement d'un tuyau cylindrique d'embouchure de flûte	238
4.1. Fonctionnement simplifié (modèle linéaire) d'un système lame d'air-biseau couplé à un tuyau : condition de résonance	238
4.2. Comparaison des deux sources d'un tuyau cylindrique à bouche	243
4.2.1. Amplitude des deux sources	243
4.2.2. Phase des deux sources	244
5. Problèmes posés par la comparaison entre théorie et expérience	246
5.1. Tentative de comparaison expérience-théorie	246
5.2. Quelques remarques sur les différentes méthodes expérimentales	248
CHAPITRE IV - PROPAGATION DES ONDES DANS LES LIGNES FINIES :	
Discussion des notions d'onde évanescente et de fréquence de coupure.	253
1. Introduction	254
1.1. Position du problème	254
1.2. Les études antérieures sur ce sujet	256
1.3. Plan de l'étude	258
2. Description d'une ligne constituée de l'association de quadripôles en série : notations utilisées.	260
2.1. Relation matricielle	260
2.2. Relation homographique et impédance itérative	262
2.3. Relation linéaire	263
2.4. Quadripôle symétrique	264
2.5. Les lignes continues à caractéristiques constantes	265
2.6. Cas où $BC - AD \neq 1$	266
2.7. Equivalence ligne infinie - ligne débouchant sur son impédance itérative	267

2.7.1. Si φ n'est pas réel	
2.7.1. Si φ est réel	
3. Les lignes sans pertes	268
3.1. Condition imposées à une ligne sans pertes	268
3.2. Le filtre idéal : ligne sans pertes débouchant sur son impédance itérative	269
3.3.1. Difficulté de la généralisation	271
3.3.2. Les variations dans l'espace de l'amplitude des ondes	272
3.3.3. Le facteur de qualité	273
3.3.4. Etude de la fonction $e(x) = L^2 p ^2 + M^2 u ^2$	276
4. Etude de l'affaiblissement par une ligne - Discussion de la notion de fréquence de coupure	282
4.1. Position du problème	282
4.2. Le cas idéal	282
4.3. Difficulté de la généralisation aux cas pratiques	283
4.4. Etude de la fonction $E(\alpha)$ dans la bande d'arrêt idéale	284
4.5. Conclusion	285
5. Exemples de lignes sans pertes d'impédance terminale quelconque	287
5.1. Exemple de ligne symétrique : une onde réfractée à l'interface de deux milieux différents	287
5.2. Exemple de ligne symétrique : un mode non plan dans un guide fini	290
5.3. Exemple de ligne asymétrique : le pavillon exponentiel	291
6. Les lignes sans pertes à caractéristiques variables	294
6.1. Notations utilisées	294
6.2. Etude de la variation de $e(x)$	295
6.3. Conclusion	296
6.4. Exemple : les pavillons acoustiques	297
7. Conclusion	298

V. CONCLUSION	301
1. Facteur de qualité d'un instrument à vent	301
1.1. Ligne uniforme débouchant sur une impédance nulle	301
1.2. Tuyau cylindrique rayonnant dans l'espace infini ; tuyau cylindrique à cheminée axiale	304
1.3. Pavillon conique	307
2. Facteur de réflexion et facteur de qualité local	309
3. Domaines de fréquences caractéristiques d'un instrument à vent	314
4. Quelques perspectives	316
 Annexe I	319
Annexe II	325
Bibliographie	329
1. Acoustique des instruments à vent	329
2. Acoustique physique générale	336
3. Physique générale, électromagnétisme, optique	341

INTRODUCTION

1. DEFINITION DU SUJET - GENERALITES SUR LES INSTRUMENTS A VENT

Le travail, consacré aux champs sonores interne et externe des instruments à vent, présente un caractère théorique et expérimental.

Dans un premier temps, rappelons quelques généralités sur les instruments à vent : ils sont constitués de tuyaux sonores de forme très complexe, leur caractéristique première étant de présenter une dimension privilégiée. Il est certes toujours possible de trouver des exceptions, tel l'ocarina, mais la quasi-totalité est de forme allongée. Du point de vue de la forme générale du tuyau sonore, on peut diviser ces instruments en deux grandes catégories : les "cuivres", qui ne sont pas percés de trous latéraux, et dont les sections varient fortement, et les "bois", qui sont percés de trous latéraux, mais sont en général constitués essentiellement de raccordements de cylindres et de troncs de cône peu évasés. Enfin, les instruments à vent fonctionnent par "oscillations entretenues", la source d'énergie n'étant pas de nature vibratoire. Ils réunissent un système excitateur (lame d'air-biseau, ou anche) et un résonateur (le tuyau sonore) couplés de manière non linéaire.

Notre étude porte sur le tuyau sonore lui-même, en régime permanent ; admettant le principe de superposition et la linéarité des vibrations, ce que nous justifierons, nous étudions le comportement du tuyau à une fréquence donnée. Nous ne traitons pas du couplage évoqué plus haut, autrement dit de la production du son : nous ne pouvons donc étudier les rapports entre les différentes fréquences, c'est-à-dire le spectre. Mais notre étude est nécessaire pour y aboutir, et ceci de deux façons : d'une part la connaissance de la réponse du tuyau est un préalable à l'étude du couplage avec le système excitateur, qui fournit ce que BÉNADE appelle le "spectre interne" ; d'autre part, la connaissance de la propagation dans le tuyau et du rayonnement permet de savoir comment ce spectre interne est transformé dans le tuyau et à l'extérieur avant de parvenir à nos oreilles.

2. RECHERCHE SUR LA PHYSIQUE DES INSTRUMENTS A VENT : RAPPEL HISTORIQUE SOMMAIRE

a) Nous partirons des premières études théoriques, datant du XVIII^e Siècle, avec BERNOULLI, LAGRANGE, EULER. Ceux-ci ont proposé une théorie des fréquences de résonance des instruments à vent de forme cylindrique, conique, cylindrique à cheminée, et autres. Ils considèrent les ondes stationnaires, ne s'intéressant ni à l'apport d'énergie par le système excitateur, ni aux pertes d'énergie, notamment sous forme acoustique. On remarque donc d'emblée un paradoxe : les théoriciens des instruments à vent proposent un modèle satisfaisant en première approche, qui pourtant ne tient pas compte du son rayonné, objectif même de ces instruments. Leur modèle décrit donc le champ interne de manière unidimensionnelle, admettant le principe de superposition et résumant les conditions de fonctionnement à une condition linéaire très simple : pour émettre une fréquence donnée, un instrument doit présenter suivant les cas un ventre de pression ou un ventre de vitesse (acoustiques) à l'entrée.

On peut affirmer que l'essentiel des recherches sur les instruments à vent a été jusqu'à une époque assez récente le simple prolongement de ce point de départ. Les objectifs ont été soit une meilleure précision expérimentale, soit l'étude théorique de systèmes légèrement plus compliqués, en liaison quelquefois étroite avec la

facture instrumentale. Il est impossible de citer toutes ces recherches, tant il est vrai qu'elles représentaient au XIX Siècle une part très importante de la recherche en acoustique. Citons toutefois POISSON (74), DUMAMEL (112) (théorie des tuyaux à cheminée, pavillons,...), BIOT (19), SAVART (146), HOPKINS (119), MASSON (64), WERTHEIM (157), ZAMMINER (159), SONDHAUSS (148) (étude des tuyaux d'orgue principalement, "correction au bout",...), SCHAFHÄUTL PELLISOV (80) (trous latéraux), BLAICKLEY ("cuiyres") (21).

Au début du XX Siècle, BOUASSE (22, 23) publie une très vaste étude de tous ces problèmes, suivi par FOUCHÉ (34,35). Mais l'utilisation des nombres complexes et de la notion d'impédance (introduite en acoustique par WEBSTER (156)), et la recherche sur les filtres acoustiques permettent un certain renouvellement du sujet, grâce à STEWART (150,152), MASON (130), RICHARDSON (79), IRONS (51 à 53). Plus près de nous, NEDERVEEN (70), ou COLTMAN (28), ont tenté d'étudier les fréquences de résonance d'un instrument entier, dans toute sa complexité, comprenant certains paramètres liés à l'instrumentiste, comme la différence de température entre son souffle et l'air ambiant par exemple.

b) Quant aux recherches sur le fonctionnement global des instruments à vent, voilà seulement quinze ans environ qu'elles ont pris un essor considérable. Certes certains précurseurs (HELMHOLTZ, RAYLEIGH, BOUASSE particulièrement) avaient déjà proposé certaines théories partielles pour les instruments à anche ou à embouchure de flûte (système lame d'air-biseau). Mais des modèles complets n'ont été proposés que récemment ; ceux-ci visent à expliquer :

- comment l'apport d'énergie sous forme non acoustique, c'est-à-dire non vibratoire, peut être transformée en oscillations par la présence d'un résonateur ;
- comment le spectre du son produit dépend de cet apport d'énergie, autrement dit de la pression moyenne du souffle de l'instrumentiste, ou de son débit moyen ;
- quelle est enfin la forme des transitoires.

En ce qui concerne les instruments à anche, BACKUS (2) et

NEDERVEEN (70) ont proposé un modèle linéaire du couplage de l'anche avec le tuyau. BENADE et GANS (11), s'appuyant sur les travaux de WEBER (87), HELMHOLTZ (45) et BOUASSE (23), en ont ensuite proposé un modèle non linéaire précisé ultérieurement par WORMAN (89), FLETCHER (41), THOMSON (85). Ceux-ci expliquent pour une anche non battante, l'apparition importante d'harmoniques aigus quand la pression augmente; D. BARIAUX (7) de son côté a proposé un modèle pour l'anche battante, démontrant qu'elle se comporte comme un oscillateur à relaxation. Mais avant eux, on peut citer les travaux de VOGEL (86) ou de FOUCHÉ (33) prolongeant ceux de WEBER et de HELMHOLTZ. Il est à noter enfin que Le CORBEILLER (106), ROCARD (140,142) et AUGER (1) avaient déjà proposé des modèles non-linéaires pour l'anche, considérée comme un oscillateur à relaxation couplé à un tuyau, leurs résultats demeurant toutefois assez qualitatifs.

Une théorie complète des instruments à embouchure de flûte est sensiblement plus compliquée, si elle veut prendre en compte tous les aspects du mouvement aérodynamique, le rôle du jet et des turbulences, le son de biseau et le son "du tuyau". Des modèles rendant compte de l'influence de la pression moyenne et des différents paramètres de la bouche sur le son du tuyau (permanent et transitoire) ont été mis au point grâce aux travaux successifs de CREMER et ISING (29), COLTMAN (25), ELDER (32), et enfin FLETCHER (37-39). D'autre part, on trouve une description expérimentale détaillée, basée sur l'analyse sonographique, des rapports entre son de biseau et son du tuyau dans la thèse de M. CASTELLENGO (24) ; enfin, HOWE (49) a présenté une théorie approchée tenant compte des tourbillons causés par l'instabilité du jet.

c) Un problème important relatif à la physique des instruments à vent est enfin l'analyse du son musical. Pour nous limiter aux principaux auteurs, citons HELMHOLTZ (46), MILLER (68), E. MEYER (65), B. HAGUE (47), et plus récemment J. MEYER (66) (étude systématique du spectre permanent), E. LEIPP (60) (utilisation du sonographe pour les transitoires), ou WU et PERIO (90) (analyse de FOURIER).

3. POSITION DE NOTRE TRAVAIL PAR RAPPORT AUX RECHERCHES RECENTES

Le tour d'horizon qui précède ne vise pas l'exhaustivité ; nous n'avons cité que les principaux travaux, ainsi que quelques travaux sans doute moins importants mais peu connus. On peut néanmoins se rendre compte que l'acoustique des instruments à vent a été l'objet de très nombreuses recherches, tant anciennes que récentes. Mais les tendances actuelles sont incontestablement à l'étude du fonctionnement global des instruments à vent, et il peut paraître curieux, voire démodé, de revenir au problème du résonateur isolé. Nous devons par conséquent préciser nos objectifs essentiels, au nombre de deux :

1) Une connaissance poussée du résonateur

Celle-ci est évidemment indispensable à la recherche sur le fonctionnement global. Or actuellement, les connaissances sont à notre avis encore insuffisantes en ce qui concerne les tuyaux sonores de forme complexe. En particulier, les échanges d'énergie demeurent assez mal connus, notamment quand il y a des variations de section, des trous latéraux,.... Certes, nous nous appuierons largement sur les travaux de BENAÏDE, qui a énoncé de nombreux principes qualitatifs, et également quantitatifs (9 , 13) sur cette question. Mais il nous a semblé utile de développer ses travaux, en précisant comment se font les pertes sous forme calorifique et le rayonnement, pour un système dont le fonctionnement repose sur les résonances. Après lui, nous voulons participer à l'actualisation des très nombreux travaux portant sur les fréquences de résonance des instruments à vent (considérés comme sièges d'ondes stationnaires) en étudiant systématiquement les ondes quasi-stationnaires.

De telles affirmations ont sans doute de quoi surprendre les spécialistes des ondes électromagnétiques : à notre avis, les phénomènes de résonance dans les lignes de transmission acoustiques sont moins bien connus que leurs analogues en électromagnétisme.

2) L'étude du champ externe

C'est un sujet très peu abordé jusqu'à présent : quelle est la relation entre le champ interne et le champ externe, et comment le son que nous entendons est-il émis par les orifices d'un instrument à vent ?

Les recherches expérimentales sont restées très limitées ; quant aux recherches théoriques, elles sont quasiment inexistantes. C'est pourquoi, nous avons voulu aborder cette étude, en la limitant au champ proche ; nous admettons qu'à une courte distance de l'instrument, le champ est libre, négligeant les effets de la salle. Il est pourtant clair que ces derniers jouent un rôle capital plus loin de l'instrument, là où se trouvent les oreilles de l'auditeur, et en général aussi celles de l'instrumentiste.

4. CONNAISSANCES SUR LA PHYSIQUE DES INSTRUMENTS A VENT ET FACTURE INSTRUMENTALE

Ayant défini ce que nous cherchons, il est nécessaire de préciser l'esprit de cette recherche, et de répondre à la question : en dehors des progrès que l'on peut espérer dans les connaissances fondamentales en acoustique physique (et qui ne sont pas à négliger), quelle est l'utilité d'une telle recherche pour la facture instrumentale ?

Reprenons ici quelques idées importantes sur les instruments de musique, empruntées notamment à E. LEIPP (60). Pour celui-ci, un instrument de musique est une "machine à fabriquer des sons". Pour obtenir l'effet musical recherché, le musicien doit contrôler en permanence le son en jouant sur le champ de liberté que lui laisse l'instrument. Le but du facteur d'instrument est donc de lui permettre d'atteindre cet effet musical, en optimisant l'instrument de façon que le champ de liberté (en hauteur, en timbre,...) soit suffisamment large, mais reste également suffisamment limité pour ne pas rendre l'instrument trop difficile à jouer. Pour cela, il doit trouver de nombreux compromis, tenant compte du rôle de deux grands types de paramètres : ceux qui sont liés à l'instrument, et demandent donc des connaissances (même empiriques) sur la physique de celui-ci, et ceux qui sont liés à l'instrumentiste (physiologie : capacités respiratoires, forme de la cavité buccale, des lèvres, agilité des doigts,... et audition : perception de la justesse et du timbre notamment, qui est un problème d'une extrême complexité).

En ce qui concerne l'instrument, les paramètres sont l'échelle musicale et donc la justesse, l'étendue, le timbre et son homogénéité, la facilité d'émission, de liaison entre les notes,... C'est pourquoi la finition d'un instrument en vue d'un type de musique donné a toujours

demandé des dizaines d'années de longs tâtonnements, et on voit mal quel type de calculs pourraient remplacer complètement ces tâtonnements dans la recherche de compromis d'une telle finesse : bien souvent la satisfaction des exigences de l'un des paramètres entraîne un effet des insuffisances pour d'autres paramètres. Est-ce à dire que la connaissance de lois physiques est inutile en facture instrumentale ? Assurément non, car tous les facteurs recherchent des règles au moins empiriques pour savoir quel effet peut avoir telle modification sur les trous latéraux, sur la perce longitudinale, ... Et si les théories physiques n'ont pu les y aider dans le passé que de manière très limitée, les connaissances actuelles, en grands progrès, alliées à l'utilisation de l'informatique pourront s'avérer beaucoup plus efficaces dans un futur proche. Nous pensons que la comparaison que nous avons faite entre l'expérience et la théorie, notamment en ce qui concerne les fréquences de résonance, est convaincante sur ce point.

Cette affirmation demande pourtant à être quelque peu nuancée, car il n'est pas évident que remplacer un tâtonnement sur l'instrument lui-même par un tâtonnement sur l'ordinateur soit toujours un progrès significatif. C'est pourquoi, il est plus prudent d'affirmer que les connaissances scientifiques auront probablement plus d'effet pour l'orientation des recherches en facture instrumentale, par exemple dans le but de fabriquer de nouveaux instruments. C'est ce qu'ont fait dans le passé certains facteurs illustres, tels Almenröder (pour le basson), Boehm (pour la flûte), Sax (pour le saxophone), ou Mahillon, pour ne citer que quelques-uns parmi ceux qui ont réussi ; rien n'interdit donc d'attendre, dans le futur, des résultats positifs. Certes les idées n'ont pas manqué jusqu'à présent, ni les essais infructueux, mais à une époque où la musique (européenne) est en complète mutation, il serait étonnant que de nouveaux instruments n'apparaissent pas, ne serait-ce qu'à partir de modifications de ceux existant. A moins que seuls les instruments électroacoustiques (analogiques ou numériques) ne subsistent... Ceci n'est pas notre avis, car ces derniers présentent des inconvénients qui leur sont propres, comme la difficulté du contrôle instantané du son par le musicien.

A propos de facture instrumentale, il est bon d'apporter une dernière précision concernant la limitation de notre étude au champ permanent : il est bien connu que le timbre et l'expression musicale sont portés pour une grande part par les petites variations du champ

sonore, et notamment les transitoires d'attaque et d'extinction. La connaissance de ces derniers demeure donc un prolongement nécessaire à notre travail ; il n'en reste pas moins bien entendu que les recherches sur le timbre, la justesse et même la facilité d'émission effectuées par les facteurs d'instruments tiennent le plus grand compte du champ permanent. Ainsi ceux-ci savent en général que l'émission est beaucoup plus facile et la stabilité du son bien meilleure, quand les fréquences de résonance du tuyau sont harmoniques, ces deux qualités étant essentielles pour l'instrumentiste.

5. METHODES D'INVESTIGATION - PLAN DE LA THESE

Pour mener à bien notre étude, nous avons choisi trois méthodes d'investigation :

- la première est le calcul numérique, dans le but de résoudre les équations de l'acoustique que nous présenterons au chapitre I, celles-ci n'ayant en général pas de solutions connues.
- la seconde est la recherche sous forme littérale de solutions approchées aux équations de l'acoustique. Celles-là, comparées systématiquement (même quand nous ne le précisons pas) aux solutions exactes numériques afin d'éviter des erreurs importantes, nous permettent d'atteindre une compréhension physique des phénomènes. Dans certains cas, elles peuvent de plus permettre la solution de problèmes inverses (par exemple la question : quelle forme du tuyau doit-on choisir pour obtenir tel champ sonore ?), sans recourir au tâtonnement.
- la dernière est l'expérimentation. Nous avons cherché à en comparer systématiquement les résultats aux résultats numériques ; toutefois, nous n'avons pu, faute de temps, pousser cette comparaison aussi loin pour le champ externe que pour le champ interne.

Nos résultats théoriques sont à notre connaissance, tant pour le champ interne que pour le champ externe, essentiellement nouveaux ; par contre nous ne sommes pas les premiers à avoir expérimenté sur le champ interne (BACKUS et BENAÏE en particulier ont fait avant nous de nombreuses mesures d'impédance d'entrée des instruments à vent), et

l'originalité de notre travail expérimental tient sans doute surtout à la comparaison poussée avec la théorie.

Le chapitre I présente le cadre théorique de l'étude. Au départ, il visait seulement à établir les bases de notre travail en effectuant une synthèse d'éléments le plus souvent bien connus : il s'agit avant tout des approximations qui permettent de ramener les différentes causes de non-planéité des ondes (amortissement visco-thermique aux parois, variations de section, rayonnement) à l'approximation unidimensionnelle, sous forme de corrections ou de moyennes. En fait, pour mener à bien cette synthèse, nous avons estimé qu'il était nécessaire d'apporter davantage de précision aux conditions de validité de ces différentes approximations : nous pensons de ce point de vue avoir obtenu quelques éléments nouveaux.

Le chapitre II traite du champ interne des instruments à vent. Une étude théorique approfondie des ondes quasi-stationnaires grâce à des solutions approchées décrit les différentes grandeurs acoustiques : l'admittance (et l'impédance), la pression et la vitesse, enfin l'énergie. Elle porte sur les deux grandes catégories d'instruments à vent : les instruments à pavillons évasés, et les instruments à trous latéraux. Une étude expérimentale de l'une des grandeurs, l'impédance, et la comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques constitue la deuxième partie de ce chapitre.

Le chapitre III traite du champ externe. Il étudie théoriquement la relation entre champ interne et champ externe, puis le champ d'interférences créé par les différentes sources d'un instrument à vent. Pour comparer les résultats théoriques avec des résultats expérimentaux, nous avons utilisé quelques expériences que nous avons faites nous-même, mais surtout les mesures faites par l'équipe de M. Le Professeur Péro.

Le sujet du chapitre IV est beaucoup plus général que l'acoustique des instruments à vent. Il est en effet l'étude d'un problème particulier relatif aux lignes de transmission (acoustiques et électromagnétiques) : l'existence d'ondes évanescentes et de fréquences de coupure pour une ligne finie ou certains systèmes analogues. Ce problème s'est en effet posé à nous concrètement à plusieurs reprises à propos des instruments à vent, qui sont un cas particulier de lignes de trans-

mission finies : la validité de l'approximation unidimensionnelle, autrement dit de l'hypothèse selon laquelle les modes non plans sont évanescents ; la définition de la fréquence de coupure d'un pavillon fini ; enfin la signification précise de l'affirmation courante selon laquelle les instruments percés de trous latéraux constituent des filtres passe-haut.

La conclusion aborde quelques concepts généraux concernant les instruments à vent : le facteur de qualité, le facteur de réflexion, la définition de différents domaines de fréquence ; enfin elle propose quelques idées de prolongements à notre travail.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

La notation complexe classique des fonctions sinusoïdales du temps est le plus souvent utilisée, la fonction réelle étant liée à la fonction complexe par $F_r(x,t) = \text{Re}(F_c(x) e^{j\omega t})$.

Une onde progressive $e^{-jkx} e^{j\omega t}$ a pour nombre d'onde k et pour constante de propagation jk .

L'impédance locale Z est définie par $Z = p/u$, où p et u sont la pression et la vitesse acoustiques (complexes). Les instruments à vent fonctionnant toujours dans l'air (d'impédance caractéristique Z_c), nous utiliserons souvent, pour des paragraphes entiers, l'impédance réduite, $Z = p/u/Z_c$.

L'orientation est toujours la suivante: la source (système exciteur) est à gauche, les extrémités qui rayonnent à droite.

Le vocabulaire de l'acoustique musicale comporte quelques ambiguïtés, que nous voulons relever:

- un pavillon est "l'extrémité évasée de certains instruments à vent" (Robert; le mot anglais est bell); mais on est arrivé à utiliser ce terme pour tout tuyau à section variable (horn en anglais), car l'équation des pavillons ne distingue pas le sens de variation de la section. Mais en outre nous utiliserons ce terme dans son sens premier pour tout instrument à vent, même cylindrique: c'est l'extrémité de l'instrument qui rayonne.

- une cheminée peut être latérale: c'est celle qu'on perce dans la paroi d'une flûte et qu'on appelle simplement "trou"; elle peut être aussi axiale. c'est le prolongement de section étroite de certains tuyaux d'orgue, dits "à cheminée".

LISTE DES SYMBOLES

(Les chiffres romains indiquent le chapitre)

Indices

b	bouche
c	coupure
e	correction
p	tuyau principal
s	sans amortissement
t	trou
t	thermique
v	visqueux
o	origine (extrémité rayonnante)

Lettres

A,B,C,D	coefficients de quadripôle (IV)
A,B,C,D	$A+jB = Z_v$; $C+jD = Y_t$ (II, p.104)
a	$\text{Re}(Y)$ presque partout (II, p. 95)
AM	terme d'amortissement (II, p.133)
Am	$(1+Q)(r l_v/c)^{1/2} \sim 3.10^{-5} s^{1/2}$
b	$\text{Im}(Y)$ (approximation stationnaire)
c	vitesse du son dans l'air libre

φ	$\text{Im}(Y_t)/\omega$
d	diamètre
d_v, d_h	$(2l_v/k)^{1/2}, (2l_h/h)^{1/2}$
e	densité d'énergie moyenne
E	e/e_0
e_c, e_p, e_t	densité d'énergie moyenne cinétique, potentielle, totale
f	fréquence
g	S'/S
φ_g	$\text{Re}(Y_t)$
h	hauteur de cheminée d'un trou
H	terme d'amortissement
I	densité de flux d'énergie
j	$(-1)^{1/2}$
k	nombre d'onde ω/c
k'	nombre d'onde avec amortissement
k_0, k_1, k_2	nombre d'ondes (théorie de Kirchhoff, I, p.22)

k_1	nombre d'onde du pavillon exponentiel (IV)
l	longueur
l_v, l_h	longueurs caractéristiques de l'air (I)
$\mathcal{L}$	$\text{Im}(Z_v)/\omega$
m	coefficient d'évasement du pavillon exponentiel
p	pression acoustique
P	$\sqrt{2}/r_v = d_v/r$
q	facteur de qualité local
Q	facteur de qualité (IV)
Q	$l_h/l_v (\gamma-1)$ (II)
Q_o, Q_p, Q_t	débit acoustique (III)
r	rayon
r_v, r_t	$\sqrt{2} r/d_v, \sqrt{2} r/d_h$
R	rayon (I)
R	facteur de réflexion
$\mathcal{R}$	$\text{Re}(Z_v)$
s	entropie acoustique
s	demi-intervalle entre deux trous
S	section
T	température absolue
u	vitesse acoustique
U	$1+\gamma$
V	$2h_e/\mu_s$ (trou latéral)
Y	admittance u/p (ou $\rho c u/p$)
Y_t	admittance en série par unité de longueur (effets thermiques)
Z	admittance p/u (ou $p/u \rho c$)

Z_v	impédance en série par unité de longueur (effets visqueux)
Z_R	impédance de rayonnement
α	constante d'affaiblissement ($=j\varphi$)
$\beta, \bar{\beta}$	$j\delta/\varphi, j\bar{\delta}/\varphi$
γ	$\gamma+\delta = 1/\zeta$
δ	$\gamma-\delta = -1/\zeta'$
$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}+\bar{\delta} = \zeta$
$\bar{\delta}$	$\bar{\gamma}-\bar{\delta} = -\zeta'$
Γ	constante de propagation ($=j\varphi$ ou $j\kappa$)
Δ	$(B-C)/2$
ϵ	erreur
ζ	impédance itérative
ζ'	impédance itérative (sens opposé)
η	second coefficient de viscosité
λ	coefficient de conduction thermique
μ	premier coefficient de viscosité (I)
μ	rapport des sections trou/tuyau principal (II, III)
ρ	densité moyenne
ρ_A	densité acoustique

τ	température acoustique
φ	nombre d'onde (ligne continue)
ϕ	nombre d'onde (ligne discrète)
ω	pulsation

CHAPITRE I :

CADRE THEORIQUE DE L'ETUDE

1. INTRODUCTION

1.1. But général du premier chapitre

Comme nous l'avons dit, nous cherchons à utiliser aussi loin que possible l'approximation unidimensionnelle ; en cela, nous visons un double but : d'une part, nous voulons obtenir des modèles simples pour comprendre le fonctionnement des instruments à vent ; d'autre part, nous pensons qu'il est nécessaire d'alléger au maximum les calculs numériques pour permettre plus tard la prise en compte de tous les paramètres, à l'instar du facteur d'instrument (géométrie de l'instrument, nature des parois, influence de la cavité buccale, technique de jeu, notamment écartement des doigts, ...). Certes, des problèmes comme celui des pavillons ou celui de la jonction de guides d'ondes peuvent être résolus complètement grâce à la théorie modale : quelques publications y ont d'ailleurs été consacrées, d'abord en électromagnétisme⁺ puis en acoustique⁺⁺. Mais dans certains cas, ces travaux utilisent des solutions purement numériques, et c'est seulement quand ils aboutissent à la détermination de corrections à apporter à la théorie unidimensionnelle qu'ils entrent pleinement dans nos préoccupations.

On peut résumer l'objectif de ce chapitre de la façon suivante :

- a) essayer de traduire sous forme de corrections à la théorie à une dimension les diverses causes de non planéité des ondes dans un instrument à vent. Celles-ci sont avant tout : l'amortissement aux parois, les discontinuités de section, le rayonnement.

+ |177,181,179,188,190|

++ |97,125,143,149 |

I.1.1.

(nous négligeons les turbulences).

Les instruments à vent ayant toujours une dimension prépondérante sur les autres, les variations primordiales des grandeurs acoustiques sont les variations relatives à cette dimension ; mais les phénomènes cités précédemment imposent aussi des variations, plus faibles, avec les autres dimensions. Ce sont ces dernières qu'il est souhaitable de prendre en compte (en général en effectuant des moyennes), pour corriger la théorie unidimensionnelle.

Ce chapitre présente donc ces différentes procédures, déjà connues pour l'essentiel, sur lesquelles s'appuie l'étude théorique du champ externe et du champ interne des instruments à vent.

b) trouver les conditions auxquelles ces approximations sont légitimes. Nous avons constaté qu'elles ne sont pas toujours clairement exprimées. Pour certaines d'entre elles, nous avons réussi à trouver des conditions rigoureuses, mais pour d'autres, nous avons dû nous résoudre à attendre les résultats expérimentaux pour pouvoir en juger.

1.2. Plan du premier chapitre

Nous rappelons en premier lieu les équations de propagation linéaires des ondes acoustiques en fluide visco-thermique et les appliquons au tuyau cylindrique. Nous cherchons pour celui-ci la constante de propagation et l'impédance itérative du premier mode.

Nous étudions les discontinuités dans un tuyau cylindrique (changement de section, dérivation), et nous étendons cette étude aux pavillons.

Nous discutons les différents résultats connus concernant le rayonnement d'un tuyau.

Nous rappelons la théorie des filtres pour l'appliquer à un réseau régulier de trous latéraux.

La conclusion s'attache enfin à dresser le bilan des hypothèses faites.

2. EQUATIONS DE PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES AVEC AMORTISSEMENT (Théorie de Kirchhoff).

Nous rappelons ici la théorie de Kirchhoff, telle qu'elle est habituellement présentée (Kirchhoff, 123, Rayleigh, 139, Morse et Ingard, 134).

2.1. Les équations de l'acoustique linéaire avec amortissement visco-thermique

Nous partons des équations de la mécanique des fluides visco-thermiques linéarisées au premier ordre (pour les petites amplitudes), telles qu'elles sont présentées par exemple par Morse et Ingard ou par Bruneau (101) : les cinq grandeurs acoustiques (la pression p , la vitesse u , la température τ , l'entropie s , la masse volumique ρ_A) vérifient les cinq équations suivantes :

- l'équation du mouvement de Stokes-Navier :

$$(a) \quad \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{u} + (\eta + \frac{1}{3}\mu) \text{grad div } \vec{u}$$

où ρ est la masse volumique moyenne, μ et η les premier et second coefficients de viscosité du gaz. (La vitesse moyenne étant supposée nulle).

- l'équation de conservation de la masse :

$$(b) \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{u} = 0$$

- l'équation de conduction de la chaleur (la dissipation par frottements visqueux étant du second ordre en u):

$$(c) \quad T \rho \frac{\partial s}{\partial t} = \lambda \Delta \tau$$

où T est la température absolue, λ le coefficient de conduction thermique.

- les équations de la thermodynamique, dont le choix est dicté par celui des variables principales retenues :

$$(d) \quad s = \frac{C_p}{T} \left(\tau - \frac{\gamma-1}{\gamma\beta} p \right)$$

où $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, C_p et C_v étant les chaleurs massiques de l'air à pression et

volume constant, β le produit de la pression moyenne par le coefficient d'augmentation de pression à volume constant:

$$\beta = \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_v$$

$$(e) \quad \rho_A = \frac{\gamma}{c} (p - \beta \tau)$$

où c est la célérité du son dans l'espace libre en l'absence d'amortissement.

L'élimination de s et ρ_A donne :

$$(1) \quad \text{div } \vec{u} = \frac{\gamma}{\rho c^2} \left(\beta \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

$$(2) \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} - c l_h \Delta \tau = \frac{\gamma-1}{\gamma\beta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$(3) \quad \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad } p = \rho c l_v \Delta \vec{u} + \rho c (l'_v - l_v) \text{grad div } \vec{u}$$

$$\text{ou (3 bis)} \quad \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad } p = \rho c l'_v \Delta \vec{u} + \rho c (l'_v - l_v) \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u}$$

$$\text{avec } l_h = \frac{\lambda}{\rho c C_p} \quad l_v = \frac{\mu}{\rho c} \quad \text{et } l'_v = \frac{\gamma + \frac{4}{3}\mu}{\rho c}$$

Les constantes l_h , l_v et l'_v sont des longueurs caractéristiques ; pour l'air dans les conditions usuelles, elles sont de l'ordre de 10^{-7} et 10^{-8} mètre. Les équations de propagation avec amortissement visco-thermique s'obtiennent alors en négligeant les termes contenant ces longueurs au deuxième ordre (fluides "faiblement" dissipatifs).

2.2. Les équations de propagation pour la pression, la température et la vitesse

L'équation pour la pression est la plus simple à obtenir :

$$(3) \Rightarrow \Delta p = \rho (cl_v \Delta \frac{\partial}{\partial t}) \operatorname{div} \vec{u} \quad (4)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{u} = \gamma \frac{\beta}{\rho c} l_h \Delta \tau - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5)$$

$$(2), (4), (5) \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p - cl_{hv} \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = \beta c^2 l_h (l_h - l_v) \Delta^2 \tau$$

où

$$l_{hv} = l_v + (\gamma - 1) l_h$$

Soit au premier ordre en l_h et l_v :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p - cl_{hv} \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Avec l'équation (2), on obtient immédiatement :

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta - l_{hv} \Delta \frac{\partial}{\partial t}) (\frac{\partial}{\partial t} - cl_h \Delta) \tau = 0 \quad (7)$$

Pour la vitesse, on écrit :

$$(1) \text{ et } (2) \quad \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\gamma \beta}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho c^2} (\gamma cl_h \Delta - \frac{\partial}{\partial t}) \tau \quad (8)$$

Un champ de vecteur vitesse, ici la vitesse vibratoire, peut toujours être décomposé de la façon suivante (théorème de Cleish) :

$$\vec{u} = \vec{u}_e + \vec{u}_t \text{ où } \operatorname{div} \vec{u}_t = 0 \text{ et } \operatorname{rot} \vec{u}_e = \vec{0}$$

Le champ solénoïdal $\vec{u}_t$ peut être choisi tel que :

$$(\frac{\partial}{\partial t} - cl_v \Delta) \vec{u}_t = \vec{0} \quad (9)$$

et, en conséquence, le champ irrotationnel est, comme $\vec{u}$, solution de l'équation (3), et donc de (8).

L'examen des équations (6) et (7) montre que la température peut être mise sous la forme de la somme de deux termes τ_1 et τ_2 . Le premier représentant une onde propagative jumelée à l'onde de pression et le second une onde très amortie à laquelle ne correspond pas de pression acoustique.

On recherche τ_1 et τ_2 sous la forme de solutions harmoniques de $(\Delta + k_j^2) \tau_j = 0$. Pour trouver k_1 et k_2 , il suffit donc d'écrire dans (7) $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ et $\Delta = -k_j^2$. On obtient alors :

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{(1 + j \frac{\omega}{c} l_{hv})} \approx \frac{\omega^2}{c^2} (1 - j \frac{\omega}{c} l_{hv})$$

$$k_2^2 = - \frac{j\omega}{cl_h}$$

De même pour $\vec{u}_t$, solution de $(\Delta + k_0^2) \vec{u}_t = \vec{0}$, où

$$k_0^2 = - \frac{j\omega}{cl_v}$$

Ces résultats sont valables au premier ordre en $\frac{\omega}{c} l$, où l est une longueur caractéristique ($l = l_v$ ou l_h)

k_0 et k_2 , liés respectivement aux effets visqueux et thermiques, sont du même ordre de grandeur : cette remarque nous sera utile pour les approximations.

Conclusion : Si $\tau = A_1 \tau_1 + A_2 \tau_2$, p est obtenu par :

$$(2) \Rightarrow p = \frac{\gamma \beta}{\gamma - 1} (1 + \frac{cl_h k_1^2}{j\omega}) A_1 \tau_1$$

Quant à $\vec{u}$, on l'écrit : $\vec{u} = A_0 \vec{u}_t + \vec{u}_e$, où

$$(8) \quad \vec{u}_e = \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma \beta}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho c^2} (\gamma cl_h + \frac{j\omega}{k_j^2}) \operatorname{grad} A_j \tau_j$$

Les coefficients A_0, A_1, A_2 sont déterminés par les conditions aux limites ; on a donc bien la solution complète du problème.

3. ONDES PLANES DANS UN TUYAU CYLINDRIQUE AVEC AMORTISSEMENT VISCO-THERMIQUE : CONSTANTE DE PROPAGATION ET IMPEDANCE ITERATIVE

3.1. La solution complète classique pour la constante de propagation

On cherche les solutions τ_1, τ_2 et $\vec{u}_t$ sous la forme

$f(x, r, t) = J_0(\sqrt{k_1^2 - k'^2} r) e^{\pm jk'x} e^{j\omega t}$ pour une onde progressive dans la direction x , à symétrie circulaire, et finies en $r = 0$. (Nous réservons le symbole k au nombre d'onde $\frac{\omega}{c}$, sans pertes visco-thermiques, $\tau = jk'$ étant la constante de propagation avec pertes) (Fig 1)

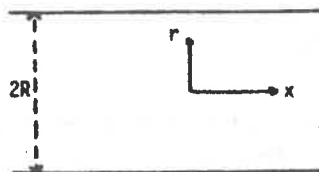


Fig.1 : tuyau cylindrique

La valeur de k' est donnée par les conditions aux limites : Kirchhoff (123) a considéré que pour un tuyau à parois parfaitement réfléchissantes, la vitesse axiale, la vitesse radiale et la température (acoustiques) doivent s'annuler aux parois ($r = R$).

Les valeurs de k' qui satisfont ces conditions sont donc solutions de l'équation suivante, due à Kirchhoff :

$$(\gamma_1 h c + j \frac{\omega}{k_1^2}) D_1 - (\gamma_1 h c + j \frac{\omega}{k_2^2}) D_2 - j \frac{k_1^2 \omega}{k_0^2} (\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}) D_0 = 0 \quad (10)$$

$$\text{ou } D_j = \left(\frac{d \log J_0(\sqrt{k_1^2 - k'^2} r)}{dr} \right)_{r=R} \quad (j = 0, 1, 2)$$

Cette équation a été résolue de manière approchée ou numérique par de nombreux auteurs. Nous y reviendrons au § 3.3.

3.2. La solution complète pour l'impédance itérative

On a souvent essayé de modéliser le tuyau cylindrique avec pertes aux parois comme une ligne de transmission, mais c'est toujours en simplifiant les équations de départ. On peut pourtant le faire à partir de la théorie complète de Kirchhoff : Bruneau (101) propose une solution pour calculer l'impédance itérative dans un cas particulier. Il calcule le rapport des moyennes (sur la section) de la pression et de la vitesse axiale. En généralisant son calcul, on obtient, au facteur

$$\frac{A_0 J_0(\sqrt{k_0^2 - k'^2} R)}{j\omega (\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2})} e^{\pm jk'x} e^{j\omega t} \text{ près :}$$

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \frac{\rho c^2}{-j k_1^2} \left(1 + \frac{c l_h k_1^2}{j\omega} \right) \frac{1}{J_0(\sqrt{k_1^2 - k'^2} R)} \tau_1 \\ u_x &= j\omega \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \frac{u_{tx}}{J_0(\sqrt{k_0^2 - k'^2} R)} + (\gamma_1 h c + j \frac{\omega}{k_1^2}) \frac{1}{J_0(\sqrt{k_1^2 - k'^2} R)} \\ &\quad - (\gamma_1 h c + j \frac{\omega}{k_2^2}) \frac{\tau_2}{J_0(\sqrt{k_2^2 - k'^2} R)} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Or } \frac{J_0'(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} = \frac{2}{\alpha R} \frac{J_1(\alpha R)}{J_0(\alpha R)} = - \frac{2}{\alpha^2 R} \left(\frac{d \log J_0(\alpha r)}{dr} \right)_{r=R}$$

La moyenne des grandeurs p et u_x sur la section s'écrit simplement:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\rho c^2}{-jk_1} \left(1 + \frac{c^2 k_1^2}{j\omega} \right) \frac{1}{k_1^2 - k_1'^2} D_1 \\ \bar{u}_x &= j\omega \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \frac{D_0}{k_0^2 - k_1'^2} + \left(\gamma l_h c + \frac{j\omega}{k_1^2} \right) \frac{D_1}{(k_1^2 - k_1'^2)} \\ &\quad - \left(\gamma l_h c + \frac{j\omega}{k_2^2} \right) \frac{D_2}{k_2^2 - k_1'^2} \end{aligned} \right.$$

(Ces deux équations étant écrites au facteur

$$- \frac{2}{R} \frac{A_0 J_0(\sqrt{k_0^2 - k_1'^2} R)}{j\omega \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right)} e^{\pm jk_1' x} e^{j\omega t} \text{ près}).$$

On en déduit alors l'impédance itérative : $\zeta = \frac{\bar{p}}{\bar{u}}$

3.3. Les solutions approchées de l'équation de Kirchhoff

Une excellente mise au point sur ce sujet a été faite par TIJDEMAN (154) : celui-ci résout numériquement l'équation, et compare le résultat avec les formules approchées proposées par divers auteurs. Il constate que celles-ci sont obtenues de deux façons :

- d'une part en faisant des approximations directement sur l'équation finale (10).

- d'autre part en cherchant des approximations sur les équations de départ ; parmi celles-ci, figure ce qu'il appelle la "solution pour les basses fréquences réduites", la fréquence réduite étant une grandeur sans dimension liée au rapport du rayon du tuyau à la longueur d'onde ($2\pi \frac{R}{\lambda}$).

Cette dernière solution, que nous appellerons simplement solution réduite, a été trouvée partiellement par Crandall (108), puis totalement par Daniels (111) et Zwicker et Kosten (160), indépendamment. Elle a toujours été obtenue par simplification des équations de départ ; Tijdeman lui-même constate qu'elle est bien une solution limite de toutes les solutions qu'il calcule numériquement, mais il n'a pas vu qu'elle s'obtient aisément à partir de l'équation finale de Kirchhoff. Comme c'est elle que nous utiliserons par la suite, nous préférons l'obtenir de cette façon ; les conditions de validité qu'elle suppose remplies apparaissent ainsi plus clairement.

Il est à noter que l'article de Tijdeman ne concerne que l'équation de Kirchhoff, c'est-à-dire la constante de propagation. Pourtant, les auteurs de la solution réduite ont traité également de l'impédance itérative, car la façon dont ils obtiennent la solution introduit celle-ci très naturellement : au départ, ils réussissent à séparer les effets visqueux des effets thermiques, en les décrivant respectivement par une impédance en série Z_v et une admittance en série Y_t . Ils en tirent alors la constante de propagation $\Gamma = \sqrt{Z_v Y_t}$, et l'impédance itérative $\zeta = \sqrt{\frac{Z_v}{Y_t}}$. Il aurait donc été possible sans difficulté d'étendre les résultats de Tijdeman à l'impédance itérative, en comparant la solution complète (§ 3.2), et la solution réduite.

3.4. La "solution réduite"

3.4.1. Calcul de la solution réduite

Nous ferons un certain nombre d'hypothèses que nous étudierons au paragraphe suivant :

1) On peut effectuer un développement limité en $\frac{\omega l}{c}$ à l'ordre $\frac{1}{2}$

où l est l'une des longueurs caractéristiques (Pour l'équation (10), le développement était à l'ordre 1). On a alors :

$$k_1 = \frac{\omega}{c}, \text{ et } k_1 \ll k_0, k_1 \ll k_2.$$

(Rappelons que k_2 et k_0 sont du même ordre de grandeur).

2) On fait les hypothèses suivantes sur la solution k' :

$$(2.a) \quad k' \ll k_0, \quad k' \ll k_2$$

$$(2.b) \quad (k_1^2 - k'^2) R^2 \ll 1$$

$$(2.c) \quad \frac{1}{k_2^3 R} \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \ll \frac{1}{k_1^2}$$

La dernière hypothèse n'est utile que pour le calcul de l'impédance itérative et suppose (2a) déjà satisfaite.

Dans ces conditions,

$$D_1 = -(k_1^2 - k'^2) \frac{R}{2}, \quad D_2 = -k_2 \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)}, \quad D_0 = -k_0 \frac{J_1(k_0 R)}{J_0(k_0 R)}$$

$$(10) \Rightarrow \frac{j\omega}{k_1^2} D_1 + j\omega(\gamma-1) \frac{D_2}{k_2^2} + j\omega \frac{k'^2}{k_1^2} \frac{D_0}{k_0^2} = 0$$

$$d'où(12) \quad k'^2 = k_1^2 \frac{1 + (\gamma-1) \frac{2}{k_1 R} \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)}}{1 - \frac{2}{k_0 R} \frac{J_1(k_0 R)}{J_0(k_0 R)}}$$

Quant à l'impédance itérative, elle est obtenue par :

$$(11) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P} = \frac{\rho c^2}{-jk'} + \frac{D_1}{k_1^2 - k'^2} \\ \bar{U} = -\frac{j\omega}{k_1^2} \frac{D_0}{k_0^2} + \frac{j\omega}{k_1^2} \frac{D_1}{k_1^2 - k'^2} + (\gamma-1) \frac{j\omega}{k_2^2} \frac{D_2}{k_2^2} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \bar{P} = \frac{\rho c^2}{jk'} \frac{R}{2} \\ \bar{U} = \frac{j\omega}{k_1^2} \frac{1}{k_0} \frac{J_1(k_0 R)}{J_0(k_0 R)} - \frac{j\omega}{k_1^2} \frac{R}{2} \end{cases}$$

$$d'où \quad Z = \rho \frac{\omega}{k'}, \quad \frac{1}{1 - \frac{2}{k_0 R} \frac{J_1(k_0 R)}{J_0(k_0 R)}}$$

Soit :

$$(13) \quad Z = \rho c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{k_0 R} \frac{J_1(k_0 R)}{J_0(k_0 R)}} \sqrt{1 + (\gamma-1) \frac{2}{k_2 R} \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)}}}$$

3.4.2. Etude des conditions de validité de la solution

1) L'hypothèse 1 implique simplement $\sqrt{\frac{\omega l}{c}} \ll 1$.

Si on choisit $l = 10^{-7}$ (la plus grande des longueurs caractéristiques), on obtient :

$$f^{\frac{1}{2}} \ll 2.3 \cdot 10^4 \text{ Hz}^{\frac{1}{2}}$$

Cette hypothèse ne pose donc aucun problème dans l'air dans le domaine audible.

2) L'hypothèse 2 fait intervenir la solution k' . Son interprétation ne peut donc être faite qu'à postériori, et impose de considérer plusieurs domaines de valeurs de k' , et donc de $k_2 R$ et $k_0 R$. Le plus simple est de calculer des conditions nécessaires et suffisantes dans les domaines extrêmes, d'une part $k_2 R \gg 1$ et $k_0 R \gg 1$, d'autre part $k_2 R \ll 1$ et $k_0 R \ll 1$. On admettra alors que les conditions obtenues sont également suffisantes pour les valeurs intermédiaires de $k_2 R$ et $k_0 R$.

Etudions donc d'abord séparément les deux extrêmes :

1er cas : Si $k_2 R \gg 1$, $\frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \sim \frac{1}{k_2 R} \ll 1$

(de même pour $k_0 R$)

D'où $k' \sim k_1$

Par conséquent $k' \ll k_2$ et $k' \ll k_0$: c'est l'hypothèse (2a)

D'autre part : $k_1^2 - k'^2 \sim \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k_2 R}$. L'hypothèse (2b) équivaut

donc à : $\left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 \frac{1}{k_2 R} \ll 1$

Enfin : $\frac{1}{k_2^2 k_2 R} \ll \frac{1}{k_1^2}$: l'hypothèse (2c) est donc satisfaite.

2^e Cas : Si $k_2 R \ll 1$, $\frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \sim 1 + \frac{(k_2 R)^2}{8}$

d'où $k' \sim \frac{k_1}{k_0 R}$

L'hypothèse (2a) équivaut donc à $\frac{k_1}{k_0 R} \ll k_0$, soit $\frac{1}{R} \ll 1$

L'hypothèse (2b) équivaut à $k_1^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{k_0^2 R^2} \right) \ll 1$,

soit $\frac{k_1^2}{k_0^2} \ll 1$. C'est l'hypothèse (1).

Enfin l'hypothèse (2c) équivaut à $\frac{1}{k_2^2} \ll \frac{1}{k_1^2}$; c'est encore

l'hypothèse (1).

Par conséquent, chaque cas extrême n'introduit qu'une hypothèse supplémentaire ; d'autre part, il vérifie obligatoirement l'hypothèse imposée par l'autre. En effet :

- si $k_2 R \gg 1$, $\sqrt{\frac{\omega}{c}} R \gg 1$. Or $\sqrt{\frac{\omega}{c}} \ll 1$ (hypothèse 1),

donc $\sqrt{\frac{\omega}{c}} \ll \sqrt{\frac{\omega}{c}} R \Rightarrow \frac{1}{R} \ll 1$.

- si $k_2 R \ll 1$, $\sqrt{\frac{\omega}{c}} R \ll 1$. Or $\sqrt{\frac{\omega}{c}} \ll 1$, donc $\frac{\omega R}{c} \ll 1$,

et $\frac{\omega R}{c} \sqrt{\frac{\omega}{c}} \ll 1$. C'est l'hypothèse $\left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 \frac{1}{k_2 R} \ll 1$.

En conclusion, la solution réduite est valable aux trois conditions suivantes :

$$(C_1) \frac{\omega l}{c} \ll 1 ; (C_2) \frac{1}{R} \ll 1 ; (C_3) \frac{\omega R}{c} \sqrt{\frac{\omega l}{c}} \ll 1$$

La condition (C_1) ne pose pas de problème dans le domaine audible ; quant à (C_2) , elle ne pose pas non plus de problème pour l'air, car $R \gg 10^{-7}$ m est toujours vrai dans la pratique. Reste la dernière condition, (C_3) , qui est la plus importante.

Ces conditions sont légèrement différentes de celles qu'a proposées Tijdeman : $\frac{\omega l}{c} \ll 1$ et $\frac{\omega R}{c} \ll 1$. Les conditions de celui-ci impliquent bien (C_3) , mais la condition $\frac{\omega R}{c} \ll 1$ n'est pas nécessaire au sens strict : du reste, dans les résultats numériques qu'il donne, il utilise la valeur $\frac{\omega R}{c} = \frac{\pi}{2}$, et obtient pour $\frac{\omega R}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega l}{c}}} > 100$, une erreur inférieure à 4 % pour la solution réduite par rapport à la solution exacte. En toute rigueur, la dénomination "solution pour les basses fréquences réduites" ($\frac{\omega R}{c} \ll 1$), employée par Tijdeman, est donc un peu trop restrictive.

Dans le domaine audible ($f < 15$ kHz), une condition suffisante pour satisfaire (C_3) est : $R \ll 0,7$ m ; il n'y avait donc de problème pour des instruments à vent que pour l'extrémité d'un pavillon très large, et aux fréquences très aiguës, mais alors l'amortissement est très faible, et le rayonnement très important. On peut donc affirmer que (C_3) est satisfaite pour les instruments à vent.

3.4.3. Signification physique de la solution réduite

L'hypothèse (2b) (cf §3.4.1) revient à considérer τ_1 , et donc la pression p comme indépendantes du rayon r (on a développé J_0 autour de l'origine). Seule la vitesse dépendra du rayon, car τ_2 n'est pas développable de la même façon. Nous empruntons la figure 2 à Tijdeman : elle montre que la vitesse axiale présente une allure parabolique pour les petites valeurs de $s = k_0 R$, puis tend à être presque uniforme aux grandes valeurs de s , bien que s'annulant (par hypothèse) aux parois ; les effets visco-thermiques se font alors sentir essentiellement près des parois, d'où l'expression abrégée que nous employons quelquefois "pertes visco-thermiques aux parois".

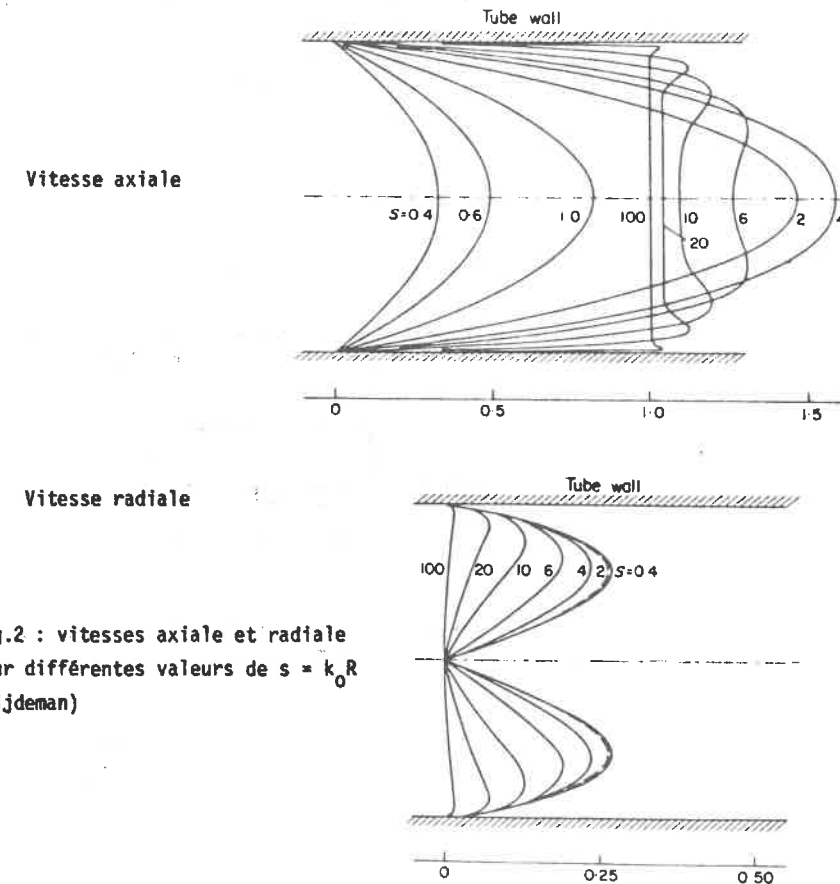


Fig.2 : vitesses axiale et radiale pour différentes valeurs de $s = k_0 R$ (Tijdeman)

Ceci confirme que se ramener à une ligne de transmission d'ondes planes, en effectuant des moyennes est particulièrement adapté aux grandes valeurs de $s = k_0 R$. Nous verrons au paragraphe suivant que celles-ci correspondent justement au cas des instruments à vent.

Enfin, il est remarquable que dans les hypothèses de la solution réduite, les effets visqueux et thermiques se séparent ; en effet, si on appelle Z_v et Y_t l'impédance en série et l'admittance en série (par unité de longueur) de la ligne de transmission, on obtient, d'après (12) et (13) :

$$(14) \quad \begin{cases} Z_v = jk' \zeta = j\rho\omega \frac{1}{1 - \frac{2}{k_0 R} \frac{J_1(k_0 R)}{J_0(k_0 R)}} \\ Y_t = jk' / \zeta = j \frac{\omega}{\rho c^2} \left\{ 1 + (\gamma - 1) \frac{2}{k_2 R} \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \right\} \end{cases}$$

$$(\text{Rappelons que } k_0 = \sqrt{-j \frac{\omega}{c l_v}} \text{ et } k_2 = \sqrt{-j \frac{\omega}{c l_h}})$$

Les équations de l'acoustique s'écrivent alors pour les ondes planes dans un tuyau cylindrique :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = Z_v u \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = Y_t p \end{cases}$$

On en tire les solutions bien connues pour une ligne de transmission ; soit $\Gamma = jk' = \sqrt{Z_v Y_t}$ et $\zeta = \sqrt{\frac{Z_v}{Y_t}}$:

$$\begin{cases} p = a e^{-\Gamma x} + b e^{+\Gamma x} \\ u = 1/\zeta (a e^{-\Gamma x} - b e^{+\Gamma x}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} p_2 = \text{ch} \Gamma(x_2 - x_1) p_1 + \text{sh} \Gamma(x_1 - x_2) u_1 \zeta \\ u_2 = \text{sh} \Gamma(x_1 - x_2) \frac{p_1}{\zeta} + \text{ch} \Gamma(x_1 - x_2) u_1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } Z_2/\zeta = \frac{\text{th} \Gamma(x_1 - x_2) + Z_1/\zeta}{1 + \text{th} \Gamma(x_1 - x_2) Z_1/\zeta} = \text{th}(\Gamma(x_1 - x_2) + \text{Arg th } Z_1/\zeta)$$

Z_2 est appelée "impédance ramenée" de Z_1 par la longueur (algébrique) $(x_1 - x_2)$.

3.5. La solution pour les tuyaux larges (application aux instruments à vent)

La solution réduite a été simplifiée dans les deux cas extrêmes ($k_2 R \gg 1$, et $k_2 R \ll 1$) par de nombreux auteurs, au moyen de développements limités ou asymptotiques de (14).

Pour les instruments à vent, le développement asymptotique au 1er ordre est dans la plupart des cas suffisant, mais il peut être nécessaire d'aller jusqu'au 2^e ordre. Celui-ci est valable pour $\sqrt{\frac{\omega}{c l_h}} R > 8$ (l'erreur étant alors inférieure à 1 %) : comme $l_v > l_h$,

le développement en $k_0 R$ est correct dès qu'il l'est pour $k_2 R$. Pour les instruments à vent, $\frac{\omega}{c l_h} R = 8$ correspond par exemple au cas très défavorable suivant :

$$f = 60 \text{ Hz, et } R = 0,002 \text{ m.}$$

Il s'agit alors de développer asymptotiquement des fonctions de Kelvin d'ordre 0 et 1. On obtient (cf Abramowitz, 161) :

$$\frac{2}{x \sqrt{-j}} \frac{J_1(x \sqrt{-j})}{J_0(x \sqrt{-j})} = \frac{\sqrt{2}}{x} \left(1 - j \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right)$$

On obtient ainsi, en posant $r_v = \sqrt{\frac{\omega}{c l_v}} R$,

$$\text{et } r_t = \sqrt{\frac{\omega}{c l_h}} R, P = \sqrt{2}/r_v, PQ = (\gamma - 1) \sqrt{2}/r_t :$$

$$(15) \quad \begin{cases} Z_v = \rho \omega \left(P \left(1 + \frac{3P}{2} \right) + j(1+P) \right) \\ Y_t = \frac{\omega}{\rho c^2} \left(PQ \left(1 - \frac{PQ}{2} \frac{1}{\gamma-1} \right) + j(1+PQ) \right) \end{cases}$$

$$\text{et } (16) \quad \begin{cases} \Gamma = j \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{P}{2} (1+Q) - j \frac{P}{2} (1+P) (1+Q) - \frac{PQ^2}{2} \frac{1}{\gamma-1} \right) \\ \zeta = \rho c \left(1 + \frac{P}{2} (1-Q) - j \frac{P}{2} (1+P) (1-Q) + \frac{PQ^2}{2} \frac{3\gamma-2}{\gamma-1} \right) \end{cases}$$

Dans ces expressions, on remarque que pour la constante de propagation, les effets visqueux et thermiques s'additionnent, alors qu'ils se retranchent pour l'impédance itérative ; de plus, les termes du 2^e ordre s'annulent dans les parties réelles de $k' = -j\Gamma$, et ζ .

L'intérêt de l'écriture précédente est que Q, rapport des deux effets, est constante pour l'air dans les conditions usuelles :

$$Q = \sqrt{\frac{l_h}{l_v}} (\gamma - 1) = 0,477$$

Le résultat du développement asymptotique a déjà été donné au 5^{ème} ordre par Weston (158), mais seulement pour la constante de propagation. Quant à Benade (95), il l'a effectué au 2^{ème} ordre pour Γ et ζ , mais de manière erronée.

(Le calcul au 1^{er} ordre a été effectué par de très nombreux auteurs, directement à partir de l'équation (10), sans l'intermédiaire de la solution réduite).

3.6. Les modes supérieurs

Les divers auteurs qui ont résolu l'équation (10) de Kirchhoff ne se sont intéressés qu'au mode zéro, dont l'approximation sans pertes est le mode plan. Mais il existe d'autres solutions, qui correspondent aux modes supérieurs.

Nous ne voulons pas en faire un calcul précis dans le cas général, mais seulement montrer, dans le domaine de fréquence et de rayon qui correspond aux instruments à vent, que la prise en compte des pertes modifie très peu la constante de propagation : par déduction on pourra négliger l'existence des modes supérieurs en se contentant de justifications qui ne tiendront pas compte des pertes.

Pour cela, nous allons supposer que le mode 1 est proche du mode 1 sans amortissement, obtenu pour $k'^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2$, où α_1 est le premier zéro de la fonction $J'_0(x)$ ($\alpha_1 \simeq 3,832$).

Soit donc $k'^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_1 + \epsilon}{R}\right)^2$ où ϵ est supposé petit. Nous

faisons les mêmes hypothèses que pour le mode 0 dans le cas des instruments à vent :

$$(1) \quad \frac{\omega l}{c} \ll 1 \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{c}, k_1 \ll k_0, k_1 \ll k_2$$

$$(2) \quad k_i R \gg 1 \text{ pour } i = 0 \text{ ou } 2$$

$$(3) \quad \text{De plus, } k_i'^2 \gg k_i^2, \text{ pour } i = 0 \text{ ou } 2; \text{ avec (1), on a : } k_1'^2 \gg k_1^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k'^2 + \left(\frac{\alpha_1 + \epsilon}{R}\right)^2 \Rightarrow k_i'^2 \gg \left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2$$

On obtient alors, en développant au 1er ordre :

$$D_1 = -\frac{\alpha_1}{R} \epsilon \quad D_2 = -k_2 \quad D_0 = -k_0$$

$$D'00 \in \frac{\alpha_1}{R} \left(1 + \frac{2}{k_0 R}\right) = \left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2 \frac{1}{k_0} - k_1^2 \left((\gamma-1) \frac{1}{k_2} \right) + \frac{1}{k_0}$$

$$\text{soit } \epsilon \sim \frac{\alpha_1}{k_0 R} \left(1 - \frac{k_1^2}{\alpha_1^2} R^2 (1 + (\gamma-1) \frac{k_0}{k_2})\right)$$

Si $k_1 = \frac{\omega}{c}$ reste du même ordre de grandeur que $\frac{\alpha_1}{R}$ (ou très inférieur), ϵ est de l'ordre de $\frac{\alpha_1}{k_0 R}$, et il est petit, conformément à l'hypothèse de départ. Ainsi, dans les cas où la fréquence est très inférieure à la fréquence de coupure du mode 1 sans pertes

$\left(\frac{\omega}{c} \ll \frac{\alpha_1}{R}\right)$, le report de l'expression trouvée ci-dessus pour ϵ dans k'^2 donne immédiatement :

$$k'^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{k_0 R}\right)^2$$

L'atténuation du mode est donc renforcée par les pertes, ce qui est évident, et de surcroît seules les pertes visqueuses interviennent. En conclusion pour un tuyau cylindrique infiniment long, la prise en compte des pertes n'influe pas le caractère évanescent des modes supérieurs pour les fréquences telles que $\omega R/c \ll 3,8$, premier zéro de J'_0 ou de J_1 . De plus l'excès d'atténuation est peu significatif pour un tuyau large.

4. DISCONTINUITES DANS UN TUYAU CYLINDRIQUE

Pour étudier les discontinuités dans un tuyau cylindrique, nous négligeons les pertes qu'elles occasionnent, en étudiant simplement comment on peut raccorder des ondes planes de part et d'autre des discontinuités. Celles-ci peuvent être une discontinuité de section, ou encore une dérivation (dont le trou latéral est un cas particulier).

4.1. Les discontinuités de section

4.1.1. Théorie unidimensionnelle

Soient deux tuyaux de section S_1 et S_2 (Fig. 3) :



Fig.3 : discontinuité de section

La théorie la plus simple (Bernoulli (18)) consiste à admettre que de part et d'autre de la discontinuité, les ondes sont planes ; plus précisément, les ondes sont redevenues planes très près de la discontinuité, et on néglige donc la distance sur laquelle elles ne le sont pas. On admet par conséquent la continuité de la pression et du débit, c'est-à-dire la discontinuité de la vitesse. De plus on néglige la turbulence :

De part et d'autre de la discontinuité, on a :

$$\begin{cases} p_1 = p_2 \\ S_1 u_1 = S_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (17)$$

Ce résultat, très classique, a été utilisé notamment par Bouasse (22) pour l'étude des tuyaux d'orgue "à cheminée".

[†]supposée petite devant la longueur d'onde

Notons ici qu'il est probablement à la base de la définition la plus courante de l'impédance :

$Z = \frac{\text{pression}}{\text{débit}}$; celle-ci évite les discontinuités d'impédance

aux raccordements de deux tuyaux, et les remplace par des différences d'impédance itérative entre les deux tuyaux. Pour notre part, nous préférons la définition $Z = \frac{\text{pression}}{\text{vitesse}}$, que nous trouvons plus maniable en

général - le produit des deux grandeurs correspond alors à une densité de puissance.

La théorie ci-dessus concorde assez bien avec les résultats expérimentaux ; néanmoins quelques auteurs, tels Karal (12), pour des tuyaux cylindriques, Ingard (10) dans le cas particulier du résonateur de Helmholtz, ou Vandenbosch (15), pour des tuyaux rectangulaires, ont proposé des corrections à partir de solutions exactes. Elles aboutissent toutes à des corrections de longueur, qui correspondent à l'énergie réactive des modes évanescents créés par la discontinuité.

4.1.2. Les corrections à la théorie élémentaire : utilisation de la théorie modale.

Nous présentons ici le calcul de Karal (12), en le généralisant au cas où les tuyaux ne sont pas infiniment longs. Le calcul se fait sans tenir compte de l'amortissement ; le résultat final étant approché, ce serait en effet sans intérêt.

Nous commençons par le cas de l'évasement ($S_2 > S_1$). La solution générale de l'équation des ondes sans amortissement $(\Delta + k^2)p = 0$ peut s'écrire dans le cylindre de rayon R_2 (pour des ondes à symétrie circulaire) :

$$p = \sum_0^{\infty} p_n = \sum_0^{\infty} (A_n e^{-jk_n x} + B_n e^{jk_n x}) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_2}) e^{j\omega t}$$

D'où la vitesse axiale :

$$u_x = \sum_0^{\infty} u_{xn} = \sum_0^{\infty} \frac{k_n}{k_0 c} (A_n e^{-jk_n x} - B_n e^{jk_n x}) J_0(\alpha_n \frac{r}{R_2}) e^{j\omega t}$$

Le tuyau étant à parois parfaitement réfléchissantes, on doit avoir $u_r = 0$ pour $r = R_2$: $J'_0(\alpha_n) = 0$, ce qui détermine les α_n pour $n > 1$. Pour $n = 0$, $\alpha = 0$, et donc $J_0(\alpha_0 \frac{r}{R_2}) = 1$: c'est le mode plan. Enfin $k_n^2 = k^2 - (\frac{\alpha_n}{R_2})^2$.

Dans le tuyau 1, les solutions ont la même forme, et sont reliées à celles du tuyau 2 par les conditions au changement de section :

$$\begin{cases} p_1 = p_2 \\ u_{x1} = u_{x2} \end{cases} \quad \text{si } 0 \leq r \leq R_1 ; \quad u_{x2} = 0 \text{ si } R_1 \leq r \leq R_2$$

On cherche l'impédance Z_1 du mode 0 dans le tuyau 1 : si on remarque que les moyennes sur la section S_1 des modes supérieurs sont nulles, puisque la moyenne de J_0 est proportionnelle à J_1 (les zéros de J_1 étant ceux de J'_0), Z_1 s'écrit simplement : $Z_1 = \frac{\bar{p}}{\bar{u}}$. Il reste à évaluer $\bar{p}$ et $\bar{u}_x$ avec les caractéristiques du tuyau 2.

Pour la pression, on trouve en $x = 0$:

$$\bar{p} = A_0 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \frac{2}{\alpha_n} \frac{R_2}{R_1} J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_2})$$

Le même calcul peut être effectué avec la vitesse ; les conditions de raccordement précédemment citées permettent alors de relier les coefficients $A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$ entre eux dans le cas particulier où le tuyau 2 est infini, donc $B_n = 0 \forall n$.

Le résultat qu'il obtient légitime à son avis dans la plupart des applications pratiques l'approximation suivante :

$$\int_0^{R_1} u_x J_0(\alpha_n \frac{r}{R_2}) r dr \simeq \bar{u}_x \int_0^{R_1} J_0(\alpha_n \frac{r}{R_2}) r dr$$

$$= \bar{u}_x \frac{R_1 R_2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_2})$$

Or, l'orthogonalité des modes implique :

$$\int_0^{R_2} u_x J_0(\alpha_n \frac{r}{R_2}) r dr = \frac{k_n}{k \rho c} (A_n - B_n) \frac{1}{2} R_2^2 J_0^2(\alpha_n)$$

Grâce à l'approximation ci-dessus, l'infinité d'équations se ramène simplement à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_x \frac{R_1 R_2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n \frac{R_1}{R_2}) = \frac{k_n}{k \rho c} (A_n - B_n) \frac{1}{2} R_2^2 J_0^2(\alpha_n) \quad \forall n \geq 1 \\ \bar{u}_x \frac{R_1^2}{2} = \frac{1}{\rho c} (A_0 - B_0) \frac{R_2^2}{2} \end{array} \right.$$

On écrit l'expression approchée de Z_1 :

$$Z_1 = \frac{\bar{p}}{\bar{u}_x} = \rho c \left(\frac{A_0 + B_0}{A_0 - B_0} \frac{R_1^2}{R_2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + B_n}{A_n - B_n} \frac{k}{k_n} \frac{4}{\alpha_n^2} \frac{J_1^2(\alpha_n \frac{R_1}{R_2})}{J_0^2(\alpha_n)} \right)$$

Le terme d'ordre 0 correspond au résultat donné au paragraphe précédent, puisque l'impédance d'entrée du tuyau 2 est :

$$Z_2 = \rho c \frac{A_0 + B_0}{A_0 - B_0}$$

Les autres termes correspondent aux modes supérieurs. Ceux-ci

sont évanescents si $k < \frac{\alpha_n}{R_2}$, et de plus si $|B_n| \ll |A_n|$. Cette

condition est remplie si $e^{-2jk_n l} \left| \frac{Z_{n0} - \frac{k}{k_n}}{Z_{n0} + \frac{k}{k_n}} \right| \ll 1$, où l est la

longueur du tuyau 2, et Z_{n0} son impédance de sortie pour le mode n .

Pour une impédance de sortie donnée, il faut que le tuyau soit assez long, ce que nous admettons. Nous discuterons cette question au chapitre IV.

De plus, nous admettons que $k \ll \frac{\alpha_1}{R_2}$, donc que $jk_n \simeq \frac{\alpha_n}{R_2} \quad \forall n$.

On obtient alors :

$$Z_1 = \rho c \left| \frac{A_0 + B_0}{A_0 - B_0} \frac{R_1^2}{R_2^2} + 4jk R_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \frac{J_1^2(\alpha_n \frac{R_1}{R_2})}{J_0^2(\alpha_n)} \right|$$

En définitive, nous écrivons :

$$(18) \quad Z_1 = \frac{S_1}{S_2} Z_2 + j \rho c \frac{8}{3\pi} k R_1 H \left(\frac{R_1}{R_2} \right)$$

$$\text{ou} \quad H \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \frac{J_1^2(\alpha_n \frac{R_1}{R_2})}{J_0^2(\alpha_n)}$$

La fonction H est difficile à calculer, en raison de problèmes de convergences de séries. Elle est décroissante de 1 (pour

$\frac{R_1}{R_2} = 0$) à 0 (pour $\frac{R_1}{R_2} = 1$) - Quand $\frac{R_1}{R_2} = 0$, $Z = j \rho c \frac{8}{3\pi} k R_1$, ce qui est

exactement le même résultat que celui obtenu par Rayleigh pour la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement d'un tuyau débouchant sur un écran infini (cf. § 6.1).

Le résultat que nous avons obtenu concerne un évasement. Dans le cas contraire du rétrécissement ($S_2 < S_1$), il suffit d'inverser l'orientation de l'axe des x , ce qui donne le schéma suivant (Fig. 4) :

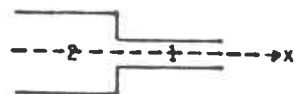


Fig.4 : rétrécissement de section

Il faut alors choisir $jk_n = -\frac{\alpha_n}{R_2}$; d'où :

$$Z_1 = \frac{S_1}{S_2} Z_2 - j\rho c \frac{8}{3\pi} k R_1 H \left(\frac{R_1}{R_2} \right)$$

Pour obtenir à nouveau le tuyau 1 à gauche et le tuyau 2 à droite, il suffit alors d'intervertir les indices 1 et 2 :

$$Z_2 = \frac{S_2}{S_1} Z_1 - j\rho c \frac{8}{3\pi} k R_2 H \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

soit
$$Z_1 = \frac{S_1}{S_2} Z_2 + j\rho c \frac{8}{3\pi} k R_1 \frac{R_1}{R_2} H \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Par conséquent, on a dans tous les cas :

$$(18 \text{ bis}) \quad Z_1 = \frac{S_1}{S_2} Z_2 + j\rho c \frac{8}{3\pi} k R_1^2 \left(\frac{1}{R_{\inf}} \right) H \left(\frac{R_{\inf}}{R_{\sup}} \right)$$

$$\text{où } \begin{cases} R_{\inf} = \inf(R_1, R_2) \\ R_{\sup} = \sup(R_1, R_2) \end{cases}$$

4.2. Dérivation

4.2.1. Théorie unidimensionnelle

La théorie unidimensionnelle des raccordements de tuyaux cylindriques peut se généraliser aux dérivation ; soit un tuyau 1 se divisant en deux tuyaux 2 et 3 (Fig 5) :

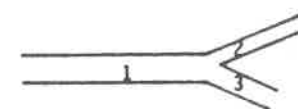


Fig.5 : dérivation

L'hypothèse de départ est encore que près de la discontinuité, les ondes sont planes dans chacun des tuyaux ; on admet alors la continuité des pressions et des débits. Cette approximation est satisfaisante quand les dimensions transversales des tuyaux sont très inférieures à la longueur d'onde. Elle ne tient aucun compte de l'orientation des tuyaux, ce qui permet de considérer un trou latéral comme une dérivation particulière ; d'autre part, la zone de raccordement n'est pas plane, mais de forme difficile à déterminer, ce qui implique une incertitude sur les longueurs des différents tuyaux.

Avec ces hypothèses, plusieurs auteurs (Stewart (15), Bouasse (22) notamment) ont écrit les relations suivantes :

$$\begin{cases} p_1 = p_2 = p_3 \\ S_1 u_1 = S_2 u_2 + S_3 u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 Y_1 = S_2 Y_2 + S_3 Y_3 \\ S_1 U_1 = S_2 U_2 + S_3 U_3 \end{cases} \quad (19)$$

Dans l'équation de continuité des débits, nous avons affecté un signe à chacun d'entre eux : celui-ci est déterminé par l'orientation dans chaque tuyau (que nous avons choisie correspondant au sens du flux d'énergie), c'est-à-dire par la position de la source.

Dans le présent exemple, nous avons supposé celle-ci située dans le tuyau 1.

Il est à noter que les hypothèses ci-dessus assurent de manière immédiate la conservation de l'énergie : le flux d'énergie par tranche est en effet (en grandeurs réelles) le produit de la pression par le débit.

Par ailleurs, il est utile de connaître le rapport des flux d'énergie moyens (par période) I_i dans chaque tuyau ; en grandeurs complexes, on a :

$$I_i = S_i \operatorname{Re}(p_i) \operatorname{Re}(u_i) = \frac{1}{2} S_i \operatorname{Re}(p_i u_i^*) = \frac{1}{2} S_i |p_i|^2 \operatorname{Re}(Y_i)$$

d'où

$$\frac{I_j}{I_i} = \frac{S_j \operatorname{Re}(Y_j)}{S_i \operatorname{Re}(Y_i)}$$

(Nous reviendrons sur la question de l'énergie de manière approfondie au § 5.1.2.).

4.2.2. Corrections de la théorie unidimensionnelle pour les trous latéraux

Soit un tuyau cylindrique, d'épaisseur h , percé d'un trou latéral (Fig 6) :

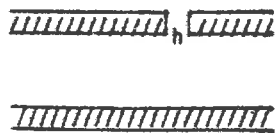


Fig.6 : tuyau percé d'un trou latéral

La longueur choisie comme longueur de la cheminée dérivée du tuyau principal est d'abord h ; ceci permet de respecter aux très basses fréquences l'approximation des constantes localisées, qui ne fait intervenir que le volume†. Mais on est ensuite amené à chercher des corrections de hauteur Δh pour un meilleur accord avec l'expérience.

Malheureusement, une étude généralisant celle du § 4.1.2. aux dérivations n'a pas encore été faite, et elle serait sans doute extrêmement lourde. Les auteurs qui se sont penchés sur ce problème sont les suivants :

Lapin (126) et T. Cote (107) ont résolu le problème du raccordement des modes en effectuant un calcul numérique.

Expérimentalement, Lippert (128) et Chaigne (109) ont déterminé des corrections de hauteur pour une cheminée latérale fermée : ils montrent que celles-ci dépendent de la fréquence, de la hauteur et du diamètre de la cheminée. Nederveen (139) a proposé une formule empirique pour cette correction.

Quant à Benade (10), il propose une correction empirique pour un trou latéral ouvert, qui intègre l'effet de la dérivation et celui du rayonnement à l'extrémité du trou (cf § 6). La correction qu'il propose est $1,5 b$, où b est le rayon du trou : elle est indépendante de la fréquence, et des autres paramètres géométriques. Elle est donc très imparfaite, mais elle est en général satisfaisante. Si on lui enlève la correction due au rayonnement, on arrive approximativement à $\Delta l = 0,7 b$.

4.3. Validité de la théorie unidimensionnelle pour la description des discontinuités dans un tuyau cylindrique.

A partir de l'expérience ou de la théorie, nous avons pu proposer des corrections à la théorie unidimensionnelle. Mais, même dans le cas du raccordement de deux tuyaux cylindriques, nous n'avons

† pour un trou fermé (cf § 5.2.1.)

pu trouver qu'une condition nécessaire ($\sqrt{(\frac{\alpha_n}{R})^2 - k^2} \gg 1$), autrement dit ($\sqrt{(\frac{3,8}{R})^2 - k^2} \gg 1$) pour assurer la validité de la correction, et a fortiori la validité de l'approximation unidimensionnelle elle-même. En toute rigueur, nous ne pourrions donc conclure que grâce aux résultats expérimentaux.

5. L'EQUATION DES PAVILLONS

Combinant les résultats des § 3 et 4, nous écrivons l'équation des pavillons avec amortissement (§5.1); ensuite (§5.2), nous en étudions les solutions: nous rappelons les diverses solutions connues pour l'équation sans amortissement, et envisageons diverses solutions numériques pour l'équation avec amortissement. Puis nous discutons (§5.3) la validité de l'équation des pavillons, ce qui nous amène à préciser notre interprétation de leur fonctionnement; enfin nous étudions les discontinuités dans un pavillon (§5.4).

5.1. L'équation des pavillons avec amortissement

5.1.1. Les équations pour l'admittance, l'impédance, la pression et la vitesse.

L'hypothèse fondamentale de la théorie des pavillons est que ceux-ci peuvent être considérés comme une succession de petits cylindres de sections différentes, dans lesquels les ondes sont planes, et sont raccordées les unes aux autres par les relations de changement de section (§ 4.1.)

Il suffit donc, dans les équations au 1er ordre du tuyau cylindrique, d'ajouter aux accroissements dus à la propagation les accroissements dus aux changements de section :

$$\begin{cases} p' = -Z_v u \\ u' = -Y_t p \\ Y' = Y^2 Z_v - Y_t \\ Z' = Z^2 Y_t - Z_v \end{cases} + \begin{cases} p' = 0 \\ u' = -\frac{S'}{S} u \\ Y' = -\frac{S'}{S} Y \\ Z' = +\frac{S'}{S} Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' = -Z_v u \\ u' = -Y_t p - \frac{S'}{S} u \\ Y' = -\frac{S'}{S} Y + Y^2 Z_v - Y_t \\ Z' = +\frac{S'}{S} Z + Z^2 Y_t - Z_v \end{cases}$$

Cette présentation montre bien pourquoi ce sont les équations différentielles en admittance et en impédance qui sont les plus simples : elles sont du premier ordre. Les équations en pression et en vitesse

sont par contre moins immédiates à obtenir. Jusqu'à présent, l'équation des pavillons avec amortissement n'a été écrite que pour la pression, par Nederveen (69), et Benade et Jansson (13).

Finalement, on a, si $\Gamma^2 = Z_v Y_t$

$$(20a) \quad Z' - \frac{S'}{S} Z = Z^2 Y_t - Z_v$$

$$(20b) \quad Y' + \frac{S'}{S} Y = Y^2 Z_v - Y_t$$

$$(20c) \quad p'' + p' \left(\frac{S'}{S} - \frac{Z' Y}{Z_v} \right) - \Gamma^2 p = 0$$

$$(20d) \quad u'' + u' \left(\frac{S'}{S} - \frac{Y' Z}{Y_t} \right) - u(\Gamma^2 - (\frac{S'}{S})') - \frac{S'}{S} \frac{Y'_t}{Y_t} = 0$$

(Dans ces équations Z_v , Y_t et Γ dépendent du rayon et donc de x).

5.1.2. L'équation de l'énergie

Pour obtenir l'équation de l'énergie dans les pavillons avec amortissement, nous devons partir des équations classiques des lignes de transmission (cf § 3.4.) et y intégrer les changements de section. Nous les écrirons pour les grandeurs p et u réelles :

$$(21) \quad \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{R} u \\ -\frac{1}{S} \frac{\partial (Su)}{\partial x} = \mathcal{C} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{G} p \end{cases}$$

avec $Z_v = \mathcal{R}(x) + j\omega \mathcal{L}(x)$ et $Y_t = \mathcal{G}(x) + j\omega \mathcal{C}(x)$

Soit J = pu le flux de densité d'énergie instantané, c'est-à-dire le travail effectué par les forces acoustiques par unité de temps et unité de surface. Le flux instantané à travers la section S du pavillon est donc $SJ = S$ pu. Sa dérivée s'écrit, en utilisant (21) :

$$\frac{\partial(SJ)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}(Su) + p \frac{\partial(Su)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathcal{L} Su^2 + \frac{1}{2} \mathcal{C} S p^2 \right) - \mathcal{R} Su^2 - \mathcal{G} S p^2$$

Le premier terme correspond à la dérivée de la densité d'énergie totale $E_t = \frac{1}{2} \mathcal{L} u^2 + \frac{1}{2} \mathcal{C} p^2$; les deux derniers termes correspondent à l'énergie perdue sous forme calorifique, le premier par viscosité, le second par conduction thermique. On peut donc écrire l'équation de l'énergie cherchée :

$$(22) \quad \frac{\partial(SJ)}{\partial x} = -\frac{\partial E_t}{\partial t} - \mathcal{R} S u^2 - \mathcal{G} S p^2$$

Si on s'intéresse aux moyennes, en utilisant le théorème dans le temps sur la moyenne du produit de deux fonctions périodiques de même période ($\overline{fg} = \frac{1}{2} \text{Re}(fg^*)$), on obtient alors, ($I = J$) :

$$(22bis) \quad \frac{\partial SI}{\partial x} = -\frac{1}{2} \mathcal{R} S |u|^2 - \frac{1}{2} \mathcal{G} S |p|^2$$

Pour un pavillon sans pertes ($\mathcal{R} = \mathcal{G} = 0$), le flux d'énergie moyen par tranche est constant, ce que nous avons déjà noté pour une discontinuité de section et une dérivation (§ 4.2.1.).

Nous pouvons aussi chercher la dérivée par rapport à x de la densité d'énergie totale par tranche :

$$(23) \quad \frac{\partial E_t}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{L}'}{S} \right)' (Su)^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{C} S)' p^2 \right) - \mathcal{L} \frac{\partial(SJ)}{\partial t} - (\mathcal{L} \mathcal{G} + \mathcal{R}) (SJ)$$

soit, en moyenne :

$$\frac{\partial \overline{E_t}}{\partial x} = \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{L}'}{S} \right)' S^2 |u|^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{C} S)' |p|^2 - (\mathcal{L} \mathcal{G} + \mathcal{R}) (SI)$$

On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'énergie totale moyenne soit indépendante de x est que :

$$- \text{il n'y ait pas de pertes } (\mathcal{G} = \mathcal{R} = 0)$$

$$- \left(\frac{\mathcal{L}'}{S} \right)' = 0 \text{ et } (\mathcal{C} S)' = 0$$

Cette dernière condition n'est remplie que pour un tuyau cylindrique ($S' = 0$) ; nous retrouvons là un résultat bien connu : les ondes planes non amorties sont telles que l'énergie totale moyenne est indépendante de x .

5.2. Solutions exactes connues ou solutions approchées de l'équation des pavillons.

5.2.1. L'équation des pavillons sans amortissement

On a sans amortissement : $\Gamma = jk$, $\zeta = 0$. Nous utiliserons pour simplifier l'impédance réduite : $z = 1$. L'équation des pavillons s'écrit alors, successivement pour l'impédance, l'admittance, la pression et la vitesse :

$$(24a) \quad Z' - \frac{S'}{S} Z = jk (Z^2 - 1)$$

$$(24b) \quad Y' + \frac{S'}{S} Y = jk (Y^2 - 1)$$

$$(24c) \quad p'' + \frac{S'}{S} p' + k^2 p = 0$$

$$(24d) \quad u'' + \frac{S'}{S} u' + (k^2 + \left(\frac{S'}{S} \right)') u = 0$$

Cette équation a été étudiée par de très nombreux auteurs, comme en témoigne l'abondante bibliographie recueillie par Eisner (114). On l'appelle couramment équation de Webster (156), bien qu'elle remonte à Bernoulli et Lagrange.

On en connaît les solutions dans quelques cas : le pavillon conique ($\frac{S'}{S} = \frac{2}{x}$), le pavillon caténoïdal ($\frac{d''}{d} = \text{constante}$), le pavillon de "Bessel" ($\frac{S'}{S} = \frac{\alpha}{x}$), car l'équation pour la pression est alors une équation de Bessel. On peut remarquer que d''/d , où d est le diamètre, est constant pour le tuyau caténoïdal, et nul pour le cône. Ceci suggère d'écrire l'équation des pavillons comme suit :

$$\text{pour la pression : } (pd)'' + (k^2 - \frac{d''}{d}) (pd) = 0 ; \quad (25a)$$

$$\text{d'où la solution } p = \frac{1}{d} e^{\pm j \sqrt{k^2 - \frac{d''}{d}} x}$$

si $\frac{d''}{d}$ est constant.

$$\text{pour l'admittance : } X' = jk(X^2 - 1) - \frac{1}{jk} \frac{d''}{d} \text{ où } X = Y - \frac{1}{jk} \frac{d'}{d} \quad (25b)$$

Le cône s'avère alors être un cas très remarquable :

$$\text{si } X = Y - \frac{1}{jkx} \text{ (où l'origine des } x \text{ est prise au sommet du cône),}$$

X vérifie l'équation de propagation du tuyau cylindrique. Autrement dit, pour effectuer des calculs d'admittance ramenée dans un cône, il suffit d'utiliser "l'admittance corrigée" X , les calculs étant alors les mêmes que dans un tuyau cylindrique.

Les remarques précédentes amènent aussi à deux solutions approchées, valables dans les autres cas que ceux cités ci-dessus (d''/d non constant). Ces solutions approchées, proposées par divers auteurs,

+ dont le pavillon exponentiel est un cas particulier ($S'/S = d'/d = \text{constante}$)

ont en commun de privilégier la pression :

- d'une part, s'agissant d'ondes dans un milieu à caractéristiques variables, la solution WKB a bien entendu été proposée, par exemple par Morse et Ingard (134, p. 602) ou par Benade et Jansson (13). Elle revient à calculer l'intégrale de la phase, de la manière suivante :

$$pd = e^{\pm \int_0^x \sqrt{k^2 - \frac{d''}{d}} dx}$$

Cette solution suppose que le pavillon est tel que la dérivée de $k^2 - \frac{d''}{d}$ est négligeable.

- d'autre part, une solution a été proposée, dans le cas où $\frac{d''}{d}$ varie peu, par Salmon (144-5) et Morse (133) : ils supposent donc que le pavillon est proche du cône ou du pavillon caténoïdal. Ils proposent :

$$pd = e^{\pm j \sqrt{k^2 - \frac{d''}{d}} (x).x}$$

Ces deux solutions sont malheureusement rarement applicables aux instruments à vent ; ainsi pour les pavillons des cuivres, proches des pavillons de Bessel, ces approximations sont peu satisfaisantes.

A ces approximations, on peut ajouter celle des constantes localisées. Si la longueur du pavillon est petite devant la longueur d'onde, Y ou Z peuvent rester petits ou grands sur toute la longueur ; on peut les écrire :

$$\text{a) si } Y \text{ est petit : } Y' + \frac{S'}{S} Y = -jk \quad Y_2 S_2 - Y_1 S_1 = -jk \int_{x_1}^{x_2} S dx$$

La pression est alors constante, car $p' = -jkYp$ est petit. On remarque que l'intégrale représente le volume V du pavillon (cette approximation est celle que l'on fait pour le résonateur de Helmholtz, et en général pour les petites cavités).

b) si Z est petit : $Z' - \frac{S'}{S} Z = -jk \Rightarrow \frac{Z_2}{S_2} - \frac{Z_1}{S_1} = -jk \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{S} dx$

Le débit est alors constant, car $(Su)' = -jkZSu$ est petit (cette approximation est celle que l'on fait pour le goulot du résonateur de Helmholtz, et en général pour les tuyaux courts et étroits débouchant sur l'espace infini).

L'approximation des constantes localisées n'est du reste qu'un cas particulier des approximations obtenues en développant l'admittance ou l'impédance en série selon les puissances entières de jk . On peut utiliser celles-ci dès que ce développement est possible en un point. Par exemple, au troisième ordre, si on suppose que $Y_1 = 0$, on obtient par identification :

$$Y_2 S_2 = -jk V(x_2) + (jk)^3 \int_{x_1}^{x_2} V^2(x) / S(x) dx$$

$$\text{où } V(x) = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx$$

5.2.2. L'équation des pavillons avec amortissement

Dans ce cas, Γ et ζ dépendent du rayon, et donc de x . L'équation (20) n'a aucune solution connue, excepté le cas trivial du tuyau cylindrique. On est donc contraint à rechercher des solutions approchées, ou numériques.

Nederveen et Van Wulfften-Paëthe (6970) ont proposé une solution approchée pour le cône ; de notre côté, nous proposons une autre solution approchée, utilisable dans tous les cas où l'équation sans amortissement a des solutions connues. Nous exposerons ces solutions au chapitre 2.

Quant aux solutions numériques, elles sont de deux sortes, selon qu'on utilise une résolution pas à pas de l'équation différentielle, ou un découpage en petits éléments dans lesquels on connaît la solution de l'équation. Benade et Jansson (13) appliquent la première

méthode pour résoudre l'équation (du 2^e ordre) de la pression ; à notre avis, cette méthode n'est pas très adaptée pour obtenir des solutions dont on sait qu'elles sont voisines des fonctions trigonométriques, car sa convergence est très lente. Il est préférable pour calculer ces fonctions, d'utiliser des développements limités ; dans ce but, on découpe le pavillon en petits éléments de cylindre dans lesquels on utilise la solution connue (qui est une tangente, pour l'impédance). C'est ce qu'ont fait Strong et Plitnik (73,84). Cette méthode, basée sur l'hypothèse de départ de la théorie des pavillons, est très naturelle ; elle peut être légèrement améliorée en utilisant un découpage en troncs de cônes dans lesquels l'amortissement est supposé constant.

On utilise donc les formules suivantes, pour un tronc de cône d'extrémités 1 et 2 :

$$(26a) \quad \begin{cases} p_2 x_2 = \text{ch} \Gamma l \cdot p_1 x_1 + \zeta \text{sh} \Gamma l \cdot (u_1 x_1 - \frac{p_1}{Z_v}) \\ u_2 x_2 - \frac{p_2}{Z_v} = \zeta \text{sh} \Gamma l \cdot p_1 x_1 + \text{ch} \Gamma l \cdot (u_1 x_1 - \frac{p_1}{Z_v}) \end{cases}$$

$$(26b) \quad x_2 = \frac{\text{th} \Gamma l + x_1}{1 + \text{th} \Gamma l \cdot x_1} \quad \text{où} \quad x_1 = Y_1 \zeta - \frac{1}{\Gamma x_1}$$

$$1 = x_1 - x_2$$

Dans ces formules, x_1 et x_2 sont calculés à partir du sommet du tronc de cône, et Γ, ζ , et Z_v sont calculés pour le rayon moyen du tronc de cône. (Elles s'obtiennent en remarquant que le cône se comporte comme le cylindre, à condition de remplacer p par $p x$, et u par $u x - \frac{p}{Z_v}$).

Quand le nombre de découpages du pavillon augmente, la convergence est très satisfaisante.

5.3. Discussion de la validité de l'équation des pavillons

Nous ferons cette discussion en négligeant l'amortissement ; nous avons montré que c'est légitime, puisque dans un tuyau cylindrique large, les modes supérieurs sont peu affectés par la prise en compte de l'amortissement.

5.3.1. Ondes planes et ondes sphériques dans un cône

Le pavillon conique est un cas précieux, car on connaît les solutions exactes de l'équation de Helmholtz $(\Delta + k^2) p = 0$, qui sont les ondes sphériques. Elles s'écrivent (pour le mode zéro) :

$$p = \frac{ae^{-jkr} + be^{jkr}}{r}$$

où r est la distance de la tranche sphérique considérée au sommet du cône. Or la solution de l'équation des pavillons pour un cône a la même forme, mais la variable d'espace est x , distance de la tranche plane au sommet du cône. Ceci montre a posteriori l'approximation faite par l'équation des pavillons : celle-ci assimile une tranche sphérique à une tranche plane (Fig. 7) :

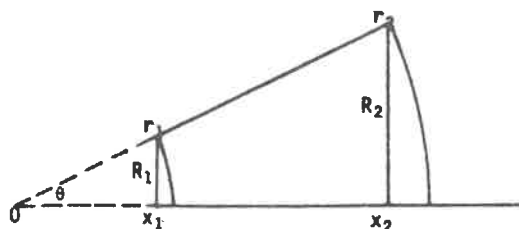


Fig. 7 : tranches planes et sphériques dans un cône

Il est par conséquent possible d'évaluer l'erreur due à l'approximation de l'équation des pavillons. Considérons une onde sphérique progressive : que l'on suppose les ondes planes ou sphériques, le rapport des amplitudes des pressions en deux points est :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{R_1}{R_2}. \text{ Il n'y a donc pas d'erreur sur l'amplitude.}$$

Par contre, il y a une différence pour la phase qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon &= k((r_2 - r_1) - (x_2 - x_1)) \\ &= k(R_2 - R_1) \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \simeq k \frac{\theta}{2} (R_2 - R_1) \simeq \frac{1}{2} k \frac{(R_2 - R_1)^2}{1} \end{aligned}$$

$$(\text{où } 1 \simeq r_2 - r_1 \simeq x_2 - x_1).$$

Pour que cette erreur soit négligeable, elle doit être très inférieure à 1. Cette condition est remplie dans un large domaine de fréquences pour les instruments à vent coniques, qui ont un faible angle au sommet ; on trouve ainsi :

- pour le basson : ($R_2 = 0,02$ m ; $R_1 = 0,002$ m ; $l = 2,5$ m) :

$$f \ll 800 \text{ kHz}$$

- pour le saxophone soprano ($R_2 = 0,05$ m ; $R_1 = 0,01$ m ; $l = 0,6$ m,

$$f \ll 40 \text{ kHz}$$

(les dimensions ci-dessus sont évidemment approximatives).

5.3.2. Ondes planes et ondes sphériques dans un pavillon

Le fait que l'on connaisse la forme des fronts d'onde dans un cône a amené certains auteurs à supposer que pour un pavillon quelconque, on aurait une équation exacte en prenant des fronts d'ondes (surfaces équiphasé) appropriés. C'est ainsi que Le Corbellier (106)

ou Morse (13) écrivent l'équation (24) en considérant $S(x)$ non plus comme la section plane, mais la surface de ce front d'onde. Il est incontestable que cette équation est bien meilleure que l'équation en ondes planes ; elle a l'avantage d'englober les deux équations exactes connues (correspondant aux tuyaux cylindriques et coniques). Mais toute la difficulté est alors reportée dans la détermination des surfaces équiphasés ; on peut certes le faire en supposant l'écoulement incompressible, mais les résultats ne sont pas simples.

On préfère donc se contenter d'une approximation en ondes planes. Pourtant Benade et Jansson, dans deux articles (13), ont proposé de comparer à des résultats expérimentaux les solutions de l'équation des pavillons écrite en supposant les surfaces équiphasés d'une part planes, d'autre part sphériques. Les pavillons étudiés sont ceux des "cuivres", qui sont très évasés et pour lesquels l'approximation en ondes planes est manifestement peu satisfaisante ; la surface sphérique qu'ils choisissent est normale à la section du pavillon (Fig 8) :

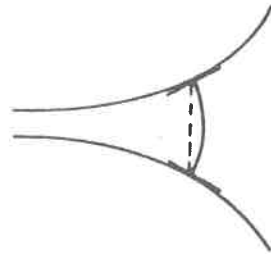


Fig.8 : ondes sphériques dans un pavillon

Ils montrent notamment par un calcul géométrique que dans le cas des pavillons de Bessel, l'approximation des ondes planes surestime fortement la fonction $\frac{d^2}{dx^2}$ (cf équation 25), c'est-à-dire l'évasement. Ceci revient à dire que les réflexions dues au changement de section du pavillon sont moins fortes que ne le laisse supposer l'approximation des ondes planes.

Leurs résultats montrent que pour les fréquences de résonance, l'erreur par rapport à l'expérience est minime, inférieure à 1 %, avec

les deux approximations (ondes planes et ondes sphériques). L'erreur concernant le coefficient de réflexion à l'entrée du pavillon est par contre plus importante. Leurs résultats tendraient toutefois à montrer que les deux approximations encadrent souvent les résultats expérimentaux, celle par onde plane surestimant le coefficient de réflexion, celle par onde sphérique le sous-estimant. Malheureusement, à notre avis, la procédure de calcul n'est pas correcte :

- d'une part, ils supposent que le pavillon débouche sur un tuyau conique infini de même angle que l'extrémité du pavillon. Cette supposition conduit certainement à sous-estimer la discontinuité entre le pavillon et l'espace infini, c'est-à-dire le coefficient de réflexion à la sortie du pavillon (cf § 6.1.1. et 6.2.).

- d'autre part, ils font une confusion à propos de la transmission par un pavillon : nous développerons cette question au prochain paragraphe.

Il n'en reste pas moins que l'idée de départ est très judicieuse. Compte-tenu de l'inconnue qu'est le comportement des pavillons évasés aux hautes fréquences, (aussi bien pour la propagation des ondes que pour le rayonnement), il est très judicieux de tenter de mieux approcher la réalité en moyennant les deux approximations possibles. C'est ce que nous tenterons de faire au chapitre II.

Auparavant, il est intéressant de chercher une première estimation de la différence entre les deux approximations. Si on admet qu'il est légitime de généraliser le calcul fait pour un cône par une simple moyenne, on peut calculer cette différence, en considérant qu'elle majore l'erreur commise en employant l'une ou l'autre approximation. La différence d'amplitude est obtenue par un calcul purement géométrique, effectué par Benade et Jansson. Quant à la différence de phase, on peut l'estimer par (cf § 5.3.1.) :

$$(27) \quad \varepsilon \approx \frac{1}{2} k \int_{x_1}^{x_2} R'^2(x) dx$$

Ainsi pour un pavillon de Bessel, ($R = R_0 (\frac{x}{x_0})^\alpha$), tel que

$x/k_0 \gg 1$, on obtient :

$$\epsilon = \frac{1}{2} k \int_x^{x_0} R'^2(x) dx \simeq \frac{1}{2} k \frac{\alpha^2 R_0^2}{(1-2\alpha)x_0}$$

Cherchons pour quelques exemples, à quelle condition sur la fréquence correspond la condition $\epsilon \ll 1$:

- pavillon d'un trombone ($R_0 = 0,1025$ m ; $\alpha = -0,63$; $x_0 = 0,014$ m ;
 $l = 1,08$ m).

$$f \ll 830 \text{ Hz}$$

- pavillon d'une trompette ($R_0 = 0,06$ m ; $\alpha = -0,62$; $x_0 = 0,018$ m ;

$$f \ll 3150 \text{ Hz} \quad l = 0,71 \text{ m}$$

- pavillon d'un cor ($R_0 = 0,1542$ m, $\alpha = -0,915$; $x_0 = 0,0318$ m ;

$$f \ll 500 \text{ Hz} \quad l = 0,625 \text{ m}$$

Ces résultats confirment bien l'intuition que l'approximation des ondes planes est fort peu satisfaisante pour des pavillons très évasés.

5.3.3. Discussion sur la réflexion des ondes dans un pavillon

Un pavillon, comme nous l'avons montré (§ 5.1.1.), n'est fondamentalement que la limite d'un ensemble constitué de plusieurs tuyaux cylindriques de diamètres différents†. Un tel ensemble, à cause des discontinuités de section qu'il comporte, introduit des réflexions pour les ondes planes, c'est-à-dire de l'énergie réactive. Il en de même d'un pavillon, mais aussi bien entendu d'un cylindre fini débouchant dans

† dont la longueur tend vers zéro. Il est l'analogue d'un milieu inhomogène à une dimension (cf Miller 132).

l'espace infini.

Le meilleur transmetteur d'énergie possible serait le tuyau cylindrique indéfini. Pourquoi alors utilise-t-on pour les haut-parleurs des pavillons évasés (finis) ? C'est incontestablement parce que la discontinuité entre la surface du haut-parleur et l'espace infini est moindre avec un pavillon qu'avec un cylindre. Mais cela ne signifie pas que le pavillon soit idéal; c'est-à-dire sans réflexions.

A ce propos, il nous semble insuffisant de dire, comme Morse (133, p 268), qu'un "bon" pavillon- c'est-à-dire un bon transmetteur, est un pavillon où l'on peut établir des ondes "à un seul paramètre", comme par exemple un pavillon conique, où les ondes sont sphériques. La raison qu'il en donne est qu'alors il n'y a pas de réflexions de l'énergie sur les parois ; or s'il est vrai qu'il n'y a alors pas de systèmes d'ondes stationnaires qui s'établissent transversalement (pour les basses fréquences, il y en a pourtant qui s'établissent longitudinalement. Du reste, il montre un peu plus loin un phénomène bien connu ; les ondes sphériques transmettent mal les basses fréquences, tout simplement parce que la puissance réactive ($\text{Im}(p u^*)$) y est très importante. (Cette remarque vaut aussi bien pour des ondes sphériques que pour leur approximation par des ondes planes solutions de l'équation des pavillons).

Ces considérations reposent sur l'idée suivante : on ne peut prendre en compte la seule pression acoustique pour connaître un taux de réflexion, ou un taux d'efficacité ; on doit avant tout étudier la puissance transmise. Nous discuterons cette question au chapitre IV (§ 3.3.).

Ceci nous amène à la confusion contenue dans l'article de Benade et Jansson. Ils écrivent l'équation (25a) comme suit :

$$\psi'' + (R^2 - U)\psi = 0$$

où $\psi = p\sqrt{S}$, et U est une fonction qui pour l'approximation des ondes

planes, est d^2/dx^2 . Bien qu'ils ne l'écrivent pas, on peut penser que la solution WKB qu'ils proposent s'écrit, pour les fréquences telles que $k^2 < U$:

$$\psi = ae^{-\int \sqrt{U-k^2} dx}$$

Ils en tirent le facteur de pénétration entre deux points :

$$P(k) = \left| \frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)} \right|^2 = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U-k^2} dx}$$

où x_2 est la sortie du pavillon.

Ils analysent alors ce facteur de pénétration, de manière d'ailleurs floue, comme un facteur de transmission, qui est lié à l'énergie rayonnée. Ils commettent là une double erreur :

- d'une part, le pavillon étant fini, la solution correcte serait :

$$\psi = ae^{-\int \sqrt{U-k^2} dx} + be^{+\int \sqrt{U-k^2} dx}$$

où a et b sont complexes, et b/a déterminé par l'impédance de rayonnement. Ils admettent donc sans justification que le deuxième terme est négligeable ; nous montrerons au ch. IV que ceci n'a rien d'évident.

- d'autre part, si on admet que le deuxième terme est négligeable, alors on admet qu'il n'y a pas de rayonnement ! En effet, la puissance transmise par une onde évanesciente est nécessairement nulle, car la pression et la vitesse sont en quadrature de phase.

5.4. Discontinuités dans les pavillons (Théorie unidimensionnelle)

5.4.1. Discontinuités de la fonction $S(x)$

La fonction $S(x)$ peut présenter plusieurs types de discontinuité : on rencontre avant tout la discontinuité de section ($S(x)$ discontinue), et la discontinuité de conicité ($S'(x)$ discontinue). En ondes planes, l'approximation unidimensionnelle repose encore sur l'hypothèse de la continuité de la pression et du débit.

En ondes sphériques, on peut être amené à une approximation légèrement différente pour un changement de conicité, car les deux surfaces équi-phases ne sont pas confondues (Fig 9).

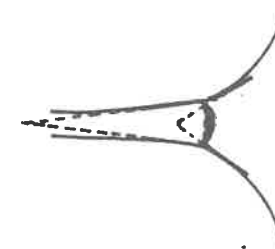


Fig.9 : changement de conicité dans un pavillon

On suppose donc la pression constante entre les deux surfaces équi-phases.

5.4.2. Dérivation

Le problème est identique à celui du tuyau cylindrique. L'approximation des ondes sphériques pour de faibles évasements donnerait une précision supplémentaire très hypothétique, en raison de l'erreur déjà non négligeable de l'approximation de la dérivation.

Nous nous contenterons d'une remarque à propos des trous latéraux sur un tuyau conique.

Soient Y_t l'admittance d'entrée de la cheminée, Y_G et Y_D les admittances du tuyau principal à gauche et à droite de la dérivation, soit μ le rapport des sections du trou et du tuyau ; on a :

$$Y_G = Y_D + \mu Y_t$$

Pour un tuyau conique, on a intérêt à calculer en utilisant "l'admittance corrigée" Y_C (cf § 5.2.1.) : or Y_G et Y_D se trouvent au même endroit sur le même tuyau, et ont donc le même facteur de correction. On peut donc écrire :

$$Y_C = Y_{CD} + uY_t$$

Comme nous l'avons vu, l'admittance corrigée permet de traiter les tuyaux coniques (sans amortissement) avec la même relation de propagation que les tuyaux cylindriques ; elle permet donc de plus de traiter les trous latéraux avec la même formule que s'ils étaient sur un tuyau cylindrique.

6. LE RAYONNEMENT

6.1. Le rayonnement d'un tuyau cylindrique

Dans les instruments à vent, l'énergie rayonnée est en général beaucoup plus petite que l'énergie perdue sous forme calorifique, comme l'ont mis en évidence Benade et Ganss (11). De ce fait, l'étude du fonctionnement (en particulier le couplage entre système excitateur et résonateur) des instruments à vent peut souvent négliger l'énergie rayonnée ! Il n'en reste pas moins que l'étude de celle-ci est fondamentale, puisque l'objectif des instruments de musique est bien de rayonner.

6.1.1. Influence du rayonnement sur les ondes planes dans un tuyau cylindrique : impédance de rayonnement

a) Pendant très longtemps, on s'est borné à étudier la "correction au bout" c'est-à-dire la correction de longueur dont il faut tenir compte au bout du tuyau pour intégrer le rayonnement des ondes acoustiques en dehors du tuyau. D'innombrables expériences ont été faites, dont rend compte par exemple Bouasse (22). Toutes ont buté sur la difficulté de séparer le rôle du système excitateur et celui du rayonnement dans les corrections à apporter à la théorie élémentaire de Bernoulli.

b) Le premier à proposer une théorie a été Helmholtz (117). Il a cherché à raccorder les ondes dans le tuyau aux ondes sphériques à l'extérieur, ce qui est, aux basses fréquences, la bonne façon de poser le problème. Son calcul revient à déterminer l'impédance de rayonnement Z_R du tuyau cylindrique débouchant sur un écran infini, ainsi que l'amplitude des ondes rayonnées. Cette théorie ne donne pas de valeur correcte à la partie imaginaire de Z_R , mais la valeur de la partie réelle a été confirmée par Rayleigh (139). Cette théorie nous sera utile, c'est pourquoi nous la présentons (d'une manière très simplifiée, puisque utilisant les nombres complexes, mais fidèle).

Les ondes sont supposées planes dans le tuyau :

$$p = p_i e^{-jkx} + p_r e^{jkx}$$

et sphériques à l'extérieur : $p = \frac{A}{r_\Sigma} e^{-jkr_\Sigma}$

L'espace hachuré de la figure 10 est supposé suffisamment petit devant la longueur d'onde pour que pression et débit y soient constants. Nous écrivons donc la conservation du flux d'énergie à la sortie du tube :

$$\frac{1}{2} S |u|^2 \text{Re}(Z_R) = \frac{1}{2} \Sigma |u_\Sigma|^2 \text{Re}(Z_\Sigma)$$

Ecrivant en outre la continuité du débit :

$$Su = \Sigma U_\Sigma, \text{ il vient : } \frac{\text{Re}(Z_R)}{S} = \frac{\text{Re}(Z_\Sigma)}{\Sigma}$$

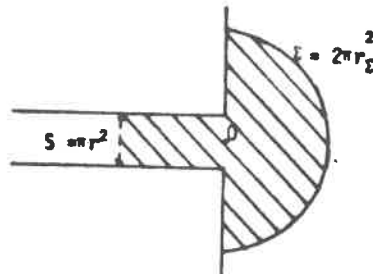


Fig.10 : raccordement des ondes planes avec les ondes sphériques (centre O)

Or Z_Σ est l'impédance (réduite) des ondes sphériques progressives :

$$Y_\Sigma = 1 + \frac{1}{jkr_\Sigma} \Rightarrow \text{Re}(Z_\Sigma) \simeq k^2 r_\Sigma^2$$

D'où
$$\text{Re}(Z_R) = \frac{S}{2\pi} k^2 = \frac{1}{2} (kr)^2$$

Le coefficient de réflexion est :

$$\left| \frac{p_r}{p_i} \right| = \left| \frac{Z_R - 1}{Z_R + 1} \right| \simeq 1 - 2\text{Re}(Z_R) = 1 - (kr)^2$$

Pour obtenir l'amplitude de l'onde sphérique, on écrit encore l'égalité des flux d'énergie :

$$\frac{1}{2} S (|p_i|^2 - |p_r|^2) = \frac{1}{2} \Sigma \frac{A^2}{r_\Sigma^2} \Rightarrow A^2 = k^2 r_\Sigma^4 |p_i|^2$$

c) De nombreux auteurs ont proposé, pour effectuer ce calcul de manière plus précise, de considérer qu'on pouvait assimiler le rayonnement d'un tuyau cylindrique (à rebord infini) à celui d'un piston plat placé dans un écran infini. Ils utilisent donc le résultat bien connu de Rayleigh (139) :

$$(28) \quad Z_R = 1 - \frac{1}{kr} J_1(2kr) + \frac{j}{kr} S_1(2kr)$$

où S_1 désigne la fonction de Struve.

Un développement limité de cette fonction s'écrit :

$$(28a) \quad \begin{cases} \text{Re}(Z_R) = \frac{1}{2} (kr)^2 - \frac{1}{12} (kr)^4 + \frac{1}{144} (kr)^6 - \frac{(kr)^8}{2880} + \dots \\ \text{Im}(Z_R) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{8}{3} (kr) - \frac{32}{45} (kr)^3 + \frac{128}{1575} (kr)^5 - \frac{512}{99225} (kr)^7 + \dots \right) \end{cases}$$

L'erreur est inférieure à 1 % jusqu'à $kr = 1,5$ pour le développement de $\text{Re}(Z_R)$ à l'ordre 6, et celui de $\text{Im}(Z_R)$ à l'ordre 7.

Pour les valeurs de kr supérieures à 1,5, Rayleigh a proposé des développements asymptotiques :

$$(28b) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(Z_R) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} (kr)^3} \left(\cos(2kr - \frac{3\pi}{4}) - \frac{3}{16kr} \sin(2kr - \frac{3\pi}{4}) \right) \\ \operatorname{Im}(Z_R) = \frac{2}{\pi kr} \left(1 + \frac{1}{4(kr)^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi} kr} \frac{1}{kr} \left(\cos(2kr - \frac{3\pi}{4}) - \frac{3}{16kr} \sin(2kr - \frac{3\pi}{4}) \right) \end{cases}$$

L'erreur est inférieure à 1% pour kr supérieur à 1,5 (on doit toutefois noter que l'approximation de $\operatorname{Im}(Z_R)$ n'est pas vraiment un développement asymptotique, car il ne converge pas).

Morse (133) a montré la légitimité de l'assimilation du tuyau cylindrique à rebord infini avec un piston plat placé dans un écran infini ; il a montré que les ondes dans le tuyau pouvaient être considérées comme planes très près de l'extrémité ; autrement dit, que les modes non plans créés par l'espace infini étaient négligeables à l'intérieur du tuyau très près de l'extrémité.

En fait, Y. Nomura, I. Yamamura, et S. Inawashiro (136) ont résolu le problème exact à l'aide d'intégrales de Weber-Schafheitlin et des polynômes de Jacobi. Ils obtiennent des résultats légèrement différents : en particulier pour le premier terme de la partie imaginaire, ils obtiennent $0,8217 kr$, au lieu de $0,8488 kr$. A ce sujet, comme ces auteurs le rappellent, Rayleigh lui-même avait indiqué que la réactance du piston ne pouvait être qu'une borne supérieure de la réactance de rayonnement. Il proposait alors $\frac{\pi}{4} (kr)$ comme borne inférieure, et concluait d'une étude assez longue que la bonne valeur était proche de $0,82 kr$.

Quant à la partie réelle de l'impédance de rayonnement obtenue par ces auteurs, elle est très proche de celle de Rayleigh : on pouvait s'y attendre, puisque les modes évanescents dans le tuyau cylindrique

ne peuvent pas transmettre d'énergie. Finalement, pour simplifier, nous considérerons donc la formule de Rayleigh comme suffisante pour un tuyau muni d'un rebord infini.

d) Levine et Schwinger (127) ont calculé Z_R pour un tuyau cylindrique d'épaisseur nulle : ils résolvent l'équation de Helmholtz $(\Delta + k^2)p = 0$ pour l'ensemble composé du tuyau, supposé semi-infini, et d'une sphère, dont ils font tendre le rayon vers l'infini (la méthode utilisée est celle de Wiener-Hopf) - Le résultat a une forme analytique compliquée, et ne se développe pas en série au voisinage de 0. Néanmoins nous avons trouvé des formules approchées suffisantes :

$$(29a) \quad Z_R = \frac{1}{4}(kr)^2 + 0,0127 (kr)^4 + 0,082(kr)^4 \log kr - 0,023(kr)^6 \\ + j (0,6133(kr) - 0,036(kr)^3 + 0,034 (kr)^3 \log kr - 0,0187(kr)^5)$$

L'erreur pour $kr < 1,5$ est inférieure à 1%. Le premier terme de la partie réelle était attendu, car la théorie de Helmholtz reste applicable, en remplaçant le demi-espace infini par l'espace tout entier, et donc $\Sigma = 2\pi r_\Sigma^2$, par $\Sigma = 4\pi r_\Sigma^2$.

Pour kr supérieur à 1,5, on peut :

- d'une part utiliser une formule proposée par Levine et Schwinger pour le coefficient de réflexion R à l'extrémité :

$$R = e^{-kr} \sqrt{\pi kr} \left(1 + \frac{3}{32} \frac{1}{(kr)^2} \right)$$

- d'autre part remarquer que la courbe $\Delta l/r$ (où Δl est la correction de longueur à l'extrémité) est presque une droite :

$$\Delta l/r \approx 0,634 - 0,1102 kr + 0,0018 (kr)^2 - 0,00005 (kr)^4,9$$

On en tire Z_R par la formule :

$$(29b) \quad Z_R = j (tg k\Delta l + \frac{1}{2} j \log R)$$

L'erreur est alors inférieure à 1% pour $1,4 < kr < 3,5$.

e) Enfin, par la même méthode, mais de manière purement numérique, Ando (93-4) a traité les problèmes intermédiaires : l'impédance de rayonnement d'un tuyau cylindrique d'épaisseur non nulle. Ses résultats concernent des épaisseurs comprises entre 0 et le rayon intérieur du tuyau ; ils montrent que le coefficient de réflexion se confond aux basses fréquences avec celui du tuyau sans épaisseur, mais aux fréquences plus élevées, il est plus faible et se rapproche davantage de celui du tuyau avec écran infini. Quant à $I_m(Z_R)$, elle est intermédiaire entre les deux cas extrêmes.

f) Quelle conclusion peut-on tirer dans le cas des instruments à vent ? Que ce soient les tuyaux principaux ou les cheminées des trous latéraux, l'écran terminal n'a pas une forme simple, et on doit donc se contenter d'approximations.

La partie imaginaire donne la "correction au bout" :

$\Delta l = \frac{1}{k} \text{Arc tg } I_m(Z_R)$: Pour ka petit, celle-ci est donc indépendante de k. Dans cette hypothèse, Benade et Murday (10) ont proposé un certain nombre de formules empiriques pour les diverses situations, y compris celle d'un tuyau latéral partiellement couvert par une clé. Il est clair que ces formules sont largement suffisantes dans la plupart des cas pratiques. En définitive, cette correction de longueur varie peu, puisqu'elle est comprise entre 0,6 et 0,8 fois le rayon environ. Comme en général, la longueur d'onde est grande devant r, l'erreur commise n'est pas très importante.

Il n'en va pas de même avec la partie réelle. On a vu en effet qu'elle varie du simple au double dans les deux cas extrêmes. Or elle est capitale pour l'étude du rayonnement, puisque c'est elle qui donne, pour l'essentiel, le coefficient de transmission :

$$T^2 = 1 - \left| \frac{Z_R - 1}{Z_R + 1} \right|^2 \approx 4 R_e(Z_R) \text{ si } (kr) \text{ est petit.}$$

Il serait intéressant de faire une étude expérimentale aussi précise que possible. C'est un long travail que nous n'avons pas entrepris ; nous garderons donc en mémoire l'imperfection des formules utilisées quand le problème se présentera. (chapitre 2 et 3).

g) Nous ferons pour terminer trois remarques sur l'impédance de rayonnement :

- dans un large domaine de fréquence, Z_R est petite. Quelles que soient les formules retenues :

$$\text{Re}(Z_R) < 1 \text{ si } kr < 2$$

$$\text{Im}(Z_R) < 1 \vee kr$$

$$|Z_R| < 1 \text{ si } kr < 1,5$$

$$R_e(Z_R) \approx 1 \text{ si } kr > 3$$

- dans les basses fréquences, $\text{Re}(Y_R)$ est constante, égale à $1/2 / (8/3\pi)^2 = 0,694$ pour la formule de Rayleigh, et $1/4 / (0,61)^2 = 0,665$ pour la formule de Levine et Schwinger.

- toutes les formules précédentes supposent que les modes non plans dans le tuyau sont évanescents, ce qui implique : $kr < 3,8$.

6.1.2. Directionnalité du rayonnement d'un tuyau cylindrique

En même temps que l'impédance de rayonnement, les auteurs cités ont cherché, dans les cas qu'ils ont étudié, la directionnalité du champ à une certaine distance du tuyau, très supérieure au rayon de celui-ci. Ainsi, pour Rayleigh :

$$\frac{P_m(\theta)}{P_m(0)} = \frac{2 J_1(kr \sin \theta)}{kr \sin \theta}$$

Ando (92,93) montre que pour un rapport $\frac{r_e}{r_i}$ (où r_e et r_i sont les rayons externe et interne du tuyau) inférieur à 2, la directionnalité d'un tuyau cylindrique est aux basses fréquences une fonction de kr_e , indépendante de r_i (sa démonstration est à la fois théorique et expérimentale). Il est intéressant de noter la différence avec le coefficient de réflexion aux basses fréquences : ce dernier est une fonction de kr_i , indépendante de r_e . D'autre part, les résultats de Ando mettent en évidence un minimum d'intensité situé à toute fréquence aux alentours de 120° .

Enfin, Ando a calculé la position de la source ponctuelle qui serait équivalente au bout du tuyau, c'est-à-dire pour les très basses fréquences, le centre des ondes sphériques émises à l'extérieur. Ceci aura une grande importance pour l'étude du champ externe (ch. III). Ando montre que si le tuyau est sans épaisseur ($r_e = r_i$), le centre se trouve à une distance de l'orifice du tuyau très voisine de la "correction au bout". Par contre, si $r_e \neq r_i$, cette distance en diffère sensiblement. Dans les cas réels d'instruments à vent, dont les extrémités débouchent sur des rebords d'épaisseur et de forme très diverses, ce problème est donc aussi difficile que celui de l'impédance de rayonnement.

6.2. Le rayonnement à l'extrémité d'un pavillon

Dans les basses fréquences, où les ondes sont supposées planes (cf § 5.3.), il est logique d'admettre que les formules précédentes demeurent valables. Il n'en est pas de même aux hautes fréquences ; malheureusement, nous n'avons pas trouvé cette étude dans la littérature. Il serait notamment fort utile de connaître l'impédance de rayonnement d'un tuyau conique.

Pour notre part, nous avons dû nous contenter d'étendre l'approximation de Helmholtz pour avoir une valeur approchée de $Re(Z_R)$, quand on suppose les ondes sphériques dans un pavillon.

Faute de mieux, nous avons donc choisi la formule générale suivante :

$$\left(\frac{Z_R}{S}\right)_{\text{ondes sphériques}} = \left(\frac{Z_R}{S}\right)_{\text{ondes planes}}$$

(Z_R ondes planes est ici l'une des valeurs présentées au paragraphe suivant).

D'un point de vue qualitatif, l'utilisation de l'impédance de rayonnement en ondes sphériques ainsi obtenue a l'avantage de ne pas surestimer la discontinuité entre le pavillon et le milieu extérieur. Mais il est clair qu'elle est tout à fait imparfaite.

7. TUYAU MUNI DE TROUS LATÉRAUX : UTILISATION DE LA THÉORIE DES FILTRES

7.1. Tuyau cylindrique muni de trous latéraux

La transposition de la théorie des filtres à l'acoustique a été faite la première fois par Stewart (150) et Canac (102). L'application à un tuyau cylindrique muni d'un réseau de cheminées latérales cylindriques (ouvertes ou fermées) est due à Mason (130-1). Enfin Benade (9) a utilisé l'étude de ce dernier pour les instruments à vent, principalement pour en tirer les fréquences de résonance. Il montre que, malgré l'inévitable irrégularité des trous latéraux dans leurs dimensions et leur espacement, l'étude d'un réseau régulier de trous identiques permet de comprendre l'essentiel des phénomènes dus à un réseau de plusieurs trous latéraux (ouverts ou fermés).

Nous appliquerons nous aussi la théorie des filtres aux trous latéraux ouverts ; soit donc un réseau de la forme suivante (Fig 11) :

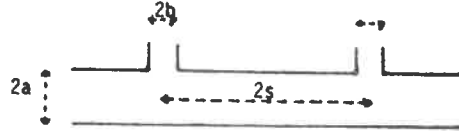


Fig.11 : réseau de trous latéraux

Mason utilise pour ses calculs la structure de filtre dite "en T" (Fig 11a) :



Fig.12 : cellule de filtre en T

Nous utiliserons aussi cette structure, mais il nous arrivera, pour la simplicité des calculs, d'utiliser également l'autre structure symétrique, dite en Π (Fig 11b) :



Fig.13 : cellule de filtre en Π

La dérivation est alors divisée en deux, et répartie entre deux cellules successives ; ceci n'a pas de réalité physique, mais permet de calculer plus aisément l'impédance à l'endroit de la dérivation.

Au chapitre IV, nous donnerons les résultats généraux concernant les filtres. Pour l'instant, nous nous contenterons de calculer les caractéristiques de ces filtres. Soit donc une cellule de filtre, l'indice n représentant son entrée et l'indice $(n-1)$ sa sortie.

On part des relations suivantes :

- dans le tuyau principal, on a :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k'l & \zeta_p j \sin k'l \\ 1/\zeta_p \sin k'l & \cos k'l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

entre deux points x_1 et x_0 séparés par la distance l ; k' et ζ_p sont le nombre d'onde et l'impédance itérative de ce tuyau (cf éq. 16).

- à la dérivation, si l'indice t représente l'entrée du trou, et $\mu = b^2 / a^2$ le rapport des sections, on a :

$$\begin{cases} p_{\text{gauche}} = p_{\text{droite}} = p_t \\ u_{\text{gauche}} = \mu u_t + u_{\text{droite}} = \mu v_t p_{\text{droite}} + u_{\text{droite}} \end{cases}$$

(pour le filtre en Π , on doit mettre le facteur $1/2$ devant μ)

On en tire, par un calcul matriciel :

$$\begin{cases} p_n = B_{p_{n-1}} + A_{u_{n-1}} \\ u_n = D_{p_{n-1}} + C_{u_{n-1}} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} B = C = \cos 2k's + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \sin 2k's \\ \text{pour le filtre en T : } A = \zeta_p j \sin 2k's - \mu Y_t^2 \sin^2 k's \\ D = 1/\zeta_p j \sin 2k's + \mu Y_t \cos^2 k's \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} A = \zeta_p j \sin 2k's (1 + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{tg} k's) \\ D = 1/\zeta_p j \sin 2k's (1 - \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{cotg} k's) \end{cases}$$

pour le filtre en π :

$$\begin{cases} B = C = \cos 2k's + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \sin 2k's \\ A = \zeta_p j \sin 2k's \\ D = \mu Y_t \cos 2k's + 1/\zeta_p j \sin 2k's (1 + \frac{1}{4} \mu^2 Y_t^2 \zeta_p^2) \end{cases}$$

ou

$$D = 1/\zeta_p j \sin 2k's (1 + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{tg} k's) (1 - \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{cotg} k's)$$

On en déduit pour n cellules juxtaposées :

$$Z_n/\zeta = \frac{j \operatorname{tg} n\phi + Z_0/\zeta}{1 + j \operatorname{tg} n\phi \cdot Z_0/\zeta}$$

où $j\phi$ et ζ sont la constante de propagation et l'impédance itérative du filtre, données par :

$$\cos \phi = \cos 2k's + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \sin 2k's \quad (30a)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{A}{D}} = \zeta_p \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{tg} k's}{1 - \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{cotg} k's}} \quad (30b) \text{ (filtre T)}$$

$$\zeta = \frac{A}{D} = \zeta_p \sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{tg} k's) (1 - \frac{1}{2} j \mu Y_t \zeta_p \operatorname{cotg} k's)}} \quad (\text{filtre } \pi) \quad (30c)$$

Remarque : Il est intéressant d'étudier les deux cas limites suivants :

- $\mu = 0$: il n'y a pas de trous latéraux. La cellule de filtre est un tronçon de tuyau cylindrique de longueur $2s$: d'où $\phi = 2k's$, $\zeta = \zeta_p$.

- μ infini (ce qui est évidemment irréalisable pratiquement) : alors $\cos \phi$ est infini, $\operatorname{tg} n\phi = j$, $Z_n = \zeta$. L'impédance à l'entrée du réseau est donc l'impédance itérative. Or celle-ci est $\zeta_p j \operatorname{tg} k's$ (filtre T) ou 0 (filtre π). Il s'agit donc tout simplement du tuyau principal coupé à l'endroit du premier trou, et débouchant sur une impédance nulle. Ce résultat est important, car on a souvent cherché à comparer un tuyau percé de trous latéraux avec un tuyau coupé à l'endroit du premier trou : dans certains de nos résultats, il suffira par conséquent de remplacer par μ par ∞ pour pouvoir le faire.

7.2. Tuyau conique muni de trous latéraux

Nous voulons montrer que ce problème est très peu différent du précédent, tout au moins qualitativement. Supposons que l'amortissement soit constant. Nous avons vu au § 5.4.2. que "l'admittance corrigée" permet pour calculer la propagation sans amortissement (ou à amortissement constant) et les dérivations (trous latéraux), de ramener les calculs dans les cônes à ceux dans les cylindres.

On comprend donc que si le réseau de trous latéraux sur le cône est tel que μY_t soit constant, on peut alors étudier ce réseau avec les formules du paragraphe précédent, en remplaçant l'admittance par l'admittance corrigée. Or dans la pratique, on trouve effectivement que pour un instrument cylindrique comme pour un instrument conique, μ varie

peu d'un trou à l'autre (au moins pour les "trous de note").

Quant à γ_t , il ne dépend pour un trou fermé que de la hauteur de la cheminée, et donc en général de l'épaisseur de la paroi : celle-ci étant constante, on a donc bien $\mu\gamma_t$ constant. Pour un trou ouvert, γ_t dépend en plus du rayon du trou en raison du rayonnement ; il y a donc une légère variation de $\mu\gamma_t$ qui n'existait pas pour le tuyau cylindrique, mais celle-ci ne remet pas l'ensemble en cause.

Les conclusions que nous obtiendrons pour un tuyau cylindrique muni de trous latéraux demeureront donc très largement valables pour un tuyau conique.

8. CONCLUSION : BILAN DES HYPOTHESES FAITES

L'objectif de ce chapitre était de déterminer les corrections à la théorie unidimensionnelle, et leurs conditions de validité. En définitive, les hypothèses retenues peuvent être classées en trois groupes :

8.1. Simplification des conditions réelles de fonctionnement des instruments à vent

Les expériences que nous avons faites (cf chapitre II et III) ne respectent pas totalement les conditions réelles de fonctionnement des instruments à vent. C'est pourquoi nous avons admis jusqu'ici implicitement ou explicitement des hypothèses qui ne sont pas tout à fait vérifiées quand un instrumentiste joue ; elles concernent avant tout les effets suivants :

- les niveaux atteints peuvent être très importants pour certains instruments comme les cuivres (110 dB de niveau de pression), et l'approximation, jusqu'ici implicite, de l'accoustique linéaire est alors discutable. Mais dans les expériences faites, nous n'atteignons jamais de tels niveaux, et négligeons toujours les distorsions non-linéaires.

- nous n'avons pas étudié de tuyaux courbés.

- bien que le souffle d'un instrumentiste comporte un taux d'humidité non négligeable, nous avons expérimenté uniquement dans l'air.

- le débit moyen du souffle est très faible, mais pas nul, contrairement à notre expérimentation.

- enfin, le souffle de l'instrumentiste a une température plus élevée que la température ambiante, et une pression moyenne plus élevée que la pression atmosphérique, ce qui est dans certains cas

indispensable au fonctionnement même de l'instrument. Il existe donc une variation de température et de pression moyennes le long d'un instrument, que nous n'avons pas reproduite dans les expériences.

Nous ne considérons pas ces effets comme négligeables, car ils doivent être pris en compte dans un calcul numérique visant à cerner au plus près la réalité ; mais notre intention est fondamentalement de montrer la validité de modèles, aussi nous nous sommes permis de simplifier les conditions des expériences réalisées.

8.2. Hypothèses non quantifiées

Certaines hypothèses sont faites dans les théories qui précèdent, mais il n'est pas évident qu'elles correspondent aux conditions d'expérimentation. Pourtant, nous n'avons pas pu trouver de conditions qui les valideraient, et elles devront donc être confirmées par les résultats expérimentaux. Il s'agit des hypothèses suivantes :

- les parois des tuyaux ne vibrent pas, et sont parfaitement réfléchissantes.
- la salle anéchoïque dans laquelle sont faites les mesures peut être considérée comme espace infini.
- la théorie unidimensionnelle est applicable aux trous latéraux moyennant certaines corrections de longueur (cf § 4.2).
- les trous sont suffisamment éloignés les uns des autres pour que chacun d'eux puisse être considéré comme rayonnant dans un espace infini sans sources : autrement dit, l'existence des autres trous n'influe sur l'un que par l'intérieur du tuyau, et non par l'espace extérieur. Cette hypothèse peut être justifiée qualitativement de la façon suivante : la distance (extérieure) d'un trou à l'autre est bien supérieure aux dimensions de chacun d'entre eux, l'énergie qui rentre dans l'un venant de l'autre est très faible par rapport à celle qui en sort.
- le rôle de la turbulence est négligeable.

8.3. Hypothèses quantifiées, au moins partiellement

Les hypothèses que nous avons pu évaluer quantitativement sont les suivantes :

- pour l'amortissement, nous avons vu que :

$$\frac{\omega}{c} \ll 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (\S 3.4.2.)$$

$$\frac{\omega}{c} R^2 > 54 l_h, \quad \text{où } l_h = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (\S 3.5)$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^{3/2} R \ll 1^{-1/2}, \quad \text{où } l = 10^{-7} \text{ m} \quad (\S 3.4.2)$$

Ces trois conditions, toujours satisfaites pour les instruments à vent, ne posent donc pas de problème.

- pour les changements de section, ainsi que le rayonnement, nous n'avons pas trouvé de conditions rigoureuses, mais seulement des conditions nécessaires :

$$\frac{\omega R}{c} < 3,8$$

$$\sqrt{\left(\frac{3,8}{R}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \gg 1 : \text{il suffit que } R \ll 3,8 \text{ l}$$

Ces conditions sont remplies en général, mais pourront causer quelques difficultés dans l'aigu.

- enfin, pour les pavillons, nous avons estimé qu'il était nécessaire que :

$$\frac{1}{2} k \int_{x_0-1}^{x_0} R^2(x) dx \ll 1$$

Il est certain que l'approximation des ondes planes dans les pavillons très évasés demeure le problème le plus important, d'autant qu'il se conjugue avec celui du rayonnement. Nous essaierons aussi l'approximation des ondes sphériques, mais c'est finalement l'expérience qui pourra nous renseigner le plus sûrement.

CHAPITRE II :

CHAMP INTERNE DES INSTRUMENTS A VENT

PRESENTATION :

Ce chapitre comporte deux parties essentielles :

-Une étude théorique des ondes quasi-stationnaires dans les instruments à vent : après une brève synthèse (§ 1) des nombreux travaux, anciens et récents, basés sur l'approximation des ondes stationnaires, nous proposons une approximation (§ 2) qui permette de rendre compte du fonctionnement de tuyaux sonores sièges de phénomènes de résonance. Nous étudions ainsi les pavillons et les tuyaux percés de trous latéraux, en nous intéressant particulièrement aux pertes visco-thermiques aux parois, et à l'énergie rayonnée. Les grandeurs envisagées sont d'abord l'admittance (et l'impédance) puis la pression et la vitesse, enfin l'énergie.

-Une étude expérimentale (§ 3) de l'impédance d'entrée des instruments à vent : le but en est une comparaison systématique des résultats avec les calculs théoriques, ayant en vue une limitation des erreurs à quelques pour cent. On en tire la connaissance de l'incertitude de la méthode expérimentale, ainsi que la vérification des conditions de validité des approximations unidimensionnelles proposées au chapitre I.

1. L'APPROXIMATION DES ONDES STATIONNAIRES : FREQUENCES DE RESONANCE

1-1. INTRODUCTION

Le problème des fréquences de résonance a été le point de départ de la recherche sur les instruments à vent ; à partir des travaux théoriques de Bernoulli, Lagrange, et Euler, on s'est intéressé aux résonances de tuyaux de différentes formes. C'est grâce à l'approximation des ondes stationnaires que ceci a été possible : on négligeait en effet l'onde rayonnée ainsi que les pertes calorifiques. Depuis, d'innombrables recherches ont été faites dans le cadre de cette approximation pour obtenir des résultats plus précis, tenant compte de l'influence de divers facteurs (rayonnement, amortissement, discontinuités, variations de température, ...) sur les fréquences de résonance.

Le but de ce chapitre n'est pas de traiter nous aussi de cette approximation, mais plutôt de s'appuyer sur elle pour en proposer une autre qui décrive complètement le champ interne des instruments à vent. C'est pourquoi nous commençons par synthétiser brièvement le sens des diverses recherches sur ce sujet. Soulignons au passage que celles-ci ne sont certainement pas closes, d'une part parce que la détermination des fréquences de résonance est un problème capital pour les instruments à vent, d'autre part parce que l'approximation des ondes stationnaires donne effectivement d'excellents résultats. Nous avons calculé par exemple les fréquences pour lesquelles $|Z|$ passe par un extremum à l'entrée d'un cône, d'une part

exactement, d'autre part en supposant que la partie réelle de l'impédance est partout nulle:

$$\operatorname{Re}(Z_0) = 0, \quad \operatorname{Im}(Z) = 0, \quad \operatorname{Re}(r) = 0.$$

La différence entre ces deux calculs est toujours inférieure à 0,1%, même quand les ondes sont déjà loin d'être stationnaires (le coefficient de réflexion pouvant atteindre 0,6).

1-2. DEFINITIONS

Nous avons utilisé l'expression "fréquences de résonance", et ceci appelle d'importantes remarques. Il est évident que pour les premiers théoriciens, tel Bernoulli [18], les fréquences de résonance des instruments à vent sont concrètement les fréquences pour lesquelles ceux-ci fonctionnent. Mais le modèle théorique qu'ils proposent ne considère pas le couplage complexe entre un système excitateur (en l'occurrence le système lame d'air-biseau) et un résonateur (le tuyau) : il admet que l'ensemble fonctionne pour les fréquences qui créent des extremums de pression ou de vitesse aux extrémités, sans que soit envisagée une non linéarité du système excitateur faisant intervenir plusieurs résonances du tuyau (phénomène appelé "coopération des modes" par Benade).

Après les découvertes fondamentales du XVIII^e siècle, il a fallu attendre les années 1830 pour que des études s'intéressent au système excitateur proprement dit, avec Herschel [48] (flûtes) et surtout W. Weber [37] (anches d'orgue). Mais ce n'est qu'au début du XX^e siècle que des lois plus complètes sur les résonances des instruments à vent sont énoncées par Bouasse [23].

Aujourd'hui, la difficile question du système lame d'air-biseau couplé avec un tuyau semble loin d'être épuisée : nous présenterons l'état des recherches actuelles au chapitre III, au moment où nous étudierons le rayonnement par la bouche. Quant aux anches, Benade et Gans [11] ont proposé des principes qualitatifs régissant leur fonctionnement, qui développent des concepts énoncés par Bouasse, et ont été largement confirmés depuis grâce à des modèles quantitatifs par divers auteurs. Citons Benade et Gans:

1°) "A cause du couplage mutuel des composants spectraux, un "mécanisme non linéaire d'anche conduit automatiquement à un spectre sonore "défini, dont la nature est contrôlée par la nature détaillée de la fonction

"impédance $Z(n\omega)$ de la colonne d'air et de la réponse de l'anche représentée "par la fonction $D(n\omega)$ (où $n\omega$ est un harmonique de la fréquence jouée)".

2°) "L'oscillation est favorisée pour une fréquence pour laquelle "l'impédance d'entrée de la colonne d'air est grande, et elle est également "favorisée si l'impédance est grande pour une partie ou la totalité des harmoniques de cette fréquence".

Un corollaire de ces propositions est le suivant : pour que l'impédance soit grande pour chacun des harmoniques du son, il est nécessaire que les fréquences pour lesquelles l'impédance d'entrée du tuyau est maximale soient harmoniques. C'est ce que remarquait Bouasse [23] : "Un son contient principalement des harmoniques qui sont au voisinage des partiels", et "un fondamental sort le plus aisément quand quelques-uns de ses harmoniques coïncident avec les partiels du tuyau" (Vol. II, p. 47).

Cette loi est extrêmement importante dans ses conséquences en facture instrumentale : un but essentiel du facteur est de rendre harmoniques les fréquences de résonance du tuyau. Une façon commode pour lui de s'en rendre compte est de jouer l'instrument réellement, en émettant pour une configuration donnée du tuyau les divers partiels, même si ceux-ci ne sont pas habituellement utilisés : s'ils sont harmoniques, c'est nécessairement que les fréquences de résonance du tuyau le sont aussi.

C'est bien pourquoi la recherche des fréquences de résonance demeure un sujet capital à propos des instruments à vent, justifiant tout l'intérêt qui est porté à l'approximation des ondes stationnaires.

En définitive, ces considérations nous amènent à employer la terminologie suivante :

-fréquences de résonance d'un tuyau : fréquences pour lesquelles le module de l'impédance d'entrée du tuyau est maximale ou minimale. Notre étude portant sur le champ interne des instruments à vent, et non sur leur fonctionnement global, c'est à celles-ci que nous nous intéressons dans ce deuxième chapitre. On peut aussi les appeler modes, comme Benade, ou Wu et Péro [30].

-partiels, ou régimes d'un instrument à vent : ce sont les divers états vibratoires possibles d'un instrument à vent.

1-3. TUYAUX DE FORME SIMPLE ET PRINCIPALES CORRECTIONS

Les premiers théoriciens des instruments à vent (Lagrange [24], Bernoulli [16]) ne se sont pas contentés d'énoncer les lois de résonance des tuyaux cylindriques. Ils les ont en même temps énoncées pour les pavillons, notamment conique, et pour les tuyaux à cheminée. En outre, Bernoulli se pose à propos des tuyaux d'orgue, la question des corrections à apporter à sa théorie : correction au bout ouvert, correction à la bouche.

Nous avons rappelé (chapitre I) l'existence de très nombreuses études, principalement expérimentales, qui ont porté sur la correction de longueur due au rayonnement. Mais celle-ci était, pour les tuyaux à embouchure de flûte, inséparable de la correction de longueur due à la bouche : d'une part celle-ci rayonne, d'autre part elle constitue un retrécissement du tuyau, enfin (et sans doute surtout) le système lame d'air-biseau est couplé de manière complexe au tuyau.

En fait, ces corrections ont longtemps masqué une autre correction : celle qui est due à l'amortissement visco-thermique. Celui-ci n'agit en effet pas seulement en dissipant de l'énergie, mais aussi en modifiant la vitesse du son. Nous avons traité cette question dans le premier chapitre. Il est curieux que, bien après les premières études expérimentales et théoriques sur l'amortissement des ondes, les diverses formules empiriques proposées pour la correction au bout ouvert n'essayèrent pas de dissocier les deux types de correction : pourtant celles-ci dépendent du rayon de façon opposée, puisque le rayonnement est proportionnel au rayon, alors que l'amortissement est inversement proportionnel à celui-ci.

Enfin, en ce qui concerne les instruments à anche, comme la clarinette, le saxophone, le hautbois, le basson, la cavité que constitue l'anche représente un agrandissement du tuyau à l'une de ses extrémités. Backus [2], Nederveen [70] et Benade [4] notamment ont proposé une correction pour en tenir compte.

1-4. ETUDES D'INSTRUMENTS COMPLETS : TROUS LATÉRAUX, PAVILLONS, PETITES MODIFICATIONS

Webster [156] pour les pavillons, et Stewart [152] et Mason [131] pour les trous latéraux, ont, vers 1920, ouvert la voie des calculs en nombres

complexes appliqués à l'acoustique. Ceux-ci permettant de trouver simplement des équations de résonance pour des tuyaux de forme complexe, éventuellement munis de dérivations. Raman [78], Richardson [79], Irons [51-53] ont largement utilisé cette technique pour les instruments à vent.

De leur côté Bouasse [22,23] et Fouché [34-36] font des études analogues ; ils étudient systématiquement tous les problèmes posés par les instruments à vent, en comparant toujours théorie et expérience. Il est à noter que Bouasse se refuse à employer une méthode qui vient de l'électricité et calcule toujours en grandeurs réelles. A propos de ce qu'il nomme "loi de la résistance" et qui n'est autre que l'approximation des constantes localisées à débit constant (le tuyau étant alors une inductance), il affirme [22, p. 94] : "Il est ridicule de prendre des airs mystérieux pour énoncer des choses aussi simples ; il est sot de les déguiser d'analogies électriques"... "Toute la difficulté est dans l'évaluation de la résistance", ajoute-t-il.

Beaucoup plus récemment, des essais de calculs de fréquence de résonance tenant compte de l'ensemble des problèmes posés par un instrument complet (rayonnement, amortissement, petites discontinuités, ...) ont été faits en particulier par Nederveen [70] pour les bois, et par Coltman [28] pour la flûte traversière. Il est clair à ce propos que l'ordinateur est tout à fait indispensable, surtout pour les fréquences aiguës, si l'on veut obtenir une précision satisfaisante pour un instrument complet.

Pour étudier de petites modifications autour de formes simples, certains auteurs (Benade et Jansson [13], Smith et Daniell [83]) ont utilisé les méthodes de perturbations ; mais le principe de Rayleigh peut être également utile (Van Den Dungen [113], Temple [153], puis Benade [9] et Krüger [59]).

Plus anciennement, c'est la notion de "correction de longueur" qui a été la plus employée. Nous l'avons déjà mentionnée plusieurs fois, et, comme elle nous servira quelquefois, nous voulons donner ici quelques précisions. De manière générale, si on fait une petite modification dans un tuyau cylindrique près d'un point où l'impédance est Z , celle-ci devenant Z_M on peut considérer que l'impédance demeure Z à condition de tenir compte d'une correction de longueur. Celle-ci est obtenue comme la longueur supplémentaire ΔL qu'il faut insérer pour que Z devienne Z_M . Autrement dit,

$$k\Delta L = \text{Arctg } j Z - \text{Arctg } j Z_M$$

Prenons-en quelques exemples :

-la correction au bout du tuyau : Z_M est l'impédance de rayonnement (imaginaire pure, puisque nous supposons les ondes stationnaires), et Z l'impédance nulle (représentant la condition de Benoulli), d'où :

$$\Delta L = \frac{1}{k} \text{Arctg } \text{Im}(Z_0)$$

Cette définition utilisant l'impédance est très courante, mais elle pourrait aussi bien utiliser l'admittance :

$$\Delta L_{(Y)} = \frac{1}{k} \text{Arctg } \text{Im}(Y_0)$$

La relation entre ces deux longueurs est, puisque $\text{Im}(Z_0) = -1/\text{Im}(Y_0)$:

$$\Delta L_{(Z)} = \Delta L_{(Y)} + \frac{1}{k} \frac{\pi}{2}$$

-pour une dérivation, représentée par la relation :

$$Y_M = Y + j A(k)$$

où $j A(k)$ représente l'influence de la dérivation, on a :

$$k \Delta L = \text{Arctg } j Y - \text{Arctg } (j Y + A(k)) = \frac{A(k)}{1 + Y^2}$$

Ainsi, pour une cheminée latérale fermée, placée à la longueur ℓ de l'extrémité ouverte d'un tuyau cylindrique, $Y = -j \cot g k \ell$ et $A(k) = \mu k h$ où μ est le rapport de la section du trou à celle du tuyau, k le nombre d'onde, h la hauteur de la cheminée ; d'où :

$$\Delta L = \mu h \sin^2 k \ell$$

Cette notion de correction de longueur permet ainsi de manière très concrète pour le facteur d'instrument, de comprendre l'influence d'une modification donnée en fonction de la fréquence. De surcroît, elle est à la base d'une méthode de résolution par itération d'équations de résonances très rapide. On calcule f pour le tuyau non perturbé (longueur L), on en déduit la correction de longueur ΔL_1 , puis f_1 calculée pour $L_1 = L + \Delta L_1$, puis ΔL_2 , puis f_2 calculée pour $L_2 = L + \Delta L_2$, etc...

2. ONDES QUASI-STATIONNAIRES DANS LES INSTRUMENTS A VENT

2-1. INTRODUCTION

Les mesures acoustiques ont longtemps porté sur les fréquences de résonance. Ce n'est que dans la première moitié du XXe siècle que certains appareils ont permis de mesurer des amplitudes d'ondes ; on a pu alors dépasser la vision du champ sonore dans les instruments à vent comme un champ d'ondes stationnaires, et étudier les échanges d'énergie.

Les premières études quantitatives sur l'importance relative des résonances ont porté sur ce que leurs auteurs ont appelé "la réponse en fréquence" de l'instrument (Olson [72]) ou "la courbe des résonances" (Bladier et Nagai [20], Backus [3]) : leurs mesures, utilisant soit une excitation par l'extérieur, soit une mesure de pression à l'extérieur, restaient forcément semi-qualitatives, en raison de l'imprécision de la connaissance du champ externe.

Depuis, certains auteurs [12,4,88,75,76] se sont intéressés à une notion plus précise, l'impédance d'entrée de l'instrument. Les études expérimentales ont déjà été nombreuses, mais les études théoriques sont nettement plus rares, hormis le cas banal du tuyau cylindrique : comme nous l'avons relevé dans le premier chapitre, les variations de section entraînent des variations de l'amortissement visco-thermique aux parois, et il n'y a pas de solutions analytiques connues pour les pavillons non cylindriques.

Jansson et Benade [13], utilisant la théorie des perturbations, ont proposé une méthode approchée de calcul des fréquences de résonance, des pertes aux parois, et des pertes par rayonnement. Quant à Nederveen et Van Wulfften Palthe [69,70], ils ont résolu le problème du cône.

Pour notre part, constatant l'adéquation de l'approximation des ondes stationnaires au calcul des fréquences de résonance, nous nous sommes demandé s'il n'était pas possible de prolonger celle-ci en recherchant une approximation qui fournisse les quantités caractéristiques des ondes non stationnaires, par exemple la partie réelle de l'impédance ou les extremums du module de celle-ci. Nous obtenons partie réelle et partie imaginaire de l'impédance grâce à deux équations différentielles, à partir desquelles nous retrouvons, pour presque toutes les valeurs de x (coordonnée d'espace) et de f (fréquence), l'approximation des ondes stationnaires. Mais nous complétons celle-ci pour les autres valeurs de x et de f .

Pour éprouver la validité de cette méthode, nous la comparons aux résultats obtenus pour le calcul numérique basé sur un découpage en tronc de cônes (chapitre I, § 5-2.2.) dans lesquels l'amortissement est supposé constant. Notre méthode ne prétend pas bien entendu remplacer la méthode numérique ; son but est l'obtention de formules littérales approchées pour l'impédance (partie réelle et partie imaginaire), la pression et la vitesse. Cette modélisation doit permettre, dans les cas les plus simples, de résoudre des problèmes inverses, en répondant à des questions comme celle-ci : "quelle forme donner au pavillon pour obtenir telle courbe d'impédance donnée à l'avance ?"

Pour présenter cette méthode, il nous a paru plus clair de le faire de la même manière que nous l'avons trouvée, en dissociant dans un premier temps les effets de l'amortissement avec parois et ceux des variations de section : nous l'exposons successivement à propos des pavillons "sans amortissement", c'est-à-dire dans lesquels celui-ci peut être négligé, puis à propos d'un cylindre "avec amortissement", enfin à propos des pavillons "avec amortissement".

Dans le § 2-2., nous partons de l'équation des pavillons sans amortissement en admittance (celle en impédance étant moins maniable), que nous modifions grâce à certaines hypothèses. Nous vérifions la validité des approximations ainsi obtenues à propos d'un tronc de cône.

Dans le § 2-3., nous appliquons le même processus au tuyau cylindrique avec amortissement, ainsi qu'au tuyau à cheminée. Dans le § 2-4., nous étendons ce qui précède aux pavillons avec amortissement, et utilisons concrètement la méthode pour les pavillons conique et exponentiel. Nous en tirons certaines conclusions concernant notamment la différence de comportement du cylindre et du cône.

Ce travail est la reprise de deux articles déjà publiés [56,57]. Mais nous y avons ajouté le calcul de la pression et de la vitesse. De plus, nous généralisons la méthode aux lignes de transmission en général (§ 2-5.), puis l'utilisons pour les tuyaux percés de trous latéraux (§ 2-6.).

Nous nous plaçons toujours dans un domaine de fréquence où les ondes sont effectivement quasi-stationnaires, c'est-à-dire où l'énergie perdue est relativement faible devant l'énergie totale mise en jeu.

Nous nous intéresserons principalement aux grandeurs qui caractérisent le mieux de telles ondes : les extremums du module de l'impédance, considérés comme fonctions de la fréquence. En effet, ceux-ci, infinis si les ondes sont stationnaires, n'existent pas si les ondes sont progressives. En pratique, le domaine de fréquence intéressant pour les instruments à vent s'étend de 50 Hz à 1500 Hz.

Dans ce qui suit, un pavillon sera décrit par les symboles suivants : $r(x)$, le rayon ; $S(x)$, la section ; l'indice o s'appliquera à l'extrémité qui rayonne dans l'espace libre (pour laquelle l'impédance est supposée connue) et non à l'origine des x . Puisque l'impédance en un point ne dépend que de ce qu'il y a entre ce point et l'extrémité x_0 , x désignera donc aussi bien la variable d'espace en n'importe quel point du pavillon que la variable d'espace de l'entrée d'un autre pavillon obtenu en coupant le précédent au point x . D'autre part, quand nous parlerons d'extremums, il s'agira toujours de fonctions de la fréquence. Nous appellerons courbe des pics une courbe qui joint les pics de la manière suivante : elle est continue ainsi que toutes ses dérivées. Au sens intuitif du terme, c'est tout simplement l'enveloppe de la courbe $|Z|$.

2-2. ONDES QUASI-STATIONNAIRES DANS UN PAVILLON SANS AMORTISSEMENT

2-2.1. Equation de l'admittance - Etude des parties réelle et imaginaire de l'admittance

II.2.2.1.

Soit l'équation vérifiée par l'admittance réduite $Y = \frac{U}{P} \rho c$ (chapitre I, éq. 24b) :

$$Y' + gY = jk(Y^2 - 1) \quad (1)$$

où $g(x) = S'/S$

Les solutions complètes de cette équation sont connues pour certaines formes de pavillon (cylindrique, conique, "Bessel", ...) mais les expressions séparées des parties réelle et imaginaire ne sont jamais simples, sauf dans le cas des ondes stationnaires. C'est pourquoi nous voulons chercher une expression approchée plus simple pour les ondes quasi-stationnaires. Nous nous intéresserons en particulier aux courbes reliant les extremums du module de Y .

Nous pouvons remarquer que la variable de l'équation ci-dessus est x , la coordonnée d'espace ; or ce sont les extremums de $|Y|$ quand la fréquence f varie qui nous intéressent avant tout. Nous admettrons que les valeurs extrêmes pour x sont les mêmes que les valeurs extrêmes pour f , et ce pour les raisons suivantes :

Dans le cas d'un pavillon de Bessel, où $g(x) = \frac{c}{x-x_1}$, (c est x_1 étant des constantes arbitraires), l'équation de l'admittance peut être considérée comme une équation en $[k(x-x_1)]$. Si l'on suppose que la condition aux limites en x_0 (Y_0 est égale à l'admittance de rayonnement) est telle que Y_0 varie lentement avec la fréquence, on peut donc admettre que les extremums de $|Y|$ sont les mêmes que ce soient x ou f qui varient. Dans le cas d'un pavillon quelconque, ou même de raccordements de pavillons avec une discontinuité de section, nous avons remarqué que cette approximation demeurerait valable ; c'est pourquoi nous la considérerons comme suffisante dans le cas général.

Afin de trouver une approximation pour l'équation (1), nous voulons étudier les variations de l'admittance. La figure 1a représente (sans échelle) un exemple de variation des parties réelle et imaginaire de l'admittance en fonction de f pour un pavillon conique, dont l'admittance de rayonnement est donnée par la formule de Levine et Schwinger (chapitre I, éq. 29). La figure 1b montre un agrandissement autour d'un pic de $\text{Re}(Y)$.

La partie imaginaire s'annule pour deux types de valeurs de f : autour des valeurs g_n , la dérivée est petite (et positive), et autour des

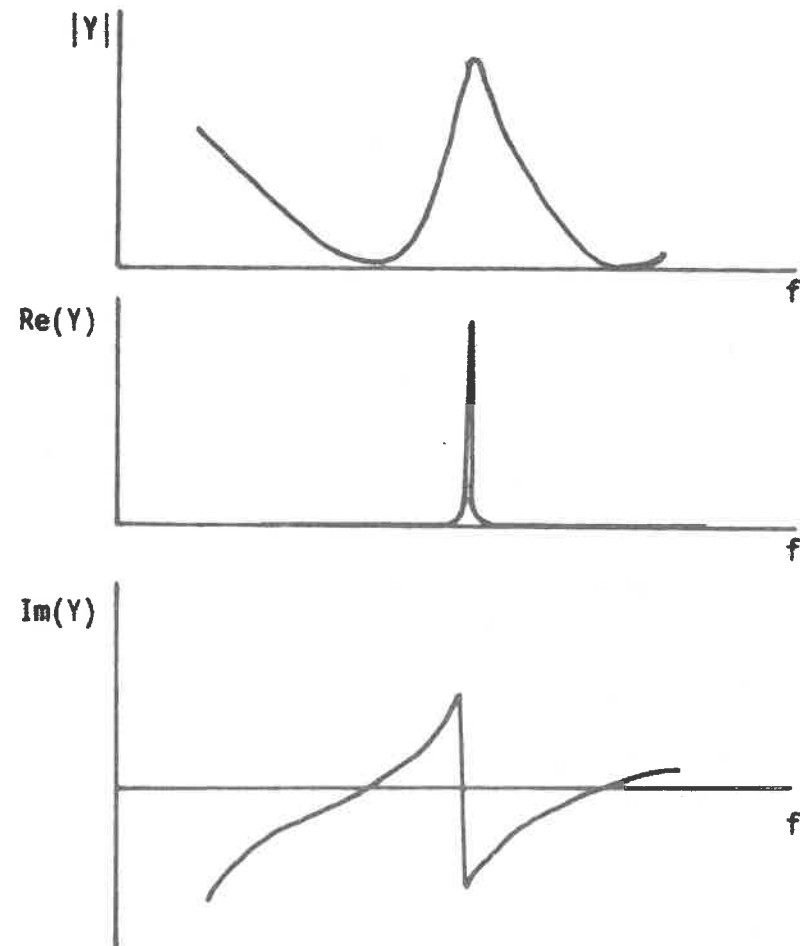


Fig. 1a : allure générale des courbes du module, de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'admittance (sans échelle).

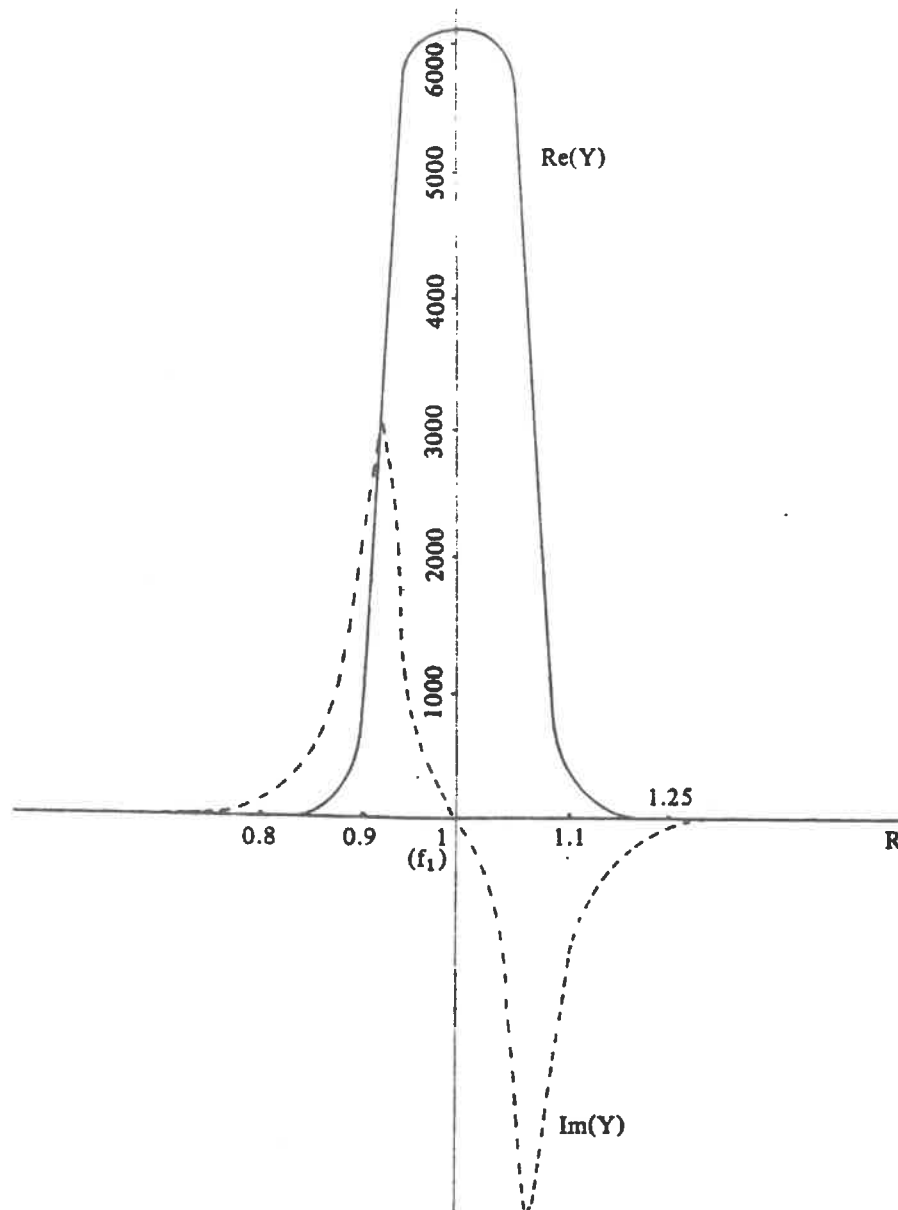


Fig. 1b : Détail d'un pic d'admittance. L'échelle de Y est linéaire, et celle de f autour de f_1 est dilatée comme suit:

$$R = 1 / \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} h \right) \right) \quad \text{où} \quad h = \begin{cases} f_1/f & \text{si } f > f_1 \\ f/f_1 & \text{si } f < f_1 \end{cases}$$

valeurs f_n , la dérivée est au contraire extrêmement grande (et négative). L'explication en est simple : les ondes sont quasi-stationnaires (la réflexion à la sortie est très forte) ; par conséquent, la courbe de la partie imaginaire est proche de celle de la fonction tangente, sauf près des fréquences f_n . Cette fonction tangente correspond aux ondes stationnaires : elle s'annule pour les fréquences g_n , et devient infinie pour les fréquences f_n . C'est pourquoi pour des ondes quasi-stationnaires, la partie imaginaire s'annule pour les fréquences g_n , mais varie fortement entre un maximum (positif) et un minimum (négatif) autour des fréquences f_n .

Quant à la partie réelle, elle est beaucoup plus petite que la valeur absolue de la partie imaginaire, sauf près des zéros de celle-ci. Près des fréquences f_n , elle présente des pics qui sont beaucoup plus hauts que ceux de la partie imaginaire. D'autre part elle est toujours positive, puisque le flux d'énergie est positif.

La courbe du module de l'admittance ressemble à celle de la partie réelle, mais les pics (près des fréquences f_n) et les creux (près des fréquences g_n) sont plus larges.

Toutes ces considérations sont applicables à l'impédance Z, à condition d'invertir les fréquences f_n et g_n . Rappelons que Z vérifie l'équation (1bis) :

$$Z' - gZ = jk(Z^2 - 1)$$

2-2.2. Méthode approchée de calcul de $\operatorname{Re}(Y)$ et $\operatorname{Im}(Y)$

a) Si $Y = a + jb$, l'équation (1) devient :

$$\begin{cases} a' + ga = -2kab & (2) \\ b' + gb = -k(1 + b^2 - a^2) & (3) \end{cases}$$

Si nous admettons que $a^2 \ll 1 + b^2$, l'équation (3) se ramène à l'équation (1), écrite dans le cas des ondes stationnaires ($\operatorname{Re}(Y)$ nul). C'est cette équation (3) qui est alors utilisée couramment pour le calcul des fréquences de résonance. On obtient donc le système (S1) :

$$(S1) \quad \begin{cases} a' + ga = -2kab \\ b' + gb = -k(1 + b^2) \end{cases}$$

L'étude du paragraphe précédent montre que cette approximation est valable sauf pour les fréquences proches des fréquences f_n , c'est-à-dire sauf pour les grandes valeurs de $|b|$. En effet, l'inégalité $b^2 \gg a^2$ est fautive près des fréquences f_n et g_n , mais près des fréquences g_n , $a^2 \ll 1$.

Dans ce qui suit, nous appellerons a et b les solutions du système (S1), quelles que soient les valeurs de b . Par conséquent $Y = a + jb$ sauf aux grandes valeurs de $|b|$. On peut noter que jb représente maintenant l'approximation stationnaire de Y .

b) Inversement, si $|b|$ est grand, $\text{Im}(1/(a+jb))$ est petite. Nous pouvons alors adopter le même raisonnement pour l'impédance Z , et résoudre le système (S2) :

$$(S2) \quad \begin{cases} y' - gy = -2kyz \\ z' - gz = -k(1+z^2) \end{cases}$$

avec $Z = y + jz$, sauf pour les grandes valeurs de $|z|$ (jz représentant l'approximation stationnaire de Z).

c) Nous pouvons conclure :

-pour les valeurs de $|b|$ petites ou moyennes, nous résolvons (S1), avec $Y = a + jb$, et $Z = 1/Y$

-pour les grandes valeurs de $|b|$, nous résolvons (S2), avec $Z = y + jz$, et $Y = 1/Z$.

Il ne reste plus qu'à relier les deux systèmes entre eux :

Ils sont identiques si $z = -1/b$, et $y = a/b^2$, (ou bien $b = -1/z$, et $a = y/z^2$)
Donc, si $|b|$ est grand :

$$Y = \frac{1}{y + jz} = \frac{a + jb}{1 + a^2/b^2}$$

En définitive, dans tous les cas, il suffit de résoudre l'un des deux systèmes, et de distinguer selon les cas pour en déduire Y et Z . C'est ce que résume le tableau ci-après.

f	g_n		f_n
b	petit	moyen	grand
z	grand	moyen	petit

$$Y = a + jb$$

$$Z = \frac{y + jz}{1 + y^2/z^2}$$

$$Y = \frac{a + jb}{1 + a^2/b^2}$$

$$Z = y + jz$$

d) Pour résoudre ces systèmes, il nous faut toutefois résoudre le problème inverse pour connaître les conditions aux limites en x_0 :

-si l'impédance Z_0 est l'impédance de rayonnement dans l'espace infini pour les basses fréquences, $\text{Im}(Z_0) \gg \text{Re}(Z_0)$, et $\text{Im}(Y_0) \gg \text{Re}(Y_0)$. Par conséquent $a_0 + j b_0 = Y_0$, et $y_0 + j z_0 = Z_0$.

-si $\text{Re}(Y_0)/\text{Im}(Y_0)$ n'est pas petit, et $\text{Im}(Y_0)$ très petit : $a_0 + j b_0 = Y_0$,

mais
$$Z_0 = \frac{y_0 + j z_0}{1 + y_0^2/z_0^2}$$

-inversement si $\text{Re}(Y_0)/\text{Im}(Y_0)$ n'est pas petit, mais $\text{Im}(Y_0)$ grand :

$$y_0 + j z_0 = Z_0, \text{ et } Y_0 = \frac{a_0 + j b_0}{1 + a_0^2/b_0^2}$$

2-2.3. Les extremums de $|Y|$

Nous voulons étudier à présent les pics de $|Y|$, c'est-à-dire les grandes valeurs de $|b|$ (le raisonnement serait analogue pour $|Z|$). Si $|b|$ est assez grand, $2kb \gg g$, $b^2 \gg 1$, et $b^2 \gg gb$. Le système (S1) devient :

$$\begin{cases} a' = -2kab \\ b' = -kb^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{kx+B} \\ a = Ab^2 \end{cases}$$

où A et B sont deux constantes. Remarquons que si b devient infini, a et a/b également.

Puisque $Y = \frac{a + jb}{1 + a^2/b^2}$, nous obtenons les extremums suivants :

$$\text{-pour } \operatorname{Re}(Y) = \frac{A}{A^2 + 1/b^2} : \frac{1}{A} \quad (\text{quand } b \rightarrow \pm \infty)$$

$$\text{-pour } \operatorname{Im}(Y) = \frac{b}{1 + A^2 b^2} : \pm \frac{1}{2A} \quad (\text{quand } b = \pm \frac{1}{A})$$

$$\text{-pour } |Y|^2 = \frac{1}{1/b^2 + A^2} : \frac{1}{A^2} \quad (\text{quand } b \rightarrow \pm \infty)$$

Par conséquent, les résultats approchés suivants sont valables pour un pavillon quelconque : $\operatorname{Re}(Y)$ et $|Y|$ atteignent ensemble un maximum quand b devient infini, et alors $\operatorname{Im}(Y)$ s'annule. D'un autre côté, les valeurs extrêmes de $|\operatorname{Im}(Y)|$ sont à peu près égales à la moitié du maximum de $\operatorname{Re}(Y)$, et quand $\operatorname{Im}(Y)$ passe par un extremum, les courbes $|\operatorname{Im}(Y)|$ et $\operatorname{Re}(Y)$ se coupent. C'est bien ce que montrait la figure 1b.

Quand b devient infini, il est important de remarquer que si $|Y|$ et $\operatorname{Re}(Y)$ atteignent ensemble leur maximum, et $|Z|$ son minimum, par contre $\operatorname{Re}(Z)$ n'atteint pas alors son minimum. En effet, notre approximation aux grandes valeurs de $|b|$ donne pour $\operatorname{Re}(Z)$:

$$\operatorname{Re}(Z) = y = \frac{a}{b^2} = A$$

Mais $\operatorname{Re}(Z)$ n'est en réalité pas tout à fait indépendant de la valeur de b : elle est bien égale à A pour b infini, mais passe par un minimum légèrement plus petit que A pour une valeur finie de b. Ceci provient du fait que notre approximation est grossière, car elle néglige $g(x)$ dans les deux équations du système (S1) (et de fait, pour un cylindre, A est bien le minimum de $\operatorname{Re}(Y)$).

En définitive, les limites suivantes donnent donc les pics de $|Y|$:

$$|Y| = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{y} \quad \text{ou} \quad |Y| = \lim_{b \rightarrow \pm \infty} \frac{b^2}{a}$$

Quant aux creux de $|Y|$ (c'est-à-dire les pics de $|Z|$), ils sont

obtenus par :

$$|Y| = \lim_{z \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{z^2} \quad |Y| = \lim_{b \rightarrow 0} a$$

En général, les solutions du système (S1) sont plus simples, aussi nous choisirons les expressions suivantes :

$$|Z|_{\max} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{a} \quad (4a)$$

$$|Z|_{\min} = \lim_{b \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{b^2} \quad (4b)$$

2-2.4. L'exemple du tronc de cône

Il nous a paru intéressant de vérifier cette approximation, même si l'exemple est irréaliste, puisque dépourvu de pertes visco-thermiques.

Soit un tronc de cône, dont le sommet est à l'origine : $g(x) = \frac{2}{x}$. La solution du système (S1) est :

$$\begin{cases} b = -\operatorname{tg}(kx - E_0) - \frac{1}{kx} \\ a = \frac{a_0}{1 + (b_0 + \frac{1}{kx_0})^2} - \frac{1}{\cos^2(kx - E_0)} \end{cases}$$

où

$$E_0 = kx_0 + \operatorname{Arctg}(b_0 + \frac{1}{kx_0})$$

Pour un tronc de cône de longueur 2,5 m, de rayon 0,02 m à l'extrémité x_0 , et de rayon d'entrée 0,002 m, à 21,2°C, nous avons calculé la partie réelle en utilisant d'abord la formule exacte, par un calcul en nombres complexes, puis les formules approchées suivantes :

$$\operatorname{Re}(Y) = a \quad (5a)$$

$$\operatorname{Re}(Y) = \frac{a}{1 + a^2/b^2} \quad (5b)$$

$$\operatorname{Re}(Y) = \frac{b^2}{a} \quad (5c)$$

La figure 2 montre les résultats autour de la fréquence f_1 . Si f n'approche pas f_1 de moins de 0,2%, la formule (5a) est très satisfaisante (l'erreur est inférieure à 0,1%). Quand f se rapproche de f_1 , l'erreur croît rapidement, et a devient infini, comme l'inverse du carré d'un cosinus. La situation est la même autour de la fréquence g_1 pour la formule (5b).

Plus près des fréquences f_1 (respectivement g_1), les formules (5b) (respectivement 5a) sont excellentes : "au pied" du pic et au sommet, l'erreur est inférieure à 0,01% ; par contre, dans la forte pente, elle peut atteindre 1%.

Quant à la formule limite (5c), elle donne d'excellents résultats, mais seulement au sommet du pic.

On peut donc obtenir la "courbe des pics" et la "courbe des creux" de l'impédance d'entrée d'un tronc de cône :

$$\text{si } b = 0 : \operatorname{tg}(kx - E_0) = -\frac{1}{kx}$$

d'où

$$|Z|_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 x^2}} = \frac{1}{\frac{a_0}{1 + (b_0 + \frac{1}{kx})^2}}$$

$$\text{si } b \rightarrow \infty : \operatorname{tg}(kx - E_0) \rightarrow \infty$$

d'où

$$|Z|_{\min} = \frac{a_0}{1 + (b_0 + \frac{1}{kx})^2}$$

Dans le cas d'un tuyau cylindrique, nous obtenons la formule bien connue entre les pics et les creux, puisque $\frac{1}{x}$ s'annule : $|Z|_{\max} = \frac{1}{|Z|_{\min}}$. Il en va différemment pour le tuyau conique (cf. fig. 3). Cependant, aux hautes fréquences, les deux courbes se confondent, car le terme $(1 + \frac{1}{k^2 x^2})$ tend vers 1. Les points que montre cette figure sont les sommets des pics de $|Z|$ et $|Y|$.

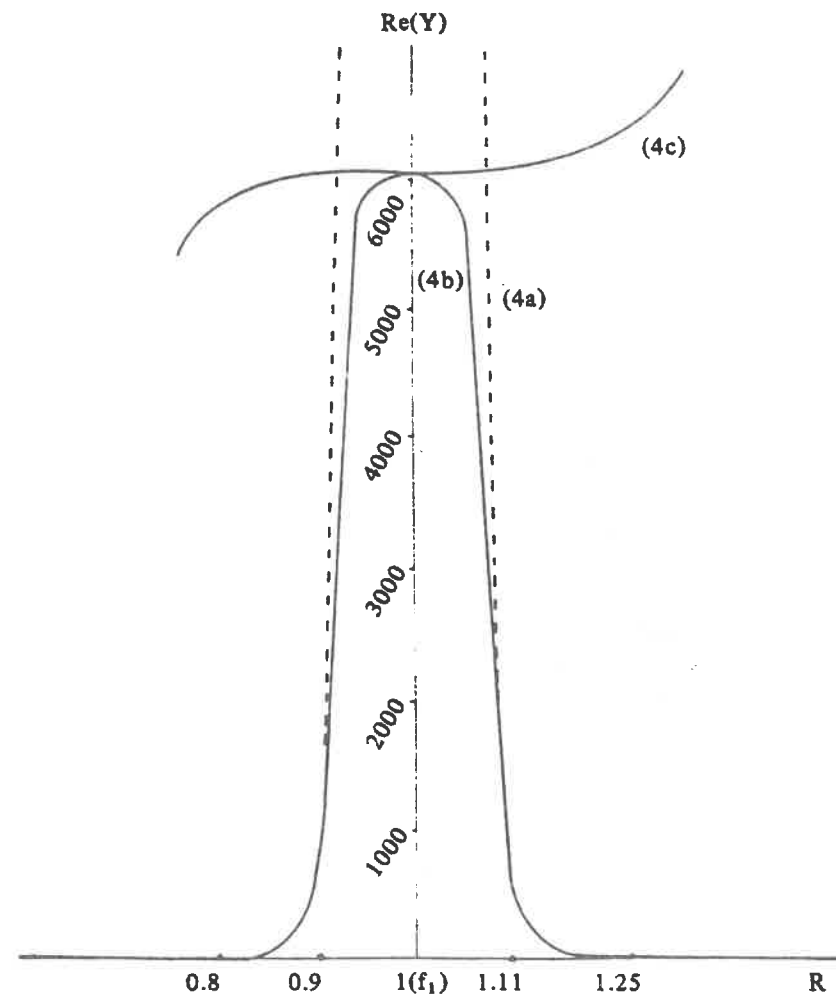


Fig.2 : comparaison des trois formules approchées pour $\operatorname{Re}(Y)$ autour de f_1 . Dans cette limite, la formule 5b est confondue avec la formule exacte (l'échelle est la même que celle de la figure 1b).

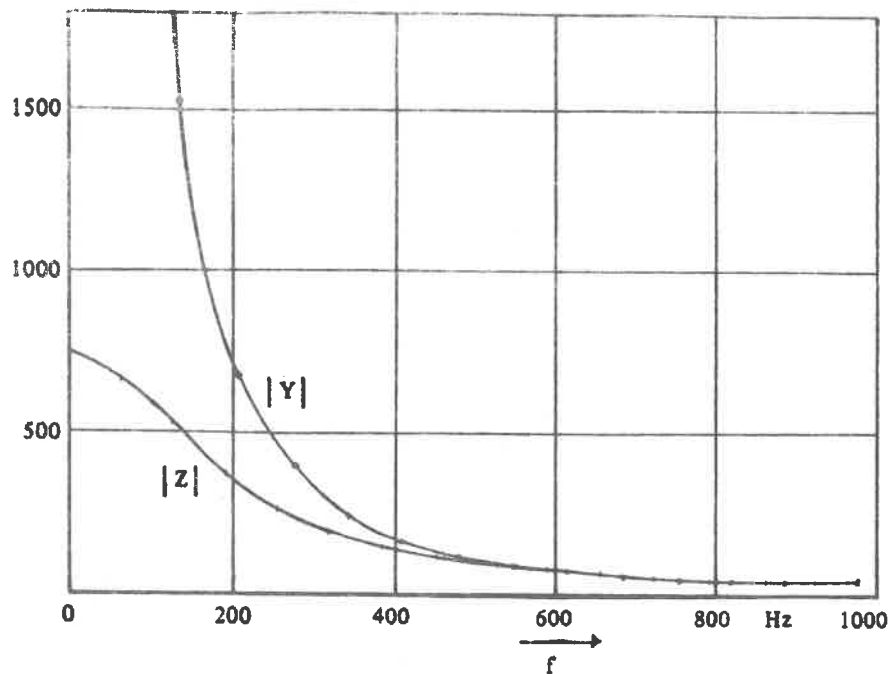


Fig.3 : courbe des pics du tronc de cône (pour $|Z|$ et $|Y|$)

2-2.5. Champ de pression et de vitesse dans un pavillon sans amortissement

L'existence de noeuds et de ventres dans un tuyau sonore est chose bien connue. Dans un cylindre, sauf si l'onde est progressive, il existe des maximums et des minimums de l'amplitude de la pression et de la vitesse, équidistants, et tels qu'à un maximum de pression correspond un minimum de vitesse et vice-versa (les ondes stationnaires ont en plus la propriété de présenter des minimums nuls).

Dans un pavillon, nous allons montrer que les phénomènes sont légèrement différents. Nous avons vu que, à une très bonne approximation près, la partie imaginaire de l'impédance (et de l'admittance) s'annule quand

le module de celle-ci passe par un extremum : nous avons démontré cette propriété pour les variations de la variable d'espace x et admis qu'elle demeurerait valable pour les variations de la fréquence f . C'est cette propriété qui va nous permettre d'étudier la situation des extremums de l'amplitude de la pression et de la vitesse.

a) Variations en fonction de x

Considérons les équations de propagation dans un pavillon sans amortissement :

$$\begin{cases} p' = -jku \\ u' = -jkp - gu \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{jk} \frac{p'}{p} \\ Z = -\frac{1}{jk} \left(\frac{u'}{u} + g \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Im}(Y) = \frac{1}{k} \frac{|p'|}{|p|} \\ \text{Im}(Z) = \frac{1}{k} \left(-\frac{|u'|}{|u|} + g \right) \end{cases}$$

Si $|p|$ passe par un extremum, $|p'| = 0$, d'où $\text{Im}(Y) = 0$
 $|Y|$ passe donc par un extremum.

Si $|u|$ passe par un extremum, $|u'| = 0$, d'où $\text{Im}(Z) = \frac{g}{k}$.
 Or $g(x)$ est petit, si l'équation des pavillons a un sens ; donc il nous reste à trouver à quelle condition sur $|Z|$, $\text{Im}(Z)$ passe par une petite valeur positive. Nous savons que celle-ci y passe :

-Si f est proche d'une fréquence g_n , et en fait extrêmement proche ; $|Z|$ est alors très proche de son maximum. Par conséquent un maximum de $|Z|$ correspond à un minimum de $|u|$.

-Si f est proche d'une fréquence f_n ; mais la variation de $\text{Im}(Z)$ étant très lente, f est beaucoup moins proche de la résonance de $|Z|$ que dans le cas précédent. Un maximum de $|u|$ ne correspond donc pas à un minimum de $|Z|$ (sauf bien entendu pour le cylindre).

Résumons-nous : quand x varie dans un pavillon,

- un ventre de pression correspond .à un maximum de $|Z|$
- .à un maximum de $\text{Re}(Z)$
- .à une annulation de $\text{Im}(Z)$

- un noeud de pression correspond à un minimum de $|Z|$
- à un maximum de $\operatorname{Re}(Y)$
- à une annulation de $\operatorname{Im}(Y)$

- un ventre de pression correspond à un noeud de vitesse
- un noeud de pression ne correspond pas à un ventre de vitesse.

b) Variations en fonction de f

Notre démonstration sera toute différente. Nous utiliserons la constance du flux d'énergie avec x :

$$\left| \frac{p}{p_0} \right|^2 = \frac{S_0 \operatorname{Re}(Y_0)}{S \operatorname{Re}(Y)} \quad \text{et} \quad \left| \frac{u}{u_0} \right|^2 = \frac{S_0 \operatorname{Re}(Z_0)}{S \operatorname{Re}(Z)}$$

Dans ces expressions, l'indice 0 représente toujours l'extrémité où l'impédance est connue. Les variations de $|p/p_0|$ et $|u/u_0|$ avec la fréquence dépendent des variations de $\operatorname{Re}(Y_0)$ et $\operatorname{Re}(Z_0)$: il n'est donc a priori pas possible de généraliser.

Néanmoins, s'il s'agit de l'impédance de rayonnement, sa variation est lente devant les variations dues aux résonances de $\operatorname{Re}(Y)$ près des fréquences f_n et de $\operatorname{Re}(Z)$ près des fréquences g_n . On peut donc en conclure que, à de très rares exceptions près :

- un noeud de pression correspond à un maximum de $\operatorname{Re}(Y)$ et de $|Y|$
- un noeud de vitesse correspond à un minimum de $\operatorname{Re}(Z)$ et de $|Z|$

N.B. Le cas de l'impédance de rayonnement aux très basses fréquences est un cas très particulier, car $\operatorname{Re}(Y_0)$ est constant en fréquence. Un ventre de pression correspond alors à un minimum de $\operatorname{Re}(Y)$, mais nous avons vu que celui-ci diffère du minimum de $|Y|$.

2-3. LE CYLINDRE AVEC PERTES VISCO-THERMIQUES AUX PAROIS

2-3.1. Système exact à résoudre

Dans un tuyau cylindrique, avec pertes visco-thermiques aux parois, l'impédance Z en deux points x_1 et x_2 vérifie la relation suivante (cf. chapitre I, § 3-4. et 3-5) :

$$Z_1/\zeta = j \operatorname{tg} \left[-j\Gamma(x_2-x_1) - j \operatorname{Arctg}(Z_2/\zeta) \right]$$

où Γ et ζ sont données par (cf. éq. 15 et 16 chapitre I) :

$$\begin{cases} \Gamma = \sqrt{Z_V Y_t} = jk \left[1 + \frac{P}{Z}(1+Q) - j \frac{P}{Z} [(1+P)(1+Q) - P \frac{Q^2}{Y-1}] \right] \\ \zeta = \sqrt{\frac{Z_V}{Y_t}} = \rho c \left[1 + \frac{P}{Z}(1-Q) - j \frac{P}{Z} [(1+P)(1-Q) + \frac{PQ^2}{2} \frac{3Y-2}{Y-1}] \right] \end{cases}$$

L'équation différentielle correspondante est :

$$Z' = Y_t Z^2 - Z_V$$

Quant à l'admittance, elle vérifie :

$$Y' = Z_V Y^2 - Y_t$$

$$\text{ou} \quad Y' = \Gamma \zeta Y^2 - \Gamma/\zeta \quad (6)$$

Nous voulons trouver une expression approchée de Y ; nous pourrions la chercher directement à partir de la solution connue de l'équation (6), mais nous préférons la chercher comme nous le ferons pour les pavillons, en écrivant d'abord une équation approchée, puis en intégrant celle-ci. Soit donc, en utilisant l'impédance réduite $Z = \frac{P}{U} \cdot \frac{1}{\rho c}$ (cf. chapitre I, éq. 15)

$$Z_V = k \left[\left(1 + \frac{3P}{2} \right) P + j(1+P) \right] = A + jB \quad (7a)$$

$$Y_t = k \left[PQ \left(1 - \frac{PQ}{2} \frac{1}{Y-1} \right) + j(1+PQ) \right] = C + jD \quad (7b)$$

(la dimension des coefficients A, B, C, D est donc l'inverse d'une longueur).

Si $Y = a + jb$, l'équation (6) peut s'écrire sous la forme du système suivant :

$$(S3) \quad \begin{cases} a' = A(a^2 - b^2) - 2abB - C \\ b' = B(a^2 - b^2) - 2abA - D \end{cases}$$

2-3.2. Simplification du système (S1) dans le cas d'ondes quasi-stationnaires

Nous reprenons la méthode que nous avons utilisée à propos du pavillon sans amortissement. Dans les deux cas, on a (presque partout) :

$$\operatorname{Re}(Y) \ll \operatorname{Im}(Y)$$

De ce fait, on peut négliger a^2 devant b^2 ; de plus, dans le cas présent, comme P est petit, on peut également négliger $2Aa$ devant Bb . Alors, presque partout, (S3) devient (S4) :

$$(S4) \quad \begin{cases} a' = -2abB - Ab^2 - C \\ b' = -Bb^2 - D \end{cases}$$

Pour étendre cette approximation (S4) à toutes les valeurs de Y , nous redéfinissons Y par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{soit } Y = a + jb & \text{si } b \text{ est petit ou moyen} \\ \text{soit } Y = \frac{a + jb}{1 + \frac{a^2}{b^2}} & \text{si } b \text{ est moyen ou grand} \end{array} \right.$$

a et b étant les solutions de (S4).

Les deux définitions coïncident bien aux valeurs moyennes de b , pour lesquelles on peut toujours négliger a^2 devant b^2 . Dans le cas du tuyau cylindrique avec amortissement, les termes à négliger sont assurément plus nombreux que dans le cas du pavillon sans amortissement. Cependant les résultats restent très satisfaisants. Ainsi, pour un tuyau de 1,5 m de long et 0,005 m de rayon, l'erreur est inférieure à 0,2% pour les basses fréquences. Dans le cas extrême d'un tuyau de même longueur mais de 0,001 m de rayon, l'erreur atteindrait 6% dans les basses fréquences.

2-3.3. Résolution du système (S4)

La première équation du système (S4) est linéaire ; on la résout par la méthode de la variation de la constante :

$$\text{si} \quad I(x) = -2B \int b \, dx,$$

$$\text{on a :} \quad a = e^I \left[- \int_{x_0}^x (Ab^2 + C) e^{-I} \, dx + a_0 e^{-I_0} \right]$$

on trouve donc, si $h = b \sqrt{\frac{B}{D}}$ et $\ell = x_0 - x$:

$$\begin{cases} h = -\operatorname{tg}(\sqrt{BD} \, x - E_0) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} a = (1 + h^2) \left[H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1 + h_0^2} \right] \end{cases} \quad (8b)$$

$$\text{où} \quad E_0 = \sqrt{BD} \, x_0 + \operatorname{Arctg} h_0$$

$$\text{et} \quad H_{x_0}^x = \frac{1}{2} \left(C + \frac{AD}{B} \right) \ell + \frac{1}{2} \left(\frac{AD}{B} - C \right) \frac{1}{\sqrt{BD}} \left[\frac{h}{1 + h^2} \right]_{x_0}^x$$

Le terme H représente l'énergie perdue par amortissement, et le terme $\frac{a_0}{1 + h_0^2}$ le rayonnement à l'extrémité. Nous développerons cette question au § 2.4.5.1..

2-3.4. "Courbe des pics" de $|Z|$ d'un tuyau étroit : le problème du deuxième ordre

Nous avons montré que les pics et les creux du module de l'impédance étaient obtenus par les formules :

$$|Z|_{\max} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad |Z|_{\min} = \lim_{b \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{b^2}$$

Si on fait $b = 0$, on a $h = 0$. D'autre part on peut remarquer que l'impédance de rayonnement d'un tuyau étroit est telle que $\frac{a_0}{1 + h_0^2}$ et $\frac{h_0}{1 + h_0^2}$ sont très petits. On obtient alors :

$$|Y| = \frac{1}{2} \left(C + \frac{AD}{B} \right) \ell$$

c'est-à-dire :

$$|Y| = \frac{1}{2} kP \left[1 + Q + \frac{1}{2} P(1 + 2Q - \frac{Q^2}{\gamma-1}) \right] \ell \quad (9)$$

soit

$$|Y| = \frac{1}{2} kP (1,477 + P \cdot 0,694) \ell$$

Pour estimer la validité de notre méthode approchée, nous avons appliqué la formule (9) à un tuyau très long ($\ell = 4$ m, rayon = 7 mm) et comparé les résultats avec ceux que donnent un calcul exact: A 20 Hz ($Z = 12,3$), l'erreur est de 0,3% ; à 278 Hz ($Z = 3,5$), de 2,8% ; à 971 Hz ($Z = 2$), de 9,2% ; à 2054 Hz ($Z = 1,5$), de 19% ; le rayonnement intervenant de manière presque négligeable, ces erreurs viennent uniquement de la méthode ; on peut constater qu'elles sont grossièrement inversement proportionnelles au carré de l'impédance. Ceci n'est pas surprenant, car les hypothèses de départ sont d'autant mieux vérifiées que les ondes sont plus proches des ondes stationnaires, c'est-à-dire que Z est grand ; or pour $Z = 1,5$, le coefficient de réflexion est égal à 0,2 !

Cette formule, bien connue au premier ordre, est intéressante pour la comparaison de tuyaux différents. Mais, pour la confrontation de la théorie avec l'expérience, il est plus intéressant de rechercher la valeur des pics, c'est-à-dire d'introduire dans la formule (9) les valeurs des fréquences de résonance, qui sont données par la deuxième équation de (S4). Si l'on fait donc $b = 0$, on obtient :

$$\sqrt{BD} \ell + \text{Arctg } h_0 = n\pi \quad \text{où } n = 1, 2, 3, \dots$$

Or $\frac{1}{h_0} = -\frac{\text{Im}(Z_0)}{\sqrt{\frac{D}{B}}}$, où $\text{Im}(Z_0)$ est très petit. Donc

$$\text{Arctg } h_0 = \frac{1}{2}\pi + \text{Im}(Z_0)\sqrt{\frac{D}{B}}$$

D'où $\sqrt{BD} \ell + \text{Im}(Z_0)\sqrt{\frac{D}{B}} = (2n + 1) \frac{1}{2} \pi$

On en tire :

$$k \left[1 + \frac{1}{2} P(1+Q) \right] \ell + \text{Im}(Z_0) \left[1 + \frac{1}{2} P(1-Q) \right] = (2n - 1) \frac{1}{2} \pi$$

Or $\text{Im}(Z_0) \ll k\ell$. Soit f_n une fréquence de résonance sans amortissement, et k_n et P_n les valeurs de k et P correspondantes ; on obtient donc :

$$k = k_n / (1 + \frac{1}{2} P_n(1+Q)) \quad \text{où } k_n = \frac{\pi(2n - 1)}{2(\ell + \frac{\text{Im}(Z_0)}{k})} \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Pour trouver le terme du deuxième ordre de $|Y|$, il ne reste plus qu'à porter ce résultat, par ailleurs bien connu, dans l'expression (9) :

$$|Y|_n = \frac{1}{2} k_n P_n \left[1 + Q + \frac{1}{2} P_n(1 + 2Q - \frac{Q^2}{\gamma-1}) \right] \ell / (1 + \frac{1}{2} P_n(1+Q))^{1/2}$$

ou

$$|Y|_n = \frac{1}{2} k_n P_n \left[1 + Q + \frac{P_n}{4} (1 + 2Q - \frac{Q^2 \gamma + 1}{\gamma - 1}) \right] \ell \quad (11)$$

ou encore :

$$|Y|_n = \frac{1}{2} k_n P_n (1,477 + 0,148 P_n) \ell$$

Les termes du second ordre, qui proviennent d'une part de l'expression de a , et d'autre part de l'abaissement de la fréquence de résonance par amortissement, sont positifs et très petits : par rapport à la courbe au premier ordre en $\sqrt{f}$, la courbe du deuxième ordre se situe donc très légèrement au-dessus. Pour le tuyau choisi ($\ell = 1,49$ m et $r = 0,0058$ m), on trouve qu'entre le premier et le deuxième ordres, le premier pic de $|Z|$ est 0,4% plus bas, le second pic 0,4/√3% plus bas, le troisième pic 0,4/√5% plus bas, ... Autrement dit, le rapport entre les deux premiers pics est de √3 au premier ordre, et de √3[1-0,004(1-1/√3)] au deuxième ordre. Les rapports entre les pics successifs sont donc presque les mêmes au premier et au deuxième ordre, ce qui est en désaccord avec Pratt, Elliott et Bowsher [75].

Par comparaison au calcul complet sur ordinateur, les formules (10) et (11), sont d'excellentes approximations pour les fréquences de résonance comme pour la hauteur des pics : avec le même tuyau, nous avons trouvé pour les pics 0,2% d'erreur dans le grave et 1% vers 1000 Hz.

2-3.5. Courbe des creux d'impédance d'un tuyau étroit

Nous allons faire les calculs analogues à ceux des pics. Si b tend vers l'infini, on obtient :

$$a = (1 + h^2) \frac{1}{2} (C + \frac{AD}{B}) \ell$$

D'où :

$$|Z| = \frac{a}{B^2} = \frac{B}{D} \frac{1}{2} \left(C + \frac{AD}{B} \right) \ell \quad \text{soit } |Z| = \frac{1}{2} \left(\frac{CB}{D} + A \right) \ell$$

soit encore

$$|Z| = \frac{1}{2} kP \left[1+Q + \frac{1}{2} P(3+2Q-Q^2 \frac{2\gamma-1}{\gamma-1}) \right] \ell$$

ou

$$|Z| = \frac{1}{2} kP (1,477 + 1,466 P) \ell$$

Pour les fréquences de résonance, nous ferons les mêmes approximations que pour les pics :

$$k = k_n / \left(1 + \frac{1}{2} P(1+Q) \right) \quad \text{où } k_n = \frac{n\pi}{\ell + \frac{\text{Im}(Z_0)}{k}} \quad \text{avec } n = 1, 2, 3 \dots$$

Nous en tirons les termes du deuxième ordre de la courbe des creux :

$$|Z|_n = \frac{1}{2} k_n P_n \left[1+Q + P \left(5+2Q-Q^2 \left(5 + \frac{2}{\gamma-1} \right) \right) \right] \ell \quad (12)$$

soit

$$|Z|_n = \frac{1}{2} k_n P_n (1,477 + 0,921 P_n) \ell$$

On peut faire les mêmes commentaires que pour les pics. Toutefois, par rapport à la courbe du premier ordre en $\sqrt{f}$, la courbe du deuxième ordre est nettement plus éloignée : pour le tuyau choisi, la différence est de 2,5% pour le premier creux, 2,5/√2% pour le deuxième etc....

2-3.6. Le tuyau à cheminée axiale

Il suffit d'utiliser la formule du tuyau cylindrique dans chacun des deux tuyaux (Fig. 4).

Le seul problème est celui de la condition à la discontinuité de section. Nous supposons valable l'approximation de la continuité des pressions et des débits, ce qui donne pour l'admittance, si S_1 et S_2 sont les sections des deux tuyaux, et Y_1 et Y_2 l'admittance de part et d'autre de la discontinuité :

$$Y_2 = \frac{S_1}{S_2} Y_1 = \mu Y_1$$

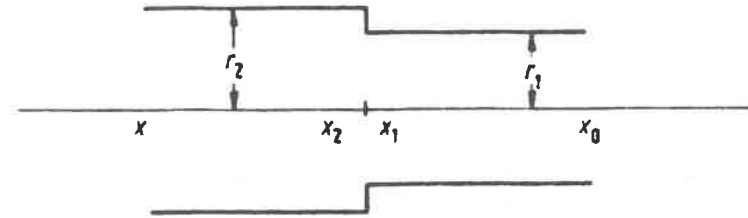


Fig.4 : paramètres d'un tuyau à cheminée

Mais qu'en est-il pour a et b ? Nous utiliserons pour cela les résultats du calcul de $a + jb$ connaissant Y . Ce calcul fait intervenir l'ordre de grandeur de $\text{Im}(Y)/\text{Re}(Y)$ et de $\text{Im}(Y)$. Comme $\text{Im}(Y_1)/\text{Re}(Y_1) = \text{Im}(Y_2)/\text{Re}(Y_2)$, cette quantité ne fait pas problème à la discontinuité. Quant à $\text{Im}(Y)$, son ordre de grandeur serait modifié de manière importante seulement si μ était très petit ou très grand. Si on rejette ce dernier cas, pour lequel la condition en Y à la discontinuité est d'ailleurs insuffisante, on obtient :

$$\begin{cases} \text{ou bien : } Y_1 = a_1 + jb_1 & \text{et } Y_2 = a_2 + jb_2 \\ \text{ou bien : } Y_1 = \frac{a_1 + jb_1}{1 + \frac{a_1^2}{b_1^2}} & \text{et } Y_2 = \frac{a_2 + jb_2}{1 + \frac{a_2^2}{b_2^2}} \end{cases}$$

Par conséquent, dans tous les cas, on aura :

$$S_2(a_2 + jb_2) = S_1(a_1 + jb_1)$$

$$\text{On a donc } a_1 = (1 + h_1^2) \left(H_{x_0}^{x_1} + a_0 / (1 + h_0^2) \right) \quad (\text{cf. eq. 8b})$$

Puisque $b_2 = \mu b_1$, on peut écrire d'autre part :

$$h_2 = b_2 \sqrt{\frac{B_2}{D_2}} = \mu b_1 \sqrt{\frac{B_2}{D_2}} = \mu h_1 \sqrt{\frac{B_2 D_1}{B_1 D_2}} = \mu' h_1$$

Ensuite :

$$a_2 = \mu(1 + h_1^2) \left[H_{x_0}^{x_1} + a_0 / (1 + h_0^2) \right]$$

Et donc, à l'entrée du tuyau :

$$a = (1 + h^2) \left[H_{x_2}^x + a_2(1 + h_2^2) \right]$$

Pour étudier la courbe des pics de $|Z|$, on écrit $b = 0$, et :

$$a = H_{x_2}^x + \frac{\mu(1 + h_1^2)}{1 + \mu^2 h_1^2} \left[H_{x_0}^{x_1} + a_0/(1 + h_0^2) \right]$$

Comme les termes $H_{x_2}^x$ et $H_{x_0}^{x_1}$, ainsi que le terme de rayonnement $a_0/(1 + h_0^2)$, varient lentement avec la fréquence, la courbe des pics de $|Z|$ est modulée par les variations périodiques du terme suivant :

$$T = \frac{\mu(1 + h_1^2)}{1 + \mu^2 h_1^2} = \frac{\mu(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)}{1 + \mu^2 \operatorname{tg}^2 \theta_1}$$

où $\theta_1 = \sqrt{B_1 D_1} \ell_1 + \operatorname{Arctg} h_0$

Les variations de T aux alentours de $\operatorname{tg}(\theta_1)$ infini seront beaucoup plus rapides que celles des autres termes ; on en déduit que $a = |Y|$ passera par des maximums à peu près en même temps que T . Donc la courbe des pics de $|Z|$ passera par des minimums pour des fréquences proches de celles pour lesquelles $\operatorname{tg}(\theta_1) = \infty$, c'est-à-dire $f = c/2\ell_1$, $f = c/\ell_1$, $f = 3c/2\ell_1$, etc... (les variations de T autour de $\operatorname{tg}(\theta_1) = 0$ étant moins rapides, il n'est pas possible de trouver un résultat aussi simple pour les maximums de la courbe des pics de $|Z|$).

On déduit de ceci qu'un pic sera d'autant plus bas que sa fréquence sera plus proche d'une des fréquences de résonance de la cheminée seule. C'est ce qu'on voit sur la figure 5, qui représente la courbe des pics, les croix indiquant les pics de la courbe d'impédance calculée exactement. L'erreur due à la méthode approchée est très faible, moins de 0,4% sur la hauteur des pics et de 0,01% sur les fréquences de résonance. On pourrait bien entendu analyser de la même façon des tuyaux à cheminée tels que μ soit supérieur à 1, ou encore un tuyau à cheminée fermée...

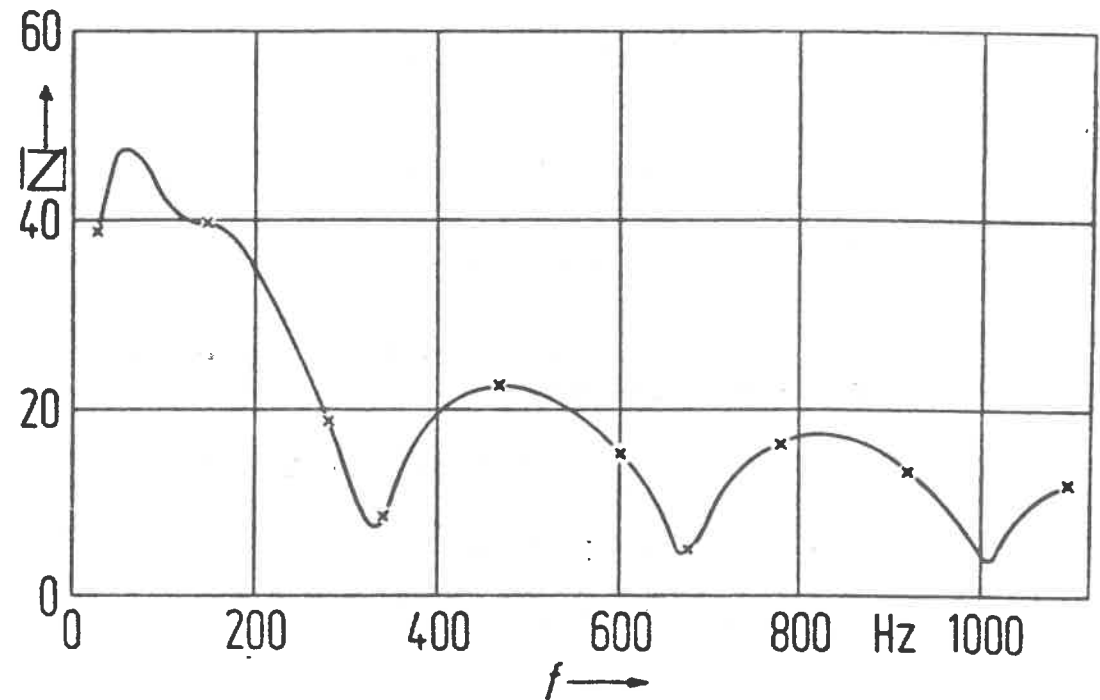


Fig.5 : Courbe des pics de $|Z|$ pour un tuyau à cheminée (calcul approché: les points représentent les pics calculés exactement)

2-4. ONDES QUASI-STATIONNAIRES DANS UN PAVILLON AVEC AMORTISSEMENT

Jusqu'à présent, l'approximation des ondes quasi-stationnaires nous a avant tout permis d'écrire sous une forme maniable les grandeurs caractéristiques de ces ondes (partie réelle de l'impédance, extremums du module de l'impédance). Si on tient compte de l'amortissement dans les pavillons, il en va autrement, puisqu'il n'y a alors pas de solution analytique connue : l'approximation proposée est donc alors aussi une méthode approchée de résolution de l'équation des pavillons avec amortissement. En cela, elle rejoint une méthode que Nederveen et Van Wulfften Palthe [69,70] ont proposé pour le cône (mais qu'ils n'ont utilisée que pour calculer les fréquences de résonance). Pour tester la validité de notre méthode, nous comparerons les résultats au calcul numérique effectué par découpage en tronc de cônes où l'amortissement est supposé constant (cf. chapitre I, § 5-2.2).

2-4.1. Méthode approchée de résolution (ondes quasi-stationnaires)

En combinant les approximations faites dans les deux paragraphes précédents, on peut écrire le système approché (S5) :

$$(S5) \quad \begin{cases} a' + ga = -2kAB - Ab^2 - C \\ b' + gb = -8b^2 - D \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \text{soit } Y = a + jb & \text{si } b \text{ est petit ou moyen} \\ \text{soit } Y = (a + jb)/(1 + \frac{a^2}{b^2}) & \text{si } b \text{ est moyen ou grand} \end{cases}$$

En fait, il se pose un problème nouveau : les coefficients B et D dépendent de x. Ceci nous amène aux réflexions suivantes :

La résolution de la deuxième équation de (S5) n'est en général pas possible. Mais la formule (10) du cylindre nous montre que la correction n'est que très petite si l'on fait $B = D = k$. L'intuition suggère d'utiliser la formule (10), en calculant la valeur moyenne de P, c'est-à-dire :

$$P_m = \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} P(x) dx$$

Les résultats pour les exemples choisis sont excellents, l'erreur sur les fréquences de résonance excédant rarement 0,5%. Cette méthode rejoint d'ailleurs celle qu'ont proposée et justifiée Benade et Jansson [8, 13].

Peut-on trouver une approximation analogue pour la première équation de (S5), c'est-à-dire une extension des formules (10) et (11) du tuyau cylindrique? Pour répondre à cette question, nous devons d'abord évaluer l'erreur due à la méthode des ondes quasi-stationnaires proprement dite : l'intégration de (S5) avec $B = D = k$, et A et C au premier ordre étant possible, il suffit de comparer le résultat au calcul numérique effectué pour les valeurs correspondantes de A, B, C et D. L'erreur sur $\text{Re}(Y)$ peut atteindre 3 à 4% pour les exemples choisis et est donc sensiblement plus importante que pour le cylindre. Pour le calcul des extremums, il est par conséquent illusoire de chercher des termes du deuxième ordre dans le cas de pavillons non cylindriques ; finalement nous résoudrons le système :

$$(S6) \quad \begin{cases} a' + ga = -2kab - Ab^2 - C \\ b' + gb = -k(b^2 + 1) \end{cases}$$

où $A = kP$ et $C = kPQ$. Il va de soi qu'un calcul à fréquence quelconque imposerait de tenir compte du déplacement des fréquences de résonance dû au premier ordre de B et D, et donc de prendre pour P la valeur P_m . Mais c'est inutile pour le calcul des extremums. Pour le cône étudié (cf. 4.1), l'erreur finalement obtenue par rapport au calcul numérique au deuxième ordre est d'au plus 7% pour les pics de $|Z|$ (les erreurs dues à la méthode et au calcul au premier ordre se cumulant), et elle est souvent négligeable pour les creux de $|Z|$ (les erreurs se compensant au contraire). Il est à noter que dans l'aigu, comme le deuxième ordre est négligeable, seule l'erreur de méthode subsiste!

2-4.2. Approximation pour les hautes fréquences

On peut transformer (S6) de la manière suivante, si $p = b + \frac{1}{k} \frac{r'}{r}$:

$$\begin{cases} a' = -2kap - Ab^2 - C \\ p' = -k(p^2 + 1) + \frac{1}{k} \frac{r''}{r} \end{cases}$$

Si k est grand, on commencera par négliger r''/r devant k, et on obtiendra :

$$\begin{cases} p = -\text{tg}(kx - E_0) & \text{où } E_0 = kx_0 + \text{Arctg } p_0 \\ a = \frac{1}{\cos^2(kx - E_0)} \left[-\int_{x_0}^x (A \text{tg}^2(kx - E_0) + C) \cos^2(kx - E_0) dx + \frac{a_0}{1 + p_0^2} \right] \end{cases}$$

Posons :

$$A = \frac{\lambda}{r(x)} \quad C = \frac{\mu}{r(x)} \quad \phi = kx - E_0$$

L'intégrale s'écrit :

$$\int_{x_0}^x \left[\frac{\lambda \sin^2 \phi}{r(x)} + \mu \frac{\cos^2 \phi}{r(x)} \right] dx = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \int_{x_0}^x \frac{dx}{r(x)} - \frac{1}{2}(\lambda - \mu) \int_{x_0}^x \frac{\cos 2\phi}{r(x)} dx$$

Or, si k est grand, on peut négliger la dernière intégrale ; en effet, d'après le lemme de Lebesgue,

$$\int_{x_0}^x \frac{\cos 2(kx - E_0)}{r(x)} dx \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty$$

il nous arrivera fréquemment de reprendre cette approximation, en distinguant les effets de l'amortissement impliquant une perte d'énergie (due à A et C, ou, ce qui revient au même, à $\text{Re}(r)$ et $\text{Im}(c)$), de ceux qui modifient la vitesse du son, que nous négligeons ici en écrivant $\text{Im}(Y_v) = \text{Im}(Y_t) = k$.

D'où

$$a = \frac{1}{\cos^2(kx - E_0)} \left[\frac{1}{2} (\lambda + \mu) \int_{x_0}^x \frac{dx}{r(x)} + \frac{a_0}{1 + p_0^2} \right] \quad (14)$$

Ce résultat est d'autant plus valable que la courbure (r''/r) du pavillon est plus faible, et que la fréquence est élevée. Toutefois, il faut ajouter que le rayonnement doit être faible pour que les ondes soient quasi-stationnaires, ce qui impose r_0 suffisamment petit. On notera que cette approximation s'applique en particulier au tuyau cylindrique (eq. 8b).

2-4.3. L'exemple du tronc de cône

2-4.3.1. Résolution de (S6)

Si on prend l'origine au sommet du cône, on a $g(x) = 2/x$. Soit $p = b + 1/kx$; la solution de (S6) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = -\operatorname{tg}(kx - E_0) \text{ où } E_0 = kx_0 + \operatorname{Arctg}(p_0) \\ a = \frac{1}{\cos^2(kx - E_0)} \left[H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1 + p_0^2} \right] \end{array} \right. \quad (15a)$$

avec

$$H = - \int (C + Ab^2) \cos^2(kx - E_0) dx$$

Si

$$A = \frac{\lambda}{x}, \quad C = \frac{\mu}{x}, \quad y = kx \quad \text{et} \quad kx - E_0 = \phi :$$

$$H = -(\lambda + \mu) \int \frac{\cos^2 \phi}{x} dx - \lambda \int \left[\frac{\cos^2 \phi}{y^3} + \frac{\sin 2\phi}{y^2} - \frac{\cos 2\phi}{y} \right] dy$$

La deuxième intégrale vaut :

$$\frac{1}{2} \lambda \left[\frac{\cos^2 \phi}{y^2} + \frac{\sin 2\phi}{y} \right]$$

$$\text{et la première : } \frac{1}{2} [\operatorname{Log} x] + \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2\phi}{x} dx$$

On reconnaît les fonctions sinus et cosinus intégraux :

$$\operatorname{Si}'(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad \operatorname{Ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} H_{x_0}^x &= \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \operatorname{Log} \frac{x_0}{x} + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \cos(2E_0) \left[\operatorname{Ci}(2kx_0) \right]_{x_0}^x \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \sin(2E_0) \left[\operatorname{Si}(2kx) \right]_{x_0}^x \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{\cos^2(kx - E_0)}{k^2 x^2} \right]_{x_0}^x - \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{\sin 2(kx - E_0)}{kx} \right]_{x_0}^x \end{aligned} \quad (15b)$$

Comme on le voit, cette expression est assez compliquée dans le cas général. En particulier, pour une combinaison de tuyaux faisant intervenir un tuyau conique, le calcul devient inextricable. Néanmoins on peut trouver de bonnes simplifications pour les courbes ("enveloppes") des extremums.

2-4.3.2. Courbe des pics d'impédance

Si on fait $b = 0$, on obtient : $\operatorname{tg}(kx - E_0) + \frac{1}{kx} = 0$

D'où

$$|Y| = \left(1 + \frac{1}{k^2 x^2} \right) \left(H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1 + p_0^2} \right)$$

Pour simplifier H , nous allons faire un certain nombre d'approximations supplémentaires, valables pour les basses fréquences : d'un côté nous négligerons l'impédance de rayonnement (donc $p_0 = \infty$) ; d'un autre côté nous utiliserons l'approximation bien connue des fréquences de résonance (obtenue en écrivant $\tan kx = kx$) $kx_0 = n\pi$, où $n = 1, 2, 3 \dots$. On en déduit :

$$\operatorname{tg}(kx - E_0) = \frac{1}{kx} \quad \text{d'où} \quad \frac{\cos^2 \phi}{k^2 x^2} + \frac{\sin 2\phi}{kx} = - \frac{1}{1 + k^2 x^2}$$

$$\operatorname{Arctg} p_0 = - \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\cos^2 \phi_0}{k^2 x_0^2} + \frac{\sin 2\phi_0}{k x_0} = 0$$

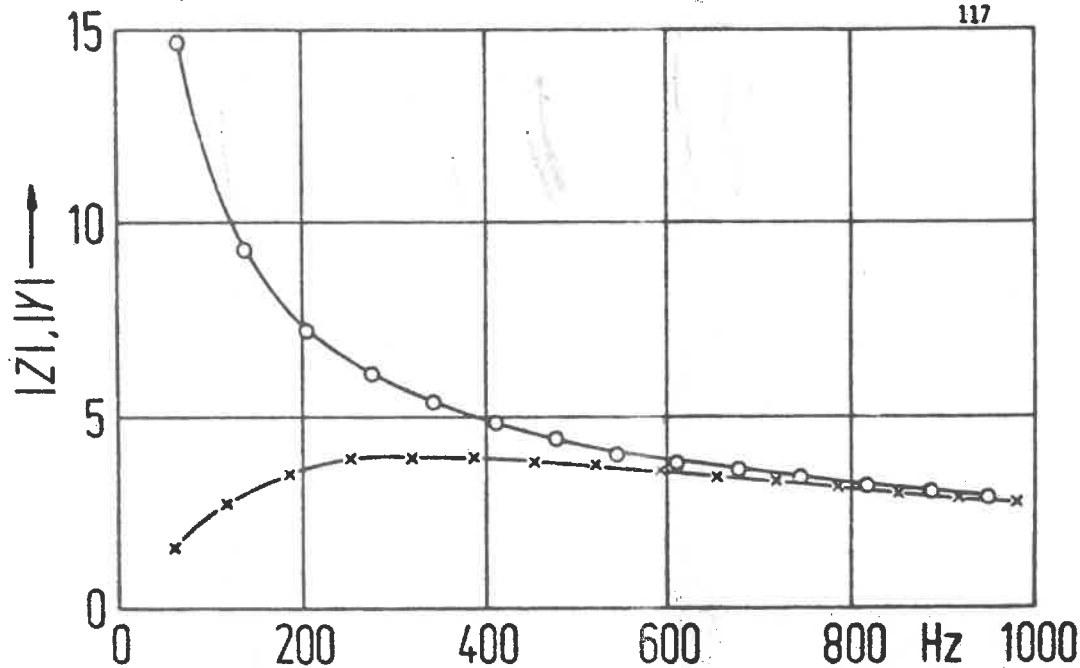


Fig. 6 : courbes des pics de $|Z|$ et $|Y|$ pour un tronc de cône (calcul exact)
 x x x pics de $|Z|$ o o o pics de $|Y|$

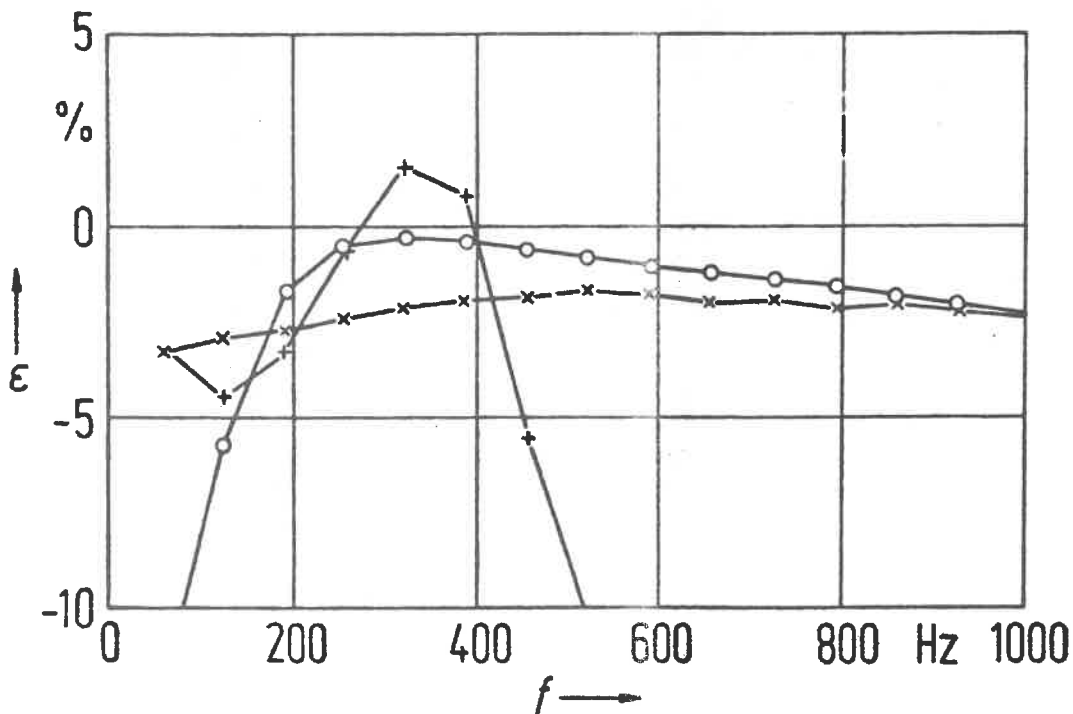


Fig. 7 : courbe des pics de $|Z|$ pour un tronc de cône: erreur ϵ commise en
 les formules 15 (x x x), 16 (+ + +), et 17 (o o o)

$$E_0 = kx_0 + \text{Arctg } p_0 \approx kx_0 - \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \cos E_0 = -\cos 2kx_0 = -1$$

$$\sin E_0 = -\sin 2kx_0 = 0$$

Enfin, puisque $kx_0 \geq \pi$, $|C_i(2kx_0)|$ est inférieur à 0,05 et peut donc être négligé.

Aux basses fréquences, on peut alors écrire

$$H_{x_0}^x = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \left[\text{Log} \frac{x_0}{x} + \text{Ci}(2kx) \right] - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1 + k^2 x^2}$$

Or, jusque environ $kx = 4$, on peut approximer le cosinus intégral de manière convenable par :

$$\text{Ci}(2kx) = \text{Log}(2kx) + \gamma - (kx)^2 + (kx)^6 = \text{Log}(2kx) + \gamma - kx \sin(kx)$$

où γ est la constante d'Euler (0,577...)

On obtient finalement la formule suivante :

$$H_{x_0}^x = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) [\text{Log} 2\pi + \gamma - kx \sin kx] - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1 + k^2 x^2} \quad (16)$$

Pour les hautes fréquences, on retiendra la formule (11), d'où :

$$H_{x_0}^x = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \text{Log} \frac{x_0}{x} \quad (17)$$

La figure 6 montre les résultats numériques et la figure 7 l'erreur des différentes formules approchées (15), (16) et (17). On constate que les formules (16) et (17) n'apportent pas d'erreur supplémentaire, chacune dans leur domaine de validité. (Le tuyau étudié a les dimensions suivantes : $(x_0 - x) = 2,5$ m ; $r_0 = 0,02$ m ; $r = 0,002$ m). On peut remarquer notamment que l'approximation des fréquences aiguës est satisfaisante dès le troisième pic. Cela provient évidemment du fait que la courbure du cône est nulle.

Notons que dans le calcul effectué, l'expression de l'impédance de rayonnement est celle d'un tuyau sans rebord, telle que l'on donnee Levine et Schwinger.

2-4.3.3. Courbe des creux de $|Z|$

Si on fait b infini, on obtient :

$$|Z| = H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1 + p_0^2} \quad (18)$$

Sur la figure 6, on remarque que la courbe de $|Z|_{\min}$ est très différente de la courbe $|Y|_{\min}$ pour les basses fréquences. Il n'est pas possible de trouver une approximation simple qui élimine les cosinus et sinus intégraux dans les basses fréquences, comme nous l'avons fait pour les pics de $|Z|$ (formule (16)) ; par contre dans l'aigu, dans notre exemple dès le troisième creux, l'approximation des hautes fréquences est satisfaisante. La formule (18), avec H calculé en (15b), accuse une erreur de 7% dans le grave, de 1% dans le médium et de 3% dans l'aigu. Nous avons déjà commenté cette question (cf. 2-4.1.).

2-4.4. L'exemple du pavillon exponentiel

2-4.4.1. Résolution du système (S6)

Celui-ci a une section de la forme $r_2 = r_1 \exp m(x_2 - x_1)$. Donc $g = 2m$. Soit $k_1 = \sqrt{k^2 - m^2}$. Nous nous limiterons au cas où k_1 est réel ($k > m$), car si $k < m$, il ne peut y avoir d'extremums d'impédance. L'intégration du système (S4) est lourde, mais possible analytiquement. Si on pose :

$$p = \frac{k}{k_1} \left(b + \frac{m}{k} \right), \quad \phi = k_1 x - E_0, \quad E_0 = k_1 x_0 + \text{Arctg } p_0,$$

$$\Delta = m^2 + 4k_1^2, \quad \lambda = A \exp(mx), \quad \mu = C \exp(mx)$$

on obtient :

$$\begin{cases} p = -\text{tg } \phi \\ a = \frac{1}{\cos^2 \phi} \left[H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1 + p_0^2} \right] \end{cases}$$

avec :

$$H = \frac{1}{\Delta} \exp(-mx) \left[(\lambda + \mu) \left(\frac{2k_1^2}{m} + m \cos^2 \phi \right) + (\lambda - \mu) k_1 \sin 2\phi \right. \\ \left. + \frac{m}{k^2} (-k_1^2 + 2k_1^2 \cos^2 \phi - m k_1 \sin 2\phi) \right]$$

2-4.4.2. Courbe des pics d'impédance

Si on fait b nul, on a : $p = m/k_1 = -\text{tg } \phi$.

$$\text{D'où : } \frac{1}{\cos^2 \phi} = \frac{k^2}{k_1^2}$$

A l'extrémité, p_0 est très grand, donc $\cos \phi_0$ et $\sin \phi_0$ sont négligeables.

Donc :

$$H^x = \frac{\exp(-mx)}{\Delta} \left[(\lambda + \mu) \frac{2k_1^2}{mk^2} \left(k_1^2 + \frac{3}{2} m^2 \right) - \frac{2mk_1^2}{k^2} (\lambda - \mu) + \lambda m \frac{k_1^2}{k^2} \right]$$

et

$$H_{x_0}^x = \frac{\exp(-mx_0)}{\Delta} \left[(\lambda + \mu) \frac{2k_1^2}{m} - \lambda m \frac{k_1^2}{k^2} \right]$$

Finalement :

$$|Y|_{\min} = K_{x_0}^x + \frac{k^2}{k_1^2} \frac{a_0}{1 + p_0^2} \quad (19)$$

avec :

$$K_{x_0}^x = \frac{k}{k_1} H_{x_0}^x = (\lambda + \mu) \frac{2}{m\Delta} \left[k^2 (\exp(-mx) - \exp(-mx_0)) \right. \\ \left. + 3\mu \frac{m}{\Delta} \exp(-mx) + \frac{\lambda m}{\Delta} \exp(-mx_0) \right]$$

L'erreur sur la hauteur des pics de $|Z|$ (formule 19) est de 10% dans le grave, décroît jusqu'à 5% vers 300 Hz et remonte jusqu'à 10% dans l'aigu (Pour le tuyau étudié, $r_0 = 0,02$ m ; $l = 2,30$ m ; $m = 1$). Elle est donc plus grande que celle portant sur le cône de dimensions comparables. Une explication est la suivante : l'approximation des ondes quasi-stationnaires repose sur l'hypothèse que les extremums en x et en f sont confondus, autrement dit que les solutions de l'équation de l'admittance sont des fonctions de la variable (kx) . Or ceci est vrai pour le cône, mais pas tout à fait pour le tuyau exponentiel (cf. § 2-2.1.)

Par contre, les fréquences de résonance sont très bien évaluées par la correction proposée au § 2-4.1, l'erreur ne dépassant pas 0,2%. La figure 8 montre les résultats du calcul exact.

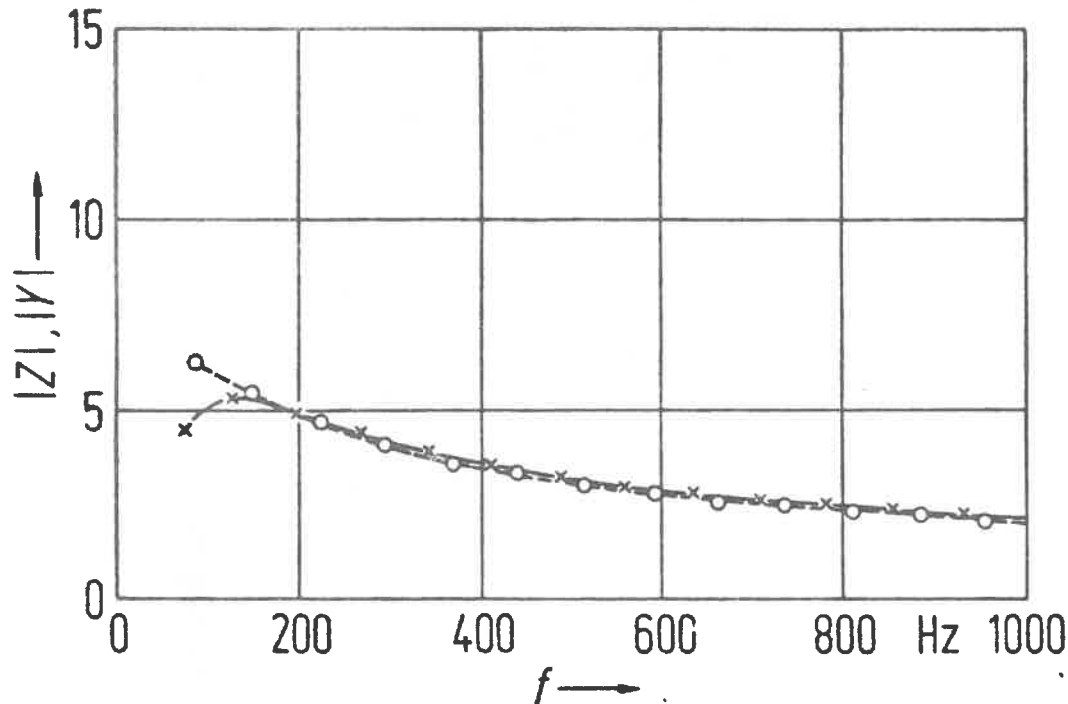


Fig. 8 : courbes des pics de $|Z|$ et de $|Y|$ pour un pavillon exponentiel (calcul exact): pics de $|Z|$ (x x x) ; pics de $|Y|$ (o o o)

2-4.4.3. Courbe des creux d'impédance

Si p tend vers l'infini ; $\cos^2\phi$ et $\sin^2\phi$ sont nuls. D'où :

$$|Z|_{\min} = \frac{a}{b^2} = \left(\frac{\lambda + \mu}{\Delta} \frac{2k^2}{m} - \frac{\lambda m}{\Delta} \right) (\exp(-mx) - \exp(-mx_0)) + \frac{k^2}{k_1^2} \frac{a_0}{1 + p_0^2}$$

L'erreur sur les creux de $|Z|$ (3% environ) est plus faible que l'erreur sur les pics, ce que nous avons déjà remarqué pour le cône. La courbe des creux rejoint très rapidement la courbe des pics, comme le montre la figure 8.

2-4.5. Champ de pression et de vitesse dans un pavillon avec amortissement

2-4.5.1. Amplitude des ondes

Dans ce qui suit, nous appelons en raccourci "grandeur sans amortissement" (respectivement "avec amortissement") une grandeur calculée dans le pavillon quand on néglige l'amortissement (respectivement quand on tient compte de l'amortissement). Nous voulons montrer que la connaissance de l'impédance avec amortissement et de la pression et de la vitesse sans amortissement implique la connaissance de la pression et de la vitesse avec amortissement. Nous pensons ici aux effets énergétiques de l'amortissement, et non à ceux qui font varier la vitesse du son : autrement dit, nous nous plaçons dans l'approximation du système (S6), où l'amortissement n'intervient que par les quantités A et C .

Nous allons donc comparer un pavillon dans lequel $\text{Re}(Z_v)$ et $\text{Re}(Y_t)$ sont négligés avec un pavillon dans lequel ils ne le sont pas (pour simplifier, nous supposons $\text{Im}(Z_v) = \text{Im}(Y_t) = k$). La démonstration repose sur l'approximation des ondes quasi-stationnaires et sur l'équation de l'énergie dans les pavillons (chapitre I, éq. 22bis) ; en utilisant les symboles A et C au lieu de R et G , cette équation s'écrit :

$$(SI)' = -\frac{1}{2} AS |u|^2 - \frac{1}{2} CS |p|^2$$

où I est le flux d'énergie : $I = \frac{1}{2} |p|^2 \text{Re}(Y) = \frac{1}{2} |u|^2 \text{Re}(Z)$

$$\text{D'où} \quad \frac{(SI)'}{(SI)} = -\frac{A(x)}{\text{Re}(Z)} - \frac{C(x)}{\text{Re}(Y)}$$

Nous allons évaluer le deuxième membre de cette équation en utilisant l'approximation des ondes quasi-stationnaires dans chacun des trois domaines suivants :

$$1^\circ) \quad |b| \text{ petit} \Rightarrow Y = a + jb, \quad \text{Re}(Y) = a, \quad \text{Re}(Z) = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Or $a^2 \ll 1$. Comme A et C sont du même ordre de grandeur ($C/A = Q = 0,477$), ceci implique $Aa^2 \ll C$.

$$D'où \quad \frac{(SI)'}{(SI)} = -\frac{A(a^2+b^2)}{a} - \frac{C}{a} = -\frac{Ab^2}{a} - \frac{C}{a}$$

$$2^\circ) \quad |b| \text{ moyen} \rightarrow Y = a + jb \quad a^2 \ll b^2$$

$$\operatorname{Re}(Y) = a, \quad \operatorname{Re}(Z) = y = \frac{a}{b^2}$$

$$\frac{(SI)'}{(SI)} = -\frac{Ab^2}{a} - \frac{C}{a}$$

$$3^\circ) \quad |b| \text{ grand} \rightarrow Y = \frac{a + jb}{1 + a^2/b^2}$$

$$\operatorname{Re}(Y) = \frac{a}{1 + a^2/b^2}, \quad \operatorname{Re}(Z) = y = \frac{a}{b^2}$$

$$\text{On a :} \quad y^2 \ll 1 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} \ll 1 \rightarrow C \frac{a^2}{b^2} \ll A b^2$$

$$D'où \quad \frac{(SI)'}{(SI)} = -\frac{Ab^2}{a} - \frac{C(1 + a^2/b^2)}{a} = \frac{Ab^2}{a} - \frac{C}{a}$$

L'équation de l'énergie devient donc dans tous les cas :

$$\frac{(SI)'}{(SI)} = -\frac{Ab^2}{a} - \frac{C}{a}$$

$$\text{Or, d'après (S6), } a' + ga + 2kab = -Ab^2 - C$$

$$D'où \quad \frac{(SI)'}{(SI)} = \frac{a'}{a} + \frac{S'}{S} + 2kb$$

Or b est solution de l'équation : $b' + gb = -k(b^2 + 1)$.
C'est une grandeur stationnaire, qui ne dépend pas de l'amortissement. Si nous indiquons par s les grandeurs sans amortissement, $b = b_s$, et :

$$\frac{(SI_s)'}{(SI_s)} = \frac{a'_s}{a_s} + \frac{S'_s}{S_s} + 2kb (= 0)$$

d'où la relation fondamentale :

$$\frac{(SI)'}{(SI)} - \frac{(SI_s)'}{(SI_s)} = \frac{a'}{a} - \frac{a'_s}{a_s}$$

Il ne reste qu'à intégrer en partant de l'extrémité 0 :

$$\frac{SI}{S_0 I_0} + \frac{S}{S_0 I_0} = \frac{a}{a_0} + \frac{a_s}{a_0}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{I}{I_s} = \frac{a}{a_s}}$$

$$\rightarrow \left| \frac{p}{p_s} \right|^2 = \frac{\operatorname{Re}(Y_s)}{\operatorname{Re}(Y)} \frac{a}{a_s} \quad \text{et} \quad \left| \frac{u}{u_s} \right|^2 = \frac{\operatorname{Re}(Z_s)}{\operatorname{Re}(Z)} \frac{a}{a_s}$$

On en tire alors :

1°) Si $|b|$ est petit ($\operatorname{Re}(Y) = a$ et $\operatorname{Re}(Y_s) = a_s$) :

$$|p| = |p_s| \quad \text{et} \quad \left| \frac{u}{u_s} \right| = \left| \frac{Y}{Y_s} \right|$$

2°) Si $|b|$ est moyen :

$$|p| = |p_s| \quad \text{et} \quad |u| = |u_s| \rightarrow |Z| = |Z_s|$$

3°) Si $|b|$ est grand :

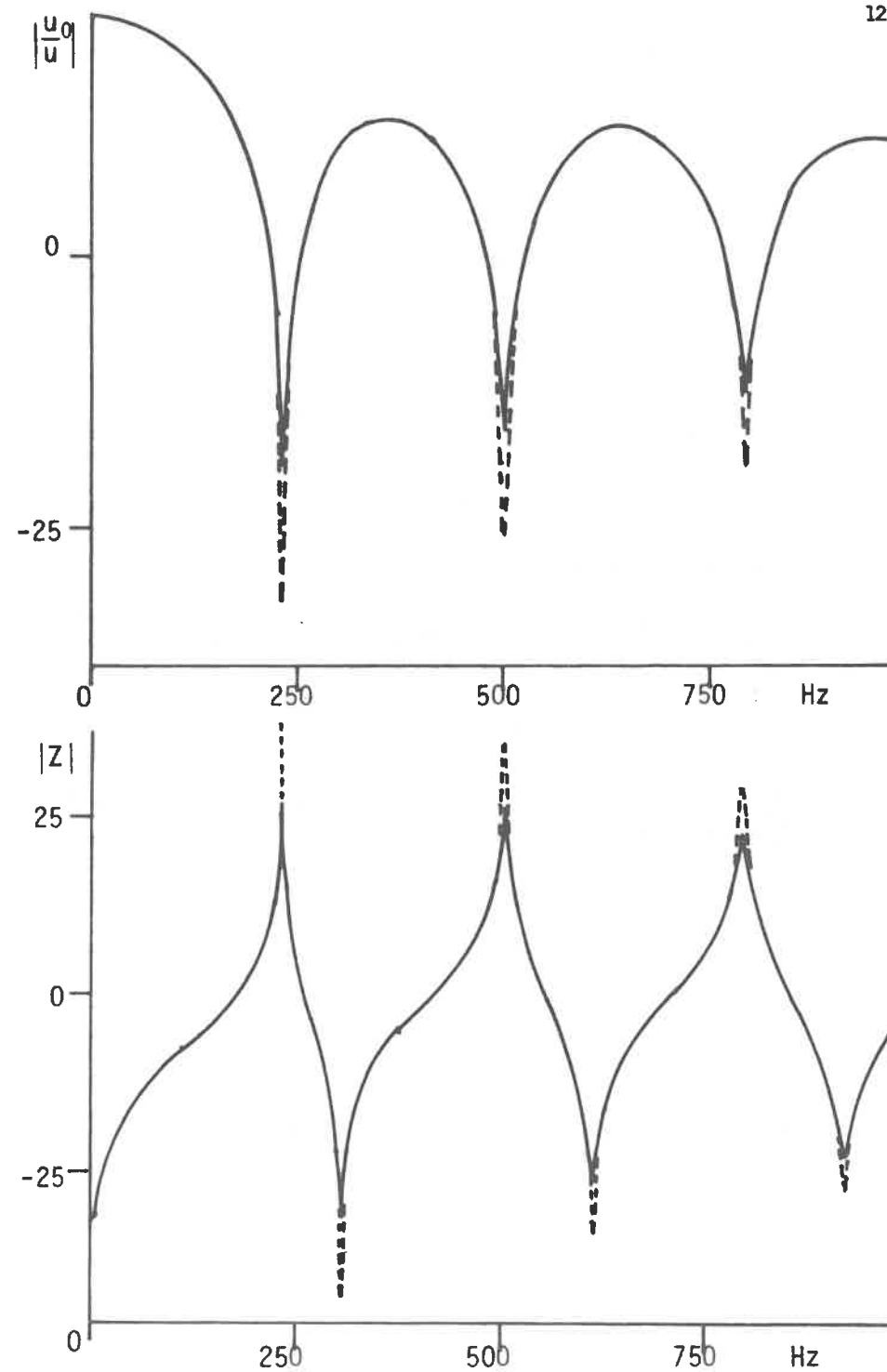
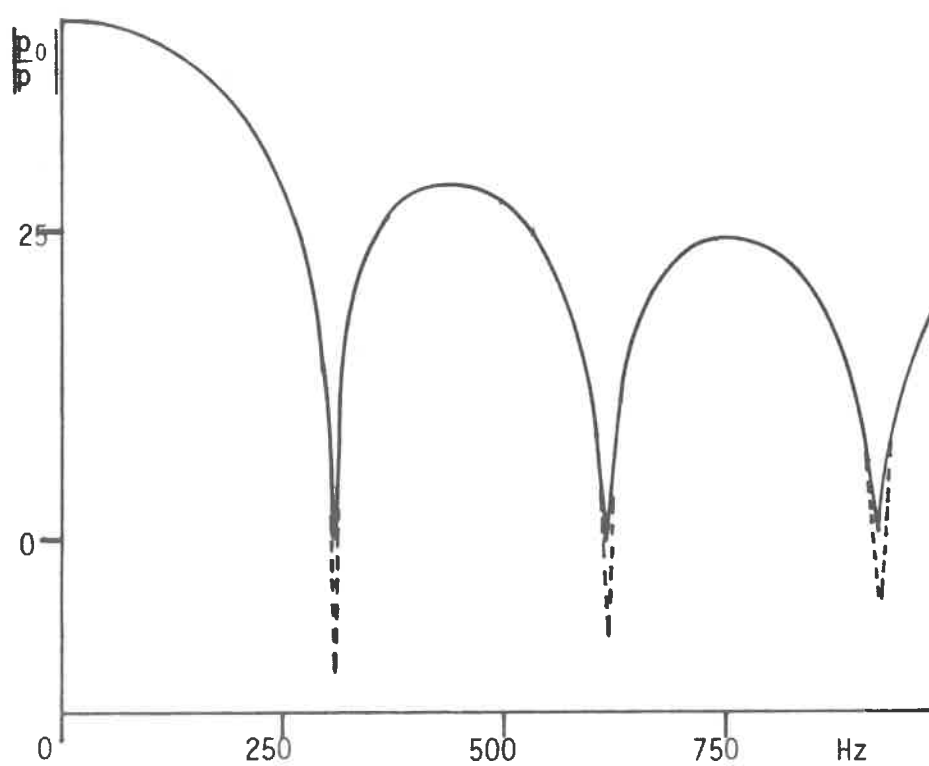
$$|u| = |u_s| \quad \text{et} \quad \left| \frac{p}{p_s} \right| = \left| \frac{Z}{Z_s} \right|$$

Ceci démontre la proposition énoncée au départ. La figure 9a illustre ce résultat pour les variations de la fréquence : les maximums de pression et de vitesse sont presque indépendants de l'amortissement, alors que les minimums en dépendent.

D'autre part, on peut conclure également que les règles énoncées au § 2-2.5. sont conservées : les maximums de pression et de vitesse sont obtenus pour les mêmes fréquences (ou valeurs de x) avec et sans amortissement ; et comme les extremums de $|Z|$ le sont également (pour b nul ou infini), les minimums de pression et de vitesse, bien qu'ayant des valeurs distinctes avec et sans amortissement, sont obtenus aussi pour les mêmes fréquences (ou valeurs de x).

De plus, l'amortissement intervient sur la pression seulement

Fig. 9a : vitesse, impédance, et pression pour un cône (échelle logarithmique, en dB) en fonction de f (en pointillé, la courbe sans amortissement)



près du minimum de celle-ci : près d'un maximum d'impédance, la pression n'est pas à son maximum, mais elle n'est toutefois pas influencée par l'amortissement. Il en est de même pour la vitesse et l'admittance.

Résumons donc les différents résultats de ce paragraphe et du § 2-2.5. :

- quand x varie : un ventre de pression correspond à un noeud de vitesse, mais l'inverse n'est pas vrai.
- quand x ou f varient : un noeud de pression correspond à un minimum de $|Z|$, et un noeud de vitesse à un minimum de $|Y|$.
- l'amortissement n'intervient sur la valeur de la pression et de la vitesse que près de leurs minimums.

Pour calculer le module de la pression en un point et pour une fréquence qui ne sont pas proches d'un minimum, on peut utiliser la constante du flux d'énergie :

$$S|p|^2 \operatorname{Re}(Y_s) = S|p_s|^2 \operatorname{Re}(Y_s) = S_0|p_0|^2 \operatorname{Re}(Y_0)$$

D'où

$$\left| \frac{p_0}{p} \right|^2 = \frac{S \operatorname{Re}(Y_s)}{S_0 \operatorname{Re}(Y_0)}$$

(Y_s représente, rappelons-le, l'admittance calculée sans amortissement, et Y_0 l'admittance de sortie).

Ce résultat vaut en particulier pour la pression correspondant aux maximums d'impédance.

L'analogie est complète en ce qui concerne la vitesse.

2-4.5.2. Variations de phase de la pression et de la vitesse

- Nous traitons pour commencer le cas du cylindre, pour lequel on obtient une formule simple. En utilisant la relation de propagation dans un quadri-pôle, on peut calculer la différence de phase de la pression en deux points en fonction de la longueur du cylindre et de l'admittance en l'un des points.

En fait, il est plus commode de la calculer en fonction des admittances de chacun des points.

Soient en effet les équations différentielles de l'admittance d'une part, et reliant la pression à l'admittance d'autre part :

$$Y' = Z_V Y^2 - Y_t = Z_V (Y^2 - 1/\zeta^2)$$

$$\text{et } \frac{p'}{p} = -Z_V Y$$

En éliminant Z_V entre ces deux équations, on obtient :

$$\frac{p'}{p} = -\frac{Y Y'}{Y^2 - 1/\zeta^2} \rightarrow \operatorname{Log} \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{Y^2 - 1/\zeta^2}{Y_0^2 - 1/\zeta^2}$$

D'où :

$$\operatorname{Arg} \frac{p}{p_0} = \frac{1}{2} \operatorname{Arg}(1 - Y_0^2 \zeta^2) - \frac{1}{2} \operatorname{Arg}(1 - Y^2 \zeta^2) \quad (\pi)$$

Posons :

$$\phi = \operatorname{Arg}(1 - Y^2 \zeta^2) \quad \text{et } \phi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Arg}(1 - Y_0^2 \zeta^2)$$

soit

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2 \operatorname{Re}(Y \zeta) \operatorname{Im}(Y \zeta)}{\operatorname{Im}^2(Y \zeta) + 1 - \operatorname{Re}^2(Y \zeta)} & \text{si le dénominateur est positif} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2 \operatorname{Re}(Y \zeta) \operatorname{Im}(Y \zeta)}{\operatorname{Im}^2(Y \zeta) + 1 - \operatorname{Re}^2(Y \zeta)} & \text{si le dénominateur est négatif} \end{cases}$$

Comme nous avons déjà étudié les variations de Y (en fonction de x et de f , cf. notamment § 2-2.1.) nous pouvons aisément en déduire celles de la phase de la pression. Certes la formule ci-dessus a l'inconvénient de ne donner le résultat qu'à π radians près. Mais on sait, qu'aux basses fréquences p est égal à p_0 , donc $\operatorname{Arg}(p/p_0)$ est nul ; il suffit ensuite de raisonner par continuité.

- L'allure de la courbe de l'argument de l'impédance est bien connue dans le cas des oscillations forcées d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté ; elle passe de 0 à π d'autant plus rapidement que le système est moins amorti, atteignant $\frac{\pi}{2}$ pour la résonance. Nous allons montrer que le comportement de la courbe de phase de la pression dans un cylindre est peu différente.

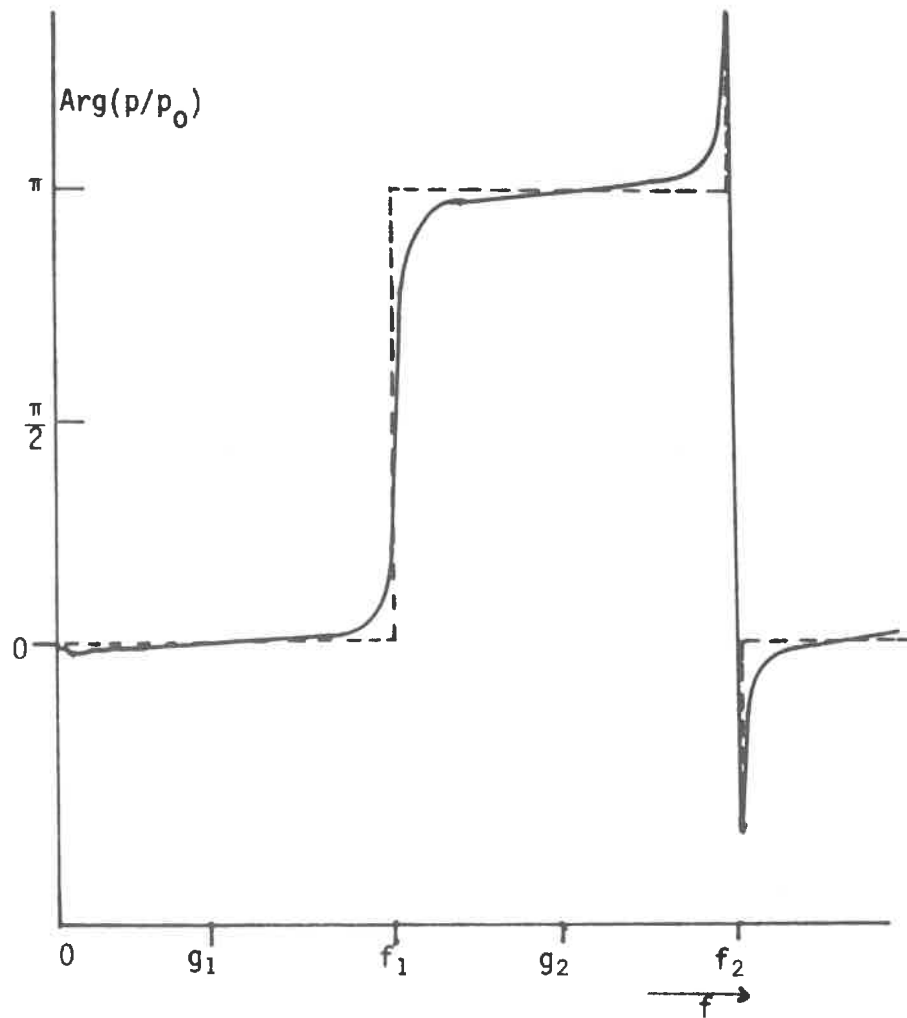


Fig. 9b : différence de phase $\text{Arg}(p/p_0)$ entre les deux extrémités d'un cône.
Avec amortissement (—) ; sans amortissement (- - -)

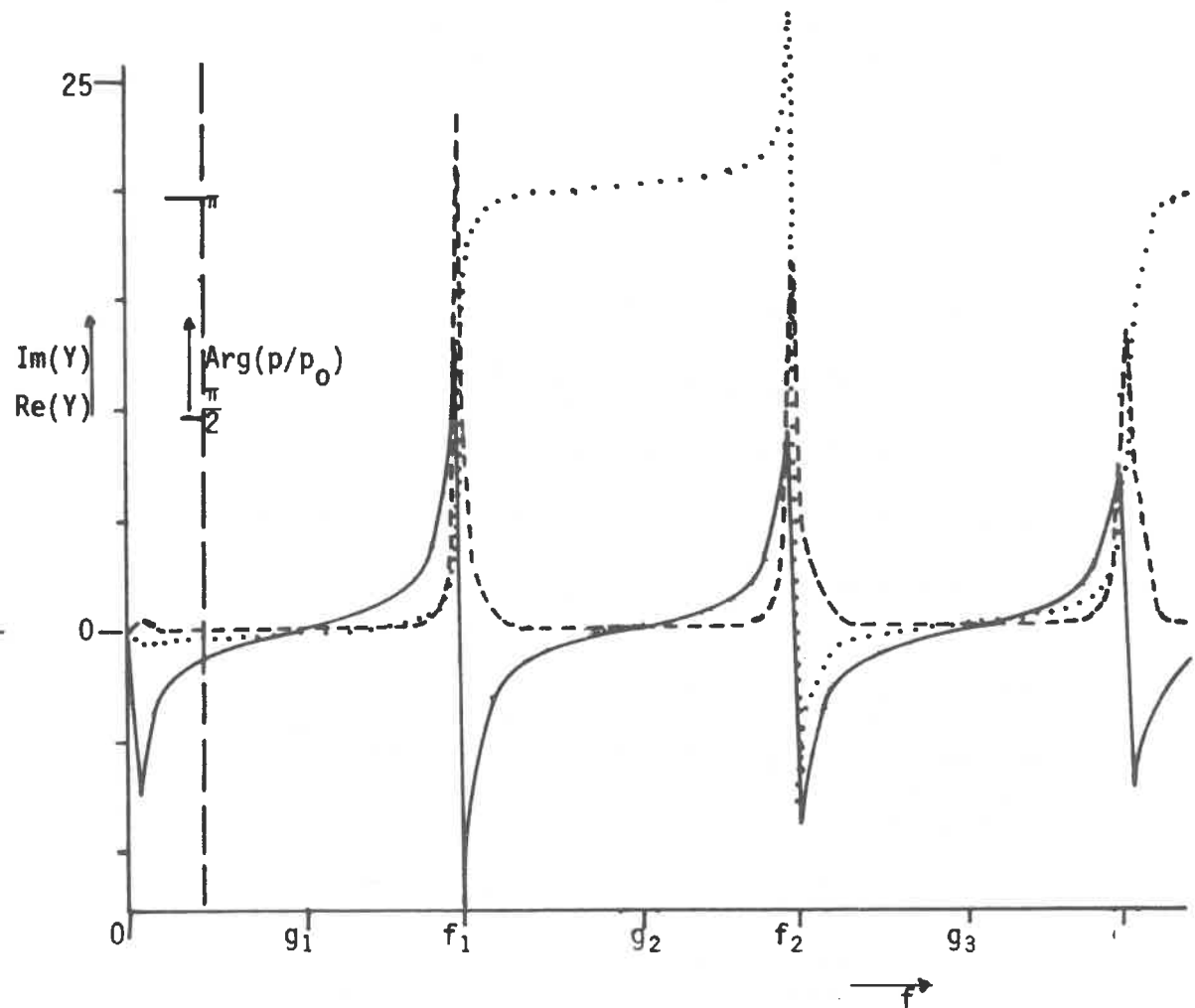


Fig. 9c : Evolutions comparées de l'admittance d'entrée et de la différence de phase entre les deux extrémités d'un cône.
 $\text{Im}(Y)$: — ; $\text{Re}(Y)$: - - - ; $\text{Arg}(p/p_0)$:

Traisons tout d'abord le problème de l'amortissement ("énergétique", c'est-à-dire dû à $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$) : comme on s'y attend, il rend moins heurtée la courbe de variation de la phase (cf Fig 9b), mais les fortes variations se produisent pour les mêmes valeurs de la variable (x ou f). Dans une étude qualitative, on peut négliger l'amortissement et écrire ici $z = 1$.

c) Calcul de ϕ_0

Nous supposons le tuyau ouvert, donc Y_0 est l'admittance de rayonnement.

-dans les basses fréquences, $\text{Im}(Y_0) \gg \text{Re}(Y_0)$, et $\text{Im}(Y_0) \ll -1$, d'où :

$$\phi_0 = -\frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{2\text{Re}(Y_0)}{\text{Im}(Y_0)} = -\frac{\text{Re}(Y_0)}{\text{Im}(Y_0)} = -\frac{\text{Re}(Z_0)}{\text{Im}(Z_0)} \approx 0,4 \text{ kr}$$

ϕ_0 est donc légèrement supérieur à 0

-quand la fréquence augmente, ϕ_0 augmente sans dépasser $\frac{\pi}{4}$, puis décroît.

d) Variations de Argp/p_0

A partir de la formule exprimant ϕ , on obtient la correspondance entre les variations de Argp/p_n et celles de Y . Nous l'avons cherchée pour un cycle de l'argument, correspondant à une variation de la fréquence entre les fréquences g_n et g_{n+2} (maximums de $|Z|$). Pour presque toutes les fréquences, c'est-à-dire pour celles qui ne voisinent pas les fréquences f_n (maximums de $|Y|$), $|\text{Im}(Y)| \gg \text{Re}(Y)$, et donc ϕ est petit :

$$\phi \approx \frac{\text{Re}(Y)\text{Im}(Y)}{1+\text{Im}^2(Y)} = \pm \epsilon, \quad \text{où } \epsilon \text{ est petit et positif.}$$

La valeur de ϕ étant connue à π près, c'est par continuité que nous savons qu'il faut enlever π pour $f_n < f < f_{n+1}$. L'inconnue est évidemment le point de départ : en fait, sachant que pour f petit, Argp/p_0 est petit, on en déduit que ϕ est nul pour g_1 (pour un tuyau ouvert $f_1 < g_1$), et par conséquent pour les indices impairs de g : dans l'exemple choisi, n est impair. Précisons également que nous avons retenu les déterminations comprises entre $-3\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et donc pour Argp/p_0 les déterminations comprises entre $\phi_0 + 3\frac{\pi}{2}$ et $\phi_0 - \frac{\pi}{2}$, d'où le saut pour $f = f_{n+1}$.

Les résultats sont présentés par le tableau ci-dessous, ainsi que par la figure 9c.

f	$\text{Im}(Y)$ et $\text{Re}(Y)$	ϕ	Argp/p_0
g_n	$\begin{cases} \text{Im}(Y) = 0 \\ \text{Re}(Y) \text{ petit} \end{cases}$	0	ϕ_0
	$\text{Im}(Y) \gg \text{Re}(Y)$	$-\epsilon$	$\phi_0 + \epsilon$
	$\begin{cases} \text{Im}(Y) = \text{Re}(Y) \\ \text{(grands)} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\phi_0 + \frac{\pi}{4}$
f_n	$\begin{cases} \text{Im}(Y) = 0 \\ \text{Re}(Y) \text{ grand} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\phi_0 + \frac{\pi}{2}$
	$\begin{cases} -\text{Im}(Y) = \text{Re}(Y) \\ \text{(grands)} \end{cases}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\phi_0 + \frac{3\pi}{4}$
	$-\text{Im}(Y) \gg \text{Re}(Y)$	$-\pi + \epsilon$	$\phi_0 + \pi - \epsilon$
g_{n+1}	$\text{Im}(Y) = 0$	$-\pi$	$\phi_0 + \pi$
	$\text{Im}(Y) \gg \text{Re}(Y)$	$-\pi - \epsilon$	$\phi_0 + \pi + \epsilon$
	$\text{Im}(Y) = \text{Re}(Y)$	$-\pi - \frac{\pi}{4}$	$\phi_0 + \frac{5\pi}{4}$
f_{n+1}	$\text{Im}(Y) = 0$	$\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \\ +\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \phi_0 + \frac{3\pi}{2} \\ \phi_0 - \frac{\pi}{2} \end{cases}$
	$-\text{Im}(Y) = \text{Re}(Y)$	$\frac{\pi}{4}$	$\phi_0 - \frac{\pi}{4}$
	$-\text{Im}(Y) \gg \text{Re}(Y)$	ϵ	$\phi_0 - \epsilon$
g_{n+2}	$\text{Im}(Y)$	0	ϕ_0

Il est clair qu'une analyse semblable aurait été possible pour la variation de la phase de la vitesse comparée à celle de l'impédance.

e) Dans un pavillon, l'élimination de Z_v entre les deux équations différentielles donne :

$$\frac{p'}{p} = -\frac{Y'Y}{Y^2 - \frac{1}{\zeta^2}} + g \frac{Y^2}{1 - Y^2 \zeta^2}$$

Cette équation ne s'intègre pas de manière simple. Néanmoins si on effectue le calcul numérique pour un pavillon de trombone, les résultats sont très voisins de ceux du cylindre. Ceci n'est guère surprenant puisque le terme supplémentaire est petit (Y^2 grand) quand le premier est grand, c'est-à-dire, quand la phase varie fortement. Une différence existe toutefois avec le cylindre : le terme ϕ_0 est grand, car le rayon de sortie est plus grand. Ainsi, à la résonance, la phase de p/p_0 est sensiblement plus grande que $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

2-4.5.3. Flux d'énergie

Nous avons laissé entendre à propos du résultat pour le cylindre qu'il est possible d'interpréter l'équation (8 b) en termes d'énergie. Il est bon de le démontrer précisément ; à cette fin, nous utiliserons le résultat du § 2-4.5.1., remarquable par sa simplicité :

$$\frac{I}{I_s} = \frac{a}{a_s}$$

où I et I_s sont les densités de flux d'énergie moyens à l'entrée du pavillon, respectivement calculées avec et sans amortissement ($\text{Re}(r) = 0$, $\text{Im}(\zeta) = 0$) et a et a_s sont les approximations de l'admittance loin des maximums de celles-ci.

Le système (S6) nous donne : $a' + ga = -2kab - Ab^2 - C$

soit :

$$a = \frac{1}{S} e^{2k \int_x^{x_0} b dx} [AM + S_0 a_0]$$

où

$$AM = \int_x^{x_0} S e^{-2k \int_x^{x_0} b dx} (Ab^2 + C) dx \text{ représente le terme d'amortissement.}$$

De manière évidente, sans amortissement, $A = C = 0$, d'où $AM = 0$

Donc :

$$\frac{I}{I_s} = \frac{AM}{S_0 a_0} + 1$$

Autrement dit, puisque $SI_s = S_0 I_0$, et $a_0 = \text{Re}(Y_0)$, $SI = AM \frac{I_0}{\text{Re}(Y_0)} + S_0 I_0$

Nous savons maintenant comment le flux d'énergie à l'entrée de la ligne se divise en une partie perdue le long de la ligne, $AM \frac{I_0}{\text{Re}(Y_0)}$ et une autre sortant à l'extrémité de la ligne.

2-4.6. Conclusions

2-4.6.1. Validité de la méthode

La méthode de calcul de l'impédance pour des ondes quasi-stationnaires dans les pavillons reste encore appropriée si l'on fait intervenir l'amortissement.

Elle permet de franchir l'obstacle que constitue la variation des coefficients d'amortissement avec le rayon du pavillon. Malheureusement, elle devient rapidement extrêmement lourde, comme on a pu le voir pour des pavillons conique et exponentiel. De plus, le calcul au second ordre ne semble pas possible.

On peut constater, que l'erreur tend à être d'autant plus forte que les extremums sont moins accusés. Or ceux-ci étant justement liés au caractère non stationnaire des ondes (plus les extremums sont accusés, plus les ondes sont stationnaires), on n'est donc pas surpris de l'importance de l'erreur.

Cependant la méthode est encore bonne pour des extremums tels que $Z = 2$ (l'impédance est réelle pour les extremums de $|Z|$) ; or dans ce cas le coefficient de réflexion est égal à $R = \frac{|Z-1|}{|Z+1|} = \frac{1}{3}$, ce qui est déjà très loin des ondes stationnaires.

On peut aussi remarquer que les deux causes de variations du coefficient de réflexion dans un pavillon (variation de section et amortissement) sont indissociables, contrairement à ce qu'on aurait pu espérer en regardant les résultats d'une part du tuyau cylindrique avec amortissement, et d'autre part du pavillon sans amortissement : ceci explique la

complexité des calculs. Notons enfin, que pour les exemples choisis, les formules obtenues sous-estiment toujours les pics, et surestiment les creux.

Le fait que les ondes doivent être quasi-stationnaires pour pouvoir appliquer la méthode approchée implique que le rayonnement ne soit pas trop important : ceci limite donc le rayon r_0 à l'extrémité et la fréquence. Mais dans le cas d'un tuyau fortement évasé, la méthode pourrait tout de même être utilisable pour des fréquences suffisamment basses, à condition d'encadrer les résultats entre l'approximation des ondes planes et celles des ondes sphériques (cf. Benade et Jansson [13]), l'équation des pavillons écrite en ondes sphériques pouvant se traiter par notre méthode.

2-4.6.2. Intérêt de la méthode

La méthode approchée permet la modélisation des courbes d'impédance de certains pavillons. En clarifiant l'influence des différents paramètres, elle permet de résoudre certains problèmes inverses sans tâtonnement expérimental ou numérique : on peut trouver au moins approximativement quelles valeurs donner aux paramètres pour obtenir tel résultat (ainsi telle valeur de Z pour telle fréquence, ou bien encore tel rapport entre les valeurs de Z pour deux fréquences de résonance successives).

Le principal intérêt de la méthode est d'obtenir des formules littérales, précieuses pour les raisonnements physiques. Pour le calcul sur ordinateur, il est évidemment plus rapide de faire le calcul en nombres complexes, d'autant qu'on peut alors simplifier considérablement le calcul des extremums de $|Z|$: on a vu que le calcul des fréquences de résonance en ondes stationnaires était très satisfaisant grâce à la correction de l'amortissement moyen (deuxième équation du système (S5)). Il suffit par conséquent de calculer l'impédance complexe pour ces fréquences, et il n'est pas besoin de faire une recherche toujours longue d'extremums de la fonction $|Z|$.

2-4.6.3. Le cas du cône

Il est intéressant de s'arrêter sur les résultats obtenus pour le cône (cf. Fig. 6). Celui-ci se comporte dans le grave de manière très différente du cylindre : si les courbes des creux sont en effet comparables

il n'en est pas de même de la courbe des pics, celle du cône étant très au-dessous de celle du cylindre. Le coefficient de réflexion oscille donc avec une amplitude considérable dans les basses fréquences ; pour les pics, il est beaucoup plus faible que dans un cylindre de même rayon d'entrée, bien que l'amortissement soit beaucoup plus faible. On peut remarquer aussi que les paramètres les plus influents du cône sont ceux qui concernent sa forme au début du tuyau : on pourrait l'allonger sans changer sensiblement la courbe d'impédance, tout au moins dans les basses fréquences. Ceci démontre l'importance essentielle pour l'impédance d'entrée d'un pavillon de sa forme au début ; ainsi l'embouchure des instruments en cuivre est capitale pour la courbe d'impédance d'entrée des instruments appelés "cuivres" (Backus [6], Benade [12], Lurton [61]). Ainsi le cor et le trombone, respectivement conique et cylindrique dans la partie la plus proche de l'embouchure, se distinguent-ils très nettement.

D'une façon plus générale, on remarquera l'allure semblable des figures 6 et 8. En fait, on peut montrer que pour tout pavillon évasé ($g(x)$ toujours positif) et débouchant sur l'impédance de rayonnement le coefficient de réflexion décroît d'abord quand la fréquence augmente à partir de zéro, puis oscille, l'amplitude des oscillations diminuant en allant vers l'aigu. Il devient alors presque constant, ce qui explique que les courbes des maximums de $|Z|$ et $|Y|$ se rejoignent. Nous traitons ce problème plus loin.

2-5. ONDES QUASI-STATIONNAIRES DANS UNE LIGNE DE TRANSMISSION

a) Le résultat obtenu pour le tuyau cylindrique (eq. 8) peut être aisément généralisé à n'importe quelle ligne de transmission. Nous en aurons besoin pour les réseaux de trous latéraux.

Soit donc une ligne de transmission, de constante de propagation $\Gamma = j\omega$ et d'impédance itérative ζ . Les ondes sont supposées quasi-stationnaires, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Re}(\varphi) \gg \operatorname{Im}(\varphi) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\zeta) \gg \operatorname{Im}(\zeta)$$

On sait que la solution générale pour cette ligne s'écrit :

$$Z_1/\zeta = \frac{j \operatorname{tg} \varphi (x_1 - x_0) + Z_0/\zeta}{1 + j \operatorname{tg} \varphi (x_1 - x_0) Z_0/\zeta}$$

On peut en tirer un système différentiel pour les parties réelles et imaginaires de l'admittance (ou de l'impédance), qu'on approxime de la même façon que pour le tuyau cylindrique, et on en déduit :

$$\begin{cases} Y = a + jb & \text{si } b \text{ n'est pas trop grand} \\ Y = \frac{a + jb}{1 + a^2/b^2} & \text{si } b \text{ est grand} \end{cases}$$

avec

$$(20) \quad \begin{cases} b = h/\operatorname{Re}(\zeta) \\ h = -\operatorname{tg}[\operatorname{Re}(\varphi)x - E_0] \end{cases} \quad (20a)$$

$$a = (1+h^2) \left[H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1+h_0^2} \right] \quad (20b)$$

où

$$\begin{cases} E_0 = \operatorname{Re}(\varphi)x_0 + \operatorname{Arctg} b_0 \operatorname{Re}(\varphi) \\ H_{x_0}^x = -\frac{\operatorname{Im}(\varphi)}{\operatorname{Re}(\zeta)}(x_0 - x) - \frac{\operatorname{Im}(\zeta)}{\operatorname{Re}^2(\zeta)} \left[\frac{h}{1+h^2} \right] x_{x_0} \end{cases}$$

b) Enfin les extremums du module de l'impédance sont :

$$(21) \quad \begin{cases} |Y|_{\min} = \lim_{b \rightarrow 0} a = -\frac{\operatorname{Im}(\varphi)}{\operatorname{Re}(\zeta)}(x_0 - x) + \left(\frac{\operatorname{Im}(\zeta)}{\operatorname{Re}(\zeta)} b_0 + a_0 \right) \frac{1}{1+h_0^2} \\ |Z|_{\min} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{b^2} = \operatorname{Im}(\varphi) \operatorname{Re}(\zeta)(x_0 - x) + \left[\operatorname{Im}(\zeta) \operatorname{Re}(\zeta) b_0 + a_0 \operatorname{Re}^2(\zeta) \right] \frac{1}{1+h_0^2} \end{cases}$$

c) Une formulation légèrement différente nous sera utile :

$$(20 \text{ bis}) \quad \begin{cases} Y\zeta = a + jb & \text{si } b \text{ n'est pas trop grand} \\ Y\zeta = \frac{a + jb}{1 + a^2/b^2} & \text{si } b \text{ est grand} \\ \begin{cases} b = -\operatorname{tg}(\operatorname{Re}(\varphi) - E_0) \\ a = (1 + b^2) \left[H_{x_0}^x + \frac{a_0}{1 + h_0^2} \right] \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} E_0 = \operatorname{Re}(\varphi)x_0 + \operatorname{Arctg} b_0 \\ H_{x_0}^x = -\operatorname{Im}(\varphi)(x_0 - x) \end{cases}$$

d'où les extremums :

$$(21 \text{ bis}) \quad \begin{cases} |Y\zeta|_{\min} = -\operatorname{Im}(\varphi)(x_0 - x) + \frac{a_0}{1+b_0^2} \\ |Z/\zeta|_{\min} = -\operatorname{Im}(\varphi)(x_0 - x) + \frac{a_0}{1+b_0^2} \end{cases}$$

N.B. : 1) Nous étudierons les lignes de transmission plus généralement au chapitre IV. Les résultats ci-dessus se rapportent à une ligne de transmission symétrique à caractéristiques constantes (Γ et ζ indépendants de x). De plus, ils ont été obtenus à partir d'équations différentielles, et concernent donc une ligne continue ; nous admettrons ici qu'ils s'étendent à une ligne discrète, dont nous verrons un exemple au paragraphe suivant (nous notons alors le nombre d'onde sans dimension ϕ)†

2) Comme pour un pavillon, on peut écrire pour une ligne à caractéristiques constantes :

$$I = AM \frac{I_0}{a_0} + I_0 = H_{x_0}^x \left(\frac{1+h_0}{a_0} \right) I_0 + I_0$$

$$\text{soit : } I = H_{x_0}^x \frac{(1+|Y_0|^2 \operatorname{Re}^2(\zeta))}{\operatorname{Re}(Y_0)} I_0 + I_0 = H_{x_0}^x \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\zeta) \left[\frac{|P_0|^2}{\operatorname{Re}(\zeta)} + |I_0|^2 \operatorname{Re}(\zeta) \right] + I_0$$

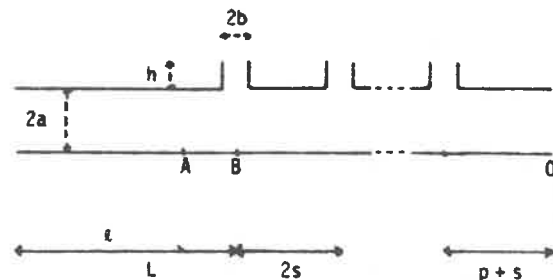
2-6. TUYAU MUNI DE TROUS LATÉRAUX

2-6.1. Position du problème - Hypothèses.

Dans ce paragraphe, nous étudions les ondes quasi-stationnaires dans un tuyau muni d'un réseau de trous latéraux ouverts. Nous analysons la courbe d'impédance d'entrée d'un tel tuyau, ce qui nous permettra notamment de comprendre comment l'énergie perdue se répartit entre amortissement visco-

† nous traitons la relation entre ligne discrète et ligne continue au ch. IV.

thermique et rayonnement par les différents trous. Le tuyau choisi est un modèle "idéal" : un tuyau cylindrique dont la moitié est percée de trous identiques et équidistants (Fig. 10).



$$\begin{aligned} L &= 0,30\text{m} \\ s &= 0,015\text{m} \\ a &= 0,01\text{m} \\ l &= 0,285\text{m} \\ h &= 0,005\text{m} \\ T &= 19^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Nous avons opté pour trois réseaux de trous latéraux bien différents ; la figure 10 indique leurs dimensions communes. Les dimensions caractérisant ces réseaux sont les suivantes :

-exemple 1 ("Système Boehm chromatique") :

$$b = 0,007\text{ m} ; s = 0,015\text{ m} \quad (8 \text{ trous})$$

-exemple 2 ("Système baroque diatonique") :

$$b = 0,0035\text{ m} ; s = 0,03\text{ m} \quad (4 \text{ trous})$$

-exemple 3 ("Système hybride") :

$$b = 0,0035\text{ m} ; s = 0,015\text{ m} \quad (8 \text{ trous})$$

La valeur de p , que nous appelons la patte (par analogie avec la flûte traversière), peut être très différente selon les types d'instruments existant. Nous précisons les valeurs utilisées quand le problème se présentera.

Dans le chapitre I (§7), nous avons donné les formules qui permettent de considérer le réseau de trous latéraux comme un filtre. Nous nous limitons dans ce qui suit aux fréquences inférieures à la fréquence de résonance de la distance entre les trous (telle que $\tan 2ks = 0$, c'est-à-dire environ 5700Hz pour $s = 0,015\text{ m}$) ; nous traiterons spécialement le cas de l'exemple n°2. Pour ces fréquences, nous admettrons toujours que $\tan kh = kh$ (cette hypothèse serait à réviser pour l'étude d'un instrument comme le basson, pour lequel h peut être grand).

Enfin, nous négligerons les termes d'amortissement d'ordre supérieur à 1.

2-6.2. Détermination de la fréquence de coupure

Une condition nécessaire pour qu'un filtre présente une fréquence de coupure, une bande passante et une bande d'arrêt est qu'il soit sans pertes. Ce n'est pas le cas ici, mais les ondes étant quasi-stationnaires, les pertes sont faibles. On peut donc trouver deux bandes bien différencées, l'une où les quantités $\text{Im}(\phi)/\text{Re}(\phi)$ et $\text{Im}(\zeta)/\text{Re}(\zeta)$ sont très petites, l'autre où elles sont très grandes. Une région très étroite les sépare, dans laquelle ces quantités sont de l'ordre de 1 : cette région se situe aux alentours de la fréquence de coupure f_c que présenterait le même filtre dont on négligerait les pertes.

Pour calculer la fréquence de coupure, on écrit donc :

$$\begin{aligned} k' &= k = \frac{\omega}{c} \\ \tilde{p} &= 1 \\ Y_t &= j \cotg kh_e \approx -\frac{j}{kh_e} \end{aligned}$$

Dans cette expression, l'admittance est réduite ($Y = \frac{u}{p} \cdot c$), et h_e est la hauteur du trou corrigée par la correction de longueur de rayonnement ($\frac{1}{k} \text{Arctg}(\text{Im}(Z_R) \approx 0,6kb$), et la correction de longueur due à la dérivation (notre objectif étant seulement une analyse qualitative, nous négligeons la deuxième dans ce qui suit).

On obtient alors la fréquence de coupure en écrivant soit $\cos \phi = 1$, soit $\zeta = 0$, soit $\frac{1}{\zeta} = 0$. Or, pour le filtre en T, on a (cf. chapitre I, p. 75) :

$$\zeta = j \tan ks \frac{\sqrt{1 + Vks/\tan ks}}{\sqrt{1 - Vks \tan ks}} \quad \text{et} \quad \cos \phi = \cos 2ks + \frac{1}{Vks} \sin 2ks \quad (22)$$

où

$$V = \frac{2h_e}{\omega s}$$

Nous avons supposé $ks < \frac{\pi}{2}$, donc $\tan ks$ est positive, et seul le dénominateur peut s'annuler. La fréquence de coupure est alors solution de :

$$Vks \tan ks = 1$$

Le développement limité de $\tan ks$ au troisième ordre étant dans la plupart des cas largement suffisant, on a :

$$1 = V k^2 s^2 (1 + \frac{k^2 s^2}{3}) \rightarrow k_c = \frac{1}{s \sqrt{V + \frac{1}{3}}} \quad (23)$$

Dans cette formule, k est le nombre d'onde de coupure ; cette approximation est excellente pour les trois exemples, l'erreur étant inférieure à 0,1 %. Les résultats numériques sont :

$$\begin{aligned} \text{Ex. 1} : V &= 2,5279 & ; & \quad f_c = 2150 \text{ Hz} \\ \text{Ex. 2} : V &= 3,8895 & ; & \quad f_c = 885 \text{ Hz} \\ \text{Ex. 3} : V &= 7,779 & ; & \quad f_c = 1277 \text{ Hz} \end{aligned}$$

2-6.3. Fréquences inférieures à la fréquence de coupure (première bande d'arrêt)

Au-dessous de la fréquence de coupure, l'impédance itérative est imaginaire pure s'il n'y a pas de pertes ; autrement dit, si l'on tient compte des pertes, $\text{Re}(\zeta)/\text{Im}(\zeta)$ et $\text{Re}(\phi)/\text{Im}(\phi)$ sont très petits. Comme $\text{Im}(\phi)$ est grand, l'impédance d'entrée du réseau converge vers l'impédance itérative quand le nombre de trous augmente. Cette convergence peut se remarquer simplement en étudiant l'influence de la longueur p de la patte sur l'impédance d'entrée : au-dessous de la fréquence de coupure, cette longueur n'a aucune influence. Il faut toutefois préciser que plus on se rapproche de la fréquence de coupure, plus le nombre de trous nécessaire pour assurer cette convergence doit être grand. Pour les exemples choisis, la longueur de la patte n'a d'influence que sur la résonance la plus proche de la fréquence de coupure.

Pour calculer l'impédance d'entrée du tuyau cylindrique munis de trous latéraux, il suffit donc de calculer ζ et d'utiliser la formule des ondes quasi-stationnaires dans un tuyau cylindrique débouchant sur ζ (éq. 21bis) ; nous choisirons la structure de filtre en T (le tuyau cylindrique en amont du réseau a donc la longueur ℓ). Nous devons calculer, pour $Z_0 = \zeta$:

a) $\Delta \ell = \frac{1}{k} \text{Arctg} (\text{Im}(Z_0/\zeta_p))$, qui est la correction de longueur par rapport au tuyau coupé en A (Fig. 10)

b) $\Lambda = \frac{\text{Re}(Z_0/\zeta_p)}{1 + \text{Im}^2(Z_0/\zeta_p)}$ qui représente l'énergie perdue par amortissement et rayonnement dans le réseau des trous latéraux, et donne l'impédance d'entrée du tuyau par :

$$\begin{cases} \frac{1}{|Z|_{\max}} = -\text{Im}(k') \ell + \Lambda \\ |Z|_{\min} = -\text{Im}(k') \ell + \Lambda \end{cases}$$

Le calcul utilise l'hypothèse que $\text{Re}(\zeta)/\text{Im}(\zeta)$ est très petit, autrement dit que les pertes (amortissement et rayonnement) sont très petites : on fait donc un développement limité au premier ordre pour les termes de rayonnement et d'amortissement.

Le calcul étant assez compliqué, nous nous contenterons d'étudier :

- les valeurs de $\Delta \ell$ et Λ aux très basses fréquences
- leur évolution quand la fréquence croît jusqu'à la fréquence de coupure : en fait les calculs ne peuvent pas être valables jusqu'à cette fréquence, puisqu'il n'y a alors plus convergence vers l'impédance itérative, mais ils donnent d'intéressantes indications jusqu'à des fréquences très proches de la fréquence de coupure.

2-6.3.1. Calculs préliminaires

Les formules qui donnent ϕ et ζ (chapitre I, éq. 30) montrent qu'on doit évaluer ζ_p et tgks , ainsi que $Y_{\zeta} \zeta_p$, en les développant au premier ordre, en fonction des termes de rayonnement et d'amortissement.

a) L'équation 16 du chapitre I, implique :

$$\begin{cases} k' = k(1 + \epsilon) \\ \zeta_p = 1 + \frac{1-Q}{1+Q} \epsilon \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \epsilon = \frac{P}{2} (1+Q) (1-j) = \frac{A_m \sqrt{f}}{ak} (1-j)$$

$$\text{et} \quad A_m = (1+Q) \sqrt{\frac{\pi \ell V}{C}}$$

$$\text{D'où} \quad \text{tgk's} = \text{tgks} (1 + \epsilon) = \text{tgks} + k_s \epsilon (1 + \text{tg}^2 k_s)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (24) \quad \text{tgk's} &= \text{tgks} (1 + \ell_p) \\ \text{où} \quad \ell_p &= \frac{k_s}{\text{tgks}} \epsilon (1 + \text{tg}^2 k_s) \end{aligned}$$

$$\text{Au troisième ordre en } k_s, \quad \ell_p = \epsilon (1 - 2 \frac{k^2 s^2}{3})$$

b) D'autre part, on a $Y_t = 1/Z_t$, où :

$$Z_t/Z_t = j \operatorname{tg} [k_t h - \operatorname{Arctg} j Z_R/Z_t] = j [k_t h - j Z_R]$$

avec :

$$\begin{cases} k_t = k (1 + \epsilon_t) \\ \epsilon_t = 1 + \frac{1-Q}{1+Q} \epsilon_t \\ \epsilon_t = \frac{1}{2} P (1+Q) (1-j) = \frac{A_m \sqrt{f}}{bk} (1-j) = \epsilon \frac{a}{b} \end{cases}$$

D'où :

$$Z_t/Z_t = j k_t h + \operatorname{Re}(Z_R) + j \operatorname{Im}(Z_R)$$

Soit : $h_e = h + \frac{\operatorname{Im}(Z_R)}{k} = h + 0,6b$; on en tire :

$$Z_t/Z_t = j k h_e \left| 1 + \frac{\operatorname{Re}(Z_R) + j k \epsilon_t h}{j k h_e} \right|$$

Or :

$$\frac{Z_p}{Z_t} = 1 + \frac{1-Q}{1+Q} \frac{A_m \sqrt{f}}{k} (1-j) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Si nous admettons que $Z_p = Z_t$, on a alors :

$$Y_t Z_p = - \frac{j}{k h_e} (1 + \ell_t) \quad (25)$$

où

$$\ell_t = j \frac{\operatorname{Re}(Z_R)}{k h_e} = \epsilon \frac{h}{h_e} \frac{a}{b}$$

c) Il ne reste plus qu'à développer Z au premier ordre en ℓ_p et ℓ_t . Or la formule 30a (chapitre I) se met sous la forme :

$$Z = Z_p j \operatorname{tgks} (1 + \ell_p) \left[\frac{1 + Vks/\operatorname{tgks}(1 - \ell_t - \ell_p)}{1 - Vks/\operatorname{tgks}(1 - \ell_t + \ell_p)} \right]^{1/2}$$

Un calcul fastidieux donne alors le résultat suivant :

$$Z = Z_p j \operatorname{tgks} \sqrt{\frac{Nu}{De}} \left[1 + \frac{1}{2} \ell_p \left(\frac{1}{Nu} + \frac{1}{De} \right) + \frac{1}{2} \ell_t \left(\frac{1}{Nu} - \frac{1}{De} \right) \right] \quad (26)$$

où

$$\begin{cases} Nu = 1 + Vks/\operatorname{tgks} \\ De = 1 - Vks/\operatorname{tgks} \end{cases}$$

2-6.3.2. Calcul de la correction de longueur

$$\Delta L = \frac{1}{k} \operatorname{Arctg} \operatorname{Im}(Z/Z_p)$$

$$= \frac{1}{k} \operatorname{Arctg} \left[\operatorname{tgks} \sqrt{\frac{Nu}{De}} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\ell_p) \left(\frac{1}{Nu} + \frac{1}{De} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\ell_t) \left(\frac{1}{Nu} - \frac{1}{De} \right) \right] \right]$$

a) Aux basses fréquences :

$$\operatorname{tgks} = ks, \quad Nu = 1 + V, \quad De = 1$$

Si

$$U = 1 + V,$$

$$\Delta L = s \sqrt{U} \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\epsilon) \frac{1}{U} \left(1 + U + \frac{a}{b} \frac{h}{h_e} V \right) \right)$$

-Si on néglige l'amortissement, $\Delta L = s \sqrt{U}$; cette formule déjà donnée par Benade [15], est importante pour déterminer la correction par rapport au tuyau coupé au premier trou (pour celui-ci, $V = 0$, et $\Delta L = s$, ce qui est logique puisque notre calcul envisage le filtre en T). On voit donc que la correction de longueur est d'autant plus grande que b est petit et s est grand, ce à quoi on pouvait s'attendre. On remarque également que cette correction est indépendante de la fréquence, donc les premières résonances du tuyau sont assez bien harmoniques.

-Si on tient compte de l'amortissement sur l'ensemble du tuyau cylindrique muni de trous latéraux, on obtient :

$$\Delta L = \operatorname{Re}(\epsilon) L + s \sqrt{U} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\epsilon) \frac{1}{U} \left(1 + U + V \frac{a}{b} \frac{h}{h_e} \right) \right]$$

Tout se passe comme si le tuyau avait une longueur de $L + s \sqrt{U}$, avec un amortissement agissant sur une longueur légèrement différente :

$$L + s \sqrt{U} + \frac{1}{2} \frac{s}{\sqrt{U}} V \left(\frac{a}{b} \frac{h}{h_e} - 1 \right)$$

Selon les cas, la longueur supplémentaire peut être positive (exemples 2 et 3) ou négative (exemple 1).

b) Quand la fréquence augmente et tend vers la fréquence de coupure, $\operatorname{Im}(Z/Z_p)$ tend vers l'infini ; ΔL augmente donc en tendant vers $\frac{\pi}{2k_e}$, c'est à dire

$$\Delta \ell = \frac{\pi}{2} s \sqrt{V + \frac{1}{3}}.$$

Cette formule est voisine de celle donnée par Benade [15], sans doute à partir de résultats expérimentaux : $\Delta \ell = 1,606 s \sqrt{V}$.

Puisque $\Delta \ell$ augmente avec la fréquence, la tendance est donc à la baisse des résonances élevées par rapport à la première. On peut à ce propos évaluer l'inharmonicité maximale des résonances situées au dessous de la fréquence de coupure, elle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\ell + \frac{\pi}{2} s \sqrt{V + \frac{1}{3}}}{\ell + s \sqrt{V + 1}} &= 1 + \frac{s}{\ell} \left[\frac{\pi}{2} \sqrt{V + \frac{1}{3}} - \sqrt{V + 1} \right] \\ &= 1 + \frac{s}{\ell} \sqrt{V + 1} \left[\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{V+1} \right] \end{aligned}$$

Le terme $\frac{1}{3(V+1)}$ étant petit, cette inharmonicité croît donc quand s croît et quand b décroît.

c) Ces résultats peuvent être comparés à ce que l'on obtient pour un trou unique, situé à la distance p de l'extrémité.

$$\text{Si } p_e = p + \frac{\text{Im}(Z_R)}{k}, \Delta \ell = \frac{1}{k} \text{Arctg} \frac{1}{u/kh_e + \cotg kp_e}$$

Ceci donne, aux basses fréquences, au troisième ordre en k :

$$\Delta \ell = \frac{p_e}{1 + \frac{p_e}{h_e}} \left[1 + \frac{1}{3} k^2 p_e^2 \frac{\mu}{h_e} - \frac{1}{(1 + \frac{p_e}{h_e})^2} \right]$$

$\Delta \ell$ augmente donc également avec la fréquence, et les partiels sont trop bas par rapport au fondamental. Quant à l'inharmonicité, elle croît principalement avec p .

2-6.3.3. Courbe des extremums

Pour calculer la courbe des extremums nous pouvons négliger la partie réelle de ϵ , qui ne contribue qu'au second ordre de l'amortissement comme nous l'avons montré pour un tuyau cylindrique. Nous voulons calculer :

$$\Lambda = \text{Re}(Z/Z_p) / (1 + \text{Im}^2(Z/Z_p))$$

$$\text{soit } \Lambda = \frac{\text{Im}(Z/Z_p)}{1 + \text{Im}^2(Z/Z_p)} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Nu} + \frac{1}{De} \right) \text{Im}(Z_p) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Nu} - \frac{1}{De} \right) \text{Im}(Z_t) \right]$$

a) Aux basses fréquences

$$\Lambda = ks \sqrt{U} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+V} + 1 \right) \text{Im}(Z_p) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+V} - 1 \right) \text{Im}(Z_t) \right]$$

$$\Lambda = ks \sqrt{U} \left[\frac{1}{2} \frac{A_m \sqrt{F}}{ak} \left(\frac{2+V}{1+V} + \frac{V}{1+V} \frac{h}{h_e} \frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} \frac{V}{1+V} \frac{\text{Re}(Z_R)}{k h_e} \right]$$

Si $\text{Re}(Z_R) = \frac{1}{4} (kb)^2$ (formule de Levine et Schwinger), il vient :

$$\Lambda = \frac{A_m \sqrt{F}}{a} \frac{1}{2} \frac{s}{\sqrt{U}} \left(1+U+V \frac{h}{h_e} \frac{a}{b} \right) + \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{1}{4} (ka)^2$$

et

$$\frac{1}{|Z|_{\max}} = \frac{A_m \sqrt{F}}{a} \left[\ell + s \sqrt{U} + \frac{1}{2} s \frac{V}{\sqrt{U}} \left(\frac{a}{b} \frac{h}{h_e} - 1 \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{1}{4} (ka)^2$$

On peut faire plusieurs remarques :

-comme nous l'avons déjà constaté, l'amortissement agit sur la longueur :

$$\ell + s \sqrt{U} + \frac{1}{2} s \frac{V}{\sqrt{U}} \left(\frac{a}{b} \frac{h}{h_e} - 1 \right)$$

-pour le tuyau coupé, le terme de rayonnement serait $\frac{1}{4} (ka)^2$; il est donc plus faible, en raison du terme $\frac{1}{\sqrt{U}}$, pour un tuyau muni de trous latéraux, et ce d'autant plus que V est grand, c'est à dire $\frac{b}{a}$ petit et s petit.

-la comparaison entre tuyau percé de trous latéraux et tuyau coupé peut être faite également à propos de l'importance relative du rayonnement et de l'amortissement : du fait de la longueur ℓ du tuyau principal en amont du réseau de trous, l'amortissement est moins modifié par la présence des trous que le rayonnement. Le rapport de l'énergie rayonnée à l'énergie perdue par amortissement est donc sensiblement plus grand pour le tuyau coupé.

b) Aux hautes fréquences (inférieures à la fréquence de coupure)

Dans ce cas, le terme $\frac{1}{De}$ devient très grand. Par souci de simplification, nous conservons $tgks = ks$. On obtient alors :

$$\Lambda = \frac{1}{2} k s \sqrt{U} \frac{1}{\sqrt{D\epsilon}(1+k^2 s^2)} \left[-\text{Im}(\ell_p) + \text{Im}(\ell_t) + \frac{D\epsilon}{N U} (-\text{Im}(\ell_p) - \text{Im}(\ell_t)) \right]$$

Le terme $D\epsilon/N U$ décroît fortement quand on approche de la fréquence de coupure, aussi nous nous contenterons de la formule suivante :

$$\Lambda = \frac{1}{2} k s \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{D\epsilon}} \frac{1}{1+k^2 s^2} \left[-\frac{\text{Re}(Z_R)}{k h_e} - \text{Im}(\epsilon) \left(1 + \frac{h}{h_e} \frac{a}{b} \right) \right]$$

D'où

$$\frac{1}{|Z|_{\max}} = \frac{A_m \sqrt{f}}{a} \frac{1}{1+k^2 s^2} + \frac{1}{1+k^2 s^2} \frac{1}{\sqrt{1-Vkstgks}} \left[\frac{1}{4}(ka)^2 \frac{\sqrt{U}}{V} + \frac{A_m \sqrt{f}}{a} \frac{1}{2s\sqrt{U}} \left(1 + \frac{h}{h_e} \frac{a}{b} \right) \right]$$

Ceci nous permet de constater que les pertes dans le réseau de trous croissent fortement du fait de la présence du terme $1/(1-Vkstgks)^{1/2}$. Ceci explique pourquoi la courbe des pics décroît fortement quand la fréquence tend vers la fréquence de coupure, et justifie la méthode expérimentale de mesure de la fréquence de coupure adoptée par Benade [15] : c'est la fréquence où la courbe des pics passe par un minimum très accusé (cf. Fig. 11)

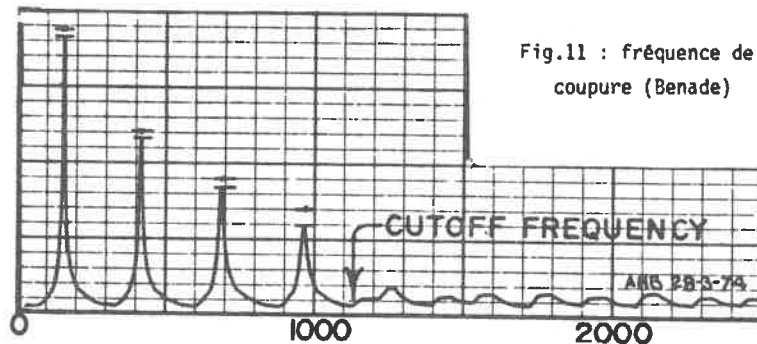


Fig.11 : fréquence de coupure (Benade)

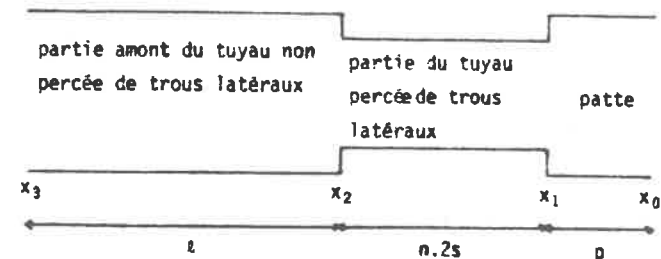
On peut ajouter que le rapport rayonnement/amortissement croît très fortement lui aussi : en effet l'amortissement dans le tuyau amont (de longueur ℓ) fait que la présence du terme $1/(1-Vkstgks)^{1/2}$ agit plus sur le rayonnement que sur l'amortissement. En définitive, ce rapport rayonnement/amortissement, beaucoup plus faible que pour le tuyau coupé dans les basses fréquences, devient au contraire égal ou même supérieur dans les hautes fréquences.

2-6.4. Fréquences supérieures à la fréquence de coupure (première bande passante)

Au dessus de la fréquence de coupure, la courbe des pics remonte légèrement. Néanmoins, les extremums interviennent peu dans le couplage entre l'excitateur et le résonateur, car l'inharmonicité est très importante : les fréquences de résonance n'ont plus aucun rapport simple avec le fondamental, notamment parce que la longueur de la patte joue alors un rôle non négligeable.

L'objectif principal de l'étude des extremums au-dessus de la fréquence de coupure est donc de nous renseigner, qualitativement au moins, sur la répartition de l'énergie perdue, entre rayonnement par les trous latéraux, rayonnement par le pavillon et amortissement aux parois.

Contrairement aux fréquences situées au-dessous de la fréquence de coupure, il n'y a pas convergence vers l'impédance itérative dans le réseau de trous latéraux : les parties imaginaires de l'impédance itérative et du nombre d'onde, qui sont liées à l'amortissement et au rayonnement dans le réseau, ne sont pas assez grandes pour qu'il y ait convergence. On doit donc étudier le tuyau muni de trous latéraux comme un cylindre dans lequel on a inséré une ligne dont les caractéristiques sont différentes, et de surcroît dépendent de la fréquence. L'impédance itérative étant supérieure à 1, le réseau se comporte comme un rétrécissement de section (Fig. 12) (nous retenons encore la configuration en I) :



Nous avons étudié le tuyau à cheminée constitué de deux tuyaux cylindriques ; nous pouvons donc prévoir une courbe d'extremums passant elle-même par des maximums et des minimums. Si nous supposons les ondes quasi-stationnaires dans le réseau de trous ($\text{Im}(\phi) \ll \text{Re}(\phi)$; $\text{Im}(\zeta) \ll \text{Re}(\zeta)$), nous pouvons utiliser trois fois la formule (20) pour calculer les extremums à

l'entrée du tuyau cylindrique : si $Ext = |Z|_{\min}$ ou $|Y|_{\min}$, on a :

$$(27) \quad Ext = H_{x_2}^{x_3} + \frac{1 + b_2^2 Re^2(\zeta)}{1 + b_2^2} \left(H_{x_1}^{x_2} + \frac{1 + b_1^2}{1 + b_1^2 Re(\zeta)} \frac{a_0}{1 + b_0^2} \right)$$

Dans cette expression, nous avons négligé $Im(\zeta_p)$ dans le tuyau cylindrique, et $Im(\phi)$ dans le réseau de trous. De plus nous avons négligé l'amortissement dans la patte (ces simplifications ne visant qu'à alléger l'étude qualitative).

2-6.4.1. Calculs préliminaires

a) nous devons d'abord calculer dans le réseau de trous :

$$H_{x_1}^{x_2} = -n \frac{Im(\phi)}{Re(\zeta)}, \quad \text{où } n \text{ est le nombre de trous.}$$

$$\text{Or, } \cos \phi = \cos 2k's + \frac{1}{Vks} \sin 2k's (1 + \epsilon_t) \quad (\text{chapitre I, éq.30a})$$

$$\text{Donc } Im(\cos \phi) \ll Re(\cos \phi)$$

$$\text{D'où } \phi = \arccos(Re(\cos \phi)) - j \frac{Im(\cos \phi)}{\sqrt{1 - Re(\cos \phi)^2}}$$

Si nous supposons que $Im(\phi) \ll Re(\phi)$:

$$Re(\cos \phi) = \cos(Re(\phi)) \cosh(Im(\phi)) = \cos(Re(\phi))$$

$$\text{D'où } Im(\phi) = - \frac{Im(\cos \phi)}{\sin(Re(\phi))}$$

$$Im(\phi) = - \frac{Im(\epsilon_t)}{Vks} \frac{\sin 2ks}{\sin(Re(\phi))} + 2ks Im(\epsilon) \frac{\sin 2ks}{\sin(Re(\phi))} - 2ks Im(\epsilon) \frac{\cos 2ks}{Vks} \frac{1}{\sin(Re(\phi))}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part (cf. Chapitre I)} \quad \sin \phi &= -j\sqrt{AD} = -j A \sqrt{\frac{D}{A}} \\ &= \frac{\sin 2k's}{\zeta} \left(1 + \frac{1}{2} j Y_t \epsilon_p \tan k's \right) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \zeta = \frac{\sin 2k's}{\sin \phi} \left(1 + \frac{\tan k's}{Vks} (1 + \epsilon_t) \right)$$

$$\text{et } Re(\zeta) = \frac{\sin 2ks}{\sin(Re(\phi))} \left(1 + \frac{\tan ks}{Vks} \right)$$

En définitive, on obtient :

$$\frac{Im(\phi)}{Re(\zeta)} = - \frac{Im(\epsilon_t)}{Vks (1 + \frac{\tan ks}{Vks})} + \frac{2ks Im(\epsilon)}{1 + \frac{\tan ks}{Vks}} \left(1 - \frac{\cotg 2ks}{Vks} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{C'est à dire : } - \frac{Im(\phi)}{Re(\zeta)} &= \left[\frac{1}{4} \frac{b}{h_e s (1 + V)} - \frac{Am \sqrt{f}}{b} \frac{\eta}{n_e} \frac{1}{s^2 (1 + V)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Am \sqrt{f}}{a} \frac{2sV}{1 + V} \left(1 - \frac{\cotg 2ks}{Vks} \right) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan ks - ks}{ks} \right) \frac{1}{V+1}} \quad (28) \end{aligned}$$

b) Calcul de $Re(\zeta)$

Si $Re(\zeta) \gg Im(\zeta)$, on a :

$$Re(\zeta) = \sqrt{\frac{\tan ks + Vks}{Vks - \cotg ks}}$$

A la fréquence de coupure, le dénominateur s'annule ; donc légèrement au dessus, $Re(\zeta)$ est très grande (en réalité un calcul en nombres complexes fait apparaître des valeurs légèrement inférieures, mais tout de même grandes). Pour les exemples envisagés, l'ordre de grandeur de $Re(\zeta)$ est 5 (c'est à dire 5 μc).

Quand la fréquence augmente, $Re(\zeta)$ diminue rapidement jusqu'à être peu différent de 1 : on peut montrer, grâce à un développement limité autour de la solution de l'équation $2x + \tan 2x = 0$, que $Re(\zeta)$ passe par un minimum égal à $1 + 1,1/V$, quand $ks = 1,0144 + 0,3317/V$

On peut en retenir que sur une large bande de fréquences, $Re(\zeta)$ est d'autant plus grande que V est petit. Puis quand $\tan ks$ tend vers l'infini, $Re(\zeta)$ réaugmente sensiblement.

2-6.4.2. Etude des extremums du module de l'impédance.

D'après (27),

$$\text{Ext} = H_{x_2}^3 + \frac{1 + b_2^2 \text{Re}^2(\zeta)}{1 + b_2^2} \left[-n \frac{\text{Im}(\phi)}{\text{Re}(\zeta)} + \frac{1 + b_1^2}{1 + b_1^2 \text{Re}(\zeta)} \frac{a_0}{1 + b_0^2} \right]$$

Le premier terme, H, représente l'énergie perdue par amortissement dans la partie du cylindre en amont du réseau de trous ; c'est le second terme qui nous intéresse ici, car il représente l'énergie perdue (ou rayonnée) dans le réseau.

a) Pour les fréquences situées juste au-dessus de f_c

Nous avons vu que $\text{Re}(\zeta)$ est grand ; donc le terme

$$\frac{1 + b_2^2 \text{Re}^2(\zeta)}{1 + b_2^2} \left(-n \frac{\text{Im}(\zeta)}{\text{Re}(\zeta)} \right) \quad \text{est petit, et provoque une forte baisse des pics}$$

(et hausse des creux) à l'entrée du tuyau cylindrique, quand la fréquence se rapproche de la fréquence de coupure ; comme on pouvait s'y attendre, il y a bien continuité avec les fréquences situées juste au dessous de la fréquence de coupure.

b) Pour les fréquences situées sensiblement au-dessus de f_c

Dans ce cas, le facteur $\frac{1 + b_2^2 \text{Re}^2(\zeta)}{1 + b_2^2}$ est encore un peu supérieur

à 1 ; il module le terme entre crochets quand la fréquence varie, l'amplitude de cette modulation (comprise entre 1 et $\text{Re}^2(\zeta)$) étant d'autant plus forte que $\text{Re}(\zeta)$ est grand, c'est à dire V petit.

Néanmoins, ce facteur est peu différent de 1, et l'essentiel de notre étude portera par conséquent sur le terme entre crochets. Nous y remarquons deux éléments :

- le premier élément est l'énergie perdue dans le réseau de trous proprement dit. La formule (28) nous permet de l'analyser. Il se trouve que le terme

$$\frac{1}{1 + \frac{\text{tg} k_s - k_s}{k_s}} \frac{1}{V+1}$$

décroit lentement avec la fréquence ; l'essentiel de la variation de $-\text{Im}(\phi)/\text{Re}(\zeta)$ provient du terme entre crochets, qui comprend trois termes :

1°) Un terme représentant le rayonnement par les trous latéraux ; si V est grand, il est égal à $\frac{1}{8} \frac{b^2}{h_e^2 a^2}$, autrement dit, il est proportionnel à la puissance 4 du rayon des trous, et, ce qui était moins attendu, inversement proportionnel au carré de la hauteur (corrigée) des cheminées. Mais surtout il est indépendant de la fréquence.

2°) Un terme représentant l'amortissement dans les cheminées des trous ; proportionnel à $f^{-1/2}$, il est loin d'être négligeable par rapport aux autres termes pour les fréquences proches de f_c , au moins si les trous sont étroits (exemples 2 et 3).

3°) Enfin, un terme représentant l'amortissement dans la partie du tuyau principal située entre les trous ; proportionnel à $f^{+1/2}$, il a, contrairement au précédent, davantage d'importance pour les hautes fréquences.

- Le deuxième élément est l'énergie perdue en aval du réseau, c'est à dire dans la "patte". Comme nous y avons négligé l'amortissement, le terme $\frac{1 + b_1^2}{1 + b_1^2 \text{Re}^2(\zeta)} \frac{a_0}{1 + b_0^2}$ représente le rayonnement à l'extrémité du tuyau, que nous appelons pavillon.

Or $b_1 = -\cot g k p_e$, où p_e est la longueur (corrigée) de la patte. En général, p a l'ordre de grandeur de s , afin que la distance du dernier trou à l'extrémité soit environ $2s$, et que les degrés de la gamme soient équidistants. p_e est donc supérieur à s , et dans le domaine de fréquence qui nous intéresse ($k_s < \frac{\pi}{2}$), b_1 peut passer une ou plusieurs fois par 0 ou l'infini. En conséquence, le facteur $\frac{1 + b_1^2}{1 + b_1^2 \text{Re}^2(\zeta)}$ module le terme de rayonnement entre 1 et $\frac{1}{\text{Re}^2(\zeta)}$.

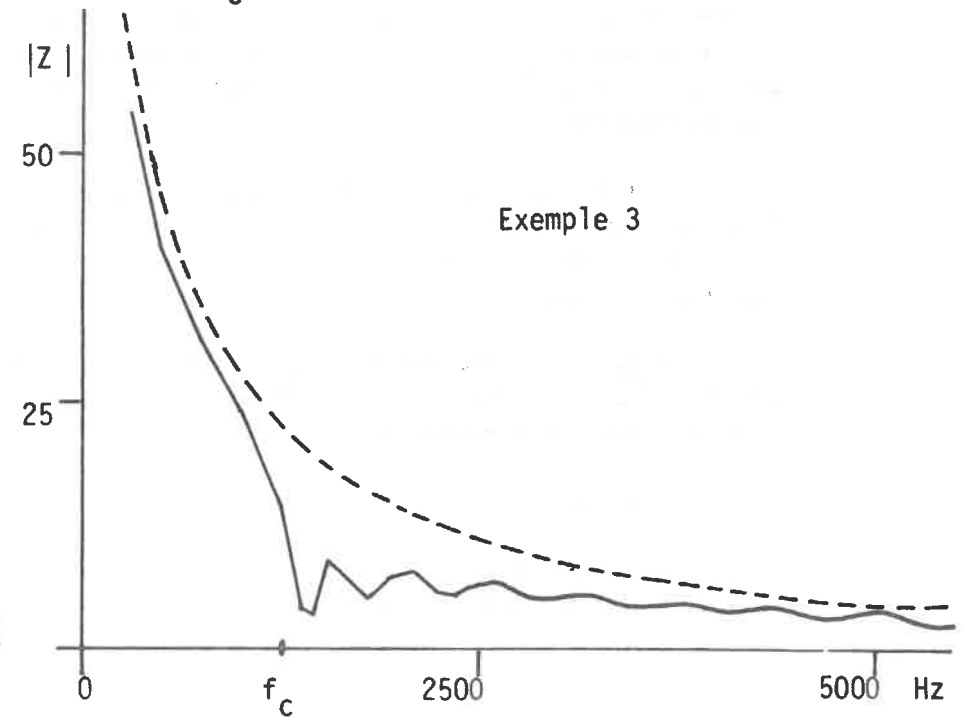
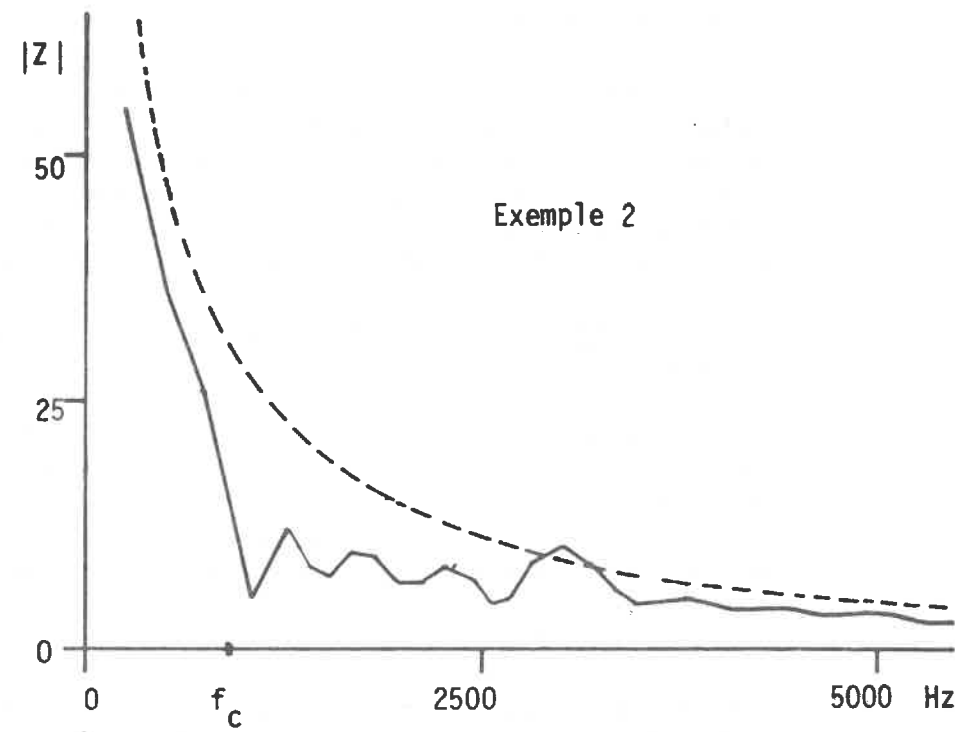
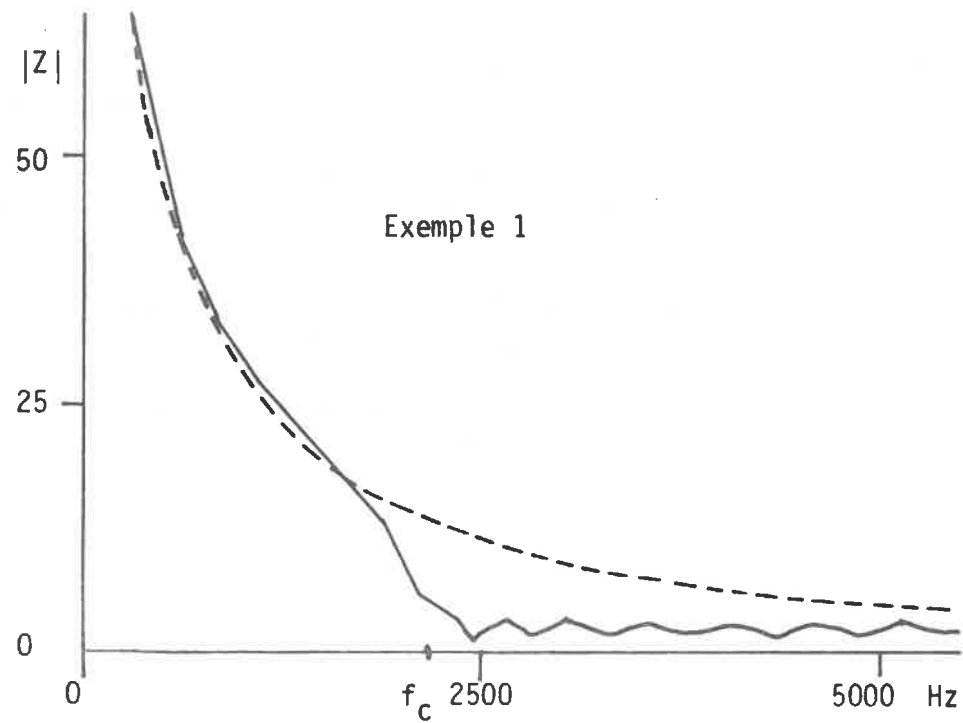
Toutefois, nous avons noté que $\text{Re}(\zeta)$ n'est pas très grande, donc le rayonnement par le pavillon a l'ordre de grandeur de :

$$\frac{a_0}{1 + b_0^2} = \frac{\text{Re}(Y_0)}{1 + \text{Im}^2(Y_0)} = \frac{\text{Re}(Z_0)}{1 + \text{Im}^2(Z_0)} = \frac{1}{4} (ka)^2$$

où Z_0 est l'impédance de rayonnement du tuyau principal.

-Il nous reste enfin, à comparer les deux termes $-n \frac{\text{Im}(\phi)}{\text{Re}(\zeta)}$ et $\frac{1}{4} (ka)^2$ et surtout les deux termes de rayonnement $\frac{n}{8} \frac{b^2}{h_e^2 a^2}$ et $\frac{1}{4} (ka)^2$. Leur rapport dépend de la puissance 4 du rapport $\frac{b}{a}$ des rayons, et surtout

Fig. 13 : courbe des extremums de tuyaux
cylindriques percés de trous latéraux
(en pointillé, tuyau non percé, coupé à
l'endroit du premier trou)
(en ordonnée, l'impédance réduite)



du carré de la fréquence.

Dans les cas envisagés, le rayonnement par le pavillon est négligeable pour les fréquences voisines de f_c (comme au dessous de f_c) mais son importance croît rapidement. Pour l'exemple 1 (trous larges) il devient alors d'un ordre de grandeur comparable au rayonnement par les trous, et pour les exemples 2 et 3 (trous étroits) il devient tout à fait prépondérant : l'influence des trous latéraux tend alors à devenir négligeable.

2-6.5. Les fréquences aiguës (deuxième bande d'arrêt, et deuxième bande passante)

Nous avons envisagé les cas des fréquences inférieures à la (première) fréquence de coupure f_c (§ 2-6.3), puis celui des fréquences comprises entre f_c et $f_{c2} = \frac{c}{4s}$. Cette deuxième fréquence de coupure, si s est petit, est élevée (5700 Hz pour les exemples 1 et 3) ; dans ce cas, les fréquences situées au-dessus sont peu intéressantes pour nous. Par contre, si s est grand, il est utile de prendre en considération ce domaine de fréquence également (pour l'exemple 2, $c/4s = 2850$ Hz).

a) Au dessus de $f_{c2} = \frac{c}{4s} (k_{c2} = \frac{\pi}{2s})$, on retrouve une bande d'arrêt. Celle-ci est très étroite, puisque la coupure suivante est obtenue pour $\text{tgks} = -Vks$, c'est à dire environ $k_{c3}s = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{V\pi}$. La bande d'arrêt est donc caractérisée par ks compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{V\pi})$ (pour l'exemple 2, entre 2850 Hz et 3125 Hz).

Il n'est pas nécessaire de reprendre en détail toute l'étude déjà faite pour la première bande d'arrêt. Nous pouvons prévoir, au milieu de cette bande, une remontée importante des pics d'impédance, et un rayonnement plus faible par le pavillon.

b) La bande passante suivante est beaucoup plus large, puisque la coupure est à $k_{c4} = \frac{\pi}{s}$; nous y retrouvons pour l'essentiel ce que nous avons dit à propos de la première bande passante.

2-6.6. Conclusion

La figure 13, montre les courbes des extremums du module de l'impédance d'entrée pour chacun des exemples traités (nous les avons tracées

en joignant les maximums de $|Z|$ et l'inverse des minimums de $|Z|$ afin de les rendre plus significatives) Chaque courbe est comparée à la courbe analogue des extremums du tuyau cylindrique coupé à l'endroit du premier trou, qui sont approximativement proportionnels à f^{-1} .

Dans chaque cas, une fréquence est aisément repérable, pour laquelle la courbe passe par un minimum: si on compare cette fréquence à la valeur donnée au § 2.6.2. pour la (première) fréquence de coupure, on constate qu'elle est supérieure à celle-ci. En fait, nous avons vu que les extremums étaient très bas de part et d'autre de cette fréquence de coupure, mais c'est au-dessus qu'ils sont le plus bas. Ceci apporte une nuance à ce que nous avons affirmé au §2.6.3.3. : la fréquence mesurée expérimentalement (comme celle pour laquelle les extremums sont les plus bas) est légèrement plus haute (de 10 à 15%) que la fréquence de coupure théorique.

D'autre part, une constatation s'impose: pour chacun des trois exemples, les extremums sont plus bas que pour le tuyau coupé. Nous concluons en rappelant les explications essentielles:

a) Pour les fréquences situées nettement au-dessous de f_c , c'est l'exemple 1 qui se rapproche le plus du tuyau coupé ; pour les autres exemples, bien que le rayonnement soit inférieur, l'amortissement est supérieur, ce qui explique que les extremums soient plus petits.

b) C'est quand la fréquence avoisine f_c que les extremums diffèrent le plus de ceux du tuyau coupé : la raison en est l'importance du rayonnement par les trous latéraux, mais aussi l'amortissement dans le réseau de trous.

c) Puis quand la fréquence augmente au delà de f_c , le rayonnement par le pavillon prend de plus en plus d'importance : si les trous latéraux sont étroits, leur rayonnement devient proportionnellement faible, et le comportement du tuyau percé se rapproche beaucoup de celui du tuyau coupé ; si les trous sont larges, le comportement du tuyau percé demeure différent, car le rayonnement par les trous reste grand.

Les oscillations de la courbe des extremums sont dues, comme nous l'avons vu, au terme $\text{Re}(\tau)$, et leur amplitude est grande quand V est petit (exemple 1).

d) L'exemple 2 présente la particularité d'avoir une deuxième bande d'arrêt vers 3000 Hz ; les extremums deviennent alors sur une étroite bande de fréquence, plus grands que ceux du tuyau coupé.

3- MESURE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE

3-1. PRESENTATION DE LA METHODE EXPERIMENTALE

3-1.1. Introduction

La méthode en principe idéale pour mesurer une impédance consiste bien entendu à mesurer la pression et la vitesse acoustiques séparément, et d'en calculer le rapport. C'est ce qu'on fait Pratt, Elliott et Bowsher [75], à l'aide d'un microphone à pression, d'un fil chaud, et d'un traitement numérique approprié (en particulier pour la détermination des extremums). La qualité de leurs résultats montre qu'ils ont su maîtriser avec succès l'emploi du fil chaud pour mesurer de petites variations de vitesse.

Devant la difficulté de cette réalisation, nous avons préféré les méthodes plus classiques qui ne donnent que des résultats relatifs, mais sont d'une précision satisfaisante. Elles ont toutes en commun de n'utiliser que des microphones, le débit à l'entrée du tuyau étant recherché indépendant de l'impédance à mesurer et de la fréquence. Plusieurs variantes ont été proposées pour obtenir ce débit constant, dont rend compte notamment Benade [12]. Parmi elles, nous avons retenu la plus ancienne, due à E. Kent, qui à cette fin utilise un tube capillaire.

La totalité de ce travail expérimental a été effectuée à l'I.R.C.A.M. en collaboration avec René Caussé et Xavier Lurton. Ce dernier a déjà décrit [61] notre expérience ; ce qui suit constitue donc pour une part des rappels, mais aussi des compléments et des développements à son travail.

Notre approche est dans une large mesure originale, car nous avons systématiquement cherché à comparer la théorie et l'expérience, ce qui peut mettre en lumière des problèmes tant théoriques qu'expérimentaux. Avant nous, la plupart des auteurs avaient limité cette confrontation au tuyau cylindrique [88, 4, 75, 147]. Certains n'ont pas expérimenté eux-mêmes et confrontent leurs calculs (hautbois [73], cuivres [30]) avec les expériences faites par d'autres, mais leurs résultats diffèrent souvent de un à plusieurs décibels. Seuls Benade et Jansson [13] ont poussé loin cette confrontation à propos des pavillons d'instruments à embouchure.

Pour notre part, nous avons cherché à limiter les erreurs à quelques pour cent pour les impédances (1 dB = 12%) et quelques dixièmes de pour cent pour les fréquences de résonance. De plus, la gamme de fréquences étudiée va de 15 Hz à 3200 Hz environ : elle recouvre très largement le domaine dans lequel l'impédance d'entrée d'un instrument présente des extremums, qui concourent au fonctionnement de celui-ci.

3-1.2. L'utilisation d'un tube capillaire : conditions idéales à remplir

Le mode d'emploi d'un tube capillaire est le suivant : on maintient la pression constante à l'entrée, à l'aide d'une boucle de contre-réaction, et le problème est alors de choisir le capillaire de sorte que le débit à la sortie soit indépendant de l'impédance d'entrée du tuyau à mesurer. Backus [5] et Lurton [61] ont déjà largement discuté les conditions à satisfaire : nous nous contenterons de rappeler cette discussion très succinctement et d'un point de vue qualitatif, dans la mesure où notre démarche sera très pragmatique : nous admettons que le capillaire convient dès que les résultats expérimentaux concordent avec les résultats théoriques pour un tuyau donné sur une large gamme de fréquence. Pour éviter qu'une erreur expérimentale puisse compenser une erreur théorique, nous avons traité des exemples suffisamment nombreux et divers.

Soit un tuyau d'impédance d'entrée $Z = p/u$ à mesurer.
le tube capillaire y débouche, selon le schéma suivant (Fig. 14) :

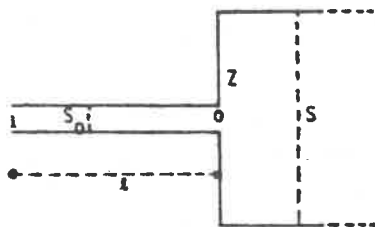


Fig. 14: tube capillaire (de section S_0)
débouchant sur le tuyau à mesurer (de
section S , d'impédance d'entrée Z)

Dans un premier temps, nous admettrons que l'approximation
unidimensionnelle au raccordement est valable :

$$p_0 = p \quad S_0 u_0 = S u \quad Z_0 = \frac{S_0}{S} Z$$

On cherche donc à obtenir p_1/u_0 constant, en module et en
argument, quand la fréquence et l'impédance Z_0 de sortie du capillaire va-
rient. On sait que pour ceci soit réalisé, l'approximation des constantes
localisées doit être valable.

A priori, on a pour un quadripôle symétrique (chapitre I, § 3-4.)

$$p_1 = p_0 \operatorname{ch} \Gamma \ell + u_0 \zeta \operatorname{sh} \Gamma \ell \quad (29)$$

où Γ et ζ sont la constante de propagation et l'impédance itérative du qua-
drupôle. Pour obtenir p_1/u_0 constant, on doit avoir :

$$|\Gamma \ell| \text{ petit (du premier ordre) : } \operatorname{sh} \Gamma \ell = \Gamma \ell \text{ et } \operatorname{ch} \Gamma \ell = 1$$

et

$$|p_0/u_0 \zeta| = |Z_0/\zeta| \text{ du second ordre : } p_1 = \Gamma \zeta \ell u_0 = Z_V \ell u_0$$

(Z_V et Y_t sont l'impédance et l'admittance en série par unité de longueur
de la ligne, avec $\Gamma = (Z_V Y_t)^{1/2}$ et $\zeta = (Z_V/Y_t)^{1/2}$)

Les deux conditions se résument donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Gamma \ell| \ll 1 \\ |Z_0/\zeta| \ll |\Gamma \ell| \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Gamma \ell| \ll 1 \\ |Z_0| = |Z| S_0/S \ll \ell |Z_V| \end{array} \right.$$

A ces conditions, s'ajoute la condition $Z_V/f = \text{constante}$.
Pour nous rendre compte de ce qu'impliquent ces diverses conditions, nous
devons connaître Γ et ζ . Pour cela, nous supposons le capillaire cylin-
drique ; s'il ne l'était pas, on sait que ces quantités auraient la même
allure, que le capillaire soit de forme annulaire, rectangulaire, ... et cela
nous suffit pour avoir des conditions qualitatives.

Or les caractéristiques d'un tuyau cylindrique étroit sont
obtenues simplement à partir de la solution réduite (chapitre I, § 3-4.)
en développant en $k_0 r_0$ et $k_2 r_0$. D'où :

$$Z_V = \left[\frac{8}{r_0^2} c \ell_V + \frac{4}{3} j \omega \right] \text{ au troisième ordre en } k_0 r_0$$

$$\Gamma^2 = \frac{8jk_Y \ell_V}{r_0^2} \text{ au premier ordre en } k_0 r_0 \text{ et } k_2 r_0.$$

On en tire les renseignements suivants :

- $\Gamma \ell \ll 1 \Rightarrow k$ et $\frac{\ell}{r_0}$ doivent être suffisamment petits
- $Z \frac{S_0}{S} \ll \ell Z_V \ll Z$ et $\frac{S_0}{S}$ doivent être suffisamment petits
- $Z_V(f) = \text{constante} \Rightarrow \operatorname{Im}(Z_V) \ll \operatorname{Re}(Z_V) \Rightarrow k$ doit être suffisamment petit

Si ces conditions sont remplies, p_1/u_0 est constant en module
et en argument. En mesurant p_0 et p_1 on tire Z :

$$Z = \frac{p_0}{p_1} \frac{S}{S_0} Z_V \ell \quad (29\text{bis})$$

Puisqu'on ne cherche pas à connaître Z_V , les résultats sont
relatifs.

- Pour obtenir les résultats en module, il suffit de mesurer
 $|p_0/p_1|$; en fait, si on maintient $|p_1|$ constante par une boucle de contre-
réaction, on a alors $|Z|/S = \text{constante} \times |p_0|$

- Quant aux résultats en argument, ils sont même absolus puisque
l'on sait que Z_V est réel : $\operatorname{Arg} Z = \operatorname{Arg} \frac{p_0}{p_1}$

Si les conditions ci-dessus ne sont pas vérifiées, il faut conserver la formule (29) entière, sous la forme :

$$Z = \frac{S}{S_0} \frac{p_0}{p_1} c \operatorname{sh} r l \frac{1}{1 - \frac{p_0}{p_1} \operatorname{ch} r l} \quad (29\text{ter})$$

-si $c \operatorname{sh} r l = Z_v l (1 + \frac{r^2 l^2}{3!} + \dots)$ n'est pas constant avec la fréquence, on aura un glissement des résultats indépendant de $\frac{p_0}{p_1}$ et donc de Z , mais fonction de la fréquence.

-si $\frac{p_0}{p_1}$ n'est pas assez petit (Z trop grand), on aura une erreur de l'ordre de $|\frac{p_0}{p_1}|$, puisque alors :

$$Z = \frac{S}{S_0} \frac{p_0}{p_1} Z_v l \frac{1}{1 - \frac{p_0}{p_1}}$$

Nous avons obtenu le type d'erreur auquel on peut s'attendre dans la mesure de l'impédance Z pour une fréquence donnée. En fait, nous nous intéressons principalement aux extremums du module de l'impédance quand la fréquence varie. On peut se demander si les causes d'erreur ci-dessus n'entraînent pas aussi une erreur sur les fréquences de résonance, puisque la mesure portera sur les extremums de $|p_0|$, et non de $|Z|$.

Nous avons fait un calcul approché simple que nous avons confirmé par un calcul numérique : le fait que $\operatorname{sh} r l$ présente une partie imaginaire proportionnelle à la fréquence entraîne bien un déplacement des fréquences de résonances. Mais celui-ci est très inférieur à 0,01 %, et peut être négligé. De plus, il n'induit pas d'erreur importante sur la valeur des extremums. Par conséquent, le système de mesure est d'une très bonne précision pour les fréquences de résonance, à condition de résoudre les problèmes liés aux modes évanescents (cf. § 3-3.2.)

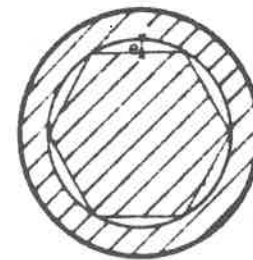
Cette remarque rejoint une remarque plus générale : les variations autour des fréquences de résonance d'un tuyau sont tellement fortes, qu'elles l'emportent largement sur certaines variations dues à l'amortissement, au rayonnement, ...

3-1.3. Le problème de la dynamique

Nous avons trouvé des conditions à remplir pour une utilisation idéale du capillaire. En fait, il en est une autre : l'affaiblissement ne doit pas être trop important, pour éviter d'avoir des niveaux soit trop grands à l'entrée du capillaire, soit trop faibles à la sortie, qui empêcheraient la mesure de faibles pressions. D'après (29), en effet :

$$\left| \frac{p_0}{p_1} \right| = |Z| \frac{S_0}{S} \frac{1}{|Z_v l|}$$

La longueur minimale que nous avons pu choisir est 5 cm, compte tenu du montage. Quant au diamètre, Backus [4] et Lurton [61] ont montré qu'il devait être très petit pour satisfaire les conditions telles que $p_1/u_0 = \text{constante}$, et qu'alors l'affaiblissement était beaucoup trop important. C'est pourquoi on a intérêt à choisir des capillaires qui possèdent des caractéristiques voisines, mais dont la surface S_0 soit plus grande. Backus a choisi un anneau ; nous avons adopté une solution voisine (Fig.15) :



$$\begin{aligned} R_i &= 2,4 \text{ mm} \\ L &= 5 \text{ cm} \\ e &= 0,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

Fig. 15 : forme du tube capillaire

Expérimentalement, nous avons alors obtenu un affaiblissement de l'ordre de 60 dB pour l'impédance itérative d'un tuyau large ($r = 12 \text{ mm}$), et 48 dB pour celle d'un tuyau étroit ($r = 6 \text{ mm}$). Pour le creux le plus bas du tuyau large, l'affaiblissement est de 95 dB. Comme nous avons utilisé pour mesurer p_0 un microphone de 1/4 pouce de diamètre, dont la sensibilité est de $3,6 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}$ (45 dB), il nous faut donc un niveau minimal de 140 dB à l'entrée du capillaire. A ce niveau, il est évident que la distorsion, due en particulier au haut-parleur, n'est pas négligeable, et il faut en tenir compte dans la mesure de p_1 .

Pour ce type de tuyau large, nous avons préféré n'avoir que 125 dB environ à l'entrée du capillaire pour éviter les distorsions, et augmenter le niveau ponctuellement pour les deux ou trois minimums qui posent problème. IL est à noter que les problèmes augmentent rapidement avec la largeur du tuyau : pour une même longueur, l'impédance est inversement proportionnelle au rayon. Or la formule (29) montre que de plus l'affaiblissement est proportionnel au carré du rayon ; par conséquent doubler le rayon revient à affaiblir de 18 dB supplémentaires les minimums !

Pour un tuyau long et étroit ($r = 6,67$ mm, $\ell = 3,9375$ m), nous avons obtenu dans ces conditions 87 dB de niveau absolu pour le pic le plus élevé (28 dB d'affaiblissement), et 47 dB pour le creux le plus bas (68 dB d'affaiblissement). Nous avons donc pu mesurer l'ensemble sans difficulté.

3-1.4. Choix du test

Nous avons trouvé un certain nombre de conditions qualitatives à remplir a priori pour réussir une bonne mesure. Et puisque nous renonçons à déterminer théoriquement les caractéristiques du tube capillaire annulaire employé, il s'impose donc maintenant de tester le système à l'aide d'un tuyau dont le comportement est supposé déjà connu sur une large bande de fréquences. Si on y réussit, on admettra alors que :

- le capillaire remplit bien les conditions requises ;
- l'ensemble de l'expérience est satisfaisant ;
- l'étalonnage absolu de l'expérience est possible.

Par contre si on n'y réussit pas tout à fait, on devra chercher si des corrections sont possibles pour atteindre le même objectif.

Cette démarche a été adoptée par d'autres auteurs avant nous. Le choix du tuyau de référence s'est porté soit sur une petite cavité cylindrique fermée (Backus [4], Lurton [61]), soit sur un tuyau cylindrique (Benade et Jansson [13], Backus [4], Pratt [75], Lurton [61]). Nous retiendrons le deuxième choix, qui permet l'exploitation des résonances du tuyau. En effet comparer une valeur théorique et une valeur expérimentale de Z pour une fréquence donnée présente des risques, une petite erreur en fréquence pouvant entraîner une grande erreur en impédance. C'est pourquoi il est avantageux de faire porter la comparaison sur les extremums de $|Z|$.

indépendamment des fréquences correspondantes. On peut ainsi dissocier l'étalonnage en $|Z|$ et la mesure des fréquences.

Le tuyau cylindrique a été d'autre part choisi long et étroit, afin d'éviter les problèmes expérimentaux liés à la dynamique, mais aussi les problèmes théoriques du rayonnement ($\ell = 3,9375$ m, $r = 6,67$ mm). Pour effectuer le test envisagé, nous voulons discuter d'abord l'incertitude avec laquelle les résultats théoriques sont connus (§ 3-2), puis les erreurs possibles dues au mode d'expérimentation (§ 3.3).

3-1.5. Description de l'ensemble de l'expérience

(ce paragraphe est très largement emprunté à la thèse de Lurton)

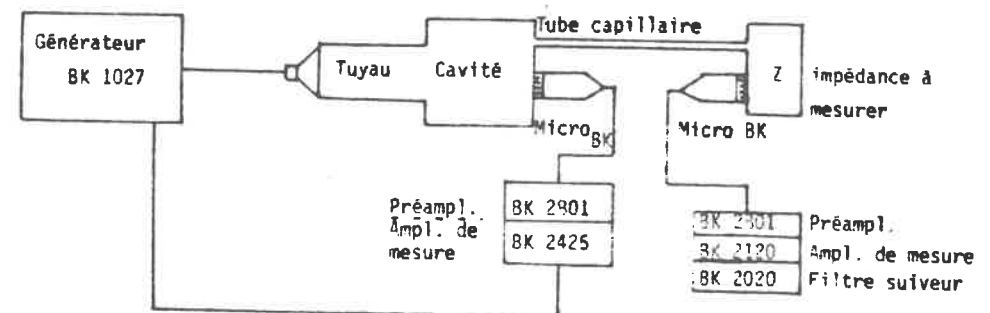


Fig. 16 : montage expérimental (appareillage Brüel & Kjaer)

Un générateur de signal sinusoïdal (Fig. 16) alimente une transducteur de type chambre de compression débouchant sur un tuyau cylindrique. À l'autre extrémité de celui-ci, débouche l'entrée du tube capillaire, à côté de laquelle un microphone 1/2 pouce capte la pression p_1 (microphone n°1). Le signal ainsi capté est ensuite comprimé par le générateur de façon à être maintenu constant, par un système de contre-réaction. Pour que cette compression fonctionne bien, il est souhaitable que le transfert du haut-parleur au capillaire par le tuyau cylindrique ne soit pas trop irrégulier: on choisit donc celui-ci de courte longueur (une dizaine de cm), et on le garnit de laine de verre.

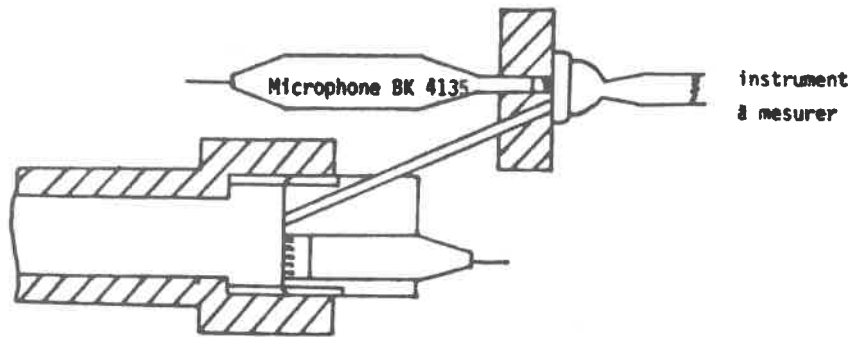


Fig. 17 : détail du montage (microphones 1/4" et 1/2")

La sortie du tube capillaire débouche sur le tuyau à mesurer et à côté d'elle est fixé un microphone qui mesure la pression p_0 (microphone n°0). Capillaire et microphone (Fig. 17) traversent une pièce métallique sur laquelle est fixée l'instrument à mesurer, l'étanchéité étant assurée par une simple pâte à modeler. La pression p_0 est amplifiée et filtrée à l'aide d'un filtre suiveur à largeur de bande constante, dans le but d'éliminer distorsions et bruit de fond. L'ensemble du montage, excepté le générateur et l'analyseur, est placé dans une chambre sourde, afin de pouvoir mesurer de faibles pressions.

Le résultat est soit lu directement sur l'analyseur, soit tracé sur un enregistreur, grâce à un balayage en fréquence (balayage linéaire).

3-2. LES CONSTANTES DE L'AIR ET LEUR PRECISION

Le tuyau cylindrique de référence étant long et étroit, la connaissance du rayonnement est très suffisante, puisque celui-ci intervient très peu : la correction de longueur représente 0,1% de la longueur totale, et l'énergie rayonnée 0,002% à 20 Hz, 1,9% à 2000 Hz, et 3,5% à 3000 Hz de l'énergie perdue par amortissement. Le problème essentiel est donc la connaissance de la propagation et de l'amortissement. Pour cela, nous avons besoin des constantes de l'air pour des températures comprises entre 10°C et 30°C et pour la pression atmosphérique (Nous négligeons l'influence de l'humidité).

C'est la vitesse de son dans l'air libre pour laquelle nous avons besoin de la plus grande précision, car elle détermine les fréquences de résonance. Par contre l'incertitude est nécessairement plus grande pour l'amortissement : d'une part les constantes qui lui correspondent sont connues avec une précision assez faible, d'autre part les conditions supposées remplies ne sont pas parfaitement remplies dans la pratique.

3-2.1. La vitesse du son dans l'air libre

Tous les auteurs s'accordent sur cette donnée. A 0°C, pour une pression de 1 atmosphère, Beranek [96] indique :

$$c = [331,45 \pm 0,01] \text{ ms}^{-1}$$

L'incertitude est donc de 0,015%.

La variation avec la température est de plus bien connue :

$$\frac{c_T}{c_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}, \text{ où } T_0 = 273,16^\circ\text{K}$$

3-2.2. La masse volumique

Elle ne pose pas de problèmes non plus. Le même auteur nous donne $\rho = 1,2929 \frac{T_0}{T}$, avec une incertitude inférieure à 0,01%.

3-2.3. L'impédance caractéristique de l'air

On tire des formules ci-dessus :

$$\rho c = 428,53 \sqrt{\frac{T_0}{T}} \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1} = 428,53 \sqrt{\frac{T_0}{T}} \text{ Nsm}^{-1}$$

L'utilisation de l'impédance réduite impose donc un choix de température. Nous choisirons 20°C, comme référence, et nous exprimerons nos résultats ainsi :

$$Z = \frac{(p/u)_T}{(\rho c)_{20^\circ}} = \frac{(p/u)_T}{(\rho c)_T} \frac{(\rho c)_T}{(\rho c)_{20^\circ}} = \left(\frac{p/u}{\rho c} \right)_T \sqrt{\frac{293,16}{T}}$$

3-2.4. Le coefficient de viscosité

La valeur du coefficient de viscosité diffère assez peu d'un auteur à l'autre ; à 0°C, les différences sont minimales ; toutefois, nous avons trouvé 1,8% à 20°C.

En pratique, nous retiendrons une formule donnée par W. Ibele, dans le Handbook of Heat Transfer [175], et tirée de [194]. Il s'agit d'une formule d'interpolation entre des résultats expérimentaux, qui, pour le domaine de température qui nous intéresse, peut se mettre sous la forme :

$$\mu = 170,8 [1 + 0,0029t] \text{ micropoises}$$

soit $\mu = 1,708 \cdot 10^{-5} [1 + 0,0029t] \text{ N.s.m}^{-2}$

(t exprimé en °C). Cette source indique une incertitude de 2%. On en tire les différentes longueurs liées à la viscosité :

$$\ell_v = \frac{\mu}{\rho c} = 3,986 \cdot 10^{-8} (1 + 0,00473 t) \text{ m} \quad (\text{cf ch. I, §2.1.})$$

$$d_v = \sqrt{\frac{2\ell_v c}{\omega}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \pi}} \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{2,051 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{f}} (1 + 0,0033 t) \text{ ms}^{1/2} \quad (\text{cf Morse [134]})$$

$$r_v = \sqrt{2} \frac{r}{d_v} = 689,5 (1 - 0,0033 t) r \sqrt{f} \text{ m}^{-1} \text{s}^{1/2} \quad (\text{cf ch. I § 3.5 et Benade [95]})$$

L'incertitude sur ℓ_v est donc de 2%, celle sur d_v et r_v de 1%.

3-2.5. Le coefficient de conduction thermique

La valeur du coefficient de conduction thermique varie sensiblement selon les auteurs consultés. Nous avons trouvé 4,5% de variation à 0°C, et 9% à 20°C. Nous utiliserons la même source que pour la viscosité ; elle cite la formule suivante [194] :

$$\lambda = 5,77 \cdot 10^{-3} [1 + 0,0033t] \text{ cal cm}^{-1} \text{sec}^{-1} \text{°C}^{-1}$$

Quant à la chaleur massique de l'air à pression constante, qui varie très peu avec la température, elle est bien connue :

$$c_p = 0,24 \text{ cal g}^{-1} \text{°C}^{-1}$$

$$\text{D'où } 1/c_p = 2,404 \cdot 10^{-3} [1 + 0,0033t] \text{ s.m}^{-2}$$

on en tire les différentes longueurs suivantes :

$$\ell_h = \frac{1}{\rho c c_p} = 5,61 \cdot 10^{-8} [1 + 0,00513t] \text{ m}$$

$$d_h = \sqrt{\frac{2\ell_h c}{\omega}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi c_p}} f^{-1/2} = \frac{2,432 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{f}} (1 + 0,0035 t) \text{ m s}^{-1/2}$$

$$r_t = \sqrt{2} \frac{r}{d_h} = 581,5 (1 - 0,0035 t) r \sqrt{f} \text{ m}^{-1} \text{s}^{1/2}$$

L'incertitude sur ℓ_h est de 2%, et celles sur d_h et r_t de 1%.

3-2.6. L'amortissement visco-thermique aux parois d'un tuyau cylindrique

Nous reprenons nos notations du chapitre I (§-3.5) :

$$P = \sqrt{2}/r_v = d_v/r = 2,051 \cdot 10^{-3} [1 + 0,0033t] \frac{1}{r\sqrt{f}} \text{ m s}^{-1/2}$$

$$Q = (\gamma - 1) \frac{r_v}{r_t}$$

Or γ est donné en général comme variant très peu avec la température :

$$\gamma = 1,402 \text{ (à 0,1\% près)} . \quad Q = 0,477 [1 + 0,0002t]$$

Compte tenu de la précision des constantes, on peut donc admettre que Q est constante : à 2,5% près, $Q = 0,477$.

Finalement, au premier ordre, la formule (16) du chapitre I s'écrit :

$$\begin{cases} r = j \left(k + \frac{1}{2} (1-j) k P (1+Q) \right) = j \left(k + (1-j) A_m \frac{\sqrt{f}}{r} \right) \\ c = \rho c \left(1 + \frac{1}{2} (1-j) k P (1-Q) \right) = \rho c \left(1 + (1-j) A_m \frac{\sqrt{f}}{r} \frac{1-Q}{1+Q} \right) \end{cases}$$

$$\text{où } A_m = \frac{r k}{2\pi} (1 + Q) = 2,87 \cdot 10^{-5} [1 + 0,0016t] \text{ s}^{1/2}$$

est connu à 1,8% près.

Ces données sont, compte tenu de l'incertitude, bien en accord avec celles de Benade [95].

3-3. PROBLEMES POSES PAR LA METHODE EXPERIMENTALE

Nous voulons ici discuter aussi loin que possible les problèmes soulevés par notre méthode expérimentale, en comparant les résultats expérimentaux et théoriques pour le tuyau cylindrique de référence. La figure 18 montre les courbes d'erreur pour les maximums et les minimums sur le module de l'impédance d'une part, sur les fréquences de résonance d'autre part. L'erreur est calculée de la façon suivante :

$$\epsilon = \left(\frac{\text{résultat expérimental}}{\text{résultat théorique}} - 1 \right) \times 100 \quad (\text{en } \%)$$

On note d'emblée une erreur beaucoup plus importante sur l'impédance que sur les fréquences de résonance (Rappelons que les résultats sur l'impédance sont relatifs ; nous avons choisi une fréquence de référence située entre 100 et 200 Hz, l'erreur y étant donc supposée nulle). Le tableau 1 présente les mêmes résultats.

Pour les résultats portant sur l'impédance, on remarque immédiatement deux sortes de variations de l'erreur : l'une, "aléatoire", due à des causes diverses que nous analyserons du § 3-3.1. au § 3-3.5. ; l'autre régulière et cohérente, que nous analyserons au § 3-3.6.

3-3.1. Problèmes liés à l'excitateur

Comme nous l'avons remarqué, le rapport S_0/S doit être suffisamment petit pour diverses raisons. Or, si l'extrémité du capillaire qui constitue la source est de dimensions très inférieures à celle du tuyau cylindrique, on va rencontrer des modes non plans sur une certaine longueur dans le tuyau à mesurer. Récemment, Keefe et Benade ont présenté un résumé [54] de leur travail sur cette question, qui pose bien le problème.

D'abord, il va de soi que si le capillaire est placé au centre du tuyau, la discontinuité de section ne crée pas de modes hélicoïdaux. On est alors dans le cas que nous avons étudié au § 4-2.1. (chapitre I).

Nous connaissons alors parfaitement la formule reliant p_0 (pression sur le microphone 0), si le microphone était situé à l'emplacement du capillaire et avait la surface de celui-ci. Or, bien entendu, on doit placer le microphone à côté, et il ne peut par conséquent pas être au centre : si on reprend le calcul effectué au chapitre I, la seule différence est que la moyenne de la pression est calculée non sur l'aire du petit tuyau, mais sur celle du microphone. On a donc un résultat de la même forme que l'équation (18) :

$$\frac{p_m}{u_1} = \frac{S_0}{S} Z + jkr_0 H_1$$

où p_m est la pression moyenne captée par le microphone, et H_1 un terme dépendant des dimensions et de la position de celui-ci.

On en conclut que l'on risque d'avoir, si $\frac{Z}{S}$ est petit, (donc surtout pour les creux), un déplacement des fréquences de résonance, et une modification des valeurs des extremums. De fait, pour certaines positions du microphone, proches du bord d'un tuyau large ($r = 11,7 \text{ mm}$) nous avons trouvé un abaissement important des fréquences de résonance (jusqu'à 0,25%).

Keefe et Benade ont étudié le problème de manière plus complète : en particulier ils ont envisagé le cas où le capillaire n'est pas au centre du tuyau mesuré, et tiré un certain nombre de conclusions. Pour notre part, nous avons seulement cherché empiriquement une position du microphone et du capillaire qui minimise l'erreur sur les creux : nous admettons que si l'erreur sur les pics est très faible, la théorie est en bon accord avec l'expérience, et par conséquent il suffit de trouver une position du capillaire et du microphone qui donne également une faible erreur sur les creux. En général, nous choisissons le type suivant de disposition (Fig. 19) :

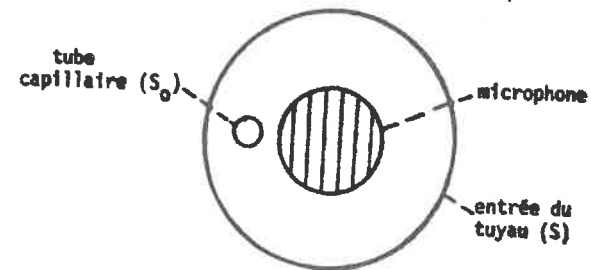


Fig. 19

Pour des raisons pratiques, nous n'avons pu faire déboucher le capillaire au centre du tuyau. Par contre, nous avons dans la mesure du

171

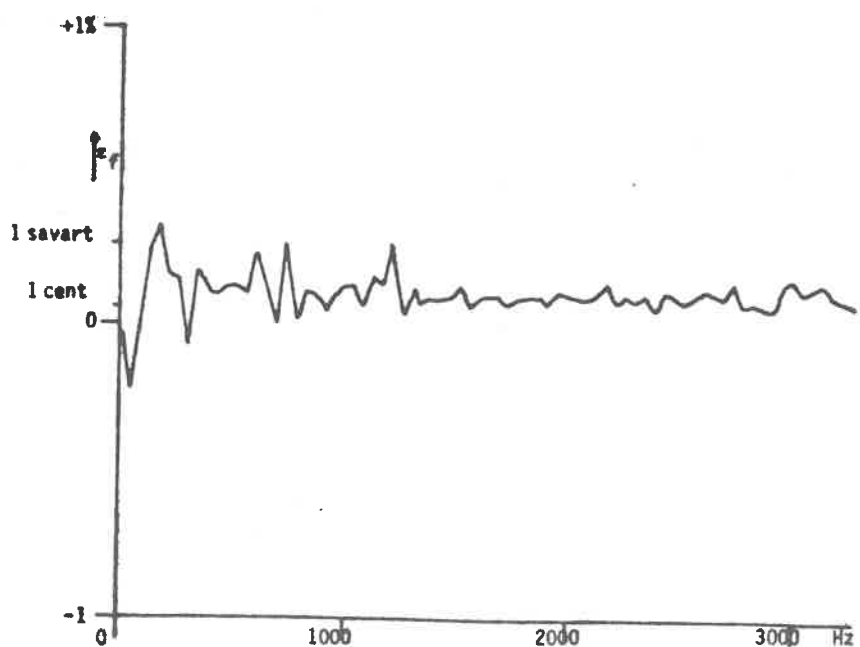
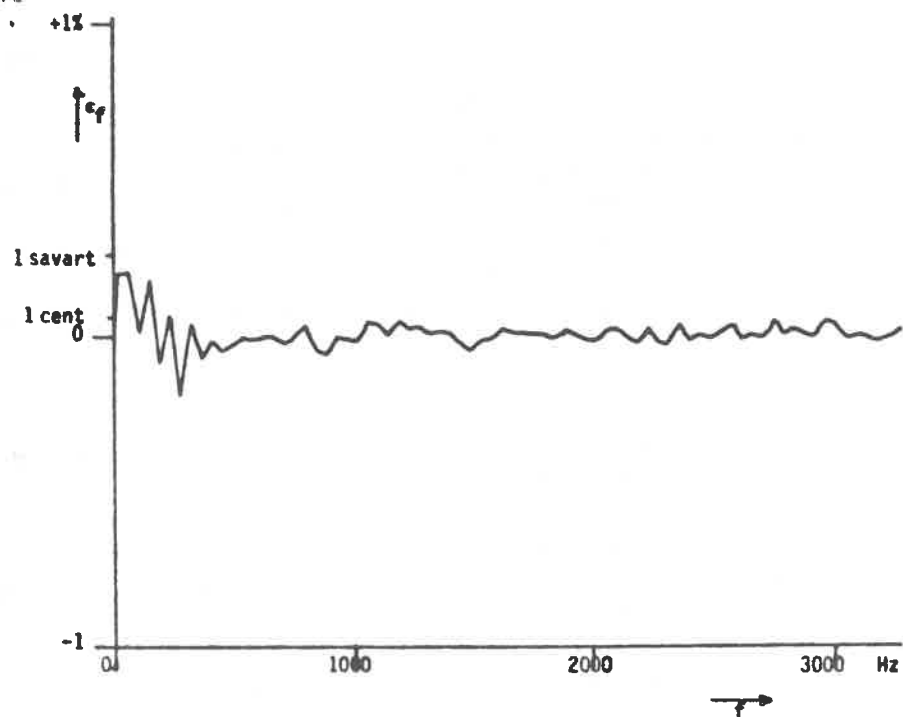
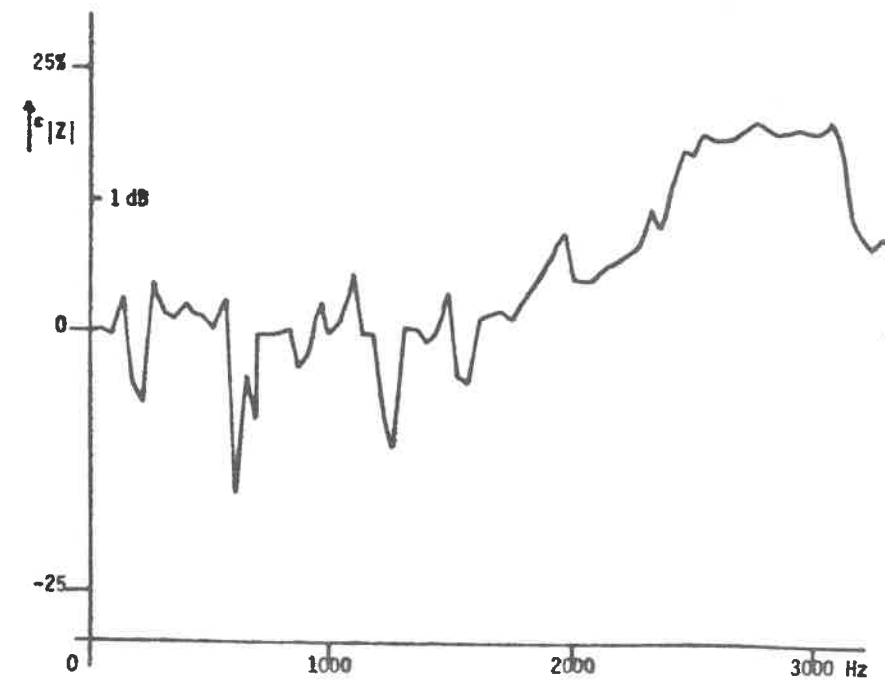
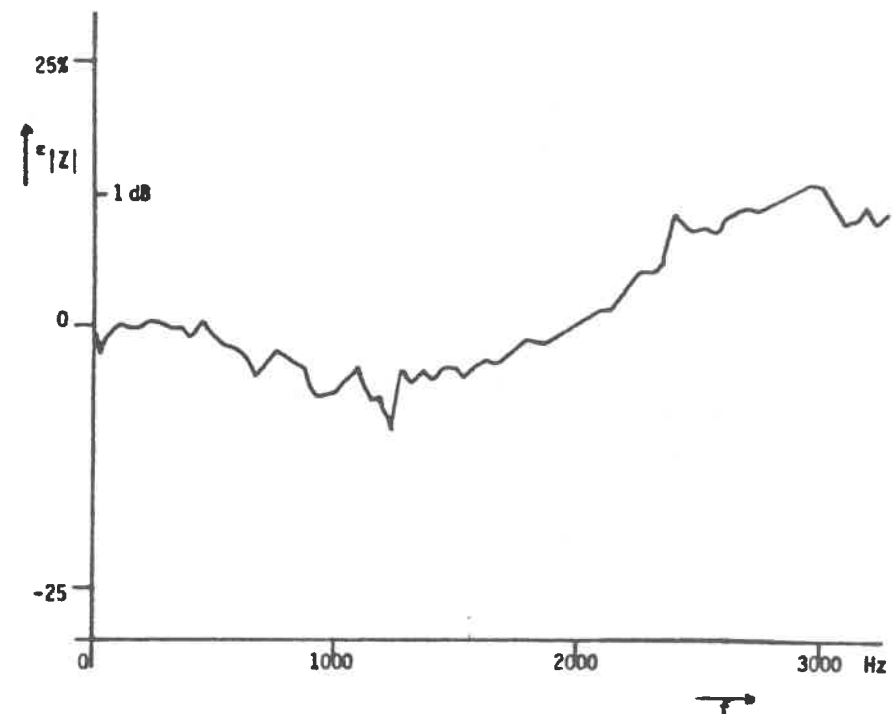


Fig. 18 : erreur sur les fréquences de résonance $\left\{ \begin{array}{l} \text{en haut: pics d'impédance} \\ \text{en bas : creux d'impédance} \end{array} \right.$
II.3.3.

172



Erreur sur les extrêmes du module de l'impédance $\left\{ \begin{array}{l} \text{en haut: pics} \\ \text{en bas : creux} \end{array} \right.$

possible placé le microphone au centre du tuyau, et l'avons choisi de petites dimensions (diamètre 1/4 pouce), pour minimiser la valeur des fonctions J_n ($n > 1$).

Un autre problème, certes moins important, est lié à la position respective du microphone et de la sortie du capillaire. Il est essentiel dans certains cas qu'ils soient situés exactement dans le même plan. En particulier si le champ varie fortement à l'entrée du tuyau (par exemple dans une embouchure de trompette), un simple décalage de 1 mm entre les deux plans peut provoquer des erreurs non négligeables sur l'impédance, pouvant aller jusqu'à 20%.

3-3.2. La dynamique

Nous avons évoqué plus haut le problème général posé par la mesure des minimums, nous voulons discuter ici quelques problèmes pratiques qui y sont liés.

a) Pour avoir une sensibilité suffisante du microphone n°0, celui-ci ne doit pas être trop petit, ce qui limite en pratique le diamètre d'entrée des tuyaux mesurés (leur section d'entrée doit en effet être supérieure à la somme de celles du microphone et de la sortie du capillaire). Pour des tuyaux à mesurer de diamètre inférieur, il faudrait recourir à des sondes nous ne l'avons pas fait, pour ne pas ajouter de difficultés d'étalonnage. Le diamètre d'entrée minimal que nous avons étudié est donc 6 mm.

b) Indépendamment de la sensibilité du microphone, deux problèmes se posent pour la mesure des faibles impédances : bien que travaillant dans une chambre sourde, et utilisant un filtre suiveur, le bruit de fond nous a quelque peu gênés pour les très faibles pressions, et en sus de ce bruit de fond peut intervenir légèrement le rayonnement des parois du haut parleur qui pénètre dans le tuyau par son extrémité ouverte. Ces deux problèmes font que l'incertitude expérimentale peut atteindre alors 5%.

c) Pour conclure à propos de ce problème de dynamique, nous voulons faire une remarque au sujet d'un article de R. Singh et M. Schary [14].

3-3.3. Fiabilité de l'appareillage

Le filtrage de la pression p_0 par un filtre suiveur ne pose pas de problème (la largeur de bande choisie est de 3,16 Hz) et permet une bonne élimination du bruit de fond.

Malheureusement, nous ne disposons pas d'un deuxième filtre suiveur, et n'avons pas pu filtrer la pression p_1 : tant que celle-ci est suffisamment basse, la distorsion non linéaire due en particulier au haut-parleur n'est pas importante (moins de 0,01%) et la compression maintenant p_1 constante est parfaitement fiable. Par contre, il s'est produit, pour des tuyaux larges, que nous devons augmenter sensiblement p_1 et en conséquence la distorsion : une erreur supplémentaire sur les creux de 2 à 3% a alors pu être observée.

La compression de l'amplitude de la pression p_1 pose elle aussi quelques problèmes pour les basses fréquences : si on choisit une vitesse de compression (en dB par seconde) trop grande, le signal p_1 est alors fortement distordu. On doit choisir celle-ci suffisamment petite, ce qui impose une vitesse de balayage en fréquence très lente. Dans l'ensemble, il ne semble pas pourtant que les résultats aux basses fréquences soient moins bons que les autres.

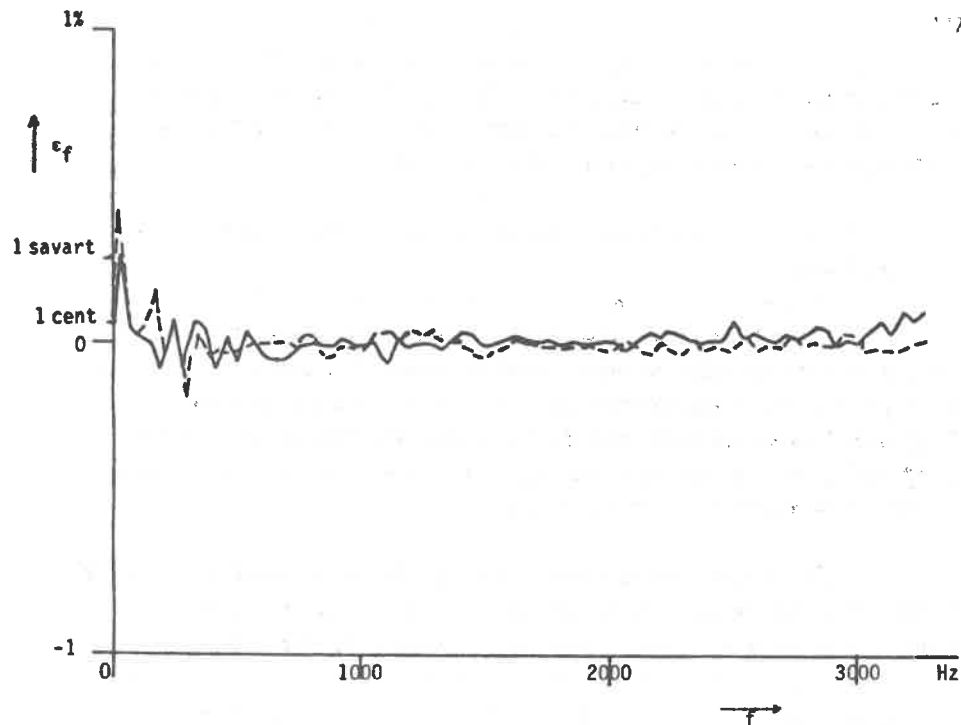
La fragilité du tube capillaire employé est telle qu'il suffit de déplacer quelque peu l'ensemble du dispositif pour le courber légèrement, et modifier ainsi ses caractéristiques. Ceci sans doute explique la reproductibilité imparfaite des résultats. La figure 20 montre deux courbes d'erreurs réalisées pour le même tuyau à quelques mois d'intervalle. C'est aussi la raison pour laquelle nous avons choisi de prendre une référence pour l'impédance propre à chaque tuyau (nous précisons chaque fois le rapport à celle du tuyau de référence).

3-3.4. Problèmes particuliers

Des mesures précises de niveau de pression imposent des précautions de diverses natures.

-le montage expérimental étant métallique, il convient d'isoler électriquement les microphones de celui-ci.

-un problème très sérieux est celui des vibrations mécaniques engendrées par le haut parleur sur les parties métalliques du montage.



Nous les avons réduites au minimum en enfermant le haut-parleur dans du plâtre, mais nous n'avons pas réussi à faire disparaître totalement certaines résonances, ce qui explique des erreurs anormalement fortes, surtout pour les minimums d'impédances, entre 600 Hz et 750 Hz et entre 1200 Hz et 1300 Hz. Si les intervalles de fréquence dans lesquels se produisent ces résonances sont invariables, par contre l'amplitude de celles-ci n'est pas reproductible : l'erreur peut varier de quelque pour cent à 30%. Nous avons donc là une limitation à la gamme de fréquences où notre expérience est satisfaisante (en utilisant un tuyau fermé à son extrémité, nous avons vérifié que ces erreurs se transmettaient bien du haut-parleur par les parties solides du montage, et ne venaient pas du son émis par le haut-parleur et entrant dans le tuyau par son extrémité ouverte).

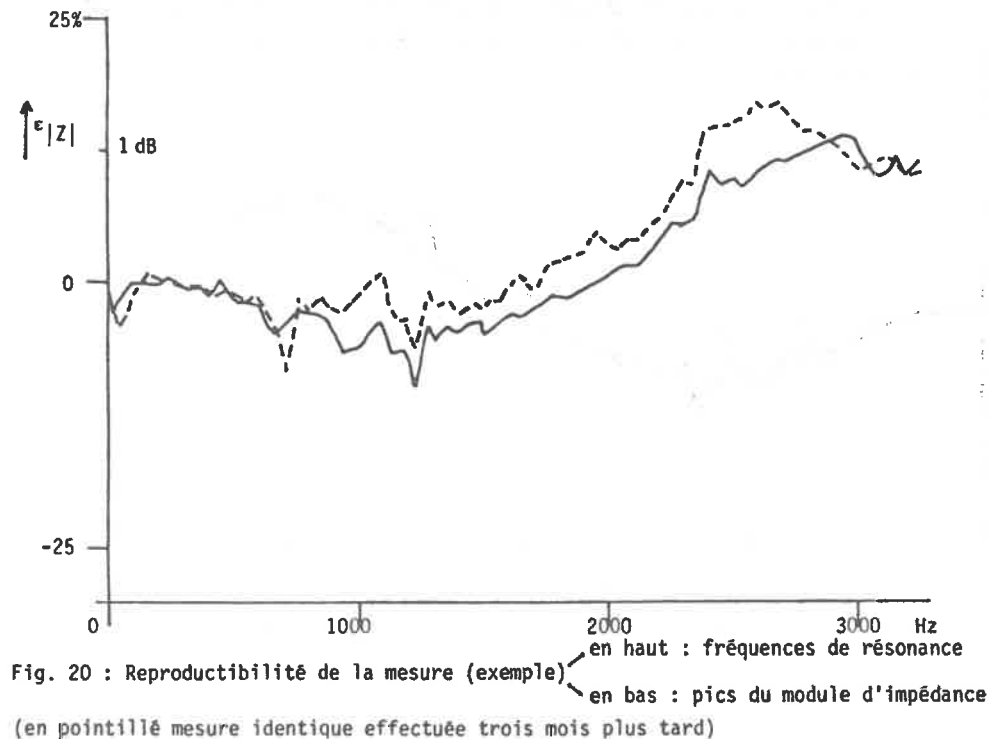
-l'étanchéité entre le tuyau et le dispositif expérimental est obtenue grâce à de la pâte à modeler. Au départ, nous avons utilisé des joints de caoutchouc, mais ceux-ci modifient légèrement la longueur du tuyau, ce qui est gênant pour la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques. Les conséquences pourraient être très importantes (jusqu'à 30% de la hauteur des pics), pour certains tuyaux dont la section varie fortement à l'entrée, comme les tuyaux muni d'embouchures. C'est ce que X. Lurton [6] avait mis en évidence tant expérimentalement que théoriquement.

-la mesure de la température doit être précise pour permettre une bonne comparaison avec la théorie. Nous l'avons mesurée à 0,1°C près, ce qui représente 0,017% sur la vitesse du son, et donc sur les fréquences de résonance. De plus, nous nous sommes assurés que la température ne variait ni dans le temps ni dans l'espace (le long du tuyau à mesurer) ; pour cela nous avons évité la présence d'ampoules électriques allumées dans la chambre sourde.

3-3.5. Le problème du tracé des courbes expérimentales

Pour le tracé des courbes à partir de l'analyseur Bruel et Kjaer 2120, nous avons utilisé un enregistreur 2307 ; nous nous sommes heurtés à trois problèmes. D'une part, la compression de la pression p_1 n'est pas toujours parfaite ; d'autre part, la réponse de l'enregistreur n'est pas absolument fidèle ; enfin, en échelle linéaire, l'enregistreur ne peut pas tracer les minimums les plus bas.

C'est pourquoi nous avons préféré lire les résultats sur l'échelle de l'analyseur, tout en compensant manuellement la compression quand la fréquence varie. La comparaison des résultats expérimentaux et théoriques s'est donc



faite à partir de résultats lus sur l'analyseur, et entrés comme données sur l'ordinateur, afin d'être traités. Si nous présentons quelques tracés de courbes expérimentales, c'est seulement pour montrer leur allure générale (par exemple Fig. 21)

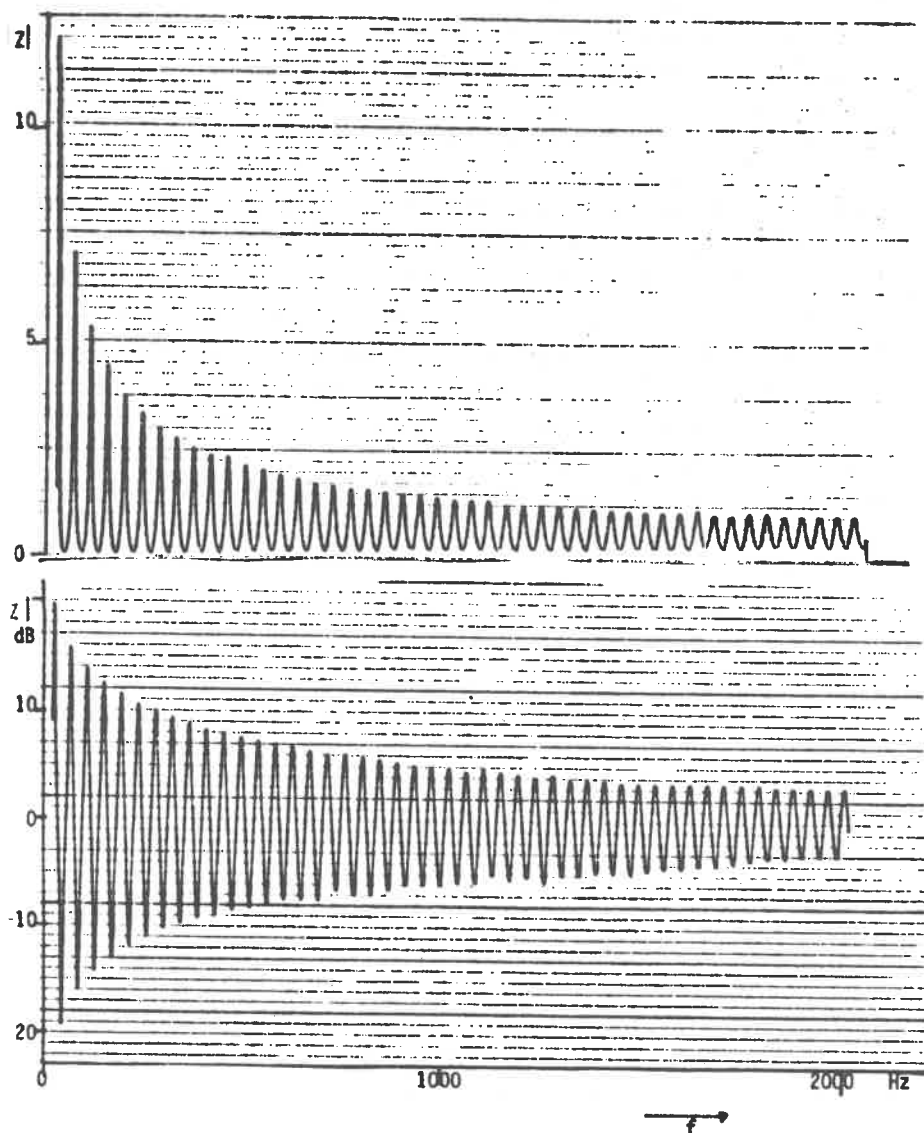


Fig.21 : tracé expérimental de la courbe d'impédance d'entrée du tuyau cylindrique-test (en haut, échelle linéaire; en bas, échelle logarithmique)

I.3.3.5.

L'erreur de lecture sur l'analyseur est de l'ordre à 1 à 2%. Quant à la précision de la fréquence indiquée par le générateur, elle est excellente dans l'aigu (de l'ordre de 0,002% vers 1000 Hz), et légèrement supérieure dans le grave (0,05% à 0,1% vers 20 Hz).

3-3.6. Les problèmes fondamentaux dus à l'utilisation d'un tube capillaire

Il est une erreur due à l'utilisation du tube capillaire qu'il est possible de corriger sans même connaître celui-ci. C'est celle dont nous avons parlé à propos des maximums (§3-1.2.), et qui est proportionnelle à $|p_0/p_1|$. Dans ce qui suit, nous partirons des résultats ainsi corrigés (L'affaiblissement minimal que nous avons rencontré étant de 20 dB, environ, la correction maximale a donc été de 10%).

Par contre, l'erreur due au fait que $|z \text{ sh } l|$ n'est pas constant en fréquence demande une connaissance des caractéristiques du capillaire. Comme nous avons renoncé à les connaître théoriquement, il est logique de nous demander si nous pouvons les déterminer expérimentalement. Or, quand on a analysé les diverses causes d'erreur, comme nous venons de le faire, on se rend compte qu'il reste une erreur systématique, reproductible d'un tuyau à l'autre, que nous avons schématisé en pointillé sur la figure 22. Il est à notre avis raisonnable de penser que cette erreur vient effectivement du tube capillaire.

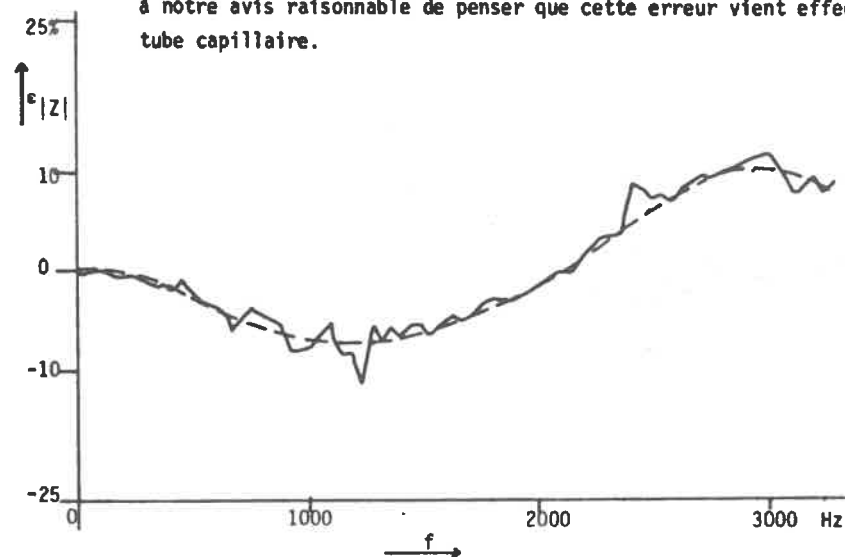


Fig. 22 : courbe de correction (en pointillé) de l'erreur due au capillaire

On peut trouver une confirmation qualitative de cette hypothèse : Backus [5] a calculé théoriquement l'écart en module entre la formule idéale (29 bis) et la formule complète (29) pour des tubes capillaires annulaires de différentes dimensions, toutes voisines de celles du tube que nous avons utilisé. Il obtient des écarts pouvant varier dans un sens ou un autre, et du même ordre de grandeur que ceux que nous avons obtenus. De plus, il calcule l'écart pour la phase, et obtient dans tous les cas une droite, c'est à dire un écart proportionnel à la fréquence. Or c'est exactement ce que nous avons obtenu : nous avons mesuré la différence de phase entre p_0 et p_1 pour les fréquences de résonance du tuyau (on sait que l'impédance d'entrée est alors réelle) et obtenu également une droite (Fig. 23).

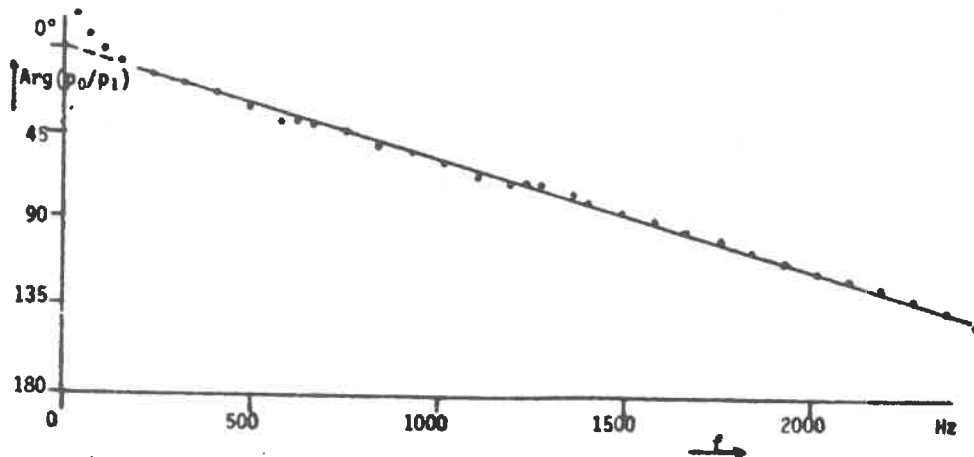


Fig. 23 : courbe de $\text{Arg}(p_0/p_1)$ (les points de mesure correspondent aux fréquences de résonance)

Nous avons conclu qu'il suffisait de corriger nos résultats expérimentaux par une fonction dont l'allure est celle de la courbe tracée en pointillé (Fig. 22). De fait, dans tous les cas, l'écart quadratique moyen a été sensiblement réduit. Pour le tuyau cylindrique de référence, il passe de 6,8% à 2,5% (76 valeurs de 20 à 3270 Hz) pour les pics, et de 8,7% à 4,1% (74 valeurs) pour les creux. Pour les pics d'un tuyau à cheminée, dont nous parlerons plus loin, il est passé de 4% à 3,4% ; pour les pics d'un cône, de 3,6% à 3% (entre 30 et 2050 Hz).

La fonction de correction a été choisie sous la forme d'un polynôme, fonction du carré de la fréquence : en effet un développement

limité de Z_v et r^2 (Cf. §3-1.2), quelle que soit la forme du capillaire, fait apparaître les puissances paires de k pour $\text{Re}(Z_v)$ et $\text{Im}(r^2)$ et les puissances impaires pour $\text{Im}(Z_v)$ et $\text{Re}(r^2)$; par conséquent un développement de $|p_0/p_1|$ ne fait intervenir que les puissances paires de k .

3-3.7. Conclusion

Les principales difficultés rencontrées ont été en définitive :

a) les résonances du haut-parleur, qui provoquent une erreur non reproductible. Entre 600 et 750 Hz et 1200 et 1300 Hz, on peut s'attendre, surtout pour les creux, à avoir des erreurs anormales.

Dans certains cas, où l'anomalie est manifeste, nous n'hésitons donc pas à faire abstraction de la fréquence correspondante pour les calculs statistiques d'erreur.

b) nous ne pouvons pas mesurer avec précision les impédances trop faibles. Dans la comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques, il nous arrivera pour certains tuyaux de ne pas faire mention des creux, car les résultats correspondants n'apporteraient rien de plus pour la compréhension. Dans tous les cas, ils confirment mais de manière moins précise, les résultats obtenus pour les pics.

c) la position de la sortie du capillaire et du microphone n°0 peut entraîner des erreurs non négligeables principalement sur les fréquences correspondant aux minimums d'impédance. Nous avons empiriquement choisi cette position pour réduire au mieux ces erreurs.

En définitive, la méthode expérimentale peut tout de même être considérée comme satisfaisante entre 15 et 3200 Hz. La reproductibilité est comparable à l'écart quadratique moyen (après correction des erreurs dues au capillaire) : l'incertitude expérimentale sur le module de l'impédance est donc de l'ordre de 2,5% pour les pics, et de 4,5% pour les creux, mises à part les exceptions que nous avons traitées plus haut (Pour nombre de tuyaux, nous n'avons pas dépassé la fréquence 2000 Hz ; ces chiffres se ramènent alors respectivement à 1,5% et 2,5%). Quant à l'incertitude sur les fréquences, on peut raisonnablement l'estimer à 0,03%, et légèrement plus au-dessous de 200 Hz (0,06%).

Si l'on se contente de résultats bruts, non corrigés, l'incertitude expérimentale est de l'ordre de 2,5% pour les pics et 4,5% pour les creux jusqu'à 2000 Hz ; de 2000 à 3000 Hz, elle passe à environ 10%.

3-4. COMPARAISON ENTRE RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

3-4.1. Le tuyau cylindrique

Nous voulons tirer ici un certain nombre de conclusions théoriques de l'étude du tuyau de référence.

a) En ce qui concerne l'erreur sur les fréquences de résonance, nous avons constaté, comme le confirme la figure 5, un écart quadratique moyen de 0,04% entre 20 et 3200 Hz pour les pics, et de 0,07% pour les creux. On peut noter une erreur nettement supérieure dans le grave, jusqu'à 400 Hz, que nous attribuons au procédé expérimental pour l'essentiel ; mais il est vraisemblable que l'incertitude sur la valeur de l'amortissement, qui est de 1,8% (cf. § 3-2.6.), entre aussi en jeu : en effet à 20 Hz, l'amortissement baisse la fréquence de résonance de 5,4%, à 100 Hz de 2,4 %, l'incertitude est donc d'au moins 0,09% sur le premier pic, ce qui est certes très faible, mais non négligeable.

Quant à l'erreur (algébrique) moyenne, nous l'avons trouvée, suivant les mesures, comprise entre -0,015% et + 0,01%. Il y a donc lieu d'être satisfait de la mesure de la température, de la connaissance de la célérité du son, et également de la mesure de la longueur du tuyau (pour cette dernière, 0,015% sur la fréquence correspond à une erreur de 0,6 mm sur la longueur totale du tuyau).

Nous rappelons au passage que le demi-ton représente 5,95%, le savart (1/25e de demi-ton) 0,23%, et le cent 0,06%.

b) Quant à l'erreur sur l'impédance, nous avons dit que l'écart quadratique moyen était de 2,5% sur les pics (après corrections) et de 4,5% sur les creux (une fois éliminée la fréquence 734,7 Hz, pour laquelle l'erreur est de 30%, due aux vibrations transmises par le haut-parleur).

La mesure étant relative, l'erreur algébrique moyenne n'a pas d'intérêt particulier ; toutefois, le rapport entre la moyenne des pics

et la moyenne des creux doit permettre d'estimer la valeur du carré du coefficient d'amortissement. En effet, l'influence d'une erreur ϵ sur l'amortissement peut être négligée sur le deuxième ordre de celui-ci, et le rapport des pics aux creux est donc multiplié approximativement par $(1+\epsilon)/(1/1+\epsilon)=1+2\epsilon$. L'incertitude sur ce rapport est donc de 3,6% ; or la différence des erreurs moyennes sur les pics et les creux varie suivant les mesures de + 1,5% à + 3%. La valeur théorique de l'amortissement global, somme des amortissements visqueux et thermiques (cf. § 3-2.6.) est finalement très satisfaisante. On peut noter que bien entendu nos résultats ne permettent pas de mesurer séparément les deux amortissements. Par contre, l'hypothèse selon laquelle les parois du tuyau (en matière plastique PVC sont parfaitement réfléchissantes est bien vérifiée).

c) A titre de comparaison, voici les résultats obtenus sur un tuyau cylindrique plus large et plus court ($\ell = 1,2665$ m ; $r = 11,7$ mm) : l'écart quadratique moyen sur les fréquences de résonance (37 pics et creux) est de 0,08% et l'erreur moyenne de 0,006%. L'écart quadratique sur les pics (24 valeurs de 66 Hz à 3227 Hz) est de 5% ; pour les creux, deux valeurs n'ont pu être mesurées, parce que trop faibles, et deux autres à cause des vibrations dues au haut-parleur, l'écart quadratique moyen (11 valeurs de 133 Hz à 2015 Hz) est de 18%.

3-4.2. Le tuyau à cheminée axiale

Nous avons mesuré trois tuyaux cylindriques à cheminée axiale : les trois cheminées ont pour longueur 0,4 m, et pour rayon respectivement 5 mm, 3 mm et 2 mm. Le tuyau principal est le même pour les trois cheminées : $\ell = 1,26$ mm et $r = 11,7$ mm.

En étudiant des tuyaux à cheminée, nous visons un triple objectif : étudier des courbes d'impédance très irrégulières en choisissant un système très simple ; étudier la validité de l'approximation unidimensionnelle et des corrections proposées au premier chapitre (§ 4-1) ; enfin, pouvoir mesurer un tuyau très étroit sans être gêné par la taille du microphone, afin de vérifier les formules de l'amortissement au second ordre.

Les figures 24 et 25 montrent pour deux des tuyaux mesurés, le bon accord qualitatif entre les résultats expérimentaux et théoriques (rappelons

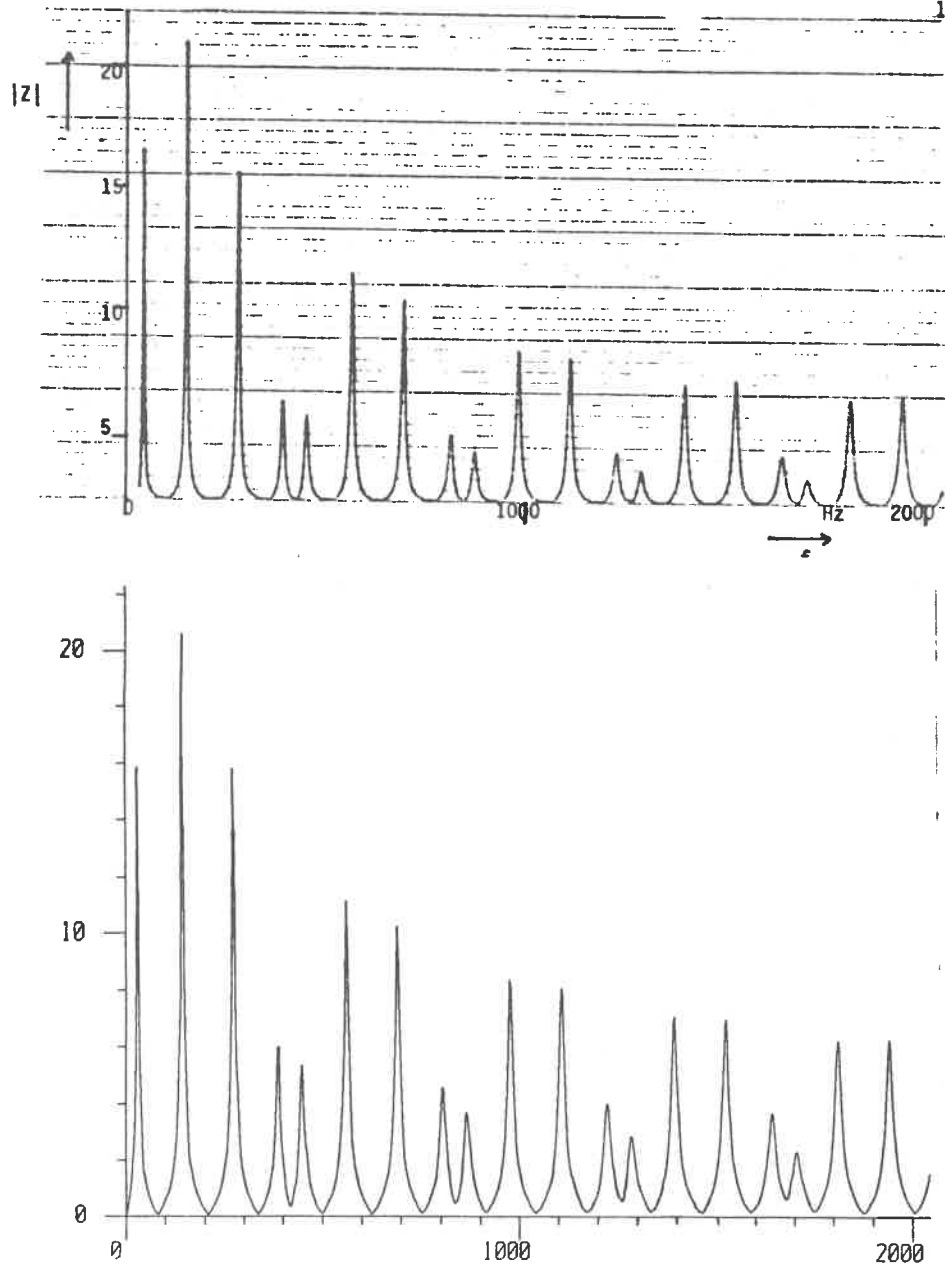


Fig.24 : impédance d'entrée d'un tuyau à cheminée (en haut, résultat expérimental; en bas, résultat théorique) (rayon de la cheminée: 5mm)

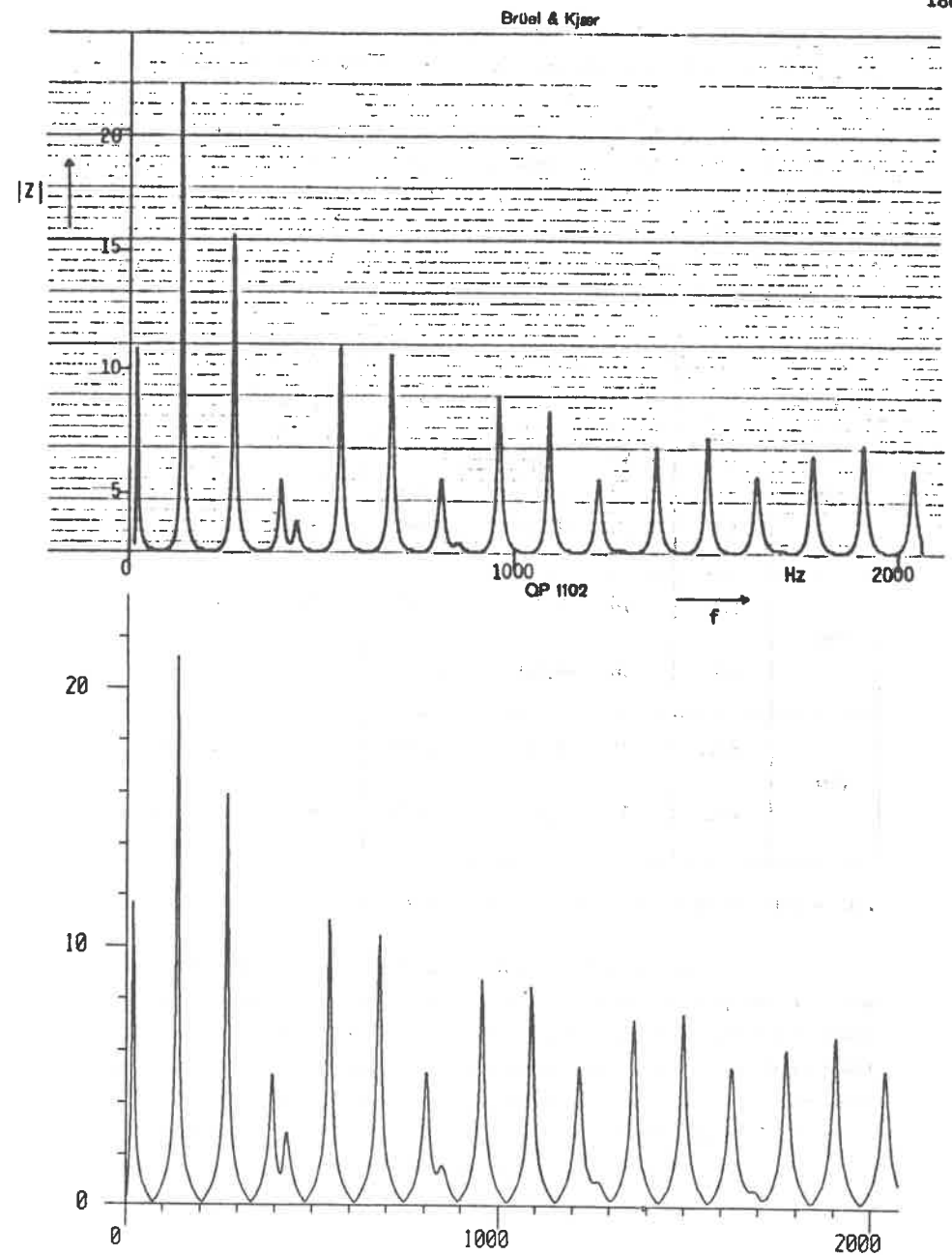


Fig.25: impédance d'entrée d'un tuyau à cheminée (en haut, résultat expérimental; en bas, résultat théorique) (rayon de la cheminée: 3mm)

que ce n'est pas à partir du tracé des courbes que nous avons relevé les résultats expérimentaux, mais par lecture sur l'échelle de l'analyseur).

Dans ce qui suit, les résultats présentés concernent les pics, mais les conclusions sont les mêmes pour les creux. Nous voulons dans un premier temps étudier l'influence des corrections à la théorie unidimensionnelle : voici les résultats, avec et sans correction, concernant l'erreur moyenne ϵ et l'écart quadratique moyen σ sur les fréquences de résonance et l'impédance (cf. Tableau ci-dessous) :

Rayon de la cheminée		FREQUENCE			IMPEDANCE		
		n	$\epsilon(\%)$	$\sigma(\%)$	n	$\epsilon(\%)$	$\sigma(\%)$
5mm	s.c.	19	-0,108	0,151	19	-2,3	6,8
	a.c.	19	-0,011	0,094	19	-2,8	4,7
3mm	s.c.	18	-0,057	0,146	19	0,56	5,2
	a.c.	18	+0,016	0,103	19	0,04	4,5
2mm	s.c.	15	0,013	0,093	16	-1,32	4,0
	a.c.	15	0,023	0,083	16	-0,37	3,4

s.c. = sans correction ; a.c. = avec correction ; n = nombre de résultats

On remarque que l'introduction de la correction diminue sensiblement l'écart quadratique moyen sur les fréquences, et également sur l'impédance. En fait, cette constatation n'est pas suffisante car on peut toujours imaginer qu'une erreur expérimentale vienne masquer l'effet de cette correction. Par contre, si l'on observe les courbes présentées par les figures 26 et 27, la nécessité de la correction ne fait alors plus de doute, surtout pour les fréquences de résonance. On peut noter qu'elle entraîne une correction périodique en fréquence, dont la période est celle des résonances de la cheminée. Cette remarque est évidente si l'on considère la formule (18 bis) du premier chapitre (les indices 1 et 2 désignent respectivement le tuyau principal et la cheminée au raccordement).

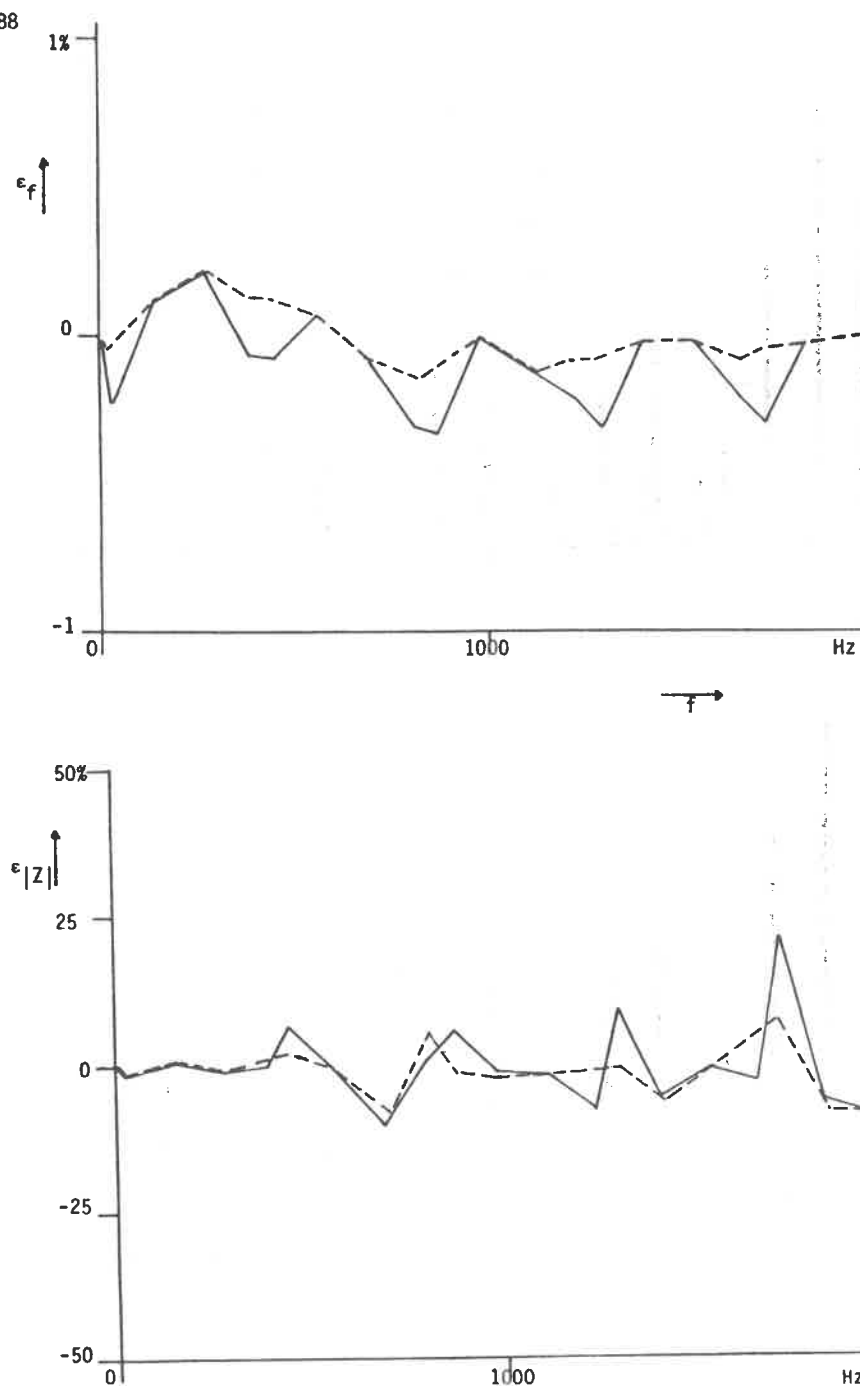


Fig. 26: courbes d'erreur pour un tuyau à cheminée (rayon 5mm) :

--- avec correction
— sans correction

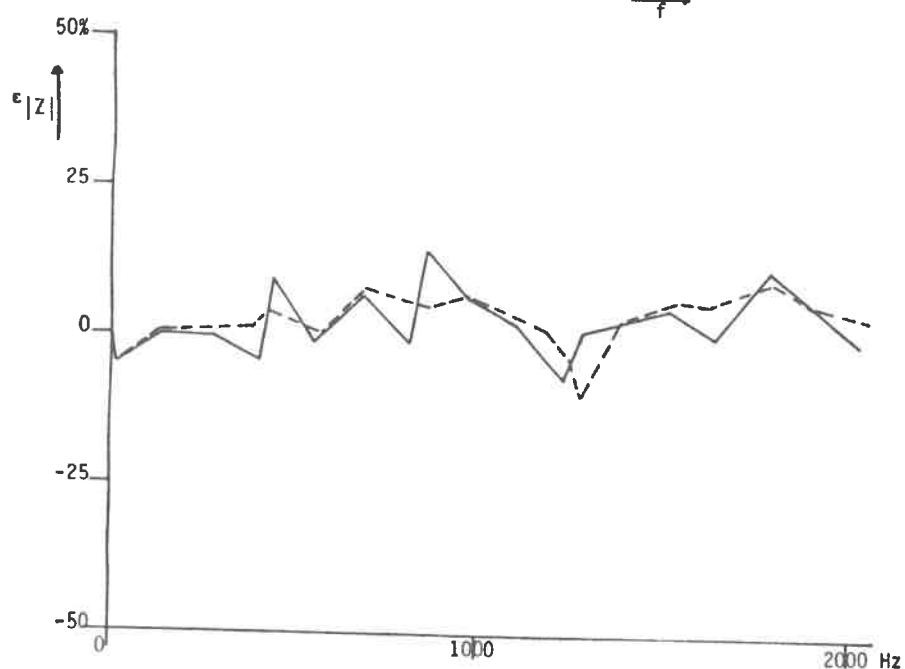
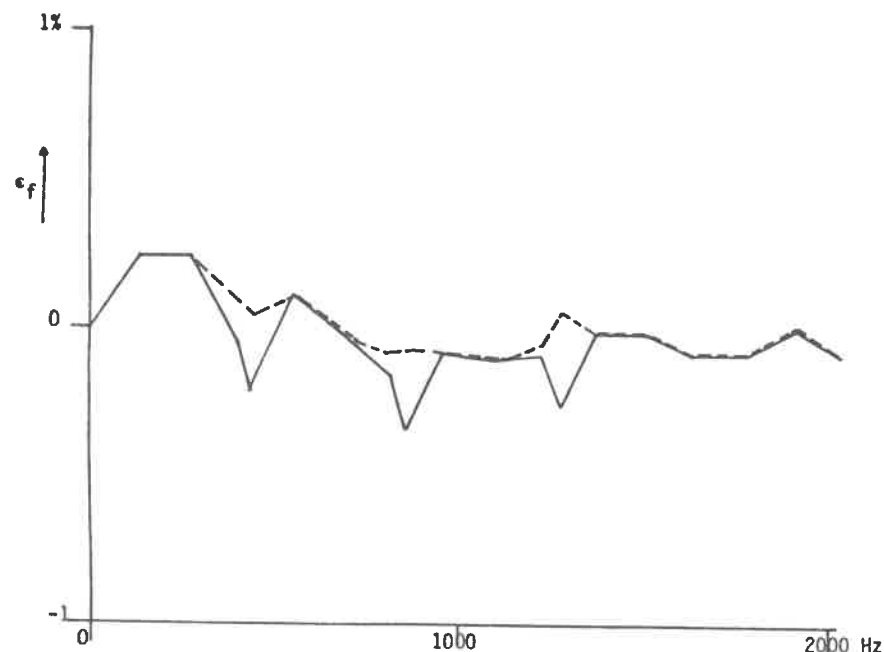


Fig. 27: courbes d'erreur pour un tuyau à cheminée (rayon 3mm) :
 - - - avec correction
 — sans correction

$$Z_1 = \frac{S_1}{S_0} (Z_2 + j\rho c \frac{8}{3\pi} kR_2 H(\frac{R_2}{R_1}))$$

La correction n'a pas d'influence si Z_2 est trop grand, c'est à dire pour : $f = \frac{c}{4\ell}$, $\frac{3c}{4\ell}$, ..., où ℓ est la longueur de la cheminée, soit, dans le cas présent $f \approx 213$ Hz, 640 Hz, ... Au contraire elle a une influence maximale si $f = \frac{c}{2\ell}$, $\frac{c}{\ell}$, $\frac{3c}{2\ell}$..., soit 427 Hz, 854 Hz, ...

Il peut paraître paradoxal que l'influence de la correction semble d'autant plus importante que la cheminée est large, donc la discontinuité faible. En fait, si la fonction $H(\frac{R_2}{R_1})$ est bien monotone décroissante de 1 à 0, la fonction $R_2 H(\frac{R_2}{R_1})$ a l'allure que montre la figure 28. Il est au demeurant clair que si le tuyau principal est fermé ($R_2 = 0$), il ne peut y avoir de création de modes non plan.

Un calcul élémentaire montre que pour les fréquences auxquelles la correction en fréquence est maximale, celle-ci a une valeur correspondant à un allongement de la cheminée constant et égal à $\frac{8}{3\pi} R_2 H(\frac{R_2}{R_1})$.

La correction due aux modes évanescents n'est par conséquent pas négligeable. Toutefois, on voit qu'elle n'est pas non plus très importante : la théorie unidimensionnelle rend très bien compte des fortes irrégularités que présentent les fréquences de résonance et les extremums d'impédance d'un tuyau à cheminée. Ceci nous semble légitimer l'approximation unidimensionnelle en général et par conséquent l'équation des pavillons.

Enfin, nous voulions vérifier la validité du développement asymptotique de l'amortissement au second ordre ; le tableau ci-dessous démontre celle-ci sans conteste d'une manière significative :

	FREQUENCE	erreur expérience/ théorie 2e ordre	erreur expérience/ théorie 1er ordre
Tuyau cheminée étroite ($r = 2$ mm)	11,2 Hz 135,7 Hz (référence)	- 5,5% 0%	- 28,6% - 1,6%
Tuyau cheminée moyenne ($r = 3$ mm)	17,5 Hz 136,5 Hz (référence)	- 6,2% 0%	-20,2% - 1,7%
Tuyau cheminée large ($r = 5$ mm)	28,8 Hz 141,7 Hz (référence)	- 2,7% 0%	- 9,2% - 1,4%
Cylindre long de référence ($r = 6,67$ mm)	20,7 Hz 106,2 Hz (référence)	0,5% 0%	-3,8% -1,5%

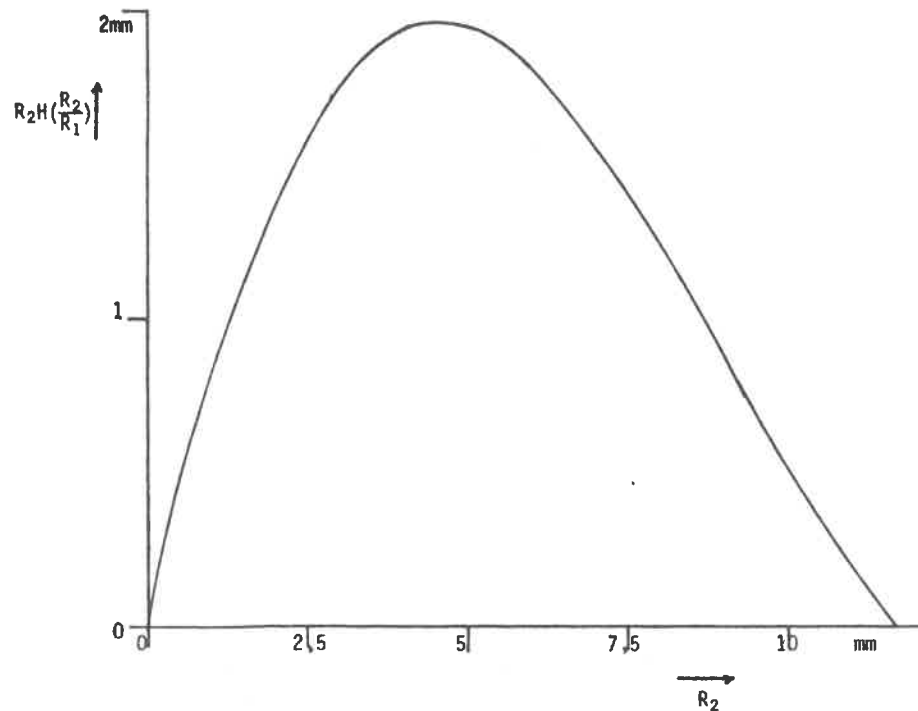


Fig. 28 : fonction correction pour un tuyau à cheminée

Tableau 2 : résultats pour un tronc de cône

CONE FERMÉ 2.11.1980

1	0	2.0000	0.0000	0.5511	0.0200	0.02390	0.02480	0
2	0	2.0000	0.0000	0.1485	0.5230	0.00720	0.02390	50
	f_{th}	f_{exp}	$e_f(\%)$	$ Z _{th}$	$ Z _{th}/T$	$ Z _{exp}$	$e Z $	
	90.266	-90.000	-0.29	0.6124E-02	0.2472E-02	0.0000E+00	+++++	
	353.724	351.300	-0.69	0.3031E+02	0.1223E+02	0.1120E+02	0.70	
	455.642	451.000	-0.30	0.2312E-01	0.9330E-02	0.1000E-01	0.30	
	652.983	652.700	-0.04	0.2922E+02	0.1179E+02	0.1030E+02	-2.73	
	170.090	170.100	0.10	0.3110E-01	0.1250E-01	0.0900E-02	-20.31	
	960.019	962.000	0.21	0.2017E+02	0.1050E+02	0.9080E+01	-3.29	
	1094.491	1100.400	0.51	0.3731E-01	0.1500E-01	0.1030E-01	12.19	
	1271.007	1270.200	-0.12	0.2354E+02	0.9500E+01	0.0440E+01	-0.41	
	1411.077	1420.200	0.65	0.4251E-01	0.1710E-01	0.1580E-01	-2.09	
	1584.296	1582.800	-0.09	0.2145E+02	0.8658E+01	0.7050E+01	-1.04	
	1727.199	1735.200	0.46	0.4710E-01	0.1901E-01	0.1720E-01	-0.75	
	1897.199	1896.600	-0.06	0.1979E+02	0.7988E+01	0.7470E+01	-1.07	
	2043.104	2053.000	0.48	0.5126E-01	0.2069E-01	0.2280E-01	5.13	

CONE OUVERT

1	0	2.0000	0.0000	0.5511	0.0200	0.02390	0.02480	0
2	0	2.0000	0.0000	0.1485	0.5230	0.00720	0.02390	50
	230.959	230.000	-0.42	0.2301E+02	0.8912E+01	0.8350E+01	0.30	
	305.562	308.400	0.93	0.2332E-01	0.9030E-02	0.1250E-01	38.95	
	502.303	500.600	-0.34	0.2058E+02	0.7969E+01	0.7000E+01	2.45	
	512.243	615.800	0.58	0.4607E-01	0.1784E-01	0.9800E-02	-43.15	
	794.331	796.000	0.21	0.1448E+02	0.5610E+01	0.5550E+01	0.08	
	919.470	921.400	0.21	0.7406E-01	0.2868E-01	0.3520E-01	20.43	
	1094.163	1097.000	0.26	0.1027E+02	0.3970E+01	0.4000E+01	0.15	
	1227.243	1243.800	1.35	0.1072E+00	0.4152E-01	0.2640E-01	-31.44	
	1397.515	1396.800	-0.05	0.7002E+01	0.2944E+01	0.2910E+01	0.06	
	1535.479	1546.100	0.69	0.1449E+00	0.5610E-01	0.3500E-01	-33.04	
	1702.832	1703.800	0.06	0.5875E+01	0.2275E+01	0.2170E+01	0.08	
	1844.152	1854.200	0.54	0.1863E+00	0.7215E-01	0.8000E-01	11.83	
	2009.404	2011.600	0.11	0.4707E+01	0.1823E+01	0.1970E+01	0.39	

3-4.3. Le cône

Pour des raisons pratiques, il est difficile de disposer de tronc de cônes pour en effectuer l'étude ; par chance la maison Selmer a bien voulu nous donner des corps (sans trous latéraux) de saxophone soprano. C'est donc l'un d'entre eux que nous avons mesuré ; il n'est pas tout à fait régulier, sa conicité étant plus forte vers le pavillon : ses rayons d'entrée et de sortie sont de 7,2 mm et 24,8 mm, et sa longueur 0,543 mm.

Le tableau 2 montre les résultats pour le cône fermé (par un bouchon plan). Le premier minimum n'a pas été accessible à la mesure, car il est à 74 dB au dessous du premier maximum. L'erreur sur les fréquences est sensiblement plus grande que pour les tuyaux cylindriques : pour 13 résultats, elle est en moyenne de 0,12% et l'écart quadratique moyen de 0,36%. Par contre, les résultats concernant l'impédance sont beaucoup plus satisfaisants : l'écart quadratique moyen sur les pics (6 valeurs) est de 1,4% , sur les creux (5 valeurs) de 7,2%, et l'erreur moyenne respectivement de -1,4% et 3,4% (l'un des creux, à 774 Hz, manifestement anormal, a été écarté de la moyenne).

Le même cône, ouvert, montre des erreurs sur les fréquences du même ordre de grandeur (cf. tableau 3). L'écart quadratique moyen sur les pics d'impédance est de 3,6% (7 valeurs), mais il est beaucoup plus important sur les creux : 33%. Ceci confirme que les problèmes de dynamique sont plus sérieux pour les tuyaux ouverts.

On peut toutefois considérer que, en ce qui concerne les pics, les résultats sont très satisfaisants. Seul le premier pic accuse une erreur anormale ; mais on peut remarquer que l'erreur sur les fréquences tend à diminuer quand la fréquence augmente. Il est raisonnable d'en déduire que cette divergence entre théorie et expérience ne provient pas de l'approximation unidimensionnelle (d'autant plus que le calcul en ondes sphériques diffère très peu de celui en ondes planes, même à 2000 Hz). Il est vraisemblable que la mesure des dimensions géométriques est en cause, surtout près de la petite extrémité, dont on a vu le caractère très critique (la section n'est pas parfaitement circulaire).

3-4.4. Les pavillons

Les pavillons d'instruments à embouchure très évasés, ont déjà donné lieu à une confrontation entre des résultats expérimentaux et des résultats théoriques basés d'une part sur l'approximation des ondes planes, d'autre part sur l'approximation des ondes sphériques. Benade et Jansson [3] ont ainsi étudié les pavillons d'un trombone, d'un cor et d'une trompette. Leur objectif est la détermination du coefficient de réflexion à l'entrée de ces pavillons pour un nombre suffisant de fréquences. Comme les résonances du pavillon seul sont peu nombreuses, ils préfèrent rallonger celui-ci par un tuyau cylindrique ; puis supposant suffisamment connue la propagation dans ce dernier, ils "ramènent" le résultat obtenu à l'entrée du pavillon.

Nous avons repris cette démarche pour un pavillon de trombone. Nous nous sommes donc intéressé successivement :

- aux fréquences de résonance et aux extremums du module de l'impédance pour l'ensemble pavillon plus tuyau cylindrique ($\ell = 1,5$ m ; $r = 7,5$ mm) ;
- au coefficient de réflexion à l'entrée du pavillon : nous mesurons les pics du module de l'impédance d'entrée de l'ensemble pavillon plus cylindre ; comme on sait que pour les extremums, l'impédance est réelle, on connaît le module et l'argument de cette impédance, et on peut ramener celle-ci le long du tuyau cylindrique pour obtenir l'impédance d'entrée Z' du pavillon. On en tire le coefficient de réflexion par $R = |(Z' - 1)/(Z' + 1)|$;
- enfin aux pics fictifs que présenterait le pavillon seul s'il résonait pour les fréquences de résonance de l'ensemble, obtenus par $Z = (1 + R)/(1 - R)$. Ces pics fictifs sont intéressants à notre avis, car la connaissance de l'erreur sur le coefficient de réflexion n'est pas entièrement satisfaisante : elle ne constitue pas une bonne estimation de l'erreur sur les échanges d'énergie. En effet, si par exemple on calcule l'erreur entre 0,98 et 0,96 , on obtient 2% ; mais si on avait calculé l'erreur sur le coefficient de transmission ou sur les pics fictifs, on aurait obtenu respectivement 40% et 50% d'erreur !

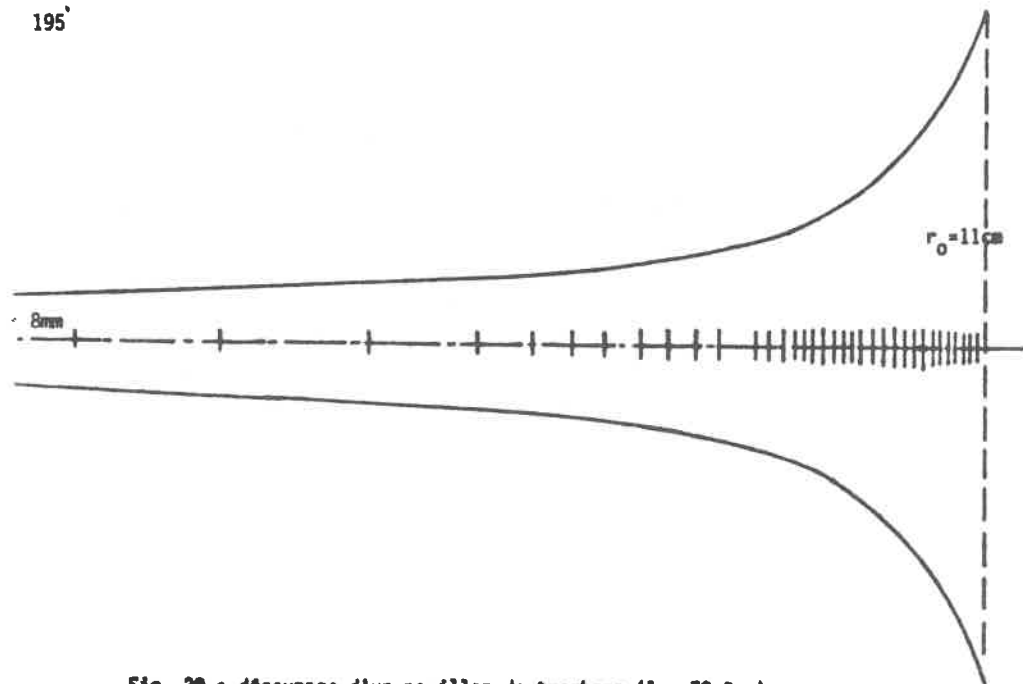


Fig. 29 : découpage d'un pavillon de trombone ($l = 78,3\text{cm}$)

Il est à préciser que nous n'avons pas utilisé une formule approchée pour les dimensions du pavillon (du type puissance de x), mais un tracé exact point par point (cf. Fig. 29). D'autre part, le calcul théorique a été effectué à partir de la formule de rayonnement de Levine et Schwinger ; nous avons essayé celle de Rayleigh, à titre de curiosité puisqu'elle est a priori encore moins bien adaptée à notre problème, et effectivement les résultats sont très nettement moins bons, surtout pour les valeurs de l'impédance. Le domaine de fréquence où il existe des extremums significatifs ne dépasse pas 1000 Hz ; donc à la sortie $kr < 2$ ce qui permet d'utiliser la formule de Levine et Schwinger.

Enfin, nous n'avons effectué de calculs d'erreurs que pour les pics d'impédance, car la valeur expérimentale des creux est beaucoup moins satisfaisante.

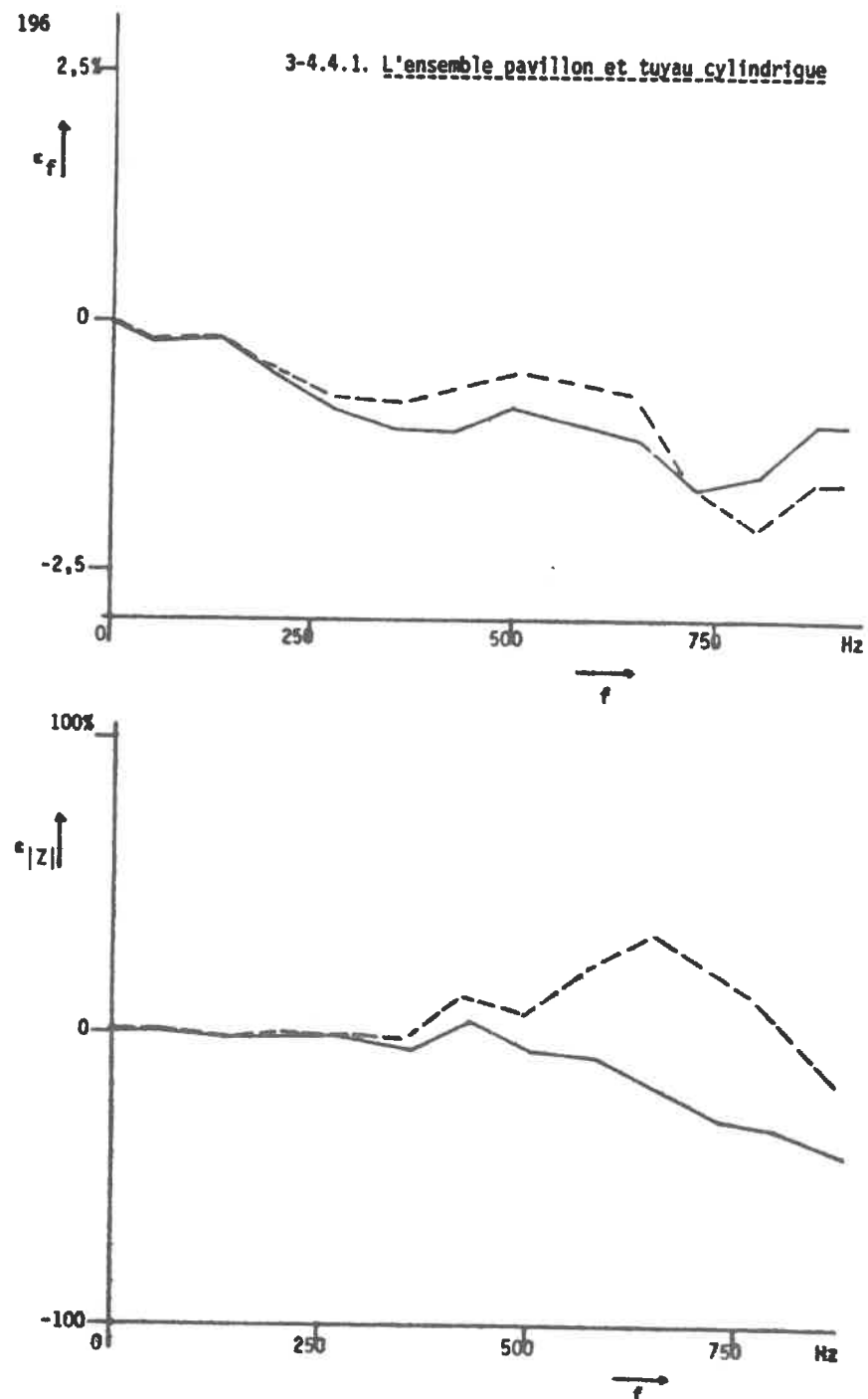


Fig. 30 : erreur pour l'ensemble pavillon de trombone + tuyau cylindrique
(--- ondes sphériques ; — ondes planes)

a) La figure 30 montre les erreurs obtenues pour chacune des deux approximations (ondes planes et ondes sphériques). On voit que les deux approximations surestiment les fréquences de résonance : on pouvait s'y attendre, puisque l'intervention de modes autres que le mode 0 agit, comme pour le tuyau à cheminée, dans le sens d'un allongement. D'autre part les résultats calculés en ondes sphériques sont nettement meilleurs que ceux calculés en ondes planes, au moins jusqu'à 700 Hz. Au delà, c'est apparemment l'inverse ; en fait, les résultats sont alors vraiment mauvais, puisque l'erreur est de l'ordre de 2%.

Il est raisonnable de conclure qu'au delà de 700 Hz, les approximations unidimensionnelles perdent leur sens. On peut noter à ce sujet que la limite calculée grossièrement au chapitre I (§ 5-3.2.) est pour ce pavillon ($R_0 = 110$ mm, $\alpha = -0,698$, $x_0 = 0,0177$ m ; $l = 0,5$ m) de 785 Hz : pour que les erreurs soient négligeables, la fréquence doit être très inférieure à cette limite.

b) Quant à l'erreur sur les maximums d'impédance, on voit qu'il y a coïncidence entre les résultats jusqu'à environ 500 Hz ($\epsilon < 3\%$) ; au-delà les calculs en ondes sphériques et en ondes planes encadrent le résultat expérimental. L'approximation des ondes sphériques sous-estime les pics, cela signifie qu'elle surestime l'énergie transmise par le pavillon, ou sous-estime les réflexions (autrement dit les discontinuités que représentent les variations de section du pavillon). La constatation est à inverser pour les ondes planes.

Ce résultat rejoint donc pleinement celui de Benade et Jansson, et confirme que les surfaces équiphasées pour un pavillon de Bessel doivent être comprises entre des plans et des sphères.

Globalement nous avons trouvé pour 12 valeurs (entre 46 Hz et 900 Hz) un écart quadratique moyen, égal pour les ondes planes et les ondes sphériques, de 14%.

3-4.4.2. Le coefficient de réflexion sur l'entrée du pavillon

La figure 31 montre les résultats obtenus pour le coefficient de réflexion sur l'entrée du pavillon : résultats expérimentaux ramenés à l'entrée du pavillon, résultats théoriques en ondes planes et en ondes

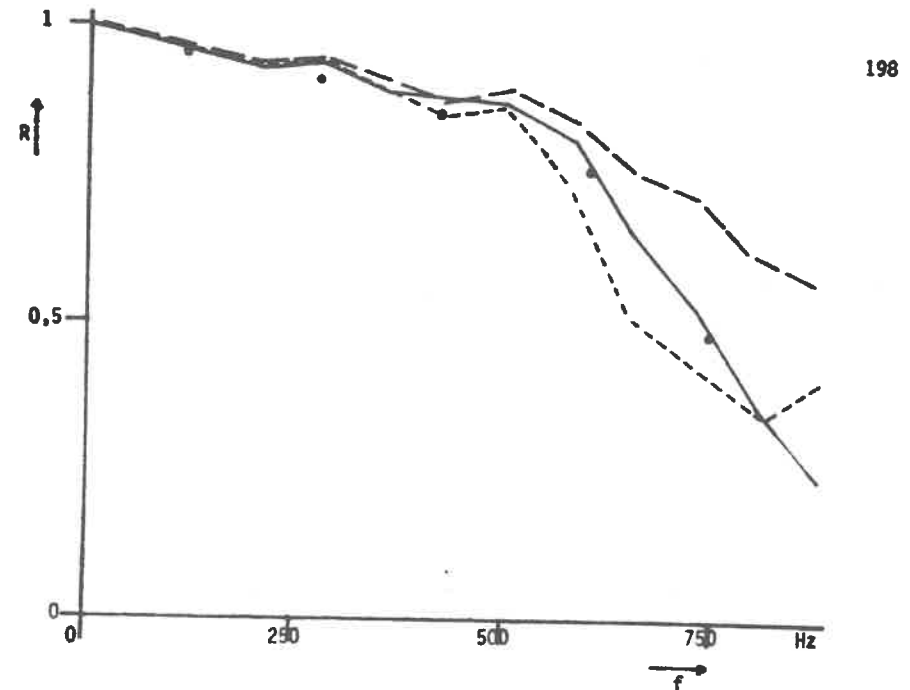


Fig. 31 : coefficient de réflexion à l'entrée du pavillon

— expérimental (ramené à la sortie du cylindre)
 --- théorique (ondes planes)
 ... théorique (ondes sphériques)
 ... expérimental (mesure directe sans cylindre)

Résultats de Benade et Jansson →

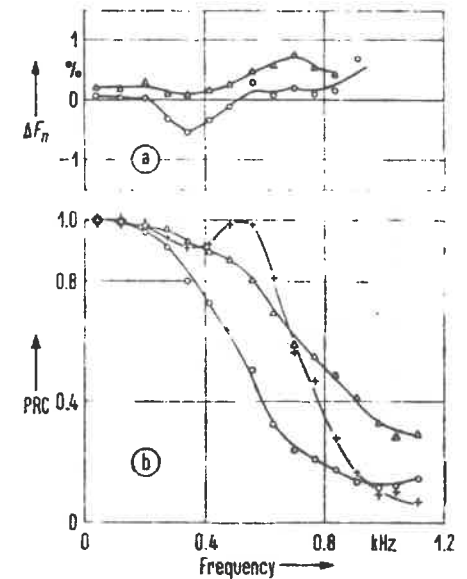


Fig. 7. Trombone bell plus tube.

(a) Deviations between theoretical calculated frequencies and measured frequencies,
 (b) Power reflection coefficients calculated from measurements and theoretical assumptions.

+ — + Measurements,
 Δ — Δ plane waves and
 $\circ$ — $\circ$ spherical waves.

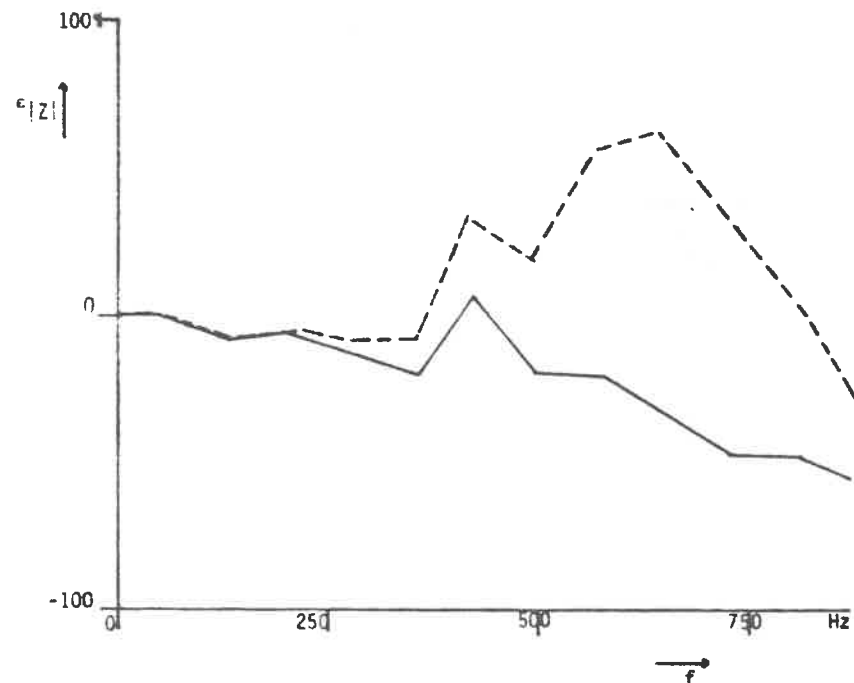
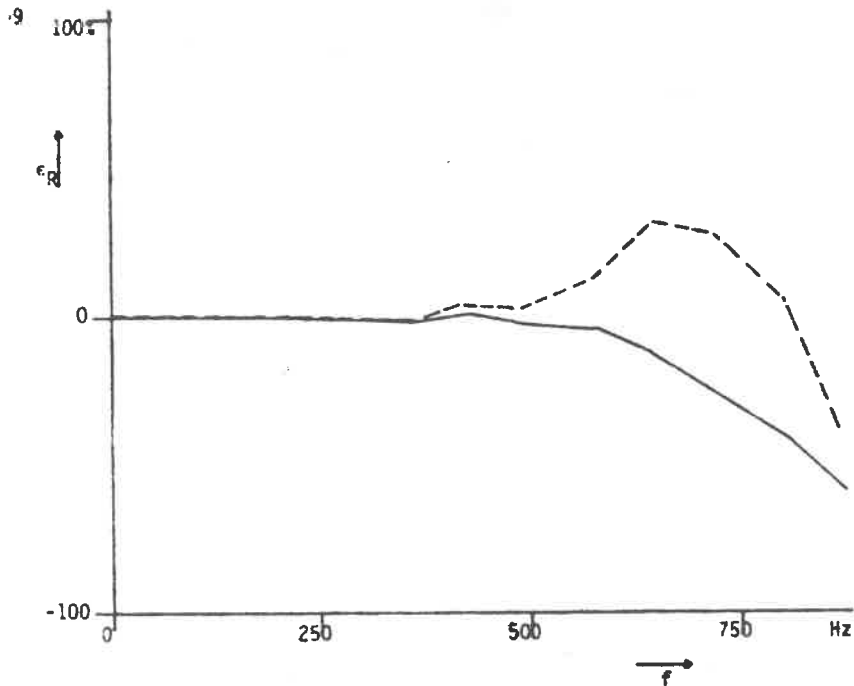


Fig.32 : courbe d'erreur pour un pavillon de trombone ; en bas, pics fictifs Z ; en haut, coefficient de réflexion R . — ondes planes , - - - ondes sphériques

sphériques (les points représentent les résultats expérimentaux mesurés directement à l'entrée du pavillon).

Au-dessous, nous avons reproduit à titre de comparaison les résultats de Benade et Jansson dans le même domaine de fréquence. Nous avons discuté la façon dont ils ont été calculés (cf. chapitre I § 5-3.2.) mais en tout état de cause, le pavillon mesuré est très différent du nôtre, car beaucoup plus long.

Pour compléter la figure 31, la figure 32 présente l'erreur sur le coefficient de réflexion. Mais plus intéressante est l'autre courbe, 32b, figurant l'erreur sur les "pics fictifs" à l'entrée du pavillon : on y trouve des résultats significatifs, notamment dans les basses fréquences. L'erreur correspondant au calcul en ondes planes se situe sur une droite, si l'on fait abstraction d'un point isolé ; par contre, l'erreur correspondant au calcul en ondes sphériques a une forme tout à fait différente.

Nous trouvons ces résultats significatifs, car ils démontrent que les deux modèles théoriques sont très insuffisants : l'erreur peut atteindre 50%, soit près de 6dB.

Précisons enfin que les mêmes procédés de calcul et de mesure ont été appliqués à un pavillon de petit trombone (alto) : toutes les conclusions sont identiques mais la fréquence au-dessous de laquelle les résultats sont intéressants est de 1100 Hz.

3-5. CONCLUSION

La confrontation des méthodes expérimentale et théorique nous permet d'aboutir aux conclusions suivantes pour chacune d'elles :

a) La méthode indirecte de mesure de l'impédance d'entrée donne des résultats satisfaisants tant sur les fréquences de résonance que sur la valeur des maximums du module de l'impédance. La lecture brute des résultats, c'est-à-dire sans correction, permet une mesure de l'impédance à moins d'un décibel près et des fréquences de résonance à moins de 0,1% près. L'asservissement de la pression d'entrée du capillaire évitant un traitement numérique des grandeurs mesurées, celles-ci peuvent être mesurées très rapidement avec une bonne précision.

Si l'on souhaite obtenir une précision supplémentaire sur l'impédance, quelques corrections sont à apporter qui réduisent l'incertitude à 2,5% pour les pics et 4,5% pour les creux.

L'inconvénient du caractère relatif de cette méthode est pour l'essentiel annulé par le choix judicieux du test, celui-ci fournissant un étalonnage fiable. Nous avons précisé que nous choisissons pour chaque tuyau une référence différente ; mais si l'on ne connaît pas de résultats théoriques, on doit s'en remettre à la référence du test. Qu'en est-il donc quand on passe d'un tuyau à l'autre ? Une comparaison des différentes références peut être faite en remarquant que, d'après la formule (29bis) $|p_0/p_1|$ doit être proportionnelle à Z/S . Pour les dix tuyaux étudiés, nous avons obtenu un écart quadratique moyen de 2,3% ; en fait, pour huit d'entre eux, il est de 1,1% seulement. Le cône ouvert et le pavillon de trombone accusent un écart de 5%, que l'on peut attribuer de manière plausible à des erreurs théoriques. On peut donc estimer l'étalonnage en impédance valable à 1% près environ.

Enfin, nous avons limité le diamètre d'entrée des instruments à cause de l'utilisation directe d'un microphone ; une prolongation du domaine de validité de notre expérience pourrait être faite grâce à des sondes.

b) Le modèle théorique unidimensionnel semble bien adapté aux tuyaux considérés. Les hypothèses émises dans le premier chapitre semblent validées, ou au moins n'avoir pas été contredites. Les seules erreurs vraiment importantes dues au modèle ont été rencontrées pour le pavillon de trombone, et c'était bien ce que prévoyait la conclusion du premier chapitre ; il est toutefois bon de rappeler que dans ce dernier cas, les parois sont en métal assez mince, et leurs vibrations, que nous avons négligées, peuvent être également une source d'erreurs.

On peut donc admettre que le calcul théorique est fiable même pour des instruments de forme compliquée, à condition qu'ils ne soient ni trop évasés, ni trop larges par rapport à la longueur d'onde. Lurton [61] avait d'ailleurs obtenu des résultats très satisfaisants pour des tuyaux de formes compliquées, tels des instruments munis d'embouchures (trombone, tuba.).

c) On peut finalement se demander, quelle est, des deux méthodes expérimentale et théorique, la plus efficace, la plus appropriée ou la plus sûre ?

- il est certain que pour des instruments très évasés ou très larges, la méthode expérimentale est plus sûre, surtout dans l'aigu. De plus, pour un instrument de forme compliquée, elle est beaucoup plus rapide, car la mesure des dimensions géométriques précises est fort longue.

- la méthode numérique présente en revanche l'intérêt de faciliter l'invention de nouveaux instruments, sans avoir à les fabriquer (tout au moins dans un premier temps !) Elle permet également, si on a déjà mesuré les dimensions de l'instrument, de lui faire subir de petites modifications de manière extrêmement souple pour obtenir tel effet souhaité. Enfin, pour les minimums d'impédance, elle semble malgré tout plus fiable que la méthode expérimentale.

CHAPITRE III :

CHAMP EXTERNE DES INSTRUMENTS A VENT

POSITION DU PROBLEME, PLAN DE CE CHAPITRE

L'objectif de ce chapitre est l'étude du champ acoustique proche. Pour mener à bien celle-ci, nous devons connaître les sources (position, amplitude, phase), et la façon dont elles rayonnent (rayonnement omnidirectionnel, directionnel,...). Rappelons que notre travail ne comporte pas l'étude du fonctionnement global des instruments, qui pourrait nous fournir l'intensité absolue des sources, en fonction par exemple de la pression moyenne du souffle de l'instrumentiste ; en conséquence, nous ne pouvons prétendre qu'à la connaissance relative des sources.

Dans un premier temps, nous étudions la relation entre champ interne d'ondes quasi-stationnaires, et champ rayonné par une source ; puis nous étudions le champ d'interférences créé par un tuyau percé de trous latéraux : d'abord percé d'un seul trou, puis percé d'un réseau de trous latéraux. Nous étudions ensuite une source particulière, l'embouchure de flûte, et le champ d'interférences d'instruments qui en sont munis.

Après cette étude théorique, nous essayons de comparer les résultats théoriques et quelques expériences.

1. GENERALITES SUR LE CHAMP EXTERNE - ETUDES ANTERIEURES

1.1. Le paradoxe des instruments à vent

Bien que certains théoriciens, comme Helmholtz (118) ou Rayleigh (139) se soient préoccupés du champ rayonné par un tuyau sonore, il peut paraître curieux que le rayonnement des instruments à vent ait si peu intéressé les acousticiens ; et pourtant ceux qui en ont étudié le fonctionnement et le champ interne sont très nombreux, dépassant largement la centaine. Quant aux musiciens, ils s'en soucient fort peu, si ce n'est à propos des cuivres, dont la forte directionnalité est facilement perçue. Il n'est dès lors pas surprenant de trouver cette phrase dans un traité de prise de son (J. Bernhart (17)), à propos du hautbois: "On commet souvent l'erreur de croire que tout le son des instruments à vent est rayonné uniquement par l'extrémité du tuyau cylindrique. La majeure partie provient des différents orifices ouverts alternativement suivant les combinaisons de notes émises".

On peut trouver deux explications à cette anomalie : d'un côté les musiciens ont l'habitude d'écouter à une distance relativement grande, où un certain "lissage" des interférences se produit en raison des réflexions du son dans la salle ; quant à l'instrumentiste lui-même, il fait trop corps avec l'instrument pour pouvoir vraiment juger des sons émis, ne serait-ce qu'à cause de l'audition par conduction osseuse.

D'un autre côté, les acousticiens se sont intéressés d'abord tout naturellement à la hauteur des sons ; ceci les a amenés à étudier le fonctionnement de l'instrument, qui, comme on le sait, fait largement intervenir le champ interne. Par contre, le fonctionnement est presque indépendant du champ externe : c'est un paradoxe remarquable, puisque le but des instruments à vent est bien de rayonner ! Une preuve de cette affirmation réside dans l'existence de sourdines : les facteurs réussissent à les fabriquer de façon à modifier considérablement le timbre sans changer le fonctionnement, ce qui est essentiel du point de vue de l'instrumentiste. A notre connaissance, cette affirmation a été émise pour la première fois par Benade et Gans (11), qui proposaient un bilan énergétique des instruments à vent. Elle doit être toutefois nuancée en ce qui concerne les flûtes : leur système excitateur rayonne directement dans l'espace environnant.

1.2. Le champ externe proche : directionnalité et champ d'interférences

La constatation précédente fournit une explication au fait que le champ externe des tuyaux à embouchure de flûte ait été beaucoup plus étudié que celui des tuyaux à anche. A notre connaissance, c'est Northrop (71) qui s'y est intéressé le premier, dans le cas d'un tuyau d'orgue. Il est remarquable que le problème ait été dès le départ correctement posé : l'auteur note que le tuyau rayonne par deux sources, qui créent un champ d'interférences dans l'espace environnant. De plus, il démontre que les ondes rayonnées par chaque source peuvent être considérées comme sphériques. Son étude expérimentale consiste en une exploration systématique du champ proche, de façon à obtenir des courbes en fonction des variables d'espace ; une originalité est l'utilisation de deux types de microphones : un microphone à pression et un microphone à gradient de pression. Ce dernier peut mesurer, au moins semi-quantitativement, le vecteur vitesse, et il est évidemment du plus grand intérêt pour la description d'un champ d'interférences.

Peu après, Martin (63) détermine les courbes d'égale amplitude de la pression pour plusieurs "cuivres". Ceux-ci rayonnent par une seule source, le pavillon ; Knaüss et Yaeger (58) avaient d'ailleurs montré que le rayonnement dû aux vibrations des parois était faible par rapport à celui du pavillon. Martin montre la forte directionnalité des fréquences aiguës, aujourd'hui bien connue. Il ne mesure que le champ de pression, mais s'intéresse toutefois à la puissance acoustique émise. Il obtient celle-ci, pour des fréquences pas trop graves, par intégration de la pression sur une surface suffisamment éloignée de la source (1,5 m), où il admet la planéité des ondes. Il note qu'il est beaucoup plus direct de relier cette puissance acoustique au champ interne, plutôt que la pression externe prise en un point.

Nous insistons sur ces premiers travaux, car à notre avis, les problèmes y sont posés de manière complète, et il est regrettable qu'ils aient été largement oubliés par la suite. En effet, une tendance à ne considérer que la pression comme grandeur acoustique s'est manifestée depuis, sans doute sous l'influence de la prédominance de l'utilisation des microphones à pression. Nous n'avons retrouvé la notion de "champ d'interférences" que dans trois publications récentes concernant le rayonnement par deux ou plusieurs sources : celles de Benade (9),

qui malheureusement confond pression quadratique moyenne et intensité acoustique, celle de Coltman (26), et surtout celles de Wu et Péro (91). Ces derniers, par une analyse de Fourier (en amplitude et en phase) du signal émis par une flûte montrent que les ondes peuvent être considérées comme sphériques de manière très satisfaisante et que les effets de réverbération sont négligeables devant ceux des interférences directes ; de plus, ils vérifient le principe de superposition. Pour leur démonstration, ils captent le signal de pression en un nombre de points égal au nombre de sources.

1.3. Le champ externe lointain dans une salle

La démarche des auteurs précédemment cités est analytique. Par contre, l'intérêt d'autres auteurs s'est porté sur les problèmes concrets qui se posent au preneur de son : celui-ci s'intéresse avant tout aux moyennes du spectre, car il ne peut pas choisir une position de microphone pour chaque fréquence et chaque configuration du tuyau (doigté). En effet, si les cuivres émettent toujours par la même source, les instruments à trous latéraux émettent au contraire par plusieurs sources qui changent d'une note à l'autre. Ceci implique que le preneur de son ne peut pas placer son microphone trop près de l'instrument, pour éviter de trop grandes irrégularités de timbre ; il utilise alors les réflexions de la salle, qui "moyennent" le spectre.

Benade (16) a montré expérimentalement que le concept de moyenne du spectre de pression avait bien un sens pour une configuration donnée du tuyau : comparant le spectre obtenu en champ lointain pour de très nombreuses positions du microphone, il montre que l'écart moyen pour une fréquence est important, mais demeure toutefois limité. Il détermine ainsi une moyenne en fonction de la fréquence ; en ce qui concerne les cuivres, il montre que ce spectre moyen est voisin du spectre obtenu juste à la sortie du pavillon, dans l'axe de celui-ci, à une distance égale au rayon.

Avant lui, deux auteurs avaient effectué des moyennes sur les diverses configurations du tuyau :

- Olson (72, p. 233) est le premier à avoir proposé des courbes de directionnalité pour l'ensemble des instruments de musique. En ce qui concerne la flûte, il remarque qu'elle émet par plusieurs sources, et

qu'il y a donc un grand nombre de lobes de directivité ; mais, ajoute-t-il, les formes pour les divers doigtés peuvent être dites non directionnelles.

- J. Meyer (67) présente cette étude de manière plus systématique, et publie de nombreux diagrammes de directivité.

2. RELATION ENTRE LE CHAMP EXTERNE ET LE CHAMP INTERNE

2.1. Tuyau émettant par une seule source

a) Nous avons rappelé au chapitre I (§ 6.1.1.) comment Helmholtz reliait le champ dans un tuyau cylindrique à rebord infini aux ondes sphériques à l'extérieur.

Cette question n'est pas aussi simple qu'il ne paraît au premier abord ; c'est pourquoi nous pensons utile de la discuter. Nous partons de Morse (133, p.313), qui fait l'hypothèse suivante : le débit acoustique à la sortie d'un tuyau sans rebord peut être assimilé à celui d'une sphère pulsante (Q_0) rayonnant dans toutes les directions. Il obtient alors la pression à une distance R , grande devant la longueur d'onde, de la source, grâce à la formule classique :

$$p \simeq j\rho c \frac{k}{4\pi R} Q_0 e^{-jkR} e^{j\omega t} \quad (1)$$

Connaissant l'impédance à la sortie du tuyau pour les basses fréquences, $Z_0 = \frac{p_0}{Q_0} S_0 \simeq j\rho c 0,6133 k r_0$, on en déduit, comme Benade (9) :

$$p = p_0 \frac{1}{R} \frac{r_0}{4,0,6133} e^{-jkR} e^{j\omega t} \quad (2)$$

b) Cette procédure aboutit à un résultat satisfaisant, et pourtant elle contient deux fois une approximation a priori choquante : le flux d'énergie émis par la source est négligé, puis, de même, celui qui sort du tuyau (Z_0 imaginaire pur)! On ne peut qu'en déduire que ces deux approximations se compensent.

Montrons en effet que ce résultat est correct : si le tuyau émet une onde sphérique dans tout l'espace, $p = \frac{a}{R} e^{-jkR} e^{j\omega t}$, le flux d'énergie total s'écrit alors $I = \frac{1}{2} 4\pi R^2 \frac{|p|^2}{\rho c} = 2\pi \frac{|a|^2}{\rho c}$, et doit être

égal (quand on néglige les pertes visco-thermiques), au flux d'énergie total sortant du tuyau :

$$I_0 = \frac{1}{2} S_0 |p_0|^2 \operatorname{Re}(Y_0) = \frac{1}{2} S_0 |u_0'|^2 \operatorname{Re}(Z_0) \quad (3)$$

On en tire immédiatement :

$$|a| = \frac{1}{2} r_0 |p_0| \sqrt{\operatorname{Re}(Y_0) \rho c} \quad \text{et} \quad |p| = \frac{1}{2} \frac{r_0}{R} |p_0| \sqrt{\operatorname{Re}(Y_0) \rho c}$$

Dans le cas d'un tuyau sans rebord, et pour les basses fréquences, $\operatorname{Re}(Y_0) \rho c = \frac{1}{4} \frac{1}{(0,6133)^2}$, ce qui vérifie bien, en amplitude, la formule

(2) : l'approximation proposée par Morse est donc une façon de calculer la partie réelle de l'impédance de rayonnement de Levine et Schwinger.

Pour un tuyau à rebord infini, on a : $I = \frac{\pi |a|^2}{\rho c}$, d'où

$$|p| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r_0}{R} |p_0| \sqrt{\operatorname{Re}(Y_0) \rho c}$$

Y_0 étant alors l'admittance de rayonnement de Rayleigh, elle vaut aux basses fréquences : $Y_0 \rho c = \frac{1}{2} \frac{1}{(8/3\pi)^2}$

$$\text{d'où } |p| = |p_0| \frac{r_0}{R} \frac{1}{16/3\pi}$$

En définitive, les deux formules diffèrent peu, le facteur numérique étant 0,6646 pour la première, et 0,589 pour la seconde.

c) Il reste à résoudre le problème de la relation de phase entre p et p_0 , c'est-à-dire entre p_0 et a .

Comme nous l'avons noté au chapitre I, Ando a calculé et mesuré

la position du centre acoustique des ondes sphériques émises par un tuyau de rebords de différentes épaisseurs. R est donc à considérer à partir de ce centre, qui n'est pas l'extrémité du tuyau (Fig. 1) :

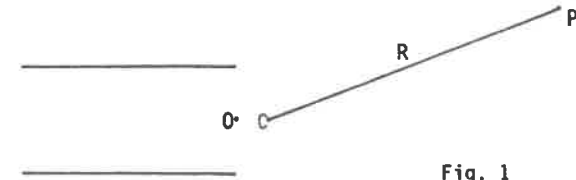


Fig. 1

Il nous semble impossible de trouver le résultat cherché par un calcul aussi simple que celui de l'amplitude ; c'est pourquoi nous proposerons l'approximation suivante, basée sur l'intuition : les ondes étant quasi-stationnaires près de l'extrémité du tuyau, il est raisonnable de penser que la variation de phase est négligeable entre O et C.

Finalement, faute de mieux, nous proposons une généralisation de la formule (2) :

$$p = p_0 \frac{1}{2} r_0 \sqrt{\operatorname{Re}(Y_0) \rho c} \frac{1}{R} e^{-jkR} e^{j\omega t} \quad (4)$$

Dans cette formule, le tuyau peut avoir un rebord d'une certaine épaisseur, mais rayonne dans tout l'espace ; la distance R est mesurée du point C.

On en tire la généralisation de la formule (1) :

$$p \simeq j\rho c Q_0 \frac{1}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_0)}{\rho c}} \frac{1}{R} e^{-jkR} e^{j\omega t}$$

d) Ces dernières formules sont valables pour des fréquences assez basses, quand le rayonnement n'est pas trop directionnel. Par chance, quand nous comparons les différents sources d'un instrument à vent, il s'agit le plus souvent d'instruments à trous latéraux, dont les sources sont peu étendues par rapport à la longueur d'onde. Ando (93) montre que pour $ka_1 = 0,37$ (où a_1 est le rayon externe du tuyau), la directivité est la suivante, si $Q(\theta) = \frac{|u(\theta)|}{|u(0)|}$, où u est la vitesse (Fig. 2) :

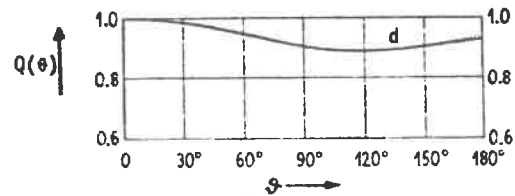


Fig.2 : directivité $Q(\theta)$ au bout d'un tuyau cylindrique (Ando).

Supposer les ondes sphériques entraîne donc une erreur assez faible en général (En effet, pour $a_1 = 1$ cm, $ka_1 = 0,37$ correspond à $f = 2000$ Hz, et pour $a_2 = 0,5$ cm, à $f = 4000$ Hz).

Quand la fréquence est plus élevée, la loi d'évolution de la phase de la pression est peu altérée, mais on doit procéder à une correction de directionnalité pour connaître l'amplitude de la pression en un point. La formule (4) demeure valable pour le flux d'énergie total, mais la formule (3) sous-estime l'amplitude de la pression dans l'axe, et la surestime pour certains angles, comme $\theta = 120^\circ$.

2.2. Tuyau émettant par plusieurs sources

Si le tuyau émet par plusieurs sources, il nous suffit de connaître les relations d'amplitude et de phase entre elles pour déterminer le champ total (l'amplitude de celui-ci n'est connue qu'à un facteur près, puisque, rappelons-le, nous n'avons pas cherché l'amplitude absolue des sons produits par l'instrument). En pratique, nous déduirons de l'étude du champ interne d'une part le rapport des flux d'énergie sortant par deux orifices, d'autre part la différence de phase entre deux orifices.

2.3. Discussion de la notion de "fonction de transformation"

Benade (15, p. 422) a proposé de définir une "fonction de transformation" de la façon suivante :

$$T = \frac{|p_{\text{ext}}|}{|p_{\text{int}}|}$$

où p_{int} est la "pression interne", mesurée dans l'embouchure, et p_{ext} la "pression externe", moyenne des pressions relevées dans la salle.

Connaissant le signal de pression interne par l'étude du couplage entre système excitateur et tuyau sonore, cet auteur souhaite ainsi déterminer quelle transformation subit ce signal quand il est émis à l'extérieur. On sait que le son émis n'est pas (sauf aux basses fréquences et quand il n'y a qu'une source), une onde progressive (cf Wu et Péro (90)) ; pourtant un musicien reconnaît un instrument quelque soit sa position vis-à-vis de celui-ci, ce qui justifie la démarche de Benade, et sa proposition de chercher des moyennes.

Cette conception très pratique pose cependant un réel problème quand on veut comparer des mesures à des calculs théoriques. Dans ce but, rien n'empêcherait de définir une telle fonction point par point, comme le rapport de la pression en un point extérieur donné à la pression interne. Nous préférons proposer une définition dont l'inconvénient est sans doute d'être moins directement liée à la pratique des preneurs de son ou des musiciens, mais qui nous semble plus générale.

Soit $W(f)$ la puissance acoustique totale émise par l'instrument en l'absence d'autres sources ayant la même fréquence, et E_p la densité d'énergie potentielle par tranche dans l'embouchure.

La fonction de transformation est alors :

$$T^2 = \frac{1}{2c} \frac{W}{E_p} = \frac{1}{2c} \frac{W}{\frac{1}{4} S |p_{\text{int}}|^2 \rho c^2} = \rho c \frac{2W}{S |p_{\text{int}}|^2} \quad (5)$$

Nous avons placé le facteur $\frac{1}{c}$, devant le rapport, afin que T^2 soit sans dimension, et le facteur $\frac{1}{2}$ pour que T soit égale à 1 pour un tuyau à une seule source et traversé par une onde plane progressive (ce dernier facteur provient du fait que nous avons choisi l'énergie potentielle, et non l'énergie totale ; à ce propos, on pourrait bien entendu définir une autre fonction à partir de l'énergie cinétique).

On sait, concernant W (cf. par exemple Pascal (138)) :

- qu'elle ne dépend pas de la surface fermée Σ sur laquelle on la mesure
- qu'elle n'est pas la somme des puissances émises par les différentes sources en l'absence des autres.

$$\text{Elle s'écrit : } W = \int_{\Sigma} \vec{T} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \text{Re}(\vec{p}\vec{u}) \cdot \vec{n} \, dS$$

où $\vec{n}$ est la normale à la surface.

Il est certain que cette définition demeure difficile à utiliser dans le cas où le tuyau émet par plusieurs sources. Par contre, pour une source unique, il vient :

$$T^2 = \frac{S_0 |p_0|^2 \text{Re}(Y_{0pc})}{S |p_{int}|^2}$$

Dans les basses fréquences, $\text{Re}(Y_0)$ est constante, et p_0 est la pression externe définie par Benade ; notre définition ne diffère alors de la sienne que par un facteur constant.

2.4. Calcul de la fonction de transformation pour un tuyau à anche

Nous avons vu que près des maximums du module d'impédance, pour lesquels fonctionnent les instruments à anche, la valeur de l'amplitude de la pression n'est pas affectée par l'amortissement (cf § 2.4.5.1., Ch. II). Par conséquent :

$$S |p_{int}|^2 \text{Re}(Y_s) = S_0 |p_0|^2 \text{Re}(Y_0)$$

où Y_s est l'admittance calculée sans amortissement.

$$\text{Donc } T^2 = \text{Re}(Y_s) \quad (6)$$

Traisons par exemple le cas du tuyau cylindrique :

Près d'un maximum de $|Z|$, $Y_s = a_s + jb$, où

$$\begin{cases} b = -\cotg k l_e \quad (l_e \text{ étant la longueur corrigée : } l_e = l + \frac{\text{Im}(Z_0)}{k}) \\ a_s = (1+b^2) \frac{\text{Re}(Y_0)}{1+\text{Im}^2(Y_0)} \simeq (1+b^2) \frac{\text{Re}(Z_0)}{1+\text{Im}^2(Z_0)} \end{cases}$$

(cf Ch. II, § 2.3.3., éq. 8, p.106)

Pour les maximums de $|Z|$, $b = 0$:

$$T^2 = \frac{\text{Re}(Z_0)}{1+\text{Im}^2(Z_0)}$$

Aux basses fréquences, $T = \sqrt{\text{Re}(Z_0)} = \frac{1}{2} k r$: T est proportionnelle à la fréquence.

Il s'agit ici de la fonction de transformation pour les maximums de $|Z|$; elle a bien entendu une toute autre valeur pour d'autres fréquences, qui peuvent être par exemple les harmoniques du son sur lequel fonctionne réellement l'instrument.

La figure 3a montre ainsi la courbe que présente la fonction de transformation pour les maximums du module de $|Z|$. La figure 3b est celle tirée de Benade (15) ; c'est une courbe expérimentale.

Fig. 3a : fonction de transformation pour un trombone (formule 5)

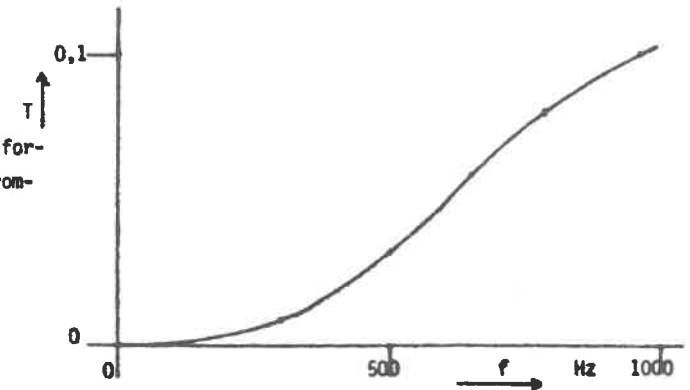
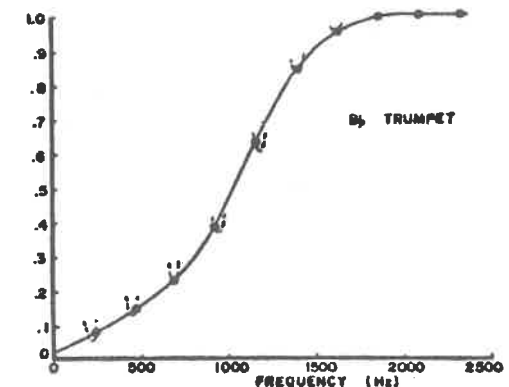


Fig. 3b : fonction de transformation pour une trompette (expérimentale) (Benade)



3. RAYONNEMENT D'UN TUYAU PERCÉ DE TROUS LATÉRAUX

3.1. Tuyau cylindrique percé d'un trou

3.1.1. Rapport d'amplitude des sources

Soit un tuyau cylindrique percé d'un seul trou latéral. Notre problème est la comparaison des deux sources que constituent ce trou latéral et l'extrémité ouverte du tuyau. Nous réemployons les notations du chapitre II (§ 2.6.), c'est-à-dire les indices t pour le trou et p pour le tuyau principal, o pour les extrémités : I_{to} est le flux d'énergie (par tranche) sortant par le trou, I_{po} par l'extrémité du tuyau. Nous cherchons :

$$\frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{\frac{1}{2} S_t |p_{to}|^2 \operatorname{Re}(Y_{to})}{\frac{1}{2} S_p |p_{po}|^2 \operatorname{Re}(Y_{po})}$$

Soit $p_t = p_p$ la pression à l'embranchement (Fig. 4) :

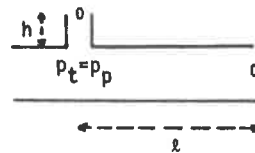


Fig. 4

La cheminée du trou et l'extrémité du tuyau constituent deux tuyaux ouverts, dans lesquels on a (cf Ch. II, §2.3.3. éq. 8, p.106):

$$\begin{cases} b = -\cotg kl_e \\ a = (1+b^2) \left(H_x^o + \frac{a_o}{1+b_o^2} \right) \end{cases}$$

Pour simplifier, nous négligeons encore l'influence de l'amortissement sur la vitesse du son ; autrement dit $\operatorname{Im}(Z_v) = \operatorname{Im}(Y_t) = k$ (Cf. Ch. II, § 2.4.1.);

l_e est la longueur corrigée : $l_e = l + \frac{\operatorname{Im}(Z_o)}{k}$, et H le terme d'amortissement.

Deux cas se présentent :

a) Pour chacun des deux tuyaux, la fréquence est loin de la résonance. b n'est pas grand, et $Y = a + jb$. Dans ce cas, nous avons vu que, de plus, $|p| = |p_s|$ à l'embranchement, où p_s est la pression calculée sans amortissement.

$$\text{Or, } I_o = \frac{1}{2} S |p_s|^2 \operatorname{Re}(Y_s) \text{ pour chacun des tuyaux, et } p_t = p_p$$

$$\text{D'où } \frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{S_t \operatorname{Re}(Y_{ts})}{S_p \operatorname{Re}(Y_{ps})}$$

où Y_{ts} et Y_{ps} sont les deux admittances calculées à l'embranchement sans amortissement. a_s étant obtenu en faisant $H = 0$, on a :

$$\operatorname{Re}(Y_s) = a_s = (1+b^2) \frac{a_o}{1+b_o^2} = \frac{1}{\sin^2 kl_e} \frac{\operatorname{Re}(Y_o)}{1+\operatorname{Im}^2(Y_o)} \approx \frac{1}{\sin^2 kl_e} \operatorname{Re}(Z_o)$$

$$\text{Donc } \frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{S_t}{S_p} \frac{\operatorname{Re}(Z_{to})}{\operatorname{Re}(Z_{po})} \frac{\sin^2 kl_e}{\sin^2 kh_e}$$

Si la cheminée du trou est courte, on a, puisque $\frac{\operatorname{Re}(Z_{ts})}{\operatorname{Re}(Z_{po})} = \frac{S_t}{S_p}$:

$$\frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{S_t^2}{S_p^2} \frac{\sin^2 kl_e}{k^2 h_e^2}$$

et aux basses fréquences, $\frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{S_t^2}{S_p^2} \frac{l_e^2}{h_e^2}$

Quand la fréquence augmente, le rapport décroît légèrement avec la fréquence. Comme $\sin^2 kl_e \approx k^2 l_e^2 (1 - \frac{k^2 l_e^2}{3})$,

$$N_{tp} = 10 \log \frac{I_{to}}{I_{po}} = (N_{tp})_{f=0} - \frac{10}{3} \frac{k^2 l_e^2}{\ln 10}$$

Puis le rapport décroît fortement quand la fréquence augmente davantage (Cf. Fig. 5).

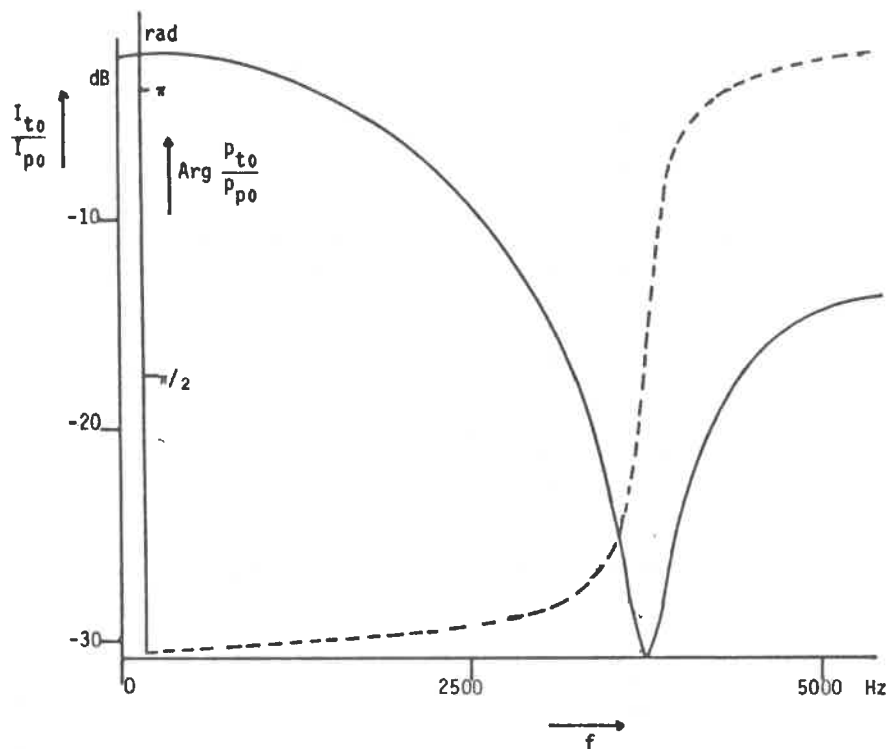


Fig.5 : rayonnement comparé d'un trou latéral et du pavillon (amplitude et phase-

6) Si la fréquence est proche de la résonance de la longueur l_e (b grand pour le tuyau principal), alors $|p_{ps}| = |p_p| \frac{|Z_{ps}|}{|Z_p|}$

Le rapport des flux d'énergie devient alors:

$$\frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{S_t}{S_p} \frac{\text{Re}(Y_{ts})}{\text{Re}(Y_{ps})} \frac{|Z_p|^2}{|Z_{ps}|^2} = \frac{S_t}{S_p} \frac{\text{Re}(Y_{ts})}{\text{Re}(Z_{ps})} |Z_p|^2$$

$$\text{avec } \text{Re}(Z_{ps}) = \frac{a}{b^2} = \frac{1+b^2}{b^2} \frac{a_0}{1+b_0} = \frac{1+b^2}{b^2} \frac{\text{Re}(Y_{po})}{1+\text{Im}(Y_{po})} = \frac{1+b^2}{b^2} \frac{\text{Re}(Z_{po})}{1+\text{Im}(Z_{po})}$$

$$\text{et } |Z_p|^2 = \left| \frac{a}{b^2} - \frac{j}{b} \right|^2 = \frac{1}{b^2} \left| \frac{(1+b^2)^2}{b^2} (H_x^0 + \frac{a_0}{1+b_0}) + 1 \right|^2$$

Dans le cas où l est petit, l'amortissement peut être négligé, et ceci d'autant plus que la fréquence de résonance est élevée ; le minimum est alors égal à :

$$\frac{I_{to}}{I_{po}} = \frac{1}{16} \frac{S_t}{S_p} \frac{R_t^2}{h_e^2} \frac{k^2 R_p^2}{1+k^2 R_p^2 (0,6133)^2}$$

Si on calcule le rapport entre cette valeur et la valeur obtenue pour $k = 0$, on obtient $\frac{1}{16} \pi^2 \frac{R^4}{l_e^4}$ (pour le premier minimum $kl_e = \pi$). Ceci représente en général une différence de l'ordre de plusieurs dizaines de décibels.

3.1.2. Différence de phase des sources

$$\text{Nous cherchons } \text{Arg} \frac{p_{to}}{p_{po}} = \text{Arg} \frac{p_{to}}{p_t} + \text{Arg} \frac{p_p}{p_{po}}$$

Dans la cheminée, si on néglige l'amortissement,

$$P_t = P_{t0} \cosh k + U_{t0} j \sinh k$$

$$\text{D'où } \frac{P_t}{P_{t0}} \simeq 1 + j Y_{t0} k h \simeq \frac{h_e}{0,6133 R_t} + j k h \frac{1}{4(0,6133)^2}$$

$$\text{et } \text{Arg} \frac{P_t}{P_{t0}} \simeq 0,4 k R_t \frac{h}{h_e}$$

Dans le tuyau, en reprenant les résultats du Ch. II (§2.4.5.2), nous pouvons écrire :

$$\text{Arg} \frac{P_p}{P_{p0}} \simeq 0,4 k R_p - \frac{1}{2} \text{Arg}(1 - \gamma^2 \zeta^2) \quad (\pi)$$

Finalement,

$$\text{Arg} \frac{P_{t0}}{P_{p0}} = 0,4 k (R_p - R_t \frac{h}{h_e}) - \frac{1}{2} \text{Arg}(1 - \gamma^2 \zeta^2) \quad (\pi)$$

Par conséquent, mise à part une variation (minime) de phase dans la cheminée, nous retrouvons les mêmes résultats que pour la variation de la phase dans le tuyau principal. A la résonance de γ_p , le rapport des flux d'énergie des deux sources passe par un minimum, et la différence de phase des deux sources est légèrement supérieure à $\pi/2$. Au-dessous de la résonance, les deux sources sont à peu près en phase, au-dessus en opposition de phase.

3.2. Tuyau percé d'un réseau régulier de trous latéraux : étude des sources

Pour obtenir les rapports entre les différentes sources que constituent les trous latéraux, nous utiliserons largement les résultats du chapitre II (§2.6) : en particulier, nous dissocierons les deux principales bandes de fréquence, la première bande d'arrêt, et la première bande passante. Nous avons besoin de connaître l'admittance aux points-embourchements des trous : c'est pourquoi, même si certains raisonnements semblent quelque peu délicats en ce qui concerne les flux d'énergie, il est tout de même nettement plus simple d'utiliser la configuration abstraite du filtre en Π , parallèlement d'ailleurs à la configuration en T.

La figure 6 définit les symboles choisis pour les deux configurations : les points y_n représentent les extrémités de la cellule de filtre en Π , et les points x_n celles de la cellule de filtre en T. Il y a N trous, et donc N cellules en T et (N-1) cellules en Π .

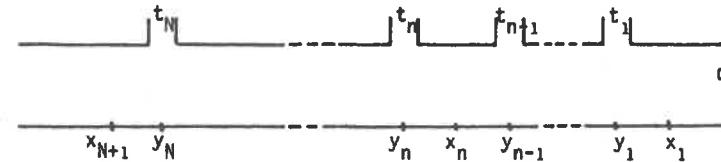


Fig.6 : filtre en T et filtre en Π (symboles utilisés)

Soit I_{x_n} le flux d'énergie moyen par tranche qui pénètre en x_n dans la (n-1) ème cellule en T ; I_{y_n} celui qui pénètre dans la (n-1) ème cellule en Π , enfin I_{t_n} celui qui pénètre dans le trou n. Dans le cas où on néglige l'amortissement aux parois, on a :

$$I_{y_n} = I_{x_n} + \frac{1}{2} I_{t_n}$$

$$I_{x_n} = I_{y_{n-1}} + \frac{1}{2} I_{t_n}$$

$$I_{x_1} = I_{p0}$$

3.2.1. Fréquences inférieures à la première fréquence de coupure - (première bande d'arrêt).

Pour calculer les rapports entre les différentes sources, nous supposons qu'il y a suffisamment de trous en aval des trous considérés pour que à l'entrée de chaque cellule de filtre, on ait l'impédance itérative (Ceci suppose que la fréquence ne soit pas trop proche de la fréquence de coupure).

S'il y a trop peu de trous en aval, on devra revenir à un calcul direct, analogue à celui du paragraphe précédent.

Nous calculons d'abord par deux méthodes différentes le rapport des flux d'énergie entre deux trous successifs, puis la différence de phase.

a) La première méthode repose sur les calculs de flux d'énergie: grâce à la formule obtenue au chapitre II (§2.4.5.3), nous pouvons écrire la relation liant les flux d'énergie à l'entrée et la sortie d'une cellule de filtre. Mais pour simplifier, nous ne tiendrons pas compte, pour cette première méthode, de l'influence de l'amortissement.

Considérons une cellule de filtre en Π . L'admittance aux deux extrémités est l'admittance itérative $x = 1/z$. Les trous étant supposés identiques, l'admittance Y_{tn} est égal à l'admittance Y_{tn+1} . Donc le rapport β des flux d'énergie entrant dans un trou et venant du tuyau principal est le même pour les deux trous. Nous l'avons déjà calculé dans le cas général (Ch. I, §4.2.1) ; ici il s'écrit :

$$\beta = \frac{I_{tn}}{I_{x_{n+1}}} = \frac{I_{tn}}{I_{yn} + \frac{1}{2} I_{tn}} = \frac{\mu \operatorname{Re}(Y_t)}{\operatorname{Re}(x) + \frac{1}{2} \mu \operatorname{Re}(Y_t)}$$

Par rapport au flux incident $I_{x_{n+1}}$, il passe $3 I_{x_{n+1}}$ dans le même trou, $\beta (1-\beta) I_{x_{n+1}}$ dans le $(n-1)$ ième trou, et $\beta (1-\beta)^m I_{x_{n+1}}$ dans le $(n-m)$ ième trou. Par conséquent, le rapport des flux d'énergie pour deux trous successifs s'écrit :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \beta = \frac{2 \operatorname{Re}(x) - \operatorname{Re}(Y_t)}{2 \operatorname{Re}(x) + \operatorname{Re}(Y_t)} \quad \text{où } \operatorname{Re}(Y_t) = \frac{\operatorname{Re}(Z_R)}{k^2 h_e^2} \quad (\text{cf ch II, p.143, eq.25})$$

x est obtenue en développant, au premier ordre du terme de rayonnement, la formule (30 c) du chapitre I, comme nous l'avons fait pour l'impédance itérative du filtre en T :

$$x = +j \operatorname{Im}(x) \left[1 + \frac{1}{2} j \frac{\operatorname{Re}(Z_R)}{k h_e} \left(\frac{1}{1+Vks/tgks} + \frac{1}{1-Vks/tgks} \right) \right]$$

où $\operatorname{Im}(x) = -\frac{1}{k_e V z_p} \sqrt{1+Vks/tgks} (1-Vks/tgks)$ et $V = \frac{2h_e}{\mu s}$

On en tire :

$$\frac{2 \operatorname{Re}(x)}{\mu \operatorname{Re}(Y_t)} = -\operatorname{Im}(x) \frac{1}{2} Vks \left(\frac{1}{1+Vks/tgks} + \frac{1}{1-Vks/tgks} \right)$$

Comme on le voit, la partie réelle de l'impédance de rayonnement

n'intervient pas dans cette formule : ceci est heureux, car nous avons souligné qu'elle était mal connue, en raison de la forme particulière (bombée) de l'écran sur lequel débouche le trou.

On obtient donc :

$$\frac{2 \operatorname{Re}(x)}{\mu \operatorname{Re}(Y_t)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-Vks/tgks}{1+Vks/tgks}} + \sqrt{\frac{1+Vks/tgks}{1-Vks/tgks}} \right)$$

et $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \left(\frac{\sqrt{1+Vks/tgks} - \sqrt{1-Vks/tgks}}{\sqrt{1+Vks/tgks} + \sqrt{1-Vks/tgks}} \right)^2 \quad (6)$

Aux basses fréquences, $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \left(\frac{\sqrt{1+V} - 1}{\sqrt{1+V} + 1} \right)^2$

Pour les exemples choisis, ceci représente, en accord avec un calcul numérique complet, 10,3 dB (trous larges, exemple 1), 8,5 dB (trous étroits, exemple 2), et 6,1 dB (trous étroits, exemple 3). Dès le troisième ou quatrième trou ouvert, l'intensité émise est donc très faible par rapport à celle émise par le premier trou.

Quand la fréquence augmente, en tendant vers la fréquence de coupure, $\sqrt{1-Vks/tgks}$ tend vers 0, et $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ vers 1. Soulignons toutefois que cette limite n'a pas de sens, car près de la fréquence de coupure, il n'y a plus convergence vers l'impédance itérative. Ceci nous montre néanmoins que le rapport $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ croît, autrement dit que les trous émettent avec des intensités comparables.

b) Une autre méthode de calcul est la suivante: si nous tenons compte de l'amortissement dans les cheminées, il y a une variation du flux d'énergie dans celles-ci, mais elle est la même pour tous les trous. Donc,

$$\left(\frac{I_{n+1}}{I_n} \right)_0 = \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{\frac{1}{2} S_t |p_{n+1}|^2 \operatorname{Re}(Y_t)}{\frac{1}{2} S_t |p_n|^2 \operatorname{Re}(Y_t)} = \frac{|p_{n+1}|^2}{|p_n|^2}$$

où p_{n+1} et p_n sont les pressions aux embranchements.

Puisqu'il y a convergence vers l'impédance itérative, la pression aux embranchements a la forme d'une "onde aller" :

$$p_n = p_N e^{-j\phi(N-n)}$$

$$\text{d'où } \frac{p_{n+1}}{p_n} = e^{-j\phi} \text{ et } \frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{2\text{Im}(\phi)}$$

Or, d'après (30a) (cf. ch I) :

$$\cos \phi = \cos 2k's + \frac{1}{2} j\mu Y_t \zeta_p \sin 2k's$$

$$\text{et } \sin \phi = \pm \sqrt{AD} = \pm \frac{A}{\zeta} = j\zeta_p \chi \sin 2k's$$

$$\text{Donc } \frac{p_{n+1}}{p_n} = \cos 2k's + j\left(\frac{1}{2}\mu Y_t \chi\right) \zeta_p \sin 2k's$$

$$\text{Or } \text{Re}(Y_t \zeta_p) \ll \text{Im}(Y_t \zeta_p) \text{ et } \text{Re}(\chi \zeta_p) \ll \text{Im}(\chi \zeta_p)$$

$$\text{D'autre part } \text{Re}(k') \gg \text{Im}(k') \Rightarrow \text{Re}(\cos 2k's) \simeq \cos 2\text{Re}(k's) \gg \text{Im}(\cos 2k's)$$

$$\text{Re}(\sin 2k's) \simeq \sin 2\text{Re}(k's) \gg \text{Im}(\sin 2k's)$$

$$\text{Donc } \text{Re}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right) \gg \text{Im}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)$$

$$\text{et } \frac{I_{n+1}}{I_n} = \left|\frac{p_{n+1}}{p_n}\right|^2 \simeq \text{Re}^2\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right) \quad (7)$$

Nous retrouvons que $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ est indépendant des pertes par rayonnement, mais aussi par amortissement. Par contre, il dépend légèrement

de la variation de la vitesse du son par amortissement, puisque $\text{Re}(k')$ n'est pas tout à fait égale à k . Un calcul exact doit en tenir compte.

Nous nous contenterons ici de retrouver les résultats obtenus par la première méthode aux basses fréquences :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \left[1 - 2ks \left(-\frac{1}{2} \frac{\mu}{k h_e} + \frac{1}{ksV} \sqrt{1+V}\right)\right]^2 = \left[1 + \frac{2}{V} (1 - \sqrt{1+V})\right]^2$$

Un calcul élémentaire montre que les deux formules coïncident bien.

c) Le calcul de la différence de phase entre les deux sources que constituent deux trous successifs se fait grâce à la formule précédente. En effet, la variation de phase entre les deux extrémités de la cheminée du même trou, p_n et p_{n+1} est la même que pour le $(n+1)$ ème trou. Donc,

$$\text{Arg} \frac{(p_{n+1})_0}{(p_n)_0} = \text{Arg} \frac{p_{n+1}}{p_n} = -\text{Re}(\phi) = \text{Arctg} \frac{\text{Im}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)}{\text{Re}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)} \quad (\text{II})$$

Il est à noter que si le système était sans pertes, l'onde p_n serait vraiment évanescence, et tous les points vibreraient en phase. Ce sont les pertes qui sont la cause de la variation de phase. De fait, $\text{Im}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)$ est proportionnelle à une combinaison des termes $\text{Im}(\zeta_p)$ et $\text{Im}(\zeta_t)$, qui représentent les pertes dans le tuyau principal et les cheminées des trous (cf. Ch. II, §2.6.3.1). Comme $\text{Im}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right) \gg \text{Re}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)$, nous pouvons écrire simplement:

$$\text{Arg} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\text{Im}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)}{\text{Re}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)} \quad (8)$$

Dans les basses fréquences, cette expression est petite, et on peut considérer que tous les points sont en phase, donc que tous les trous émettent en phase (Aux très basses fréquences, inférieures en général à la fréquence fondamentale de fonctionnement du tuyau entier, ceci n'est pas tout à fait exact, car les pertes par amortissement sont assez importantes).

Quand la fréquence augmente, la présence du terme $\frac{1}{1-Vk\sigma gks}$ entraîne une augmentation sensible de la différence de phase entre deux trous successifs (jusqu'à 0,1 ou 0,3 radians près de la fréquence de coupure) ; pour deux trous éloignés, le cumul des différences de phase peut aboutir finalement à un angle assez important.

3.2.2. Fréquences supérieures à la première fréquence de coupure (première bande passante)

a) Dans ce qui suit, nous négligerons les pertes par amortissement visco-thermique aux parois : les fréquences étant assez élevées, elles sont en effet faibles par rapport à l'énergie rayonnée, et ne modifient pas qualitativement les résultats.

Nous cherchons le rapport du flux d'énergie total I_{xN+1} rayonné par l'ensemble des trous et le pavillon au flux d'énergie I_{tn} sortant par le même trou. Il s'écrit :

$$\frac{I_{xN+1}}{I_{tn}} = \frac{I_{xN+1}}{I_{xn}} \left(\frac{I_{yn}}{I_{tn}} - \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

Au chapitre II (§2.5), nous avons vu que pour une ligne de transmission,

$$I_{xN+1} = \left[H_x^{xN+1} \frac{(1+b_1^2 \operatorname{Re}^2(\zeta))}{a_1} + 1 \right] I_{x_1}$$

Pour le filtre en T (cf § 2.6.4), d'impédance itérative ζ , on a :

$$H_{x1}^{xN+1} \simeq -n \frac{\operatorname{Im}(\phi)}{\operatorname{Re}(\zeta)} \quad \text{et} \quad a_1 = (1+b_1^2) \frac{a_0}{1+b_0^2}$$

$$D'où \quad \frac{I_{xN+1}}{I_{xn}} = \frac{-n \frac{\operatorname{Im}(\phi)}{\operatorname{Re}(\zeta)} + \frac{1+b_1^2}{1+b_1^2 \operatorname{Re}^2(\zeta)} \frac{a_0}{1+b_0^2}}{-(n-1) \frac{\operatorname{Im}(\phi)}{\operatorname{Re}(\zeta)} + \frac{1+b_1^2}{1+b_1^2 \operatorname{Re}^2(\zeta)} \frac{a_0}{1+b_0^2}}$$

$\operatorname{Im}(\phi)$ est négatif, donc ce rapport est supérieur à 1. Nous avons montré que le numérateur comme le dénominateur varient lentement avec la fréquence, et que le deuxième terme devient prépondérant quand la fréquence augmente, pour chacun d'eux. Donc, le rapport se rapproche de 1 quand la fréquence croît.

En définitive, les variations de $\frac{I_{xN+1}}{I_{tn}}$ sont avant tout dues

$$\text{aux variations de } \frac{I_{yn} - \frac{1}{2} I_{tn}}{I_{tn}} = \frac{S_p \operatorname{Re}(Y_{yn}) - \frac{1}{2} S_t \operatorname{Re}(Y_{tn})}{S_t \operatorname{Re}(Y_{tn})}$$

Ce rapport passe par des extremums en même temps que son numérateur.

b) Nous cherchons à présent les fréquences pour lesquelles $\operatorname{Re}(Y_{yn}) - \frac{1}{2} \mu \operatorname{Re}(Y_{tn})$ passe par des extremums. Celles-ci sont solutions de :

Λ nul ou infini, où

$$\Lambda = b + \frac{1}{2} \frac{\mu}{kh_e} = \frac{1}{\operatorname{Re}(\zeta)} \operatorname{tg} \left[(n-1) \operatorname{Re}(\phi) + \operatorname{Arctg} b_1 \operatorname{Re}(\zeta) \right] + \frac{1}{ksV}$$

$$\text{Dans cette expression, } b_1 = \operatorname{Im}(Y_{y1}) = - \left[\cotg k(p_e + s) + \frac{1}{2} \frac{\mu}{kh_e} \right]$$

$$\text{soit } b_1 = - \left[\cotg k(p_e + s) + \frac{1}{ksV} \right]$$

où ζ est l'impédance itérative du filtre en T.

Comme la fréquence est assez élevée, le terme ksV est assez grand, et il est logique d'effectuer des développements en série de puissances de $\frac{1}{ksV}$. Bien que ce soit souvent insuffisant, nous nous contenterons du premier ordre pour une discussion qualitative.

Nous utilisons donc les approximations suivantes :

$\text{Re}(\phi) \gg \text{Im}(\phi)$; d'où :

$$\cos(\text{Re}(\phi)) \simeq \text{Re}(\cos \phi) = \cos 2ks + \frac{1}{ksV} \sin 2ks$$

$$\text{et } \text{Re}(\phi) \simeq 2ks - \frac{1}{ksV}$$

$$\text{Puis : } \text{Re}(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{tgks}}{ksV}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\text{cotgks}}{ksV}\right)^{1/2}} \simeq 1 + \frac{\text{cotg} 2ks}{ksV}$$

(si ks demeure sensiblement inférieur à $\frac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} \text{Enfin : } \text{Arctg } b_1 \text{Re}(z) &= -\text{Arctg} \left[\text{cotgk}(p_e + s) + \frac{1}{ksV} + (\text{Re}(z) - 1) \text{cotgk}(p_e + s) \right] \\ &= k(p_e + s) - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{ksV} \left[1 + \frac{\text{cotgk}(p_e + s) \text{sink}(p_e - s)}{\sin 2ks} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } b = \frac{1}{\text{Re}(z)} \text{tg} \left[(n-1)2ks + k(p_e - s) - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{ksV} \left[n + \frac{\cos k(p_e + s) \text{sink}(p_e - s)}{\sin 2ks} \right] \right]$$

Or $L_n = (n-1)2s + p_e + s$ est la distance du nième trou au pavillon (distance corrigée par le rayonnement au pavillon).

$$\text{D'où } b = \frac{1}{\text{Re}(z)} \text{tg} \left(kL_n - \frac{\pi}{2} - \frac{n'}{ksV} \right), \text{ avec } n' = n + \frac{\cos k(p_e + s) \text{sink}(p_e - s)}{\sin 2ks}$$

Finalement,

$$\Delta \text{ infini} \iff kL_n - \frac{(n'-1)}{ksV} = m\pi \quad (10a)$$

$$\Delta = 0 \iff kL_n - \frac{(n'-1)}{ksV} = (2m-1) \frac{\pi}{2} \quad (10b)$$

On a donc un minimum de flux d'énergie dans le trou n pour :

$$k = \frac{m\pi}{2L_n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(n'-1)L_n}{sV m^2 \pi^2}} \right)$$

$$\text{et un maximum pour } k = \frac{(2m-1)\pi}{4L_n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16(n'-1)L_n}{sV (2m-1)^2 \pi^2}} \right)$$

On peut remarquer que $n' \neq n$, puisque en général $p_e \neq s$; si $n = 1$, on retrouve alors bien le résultat obtenu au §3.1.

En résumé, les fréquences obtenues sont à peu près les fréquences de résonance de la distance entre le trou considéré et le pavillon, mais elles sont sensiblement plus élevées, surtout pour les premières d'entre elles.

La formule (10) est très satisfaisante pour les trous étroits ($sV = \frac{2h_e}{\mu}$ grand) ; pour les trous larges, elle n'est qu'une indication du résultat, car il est nécessaire de développer au moins au second ordre en $\frac{1}{ksV}$.

c) Le rapport du flux d'énergie total au flux d'énergie sortant par un trou passe donc par des extremums d'autant plus rapprochés en fréquence que le trou est plus éloigné de l'extrémité. La formule (9) permet de calculer la valeur de ces extremums. Sans vouloir entrer davantage dans le détail, on peut dire que l'amplitude de ces variations est importante, de l'ordre de plusieurs dizaines de décibels.

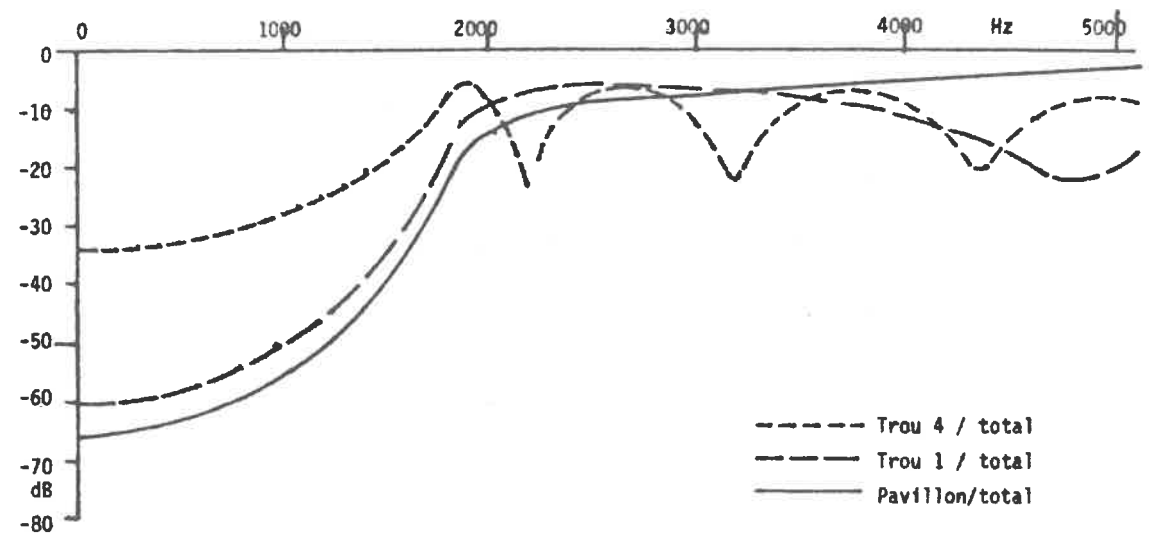
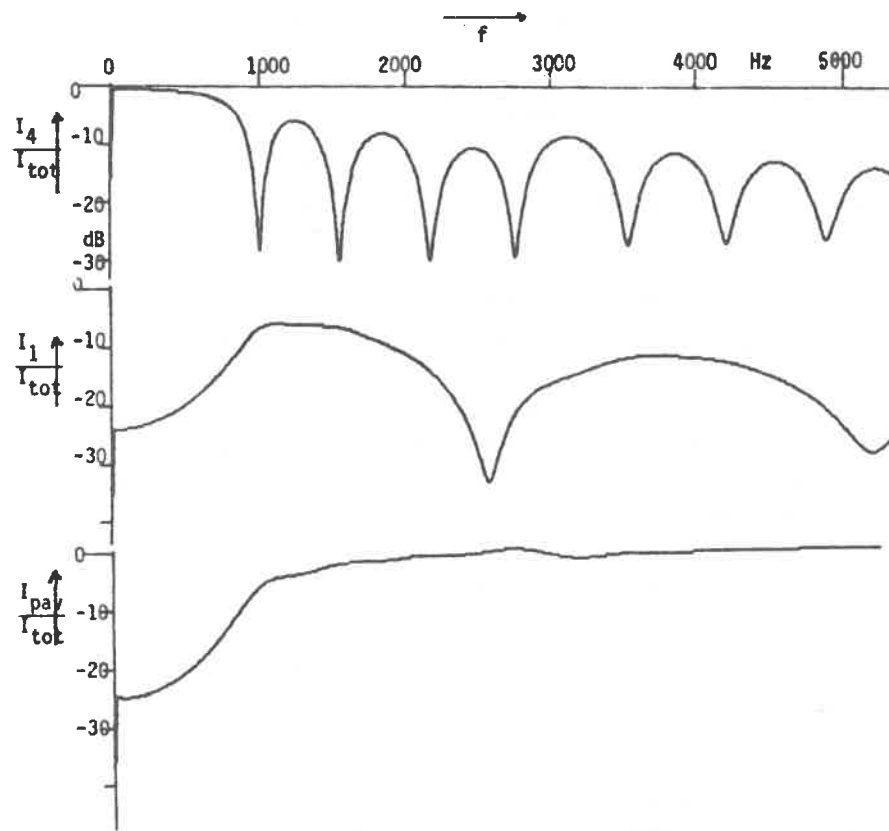
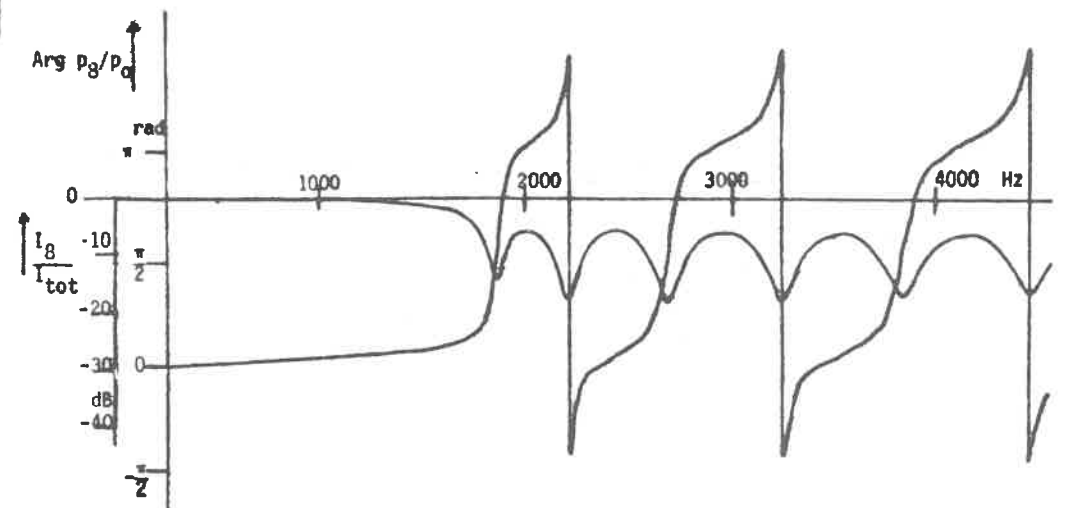


Fig.7 : rapport de l'intensité émise par un trou à l'intensité totale émise

Ci-dessus : exemple 2 (4 trous étroits) Trou 4 / total
 Trou 1 / total
 Pavillon/total

Ci-contre : exemple 1 (8 trous larges)

en haut : rapports d'intensité (trous 8, 7, 4, 1 et pavillon)
 en bas : courbe d'intensité trou 8/ total comparée à la
 différence de phase entre le trou 8 et le pavillon



d) Une question non moins importante est celle des différences de phases entre les différentes sources. Une analyse analogue à celle que nous avons faite pour un tuyau cylindrique peut se faire pour un filtre en Π , et on montre alors que la différence de phase entre un trou et le pavillon évolue rapidement de 0 à π autour des fréquences correspondant aux minimums du flux d'énergie sortant du trou considéré, atteignant des valeurs légèrement supérieures à $\pi/2$ pour les minimums eux-mêmes.

3.3 Tuyau percé d'un réseau de trous latéraux : mélange des sons rayonnés par les différentes sources.

L'idée de cette étude n'est pas originale, puisqu'elle a été faite par Benade (9), dans un article de 1960. Mais à notre avis, celui-ci comporte quelques erreurs ; c'est pourquoi nous reprenons ici le problème.

3.3.1. Fréquences inférieures à la première fréquence de coupure

a) Soit un réseau de N trous équidistants et identiques (Fig 8)

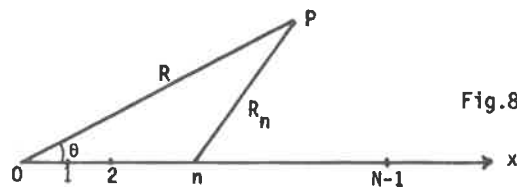


Fig.8

(Les trous sont numérotés cette fois de gauche à droite).

La pression au point P, situé à la distance R, grande devant la longueur d'onde, est la somme des pressions p_n dues à chaque source. Nous calculerons p_n en fonction de la pression p_n à l'embranchement du trou n et du tuyau principal, et non à la sortie du trou. En adaptant la formule (4), on obtient :

$$p_n = p_n \frac{1}{2} r_t \sqrt{\operatorname{Re}(Y_{tn})} \frac{1}{R_n} e^{-jkR_n} e^{j\omega t}$$

$$\text{Dans cette formule, } \operatorname{Re}(Y_{tn}) = \frac{\operatorname{Re}(Z_R)}{k^2 h_e^2} = \frac{1}{4} \frac{r_t^2}{h_e^2} \quad (\text{cf formule 25, p.143}).$$

ch. II, § 2.6.3.1). On a négligé l'amortissement aux parois et la variation de phase dans la cheminée du trou ; ceci ne changera pas le résultat final, puisque le facteur que cela introduirait dans la formule ci-dessus est identique pour tous les trous. Quant à R_n et R , ils sont comptés à partir du centre acoustique des ondes sphériques à la sortie de chaque trou.

Si R est grand, $R_n = R - \cos\theta \cdot x_n$, où $x_n = 2ns$; d'où

$$p_n \sim p_n \frac{1}{4} \frac{r_t^2}{h_e^2} \frac{1}{R} e^{j2ks_n \cos\theta} e^{-jkR} e^{j\omega t}$$

Enfin

$$P(R, \theta) = \frac{1}{4} \frac{r_t^2}{h_e^2} \frac{1}{R} e^{-jkR} e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{j2ks_n \cos\theta}$$

b) Au-dessous de la fréquence de coupure, $p_n = p_0 e^{-jn\phi}$

$$\text{D'où } P(R, \theta) = p_0 \frac{1}{4} \frac{r_t^2}{h_e^2} \frac{1}{R} e^{-jkR} e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2ks \cos\theta - \phi)n}$$

$$\text{soit } P(R, \theta) = p_0 \frac{1}{4} \frac{r_t^2}{h_e^2} \frac{1}{R} e^{-jkR} e^{j\omega t} \frac{e^{j(2ks \cos\theta - \phi)N} - 1}{e^{j(2ks \cos\theta - \phi)} - 1} \quad (11)$$

(Ce résultat est identique à celui de Benade, mais nous n'avons pas jugé utile de transformer la série en intégrale).

c) On pourrait de même calculer le vecteur vitesse ainsi que le flux d'énergie ; les formules sont assez lourdes. Nous nous contenterons de calculer la directivité du champ de pression, c'est-à-dire la pression quadratique moyenne en fonction de θ (et de R) :

$$\text{Soit donc } \frac{1}{2} |P|^2 = \frac{\text{constante}}{R^2} \times \frac{e^{-2N\alpha} + 1 - 2e^{-N\alpha} \cos N\beta}{e^{-2N\alpha} + 1 - 2e^{-\alpha} \cos \beta}$$

$$\text{où } j(2ks \cos \theta - \phi) = -\alpha + j\beta$$

$$\text{Rappelons que } \frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{2\text{Im}(\phi)} = \frac{(\sqrt{1+V} - 1)^2}{(\sqrt{1+V} + 1)^2}$$

$$\text{Donc } \alpha = -\text{Im}(\phi) = \text{Log} \frac{(\sqrt{1+V} - 1)}{(\sqrt{1+V} + 1)} \simeq \frac{2}{\sqrt{V}} \text{ (au deuxième ordre en } \frac{1}{\sqrt{V}} \text{)}$$

$$\text{On en retient que } e^{-2N\alpha} = \frac{I_{N-1}}{I_0} e^{-2\alpha} < 1$$

D'autre part, au deuxième ordre en α et en β ,

$$e^{-2\alpha} + 1 - 2e^{-\alpha} \cos \beta \simeq \alpha^2 + \beta^2 \simeq \frac{1}{2} |P|^2 \simeq \frac{\text{constante}}{R^2} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Or, aux basses fréquences, la variation de phase entre deux trous, $\text{Re}(\phi)$, est très faible. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{2} |P|^2 \simeq \frac{\text{constante}}{R^2} \frac{1}{\alpha^2 + (2ks \cos \theta)^2}$$

Ceci nous fournit la loi de directivité en pression du réseau de trous latéraux. Comme l'a noté Benade, le maximum est obtenu quand P est dans l'axe du premier trou ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Il ajoute que $2ks$ est inférieur à α , ce qui implique une faible variation avec θ . On peut effectivement s'en assurer, car α est en général supérieur à $\frac{1}{2}$ (ce qui correspond à V inférieur à 16). Or $2ks$ est petit, nettement inférieur à $\frac{1}{2}$ dans le domaine de fréquence qui nous intéresse.

En résumé, les trous émettent presque en phase, avec une intensité décroissant exponentiellement, d'autant plus que V est grand. La pression quadratique moyenne est minimale dans l'axe du tuyau, mais la directionnalité est très peu marquée.

3.3.2. Fréquences supérieures à la fréquence de coupure

Nous avons montré que les sources du tuyau sont alors d'amplitudes très inégales, et sont en général en phase ou en opposition de phase. Benade de son côté considère que la pression p_0 dans le filtre est encore donnée par $p_n = p_0 e^{-jn\phi} \simeq p_0 e^{-j\text{Re}(\phi)n}$; il oublie donc l'onde retour. Or à notre avis, l'onde de pression prise aux extrémités des cellules de filtre est quasi-stationnaire, et non une onde progressive : la variation de la phase n'est pas linéaire, mais se fait par brusques sauts, autour des minimums d'intensité.

Le calcul du champ d'interférences ainsi créé est très complexe, aussi nous nous contenterons de considérations qualitatives :

- juste au-dessus de la fréquence de coupure, les variations de phase et d'intensité sont faibles entre les différents trous, et le résultat qui précède demeure qualitativement valable, mais avec α petit, et donc une directivité légèrement plus marquée.

- la fréquence pour laquelle le premier trou, le plus éloigné du pavillon émet un minimum d'intensité, est très proche de la fréquence de coupure. L'émission de ce trou, étant minimale, est alors en quadrature de phase avec les autres trous et le pavillon.

- Quand la fréquence augmente, les différents trous émettent successivement avec une intensité minimale. En définitive, on peut schématiser les phénomènes de la façon suivante : si λ est la longueur d'onde de la ligne de transmission (en Π), $\lambda = \frac{2\pi}{Re(\phi)}$, les trous émettent alternativement en phase ou en opposition de phase suivant qu'ils sont situés dans une demi-longueur d'onde ou la suivante. Quelquefois, certains trous se trouvent juste à la transition entre deux demi-longueurs d'onde, et sont en quadrature de phase, mais surtout émettent très faiblement. Or la longueur d'onde diminue avec $Re(\phi)$, et donc avec la fréquence : il peut exister des fréquences telles que chaque trou est en opposition de phase avec les trous adjacents.

- Mais en même temps que les trous, le pavillon joue un rôle important : du point de vue de la phase, il ne se comporte pas fondamentalement différemment des trous ; par contre, nous savons depuis le chapitre II (§2.6), qu'il émet de plus en plus quand la fréquence augmente, au détriment des autres trous. Aux très hautes fréquences, il émet de manière prépondérante ; comme de plus son émission est alors nettement directionnelle, l'instrument émet a fortiori de manière très directionnelle dans l'axe du pavillon. C'est du reste ce qu'ont remarqué expérimentalement J. MEYER (67) et BENAË (16).

Conclusions : entre les deux extrêmes (champ omnidirectionnel dans le grave, et très directionnel dans l'aigu), le champ d'interférences créé par un instrument à trous latéraux est très complexe. De surcroît, il varie radicalement quand on change de note jouée, c'est-à-dire quand les trous ouverts changent. On peut alors se demander quel sens peuvent avoir des moyennes, à moins de les effectuer en champ lointain, quand s'ajoutent les interférences dues à la salle, dont on peut espérer d'elles qu'elles "lissent" quelque peu le champ rayonné.

4. RAYONNEMENT D'UN TUYAU A EMOUCHURE DE FLUTE

Les divers éléments concernant le rayonnement d'un tuyau cylindrique par plusieurs sources ont été obtenus au paragraphe précédent ; nous pourrions nous en contenter pour les instruments à embouchure de flûte, en assimilant l'orifice de l'embouchure à un trou latéral quelconque. Nous étudierions alors simplement le rayonnement relatif des différentes sources (embouchure et trous latéraux) à des fréquences quelconques, indépendamment du type d'excitation. Mais,

- d'une part, l'assimilation de l'orifice de l'embouchure à un simple trou latéral demande une justification, car on sait que celle-ci est le siège des oscillations d'un jet de part et d'autre du biseau, et de tourbillons ;

- d'autre part, les fréquences correspondant aux régimes d'oscillations de ces instruments ont des propriétés très particulières du point de vue du rayonnement, et il est donc intéressant de les étudier.

C'est pourquoi nous faisons une brève excursion hors du domaine strictement limité au champ interne et au champ externe, en rappelant succinctement certains travaux récents sur le fonctionnement des instruments à embouchure de flûte, autrement appelés "instruments à système lame d'air-biseau", ou "instruments à jet d'air".

4.1. Fonctionnement simplifié (modèle linéaire) d'un système lame d'air-biseau couplé à un tuyau : conditions de résonance

a) Un cas type de ces instruments est le tuyau d'orgue (Fig. 9) : un jet d'air sort d'un canal et atteint un biseau.

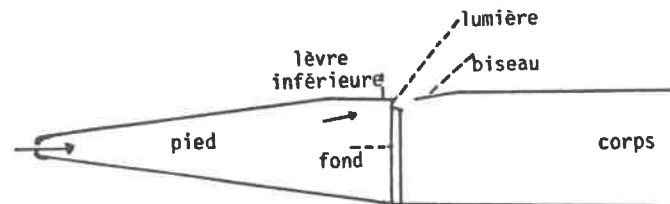


Fig.9 : schéma de tuyau d'orgue

Mais un autre cas type est celui où les paramètres du jet sont réglables : le plus simple est ce qu'on appelait au siècle dernier "l'excitation à plein orifice", que l'on pratique par exemple en faisant résonner une bouteille (cf Cummings (109, 110)). Mais ceci correspond aussi aux flûtes traversières, flûtes de Pan, nay,...

Dans tous les cas, il est connu depuis longtemps que la condition de résonance de l'ensemble est approximativement l'existence d'un noeud de pression à l'endroit de l'embouchure, à condition de tenir compte d'une "correction de bouche". Celle-ci a été très largement étudiée expérimentalement, par BOUASSE (22-23), qui traite des "tuyaux partiellement fermés à un bout" (la surface de la bouche est plus petite que celle du tuyau), par INGERSLEV et FROBENIUS (50), ou M. CASTELLENGO (24).

b) Le modèle le plus simple (en ondes stationnaires) est le suivant : si l_e est la longueur du tuyau, éventuellement corrigée par l'amortissement, le rayonnement au bout,...., l'admittance d'entrée du tuyau est $Y_p = -j \cotgkl_e$. Quant à celle de la bouche, elle est de même $Y_b = -j \cotgkh_e \approx \frac{-j}{kh_e}$. Or empiriquement, on sait que la condition de résonance est à peu près :

$$k(l_e + \frac{h_e}{u_e}) = \pi (\pi), \text{ c'est-à-dire } \tgk(l_e + \frac{h_e}{u_e}) = 0.$$

On doit donc avoir indifféremment :

- soit $Y = Y_t + \mu Y_b = 0$: l'admittance de la dérivation est minimum.
- soit $Z = Z_t + \frac{Z_b}{\mu} = 0$: l'impédance somme des impédances en série est minimum. C'est ce que considèrent certains travaux récents, que nous synthétisons à présent de manière très simplifiée.

c) Au départ, CREMER et ISING (29) considèrent que le jet a un débit alternatif Q_j qui se divise en deux débits, l'un Q_p dans le tuyau, l'autre Q_b dans la bouche :

$$Q_j = Q_b + Q_p \quad \text{ou} \quad S_j u_j = S_b u_b + S_p u_p$$

La pression étant supposée constante, ceci revient donc à interpréter l'admittance $Y = Y_p + \mu Y_b$ que nous avons défini plus haut comme l'admittance Y_j du jet.

Simultanément, COLTMAN (25) propose un autre modèle, considérant que le jet produit une différence de pression acoustique par transfert de sa quantité de mouvement. Puis ELDER (32) montre qu'il y a lieu d'unifier ces deux modèles a priori tout à fait différents. Nous résumons ci-dessous la théorie de celui-ci, telle qu'elle a été simplifiée par FLETCHER (38), en ne nous intéressant qu'aux termes linéaires.

d) ELDER représente schématiquement le tuyau d'orgue de la façon suivante (Fig. 10) :

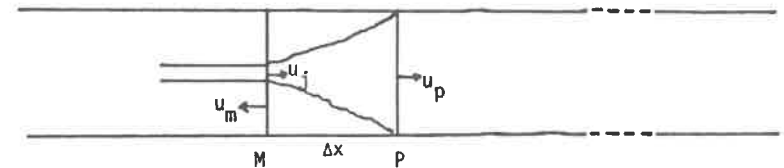


Fig.10 : jet (vitesse u_j) se divisant entre le tuyau (u_p) et la bouche (vitesse u_m)

Il "déplie" le tuyau, de façon que l'orifice de la bouche soit dans la même direction que celui du tuyau, et suppose que le jet se mélange complètement à l'air du tuyau sur une distance Δx petite devant la longueur d'onde.

Appelant u_p et u_m les vitesses moyennes (prises sur la section S_p et S_m) aux points P et M, il écrit :

$$S_j u_j = S_m u_m + S_p u_p \quad (12)$$

Les grandeurs considérées sont réelles, car elles ne sont pas acoustiques. ELDER les développe en série de FOURIER :

$$u = u_0 + \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \dots = u + \text{Re}(u_1) + \dots$$

où u_0 est la vitesse d'écoulement, $u_1 = |u_1|e^{j(\omega t + \phi_1)}$ la vitesse acoustique linéaire, ... : nous soulignons les grandeurs acoustiques réelles, au contraire des grandeurs complexes associées.

FLETCHER simplifie beaucoup les calculs en modifiant la formule (12) de la façon suivante : la surface du jet S_j peut varier dans le temps ; il admet que la vitesse de l'air traversant S_j est ($u_j - u_m$) :

$$S_j u_j = (S_m + S_j) u_m + S_p u_p = S_p u_m + S_p u_p \quad (12 \text{ bis})$$

Puis il écrit la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \Delta x S_p = \frac{du_p}{dt} + (p_p - p_m) S_p = \rho S_j (u_j - u_m)^2 + \rho S_m u_m^2 - \rho S_p u_p^2 \quad (13)$$

où p_p et p_m sont les pressions (réelles) prises en P et M.

(12 bis) et (13) impliquent alors :

$$\rho \Delta x \frac{du_p}{dt} + p_p - p_m = \rho \frac{S_j}{S_p} \left(1 - \frac{S_j}{S_p}\right) u_j^2 \simeq \rho \frac{S_j}{S_p} u_j^2 \quad (14)$$

Or FLETCHER considère que c'est surtout S_j qui varie dans le temps, et non u_j : l'équation (14) est alors linéaire.

Si Z'_p et Z_p sont les impédances du tuyau en P et M, on obtient au premier ordre :

$$p_p = p_{p0} + Z'_p u_{p1} = p_{p0} + (Z_p - j\rho\omega\Delta x) u_{p1}$$

$$\text{et } p_m = p_{m0} + Z_m u_{m1}$$

L'équation (14) se scinde alors selon les différents ordres (soit $V = u_{j0}$) :

$$\text{à l'ordre 0 : } p_{p0} - p_{m0} = \rho \frac{Q_{j0}}{S_p} V$$

$$\text{à l'ordre 1 : } Z_p u_{p1} - Z_m u_{m1} = \rho \frac{Q_{j1}}{S_p} V \quad (15)$$

Ceci revient à écrire que si l'on considère l'embouchure comme petite devant la longueur d'onde, le jet y produit un saut de pression acoustique ; il est l'analogie du générateur de tension électrique.

Finalement, les équations (15) et (12 bis) impliquent :

$$(Z_p + Z_m) Q_{p1} = Q_{j1} (Z_m + \rho V)$$

Un débit Q_{p1} maximal à l'entrée du tuyau impose donc que $(Z_p + Z_m)$, impédances du tuyau et de la bouche en série, soit minimal. Si l'orifice de la bouche est plus étroit que le tuyau, il suffit de remplacer $(Z_p + Z_m)$ par $(Z_p + S_p \frac{Z_b}{S_b})$. C'est bien la condition classique de fonctionnement, que nous noterons (A) : $Z_p + \frac{Z_b}{u}$ minimal.

e) Cette condition (A) appelle certains commentaires. Elle est réalisée si $\text{Im}(Z_p + \frac{Z_b}{u}) = 0$, soit $\text{Im}(Z_p) = -\frac{\text{Im}(Z_b)}{u} = -\frac{kb_p}{u}$.

Elle diffère donc sensiblement de la condition (B) correspondant à un maximum d'admittance à l'entrée du tuyau ($\text{Im}(Z_p)$ nul) qui est satisfaite pour une fréquence légèrement plus élevée. On peut tirer deux conséquences importantes de cette constatation :

- d'une part les fréquences correspondant aux conditions (A) et (B) sont peu éloignées : donc, pour les deux conditions, $Z_p = \frac{a}{b^2} - \frac{j}{b}$,

$$\text{où } \begin{cases} b = -\cot g k l_e \\ a = (1+b^2) (H_x^{x0} + \frac{a_0}{1+b_0^2}) \quad (\text{cf. } \S 3.1.1.) \end{cases}$$

Pour la condition (B), b est infini ; pour la condition (A),

$$b = \frac{\mu}{khe}, \text{ puisque } \operatorname{Im}(Z_p) = -\frac{khe}{\mu}.$$

- d'autre part les deux fréquences sont tout de même bien distinctes, et on peut montrer que $\operatorname{Re}(Z_p) \ll \operatorname{Im}(Z_p)$ pour la condition (A), d'où $|Y_p| \simeq |Y_b| = |Y_m|$.

Enfin, FLETCHER (37) montre que la condition (A) donne une fréquence située à peu près au centre des fréquences de résonance possibles quand la pression moyenne du souffle varie.

4.2. Comparaison des deux sources d'un tuyau cylindrique à bouche

4.2.1. Amplitude des deux sources

Les équations (15) et (12 bis) impliquent :

$$\left(1 - \frac{\rho V}{Z_p}\right) p_{p1} = \left(1 + \frac{\rho V}{Z_m}\right) p_{m1} \quad (16)$$

Pour alléger l'écriture, nous n'écrivons dorénavant plus les indices 1. On peut calculer les rapports des flux d'énergie de la bouche (indice b) et du tuyau principal (indice p) comme nous l'avons fait au § 3.1.1. Si nous admettons que la quantité b pour le tuyau n'est pas trop grande, puisque $\operatorname{Re}(Z_p) \ll \operatorname{Im}(Z_p)$, nous écrivons (cf §3.1.1):

$$\frac{I_{bo}}{I_{po}} = \frac{S_b}{S_p} \frac{|p_b|^2}{|p_p|^2} \frac{\operatorname{Re}(Y_{bs})}{\operatorname{Re}(Y_{ps})}$$

Or $p_b = p_m$, d'où :

$$\frac{I_{bo}}{I_{po}} = \frac{S_b}{S_p} \frac{|1 - \rho V Y_p|^2}{|1 + \rho V Y_m|^2} \frac{\operatorname{Re}(Y_{bs})}{\operatorname{Re}(Y_{ps})}$$

Or $\operatorname{Im}(Y_p) \simeq -\operatorname{Im}(Y_m)$, et $\operatorname{Re}(Y_m) \ll \operatorname{Im}(Y_m)$ et $\operatorname{Re}(Y_p) \ll \operatorname{Im}(Y_p)$;

$$\text{d'où } \frac{I_{bo}}{I_{po}} \simeq \frac{S_b}{S_p} \frac{\operatorname{Re}(Y_{bs})}{\operatorname{Re}(Y_{ps})} \text{ pour la résonance de l'instrument.}$$

Autrement dit (cf § 3.1.1.) :

$$\frac{I_{bo}}{I_{po}} = \frac{S_b^2}{S_p^2} \frac{1}{k^2 h e^2} \frac{1}{1+b^2} = \mu^2 \frac{1}{k^2 h e^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu}{khe}\right)^2} \simeq 1$$

Ce résultat, remarquablement simple, est le même que celui de ELDER (32) ; celui-ci en a donné une démonstration plus simple, mais la présente démonstration, plus complète, peut nous éclairer sur un point intéressant. Nous avons vu au § 3.1.1. que pour la fréquence correspondant au maximum de $|Y_p|$ (condition (B)), il y a un minimum d'émissions par la bouche. C'est bien parce que la fréquence de résonance du tuyau cylindrique à bouche (condition (A)) est inférieure à celle de la condition (B) que les émissions par la bouche et par l'extrémité du tuyau sont comparables, et même presque égales aux basses fréquences.

4.2.2. Phase des deux sources

Comme l'équation (16) implique que p_p et p_b sont à peu près en phase, on aboutit à une conclusion analogue en ce qui concerne la différence de phase des deux sources : pour la condition (B), la différence serait proche de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$, mais pour la condition (A), elle est au contraire voisine de 0 pour le fondamental, de π pour le partiel 2 (fréquence double du fondamental), de 0 pour le partiel 3,...

Ces résultats ont été observés expérimentalement par plusieurs auteurs : NORTHROP (71), INGERSLEV et FROBENIUS (50), FRANZ, ISING et MEINUSCH (43), COLTMAN (26), WU et PÉRID (91).

Pour conclure, il est bon de rappeler que la théorie ci-dessus est très simplifiée, puisqu'elle ne prend pas en compte le fonctionnement non linéaire de l'instrument : celui-ci fonctionne pour des fréquences qui sont un compromis entre les différentes fréquences de résonance passives de l'ensemble tuyau plus bouche. De surcroît, la bouche a toujours une forme compliquée, qui ne permet pas d'utiliser une formule connue pour l'impédance de rayonnement ; enfin les effets du son de biseau (cf ELDER (32), HOWE (49), COLTMAN (27), M. CASTELLENGO (24)) sont ignorés, bien qu'ils jouent un rôle non négligeable, en particulier du point de vue auditif.

5. PROBLEMES POSES PAR LA COMPARAISON ENTRE THEORIE ET EXPERIENCE

5.1. Tentative de comparaison expérience-théorie

N'ayant pas eu, faute de temps, la possibilité de procéder à une comparaison poussée entre résultats expérimentaux et résultats théoriques, nous nous contenterons de présenter des résultats très embryonnaires, qui nous permettent néanmoins d'avancer quelques idées sur les difficultés soulevées par ce travail.

Nous utiliserons dans ce but les résultats des mesures de WU et PERIO (91) ; ceux-ci étudient une flûte à bec soprano, tous trous bouchés, rayonnant par la bouche et le pavillon (do_4 , 525 Hz). Ils font une analyse de FOURIER de la pression en deux points ; puis, supposant les ondes sphériques, ils en déduisent l'intensité et la phase des deux sources pour chaque harmonique ; enfin, à titre de vérification, ils reconstituent le signal en un troisième point et le comparent au signal mesuré. Qualitativement, les résultats sont très bons ; quantitativement, l'erreur sur l'amplitude est en général de 1 à 3 décibels (exception faite de l'harmonique 5, très faible en niveau absolu, pour lequel l'erreur est de 10 dB) ; quant à l'erreur sur la phase, elle est de l'ordre de 0,4 à 0,8 radians. Pour le fondamental, on peut noter que l'accord est excellent (0,5 dB ; 0,08 radians).

De notre côté, la forme de l'instrument étant compliquée, nous avons employé l'ordinateur pour calculer le rapport entre les deux sources. Nous discuterons plus loin la validité de ce calcul ; présentons dès maintenant les résultats obtenus :

Numéro de l'harmonique	Rapport des amplitudes (dB) bouche/pavillon		Différence de phase (radians) bouche/pavillon	
	Expérimental (Wu et Pério)	Théorique	Expérimental (Wu et Pério)	Théorique
1	- 1,15	+3,29	0,02	0,02
2	- 3,94	+4,68	3,33	3,18
3	- 4,82	+4,86	0,4	0,05
4	-23,8	+3,71	4,17	3,20
5	-28	+1,86	1,04	0,07
6	- 5,3	-1,42	0,2	3,21

D'autre part, GIBIAT (44) a mesuré pour la même flûte dont le trou 7 (fig. 11) est ouvert ($f \simeq 800$ Hz), les intensités et phases des trois sources.

Voici les résultats obtenus par GIBIAT, comparés à notre calcul :

Harmonique	Bouche/pavillon				Trou 7/pavillon			
	Amplitude (dB)		Phase (rad)		Amplitude (dB)		Phase (rad)	
	Exp	Th	Exp	Th	Exp	Th	Exp	Th
1	-1,6	4,7	0,13	0,04	6,1	9,3	0,75	0,02
2	0,2	10	-0,53	0,05	4,4	5	3,03	3,17
3	4,6	-22	3,39	3,37	-11,5	-10,6	-0,85	0,00

On peut faire deux constatations : d'une part les résultats sur les phases, au moins aux basses fréquences, sont sensiblement meilleurs que les résultats sur les amplitudes ; d'autre part, l'accord entre la théorie et l'expérience semble beaucoup plus satisfaisant pour le trou latéral que pour la bouche. Ces résultats, très fragmentaires, appellent plusieurs remarques concernant les différentes suppositions qui sous-tendent les calculs théoriques :

- nous avons négligé l'influence de la vitesse moyenne V du jet, alors que l'expérience est faite en fonctionnement normal de l'instrument (nous avons montré au paragraphe précédent que en première approximation la vitesse du jet n'intervient pas pour un tuyau cylindrique, mais ce n'est pas évident dans le cas général) ;

- la forme de la bouche est compliquée, et son rayonnement est

mal connu ;

- les trous latéraux ouverts ont été corrigés uniformément par une longueur de 0,75 fois le rayon (cf Ch. I, § 4.2.2.) en plus de l'impédance de rayonnement ;

- l'interaction des sources par l'extérieur est négligée ;

- pour évaluer l'ordre de grandeur des erreurs provoquées par ces différentes approximations, nous avons calculé les fréquences de résonance d'une flûte à bec alto (fréquences correspondant à la condition (A)) : nous avons trouvé une erreur algébrique moyenne de -0,25 % et un écart quadratique moyen de 0,8 % par rapport aux résultats expérimentaux portant sur 50 valeurs comprises entre 220 Hz et 2200 Hz (16 doigts différents), la pression du souffle étant moyennement forte. Or il se trouve qu'un tel écart peut correspondre à une erreur assez importante en amplitude et en phase (surtout près des minimums d'émission par un trou ou la bouche) ;

- enfin, on ne connaît pas parfaitement les rapports de phase entre l'extrémité d'un tuyau et la source des ondes sphériques (cf § 2.1.)

5.2. Quelques remarques sur les différentes méthodes expérimentales

Pour conclure, nous voulons discuter brièvement les avantages et inconvénients de différentes méthodes expérimentales.

a) Dans une précédente publication (55), nous avons mesuré les amplitudes des sons émis par les différentes sources d'une flûte à bec alto et comparé les résultats au calcul numérique ; nous mesurons la pression approximativement à l'endroit du centre acoustique des ondes sphériques, et avons séparé les champs rayonnés par les différentes sources au moyen d'écrans de grandes dimensions devant les longueurs d'onde. L'accord qualitatif était satisfaisant, excepté une erreur systématique pour les basses fréquences : nous mesurons alors un très faible niveau à la sortie du pavillon, car plusieurs trous étaient ouverts, et il est clair que la diffraction par les écrans faussait les résultats.

L'avantage de cette méthode est sa simplicité ; de plus, elle élimine presque complètement les effets de réverbération de la salle. Mais elle ne peut évidemment donner que des résultats qualitatifs : il faudrait connaître le champ très proche des orifices de manière parfaite, ce qui est très difficile (notons que COLTMAN (27) a relevé précisément le champ de pression, en amplitude, aux alentours de la bouche d'un tuyau d'orgue). Il est bon de préciser d'autre part qu'il est nécessaire en tout cas de faire une correction pour tenir compte des différences de surfaces des divers orifices, puisqu'on utilise des microphones de surfaces identiques.

La même méthode (sans utilisation d'écrans) a été employée par WU et PERIO à titre de comparaison avec leur méthode décrite plus haut, et les résultats diffèrent en effet sensiblement.

L'utilisation d'écrans demanderait de plus à être justifiée, par exemple par une mesure de courbe d'impédance d'entrée de l'instrument avec et sans écrans.

b) La première méthode de WU et PERIO est évidemment beaucoup plus rigoureuse ; elle repose, nous l'avons dit, sur l'hypothèse du rayonnement par ondes sphériques, ce qui implique que l'on mesure la pression en des points assez éloignés de l'instrument pour éviter les effets de champ proche, mais on risque de se heurter alors aux réverbérations de la salle.

A ce sujet, nous avons proposé à DUMIELLE et THONIER (31) de faire un travail analogue (pour deux sources) de la façon suivante : au lieu de comparer la pression (en amplitude et en phase) en deux points, on la mesure en trois points mais seulement en amplitude. Une difficulté inattendue s'est alors révélée : le problème ainsi posé admet deux solutions, c'est-à-dire deux couples de sources. Compte-tenu des erreurs expérimentales, il n'a pas toujours été possible de discriminer entre les deux solutions pour éliminer celle qui ne correspondait pas à l'expérience.

c) Enfin, il reste la méthode la plus complète possible, évidemment très lourde, qui impose en pratique une analyse analogique et non une analyse de FOURIER du signal : l'exploration systématique du champ afin d'obtenir des courbes. C'est la méthode retenue par

NORTHROP (71) et COLTMAN (26), qui ont mesuré l'amplitude de la pression ; il est clair qu'elle évite d'avoir à émettre des hypothèses sur la manière dont rayonnent les différentes sources.

En définitive, nous voyons que la comparaison entre la théorie et l'expérience pose de multiples problèmes ; il est à notre avis souhaitable d'obtenir une concordance plus satisfaisante, en commençant par l'étude complète du rayonnement par une seule source, mais il est peu probable qu'il sera possible d'atteindre une précision aussi grande que pour l'impédance d'entrée. Pour des raisons de commodité, il est sans doute préférable d'utiliser pour atteindre cet objectif des instruments de grandes dimensions, et émettant des harmoniques suffisamment intenses.

CHAPITRE IV :

PROPAGATION DANS LES LIGNES FINIES :

DISCUSSION DES NOTIONS D'ONDE EVANESCENTE ET DE FREQUENCE DE COUPURE.

Présentation

A plusieurs reprises, nous nous sommes heurté à des problèmes concernant la propagation des ondes dans les instruments à vent, que nous n'avons pas résolu de manière rigoureuse. Ainsi en est-il :

- de la création de modes non plans "évanescents" par une discontinuité de section, ou un trou latéral (ch I §4), ou bien encore par le débouché d'un tuyau dans l'espace infini (ch I §6). Peut-on connaître la longueur minimale nécessaire pour que ces modes soient effectivement évanescents, c'est-à-dire ne transportent pas d'énergie?

- de la définition d'une fréquence de coupure pour un tuyau percé d'un réseau fini de trous latéraux (ch II §2.6; ch III §3); à partir de quelle longueur l'impédance converge-t-elle, dans la bande d'arrêt, vers l'impédance itérative?

- de la définition d'une fréquence de coupure pour un pavillon fini (ch I §5): existe-t-il une fréquence au-dessous de laquelle le pavillon ne transmet pas d'énergie?

Ces divers problèmes présentent des similitudes; en fait, les instruments à vent constituent des cas particuliers de lignes de transmission. Ainsi nous montrerons que les pavillons sont, dans l'approximation unidimensionnelle, des lignes continues asymétriques à caractéristiques variables. D'une part un tuyau percé de trous latéraux est, nous l'avons vu, une ligne symétrique discrète (à caractéristiques constantes si les trous latéraux sont identiques et équidistants); enfin un mode non plan

peut être considéré comme l'analogue d'une onde dans une ligne de transmission symétrique.

Nous avons donc été amené à étudier de façon générale les notions d'onde évanescente et de fréquence de coupure dans les lignes de transmission finies, et certains systèmes analogues; ces notions bien connues sont des notions idéales, définies sans ambiguïté pour une ligne infinie sans pertes. Nous avons cherché à les étendre à des lignes finies, et montré que ce n'est pas toujours possible. Ainsi la généralisation de la notion d'onde évanescente aux lignes finies n'est possible que sous certaine condition portant sur l'impédance terminale de la ligne: pour une ligne symétrique, cette condition porte simplement sur le signe de la partie imaginaire de cette impédance. Quant à la fréquence de coupure, dans les cas où elle peut être définie, elle dépend a priori de la longueur et de l'impédance terminale de la ligne. Cette discussion porte d'abord sur les lignes à caractéristiques constantes sur toute leur longueur, puis elle est étendue aux lignes à caractéristiques variables. Les exemples choisis justifient ou au contraire infirment certaines généralisations souvent admises comme évidentes.

(L'ensemble de ce chapitre constitue un article proposé en 1981 à la Revue de Physique Appliquée).

1. INTRODUCTION.

1-1. PROPAGATION DES ONDES DANS LES LIGNES FINIES : POSITION DU PROBLEME.

Il est bien connu en électricité que la notion de filtre est une notion idéale : il est en effet impossible pratiquement de réaliser de manière absolument rigoureuse un circuit qui atténue certaines fréquences et laisse passer les autres sans affaiblissement ni renforcement. Skilling(185) par exemple affirme que les calculs de filtres effectués comportent deux idéalizations : l'hypothèse que le filtre débouche sur son impédance image, et le fait de négliger les pertes de puissance.

Plus généralement, ceci est vrai des lignes, dont les filtres ne sont qu'un cas particulier défini par l'utilisation qui en est faite : les notions de fréquence de coupure, de bande passante, de bande d'arrêt, d'onde propagative et d'onde évanescente n'ont de définition stricte que dans le cas idéal d'une ligne sans pertes débouchant sur son impédance itérative (dite aussi caractéristique).

Il est à noter que celle-ci est obligatoirement réalisée à toute fréquence si la ligne est infiniment longue.

Par ailleurs, deux problèmes importants amènent à la même conclusion : d'une part, dans un guide d'onde, les modes non plans sont dits propagatifs ou évanescents suivant les fréquences ; d'autre part, lors de la réfraction d'une onde oblique à l'interface de deux milieux différents, l'onde réfractée peut être propagative ou évanescence suivant l'angle d'incidence. L'analogie de ces problèmes avec les lignes étant parfaite, la distinction entre onde propagative et onde évanescence n'est, là encore, bien caractérisée que si le guide, ou le deuxième milieu (pour l'onde réfractée) sont infinis.

Ceci est d'ailleurs bien connu des opticiens : si on rapproche un troisième milieu du premier, le phénomène de réflexion totale sur le deuxième milieu peut disparaître. Citons par exemple Bouasse (162) : "On doit admettre que cette onde évanescence ne se propage pas au sens propre du mot ; il faut la considérer comme un mouvement stationnaire, auquel nous pouvons conserver le nom d'onde et qui n'existe que jusqu'à une certaine profondeur (dans le deuxième milieu NDR). Son existence est indispensable pour qu'il y ait réflexion totale ; si nous la supprimons par l'approche d'un autre corps, la réflexion totale n'a plus lieu. Ce n'est pas l'énergie (nulle d'après la théorie) de l'onde évanescence que nous recueillons, c'est le phénomène entier que nous modifions." Quant à Bruhat (167), il parle de la réalisation d'une expérience qui "montre que la réflexion ne peut être totale que si la couche n'est pas trop mince".

Le problème que nous nous posons est l'extension éventuelle des notions citées plus haut à une ligne quelconque, finie et débouchant sur une impédance quelconque. Dans le cas général, peut-on faire une distinction entre deux catégories d'ondes comme on le fait pour la ligne idéale ? Si ce n'est pas le cas, à quelles conditions une telle distinction demeure-t-elle possible ? Pour répondre à ces questions, il faudra adopter au préalable des définitions précises pour les notions ci-dessus.

1-2. LES ETUDES ANTERIEURES SUR CE SUJET

Les phénomènes de propagation des ondes sont d'une grande diversité ; les auteurs qui les ont étudiés ont pensé à certaines applications, soit pour les lignes, soit pour les structures analogues, mais rares sont les études générales. En outre, le plus souvent la propagation dans les lignes finies n'est étudiée que pour ce que nous appellerons la bande passante idéale, c'est-à-dire la bande passante définie pour des lignes infinies.

Nous espérons trouver cette étude dans l'ouvrage très général de L. Brillouin et M. Parodi "propagation des ondes dans les milieux périodiques" (164). Mais dans la totalité du livre, ceux-ci sous-entendent que les lignes envisagées sont infinies ; à la page 73 de l'édition française, on a l'espoir qu'ils vont en venir aux lignes finies, malheureusement c'est aussitôt pour dire : "Si nous voulons appliquer les résultats que nous avons obtenus à un réseau fini, il nous faut introduire aux extrémités libres des forces qui dépendent des conditions aux limites".

En fait, c'est à propos de la réflexion d'une onde sur un milieu stratifié (en optique ou en acoustique) que notre problème a été le plus étudié. Ainsi Brekhovskikh, dans son livre "Waves in layered media", (163) étudie la réflexion d'une onde sur un milieu stratifié et mentionne l'existence de fuite d'ondes à travers une couche finie : "Pour une couche infiniment épaisse, la réflexion totale interne se produit pour des angles d'incidence suffisamment grands. Cependant, avec une couche d'épaisseur finie, la réflexion ne peut pas se produire, et l'onde va pénétrer partiellement à l'intérieur de la couche. Cet effet est complètement analogue à la fuite d'une particule à travers une barrière de potentiel en mécanique quantique".

A propos des filtres électriques, nous n'avons pas trouvé cette étude. Les électriciens étendent bien les notions de bande d'arrêt, de bande passante et de fréquence de coupure aux cas pratiques ; mais ils ne le font qu'après s'être posé la question pragmatique suivante : "Comment réaliser au mieux sur la plus large bande de fréquence possible l'impédance itérative ?" (On sait que depuis Campbell (169) et Johnson (176) on utilise à cette fin pour des filtres en T ou en π des demi-cellules convenablement modifiées).

Au sujet des filtres mécaniques et acoustiques, nous avons trouvé notre problème résolu dans un cas particulier par Lindsay (178) : celui-ci étend en effet la définition des ondes propagatives et évanescentes au cas du filtre débouchant sur l'impédance itérative des ondes planes.

En ce qui concerne les guides d'ondes, les notions de modes propagatifs et évanescents ne sont envisagées que pour des guides infiniment longs : les guides de longueur finie sont étudiés seulement pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure. C'est le cas de très nombreux ouvrages[†], portant aussi bien sur les ondes électromagnétiques que sur les ondes acoustiques ; c'est aussi le cas du dictionnaire de l'I.E.E.E. (189). Celui-ci adopte une définition pour mode évanescent qui n'est valable que pour un guide infini : "Une configuration de champ... dont l'amplitude diminue le long du guide d'onde, mais la phase est inchangée" ; par contre, il adopte une définition générale pour la fréquence de coupure ("la fréquence au-dessous de laquelle la constante de propagation est réelle"), mais cette définition est abstraite, car, nous le montrerons, elle ne permet pas de mesure physique. Enfin, il est intéressant de citer De Broglie (166) à propos des guides d'ondes électromagnétiques rectangulaires : "La fréquence de coupure au-dessous de laquelle il n'y a pratiquement (souligné par nous) plus de propagation" ; il sous-entend vraisemblablement qu'il existe un problème pratique.

Enfin, le problème des lignes à raccordements progressifs se rencontre souvent, surtout en acoustique : des calculs ont été faits concernant la propagation dans les pavillons de longueur finie (Crandall (108), Olson (137), Rocard (140, 142), mais le problème des ondes évanescentes dans les pavillons finis n'est jamais posé complètement. De plus, il l'est souvent de manière erronée, et c'est ce qui au départ a motivé la présente étude : en effet dans un pavillon exponentiel, la solution pour les ondes est de la forme $p(x,t) = (ae^{-kx} + be^{+kx}) e^{j\omega t}$; dans cette expression, le rapport b/a est complexe (que k soit réel ou imaginaire pur) car déterminé par

[†] par exemple (134, 171, 165, 174, 168, 182, 183, 184, 186, 187)

l'impédance à l'extrémité. De ce fait, quand k est réel, le flux d'énergie transmis par ce pavillon n'est nul que si b est nul, ou au moins si b/a est réel : il se trouve que plusieurs auteurs ont considéré que b/a était toujours réel. C'est d'ailleurs la même erreur que commet Crawford (172) dans la résolution de l'équation de Klein-Gordon, qu'il effectue en grandeurs réelles : il obtient comme solution générale

$p(x,t) = (Ae^{-kz} + Be^{+kz}) \cos(\omega t + \varphi)$, alors que celle-ci est en fait :

$$Ae^{-kz} \cos(\omega t + \varphi) + Be^{+kz} \cos(\omega t + \psi).$$

1-3. PLAN DE L'ETUDE

Le paragraphe 2 précise simplement les notations utilisées en général bien connues, pour décrire les lignes, discrètes ou continues.

Dans le paragraphe 3, nous discutons les notions d'ondes propagatives et d'ondes évanescentes. Après avoir tenté de définir très précisément ces notions dans le cas idéal à l'aide de deux critères, nous cherchons si ceux-ci peuvent être étendus aux lignes finies sans pertes, et à quelles conditions.

Le paragraphe 4 discute l'existence de fréquences de coupure, et montre qu'il est très délicat d'obtenir des résultats généraux.

Le paragraphe 5 illustre les deux précédents, à l'aide de trois exemples : deux exemples de lignes symétriques (une onde réfractée dans un milieu homogène, et un mode non plan dans un guide), et un exemple de ligne asymétrique (le pavillon exponentiel).

Enfin le paragraphe 6 étend les résultats du paragraphe 3 aux lignes sans pertes à caractéristiques variables.

2. DESCRIPTION D'UNE LIGNE CONSTITUEE DE L'ASSOCIATION

DE QUADRIPOLES EN SERIE :

NOTATIONS UTILISEES

Nous voulons ici simplement préciser nos notations pour une ligne constituée de l'association de quadripôles identiques en série. Nous partirons de la ligne discrète, constituée de n quadripôles. Puis nous étendrons les résultats à la ligne continue.

2-1. RELATION MATRICIELLE

Tout ce qui suit est écrit en nombres complexes. La grandeur réelle P est donnée par $P = \text{Re} (p e^{j\omega t})$, où p est la grandeur complexe associée, ω la pulsation, t le temps ; le module de p est l'amplitude de P , et l'argument de p , noté $\text{Arg } p$, la phase de P (on supposera toujours le régime permanent).

Soit un quadripôle défini par la relation suivante :

$$\begin{cases} p_n = Bp_{n-1} + Au_{n-1} \\ u_n = Dp_{n-1} + Cu_{n-1} \end{cases}$$

Les grandeurs p et u caractérisent complètement le champ dans la ligne envisagée : elles peuvent être par exemple la pression et une composante de la vitesse acoustiques, ou bien la tension et l'intensité électriques, ou toutes autres grandeurs (ainsi pour les pavillons acoustiques, on peut être amené à choisir des grandeurs abstraites, comme le produit du

diamètre par la pression ou la vitesse acoustiques).

Les grandeurs p et u jouant des rôles équivalents, il peut être commode d'adopter la notation $\bar{}$ pour marquer une interversion de leurs rôles : ainsi $\bar{p} = u$ et $\bar{u} = p$; par contre, le conjugué d'un nombre z sera toujours noté z^* .

L'indice $(n-1)$ est ici l'indice de l'entrée du même quadripôle, et n l'indice de la sortie de celui-ci.

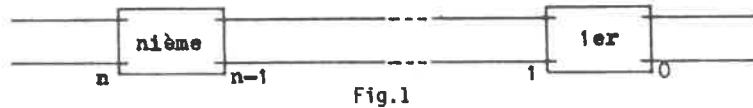


Fig.1

On suppose que la limite sur laquelle débouche la série de quadripôles est représentée par une condition d'impédance, telle que $Z_0 = p_0/u_0$, où Z_0 est connue. En fonction de p_0 et u_0 , on peut encore écrire :

$$\begin{cases} p_n = B_n p_0 + A_n u_0 \\ u_n = D_n p_0 + C_n u_0 \end{cases} \quad (1)$$

On suppose que $BC-AD = 1$; si tel n'était pas le cas, $(BC-AD = e^{2W})$ il suffirait de remplacer les variables p_n et u_n par p_n/e^{nW} et u_n/e^{nW} , et les constantes A, B, C et D par $A/e^W, B/e^W, C/e^W$ et D/e^W .

Ceci posé, on trouve :

$$\begin{cases} B_n = \cos n\phi + \Delta \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} & ; & A_n = A \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} \\ D_n = D \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} & ; & C_n = \cos n\phi - \Delta \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} \end{cases}$$

$$\text{où } \cos \phi = \frac{B+C}{2} & ; & \Delta = \frac{B-C}{2}, \text{ et donc } AD = -\sin^2 \phi - \Delta^2$$

$j\phi$ est appelé constante de propagation du filtre (tous ces nombres sont complexes) ; on notera que ϕ est définie au signe près ; on choisira par convention toujours la valeur de ϕ dont la partie imaginaire est négative.

(Toutes les constantes A, B, C, D et ϕ sont en général fonctions de la fréquence, mais elles peuvent également dépendre d'autres paramètres).

2-2. RELATION HOMOGRAPHIQUE : IMPEDANCE RAMENEE ET IMPEDANCE ITERATIVE

On peut montrer que, si $Z = p/u$,

$$Z_n = \frac{A_n + B_n Z_0}{C_n + D_n Z_0} \text{ peut se mettre sous la forme :}$$

$$(2) \tilde{Z}_n = \frac{-j \operatorname{tg} n\phi + \tilde{Z}_0}{1 - j \operatorname{tg} n\phi \tilde{Z}_0}, \text{ avec } \tilde{Z}_n = \frac{Z_n}{\xi + j \frac{\Delta}{\sin \phi} (Z_n - \zeta)}$$

$$\text{et } \zeta = \frac{A}{-j \sin \phi - \Delta} = \frac{-j \sin \phi + \Delta}{D}$$

ζ est appelée impédance itérative, c'est-à-dire impédance qui se reproduit égale à elle-même tout au long du filtre, et Z_n est appelée impédance ramenée de Z_0 par n éléments.

$$\zeta \text{ est solution de l'équation : } \zeta = \frac{A+B\zeta}{C+D\zeta}$$

Cette équation a une autre solution : comme Brillouin, nous l'appellerons $-\zeta'$, où ζ' est l'impédance itérative "dans l'autre sens" :

$$-\zeta' = \frac{A}{j \sin \phi - \Delta} = \frac{j \sin \phi + \Delta}{D}$$

Nous y reviendrons au § 2-7. Pour l'instant, nous en tirerons la forme canonique donnée par Brillouin à la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} B_n & A_n \\ D_n & C_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\zeta + \zeta'} \begin{pmatrix} \zeta e^{-jn\phi} + \zeta' e^{jn\phi} & -2\zeta\zeta' j \sin n\phi \\ -2j \sin n\phi & \zeta' e^{-jn\phi} + \zeta e^{jn\phi} \end{pmatrix} \quad (1\text{bis})$$

$$\text{Il en résulte : } \zeta\zeta' = \frac{A}{D} = \frac{A_n}{D_n}$$

$$\text{et } \tilde{Z}_n = \frac{Z_n(\zeta + \zeta')}{Z_n(\zeta - \zeta') + 2\zeta\zeta'}$$

p et u jouant des rôles identiques, on obtiendrait des relations similaires avec l'admittance Y, en interchangeant A et D, et B et C.

2-3. RELATION LINEAIRE

La relation matricielle peut également se mettre sous la forme

$$\begin{cases} p_n = a e^{-jn\phi} + b e^{jn\phi} \\ u_n = a/\zeta e^{-jn\phi} - b/\zeta' e^{jn\phi} \end{cases} \quad (3)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} p_n = a e^{-jn\phi} + b e^{jn\phi} \\ u_n = -\frac{A}{\lambda} (a e^{-jn\phi} + b e^{jn\phi}) - \frac{j \sin n\phi}{\lambda} (a e^{-jn\phi} - b e^{jn\phi}) \end{cases}$$

où a et b sont des constantes complexes déterminées par la connaissance de p_0 et u_0 . Il est à noter que b/a , que Brillouin appelle coefficient de réflexion, est entièrement déterminé par Z_0 ; il vérifie :

$$\frac{b}{a} = e^{-2jn\phi} \frac{Z/\zeta - 1}{Z/\zeta' + 1}$$

$$\text{et donc en particulier : } \frac{b}{a} = \frac{Z_0/\zeta - 1}{Z_0/\zeta' + 1}$$

$$b \text{ est nul si } Z = \zeta, \text{ et } a \text{ est nul si } Z = -\zeta'$$

On ne retire rien à la généralité de la relation (3), en remarquant que toute ligne telle que $BC \cdot AD = 1$ peut être décrite par la relation (4) :

$$(4) \begin{cases} p = a e^{-jn\phi} + b e^{jn\phi} \\ u = \gamma (a e^{-jn\phi} + b e^{jn\phi}) + \delta (a e^{-jn\phi} - b e^{jn\phi}) \end{cases}$$

$$\text{on a } \begin{cases} \gamma + \delta = 1/\zeta \\ \gamma - \delta = -1/\zeta' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta'} \right) = -\frac{\Delta}{A} \\ \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'} \right) = -j \frac{\sin n\phi}{A} \end{cases}$$

La relation entre Z_n et $\tilde{Z}_n$ (cf §2-2.) se met alors sous la forme :

$$\frac{1}{Z_n} = \frac{\delta}{\tilde{Z}_n} + \gamma$$

En interchangeant les rôles de p et u, on aurait de même :

$$(4 \text{ bis}) \begin{cases} u = \bar{a} e^{-jn\phi} + \bar{b} e^{jn\phi} \\ p = \bar{\gamma} (\bar{a} e^{-jn\phi} + \bar{b} e^{jn\phi}) + \bar{\delta} (\bar{a} e^{-jn\phi} - \bar{b} e^{jn\phi}) \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \bar{\gamma} = \frac{1}{2} (\zeta - \zeta') = \frac{\Delta}{D} \\ \bar{\delta} = \frac{1}{2} (\zeta + \zeta') = -\frac{j \sin n\phi}{D} \end{cases}$$

2-4. QUADRIPOLE SYMETRIQUE (OU RETOURNABLE)

Si $B = C$, c'est-à-dire si Δ (et γ) sont nuls, le quadripôle est dit symétrique (ou retournable). Les deux extrémités sont liées par la même relation, au signe de A et D près. Les deux impédances itératives sont alors égales.

2-5. LES LIGNES CONTINUES A CARACTERISTIQUES CONSTANTES

- La relation (3) relie les extrémités des différents quadripôles entre elles ; elle est donc valable pour des valeurs entières de n . Mais on peut l'étendre à tout nombre réel X : on obtient ainsi une ligne continue, en général fictive, puisqu'il n'est pas possible, sauf cas très particuliers, de construire une ligne continue qui aurait les mêmes caractéristiques que la ligne discrète en certains points équidistants, correspondant aux extrémités des quadripôles.
- Inversement, on admettra avec Brillouin et Parodi que toute ligne continue peut être décrite par la relation suivante :

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} p(x) = a e^{-j\gamma x} + b e^{j\gamma x} \\ u(x) = a/\zeta e^{-j\gamma x} - b/\zeta' e^{j\gamma x} \end{cases}$$

Dans cette relation, x est la coordonnée d'espace, j la constante de propagation par unité de longueur, ζ et ζ' les deux impédances itératives, a et b deux constantes quelconques. On peut également définir une relation analogue à la relation (4) et à la relation (4bis), en définissant γ , δ , $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ à partir de ζ et ζ' , et de même une relation analogue à la relation matricielle canonique (1bis). Quant à la relation homographique (2), elle devient :

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{-j \operatorname{tg} \gamma x + Z(0)}{1 - \operatorname{tg} \gamma x \bar{Z}(0)} \quad \text{où} \quad Z(x) = \frac{Z(x) (\zeta + \zeta')}{Z(x) (\zeta - \zeta') + 2\zeta\zeta'} \\ Z(x) &= p(x)/u(x) \end{aligned}$$

- A partir de cette ligne continue, on peut définir une infinité de lignes discrètes en choisissant une longueur λ pour le quadripôle de base ; les relations matricielle (1) et homographique (2) sont alors obtenues de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma \lambda & A &= -j \frac{\sin \phi}{\delta} & D &= -j \frac{\sin \phi}{\bar{\delta}} & \Delta &= -\gamma A \\ B &= \cos \phi + \Delta & C &= \cos \phi - \Delta \end{aligned}$$

- la suite de l'exposé est écrite pour une ligne continue, mais il nous arrivera d'utiliser parfois aussi les notations valables pour une ligne discrète, les relations ci-dessus permettant le passage de l'une à l'autre ; λ étant une longueur quelconque, les grandeurs sans dimension $\phi = \gamma \lambda$ et $X = x/\lambda$ correspondant à la ligne discrète, et les grandeurs γ (inverse d'une longueur) et x (longueur) correspondant à la ligne continue.

Pour la ligne continue, on peut ajouter une notation différentielle aux autres notations. Pour la trouver, on peut :

- soit partir de la relation matricielle de la ligne discrète, et passer à la limite : (1) peut s'écrire :
$$\begin{cases} p_n = A u_n + B (u_n - u_0) \\ u_n = C p_n + D (p_n - p_0) \end{cases}$$

- soit plus simplement partir de la notation linéaire (4) et (4bis) : on obtient :
$$(5) \quad \begin{cases} u = \gamma p + j \frac{\delta}{\gamma} p' \\ p = \bar{\gamma} u + j \frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} u' \end{cases}$$
 (dans tout ce qui suit, ' et '' représenteront toujours les première et deuxième dérivations par rapport à x).

2-6. CAS OU $BC - AD = e^{2W} \neq 1$

Dans ce cas, la relation (4) s'écrit :

$$(6) \quad \begin{cases} p_n = e^{nW} (a e^{-j\phi n} + b e^{j\phi n}) \\ u_n = \gamma p_n + \delta e^{nW} (a e^{-j\phi n} - b e^{j\phi n}) \end{cases}$$

$$\text{où } \cos \phi = \frac{1}{2} (B + C) e^{-W} ; \quad \gamma = -\frac{\Delta}{A} ; \quad \delta = -j \frac{\sin \phi}{A} e^W$$

Le passage de la ligne discrète à la ligne continue s'effectue dans les conditions indiquées au § 2-5., W étant à remplacer par w , inverse d'une longueur. Le système différentiel (5) s'écrit alors :

$$(7) \quad \begin{cases} u = (\gamma - j \frac{\delta}{\gamma} w) p + j \frac{\delta}{\gamma} p' \\ p = (\bar{\gamma} - j \frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} w) u + j \frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} u' \end{cases}$$

2-7. EQUIVALENCE LIGNE INFINIE - LIGNE DEBOUCHANT SUR SON IMPEDANCE ITERATIVE

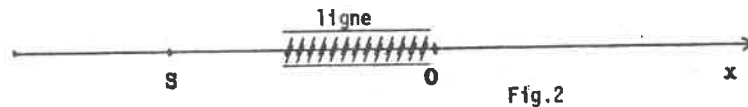
2-7-1. Si φ n'est pas réel

Si l'extrémité 0 est rejetée à l'infini, la relation (3) montre alors que :

$$\text{Soit } p \sim ae^{-j\varphi x}, \quad u \sim ae^{-j\varphi x}/\zeta, \quad \text{et } Z \rightarrow \zeta$$

$$\text{Soit } p \sim be^{j\varphi x}, \quad u \sim be^{j\varphi x}/-\zeta', \quad \text{et } Z \rightarrow -\zeta'$$

Par convention, nous supposons que l'axe des x est orienté en partant de la source B (Fig. 2) :



Or nous avons choisi φ tel que $\text{Im}(\varphi) < 0$; par conséquent les grandeurs ne pouvant devenir infinies quand x croît, seule la première éventualité de ligne infinie nous intéresse : ζ sera l'impédance itérative que nous retiendrons, et a ne sera jamais nul, puisque imposé par la source.

2-7-2. Si φ est réel

Il n'y a alors plus d'amortissement des exponentielles quand x tend vers l'infini. Mais ce cas n'a pas de réalité physique stricte, puisque, comme nous le verrons, il impliquerait l'inexistence de pertes. Or si celles-ci peuvent être négligées localement, elles ne peuvent pas l'être sur une longue distance.

Par conséquent, pour une ligne infinie (c.a.d. très longue), dans une portion très éloignée de l'extrémité, il est possible, tout en négligeant les pertes, d'admettre que l'impédance est toujours l'impédance itérative, que φ soit réel ou non.

3. LES LIGNES SANS PERTES

3-1. CONDITION IMPOSEE A UNE LIGNE SANS PERTE.

Le flux moyen d'énergie transmis d'un quadripôle à l'autre est donné par la relation : $I = \frac{1}{2} \text{Re}(pu^*)$.

La ligne est dite sans pertes (pertes sous forme calorifique : amortissement ; pertes sous forme d'énergie de même nature que les vibrations considérées : rayonnement) si le flux ne varie pas d'un quadripôle à l'autre ; pour une ligne continue, il doit donc être indépendant de x .

Ceci impose trois conditions :

AC^* imaginaire pur, BD^* également, et $BC^* + AD^* = 1$

Ceci implique : AB^* et CD^* imaginaires purs, et $|e^{2W}| = |BC-AD| = 1$.

Si on ajoute la condition $W = 0$, le flux d'énergie est constant si et seulement si B et C sont réels, et A et D sont imaginaires purs. Le système (6) du § 2-6. nous montre que si on n'impose pas la condition $W = 0$, seule la phase des grandeurs sera affectée, mais non leur amplitude. Il était au demeurant évident que la condition $\text{Re}(pu^*)$ constante est inchangée si on multiplie p et u par la même constante complexe de module 1.

On obtient alors : $\cos \phi = \cos \varphi l$ réel, et $\gamma = \frac{1}{2} \frac{C-B}{A}$ et $\bar{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{B-C}{D}$ imaginaires purs. Deux cas se présentent :

$$\text{soit } \cos \varphi l < 1, \quad \text{et } \begin{cases} \varphi \text{ réel} \\ \zeta \text{ complexe, avec } \text{Re}(\zeta) \neq 0, \text{ et } \zeta = \zeta'^* \\ (\zeta \text{ réel si le filtre est symétrique}) \\ \delta = -\frac{j \sin \varphi l}{A} \quad \text{et} \quad \bar{\delta} = -\frac{j \sin \varphi l}{D} \text{ réels} \end{cases}$$

soit $\cos \varphi > 1$, et $\begin{cases} \varphi \text{ imaginaire pur} \\ \zeta \text{ et } \zeta' \text{ imaginaires purs} \\ \delta \text{ et } \delta' \text{ imaginaires purs} \end{cases}$

Comme nous l'avons dit (§ 2-6-2.), il n'est pas possible de négliger les pertes sur une longue distance. Mais dans bien des cas, c'est une approximation suffisante.

Nous montrons en annexe I que le flux d'énergie peut se mettre sous la forme suivante,

$$I = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\varphi} |p|^2 (\text{Arg } p)' = -\frac{1}{2} \frac{\delta'}{\varphi} |u|^2 (\text{Arg } u)'$$

Il est proportionnel au carré de l'amplitude et à la dérivée de la phase de chacune des grandeurs. Pour caractériser des ondes, on peut donc se contenter par exemple de l'amplitude et du flux d'énergie, la variation de phase n'apportant pas d'informations supplémentaires. Ainsi, il est équivalent de dire que le flux d'énergie est nul ou qu'il n'y a pas de rotation de phase (ceci correspond au cas des ondes stationnaires, pour lesquelles les grandeurs réelles peuvent se mettre sous la forme $f(x)g(t)$: ceci est la définition la plus couramment admise pour ce terme, et nous l'adopterons).

3-2. LE FILTRE IDEAL : LIGNE SANS PERTES DEBOUCHANT SUR SON IMPEDANCE ITERATIVE

On a (cf § 2-6.) $\begin{cases} p = ae^{-j\varphi x} \\ u = a/\zeta e^{-j\varphi x} \end{cases}$

Si φ est réel : $\begin{cases} |p|^2 = |a|^2 \\ |u|^2 = \frac{|a|^2}{|\zeta|^2} \end{cases}$

Si φ est imaginaire pur : $\begin{cases} |p|^2 = |a|^2 e^{-2\alpha x} \\ |u|^2 = |a|^2 / |\zeta|^2 e^{-2\alpha x} \end{cases}$
(Soit $\varphi = -j\alpha$, où α est positif)

On a donc réalisé un filtre en p et u :

Dans la bande passante (φ^2 positif), $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ et $\left|\frac{u}{u_0}\right|$ sont constants et égaux à 1.

Dans la bande d'arrêt (φ^2 négatif), $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ et $\left|\frac{u}{u_0}\right|$ sont supérieurs à 1 et décroissent exponentiellement dans l'espace.

Ces deux bandes sont séparées par la valeur critique ($\varphi = 0$) de la constante de propagation, pour laquelle $\left|\frac{p}{p_0}\right|$ et $\left|\frac{u}{u_0}\right|$ sont constants et égaux à 1.

On peut trouver deux critères de différenciation des deux bandes, (à φ constant) :

1°. Le critère d'amplitude : dans la bande passante, l'amplitude est constante le long de la ligne. Dans la bande d'arrêt, elle décroît exponentiellement. Les ondes sont alors dites évanescentes. Certains auteurs parlent dans ce cas d'atténuation réactive des ondes (185).

2°. Le critère de flux d'énergie : celui-ci est non nul dans la bande passante, et nul dans la bande d'arrêt. Comme nous l'avons noté, ceci revient aussi à dire que la phase varie dans la bande passante, et est constante dans la bande d'arrêt.

Les ondes évanescentes sont donc un cas particulier d'ondes stationnaires qui décroissent exponentiellement avec la coordonnée d'espace.

Un troisième critère est souvent utilisé pour distinguer les deux bandes : c'est celui de la périodicité dans l'espace. Il découle des deux critères précédents, mais ne s'applique en toute rigueur qu'aux lignes infinies : dans la bande passante, les ondes sont périodiques dans l'espace, et dites alors propagatives : au contraire, elles ne le sont pas dans la bande d'arrêt. Pour pouvoir définir des ondes propagatives pour une ligne finie débouchant sur son impédance itérative, il faudrait le faire avec un critère d'amplitude, ou, mieux, avec un critère portant sur

la variation de la phase. Nous définirons une onde propagative comme une onde dont la phase varie linéairement avec x , autrement dit telle que la dérivée de la phase est constante. Ceci implique, pour les lignes sans pertes, une amplitude constante.

Nous avons choisi le terme propagatif, distinct de progressif, car les diverses définitions de ce dernier terme sont en général beaucoup plus restreintes que la définition ci-dessus, et ne peuvent pas s'appliquer à certaines lignes très particulières, comme les filtres, les pavillons,...

3-3. LIGNE (FINIE) SANS PERTES NE DEBOUCHANT PAS SUR SON IMPEDANCE ITERATIVE

3-3-1. Difficulté de la généralisation

Si b n'est pas nul, on a :

$$\begin{cases} p = a e^{-j\varphi x} + b e^{j\varphi x} \\ u = a/\zeta e^{-j\varphi x} - b/\zeta e^{j\varphi x} \end{cases}$$

avec φ réel ou imaginaire pur, et b/a en général complexe, car déterminé par Z_0 (cf § 2-3.).

Aucun des deux critères de distinction entre les deux cas φ réel et φ imaginaire pur ne peut être conservé : pour le critère d'amplitude : si φ est réel, l'amplitude oscille entre des extremums (noeuds et ventres). Si φ est imaginaire pur, l'amplitude peut décroître ou croître, comme nous le montrerons au § 3-3-4.

pour le critère de flux d'énergie : si φ est imaginaire pur, $I = j\delta \operatorname{Im}(ab^*)$ (cf annexe I) ; il est donc non nul, sauf si b/a est réel.

De plus, si φ est réel, $I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(1/\zeta) (|a|^2 - |b|^2)$ peut s'annuler si $|b| = |a|$. Que φ soit réel ou imaginaire pur, le flux d'énergie peut aussi bien être nul que non nul (autrement dit, la phase peut aussi bien varier qu'être constante).

On peut conclure que la généralisation du cas idéal au cas général est a priori abusive. Les notions d'ondes propagatives et d'ondes évanescentes sont des notions idéales. C'est pourquoi nous appellerons dans ce qui suit les notions de bande passante, de bande d'arrêt, et de valeur critique de φ que nous avons définies dans le cas idéal : bande passante idéale, bande d'arrêt idéale, valeur critique idéale.

Nous avons déjà mentionné quelques erreurs dans l'introduction. Voici par exemple comment elles se présentent à propos du pavillon acoustique exponentiel. Les rares auteurs qui ont abordé le problème du pavillon fini se sont en général trompés. Ainsi Rocard (140,142) généralise le deuxième critère, affirmant que tous les points vibrent en phase en dessous de la fréquence de coupure ; Drawn (173) affirme qu'il y a alors "superposition d'ondes stationnaires" (au sens où nous l'avons défini § 3-1.) : ceci n'est certes pas faux, mais il aurait dû préciser que cette superposition d'ondes stationnaires n'est en général pas elle-même une onde stationnaire. Quant à Kinsler et Frey (122), ils ont observé expérimentalement que le flux d'énergie n'est pas nul : ils en déduisent que les prémisses de la théorie sont fausses, alors qu'en fait seule la généralisation dont nous avons parlé est fausse. Seul Olson remarque (137) : "Le pavillon exponentiel, bien sûr, transmet au-dessous de cette fréquence (de coupure), parce que la résistance acoustique n'est pas nulle ; cependant, sauf dans le cas où la gorge est comparable à la bouche, la valeur de la résistance acoustique pour les fréquences inférieures à la fréquence de coupure, est assez petite". Nous y reviendrons de manière plus approfondie ; nous montrerons notamment que Olson a raison car le pavillon qu'il étudie est tel que l'impédance de rayonnement est très inférieure en module à l'impédance itérative des ondes planes, pour les fréquences inférieures à la fréquence de coupure du pavillon infini (cf § 5-3.).

3-3-2. Les variations dans l'espace de l'amplitude des ondes

Le critère de flux d'énergie ne permet pas de généralisation simple ; par contre, nous allons montrer que le critère d'amplitude peut dans certains cas être modifié pour permettre une distinction entre deux types d'ondes. En effet, l'amplitude des ondes dans la bande d'arrêt idéale peut demeurer une fonction décroissante à concavité positive, sous certaines conditions imposées à l'impédance terminale Z .

Nous nous proposons donc d'étudier les fonctions $|p(x)|$ et $|u(x)|$. On notera que leurs variations ne sont pas forcément identiques : c'est une des raisons pour lesquelles il nous semble plus complet de ne pas nous limiter à l'énergie cinétique, mais de nous intéresser aussi à l'énergie totale. Celle-ci représente souvent les phénomènes de façon plus globale : ainsi une onde plane stationnaire présente de fortes variations d'amplitude de p et u , mais l'énergie totale est constante dans l'espace (Nous développerons ce point de vue au paragraphe qui suit).

Pour étudier à la fois les variations de ces trois énergies, nous étudierons la fonction $e(x) = L^2 |p|^2 + M^2 |u|^2$, où L et M sont des constantes réelles connues dans chaque cas; en choisissant L nul ou M nul, on obtient respectivement la densité d'énergie cinétique $e_c(x)$ ou potentielle $e_p(x)$, et, si L et M sont non nuls, la densité d'énergie totale $e_t(x)$.

3-3-3. Le facteur de qualité

Nous voulons ici discuter l'intérêt physique de la variation avec x de la densité d'énergie totale moyenne. Celle-ci s'écrit :

$$e_t(x) = \frac{1}{4c} (|p|^2 + |u|^2 Z_c)$$

où c et Z_c sont la vitesse de propagation et l'impédance caractéristique des ondes planes, et sont supposées constantes.

Supposons avec Lindsay (170), que la ligne finie étudiée soit insérée dans une ligne uniforme infinie, l'impédance terminale (en 0) étant donc Z_c (Fig. 3):

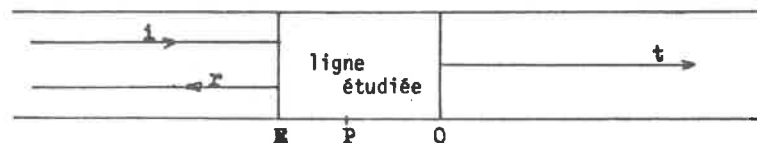


Fig.3 : ligne (impédance itérative z) insérée dans une ligne uniforme (impédance itérative Z_c). Ondes incidente (i), réfléchie (r), transmise (t)

On peut alors définir un facteur de réflexion R (et un facteur de transmission T) comme le rapport de l'amplitude de l'onde plane réfléchie en E (respectivement transmise en O) à celle de l'onde incidente. On sait qu'en fonction de l'impédance d'entrée de la ligne, on a :

$$R = \left| \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} \right|$$

En outre, la ligne étant sans pertes, $T^2 = 1 - R^2$

On peut alors définir R et T comme des fonctions de x ; il suffit de considérer la ligne dont l'entrée serait en P , d'abscisse x , et la sortie resterait en O . Alors :

$$R(x) = \left| \frac{Z(x) - Z_c}{Z(x) + Z_c} \right|$$

Comme on le voit, R diffère du coefficient de réflexion b/a défini au § 2-3. ; celui-ci est constant sur toute la longueur de la ligne, et est attaché à l'une des grandeurs p ou u (pour u il serait $(-b/a) (z/z')$).

On peut relier $R(x)$ à l'énergie totale $e_t(x)$ par l'intermédiaire du facteur sans dimension $q = c e_t / I$, où $I = \frac{1}{2} \text{Re}(pu^*)$ est le flux d'énergie moyen, supposé constant :

$$q = \frac{c e_t}{I} = \frac{\left| \frac{Z}{Z_c} \right|^2 + 1}{2 \text{Re} \left(\frac{Z}{Z_c} \right)} = \frac{2}{T^2} - 1 = \frac{1 + R^2}{1 - R^2}$$

Le facteur q est une fonction de x proportionnelle à $e_t(x)$; on peut remarquer qu'il caractérise toute ligne unidimensionnelle, et qu'il n'est pas affecté si on prend l'énergie sur une surface équiphase et non en un point (il suffit de multiplier e_t et I par l'aire de cette surface). On peut interpréter q de trois façons :

a) comme un taux d'ondes stationnaires (bien que celui-ci soit habituellement défini par $(1 + R)/(1 - R)$). Il varie dans le sens opposé à T et dans le même sens que R : pour des ondes planes progressives $R = 0$, $T = 1$, $q = 1$; pour des ondes stationnaires, ($I = 0$), $R = 1$, $T = 0$, $q = \infty$. On notera que cette définition du taux d'ondes stationnaires est liée à la définition large des ondes stationnaires, donnée au § 3-1., et qu'on peut aussi écrire : ondes telles que le facteur de réflexion R est égal à 1. Cette définition large diffère de la définition restreinte suivante : ondes telles que le coefficient de réflexion b/a est égal à 1 (cette dernière définition est limitée à la bande passante idéale, et s'étend difficilement aux lignes à caractéristiques variables).

b) comme un facteur de qualité local ; nous en donnons la justification suivante : le facteur de qualité Q d'un système vibrant est habituellement défini par :

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energie stockée}}{\text{Energie transmise par période}}$$

En régime permanent, l'énergie stockée est en moyenne l'énergie totale du système, d'où :

$$Q = 2\pi \frac{\int e \, dx}{I \cdot \text{période}}$$

Q est donc lié à q par : $Q = \frac{\omega}{c} \frac{1}{I} \int q I \, dx$.

Pour une ligne sans pertes (I constant), on a plus simplement :

$$Q = \frac{\omega}{c} \int q \, dx$$

q est donc, à un facteur près, la dérivée de Q ; c'est pourquoi nous pouvons le considérer comme un facteur de qualité local. On remarquera que dans le cas particulier d'une onde plane quelconque, il est toujours constant.

c) pour des ondes propagatives, il est le rapport de la vitesse c de propagation de l'énergie des ondes planes à la vitesse de propagation de l'énergie dans la ligne considérée (la vitesse de propagation de l'énergie est définie comme le rapport du flux d'énergie moyen à la densité d'énergie totale moyenne (98, 99, 129, 164)).

$$3-3-4. \text{ Etude de la fonction } e(x) = L^2 |p|^2 + M^2 |u|^2$$

Dans ce qui suit, nous emploierons selon les besoins l'une ou l'autre des différentes notations définies au §2. (Le détail des calculs se trouve en Annexe I). Rappelons que l'indice o représente l'extrémité à droite, où l'impédance Z_o est connue ; o est aussi l'origine, par conséquent x est partout négatif dans la ligne.

3-3-4-1. Si φ est réel (bande passante idéale)

Avec les notations du §2-3., on peut écrire :

$$e = (|a|^2 + |b|^2) (L^2 + M^2/|\zeta|^2) + 2|ab| L^2 \cos(2\varphi x - \theta) - M^2/|\zeta|^2 \cos(2\varphi x - \theta')$$

où $\theta = \arg(ab^*)$ et $\theta' = \arg(ab^*/\zeta^2)$.

$$e' = -4\varphi |ab| (L^2 \sin(2\varphi x - \theta) - M^2/|\zeta|^2 \sin(2\varphi x - \theta'))$$

$$e'' = -8\varphi^2 |ab| (L^2 \cos(2\varphi x - \theta) - M^2/|\zeta|^2 \cos(2\varphi x - \theta'))$$

e est une fonction périodique dans l'espace, de période $\frac{\pi}{\varphi}$. Si b est nul (ligne débouchant sur son impédance itérative), e est constante ; elle l'est également dans un cas particulier, si ζ est réel et $L = M/|\zeta|$ (c'est le cas de l'énergie totale d'une onde plane).

e est une sinusoïde : comme la ligne est finie, ses extrémités peuvent être situées à un endroit quelconque d'une période, et par conséquent e'_o et e''_o peuvent être aussi bien négatives que positives ou nulles. Quand φ tend vers 0, la période tend vers l'infini, et devient donc plus longue que la ligne : la courbe de e est alors une simple portion de sinusoïde, de sens de variation et de concavité quelconques. Cela dépend de θ et θ' , c'est-à-dire de $\arg(b/a)$ et $\arg(b/ac^2)$.

soit $\arg \left(\frac{Z_0/\zeta-1}{Z_0/\zeta'+1} \right)$ et $\arg \left(\frac{Z_0/\zeta-1}{Z_0/\zeta'+1} \frac{1}{\zeta} \right)$

3-3-4-2. Si φ est imaginaire pur (bande d'arrêt idéale)

Avec les notations du § 2-1, on peut écrire, si $j\varphi = \alpha$ où α positif et $j\varphi = \alpha l$:

$$e = \text{sh}^2 \alpha x (|U|^2 + |V|^2) + 2 \text{Re} (UV^*) \text{sh} 2\alpha x + e_0$$

$$\text{où } U = \frac{(LA-M\Delta)u_0 + (MD-L\Delta)p_0}{\text{sh} \alpha l} \text{ et } V = Lp_0 + Mu_0$$

Les dérivées de e par rapport à x sont :

$$e' = \alpha (\text{sh} 2\alpha x (|U|^2 + |V|^2) + 2 \cdot \text{ch} 2\alpha x \text{Re} (UV^*))$$

$$e'' = 2\alpha^2 (\text{ch} 2\alpha x (|U|^2 + |V|^2) + 2 \text{sh} 2\alpha x \text{Re} (UV^*))$$

On montre (cf annexe 1) que e'' est strictement positive quel que soit x ; e présente donc au plus un minimum. Le problème est de savoir si ce minimum se situe entre les deux extrémités de la ligne (finie) envisagée. On a donc trois cas de figure (ici E est le point d'entrée de la ligne) (Fig. 4) :

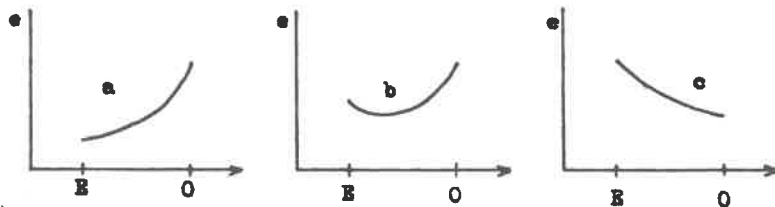


Fig. 4 : variations possibles de $e(x)$ dans la bande d'arrêt idéale

Le cas c est le seul pour lequel $e(x)$ reste, comme dans le cas idéal, monotone décroissante et à concavité positive. On peut alors parler d'ondes quasi-évanescentes, ce terme étant défini par : ondes dans l'amplitude décroît dans l'espace de manière monotone (à la différence des ondes évanescentes, le flux d'énergie est non nul en général, et la décroissance de l'amplitude non exponentielle).

Le problème est donc la détermination du signe de la dérivée de e en 0, qui permet de distinguer les cas a) et b) du cas c). Or e'_0 a le signe de la quantité suivante, écrite successivement avec les notations du § 2-1 et du § 2-3 (si Y_0 est l'admittance de sortie) :

$$\Delta (L^2 - M^2 |Y_0|^2) + j (L^2 A - M^2 D) \text{Im}(Y_0)$$

$$\alpha \frac{\gamma}{\delta} (L^2 - M^2 |Y_0|^2) + j \alpha \left(-\frac{L^2}{\delta} + M^2 \delta \left(1 - \frac{\gamma^2}{\delta^2} \right) \right) \text{Im}(Y_0)$$

où α et Δ sont réels et A, D, γ et δ sont imaginaires purs.

Un cas très remarquable est celui du quadripôle symétrique : si $\gamma = 0$, e'_0 a le signe de $j \delta \text{Im}(Y_0)$. Celui-ci ne dépend donc pas de L ni de M . Autrement dit, les énergies totale, potentielle et cinétique évoluent toujours dans le même sens. La condition de décroissance est en particulier remplie dans le cas où Y_0 est réelle : nous retrouvons ainsi, de manière beaucoup plus générale, le résultat obtenu par Lindsay pour une ligne symétrique débouchant sur l'impédance itérative des ondes planes.

Si on avait cherché les conditions sur le "coefficient de réflexion" $|b/a|$ (cf §2-3.), on aurait trouvé pour le cas c) :

$$\left| \frac{b}{a} \right|^2 < \frac{L^2 + M^2 / |\zeta|^2}{L^2 + M^2 / |\zeta'|^2}$$

On retrouve la simplicité du quadripôle symétrique ($\zeta = \zeta'$)

$$\left| \frac{b}{a} \right|^2 < 1$$

Remarque : nous avons déjà montré que b/a n'est pas réel en général. De plus, $|b/a|$ n'est pas forcément inférieur à 1, contrairement à la bande passante idéale. Dans celle-ci en effet, le flux d'énergie s'écrit $I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (1/\zeta) (|a|^2 - |b|^2)$; d'après la position choisie pour la source (§ 2-6), le flux d'énergie doit être positif, quel que soit b , et donc $|b|$ inférieur à $|a|$. Par contre, il n'en est rien dans la bande d'arrêt idéale.

A ce propos, il est souvent utile de s'assurer qu'une ligne est suffisamment longue pour que les ondes soient négligeables à la sortie. Intuitivement, on pourrait penser qu'il suffit que $-\alpha x$ soit assez grand pour que le terme $be^{\alpha x}$ soit négligeable (p s'écrit $p = ae^{-\alpha x} + be^{\alpha x}$). En fait, on supposerait alors que $|b/a|$ est petit, ce qui n'est pas du tout évident. Il est donc insuffisant de connaître la longueur d'une ligne pour trouver à quelle condition les ondes sont négligeables à la sortie : il faut de plus connaître l'impédance de sortie. Ceci vaut en particulier pour les modes non plans d'un guide : pour pouvoir négliger un mode dit évanescent (au sens idéal du terme) dans un guide fini, on doit connaître l'impédance terminale de ce mode.

3-3-4-3. La transition entre les deux bandes : $\varphi = 0$.

p et u peuvent se mettre sous la forme, si $X = \frac{x}{\lambda}$

$$p = X\Delta (Z_0 - \zeta) u_0 + p_0$$

$$u = X\Delta (1/\zeta - Y_0) p_0 + u_0$$

$$\text{Quant à } e : e = x^2 |\tilde{U}|^2 + 2x \operatorname{Re}(\tilde{U}V^*) + e_0$$

$$\text{où } \tilde{U} = (LA - MA) u_0 + (MD + LA) p_0$$

Donc e'' est constante, positive ou nulle.

Si e'' est nulle, e' aussi et e est constante. C'est en particulier le cas si $Z_0 = \zeta$, c'est-à-dire dans le cas idéal.

Si e'' est positive, tout ce que nous avons dit pour la bande d'arrêt idéale reste valable. Il est alors à noter que si les fonctions $A(\varphi^2)$, $B(\varphi^2)$, $C(\varphi^2)$, $D(\varphi^2)$ et $Z_0(\varphi^2)$ sont continues, $e''(\varphi^2)$ aussi et il existe donc un domaine de la bande passante idéale où e'' est positive partout.

3-3-4-4. Conclusion

Dans les cas pratiques, il n'y a pas de séparation nette entre les bandes passante et d'arrêt idéales : pour φ^2 assez grand, la fonction $e(x)$ présente plusieurs arches de sinusoides, puis quand φ^2 décroît vers zéro, la concavité de la courbe tend à être partout positive ou nulle. Quand φ^2 devient négatif, la concavité est toujours positive ; sous certaine condition, la courbe est de plus monotone décroissante, ce qui constitue une généralisation partielle du cas idéal. Cette condition porte sur l'impédance de sortie ; pour une ligne symétrique, il suffit que $j/\zeta \operatorname{Im}(Y_0)$ soit négatif (où $\alpha^2 = -\varphi^2$, et ζ est imaginaire pur).

La figure 5 montre l'exemple du pavillon acoustique exponentiel (traité au § 5-3.). Dans le cas particulier choisi, il débouche sur un tuyau cylindrique fermé à son extrémité, et, dans un but de réalisme, comporte des pertes. La figure représente les variations de l'énergie totale le long du pavillon à différentes fréquences : on voit que peu en-dessous de la fréquence de coupure idéale f_c , on a bien des ondes quasi-évanescentes. Par contre, quand la fréquence devient plus basse, l'énergie totale demeure une fonction à concavité positive, mais devient croissante ! Il serait donc absurde de parler alors d'ondes évanescentes. (Nous traitons au paragraphe suivant le problème de la détermination physique des fréquences de coupure pour cet exemple).

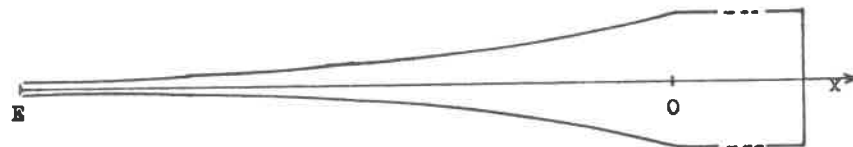
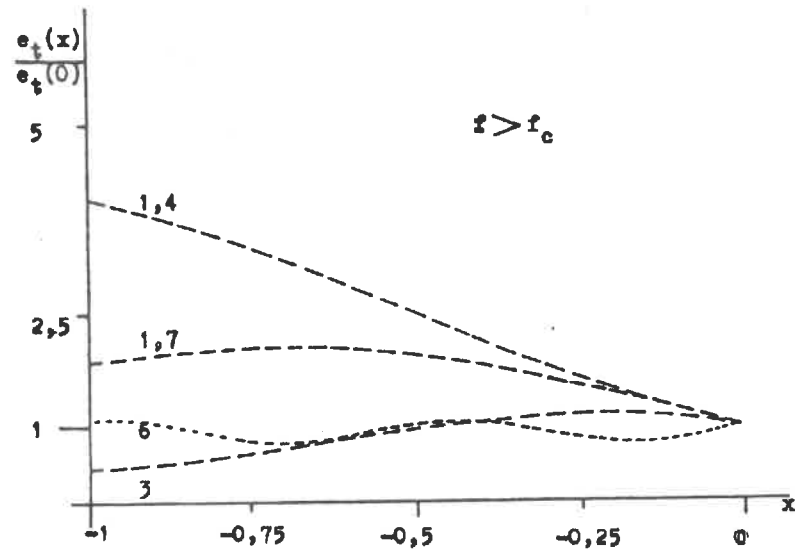
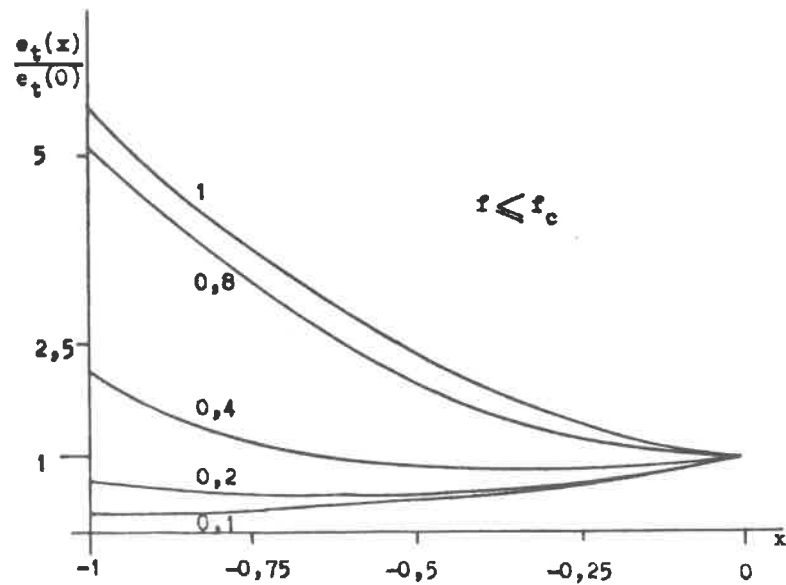


Fig.5 : variation de l'énergie totale le long d'un pavillon exponentiel (débouchant sur un cylindre fermé) pour différentes valeurs de f/f_c

4. ETUDE DE L'AFFAIBLISSEMENT PAR UNE LIGNE.

DISCUSSION DE LA NOTION DE FREQUENCE DE COUPURE

4-1. POSITION DU PROBLEME

Dans bien des cas pratiques, notamment pour les filtres, on s'intéresse avant tout au rapport d'amplitude entre l'entrée et la sortie de la ligne. Ce rapport est en effet directement accessible expérimentalement, et la connaissance de ses variations avec la constante de propagation permet de définir une valeur critique pratique de celle-ci, délimitant des bandes passante et d'arrêt qui peuvent être différentes des bandes passante et d'arrêt idéales.

L'exemple le plus courant est celui des filtres, pour lesquels la constante de propagation dépend de la fréquence, le problème étant alors la recherche d'une fréquence de coupure. Mais ce qui suit vaut aussi quand la constante de propagation dépend d'une autre grandeur que la fréquence, comme par exemple l'angle d'incidence pour la réflexion d'une onde oblique.

Nous voulons donc étudier les variations de la fonction $E(\varphi^2) = e_x/e_0(\varphi^2)$: E varie dans le même sens que l'affaiblissement ; elle est l'inverse de ce qu'on appelle habituellement la réponse. (On se fixe une ligne de longueur donnée, la sortie étant en 0, et l'entrée en x , qui est négatif).

4-2. LE CAS IDEAL

Dans le cas idéal $E = 1$ dans la bande passante (φ^2 positif), et dans la bande d'arrêt (φ^2 négatif, $j\varphi = \alpha$), $E = e^{-2\alpha x}$, supérieur à 1. La fonction $E(\varphi^2)$ a donc l'allure suivante, identique pour les trois formes d'énergie :

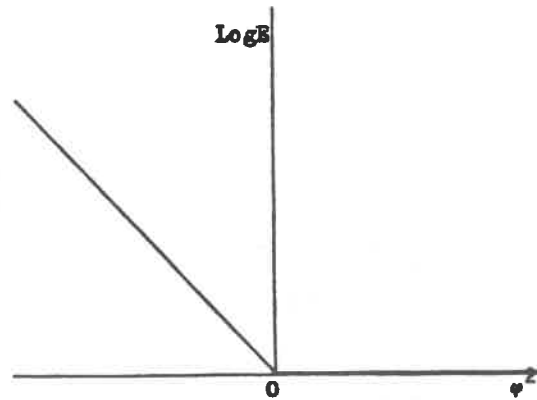


Fig. 6 : fonction $\text{Log } E(\varphi^2)$ dans le cas idéal

La dérivée de E par rapport à φ^2 présente donc une discontinuité pour φ nul. Ceci permet une définition précise de la valeur critique de φ^2 , et donc de la fréquence de coupure : c'est la valeur de φ^2 au-dessous de laquelle il y a affaiblissement, et au-dessus de laquelle il n'y a pas affaiblissement.

4-3. DIFFICULTE DE LA GENERALISATION AUX CAS PRATIQUES

Nous avons montré au § 3 que en général, pour toute valeur de φ^2 , E pouvait être aussi bien supérieure qu'inférieure à 1. Il est donc exclu dans le cas général de définir une fréquence de coupure, des bandes passantes et d'arrêt. La discontinuité de la dérivée de E n'existe pas dans les cas pratiques, à cause de la réalisation imparfaite de l'impédance itérative, (mais aussi à cause de l'existence de pertes). Ceci impose de choisir arbitrairement un critère pour définir une fréquence de coupure, quand cela est possible.

C'est ainsi que la définition des normes américaines est, pour un filtre passe-bande : "Les fréquences de coupure nominales supérieure et inférieure d'un filtre passe-bande sont les fréquences au-dessus et au-dessous de la fréquence de réponse maximale du filtre, auxquelles la réponse à un signal sinusoïdal est 3 dB au-dessous de la réponse maximale".

Une telle définition ne peut bien entendu être employée que cas par cas. Elle est possible notamment dans de nombreux cas où la courbe $E(\varphi^2)$ est peu différente de celle du cas idéal : décroissante

au-dessous d'une certaine valeur de φ^2 , puis présentent de légères oscillations au-dessus. Cette forme de courbe n'est certes ni nécessaire ni suffisante pour permettre l'application de la définition ci-dessus, mais elle est souvent une indication intéressante. C'est pourquoi nous avons cherché à quelles conditions la courbe $E(\varphi^2)$ est décroissante dans la bande d'arrêt idéale.

4-4. ETUDE DE LA FONCTION $E(\alpha)$ DANS LA BANDE D'ARRÊT IDEALE

E peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{\text{sh}^2 \alpha x}{2 \alpha^2} E''_0 + \frac{\text{sh } 2\alpha x}{2\alpha} E'_0 + 1$$

On suppose que la condition E'_0 négative ou nulle, trouvée au § 3-3-4. est satisfaite. (' et '' représentent les dérivées par rapport à x). De plus, on sait que E''_0 est positive.

On cherche à quelle condition E croît avec α , c'est-à-dire décroît avec φ^2 , comme dans le cas idéal. Cette condition dépend en général de x ; aussi nous chercherons simplement une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\partial E}{\partial \alpha}$ soit positive quels que soient x (négatif), et α (positif).

On sait que les fonctions $\frac{\text{sh}^2 \alpha x}{2 \alpha^2}$ et $\frac{\text{sh } 2\alpha x}{2\alpha}$ sont

positives et croissantes avec α . Une condition suffisante est immédiate :

$\frac{\partial E''_0}{\partial \alpha} \geq 0$ et $\frac{\partial E'_0}{\partial \alpha} \leq 0$. Elle est de plus nécessaire, car si x et α sont suffisamment petits, $E = 1 + x E'_0 + \frac{1}{2} x^2 E''_0$; si $\frac{\partial E'_0}{\partial \alpha}$ était positif, ou si $\frac{\partial E''_0}{\partial \alpha}$ était négatif, il existerait x tel que $\frac{\partial E}{\partial \alpha}$ fût négatif.

Par conséquent, on a une généralisation partielle du cas idéal si : $\frac{\partial E'_0}{\partial \alpha} \leq 0$ et $\frac{\partial E''_0}{\partial \alpha} \geq 0$.

Nous en donnerons un exemple au § 5-3.

Remarque : on peut s'intéresser aussi à $e_x(\alpha)$, notamment pour étudier les variations du facteur de qualité (cf § 3-3-3.) avec la fréquence. Cette fonction vérifie :

$$e_x = \frac{\text{sh}^2 \alpha x}{2\alpha^2} + \frac{\text{sh} 2\alpha x}{2\alpha} e'_0 + e_0$$

Un raisonnement analogue au précédent donnerait la même condition nécessaire et suffisante, à laquelle il faut seulement ajouter la condition $\frac{\partial E_0}{\partial \alpha}$ positive.

4-5. CONCLUSION

Dans les cas pratiques, on est obligé d'adopter un critère arbitraire pour définir une fréquence de coupure. De plus, il n'est pas possible de le faire pour toute ligne.

Ceci est bien connu ; mais nous avons voulu montrer que la fréquence de coupure est une notion globale, et non locale : elle est définie pour une ligne de longueur donnée, et d'impédance terminale donnée. Ceci est important pour les lignes à caractéristiques variables (dont les caractéristiques varient avec x). Pour ce type de ligne, certains (100,13) définissent une fréquence de coupure point par point, comme la fréquence de coupure que présenterait une ligne infinie dont les caractéristiques seraient celles de ce point ; mais une telle définition est dénuée de tout sens physique. Nous en donnons un exemple avec les pavillons acoustiques (§ 6-4).

L'exemple montré par la figure 7 est le même que celui de la figure 5. On voit que seule l'énergie cinétique pourrait permettre la définition d'une fréquence de coupure proche de la fréquence de coupure idéale f_c . Au-dessous de f_c , l'énergie potentielle est renforcée et non atténuée, et il en est de même pour l'énergie totale pour les fréquences inférieures à environ $0,3 f_c$. Nous montrerons au § 5-3 que les conditions trouvées au § 4-4 ne sont remplies effectivement que pour l'énergie cinétique.

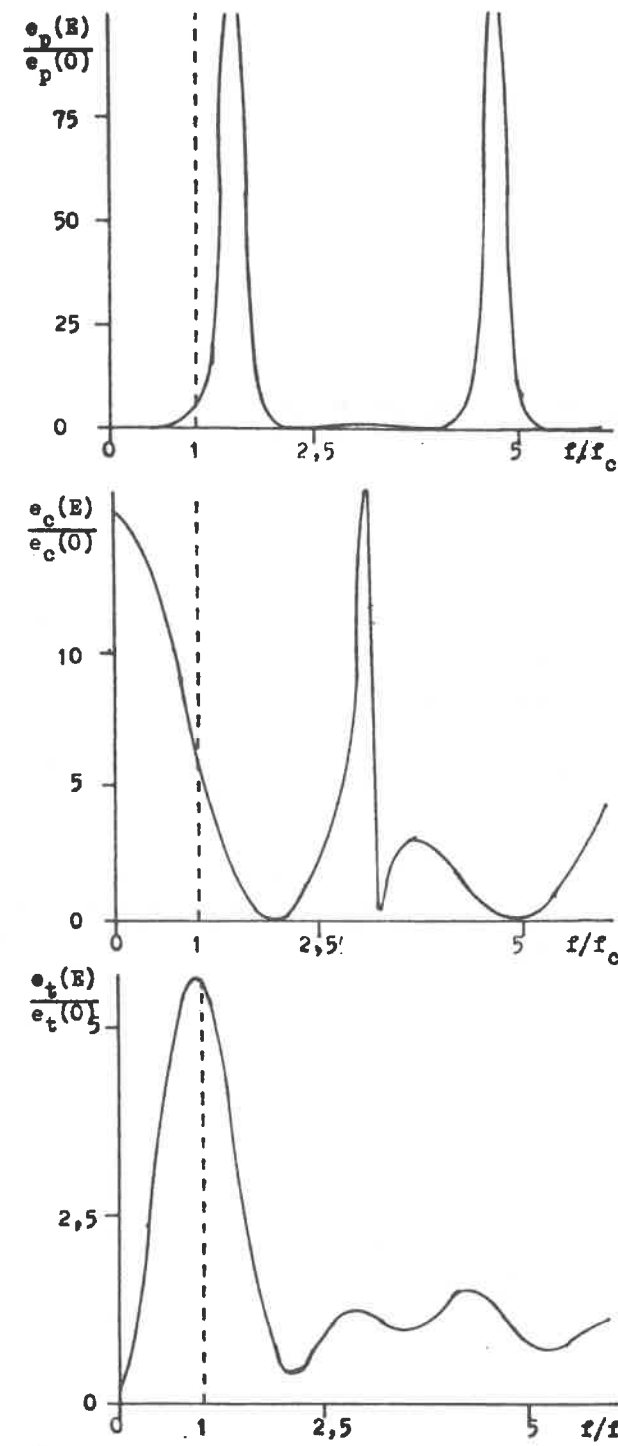


Fig.7 : variations des énergies potentielle, cinétique et totale en fonction de la fréquence pour un pavillon exponentiel (cf Fig.5)

5. EXEMPLES DE LIGNES SANS PERTES D'IMPEDANCE TERMINALE QUELCONQUE

Les trois exemples qui suivent sont tirés de l'acoustique ; mais ils ont évidemment leurs analogues en électromagnétisme. Pour tous, nous chercherons la condition à vérifier pour qu'il y ait des ondes quasi-évanescentes (§ 3) ; de plus pour le dernier, nous discuterons l'existence de fréquences de coupure.

5-1. EXEMPLE DE LIGNE SYMETRIQUE : UNE ONDE REFRACTEE A L'INTERFACE DE DEUX MILIEUX DIFFERENTS

Nous voulons étudier ici le problème de la réfraction et de la réflexion d'une onde plane à l'interface (supposée infinie) de deux milieux 1 et 2. Le milieu 2 étant supposé fini, quelle est la forme des ondes qui le traversent ? Soient n_1, n'_1, n_2, n'_2 les directions des ondes incidente, réfléchie, transmise et rétrograde (due à la présence du milieu 3) (fig 8) :

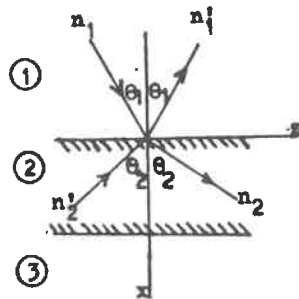


Fig.8 : onde oblique réfractée à l'interface de deux milieux 1 et 2

La pression s'écrit dans les milieux 1 et 2 :

$$p_1 = p_i (e^{-jk_1 \cos \theta_1 x} + R_1 e^{jk_1 \cos \theta_1 x}) e^{-jk_1 \sin \theta_1 z} e^{j\omega t}$$

$$p_2 = p_i T (e^{-jk_2 \cos \theta_2 x} + R_2 e^{jk_2 \cos \theta_2 x}) e^{-jk_2 \sin \theta_2 z} e^{j\omega t}$$

Quant à la composante u_x de la vitesse dans le milieu 2 :

$$u_{x2} = \frac{p_i T \cos \theta_2}{\rho c} (e^{-jk_2 \cos \theta_2 x} - R_2 e^{jk_2 \cos \theta_2 x}) e^{-jk_2 \sin \theta_2 z} e^{j\omega t}$$

Chaque milieu peut être considéré comme une ligne (symétrique) pour la pression et la composante u_x de la vitesse, z étant fixé. Certes ces deux grandeurs ne caractérisent pas totalement l'onde, mais la grandeur supplémentaire, u_z , est constamment proportionnelle à p :

$u_z = (\sin \theta / \rho c) p$. Tout ce que nous avons dit sur les lignes est donc applicable ici : le flux d'énergie moyen est le flux dans la direction x , et l'énergie totale est donnée par :

$$e = \frac{1}{4\rho c^2} |p|^2 + \frac{1}{4} \rho (|u_x|^2 + |u_z|^2) = \frac{1}{4\rho c^2} (1 + \sin^2 \theta) |p|^2 + \frac{1}{4} \rho |u_x|^2$$

(La ligne étant symétrique, le facteur placé devant $|p|^2$ n'a de toute façon pas d'influence sur le sens de variation de e).

La loi de Descartes-Snell indique que $\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$. Par conséquent, $\frac{1}{2} \pi - \theta_2$ est soit réel, soit imaginaire pur.

Si $\frac{1}{2} \pi - \theta_2$ est réel, l'énergie totale dans le milieu 2 est une fonction périodique de x (cf 3-3-3-1.). Elle est constante si le milieu 2 est infini.

Si $\frac{1}{2} \pi - \theta_2$ est imaginaire pur, l'énergie totale est une fonction décroissante, à condition que $\text{Im}(Y_x)$ soit négative sur le plan de séparation du milieu 2. On a alors des ondes quasi-évanescentes (évanescents si le milieu 2 est infini).

Un cas particulier intéressant est le cas où le milieu 3 sur lequel débouche le milieu 2 est infini. Les lois de Descartes-Snell donnent :

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_3}{c_3}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Soit $\frac{1}{2}\pi - \theta_3$ est imaginaire pur (il y aurait réflexion totale s'il n'y avait pas de milieu 2). On a alors des ondes évanescentes dans le milieu 3 :

$$p = a e^{-k_3 \text{sh} x} e^{-jk_3 \sin \theta_3 z} e^{j\omega t}, \text{ où } \theta_3 = \frac{1}{2}\pi + j\chi \text{ (}\chi \text{ positif)}$$

L'admittance à la frontière 2-3 est $Y_x = \frac{\text{sh} \chi}{j\rho_3 c_3}$

Par conséquent $\text{Im}(Y_x)$ est négative. Dans ce cas, on a donc des ondes quasi-évanescentes dans le milieu 2 : le flux d'énergie est nul, mais la décroissance n'est pas exponentielle.

- Soit $\frac{1}{2}\pi - \theta_3$ est réel (il n'y aurait pas réflexion totale s'il n'y avait pas de milieu 2). On a alors des ondes propagatives dans le milieu 3 : L'admittance à la frontière 2-3 est :

$$Y_x = \frac{\cos \theta_3}{\rho_3 c_3}, \text{ et donc } \text{Im}(Y_x) = 0.$$

On a encore des ondes quasi-évanescentes dans le milieu 2, mais la dérivée de l'amplitude de l'énergie s'annule à la frontière 2-3. N'avons donc précisé la forme des ondes de "fuite" dont parle Brekhovskikh à propos d'une couche finie.

Ce dernier cas est en particulier celui d'une couche finie dans un milieu homogène (milieu 3 identique au milieu 1), traité par de nombreux auteurs (Rayleigh (139), Fiorito et Überall (116)).

5-2. EXEMPLE DE LIGNE SYMETRIQUE : UN MODE NON PLAN DANS UN GUIDE FINI A PAROIS PARFAITEMENT REFLECHISSANTES

Ce problème est identique au précédent, comme nous allons le montrer. Pour simplifier, nous choisirons un guide fini à deux dimensions, c'est-à-dire infini dans une direction (Fig.9):

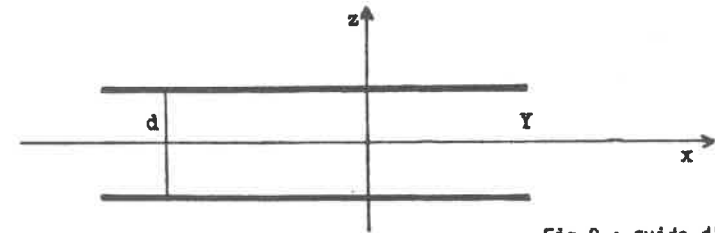


Fig.9 : guide d'onde fini

Les parois étant parfaitement réfléchissantes, la solution pour la pression et les composantes u_z et u_x s'écrit classiquement :

$$p = (a e^{-jk \cos \theta x} + b e^{jk \cos \theta x}) \cos(k \sin \theta z) e^{j\omega t}$$

$$u_z = \frac{\sin \theta}{j\rho c} (a e^{-jk \cos \theta x} + b e^{jk \cos \theta x}) \sin(k \sin \theta z) e^{j\omega t}$$

$$u_x = \frac{\cos \theta}{\rho c} (a e^{-jk \cos \theta x} - b e^{jk \cos \theta x}) \cos(k \sin \theta z) e^{j\omega t}$$

$$\text{où } k \sin \theta = \frac{m\pi}{a}, \text{ avec } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On ne retiendra que les valeurs de m non nulles, c'est-à-dire les modes non plans. Pour ceux-ci, on définit classiquement une fréquence de coupure quand le guide est infini : elle est obtenue pour $k_c = \frac{m\pi}{a}$.

Les raisonnements tenus au § 4-1. restent applicables ici, à une seule modification près : il faut prendre les densités d'énergie par tranche ($x = \text{constante}$) pour pouvoir considérer les modes orthogonaux isolément. Dans ces conditions, comme

$$\frac{1}{a} \int_0^a \cos^2(k \sin \theta z) dz = \frac{1}{a} \int_0^a \sin^2(k \sin \theta z) dz = \frac{1}{2}, \text{ on obtient}$$

$$\text{encore } |u_z|^2 = |p|^2 \sin^2 \theta$$

$$d'où \quad e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\rho c^2} (1 + \sin^2 \theta) |p|^2 + \frac{1}{4} \rho |u_x|^2 \right)$$

Au-dessus de la fréquence de coupure, $k \cos \theta$ est réel, et l'énergie moyenne par tranche oscille autour d'une valeur moyenne. Au contraire au-dessous, $k \cos \theta$ est imaginaire pur, et on peut avoir des ondes quasi-évanescentes pour la même condition qu'au paragraphe précédent : il faut qu'à l'extrémité du guide, on ait $\text{Im}(Y_x) < 0$.

5-3. EXEMPLE DE LIGNE ASYMETRIQUE : LE PAVILLON EXPONENTIEL DE SECTION $S = S_0 \exp(2mx)$

Comme on sait, l'équation des pavillons, dite de Webster, est une approximation, d'ailleurs bien vérifiée par l'expérience pour les basses fréquences. La conservation de l'énergie s'écrit, si p et u sont la pression et la vitesse acoustiques, et S la section : $\frac{1}{2} S \text{Re}(p u^*) = \text{constante}$. Autrement dit, il est nécessaire de rapporter la pression et la vitesse à la section, pour considérer le pavillon comme une ligne sans pertes : les grandeurs caractérisant la ligne sont donc p_d et u_d , où d est le diamètre du pavillon. On a alors :

$$p_d = (a e^{-\alpha x} + b e^{\alpha x}) e^{j\omega t}$$

$$u_d = \left(\frac{m}{jk} \frac{1}{\rho c} (a e^{-\alpha x} + b e^{\alpha x}) + \frac{\alpha}{jk} \frac{1}{\rho c} (a e^{-\alpha x} - b e^{\alpha x}) \right) e^{j\omega t}$$

$$\text{avec } \alpha^2 = m^2 - k^2.$$

$$\text{L'énergie totale par tranche est alors : } e = \frac{S_0}{4} \left(\frac{|p_d|^2}{\rho^2 c^2} + \rho |u_d|^2 \right)$$

Le pavillon exponentiel est donc une ligne asymétrique ; les conditions pour avoir des ondes quasi-évanescentes au-dessous de la fréquence de coupure idéale f_c sont :

$$|Y_0| > \frac{1}{\rho c} \quad \text{pour l'énergie totale par tranche.}$$

$$\text{Im}(Y_0) < \frac{1}{\rho c} \frac{m}{k} \quad \text{pour l'énergie potentielle par tranche.}$$

$$\text{Im}(Z_0) < \frac{m}{k} \rho c \quad \text{pour l'énergie cinétique par tranche.}$$

(On vérifie bien que les deux dernières conditions impliquent la première). Nous voulons montrer que l'impédance de rayonnement vérifie effectivement ces conditions :

En général, le produit $(k r_0)$, où r_0 est le rayon de sortie, est très inférieur à 1 pour f_c ; il est en effet égal à $m r_0$, et les hypothèses de l'équation des pavillons imposent m et r_0 petits. Dans ces conditions, quelle que soit la formule choisie pour l'impédance de rayonnement (par exemple Rayleigh :

$Z_0 = \rho c \left(\frac{1}{2} (k r_0)^2 + j \frac{8\pi}{3} k r_0 \right)$), celle-ci est en module très inférieure à ρc pour $f < f_c$. Par conséquent, la condition des ondes quasi-évanescentes est vérifiée pour l'énergie totale. On montre immédiatement qu'il en est de même pour les énergies potentielle et cinétique, car $m r_0 < \frac{3\pi}{8}$.

A propos de l'existence de fréquences de coupure (cf §4-3), on obtient les conditions suivantes :

Condition	$\frac{\partial E_0}{\partial \alpha} < 0$	$\frac{\partial E''}{\partial \alpha} > 0$
Energie		
$E_p = \frac{e_p(x)}{e_p(o)}$	$\frac{\partial}{\partial k} (k \text{Im}(Y_0)) > 0$	$\frac{\partial}{\partial k} (Y_0 ^2 k^2 \rho^2 c^2 - k^2 + 2mk\rho c \text{Im}(Y_0)) < 0$
$E_c = \frac{e_c(x)}{e_c(o)}$	$\frac{\partial}{\partial k} (k \text{Im}(Z_0)) > 0$	$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{ Z_0 ^2}{\rho^2 c^2} k^2 - k^2 - \frac{2mk}{\rho c} \text{Im}(Z_0) \right) < 0$
$E_t = \frac{e_t(x)}{e_t(o)}$	$\frac{\partial}{\partial k} (Y_0 ^2) < 0$	$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{k \text{Im}(Y_0)}{1 + Y_0 ^2 \rho^2 c^2} \right) < 0$

On peut vérifier que toutes ces conditions sont bien satisfaites par l'impédance de rayonnement aux basses fréquences. (Le calcul est rapide si on ne conserve que les termes de plus bas degré en kr_0). On peut par conséquent affirmer qu'un pavillon rayonnant dans l'espace infini transmet effectivement très peu d'énergie au-dessous de sa fréquence de coupure idéale. Ceci justifie le point de vue d'Olson (cité au § 3-3-1), et l'assimilation courante faite entre la fréquence de coupure d'un tel pavillon fini et celle d'un pavillon infini.

Discussion de l'exemple des figures 5 et 7 :

Le pavillon choisi a les dimensions suivantes : longueur lm , $r_0 = 0,1m$; $m = 1$; il débouche sur un tuyau cylindrique fermé de longueur $l = 1m$, et de rayon $0,1m$.

Les pertes sont les pertes visco-thermiques aux parois ; le calcul est numérique, et est bien confirmé par l'expérience pour de nombreux tuyaux (cf notamment). On peut admettre que, sauf aux résonances, les pertes jouent un rôle sans importance qualitative. C'est pourquoi nous allons chercher si les conditions des § 3 et 4 sont remplies en négligeant les pertes.

Le tuyau cylindrique étant fermé, son admittance d'entrée, qui est l'admittance de sortie Y_0 du pavillon exponentiel, s'écrit : $Y_0 = \frac{1}{\rho c} j \operatorname{tg} kl$. Comme $l = 1m$, et le nombre d'onde de coupure idéal $k_c = m = 1$, on a : si $k < k_c$, $0 < kl < 1 < \frac{1}{2} \pi$, d'où $\operatorname{tg} kl > 0$.

Par conséquent, la condition pour avoir des ondes quasi-évanescences est vérifiée pour l'énergie cinétique quel que soit $k < k_c$, et jamais pour l'énergie potentielle. Pour l'énergie totale, elle est vérifiée si $\operatorname{tg} kl > 1$, c'est-à-dire si $k > \frac{\pi}{4} k_c$. C'est ce que montre la figure 5.

Quant aux conditions relatives à l'existence des fréquences de coupure, elles ne sont vérifiées que pour l'énergie cinétique, ce qui confirme bien les résultats présentés par la figure 7.

6. LES LIGNES SANS PERTES A CARACTERISTIQUES VARIABLES

6-1. NOTATIONS UTILISEES

Nous voulons ici généraliser le § 3 pour les lignes à caractéristiques variables ; nous partirons du système différentiel 7 (§ 2-6) :

$$\begin{cases} p = (\bar{u} + \bar{\gamma})u + \bar{\beta}u' \\ u = (u + \gamma)p + \beta p' \end{cases}$$

où μ et $\bar{\mu}$ sont réels, γ et $\bar{\gamma}$ imaginaires purs, β et $\bar{\beta}$ complexes, tous étant désormais des fonctions de x .

On suppose de plus le flux d'énergie constant :

$$\operatorname{Re}(pu^*)' = 0 \Leftrightarrow \beta \text{ et } \bar{\beta} \text{ imaginaires purs, } \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}} \text{ et } \frac{\mu}{\beta} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\beta}}.$$

Si on pose $v = e^{\int \frac{\mu}{\beta} dx}$, (où v est de module 1, puisque $\frac{\mu}{\beta}$ est imaginaire pur), on peut éliminer μ et $\bar{\mu}$ du système différentiel :

$$\begin{cases} (pv)' = \bar{\gamma}(uv) + \bar{\beta}(uv)' \\ (uv)' = \gamma(pv) + \beta(pv)' \end{cases}$$

La condition $\mu = \bar{\mu} = 0$ est donc équivalente à la condition $W = 0$ (cf § 3-1) ; nous la supposons remplie dans ce qui suit. Nous étudierons en définitive le système suivant ($v=1$) :

$$\begin{cases} p = \bar{\gamma}u + \bar{\beta}u' \\ u = \gamma p + \beta p' \end{cases}$$

où $\beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}$ sont imaginaires purs et $\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}$.

6-2. ETUDE DE LA VARIATION D'AMPLITUDE DE $e(x) = L^2|p|^2 + M^2|u|^2$ le long de la ligne.

Le système différentiel implique les deux équations suivantes:

$$(9) \quad \begin{cases} u'' + u' \frac{\beta'}{\beta} + u(\varphi^2 + \frac{\gamma'}{\beta}) = 0 \\ p'' + p' \frac{\beta'}{\beta} + p(\varphi^2 + \frac{\gamma'}{\beta}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \varphi^2 = \frac{\gamma\gamma' - 1}{\beta\beta'} ; \varphi^2, \frac{\beta'}{\beta}, \frac{\beta'}{\beta} \frac{\gamma'}{\beta} = -\frac{\gamma'}{\beta} \text{ sont réels.}$$

Le calcul de l'équation différentielle satisfaite par $e(x)$ est fastidieux ; nous donnons en annexe II la démonstration du résultat suivant, qui généralise celui du § 3-3-4-2. :

$e(x)$ est décroissante pour tout x négatif à condition que :

$$e'_0 < 0 \quad \text{et} \quad \varphi^2 < s\psi' - \frac{1}{4}\psi'^2$$

$$\text{ou } s = -\frac{1}{2}j \left(\frac{L}{M\beta} + \frac{M}{L\beta} \right)$$

$$\text{et } \psi = -\arctg \frac{1}{2}j \left(\frac{L}{M\gamma} + \frac{M}{L\gamma} \right)$$

Si on fait tendre L (ou M) vers zéro, on trouve les conditions suivantes, qui apparaissent d'ailleurs clairement dans le système (9) :

$$- \text{Si } L = 0 : \varphi^2 < -\frac{\gamma'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta}$$

$$- \text{Si } M = 0 : \varphi^2 < -\frac{\gamma'}{\beta}$$

On peut constater que les dérivées de β et $\bar{\beta}$ n'interviennent pas dans ces résultats. Il s'en suit que pour une ligne symétrique ($\gamma = \bar{\gamma} = 0$) la condition se résume à φ^2 négatif, quels que soient L et M , que les caractéristiques varient ou non.

On peut d'autre part remarquer que si $\frac{L^2}{\gamma} + \frac{M^2}{\gamma}$ est constant, la condition s'écrit aussi φ^2 négatif. C'est le cas en particulier de certaines lignes telles que $L^2\bar{\gamma} = -M^2\gamma$, c'est-à-dire telles que $L^2\bar{\beta} = M^2\beta$, ou encore avec les notations du § 2-1., $L^2A = M^2D$. Cette relation porte sur les éléments A et D de la matrice du quadripôle ; or un quadripôle tel que $B = C$ est appelé symétrique. C'est pourquoi nous proposons d'appeler les lignes vérifiant les relations précédentes lignes pseudo-symétriques, avec la définition suivante : lignes telles que l'énergie totale est proportionnelle à $D|p|^2 + A|u|^2$, ou encore à $\beta|p|^2 + \bar{\beta}|u|^2$.

Il nous reste à calculer e' , avec les notations du système (8) :

$$e' = -2 \frac{\gamma}{\beta} (L^2|p|^2 - M^2|u|^2) + 2j \left(\frac{L^2}{\beta} - \frac{M^2}{\bar{\beta}} \right) \text{Im}(p^*u)$$

C'est le même résultat que celui du § 3-3-4-2. ; mais ici $\beta, \bar{\beta}$, et γ varient. On peut remarquer que l'expression de e' est la somme d'un terme pseudo-symétrique et d'un terme symétrique.

6-3. CONCLUSION

Si nous appelons $(s\psi' - \frac{1}{4}\psi'^2)(x)$ valeur critique de φ^2 , nous pouvons dire : si φ^2 est partout inférieure à la valeur critique, et si e'_0 est négative, les ondes sont quasi-évanescentes, c'est-à-dire que l'énergie moyenne (potentielle, cinétique, ou totale selon les cas) est une fonction décroissante de x , bien que le flux d'énergie soit en général non nul.

Mais comme nous l'avons remarqué pour les caractéristiques constantes, (§ 3-3-3-4.), l'énergie peut rester partout décroissante si φ^2 est supérieure à la valeur critique sur une fraction de longueur de la ligne, et même éventuellement sur toute la longueur.

La valeur critique de φ^2 est en général différente pour p et u , sauf si la ligne est symétrique. Ceci justifie l'intérêt porté à l'énergie totale, qui est en quelque sorte un moyen terme, notamment pour les lignes pseudo-symétriques : pour ces dernières, la valeur

critique correspondant à l'énergie totale est nulle, et elle est la moyenne des valeurs critiques correspondant aux énergies potentielle et cinétique.

Nous avons donc généralisé le § 3 aux lignes à caractéristiques variables ; on pourrait en faire autant du § 4, c'est-à-dire étudier les variations en un point de e avec φ^2 . Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous nous contenterons de noter que les conclusions sont les mêmes, que les caractéristiques varient ou non.

6-4. EXEMPLE DE LIGNES A CARACTERISTIQUES VARIABLES : LES PAVILLONS ACOUSTIQUES

Comme pour le pavillon exponentiel (§ 5-3), nous rapportons la pression p et la vitesse u à la section. On a alors :

$$\beta = \frac{j}{k\rho c}, \quad \bar{\beta} = \frac{j}{k} \rho c, \quad \frac{Y}{\beta} = -\frac{d'}{d}, \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{\beta}} \cdot \varphi^2 = k^2 - \left(\frac{d'}{d}\right)^2$$

où $d(x)$ est le diamètre, k le nombre d'onde, ρc l'impédance itérative des ondes planes. Le système (9) devient :

$$(ud)'' + (ud) \left(\varphi^2 + \left(\frac{d'}{d}\right)' \right) = 0$$

$$(pd)'' + (pd) \left(\varphi^2 - \left(\frac{d'}{d}\right)' \right) = 0$$

L'énergie totale s'écrivant $e = \frac{S}{4} \left(\left| \frac{p}{\rho c} \right|^2 + \rho |u|^2 \right)$, la ligne est donc pseudo-symétrique. La valeur critique de φ^2 correspondant à l'énergie totale est donc nulle, et celles correspondant aux énergies potentielle et cinétique sont respectivement $(d'/d)'$ et $-(d'/d)'$. Or quand il est possible de définir des fréquences de coupure (cf §4), on doit avoir :

$$\begin{aligned} f < f_c &\Rightarrow \varphi^2 < \text{valeur critique } \forall x \\ \text{soit } f < f_c &\Rightarrow k^2 < \inf(\text{valeur critique} + (d'/d)^2) \end{aligned}$$

On doit donc avoir nécessairement, pour les nombres d'onde de coupure k_c :

- pour l'énergie totale : $k_c > \inf(d'/d)$
- pour l'énergie potentielle : $k_c > \inf \left((d'/d)^2 + (d'/d)' \right)^{1/2}$
- pour l'énergie cinétique : $k_c > \inf \left((d'/d)^2 - (d'/d)' \right)^{1/2}$

On peut remarquer que l'équation des ondes sphériques est un cas particulier de l'équation des pavillons : il suffit de remplacer x par r , rayon de la sphère, et d'/d par $1/r$. Les inégalités ci-dessus deviennent alors : k_c respectivement supérieur à $\inf(1/r)$, à 0, et à $\inf(\sqrt{2}/r)$. Si les conditions aux limites le permettent, on peut par conséquent définir une fréquence de coupure au moins pour l'énergie totale et l'énergie cinétique. Ce résultat montre l'intérêt de ne pas raisonner sur la seule pression.

CONCLUSION

L'existence de deux types d'ondes bien distincts (ondes propagatives et ondes évanescentes) dans une ligne est une propriété des lignes idéales, infinies et sans pertes. Pour certaines lignes assez courtes, une telle distinction peut être complètement impossible. En fait, elle est liée à l'existence d'une discontinuité présentée par la dérivée de la fonction affaiblissement par rapport à la constante de propagation ; or cette discontinuité ne peut résulter que d'un passage à la limite, les fonctions caractérisant une ligne étant dans la pratique a priori continues.

C'est pourquoi l'assimilation d'une ligne très longue à une ligne infinie demande des précautions, même si dans de nombreux cas pratiques elle n'est pas contredite par l'expérience : il est exact que pour une impédance terminale (fonction de la constante de propagation) donnée, plus la ligne est longue, plus elle se rapproche du cas idéal ; par contre, cette affirmation n'est pas correcte si elle ne tient pas compte de l'impédance terminale.

V. SYNTHÈSE ET CONCLUSION

Avant de proposer quelques perspectives pour la poursuite de notre travail, nous nous proposons de déduire de celui-ci certaines généralités concernant les instruments à vent : le facteur de qualité ; le facteur de réflexion et le facteur de qualité local ; enfin les différents domaines de fréquences caractéristiques d'un instrument à vent.

1. FACTEUR DE QUALITÉ D'UN INSTRUMENT À VENT.

1.1. Ligne uniforme débouchant sur une impédance nulle

La définition d'un facteur de qualité Q , évoquée au chapitre IV, est classique pour un système vibrant. On en connaît trois définitions possibles, qui se recouvrent, à un facteur près, pour un oscillateur harmonique à un degré de liberté : le rapport de l'énergie totale mise en jeu à l'énergie perdue par le système pendant une période ; la largeur du pic de résonance à mi-hauteur ; enfin, en régime d'extinction la durée au bout de laquelle l'amplitude a décru d'un facteur e , multipliée par $\frac{\omega}{2}$.

D'autre part, on montre classiquement la validité de la généralisation aux lignes uniformes symétriques, dont le tuyau cylindrique est un cas particulier. C'est ce qu'ont fait par exemple SCHELKUNOFF (184) ou CHIPMAN (170) en électromagnétisme, et BROWN (100) en acoustique.

Nous effectuons ci-dessous le calcul pour les deux premières définitions, de manière originale, ce qui nous permettra de synthétiser plusieurs résultats obtenus au cours de ce travail.

a) La densité d'énergie totale moyenne dans une ligne symétrique s'écrit (cf Ch. I, § 5.2.1.) :

$$e_t = \frac{1}{4} \mathcal{A} |u|^2 + \frac{1}{4} \mathcal{C} |p|^2$$

$$\text{où } Z_v = \mathcal{A} + j\omega \mathcal{L} \text{ et } Y_t = \mathcal{C} + j\omega \mathcal{C}$$

Pour des ondes quasi-stationnaires, où $\text{Im}(\Gamma) \gg \text{Re}(\Gamma)$, et $\text{Re}(\zeta) \gg \text{Im}(\zeta)$ (cf. Ch. II, § 2.5.) on obtient :

$$e_t(x) = \frac{\text{Im}(\Gamma)}{4\omega} \left[\frac{|p|^2}{\text{Re}(\zeta)} + |u|^2 \text{Re}(\zeta) \right] \quad (1)$$

$$\text{où } \Gamma = \sqrt{Z_v Y_t}, \text{ et } \zeta = \sqrt{Z_v / Y_t}$$

b) Or, pour des ondes quasi-stationnaires, si $|p|$ n'est pas proche de son minimum, on peut négliger l'amortissement "énergétique", c'est-à-dire $\text{Re}(\Gamma)$ et $\text{Im}(\zeta)$; et si $|p|$ est proche de son minimum, cette quantité est très inférieure à $|u|$, et on peut alors négliger $|p|$ devant $\text{Re}(\zeta)|u|$, tout en calculant $|u|$ sans amortissement. Ce raisonnement s'applique inversement à $|u|$, et nous amène à la conclusion importante suivante : l'énergie totale peut être calculée sans amortissement à toute fréquence et en tout point.

Or, la ligne est symétrique ($\zeta = \zeta'$, cf Ch. IV, §3.3.4.1) ; on en déduit donc de plus que $e_t(x)$ est constante quand x varie :

$$e_t(x) = e_t(x_0)$$

c) Au chapitre II (§2.5), nous avons exprimé le flux d'énergie à l'entrée de la ligne en fonction de l'énergie perdue par amortissement

et du flux d'énergie sortant de la ligne :

$$I = H_x^0 \frac{1}{Z} \operatorname{Re}(\zeta) \left[\frac{|p_0|^2}{\operatorname{Re}(\zeta)} + |u_0|^2 \operatorname{Re}(\zeta) \right] + I_0 \quad (2)$$

$$\text{où } H_x^0 = \frac{-\operatorname{Im}(\gamma)}{\operatorname{Re}(\zeta)} (x_0 - x) = \frac{\operatorname{Re}(\Gamma)}{\operatorname{Re}(\zeta)} l$$

d) De ces éléments on tire (cf éq. (1) et (2)) :

$$I = \operatorname{Re}(\Gamma) \frac{2\omega e_t(x) l}{\operatorname{Im}(\Gamma)} + I_0$$

Si nous réutilisons le facteur de qualité local (cf ch. IV, § 3.3.3.), $q(x) = \frac{\omega}{\operatorname{Im}(\Gamma)} \frac{e_t(x)}{I}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{q} = 2\operatorname{Re}(\Gamma) l + \frac{1}{q_0} \quad (3)$$

e) Le calcul du facteur de qualité global Q est alors immédiat, puisque $e_t(x)$ est constante ; si nous supposons la ligne débouchant sur une impédance nulle (q_0 infini), on a :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée}}{\text{énergie perdue par période}} = \omega \int_x^{x_0} \frac{e_t(x) dx}{I(x)}$$

$$= \frac{\omega e_t l}{I(x)} = q(x) \operatorname{Im}(\Gamma) l$$

$$\text{Soit } Q = \frac{\operatorname{Im}(\Gamma)}{2\operatorname{Re}(\Gamma)} \quad (4)$$

Ce résultat ne fait pas intervenir le fait que l'on soit ou non à la résonance. Il concorde avec celui de SCHELKUNOFF (184, p. 230) :

$$Q = \left(\frac{Q}{\omega_n l} + \frac{Q}{\omega_n l} \right)^{-1} \text{ où } \omega_n \text{ est la pulsation de résonance.}$$

1.2. Tuyau cylindrique rayonnant dans l'espace infini ; tuyau cylindrique à cheminée axiale.

a) Si l'impédance terminale n'est pas nulle (ni infinie), il y a de l'énergie à l'extérieur de la ligne ; il est alors logique, comme BROWN (100) de prendre en considération toute l'énergie mise en jeu, dans la ligne et à l'extérieur. Cet auteur calcule ainsi le facteur de qualité pour un tuyau cylindrique rayonnant dans l'espace infini, et il somme l'énergie totale sur la longueur l_e (corrigée de l par $\operatorname{Im}(Z_0)/k$).

On obtient alors, avec notre procédure de calcul :

$$Q = q(x) \operatorname{Im}(\Gamma) l_e = \frac{\operatorname{Im}(\Gamma) l_e}{2\operatorname{Re}(\Gamma) l + \frac{1}{q_0}} \quad (5)$$

b) On peut montrer que ce résultat coïncide avec la largeur d'un pic de résonance de $|Z|$ ou de $|Y|$ (pour alléger l'écriture, nous supposons encore une fois $\operatorname{Im}(Z_0) = \operatorname{Im}(Y_0) = \operatorname{Im}(\Gamma) = k$). On a (cf Ch II, éq. 8, § 2.3.3.) :

$$\begin{cases} a = (1+b^2) \left(\operatorname{Re}(\Gamma) l + \frac{a_0}{1+b_0^2} \right) = (1+b^2) |Z|_{\min} \\ b = -\cot g k l_e \end{cases}$$

Aux alentours d'un pic de $|Y|$ ($|b|$ est proche de l'infini),

$$Y = \frac{a+jb}{1+a^2/b^2}. \text{ Pour } b \text{ infini, } |Y| = |Y|_{\max}. \text{ On cherche la largeur du}$$

pic pour $|Y| = |Y|_{\max} / \sqrt{2}$; or on sait (cf chII, § 2.2.3.), que $|Y|$

atteint cette valeur pour $\text{Re}(Y) = \pm \text{Im}(Y) = \frac{1}{2} |Y|_{\max}$, et $a = \pm b = |Y|_{\max}$.

Donc la fréquence recherchée est solution de :

$$(1+b^2) |Z|_{\min} = \pm b$$

$$\text{soit } |Z|_{\min} = \frac{1}{2} \sin 2k l_e \quad (6)$$

$$\text{Or, pour la résonance, } k_{\text{res}} l_e = \pi \quad (\pi)$$

Si $k = k_{\text{res}} + \epsilon$, où ϵ , petit, est la demi-largeur du pic,

$$(6) \text{ devient : } |Z|_{\min} = \frac{1}{2} \sin 2\epsilon l_e = \pm \epsilon l_e$$

Q est donc égal (pour la deuxième définition) à :

$$Q = \frac{k_{\text{res}}}{2|\epsilon|} = \frac{k_{\text{res}} l_e}{2|Z|_{\min}} \quad (7)$$

$$\text{soit } Q = \frac{\text{Im}(\Gamma_{\text{res}}) l_e}{2|Z|_{\min}}$$

Pour montrer que c'est bien le même résultat que celui de la formule (5), nous devons montrer que $2|Z|_{\min} = \frac{1}{q}$, c'est-à-dire

$$\frac{2a}{1+b^2} = \frac{1}{q}.$$

Or ceci est un résultat très général pour les ondes quasi-stationnaires ; en effet :

$$q = \frac{c \epsilon_t}{I} = \frac{1+|Z|^2}{2\text{Re}(Z)} = \frac{1+|Y|^2}{2\text{Re}(Y)}$$

En distinguant entre les différents domaines de valeurs de b, on montre bien que dans tous les cas,

$$q = \frac{1+b^2}{2a} \quad (8)$$

Les deux définitions de Q coïncident donc pour un tuyau cylindrique débouchant sur l'espace infini. (La démonstration serait semblable pour un pic de $|Z|$).

$$\text{En outre, on peut remarquer que } Q = \frac{k_{\text{res}} l_e}{2} |Y|_{\max} = n \frac{\pi}{2} |Y|_{\max}.$$

Le facteur de qualité a donc, au facteur $\frac{\pi}{2}$ près, la valeur du pic lui-même (en admittance réduite), multipliée par le numéro du pic. L'évolution avec la fréquence du facteur de qualité est donc la suivante : tant que l'amortissement est prépondérant, il croît comme la racine carrée de la fréquence ; puis il passe par un maximum, et quand le rayonnement est prépondérant, il décroît comme l'inverse de la fréquence.

c) Pour un tuyau à cheminée axiale, on peut encore montrer que les deux définitions de Q coïncident. Mais, le calcul étant fastidieux, nous nous contenterons de l'effectuer pour la première définition, en remarquant que l'énergie totale est constante dans chacun des deux tuyaux cylindriques (cf Ch. II, Fig. 4, § 2.3.6). On a :

$$Q = \omega \left(\frac{S_2 \epsilon_{t2} l_2}{S_2 I} + \frac{S_1 \epsilon_{t1} l_1}{S_1 I_1} \frac{S_1 I_1}{S_2 I} \right)$$

Or $S_1 I_1$, flux d'énergie entrant dans le tuyau 1, et $S_2 I_2$, flux d'énergie sortant du tuyau 2, sont égaux. D'où :

$$\frac{S_1 I_1}{S_2 I} = \frac{I_2}{I} = \frac{q_2}{q_1}, \text{ puisque } l_{t2} \text{ est constante.}$$

On obtient donc simplement :

$$Q = kq \left(l_2 + l_1 \frac{q_1}{q_2} \right) \quad (9)$$

où q est le facteur de qualité local à l'entrée du tuyau à cheminée, c'est-à-dire du tuyau 2, q_2 à la sortie du tuyau 2 et q_1 à l'entrée du tuyau 1. On les calcule à partir des quantités a et b calculées dans chaque tuyau comme nous l'avons fait au chapitre II.

On peut remarquer que en raison de l'amortissement dans le tuyau 2, q et q_2 sont différents : donc le facteur de qualité Q n'est pas la somme des facteurs de qualité pour les tuyaux 1 et 2 pris isolément.

1.3. Pavillon conique

Nous ne voulons pas calculer le facteur de qualité d'un pavillon en général, mais seulement envisager un cas particulier, celui du cône. Le calcul par la deuxième définition (largeur du pic) est difficile, d'autant plus que les pics de résonance ne sont pas symétriques ; nous ne le ferons encore que pour la première définition, en négligeant, pour simplifier, l'énergie totale à l'extérieur du tronc de cône.

$$Q = \omega \frac{\int_0^{x_0} S e_t dx}{S I_s} = \omega \frac{\int_0^{x_0} S e_t dx}{S I_s} \frac{a_s}{a}$$

Or, si l'énergie totale peut encore être calculée sans amortissement, elle varie cette fois avec x . On a donc, puisque $S I_s$ est constant :

$$Q(x) = k \frac{a_s(x)}{a(x)} \int_0^{x_0} q_s(x) dx \quad \text{avec } q_s = \frac{1+b^2}{2a_s} \quad (10)$$

Or (cf ch. II, § 2.4.3.1, éq. 15a) :

$$\begin{cases} a = (1+p^2) \left(H + \frac{a_0}{1+p_0^2} \right) \\ b = p - \frac{1}{kx} \quad \text{où } p = -\operatorname{tg}(kx - E_0) \end{cases}$$

(pour a_s , on écrit $H = 0$).

$$\text{D'où } Q(x) = \frac{k}{2} \frac{1}{H + \frac{a_0}{1+p_0^2}} \int_0^{x_0} \frac{1+b^2}{1+p^2} dx$$

$$\text{L'intégrale vaut : } \left[x - \frac{\cos^2(kx - E_0)}{k^2 x} \right]_0^{x_0}$$

Si x_0 est assez grand, cette intégrale vaut : $1 + \frac{\cos^2(kx - E_0)}{k^2 x}$

Distinguons à présent entre les pics et les creux de l'impédance à l'entrée du cône :

a) Pour les maximums de $|Y|$: $|Y|_{\max} = \frac{1}{H + \frac{a_0}{1+p_0^2}}$ pour b infini,

soit $\operatorname{tg}(kx - E_0)$ infini. D'où $Q(x) \simeq \frac{k}{2} \frac{1}{k^2 x} |Y|_{\max}$.

C'est le même résultat que l'équation (7) pour le cylindre.

b) Pour les maximums de $|Z|$: $|Z|_{\max} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2x^2})(H + \frac{a_0}{1+p_0^2})}$

pour $b = 0$,

soit $\operatorname{tg}(kx - E_0) = -\frac{1}{kx}$

Donc $Q(x) = k \frac{1}{2} |Z|_{\max} (1 + \frac{x_0}{k^2 x^2})$; si x est petit devant x_0 ,

$x_0 \neq x$, et :

$$Q(x) \simeq k \frac{1}{2} |Z|_{\max} (1 + \frac{1}{k^2 x^2})$$

On en tire cette conclusion importante : le facteur de qualité Q diffère peu entre les pics d'impédance et d'admittance, car H varie lentement ; dans tous les cas,

$$Q(x) = \frac{k_{\text{res}}^2}{2} \frac{1}{H + \frac{a_0}{1+p_0^2}}$$

Rappelons qu'au contraire les pics d'impédance diffèrent fortement des pics d'admittance à cause du facteur $(1 + \frac{1}{k^2 x^2})$. Contrairement

à la courbe des pics d'impédance, l'évolution du facteur de qualité ressemble donc à celle du tuyau cylindrique.

Ce résultat n'est guère surprenant étant donné la définition du facteur de qualité, par l'intégrale de l'énergie totale divisée par le flux d'énergie à l'entrée ; il amène donc à penser que c'est une propriété générale des instruments à vent : leur courbe des pics d'impédance ou leur courbe des creux d'impédance sont très heurtées, passant elles-mêmes par des extremums, alors que la courbe du facteur de qualité est beaucoup plus régulière. Cette dernière croît dans les basses fréquences, puis décroît dans les hautes fréquences. Certes, ceci demanderait à être démontré dans le cas général, ou au moins vérifié par un calcul numérique dans certains cas type.

2. FACTEUR DE REFLEXION ET FACTEUR DE QUALITE LOCAL D'UN INSTRUMENT A VENT

a) Dans le chapitre IV, nous avons défini un "facteur de réflexion" R , distinct du "coefficient de réflexion", sauf pour les ondes planes dans un tuyau cylindrique. Il est bon d'illustrer cette distinction à propos des pavillons acoustiques : dans ce but, nous utiliserons la similitude que ceux-ci présentent avec les milieux inhomogènes à une dimension (cf Canevet (103, 104)). Un milieu inhomogène de densité $\rho(x)$, de vitesse du son $c(x)$, et donc d'impédance "itérative" $z(x) = \rho(x) c(x)$, peut être considéré comme une succession de petits cylindres de longueur infiniment petite. Dans chaque cylindre, on peut définir un coefficient de réflexion par $R = \left| \frac{Z - z(x)}{Z + z(x)} \right|$, comme le fait MILLER (132) : cette définition est la même que notre définition du facteur de réflexion dans un pavillon (en milieu homogène, cf ch IV, § 3.3.3), $R = \left| \frac{Z - \rho c}{Z + \rho c} \right|$.

Choisissons à présent des lois de variation particulières pour $\rho(x)$ et $c(x)$, par exemple la loi exponentielle pour $\rho(x)$ ($\frac{\rho'}{\rho} = -2m$) et constante pour $c(x)$. La solution pour le milieu inhomogène (analogue au pavillon exponentiel) s'écrit, si $k_1 = (k^2 - m^2)^{1/2}$:

$$\begin{cases} p = e^{-mx} (ae^{-jk_1 x} + be^{jk_1 x}) e^{j\omega t} \\ u = \frac{mp}{j\rho\omega} + \frac{k_1}{\rho\omega} e^{-mx} (ae^{-jk_1 x} - be^{jk_1 x}) e^{j\omega t} \end{cases}$$

Définissons le coefficient de réflexion pour la pression comme nous l'avons fait au chapitre IV (§ 2.3), par $|b/a|$; on obtient :

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{1 + \rho \frac{\omega}{k_1} \gamma - j \frac{m}{k_1}}{1 - \rho \frac{\omega}{k_1} \gamma + j \frac{m}{k_1}} \right|$$

Cette quantité est donc différente de R, et de plus elle est encore différente du coefficient de réflexion pour la vitesse. Ceci montre que nous sommes en présence de deux concepts bien distincts, le second étant très difficile à définir dans le cas général d'une ligne à caractéristique variable. Quant au facteur de réflexion, R, il est rappelons-le, lié à la définition large des ondes stationnaires, c'est-à-dire les ondes qui ne transportent pas d'énergie.

b) Nous nous proposons de chercher les variations de R avec la fréquence dans un pavillon grâce aux résultats du Ch. IV. Nous avons montré que R est lié au facteur de qualité local, par la relation :

$$q = c \frac{R_t}{1} = \frac{1+R^2}{1-R^2}$$

R varie donc dans le même sens que q. Si on tient compte de l'amortissement, $I = (\frac{AM}{a_0} + 1)I_0$, et donc :

$$q(x) = \frac{e_t(x)}{e_{to}} \frac{q_0}{\frac{AM}{a_0} + 1}$$

Le raisonnement qui suit vaut pour un pavillon exponentiel, que nous avons étudié au chapitre IV. Néanmoins, la généralisation à un pavillon quelconque (à caractéristiques variables) est possible, mais la démonstration, très lourde et fastidieuse ne semble pas utile ici.

L'énergie totale, et donc $E = e_t/e_0$, varie dans la bande passante idéale de manière sinusoïdale avec x ; comme nous l'avons noté pour d'autres grandeurs, les variations sont semblables avec la fréquence. C'est pourquoi, comme I varie assez régulièrement avec celle-ci, q varie également dans cette bande en passant par des minimums et des maximums. Mais les variations de q sont beaucoup moins amples que celles de l'impédance. Ajoutons que les extremums de |Z| ne correspondent jamais aux extremums de q.

D'un autre côté, dans la bande d'arrêt idéale, nous avons démontré que l'impédance de rayonnement Z_0 vérifiait la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\partial E}{\partial \alpha}$ soit positive, c'est-à-dire $\frac{\partial q_0}{\partial T}$ soit également négative pour l'impédance de rayonnement. Quant au terme $(\frac{AM}{a_0} + 1)$, il varie lentement, en étant en général une fonction croissante de la fréquence. Les trois termes dont q est le produit sont donc tels que q est décroissante avec la fréquence (plus la fréquence est basse, plus les ondes sont stationnaires).

Finalement, q et R sont décroissants jusqu'à une certaine fréquence, puis oscillent, quand la fréquence augmente, avec une faible amplitude. La fréquence séparant les deux domaines, pour un pavillon à caractéristiques variables, ne peut pas être déterminée exactement, mais nous avons vu (ch IV, § 6.4) qu'elle était telle que :

$$f_c > \inf(d'/d)$$

Il est certain que cette relation, utile pour un cône ou plus encore pour un pavillon exponentiel (ou caténoïdal) n'a pas d'intérêt

pour un pavillon dont l'évasement est très faible au départ, comme les pavillons de BESSEL. Néanmoins, dans ce dernier cas, on peut montrer que cette fréquence f_c est d'autant plus grande que l'évasement total est plus grand.

La figure 1 montre les courbes de q et de R pour un trombone (sans embouchure).

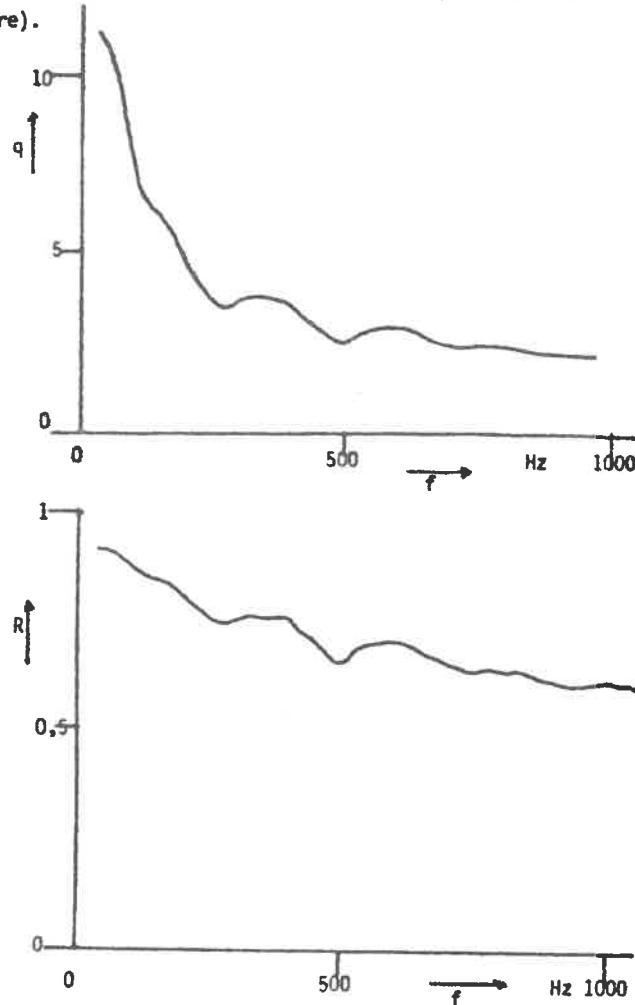


Fig.1 : facteur de qualité local q et facteur de réflexion à l'entrée d'un trombone (sans embouchure)

3. DOMAINES DE FREQUENCES CARACTERISTIQUES D'UN INSTRUMENT A VENT

Pour un instrument à trous latéraux, nous avons vu qu'au-dessus de la fréquence de coupure, les extremums de l'impédance sont très peu marqués. De ce point de vue, l'analogie relevée par BENAÏDE, entre un instrument à trous latéraux et un pavillon est certaine : pour un pavillon il existe également une fréquence au-dessus de laquelle les extremums sont très peu accusés. Citons à ce sujet BENAÏDE (15, p. 404) : "La colonne d'air devient alors, de résonateur, une sorte de mégaphone qui rejette tout le son vers l'extérieur...". On peut donc penser à définir une fréquence de coupure de cette façon pour les pavillons.

Mais il doit être clair que cette fréquence est tout à fait distincte de la fréquence de coupure d'un pavillon telle qu'on les définit habituellement, et que nous avons étudiée pour un pavillon fini. Nous allons d'ailleurs montrer que cette dernière est nécessairement inférieure à la fréquence de premier pic d'impédance. Pour ce faire, nous négligerons l'amortissement, puisque justement nous allons montrer que $|Z|$ n'est pas proche d'un extremum.

Au chapitre I (§ 5.1.2, éq. 23), nous avons calculé la dérivée de l'énergie totale moyenne ; sans amortissement, elle s'écrit :

$$(Se)' = \frac{S'}{4} \left(\frac{|p|^2}{\rho c^2} - \rho |u|^2 \right)$$

$$\text{Donc } \frac{(Se)'}{SI} = \frac{1}{c} \frac{S'}{S} \frac{|Z|^2 - 1}{2\operatorname{Re}(Z)} \quad (\text{pour l'impédance réduite})$$

Or, sans amortissement, SI est constant. D'où :

$$\frac{(Se)'}{SI} = \frac{e'}{I} \quad \text{De plus : } q = \frac{ce}{I} = \frac{|Z|^2 + 1}{2\operatorname{Re}(Z)}$$

$$\text{Donc } \frac{e'}{e} = \frac{S'}{S} \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|^2 + 1}$$

La quantité $\frac{a'}{E} = \frac{E'}{E}$ varie par conséquent dans le même sens

que $|Z|$ quand la fréquence varie. Or nous avons vu que $\frac{\partial E}{\partial f}$ est négative dans la bande d'arrêt idéale, si l'impédance terminale est l'impédance de rayonnement. D'autre part, la condition nécessaire et suffisante obtenue au chapitre IV (§ 4.4) montre que nécessairement $\frac{\partial E'}{\partial \alpha}$ est négative en x , sinon il y aurait contradiction pour les valeurs de la variable inférieures à x . Donc $\frac{\partial E'}{\partial f}$ est positive, et $\frac{\partial(\frac{E'}{E})}{\partial f}$ aussi. Finalement, au-dessous de la fréquence de coupure, $|Z|$ est strictement croissante.

On peut donc distinguer trois domaines de fréquences pour les instruments à vent ouverts, c'est-à-dire qui rayonnent par une autre extrémité que l'excitateur (ceci exclut donc les bourdons et flûtes de Pan).

1. Un domaine dans lequel le module de l'impédance est une fonction strictement croissante de la fréquence. C'est à ce domaine qu'appartient la fréquence de coupure classique d'un pavillon, au-dessous de laquelle l'énergie qu'il transmet est très faible ; rappelons que nous avons défini la fréquence de coupure de façon globale : elle est beaucoup plus basse pour une trompette entière que pour le pavillon de celle-ci puis isolément. D'autre part, sur un instrument complet, le pavillon détermine une fréquence de coupure d'autant plus haute qu'il est plus évasé : ceci concorde avec le fait que le premier pic d'impédance des cuivres est nettement plus haut que celui du cylindre de même longueur (cf LURTON (61)).

2. Un domaine dans lequel l'impédance présente des extremums.

C'est la zone des fréquences qui participent au fonctionnement de l'instrument par oscillations auto-entretenues. Les ondes y sont quasi-stationnaires ; c'est la zone que nous avons principalement étudiée dans le chapitre II. Sa limite supérieure est en général comprise entre 1000 et 2000 Hz. Pour les instruments à trous latéraux (assez larges et pas trop distants), cette fréquence est la fréquence de coupure.

3. Un domaine dans lequel les extremums de l'impédance sont peu accusés.

L'instrument y fonctionne comme un mégaphone. Pour les instruments à trous latéraux, nous avons divisé ce domaine en deux parties : l'une où l'énergie est perdue essentiellement par amortissement aux parois et rayonnement par les trous latéraux, l'autre, beaucoup plus aigüe, où l'énergie est perdue par rayonnement par le pavillon. Ajoutons enfin que ce domaine peut s'étendre jusqu'à des fréquences très élevées (10 à 20 kHz), qui ont une importance non négligeable pour l'oreille : c'est le cas pour certains instruments à anche joués à fort niveau.

4. Quelques perspectives

Notre étude a porté sur des systèmes résonants de formes très diverses, les instruments à vent. La méthode approchée basée sur l'approximation des ondes quasi-stationnaires permet de calculer les grandeurs acoustiques à partir de l'approximation stationnaire (sans pertes) de l'admittance, et de l'approximation sans pertes calorifiques de la pression et de la vitesse, les pertes calorifiques nécessitant seulement le calcul d'un terme unique, noté $AM I_0/a_0$, qui est la différence entre les flux d'énergie par tranche à l'entrée et à la sortie. Quand il y a des trous latéraux, le rayonnement par ceux-ci peut être formellement assimilé aux pertes calorifiques.

On doit noter toutefois la difficulté liée à l'influence de l'amortissement visco-thermique aux parois sur la vitesse du son : cette difficulté altère un peu la précision des calculs, mais elle ne gêne pas l'essentiel, qui est la compréhension des échanges d'énergie. Nous avons en effet pu répondre pour plusieurs types d'instruments à la question : comment l'énergie reçue par le système en fonctionnement permanent se divise en énergie perdue sous forme calorifique, et énergie acoustique émise par les différents orifices de l'instrument.

Le modèle mathématique utilisé est le modèle unidimensionnel, tenant compte de la combinaison des causes de non-planéité des ondes sous forme de corrections. Le bilan de la validité de ces corrections nous indique clairement les directions de recherche qu'il conviendrait de suivre pour prolonger et améliorer quantitativement ce travail. Nous l'avons vu, les causes essentielles de non-planéité sont au nombre de trois :

a) L'amortissement visco-thermique aux parois

La théorie de KIRCHHOFF semble tout à fait suffisante pour étudier les instruments à vent. La seule question qui se pose concerne les conditions aux limites : ne doit-on pas prendre en compte dans certains cas d'instruments réels une admittance de parois non nulle, et les vibrations des parois ? Il est certain qu'une étude précise de l'influence de ces vibrations pour des instruments comme les cuivres reste à faire.

b) Les variations de section et les dérivations

Nous avons confirmé que la théorie unidimensionnelle est suffisante aux basses fréquences. De plus, dans un cas simple (le tuyau à cheminée axiale), la correction des modes évanescents a montré qu'il était possible d'améliorer le modèle ; mais il est clair que des corrections analogues doivent être recherchées pour des problèmes plus compliqués : les pavillons de grand évasement, et les trous latéraux. Une méthode est la recherche de surfaces équiphases en écoulement incompressible, grâce à une étude expérimentale basée sur l'analogie électrique, comme a procédé Nederveen (135) pour les trous latéraux fermés, ou grâce à un calcul de transformation conforme, comme l'ont fait Guittard (117) et Morse et Ingard (134).

c) Le rayonnement

Ce problème est malheureusement inséparable du précédent, ce qui ajoute à sa complexité. Il est bien probable que seule une étude expérimentale poussée pourra aboutir à des résultats suffisamment généraux. L'attention devrait notamment être portée sur le raccordement des champs interne et externe.

A ces problèmes, nous devons en ajouter d'autres, liés au fonctionnement réel des instruments à vent, et que nous n'avons pas pris en considération : l'effet de l'écoulement, des variations de température dans l'instrument, des non-linéarités aux forts niveaux,...

L'étude analytique de ces améliorations est intéressante pour le développement des connaissances fondamentales ; mais c'est la combinaison de l'ensemble de ces améliorations, utilisées comme ajustements au modèle principal que nous avons décrit, qui pourra être éventuellement

utile à la facture instrumentale, cette combinaison ne pouvant être traitée que par calcul numérique.

IL reste enfin à développer une théorie plus complète de certaines notions comme le facteur de qualité et le facteur de réflexion, dans les cas les plus généraux possibles de lignes de transmission, en régime permanent, mais aussi en régime transitoire.

Annexe I : Calcul de la fonction $e = L^2 |p|^2 + M^2 |u|^2$

1. Bande d'arrêt idéale : φ imaginaire pur

On pose alors $j\varphi = \alpha$, $j\phi = a\ell$

$$\text{d'où } \sin \varphi \ell = -j \operatorname{sh} a\ell \quad \text{et } \frac{\sin \varphi x}{\sin \varphi \ell} = \frac{\operatorname{sh} x a}{\operatorname{sh} a\ell}$$

$$\cos \varphi \ell = \operatorname{ch} a\ell$$

1.1. Notation linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} p = a e^{-\alpha x} + b e^{+\alpha x} \\ u = a/\zeta e^{-\alpha x} - b/\zeta' e^{+\alpha x} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{A}{-\operatorname{sh} a\ell - \Delta} = \frac{-\operatorname{sh} a\ell + \Delta}{D} \\ \zeta' = \frac{A}{-\operatorname{sh} a\ell + \Delta} = \frac{-\operatorname{sh} a\ell - \Delta}{D} \end{array} \right.$$

(on a $AD = \operatorname{sh}^2 \alpha \ell - \Delta^2$; $\zeta \zeta'^*$ réel)

$$|p|^2 = |a|^2 e^{-2\alpha x} + |b|^2 e^{2\alpha x} + 2\operatorname{Re}(ab^*)$$

$$|u|^2 = |a|^2/|\zeta|^2 e^{-2\alpha x} + |b|^2/|\zeta'|^2 e^{2\alpha x} + 2\operatorname{Re}(ab^*/\zeta \zeta'^*)$$

Soient L et M réels, tels que $L^2 + M^2 \neq 0$:

$$e = |a|^2 (L^2 + M^2/|\zeta|^2) e^{-2\alpha x} + |b|^2 (L^2 + M^2/|\zeta'|^2) e^{2\alpha x} + 2\operatorname{Re}(ab^*) (L^2 + M^2/\zeta \zeta'^*)$$

Les dérivées de e s'écrivent :

$$e' = -2\alpha (|a|^2 (L^2 + M^2/|\zeta|^2) e^{-2\alpha x} - |b|^2 (L^2 + M^2/|\zeta'|^2) e^{2\alpha x})$$

$$e'' = 4\alpha^2 (|a|^2 (L^2 + M^2/|\zeta|^2) e^{-2\alpha x} + |b|^2 (L^2 + M^2/|\zeta'|^2) e^{2\alpha x})$$

Par conséquent, e'' est positive quel que soit x .

La condition e'_0 négative s'écrit :

$$|a|^2 (L^2 + M^2/|\zeta|^2) > |b|^2 (L^2 + M^2/|\zeta'|^2)$$

En effet, nous avons choisi $\operatorname{Im}(\varphi) < 0$, et donc $\alpha > 0$.

1.2. Notation matricielle

$$e = |Lp + Mu|^2 - 2LM \operatorname{Re}(pu^*) = |Lp + Mu|^2 - 2LM \operatorname{Re}(p_0 u_0^*)$$

$$e = |(A_n L + C_n M)u_0 + (B_n L + D_n M)p_0|^2 - 2LM \operatorname{Re}(p_0 u_0^*)$$

$$e = |\operatorname{sh} \alpha x U + \operatorname{ch} \alpha x V|^2 - 2LM \operatorname{Re}(p_0 u_0^*)$$

$$e = \operatorname{sh}^2 \alpha x (|U|^2 + |V|^2) + \operatorname{Re}(U^* V) \operatorname{sh} 2\alpha x + e_0$$

$$\text{avec } U = \frac{(LA - MD)u_0 + (MD + LD)p_0}{\operatorname{sh} a\ell} \quad \text{et } V = Lp_0 + Mu_0$$

On en tire e'_0 :

$e'_0 = 2\alpha \operatorname{Re}(U^* V)$. Or A et D sont imaginaires purs, et Δ réel, d'où :

$$e'_0 = \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} a\ell} ((L^2 |p_0|^2 - M^2 |u_0|^2) + j(L^2 A - M^2 D) \operatorname{Im}(p_0^* u_0))$$

D'autre part, $\gamma = -\Delta/A$ et $\delta = -\operatorname{sh} a\ell/A$

$$\text{Donc } e'_0 = 2\alpha (\gamma/\delta (L^2 |p_0|^2 - M^2 |a_0|^2) + j(-L^2/\delta + M^2 \delta (1 - \gamma^2/\delta^2)) \operatorname{Im}(p_0^* u_0))$$

1.3. Calcul de E'_0 et E''_0 , où $E = e/e_0$

$$E'_0 = e'_0 / (L^2 + M^2 |Y_0|^2)$$

Si on remarque que $|U|^2 + |V|^2 = |U + V|^2 - 2 \operatorname{Re}(U^* V)$, on obtient :

$$e''_0 = 2\alpha^2 |U + V|^2 - 2\alpha e'_0, \text{ soit :}$$

$$E''_0 = -\frac{2\alpha^2}{\delta^2} (L^2 - M^2/\zeta'^2) \frac{|Y_0 - 1/\zeta|^2}{L^2 + M^2 |Y_0|^2} - 2\alpha E'_0$$

2. Bande passante idéale : φ réel

2.1. Calcul de e

Avec la notation linéaire, on a :

$$|p|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \cos(2\varphi x - \theta) \quad \text{où } \theta = \arg(ab^*)$$

$$|u|^2 = (|a|^2 + |b|^2 - 2|ab| \cos(2\varphi x - \theta')) / |\zeta|^2 \quad \text{où } \theta' = \arg(ab^* / \zeta \zeta^*)$$

$$e = (|a|^2 + |b|^2) (L^2 + M^2 / |\zeta|^2) + 2|ab| (L^2 \cos(2\varphi x - \theta) - M^2 / |\zeta|^2 \cos(2\varphi x - \theta'))$$

(en effet $\zeta = \zeta^*$)

Avec la notation matricielle, le calcul est semblable à celui de la bande d'arrêt :

$$e = \sin^2 \varphi x (|u|^2 - |v|^2) + \operatorname{Re}(u^* v) \sin 2\varphi x + e_0$$

$$\text{où } u = \frac{(LA - MA)u_0 + (MD + LA)p_0}{\sin \varphi x} \quad \text{et } v = Lp_0 + Mu_0$$

2.2. Calcul des extremums de |p| et |u|.

$$|p|_{\max}^2 = (|a|^2 + |b|^2) \quad \text{pour } 2\varphi x - \theta = 0 \quad (2\pi)$$

$$|p|_{\min}^2 = (|a|^2 - |b|^2) \quad \text{pour } 2\varphi x - \theta = \pi \quad (2\pi)$$

$$|u|_{\max}^2 = (|a|^2 + |b|^2) / |\zeta|^2 \quad \text{pour } 2\varphi x - \theta' = \pi \quad (2\pi)$$

$$|u|_{\min}^2 = (|a|^2 - |b|^2) / |\zeta|^2 \quad \text{pour } 2\varphi x - \theta' = 0 \quad (2\pi)$$

La coïncidence entre maximums de |p| et minimums de |u| n'a lieu que si $\theta = \theta'$, c'est-à-dire, si $\arg(\zeta^2) = 0$, donc ζ réel, autrement dit si la ligne est symétrique. L'annulation de |p| ou de |u| ne peut avoir lieu que si $|b| = |a|$.

3. Cas limite : $\varphi = 0$

$$\text{Quand } \varphi \rightarrow 0, \quad \frac{\sin \varphi x}{\sin \varphi l} \rightarrow \frac{x}{l} = X. \text{ D'où :}$$

$$\begin{cases} p = XAu_0 + (1-X\Delta)p_0 = X\Delta(Z_0 - \zeta)u_0 + p_0 \\ u = (1-X\Delta)u_0 + XDp_0 = X\Delta(1/\zeta - Y_0)p_0 + u_0 \end{cases}$$

$$\text{avec } AD = -\Delta^2 \text{ et } \zeta = -\zeta' = -A/\Delta = \frac{\Delta}{D} \text{ (imaginaire pur)}$$

$$\text{Si } \tilde{U} = (LA - MA)u_0 + (MD + LA)p_0 = (LV\tilde{A} - jMYD)(\sqrt{A}u_0 + j\sqrt{D}p_0)$$

et $V = Lp_0 + Mu_0$, on peut écrire e sous la forme :

$$e = X^2 |\tilde{U}|^2 + 2X \operatorname{Re}(\tilde{U}V^*) + e_0$$

$$\text{D'où : } e' l = 2X |\tilde{U}|^2 + 2 \operatorname{Re}(UV^*)$$

$$e'' l^2 = 2 |\tilde{U}|^2 : \text{c'est une constante positive ou nulle.}$$

Etude du cas où e'' est nulle

$$e'' = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = 0 \Rightarrow e' = 0 \Rightarrow e \text{ constante}$$

$$|\tilde{U}|^2 = \Delta^2 (L^2 - M^2 / \zeta^2) / |p_0 - \zeta u_0|^2$$

a) filtre asymétrique : $\Delta \neq 0$; A, D, ζ , $1/\zeta$ sont non nuls.

Comme ζ est imaginaire pur, $L^2 - M^2 / \zeta^2$ est positif, donc

$$\tilde{U} = 0 \Leftrightarrow p_0 = \zeta u_0 \Leftrightarrow Z_0 = \zeta$$

b) filtre symétrique : Δ nul, donc A ou D est nul.

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p_0 \\ u = u_0 + XDp_0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = p_0 + XAu_0 \\ u = u_0 \end{array} \right.$$

L'une au moins des grandeurs p et u a une amplitude constante.

Il y a trois cas possibles :

- $A = D = 0$: toute impédance est itérative, et $e'' = 0$.
- $A = 0, D \neq 0, \zeta = 0$: $e_p'' = 0$, mais $e_c'' \neq 0$, et $e_t'' \neq 0$, sauf dans le cas idéal ($Z_0 = \zeta = 0$).
- $A \neq 0, D = 0, 1/\zeta = 0$: $e_c'' = 0$, mais $e_p'' \neq 0$ et $e_t'' \neq 0$, sauf dans le cas idéal ($Y_0 = 1/\zeta = 0$).

4. Le flux d'énergie

$$4.1. I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(pu^*) = \frac{1}{2} |p|^2 \operatorname{Re}(Y) = \frac{1}{2} |u|^2 \operatorname{Re}(Z)$$

La relation linéaire (4) implique : $u(x) = \gamma p(x) + j \frac{\delta}{\varphi} p'(x)$

$$\text{soit } Y(x) = \gamma + j \frac{\delta}{\varphi} \frac{p'}{p}$$

Si I est constant, γ est imaginaire pur, et $\frac{\delta}{\varphi}$ est réel ; donc :

$$I = \frac{1}{2} |p|^2 \operatorname{Re}\left(j \frac{\delta}{\varphi} \frac{p'}{p}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\varphi} |p|^2 \operatorname{Im}\left(\frac{p'}{p}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\varphi} |p|^2 \operatorname{Im}(\operatorname{Log} p)'$$

$$\text{soit } I = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\varphi} |p|^2 (\operatorname{Arg} p)'$$

De même, on obtient avec la relation (4bis) : $I = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\varphi} |u|^2 (\operatorname{Arg} u)'$

4.2. Bande d'arrêt idéale : $j\varphi = \alpha$

$$\begin{cases} p = a e^{-\alpha x} + b e^{\alpha x} \\ u = \gamma p + \delta (a e^{-\alpha x} - b e^{\alpha x}) \\ I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta(ab^* - ba^*)) = j \delta \operatorname{Im}(ab^*) \end{cases}$$

4.3. Bande passante idéale : φ réel

$$I = \frac{1}{2} \delta (|a|^2 - |b|^2)$$

4.4. Cas limite : $\varphi = 0$.

Ce qui suit est valable pour p , mais s'adapterait sans difficulté pour u :

$$a) A \neq 0 \quad \frac{\delta}{\varphi} = -j \frac{\sin \varphi l}{A \varphi} = -\frac{j l}{A} \quad I = \frac{1}{2} \frac{j l}{A} |p|^2 (\operatorname{Arg} p)'$$

$$b) A = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \quad \begin{cases} p = p_0 \\ u = u_0 + j D p_0 \end{cases}$$

$$\text{Si } D \neq 0 : I = \frac{1}{2} \frac{j l}{D} |u|^2 (\operatorname{Arg} u)'$$

Annexe II : ligne sans pertes à caractéristiques variables.

$$(8) \begin{cases} p = \bar{\gamma}u + \bar{\beta}u' \\ u = \gamma p + \beta p' \end{cases}$$

où $\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}$, et $\beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}$ sont imaginaires purs. Si $\varphi^2 = \frac{\gamma\bar{\gamma}-1}{\beta\bar{\beta}}$,

$$(9) \begin{cases} u'' + u' \frac{\beta'}{\beta} + u \left(\varphi^2 + \frac{\gamma'}{\beta} \right) = 0 \\ p'' + p' \frac{\beta'}{\beta} + p \left(\varphi^2 + \frac{\gamma'}{\beta} \right) = 0 \end{cases}$$

1. Equation différentielle satisfaite par $h = Lp + Mu$

Le module de h est lié à $e = L^2|p|^2 + M^2|u|^2$ par la relation $|h|^2 = e + 4LM I$, où $I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(pu^*)$ est le flux d'énergie, supposé constant. Pour étudier les variations de e , il suffit donc d'étudier celles de $|h|$. Pour obtenir l'équation satisfaite par h , on multiplie les équations du système (9) respectivement par M et L , et on doit donc évaluer :

$$F = Lp' \frac{\beta'}{\beta} + Mu' \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\beta} (Lp - Mu)$$

en fonction de h et h' . D'après (8), F peut se mettre sous la forme suivante :

$$F = -Lp\bar{g}' - Mu\bar{g}', \text{ où } g = \frac{L}{\bar{\beta}} + \frac{\gamma}{\beta} \text{ et } \bar{g} = \frac{M}{L\bar{\beta}} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}$$

$$\text{Or } h' = hg + Lp(\bar{g} - g) = h\bar{g} + Mu(g - \bar{g})$$

$$\text{D'où } F = -h' \frac{\bar{g}' - g'}{\bar{g} - g} + h \cdot \frac{g\bar{g}' - g'\bar{g}}{\bar{g} - g}$$

Finalement, h est solution de :

$$h'' - h' \frac{\bar{g}' - g'}{\bar{g} - g} + h \left(\varphi^2 + \frac{g\bar{g}' - g'\bar{g}}{\bar{g} - g} \right) = 0$$

$$\text{Posons } \bar{g} - g = G e^{j\psi}; \text{ alors } \frac{\bar{g}' - g'}{\bar{g} - g} = \frac{G'}{G} + j\psi'$$

$$\text{D'autre part : } \frac{g\bar{g}' - g'\bar{g}}{\bar{g} - g} = -\frac{1}{2} (\bar{g} + g)' + \frac{1}{2} (\bar{g} + g) \frac{\bar{g}' - g'}{\bar{g} - g}$$

$$\text{Or } (\bar{g} + g) \text{ est imaginaire pur. ; posons } js = \frac{1}{2} (\bar{g} + g) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{M\bar{\beta}} + \frac{M}{L\bar{\beta}} \right)$$

L'équation en h s'écrit alors :

$$h'' - h' \left(\frac{G'}{G} + j\psi' \right) + h \left(\varphi^2 - js' + js \left(\frac{G'}{G} + j\psi' \right) \right) = 0$$

Etude des variations de $|h|$:

Posons $h = \rho e^{j\theta} e^{j\frac{1}{2}\psi'}$; et prenons la partie réelle de l'équation :

$$\rho'' - \rho' \frac{G'}{G} + \rho \left(-\theta'^2 + \varphi^2 - s\psi' + \frac{1}{4}\psi'^2 \right) = 0$$

$$\text{Donc si } \varphi^2 < s\psi' - \frac{1}{4}\psi'^2 \quad \forall x, \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)' > 0 \quad \forall x$$

$$\text{Or } \rho^2 = e + \text{constante} \Rightarrow 2\rho\rho' = e' : \text{ donc } \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)' > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e'}{e\rho} \right)' > 0$$

$$\text{si } \left. \begin{aligned} e' < 0 \\ \varphi^2 < s\psi' - \frac{1}{4}\psi'^2 \end{aligned} \right\} e' < 0 \quad x < 0$$

Donnons enfin une écriture plus simple pour ψ :

$$\psi = \operatorname{Arctg} \frac{j}{2} \frac{\left(\frac{L}{M\bar{\beta}} - \frac{M}{L\bar{\beta}} \right)}{-2 \frac{\gamma}{\bar{\beta}}} = -\operatorname{Arctg} \frac{j}{2} \left(\frac{L}{M\gamma} + \frac{M}{L\bar{\gamma}} \right)$$

B I B L I O G R A P H I E

1. Acoustique des instruments à vent

- (1) AUGER, L., Oscillations autoentretenues dans les tuyaux sonores à anches battantes. Publications Sci. et Tech. Ministère de l'Air, n°194, 1945.
- (2) BACKUS, J., Small-vibration theory of the clarinet. J. Acoust. Soc. Am. 35, 1963, 305 et 61, 1977, 1381.
- (3) BACKUS, J., The acoustical foundations of music. Norton, New York, 1969.
- (4) BACKUS, J., Input impedance curves for the reed instruments. J. Acoust. Soc. Am. 56, 1974, 1266.
- (5) BACKUS, J., Acoustic impedance of an annular capillary. J. Acoust. Soc. Am. 58, 1975, 1078.
- (6) BACKUS, J., Input impedance curves for the brass instruments. J. Acoust. Soc. Am. 60, 1976, 470.
- (7) BARIAUX, D., Auto-oscillations de système du type de la clarinette. Proc. 9th Intl Congress Acoust., Madrid, 1977 (P7).
- (8) BENADE, A.H., On woodwind instruments bores. J. Acoust. Soc. Am. 31, 1959, 137.
- (9) BENADE, A.H., On the mathematical theory of woodwind finger holes. J. Acoust. Soc. Am. 32, 1960, 1591.
- (10) BENADE, A.H. et MURDAY, J., Measured end corrections for woodwind tone holes. J. Acoust. Soc. Am. 41, 1967, 1609.
- (11) BENADE, A.H. et GANS, D.J., Sound production in wind instruments. Ann. N.Y. Acad. Sci., 155, 1968, 247.
- (12) BENADE, A.H., The physics of brasses. Sci. Am. July 1973, 24.
- (13) BENADE, A.H., et JANSSON, E.V., On plane and spherical waves in horns with nonuniform flare. Acustica, 31, 1974, 80, et 31, 1974, 185.
- (14) BENADE, A.H. et GEBLER, J.M., Reed cavity and neck proportions in conical woodwinds. J. Acoust. Soc. Am. 55, 1974, 478.
- (15) BENADE, A.H., Fundamentals of musical acoustics. Oxford U.P., 1976.
- (16) BENADE, A.H., Wind instruments and music acoustics. in Sound generation in winds, strings, computers, Royal Academy of Music, Stockholm, 1980.
- (17) BERNHART, J., Traité de prise de son. Paris, Eyrolles, 1949.
- (18) BERNOULLI, D., Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgue différemment construits. Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764, 431.
- (19) BIOT, J.B., Des instruments à vent. in Précis élémentaire de physique expérimentale. Paris, 1821, 410-454.
- (20) BLADIER, B., et NAGAI, Y., Sur l'influence du débouchage de trous latéraux sur les sons rayonnés par un tuyau ouvert. C.R. Acad. Sc. Paris 274(B), 1972, 108.
- (21) BLAIKLEY, P.J., On brass wind instruments as resonators. Phil. Mag. 6, 1878, 11.
- (22) BOUASSE, H., Tuyaux et résonateurs. Paris, Delagrave, 1929.
- (23) BOUASSE, H., Instruments à vent. Paris, Delagrave, 1929-1930 (2 vol.)

- (24) CASTELLENGO, M., Contribution à l'étude expérimentale des tuyaux à bouche (Thèse). Université Paris 6, 1976.
- (25) COLTMAN, J.W., Sounding mechanism of the flute and organ pipe. J. Acoust. Soc. Am. 44, 1968, 983.
- (26) COLTMAN, J.W., Sound radiation from the mouth of an organ pipe. J. Acoust. Soc. Am. 46, 1969, 477.
- (27) COLTMAN, J.W., Jet drive mechanisms in edge tones and organ pipes. J. Acoust. Soc. Am. 60, 1976, 725.
- (28) COLTMAN, J.W., Acoustical analysis of the Boehm flute. J. Acoust. Soc. Am. 65, 1979, 499.
- (29) CREMER, L. et ISING, H., Die selbsterregten Schwingungen von Orgelpfeifen. Acustica, 19, 1967, 143.
- (30) DUANE DUDLEY, J., et STONG, W.J., Numerical calculation of input impedance for brass horn shapes. J. Acoust. Soc. Am. 68, 1980, S112.
- (31) DUMIELLE, J.C., et THONIER, P., Etude du champ acoustique créé par un instrument à vent à trous latéraux. D.E.A., Université du Maine, Le Mans, 1979.
- (32) ELDER, S.A., On the mechanism of sound production in organ pipes. J. Acoust. Soc. Am. 54, 1973, 1554.
- (33) FOUCHE, M., Etude expérimentale des tuyaux à anche. (Thèse) Toulouse, Privat Ed., 1928.
- (34) FOUCHE, M., Résonateurs sphériques et cylindriques. Revue de la faculté des sci. de l'Univ. d'Istanbul, I 4, 1936, II 1-4 et III 1, 1937.
- (35) FOUCHE, M., Théorie de la résistance. Revue de la faculté des sci. de l'Univ. d'Istanbul, III 4, 1938.
- (36) FOUCHE, M., Acoustique des instruments à vent. Congrès de l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole de Liège, Liège, 1947.

- (37) FLETCHER, N.H., Non-linear interactions in organ flue pipes. J. Acoust. Soc. Am. 56, 1974, 645.
- (38) FLETCHER, N.H., Jet-drive mechanism in organ pipes. J. Acoust. Soc. Am. 60, 1976, 481.
- (38bis) FLETCHER, N.H., Transients in the speech of organ flue pipes, a theoretical study. Acustica, 34, 1976, 224.
- (39) FLETCHER, N.H., Sound production by organ flue pipes. J. Acoust. Soc. Am. 60, 1976, 926.
- (40) FLETCHER, N.H., Mode locking in non-linearly excited inharmonic musical oscillators. J. Acoust. Soc. Am. 64, 1978, 1566.
- (41) FLETCHER, N.H., Excitation mechanism in woodwind and brass instruments. Acustica, 43, 1979, 63.
- (42) FLETCHER, N.H., Air flow and sound generation in musical wind instruments. Ann. Rev. Fluid Mech. 11, 1979, 123.
- (43) FRANZ, G., ISING, H. et MEINUSCH, P., Schallabstrahlung von Orgelpfeifen. Acustica, 22, 1969, 226.
- (44) GIBIAT, V., Le champ sonore d'un instrument à vent considéré comme champ d'interférences. D.E.A., Université du Maine, Le Mans, 1980.
- (45) HELMHOLTZ, H. von, Zur theorie der Zungenpfeifen. Poggend. Ann. der Physik und Chemie, 114, 1861, 321.
- (46) HELMHOLTZ, H. von, Théorie physiologique de la musique. Paris, Masson, 1874.
- (47) HAGUE, B., The tonal spectra of wind instruments. Proc. of the royal musical association, 73, 1946-47, 67.
- (48) HERSCHEL, Sir J.F.W., Sound. Encyclopaedia Metropolitana, London, 1830.
- (49) HOWE, M.S., Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. J. Fluid Mech. 71, 1975, 625.

- (50) INGERSLEV, F. et FROBENIUS, W., Some measurements of the end-corrections and acoustic spectra of cylindrical open flue pipes. Trans. danish Acad. Tech. Sciences, 1, 1947.
- (51) IRONS, E.J., On the free periods of resonators. Phil. Mag. 9, 1930, 346.
- (52) IRONS, E.J., The fingering of wind instruments. Phil. Mag. 10, 1930, 16.
- (53) IRONS, E.J., On the fingering of conical wind instruments. Phil. Mag. 11, 1931, 535.
- (54) KEEFE, D.H., et BENADE, A.H., Impedance measurement source and microphone proximity effects. J. Acoust. Soc. Am. 68, 1980, S111.
- (55) KERGMARD, J., Le rôle du tuyau dans le timbre de certains instruments à trous latéraux. Proc. 9th Intl Congress Acoust., Madrid, 1977, (P9).
- (56) KERGMARD, J., Quasi-standing waves in horns: computation of the real and imaginary parts of impedance. Acoust. Lett. 3, 1979, 76.
- (57) KERGMARD, J., Ondes quasi-stationnaires dans les pavillons avec pertes visco-thermiques aux parois: calcul de l'impédance. Acustica, 48, 1981, 31.
- (58) KNAUSS, H.P., et YAEGER, W.J., Vibration of the walls of a cornet. J. Acoust. Soc. Am. 13, 1941, 160.
- (59) KRÜGER, W., Methode zur Stimmungskorrektur von Blasinstrumenten. Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 80, 1971, 63.
- (60) LEIPP, E., Acoustique et musique. Paris, Masson 1971.
- (61) LURTON, X., Etude analytique de l'impédance d'entrée des instruments à embouchure. (Thèse de 3^e cycle) Université du Maine, Le Mans, 1979.
- (62) LURTON, X., Etude analytique de l'impédance d'entrée des instruments à embouchure. Acustica, à paraître 1981.

- (63) MARTIN, D.W., Directivity and the acoustic spectra of brass instruments. J. Acoust. Soc. Am. 13, 1941, 309.
- (64) MASSON, M.A., Etudes expérimentales sur le mouvement des fluides élastiques. Théorie nouvelle des instruments à vent. Ann. de Chimie et de Physique, 3^e série, 40, 1854, 333-475.
- (65) MEYER, E. et BUCHMANN, G. Die Klangspektren der Musikinstrumenten. Sitzungsber. der Akad. der Wissenschaften (Berlin). Phys. Math. Klasse 1931, 735.
- (66) MEYER, J., Akustik der Holzblasinstrumente. Frankfurt/Main, Das Musikinstrument, 1966.
- (67) MEYER, J., Akustik und musikalische Aufführungspraxis. Frankfurt/Main, Das Musikinstrument, 1972.
- (68) MILLER, D.C., The science of musical sounds. New York, Macmillan, 1916.
- (69) NEDERVEEN, C.J., et DE BRUIJN, A., Hole calculations for an oboe. Acustica, 18, 1968, 47.
- (70) NEDERVEEN, C.J., Acoustical aspects of woodwind instruments. Amsterdam, Frits Knuf, 1969.
- (71) NORTHROP, P.A., Problems in the analysis of the tone of an open organ pipe. J. Acoust. Soc. Am. 12, 1940, 90.
- (72) OLSON, H.F., Music, physics, and engineering. Dover, 1967.
- (73) PLITNIK, G.R., et STRONG, W.J., Numerical method for calculating input impedances of the oboe. J. Acoust. Soc. Am. 65, 1979, 816.
- (74) POISSON, S.D., Mémoires sur le mouvement des fluides élastiques dans les tuyaux cylindriques et sur la théorie des instruments à vent. Mém. Acad. Sci. II, 1817, 305.
- (75) PRATT, R.L., ELLIOTT, S.J., et BOWSHER, J.M., The measurement of the acoustic impedance of brass instruments. Acustica, 38, 1977, 236.
- (76) PRATT, R.L., et BOWSHER, J.M., The objective assessment of trombone quality. J. Sound Vib. 65, 1979, 521.

- (77) PRATT, R.L., ELIOTT, S.J., et BOWSER, J.M., Comments on (147). J. Acoust. Soc. Am. 66, 1979, 905.
- (78) RAMAN, C.V., Musikinstrumente und ihre Klänge. in Akustik (pp 354-424). Springer, Berlin, 1927.
- (79) RICHARDSON, E.G., The acoustics of orchestral instruments and of the organ. Oxford U.P., New York, 1929.
- (80) SCHAFHAUTL (PELLISOV), Theorie gedeckter cylindrischer und konischer Pfeifen und der Querflöten. J. für Chemie und Physik (Schweigger, Zürich), 8, 1833, 28-102.
- (81) SCHUMACHER, R.T., Self sustained oscillations of organ pipes: an integral equation approach. Acustica, 39, 1978, 225.
- (82) SCHUMACHER, R.T., Self sustained oscillations of the clarinet: an integral equation approach. Acustica 40, 1978, 298.
- (83) SMITH, R.A., et DANIELL, G.J., Systematic approach to the correction of intonation in wind instruments. Nature, 262, 1976, 761.
- (84) STRONG, W.J., et PLITNIK, G.R., Music, speech and high fidelity. Brigham Young U.P., Provo, UT, 1977.
- (85) THOMSON, S.C., The effect of the reed resonance on woodwind tone production. J. Acoust. Soc. Am. 66, 1979, 1239.
- (86) VOGEL, H. Die Zungenpfeifen als gekoppeltes System. Ann. der Physik, 62, 1920, 247-282.
- (87) WEBER, W., Theorie der Zungenpfeifen. Pog. Ann. der Physik und Chemie 17, 1829, 193; également 16, 1829, 193 et 16, 1829, 415.
- (88) WOGRAM, K., Ein Beitrag zur Ermittlung der Stimmung von Blechblasinstrumenten. Diss. Technische Universität Carolo-Wilhelmina, Braunschweig, 1972.
- (89) WORMAN, W.E., Self-sustained nonlinear oscillations of medium amplitude in clarinet-like systems (Ph D. Thesis). Case Western Reserve University, 1971.

- (90) WU, F. et PERIO, P., La phase en acoustique musicale. I. Analyse d'un signal quasi périodique. J. Physique, 40, 1979, 799.
- (91) WU, F. et PERIO, P., La phase en acoustique musicale. II. Le rayonnement des instruments à vent. J. Physique 42, 1981, 627.

2. Acoustique physique générale.

- (92) ANDO, Y., Experimental study of the pressure directivity and the acoustic center of the "circular pipe horn loudspeaker". Acustica 20, 1968, 366.
- (93) ANDO, Y., On the sound radiation from semi-infinite circular pipe of certain wall thickness. Acustica, 22, 1969-70, 191.
- (94) ANDO, Y., et KOIZUMI, T., Sound radiation from a semi-infinite circular pipe having an arbitrary profile of orifice. J. Acoust. Soc. Am. 59, 1976, 1033.
- (95) BENAËDE, A.H., On the propagation of sound waves in a cylindrical conduit. J. Acoust. Soc. Am. 44, 1968, 616.
- (96) BERANEK, L.L., Acoustic properties of gases. in American institute of physics handbook. Mc Graw Hill, 2nd édit., 1963.
- (97) BERGASSOLI, A., GERMAIN, R., et ROURE, A., Solutions de quelques problèmes de raccordement de guides acoustiques. Acustica 34, 1976, 306.
- (98) BOSQUET, J., La propagation de l'énergie acoustique dans les fluides parfaits. Acad. Roy. de Belgique, Bull. de la classe des sciences, 23, 1937, 73.
- (99) BOSQUET, J., Cours d'acoustique et d'électroacoustique. Edit. de l'Université libre de Bruxelles, 1970.
- (100) BROWN, A.E., Quality factor of distributed resonators. Acoust. Lett. 3(1), 1979, 23.
- (101) BRUNEAU, M., Sur un modèle de lignes appliqué à la propagation des ondes sonores dans un tube cylindrique et à la mesure de l'impédance acoustique des parois. Revue d'acoustique, 38, 1976, 180.

- (102) CANAC, F., Filtres acoustiques. J. Phys. et le Radium, 6, 1926, 161.
- (103) CANEVET, G., Propagations acoustiques dans les milieux inhomogènes et dans les pavillons (Thèse). Université de Provence, Marseille, 1974.
- (104) CANEVET, G., Acoustic propagation in aperiodic transition layers and waveguides. J. Acoust. Soc. Am. 67, 1980, 425.
- (105) CHAIGNE, A., Etude de l'influence d'une cheminée latérale fermée sur les fréquences de résonance d'un tuyau sonore. D.E.A., Université du Maine, Le Mans, 1975.
- (106) LE CORBEILLER, P. Electroacoustique. Paris, Chiron, 1934.
- (107) COTE-DUNAJEWSKI, T., Contribution à l'étude des résonateurs (Thèse de 3^e cycle). Université d'Aix-Marseille, 1977.
- (108) CRANDALL, I.B., Theory of vibrating systems and sound. Van Nostrand, 1954.
- (109) CUMMINGS, A., Acoustic of a wine bottle. J. Sound Vib. 31, 1973, 371.
- (110) CUMMINGS, A., Acoustic of a cider bottle. Applied acoust. 5, 1972, 161.
- (111) DANIELS, F.B., On the propagation of sound waves in a cylindrical conduit. J. Acoust. Soc. Am. 22, 1950, 563.
- (112) DUHAMEL, J.M.C., Mémoire sur les vibrations des gaz dans les tuyaux de diverses formes. Liouville J. Math. 14, 1849, 49-110.
- (113) Van Den DUNGEN, F.H., Application du principe de Rayleigh au calcul de systèmes acoustiques. Mém. Acad. Roy. Belgique, 2^e série, XII, 1938.
- (114) EISNER, E., Complete solutions of the "Webster" horn equation. J. Acoust. Soc. Am. 41, 1967, 1126.
- (115) EULER, L., De motu aeris in tubis. Novi comentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. XVI, 1771, 281.
- (116) FIORITO, R. et ÜBERALL, H., Resonance theory of acoustic reflection and transmission through a fluid layer. J. Acoust. Soc. Am. 65(1), 1979, 9.
- (117) GUITTARD, J., Impédances terminales de tuyaux sonores cylindriques. Acustica 12, 1962, 313.
- (118) HELMHOLTZ, H. von, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. J. reine Angew. Math. 57, 1860, 1.
- (119) HOPKINS, W., On aerial vibrations in cylindrical tubes. Cambridge Trans. Phil. Soc. V, 1835, 231-270.
- (120) INGARD, U., On the theory and design of acoustic resonators. J. Acoust. Soc. Am. 25, 1953, 1037.
- (121) KARAL, F.C., The analogous acoustical impedance for discontinuities and constriction of circular cross section. J. Acoust. Soc. Am. 25, 1953, 327.
- (122) KINSLER, L.E. et FREY, A.R., Fundamentals of acoustics. John Wiley, New York, 1962.
- (123) KIRCHHOFF, G., Über die Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. Poggend. Ann. 134, 1868, 179.
- (124) LAGRANGE, J.L., Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. Mélanges de la Soc. Roy. de Turin, II, 1760-1761, 11.
- (125) LAPIN, A.D., Sound propagation in a waveguide with side branches and volume resonators in the walls. Sov. Phys. Acoust. 7(2), 1961, 171.
- (126) LAPIN, A.D., Propagation of sound in a waveguide having side branch resonators. Sov. Phys. Acoust. 7(1), 1961, 77.
- (127) LEVINE, H. et SCHWINGER, J., On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. Phys. Rev. 73, 1948, 383.

- (128) LIPPERT, W.K.R., Sound propagation in ducts with side branches. *Acustica* 7, 1957, 135.
- (129) LUCAS, R., *Acoustique*. Claude Hermant, Paris, 1958.
- (130) MASON, W.P., A study of the regular combination of acoustic elements, with application to recurrent acoustic filters, tapered acoustic filters, and horns. *Bell System tech. J.* 6, 1927, 258.
- (131) MASON, W.P., *Electromagnetic trasducers and wave filters*. Van Nostrand 1948.
- (132) MILLER, N.B., Reflections from gradual transition sound absorbers. *J. Acoust. Soc. Am.* 30, 1958, 967.
- (133) MORSE, P.M., *Vibration and sound*. Mc Graw Hill, 1948.
- (134) MORSE, P.M., et INGARD, K.U., *Theoretical acoustics*. Mc Graw Hill 1968.
- (135) NEDERVEEN, C.J., et Van WULFFTEN PALTHE, Resonance frequency of a gas in a tube with a short closed side-tube. *Acustica* 13, 1963, 65.
- (136) NOMURA, Y., YAMAMURA, I., INAWASHIRO, S., On the acoustic radiation from a flanged circular pipe. *J. Phys. Soc. Jap.* 15, 1960, 510.
- (137) OLSON, H.F., *Acoustical engeneering*. Van Nostrand, Princeton, 1957.
- (138) PASCAL, J.C., Détermination de la puissance acoustique des machines de grandes dimensions (Thèse). Université Paris 6, 1980.
- (139) RAYLEIGH, Lord, *The theory of sound*. Dover, 1945 (2 vol.).
- (140) ROCARD, Y., *Propagation et absorption du son*. Hermann, Paris, 1935.
- (141) ROCARD, Y., *Théorie des oscillateurs*. Ed. de la Revue Scientifique, Paris, 1941.
- (142) ROCARD, Y., *Dynamique générale des vibrations*. Masson, Paris, 1971.

- (143) ROURE, A., *Propagation guidée; étude des discontinuités*. (Thèse de 3^e cycle), Université d'Aix-Marseille, 1976.
- (144) SALMON, V., Generalized plane wave horn theory. *J. Acoust. Soc. Am.* 17, 1946, 199.
- (145) SALMON, V., A new family of horns. *J. Acoust. Soc. Am.* 17, 1946, 212.
- (146) SAVART, F., Recherches sur les vibrations de l'air. *Ann. Chimie* 24, 1823, 56-88, et 29, 1825, 404-426.
- (147) SINGH, R. et SHARY, M., Acoustic impedance measurement using sine sweep excitation and known volume velocity technique. *J. Acoust. Soc. Am.* 64, 1978, 995.
- (148) SONDHAUSS, C., Über das Tönen erhitzter Röhren und die Schwingungen der Luft in Pfeifen von verschiedenen Gestalt. *Poggend. Ann.*, 1870, 53-76, et 219-241.
- (149) STEVENSON, A.F., Exact and approximate equations for wave propagation in acoustic horns. *J. Appl. Phys.* 22, 1951, 1461.
- (150) STEWART, G.W., Acoustic wave filters. *Phys. Rev.* 20, 1922, 528.
- (151) STEWART, G.W., The tube as a branch of an acoustic conduit: the special case of the Quincke tube. *Phys. Rev.* 27, 1926, 494.
- (152) STEWART, G.W. et LINDSAY, R.B., *Acoustics*. Van Nostrand, 1930.
- (153) TEMPLE, G. et BICKLEY, W.G., *Rayleigh's principle*. Dover pub., 1956.
- (154) TIJDEMAN, H., On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *J. Sound. Vib.* 39(1), 1975, 1.
- (155) VANDENBOSCH, J., Détermination analytique de l'impédance acoustique d'une modification brusque de section transversale d'un tube rectangulaire. *Bull. d'électroacoustique de l'Institut Montefiore, Liège*, 17, 1970, 47 et 19, 1971, 25.
- (156) WEBSTER, A.G., Acoustical impedance, and the theory of horns and the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 5, 1919, 275.

- (157) WERTHEIM, G., Expériences sur les tuyaux ouverts ou bouchés, ébranlés à plein orifice. Ann. Chimie Physique 31, 1851, 394-432.
- (158) WESTON, D.E., The theory of the propagation of plane sound waves in tubes. Proc. Phys. Soc. B66, 1953, 695.
- (159) ZAMMINER, Über Schwingungsbewegung der Luft. Poggend. Ann. 1856, 173.
- (160) ZWIKKER, C., et KOSTEN, C., Sound absorbing materials. Elsevier, 1949.

3. Physique générale, électromagnétisme, optique.

- (161) ABRAMOWITZ, M., et STEGUN, E., Handbook of mathematical functions. Dover, 1964 (p. 383).
- (162) BOUASSE, H., Electroptique Ondes Hertziennes. Delagrave, Paris, = 1915.
- (163) BREKHOVSKIKH, L.M., Waves in layered media. Academic Press, 1960.
- (164) BRILLOUIN, L. et PARODI, M., Propagation dans les milieux périodiques. Masson-Dunod, Paris, 1956.
- (165) BRILLOUIN, L., Wave propagation and group velocity. Academic Press 1960.
- (166) DE BROGLIE, L., Problèmes de propagation guidée des ondes électromagnétiques. Gauthiers-Villars, Paris, 1951.
- (167) BRUHAT, G., Optique. Masson, Paris, 1965.
- (168) BUDDEN, K.G., The wave-guide theory of wave propagation. Logos Press, Londres, 1961.
- (169) CAMPBELL, G.A., Physical theory of the electric wave filter. Bell System Tech. J. I, n°2, 1922.
- (170) CHIPMAN, R.A., Transmission lines. Mc Graw Hill, 1968.

- (171) COLLIN, Field theory of guided waves. Mc Graw Hill, 1975.
- (172) CRAWFORD, F.S., Waves (Berkeley physics course). Mc Graw Hill, 1968.
- (173) DRAWN, H.W., Phénomènes de vibration et de propagation. Eyrolles, Paris, 1976.
- (174) GOUDET, G. et CHAVANCE, P., Ondes centimétriques. Chiron, Paris, 1955.
- (175) IBELE, W., in Handbook of heat transfer. Mc Graw Hill, 1973.
- (176) JOHNSON, K.S., Circuits de transmission pour communications téléphoniques. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- (177) LEWIN, L., Advanced theory of waveguides. Iliffe, Londres, 1951.
- (178) LINDSAY, R.B., Mechanical radiation. Mc Graw Hill, 1960.
- (179) LOVE, A.W., Electromagnetic horn antennas. I.E.E.E. Press, New York, 1976.
- (180) MARCUWITZ, N., Waveguide handbook. Mc Graw Hill, 1951.
- (181) MITTRA, R. et LEE, S.W., Analytical techniques in the theory of guided waves. Macmillan, New York, 1971.
- (182) MORENO, Th., Microwave transmission design data. Mc Graw Hill, 1948.
- (183) RAGAN, G.L., Microwave transmission circuits. Mc Graw Hill, 1948.
- (184) SCHELKUNOFF, S.A., Electromagnetic waves. Van Nostrand, 1943.
- (185) SKILLING, H.H., Electric transmission lines. Mc Graw Hill, 1951.
- (186) SLATER, J.C., Microwave transmission. Mc Graw Hill, 1942.
- (187) SOUTHWORTH, G.C., Principles and applications of waveguide transmission. Van Nostrand, 1950.

- (188) SPORLEDER, F. et UNGER, H.G., Waveguide tapers transitions and couplers. Peter Peregrinus (I.E.E.), Stevenage (U.K.), 1979.
- (189) Standard dictionary of electrical and electronics terms. I.E.E.E. 1977.
- (190) STEVENSON, A.F., General theory of electromagnetic horns. J. Appl. Phys. 22, 1951, 1447.
- (191) Thermophysical properties research center data book, vol.II. Purdue University, Lafayette, Indiana (s.d.).
- (192) VINES, R.G., Measurement of the thermal conductivities of gases at high temperatures. J. Heat Transfer, Trans. ASME, 82, 48, 1960.

