



HAL
open science

Marches aléatoires sur les espaces homogènes de volume infini

Timothée Bénard

► **To cite this version:**

Timothée Bénard. Marches aléatoires sur les espaces homogènes de volume infini. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPASM006 . tel-03238642

HAL Id: tel-03238642

<https://theses.hal.science/tel-03238642>

Submitted on 27 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Marches aléatoires sur les espaces
homogènes de volume infini

*Random walks on homogeneous
spaces of infinite volume*

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

Ecole Doctorale de Mathématique Hadamard (EDMH) n° 574
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay,
91405, Orsay, France
Référent : Faculté des sciences d'Orsay

**Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay,
le 15 Février 2021, par**

Timothée BÉNARD

Composition du jury :

Nathanaël ENRIQUEZ Professeur à l'Université Paris-Saclay	Président
Emmanuel BREUILLARD Professeur à l'Université de Cambridge	Rapporteur et examinateur
Vadim KAIMANOVICH Professeur à l'Université d'Ottawa	Rapporteur
Sara BROFFERIO Professeur à l'Université Paris Est Créteil	Examinatrice
François LEDRAPPIER Directeur de recherche émérite à l'Institut de Mathématiques de Jussieu	Examinateur

Direction de la thèse :

Yves BENOIST Directeur de recherche CNRS à l'Université Paris-Saclay	Directeur
---	-----------

université
PARIS-SACLAY | FACULTÉ
DES SCIENCES
D'ORSAY



Fondation mathématique
FMJH
Jacques Hadamard



Remerciements

Avant tout autre, je souhaite adresser ma reconnaissance la plus profonde à mon mentor et directeur de thèse Yves Benoist. Yves, je te dois beaucoup. Je ne te remercierai jamais assez de m'avoir confié sans artifice ta vision des mathématiques. Je veux garder en mémoire ces journées entières passées dans ton bureau à discuter de mon travail de recherche, le tout dans une bonne humeur électrique. Tu m'as montré par l'exemple que les difficultés mathématiques ne doivent pas donner lieu à une frustration, mais être appréhendées avec souplesse, détachement, et une certaine dose d'autodérision. J'ai aussi appris l'importance cruciale des exemples et analogies qui constituent un moteur des idées. Ces moments passés à discuter ensemble, que ce soit devant un tableau ou un café après le déjeuner, ont apporté une touche fondamentale à ma formation de mathématicien et garderont toujours une grande importance à mes yeux. Même si je ne serai bientôt plus ton élève, j'espère que nous pourrons continuer de nous parler régulièrement, de mathématiques ou autre.

Mes pensées de gratitude se tournent aussi vers ma famille qui a toujours soutenu mon travail, et ce déjà bien avant ma thèse, en s'adaptant à mon emploi du temps serré à la limite du despotisme, ou en me faisant la fête lors de mes visites pour les vacances scolaires. Quelques images clefs que je veux retenir : les footings dans la campagne baginoise suivis de soirées pantouflardes au coin du feu, les excursions touristiques à vélo que ce soit pour visiter les châteaux de Loire ou l'île d'Oléron, l'odeur du repas qui se prépare dans la cuisine à côté, les séances de travail studieuses bien qu'alités dans le petit appartement de Chicago, etc. Tous ces moments simples, modestes, qui appartiennent à tous et nous définissent pourtant.

Je voudrais également remercier Alberto Arabia qui a eu une influence décisive dans mon choix d'orientation à la fin de la terminale. Tu as été pour moi un véritable modèle d'idéal intellectuel, curieux de tout, éloquent et plein de discernement. Je garde un souvenir fort de ces conversations animées, le soir au moment du dîner, où tu expliquais avec bienveillance et virtuosité des merveilles scientifiques étonnantes, le tout accompagné d'empanadas argentines faites maisons. J'espère moi aussi pouvoir créer de tels moments plus tard avec mes enfants.

Je ne veux pas non plus oublier mes amis Pierre-Louis, Charles, Clément, Gwenaël, Anna, Dimitri, Julien, Yichao. Je me sens extrêmement chanceux de vous avoir rencontrés et de vous voir régulièrement, que ce soit au cours de soirées Unlock animées, de collaborations pianistiques, ou de séjours dans les montagnes. Rien que votre présence autour de moi justifie à mes yeux le choix de faire des mathématiques. J'espère que nos carrières respectives se croiseront et nous donneront l'occasion de travailler ensemble.

Je dois aussi beaucoup au lycée Louis-Le-Grand où je suis entré dès la classe de seconde et à ses professeurs de Mathématiques tout aussi excellents qu'investis. Un merci tout spécial à Guy Alarcon, Yves Duval et Bernard Randé!

Je souhaite par ailleurs exprimer ma gratitude envers le conservatoire de Bourg-

La-Reine, et en particulier à mon professeur de piano Virginie Gros, pour m'avoir accueilli et accompagné dans mon parcours musical, qui constitue pour moi un contrepoint vital au travail analytique du chercheur.

Enfin, je voudrais remercier Emmanuel Breuillard et Vadim Kaimanovich pour avoir lu et rapporté mon texte de thèse avec soin, ainsi que Sara Brofferio, Nathanaël Enriquez, et François Ledrappier pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Table des matières

I	Théorie générale des marches aléatoires	21
1	Mesures de Radon stationnaires	23
1.1	Stationnarité	24
1.2	Conservativité	25
1.3	Ergodicité	27
1.3.1	Désintégration ergodique	28
1.3.2	Ergodicité d'une mesure conservative	30
1.4	Mesures de Radon limites	33
1.4.1	Définition	33
1.4.2	Conditionner la marche par un temps d'arrêt	36
1.4.3	Application aux marches affines de Lyapunov nul	37
2	Marche sur un groupe linéaire	41
2.1	La probabilité de Furstenberg	42
2.2	Théorèmes limites	43
2.2.1	Loi des grand nombres	44
2.2.2	Théorème central limite	45
2.2.3	Loi du logarithme itéré	46
2.2.4	Principe des grandes déviations	46
2.2.5	Théorème local limite	47
2.2.6	Quelques mots sur les preuves	47
II	Travaux de recherche	49
3	Transience en loi d'une marche symétrique en mesure infinie	51
3.1	Un résultat général de transience en loi	53
3.1.1	Notations et énoncé du théorème de transience	53
3.1.2	Martingales rétrogrades	55
3.1.3	Convergence des aller-retours et preuve de la transience	58
3.2	Application : une réciproque au théorème de récurrence d'Eskin-Margulis	61

3.2.1	Enoncé de la réciproque	61
3.2.2	Preuve de la réciproque	63
3.2.3	Pour aller plus loin	66
4	Récurrence presque-sûre sur un espace homogène de rang 1	69
4.1	Espaces symétriques de type non compact et de rang 1	71
4.1.1	Rappels algébriques	71
4.1.2	Transience et fonction de Green	72
4.2	Un lemme de renouvellement	74
4.3	Transience presque-sûre	80
4.4	Dichotomie	81
5	Dérive d'une marche sur un revêtement abélien	85
5.1	Dérive en tout point	88
5.1.1	Notation et énoncé du théorème	88
5.1.2	Preuve du théorème 5.1.1	93
5.2	Le cas d'une marche sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$	96
5.2.1	Description du revêtement	98
5.2.2	Un théorème central limite	100
5.2.3	Application à la récurrence et à la dérive	103
5.3	Le cas général d'un revêtement abélien d'une surface hyperbolique de volume fini	105
6	Mesures de Radon stationnaires pour une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$	109
6.1	Premières considérations	114
6.2	Mesures limites	117
6.3	Cas atomique	119
6.4	Réduction du cas non atomique	121
6.4.1	Rappels sur les groupes algébriques	121
6.4.2	Réduction au théorème de dérive exponentielle	125
6.4.3	Stratégie pour la dérive exponentielle	129
6.5	Non dégénérescence des mesures limites	131
6.5.1	Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret.	132
6.5.2	Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense	141
6.6	Description des fibres	145
6.6.1	Mesures conditionnelles le long des fibres	145
6.6.2	Equirépartition des morceaux de fibres	148
6.7	Théorème local limite	150
6.7.1	Rappels	150
6.7.2	Taille des morceaux de fibres	151
6.8	Loi des angles et contrôle de la dérive	158
6.8.1	Points de densité	158

6.8.2	Convergence des points de densité	161
6.8.3	Contrôle de $\theta_n(b)$	163
6.8.4	Loi des angles	165
6.8.5	Divergence de la projection de Cartan	170
6.8.6	Contrôle de la dérive	171
6.9	Preuve de la dérive exponentielle	173
6.10	Conclusion	177

Introduction

Emergence du sujet

Ce texte étudie les marches aléatoires induites par des actions de groupes probabilisés. Le premier exemple d'une telle marche est sans doute celui des chaînes de Markov sur \mathbb{R} à incréments indépendants identiquement distribués. Leur étude constitue la base de la théorie des probabilités et repose sur des théorèmes limites, comme la loi des grands nombres, le théorème central limite, etc.

A partir des années 60, on commence à s'intéresser à des marches sur \mathbb{R}^d données par l'action de transformations linéaires choisies aléatoirement. Plus précisément, on se donne un vecteur $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, une mesure de probabilité μ sur $GL_d(\mathbb{R})$, et une suite $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ d'éléments de $GL_d(\mathbb{R})$ choisis aléatoirement selon μ . Les travaux de Furstenberg, Guivarc'h, Raugi, Lepage, et d'autres révèlent des théorèmes limites pour la trajectoire $(b_n \dots b_1 v)_{n \geq 0}$ analogues à ceux des marches sur \mathbb{R} (voir [18]). On peut également citer Arnold et Krylov [3], ainsi que Kazhdan [53], qui prouvent des propriétés d'équidistribution pour la loi de $(b_n \dots b_1 v)$ dans le cas où μ est supportée par le groupe orthogonal $SO_d(\mathbb{R})$ ou par le groupe des déplacements euclidiens du plan $SO_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. Dans les années 90, Bougerol, Picard, Babillot, Elie abordent le cas plus général où μ est à support dans le groupe affine $GL_d(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^d$ et démontrent des propriétés de récurrence, sous l'hypothèse d'un exposant de Lyapunov négatif ou nul [19, 4].

Ces situations se placent dans le cadre abstrait suivant. On se donne un espace topologique X sur lequel agit continument un groupe topologique G , tous deux étant supposés localement compacts à base dénombrable. On munit G d'une mesure de probabilité μ . Cela induit une marche aléatoire sur X dont la probabilité de transition en un point x est donnée par

$$\mu \star \delta_x : A \subseteq X \mapsto \mu \{g \in G, g.x \in A\}$$

Avec des mots, on réalise un pas à partir de x en choisissant aléatoirement et selon μ un élément du groupe G puis en le faisant agir sur x .

Ces 20 dernières années, le cas d'une marche sur un espace homogène de *volume fini* a suscité un grand intérêt. On y suppose que X est un quotient $X = G/\Lambda$ où

Λ est un réseau de G , i.e. un sous-groupe discret de covolume fini ; et l'action de G sur X est l'action naturelle par translation à gauche. De façon assez suprenante, des avancées considérables ont pu être réalisées dans ce cas, par analogie avec la théorie de Ratner. Celle-ci étudie l'action de sous-groupes unipotents de G sur l'espace homogène X .

Théorème (Ratner [72]). *Soit G un groupe de Lie, $\Lambda \subseteq G$ un réseau, et $H \subseteq G$ un sous-groupe de Lie connexe engendré par des éléments Ad -unipotents de G .*

Alors toute probabilité H -invariante ergodique ν sur G/Λ est homogène.

L'homogénéité de la probabilité ν exprime qu'elle est de nature algébrique. Formellement, cela signifie que le stabilisateur de ν , à savoir $G_\nu := \{g \in G, g_*\nu = \nu\}$, agit transitivement sur le support de ν . On peut ainsi identifier ν à une mesure G_ν -invariante sur l'espace homogène $G_\nu/G_{\nu,x}$ où $x \in \text{supp } \nu$, justifiant l'appellation "homogène".

Une première version probabiliste du théorème de Ratner est abordée par Breuillard [23], qui étudie la dynamique des marches aléatoires portées par des sous-groupes unipotents. Elle est suivie du théorème de Benoist-Quint qui classe les probabilités invariantes (dite stationnaires) pour une classe très large de marches aléatoires. La *stationnarité* d'une mesure ν sur X signifie que $\nu = \int_G g_*\nu d\mu(g)$. On précise qu'elle est *ergodique* si elle est extrémale parmi de telles mesures. De plus, nous dirons qu'une probabilité μ sur un groupe de Lie G est *Zariski-dense* si le sous semi-groupe fermé $\Gamma_\mu \subseteq G$ engendré par son support a sa représentation adjointe $Ad(\Gamma_\mu)$ Zariski-dense dans $Ad(G)$.

Théorème (Benoist-Quint [14]). *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe à centre fini et sans facteur compact, $\Lambda \subseteq G$ un réseau, et μ une probabilité sur G , supposée Zariski-dense et à support compact.*

Alors toute probabilité μ -stationnaire ergodique sur G/Λ est Γ_μ -invariante et homogène.

Un corollaire du théorème de Benoist-Quint est l'homogénéité des probabilités ergodiques Γ_μ -invariantes, fait qui n'est pas prédit par la théorie de Ratner. C'est un exemple remarquable où une approche probabiliste permet d'approfondir des théorèmes de géométrie pure.

L'analogie entre les flots unipotents et les marches aléatoires sur les espaces homogènes n'est en fait pas nouvelle. A l'heure où Benoist et Quint démontrent leur théorème, des ressemblances frappantes ont déjà été mises en lumière par Eskin et Margulis, en ce qui concerne les propriétés de récurrence. Nous avons d'une part le théorème de Dani-Margulis qui dit qu'en volume fini, l'orbite d'un point quelconque sous l'action d'un flot unipotent ne s'échappe pas à l'infini et passe même la plupart de son temps dans une partie compacte.

Théorème (Dani-Margulis [29]). *Soit G un groupe de Lie, $\Lambda \subseteq G$ un réseau, $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un sous-groupe à un paramètre Ad-unipotent. Alors pour tout $x \in G/\Lambda$, tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq G/\Lambda$ tel que pour tout $T > 0$,*

$$\frac{1}{T} \text{leb}\{t \in [0, T], u_t.x \in K\} \geq 1 - \varepsilon$$

D'autre part, nous avons sa version probabiliste.

Théorème (Eskin-Margulis [38]). *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe à centre fini, $\Lambda \subseteq G$ un réseau, μ une probabilité sur G , supposée Zariski-dense et à support compact.*

Alors la marche aléatoire sur l'espace homogène G/Λ induite par μ est uniformément récurrente en loi : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq G/\Lambda$ tel que pour tout $x \in G/\Lambda$, il existe un rang $N_x \geq 0$ tel que si $n \geq N_x$ alors

$$\mu^{*n} \star \delta_x(K) \geq 1 - \varepsilon$$

Parallèlement au développement de ces analogies, Babillot, suivie de Ledrappier et Sarig posent la question d'une théorie de Ratner en mesure infinie. Le cadre est pour l'instant très concret et concerne le flot horocyclique sur les surfaces hyperboliques. On peut en citer un premier succès :

Théorème (Babillot-Ledrappier-Sarig [5, 76]). *Soit S un \mathbb{Z} -revêtement de surface hyperbolique compacte, notons $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot horocyclique sur T^1S , et $x \mapsto x + 1$ un générateur du groupe des automorphismes de revêtement de T^1S .*

Alors, pour tout réel positif $c > 0$, il existe une unique mesure de Radon u_t -invariante ergodique ν telle que $\nu(\cdot + 1) = c\nu$. De plus toute mesure de Radon u_t -invariante ergodique est de cette forme.

La réponse apportée a récemment été étendue par Sarig au cas de surfaces hyperboliques très générales, admettant une décomposition en pantalons dont les longueurs de bords sont uniformément bornées [77].

Tout ce contexte pousse au questionnement suivant :

Y'a t'il une théorie de Ratner pour les marches aléatoires sur les espaces homogènes de volume infini ?

Ma thèse est consacrée à ce thème. De même que pour le cas de volume fini, nous abordons les sujets de la récurrence en loi et de la classification des mesures stationnaires. D'autres questions apparaissent naturellement.

Présentation des résultats

1) Récurrence et Transience

Revenons au cadre abstrait mentionné plus haut : un groupe localement compact à base dénombrable G est muni d'une mesure de probabilité μ et agit continument sur un espace topologique localement compact à base dénombrable X . Une marche est induite sur X . On notera $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

1.a) Comportement en loi

La question de la récurrence de la μ -marche sur X peut être abordée selon plusieurs points de vue. Au chapitre 3, nous étudions une version en loi.

Définition. *Un point $x \in X$ est dit :*

- *récurrent en loi si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subseteq X$ tel que pour tout $n \geq 0$,*

$$\mu^{\star n} \star \delta_x(K) > 1 - \varepsilon$$

- *transient en loi si la suite de probabilités $(\mu^{\star n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ converge vers zéro pour la topologie faible-**.

La récurrence en loi traduit le fait que la probabilité de position à l'instant n d'une marche issue de x a toutes ses limites faibles de masse 1 quand n tend vers l'infini. On dit qu'il n'y a pas de fuite de masse. A l'extrême inverse, la transience en loi exprime une fuite de toute la masse.

Supposons que X est muni une fois pour toute d'une mesure de Radon G -invariante λ . Une partie $A \subseteq X$ sera dite μ -invariante si pour μ -presque tout $g \in G$, on a $\lambda(gA \Delta A) = 0$. Au chapitre 3 est démontré un résultat très général de transience en loi :

Théorème. *Supposons que la probabilité μ est symétrique (i.e. invariante par $g \mapsto g^{-1}$) et que toute partie μ -invariante de X a une λ -mesure nulle ou infinie. Alors λ -presque tout point $x \in X$ est transient en loi :*

$$\mu^{\star n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ce résultat peut être considéré comme une généralisation en mesure infinie de résultats d'équirépartition obtenus par Rota [73] et Oseledets [66] pour les marches symétriques en mesure finie (voir aussi [26, Lemma 1]). La première étape est d'établir que la suite de probabilités $(\mu^{\star 2n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ converge pour la topologie faible- \star . Cela repose sur le théorème de convergence des martingales rétrogrades en mesure σ -fini, et sur le phénomène d'équirépartition des fibres décrit dans [14]. Ensuite, nous

prouvons à l'aide du théorème de Chacon-Ornstein que la limite des $(\mu^{\star 2n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ est nécessairement la mesure nulle.

Il découle du théorème précédent une réciproque au théorème de récurrence en loi d'Eskin-Margulis cité plus haut :

Théorème. *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini, $\Lambda \subseteq G$ un sous groupe discret de covolume infini, μ une probabilité sur G dont le support engendre un sous-groupe Zariski-dense dans G .*

Alors presque tout point $x \in G/\Lambda$ est transient en loi au sens de Césaro :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, si la probabilité μ est symétrique, alors il y a transience en loi :

$$\mu^{\star n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il est vraisemblable que la transience en loi annoncée par ce dernier théorème soit en fait valable sans hypothèse de symétrie sur μ . Un argument reposant sur un trou spectral nous permet de démontrer ce raffinement dans le cas où le sous-groupe discret Λ est contenu dans des réseaux de G de covolume arbitrairement grand. Cette hypothèse est par exemple satisfaite si G/Λ est un revêtement abélien à base de volume fini.

1.b) Comportement presque-sûre

Le chapitre 4 étudie la récurrence des trajectoires.

Définition. *Un point $x \in X$ est dit :*

- *récurrent presque-sûr si pour β -presque tout $b = (b_n)_{n \geq 1} \in B$, le point x est valeur d'adhérence de la trajectoire $(b_n \dots b_1 x)_{n \geq 0}$.*
- *transient presque-sûr si pour β -presque tout $b = (b_n)_{n \geq 1} \in B$, la trajectoire $(b_n \dots b_1 x)_{n \geq 0}$ quitte tout compact à partir d'un certain rang.*

La question de la récurrence presque-sûre a récemment été étudiée par Prohaska dans le cas de marches à densité, i.e. données par une mesure de probabilité μ non singulière avec la mesure de Haar sur G (voir [70]). Nous nous intéressons plutôt à des marches portées par des sous-groupes discrets et conjecturons le résultat suivant. On dit qu'une marche ou un flot sur une variété est *récurrent*. (resp. *transient*) si presque tout point de la variété est récurrent-ps (resp. transient-ps).

Conjecture. Soit G un groupe de Lie réel connexe simple de rang réel 1, soit $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret, $v_0 \in \mathfrak{g}$ un élément non nul d'un sous-espace de Cartan de \mathfrak{g} , et $a_t = \exp(tv_0)$. Soit μ une probabilité sur G , supposée Zariski-dense et à support compact.

Alors le flot $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et la μ -marche sur G/Λ sont simultanément transients, ou bien simultanément récurrents et ergodiques.

Avec des mots, une marche sur un espace localement symétrique de type non compact et de rang 1 est soit transiente, soit récurrente et ergodique. De plus ce comportement ne dépend pas de la marche en question mais seulement de l'espace ambiant, et se lit dans le flot géodésique. Remarquons que la dichotomie "transience / récurrence et ergodicité" est déjà connue dans le cas du flot géodésique [1, 52].

Nous démontrons en fin de chapitre 5 que la conjecture est vérifiée dans le cas des revêtements abéliens de surfaces hyperboliques de volume fini. Le chapitre 4 aborde le problème dans toute sa généralité, et démontre que la transience du flot implique celle des marches. L'hypothèse que μ soit à support compact s'avèrera superflue et nous supposerons seulement que μ a un moment d'ordre 1 fini, i.e que

$$\int_G \log \|\text{Ad}(g)\| d\mu(g) < +\infty$$

où $\text{Ad} : G \rightarrow SL(\mathfrak{g})$ désigne la représentation adjointe, et $\|\cdot\|$ une norme d'espace vectoriel sur $\text{End}(\mathfrak{g})$.

Théorème. Soit $(G, \Lambda, v_0, (a_t))$ comme dans l'énoncé de la conjecture, soit μ une mesure de probabilité sur G supposée Zariski-dense à moment d'ordre 1 fini.

Si le flot géodésique $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur G/Λ est transient, alors c'est aussi le cas de la μ -marche sur G/Λ .

Le lien entre la marche et le flot sera fait par la décomposition de Cartan : si $K \subseteq G$ est un sous-groupe compact maximal adapté au sous-groupe (a_t) , alors tout élément $g \in G$ s'écrit

$$g = k_g a_{t_g} l_g$$

où $k_g, l_g \in K$ et $t_g \geq 0$. De plus, le nombre t_g est unique. La preuve du théorème se résume ainsi : la transience du flot géodésique implique que sa fonction de Green est finie, et même localement intégrable. En l'intégrant sur une partie K -invariante, nous faisons disparaître les dépendances en k_g, l_g , et un lemme de renouvellement pour la projection de Cartan permet d'en déduire que la fonction de Green de la μ -marche est également localement intégrable, impliquant la transience de la marche.

Il découle de notre théorème une dichotomie sur le comportement récurrent des marches aléatoires en rang 1, analogue à celle du flot géodésique.

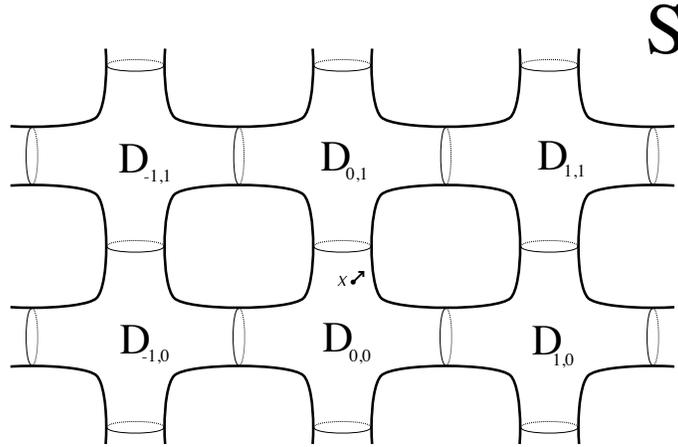
Corollaire. *Soit G un groupe de Lie connexe simple de rang réel 1, soit Λ un sous groupe discret de G , et soit μ une mesure de probabilité sur G Zariski-dense à moment d'ordre 1 fini.*

Alors la μ -marche sur G/Λ est soit transiente, soit récurrente et ergodique pour une mesure de Haar quotient.

2) Dérive

Le chapitre 5 analyse la dérive d'une marche aléatoire sur un revêtement abélien d'un espace homogène de volume fini.

Commençons par un exemple. La figure ci-dessous représente un \mathbb{Z}^2 -revêtement S d'une surface hyperbolique compacte S_0 de genre 2. Son fibré unitaire tangent T^1S s'identifie à un espace homogène G/Λ où $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et $\Lambda \subseteq G$ est un sous-groupe discret. On induit une marche aléatoire sur T^1S en se donnant une probabilité μ sur G , que l'on supposera Zariski-dense et à support compact. On note aussi $B = G^{\otimes \mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.



\mathbb{Z}^2 -revêtement d'une surface compacte de genre 2

Comme sur le dessin, S admet une subdivision naturelle en blocs fondamentaux indexés par \mathbb{Z}^2 . On se donne alors un vecteur unitaire $x \in T^1S$ sur S , une suite d'instruction $b \in B$ et on note pour tout $n \geq 0$,

$$i(b_n \dots b_1 x) = \text{indice du bloc contenant } b_n \dots b_1 x$$

La dérive de la trajectoire réalisée par (b, x) est définie (lorsqu'elle existe) par la limite dans \mathbb{R}^2 :

$$\delta(b, x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} i(b_n \dots b_1 \cdot x)$$

Nous montrons que pour tout $x \in T^1S$, β -presque tout $b \in B$, la dérive $\delta(b, x)$ est bien définie, vaut 0 si le projeté x dans le quotient compact T^1S_0 a sa Γ_μ -orbite infinie, et peut être calculée simplement dans le cas contraire. La force de ce résultat est qu'il décrit la dérive *quelque soit le point de départ* x . La nullité de la dérive en presque-tout x est plus facile à obtenir et constitue une étape intermédiaire dans la preuve.

Le résultat que nous démontrons est en fait général. Pour faciliter son énoncé, il est commode d'introduire un cocycle de déplacement σ exprimant la variation de l'indice de position sous l'action de G . Dans le cadre de l'exemple précédent, il est défini sur $G \times T^1S_0$ par la formule : pour $g \in G$, $x_0 \in T^1S_0$, et $x \in T^1S$ relevant x_0 ,

$$\sigma(g, x_0) = i(gx) - i(x)$$

On peut aussi bien exprimer la dérive d'une trajectoire à l'aide σ :

$$\delta(b, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x)$$

Le théorème suivant considère un revêtement abélien d'un espace homogène de volume fini et décrit la dérive d'une trajectoire typique issue d'un point quelconque, sous l'hypothèse que l'application de revêtement admet un domaine fondamental à bord compact.

Théorème. *Soit G un groupe de Lie connexe simple et $\Lambda \trianglelefteq \Lambda_0 \subseteq G$ des sous groupes discrets, avec Λ_0 de covolume fini dans G et $\Lambda_0/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$ (où $d \in \mathbb{N}^*$). On note les espaces quotients $X_0 := G/\Lambda_0$ et $X := G/\Lambda$ et on suppose que l'action de \mathbb{Z}^d sur X admet un domaine fondamental connexe D à bord compact. Soit $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application mesurable \mathbb{Z}^d -équivariante bornée sur D et $\sigma : G \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ le cocycle de déplacement induit. Soit μ une probabilité Zariski-dense à support compact sur G , et notons $B := G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.*

Etant donné $x_0 \in X_0$, on distingue alors deux cas :

1. *Si l'orbite $\Gamma_\mu \cdot x_0$ est infinie dans X_0 alors la dérive est nulle : pour β -presque tout $b \in B$, on a*

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. *Si l'orbite $\Gamma_\mu \cdot x_0$ est finie dans X_0 , alors pour β -presque tout $b \in B$, on a*

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu \otimes \nu_0(\sigma)$$

où ν_0 est l'équiprobabilité sur $\Gamma_\mu \cdot x_0$ donnée par $\nu_0 := \frac{1}{\#\Gamma_\mu \cdot x_0} \sum_{y \in \Gamma_\mu \cdot x_0} \delta_{y_0}$.

La preuve s'appuie sur la classifications des probabilités stationnaires sur le quotient de volume fini X_0 donnée dans [14]. Elle exploite de façon cruciale l'hypothèse qu'il existe un domaine fondamental à bord compact pour l'action de \mathbb{Z}^d sur X . Cette condition garantit que la variation de l'indice de position i sous un pas de la marche est bornée.

Nous étudions dans un deuxième temps les phénomènes pouvant apparaître si l'action de \mathbb{Z}^d sur X n'admet pas de domaine fondamental à bord compact. C'est le cas par exemple si X est le fibré unitaire tangent d'un \mathbb{Z} -revêtement d'une sphère hyperbolique à trois pointes. On observe alors un comportement radicalement différent. Nous supposons fixé un domaine fondamental connexe par arcs D pour l'action de \mathbb{Z} sur X , une application $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ mesurable \mathbb{Z}^d -équivariante, $PSO_2(\mathbb{R})$ -invariante, et bornée sur D , et notons σ le cocycle de déplacement induit.

Théorème. *Soit S un \mathbb{Z} -revêtement d'une sphère à trois pointes S_0 , et μ une mesure de probabilité sur $G = PSL_2(\mathbb{R})$, supposée Zariski-dense et à support compact. Alors la μ -marche induite sur T^1S est récurrente et a sa dérive asymptotiquement dense : pour presque-tout $x_0 \in T^1S_0$, β -presque tout $b \in B$, et $t \in \mathbb{R}$,*

$$\left\{ \text{valeurs d'adhérence de la suite } \left(\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \right)_{n \geq 1} \right\} = \mathbb{R}$$

Le point clef est un théorème de Enriquez et Le Jan décrivant la loi du nombre d'enroulement du flot géodésique autour des différents cusps d'une surface hyperbolique de volume fini [35]. Nous en déduisons un théorème central limite affirmant que la variable aléatoire $\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0)$, où b varie selon β et x selon la probabilité de Haar sur T^1S_0 , se comporte pour n grand comme une loi de Cauchy centrée sur \mathbb{R} .

Nous voyons enfin comment adapter ce dernier théorème au *cas général* d'un \mathbb{Z}^d -revêtement S d'une surface hyperbolique de volume fini S_0 quelconque. Plus précisément, notons $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$ les pointes de S_0 , puis $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{Z}^d$ les translations obtenues en relevant un tour de pointe au revêtement S , et enfin posons $E_C = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{v_1, \dots, v_s\}$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d engendré les v_i . Alors une marche Zariski-dense à support compact sur T^1S a presque toutes ses trajectoires de dérive asymptotiquement denses dans E_C : pour presque-tout $x_0 \in T^1S_0$, β -presque tout $b \in B$,

$$\left\{ \text{valeurs d'adhérence de la suite } \left(\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \right)_{n \geq 1} \right\} = E_C$$

3) Classification des mesures stationnaires

Le chapitre 6 aborde le problème de classification des mesures de Radon stationnaires pour une marche aléatoire sur un espace homogène de volume infini. Ce travail est dans la lignée du théorème de Benoist-Quint mentionné plus haut. Un premier cas naturel est celui où l'espace ambiant X est un \mathbb{Z} -revêtement d'un espace homogène compact X_0 . On espère alors pouvoir adapter certaines techniques développées pour comprendre le cas des marches sur la base X_0 , à travers la périodicité du revêtement. Nous parvenons à mettre en place cette stratégie dans le cas où l'espace ambiant X est $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ (que l'on peut voir comme un \mathbb{Z} -revêtement de \mathbb{T}^{d+1}). L'idée de considérer un revêtement du tore vient naturellement de l'histoire du sujet, car le cas du tore a été le premier à être compris en volume fini. La classification des probabilités stationnaires est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème (Benoist-Quint [13], Bourgain-Furman-Lindenstrauss-Mozes [21],[22]). *Soit μ une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$ dont le support est fini et engendre un sous semi-groupe fortement irréductible $\Gamma_\mu \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$.*

Alors toute probabilité μ -stationnaire ergodique sur le tore \mathbb{T}^d est soit une équi-probabilité sur une Γ_μ -orbite finie dans \mathbb{T}^d , soit la probabilité de Haar.

L'hypothèse de *forte irréductibilité* signifie que l'action de Γ_μ sur \mathbb{R}^d ne stabilise pas d'union finie (non vide) de sous-espaces vectoriels différents de $\{0\}$ et \mathbb{R}^d .

Ce théorème est initialement dû à Bourgain-Furman-Lindentsrauss-Mozes sous l'hypothèse supplémentaire que Γ_μ est *proximal*, c.a.d. qu'il possède un élément ayant une valeur propre simple de module strictement supérieur à celui de ses autres valeurs propres. La preuve repose sur l'analyse de Fourier. Peu après, Benoist et Quint démontrent la version citée à l'aide d'une preuve différente. L'argument clef est le phénomène de *dérive exponentielle*, inspiré par la dérive polynomiale de la théorie de Ratner. C'est lui qui permettra d'obtenir l'énoncé très général de classification des probabilités stationnaires rapporté plus haut dans l'introduction historique.

Décrivons maintenant notre résultat. On se donne une mesure de probabilité μ sur $SL_d(\mathbb{Z})$ et $\chi : \Gamma_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes. Une action de Γ_μ sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ est alors définie par la formule :

$$g.(x, t) = (gx, t + \chi(g))$$

On montre le résultat suivant.

Théorème. *Supposons que le support de μ est fini, que le semi-groupe engendré Γ_μ est fortement irréductible, et que la probabilité image $\chi_*\mu$ sur \mathbb{R} est d'espérance nulle.*

Alors toute mesure de Radon μ -stationnaire ergodique sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ est Γ_μ -invariante et homogène.

La preuve s'inspire de [13, 14] mais nécessite des adaptations pour gérer le volume infini de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. On en trouve un résumé dans l'introduction du chapitre 6. Il n'est pour l'instant pas clair qu'elle puisse être adaptée pour traiter le cas d'une marche sur un \mathbb{Z} -revêtement de surface hyperbolique compacte, une première difficulté consistant à comprendre si les mesures limites d'une mesure de Radon stationnaire peuvent être nulles ou non (voir section 1.4).

Notre résultat permet aussi la description des probabilités stationnaires pour certaines marches sur \mathbb{T}^d qui n'entrent pas dans le cadre de [14, 22], car induites par une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$ qui n'a pas de moment d'ordre 1. En effet, considérons le cas où $\chi(\Gamma_\mu) = \mathbb{Z}$. On peut restreindre notre marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ en une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$, puis considérer la marche induite sur le bloc $\mathbb{T}^d \times \{0\} \equiv \mathbb{T}^d$. Cette marche est donnée par une probabilité $\mu_\tau \in SL_d(\mathbb{Z})$ qui n'a pas de moment d'ordre 1. Notre théorème implique que toute probabilité μ_τ -stationnaire ergodique sur \mathbb{T}^d est soit atomique, soit la probabilité de Haar.

Quelques mots sur la structure du texte

Le texte est divisé en deux parties.

La partie 1 présente les aspects généraux de la théorie des marches aléatoires en mesure infinie : stationnarité, conservativité, ergodicité, mesures limites ; puis rappelle les théorèmes limites fondamentaux régissant le comportement des marches linéaires. Elle sera ponctuellement utilisée dans la partie 2. Noter aussi que la section 1.4 sur les mesures de Radon limites est nouvelle et constitue un travail de recherche.

La partie 2 contient quatre chapitres indépendants les uns des autres, et abordant successivement les questions de récurrence en loi, de récurrence presque sûre, de dérive, et de classifications des mesures stationnaires mentionnées plus haut. Les chapitres 3 et 6 ont chacun été soumis à publication, le chapitre 5 le sera bientôt, et le chapitre 4 restitue un travail en cours.

Première partie

**Théorie générale des marches
aléatoires**

Chapitre 1

Mesures de Radon stationnaires

Sommaire

1.1	Stationnarité	24
1.2	Conservativité	25
1.3	Ergodicité	27
1.3.1	Désintégration ergodique	28
1.3.2	Ergodicité d'une mesure conservative	30
1.4	Mesures de Radon limites	33
1.4.1	Définition	33
1.4.2	Conditionner la marche par un temps d'arrêt	36
1.4.3	Application aux marches affines de Lyapunov nul	37

Ce premier chapitre développe une théorie générale des marches aléatoires en mesure infinie. On y adapte un certain nombre de résultats du livre “An introduction to infinite ergodic theory” de J. Aaronson [1] consacré à des systèmes déterministes.

Nous commençons par introduire la notion de mesure stationnaire, i.e. de mesure invariante sous une marche aléatoire, ainsi que divers outils associés : opérateur de Markov, dictionnaire entre marches aléatoires et systèmes dynamiques déterministes. Le concept de stationnarité est ensuite précisé dans la section 1.2 grâce aux notions de conservativité ou dissipativité, qui gèrent la récurrence où la transience de la marche pour presque tout point de départ. La section 1.3 définit les mesures stationnaires ergodiques, et explique comment toute mesure stationnaire est moyenne de telles mesures. Enfin, la section 1.4 présente les mesures limites d'une mesure stationnaire. Cette dernière section peut être considérée nouvelle car elle généralise au cadre de mesures infinies des notions connues jusqu'alors en mesure finie, et donne des applications.

1.1 Stationnarité

Soit G un semi-groupe localement compact à base dénombrable, X un espace topologique localement compact à base dénombrable muni d'une action continue de G , et μ une mesure de probabilité sur G . Ces données définissent une marche aléatoire sur X , dont la probabilité de transition à partir d'un point $x \in X$ est donnée par

$$\mu \star \delta_x : A \subseteq X \mapsto \mu\{g \in G, g.x \in A, \}$$

Avec des mots, on se déplace à partir de x en choisissant aléatoirement et selon μ un élément du semi-groupe, et en le faisant agir sur x . Une trajectoire s'obtient en itérant le processus. Pour comprendre la statistique des trajectoires, on introduit la notion de mesure stationnaire.

Définition (Stationnarité). *Une mesure de Radon ν sur X est stationnaire si elle est invariante en moyenne sous l'action de marche, i.e. si*

$$\int_{g \in G} g_* \nu d\mu(g) = \nu$$

Exemples.

- 1) Toute mesure de Radon G -invariante sur X est stationnaire.
- 2) Si $G = X = \mathbb{Z}$, $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$, on peut exhiber deux mesures de Radon stationnaires sur X :

$$\nu_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \qquad \nu_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \delta_k$$

et toute autre mesure de Radon stationnaire est combinaison linéaire de celles-ci (voir section 1.3.2)

- 3) Si $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $X = P^1(\mathbb{R})$, et $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{a_0} + \delta_{a_1})$ où

$$a_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors X admet une unique probabilité stationnaire, et elle n'est pas G -invariante (voir section 2.1)

Opérateur de Markov. La marche sur X est caractérisée par son opérateur de Markov P_μ . Ce dernier agit sur les fonctions mesurables non-négatives sur X via la formule

$$P_\mu \varphi(x) = \int_G \varphi(gx) d\mu(g)$$

La stationnarité traduit ainsi une P_μ -invariance : une mesure de Radon ν est stationnaire si et seulement si pour toute fonction mesurable $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$, on

a $\nu(\varphi) = \nu(P_\mu\varphi)$. Dans ce cas, on montre que P_μ s'étend en une contraction sur les espaces de Banach $(L^p(X, \nu), \|\cdot\|_p)_{p \in [0, +\infty]}$.

Traduction en système dynamique. La marche sur X s'interprète aussi comme un système dynamique déterministe. Les instructions aléatoires s'obtiennent en posant $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, $T : B \rightarrow B$, $(b_i)_{i \geq 1} \rightarrow (b_{i+1})_{i \geq 1}$, et la dynamique de la marche est donnée par

$$T^X : B \times X \rightarrow B \times X, (b, x) \mapsto (Tb, b_1x)$$

Une mesure de Radon ν sur X est stationnaire si et seulement si la mesure produit $\beta \otimes \nu$ est T^X -invariante :

Démonstration.

$$T_\star^X \beta \otimes \nu = \int_{B \otimes X} T_\star^X(\delta_b \otimes \nu) d\beta(b) = \int_{B \otimes X} \delta_{Tb} \otimes (b_1)_\star \nu d\beta(b) = \beta \otimes \int_G g_\star \nu d\mu(g)$$

donc $\beta \otimes \nu = T_\star^X \beta \otimes \nu$ si et seulement si $\nu = \int_G g_\star \nu d\mu(g)$

□

Nous verrons par la suite que l'analogie est totale : ν est conservative (resp. conservative ergodique) si et seulement si c'est le cas de $\beta \otimes \nu$.

1.2 Conservativité

La conservativité exprime le fait qu'une transformation est récurrente en presque-tout point. Elle est automatique si la dynamique préserve une mesure finie (théorème de Poincaré). En revanche, la question se pose en mesure infinie. Nous définissons et donnons quelques propriétés de cette notion dans le cadre des marches aléatoires. Le cas déterministe est supposé connu et sera ponctuellement utilisé (voir [1], 1.1). Les notations (G, X, μ) sont celles de la section 1.1.

Définition (Conservativité). *Une mesure de Radon stationnaire ν sur X est conservative (ou récurrente p.s.) si elle vérifie l'une des conditions équivariantes suivantes :*

- a) *Pour toute partie mesurable $Y \subseteq X$ et $\beta \otimes \nu$ -presque tout $(b, y) \in B \times Y$, la trajectoire $(b_n \dots b_1 y)_{n \geq 1}$ revient dans Y .*
- b) *Pour toute partie mesurable $Y \subseteq X$ et ν -presque tout $y \in Y$,*

$$\sum_{n \geq 0} P_\mu^n 1_Y(y) = +\infty$$

- c) *Pour toute partie mesurable $\Omega \subseteq B \times X$ et $\beta \otimes \nu$ -presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(T^X)^n(\omega)$, $n \geq 0$, revient infiniment souvent dans Ω .*

Remarque. Dans le point b), la somme $\sum_{n \geq 0} P_\mu^n 1_Y(y)$ est l'espérance du nombre de passages dans Y d'une trajectoire aléatoire issue de y . L'équivalence entre a) et b) traduit donc l'idée qu'une marche est récurrente p.s. si et seulement si sa fonction de Green est presque partout infinie.

A l'extrême inverse, on dira qu'une mesure de Radon stationnaire ν sur X est **totalelement dissipative** (ou transiente p.s.) si l'espérance du nombre de passage dans toute partie de mesure finie est finie, autrement dit si pour tout ν -presque tout $x \in X$ et $Y \subseteq X$ telle que $\nu(Y) < \infty$,

$$\sum_{n \geq 0} P_\mu^n 1_Y(y) < +\infty$$

Le théorème de **décomposition de Hopf** ([64] th.V-5.2) affirme qu'il existe toujours une partition mesurable $X = C \sqcup D$ en parties ν -pp invariantes sous la marche, i.e. vérifiant $P_\mu 1_C = 1_C$ ν -pp, $P_\mu 1_D = 1_D$ ν -pp, et telles que la marche restreinte à C est $\nu|_C$ -conservative, la marche restreinte à D est $\nu|_D$ totalement dissipative.

Preuve des équivalences. a) \implies c) : Il s'agit de montrer que la transformation T^X est conservative pour la mesure $\beta \otimes \nu$ (voir [1],1.1). L'hypothèse a) entraîne que sa partie conservative contient les sous-ensemble de la forme $B \times Y$ où $\nu(Y) < \infty$. Comme ν est de Radon, $B \times X$ est réunion de tels sous-ensembles, donc la partie conservative de T^X est $B \times X$ tout entier, ce qui donne c).

c) \implies b) : Une interversion somme-intégrale permet de réécrire

$$\sum_{n \geq 0} P_\mu^n 1_Y(y) = \int_B N_Y(b, y) d\beta(b) \quad (*)$$

où $N_Y(b, y)$ est le nombre de passage dans Y de la trajectoire $(b_n \dots b_1 y)_{n \geq 0}$. L'intégrale est donc infinie car c'est le cas de l'intégrande d'après c).

b) \implies a) : On raisonne par l'absurde en supposant a) faux. Il existe alors une partie mesurable $Y \subseteq X$ de mesure positive et une constante $\varepsilon > 0$, telles que pour tout $y \in Y$,

$$\beta(b \in B, \forall n \geq 1, b_n \dots b_1 y \notin Y) \geq \varepsilon$$

i.e. la probabilité de ne jamais revenir dans Y est au moins ε , quelque soit le point de départ dans Y . Il résulte de la propriété de Markov que pour tout $y \in Y$,

$$\beta(b \in B, N_Y(b, y) \geq n + 1) \leq (1 - \varepsilon)^n$$

La fonction $N_Y(\cdot, y)$ est donc β -intégrable, et l'égalité (*) donne une contradiction avec l'hypothèse b). \square

Marche induite. Un système dynamique conservatif peut être interprété comme une limite de systèmes dynamiques induits sur des parties de mesure finie de plus en plus grandes. Ce point de vue est commode pour étendre au cadre conservatif un grand nombre de propriétés déjà connues en mesure finie (voir section 1.3 sur l'ergodicité). Dans le cadre d'une marche aléatoire, le processus d'induction est le suivant.

Soit $Y \subseteq X$ une partie mesurable telle que pour tout $y \in Y$, presque toute trajectoire issue de y revient dans Y . Par exemple, si ν est une mesure de Radon conservative sur X , toute partie mesurable admet un sous-ensemble plein ayant cette propriété.

Notons

$$\tau_{Y,y} : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, b \mapsto \inf\{n \geq 1, b_n \dots b_1 y \in Y\}$$

le temps de retour à Y en partant de y (fini β -p.s.). On définit une probabilité de transition à partir du point y en notant P_y l'image de β par l'application $b \mapsto b_{\tau_{Y,y}(b)} \dots b_1 y$. La famille $(P_y)_{y \in Y}$ définit une chaîne de Markov sur Y ([16], section 1.1.1). Il faut faire un peu attention car cette marche ne provient pas d'une action de groupe probabilisé. Les notions vues plus haut s'adaptent cependant très bien. L'opérateur de Markov associé est défini par la formule $P\varphi(y) = \int_Y \varphi(z) dP_y(z)$, une mesure sur Y est stationnaire si elle est invariante par l'opérateur de Markov, etc. On peut démontrer (en combinant [1], prop. 1.5.3 et [16] prop. 1.9.a) que la restriction à Y d'une mesure de Radon stationnaire sur X est encore stationnaire pour la chaîne induite sur Y . D'avantage de liens seront tissés dans la prochaine section.

1.3 Ergodicité

Une transformation préservant une mesure finie est dite ergodique si l'espace ambiant ne peut être partitionné en deux sous-ensembles non négligeables invariants sous la dynamique. Une formulation équivalente est que la mesure considérée est sur un rayon extrémal du cône convexe des mesures finie invariantes.

Dans la suite, nous choisissons ce deuxième point de vue, plus précis, pour définir l'ergodicité d'une mesure de Radon stationnaire. Nous prouvons alors un théorème de désintégration selon lequel toute mesure de Radon stationnaire est moyenne de mesures ergodiques. Nous vérifions ensuite que dans un cadre conservatif, la définition d'ergodicité en termes de parties invariantes mentionnée plus haut est équivalente à celle choisie. Les notations (G, X, μ) sont celles de la section 1.1.

Définition (Ergodicité). *Une mesure de Radon stationnaire ν sur X est ergodique si elle appartient à un rayon extrémal du cône convexe des mesures de Radon stationnaires sur X .*

Cela signifie que l'écriture $\nu = \nu_1 + \nu_2$ avec ν_1, ν_2 stationnaires entraînent l'existence de constantes $c_1, c_2 \geq 0$ telles que $\nu_i = c_i \nu$.

1.3.1 Désintégration ergodique

Le théorème suivant affirme que toute mesure stationnaire est moyenne de mesures stationnaires ergodiques. Ce résultat est prouvé par G. Choquet dans [27]. Comme ce document est difficile d'accès, on prend le soin d'en rapporter une preuve. On note $\mathcal{M}^{\text{Rad}}(X)$ le cône des mesures de Radon sur X , muni de la topologie faible- \star .

Théorème 1.3.1 (Désintégration ergodique). *Soit (G, X, μ) comme dans la section 1.1 et ν une mesure de Radon stationnaire sur X . Il existe un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) et une application mesurable $\Omega \rightarrow \mathcal{M}^{\text{Rad}}(X), \omega \mapsto \nu_\omega$ telle que :*

- Pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, la mesure ν_ω est stationnaire ergodique.

-

$$\nu = \int_{\Omega} \nu_\omega d\mathbb{P}(\omega)$$

Démonstration. Notons E l'ensemble des mesures de Radon signées sur X . C'est un espace vectoriel topologique métrisable localement convexe pour la topologie faible- \star . On note C_0 le cône convexe des mesures de Radon stationnaires :

$$C_0 := \{\nu \in E, \nu \geq 0 \text{ et } \mu \star \nu = \nu\}$$

On veut montrer que tout point de C_0 est moyenne de points de C_0 portés par des rayons extrémaux. L'idée est de trouver une base convexe compacte L pour ce cône puis d'appliquer une version fine du théorème de Krein-Milman :

Théorème 1.3.2. *Soit E un espace vectoriel topologique métrisable localement convexe, $L \subseteq E$ une partie convexe compacte. Alors pour tout $x \in E$, il existe une mesure de probabilité \mathbb{P} sur E , concentrée sur les points extrémaux de L et telle que*

$$x = \int_L y d\mathbb{P}(y)$$

au sens où, pour toute forme linéaire continue $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons $x = \int_E \varphi(y) d\mathbb{P}(y)$.

Ce théorème est également dû à Choquet. Il précise le théorème de Krein-Milman dans le cas métrisable, au sens où ce dernier garantit seulement que la mesure \mathbb{P} est concentrée sur l'adhérence des points extrémaux de L . On peut en trouver une preuve relativement courte dans le livre de R. R. Phelps [69] (chapitre 3).

Revenons à l'obtention de notre base convexe compacte. Une première difficulté est que le cône C_0 n'est pas fermé en général. Pour contourner ce problème, on définit le cône convexe des mesures de Radon sous-stationnaires en posant :

$$C := \{\nu \in E, \nu \geq 0 \text{ et } \mu \star \nu \leq \nu\}$$

On va voir que ce cône ci est bien fermé. De plus, il suffit de vérifier la désintégration pour les points du cône C par rapports aux rayons extrémaux de C , car si $\nu \in C_0$ s'écrit sous la forme

$$\nu = \int_{\Omega} \nu_{\omega} d\mathbb{P}(\omega)$$

avec ν_{ω} extrémal dans C , alors pour \mathbb{P} -presque tout ω , on a ν_{ω} stationnaire et extrémal dans C_0 .

Lemme 1.3.3. *C est un cône convexe fermé de E*

Démonstration. Il s'agit de montrer que C est fermé. Soit $(\nu_n) \in C^{\mathbb{N}^*}$, $\nu \in E$ tels que $\nu_n \rightarrow \nu$. Pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue à support compact, on a $\nu(f) = \lim \nu_n(f) \geq 0$, donc $\nu \geq 0$. Par ailleurs,

$$\mu \star \nu(f) = \int_G \nu(f(g^{-1} \cdot)) d\mu(g) = \int_G \lim \nu_n(f(g^{-1} \cdot)) d\mu(g)$$

En appliquant le lemme Fatou, puis l'hypothèse de sous-stationnarité des ν_n , il vient :

$$\mu \star \nu(f) \leq \liminf \int_G \nu_n(f(g^{-1} \cdot)) d\mu(g) \leq \liminf \nu_n(f) = \nu(f)$$

Ainsi $\mu \star \nu \leq \nu$, et le cône C est bien fermé. □

On se donne $\chi_n : X \rightarrow [0, 1]$, $n \geq 0$ une suite de fonctions continues à support compact sur X dont les lignes de niveau $\{\chi_n = 1\}$, $n \geq 0$ forment une suite exhaustive de compacts de X .

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$, on pose $\phi_{\alpha} : C \rightarrow [0, \infty]$, $\nu \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{\nu(\chi_n)}{\alpha_n}$, puis

$$C_{\alpha} := \{\nu \in C, \phi_{\alpha}(\nu) < \infty\}$$

C'est un cône convexe, constitué des mesures de Radon sous-stationnaires à croissance contrôlée par la suite α . Il n'est pas nécessairement fermé, en revanche il admet une base compacte :

$$L_{\alpha} := \{\nu \in C, \phi_{\alpha}(\nu) \leq 1\}$$

Lemme 1.3.4. *L_{α} est convexe compact.*

Démonstration. On vérifie d'abord que L_{α} est fermé. Soit $(\nu_i) \in L_{\alpha}^{\mathbb{N}}$, $\nu \in L_{\alpha}$ avec $\nu_i \rightarrow \nu$. On a $\phi_{\alpha}(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \leq N} \frac{\nu(\chi_n)}{\alpha_n}$. Or le terme $\sum_{n \leq N} \frac{\nu(\chi_n)}{\alpha_n}$ est limite de $(\sum_{n \leq N} \frac{\nu_i(\chi_n)}{\alpha_n})_{i \geq 0}$ quand i tend vers $+\infty$. Chaque terme de cette suite est plus petit que 1 donc $\sum_{n \leq N} \frac{\nu(\chi_n)}{\alpha_n} \leq 1$ puis $\phi_{\alpha}(\nu) \leq 1$.

Pour conclure à la compacité, on remarque que la condition $\phi_{\alpha}(\nu) \leq 1$ implique $\nu(\chi_n) \leq \alpha_n$ pour tout $n \geq 0$. Toute suite $(\nu_i) \in L_{\alpha}^{\mathbb{N}}$ admet donc une sous-suite convergente (par extractions successives). □

Nous allons appliquer le théorème 1.3.2 dans cette base convexe compacte. A partir de là, nous conclurons grâce à ce dernier lemme :

Lemme 1.3.5. *Si ν_0 est un point extrémal de L_α , alors ν_0 appartient à un rayon extrémal dans C .*

Démonstration. On peut supposer $\nu_0 \neq 0$. Donnons une décomposition $\nu_0 = \nu_1 + \nu_2$ avec $\nu_i \in C - \{0\}$. Nécessairement ν_1 et ν_2 sont dans C_α . On peut réécrire $\nu_0 = \phi_\alpha(\nu_1) \frac{\nu_1}{\phi_\alpha(\nu_1)} + \phi_\alpha(\nu_2) \frac{\nu_2}{\phi_\alpha(\nu_2)}$. Comme ν_0 est extrémal non nul dans L_α , on a $\phi_\alpha(\nu_1) + \phi_\alpha(\nu_2) = \phi_\alpha(\nu_0) = 1$ puis, toujours par extrémalité, $\frac{\nu_1}{\phi_\alpha(\nu_1)} = \frac{\nu_2}{\phi_\alpha(\nu_2)} = \nu_0$ ce qui conclut. \square

Conclusion de la preuve. Soit $\nu \in C - \{0\}$. Il existe une suite $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$ telle que $\nu \in C_\alpha$. Quitte à normaliser ν , on peut supposer que $\phi_\alpha(\nu) = 1$, en particulier $\nu \in L_\alpha$. D'après le théorème 1.3.2, on peut écrire ν comme une moyenne : $\nu = \int_{\Omega} \nu_\omega d\mathbb{P}(\omega)$ avec les ν_ω extrémaux dans L_α . Comme $\phi_\alpha(\nu) = 1$, les ν_ω sont non nuls. De plus, d'après le dernier lemme, ils sont aussi extrémaux dans C .

Cela termine la preuve de la désintégration ergodique annoncée. \square

1.3.2 Ergodicité d'une mesure conservative

La dynamique en mesure finie nous habitue à des définitions équivalentes de l'ergodicité. Il faut faire attention, car en mesure infinie, les équivalences ne tiennent plus en général. Voici un exemple : On pose $G = X = \mathbb{Z}$, $\mu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{2}{3}\delta_1$. A scalaire près, la marche induite sur \mathbb{Z} possède exactement deux mesures stationnaires ergodiques

$$\nu_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \quad \nu_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \delta_k$$

Pourtant les mesures ν_1, ν_2 sont équivalentes sans être proportionnelles.

Démonstration. Soit ν une mesure stationnaire ergodique sur \mathbb{Z} . La stationnarité signifie que $\nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} \star \nu + \frac{2}{3}\delta_1 \star \nu$. Or chacun des translatés est également stationnaire, donc par ergodicité il existe $c > 0$ tel que $\delta_{-1} \star \nu = c\nu$, i.e. $\nu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^k \delta_k$. Nécessairement, $1 = \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}c^{-1}$, imposant $c = 1$ ou $c = 2$, i.e. $\nu = \nu_1$ ou $\nu = \nu_2$. Par ailleurs, le théorème de désintégration et la non-proportionnalité des ν_i entraînent qu'elle sont effectivement ergodiques. \square

La proposition suivante affirme qu'un tel phénomène ne peut pas se produire pour une marche conservative.

Proposition 1.3.6. Soit (G, X, μ) comme dans la section 1.1 et ν une mesure de Radon stationnaire conservative sur X . Les points suivants sont équivalents :

- a) La mesure ν est ergodique pour la marche induite par μ .
- b) Toute partie mesurable $A \subseteq X$ telle que $P_\mu 1_A = 1_A$ ν -pp est ν -pleine ou ν -négligeable.
- c) Toute fonction mesurable non-négative $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $P_\mu f = f$ ν -pp est ν -pp constante.
- d) Pour toute partie mesurable $Y \subseteq X$ de volume $\nu(Y)$ fini, la chaîne de Markov induite sur Y est $\nu|_Y$ -ergodique.
- e) Pour toute mesure de Radon stationnaire ν' telle que $\nu' \ll \nu$, il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\nu' = c\nu$.
- f) La transformation $T^X : B \times X \rightarrow B \times X, (b, x) \mapsto (Tb, b_1x)$ est ergodique pour la mesure $\beta \otimes \nu$

Démonstration. a) \implies b) : On peut écrire $\nu = \nu|_A + \nu|_{X-A}$. L'hypothèse b) garantit que c'est une décomposition en mesures stationnaires, puis l'hypothèse d'ergodicité entraîne que $\nu|_A$ est proportionnelle à ν , donc $\nu(A) = 0$ ou $\nu(X - A) = 0$.

b) \implies c) : Cette implication repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.3.7. Dans le contexte de la proposition 1.3.6, soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable non négative bornée telle que $P_\mu \varphi \geq \varphi$ ν -pp. Alors $P_\mu \varphi = \varphi$ ν -pp.

En effet on pose $\psi := P_\mu \varphi - \varphi \geq 0$. Alors $\sum_{n \geq 0} P_\mu^n \psi$ est bornée donc ψ est ν -presque partout nulle d'après la conservativité de ν .

Revenons à l'implication b) \implies c). Soit $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mesurable telle que $P_\mu f = f$ ν -pp et $\inf_X f > -\infty$. On veut prouver que f est constante-pp. D'après b), il suffit de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_\mu 1_{\{f < t\}} = 1_{\{f < t\}} \quad \nu\text{-pp} \quad (*)$$

Quitte à considérer $f - t$, on peut supposer $t = 0$. On remarque que

$$1_{\{f < 0\}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \min(1, n f_-)$$

où $f_- = \max(-f, 0)$. Comme $P_\mu f_- \geq f_-$ ν -pp avec f_- bornée, le lemme 1.3.7 assure que $P_\mu f_- = f_-$ ν -pp. Par convergence monotone et non négativité de P_μ , on a donc ν -presque sûrement,

$$P_\mu 1_{\{f < 0\}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\min(1, n f_-)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \min(1, n f_-) \leq 1_{\{f < 0\}}$$

Une nouvelle application du lemme 1.3.7 donne la P_μ -invariance de $1_{\{f < 0\}}$ ce qui conclut la preuve de c).

$c) \implies d)$: Notons P_Y l'opérateur de Markov de la chaîne induite sur Y . Soit $f : Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable telle que $P_Y f = f$ $\nu|_Y$ -pp. On montre que f est presque-partout constante sur Y . Pour $x \in X$, notons

$$T_{Y,x} : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, b \mapsto \inf\{n \geq 0, b_n \dots b_1 x \in Y\}$$

le temps de première atteinte de Y à partir de x . Il est nul si $x \in Y$. Posons

$$F : X \rightarrow [0, \infty], x \mapsto \int_{\{T_{Y,x} < \infty\}} f(b_{T_{Y,x}(b)} \dots b_1 x) d\beta(b)$$

La conservativité de ν et la P_Y -invariance de f entraînent que

$$P_\mu F = F \nu\text{-pp}$$

Par c), on a F presque-partout constante. C'est donc aussi le cas de sa restriction $F|_Y = f$.

$d) \implies e)$: Soit $Y \subseteq X$ une partie compacte. Les mesures restreintes $\nu|_Y, \nu'|_Y$ sont stationnaires pour la marche induite, avec $\nu|_Y$ ergodique d'après d). La théorie ergodique en mesure finie entraîne qu'il existe une constante $c_Y \geq 0$ telle que $\nu'|_Y = c_Y \nu|_Y$. En considérant une suite exhaustive de parties compactes Y et en remarquant que les constantes c_Y doivent coïncider à partir d'un certain rang (si $\nu \neq 0$), on obtient e).

$e) \implies a)$: immédiat vu la définition d'ergodicité.

$e) \iff f)$: Les différentes caractérisations de l'ergodicité d'un système dynamique déterministe conservatif sont supposées connues (voir [1], sections 1.2, 1.5). Soit $Y \subseteq X$ de mesure finie. L'application de premier retour $T_Y^X : B \times Y \rightarrow B \times Y, (b, y) \mapsto (T^{\tau_{Y,y}(b)} b, b_{\tau_{Y,y}(b)} \dots b_1 y)$ régit la marche de premier retour. L'argument donné dans ([16] proposition 1.9) assure qu'elle est ergodique pour la mesure $\beta \otimes \nu|_Y$ si et seulement si la marche induite sur Y est ergodique. Comme l'ergodicité de T^X équivaut par ailleurs à celle de ses transformations induites sur toute partie de mesure finie ([1], proposition 1.2.2), on obtient finalement l'équivalence entre e) et f).

□

1.4 Mesures de Radon limites

La notion de mesure limite a été introduite par Furstenberg pour étudier des probabilités stationnaires. Il s'agit d'écrire une mesure stationnaire comme moyenne intégrale de mesures indexées par les instructions de la marche et qui vérifient une propriété d'équivariance. Nous étendons ici la notion au cas d'une mesure stationnaire de masse infinie, puis donnons des applications.

1.4.1 Définition

La triplet (G, X, μ) est celui de la section 1.1. On rappelle que $\mathcal{M}^{\text{Rad}}(X)$ désigne le cône des mesures de Radon sur X , muni de la topologie faible- \star , et que les instructions aléatoires sont représentées par le système dynamique $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$ et $T : B \rightarrow B$, $(b_i)_{i \geq 1} \mapsto (b_{i+1})_{i \geq 1}$. Pour $n \geq 0$, on pose $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ la sous-tribu des n -premières coordonnées.

Définition (Mesures limites). *Soit ν une mesure de Radon stationnaire sur X . Il existe une application mesurable $B \rightarrow \mathcal{M}^{\text{Rad}}(X)$, $b \mapsto \nu_b$ telle que pour β -presque tout $b \in B$, on ait la convergence faible- \star*

$$(b_1 \dots b_n)_\star \nu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \nu_b$$

On a de plus :

- Pour β -presque tout $b \in B$, $b_{1\star} \nu_{Tb} = \nu_b$
- $\nu \geq \int_B \nu_b d\beta(b)$

Les mesures $(\nu_b)_{b \in B}$ sont appelées les mesures limites de ν .

Remarque. Dans le cas probabilisé, l'inégalité du deuxième point est une égalité. Ce n'est pas vrai pour des mesures de Radon en général. Nous verrons plus bas que pour une marche affine sur \mathbb{R} , sans point fixe, de Lyapunov nul et admettant un moment d'ordre $2 + \varepsilon$, la mesure de Radon stationnaire de Babillot-Bougerol-Elie a toutes ses mesures limites nulles.

Preuve de la définition. Dans les grandes lignes, la démonstration suit celle du cas probabilisé ([16], lemmes 1.17, 1.19), mais les arguments doivent être poussés plus loin pour gérer l'éventualité où ν serait de mesure infinie.

On note $C_c(X)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur X à support compact. Soit $f \in C_c(X)$, et pour $n \geq 0$, posons $\varphi_n : B \rightarrow \mathbb{R}$, $b \mapsto (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f)$. La stationnarité de ν entraîne que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$. Elle est de plus uniformément bornée dans $L^1(B, \beta)$ (avec $\int_B |\varphi_n| d\beta \leq \nu(|f|)$). Il existe donc $\varphi_\infty \in L^1(B, \beta)$ tel que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi_\infty$ β -ps.

On se donne $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de X et $D \subseteq C_c(X)$ un \mathbb{Q} -sous espace vectoriel dénombrable tel que pour chaque $n \geq 0$, on ait $\{f \in D, \text{supp}(f) \subseteq K_n\}$ dense dans $C_{K_n}(X) := \{f \in C_c(X), \text{supp}(f) \subseteq K_n\}$. On demande aussi que D vérifie ces propriétés de densité quand on se restreint à considérer les fonctions non négatives. D'après le premier paragraphe, il existe $B' \subseteq B$ mesurable plein tel que pour tout $b \in B'$, $f \in D$, la limite de la suite $((b_1 \dots b_n)_* \nu(f))_{n \geq 0}$ soit définie, on la note $\nu_b(f)$.

Soit $b \in B'$. La fonction $\nu_b : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une application \mathbb{Q} -linéaire non négative sur D . On aimerait vérifier qu'on peut la prolonger en une forme linéaire non négative $\nu_b : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$. *Il y a une difficulté car les mesures ν_b étant possiblement infinies, pour $f_1, f_2 \in D$, une majoration $\|f_1 - f_2\|_\infty \ll 1$ n'implique pas $\nu_b(f_1 - f_2) \ll 1$.* On va s'en sortir en se retraignant aux compacts K_n , et en utilisant que $\nu_b(f_1 - f_2)$ est un nombre fini.

Soit $n \geq 0$. Vérifions donc que $\nu_{b|_{D \cap C_{K_n}(X)}}$ se prolonge en une forme linéaire non négative continue $\nu_b : C_{K_n}(X) \rightarrow \mathbb{R}$. D'après les hypothèses de densité sur D , il suffit de vérifier que l'application \mathbb{Q} -linéaire $\nu_{b|_{D \cap C_{K_n}(X)}}$ est continue. Soit $n \geq 0$ et $(f_k)_{k \geq 0} \in (D \cap C_{K_n}(X))^\mathbb{N}$ une suite de fonctions de D à support dans K_n telle que $\|f_k\|_\infty \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. On montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \nu_b(f_k) = 0$. Pour cela, on se donne une fonction non négative $p \in D$ tel que $p|_{K_n} \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \nu_b(f_k) &= \lim_n (b_1 \dots b_n)_* \nu(f) \\ &\leq \lim_n (b_1 \dots b_n)_* \nu(\|f_k\|_\infty p) \\ &= \|f_k\|_\infty \nu_b(p) \end{aligned}$$

entraînant $\nu_b(f_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

On peut donc prolonger ν_b en une forme linéaire non négative $\nu_b : C_{K_n}(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Ces différents prolongements se recollent sans ambiguïté en $\nu_b : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, ν_b provient d'une mesure de Radon, que l'on note également ν_b . Remarquons que cette mesure est indépendante du prolongement choisi car déterminée par ses valeurs sur D .

On a ainsi défini une application $B' \rightarrow \mathcal{M}^{\text{Rad}}(X), b \mapsto \nu_b$. Cette application est bien mesurable (car si $f \in D$, $b \mapsto \nu_b(f)$ est mesurable comme limite, puis cela est vrai pour tout $f \in C_c(X)$ par passage à la limite). On la prolonge mesurablement à B de façon quelconque.

Vérifions que l'application $B \rightarrow \mathcal{M}^{\text{Rad}}(X), b \mapsto \nu_b$ convient.

Soit $b \in B'$, $f_0 \in C_c(X)$ on montre que $(b_1 \dots b_n)_* \nu(f_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_b(f_0)$. On se donne $n_0 \geq 0$ tel que K_{n_0} contienne le support de f_0 et $p \in D$ tel que $p \geq 0$, $p|_{K_{n_0}} \geq 1$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $f \in D \cap C(K_{n_0})$ telle que $\|f_0 - f\|_\infty < \epsilon/(3\nu_b(p))$.

On a pour tout $n \geq 0$ que :

$$\begin{aligned} |\nu_b(f_0) - (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f_0)| &\leq |\nu_b(f_0 - f)| + |\nu_b(f) - (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f)| + |(b_1 \dots b_n)_\star \nu(f - f_0)| \\ &\leq \epsilon/3 + |\nu_b(f) - (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f)| + \|f_0 - f\|_\infty (b_1 \dots b_n)_\star \nu(p) \end{aligned}$$

On obtient donc que pour $n \geq 0$ assez grand, on a $|\nu_b(f_0) - (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f_0)| \leq \epsilon$, d'où la convergence.

Vérifions maintenant les deux points du lemme :

- Soit $b \in B'$ tel que $Tb \in B'$. Montrons que $(b_1)_\star \nu_{Tb} = \nu_b$. Soit $f \in C_c(X)$. D'après le paragraphe précédent, on a

$$(b_1)_\star \nu_{Tb}(f) = \lim (b_2 \dots b_n)_\star \nu(f(b_1 \cdot)) = \lim (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f) = \nu_b(f)$$

D'où l'équivariance.

- Notons $\nu' := \int_B \nu_b d\beta(b)$. C'est une mesure positive sur X . Soit $f \in C_c(X)$. On a

$$\begin{aligned} \nu'(f) &= \int_B \nu_b(f) d\beta(b) \\ &= \int_B \lim (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f) d\beta(b) \\ &\leq \liminf \int_B (b_1 \dots b_n)_\star \nu(f) d\beta(b) && \text{(lemme de Fatou)} \\ &= \nu(f) && \text{(stationnarité de } \nu) \end{aligned}$$

On en déduit que ν' est de Radon, puis que $\nu' \leq \nu$.

□

Il découle de l'équivariance des ν_b que la mesure $\int_B \nu_b d\beta(b)$ est également stationnaire. Si on suppose de plus la mesure ν ergodique, l'inégalité $\int_B \nu_b d\beta(b) \leq \nu$ entraîne l'existence d'une constante $c \in [0, 1]$ telle que

$$\int_B \nu_b d\beta(b) = c\nu$$

Le lemme suivant assure que c vaut 0 ou 1.

Lemme 1.4.1. *Soit ν une mesure de Radon stationnaire ergodique sur X dont les mesures limites $(\nu_b)_{b \in B}$ ne sont pas β -presque-sûrement nulles. Alors*

$$\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$$

Démonstration. On peut écrire $\int_B \nu_b d\beta(b) = c\nu$ avec $c \in [0, 1]$. Nous allons prouver que pour β -presque tout $a \in B$,

$$(a_1 \dots a_n)_\star \int_B \nu_b d\beta(b) = \int_B \nu_{a_1 \dots a_n b} d\beta(b) \longrightarrow \nu_a \quad (*)$$

Or $(a_1 \dots a_n)_\star c\nu \rightarrow c\nu_a$. On en déduit que $c\nu_a = \nu_a$ pour β -presque tout $a \in B$ puis que $c = 1$ car typiquement $\nu_a \neq 0$

Précisons maintenant la preuve de la convergence (*). Soit $f \in C_c(X)$ et posons $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto \nu_b(f) \in L^1(B, \beta)$, $\varphi_n := \mathbb{E}(\varphi | \mathcal{B}_n) : B \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \int_B \nu_{a_1 \dots a_n b}(f) d\beta(b)$. D'après le cours [32] (proposition II.2.16), l'intégrabilité de φ entraîne que la suite (φ_n) converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(\varphi | \mathcal{B}_\infty) = \varphi$. A l'aide de la séparabilité de l'espace des fonctions continues à support compact sur X pour la norme infinie, et en raisonnant à l'aide d'une partie D comme dans la preuve précédente, on obtient la convergence (*). □

1.4.2 Conditionner la marche par un temps d'arrêt

Ce paragraphe affirme qu'une mesure de Radon μ -stationnaire ergodique dont les mesures limites ne sont pas toutes nulles et également μ_τ -stationnaire où μ_τ désigne la mesure μ conditionnée par un temps d'arrêt τ . Il sera utilisé au paragraphe suivant pour décrire les marches affines sur \mathbb{R} de Lyapunov nul, mais aussi dans le chapitre 6 pour classer les mesures de Radon stationnaires d'une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$.

Soit $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ des premières coordonnées. Si τ est fini β -ps, on note $\mu_\tau \in \mathcal{P}(\Gamma)$ la loi de $b_1 \dots b_{\tau(b)}$ quand b varie selon β . Attention, μ_τ ne correspond pas toujours à la loi de $b_{\tau(b)} \dots b_1$, et une μ_τ -trajectoire n'est pas une μ -sous trajectoire à priori.

Lemme 1.4.2. *Soit ν une mesure de Radon μ -stationnaire sur X telle que $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$ et $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$, supposé fini β -ps.*

Alors la mesure ν est également μ_τ -stationnaire.

Démonstration. Pour $i \geq 1$, on note $\tau^1 = \tau$ et $\tau^{i+1}(b) := \tau^i(b) + \tau(T^{\tau^i(b)}(b))$. On pose ensuite $\rho_\tau : B \rightarrow B, b \mapsto (b_1 \dots b_{\tau(b)}, b_{\tau(b)+1} \dots b_{\tau^2(b)}, \dots)$ et on note $\beta_\tau := (\rho_\tau)_\star \beta = (\mu_\tau)^{\mathbb{N}^*}$ la loi image. Pour β_τ presque tout $a \in B$, la suite $(a_1 \dots a_n)_\star \nu$ converge vers une mesure que l'on note ν_a et qui est une des mesures limites associées à ν . On a de plus $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b) = \int_B \nu_{\rho_\tau(b)} d\beta(b)$ car $\nu_b = \nu_{\rho_\tau(b)}$ β -ps.

Vérifions la μ_τ -stationnarité de ν .

$$\begin{aligned}
\int_G g_* \nu \, d\mu_\tau(g) &= \int_B \int_B b'_1 \dots b'_{\tau(b)} \nu_b \, d\beta(b) \, d\beta(b') \\
&= \int_B \int_B \nu_{b'_1 \dots b'_{\tau(b)} b} \, d\beta(b) \, d\beta(b') \\
&= \int_B \int_B \nu_{\rho_\tau(b')_1 \rho_\tau(b)} \, d\beta(b) \, d\beta(b') \\
&= \int_B \nu_{\rho_\tau(b)} \, d\beta(b) \\
&= \nu
\end{aligned}$$

□

1.4.3 Application aux marches affines de Lyapunov nul

Dans cette section, on considère une marche aléatoire affine sur \mathbb{R} de Lyapunov nul et on montre que la mesure stationnaire de Babillot-Bougerol-Elie a ses mesures limites nulles. On en déduit une démonstration alternative d'un théorème de Brofferio.

Identifions le groupe affine $G = \text{Aff}^+(\mathbb{R})$ à l'ensemble $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ muni de la loi de composition $(u, v)(u', v') = (uu', uv' + v)$ l'action sur \mathbb{R} étant donnée par $(u, v).x = ux + v$. On notera $g = (u(g), v(g))$ un élément de G . On se donne μ une probabilité sur G vérifiant (H) :

- la μ -marche sur \mathbb{R} n'a pas de point fixe
- $\mathbb{E}_\mu(|\log u|^2) < \infty$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}_\mu(|\log v|^{2+\delta}) < \infty$
- $\mathbb{E}_\mu(\log u) = 0$ et $u \neq 1$

Les travaux de Babillot-Bougerol-Elie [4] affirment que sous ces conditions, \mathbb{R} admet (à scalaire près) une unique mesure de Radon μ -stationnaire que l'on note ν . Cette dernière est conservative ergodique et de masse infinie. On va prouver le résultat suivant :

Proposition 1.4.3. *Soit μ une probabilité sur le groupe affine $G = \text{Aff}^+(\mathbb{R})$ satisfaisant (H), et ν la mesure de Babillot-Bougerol-Elie associée. Les mesures limites $(\nu_b)_{b \in B}$ sont β -presque sûrement nulles.*

On déduit de cette proposition que la marche à droite sur le groupe affine part à l'infini d'une façon bien particulière : les instants de forte contraction sont nécessairement couplés à de grandes translations. Ce résultat est initialement dû à Brofferio par une approche différente (voir [24]).

Corollaire 1.4.4. *Soit μ une probabilité sur le groupe affine $G = \text{Aff}^+(\mathbb{R})$ satisfaisant (H). Alors, pour β -presque tout $b \in B$, la suite $(u(b_1 \dots b_n) + |v(b_1 \dots b_n)|)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.*

Preuve du corollaire 1.4.4. Soit $b \in B$, σ une extraction telle que $u(b_1 \dots b_n) \rightarrow u_0 \geq 0$ et $v(b_1 \dots b_n) \rightarrow v_0 \in \mathbb{R}$. Notons $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto u_0 x + v_0$ (constante si $u_0 = 0$). Alors $(b_1 \dots b_{\sigma(n)})_* \nu \rightarrow \varphi_* \nu \neq 0$. Le corollaire découle alors de la proposition. \square

La démonstration de la proposition 1.4.3 repose sur le résultat suivant, du à Bougerol et Picard [19] :

Théorème (Marches à Lyapunov négatif). *Soit μ une probabilité sur G telle que $\mathbb{E}(\log^+ u) < \infty$, $\mathbb{E}(\log^+ |v|) < \infty$ et $\mathbb{E}(\log u) < 0$. Alors il existe une unique probabilité μ -stationnaire sur \mathbb{R} .*

Corollaire 1.4.5. *Soit μ une probabilité sur G telle que $\mathbb{E}(u) < 1$ et $\mathbb{E}(\log^+ |v|) < \infty$. Alors toute mesure de Radon μ -stationnaire sur \mathbb{R} est proportionnelle à la probabilité de Bougerol-Picard, et en particulier de masse finie.*

Preuve du corollaire 1.4.5. Soit $\nu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'unique probabilité μ -stationnaire sur \mathbb{R} donnée par le théorème de Bougerol et Picard, et $\nu \in \mathcal{M}^{\text{Rad}}(\mathbb{R})$ une mesure de Radon μ -stationnaire.

Commençons par vérifier que ν est conservative. Comme ν_0 est de masse finie, il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour β -presque tout $b \in B$, la trajectoire $(b_n \dots b_1 x_0)_{n \geq 0}$ admet une sous suite convergeant vers x_0 . L'hypothèse de Lyapunov négatif assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, β -presque tout $b \in B$, on a $d(b_n \dots b_1 x, b_n \dots b_1 x_0) = u(b_n \dots b_1) d(x, x_0) \rightarrow 0$. On a donc la conservativité pour tout point y , et en particulier la conservativité de ν .

On vérifie maintenant que les mesures ν_0 et ν sont proportionnelles. D'après le théorème de Bougerol-Picard, il suffit de vérifier que ν est de masse finie. Nous avons vu dans la section précédente que ν admet une désintégration ergodique. On peut donc supposer ν μ -ergodique. Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0 + \infty[$ des fonctions mesurables non négatives bornées ν -intégrables, avec $g > 0$. Le théorème de Chacon-Ornstein [61] appliqué à $P = P_\mu$ entraîne les convergences presque-sûre :

- $\forall \nu_0 x_0 \in \mathbb{R}, \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x_0)}{\sum_{k=0}^{n-1} P^k g(x_0)} \rightarrow \frac{\nu_0(f)}{\nu_0(g)}$

- $\forall \nu x \in \mathbb{R}, \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x)}{\sum_{k=0}^{n-1} P^k g(x)} \rightarrow \frac{\nu(f)}{\nu(g)}$

Estimons la différence $|\sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x)|$. On suppose que f est C -lipschitzienne pour un certain $C > 0$, et $\nu_0(f), \nu(f) > 0$.

$$\begin{aligned} |P^k f(x_0) - P^k f(x)| &\leq \int_B |f(b_k \dots b_1 x_0) - f(b_k \dots b_1 x)| d\beta(b) \\ &\leq Cd(x_0, x) \int_B u_{b_1} \dots u_{b_k} d\beta(b) \\ &= Cd(x_0, x) \mathbb{E}(u)^k \end{aligned}$$

L'hypothèse $\mathbb{E}(u) < 1$ entraîne que $\sum_{k \geq 0} |P^k f(x_0) - P^k f(x)| < \infty$. Comme les séries $\sum_{k \geq 0} P^k f(x_0)$ et $\sum_{k \geq 0} P^k f(x)$ divergent (typiquement), on en déduit que pour ν_0 -presque tout $x_0 \in \mathbb{R}$, ν -presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x_0) / \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) \rightarrow 1$, puis que

$$\nu(f) = \nu_0(f) \frac{\nu(g)}{\nu_0(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P^k g(x)}{\sum_{k=0}^{n-1} P^k g(x_0)}$$

Pour conclure, on se donne une suite exhaustive $(K_i)_{i \geq 0}$ de compacts de \mathbb{R} , et pour tout $i \geq 0$, f_i une fonction 1-lipschitzienne à support compact telle que $1 \geq f_i \geq 1_{K_i}$. On peut choisir x et x_0 dans la limite ci-dessus adaptés simultanément aux f_i , et noter $c := \frac{\nu(g)}{\nu_0(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P^k g(x)}{\sum_{k=0}^{n-1} P^k g(x_0)} \in]0, +\infty[$. Alors pour tout $i \geq 0$, $\nu(f_i) = c\nu_0(f_i)$ puis $\nu(\mathbb{R}) = c$. Ainsi ν est une mesure stationnaire finie, et le théorème de Bougerol et Picard implique que $\nu = c\nu_0$, ce qui conclut. □

Preuve de la proposition 1.4.3. On suppose par l'absurde que les mesures limites $(\nu_b)_{b \in B}$ ne sont pas presque toutes nulles. Comme la mesure stationnaire ν est ergodique, le lemme 1.4.1 implique $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$. On définit un temps d'arrêt β -presque sûrement fini $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ en posant :

$$\tau(b) = \inf\{n \geq 1, u(b_1 \dots b_n) < 1\}$$

Le lemme 1.4.2 garantit que la mesure ν est également μ_τ -stationnaire. D'après [34] (lemme 5.49) et les hypothèses de moments faites sur μ , la probabilité μ_τ satisfait $\mathbb{E}_{\mu_\tau}(\log^+ |v|) < \infty$. Par construction la μ_τ marche est contractante et on peut donc appliquer le corollaire 1.4.5, impliquant que la mesure ν est finie. Absurde. □

Chapitre 2

Marche sur un groupe linéaire

Sommaire

2.1	La probabilité de Furstenberg	42
2.2	Théorèmes limites	43
2.2.1	Loi des grand nombres	44
2.2.2	Théorème central limite	45
2.2.3	Loi du logarithme itéré	46
2.2.4	Principe des grandes déviations	46
2.2.5	Théorème local limite	47
2.2.6	Quelques mots sur les preuves	47

Cette partie est consacrée à l'étude d'une marche aléatoire donnée par l'action d'un groupe linéaire probabilisé sur un espace vectoriel. Les théorèmes fondamentaux du sujet ont d'abord été exposés dans le livre de Bougerol-Lacroix [18] qui privilégie une approche élémentaire, puis généralisés dans le livre de Benoist-Quint [16] à l'aide du langage des variétés drapeaux, du cocycle d'Iwasawa, de la projection de Cartan, etc. Ces résultats seront exploités tout au long de la partie 2. Nous prenons ici le temps de les rappeler à travers l'exemple simple mais éloquent d'une marche aléatoire induite par l'action de $G = SL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2 . Notons que ce cas là seulement sera utilisé dans le chapitre 5, et que la généralité de [16] sera rappelée et mise à profit dans les chapitres 6 et 4.

La section 2.1 introduit la probabilité de Furstenberg. Etant donné une mesure de probabilité fortement irréductible sur $SL_2(\mathbb{R})$, il s'agit de l'unique probabilité stationnaire sur sa variété drapeau $P^1(\mathbb{R})$. On rapporte ses principales caractéristiques (proximalité, régularité hölder) et son lien avec la positivité de l'exposant de Lyapunov de la marche.

La section 2.2 expose des théorèmes limites pour les trajectoires d'une marche linéaire sur \mathbb{R}^2 . On y trouve les analogues de la loi des grands nombres, du théorème central limite, de la loi du logarithme itéré, du principe des grandes déviations ou encore du théorème local limite.

2.1 La probabilité de Furstenberg

Soit μ une mesure de probabilité sur $G = SL_2(\mathbb{R})$. Nous allons voir que sous des conditions raisonnables, la marche induite sur la droite projective $P^1(\mathbb{R})$ admet une unique probabilité stationnaire, dite de Furstenberg (cf. [40, 42, 47] pour la progression des idées, ou [16] pour un exposé moderne). C'est une étape essentielle vers la compréhension des marches linéaires, et sur elle reposera la preuve des théorèmes limites de la section 2.2. La probabilité de Furstenberg intervient également dans la démonstration du théorème de superrigidité de G. Margulis [60](section VI-4), ou dans la classification des probabilités stationnaires d'une marche sur un espace homogène de volume fini [13, 14, 36]. Mère de tant d'applications, elle constitue à vrai dire un objet d'étude en soi.

Théorème 2.1.1. *Soit μ une probabilité sur $SL_2(\mathbb{R})$. Si le semi-groupe fermé Γ_μ engendré par le support de μ est fortement irréductible¹ et non-borné, alors il existe une unique probabilité μ -stationnaire sur $P^1(\mathbb{R})$. Elle n'a pas d'atome et ses mesures limites sont des masses de Dirac.*

Résumé de preuve du théorème 2.1.1. Nous en expliquons les grandes lignes de la démonstration donnée dans [16] (proposition 3.7). On rappelle la notation $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.

Le théorème de Kakutani garantit l'existence d'une probabilité stationnaire ν sur $P^1(\mathbb{R})$, construite en se donnant un élément $x \in P^1(\mathbb{R})$ et en notant ν une limite faible de la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x)_{n \geq 1}$.

Soit $b \in B$ typique, et $f \in M_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ une valeur d'adhérence de la suite de matrices $(\|b_1 \dots b_n\|^{-1} b_1 \dots b_n)_{n \geq 1}$. La forte irréductibilité de Γ_μ garantit que ν n'a pas d'atome, si bien qu'on peut écrire :

$$\nu_b = f \star \nu$$

Une version forte du lemme définissant les probabilités limites [16] (lemma 1.2.1) permet de montrer qu'en fait, pour tout $g \in \Gamma_\mu$,

$$\nu_b = (fg) \star \nu$$

Remarquons que que g peut être remplacé par $\|g\|^{-1}g$ sans affecter l'égalité précédente. Comme Γ_μ n'est pas borné, il existe une suite $(g_n) \in \Gamma_\mu^{\mathbb{N}}$ telle que $\|g_n\|^{-1}g_n$ converge vers une matrice π de rang 1. En utilisant la forte irréductibilité de Γ_μ , on peut supposer que $f\pi \neq 0$. L'égalité $\nu_b = (f\|g_n\|^{-1}g_n) \star \nu$ passe donc à la limite et donne :

$$\nu_b = (f\pi) \star \nu$$

1. Cela signifie que l'action de Γ_μ sur \mathbb{R}^2 ne stabilise pas d'union finie (non vide) de droites vectorielles.

Tout en découle : la probabilité ν_b est une masse de Dirac en la droite image de $f\pi$. De plus, comme f et π ont été construits sans faire intervenir ν , on obtient l'unicité des ν_b , puis de ν en intégrant. Le fait que ν n'a pas d'atome a déjà été évoqué.

□

Remarques.

1) (*Positivité du Lyapunov*) Le fait que les mesures limites $(\nu_b)_{b \in B}$ de la probabilité de Furstenberg soient des masses de Dirac (autrement dit la "proximalité" de ν) signifie que la marche à droite $b_1 \dots b_n$ sur G est presque-sûrement transiente. On en déduira plus bas la positivité de l'exposant de Lyapunov de la marche, par application du théorème de divergence linéaire des sommes de Birkhoff. Réciproquement, la positivité du Lyapunov permet une démonstration alternative du théorème 2.1.1 ([16], lemmes 10.5, 12.5)

2) (*Régularité Hölder*) Si la probabilité μ admet de plus un moment exponentiel fini, alors la mesure de Furstenberg associée est Hölder-régulière : il existe des constantes $C, \varepsilon > 0$ tels que pour tout $x \in P^1(\mathbb{R})$,

$$\nu(B(x, r)) \leq Cr^\varepsilon$$

Ce résultat est dû à Y. Guivarc'h [43]. Un résultat plus fort a récemment été démontré par J. Li [58] : les coefficients de Fourier de ν ont une décroissance polynomiale.

3) (*Thèmes de recherche*) Un certains nombres d'articles cherche à construire une probabilité μ dont la mesure de Furstenberg ν satisfait une condition de régularité par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans [41], Furstenberg montre qu'un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$ supporte toujours une probabilité génératrice μ telle que $\nu = \text{leb}_{S^1}$. Si le réseau n'est pas cocompact Guivarc'h et Y. LeJan ajoutent que μ ne peut avoir un moment d'ordre 1 (voir [44]). Si le réseau est cocompact, l'existence d'un tel μ à support fini reste ouverte. On peut aussi construire une probabilité μ symétrique à support fini telle que ν est absolument continue par rapport à Lebesgue [6, 20, 17], mais dont le support engendre un sous-groupe Γ_μ qui est dense dans G .

2.2 Théorèmes limites

Soit μ une probabilité sur $G = SL_2(\mathbb{R})$, et $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ un vecteur non nul. Nous avons décrit dans la section précédente comment varie la direction d'une μ -trajectoire issue de v . Nous observons maintenant sa distance à l'origine. Il apparaît que pour $n \geq 0$ grand, la variable $B \mapsto \mathbb{R}, b \mapsto \log \|b_n \dots b_1 v\|$ se comporte comme une somme de n variables aléatoires indépendantes sur \mathbb{R} , au sens où l'on retrouve les théorèmes limites habituels. Des preuves sont données dans les livres [18, 16] et sont originellement dues à Furstenberg, Guivarc'h, Lepage et Raugi.

Nous dirons que μ a un moment d'ordre $p \in [1, +\infty[$ si

$$\int_G (\log \|g\|)^p d\mu(g) < \infty$$

et un moment exponentiel s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_G \|g\|^\varepsilon d\mu(g) < \infty$$

2.2.1 Loi des grand nombres

. La loi des grands nombres affirme qu'une marche aléatoire sur \mathbb{R} admet une dérive donnée par la moyenne de la loi d'incrément.

Théorème 2.2.1. *Soit m une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 1, et $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi m . Alors on a la convergence presque-sûre :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(m)$$

Le résultat se transpose au cadre une marche linéaire de la façon suivante :

Théorème 2.2.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur G admettant un moment d'ordre 1 et telle que Γ_μ est fortement irréductible proximal. Alors pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, β -presque tout $b \in B$,*

$$\frac{1}{n} \log \|b_n \dots b_1 v\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda_\mu$$

où $\lambda_\mu > 0$ ne dépend que de μ , et est appelé le premier exposant de Lyapunov de la marche.

Résumons la preuve du théorème 2.2.2. On introduit le cocycle d'Iwasawa

$$\sigma : G \times P^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (g, \mathbb{R}v) \mapsto \log \frac{\|gv\|}{\|v\|}$$

ce qui permet de réécrire pour $x = \mathbb{R}v \in P^1(\mathbb{R})$ et $b \in B$,

$$\log \|b_n \dots b_1 v\| = \sigma(b_n \dots b_1, x) + \log \|v\|$$

Une version forte de la loi des grands nombres (voir [16], appendix Theorem 1.5) affirme que pour tout $x \in P^1(\mathbb{R})$, et β -presque tout $b \in B$,

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(b_k \dots b_1 x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

où la fonction $\varphi : P^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_G \sigma(g, x) d\mu(g)$ est bien définie et continue grâce à l'hypothèse de moment sur μ . Soit ν la probabilité de Furstenberg sur $P^1(\mathbb{R})$. D'après la loi de Breiman ([16], lemma 2.3), pour tout $x \in P^1(\mathbb{R})$, β -presque tout $b \in B$, la suite de probabilités $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{b_k \dots b_1 x}$ converge vers ν . On obtient finalement

$$\frac{1}{n} \log \|b_n \dots b_1 v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_\mu$$

où $\lambda_\mu = \int_{G \times P^1(\mathbb{R})} \sigma(g, x) d\mu(g) d\nu(x)$.

Vérifions la positivité de λ_μ . D'après le théorème de divergence linéaire des sommes de Birkhoff ([16], lemma 2.18) il suffit de montrer que pour tout $x \in P^1(\mathbb{R})$, β -presque tout $b \in B$,

$$\sigma(b_n \dots b_1, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Mais cela découle du théorème de Furstenberg appliqué à la probabilité $\check{\mu}$, image de μ par l'application d'inversion $g \mapsto g^{-1}$. En effet, comme les mesures limites sont des masses de Dirac, nous avons $\|b_n \dots b_1\| \rightarrow +\infty$ et comme il n'y a pas d'atome, pour β -presque tout $b \in B$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sigma(b_n \dots b_1, x) \geq \varepsilon \|b_n \dots b_1\|$. La positivité en découle. \square

2.2.2 Théorème central limite

. Le théorème central limite affirme qu'une somme de n effets indépendants de même loi centrée se comporte à l'échelle \sqrt{n} comme une loi Gaussienne.

Théorème 2.2.3. *Soit m une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 2 et d'écart type $\eta \neq 0$. Notons $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi m . Alors on a la convergence en loi :*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} X_k - n\mathbb{E}(m)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \eta^2)$$

où $\mathcal{N}(0, \eta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} e^{-\frac{t^2}{2\eta^2}} dt$ désigne la loi Gaussienne sur \mathbb{R} centrée de variance η^2 .

Le résultat se transpose au cadre d'une marche linéaire de la façon suivante :

Théorème 2.2.4. *Soit μ une mesure de probabilité sur G admettant un moment exponentiel et telle que Γ_μ est fortement irréductible et non borné. Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et pour $b \in B$ variant selon β , on a la convergence en loi :*

$$\frac{\log \|b_n \dots b_1 v\| - n\lambda_\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, \eta_\mu^2)$$

où $\eta_\mu^2 > 0$ ne dépend que de μ .

2.2.3 Loi du logarithme itéré

La loi du logarithme itéré considère une trajectoire typique d'une marche centrée sur \mathbb{R} . Il affirme qu'à l'échelle $\sqrt{n \log \log n}$, la trajectoire s'accumule sur un intervalle borné, qu'elle remplit entièrement.

Théorème 2.2.5. *Soit m une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 2 et d'écart type η . Notons $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi m . Alors, presque sûrement, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} X_k - n\mathbb{E}(m)}{\sqrt{2n \log \log n}}$$

est égal à $[-\eta, \eta]$.

Le résultat se transpose au cadre d'une marche linéaire de la façon suivante :

Théorème 2.2.6. *Soit μ une mesure de probabilité sur G admettant un moment exponentiel et telle que Γ_μ est fortement irréductible et non borné. Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et β -presque tout $b \in B$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite :*

$$\frac{\log ||b_n \dots b_1 v|| - n\lambda_\mu}{\sqrt{2n \log \log n}}$$

est égal à $[-\eta_\mu, \eta_\mu]$.

2.2.4 Principe des grandes déviations

Le principe des grandes déviations affirme que la convergence dans la loi des grands nombres est uniforme en dehors d'un ensemble de taille exponentiellement petite.

Théorème 2.2.7. *Soit m une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant un moment exponentiel. Notons $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi m . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k - \mathbb{E}(m)\right| > \varepsilon\right) \leq e^{-\delta n}$$

Le résultat se transpose au cadre d'une marche linéaire de la façon suivante :

Théorème 2.2.8. *Soit μ une mesure de probabilité sur G admettant un moment exponentiel et telle que Γ_μ est fortement irréductible et non borné. Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang,*

$$\beta\{b \in B, \left|\frac{1}{n} \log ||b_n \dots b_1 v|| - \lambda_\mu\right| > \varepsilon\} \leq e^{-\delta n}$$

2.2.5 Théorème local limite

Le théorème local limite estime la probabilité qu'une marche aléatoire centrée sur \mathbb{R} tombe à l'instant n dans une fenêtre fixée. Nous supposons sa loi d'incrément apériodique, i.e. qu'elle n'est pas sur un translaté d'un sous-groupe discret $c + r\mathbb{Z}$.

Théorème 2.2.9. *Soit m une mesure de probabilité apériodique sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 2, d'écart type η (nécessairement non nul). Notons $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi m . Alors pour tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k - n\mathbb{E}(m) \in I\right) \simeq \frac{\text{leb}(I)}{\eta\sqrt{2\pi n}}$$

Le résultat se transpose au cadre d'une marche linéaire de la façon suivante :

Théorème 2.2.10. *Soit μ une mesure de probabilité sur G admettant un moment exponentiel et telle que Γ_μ est fortement irréductible et non borné. Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,*

$$\beta\{b \in B, \log \|b_n \dots b_1 v\| - n\lambda_\mu \in I\} \simeq \frac{\text{leb}(I)}{\eta_\mu \sqrt{2\pi n}}$$

2.2.6 Quelques mots sur les preuves

On trouvera des preuves complètes de ces théorèmes limites dans [18, 16]. Nous expliquons ici la méthode employée.

Comme pour les marches sur \mathbb{R} , les preuves des théorèmes limites pour les marches linéaires reposent sur de l'Analyse. Pour $x = \mathbb{R}v \in P^1(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ notons $\mu_{n,x}$ la loi de $\log \frac{\|b_n \dots b_1 v\|}{\|v\|}$ quand b varie suivant β . La formule d'inversion de Fourier ramène l'étude de $\mu_{n,x}$ à celle de sa transformée de Fourier : pour toute fonction continue à support compact $f \in C_c^0(\mathbb{R})$,

$$\mu_{n,x}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mu_{n,x}}(\theta) \widehat{f}(\theta) d\theta$$

où pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\mu_{n,x}}(\theta) = \int_G e^{i\theta \log \frac{\|b_n \dots b_1 v\|}{\|v\|}} d\beta(b), \quad \widehat{f}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\theta x} dx$$

La transformée de Fourier de $\mu_{n,x}$ peut être exprimée à l'aide d'une perturbation holomorphe de l'opérateur de Markov P_μ . Pour $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle assez petite, $\varphi \in C^0(P^1(\mathbb{R}))$, $x = \mathbb{R}v \in P^1(\mathbb{R})$, on note

$$P_z \varphi(x) = \int_G e^{z \log \frac{\|gv\|}{\|v\|}} \varphi(gx) d\mu(g)$$

On peut ainsi réécrire

$$\widehat{\mu_{n,x}}(\theta) = P_{i\theta}^n \mathbf{1}(x)$$

Nous sommes donc ramenés à l'analyse d'une famille d'opérateurs (P_z) . Les propriétés de contraction de l'action de G sur $P^1(\mathbb{R})$ entraînent que, pour $\alpha > 0$ assez petit, elle agit sur l'espace de Banach $H^\alpha(P^1(\mathbb{R}))$ constitué des fonctions α -höldériennes sur $P^1(\mathbb{R})$. La dépendance en z est holomorphe grâce à l'hypothèse de moment exponentiel faite sur μ , et il y a un trou spectral pour z assez proche de zéro. Notons alors λ_z la valeur propre complexe dominante de l'opérateur P_z . Les preuves des théorèmes limites (TCL, LLI, PGD, TLL) consistent en une analyse fine du comportement de $z \mapsto \lambda_z$, notamment de ses dérivées en zéro.

Cette approche adapte au cas d'un cocycle une méthode déjà éprouvée pour établir des théorèmes limites sur un système dynamique probabilisé mélangeant et dont l'opérateur de transfert admet un trou spectral. Elle trouve son origine dans les articles de Nagaev [62, 63], puis est développée par LePage [56], Guivarc'h-Raugi [48], et bien d'autres. On trouve un exposé très complet dans le livre de Hennion-Hervé [50]. Une preuve courte et élémentaire du TCL est également donnée dans les notes de Sarig [75].

Deuxième partie

Travaux de recherche

Chapitre 3

Transience en loi d'une marche symétrique en mesure infinie

Sommaire

3.1	Un résultat général de transience en loi	53
3.1.1	Notations et énoncé du théorème de transience	53
3.1.2	Martingales rétrogrades	55
3.1.3	Convergence des aller-retours et preuve de la transience	58
3.2	Application : une réciproque au théorème de récurrence d'Eskin-Margulis	61
3.2.1	Enoncé de la réciproque	61
3.2.2	Preuve de la réciproque	63
3.2.3	Pour aller plus loin	66

Introduction

Ce chapitre a fait l'objet de l'article [11]. Il est motivé par un article publié par Eskin et Margulis en 2004 qui étudie les propriétés de récurrence des marches aléatoires sur des espaces homogènes [38]. Soit G un groupe de Lie réel, $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret, et notons $X = G/\Lambda$ l'espace quotient. Une probabilité μ sur G induit une marche aléatoire sur X de probabilités de transitions $(\mu \star \delta_x)_{x \in X}$. Les deux auteurs s'interrogent sur la position de la marche à l'instant n pour n grand. Ils parviennent à montrer un résultat étonnant : si G est algébrique réel simple, si Λ est de covolume fini, et si le support de μ est compact et engendre un sous-groupe Zariski-dense dans G , alors pour tout point de départ $x \in X$, la suite de probabilités de position $(\mu^{\star n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ a toutes ses limites faibles- \star de masse 1. On dit qu'il n'y a pas de fuite de masse. Ce comportement rappelle celui du flot unipotent mis en lumière par Dani et Margulis [29, 59], qui prouvent que les trajectoires d'un flot unipotent sur X évoluent essentiellement dans des compacts de X . C'est le point de départ d'une

analogie fructueuse qui conduit à la classification des probabilités stationnaires sur X , sous les travaux de Benoist et Quint [13, 14], puis Eskin et Lindenstrauss [37]. Il en découle notamment que les moyennes de Césaro $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x$ convergent pour tout point de départ $x \in X$, avec pour limite la probabilité de Haar sur X ou bien une équiprobabilité sur un ensemble fini. Le peu d'options possibles signe un phénomène de rigidité, analogue à celui observé par M. Ratner pour un flot unipotent.

Ce chapitre aborde la question d'une réciproque au théorème d'Eskin et Margulis :

L'absence de fuite de masse est elle caractéristique des marches sur un espace homogène X de volume fini ou bien pourrait elle aussi apparaître pour des marches en volume infini ?

Nous montrons qu'en volume infini et sous des conditions raisonnables, il y a toujours fuite de (toute la) masse : pour-presque tout point de départ $x \in X$, la suite des probabilités de position $(\mu^{\star n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ converge en moyenne de Césaro vers la mesure nulle.

De plus, la moyenne peut être retirée si la marche est symétrique, i.e. si μ est invariante sous l'application d'inversion : $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$.

Théorème 3.2.1. *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini, $\Lambda \subseteq G$ un sous groupe discret de covolume infini, μ une probabilité sur G dont le support engendre un sous-groupe Zariski-dense dans G .*

Alors pour presque tout $x \in G/\Lambda$, on a la convergence faible- \star :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (1)$$

De plus, si la probabilité μ est symétrique, alors la convergence peut être renforcée :

$$\mu^{\star n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2)$$

Ce résultat de transience en loi contraste fortement avec l'article [70], dans lequel R. Prohaska étudie les propriétés de récurrence ponctuelle d'une marche aléatoire sur un espace homogène G/Λ . Il montre notamment que si la marche est étalée¹ et si l'espace G/Λ admet une mesure de Radon G -invariante à croissance quadratique, alors il y a récurrence presque-sûre : pour tout point de départ $x \in G/\Lambda$, presque toute trajectoire issue de x admet une sous-suite convergeant vers x .

La convergence en moyenne de Césaro (1) de notre résultat 3.2.1 découle essentiellement du théorème de Chacon-Ornstein et du théorème de Howe-Moore. Le

1. i.e. donnée par une probabilité μ sur G admettant une puissance de convolution $\mu^{\star n}$ qui n'est pas singulière avec la mesure de Haar sur G .

convergence (2) est plus délicate. La difficulté tient au fait que l'opérateur de Markov $P_\mu : f \mapsto \int_G f(g.)d\mu(g)$ associé à la marche n'a pas de trou spectral : son rayon spectral sur $L^2(G/\Lambda)$ est égal à 1. Nous contournons cette obstruction en utilisant le théorème de convergence des martingales rétrogrades et aboutissons à une preuve très générale, qui ne repose pas sur le cadre algébrique des espaces homogènes.

Le théorème 3.2.1 est ainsi un corollaire de notre théorème 3.1.1 :

Théorème 3.1.1. *Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable équipé d'une mesure de Radon λ , soit Γ un groupe localement compact à base dénombrable agissant continument sur X en préservant la mesure λ , et soit μ une probabilité sur Γ dont le support génère Γ comme groupe fermé.*

Si la probabilité μ est symétrique et si toute partie mesurable Γ -invariante de X est de λ -mesure nulle ou infinie, alors pour λ -presque tout point de départ $x \in X$, on a la convergence faible- \star :

$$\mu^{\star n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En quelques mots, une marche aléatoire symétrique sur un espace infini "quasi-ergodique" est toujours transiente en loi. Ce résultat peut être vu comme un analogue en mesure infinie de résultats d'équidistribution des marches aléatoires symétriques en mesure finie dus à Rota [73] et Oseledets [66].

3.1 Un résultat général de transience en loi

3.1.1 Notations et énoncé du théorème de transience

Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable, et équipé d'une mesure de Radon λ . Soit Γ un groupe localement compact à base dénombrable agissant continument sur X en préservant la mesure λ , et soit μ une probabilité sur Γ dont le support génère Γ comme groupe fermé. Nous avons vu que ce contexte définit une marche aléatoire sur X .

Rappelons quelques terminologies :

- La probabilité μ est *symétrique* si $\mu = i_\star \mu$ où $i : \Gamma \rightarrow \Gamma, g \mapsto g^{-1}$ désigne l'application d'inversion.
- L'*opérateur de Markov* P_μ associé à μ agit sur l'ensemble des fonctions mesurables non-négatives sur X via la formule

$$P_\mu \varphi(x) := \int_G \varphi(gx) d\mu(g)$$

et s'étend en une contraction sur les espaces $L^p(X, \lambda)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

- Une partie mesurable $A \subseteq X$ sera dite Γ -invariante (du point de vue de λ) si pour tout $g \in \Gamma$, on a $\lambda(A\Delta gA) = 0$. Cela équivaut à dire que $P_\mu 1_A = 1_A$ λ -pp

Prenons le temps de vérifier ce dernier point. Il s'agit de montrer le sens indirect, on suppose donc l'égalité $P_\mu 1_A = 1_A$ λ -pp. Cela signifie que pour λ -presque tout $x \in X$, μ -presque tout $g \in G$, on a $1_A(gx) = 1_A(x)$. On en déduit via le théorème de Fubini que pour μ -presque tout $g \in \Gamma$, on a $\lambda(A\Delta gA) = 0$. Le sous groupe $D \subseteq \Gamma$ engendré par de tels éléments g est dense dans Γ et laisse la partie A invariante λ -pp. Il reste donc à vérifier que l'invariance λ -pp passe à la limite. Soit $g \in \Gamma$, $(g_n) \in D^\mathbb{N}$ tels que $g_n \rightarrow g$, soit $\varphi \in C_c^0(X)$. Alors par convergence dominée,

$$\int_{g_n A} \varphi d\lambda - \int_{g A} \varphi d\lambda = \int_A \varphi(g_n \cdot) - \varphi(g \cdot) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que $\int_A \varphi d\lambda = \int_{g A} \varphi d\lambda$. Comme cela vaut pour tout $\varphi \in C_c^0(X)$, on conclut que $\lambda(A\Delta gA) = 0$.

Nous énonçons maintenant le résultat principal du chapitre, affirmant qu'une marche symétrique sur un espace infini "quasi-ergodique" est transiente en loi. La preuve est donnée dans la section 3.3.

Théorème 3.1.1. *Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable équipé d'une mesure de Radon λ , soit Γ un groupe localement compact à base dénombrable agissant continument sur X en préservant la mesure λ , et soit μ une probabilité sur Γ dont le support génère Γ comme groupe fermé.*

Si la probabilité μ est symétrique et si toute partie mesurable Γ -invariante de X est de λ -mesure nulle ou infinie, alors pour λ -presque tout point de départ $x \in X$, on a la convergence faible- \star :

$$\mu^{\star n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarques. 1) L'hypothèse sur la mesure λ entraîne que la Γ -orbite de λ -presque tout point de X est non bornée dans X . Il y a équivalence si l'action de Γ préserve une distance induisant la topologie de X .

2) La transience en loi obtenue n'empêche pas qu'il y ait récurrence presque-sûre. Par exemple, R. Prohaska démontre dans [70] qu'une marche à densité² sur un espace homogène G/Λ à croissance quadratique est toujours récurrente-p.s.

3) Sans l'hypothèse de symétrie, la preuve fournit la convergence en moyenne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. i.e. une marche donnée par une probabilité μ sur G admettant une puissance de convolution $\mu^{\star n}$ qui n'est pas singulière avec la mesure de Haar sur G .

On ne peut pas espérer la convergence des probabilités $(\mu^{\star n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ en général. Par exemple, considérons un \mathbb{Z} -revêtement S d'une surface hyperbolique compacte. On peut réaliser son fibré unitaire tangent T^1S comme un espace homogène G/Λ où $G = SL_2(\mathbb{R})$ et $\Lambda \subseteq G$ est un sous-groupe discret. Posons $\mu = \delta_{u_1}$ où $u_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La μ -marche sur G/Λ correspond à l'action séquencée du flot horocyclique sur T^1S . On peut vérifier que toute partie de T^1S invariante par la marche est de mesure nulle ou infinie (conséquence directe du théorème de Howe-Moore, voir preuve du théorème 3.2.1). En revanche, la marche est presque-partout récurrente [5]. On ne peut donc pas avoir $\mu^{\star n} \star \delta_x \rightarrow 0$ pour presque tout x .

Résumons la preuve du théorème 3.1.1. Le point clef est de démontrer que pour λ -presque tout point de départ $x \in X$, la suite de probabilités de positions $(\mu^{\star 2n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ a une limite faible- \star (qui est une mesure sur X de masse inférieure ou égale à 1). Nous obtenons cela à partir de la symétrie de μ et du théorème de convergence des martingales rétrogrades, étendu au préalable à un contexte où les mesures sont σ -finies. Une fois la convergence des $(\mu^{\star 2n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ démontrée, il suffit de vérifier que la suite de moyennes de Césaro $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x)_{n \geq 1}$ tend faiblement vers la mesure nulle. Cela découle essentiellement du théorème de Chacon-Ornstein et n'utilise pas la symétrie de la probabilité μ .

3.1.2 Martingales rétrogrades

Cette section démontre le théorème de convergence des martingales rétrogrades sur des espaces mesurés σ -finis. Nous en aurons besoin pour prouver le théorème 3.1.6. Notons que le résultat est déjà connu [51, p. 533].

Commençons par rappeler la définition de l'espérance conditionnelle [28].

Définition 3.1.2 (Espérance conditionnelle). *Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable, \mathcal{Q} une sous tribu de \mathcal{F} , et m une mesure positive sur (Ω, \mathcal{F}) dont la restriction $m|_{\mathcal{Q}}$ est σ -finie. Alors pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$, il existe une unique fonction $f' \in L^1(\Omega, \mathcal{Q}, m)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{Q}$, on ait $m(f 1_A) = m(f' 1_A)$. On note cette fonction $\mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q})$.*

Remarque. La condition que la mesure restreinte $m|_{\mathcal{Q}}$ soit σ -finie est nécessaire. Pour s'en convaincre, on peut considérer le cas où $(\Omega, \mathcal{F}, m) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \text{leb}_{\mathbb{R}^2})$ et \mathcal{Q} est la tribu engendrée par la partition $([i, i+1[\times\mathbb{R})_{i \in \mathbb{Z}}$. Une fonction intégrable et \mathcal{Q} -mesurable étant nécessairement nulle, l'espérance conditionnelle d'une fonction non nulle $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$ n'existe pas.

Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 3.1.3 (Convergence p.s. des martingales rétrogrades [51]). *Soit (Ω, \mathcal{F}, m) un espace mesuré, $(\mathcal{Q}_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de sous tribus de \mathcal{F} telle que pour tout $n \geq 0$, la mesure restreinte $m|_{\mathcal{Q}_n}$ est σ -finie. Alors pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$, il existe $\psi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$ telle qu'on ait la convergence presque sûre :*

$$\mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \psi \quad (m\text{-pp})$$

Remarque. Si la mesure m est σ -finie par rapport à tribu queue $\mathcal{Q}_\infty := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{Q}_n$, alors le théorème 3.1.3 se déduit directement du cas probabilisé (par restriction à des domaines \mathcal{Q}_∞ -mesurables de mesure finie), et garantit que $\psi = \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_\infty)$. A l'extrême inverse, si la tribu queue \mathcal{Q}_∞ ne contient pas de partie de Ω de m -mesure finie non nulle, alors l'intégrabilité de ψ entraîne que $\psi = 0$.

Le point clef de notre démonstration est le lemme 3.1.4, qui permet de contrôler le rapport entre deux espérances conditionnelles en mesure infinie par une espérance conditionnelle en mesure finie.

Lemme 3.1.4. *Soit (Ω, \mathcal{F}, m) un espace mesuré et $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{F}$ une sous tribu telle que $m|_{\mathcal{Q}}$ est σ -finie. Soit $f, h \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$ des fonctions intégrables avec $h > 0$. Alors on a l'égalité presque sûre :*

$$\mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}) = \mathbb{E}_m(h|\mathcal{Q}) \mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}\right) \quad (m\text{-pp})$$

Démonstration. On peut supposer $f \geq 0$. Notons

$$\varphi = \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}), \quad \psi = \mathbb{E}_m(h|\mathcal{Q}) \mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}\right)$$

Ce sont deux fonctions \mathcal{Q} -mesurables non négatives sur Ω dont on veut montrer l'égalité presque-sûre. Comme la mesure $m|_{\mathcal{Q}}$ est σ -finie, il suffit de vérifier qu'elles ont même intégrale sur toute partie \mathcal{Q} -mesurable. Soit $A \in \mathcal{Q}$.

$$\int_A \psi dm = \int_A h \mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}\right) dm = \int_A \frac{f}{h} dhm = \int_A \varphi dm$$

□

Lemme 3.1.5. *On se place dans le cadre du théorème 3.1.3 et on suppose de plus que $m(\Omega) = +\infty$. Soit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$ une fonction intégrable avec $f \geq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$m\{\limsup \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n) < \varepsilon\} > 0$$

Démonstration. On se donne une fonction $h : \Omega \rightarrow]0, +\infty[$ mesurable positive bornée telle que $m(h) = 1$, que l'on ajustera à la fin. Le lemme 3.1.4 permet d'écrire pour $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n) = \mathbb{E}_m(h|\mathcal{Q}_n) \mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}_n\right) \quad (m\text{-pp})$$

D'une part $\mathbb{E}_m(h|\mathcal{Q}_n) \leq \|h\|_\infty$ m -pp.

D'autre part, le théorème de convergence des martingales rétrogrades en mesure finie ([33], th. 3.4.1) affirme que $\mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}_n\right) \rightarrow \mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}_\infty\right)$ m -pp. Cette dernière fonction est non négative et vérifie $\int_\Omega \mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}_\infty\right) dhm = \|f\|_{L^1(m)}$. On en déduit que

$$hm\left\{\mathbb{E}_{hm}\left(\frac{f}{h}|\mathcal{Q}_\infty\right) \leq 2\|f\|_{L^1(m)}\right\} \geq \frac{1}{2}$$

On a finalement l'existence d'une partie de Ω non négligeable sur laquelle

$$\limsup \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n) \leq 2\|h\|_\infty\|f\|_{L^1(m)} \quad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $m(\Omega) = +\infty$, on peut choisir h dès le départ tel que $\|h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1(m)}}$ et l'inégalité (*) donne alors le résultat annoncé. \square

On conclut la section en prouvant le théorème de convergence p.s. des martingales rétrogrades en mesure infinie.

Preuve théorème 3.1.3. On peut supposer $f \geq 0$. On se donne $\varepsilon > 0$ et on note

$$\Omega' := \left\{ \omega \in \Omega, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n)(\omega) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n)(\omega) > \varepsilon \right\}$$

Il s'agit de montrer que $m(\Omega') = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant $m(\Omega') > 0$. Comme Ω' une partie \mathcal{Q}_∞ -mesurable, on a pour tout $n \geq 0$ l'égalité

$$\mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n)|_{\Omega'} = \mathbb{E}_{m_{|\Omega'}}(f|_{\Omega'}|\mathcal{Q}_n|_{\Omega'}). \quad (m_{|\Omega'}\text{-pp})$$

Le théorème de convergence des martingales rétrogrades en mesure finie et la définition de Ω' entraînent alors que $m(\Omega') = +\infty$. En appliquant le lemme 3.1.5 aux restrictions $\Omega', m_{|\Omega'}, (\mathcal{Q}_n|_{\Omega'})_{n \geq 0}, f|_{\Omega'}$, on a donc

$$m_{|\Omega'}\{\limsup \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n) < \varepsilon\} > 0$$

Cela contredit la définition de Ω' ou la non négativité de f , qui réunies entraînent que $\limsup \mathbb{E}_m(f|\mathcal{Q}_n) > \varepsilon$ $m_{|\Omega'}$ -pp. \square

3.1.3 Convergence des aller-retours et preuve de la transience

L'enjeu de cette section est de prouver le théorème 3.1.1 de transience en loi presque-sûre pour une marche en mesure infinie. Nous aurons besoin du théorème 3.1.6 sur la convergence des aller-retours. La preuve de ce dernier suivra de près celle du théorème “alternierende verfahren” de Rota [73] concernant les marches en mesure finie (théorème 3.1.6). Comme il nous a été signalé, une preuve (plus longue, mais aussi plus générale) existe déjà [2].

Etant donné une probabilité μ sur un groupe Γ , on notera $\check{\mu} := i_*\mu$ la probabilité image de μ par l'application d'inversion $i : \Gamma \rightarrow \Gamma, g \mapsto g^{-1}$.

Théorème 3.1.6 (Convergence des aller-retours). *Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable équipé d'une mesure de Radon λ , soit Γ un groupe localement compact à base dénombrable agissant continument sur X en préservant la mesure λ , et soit μ une probabilité sur Γ .*

Il existe une famille de mesures finies $(\nu_x)_{x \in X} \in \mathcal{M}^f(X)^X$ telle que pour λ -presque tout $x \in X$, on a la convergence faible- \star :

$$(\mu^{\star n} \star \check{\mu}^{\star n}) \star \delta_x \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \nu_x$$

Démonstration. La preuve s'inspire du phénomène d'équirépartition des fibres introduit par Benoist-Quint dans [14]. Notons

$$B := \Gamma^{\mathbb{N}^*}, \quad \beta := \mu^{\mathbb{N}^*}, \quad T : B \rightarrow B, (b_i)_{i \geq 1} \mapsto (b_{i+1})_{i \geq 1}$$

le décalage unilatère. On introduit un système dynamique fibré σ -fini (B^X, β^X, T^X) en posant

- $B^X := B \times X$
- $\beta^X := \beta \otimes \lambda \in \mathcal{M}^{Rad}(B \times X)$
- $T^X : B^X \rightarrow B^X, (b, x) \mapsto (Tb, b_1^{-1}x)$.

Notons \mathcal{B} et \mathcal{X} les tribus boréliennes respectives de B et X . La tribu borélienne de B^X s'identifie à la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{X}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit la *sous tribu des n -fibres* de T^X en posant

$$\mathcal{Q}_n := (T^X)^{-n}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{X})$$

C'est une sous-tribu de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{X}$ telle que pour tout $c \in B^X$, la plus petite partie \mathcal{Q}_n -mesurable de B^X contenant c est la n -fibre $(T^X)^{-n}(T^X)^n(c)$. La mesure restreinte $\beta_{|\mathcal{Q}_n}^X$ est σ -finie car β^X est σ -finie par rapport à la tribu $\mathcal{B} \otimes \mathcal{X}$ et préservée par T^X .

Dans un premier temps, nous montrons que si $f \in C_c^0(X)$ est une fonction continue à support compact, alors la suite $(\mu^{\star n} \star \check{\mu}^{\star n} \star \delta_x)(f)_{n \geq 0}$ converge dans \mathbb{R} pour

λ -presque tout x . Pour cela, on exprime $(\mu^{*n} \star \check{\mu}^{*n} \star \delta_x)(f)$ à l'aide d'une espérance conditionnelle et on applique le théorème 3.1.3. Notons

$$\tilde{f} : B^X \rightarrow \mathbb{R}, (b, x) \mapsto f(x), \quad \varphi_n := \mathbb{E}_{\beta^X}(\tilde{f} | \mathcal{Q}_n) \in L^1(B^X, \mathcal{Q}_n)$$

On commence par donner une formule explicite pour la fonction φ_n . Intuitivement, étant donné $c = (b, x) \in B^X$, la valeur $\varphi_n(c)$ représente la valeur moyenne de \tilde{f} sur la plus petite partie \mathcal{Q}_n -mesurable de B^X contenant c . Cette partie est par définition la n -fibre passant par c et s'identifie au produit Γ^n via la bijection

$$h_{n,c} : \Gamma^n \rightarrow (T^X)^{-n}(T^X)^n(c), \quad a = (a_1, \dots, a_n) \rightarrow (aT^n b, a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x)$$

Le lemme qui suit affirme que $\varphi_n(c)$ n'est autre que la valeur moyenne de \tilde{f} sur $(T^X)^{-n}(T^X)^n(c) \equiv \Gamma^n$ par rapport à la mesure $\mu^{\otimes n}$.

Lemme 3.1.7. *Soit $n \geq 0$. Pour β^X -presque tout $(b, x) \in B^X$, on a*

$$\varphi_n(b, x) = \int_{\Gamma^n} f(a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) d\mu^{\otimes n}(a)$$

Démonstration du lemme 3.1.7. Ce résultat est démontré dans [14] (lemma 3.3). Rappelons en la preuve. Quitte à séparer parties positives et négatives de f , on peut supposer $f \geq 0$. Notons alors $\varphi'_n : B^X \rightarrow [0, +\infty]$ l'application définie par le membre de droite ci dessus. On montre qu'elle coïncide presque-partout avec φ_n en prouvant qu'elle aussi vérifie les axiomes de l'espérance conditionnelle définissant φ_n .

Comme la valeur de φ'_n en un point $c \in B^X$ ne dépend que de $(T^X)^n(c)$, cette application est \mathcal{Q}_n -mesurable. Il reste à montrer que pour $A \in \mathcal{Q}_n$, on a l'égalité $\beta^X(1_A \tilde{f}) = \beta^X(1_A \varphi'_n)$. En écrivant A sous la forme $A = (T^X)^{-n}(E)$ où $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{X}$ et en utilisant que la mesure λ est préservée par Γ , on calcule que :

$$\begin{aligned} \beta^X(1_A \varphi'_n) &= \int_{B \times X \times \Gamma^n} 1_A(b, x) f(a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \int_{B \times X \times \Gamma^n} 1_E(T^n b, b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) f(a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \int_{B \times X \times \Gamma^n} 1_E(T^n b, x) f(a_1 \dots a_n x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \int_{B \times X} 1_E(T^n b, x) f(b_1 \dots b_n x) d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \int_{B \times X} 1_E(T^n b, b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) f(x) d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \beta^X(1_A \tilde{f}) \end{aligned}$$

concluant la preuve du lemme 3.1.7. □

Il découle du lemme 3.1.7 que pour λ -presque tout $x \in X$,

$$\int_B \varphi_n(b, x) d\beta(b) = (\mu^{*n} \star \check{\mu}^{*n} \star \delta_x)(f) \quad (**)$$

Par ailleurs, le théorème 3.1.3 de convergence des martingales rétrogrades assure que la suite d'espérances conditionnelles $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge β^X -presque sûrement. En remarquant que $\|\varphi_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, on obtient à l'aide du théorème de convergence dominée et de l'égalité (**), que pour λ -presque tout $x \in X$, la suite $((\mu^{*n} \star \check{\mu}^{*n} \star \delta_x)(f))_{n \geq 0}$ admet une limite dans \mathbb{R} .

On déduit du paragraphe précédent que pour λ -presque tout $x \in X$, la suite de probabilités $(\mu^{*n} \star \check{\mu}^{*n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ a une limite faible- \star (qui est une mesure sur X de masse inférieure ou égale à 1, éventuellement nulle). Il s'agit d'un argument standard reposant sur la séparabilité de l'espace des fonctions continues à support compact sur X muni de la norme infinie $(C_c^0(X), \|\cdot\|_\infty)$ et sur le théorème de représentation des formes linéaires non négatives sur X par des mesures de Radon (théorème de Riesz). La preuve du théorème 3.1.6 est terminée. \square

Nous concluons la section en prouvant la transience en loi d'une marche symétrique "quasi-ergodique" en mesure infinie.

Preuve du théorème 3.1.1. Il suffit de montrer que pour λ -presque tout $x \in X$, on a la convergence $\mu^{*2n} \star \delta_x \rightarrow 0$. D'après le théorème 3.1.6 et la symétrie de μ , la suite $(\mu^{*2n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ converge vers une mesure finie. Il suffit donc de vérifier la convergence en moyenne : pour λ -presque tout $x \in X$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{*k} \star \delta_x \rightarrow 0$$

Conformément à la remarque de la section 3.1.1, nous démontrons cette dernière convergence *sans utiliser l'hypothèse de symétrie sur μ* . Il s'agit de vérifier que pour toute fonction $\varphi \in C_c^0(X)^+$ continue non-négative à support compact, on a la convergence

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\mu^k \varphi \rightarrow 0 \quad (\lambda\text{-pp})$$

où P_μ désigne l'opérateur de Markov associé à la marche (cf. section 3.1.1).

Le théorème de Chacon-Ornstein (cf [61]) implique que la suite de fonctions $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\mu^k \varphi)_{n \geq 1}$ a une limite presque-sûre $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Comme les termes $P_\mu^k \varphi$ sont uniformément bornés dans $L^2(X, \lambda)$, le lemme de Fatou implique que cette fonction limite ψ est de carré λ -intégrable. Par ailleurs, la fonction φ étant bornée,

le théorème de convergence dominée appliqué sur l'espace probabilisé (Γ, μ) entraîne la P_μ -invariance

$$P_\mu \psi = \psi \quad (\lambda\text{-pp})$$

Nous en déduisons maintenant que ψ est Γ -invariante au sens où pour tout $g \in \Gamma$, on a $\psi \circ g = \psi$ λ -pp. Pour cela, on observe que la P_μ -invariance de ψ exprime ψ comme une moyenne de translatés $\psi \circ g$:

$$\int_{\Gamma} \psi \circ g \, d\mu(g) = \psi \quad (\lambda\text{-pp})$$

Or ces termes $\psi \circ g$ sont tous dans $L^2(X, \lambda)$ et de même norme que ψ . La stricte convexité des boules d'un espace de Hilbert entraîne alors que pour μ -presque tout $g \in \Gamma$, on a l'égalité $\psi \circ g = \psi$ λ -pp. Comme le support de μ engendre Γ comme groupe fermé, on en déduit par une méthode déjà exposée dans la section 3.1.1, que pour tout $g \in \Gamma$, on a $\psi \circ g = \psi$ λ -pp, prouvant la Γ -invariance annoncée.

La Γ -invariance de ψ entraîne que pour tout réel $c > 0$, l'ensemble $\{\psi > c\}$ est Γ -invariant, donc de λ -mesure nulle ou infinie par hypothèse. L'intégrabilité de ψ^2 permet de trancher : $\lambda\{\psi > c\} = 0$. On en conclut que $\psi = 0$ λ -pp ce qui termine la preuve. □

3.2 Application : une réciproque au théorème de récurrence d'Eskin-Margulis

3.2.1 Enoncé de la réciproque

Nous allons utiliser le théorème 3.1.1 pour démontrer qu'une marche symétrique sur un espace homogène G/Λ de volume infini est presque-partout transiente en loi (théorème 3.2.1). La difficulté tient au fait que l'opérateur de Markov P_μ associé n'a alors pas de trou spectral, au sens où son action sur $L^2(G/\Lambda)$ a un rayon spectral égal à 1. On peut voir notre résultat comme une réciproque à un théorème d'Eskin et Margulis affirmant "qu'une marche Zariski-dense sur un espace homogène de volume fini est uniformément récurrente en loi".

Théorème (Eskin-Margulis, [38]). *Soit G est un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini, $\Lambda \subseteq G$ un réseau, μ une probabilité sur G à support compact engendrant un sous-groupe Zariski dense dans G .*

Alors la marche aléatoire sur l'espace homogène G/Λ induite par μ est uniformément récurrente en loi.

Précisons les termes employés :

Un sous-groupe de G est *Zariski-dense* s'il est "gros" du point de vue algébrique. Plus formellement, notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie du groupe G , et $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto T_e(g.g^{-1})$ sa représentation adjointe. Un sous-groupe $\Gamma \subseteq G$ est dit Zariski-dense si toute fonction polynomiale sur l'espace vectoriel des endomorphismes de \mathfrak{g} qui s'annule sur $\text{Ad}(\Gamma)$ est nulle sur $\text{Ad}(G)$.

La *réurrence uniforme en loi* signifie que pour un certain compact K assez grand dans G/Λ , quelque soit le point de départ $x \in G/\Lambda$, la μ -marche issue de x aura une très forte probabilité d'être dans K à l'instant n , pourvu que n soit assez grand. En termes plus formels, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq G/\Lambda$ tel que pour tout $x \in G/\Lambda$, il existe un rang $N_x \geq 0$ tel que si $n \geq N_x$ alors $\mu^{*n} \star \delta_x(K) \geq 1 - \varepsilon$.

Nous montrons la réciproque suivante du théorème d'Eskin-Margulis :

Théorème 3.2.1. *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini, $\Lambda \subseteq G$ un sous groupe discret de covolume infini, μ une probabilité sur G dont le support engendre un sous-groupe Zariski-dense dans G .*

Alors pour presque tout $x \in G/\Lambda$, on a la convergence faible- \star :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{\star k} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, si la probabilité μ est symétrique, alors la convergence peut être renforcée :

$$\mu^{\star n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarques. 1) Le théorème 3.2.1 est valable plus généralement si le sous-groupe généré par le support de μ a ses projections non bornées dans les facteurs non compacts de G (voir la preuve).

2) Que la probabilité μ soit symétrique ou non, nous avons pour presque tout $x \in G/\Lambda$ l'existence d'une extraction $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\mu^{\star \sigma(n)} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le phénomène observé par Eskin et Margulis ne peut donc pas se produire en mesure infinie.

3) Le théorème 3.2.1 décrit l'asymptotique des probabilités de position pour presque-tout point de départ $x \in G/\Lambda$. On ne peut pas espérer avoir la transience en loi pour tout point de départ, car il est possible que l'orbite $\Gamma.x$ soit finie.

3.2.2 Preuve de la réciproque

Le théorème 3.2.1 est conséquence du théorème 3.1.1 et de la remarque 3) qui le suit. Pour pouvoir appliquer ce dernier, il faut cependant vérifier que la mesure de Haar sur G/Λ donne une masse nulle ou infinie aux parties invariantes par la marche. On va le démontrer comme conséquence du théorème de Howe-Moore que l'on rappelle d'abord (cf. [82], theorem 2.2.20) :

Théorème (Howe-Moore). *Soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple à centre fini et π une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On suppose que tout facteur G_i de G a son fixateur $\mathcal{H}^{G_i} := \{x \in \mathcal{H}, G_i.x = x\}$ réduit à $\{0\}$.*

Alors pour tout $v, w \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle \pi(g).v, w \rangle \xrightarrow{g \rightarrow \infty} 0$$

Dans l'énoncé précédent, la notation $g \rightarrow \infty$ signifie que g sort de tout compact. Rappelons par ailleurs la définition des *facteurs* de G que nous utiliserons. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Elle se décompose de façon unique en somme directe d'idéaux simples : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$. Les facteurs de G sont les sous-groupes connexes immergés G_1, \dots, G_s de G d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$. Ils sont fermés dans G et commutent entre eux : pour $i \neq j \in \{1, \dots, s\}$ et $g_i \in G_i, g_j \in G_j$ on a $g_i g_j = g_j g_i$. Enfin l'application produit $\pi : G_1 \times \dots \times G_s \rightarrow G, (g_1, \dots, g_s) \mapsto g_1 \dots g_s$ est un morphisme de groupe surjectif de noyau fini. Dans la suite, nous dirons qu'un sous groupe $\Gamma \subseteq G$ a ses projections non bornées dans les facteurs de G si pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, la projection de $\pi^{-1}(\Gamma) \subseteq G_1 \times \dots \times G_s$ dans G_i est non bornée.

On déduit du théorème de Howe-Moore un lemme de rigidité.

Lemme 3.2.2. *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini, $\Gamma \subseteq G$ un sous groupe dont les projections dans les facteurs de G ne sont pas bornées. Soit (\mathcal{H}, ρ) une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert séparable.*

$$\text{Si } \mathcal{H}^G = \{0\} \text{ alors } \mathcal{H}^\Gamma = \{0\}$$

Démonstration du lemme 3.2.2. Notons G_1, \dots, G_s les facteurs de G . Quitte à tirer en arrière la représentation de G par l'application produit $\pi : G_1 \times \dots \times G_s \rightarrow G, (g_1, \dots, g_s) \mapsto g_1 \dots g_s$, on peut supposer que G est un produit direct de groupes de Lie réels connexes quasi-simples³ de centres finis $G = G_1 \times \dots \times G_s$. Supposons $s = 2$. L'hypothèse $\mathcal{H}^G = \{0\}$ implique que $\mathcal{H}^{G_1} \cap \mathcal{H}^{G_2} = \{0\}$. On a donc la décomposition

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{G_1} \oplus \mathcal{H}^{G_2} \oplus \mathcal{H}'$$

où \mathcal{H}' est l'orthogonal de $\mathcal{H}^{G_1} \oplus \mathcal{H}^{G_2}$ dans \mathcal{H} . De plus chaque sous espace est invariant par G . Soit $v \in \mathcal{H}$ un vecteur Γ -invariant, décomposé en $v = v_1 + v_2 + v'$ avec $v_i \in \mathcal{H}^{G_i}, v' \in \mathcal{H}'$. La représentation de G sur \mathcal{H} induit une représentation unitaire de G_2 sur \mathcal{H}^{G_1} et la Γ invariance de v implique que v_1 est invariant par $p_2(\Gamma)$ projection de Γ sur le facteur G_2 . Comme $p_2(\Gamma)$ est non borné dans G_2 , on peut appliquer le théorème de Howe-Moore pour obtenir $v_1 = 0$. De même $v_2 = 0$. Ainsi $v = v' \in \mathcal{H}'$. Les représentations de G_1 et G_2 induites par celle de G sur \mathcal{H}' n'ont pas de point fixe non nul. On peut donc appliquer à nouveau le théorème de Howe-Moore pour en déduire que $v' = 0$. Ainsi $\mathcal{H}^\Gamma = \{0\}$.

Pour le cas général où $s \geq 1$, il suffit de raisonner par récurrence sur s en reprenant la méthode ci dessus et en décomposant \mathcal{H} en $\mathcal{H}^{G_1 \times \dots \times G_{s-1}} \oplus \mathcal{H}^{G_s} \oplus \mathcal{H}'$. \square

3. Un groupe de Lie réel est dit quasi-simple si son algèbre de Lie est simple.

Nous déduisons du lemme précédent que lorsque le groupe G est sans facteur compact, la mesure de Haar sur G/Λ est “quasi-ergodique”.

Lemme 3.2.3. *Plaçons nous dans le cadre du théorème 3.2.1 et supposons que le groupe G n’a pas de facteur compact. Soit Γ le plus petit sous-groupe fermé de G contenant le support de μ et soit λ une mesure de Haar sur G/Λ .*

Alors toute partie Γ -invariante de G/Λ est de λ -mesure nulle ou infinie.

Remarque. En volume infini, l’action de Γ sur l’espace homogène G/Λ n’a pas de raison d’être ergodique pour la mesure de Haar. C’est évident si Λ est réduit au sous-groupe trivial, mais on peut aussi construire un exemple où Λ est Zariski-dense. Pour cela, notons \mathbb{D} le disque de Poincaré, $G = SL_2(\mathbb{R}) \equiv \text{Isom}^+(\mathbb{D}) \equiv T^1\mathbb{D}$, et donnons nous un sous-groupe de Schottky $S_0 \subseteq G$ dont l’ensemble limite \mathcal{L}_0 sur le bord de \mathbb{D} est contenu sous quatre arcs géodésiques disjoints et assez petits. Posons $\Gamma = \Lambda = \overline{S_0}$. Pour un ensemble non négligeable de vecteurs unitaires $x \in T^1\mathbb{D}$, l’ensemble $x\Lambda \cap \partial\mathbb{D} = x\mathcal{L}_0$ ne rencontre par l’ensemble limite \mathcal{L}_0 de Γ . Un tel x étant fixé, cela entraîne que dans l’espace homogène quotient, l’application orbitale $\Lambda \rightarrow \Gamma \backslash G, g \mapsto \Gamma xg$ est propre, donc d’image non dense. On en déduit que l’action à droite de Λ sur $\Gamma \backslash G$ n’est pas ergodique, ou de façon équivalente, que l’action à gauche de Γ sur G/Λ n’est pas ergodique.

Démonstration du lemme 3.2.3. On raisonne par l’absurde en supposant l’existence d’une partie mesurable Γ -invariante $A \subseteq G/\Lambda$ telle que $\lambda(A) \in]0, +\infty[$. On considère la représentation unitaire de G sur $L^2(G/\Lambda)$, donnée par la formule $g.f = f(g^{-1}\cdot)$. La fonction caractéristique $1_A \in L^2(G/\Lambda)$ est un point fixe non nul pour l’action de Γ . Comme G est sans facteur compact, le lemme 3.2.2 et la Zariski-densité de μ impliquent qu’il existe un point fixe non nul $\varphi \in L^2(G/\Lambda)$ pour l’action de G . Une telle fonction est λ -pp constante, impliquant que λ est de masse finie. Absurde. \square

On conclut par la preuve du théorème 3.2.1, réciproque au théorème de récurrence uniforme d’Eskin-Margulis.

Preuve du théorème 3.2.1. Supposons dans un premier temps le groupe G sans facteur compact. Dans le cas où la probabilité μ est symétrique, la convergence (2) découle du lemme 3.2.3 et du théorème 3.1.1. Sans hypothèse de symétrie, on obtient tout de même la convergence en moyenne de Césaro (1) via la remarque 3) suivant le théorème 3.1.1.

Nous expliquons maintenant comment se ramener au cas où G est sans facteur compact. Notons G_1, \dots, G_s les facteurs de G , et π le revêtement fini de G associé, i.e. $\pi : G_1 \times \dots \times G_s \rightarrow G, (g_1, \dots, g_s) \mapsto g_1 \dots g_s$. Il existe une probabilité $\tilde{\mu}$ sur $\prod_{i=1}^s G_i$ dont le support est $\pi^{-1}(\text{supp } \mu)$ et telle que la $\tilde{\mu}$ -marche sur $\prod_{i=1}^s G_i / \pi^{-1}(\Lambda)$ relève la μ -marche sur G/Λ . Il suffit de montrer notre résultat de transience pour cette $\tilde{\mu}$ -marche. Notons G_1, \dots, G_k les facteurs non compacts de G

et $p : \prod_{i=1}^s G_i \rightarrow \prod_{i=1}^k G_i, (g_i)_{i \leq s} \mapsto (g_i)_{i \leq k}$ la projection sur ces derniers (remarquons que $k \geq 1$ sinon G n'admettrait pas de sous-groupe discret de covolume infini). Alors le projeté $p(\pi^{-1}(\Lambda))$ est un sous-groupe discret de covolume infini dans $\prod_{i=1}^k G_i$. Il suffit de prouver notre résultat de transience pour la probabilité image $p_* \tilde{\mu}$ sur $\prod_{i=1}^k G_i$. Celle-ci est bien Zariski-dense. On est ainsi ramené au cas d'un groupe sans facteur compact, ce qui conclut la preuve. \square

3.2.3 Pour aller plus loin

Il vraisemblable que la convergence faible $\mu^{*n} \star \delta_x \rightarrow 0$ de notre théorème 3.2.1 soit valable sans hypothèse de symétrie sur μ . Nous démontrons ce raffinement dans le cas où le sous-groupe discret Λ est contenu dans des réseaux de G de covolumes arbitrairement grands. Cette hypothèse est par exemple satisfaite si G/Λ est un revêtement abélien à base de volume fini, i.e. s'il existe un réseau $\Lambda_0 \subseteq G$ contenant Λ comme sous-groupe distingué et tel que le quotient Λ_0/Λ est abélien.

Théorème 3.2.4. *Soit G, Λ, μ comme dans le théorème 3.2.1, μ n'étant pas nécessairement symétrique.*

(H) : *Supposons que le sous-groupe Λ soit contenu dans des réseaux de G de covolumes arbitrairement grands.*

Alors, pour presque tout $x \in G/\Lambda$, on a la convergence faible- \star :

$$\mu^{*n} \star \delta_x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque. L'hypothèse (H) n'est pas satisfaite en général. Par exemple, posons $G := SL_3(\mathbb{R})$, $\lambda_0 > 0$, $g_0 := \text{diag}(\lambda_0, \lambda_0^{-1}, 1) \in G$ et $\Lambda := \{g_0^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Si le coefficient λ_0 n'est pas algébrique sur \mathbb{Q} , alors Λ est un sous-groupe discret de G qui n'est inclus dans aucun réseau de G (conséquence du théorème de superrigidité de Margulis, cf. [12], section 11.3).

Le point clef derrière le théorème 3.2.4 est qu'une marche Zariski-dense sur un espace homogène de volume fini admet un trou spectral (modulo quelques hypothèses). C'est le contenu de la proposition suivante :

Proposition 3.2.5. *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini et sans facteur compact, Λ_0 un réseau de G , et μ une probabilité sur G dont le support engendre un sous-groupe Zariski-dense dans G . Soit λ_0 la probabilité de Haar sur G/Λ_0 et*

$$L_0^2(G/\Lambda_0) := \left\{ f \in L^2(G/\Lambda_0), \int_{G/\Lambda_0} f d\lambda_0 = 0 \right\}$$

Alors l'opérateur de Markov P_μ agissant sur l'espace de Hilbert $L_0^2(G/\Lambda_0)$ a un rayon spectral strictement inférieur à 1 (i.e. il existe $k \geq 1$ tel que $\|P_\mu^k\|_{L_0^2} < 1$ où $\|\cdot\|_{L_0^2}$ désigne la norme d'opérateur).

Démonstration. Il est montré dans l'article [8] (lemma 3) de M. B. Bekka que la représentation régulière de G sur $L_0^2(G/\Lambda_0)$ ne contient pas faiblement la représentation triviale. De plus, comme G est sans facteur compact, l'hypothèse de Zariski-densité sur μ entraîne que ses projections dans les différents facteurs de G ne sont pas supportées par des groupes moyennables. Le résultat annoncé provient alors du théorème C de l'article [79] de Y. Shalom. \square

On déduit du trou spectral l'équidistribution des probabilités de position à partir de presque-tout point.

Corollaire 3.2.6. *Sous les hypothèses de la proposition 3.2.5, pour presque tout point de départ $x \in G/\Lambda_0$, la suite de probabilités de position $(\mu^{\star n} \star \delta_x)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers la probabilité de Haar sur G/Λ_0 .*

Démonstration. Soit $f \in C_c^0(G/\Lambda_0)$ une fonction continue à support compact sur G/Λ_0 , notons $f_0 = f - \int_{G/\Lambda_0} f d\lambda_0$. D'après la proposition 3.2.5, la suite $(\|P_\mu^n f_0\|_{L^2})_{n \geq 0}$ tend vers 0 à vitesse exponentielle, donc la suite de fonctions $(P_\mu^n f_0)_{n \geq 0}$ est de série λ -pp convergente. On en déduit que $P_\mu^n f_0 \rightarrow 0$ λ -pp, autrement dit, pour λ -presque tout $x \in G/\Lambda_0$,

$$\mu^{\star n} \star \delta_x(f) \longrightarrow \int_{G/\Lambda_0} f d\lambda_0$$

Le corollaire en découle grâce à la séparabilité de l'espace des fonctions continues à support compact sur G/Λ_0 , pour la norme infinie. \square

Nous pouvons maintenant conclure.

Démonstration du théorème 3.2.4. En raisonnant comme dans la preuve du théorème 3.2.1, on peut supposer que le groupe G est sans facteur compact. Nous devons montrer que pour toute partie compacte $K \subseteq G/\Lambda$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour presque tout $x \in G/\Lambda$, on a

$$\limsup \mu^{\star n} \star \delta_x(K) \leq \varepsilon$$

Fixons donc un compact K de G/Λ et une constante $\varepsilon > 0$, et notons $\pi_0 : G/\Lambda \rightarrow G/\Lambda_0$ la projection. D'après l'hypothèse (H), il existe un réseau $\Lambda_0 \subseteq G$, tel qu'en notant λ_0 la probabilité de Haar sur G/Λ_0 , on ait

$$\lambda_0(\pi_0(K)) < \varepsilon$$

Le corollaire 3.2.6 entraîne que pour presque tout $y \in G/\Lambda_0$,

$$\limsup \mu^{\star n} \star \delta_y(\pi_0(K)) \leq \lambda_0(\pi_0(K)) < \varepsilon$$

Or pour $x \in G/\Lambda$, on a $\mu^{\star n} \star \delta_x(K) \leq \mu^{\star n} \star \delta_{p_0(x)}(\pi_0(K))$. On en déduit que pour presque tout $x \in G/\Lambda$, on a $\limsup \mu^{\star n} \star \delta_x(K) \leq \varepsilon$ ce qui conclut. \square

Chapitre 4

Récurrence presque-sûre sur un espace homogène de rang 1

Sommaire

4.1	Espaces symétriques de type non compact et de rang 1	71
4.1.1	Rappels algébriques	71
4.1.2	Transience et fonction de Green	72
4.2	Un lemme de renouvellement	74
4.3	Transience presque-sûre	80
4.4	Dichotomie	81

Introduction

Ce qui suit fait partie d'un travail en cours, dont le but est d'obtenir un critère de récurrence-presque sûre pour une marche aléatoire sur un espace homogène de rang 1. Le point de départ est un théorème de Hopf et Tsuji qui caractérise la récurrence du flot géodésique sur une surface hyperbolique ([1, 81]).

Théorème (Hopf, Tsuji). *Soit $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret, et pour $t \in \mathbb{R}$, notons $a_t = \text{diag}(e^{t/2}, e^{-t/2})$.*

Alors, le flot géodésique $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et le mouvement Brownien sur G/Λ sont tous deux conservatifs et ergodiques, ou bien tous deux totalement dissipatifs.

De plus, la conservativité équivaut à la divergence de la série de Poincaré en l'exposant maximal, i.e. en notant $K = PSO_2(\mathbb{R})$, $z_1, z_2 \in K \backslash G \simeq \mathbb{D}$, et d la distance hyperbolique sur \mathbb{D} , à la divergence

$$\sum_{g \in \Lambda} e^{-d(z_1, z_2 g)} = +\infty$$

Dans l'énoncé précédent, les notions de conservativité, dissipativité et ergodicité sont à comprendre par rapport à une mesure de Haar quotient sur G/Λ . Le théorème de Hopf et Tsuji a ensuite été généralisé par Sullivan [80] pour des variétés hyperboliques de dimension supérieure, puis par Kaimanovich [52] dans le cas des espaces localement symétriques de type non compact et de rang 1. Nous cherchons à poursuivre ces généralisations en comparant le comportement récurrent du flot non pas au mouvement Brownien mais à celui d'une marche Zariski-dense à support compact quelconque sur G/Λ .

Conjecture. *Soit G un groupe de Lie réel connexe simple et de rang réel 1, soit $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret, soit $v_0 \in \mathfrak{g}$ un élément non nul d'un sous-espace de Cartan de \mathfrak{g} , et pour $t \in \mathbb{R}$, notons $a_t = \exp(tv_0)$. Soit μ une mesure de probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-groupe Zariski-dense dans G .*

Alors, le flot géodésique $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et la μ -marche sur G/Λ sont tous deux conservatifs et ergodiques, ou bien tous deux totalement dissipatifs.

Cette conjecture dit en particulier que la récurrence ou transience d'une marche Zariski-dense à support compact sur un espace localement symétrique de type non compact et de rang 1 ne dépend pas de la mesure de probabilité μ qui l'induit, mais seulement de la géométrie de l'espace. Nous la démontrerons entièrement dans le cas des revêtements abéliens de surfaces hyperboliques de volume fini à la fin du chapitre 5 (corollaire 5.3.3). Présentement, la conjecture est abordée dans toute sa généralité et nous prouvons que la transience du flot implique celle des marches. L'hypothèse que μ soit à support compact s'avèrera superflue et nous supposerons seulement que μ a un moment d'ordre 1 fini, i.e que

$$\int_G \log \|\mathrm{Ad}(g)\| d\mu(g) < +\infty$$

où $\mathrm{Ad} : G \rightarrow SL(\mathfrak{g})$ désigne la représentation adjointe, et $\|\cdot\|$ une norme d'espace vectoriel sur $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

Théorème 4.3.1. *Soit $(G, \Lambda, v_0, (a_t))$ comme dans l'énoncé de la conjecture, soit μ une mesure de probabilité sur G supposée Zariski-dense à moment d'ordre 1 fini.*

Si le flot géodésique $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur G/Λ est totalement dissipatif, alors c'est aussi le cas de la μ -marche sur G/Λ .

Le théorème 4.3.1 repose sur la *décomposition de Cartan* qui établit un lien fort en l'action de G sur X et celle du flot. Cette décomposition affirme qu'étant donné un sous-groupe compact maximal K de G bien positionné par rapport à v_0 , tout élément de $g \in G$ s'écrit sous la forme

$$g = k_g a_{t_g} l_g$$

où $k_g, l_g \in K$ et $t_g \geq 0$. De plus, le nombre t_g est unique, et appelé la projection de Cartan de g . Au chapitre 5, nous utiliserons aussi la décomposition de Cartan pour transposer un théorème central limite déjà connu pour le flot géodésique au cadre des marches aléatoires (proposition 5.2.4).

La preuve du théorème 4.3.1 se résume ainsi : la transience du flot géodésique implique que sa fonction de Green est finie, et même localement intégrable (lemme 4.1.1). En l'intégrant sur une partie K -invariante, nous faisons disparaître les dépendances en k_g, l_g , et un lemme de renouvellement pour la projection de Cartan (lemme 4.2.1) permet d'en déduire que la fonction de Green de la μ -marche est également localement intégrable, impliquant la transience de la marche.

On obtient comme corollaire de notre théorème 4.3.1 une dichotomie sur le comportement récurrent des marches en rang 1, analogue à celle citée plus haut pour le flot géodésique.

Corollaire 4.4.1. *Soit G un groupe de Lie connexe simple de rang réel 1, soit Λ un sous groupe discret de G , et soit μ une mesure de probabilité sur G Zariski-dense à moment d'ordre 1 fini.*

Alors la μ -marche sur G/Λ est soit totalement dissipative, soit conservative et ergodique.

Remarquons que ce dernier point n'a rien d'évident dans la mesure où une μ -marche sur X n'est pas nécessairement ergodique (un exemple, dans lequel $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et Λ et $\Gamma_\mu = \langle \text{supp } \mu \rangle$ sont des groupes de Schottky, a été donné en section 3.2). Il n'y a donc à priori pas d'obstruction à l'existence simultanée de parties totalement dissipative et conservative pour la marche sur G/Λ .

4.1 Espaces symétriques de type non compact et de rang 1

Cette section commence par situer le cadre algébrique élaboré lors de l'introduction dans le contexte des espaces symétriques. On y démontre aussi que si le flot géodésique sur un espace symétrique de type non compact de rang 1 est dissipatif, alors sa fonction de Green est non seulement finie, mais localement intégrable (lemme 4.1.1).

4.1.1 Rappels algébriques

Présentons tout d'abord les espaces symétriques et leur flot géodésique d'un point de vue algébrique. Pour plus de détails, on pourra se référer au cours de F. Paulin ([68], chapitre 4).

Un espace (globalement) symétrique de type non compact et de rang 1, noté \widetilde{M} , se réalise de la façon suivante. On se donne un groupe de Lie réel G connexe

simple de rang réel 1 et un sous-groupe compact maximal $K \subseteq G$. Soit $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie respectives et $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ l'orthogonal de \mathfrak{k} pour la forme de Killing $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ et la forme de Killing est définie positive sur \mathfrak{s} . Nous notons \widetilde{M} la variété quotient $\widetilde{M} = K \backslash G$ munie de l'unique métrique riemannienne G -invariante à droite qui coïncide avec B sur l'espace tangent $T_{K \backslash K} K \backslash G \simeq \mathfrak{s}$. La topologie de \widetilde{M} est simplement connexe d'après la décomposition d'Iwasawa. Nous noterons M un espace (localement) symétrique quotient, i.e. de la forme $M = K \backslash G / \Lambda$ où $\Lambda \subseteq G$ est un sous-groupe discret sans torsion, et muni de la métrique quotient.

Fixons un vecteur non nul $v_0 \in \mathfrak{s} \setminus \{0\}$ et pour $t \in \mathbb{R}$, posons $a_t = \exp(tv_0)$. Le sous groupe à un paramètre $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ agit sur G/Λ , définissant un flot que nous appellerons *flot géodésique*. Cette terminologie est justifiée dans la mesure où, pour $g \in G$, le chemin $\mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto Ka_t g \Lambda$ décrit à vitesse constante un arc géodésique de M passant par $Kg\Lambda$, et tous les arcs géodésiques de M admettent une telle paramétrisation.

Exemple. Le disque de Poincaré $\widetilde{M} = \mathbb{D}$ est réalisé en posant $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et $K = PSO_2(\mathbb{R})$. Alors $\mathfrak{g} = \{X \in M_2(\mathbb{R}), \text{tr}(X) = 0\}$ et $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}, X \text{ est antisymétrique}\}$, $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g}, X \text{ est symétrique}\}$. En choisissant $v_0 = \text{diag}(1/2, -1/2)$, nous obtenons $a_t = \text{diag}(e^{t/2}, e^{-t/2})$ et retrouvons la notion usuelle de flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique, représenté sous la forme G/Λ où $\Lambda \subseteq G$ est un sous-groupe discret sans torsion.

4.1.2 Transience et fonction de Green

Gardons les notations précédentes. Nous allons maintenant montrer que la transience du flot géodésique sur $X = G/\Lambda$ équivaut non seulement à la finitude de sa fonction de Green, mais plus précisément à son intégrabilité locale.

Soit $F \subseteq X$. La fonction de Green du flot $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ relative à F est définie par :

$$G(\cdot, F) : X \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} 1_F(a_t x) dt$$

Avec des mots, $G(x, F)$ estime le temps de passage dans F du rayon géodésique issu de x . Pour la suite, λ désignera une mesure de Haar sur G , ainsi que la mesure quotient induite sur G/Λ .

Lemme 4.1.1. *Le flot géodésique sur X est totalement dissipatif si et seulement si pour toutes parties compactes $E, F \subseteq X$,*

$$\int_E G(x, F) d\lambda(x) < \infty$$

La preuve repose sur une interprétation de la transience du flot en termes de série de Poincaré. Rappelons de quoi il s'agit. Soit d la distance riemannienne sur $\widetilde{M} = K \backslash G$. Etant donné des points $z_1, z_2 \in \widetilde{M}$, et un réel positif $s > 0$, la série de Poincaré de Λ en (z_1, z_2, s) est définie par :

$$\mathfrak{p}(z_1, z_2, s) := \sum_{g \in \Lambda} e^{-sd(z_1, z_2 g)}$$

Soit $\delta_G > 0$ le taux de croissance exponentielle du volume des boules de \widetilde{M} , défini par

$$\delta_G := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log(V_R)$$

où $V_R > 0$ désigne le volume riemannien d'une boule de rayon R sur \widetilde{M} .

Il est démontré dans [52] (Theorem 3.3) que le flot géodésique sur X est totalement dissipatif si et seulement si la série de Poincaré $\mathfrak{p}(z_1, z_2, s)$ converge en $s = \delta_G$.

Nous en déduisons le lemme 4.1.1.

Démonstration du lemme 4.1.1. Il s'agit de montrer le sens direct. On suppose donc le flot géodésique transient, on se donne deux parties compactes $E, F \subseteq X$, et on cherche à borner l'intégrale $\int_E G(x, F) d\lambda(x)$. Nous commençons par relever la situation dans G . On note pour cela $\pi : G \rightarrow X = G/\Lambda$ la projection, $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ un relevé de x_0 et $\tilde{E}, \tilde{F} \subseteq G$ des parties compacte telle que $\pi(\tilde{E}) = E$. Il sera commode de supposer que les parties E et \tilde{E} sont K -invariantes. Notant λ_K la probabilité de Haar sur K , nous avons

$$\begin{aligned} \int_E G(x, F) d\lambda(x) &\leq \int_{\tilde{E}} \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\tilde{F}\Lambda}(a_t \tilde{x}) dt d\lambda(\tilde{x}) \\ &\leq \sum_{g \in \Lambda} \int_{\tilde{E}} \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\tilde{F}g}(a_t \tilde{x}) dt d\lambda(\tilde{x}) \\ &= \sum_{g \in \Lambda} \int_{\tilde{E}} \int_K \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\tilde{F}g}(a_t k \tilde{x}) dt d\lambda_K(k) d\lambda(\tilde{x}) \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la K -invariance de \tilde{E} .

Notons $p : G \rightarrow \widetilde{M} = K \backslash G$ la projection quotient. D'après le théorème 5.8 du livre d'Helgason [49], il existe un constante $\eta \geq 1$, dépendant seulement de \tilde{F} (plus précisément du volume riemannien et du diamètre de $p(\tilde{F})$), telle que pour tout $\tilde{x} \in G, g \in \Lambda$,

$$\int_K \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\tilde{F}g}(a_t k \tilde{x}) dt d\lambda_K(k) \leq \eta e^{-\delta_G d(p(\tilde{x}), p(\tilde{F})g)}$$

On a donc en intégrant sur \tilde{E} ,

$$\int_{\tilde{E}} \int_K \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\tilde{F}g}(a_t k \tilde{x}) dt d\lambda_K(k) d\lambda(\tilde{x}) \leq \lambda(\tilde{E}) \eta e^{-\delta_G d(p(\tilde{E}), p(\tilde{F})g)}$$

Puis en sommant sur $g \in \Lambda$,

$$\sum_{g \in \Lambda} \int_{\tilde{E}} \int_K \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\tilde{F}g}(a_t k \tilde{x}) dt d\lambda_K(k) d\lambda(\tilde{x}) \leq \lambda(\tilde{E}) \eta \sum_{g \in \Lambda} e^{-\delta_G d(p(\tilde{E}), p(\tilde{F})g)}$$

La transience du flot géodésique sur X entraîne que la série de Poincaré de Λ converge en $s = \delta_G$, ([52] Theorem 3.3). Il en résulte finalement que

$$\int_E G(x, F) d\lambda(x) < +\infty$$

□

4.2 Un lemme de renouvellement

Cette section considère une marche aléatoire sur un groupe de Lie réel G connexe simple de rang 1 et établit un lemme de renouvellement pour la projection de Cartan des trajectoires de la marche (lemme 4.2.1). Ce résultat sera utile pour comparer les fonctions de Green du flot géodésique et d'une marche aléatoire sur un quotient G/Λ .

Un théorème de renouvellement est un résultat estimant le nombre de passages moyens d'une marche transiente dans une partie bornée lorsque cette partie est amenée à dégénérer. On a par exemple dans le cas d'une marche sur \mathbb{R} :

Théorème (Renouvellement d'une marche sur \mathbb{R} [54]). *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant un moment d'ordre 1 fini, d'espérance strictement positive $\mathbb{E}(\mu) > 0$, et dont le support n'est pas contenu dans un translaté d'un réseau de \mathbb{R} . Notons $(S_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov sur \mathbb{R} issue de 0 de loi d'incrément μ , et I un intervalle borné de \mathbb{R} .*

Alors l'espérance du nombre de passage de (S_n) dans un translaté $I + t$ converge quand t tend vers $+\infty$:

$$\mathbb{E}(\#\{n \geq 0, S_n \in I + t\}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{leb}(I)}{\mathbb{E}(\mu)}$$

En 2016, Guivarc'h et Lepage démontrent un analogue de ce théorème pour le cocycle d'Iwasawa d'une marche sur $SL_d(\mathbb{R})$ (voir [45]). Leur résultat est ensuite raffiné par Li [58] qui estime que la vitesse de convergence est exponentielle en t . Nous nous intéressons plutôt à la projection de Cartan de la marche. Par soucis de simplicité et de cohérence thématique, nous nous placerons en rang 1.

Comme dans la section 4.1, on se donne un groupe de Lie réel G connexe simple de rang 1, un sous-groupe compact maximal K de G , un vecteur non nul $v_0 \in \mathfrak{g}$ orthogonal à l'algèbre de Lie de K pour la forme de Killing, et pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $a_t = \exp(tv_0) \in G$. La décomposition de Cartan affirme que pour tout élément $g \in G$, il existe un unique réel non négatif $t_g \geq 0$ tel que

$$g \in K a_{t_g} K$$

Munissons G d'une mesure de probabilité μ supposée Zariski-dense et à moment d'ordre 1 fini. Cette dernière hypothèse signifie que

$$\int_G \log \|\text{Ad}(g)\| d\mu(g) < \infty$$

où $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ désigne la représentation adjointe, et $\|\cdot\|$ une norme d'espace vectoriel sur $\text{End}(\mathfrak{g})$ (voir [16] lemma 9.6 pour des définitions équivalentes).

Notons aussi $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\mathbb{N}^*}$ et pour $b \in B$, $n \geq 0$ posons

$$t_n(b) = t_{b_n \dots b_1}$$

la projection de Cartan du n -ième pas de la trajectoire sur G définie par b . La loi des grands nombres affirme que la projection de Cartan d'une μ -trajectoire sur G a une dérive non nulle : il existe une constante $\lambda_\mu > 0$, telle que pour β -presque tout $b \in B$, on a l'équivalence asymptotique :

$$t_n(b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\lambda_\mu$$

Le lemme de renouvellement cité plus haut pousse donc à conjecturer que si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle borné, alors

$$\mathbb{E}_\beta(\#\{n \geq 0, t_n \in I + t\}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{\text{leb}(I)}{\lambda_\mu}$$

Nous nous contenterons d'un résultat plus faible et adapté à nos besoins. Il sera utilisé dans la prochaine section pour comparer les fonctions de Green du flot géodésique et d'une marche aléatoire sur un espace homogène de rang 1.

Lemme 4.2.1 (Renouvellement). *Soit G, K, v_0, μ comme ci-dessus et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné. Alors,*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_\beta(\#\{n \geq 0, t_n \in I + t\}) < \infty$$

La preuve du lemme 4.2.1 repose sur l'idée que la projection de Cartan d'une marche sur G a peu de chance de revenir dans un intervalle donné après y être passée une fois. On commence par un lemme exprimant que le cocycle d'Iwasawa d'une marche sur \mathbb{R}^d a une croissance aussi uniforme que possible en le point de départ.

Lemme 4.2.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $SL_d(\mathbb{R})$ dont le support engendre un semi-groupe fortement irréductible et proximal et admettant un moment d'ordre 1 fini, $B = SL_d(\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\mathbb{N}^*}$. Alors pour toutes constantes $C, \varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \geq 0$ tel que pour tout vecteur unitaire $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, on ait*

$$\beta(b \in B, \forall n \geq n_0, \|b_n \dots b_1 v\| \geq C) \geq 1 - \varepsilon$$

Preuve du lemme 4.2.2. Dans le cas où μ est à moment exponentiel, le lemme découle directement du principe des grandes déviations ([16], theorem 12.11 appliqué à l'action μ -contractante de G sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et au cocycle d'Iwasawa $\sigma : G \times P(\mathbb{R}^d), (g, \mathbb{R}v) \mapsto \log \frac{\|gv\|}{\|v\|}$). Nous le démontrons plus généralement sous l'hypothèse d'un moment d'ordre 1 qui est plus naturelle dans le contexte d'un lemme de renouvellement.

Notations de distance sur $P(\mathbb{R}^d)$

Dans toute la preuve nous munirons $P(\mathbb{R}^d)$ de la distance

$$d(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) = \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \|w\|}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\Lambda^2 \mathbb{R}^d$ induite par celle de \mathbb{R}^d . Etant donné un hyperplan $W \subseteq \mathbb{R}^d$, on note $d(\mathbb{R}v, W) = \inf_{\mathbb{R}w \subseteq W} d(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w)$. Cela se réécrit $d(\mathbb{R}v, W) = \frac{|\langle v, w^\perp \rangle|}{\|v\| \|w^\perp\|}$ pour tout choix de vecteur $w^\perp \in W^\perp \setminus \{0\}$, si bien que $d(\mathbb{R}v, W) = d(W^\perp, (\mathbb{R}v)^\perp)$. Enfin, la distance de Hausdorff entre deux hyperplans $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ sera définie par $d_H(W_1, W_2) = \sup_{w_1 \in W_1 \setminus \{0\}} d(\mathbb{R}w_1, W_2) + \sup_{w_2 \in W_2 \setminus \{0\}} d(\mathbb{R}w_2, W_1)$

Passons à la preuve. Fixons $C, \varepsilon > 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $n_0 \geq 0$, il existe un vecteur unitaire $v_{n_0} \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que :

$$\beta(b \in B, \exists n \geq n_0, \|b_n \dots b_1 v_{n_0}\| < C) \geq \varepsilon$$

Soit $v_\infty \in \mathbb{S}^{d-1}$ un point d'accumulation de la suite $(v_{n_0})_{n_0 \geq 0}$, soit ${}^t\mu$ l'image de μ par la transposition $g \mapsto {}^t g$, et ${}^t\nu$ l'unique probabilité ${}^t\mu$ -stationnaire sur $P(\mathbb{R}^d)$ (voir [16], proposition 3.7). Nous allons montrer que ${}^t\nu$ donne une masse positive à l'hyperplan $(\mathbb{R}v_\infty)^\perp$ ce qui amènera une contradiction avec le lemme 3.6.b) de [16]. Fixons pour cela une (petite) constante $\delta > 0$, et on minorons la ${}^t\nu$ -masse du δ -voisinage de $(\mathbb{R}v_\infty)^\perp$.

- On choisit n_0 tel que $d_H((\mathbb{R}v_\infty)^\perp, (\mathbb{R}v_{n_0})^\perp) \leq \delta/3$

On fixe pour tout élément $g \in SL_d(\mathbb{R})$ une décomposition de Cartan : $g = k_g a_g l_g$ où $k_g, l_g \in SO_d(\mathbb{R})$ et $a_g = \text{diag}(a_{g,1}, \dots, a_{g,d})$ est diagonale à coefficients positifs classés par ordre décroissants : $a_{g,1} \geq \dots \geq a_{g,d} > 0$.

- D'après le lemme 13.2 de [16], il existe une constante $R > 0$ telle que si $g \in SL_d(\mathbb{R})$, $\|g\| \geq R$, $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, et $\|gv\| < C$ alors

$$d(\mathbb{R}v, l_g^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1})) \leq \delta/3$$

Par ailleurs, la proximalité de ${}^t\nu$ (voir [16], proposition 3.7) entraîne que pour β -presque tout $b \in B$, on a $\|b_n \dots b_1\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On peut donc choisir n_0 assez grand pour que

$$\beta(b \in B, \forall n \geq n_0, \|b_n \dots b_1\| \geq R) \geq 1 - \varepsilon/4$$

- La relation ${}^t b_1 \dots {}^t b_n = l_{b_n \dots b_1}^{-1} a_{b_n \dots b_1} k_{b_n \dots b_1}^{-1}$ et la proximalité de ${}^t\nu$ impliquent que pour β -presque tout $b \in B$,

$$l_{b_n \dots b_1}^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}^{d-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi_{t_b}$$

où ξ_{t_b} désigne la droite limite associée à la suite d'instruction ${}^t b$, et est définie par la relation $({}^t\nu)_{t_b} = \delta_{\xi_{t_b}}$.

Choisissons n_0 assez grand pour que

$$\beta(b \in B, \forall n \geq n_0, d(l_{b_n \dots b_1}^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}^{d-1}), \xi_{t_b}) \leq \delta/3) \geq 1 - \varepsilon/4$$

Conclusion. Les trois conditions imposées sur n_0 permettent de conclure. On a tout d'abord l'existence d'une partie mesurable $B' \subseteq B$ de β -mesure au moins $\varepsilon/2$ telle que pour tout $b \in B'$,

1. $\exists n_1 \geq n_0, \|b_{n_1} \dots b_1 v_{n_0}\| < C$
2. $\forall n \geq n_0, \|b_n \dots b_1\| \geq R$
3. $\forall n \geq n_0, d(l_{b_n \dots b_1}^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}^{d-1}), \xi_{t_b}) \leq \delta/3$

Si $b \in B'$, les points 1 et 2 entraînent que

$$d(\mathbb{R}v_{n_0}, l_{b_{n_1} \dots b_1}^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1})) \leq \delta/3$$

ou de manière équivalente en passant aux orthogonaux

$$d(l_{b_n \dots b_1}^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}^{d-1}), (\mathbb{R}v_{n_0})^\perp) \leq \delta/3$$

Par le point 3 et la première condition sur n_0 , il vient que

$$d(\xi_{t_b}, (\mathbb{R}v_\infty)^\perp) \leq \delta$$

On en déduit que les δ -voisinage de $(\mathbb{R}v_\infty)^\perp$ a une ${}^t\nu$ -masse minorée par $\varepsilon/2$. En faisant tendre δ vers 0, on obtient que ${}^t\nu$ charge $(\mathbb{R}v_\infty)^\perp$ ce qui contredit le lemme 3.6 de [16].

□

Revenons au contexte du début de section. Le résultat suivant affirme que la projection de Cartan d'une trajectoire sur G a beaucoup de chance de croître sans retour.

Lemme 4.2.3. *Soit (G, K, v_0, μ) comme dans le lemme 4.2.1. Soit $r, \varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \geq 0$ tel que pour tout élément $g \in G$,*

$$\beta(b \in B, \forall n \geq n_0, t_{b_n \dots b_1 g} \geq r + t_g) \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration. Soit (V, ρ) une représentation algébrique proximale (fortement-)irréductible de G , munie d'un produit scalaire $\rho(K)$ -invariant et tel que $T_e \rho(v_0) \in \text{End}(V)$ est autoadjoint (une telle représentation existe bien d'après [16], lemma 5.33 a). Alors, pour $g \in G$, nous avons

$$\log \|\rho(g)\| = \log \|\rho(a_{t_g})\| = \log \|\exp(t_g T_e \rho(v_0))\| = t_g \log \|\rho(a_0)\|$$

Le facteur $\log \|\rho(a_0)\|$ est strictement positif. En effet, il est non négatif car $\rho(a_0)$ est symétrique et de déterminant 1, et non nul sinon l'image $\rho(G)$ serait bornée (d'après la décomposition de Cartan). Nous sommes donc ramenés à montrer :

Il existe un rang $n_0 \geq 0$ tel que pour tout élément $f \in SL(V)$,

$$\beta(b \in B, \forall n \geq n_0, \|\rho(b_n \dots b_1) f\| \geq e^r \|f\|) \geq 1 - \varepsilon$$

En approximant $\|f\|$ par $\|f(v)\|$ pour un vecteur unitaire v bien choisi, il suffit de montrer :

Il existe un rang $n_0 \geq 0$ tel que pour tout vecteur unitaire $v \in V$,

$$\beta(b \in B, \forall n \geq n_0, \|\rho(b_n \dots b_1) v\| \geq e^r) \geq 1 - \varepsilon$$

Or le semi-groupe $\rho(\Gamma_\mu)$ est Zariski-dense dans $\rho(G)$, donc également fortement irréductible et proximal (voir [16] lemma 5.23 pour ce dernier point). De plus la probabilité image $\rho_* \mu$ admet un moment d'ordre 1 fini ([16], lemma 9.6 b)). On peut donc appliquer le lemme 4.2.2, ce qui termine la démonstration. □

Concluons la section en démontrant le lemme de renouvellement 4.2.1.

Preuve du lemme 4.2.1. Notons $N_I : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, b \mapsto \#\{n \geq 0, t_n(b) \in I\}$ la fonction comptant le nombre de passages de la projection de Cartan d'une trajectoire sur G dans l'intervalle I . Nous allons majorer l'espérance de N_I par une constante dépendant uniquement des données initiales (G, K, v_0, μ) et de la longueur de I . On

se donne des constantes $r > \text{leb}(I)$, $\varepsilon \in]0, 1[$, ainsi qu'un rang $n_0 \geq 0$ comme dans le lemme 4.2.3. On commence par montrer que pour tout $k \geq 0$,

$$\beta(b \in B, N_I(b) \geq kn_0 + 1) \leq \varepsilon^k$$

On introduit une suite de temps d'arrêt $(\tau_i : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\})_{i \geq 1}$ indiquant le temps de premier passage de la suite des projections de Cartan $(t_n(b))_{n \geq 0}$ dans I puis ses temps de retour après au moins n_0 pas :

$$\tau_1 = \inf\{n \geq 0, t_n \in I\}, \quad \tau_{i+1} = \inf\{n \geq \tau_i + n_0, t_n \in I\}$$

On observe que

$$\begin{aligned} \beta(b \in B, N_I(b) \geq kn_0 + 1) &\leq \beta(b \in B, \tau_{k+1}(b) < \infty) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}^k} \beta(b \in B, (\tau_i(b))_{i \leq k} = j, \tau_{k+1}(b) < \infty) \end{aligned}$$

L'inégalité $r > \text{leb}(I)$ entraîne pour $j \in \mathbb{N}^k$ fixé l'inclusion

$$\{b \in B, (\tau_i(b))_{i \leq k} = j, \tau_{k+1}(b) < \infty\} \subseteq \{b \in B, (\tau_i(b))_{i \leq k} = j \text{ et } \exists n \geq j_k + n_0, t_n(b) < r + t_{j_k}(b)\}$$

On en déduit, via la propriété de Markov et le lemme 4.2.3, que

$$\beta(b \in B, (\tau_i(b))_{i \leq k} = j, \tau_{k+1}(b) < \infty) \leq \beta(b \in B, (\tau_i(b))_{i \leq k} = j) \varepsilon$$

En sommant sur les différents $j \in \mathbb{N}^k$, puis en itérant, il vient

$$\beta(b \in B, \tau_{k+1}(b) < \infty) \leq \beta(b \in B, \tau_k(b) < \infty) \varepsilon \leq \dots \leq \varepsilon^k$$

puis comme annoncé,

$$\beta(b \in B, N_I(b) \geq kn_0 + 1) \leq \varepsilon^k$$

Majorons maintenant l'espérance du nombre de passages N_I .

$$\int_B N_I d\beta = \sum_{n \geq 0} \beta(N_I \geq n) \leq \sum_{k \geq 0} n_0 \beta(N_I \geq kn_0 + 1) \leq n_0 \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

et la majoration ne dépend de I qu'à travers n_0 , qui ne prend en compte que les données initiales (G, K, v_0, μ) et les constantes $r > \text{leb}(I)$ et $\varepsilon \in]0, 1[$ fixées arbitrairement.

□

4.3 Transience presque-sûre

Nous allons maintenant mettre en oeuvre les lemmes 4.1.1 et 4.2.1 démontrés plus haut afin de montrer que si le flot géodésique d'un espace localement symétrique de type non compact de rang 1 est totalement dissipatif, alors c'est aussi le cas de toute marche Zariski-dense à moment d'ordre 1.

Théorème 4.3.1. *Soit G un groupe de Lie réel connexe simple et de rang réel 1, soit $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret, soit $v_0 \in \mathfrak{g}$ un élément non nul d'un sous-espace de Cartan de \mathfrak{g} , et pour $t \in \mathbb{R}$, notons $a_t = \exp(tv_0)$. Soit μ une mesure de probabilité Zariski-dense sur G à moment d'ordre 1 fini.*

Si le flot géodésique $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur G/Λ est totalement dissipatif alors c'est aussi le cas de la μ -marche sur G/Λ .

Soit $X = G/\Lambda$ et $F \subseteq X$. On introduit la fonction de Green relative à F de la μ -marche sur X en posant :

$$G_\mu(\cdot, F) : X \rightarrow [0, +\infty], x \mapsto \int_B \sum_{n \geq 0} 1_F(b_n \dots b_1 x) d\beta(b)$$

Avec des mots, $G_\mu(x, F)$ estime le nombre de passages moyen dans F d'une μ -trajectoire issue de x . La preuve théorème 4.3.1 reposera sur une comparaison des fonctions de Green du flot et de la marche.

Comme précédemment, on note λ une mesure de Haar quotient sur X , on fixe un sous-groupe compact maximal K de G dont l'algèbre de Lie est orthogonale à v_0 , on pose aussi $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, et pour $b \in B$, $n \geq 0$, on fixe une décomposition de Cartan du produit $b_n \dots b_1$:

$$b_n \dots b_1 = k_n(b) a_{t_n(b)} l_n(b)$$

où $k_n(b), l_n(b) \in K$, $t_n(b) \geq 0$.

Preuve du théorème 4.3.1. Soit $E, F \subseteq X$ des parties compactes K -invariantes. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_E G_\mu(x, F) d\lambda(x) &= \int_E \int_B \sum_{n \geq 0} 1_F(b_n \dots b_1 x) d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \int_E \int_B \sum_{n \geq 0} 1_F(a_{t_n(b)} x) d\beta(b) d\lambda(x) \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de la K -invariance de E , F et λ .

Soit $F' \subseteq X$ un voisinage compact de F tel que l'action du flot $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ restreint à la fenêtre $t \in [-1, 1]$ envoie F dans F' , i.e. tel que $\bigcup_{t \in [-1, 1]} a_t F \subseteq F'$. Alors,

$$1_F(a_{t_n(b)} kx) \leq \int_{\mathbb{R}_+} 1_{F'}(a_t kx) 1_{[t_n(b)-1, t_n(b)+1]}(t) dt$$

En injectant dans les égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \int_E G_\mu(x, F) d\lambda(x) &\leq \int_E \int_B \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n \geq 0} 1_{F'}(a_t kx) 1_{[t_n(b)-1, t_n(b)+1]}(t) dt d\beta(b) d\lambda(x) \\ &= \int_E \int_{\mathbb{R}_+} 1_{F'}(a_t kx) \left[\int_B \sum_{n \geq 0} 1_{[t_n(b)-1, t_n(b)+1]}(t) d\beta(b) \right] dt d\lambda(x) \end{aligned}$$

Le terme entre crochets compte le nombre de passages moyen de la projection de Cartan d'une μ -trajectoire sur G dans l'intervalle $[t-1, t+1]$. Le lemme 4.2.1 assure que ce terme est majoré par une constante $\alpha \in]0, +\infty[$ ne dépendant pas de t mais seulement des données initiales (G, K, v_0, μ) . On a finalement

$$\begin{aligned} \int_E G_\mu(x, F) d\lambda(x) &\leq \alpha \int_E \int_{\mathbb{R}_+} 1_{F'}(a_t kx) dt d\lambda(x) \\ &= \alpha \int_E G(x, F') d\lambda(x) \end{aligned}$$

L'hypothèse de transience du flot géodésique assure via le lemme 4.1.1 que le membre de droite est fini. La fonction de Green de la marche sur X est donc localement intégrable, et à fortiori, la marche est transiente. \square

4.4 Dichotomie

Nous déduisons du théorème 4.3.1 une dichotomie “transience / récurrence et ergodicité” pour les marches en rang 1.

Corollaire 4.4.1. *Soit G un groupe de Lie réel connexe simple et de rang réel 1, soit $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret, et soit μ une mesure de probabilité Zariski-dense sur G à moment d'ordre 1 fini.*

Alors la μ -marche sur G/Λ est soit totalement dissipative, soit conservative et ergodique.

Notons $K, v_0, (a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ comme dans les sections précédentes et rappelons qu'un élément $g_0 \in G$ est dit *loxodromique* si on peut l'écrire à conjugaison et inversion près sous la forme $g_0 = ma_c$ où $m \in K$, $c > 0$, et $ma_c = a_c m$ (voir aussi [16] section 5.10). La preuve de la dichotomie s'appuie sur le lemme suivant. On note $X = G/\Lambda$.

Lemme 4.4.2. *Si le flot géodésique $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur X est conservatif ergodique, alors c'est aussi le cas de l'action de tout élément loxodromique de G .*

Démonstration. Soit $g_0 \in G$ un élément loxodromique. Pour montrer le lemme, on peut supposer g_0 de la forme $g_0 = ma_c$ où $m \in K$, $c > 0$, et $ma_c = a_cm$. La conservativité du flot géodésique sur X entraîne donc celle de g_0 . La preuve de l'ergodicité de g_0 est alors standard et suit les lignes de celle donnée pour le flot dans [1] (Theorem 7.4.3). Expliquons sommairement. On se donne $f, p \in L^1(X, \Lambda)$ avec $p > 0$, $\lambda(p) = 1$. Le théorème ergodique de Hopf ([1], 2.2.5) et la conservativité de g_0 entraînent la convergence presque-sûre :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ g_0^k}{\sum_{k=0}^{n-1} p \circ g_0^k} \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\mathbb{E}_{p\lambda}\left(\frac{f}{p} \middle| \mathcal{I}\right)}_{\Phi_{f,p}}$$

où $\mathbb{E}_{p\lambda}\left(\frac{f}{p} \middle| \mathcal{I}\right)$ désigne l'espérance conditionnelle de f/p pour la probabilité $p\lambda$ et par rapport à la tribu \mathcal{I} des parties λ -pp g_0 -invariantes de X . On doit montrer que cette tribu est λ -triviale, ce qui revient à dire que pour tous choix de f, p , la limite $\Phi_{f,p}$ est λ -pp constante. Nous munissons G d'une métrique riemannienne G -invariante à droite, K -invariante à gauche et X de la métrique quotient. En raisonnant comme dans [1], (7.4.3) on peut se permettre de supposer p , puis f , assez régulières de sorte que $\Phi_{f,p}$ soit constante le long des variétés stables ou instables de g_0 . Plus précisément, notons $U^+ \subseteq G$ (resp U^-) le sous-groupe unipotent connexe de G dont l'algèbre de Lie est la somme des espaces propres de $\text{ad}(v_0)$ de valeur propre strictement positive (resp. strictement négative). Alors pour $x \in X$, $u^+ \in U^+$,

$$d(g_0^k u^+ x, g_0^k x) = d(a_c^k u^+ x, a_c^k x) \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} 0$$

et de même avec U^- et $k \rightarrow +\infty$. Par les choix de régularité de p et f , il en découle pour tout $u^\pm \in U^\pm$ l'égalité presque-sûre

$$\Phi_{f,p} \circ u^\pm = \Phi_{f,p} \quad (\lambda\text{-pp})$$

Comme U^+ et U^- engendrent tout G , l'invariance λ -pp de $\Phi_{f,p}$ sous U^+ et U^- entraîne son invariance λ -pp par une partie dénombrable dense de G , puis par G tout entier. L'application $\Phi_{f,p}$ est donc constante λ -pp. □

On peut maintenant conclure le chapitre en prouvant la dichotomie 4.4.1.

Preuve du corollaire 4.4.1. Supposons que la μ -marche sur X n'est pas totalement dissipative. D'après le théorème 4.3.1, le flot géodésique sur X ne l'est pas non plus. Il est donc conservatif et ergodique ([52], theorem 3.3), et il en va de même pour l'action de tout élément loxodromique de G (lemme 4.4.2). Or le semi-groupe engendré

par le support de μ est supposé Zariski-dense dans G , donc contient un élément loxodromique g_0 (voir [16], theorem 5.36). Notons $C \subseteq X$ la partie conservative de la marche. Nous avons $P_\mu 1_C = 1_C \pmod{\lambda}$. Comme dans la section 3.1, cela entraîne l'invariance $g_0 C = C \pmod{\lambda}$, et l'ergodicité de g_0 fait que C est de mesure pleine. On a donc que la marche est conservative, puis ergodique d'après la caractérisation b) de la proposition 1.3.6 et l'ergodicité de g_0 .

□

Chapitre 5

Dérive d'une marche sur un revêtement abélien

Sommaire

5.1	Dérive en tout point	88
5.1.1	Notation et énoncé du théorème	88
5.1.2	Preuve du théorème 5.1.1	93
5.2	Le cas d'une marche sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$	96
5.2.1	Description du revêtement	98
5.2.2	Un théorème central limite	100
5.2.3	Application à la récurrence et à la dérive	103
5.3	Le cas général d'un revêtement abélien d'une surface hyperbolique de volume fini	105

Introduction

Ce chapitre fera bientôt l'objet de l'article [9]. Il a pour but de décrire la vitesse d'éloignement vers l'infini d'une marche aléatoire sur un revêtement abélien d'un espace homogène de volume fini. Le cas le plus simple est celui d'une marche sur \mathbb{Z}^d (que l'on peut voir comme \mathbb{Z}^d -revêtement d'un point) et une réponse est alors apportée par la loi des grands nombres.

Théorème (Loi des grands nombres). *Soit S_n une chaîne de Markov sur \mathbb{Z}^d dont la loi d'incrément est donnée par une probabilité μ sur \mathbb{Z}^d admettant un moment d'ordre 1 fini. Alors presque-sûrement,*

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\mu)$$

Dans ce cas, nous disons que la μ -marche sur \mathbb{Z}^d admet une *dérive*, qui est égale à l'espérance de μ .

Ce texte pose la question d'un analogue de la loi des grands nombres dans le cadre d'une marche sur un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un espace homogène de volume fini. On se donne un groupe de Lie connexe simple G , un réseau Λ_0 de G , et un sous-groupe distingué $\Lambda \trianglelefteq \Lambda_0$ tel que $\Lambda_0/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$. L'espace homogène G/Λ admet alors une action libre et propre de \mathbb{Z}^d telle que $(G/\Lambda)/\mathbb{Z}^d = G/\Lambda_0$.

La "position" d'un point sur le revêtement G/Λ est alors repérée en se donnant une application \mathbb{Z}^d -équivariante $i : G/\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ que l'on supposera bornée sur un domaine fondamental connexe par arcs D pour l'action de \mathbb{Z}^d sur X .

Soit μ une mesure de probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous semi-groupe Γ_μ Zariski dense dans G . Une loi des grands nombres pour une μ -trajectoire $(\omega_n)_{n \geq 0}$ sur G/Λ consisterait à répondre aux questions suivantes :

La dérive $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} i(\omega_n)$ est elle bien définie dans \mathbb{R}^d ? Et si oui peut on la caractériser ?

Dans le cas où D est à bord compact, la variation de l'indice de position i sous un pas de la marche est bornée. Une simple application du théorème ergodique permet alors d'affirmer que la limite des $\frac{1}{n} i(\omega_n)$ existe pour presque toute trajectoire $(\omega_n)_{n \geq 0}$. Le premier résultat de ce chapitre renforce cette conclusion : pour *tout* point de départ ω_0 , la dérive d'une μ -trajectoire typique issue de ω_0 est bien définie et peut être calculée simplement. On note $X_0 := G/\Lambda_0$, $X := G/\Lambda$ les espaces quotients et on appelle $\pi : X \rightarrow X_0$ l'application de revêtement.

Théorème 5.1.1. *Supposons que le domaine fondamental D est à bord compact. Etant donné $\omega_0 \in X$, on distingue alors deux cas :*

1. *Si l'orbite projetée $\Gamma_\mu \cdot \pi(\omega_0)$ est infinie dans X_0 alors la dérive est nulle : pour presque-toute μ -trajectoire $(\omega_n) \in X^{\mathbb{N}}$ issue de ω_0 ,*

$$\frac{1}{n} i(\omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

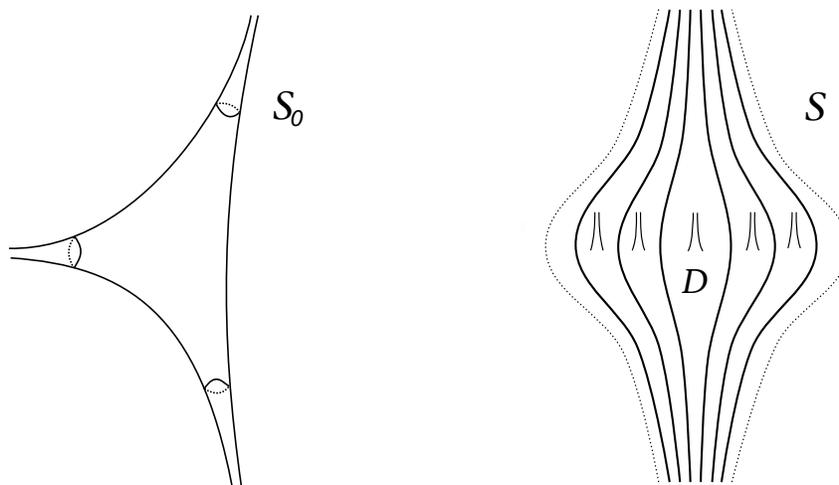
2. *Si l'orbite projetée $\Gamma_\mu \cdot \pi(\omega_0)$ est finie dans X_0 , alors pour presque-toute μ -trajectoire $(\omega_n) \in X^{\mathbb{N}}$ issue de ω_0 ,*

$$\frac{1}{n} i(\omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\Gamma_\mu \cdot \omega_0} \sum_{y \in \Gamma_\mu \cdot \pi(\omega_0)} i(g\tilde{y}) - i(\tilde{y})$$

où pour tout $y \in \Gamma_\mu \cdot \pi(\omega_0)$, on a noté \tilde{y} un relevé de y dans X .

Remarquons que ce théorème affirme en particulier que la dérive de presque toute μ -trajectoire est nulle, contrastant avec le cas d'une marche sur \mathbb{Z}^d où la dérive dépend de la loi d'incrément μ . La preuve de notre résultat s'appuie sur la classification des probabilités stationnaires sur le quotient de volume fini X_0 donnée dans [14].

Nous étudions dans un deuxième temps les phénomènes pouvant apparaître si le revêtement X n'a pas de domaine fondamental à bord compact. On commence par étudier un exemple explicite, dans lequel X est le fibré unitaire tangent d'un \mathbb{Z} -revêtement d'une sphère hyperbolique à trois pointes, comme dans le dessin ci dessous. On observe dans ce cas que la dérive a un comportement radicalement différent.



Une sphère hyperbolique à trois pointes S_0 et un \mathbb{Z} -revêtement S

Théorème 5.2.1. *Soit S un \mathbb{Z} -revêtement d'une sphère hyperbolique à trois pointes S_0 , obtenu en déroulant deux pointes comme dans le dessin ci-dessous. Soit μ une mesure de probabilité sur $G = PSL_2(\mathbb{R})$, supposée Zariski-dense et à support compact. Alors la μ -marche induite sur T^1S est récurrente et a sa dérive asymptotiquement dense : pour presque-toute μ -trajectoire $(\omega_n) \in (T^1S)^\mathbb{N}$,*

$$\{\text{valeurs d'adhérence de la suite } (\frac{1}{n} i(\omega_n))_{n \geq 1}\} = \mathbb{R}$$

Notons qu'à la différence du théorème 5.1.1, ce résultat décrit la dérive pour seulement *presque tout* point de départ. L'argument repose sur un théorème de Enriquez et Le Jan décrivant la loi du nombre d'enroulement du flot géodésique autour des différents cusps d'une surface hyperbolique de volume fini [35]. Nous

en déduisons (proposition 5.2.4) un théorème central limite affirmant que pour un vecteur de départ ω_0 choisi uniformément sur le domaine fondamental D , la loi de l'indice de position normalisé $\frac{1}{n}i(\omega_n)$ pour la marche à l'instant n converge vers une loi de Cauchy centrée sur \mathbb{R} .

Nous voyons ensuite dans la dernière section comment adapter le théorème 5.2.1 pour décrire la dérive dans le cas général d'un \mathbb{Z}^d -revêtement S d'une surface hyperbolique de volume fini S_0 quelconque. Plus précisément, nous supposons l'indice i invariant sous $PSO_2(\mathbb{R})$, notons $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$ les cusps de S_0 , puis $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{Z}^d$ les translations obtenues en relevant un tour de cusp au revêtement S , et enfin posons $E_C = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{v_1, \dots, v_s\}$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d engendré les v_i . Alors

Théorème 5.3.1. *Soit S un \mathbb{Z}^d -revêtement d'une surface hyperbolique S_0 de volume fini. Alors une marche Zariski-dense à support compact sur T^1S a presque toutes ses trajectoires (ω_n) de dérive asymptotiquement denses dans E_C :*

$$\{\text{valeurs d'adhérence de la suite } (\frac{1}{n}i(\omega_n))_{n \geq 1}\} = E_C$$

5.1 Dérive en tout point

Cette section considère une marche sur un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un espace homogène de volume fini et décrit sa dérive quelque soit le point de départ. On fera l'hypothèse que l'action de \mathbb{Z}^d sur le revêtement admet un domaine fondamental connexe à bord compact.

5.1.1 Notation et énoncé du théorème

On se donne un groupe de Lie réel connexe simple G , ainsi que des sous groupes discrets $\Lambda \trianglelefteq \Lambda_0 \subseteq G$ avec Λ_0 de covolume fini dans G et $\Lambda_0/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$ (où $d \in \mathbb{N}^*$). Cela définit deux espaces homogènes

$$X_0 := G/\Lambda_0, \quad X := G/\Lambda$$

De plus, la projection canonique $X \rightarrow X_0, g\Lambda \mapsto g\Lambda_0$ est un revêtement dont le groupe d'automorphismes s'identifie à $\Lambda_0/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$. On fixe une fois pour toute une identification $\Lambda_0/\Lambda = \mathbb{Z}^d$, et pour $x \in X, k \in \mathbb{Z}$ et on note $x + k$ l'image de x sous l'action de l'automorphisme de revêtement identifié à k .

Exemples types. L'existence de tels sous-groupes Λ et Λ_0 entraîne que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est isomorphe à $\mathfrak{so}(n, 1)$ ou bien $\mathfrak{su}(n, 1)$ pour un certain $n \geq 2$ [en effet, dans le cas contraire, le groupe G aurait alors la propriété (T) de Kazhdan ([7], page 8), donc Λ_0 aussi en tant que réseau, et également son quotient $\Lambda_0/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$, ce qui est absurde]. On peut donc considérer les cas où $G = SO^+(n, 1)$ ou $G = PU(n, 1)$ comme des exemples typiques. Dans le premier cas, X_0 s'identifie au fibré des repères d'une variété hyperbolique de dimension n définie par $M_0 = K \backslash G / \Lambda_0$ où $K = SO(n) \times \{1\}$, et X au fibré des repères d'un \mathbb{Z}^d -revêtement de M_0 , à savoir $M = K \backslash G / \Lambda$. Il en va de même dans le cas où $G = PU(n, 1)$, excepté que l'on considère cette fois ci des variétés hyperboliques complexes, et que $K = P(U(n) \times U(1)) \simeq U(n)$.

On munit G d'une mesure de probabilité μ , induisant ainsi une marche aléatoire sur l'espace homogène X . Ce chapitre s'intéresse à la vitesse de fuite vers l'infini des trajectoires de la marche, appelée *dérive*. Afin d'en donner une interprétation quantitative, on fixe *un domaine fondamental* D pour l'action de \mathbb{Z}^d sur X . Cela signifiera que D est une partie fermée de X dont les translatés $(D + k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ forment un recouvrement localement fini de X , d'intérieurs $(\overset{\circ}{D} + k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ deux à deux disjoints et d'union de mesure pleine dans X . On repère alors la "position" d'un point sur X en se donnant une application $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ supposée \mathbb{Z}^d -équivariante bornée sur D .

Notons $B := G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$. On cherche alors à estimer pour tout point de départ $x \in X$, et β -presque tout $b \in B$, le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\frac{1}{n}i(b_n \dots b_1 x)\right)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}^*}$$

Il est commode de se ramener à l'étude d'un cocycle sur X_0 . Pour cela, on remarque qu'à chaque étape de la marche, l'indice de position varie suivant le cocycle

$$G \times X \rightarrow \mathbb{R}^d, (g, x) \mapsto i(g.x) - i(x)$$

L'hypothèse que i commute à l'action de \mathbb{Z}^d implique que ce cocycle est \mathbb{Z}^d -invariant et passe au quotient en un cocycle

$$\sigma : G \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}^d, (g, x + \mathbb{Z}^d) \mapsto i(g.x) - i(x)$$

Comme pour $x \in X$, $b \in B$, on a $i(b_n \dots b_1 x) = \sigma(b_n \dots b_1, x + \mathbb{Z}^d) + i(x)$, l'étude de la dérive se ramène à celle du comportement asymptotique de la suite $(\frac{1}{n}\sigma(b_n \dots b_1, x_0))_{n \geq 1}$ où $x_0 \in X_0$, $b \in B$. On peut donc aussi bien parler de dérive en un point de X_0 .

Notre premier résultat décrit la dérive en tout point de la base X_0 sous l'hypothèse que le domaine fondamental D est à bord compact : elle vaut zéro si on part d'un point de Γ_μ -orbite infinie, et admet une formule explicite dans le contraire.

Théorème 5.1.1. *Soit G un groupe de Lie connexe simple et $\Lambda \trianglelefteq \Lambda_0 \subseteq G$ des sous groupes discrets, avec Λ_0 de covolume fini dans G et $\Lambda_0/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$ (où $d \in \mathbb{N}^*$). On note les espaces quotients $X_0 := G/\Lambda_0$ et $X := G/\Lambda$ et on suppose que l'action de \mathbb{Z}^d sur X admet un domaine fondamental connexe D à bord compact. Soit $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application mesurable \mathbb{Z}^d -équivariante bornée sur D et $\sigma : G \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ le cocycle de déplacement induit. Soit μ une probabilité Zariski-dense à support compact sur G , et notons $B := G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.*

Etant donné $x_0 \in X_0$, on distingue alors deux cas :

1. *Si l'orbite $\Gamma_\mu \cdot x_0$ est infinie dans X_0 alors la dérive est nulle : pour β -presque tout $b \in B$, on a*

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. *Si l'orbite $\Gamma_\mu \cdot x_0$ est finie dans X_0 , alors pour β -presque tout $b \in B$, on a*

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu \otimes \nu_0(\sigma)$$

où ν_0 est l'équiprobabilité sur $\Gamma_\mu \cdot x_0$ donnée par $\nu_0 := \frac{1}{\#\Gamma_\mu \cdot x_0} \sum_{y \in \Gamma_\mu \cdot x_0} \delta_{y_0}$.

Remarques. 1) La condition d'existence d'un domaine fondamental connexe à bord compact est vérifiée dans le cas d'un revêtement abélien d'une variété hyperbolique de volume fini, et au niveau duquel les cusps présents sur la base ne sont pas déroulés (comme dans la figure 1 ci-dessous). Nous verrons en deuxième partie de ce chapitre ce qu'il advient de la dérive lorsqu'on se permet de dérouler un cusp.

2) Les valeurs limites annoncées dans le théorème ne dépendent pas du choix de D ou i . En effet, soit (D', i') une autre paire convenable. Alors D est réunion d'un nombre fini de translatés de D' donc i' est bornée sur D . Par \mathbb{Z}^d -équivariance, la différence $i - i'$ est bornée sur tout X , puis i' induit la même notion de dérive.

3) Nous verrons plus bas comment construire une telle application $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ \mathbb{Z}^d -équivariante et bornée sur D (lemme 5.1.3).

Une conséquence du théorème 5.1.1 est que la dérive est nulle en tout point si la probabilité μ est symétrique, i.e. si μ est invariante sous l'application d'inversion $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$.

Corollaire 5.1.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.1.1 et si la probabilité μ est symétrique, alors pour tout $x_0 \in X_0$, β -presque tout $b \in B$, on a*

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

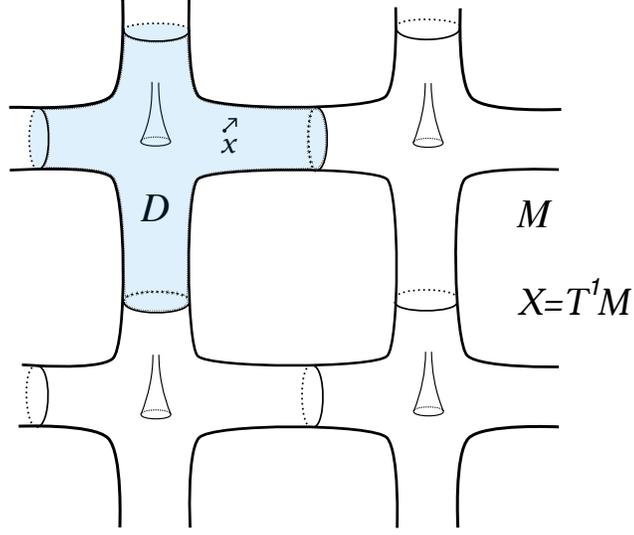


Figure 1 : Exemple où $G = SO^+(2, 1)$, $M_0 = K \backslash G / \Lambda_0$ est une surface hyperbolique de genre 2 à une pointe, et M est un \mathbb{Z}^2 -revêtement de M_0 de domaine fondamental D à bord compact

Preuve du corollaire. D'après le théorème, il suffit de vérifier que si x_0 est d'orbite finie sous Γ_μ , alors $\mu \otimes \nu_0(\sigma) = 0$. Notons $\omega := \Gamma_\mu \cdot x_0 \subseteq X_0$. En utilisant la symétrie du μ et la Γ_μ -invariance de ν_0 , on calcule que

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu_0(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_{G \times X_0} \sigma(g, y_0) + \sigma(g^{-1}, y_0) d\mu(g) d\nu_0(y_0) \\ &= \frac{1}{2} \int_{G \times X_0} \sigma(g, y_0) + \sigma(g^{-1}, g \cdot y_0) d\mu(g) d\nu_0(y_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\sigma(g, y_0) + \sigma(g^{-1}, g \cdot y_0) = 0$ pour tout $g \in G, y_0 \in X_0$ d'après la relation de cocycle. \square

Exemple où apparaît une dérive non nulle. On construit un tel exemple dans le cas où $G = PSL_2(\mathbb{R})$, i.e. on considérant un revêtement abélien de surface hyperbolique. Soit S_0 une surface hyperbolique compacte de genre 2. On note c_1, c_2 les géodésiques simples fermées (non paramétrées) de S_0 représentées dans la figure ci dessous et $p_0 \in S_0$ leur unique point d'intersection. Quitte à bien choisir S_0 , on peut supposer que ces géodésiques s'intersectent perpendiculairement.

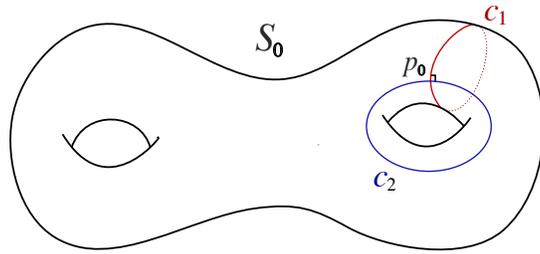


Figure 2 : la surface hyperbolique S_0 et les courbes géodésiques c_1, c_2 d'intersection p_0

Le \mathbb{Z} -revêtement S de S_0 que nous allons considérer s'obtient ainsi : on découpe S_0 le long de sa géodésique c_1 pour obtenir une surface hyperbolique Σ_0 de genre 1 à deux bords δ_1, δ_2 . On se donne des copies $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de cette surface, de bords correspondant $\delta_{i,1}, \delta_{i,2}$. On recolle entre elles les surfaces Σ_i en identifiant chaque bord $\delta_{i,2}$ avec le bord $\delta_{i+1,1}$ (de la même façon que δ_2 s'identifie à δ_1). La surface hyperbolique obtenue est notée S . Remarquons que les segments géodésiques correspondant à c_2 dans chaque Σ_i sont recollés bout à bout en une géodésique globale de S . Par ailleurs, la projection de \mathbb{Z} -revêtement $\pi : S \rightarrow S_0$ est définie en un point $p \in S$, en se donnant un relevé $p_i \in \Sigma_i$ dans un des Σ_i , en notant $p_{i,0}$ le point équivalent dans Σ_0 , et $\pi(p) \in \Sigma_0$ son image par l'application $\Sigma_0 \rightarrow S_0$ qui recolle les bords.

Précisons maintenant la marche aléatoire en question. Pour $t, \theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_t := \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}, \quad R_\theta := \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

Si on note X_0 le fibré unitaire tangent de S_0 , et qu'on s'en donne une description comme un espace homogène $X_0 = G/\Lambda_0$ où $\Lambda_0 \subseteq G$ discret sans torsion, alors l'action d'un élément g_t sur un vecteur $x_0 \in X_0$ déplace x_0 suivant le flot géodésique pendant une durée t , tandis que l'action de R_θ fait tourner x_0 d'un angle θ sans changer son point base. Notons $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ les longueurs des géodésiques c_1, c_2 . On définit une probabilité sur G en posant

$$\mu := \frac{1}{2}(\delta_{a_1} + \delta_{a_2}) \quad \text{où } a_1 := R_{-\pi/2}g_{l_1}R_{\pi/2}, \text{ et } a_2 := g_{l_2}$$

Comme les matrices a_1, a_2 sont hyperboliques et ne commutent pas, elles engendrent un semi-groupe Γ_μ Zariski-dense dans G . Considérons $x_0 \in X_0$ un vecteur de point base p_0 et tangent à c_2 (donc perpendiculaire à c_1). La Γ_μ -orbite de x_0 est réduite à un point : $\Gamma_\mu \cdot x_0 = x_0$. De plus, quelque soit l'application i définissant le cocycle de déplacement σ , nous avons $\sigma(a_1, x_0) = 0$ et $\sigma(a_2, x_0) = 1$ (quitte à choisir plutôt $-x_0$ dès le début).

On déduit de ce qui précède que pour β -presque tout $b \in B$,

$$\sigma(b_n \dots b_1, x_0) = \#\{j \leq n, b_j = a_2\} \simeq \frac{n}{2}$$

5.1.2 Preuve du théorème 5.1.1

Prouvons le théorème 5.1.1. On rappelle que $B := G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, et on note $T : B \rightarrow B$, $(b_i)_{i \geq 1} \mapsto (b_{i+1})_{i \geq 1}$ le décalage unilatère.

On commence par traiter le deuxième cas qui est élémentaire. Soit $x_0 \in X_0$ dont la Γ_μ -orbite $\omega := \Gamma_\mu \cdot x_0$ est finie. La probabilité uniforme ν_0 sur ω est alors μ -stationnaire ergodique. On en déduit que le système dynamique probabilisé (avec mesure préservée) $(B^{X_0}, \beta^{X_0}, T^{X_0})$ défini par

$$B^{X_0} := B \times X_0, \quad \beta^{X_0} := \beta \otimes \nu_0, \quad T^{X_0} := B^{X_0} \rightarrow B^{X_0}, (b, x_0) \mapsto (Tb, b_1 x_0)$$

est ergodique. On applique alors le théorème de Birkhoff à la fonction $\tilde{\sigma} : B \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $(b, x_0) \mapsto \sigma(b_1, x_0)$ pour obtenir la convergence attendue : pour β -presque tout $b \in B$,

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\sigma} \circ (T^{X_0})^k(b, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta^{X_0}(\tilde{\sigma}) = \mu \otimes \nu_0(\sigma)$$

On traite maintenant le premier cas. Pour alléger les notations dans la suite, on s'autorisera à noter x un point de X_0 (et non de X).

Nous commençons par nous ramener au cas où l'indice de position $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continu.

Lemme 5.1.3. *Pour prouver le théorème 5.1.1, on peut supposer que l'indice de position $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continu.*

Démonstration. Nous avons remarqué que l'énoncé du théorème ne dépendait pas du choix de l'application i . Il suffit donc de construire une application $i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui est \mathbb{Z}^d -équivariante, bornée sur D , et continue.

Définissons une première ébauche pour i en posant $j : X \rightarrow \mathbb{Z}^d$ l'application telle que pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $j|_{\overset{\circ}{D}+k} \equiv k$ et $j|_{X - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \overset{\circ}{D}+k} \equiv 0$. L'application j est \mathbb{Z}^d -équivariante sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \overset{\circ}{D}+k$, et n'est pas continue a priori. Soit $m_G \in \mathcal{M}(G)$ une mesure de Haar à droite sur G et $U \subseteq G$ un voisinage ouvert relativement compact de l'élément neutre tel que $m_G(U) = 1$. Comme l'application j est localement bornée, on peut poser

$$i : X \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \int_U j(gx) dm_G(g)$$

Vérifions que l'application i est \mathbb{Z}^d -équivariante. Soit $x \in X$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Par construction, l'application j est équivariante sur l'union $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \overset{\circ}{D}+k$, qui est de mesure pleine

dans X . On en déduit que pour m_G -presque tout $g \in G$, $j(g(x+k)) = j(gx) + k$. Par intégration sur U , cela donne l'équivariance de i cherchée.

Vérifions que l'application i est continue. Soit $x, y \in X$, et $\tilde{x}, \tilde{y} \in G$ des relevés dans G .

$$\begin{aligned} \|i(x) - i(y)\| &= \left\| \int_U j(gx) - j(gy) dm_G(g) \right\| \\ &= \left\| \int_U j(gx) dm_G(g) - \int_{U\tilde{y}\tilde{x}^{-1}} j(gx) dm_G(g) \right\| \\ &\leq m_G(U\Delta U\tilde{y}\tilde{x}^{-1}) \sup_{Ux \cup Uy} \|j\| \end{aligned}$$

Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers x , alors on peut choisir des relevés $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ tendant vers \tilde{x} et dans ce cas $m_G(U\Delta U\tilde{y}_n\tilde{x}_n^{-1}) \rightarrow 0$. De plus, $\sup_{Ux_n \cup Uy_n} \|j\|$ est uniformément borné en n car $\bigcup_n Ux_n \cup Uy_n$ est relativement compact dans X et j est localement bornée. On en déduit que l'application i est continue. □

Le lemme suivant permet de ramener l'étude de la dérive du cocycle σ sur $G \times X_0$ à celle de sa μ -moyenne sur X_0 .

Lemme 5.1.4. *Soit $\sigma : G \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ un cocycle continu, borné sur $\text{supp } \mu \times X_0$. Alors pour tout $x \in X_0$, β -presque tout $b \in B$, on a la convergence :*

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_G \sigma(g, b_k \dots b_1 x) d\mu(g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration. Il s'agit d'un corollaire d'une version forte de la loi des grands nombres. Une démonstration est donnée dans [16], proposition 2.2. □

Fixons $x \in X_0$ un point de Γ_μ -orbite infinie et montrons que pour β -presque tout $b \in B$,

$$\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le cocycle de déplacement σ est continu d'après la continuité de i . Il est de plus borné sur $\text{supp } \mu \times X_0$ [car le support de μ est compact si bien que l'ensemble $(\text{supp } \mu).D$ n'intersecte qu'un nombre fini de translatés $(D+k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$]. Le cocycle de déplacement σ vérifie donc les hypothèses du lemme 5.1.4. Posant $\varphi : X_0 \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto \int_G \sigma(g, x) d\mu(g)$, nous sommes ramenés à vérifier que pour β -presque tout $b \in B$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(b_k \dots b_1 x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le lemme suivant permet de contrôler cette somme. Il est du à Benoist-Quint et affirme qu'une μ -trajectoire sur X_0 doit s'équirépartir selon la probabilité de Haar λ_0 sur X_0 dès lors que son point de départ est de Γ_μ -orbite infinie.

Lemme 5.1.5. *Pour tout $x \in X_0$ de Γ_μ -orbite infinie, β -presque tout $b \in B$, on a la convergence faible- \star :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{b_k \dots b_1 x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_0$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient en combinant les théorèmes 1.1 et 1.3 de [15] ainsi que le corollaire 1.2 de [13]. Le premier théorème affirme que pour tout $x \in X_0$, la Γ -orbite de x a son adhérence homogène i.e. de la forme $\overline{\Gamma \cdot x} = H \cdot x$ où H est un sous-groupe fermé de G , et admet de plus une (unique) probabilité H -invariante ν_x . Le second théorème ajoute que pour β -presque tout $b \in B$, la suite de probabilités $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{b_k \dots b_1 x})_{n \geq 1}$ converge \star -faiblement vers ν_x . Si la Γ -orbite de x est infinie, alors ν_x ne peut avoir d'atome, et le corollaire 1.2 de [13] implique que ν_x est nécessairement G -invariante, i.e. égale à λ_0 . \square

Comme nous avons supposé l'indice i continu et le support de μ compact, l'application φ doit être continue et bornée. On déduit du lemme 5.1.5 que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(b_k \dots b_1 x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_0(\varphi)$$

Il reste à donc à vérifier que la dérivée est nulle du point de vue de λ_0 .

Lemme 5.1.6. *Pour tout $g \in G$,*

$$\int_{X_0} \sigma(g, x) d\lambda_0(x) = 0$$

En particulier, $\lambda_0(\varphi) = 0$.

Démonstration. Notons $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^d, g \rightarrow \int_{X_0} \sigma(g, x) d\lambda_0(x)$. Soit $g, h \in G$. On a via la relation de cocycle et la G -invariance de λ_0 que :

$$\begin{aligned} \phi(gh) &= \int_{X_0} \sigma(g, hx) + \sigma(h, x) d\lambda_0(x) \\ &= \int_{X_0} \sigma(g, x) + \sigma(h, x) d\lambda_0(x) \\ &= \phi(g) + \phi(h) \end{aligned}$$

L'application ϕ est donc un morphisme de groupes. Comme G est égal à son groupe dérivé, on en déduit que $\phi(G) = 0$. \square

Le théorème 5.1.1 est ainsi démontré.

5.2 Le cas d'une marche sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$

On peut s'interroger sur la validité du théorème 5.1.1 si on supprime l'hypothèse que l'action de \mathbb{Z}^d sur le revêtement X a un domaine fondamental à bord compact. Il apparaît que le comportement de la dérive est alors radicalement différent. On donne dans cette section un exemple de \mathbb{Z} -revêtement d'un espace homogène X_0 de volume fini tel que pour toute marche Zariski-dense à support compact, presque tout $x_0 \in X_0$, β -presque tout $b \in B$,

$$\{\text{valeurs d'adhérence de la suite } (\frac{1}{n}\sigma(b_n \dots b_1, x_0))_{n \geq 1}\} = \mathbb{R}$$

Cet exemple sera construit comme le fibré unitaire tangent d'un \mathbb{Z} -revêtement de la sphère hyperbolique à trois pointes. Nous verrons en fin de chapitre comment généraliser les conclusions obtenues à tout revêtement abélien d'une surface hyperbolique de volume fini.

Posons $G := PSL_2(\mathbb{R})$, $K = PSO_2(\mathbb{R})$ et on introduit le sous-groupe de congruence

$$\Lambda_0 := \{g \in PSL_2(\mathbb{Z}), g = \text{Id} \pmod{2}\}$$

de covolume fini dans G , librement engendré par les matrices

$$g_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad g_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'espace homogène $X_0 := G/\Lambda_0$ s'identifie au fibré unitaire tangent d'une sphère hyperbolique à trois pointes $S_0 := K \backslash G/\Lambda_0$.

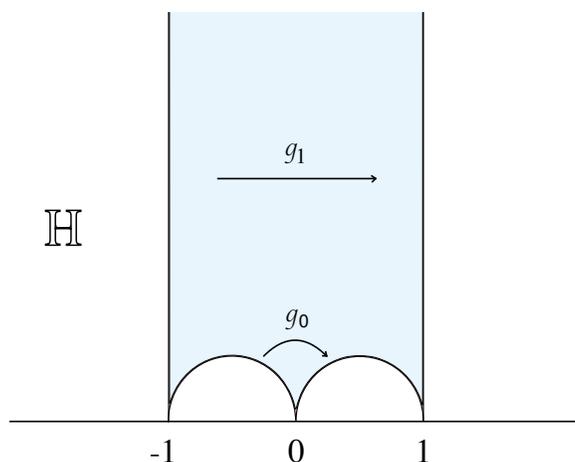


Figure 3 : domaine fondamental de Λ_0 dans le demi-plan de Poincaré

Notons $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ l'unique morphisme tel que $f(g_0) = 0$, $f(g_1) = 1$ et posons $\Lambda = \text{Ker} f$. La surface $S := K \backslash G/\Lambda$ est donc un \mathbb{Z} -revêtement de S_0 , de fibré

unitaire $X = G/\Lambda$. D'un point de vue plus géométrique, on obtient S à partir de S_0 en déroulant deux cusps de la surface S_0 (voir figure 4, et 1er paragraphe de 5.2.1).

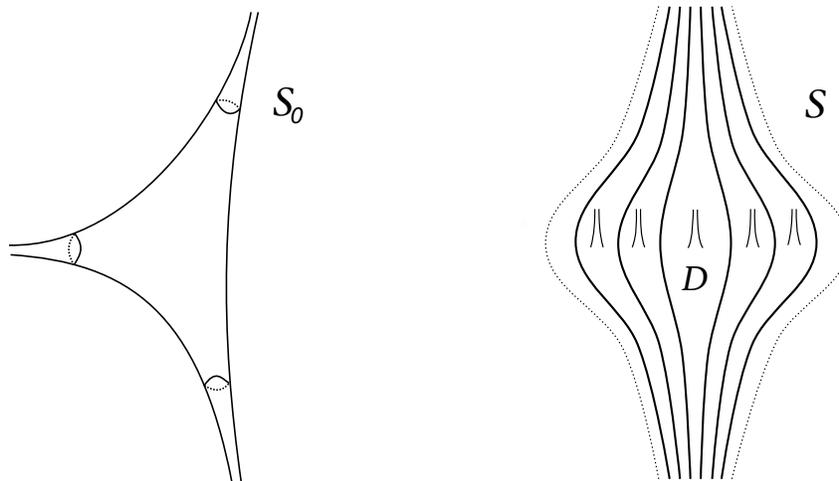


Figure 4 : la sphère à trois pointes S_0 et son \mathbb{Z} -revêtement S

On décompose le \mathbb{Z} -revêtement S en domaines fondamentaux $(D + k)_{k \in \mathbb{Z}}$ comme dans la figure 4, et on se donne $i : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable \mathbb{Z} -équivariante bornée sur D . Il sera commode de supposer que pour tout vecteur $x \in T^1S$, l'image $i(x)$ ne dépend que du point base de x dans S . Comme dans la section 4.1.1, on note $\sigma : G \times T^1S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ le cocycle de déplacement associé.

L'enjeu de la section est de prouver le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. *Gardons les notations ci-dessus, et soit μ une probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-groupe Zariski-dense. Posons $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$. Alors,*

1. *La μ -marche aléatoire sur T^1S est **conservative et ergodique** pour la mesure de Haar quotient.*
2. *La μ -marche aléatoire sur T^1S a une **dérive asymptotiquement dense** : pour presque tout $x_0 \in T^1S_0$, β -presque tout $b \in B$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) - t \right| = 0$$

Remarques. 1) L'espace ambiant T^1S fournit un exemple d'espace homogène à croissance volumique exponentielle¹ et sur lequel toute marche Zariski-dense à support compact est récurrente presque-sûre. Cela contraste avec la "quadratic growth

1. Un espace métrique mesuré (X, λ) est à croissance exponentielle s'il existe ε tel que pour tout $x \in X$, et $r > 0$ assez grand, on ait $\lambda(B(x, r)) \geq e^{\varepsilon r}$.

conjecture” [46, 71] qui prédit qu’un groupe localement compact admet une marche adaptée² récurrente si et seulement si sa croissance est au plus quadratique.

2) Le \mathbb{Z} -revêtement S de la sphère à trois pointes est biholomorphe à $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

3) En raison du développement des cusps, le cocycle de déplacement σ n’est pas intégrable pour la probabilité $\mu \otimes \lambda_0$ (cf. corollaire 5.2.3)

5.2.1 Description du revêtement

Avant d’aller plus loin, nous décrivons plus en détails la surface S , en commençant par justifier la figure 4. Les cusps de la surface S_0 , notés $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ correspondent respectivement aux éléments paraboliques $g_0, g_1, g_0^{-1}g_1$. Notons γ l’arc géodésique sur S_0 reliant les points à l’infini des cusps \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , et ne s’enroulant pas autour du cusp \mathcal{C}_0 . Notant $\pi_0 : \mathbb{D} \rightarrow S_0$ la projection et $p_0 = \pi_0(0)$, on a un isomorphisme $\Gamma_0 \rightarrow \pi_1(S_0, p_0), g \mapsto c_g := \pi_0([0, g.0])$. Alors l’application $f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ définissant le sous-groupe Γ n’est autre que l’application qui à g associe le nombre d’intersections entre c_g et γ . On en déduit que la surface S s’obtient en découpant S_0 le long de γ et en recollant le long de leurs bords et sans décalage des copies de la surface ainsi obtenue. Cela aboutit au dessin de la figure 4.

Expliquons maintenant comment les préimages dans S des cusps déroulés $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ s’identifient à des horoboules de \mathbb{D} . Considérons le cas de \mathcal{C}_1 défini par l’élément unipotent g_1 . On notera $p : S \rightarrow S_0$ la projection, $\mathbb{H} \simeq \mathbb{D}$ le demi-plan hyperbolique, et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{H}_t := \{z \in \mathbb{H}, \text{Im}z > e^t\}$$

Par définition, il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que la projection $\pi_0 : \mathbb{H} \rightarrow S_0$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{H}_{t_1}/\langle g_1 \rangle$ et un voisinage U_1 du cusp \mathcal{C}_1 . Comme dans $\Gamma_0/\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, l’élément g_1 correspond à l’entier $1 \in \mathbb{Z}$, on en déduit que la préimage $p^{-1}U_1$ de U_1 dans S s’identifie à \mathbb{H}_{t_1} et que l’action de translation par un entier $k \in \mathbb{Z}$ sur $p^{-1}U_1$ correspond à l’action par isométrie de a_1^k sur \mathbb{H}_{t_1} . On peut raisonner de la même façon pour le cusp \mathcal{C}_2 , relativement à des horoboules centrées en le point fixe à l’infini de l’élément unipotent $g_0^{-1}g_1$ représentant \mathcal{C}_2 . On note $U_2 \equiv \mathbb{H}_{t_2}/g_0^{-1}g_1$ le voisinage de \mathcal{C}_2 obtenu, et on le suppose disjoint de U_1 .

Comme première application de cette description, vérifions que le cocycle σ n’est pas intégrable sur $G \times T^1S_0$. Ce point nous empêche de raisonner comme pour le théorème 5.1.1 et exprime toute la difficulté à contrôler les déplacements de la marche. On commence par un lemme portant sur le flot géodésique.

2. Une marche sur un groupe localement compact G est dite adaptée si elle provient d’une mesure de probabilité sur G dont le support engendre un sous-groupe dense.

Lemme 5.2.2. *Soit $t > 0$ et $a_t := \text{diag}(e^t, e^{-t})$. Alors*

$$\int_{T^1 S_0} |\sigma(a_t, x)| d\lambda_0(x) = +\infty$$

Démonstration. On se contente de minorer les déplacements ayant lieu dans le cusp déroulé au dessus de \mathcal{C}_1 , et identifié ci dessus à \mathbb{H}_{t_1} . Quitte à perturber de façon inessentielle l'application d'indice de position, on peut supposer que pour $(z, v) \in T^1 \mathbb{H}_{t_1}$, on a $i(z, v) = \frac{1}{2} \text{Re}z$. Il s'agit ainsi d'étudier la variation moyenne d'abscisse sous l'action du flot géodésique jusqu'à l'instant t pour un point de départ choisi aléatoirement sur $T^1 H_{t_1+t}^0 := \{(z, v) \in T^1 \mathbb{H}_{t_1+t}, |\text{Re}z| \leq 1\}$. En rappelant que nous notons le flot géodésique comme agissant à gauche (et non à droite), et l'identification naturelle $T^1 \mathbb{H} \simeq \mathbb{H} \times S^1$, on calcule que

$$\begin{aligned} \int_{T^1 S_0} |\sigma(a_t, x)| d\lambda_0(x) &\geq \int_{T^1 H_{t_1+t}^0} \frac{1}{2} |\text{Re}(a_t.(z, v)) - \text{Re}z| \frac{1}{(\text{Im}z)^2} dz d\text{leb}_{S^1}(v) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{T^1 H_{t_1+t}^0} |\text{Re}(a_t.(z, v))| \frac{1}{(\text{Im}z)^2} dz d\text{leb}_{S^1}(v) - C_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{e^{t_1+t}}^{\infty} \frac{1}{u_2^2} \int_{[-1,1] \times \{u_2\} \times S^1} |\text{Re}(a_t.(z, v))| dz d\text{leb}_{S^1}(v) du_2 - C_0 \end{aligned}$$

où $C_0 := \int_{H_{t_1+t}^0} \frac{1}{2} |\text{Re}z| \frac{1}{(\text{Im}z)^2} d\text{leb}(z) < \infty$. Le changement de variable identifiant par homotéthisme le segment de cercles unitaires tangents $[-1, 1] \times \{u_2\} \times S^1$ à $[-1/u_2, 1/u_2] \times \{1\} \times S^1$ donne alors

$$\int_{[-1,1] \times \{u_2\} \times S^1} |\text{Re}(a_t.(z, v))| dz d\text{leb}_{S^1}(v) = u_2 I(u_2)$$

où

$$I(u_2) := \int_{[-1/u_2, 1/u_2] \times \{1\} \times S^1} |\text{Re}(a_t.(u_1 + i, v))| u_2 dz d\text{leb}_{S^1}(v)$$

La quantité $I(u_2)$ converge vers $\int_{S^1} |\text{Re}(a_t.(i, v))| d\text{leb}_{S^1}(v) > 0$ quand u_2 tend vers l'infini. On déduit finalement que

$$\int_{T^1 S_0} |\sigma(a_t, x)| d\lambda_0(x) \geq \frac{1}{2} \int_{e^{t_1+t}}^{\infty} \frac{1}{u_2} I(u_2) du_2 - C_0 = +\infty$$

□

Notons λ_0 la probabilité de Haar sur $T^1S_0 = G/\Lambda_0$.

Corollaire 5.2.3. *Le cocycle de déplacement $\sigma : G \times T^1S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas intégrable pour la probabilité $\mu \otimes \lambda_0$.*

Démonstration. Le support de la probabilité μ engendre un sous-groupe Zariski-dense de G . Il attribue donc une masse positive au complémentaire de $K = PSO_2(\mathbb{R})$. Si $g \in G - K$, on peut écrire $g = ka_t l$ où $k, l \in K$, et $t > 0$. En utilisant la K -invariance de l'indice de position i et la G -invariance de λ_0 , puis appliquant le lemme 5.2.2, on calcule que

$$\int_{T^1S_0} |\sigma(g, x)| d\lambda_0(x) = \int_{T^1S_0} |\sigma(a_t, x)| d\lambda_0(x) = +\infty$$

ce qui conclut la preuve. □

5.2.2 Un théorème central limite

Le corollaire 5.2.3 souligne la difficulté à décrire les déplacements d'une marche aléatoire sur T^1S . On s'en sort en estimant la loi limite de la variable $\frac{1}{n}\sigma(b_n \dots b_1, x)$ quand n tend vers l'infini. On rappelle que $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\mathbb{N}^*}$ et λ_0 désigne la probabilité de Haar sur T^1S_0 .

Proposition 5.2.4 (TCL). *Soit ν_n la probabilité image de $\beta \otimes \lambda_0$ par l'application $B \times T^1S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $(b, x) \mapsto \frac{1}{n}\sigma(b_n \dots b_1, x)$. Alors la suite $(\nu_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers une loi de Cauchy centrée sur \mathbb{R} .*

On rappelle qu'une loi de Cauchy centrée sur \mathbb{R} est une loi de la forme

$$m_c = \frac{c}{\pi(c^2 + t^2)} dt$$

où $c > 0$ est un paramètre positif.

La preuve de la proposition 5.2.4 s'appuie un résultat de Enriquez et Le Jan, estimant la loi des déplacements dus à l'action du flot géodésique.

Lemme 5.2.5. *Pour $t > 0$, notons ν'_t la probabilité image de λ_0 par l'application $T^1S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{t}\sigma(a_t, x)$. Alors il existe $c > 0$ tel que ν'_t converge faiblement vers la loi de Cauchy m_c quand t tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Nous déduisons ce lemme de l'article [35] de Enriquez et Le Jan qui considèrent le flot géodésique sur une surface hyperbolique de volume fini et prouvent que la loi normalisée des nombres d'enroulement du flot autour des différents cusps se comporte asymptotiquement comme un produit de lois de Cauchy indépendantes. Détaillons dans notre cas. On commence par décomposer le cocycle σ en comptabilisant séparément les déplacements au dessus des cusps déroulés et au dessus de leur complémentaire dans S_0 . Pour cela, on écrit S comme une réunion disjointe $S = H \amalg F$ où $H = \mathbb{H}_{t_1} \amalg \mathbb{H}_{t_2}$ (voir section 4.2.1) et F est fermé. Pour $t > 0$, $x_0 \in T^1 S_0$, $x \in (Tp)^{-1}(x_0)$, notons $]s_0, s_1[\amalg \dots \amalg]s_{2n}, s_{2n+1}[= \{s \in]0, t[, a_s \cdot x \in T^1 H\}$ et posons

$$\begin{aligned}\sigma_H(t, x_0) &:= \sum_{k=0}^n i(a_{s_{2k+1}} \cdot x) - i(a_{s_{2k}} \cdot x) \\ \sigma_F(t, x_0) &:= \sigma(a_t, x_0) - \sigma_H(t, x_0)\end{aligned}$$

de sorte que $\sigma(a_t, x_0) = \sigma_H(t, x_0) + \sigma_F(t, x_0)$ où σ_H, σ_F sont des cocycles continus sur $\mathbb{R} \times X_0$. Le résultat [35] affirme que la famille de probabilités $\frac{1}{t} \sigma_H(t, \cdot) \star \lambda_0$ converge faiblement vers une loi de Cauchy centrée m_c quand t tend vers l'infini. Nous devons montrer que c'est aussi vrai pour le cocycle σ .

La différence cocycle σ_F est borné sur $[0, 1] \times T^1 S_0$ et de moyenne nulle, car pour $t \geq 0$,

$$\int_{T^1 S_0} \sigma_F(t, x) d\lambda_0(x) = \frac{1}{2} \int_{T^1 S_0} \sigma_F(t, x) + \underbrace{\sigma_F(t, R_\pi a_t x)}_{-\sigma_F(t, x)} d\lambda_0(x) = 0$$

où on a utilisé la G -invariance de λ_0 et où R_π agit sur un vecteur en le tournant d'un angle π à point base fixé. Par ergodicité du flot géodésique sur $(T^1 S_0, \lambda_0)$, on a donc pour λ_0 -presque tout $x \in T^1 S_0$,

$$\frac{1}{t} \sigma_F(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Si $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue à support compact sur \mathbb{R} , il découle de ce qui précède, de l'uniforme continuité de φ , et du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\int_{T^1 S_0} \varphi\left(\frac{1}{t} \sigma(a_t, x)\right) d\lambda_0(x) &= \int_{T^1 S_0} \varphi\left(\frac{1}{t} \sigma_H(t, x_0) + \frac{1}{t} \sigma_F(t, x_0)\right) d\lambda_0(x) \\ &= \int_{T^1 S_0} \varphi\left(\frac{1}{t} \sigma_H(t, x_0)\right) d\lambda_0(x) + o(1) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} m_c(\varphi)\end{aligned}$$

concluant la preuve du lemme 5.2.5. □

Démonstration de la proposition 5.2.4. La preuve repose sur le lemme 5.2.5 et sur la décomposition de Cartan des élément de G qui crée un lien fort entre le flot géodésique et la μ -marche sur T^1S . Cette décompositon affirme que tout élément $g \in G$ s'écrit de sous la forme

$$g = k_g a_{t_g} l_g$$

où $k_g, l_g \in K = PSO_2(\mathbb{R})$, $t_g \geq 0$, $a_{t_g} = \text{diag}(e^{t_g}, e^{-t_g})$.

Fixons une telle décomposition pour chaque élément du groupe (et ce de façon mesurable). On note alors, pour $b \in B$, $b_n \dots b_1 = k_n(b) a_{t_n(b)} l_n(b)$ la décomposition associée au produit $b_n \dots b_1$.

Lemme 5.2.6. *Soit $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$. Alors*

$$\nu_n(\varphi) = \int_{B \times T^1S_0} \varphi\left(\frac{1}{n} \sigma(a_{t_n(b)}, x)\right) d\beta(b) d\lambda_0(x)$$

Démonstration. Cela découle de la K -invariance de l'indice de position i et de la probabilité λ_0 . □

Soit $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_\mu > 0$ le premier exposant de Lypaunov de la probabilité μ sur G (cf. section 2.1 ou bien [16], p.72). Il découle du lemme précédent et du théorème de Fubini que

$$\begin{aligned} \nu_n(\varphi) &= \int_B \nu'_{t_n(b)}\left(\varphi\left(\frac{t_n(b)}{n} \cdot\right)\right) d\beta(b) \\ &= \int_B \nu'_{t_n(b)}\left(\varphi(\lambda_\mu \cdot)\right) d\beta(b) + \int_B \nu'_{t_n(b)}\left(\varphi\left(\frac{t_n(b)}{n} \cdot\right) - \varphi(\lambda_\mu \cdot)\right) d\beta(b) \end{aligned}$$

La positivité du premier Lyapunov ([16], Theorem. 3.31) entraîne que pour β -presque tout $b \in B$, on a $t_n(b) \rightarrow +\infty$ quand n tend vers l'infini. Par le théorème de convergence dominée et le lemme 5.2.5, le premier terme converge donc :

$$\int_B \nu'_{t_n(b)}\left(\varphi(\lambda_\mu \cdot)\right) d\beta(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_{c\lambda_\mu}(\varphi) \tag{1}$$

Vérifions que le second terme tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est à support compact, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in [\lambda_\mu - \delta, \lambda_\mu + \delta]$, on ait $\|\varphi(\alpha \cdot) - \varphi(\lambda_\mu \cdot)\|_\infty < \varepsilon/2$. D'après la loi des grands nombres ([16], lemma 3.27), il existe un rang $n_0 \geq 1$, tel que si $n \geq n_0$, alors

$$\beta\left\{b \in B, \frac{t_n(b)}{n} \in [\lambda_\mu - \delta, \lambda_\mu + \delta]\right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_\infty}$$

Soit $n \geq n_0$, il vient que :

$$\begin{aligned} \left| \int_B \nu'_{t_n(b)}(\varphi(\frac{t_n(b)}{n} \cdot) - \varphi(\lambda_{\mu \cdot})) d\beta(b) \right| &\leq \int_B \|\varphi(\frac{t_n(b)}{n} \cdot) - \varphi(\lambda_{\mu \cdot})\|_{\infty} d\beta(b) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

Combinant (1) et (2), on obtient

$$\nu_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_{c\lambda_{\mu}}(\varphi)$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 5.2.4. □

5.2.3 Application à la récurrence et à la dérive

Nous déduisons le théorème 5.2.1 à partir de la proposition 5.2.4. Les points 1 et 2 sont démontrés séparément.

Récurrence

Le théorème de Schmidt-Conze [78] relie la récurrence ou transience presque-sûre d'un skew-product au comportement en loi asymptotique de son n -ième itéré. Le cas particulier suivant est remarquable :

Théorème (Schmidt-Conze). *Soit $(Z, \mathcal{Z}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $R : Z \rightarrow Z$ un automorphisme préservant la mesure et ergodique. Soit $d \in \{1, 2\}$ et $f : Z \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application mesurable telle que la suite $(n^{-1/d} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ R^k)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une distribution de Cauchy centrée si $d = 1$, ou une loi gaussienne centrée si $d = 2$.*

Alors, pour \mathbb{P} -presque tout $z \in Z$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} f \circ R^k(z) \right\| = 0$$

Corollaire 5.2.7. *Dans le contexte du théorème 5.2.1, la μ -marche sur T^1S est conservative et ergodique pour la mesure de Haar quotient.*

Preuve du corollaire 5.2.7. Nous avons vu dans le chapitre 4 qu'une marche conservative sur T^1S est nécessairement ergodique (corollaire 4.4.1). Il suffit donc de montrer la récurrence-presque sûre. En vue d'appliquer le théorème de Schmidt-Conze, on pose $Z = G^{\mathbb{Z}} \times T^1S_0$, \mathcal{Z} sa tribu produit, $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}} \otimes \lambda_0$, et $R :$

$Z \rightarrow Z, (b, x) \mapsto (Tb, b_1x)$ où T désigne le décalage vers la gauche sur $G^{\mathbb{Z}}$, i.e. $T : (b_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (b_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. L'application T est un automorphisme préservant la mesure et ergodique de $(Z, \mathcal{Z}, \mathbb{P})$. On pose également $f : Z \rightarrow \mathbb{R}, (b, x) \mapsto \sigma(b_1, x)$. En remarquant que $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ R^k(b, x) = \sigma(b_n \dots b_1, x)$, en appliquant proposition 5.2.4 et le théorème de Schmidt-Conze (avec $d = 1$), il vient que pour λ_0 -presque tout $x \in T^1 S_0$, β -presque tout $b \in B$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |\sigma(b_n \dots b_1, x)| = 0$$

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert borné et $\Omega \subseteq T^1 S$ l'ouvert défini par un indice de position $i \in I$. D'après ce qui précède, presque-toute trajectoire de la μ -marche issue de Ω revient infiniment souvent dans Ω . Cela permet de définir une marche de premier retour sur Ω , pour laquelle la mesure de Haar sur Ω est stationnaire. Comme Ω est de volume fini, le théorème de récurrence de Poincaré entraîne que la marche de premier retour est récurrente presque sûre sur Ω , donnant à fortiori la récurrence de la μ -marche sur $T^1 S$ en presque tout point de Ω . Comme l'ouvert I peut être pris arbitrairement grand, cela montre que la μ -marche est récurrente presque-sûre sur $T^1 S$. □

Dérive

Corollaire 5.2.8. *Dans le contexte du théorème 5.2.1, la μ -marche sur $T^1 S$ a une dérive asymptotiquement dense : pour presque tout $x_0 \in T^1 S_0$, β -presque tout $b \in B$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0) - t \right| = 0$$

Démonstration. Fixons des constantes $t \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on note

$$E_n = \{(b, x) \in B \times T^1 S_0, \left| \frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x) - t \right| \leq \varepsilon\}$$

La proposition 5.2.4 implique que la suite $(\beta \otimes \lambda_0(E_n))_{n \geq 1}$ converge vers une limite positive $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$. On a donc $\beta \otimes \lambda_0(\limsup E_n) > \delta$.

Posons

$$E = \{(b, x) \in B \times T^1 S_0, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x) - t \right| \leq \varepsilon\}$$

Comme $E \supseteq \limsup E_n$, on a $\beta \otimes \lambda_0(E) > \delta$. Or l'ensemble E est invariant par la transformation $B \times T^1 S_0 \rightarrow B \times T^1 S_0, (b, x) \mapsto (Tb, b_1x)$ qui est ergodique et préserve la mesure. Il en résulte que $\beta \otimes \lambda_0(E) = 1$. En choisissant ε arbitrairement petit, il vient que $\beta \otimes \lambda_0$ -presque-sûrement

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |\sigma(b_n \dots b_1, x) - t| = 0$$

ce qui termine la preuve. □

5.3 Le cas général d'un revêtement abélien d'une surface hyperbolique de volume fini

On note $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $K = PSO_2(\mathbb{R})$, $\Lambda_0 \subseteq G$ un réseau sans torsion et $\Lambda \subseteq \Lambda_0$ un sous-groupe discret distingué tel que $\Lambda/\Lambda_0 \simeq \mathbb{Z}^d$. Soit comme plus haut $S = K \backslash G / \Lambda$, $S_0 = K \backslash G / \Lambda_0 = S / \mathbb{Z}^d$. Notons $i : T^1 S \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application d'indice de position, supposée \mathbb{Z}^d -équivariante et bornée sur un domaine fondamentale connexe par arcs D pour l'action de \mathbb{Z}^d sur $T^1 S$. Soit $\sigma : G \times T^1 S_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(g, x + \mathbb{Z}^d) \mapsto i(g.x) - i(x)$ le cocycle de déplacement associé à i . On supposera l'indice de position $i(x)$ d'un vecteur $x \in T^1 S$ ne dépend que du point base de x sur S .

Nous allons voir que la dérive d'une μ -trajectoire typique sur $T^1 S$ est asymptotiquement dense dans un sous espace vectoriel E_C de \mathbb{R}^d , engendré par les directions de translations au dessus des cusps déroulés de S_0 . On note $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$ les cusps de S_0 , puis $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{Z}^d$ les translations obtenues en relevant un tour de cusp au revêtement S , et on pose $E_C = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{v_1, \dots, v_s\}$.

Théorème 5.3.1. *Gardons les notations ci-dessus et soit μ une probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-groupe Zariski-dense. Posons $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$.*

Alors pour presque tout $x_0 \in T^1 S_0$, pour β -presque tout $b \in B$, on a

$$\{\text{valeurs d'adhérence de la suite } (\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x_0))_{n \geq 1}\} = E_C$$

Nous expliquons comment adapter la preuve du théorème 5.2.1 pour obtenir une telle généralisation. On commence par se donner un sous-espace vectoriel $E' \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que

$$\mathbb{R}^d = E_C \oplus E'$$

On peut alors décomposer σ en $\sigma = \sigma_C + \sigma'$ où σ_C et σ' sont des cocycles à valeurs respectives dans E_C et E' . Soit λ_0 la probabilité de Haar sur $T^1 S_0 = G / \Lambda_0$.

Lemme 5.3.2. *Dans le contexte du théorème 5.3.1,*

i) Pour presque tout $x_0 \in T^1 S_0$, pour β -presque tout $b \in B$,

$$\frac{1}{n} \sigma'(b_n \dots b_1, x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

ii) [TCL] Soit ν_n la loi image de $\beta \otimes \lambda_0$ par l'application $B \times T^1 S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $(b, x) \mapsto \frac{1}{n} \sigma_C(b_n \dots b_1, x)$. Alors la suite $(\nu_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers une loi de Cauchy centrée sur E_C .

Preuve du lemme 5.3.2 . i) Vérifions d'abord que le cocycle σ' est borné sur le domaine $\text{supp } \mu \times T^1 S_0$. Comme la famille de translatés $(D + k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est localement finie, on a pour tout compact $L \subseteq T^1 S_0$, que

$$\sup\{|\sigma(g, x)|, g \in \text{supp } \mu, x \in L\} < \infty$$

et cela est aussi vrai à fortiori pour la projection σ' .

Il reste donc à voir que $\sigma'(g, x)$ est uniformément borné lorsque g varie dans le support de μ , et x dans un bout de cusp de S_0 . Soit $g = k_g a_{t_g} l_g$ une décomposition de Cartan de g et $\gamma_{g,x} : [0, t_g] \rightarrow T^1 S_0, t \mapsto k_g a_t l_g x$. Comme l'indice i est $PSO_2(\mathbb{R})$ invariant, on peut voir $\sigma(g, x)$ comme la variation de i le long d'un relevé $\tilde{\gamma}_{g,x} : [0, t_g] \rightarrow T^1 S$ du chemin $\gamma_{g,x}$. On choisit x assez haut dans le cusp pour que l'arc $\gamma_{g,x}$ soit entièrement inclus dans le cusp, et ce quelque que soit $g \in \text{supp } \mu$. Comme le domaine D est connexe par arcs, on peut alors compléter le chemin $\gamma_{g,x}$ en un chemin $c_{g,x} \gamma_{g,x} c_x$ contenu dans le cusp, avec extrémités dans le bord du cusp, et de sorte $c_{g,x}, c_x$ se relèvent en des chemins continus de D . Complétons enfin $c_{g,x} \gamma_{g,x} c_x$ en un lacet fermé $\delta c_{g,x} \gamma_{g,x} c_x$ par l'ajout d'un arc δ à valeurs dans le bord du cusp et réalisant moins d'un tour de cusp. Comme le bord du cusp est compact, la variation de i le long d'un relevé $\tilde{\delta}$ à $T^1 S$ est bornée, par une constante $M > 0$ ne dépendant que du cusp en question et du pavage $(D + k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$. Finalement les variations de i le long de relevés à $T^1 S$ de $\gamma_{g,x}$ et $\delta c_{g,x} \gamma_{g,x} c_x$ diffèrent au plus de $4 \sup_D |i| + M$. On en déduit que la distance de $\sigma(g, x)$ à E_C , et donc la norme de $\sigma'(g, x)$, est uniformément bornée lorsque g varie dans le support de μ et x dans un bout de cusp de S_0 .

Le cocycle σ' étant borné sur $\text{supp } \mu \times T^1 S_0$, l'ergodicité de la μ -marche sur $T^1 S_0$ pour la mesure Haar ramène la convergence du point i) à montrer que

$$\int_{G \times T^1 S_0} \sigma'(g, x) d\mu(g) \lambda_0(x) = 0$$

Comme dans la preuve du lemme 5.1.6, cela découle de la simplicité de G et du fait que l'application $g \mapsto \int_{T^1 S_0} \sigma'(g, x) \lambda_0(x)$ est un morphisme de groupes.

ii) La preuve est essentiellement la même que celle de la proposition 5.2.4. Comme dans le lemme 5.2.5, on commence par montrer que la loi $\frac{1}{t}(\sigma_C(a_t, \cdot))_* \lambda_0$ converge faiblement vers une loi de Cauchy centrée sur E_C lorsque t tend vers $+\infty$. Cela s'obtient de [35] en décomposant le cocycle σ_C en $\sigma_C = \sigma_{C,H} + \sigma_{C,F}$, où $\sigma_{C,H}, \sigma_{C,F}$ décrivent respectivement les enroulements du flot à l'intérieur et en dehors des cusps de S_0 . On en déduit alors ii) à l'aide de la décomposition de Cartan et de la positivité de l'exposant de Lyapunov de μ . \square

Preuve du théorème 5.3.1. Le résultat découle du lemme 5.3.2, en raisonnant comme dans la preuve du corollaire 5.2.8. \square

Du théorème 5.3.1] découle un critère de récurrence pour la μ -marche sur T^1S . Il répond positivement à notre conjecture du chapitre 4 dans le cas particulier des marches sur un revêtement abélien de surface hyperbolique de volume fini.

Corollaire 5.3.3. *Soit S un \mathbb{Z}^d -revêtement d'une surface hyperbolique de volume fini. Ecrivons $T^1S = G/\Lambda$ où $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et Λ est un sous-groupe discret. Soit μ une probabilité Zariski-dense à support compact sur G .*

Alors le flot géodésique et la μ -marche sur T^1S sont soit simultanément totalement dissipatifs, soit simultanément conservatifs et ergodiques.

Démonstration. La dichotomie “transience/récurrence et ergodicité” est connue dans le cas du flot géodésique [1]. De plus, nous avons vu au chapitre 4 que la transience du flot entraîne celle de la marche. Il suffit donc de montrer que si le flot géodésique sur T^1S est conservatif ergodique alors c'est aussi le cas de la μ -marche. Le théorème local limite pour le flot géodésique (voir [65, 67]) affirme que pour des ouverts $U, V \subseteq T^1S$,

$$m(a_t U \cap V) \sim c_0 m(U) m(V) t^{-\frac{1}{2} \dim E' - \dim E_C}$$

pour une certaine constante $c_0 > 0$ indépendante de U et V . Nécessairement par conservativité,

$$\frac{1}{2} \dim E' + \dim E_C \leq 1$$

Il y a alors trois cas, correspondant à $(\dim E', \dim E_C) \in \{(1, 0), (2, 0), (0, 1)\}$.

Dans les deux premiers cas, la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(b_n \dots b_1, x)$ où b varie selon β et x selon λ_0 converge vers une loi normale centrée sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 (appliquer [57] section 1.1 pour le cas du flot géodésique et transcrire aux marches par la décomposition de Cartan comme précédemment).

Dans le troisième cas, le lemme 5.3.2 affirme que la variable $\frac{1}{n} \sigma(b_n \dots b_1, x)$ converge en loi vers une loi de Cauchy centrée sur \mathbb{R} .

Pour toutes ces situations, le théorème de Schmidt-Conze cité plus haut entraîne la récurrence de la marche. L'ergodicité de la marche en découle grâce à la dichotomie du corollaire 4.4.1.

□

Chapitre 6

Mesures de Radon stationnaires pour une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$

Sommaire

6.1	Premières considérations	114
6.2	Mesures limites	117
6.3	Cas atomique	119
6.4	Réduction du cas non atomique	121
6.4.1	Rappels sur les groupes algébriques	121
6.4.2	Réduction au théorème de dérive exponentielle	125
6.4.3	Stratégie pour la dérive exponentielle	129
6.5	Non dégénérescence des mesures limites	131
6.5.1	Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret.	132
6.5.2	Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense	141
6.6	Description des fibres	145
6.6.1	Mesures conditionnelles le long des fibres	145
6.6.2	Equirépartition des morceaux de fibres	148
6.7	Théorème local limite	150
6.7.1	Rappels	150
6.7.2	Taille des morceaux de fibres	151
6.8	Loi des angles et contrôle de la dérive	158
6.8.1	Points de densité	158
6.8.2	Convergence des points de densité	161
6.8.3	Contrôle de $\theta_n(b)$	163
6.8.4	Loi des angles	165
6.8.5	Divergence de la projection de Cartan	170
6.8.6	Contrôle de la dérive	171
6.9	Preuve de la dérive exponentielle	173
6.10	Conclusion	177

Introduction

Ce chapitre fit l'objet de l'article [10] aborde le problème de classification des mesures stationnaires pour une marche aléatoire sur un espace homogène de volume infini. Soit G un groupe de Lie réel, $\Lambda \subseteq G$ un sous groupe discret, et μ une probabilité sur G . Comme précédemment, on obtient une marche aléatoire sur le quotient $X = G/\Lambda$ telle que la probabilité de transition à partir d'un point $x \in X$ est donnée par la convolution $\mu \star \delta_x$.

Le comportement de la μ -marche sur X est intimement lié à ses mesures stationnaires. On rappelle qu'une mesure de Radon $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(X)$ est dite *stationnaire* si elle est invariante par la marche, ou plus formellement si $\nu = \int_G g_\star \nu d\mu(g)$ (voir la section 1.1). On précise qu'elle est *ergodique* si elle appartient à un rayon extrémal du cône convexe des mesures de Radon stationnaires sur X (voir la section 1.3).

L'ergodicité d'une mesure stationnaire ν est une information clef pour étudier une marche aléatoire, car elle garantit l'équidistribution de ν -presque toute trajectoire récurrente selon la mesure ν . De plus, par désintégration ergodique, toute mesure stationnaire s'exprime comme moyenne intégrale de mesures stationnaires ergodiques (théorème 1.3.1).

En 2013, Benoist et Quint parviennent à classer les probabilités stationnaires pour une large classe de marches en *volume fini*.

Théorème (Benoist-Quint [14]). *Soit G un groupe de Lie réel, $\Lambda \subseteq G$ un sous groupe discret de covolume fini, $X = G/\Lambda$ et $\mu \in \mathcal{P}(G)$ une probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous groupe Γ tel que $\overline{\text{Ad}\Gamma}^Z$ est semi-simple, Zariski connexe et sans facteur compact. Alors toute probabilité μ -stationnaire ergodique ν sur X est Γ -invariante et homogène.*

La notation $\text{Ad}\Gamma$ désigne l'image de Γ par la représentation adjointe de G , et $\overline{\text{Ad}\Gamma}^Z$ son adhérence de Zariski dans le groupe $\text{Aut}\mathfrak{g}$ des automorphismes de \mathfrak{g} . L'homogénéité signifie que le support de ν est une orbite de son stabilisateur $G_\nu := \{g \in G, g_\star \nu = \nu\}$ (on peut ainsi identifier ν à une mesure G_ν -invariante sur l'espace homogène $G_\nu/G_{\nu,x}$).

L'idée clef est le phénomène de *dérive exponentielle*, découvert quelques années plus tôt dans [13]. La classification des mesures stationnaires vient alors d'être établie par Bourgain, Furman, Lindenstrauss et Mozes dans le cas particulier d'une marche sur le tore \mathbb{T}^d induite par une probabilité $\mu \in SL_d(\mathbb{Z})$ proximale fortement irréductible (voir [21], [22]). Rappelons que la *proximalité* de μ signifie que le semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ engendré par son support contient un élément ayant une valeur propre simple de module strictement supérieur à celui de ses autres valeurs propres, et que l'hypothèse de *forte irréductibilité* signifie que l'action Γ sur \mathbb{R}^d ne préserve pas de réunion finie de sous-espaces vectoriels propres non nuls. La preuve

de [21] s'appuie sur la théorie de Fourier et développe une approche quantitative permettant d'obtenir aussi des résultats d'équidistribution des probabilités de position $(\mu^n \star \delta_x)_{x \in \mathbb{T}^d}$ quand n tend vers l'infini. Cependant, la démarche repose de façon cruciale sur l'hypothèse de proximalité. Benoist et Quint proposent dans [13] une méthode complètement différente qui s'inspire des travaux de Ratner et ne requiert pas d'hypothèse de proximalité.

Théorème (Benoist-Quint [13], Bourgain-Furman-Lindenstrauss-Mozes [21],[22]). *Soit μ une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$ à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible.*

Alors toute probabilité μ -stationnaire ergodique sur le tore \mathbb{T}^d est soit une équi-probabilité sur une Γ -orbite finie dans \mathbb{T}^d , soit la probabilité de Haar.

Les preuves des théorèmes [13] et [14] ont été reprises pour étudier des marches aléatoires dans des cadres similaires. Citons par exemple Eskin et Mirzakhani qui décrivent les mesures invariantes et stationnaires pour l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur l'espace des modules des surfaces de translations ([39]), Brown et Rodriguez Hertz qui s'intéressent plus généralement à des marches par difféomorphismes sur des variétés compactes ([25]), ou encore Sargent et Shapira qui considèrent une marche sur un espace homogène défini par un stabilisateur non discret ([74]).

Ce chapitre aborde le cas où l'espace homogène supportant la marche est de volume *infini*. Peu de résultats sont connus dans cette voie. On se concentre sur un premier cas concret : classer les mesures de Radon stationnaires pour une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Nous réaliserons $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ comme un espace homogène en posant

$$G := (SL_d(\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^d) \oplus \mathbb{R}, \quad \Lambda := (SL_d(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^d) \oplus \{0\}$$

On vérifie que $G/\Lambda \cong \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ et que via cette identification, l'action d'un élément $(g, r, s) \in G$ est donnée pour $(x, t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ par la formule $(g, r, s).(x, t) = (gx + r, s + t)$.

Définissons maintenant notre marche aléatoire. On fixe une mesure de probabilité μ sur $SL_d(\mathbb{Z})$, on note $\Gamma := \langle \text{supp } \mu \rangle \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ le sous semi-groupe engendré par son support, et on se donne $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes. On peut voir Γ comme un sous semi-groupe de G via le plongement $i : \Gamma \hookrightarrow G, g \mapsto (g, 0, \chi(g))$, et l'action de Γ sur $G/\Lambda = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ est alors donnée par $g.(x, t) = (gx, t + \chi(g))$. Comme précédemment, ce contexte induit une marche aléatoire sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, de probabilités de transition $(\mu \star \delta_{(x,t)})_{(x,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}}$. On va démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.0.1. *Supposons la probabilité μ à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible, et supposons la probabilité image $\chi \star \mu$ d'espérance nulle.*

Alors toute mesure de Radon μ -stationnaire ergodique sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ est Γ -invariante et homogène.

On constate que ce théorème décrit les mesures de Radon stationnaires ergodiques, mais plus généralement toutes les mesures de Radon stationnaires sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ car elles s'écrivent comme une moyenne de mesures ergodiques (théorème 1.3.1). Il en découle notamment la rigidité des mesures stationnaires sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$:

Corollaire 6.0.2. *Dans le cadre du théorème 6.0.1, toute mesure de Radon μ -stationnaire sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ est Γ -invariante.*

Le théorème 6.0.1 décrit aussi les probabilités stationnaires pour certaines marches sur \mathbb{T}^d qui n'entrent pas dans le cadre du théorème de Benoist-Quint car induites par une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$ qui n'a pas de moment d'ordre 1. En effet, considérons le cas où $\chi(\Gamma) = \mathbb{Z}$. On peut restreindre notre marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ en une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$, puis considérer la marche induite sur le bloc $\mathbb{T}^d \times \{0\} \equiv \mathbb{T}^d$. Cette marche est donnée par une probabilité $\mu_\tau \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ sans moment d'ordre 1. Le théorème 6.0.1 implique que toute probabilité μ_τ -stationnaire ergodique sur \mathbb{T}^d est soit atomique, soit la probabilité de Haar.

La démonstration du théorème 6.0.1 s'inspirera de [14] mais nécessitera des adaptations pour gérer le volume infini de $G/\Lambda = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Le texte s'organise ainsi :

Section 6.1 : On présente une version plus détaillée du théorème 6.0.1, et on explique l'intérêt d'avoir supposé le paramètre de translation réelle χ de μ -moyenne nulle.

Section 6.2 : On prouve qu'une mesure de Radon stationnaire sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ admet une décomposition en mesures limites. Cela signifie qu'elle est une moyenne intégrale de mesures indexées par les trajectoires de la marche et vérifiant une certaine propriété d'équivariance. La section 2 étend des méthodes d'habitude employées pour l'étude de probabilités stationnaires.

Section 6.3 : On démontre le théorème 6.0.1 pour des mesures de Radon stationnaires ergodiques ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ dont le projeté sur \mathbb{T}^d est atomique. Nous aurons besoin d'exclure ce cas par la suite. La preuve repose sur les propriétés de récurrence de la marche.

A partir de la section 6.4, on fixe une mesure $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ stationnaire ergodique dont le projeté sur \mathbb{T}^d est sans atome.

Section 6.4 : Après quelques rappels sur les groupes algébriques, on explique la stratégie mise en oeuvre pour décrire la mesure ν . L'idée est de montrer que les mesures limites décomposant ν sont chacune invariante par translation sur \mathbb{T}^d suivant une certaine direction limite. Pour cela, on définit un système dynamique fibré (B^+, T^+, β^+) (de mesure infinie) et un flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$ sur B^+ tels que l'invariance recherchée équivaut à l'invariance de la mesure β^+ sous l'action du flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$.

Après désintégration de β^+ le long de $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$, on se ramène à un énoncé général sur (B^+, T^+, β^+) , appelé *théorème de dérive exponentielle* dont la démonstration occupe le reste du texte. La preuve repose sur l'étude des fibres de l'opérateur T^+ , plus précisément de leur intersection avec une fenêtre $W \subseteq B^+$ de mesure finie fixée au préalable.

Section 6.5 : On montre que les mesures limites de ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ sont non dégénérées, i.e. que leurs projections sur \mathbb{T}^d sont sans atomes. Cela permettra plus tard de choisir deux points de B^+ dont les fibres s'écartent à vitesse exponentielle. La preuve distingue les cas où le semi-groupe de translation $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret ou dense. Dans le premier cas, on se ramène à montrer la récurrence hors de $\{0\}$ pour une marche sur le tore. La difficulté est que cette marche n'a pas de moment d'ordre 1. Dans le second cas, on raisonne par l'absurde et on utilise la récurrence de la marche et un argument de connexité.

Section 6.6 : On explicite les fibres de l'opérateur T^+ puis on donne une formule générale décrivant leur distribution au sein d'une fenêtre $W \subseteq B^+$ de mesure finie, du point de vue de la mesure restreinte $\beta^+|_W$. C'est *l'équirépartition des morceaux de fibres*.

Section 6.7 : On prouve un théorème local limite pour le cocycle (σ, χ) où σ désigne le cocycle d'Iwasawa et χ le paramètre de translation réelle de la marche. Grâce à la section 6, cela permet d'estimer selon quelle proportion une fibre du système dynamique (B^+, T^+, β^+) rencontre la fenêtre $W \subseteq B^+$.

Section 6.8 : On démontre la *loi des angles* qui permet de contrôler l'écart (en termes de norme et de direction) entre deux morceaux de fibres du système dynamique (B^+, T^+, β^+) .

Section 6.9 : A l'aide des sections 6.5-6.8, on prouve le théorème de dérive exponentielle.

Section 6.10 : On explique comment le théorème de dérive exponentielle permet de conclure la preuve du théorème 6.0.1.

6.1 Premières considérations

On présente une version détaillée du théorème 6.0.1, et on explique l'intérêt d'avoir supposé le paramètre de translation réelle χ de μ -moyenne nulle.

Notations. On se donne μ une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$, on note $\Gamma := \langle \text{supp } \mu \rangle$ le sous semi-groupe de $SL_d(\mathbb{Z})$ engendré par son support, et on fixe $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes. Ces données induisent une action de Γ sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ via la formule $g.(x, t) = (gx, t + \chi(g))$, puis une marche aléatoire de probabilités de transitions données par $(\mu \star \delta_{(x,t)})_{(x,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}}$. Nous notons $\mathcal{M}^{\text{Rad}}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, et $\mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ l'ensemble des mesures de probabilité de $SL_d(\mathbb{Z})$.

Nous prouvons une version plus explicite du théorème 6.0.1 :

Théorème 6.1.1. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ une probabilité à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible et soit $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes tel que la probabilité $\chi \star \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée. On se donne une mesure de Radon μ -stationnaire ergodique ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Il y a plusieurs cas :*

1er cas : il existe un point $x \in \mathbb{T}^d$ pour lequel $\nu(x \times \mathbb{R}) > 0$. Alors ce point est rationnel, on note $\omega := \Gamma x \subseteq \mathbb{T}^d$ sa Γ -orbite (finie) dans \mathbb{T}^d . Si $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret, alors ν est une mesure uniforme sur une Γ -orbite incluse dans $\omega \times \chi(\Gamma)$ ou un translaté. Si $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense, alors $\nu = \nu_\omega \otimes \text{leb}$ où $\nu_\omega \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$ est une mesure uniforme sur ω .

2ème cas : la mesure projetée $\nu(\cdot \times \mathbb{R}) \in \overline{\mathcal{M}^{\text{Rad}}(\mathbb{T}^d)}$ est sans atome. La mesure ν est alors une mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d \times \overline{\chi(\Gamma)}$ ou un translaté.

Nous allons maintenant mettre en lumière quelques remarques essentielles pour la suite du texte, à savoir que la μ -marche que l'on considère est récurrente presque sûre, et que les mesures de Radon μ -stationnaires sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ projetées sur l'axe réel sont $\chi(\Gamma)$ -invariantes. Le lemme général derrière ce phénomène est le suivant :

Lemme 6.1.2. *Soit $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une probabilité centrée sur \mathbb{R} , notons $\Gamma_m \subseteq \mathbb{R}$ le semi-groupe engendré par son support. Alors :*

- *Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, presque toute m -trajectoire issue de t_0 revient arbitrairement proche de t_0 .*
- *Toute mesure de Radon m -stationnaire sur \mathbb{R} est Γ_m -invariante (pour l'action par translation).*

En particulier, si Γ_m est discret dans \mathbb{R} , alors Γ_m est un sous groupe de \mathbb{R} . Si Γ_m n'est pas discret, alors Γ_m est dense dans \mathbb{R} et la mesure de Lebesgue est la seule mesure de Radon m -stationnaire sur \mathbb{R} (à scalaire près).

Démonstration. Pour prouver le premier point, donnons nous $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes de loi m . La loi des grands nombres affirme que presque pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a $X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) = o(n)$. Le lemme 2.18 de [16] sur la divergence des sommes de Birkhoff affirme que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $(X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega))_{n \geq 0}$ admet une sous suite tendant vers 0, ce qui donne le résultat.

Le deuxième point est un corollaire du théorème de Choquet-Deny ([30]). On en donne une démonstration dans ce cas particulier. Soit $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R})$ m -stationnaire. Notons $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\beta = m^{\mathbb{N}^*}$. Le théorème de convergence presque sûre des martingales positives permet de définir β -presque sûrement ses mesures limites $\nu_b = \lim(b_n \dots b_1)_* \nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R})$ (voir section 1.4.1). D'après le premier point, nous avons $\nu_b = \nu$ β -ps. Par ailleurs, les ν_b vérifient la relation d'équivariance : $b_{1*} \nu_{b_2 b_3 \dots} = \nu_b$ β -ps. On en déduit que ν est invariante par μ -presque tout élément de \mathbb{R} d'où le résultat.

Dans le cas où Γ_m est discret, le premier point donne que Γ_m est stable par passage à l'opposé, donc est un groupe. Si le semi-groupe Γ_m n'est pas discret, le premier point assure qu'il est dense dans \mathbb{R} . Dans ce cas, soit λ une mesure de Radon Γ_m invariante sur \mathbb{R} . Comme le stabilisateur de λ dans \mathbb{R} est fermé, on a λ \mathbb{R} -invariante, donc multiple de la mesure de Lebesgue. \square

On en déduit les propriétés annoncées plus haut.

Corollaire 6.1.3. *Dans le cadre du théorème 6.0.1 : Soit $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ une mesure de Radon μ -stationnaire sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Alors*

- ν est conservative : pour ν -presque tout $(x_0, t_0) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, presque toute μ -trajectoire issue de (x_0, t_0) revient arbitrairement proche de (x_0, t_0) .
- La projection de ν sur \mathbb{R} , notée par la suite $\nu(\mathbb{T}^d \times \cdot) \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R})$, est $\chi(\Gamma)$ -invariante (et en particulier un multiple de la mesure de Lebesgue si $\chi(\Gamma)$ est dense dans \mathbb{R}).

Démonstration. La conservativité de ν découle du premier point dans le lemme 6.1.2 appliqué à la probabilité centrée $\chi_* \mu$. En effet, ce dernier garantit que pour tout ouvert borné de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ de la forme $U := \mathbb{T}^d \times]-r, r[$ avec $r > 0$, presque toute μ -trajectoire issue de U revient dans U . Cela permet de considérer la marche induite sur U , qui est nécessairement récurrente par le théorème de récurrence de Poincaré.

Par ailleurs, la mesure projetée $\nu(\mathbb{T}^d \times \cdot) \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R})$ est $\chi_* \mu$ -stationnaire donc $\chi(\Gamma)$ -invariante par le lemme 6.1.2. \square

La conservativité garantit que les caractérisations usuelles de l'ergodicité en mesure finie sont encore vraies dans notre situation (voir proposition 1.3.6). En particulier,

Corollaire 6.1.4. *Soit $\nu, \nu' \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ des mesures de Radon μ -stationnaires sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Supposons ν ergodique et $\nu' \ll \nu$. Alors il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$\nu' = c\nu$$

6.2 Mesures limites

La notion de mesure de Radon limite a été introduite au premier chapitre dans un cadre très général. Nous observons ici quelques propriétés supplémentaires propres au cas de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. La preuve du théorème 6.0.1 consistera (essentiellement) à montrer que ces mesures limites sont invariantes par translation de la coordonnée en \mathbb{T}^d selon des directions denses dans le tore.

On reprend les notations de la section 6.1. En particulier μ est une probabilité sur $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ dont le poussé en avant $\chi_*\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centré. On introduit $B := \Gamma^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*} \in \mathcal{P}(B)$, $T : B \rightarrow B$, $b = (b_i)_{i \geq 1} \mapsto (b_{i+1})_{i \geq 1}$ le décalage unilatère. Le résultat suivant rappelle et renforce la définition des mesures limites du chapitre 1.

Lemme 6.2.1. *Soit $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ une mesure de Radon μ -stationnaire sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Il existe une application mesurable $B \rightarrow \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$, $b \mapsto \nu_b$ telle que pour β -presque tout $b \in B$, on a la convergence $(b_1 \dots b_n)_*\nu \rightarrow \nu_b$ pour la topologie faible- \star . De plus,*

- Pour β -presque tout $b \in B$, on a $(b_1)_*\nu_{Tb} = \nu_b$
- $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$
- Pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et β -presque tout $b \in B$, on a $\nu(\mathbb{T}^d \times I) = \nu_b(\mathbb{T}^d \times I)$

Démonstration. La convergence qui définit les ν_b , la relation d'équivariance et l'inégalité $\nu \geq \int_B \nu_b d\beta(b)$ sont démontrées dans la section 1.4.1. Il reste à vérifier le troisième point. Fixons $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné.

1er cas : $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ discret. D'après le lemme 6.1.2, $\chi(\Gamma)$ est un groupe, on peut donc supposer $\chi(\Gamma) = \mathbb{Z}$ puis ν portée sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$ par ergodicité. D'après l'inégalité $\nu \geq \int_B \nu_b d\beta(b)$, le résultat est vrai si I ne rencontre pas \mathbb{Z} . On peut donc supposer $I =]k - 1/2, k + 1/2[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Soit $b \in B$ tel que $(b_1 \dots b_n)_*\nu \rightarrow \nu_b$, $\nu_b(\mathbb{T}^d \times \partial I) = 0$ et tel qu'il existe une extraction $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $\chi(b_1 \dots b_{\sigma(n)}) = 0$. On a alors $\nu_b(\mathbb{T}^d \times I) = \lim \nu((b_1 \dots b_{\sigma(n)})^{-1}\mathbb{T}^d \times I) = \nu(\mathbb{T}^d \times I)$.

2ème cas : $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ dense. La mesure $\nu(\mathbb{T}^d \times \cdot) \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R})$ est un multiple de la mesure de Lebesgue (corollaire 6.1.3). En particulier, $\nu(\mathbb{T}^d \times \partial I) = 0$. On se donne $b \in B$ tel que $(b_1 \dots b_n)_*\nu \rightarrow \nu_b$, $\nu_b(\mathbb{T}^d \times \partial I) = 0$ et tel qu'il existe une extraction $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $\chi(b_1 \dots b_{\sigma(n)}) \rightarrow 0$. Alors $\nu_b(\mathbb{T}^d \times I) = \lim \nu((b_1 \dots b_{\sigma(n)})^{-1}\mathbb{T}^d \times I) = \lim \nu(\mathbb{T}^d \times I - \chi(b_1 \dots b_{\sigma(n)}) = \nu(\mathbb{T}^d \times I)$.

□

On donne un premier corollaire de cette définition, qui autorise de modifier la probabilité μ induisant la marche :

Stationnarité et temps d'arrêt. Comme nous l'avions remarqué dans la section 1.4.2, le résultat précédent entraîne qu'une mesure μ -stationnaire est aussi μ_τ -stationnaire où μ_τ désigne la probabilité μ conditionnée par un temps d'arrêt τ . Rappelons l'énoncé précis. Soit $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ la sous tribu des n premières coordonnées, $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$. On suppose τ fini β -ps. On note $\mu_\tau \in \mathcal{P}(\Gamma)$ la loi de $b_1 \dots b_{\tau(b)}$ quand b varie selon β .

Corollaire 6.2.2. *La mesure ν est μ_τ -stationnaire.*

Démonstration. Cela découle de l'égalité $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$ et du lemme 1.4.2. □

Dans le cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret, nous serons souvent amenés à conditionner μ par rapport au temps d'arrêt $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, b \mapsto \inf\{n \geq 1, \chi(b_1 \dots b_n) = 0\}$ qui donne le temps de premier retour d'une trajectoire à son bloc de départ (β -presque sûrement fini d'après le corollaire 6.1.3). On note $\Gamma_0 := \{g \in \Gamma, \chi(g) = 0\}$ le semi-groupe engendré par le support de μ_τ . Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 6.2.3. *Le groupe Γ_0 est fortement irréductible sur \mathbb{R}^d .*

Démonstration. Soit $g, h \in \Gamma$. Comme $\chi(\Gamma)$ est un groupe (lemme 6.1.2), il existe $g', h' \in \Gamma$ tels que $\chi(g') = -\chi(g), \chi(h') = -\chi(h)$. Ainsi le commutateur $[g, h] = (ghg'h')(hgg'h')^{-1} \in \Gamma_0\Gamma_0^{-1} \subseteq \bar{\Gamma}_0^Z$. On en déduit que $\bar{\Gamma}_0^Z \supseteq [\Gamma, \Gamma]^Z = [G, G] \supseteq G_c$ où $G = \bar{\Gamma}^Z$ est l'adhérence de Zariski de Γ (semi-simple). Comme Γ est fortement irréductible par hypothèse, c'est aussi le cas de G , puis de $\bar{\Gamma}_0^Z$ et Γ_0 . □

6.3 Cas atomique

Dans cette section, on prouve le théorème 6.1.1 dans le cas où la mesure projetée $\nu(\cdot \times \mathbb{R}) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ admet un atome. Les notations sont celles des sections précédentes.

Proposition 6.3.1 (cas atomique). *Soit $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ une probabilité à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible, et soit $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes tel que la probabilité image $\chi_*\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée. On se donne une mesure de Radon μ -stationnaire ergodique ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{T}^d$ pour lequel $\nu(\{x\} \times \mathbb{R}) \in]0, +\infty]$. Alors le point x est rationnel. On note $\omega := \Gamma x \subseteq \mathbb{T}^d$ sa Γ -orbite. Il y a deux cas :*

1. *Si $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret, alors ν est une mesure uniforme sur une Γ -orbite incluse dans $\omega \times \chi(\Gamma)$ ou un translaté.*
2. *Si $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense, alors $\nu = \nu_\omega \otimes \text{leb}$ où $\nu_\omega \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$ est une mesure uniforme sur ω .*

Remarque. *Dans le premier cas de la proposition, le sous ensemble $\omega \times \chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ est stable par Γ mais peut contenir plusieurs Γ -orbites. Par exemple, considérons les matrices $g_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mu := \frac{1}{4}(\delta_{g_0} + \delta_{g_0^{-1}} + \delta_{g_1} + \delta_{g_1^{-1}})$. Le semi-groupe Γ engendré par le support de μ est un sous groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$, librement engendré par g_0, g_1 , et Zariski dense dans $SL_2(\mathbb{R})$. On note $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme défini par $\chi(g_0) = 0$, $\chi(g_1) = 1$. Le point $x = (\frac{1}{4}, 0) \in \mathbb{T}^2$ est tel que $g_0.x = x$, $g_1.x \neq x$, $g_0g_1x = g_1x$, $g_1^2.x = x$. Ainsi $\Gamma x = \{x, g_1x\}$ dans \mathbb{T}^2 . Finalement, dans $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, l'ensemble $\Gamma.(x, 0) := \{(y, k) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{Z}, y = x \text{ si } k \text{ pair, } y = g_1x \text{ sinon}\}$ est une Γ -orbite strictement incluse dans $\Gamma x \times \chi(\Gamma)$.*

La suite de la section est consacrée à la preuve de la proposition.

1) *Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret.*

Rappelons que $\chi(\Gamma)$ est alors un sous groupe de \mathbb{R} (via le lemme 6.1.2). Le cas où $\chi(\Gamma) = \{0\}$ est celui traité par Benoist-Quint. On peut supposer $\chi(\Gamma) = \mathbb{Z}$ et ν portée par $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\nu(x \times \{k\}) > 0$. On note $D_k = \mathbb{T}^d \times \{k\}$ le k -ième bloc de $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$, et $\tau : B \rightarrow \llbracket 1, +\infty \rrbracket, b \mapsto \inf\{n \geq 1, \chi(b_1 \dots b_n) = 0\}$ le temps que met une trajectoire pour revenir au bloc duquel elle est partie. C'est un temps d'arrêt fini β -ps. On note $\mu_\tau \in \mathcal{P}(\Gamma)$ la loi de $b_{\tau(b)} \dots b_1$ (qui est aussi celle de $b_1 \dots b_{\tau(b)}$). La loi μ_τ régit la chaîne de Markov induite sur D_k donc $\nu|_{D_k}$ est μ_τ -stationnaire ergodique. C'est aussi le cas de sa partie atomique de poids maximal. On en déduit que $\nu|_{D_k}$ est une mesure uniforme sur une Γ_0 -orbite finie, où $\Gamma_0 = \{g \in \Gamma, \chi(g) = 0\} \subseteq \Gamma$ est le semi-groupe engendré par le support de μ_τ .

Le lemme 6.2.3 assure que l'action de Γ_0 sur \mathbb{R}^d est irréductible donc que les atomes de $\nu|_{D_k}$ sont des points rationnels dans \mathbb{T}^d . Notons $\omega = \Gamma.x \subseteq \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ la Γ -orbite de x dans \mathbb{T}^d . La mesure $\nu' = \sum_{y \in \omega} \delta_y \otimes \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ est μ -stationnaire et $\nu \ll \nu'$. Le support de ν étant dénombrable, les mesures $\nu'_{|\text{supp}\nu}$ et ν sont donc équivalentes puis proportionnelles (par le corollaire 6.1.4 et l'ergodicité de ν), ce qui conclut.

2) *Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense.*

Soit $x \in \mathbb{T}^d$ tel que $\nu(x \times \mathbb{R}) > 0$. Montrons qu'il existe une constante $c_x > 0$ telle que $\nu|_{x \times \mathbb{R}} = c_x \delta_x \otimes \text{leb}$. Par conservativité de ν , presque toute μ -trajectoire issue de $x \times \mathbb{R}$ revient à $x \times \mathbb{R}$, autrement dit le temps d'arrêt

$$\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, b \mapsto \inf\{n \geq 0, b_n \dots b_1 x = x\}$$

est fini β -presque sûrement. On note $\mu_\tau \in \mathcal{P}(\Gamma)$ la loi de $b_{\tau(b)} \dots b_1$ lorsque b varie suivant β , elle régit la marche induite sur $x \times \mathbb{R}$. Cette marche étant à fortiori conservative, le lemme 6.1.2 (ou plutôt sa démonstration) implique que la mesure $\nu|_{x \times \mathbb{R}}$ est invariante par le support de μ_τ . Comme $\nu|_{x \times \mathbb{R}}$ est de plus μ_τ -ergodique et sans atome (voir le 2ème point du corollaire 6.1.3), la composante de translation $\chi_\star \mu_\tau$ n'est pas contenue dans un réseau $r\mathbb{Z}$ pour un $r > 0$. Par le lemme 6.1.2, on peut donc écrire $\nu|_{x \times \mathbb{R}} = c_x \delta_x \otimes \text{leb}$ pour une constante $c_x > 0$.

Notons $E = \{x \in \mathbb{T}^d, \nu(x \times \mathbb{R}) > 0\}$ et P_μ l'opérateur de Markov associé à μ (voir la section 1.1). Si $x \in E$, et $g \in \text{supp } \mu$, alors par stationnarité de ν ,

$$\nu(gx \times \mathbb{R}) = \int_G \nu(h^{-1}gx \times \mathbb{R}) d\mu(h) \geq \mu(g)\nu(x \times \mathbb{R}) > 0$$

Ainsi $gE \subseteq E$ puis $g.(E \times \mathbb{R}) \subseteq E \times \mathbb{R}$, entraînant que $P_\mu 1_{E \times \mathbb{R}} \geq 1_{E \times \mathbb{R}}$. Par conservativité de ν , on a nécessairement $P_\mu 1_{E \times \mathbb{R}} = 1_{E \times \mathbb{R}}$ ν -pp. Notons en effet $\varphi = P_\mu 1_{E \times \mathbb{R}} - 1_{E \times \mathbb{R}}$. Alors φ une fonction bornée non négative telle que $\sum_{k \geq 0} P_\mu^k \varphi$ est bornée, donc est nulle ν -pp par conservativité de ν .

L'ergodicité de la mesure ν entraîne alors qu'elle est concentrée sur $E \times \mathbb{R}$, et par ce qui précède :

$$\nu = \sum_{x \in E} c_x \delta_x \otimes \text{leb}$$

La mesure finie $\sum_{x \in E} c_x \delta_x$ sur \mathbb{T}^d est μ -stationnaire ergodique car c'est le cas de la mesure ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Comme elle est de plus atomique, il s'agit nécessairement d'une mesure uniforme sur la Γ_μ -orbite d'un point rationnel. On rappelle que cela se prouve en remarquant que la marche préserve la couche de poids maximal $\{x \in E, c_x = \max_{y \in E} c_y\}$, qui coïncide donc avec E tout entier par ergodicité, et doit être de cardinal fini. La rationalité de x provient du fait que sa Γ_μ -orbite est finie et que Γ_μ est supposé fortement irréductible.

6.4 Réduction du cas non atomique

D'après la conclusion de la section 6.3, nous avons réduit le problème au cas où la mesure projetée $\nu(\cdot \times \mathbb{R}) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ est sans atome. Le reste du texte est consacré à la preuve du résultat suivant :

Théorème 6.4.1. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ une probabilité à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible, et soit $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes tel que la probabilité $\chi_*\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée. Alors toute mesure de Radon μ -stationnaire ergodique ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ dont la projection $\nu(\cdot \times \mathbb{R}) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ est sans atome est (à translation près) une mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d \times \chi(\Gamma)$.*

Toute mesure μ -stationnaire (ergodique) sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ étant $\frac{1}{2}(\mu + \delta_e)$ -stationnaire (ergodique), et le cas où $\chi \equiv 0$ ayant été traité dans [14], on pourra supposer :

$$\mu(e) > 0 \quad \text{et} \quad \chi \neq 0$$

La méthode que nous allons employer s'inspire de celle de Benoist-Quint [14]. L'approche consiste à prouver que les mesures limites $\nu_b \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ sont invariantes par translations de la coordonnée \mathbb{T}^d suivant des directions denses dans le tore. On commence par des rappels sur les groupes algébriques réels semi-simples. Remarquons que l'adhérence de Zariski $G := \bar{\Gamma}^Z$ de Γ dans $SL_d(\mathbb{R})$ est bien semi-simple ([13], lemme 8.5).

6.4.1 Rappels sur les groupes algébriques

Cette sous-section rappelle les théorèmes de structure des groupes algébriques réels semi-simples, les notions de projection de Cartan et de cocycle d'Iwasawa, leur interprétation en terme de représentations, une description de la variété drapeau à partir de représentations proximales, et enfin les propriétés d'une marche aléatoire sur la variété drapeau. On conseille pour une première lecture de supposer le groupe G en question Zariski-connexe, ce qui allège les notations. Pour plus de détails, on peut consulter la référence [16], notamment les sections 5.7 – 5.10, 7.1 – 7.5. Les groupes algébriques considérés seront tous *linéaires*.

Soit G un groupe algébrique réel semi-simple, K un sous groupe compact maximal de G , \mathfrak{g} et \mathfrak{k} leurs algèbres de Lie. On note $\mathfrak{s} := \mathfrak{k}^\perp$ l'orthogonal de \mathfrak{k} pour la forme de Killing sur \mathfrak{g} . Comme elle est non-dégénérée sur \mathfrak{k} , on a $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Lie abélienne maximale. C'est un sous-espace de Cartan i.e. une sous algèbre de \mathfrak{g} abélienne ad-diagonalisable sur \mathfrak{g} et maximale pour ces propriétés (mais elle n'est pas forcément abélienne maximale dans \mathfrak{g}). On note $\mathfrak{g} := \mathfrak{z} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha)$ la décomposition de \mathfrak{g} en espaces de racines associée, où $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^* - \{0\}$ désigne

l'ensemble des racines de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} , et $\mathfrak{g}_\alpha := \{y \in \mathfrak{g}, \forall x \in \mathfrak{a}, \text{adx}(y) = \alpha(x)y\}$, $\mathfrak{z} := \{y \in \mathfrak{g}, \forall x \in \mathfrak{a}, \text{adx}(y) = 0\}$. On choisit ensuite $\Pi \subseteq \Sigma$ une base de Σ et on note $\Sigma^+ \subseteq \Sigma$ l'ensemble des racines positives de Σ (i.e. s'écrivant comme somme d'éléments de Π). Posons $\mathfrak{u} := \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$ sous-algèbre nilpotente de \mathfrak{g} , $\mathfrak{a}^+ := \{x \in \mathfrak{a}, \forall \alpha \in \Sigma^+, \alpha(x) \geq 0\}$.

On revient maintenant au groupe G . On note G_c la composante Zariski-connexe de G contenant l'élément neutre, $K_c = K \cap G_c$ sous groupe compact maximal de G_c . On appelle A et $U \subseteq G_c$ les sous groupes de G Zariski-fermés Zariski-connexes d'algèbres de Lie respectives \mathfrak{a} et \mathfrak{u} (ils existent bien). On note $P := N_G(\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{u})$ le sous-groupe parabolique minimal associé à Σ^+ . On peut écrire $P = M \exp(\mathfrak{a})U$ où $M := P \cap K$ est un sous groupe qui rencontre chaque composante connexe de G , qui normalise A (donc $\exp(\mathfrak{a})$), et tel que $M_c := M \cap G_c$ centralise A .

Introduisons maintenant quelques décompositions utiles de G .

Lemme 6.4.2 (Décomposition de Cartan).

$$G = K \exp(\mathfrak{a}^+) K_c$$

Plus précisément, pour tout $g \in G$, il existe $k \in K, l_c \in K_c$ et un unique élément $x \in \mathfrak{a}^+$ tel que $g = k \exp(x) l_c$. On note $\kappa(g) = x$, appelé projection de Cartan de g .

Lemme 6.4.3 (Décomposition d'Iwasawa).

$$G = K \exp(\mathfrak{a}) U$$

Plus précisément, l'application $K \times \exp(\mathfrak{a}) \times U \rightarrow G, (k, a, u) \mapsto kau$ est un homéomorphisme.

On définit la variété drapeau $\mathcal{P} := G/P_c$ où $P_c := P \cap G_c$. Elle jouera un rôle clef dans toute la suite du texte. Le groupe G agit sur \mathcal{P} par translation à gauche et l'action du sous groupe K est transitive. Notons $\xi_0 := P_c/P_c$ le drapeau standard. On définit sur \mathcal{P} un cocycle continu $\sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}$ appelé cocycle d'Iwasawa : soit $g \in G$, on note $\sigma(g, \xi_0)$ l'unique élément de \mathfrak{a} tel que $g \in K \exp(\sigma(g, \xi_0))U$; si $\xi \in \mathcal{P}$ est quelconque, on écrit $\xi = kP_c$ pour un $k \in K$ et on pose $\sigma(g, \xi) = \sigma(gk, \xi_0)$.

Le groupe des composantes connexes $F := G/G_c$ a plusieurs actions naturelles. Il agit à droite sur la variété drapeau $\mathcal{P} := G/P_c$ à travers l'identification $F \equiv P/P_c$. Il agit aussi (à gauche) sur l'espace de Cartan \mathfrak{a} de la façon suivante : si $f \in F$ est représenté par $m \in M$, alors l'action de f sur \mathfrak{a} est donnée par la représentation adjointe $\text{Ad}m$ restreinte à \mathfrak{a} . Cette action est bien définie d'après les propriétés de M et M_c énoncées plus haut. Par ailleurs, le cocycle d'Iwasawa $\sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}$ est équivariant à droite pour ces actions au sens où pour $g \in G, \xi \in \mathcal{P}, f \in F$, on a $\sigma(g, \xi f) = f^{-1} \sigma(g, \xi)$.

Rappelons quelques éléments de théorie du plus haut poids pour une représentation de G_c . Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $\rho : G_c \rightarrow SL(V)$ une

représentation algébrique irréductible de G_c . Alors l'action de l'algèbre de Lie \mathfrak{a} induite sur V est diagonalisable. On note $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ une décomposition de V en sous-espaces propres. Chaque V_i correspond à une forme linéaire $\alpha_i \in \mathfrak{a}^*$. Cet ensemble de formes linéaires admet un (unique) plus grand élément $\omega \in \mathfrak{a}^*$ au sens où pour tout $i \in I$, $\omega - \alpha_i$ est somme de racines dans la base Π . On appelle ω le *plus haut poids* de la représentation ρ . Le sous-espace propre associé est $V^U := \{v \in V, \rho(U)v = v\}$. Sa dimension est appelée *dimension proximale* de $\rho(G_c)$. On dit que la représentation ρ est *proximale* si sa dimension proximale est égale à 1.

Une représentation (V, ρ) de G_c peut se “prolonger” en une représentation de G appelée *représentation induite*. Elle est construite ainsi : on note

$$W := \{\varphi : G \rightarrow V, \varphi(\cdot g_c) = \rho(g_c)^{-1}\varphi\}$$

\mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $|G/G_c| \cdot \dim V$, et pour $g \in G$, $\varphi \in W$, on pose $\rho_W(g)\varphi := \varphi(g^{-1}\cdot)$. On peut décomposer W en copies de V indexées par l'ensemble des composantes connexes $F := G/G_c$ de G . Pour cela on pose pour $f \in F$, $V^f := \{\varphi \in W, \varphi = 0 \text{ en dehors de } f\}$ et on remarque que $W = \bigoplus_{f \in F} V^f$. Notons $G \rightarrow F, g \mapsto f_g$ le morphisme naturel. On identifie $V^{f_e} \cong V$ via l'isomorphisme $\varphi \mapsto \varphi(e)$. Pour tout $g \in G$, $\rho_W(g)V = V^{f_g}$, et si $g \in G_c$, alors $\rho_W(g) : V \rightarrow V$ coïncide avec $\rho(g)$.

Le lemme suivant permet de voir toute représentation de G à travers une représentation induite par G_c .

Lemme 6.4.4. *Soit (V, ρ) une représentation de G , $(W, \rho_W) = \text{Ind}_{G_c}^G(V, \rho)$ la représentation induite par $\rho|_{G_c}$. Il existe une (unique) application linéaire G -équivariante $\Psi : W \rightarrow V$ telle que $\Psi|_V = \text{Id}_V$.*

Nous allons maintenant voir comment la projection de Cartan et le cocycle d'Iwasawa s'interprètent en termes de représentations. Donnons nous (V, ρ) une représentation algébrique irréductible de G_c , on note $\omega \in \mathfrak{a}^*$ son plus haut poids, $r \in \mathbb{N}$ la dimension proximale de $\rho(G_c)$ et $(W, \rho_W) = \text{Ind}_{G_c}^G(V, \rho)$ la représentation induite à G . On munit W d'un “bon” produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ où “bon” signifie que $\rho_W(K)$ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (noté plus tard $\rho_W(K) \subseteq O(W)$), que $\rho_W(A)$ est constitué d'éléments auto-adjoints (noté plus tard $\rho_W(A) \subseteq \text{Sym}(W)$), et que les sous-espaces $(V^f)_{f \in F}$ sont orthogonaux entre eux. On introduit aussi une application G -équivariante de \mathcal{P} vers la variété Grassmannienne $\Pi_{f \in F} \mathbb{G}_r(V^f)$ donnée par :

$$\mathcal{P} \rightarrow \Pi_{f \in F} \mathbb{G}_r(V^f), \xi = g\xi_0 \mapsto V_\xi := \rho_W(g)V^U$$

On a alors le dictionnaire suivant :

Lemme 6.4.5. *Soit $g \in G$, $\xi \in \mathcal{P}$*

- $\omega(\kappa(g)) = \log(\|\rho_W(g)|_V\|)$
- $\omega(\sigma(g, \xi)) = \log \frac{\|\rho_W(g)w\|}{\|w\|}$ pour $w \in V_\xi$

La combinaison du lemme 6.4.4 et du lemme 6.4.5 donnent une interprétation de la projection de Cartan et du cocycle d'Iwasawa en termes de représentations algébriques fortement irréductibles de G . Plus explicitement, soit (V, ρ) une telle représentation, $\omega \in \mathfrak{a}^*$ et $r \geq 0$ comme précédemment. On peut munir V d'un produit scalaire $\rho(K)$ -invariant tel que $\rho(A) \subseteq \text{Sym}(V)$ (cf. [16], lemma 7.9). Pour $\xi = g\xi_0 \in \mathcal{P}$, on pose $V_\xi := gV^U$. Alors l'application $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{G}_r(V)$, $\xi \mapsto V_\xi$ et le plus haut poids $\omega \in \mathfrak{a}^*$ sont F -invariants et $\omega(\kappa(g)) = \log(\|\rho(g)\|)$ et $\omega(\sigma(g, \xi)) = \log \frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|}$ pour $v \in V_\xi$.

Les paragraphes précédents montrent comment les objets algébriques tels que \mathcal{P} , \mathfrak{a} , κ , σ fournissent des informations intrinsèques qui décrivent simultanément toutes les représentations fortement irréductibles de G . Réciproquement, ces objets peuvent être caractérisés par un nombre fini de représentations irréductibles proximales de G_c .

Lemme 6.4.6. *Il existe une famille finie $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ de représentations algébriques proximales irréductibles de G_c telle que :*

- l'application produit

$$\mathcal{P} \rightarrow \prod_{f \in F} \prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{P}(V_\alpha^f), \quad \xi \mapsto (V_{\alpha, \xi})_{\alpha \in \Pi}$$

est un plongement G -équivariant.

- les plus haut poids $(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ de ces représentations forment une base de \mathfrak{a}^*

Dans la suite on fixe une telle famille $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$. On munit chaque représentation induite W_α d'un "bon" produit scalaire. On a alors une distance d_α^f sur $\mathbb{P}(V_\alpha^f)$ donnée par $d_\alpha^f(\mathbb{R}v, \mathbb{R}w) := \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \|w\|}$ pour tout $v, w \in V_\alpha^f - \{0\}$. Etant donné $f \in F$, on munit $\prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{P}(V_\alpha^f)$ de la distance produit $d((\mathbb{R}v_\alpha), (\mathbb{R}w_\alpha)) := \sum_{\alpha \in \Pi} d_\alpha^f(\mathbb{R}v_\alpha, \mathbb{R}w_\alpha)$. Cela induit une distance sur \mathcal{P} (telle que deux points appartenant à des composantes connexes différentes sont par convention à distance infinie).

Terminons les rappels par la dynamique des marches aléatoires sur la variété drapeau, dont une version élémentaire a été présentée en section 2.1. Pour plus de détails, on pourra consulter ([16], 9.1). Soit $\mu \in \mathcal{P}(G)$ une probabilité sur G dont le support engendre un sous semi-groupe Zariski-dense de G . Notons $\mu_{G_c} \in \mathcal{P}(G_c)$ la loi du premier retour à G_c pour la marche à droite sur G . Plus formellement, on pose $B = G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, $\tau_{G_c} : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $b \mapsto \inf\{n \geq 1, b_1 \dots b_n \in G_c\}$ le temps de retour à G_c (fini β -ps), et on définit μ_{G_c} comme étant la loi de $b_1 \dots b_{\tau_{G_c}(b)}$ quand b varie suivant β .

La composante connexe $\mathcal{P}_c := G_c/P_c$ de la variété drapeau admet une unique probabilité μ_{G_c} -stationnaire $\nu_{\mathcal{P}_c} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_c)$. Notons $\beta_{G_c} := \mu_{G_c}^{\otimes \mathbb{N}^*} \in \mathcal{P}(B)$. La probabilité $\nu_{\mathcal{P}_c}$ est proximale au sens où ses mesures limites $(\nu_{\mathcal{P}_c, b})_{b \in B}$ sont β_{G_c} -presque sûrement des masses de Dirac. Comme l'application de retour $s : (B, \beta) \rightarrow (B, \beta_{G_c})$, $b \mapsto$

$(b_1 \dots b_{\tau_{G_c}(b)}, b_{\tau_{G_c}(b)+1} \dots b_{\tau_{G_c}(T^{\tau_{G_c}(b)}b)}, \dots)$ respecte les mesures, on dispose d'une famille mesurable de drapeaux $(\xi_b)_{b \in B} \in \mathcal{P}_c^B$ β -ps bien définie telle que pour β -presque tout $b \in B$, $\nu_{\mathcal{P}_c, s(b)} = \delta_{\xi_b}$.

La variété drapeau \mathcal{P} admet une unique probabilité μ -stationnaire que l'on désignera par $\nu_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$. Via l'identification $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_c \times F$ donnée par l'action de F sur \mathcal{P} , cette probabilité s'écrit $\nu_{\mathcal{P}} = \nu_{\mathcal{P}_c} \otimes df$ où df est la probabilité uniforme sur F . En particulier, $\nu_{\mathcal{P}}$ est F -invariante à droite, et pour β -presque tout $b \in B$, la mesure limite $\nu_{\mathcal{P}, b} = \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} \delta_{\xi_b, f}$ où $\xi_{b, f} := \xi_b \cdot f$. On dit que $\nu_{\mathcal{P}}$ est μ -proximale au dessus de F .

On note $\sigma_{\mu} := \int_{G \times \mathcal{P}} \sigma(g, \xi) d\mu(g) d\nu_{\mathcal{P}}(\xi) \in \mathfrak{a}$ le *vecteur de Lyapunov* associé. Il est F -invariant. Etant donné représentation algébrique fortement irréductible $\rho : G \rightarrow GL(V)$, de plus haut poids $\omega \in \mathfrak{a}^*$ (par rapport à G_c), on note $\lambda_{\mu} := \omega(\sigma_{\mu}) \in \mathbb{R}$ le *premier exposant de Lyapunov* de la μ -marche sur V . Si l'image $\rho(G) \subseteq GL(V)$ n'est pas bornée, alors on a $\lambda_{\mu} > 0$ ([16], 3.7)

6.4.2 Réduction au théorème de dérive exponentielle

On réduit la preuve du théorème 6.4.1 à un théorème de dérive exponentielle sur un système dynamique fibré. On explique aussi l'intuition derrière une telle démarche.

Revenons au cadre du théorème 6.4.1. Le groupe $G := \bar{\Gamma}^Z \subseteq SL_d(\mathbb{R})$ est fortement irréductible et contient $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ comme semi-groupe Zariski-dense. Il est donc semi-simple (cf [13], lemme 8.5). On peut ainsi appliquer la sous-section précédente à G et se donner un sous groupe compact maximal K , un sous espace de Cartan \mathfrak{a} , un système de racines $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^*$, etc. fixés une fois pour toute dans la suite. Par ailleurs, G est inclus dans $SL_d(\mathbb{R})$ donc admet une représentation canonique sur $V = \mathbb{R}^d$ (donnée par l'identité). Le plus haut poids de G_c sera noté $\omega \in \mathfrak{a}^*$, sa dimension proximale sera notée $r \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$ ($r < d$ car G n'est pas borné). On munit V d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $K \subseteq O(V)$, $A \subseteq \text{Sym}(V)$.

On reprend les notations $\mathcal{P}, \mathcal{P}_c, (\xi_b)_{b \in B} \in \mathcal{P}_c^B$ ainsi que l'application (F -invariante) $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{G}_r(V), \xi = g\xi_0 \mapsto V_{\xi} := gV^U$ de la sous-section précédente et on pose $V_b := V_{\xi_b}$, appelé *r-plan limite* pour la trajectoire $b \in B$. Il est prouvé dans [16] (section 10.2) que pour β -presque tout $b \in B$, toute valeur d'adhérence de la suite de matrices $(\frac{b_1 \dots b_n}{\|b_1 \dots b_n\|})_{n \geq 1} \in M_d(\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ a pour image V_b .

L'idée fondamentale motivant la preuve du théorème 6.4.1 est de montrer que les mesures limites ν_b de $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ sont invariantes par translation de la coordonnée \mathbb{T}^d suivant les r -plans limites V_b . Un tel résultat permettrait de conclure. En effet, la forte irréductibilité de G assure que les projections de ces r -plans dans \mathbb{T}^d sont presque sûrement denses, et ainsi que les mesures ν_b , puis ν , sont invariantes

par translation de la coordonnée \mathbb{T}^d . On termine alors la preuve en appliquant le deuxième point du corollaire 6.1.3.

On cherche donc à prouver l'invariance des ν_b selon les r -plans V_b . On note $X := \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ et on introduit le système dynamique fibré $B^X := B \times X$, $T^X : B^X \rightarrow B^X$, $(b, x) \mapsto (Tb, b_1^{-1}x)$ muni de la mesure de Radon invariante $\beta^X := \int_B \delta_b \otimes \nu_b d\beta(b)$. Donnons nous de plus une famille mesurable $(e_b)_{b \in B} \in (\mathbb{R}^d)^r$ telle que pour β -presque tout $b \in B$, $e_b = (e_{b,1}, \dots, e_{b,r})$ est une base orthonormée de V_b . On peut définir sur B^X un flot à r -paramètres $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$ via la formule $\phi_t(b, x) := (b, x + \sum_{i=1}^r t_i e_{b,i})$, la translation concernant la coordonnée sur \mathbb{T}^d . Montrer l'invariance des ν_b suivant les r -plans V_b revient alors à montrer que la mesure β^X est ϕ_t invariante. Une première difficulté est que le flot ϕ_t ne commute pas avec la transformation T^X . On rajoute alors des paramètres au système pour contourner cette obstruction.

Notons $\sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}$ le cocycle d'Iwasawa, $\mathfrak{a}^F := \{x \in \mathfrak{a}, F.x = x\}$ le sous-espace F -invariant de \mathfrak{a} , $\sigma_F := \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} f.\sigma$ le cocycle projeté de σ sur \mathfrak{a}^F , et $\theta : B \rightarrow \mathfrak{a}^F$, $b \mapsto \sigma_F(b_1, \xi_{Tb})$ (où T désigne le shift sur $B = \Gamma^{\mathbb{N}^*}$). Pour β -presque tout $b \in B$, on a la relation d'équivariance $b_1 V_{Tb} = V_b$, et quelque soit $v \in V_{Tb}$, l'égalité $\|b_1 v\| = e^{\omega(\theta(b))} \|v\|$ (cf. lemme 6.4.5). Il existe donc une matrice orthogonale $O(b) \in O_r(\mathbb{R})$ tel que

$$b_1 e_{Tb} = e^{\omega(\theta(b))} O(b) e_b \quad (*)$$

On définit un système dynamique fibré au dessus du shift en posant :

- $B^+ = B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R}) \times X$
- $T^+ : B^+ \rightarrow B^+$, $(b, z, O, x) \mapsto (Tb, z - \theta(b), OO(b)^{-1}, b_1^{-1}x)$.
- $\beta^+ := \int_B \delta_{(b,z,O)} \otimes \nu_b d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O)$

où $\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}$ et h sont des mesures de Haar sur \mathfrak{a} et $O_r(\mathbb{R})$, fixées une fois pour toute.

On munit B^+ d'un flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$ respectant les fibres défini par $\phi_t : B^+ \rightarrow B^+$, $(b, z, O, x) \mapsto (b, z, O, x + \langle t, e^{\omega(z)} O e_b \rangle)$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}^d)^r \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, v) \mapsto \sum_{i=1}^r t_i v_i$ et la translation concerne la coordonnée sur \mathbb{T}^d de $X = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$.

Lemme 6.4.7. • T^+ préserve la mesure β^+ .

- Pour β -presque $b \in B$, pour tout $(z, O, x, t) \in \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R}) \times X \times \mathbb{R}$,

$$T^+ \circ \phi_t(b, z, O, x) = \phi_t \circ T^+(b, z, O, x)$$

Démonstration. Vérifions le premier point. Soit $\varphi : B^+ \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable.

$$\begin{aligned}
T_\star^+ \beta^+(\varphi) &= \int_{B^+} \varphi(Tb, z - \theta(b), OO(b)^{-1}, b_1^{-1}x) \, d\nu_b(x) d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O) \\
&= \int_{B^+} \varphi(Tb, z, O, b_1^{-1}x) \, d\nu_b(x) d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O) \\
&= \int_{B^+} \varphi(b, z, O, x) \, d\nu_b(x) d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O) \\
&= \beta^+(\varphi)
\end{aligned}$$

en utilisant l'invariance par translation à droite des mesures de Haar, et l'équivalence des ν_b . Ainsi, $T_\star^+ \beta^+ = \beta^+$.

Vérifions le second point. On se donne $b \in B$ tel que $b_1 e_{Tb} = e^{\omega(\theta(b))} O(b) e_b$ (vérifié β -ps.). Soit $(z, O, x, t) \in \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R}) \times X \times \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
T^+ \circ \phi_t(b, z, O, x) &= (Tb, z - \theta(b), OO(b)^{-1}, b_1^{-1}(x + \langle t, e^{\omega(z)} O e_b \rangle')) \\
\phi_t \circ T^+(b, z, O, x) &= (Tb, z - \theta(b), OO(b)^{-1}, b_1^{-1}x + \langle t, e^{\omega(z - \theta(b))} OO(b)^{-1} e_{Tb} \rangle')
\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que $b_1^{-1} e^{\omega(z)} O e_b = e^{\omega(z - \theta(b))} OO(b)^{-1} e_{Tb}$ ce qui est une réécriture de (*) ci dessus. \square

L'invariance des ν_b suivant les r -plans V_b revient à montrer que β^+ est invariante sous le flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$. L'idée est alors de désintégrer β^+ le long des orbites de ϕ_t . Dans le cas où l'espace des orbites muni de la tribu quotient est un espace borélien standard, cette désintégration est une désintégration au sens classique (par rapport à l'application de projection $B^+ \rightarrow \phi_t \backslash B^+$) et attribuée à chaque ϕ_t -orbite une mesure de Radon. Notons que pour tout $c \in B^+$, on peut alors relever la mesure sur son orbite $\{\phi_t(c), t \in \mathbb{R}^r\}$ via l'homéomorphisme local : $\mathbb{R}^r \rightarrow \{\phi_t(c), t \in \mathbb{R}^r\}, t \mapsto \phi_t(c)$. On obtient finalement une famille de mesures $\sigma : B^+ \rightarrow \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R}^r)$ qui vérifie la propriété d'équivariance : $\sigma(\phi_t c) = \delta_t^* \sigma(c)$ où δ_t désigne la translation de pas t sur \mathbb{R}^r .

Le problème de cette approche est que l'espace des orbites n'est pas standard en général. Notons $\mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r) = \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R}^r) / \sim$ l'ensemble des mesures de Radon (non nulles) sur \mathbb{R}^r quotienté par la relation d'équivalence $m \sim m'$ s'il existe $\lambda > 0$ tel que $m = \lambda m'$. Un élément de $\mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r)$ sera appelé *classe projective de mesures*. L'action par translation de \mathbb{R}^r sur $\mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R}^r)$ respecte la relation d'équivalence \sim , donc induit une action sur $\mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r)$. La théorie générale donne un sens à une désintégration de β^+ le long du flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$ (voir [13] ou [31]), et conduit à une application mesurable $\sigma : B^+ \rightarrow \mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r)$ ainsi qu'à une partie $E \subseteq B^+$ de mesure pleine telle que pour tout $c \in E$, $t \in \mathbb{R}^r$ tel que $\phi_t c \in E$, on a $\sigma(\phi_t c) = \delta_t^* \sigma(c)$. On a de plus que

Lemme 6.4.8. *La mesure de Radon β^+ est invariante par le flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$ si et seulement si l'application σ est β^+ -pp égale à la classe projective $\mathbb{R}_{>0}\text{leb}$.*

Démonstration. On réfère au chapitre 2 de la thèse de L. Dufloux [31] pour une introduction détaillée aux mesures conditionnelles le long d'une action de groupe à stabilisateurs discrets. Ce dernier lemme est une application du théorème 2.1.2.14. \square

On est donc ramené à montrer que $\sigma : B^+ \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{Rad}}(\mathbb{R}^r)$ est β^+ -pp égale à la classe projective de Lebesgue. Le point clef est de montrer que pour presque tout point $c \in B^+$, la classe projective $\sigma(c) \in \mathcal{M}_1^{\text{Rad}}(\mathbb{R}^r)$ est invariante par translation suivant une droite de \mathbb{R}^r (attention, il s'agit de l'invariance d'un ensemble de mesures, mais pas forcément des mesures individuellement). Dans le cas où $r = 1$, on peut alors conclure directement (en utilisant ([13], proposition 4.3) et en remarquant que le flot ϕ_t stabilise une suite exhaustive de compacts de B^+ pour se ramener à une mesure finie). Le cas général nécessitera quelques efforts supplémentaires (voir la dernière section).

Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{Q}_n^+ = (T^+)^{-n}(\mathcal{B}^+)$ la tribu des n -fibres de T^+ . C'est une famille décroissante de sous tribus de \mathcal{B}^f . Leur intersection $\mathcal{Q}_\infty^+ := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{Q}_n^+$ est appelée la *tribu queue* du système dynamique (B^+, T^+) . La tribu queue d'un système dynamique fournit beaucoup d'informations sur celui ci, par exemple sa trivialité par rapport à une mesure invariante implique que cette mesure est ergodique.

Lemme 6.4.9. *Quitte à modifier σ sur un ensemble β^+ -négligeable, on peut supposer $\sigma \circ T^+ = \sigma$ (en tout point). L'application σ est alors \mathcal{Q}_∞^+ -mesurable.*

Démonstration. On commence par montrer que $\sigma \circ T^+ = \sigma$ β^+ -pp. Cela provient essentiellement du fait que T^+ commute avec le flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$.

Fixons $(b, z, O) \in B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R})$ un point $\beta \otimes \text{leb}_{\mathfrak{a}^F} \otimes h$ -typique. On entend par là que ce qui suit est valable pour presque tout choix de (b, z, O) . On note $E := \{(b, z, O)\} \times X$, $E' := \{(Tb, z - \theta(b), OO(b)^{-1})\} \times X$ munis naturellement des mesures $\nu_E := \delta_{(b,z,O)} \otimes \nu_b$ et $\nu_{E'} := \delta_{(Tb,z-\theta(b),OO(b)^{-1})} \otimes \nu_{Tb}$. Remarquons que E et E' sont tous deux stables par le flot ϕ_t et que d'après le lemme 6.4.7 l'application $T_{|E}^+ : E \rightarrow E'$ est une bijection bimesurable qui respecte les mesures et commute à l'action du flot. Soit $\sigma_E : E \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{Rad}}(\mathbb{R}^r)$, $\sigma_{E'} : E' \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{Rad}}(\mathbb{R}^r)$ les mesures conditionnelles associées aux flots sur E et E' . On a alors que $\sigma_{E'} \circ T_{|E}^+ = \sigma_E$ ν_E -pp. Par ailleurs, on a que $\sigma_E = \sigma_{|E} \nu_E$ -pp et $\sigma_{E'} = \sigma_{|E'} \nu_{E'}$ -pp. Finalement, pour presque tout (b, z, O) et ν_b -presque tout $x \in X$, on a $\sigma \circ T^+(b, z, O, x) = \sigma(b, z, O, x)$ d'où l'égalité β^+ -presque partout.

Pour conclure, on se donne $D \subseteq B^+$ plein tel que $\sigma \circ T_{|D}^+ = \sigma_{|D}$. On pose $D' = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} (T^+)^{-p} D$. C'est un sous ensemble plein de B^+ tel que $(T^+)^{-1} D' = D'$. On se donne une application $\sigma' : B^+ \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{Rad}}(\mathbb{R})$ telle que σ' est constante sur le complémentaire de D' et $\sigma'(c) = \lim_n \sigma \circ (T^+)^n(c)$ pour $c \in D'$ (cette limite est

définie car la suite est stationnaire). L'application σ' coïncide avec σ sur D donc presque partout et est T^+ -invariante. \square

Le théorème de dérive exponentielle déduit du lemme précédent l'invariance de presque toute classe projective $\sigma(c) \in \mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r)$ suivant une droite de \mathbb{R}^r . Il est dû à Benoist-Quint ([14]) dans le cas des espaces homogènes de volume fini. Sa démonstration occupera toute la prochaine section.

Théorème (Dérive exponentielle). *Soit Y un espace mesurable standard, $\sigma : B^+ \rightarrow Y$ une application \mathcal{Q}_∞^+ -mesurable, $E \subseteq B^+$ une partie β^+ -pleine. Alors pour presque tout $c \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c', c'' \in E$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[^r$ non nul, tels que $c'' = \phi_t(c')$ et $\sigma(c) = \sigma(c') = \sigma(c'')$.*

En appliquant la dérive à la mesure conditionnelle $\sigma : B^+ \rightarrow \mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r)$, on obtient :

Corollaire 6.4.10. *Pour β -presque tout $c \in B^+$, l'ensemble*

$$\{t \in \mathbb{R}^r, \sigma(c) \in \mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r) \text{ est } t\text{-invariante}\}$$

contient une droite.

Démonstration du corollaire. D'après le dernier lemme, on a peut appliquer le théorème de dérive à la mesure conditionnelle $\sigma : B^+ \rightarrow \mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r)$ et à une partie $E \subseteq B^+$ telle que pour tout $c \in E$, $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(c) \in E$ on a $\sigma(\phi_t(c)) = \delta_t^* \sigma(c)$. Notons $E' \subseteq E$ l'ensemble des $c \in E$ tels que la conclusion du théorème de dérive est vérifiée. Pour $c \in E'$, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^r, \sigma(c) \in \mathcal{M}_1^{Rad}(\mathbb{R}^r) \text{ est } t\text{-invariante}\}$ est un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^r qui n'est pas discret. Il contient donc forcément une droite, d'où le corollaire. \square

On en déduira le théorème 6.4.1 dans la dernière section.

6.4.3 Stratégie pour la dérive exponentielle

Les prochaines sections sont consacrées à la preuve de la dérive exponentielle énoncée en fin de section 6.4.

La *stratégie de la preuve* est la suivante. On se donne $W \subseteq B^+$ une partie de mesure finie, vue comme une *fenêtre*. On montre le résultat pour presque tout $c \in W \cap E$. On fixe $K \subseteq W \cap E$ une partie compacte de mesure presque pleine dans W et sur laquelle l'application σ est continue (possible via le théorème de Lusin), ainsi qu'un point $c = (b, z, O, x) \in K$ (β^+ -typique). Via le théorème de non-dégénérescence des mesures limites (section 6.5), on peut construire une suite d'approximations $(c_p)_{p \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$ du point c de la forme $c_p = (b, z, O, x + u_p)$ où le terme de dérive $u_p \in \mathbb{R}^d$, agit sur la coordonnée en \mathbb{T}^d , est bien positionné par

rapport à x , et tend vers 0 quand $p \rightarrow \infty$. Appelons n -fibre passant par c l'ensemble $F_{n,c} := \{c' \in B^+, (T^+)^n(c') = (T^+)^n(c)\}$. Pour tout $p \geq 0$, on peut choisir des entiers $n_p \geq 0$ et des éléments $h_{p,c} \in F_{n_p,c}$, $h_{p,c_p} \in F_{n_p,c_p}$ dans les n_p -fibres passant par c et c_p tels que (quitte à extraire) :

- $h_{p,c}, h_{p,c_p} \in K$ (section 6.6.2, équirépartition des morceaux fibres)
- $h_{p,c_p} = h_{p,c} + D_p$ où le terme de dérive $D_p \in \mathbb{R}^d$ agit sur la coordonnée en \mathbb{T}^d et se comporte bien du point de vue de la norme et de la direction (section 6.8.6, contrôle de la dérive).

On peut de plus supposer que les suites $(h_{p,c})$ et (h_{p,c_p}) convergent dans K vers des points limites $c', c'' \in K$.

Alors $\sigma(c) = \sigma(c') = \sigma(c'')$. En effet, la continuité de σ sur K entraîne que $\sigma(c') = \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma(h_{p,c})$. Comme l'application σ est \mathcal{Q}_∞^+ -mesurable, elle est constante sur les n -fibres passant par un point, donc $\sigma(h_{p,c}) = \sigma(c)$ puis $\sigma(c') = \sigma(c)$. De même avec c'' .

De plus $c'' = \phi_t c'$ où le paramètre t est arbitrairement petit (quitte à bien choisir les $h_{p,c}, h_{p,c_p}$), grâce au bon comportement du terme de dérive D_p , ce qui conclut.

6.5 Non dégénérescence des mesures limites

Les notations sont celles de la section 6.4. On rappelle que μ est une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$ à support fini engendrant un semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible, que $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de semi-groupes tel que la probabilité image $\chi_*\mu$ est centrée. Ces données induisent une action de Γ sur $X := \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ via la formule $g.(x, t) = (gx, t + \chi(g))$, puis une marche aléatoire de probabilités de transitions données par $(\mu \star \delta_x)_{x \in X}$. On s'est donné une mesure de Radon stationnaire ergodique $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(X)$ dont la projection sur \mathbb{T}^d est sans atome. On note par ailleurs $B := \Gamma^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$ et pour β -presque tout $b \in B$, $\nu_b := \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 \dots b_n)_* \nu \in \mathcal{M}^{Rad}(X)$ (cf. sections 1.4 et 6.2 sur les mesures limites).

Le but de cette section est de montrer que les mesures limites $(\nu_b)_{b \in B}$ se projettent sur \mathbb{T}^d en des mesures sans atome. Autrement dit :

Théorème 6.5.1 (Non dégénérescence). *Pour β -presque tout $b \in B$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{T}^d, \quad \nu_b(\{x\} \times \mathbb{R}) = 0$$

Signalons tout de suite le corollaire utilisé dans la preuve de la dérive exponentielle. Pour $b \in B$, $x \in \mathbb{T}^d$, on note :

$$W_b(x) := \{y \in \mathbb{T}^d, \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n^{-1} \dots b_1^{-1}x, b_n^{-1} \dots b_1^{-1}y) = 0\}$$

où la distance considérée est la distance euclidienne standard sur le tore.

Corollaire 6.5.2. *Pour β -presque tout $b \in B$, pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, on a*

$$\nu_b(W_b(x) \times \mathbb{R}) = 0$$

Preuve du corollaire. Soit $x, y \in \mathbb{T}^d$, $x \neq y$. Pour β -presque tout $b \in B$, la suite $(b_n^{-1} \dots b_1^{-1}(x - y))_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0 dans \mathbb{T}^d , i.e. $y \notin W_b(x)$. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné. D'après le théorème 6.5.1, pour β -presque tout $b \in B$, la mesure $\nu_{b,I} := \nu_b(\cdot \times I) \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$ est sans atome, donc $\nu_{b,I}^{\otimes 2}$ ne charge pas la diagonale $\Delta_{\mathbb{T}^d} \subseteq \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$. On en déduit via le théorème de Fubini que pour β -presque tout $b \in B$,

$$\nu_{b,I}^{\otimes 2}((x, y) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d, y \in W_b(x)) = 0$$

autrement dit que

$$\int_B \nu_{b,I}(W_b(x)) d\nu_{b,I}(x) = 0$$

Ainsi, pour $\nu_{b,I}$ -presque tout $x \in \mathbb{T}^d$, on a $\nu_{b,I}(W_b(x)) = 0$. C'est en fait vrai pour tout x . Sinon, il existerait $x \in \mathbb{T}^d$ tel que $\nu_{b,I}(W_b(x)) > 0$. On aurait alors pour tout $y \in W_b(x)$ que $\nu_{b,I}(W_b(y)) > 0$, ce qui contredit la première assertion. On a finalement montré que pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ borné, pour β -presque tout $b \in B$, pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, on a $\nu_b(W_b(x) \times I) = 0$. En considérant des intervalles I arbitrairement grands, on obtient le résultat. \square

6.5.1 Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret.

L'image $\chi(\Gamma)$ est alors un sous-groupe de \mathbb{R} (cf. lemme 6.1.2). Le cas où $\chi(\Gamma) = \{0\}$ provient des travaux de Benoist-Quint [13]. On peut donc supposer $\chi(\Gamma)$ discret non trivial, et même $\chi(\Gamma) = \mathbb{Z}$. Comme la mesure $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(X)$ est μ -stationnaire ergodique sur $X = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, son support est inclus dans un sous ensemble de la forme $\mathbb{T}^d \times (r + \mathbb{Z})$ où $r \in \mathbb{R}$. Quitte à considérer un translaté de ν , on peut supposer que $\text{supp } \nu \subseteq \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$. On est ainsi ramené à considérer une marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$. L'objectif est de montrer que les mesures limites $\nu_b \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z})$ n'ont pas d'atome. Il suffit de montrer que les mesures limites restreintes au bloc de base $\nu_{b|\mathbb{T}^d \times \{0\}} \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d)$ n'ont pas d'atome (le cas des autres blocs s'en déduisant par translation). La stratégie est alors de voir les $\nu_{b|\mathbb{T}^d \times \{0\}}$ comme des mesures limites pour une marche induite sur le tore \mathbb{T}^d . Le point clef est de montrer que cette marche est récurrente hors de zéro. Un argument tiré de Benoist-Quint [13] implique alors la non dégénérescence cherchée.

Construisons la marche induite. On définit un "temps de retour au bloc de départ" $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} : b \mapsto \inf\{n \geq 1, \chi(b_n \dots b_1) = 0\}$ et on note $\mu_\tau \in \mathcal{P}(\Gamma)$ la loi de $b_{\tau(b)} \dots b_1$ quand b varie suivant β . Notons que c'est aussi la loi de $b_1 \dots b_{\tau(b)}$ dans notre cas, donc que la mesure $\nu_{|\mathbb{T}^d \times \{0\}}$ est μ_τ -stationnaire d'après le corollaire 6.2.2. On pose $\beta_\tau := \mu_\tau^{\otimes \mathbb{N}^*} \in \mathcal{P}(B)$.

La proposition suivante affirme que le point $0 \in \mathbb{T}^d$ est positivement instable pour la marche induite par μ_τ sur \mathbb{T}^d et permet de conclure. On note P_{μ_τ} l'opérateur de Markov associé à μ_τ , défini sur les fonctions mesurables non négatives $f : \mathbb{T}^d \rightarrow [0, \infty]$ par $P_{\mu_\tau} f(x) = \int_G f(gx) d\mu_\tau(g)$. On dit qu'une fonction $u : \mathbb{T}^d - \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$ est *propre* si elle est continue et si l'image inverse de tout compact est compacte.

Proposition 6.5.3. *Il existe une fonction propre $u : \mathbb{T}^d - \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$ et des constantes $a \in [0, 1[$, $C \in [0, +\infty[$ telles que*

$$P_{\mu_\tau} u \leq au + C$$

Voyons comment en déduire le théorème de non dégénérescence.

Proposition 6.5.3 \implies *théorème 6.5.1* : Notons $\nu_0 := \nu_{|\mathbb{T}^d \times \{0\}} \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$. C'est une mesure finie μ_τ -stationnaire sur \mathbb{T}^d , on peut donc s'en donner une décomposition en mesures limites $(\nu_{0,a})_{a \in B}$ (par rapport à la marche μ_τ). Vérifions qu'elles coïncident avec les $\nu_{b|\mathbb{T}^d \times \{0\}}$. On introduit les différents temps de retour à $\chi = 0$ en posant

$$\begin{cases} \tau^0 = 0 \\ \tau^{k+1} : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, b \mapsto \inf\{n > \tau^k(b), \chi(b_n \dots b_1) = 0\} \end{cases}$$

En particulier $\tau^1 = \tau$. On pose alors $\rho : B \rightarrow B, b \mapsto (b_{\tau^k(b)+1} \dots b_{\tau^{k+1}(b)})_{k \geq 0}$. L'application ρ vérifie $\rho_* \beta = \beta_\tau$ et pour β -presque tout $b \in B$, on a $\nu_{b|\mathbb{T}^d \times \{0\}} =$

$[\lim(b_1 \dots b_n)_\star \nu]_{|\mathbb{T}^d \times \{0\}} = [\lim(\rho(b)_1 \dots \rho(b)_n)_\star \nu]_{|\mathbb{T}^d \times \{0\}} = \lim(\rho(b)_1 \dots \rho(b)_n)_\star [\nu_{|\mathbb{T}^d \times \{0\}}] = \nu_{0, \rho(b)}$. On est donc ramené à montrer que les mesures limites de ν_0 sont sans atome.

Soit u, a, C comme dans la proposition précédente et posons

$$v : \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d - \Delta_{\mathbb{T}^d} \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto u(x - y)$$

L'application v est propre et vérifie $P_{\mu_\tau} v \leq av + C$ (ce qui s'interprète comme un phénomène de récurrence hors de la diagonale pour la marche induite par μ_τ sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$). Le lemme 3.11 de [13] affirme alors que pour β_τ -presque tout $a \in B$, la probabilité $\nu_{0,a}$ n'a pas d'atome, ce qui conclut. \square

On va maintenant prouver la proposition 6.5.3. La difficulté est que la probabilité μ_τ n'a pas de moment d'ordre 1. On ne peut donc pas appliquer les résultats de Benoist-Quint qui concernent les marches à moment exponentiel.

Lemme 6.5.4. *La probabilité μ_τ n'a pas de moment d'ordre 1.*

Démonstration. Il s'agit de prouver que $\int_G |\log(\|g\|)| d\mu_\tau(g) = +\infty$. On a la minoration

$$\int_G |\log(\|g\|)| d\mu_\tau(g) \geq \int_{\{\tau \geq k\}} |\log(\|b_{\tau(b)} \dots b_1\|)| d\beta(b)$$

Or $\beta\{\tau \geq k\} \geq ck^{-1/2}$ pour un certain $c > 0$ (voir par exemple [55], (5.1.1)). Par ailleurs, d'après le principe des grandes déviations ([16], (12.6)), il existe $\alpha > 0$ tel que pour k assez grand, on a

$$\beta\{b \in B, \forall n \geq k, \|b_n \dots b_1\| \geq e^{\frac{n}{2}\lambda_\mu}\} \geq 1 - e^{-\alpha k}$$

(où $\lambda_\mu > 0$ désigne l'exposant de Lyapunov associé à μ , voir (4.1)). On en déduit que $\int_G |\log(\|g\|)| d\mu_\tau(g) \geq (ck^{-1/2} - e^{-\alpha k}) \frac{k}{2} \lambda_\mu \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow \infty$. D'où le résultat. \square

Cette difficulté est surmontée en considérant la μ_τ -marche comme une sous marche de la μ -marche sur \mathbb{T}^d , qui elle est à moment exponentiel fini donc plus facile à contrôler (notamment grâce au principe des grandes déviations).

Preuve de la proposition 6.5.3

Dans toute cette preuve, on munira \mathbb{R}^d de la distance euclidienne standard, et $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ de la distance quotient. Plus précisément, en notant $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ la projection canonique, on pose pour $x, y \in \mathbb{T}^d$,

$$d(x, y) := \inf\{d(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{x} \in \pi^{-1}(x), \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\}$$

On va montrer le résultat suivant.

Proposition 6.5.3 bis. Fixons $\delta > 0$ et notons u la fonction $u : \mathbb{T}^d - \{0\} \rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto d(x, 0)^{-\delta}$. On peut choisir le paramètre δ pour qu'il existe des constantes $a \in [0, 1[, C \in [0, +\infty[, k \geq 1$ telles que

$$P_{\mu_\tau}^k u \leq au + C$$

Remarque. 1) La proposition 6.5.3 s'en déduit en considérant la fonction propre $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i P_\mu^i u$ où $\alpha \in]1, (\frac{1}{a})^{\frac{1}{k-1}}[$.

2) $\mu_\tau^{\star k} = \mu_{\tau^k}$ où $\tau^k : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est le temps de k -ième atteinte de $\chi = 0$. Ainsi, $P_{\mu_\tau}^k$ est l'opérateur de Markov associé à la marche μ_{τ^k} sur \mathbb{T}^d .

Démonstration de la proposition 6.5.3 bis. On fixe des paramètres $\delta > 0, k \geq 1$ que l'on ajustera à la fin. On partitionne le tore \mathbb{T}^d en deux régions : une petite boule ouverte centrée en 0 notée $D := B(0, \varepsilon)$ et son complémentaire noté $R := X - D$. L'hypothèse que la boule est petite signifiera $\varepsilon < \frac{1}{4}e^{-2M}$ où $M := \log \sup\{\|g\|, \|g^1\|, g \in \text{supp } \mu\}$.

Fixons $x \in \mathbb{T}^d - \{0\}$. On note $T_1^x := \inf\{n > 0, b_n \dots b_1 x \in R\}$, $T_2^x := \inf\{n > T_1^x, b_n \dots b_1 x \in R\}$, etc. les temps de passage dans R , et $T_-^x := \max\{T_i^x, T_i^x \leq \tau^k\}$ le dernier temps de passage dans R avant de rencontrer $\chi = 0$ pour la k -ième fois.

On écrit

$$\begin{aligned} (P_{\mu_\tau}^k u)(x) &= \int_B u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) \\ &= \int_{\{T_-^x=0\}} u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) + \int_{\{T_-^x \geq 1\}} u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) \end{aligned}$$

Cette décomposition distingue les cas où la trajectoire $(b_n \dots b_1 x)_{n \geq 0}$ sort ou non du disque D avant l'instant $\tau^k(b)$. On va majorer chacune des intégrales en montrant :

1) Si $\delta > 0$ est assez petit, alors il existe une constante $C \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{T}^d - \{0\}$, on a $\int_{\{T_-^x \geq 1\}} u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) \leq C$.

2) Si $\delta > 0$ est assez petit, et $k \geq 1$ assez grand, alors il existe $a \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{T}^d - \{0\}$, on a $\int_{\{T_-^x=0\}} u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) \leq au(x)$.

La proposition s'en déduit immédiatement. Comme la preuve à venir est un peu technique, on explique d'abord la démarche mise en jeu :

Idée pour 1) : Dans ce cas, la μ -marche sur \mathbb{T}^d issue de x passe par R avant la k -ième annulation de χ . Or le principe des grandes déviations implique que le temps de retour à R de la μ -marche sur $\mathbb{T}^d - \{0\}$ a un moment exponentiel. On s'attend

donc à ce que la trajectoire issue de x revienne souvent dans R puis que l'instant de k -ième annulation de χ se fasse à proximité de R . La difficulté est que l'on ne sait pas quelle excursion hors de R verra χ s'annuler pour la k -ième fois, autrement dit pour quelle valeur de $i \geq 1$, on a $T_i^x \leq \tau^k < T_{i+1}^x$. Cela oblige à sommer sur tous les cas possibles. Pour obtenir une majoration, on distingue alors suivant la valeur de χ à l'instant T_i^x .

Idée pour 2) : Dans ce cas, la μ -marche sur \mathbb{T}^d issue de x reste dans la boule D jusqu'à l'instant τ^k . On peut donc voir cette marche comme une marche sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$ sans perte d'information. On applique alors le principe des grandes déviations.

Preuve du point 1)

Le paramètre $k \geq 1$ ne sera utile pour le point 2). On conseille donc pour une première lecture de supposer $k = 1$.

En observant qu'un μ -pas rapproche au plus de 0 par un facteur e^{-M} , on obtient que :

$$\int_{\{T_-^x \geq 1\}} u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) \leq \int_{\{T_-^x \geq 1\}} \varepsilon^{-\delta} e^{\delta M(\tau^k - T_-^x)} d\beta$$

Il suffit donc de montrer que la variable $\tau^k - T_-^x$ a un moment exponentiel uniformément borné en $x \in X - \{0\}$ au sens où :

Lemme 6.5.5. *Il existe des constantes $C_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{T}^d - \{0\}$, $n \geq 1$ on a :*

$$\beta(T_-^x \geq 1, \tau^k - T_-^x \geq n) \leq C_1 e^{-\alpha_1 n}$$

Dans cette preuve, on sera amené à considérer les variables aléatoires $S_n := B \rightarrow \mathbb{Z}, b \mapsto \chi(b_n \dots b_1)$. Elles constituent une chaîne de Markov sur \mathbb{Z} de probabilités de transition induites par $\mu_{\mathbb{Z}} := \chi_* \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Rappelons que $\chi_* \mu$ est à support borné et d'espérance nulle, et que S_n est en particulier récurrente. On se donne $l \geq 1$ tel que $\text{supp} \chi_* \mu \subseteq [-l, l]$.

Soit $n \geq 1$, en notant $p_j = \lfloor \log^2 j \rfloor$ on a :

$$\begin{aligned}
\beta(T_-^x \geq 1, \tau^k - T_-^x \geq n) &= \sum_{i \geq 1} \beta(T_-^x = T_i^x, \tau^k - T_i^x \geq n) \\
&= \sum_{i \geq 1} \beta(\tau^k > T_i^x, T_{i+1}^x - T_i^x > \tau^k - T_i^x \geq n) \\
&= \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| > p_j, T_{i+1}^x - T_i^x > \tau^k - T_i^x \geq n) \\
&\quad + \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| \leq p_j, T_{i+1}^x - T_i^x > \tau^k - T_i^x \geq n) \\
&\leq \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| > p_j, T_{i+1}^x - T_i^x > \frac{p_j + n}{2}) \\
&\quad + \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| \leq p_j, T_{i+1}^x - T_i^x \geq n) \\
&\leq \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, T_{i+1}^x - T_i^x > \frac{p_j + n}{2}) \\
&\quad + \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| \leq p_j, T_{i+1}^x - T_i^x \geq n)
\end{aligned}$$

où la première des deux inégalités s'obtient en remarquant que si $S_{T_-^x} > p > 0$, alors $\tau^k - T_-^x > p/l$.

Nous allons maintenant majorer ces deux sommes, que l'on note respectivement Σ_1 et Σ_2 :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &:= \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, T_{i+1}^x - T_i^x > \frac{p_j + n}{2}) \\
\Sigma_2 &:= \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| \leq p_j, T_{i+1}^x - T_i^x \geq n)
\end{aligned}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant qui découle directement du principe des grandes déviations :

Lemme 6.5.6. *Il existe des constantes $C_2 > 0$, $\alpha_2 > 0$ telles que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, on a*

$$\beta(T_1^y \geq n) \leq C_2 e^{-\alpha_2 n}$$

Admettons ce lemme provisoirement.

Majoration de Σ_1

Pour $i, j \geq 1$, $y \in R$, on a la majoration de probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \beta(T_{i+1}^x - T_i^x > \frac{p_j + n}{2} \mid T_i^x = j, b_j \dots b_1 x = y) &= \beta(T_{i+1}^x - T_i^x > \frac{p_j + n}{2} \mid b_{T_i^x} \dots b_1 x = y) \\ &= \beta(T_1^y > \frac{p_j + n}{2}) \\ &\leq C_2 e^{-\alpha_2 \frac{p_j + n}{2l}} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut majorer Σ_1 via :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i, j \geq 1} \sum_{y \in R \cap \Gamma.x} \beta(T_i^x = j, T_{i+1}^x - T_i^x > \frac{p_j + n}{2}, b_j \dots b_1 x = y) \\ &\leq \sum_{i, j \geq 1} \sum_{y \in R \cap \Gamma.x} \beta(T_i^x = j, b_j \dots b_1 x = y) C_2 e^{-\alpha_2 \frac{p_j + n}{2l}} \\ &= \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j) C_2 e^{-\alpha_2 \frac{p_j + n}{2l}} \\ &\leq (C_2 \sum_{j \geq 1} e^{-\alpha_2 \frac{p_j}{2l}}) e^{-\alpha_2 \frac{n}{2}} \end{aligned}$$

où la somme $\sum_{j \geq 1} e^{-\alpha_2 \frac{p_j}{2l}}$ est finie car $e^{-\alpha_2 \frac{p_j}{2l}} = o(\frac{1}{j^2})$. Notons que la dépendance en x a disparu.

Majoration de Σ_2

On raisonne de la même façon que pour Σ_1 afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \sum_{i, j \geq 1} \beta(T_i^x = j, \tau^k > j, |S_j| \leq p_j) C_2 e^{-\alpha_2 n} \\ &\leq C_2 \sum_{j \geq 1} \beta(\tau^k > j, |S_j| \leq p_j) e^{-\alpha_2 n} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que la somme $\sum_{j \geq 1} \beta(\tau^k > j, |S_j| \leq p_j)$ est finie. Cela découle des propriétés générales des marches aléatoires sur \mathbb{Z} induites par une probabilité de transition centrée à support borné (voir plus loin). Notons par ailleurs que la dépendance en x a disparu.

Pour conclure, on obtient la majoration :

$$\beta(T_-^x \geq 1, \tau^k - T_-^x \geq n) \leq (C_2 \sum_{j \geq 1} e^{-\alpha_2 \frac{p_j}{2l}}) e^{-\alpha_2 \frac{n}{2}} + C_2 \sum_{j \geq 1} \beta(\tau^k > j, |S_j| \leq p_j) e^{-\alpha_2 n}$$

ce qui prouve le lemme 6.5.5, donc le point 1). □

Preuve du point 2)

Si $d(x, 0) > \varepsilon e^M$, alors le résultat est immédiat car alors $\{T_-^x = 0\}$ est de mesure nulle. On peut donc supposer $d(x, 0) < \varepsilon e^M < \frac{1}{4}e^{-M}$ où la deuxième inégalité provient du choix de ε . Procédons à la majoration :

$$\begin{aligned} \int_{\{T_-^x=0\}} u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) d\beta(b) &= \sum_{n \geq k} \int_{\{T_-^x=0, \tau^k=n\}} u(b_n \dots b_1 x) d\beta(b) \\ &\leq \sum_{n \geq k} \int_B \|b_n \dots b_1 \tilde{x}\|^{-\delta} d\beta(b) \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^d , où $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ désigne l'unique relevé de x de norme $\|\tilde{x}\| < \frac{1}{4}e^{-M}$, et où la deuxième inégalité provient du fait que si $T_-^x(b) = 0$ alors $u(b_{\tau^k(b)} \dots b_1 x) = \|b_{\tau^k(b)} \dots b_1 \tilde{x}\|^{-\delta}$. On poursuit la majoration grâce au principe des grandes déviations ([16], (12.6)) qui implique le résultat suivant :

Lemme 6.5.7. *Pour $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, $n \geq 1$, notons $E_v^n := \{b \in B, \|b_n \dots b_1 v\| \geq e^{\frac{\lambda\mu}{2}n} \|v\|\}$. Alors il existe des constantes $C_3 > 0$, $\alpha_3 > 0$ telles que pour tout $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, $n \geq 1$, on a :*

$$\beta(E_v^n) \geq 1 - C_3 e^{-\alpha_3 n}$$

On décompose alors

$$\begin{aligned} \int_B \|b_n \dots b_1 \tilde{x}\|^{-\delta} d\beta(b) &= \int_{E_{\tilde{x}}^n} \|b_n \dots b_1 \tilde{x}\|^{-\delta} d\beta(b) + \int_{B-E_{\tilde{x}}^n} \|b_n \dots b_1 \tilde{x}\|^{-\delta} d\beta(b) \\ &\leq e^{-\frac{\delta\lambda\mu}{2}n} \|\tilde{x}\|^{-\delta} + C_3 e^{-\alpha_3 n} e^{\delta M n} \|\tilde{x}\|^{-\delta} \end{aligned}$$

On choisit alors δ tel que $0 < \delta < \frac{\alpha_3}{M}$.

$$\int_B \|b_n \dots b_1 \tilde{x}\|^{-\delta} d\beta(b) \leq \left(\sum_{n \geq k} e^{-\frac{\delta\lambda\mu}{2}n} + C_3 e^{-(\alpha_3 - \delta M)n} \right) u(x)$$

Le facteur devant $u(x)$ étant le reste d'une série convergente, il est strictement inférieur à 1 pour k assez grand. Cela conclut la preuve du point 2).

Quelques précisions

1) *Preuve du lemme 6.5.6* : on peut se limiter à considérer les points $y \in R$ tels que $\beta(T_1^y \geq 2) > 0$. Soit un tel $y \in R$. Nécessairement, $y \in B(0, \varepsilon e^M) \subseteq B(0, \frac{1}{4}e^{-M})$. Notons $\tilde{y} \in \mathbb{R}^d$ son unique relevé de norme $\|\tilde{y}\| \leq \varepsilon e^M$. Soit $n \geq 1$. Si $b \in B$ est tel que $T_1^y(b) \geq n$, alors on voit par récurrence que pour tout $k = 1, \dots, n$, on a $\|b_k \dots b_1 \tilde{y}\| < \varepsilon < \|\tilde{y}\|$. En particulier, $b \notin E_{\tilde{y}}^n$ (défini dans le lemme 6.5.7). On a

donc pour tout $n \geq 1$ l'inégalité $\beta(T_1^y \geq n) \leq \beta(B - E_y^n) \leq C_3 e^{-\alpha_3 n}$ avec $C_3, \alpha_3 > 0$ indépendants de y ce qui conclut.

2) A la fin de la majoration de Σ_2 , dans le point 1) nous avons affirmé que $\sum_{j \geq 1} \beta(\tau^k > j, |S_j| \leq p_j) > \infty$. Expliquons pourquoi. Comme c'est un problème de marche aléatoire général, on préfère revenir à un cadre plus abstrait. On se donne une probabilité $m \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ à support fini, centrée, et on note $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la chaîne de Markov sur \mathbb{Z} de probabilités de transition $(m \star \delta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. On fixe un entier $k \geq 1$, et on s'intéresse au temps de k -ième passage en 0, noté τ^k . Pour $l \in \mathbb{Z}$, on notera \mathbb{P}_l la loi de la chaîne $(S_n)_{n \geq 0}$ issue du point l .

On note F_j l'évènement $F_j := \{\tau^k > j, |S_j| \leq p_j\}$ où $p_j := \lfloor \log^2 j \rfloor$. On veut démontrer que

$$\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}_0(F_j) < \infty$$

L'idée est que la réalisation de l'évènement F_j contraint le temps τ^k à appartenir à une petite fenêtre de valeurs, puis de conclure en utilisant que τ^k a un moment d'ordre $1/4$.

On fixe $a \in \mathbb{N}$ tel que les X_i sont presque sûrement à valeurs dans l'intervalle $A := \llbracket -a, a \rrbracket$, et on note $\tau_A := \inf\{n > 0, S_n \in A\}$ le temps de premier retour à A . Nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Lemme 6.5.8. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $l \in \mathbb{Z}$, pour tout $r > 0$,*

$$\mathbb{P}_l(\tau_A > r) \leq c \frac{|l| + 1}{\sqrt{r}}$$

Démonstration. Notons $\tau_{\mathbb{Z}^-}, \tau_{\mathbb{Z}^+}$ les temps de premier retour aux demi-axes négatif $\mathbb{Z}^- := \{l \in \mathbb{Z}, l \leq 0\}$ et positif $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. La référence [55] (Proposition 5.15) affirme qu'il existe une constante $c_- > 0$ telle que pour tout $l \geq 0$, pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}_l(\tau_{\mathbb{Z}^-} > r) \leq c_- \frac{l + 1}{\sqrt{r}}$$

Par symétrie, il existe une constante $c_+ > 0$ telle que pour tout $l \leq 0$, pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{P}_l(\tau_{\mathbb{Z}^+} > r) \leq c_+ \frac{|l| + 1}{\sqrt{r}}$$

Finalement, en posant $c := \max(c_-, c_+)$ et en remarquant que tout changement de demi-axe impose de rencontrer A , on obtient le résultat. \square

Pour la suite, on se donne $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2a+1}[$ et $N \geq 0$ tels que pour tout $l \in A$, on a $\mathbb{P}_l(\tau^k \leq N) \geq 1 - \varepsilon$. On commence par donner une première majoration de $\mathbb{P}_0(F_j)$. Remarquons l'inégalité :

$$\mathbb{P}_0(j < \tau^k \leq j + j^{1/4} | F_j) \geq \inf_{l \in [-p_j, p_j]} \mathbb{P}_l((S_n)_{n \leq j^{1/4}} \text{ rencontre 0 au moins } k \text{ fois})$$

On vérifie que ce minorant tend vers 1 quand $j \rightarrow +\infty$. On a pour $j \geq 0$ assez grand, pour tout $l \in \llbracket -p_j, p_j \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_l(\tau^k \leq j^{1/4}) &\geq \mathbb{P}_l(\tau_A \leq \frac{1}{2}j^{1/4}, \text{ et la suite } (S_n)_{\tau_A \leq n \leq \tau_A + \frac{1}{2}j^{1/4}} \text{ rencontre } k \text{ fois } 0) \\ &\geq \mathbb{P}_l(\tau_A \leq \frac{1}{2}j^{1/4})(1 - \varepsilon) \\ &\geq (1 - 2c \frac{p_j + 1}{j^{1/8}})(1 - \varepsilon) \\ &\geq 1 - \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Comme la valeur $\varepsilon > 0$ peut être choisie arbitrairement petite, cela donne la convergence annoncée.

Ainsi, pour $j \geq 0$ assez grand, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}_0(j < \tau^k \leq j + j^{1/4} | F_j) \geq \frac{1}{2}$$

i.e.

$$\mathbb{P}_0(j < \tau^k \leq j + j^{1/4}) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_0(F_j)$$

On est donc ramené à majorer $\sum_{j \geq 0} \mathbb{P}_0(j < \tau^k \leq j + j^{1/4})$. Or on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}_0(j < \tau^k \leq j + j^{1/4}) &= \sum_{j \geq 0} \sum_{j < n \leq j + j^{1/4}} \mathbb{P}_0(\tau^k = n) \\ &\leq \sum_{n \geq 0} n^{1/4} \mathbb{P}_0(\tau^k = n) \\ &= \mathbb{E}[(\tau^k)^{1/4}] \end{aligned}$$

où l'inégalité provient de la condition $j < n \leq j + j^{1/4}$ qui implique que $j \in \mathbb{N} \cap [n - n^{1/4}, n - 1]$, intervalle d'entiers de cardinal au plus $n^{1/4}$.

Il suffit donc de montrer que τ^k admet un moment d'ordre 1/4. Cela équivaut à montrer la convergence

$$\sum_{j \geq 0} \mathbb{P}_0(\tau^k > j^4) < \infty$$

Ecrivons $\mathbb{P}_0(\tau^k > j^4) = u_j + v_j$ où

$$u_j := \mathbb{P}_0(\tau^k > j^4, \bar{\tau}_A^{p_j} \leq j^4 - N) \quad v_j := \mathbb{P}_0(\tau^k > j^4, \bar{\tau}_A^{p_j} > j^4 - N)$$

avec $\bar{\tau}_A^{p_j}$ défini par récurrence en posant : $\bar{\tau}_A^1 = \tau_A$ et $\bar{\tau}_A^{i+1} := \inf\{n \geq \bar{\tau}_A^i + N | S_n \in A\}$ (temps de retour à A avec écart).

- $\sum_{j \geq 0} u_j < \infty$:

Pour $l_1, \dots, l_{p_j} \in A$, on définit l'évènement :

$$E(l_1, \dots, l_{p_j}) := \bigcap_{i=1 \dots p_j} \{S_{\bar{\tau}_A^i} = l_i, \text{ et la suite } (S_n)_{\bar{\tau}_A^i \leq n < \bar{\tau}_A^i + N} \text{ rencontre } 0 \text{ au plus } k-1 \text{ fois} \}$$

On a $u_j = \sum_{l_1, \dots, l_{p_j} \in A} \mathbb{P}_0(\tau > j^4, \bar{\tau}_A^{p_j} \leq j^4 - N, E(l_1, \dots, l_{p_j})) \leq \sum_{l_1, \dots, l_{p_j} \in A} \mathbb{P}_0(E(l_1, \dots, l_{p_j}))$.

Or $\mathbb{P}_0(E(l_1, \dots, l_{p_j})) \leq \varepsilon \mathbb{P}_0(E(l_1, \dots, l_{p_j-1})) \leq \varepsilon^{p_j}$. Finalement $u_j \leq ((2a+1)\varepsilon)^{p_j}$ et la somme converge par choix de $\varepsilon < \frac{1}{2a+1}$.

- $\sum_{j \geq 0} v_j < \infty$: Notons τ_A^i le temps de i -ième retour à l'intervalle A (sans contrainte d'écart minimal entre τ_A^i et τ_A^{i+1}) avec pour convention $\tau_A^0 = 0$. Pour $j > N^{\frac{1}{4}}$, on a

$$\begin{aligned} v_j &\leq \mathbb{P}_0(\bar{\tau}_A^{p_j} > j^4 - N) \\ &\leq \mathbb{P}_0(\tau_A^{N p_j} > j^4 - N) \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq N p_j - 1} \mathbb{P}_0(\tau_A^{i+1} - \tau_A^i > \frac{j^4 - N}{N p_j}) \\ &\leq N p_j c \frac{a \sqrt{N p_j}}{\sqrt{j^4 - N}} \quad (\text{d'après le lemme 6.5.8}) \\ &= O\left(\frac{p_j^{3/2}}{j^2}\right) \end{aligned}$$

. Les (v_j) sont donc de série convergente.

6.5.2 Cas où $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense

Introduisons quelques notations utiles. Etant donné un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on note $\nu_I := \nu(\cdot \times I)$, $\nu_{b,I} := \nu_b(\cdot \times I) \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$. Le lemme 6.2.1 définissant les ν_b implique que

- $\nu_I = \int_B \nu_{b,I} d\beta(b)$
- $\forall \beta b \in B, \nu_{b,I}(\mathbb{T}^d) = \nu_I(\mathbb{T}^d)$
- $\forall \beta b \in B, (b_1)_* \nu_{Tb,I} = \nu_{b,I - \chi(b_1)}$

Par ailleurs, on rappelle le deuxième point du corollaire 6.1.3 : il existe une constante $c > 0$ tel que la mesure projetée $\nu(\mathbb{T}^d \times \cdot) = \text{cleb}$. Quitte à normaliser ν , on pourra supposer que

$$\nu(\mathbb{T}^d \times \cdot) = \text{leb}$$

Le lemme 6.2.1 implique alors que pour β -presque tout $b \in B$, on a $\nu_b(\mathbb{T}^d \times \cdot) = \text{leb}$, ou de façon équivalente $\nu_{b,I}(\mathbb{T}^d) = \text{leb}(I)$ pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

Preuve du théorème 6.5.1. Il suffit de montrer que pour β -presque tout $b \in B$, pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ de longueur 1, la mesure $\nu_{b,I}$ sur \mathbb{T}^d est sans atome. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Il existe alors $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ intervalle de longueur 1 tel que

$$\beta\{b \in B, \nu_{b,I_0} \text{ a au moins un atome}\} > 0 \quad (\star)$$

La première étape est de montrer que les $\nu_{b,I}$ sont tous atomiques, avec les mêmes poids :

Lemme 6.5.9. *Il existe un ensemble dénombrable S , une famille de coefficients $(\alpha_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}_{>0}^S$ tels que pour β -presque tout $b \in B$, pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ de longueur 1, il existe une famille $(x_i)_{i \in S} \in (\mathbb{T}^d)^S$ de points deux à deux distincts de \mathbb{T}^d tels que la mesure $\nu_{b,I}$ est de la forme :*

$$\nu_{b,I} = \sum_{i \in S} \alpha_i \delta_{x_i}$$

Démonstration. Commençons par prouver que les $\nu_{b,I}$ sont atomiques. L'idée est de décomposer ν_b comme somme d'une mesure dont la projection sur \mathbb{T}^d est sans atome, et d'une autre dont la projection sur \mathbb{T}^d est purement atomique, puis d'utiliser l'ergodicité de ν pour montrer que la première est nulle.

Lemme 6.5.10. *Pour β -presque tout $b \in B$, il existe une décomposition*

$$\nu_b = \nu_b^{nat} + \nu_b^{at}$$

où $\nu_b^{nat}, \nu_b^{at} \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$, telle que pour tout $I \subseteq \mathbb{R}$, $\nu_{b,I}^{nat}$ est sans atome, $\nu_{b,I}^{at}$ est atomique. De plus, cette décomposition est unique et μ -équivariante : $\forall \beta b \in B$, $(b_1)_\star \nu_{Tb}^{nat} = \nu_b^{nat}$, $(b_1)_\star \nu_{Tb}^{at} = \nu_b^{at}$.

Preuve du lemme 6.5.10. Soit $b \in B$ tel que $\nu_b(\mathbb{T}^d \times \cdot) = \text{leb}$. On pose $A_b := \{x \in \mathbb{T}^d, \nu_b(\{x\} \times \mathbb{R}) \in]0, +\infty]\}$, puis $\nu_b^{at} := \nu_{b|_{A_b \times \mathbb{R}}}$, $\nu_b^{nat} := \nu_{b|_{A_b^c \times \mathbb{R}}}$. Par définition, pour tout intervalle I , les mesures $\nu_{b,I}^{at}, \nu_{b,I}^{nat}$ sont respectivement atomiques et sans atome. L'unicité se vérifie directement. L'équivariance annoncée provient de l'équivariance des ν_b , qui implique notamment que pour β -presque tout $b \in B$, on a $b_1 A_{Tb} = A_b$. \square

Montrons maintenant que β -presque sûrement, on a $\nu_b = \nu_b^{at}$. On pose $\nu^{nat} := \int_B \nu_b^{nat} d\beta(b)$, $\nu^{at} := \int_B \nu_b^{at} d\beta(b)$. Ce sont des mesures μ stationnaires grâce à la relation d'équivariance du lemme 2. De plus, $\nu^{at} \neq 0$ par hypothèse (\star) . On a $\nu = \nu^{nat} + \nu^{at}$ donc par ergodicité de ν , il existe $c > 0$ tel que $\nu = c\nu^{at}$. Or les mesures limites de ν^{at} sont les (ν_b^{at}) . On en déduit que les $\nu_{b,I} = c\nu_{b,I}^{at}$ sont atomiques, puis que $\nu_b^{nat} = 0$. Finalement, $\nu = \nu^{at}$ et pour β -presque tout $b \in B$, $\nu_b = \nu_b^{at}$.

On prouve maintenant que les poids des atomes intervenant dans $\nu_{b,I}$, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle de longueur 1, ne dépendent pas de b et I . On rappelle qu'au vue de la normalisation de ν , presque tous les $\nu_{b,I}$ sont de masse 1. Soit $N \geq 0$,

$k = (k_i)_{i \geq 1} \in \{0, \dots, 2^N - 1\}^{\mathbb{N}^*}$. On définit $E_{N,k} := \prod_{i \geq 1}]\frac{k_i}{2^N}, \frac{k_i+1}{2^N}] \subseteq]0, 1]^{\mathbb{N}^*}$. On note $\mathcal{E}_{N,k} \subseteq B$ l'ensemble des $b \in B$ tels que les poids des atomes de $\nu_{b,[0,1]}$ classés par ordre décroissant appartiennent à $E_{N,k}$.

On a ainsi des partitions $B = \mathcal{E}_{0,0}$, et $\mathcal{E}_{N,k} = \sqcup \{\mathcal{E}_{N+1,l}, E_{N+1,l} \subseteq E_{N,k}\}$. De plus, à N fixé, la probabilité β est concentrée sur une union finie d'ensembles $\mathcal{E}_{N,k}$ où k varie dans $\{0, \dots, 2^N - 1\}^{\mathbb{N}^*}$. On peut donc se donner une suite décroissante $(\mathcal{E}_{N,k^{(N)}})_{N \geq 0}$ (pour l'inclusion) telle que pour tout $N \geq 0$, on a $\beta(\mathcal{E}_{N,k^{(N)}}) > 0$. Pour $i \geq 1$, la suite $(\frac{k_i^{(N)}}{2^N}) \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, on note $\alpha_i := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(N)}}{2^N}$. La suite des (α_i) est décroissante et $\sum_{i \geq 1} \alpha_i = 1$ (en se rappelant que ν est normalisée, donc que les $\nu_{b,[0,1]}$ sont tous de masse 1).

On pose $S := \{i \geq 1, \alpha_i > 0\}$ et on vérifie que la famille de coefficients $(\alpha_i)_{i \in S}$ convient. Soit $b \in B$ β -typique, écrivons $\nu_{b,[0,1]} = \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} c_i \delta_{x_i}$ où $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la suite (c_i) est décroissante strictement positive, les x_i sont deux à deux distincts. Soit $N \geq 0$. Comme $\beta(\mathcal{E}_{N,k}) > 0$, il existe une extraction $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $T^{\sigma(n)}(b) \in \mathcal{E}_{N,k}$ et $\chi(b_1 \dots b_{\sigma(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (par conservativité et ergodicité de la marche $\chi_* \mu$ sur \mathbb{R} pour la mesure de Lebesgue et application de la proposition 1.3.6 f)). De plus, on a l'égalité :

$$\nu_{b,[0,1]} = (b_1 \dots b_{\sigma(n)})_* \nu_{T^{\sigma(n)}b, [0,1] + \epsilon_n}$$

où $\epsilon_n = \chi(b_1 \dots b_{\sigma(n)})$.

Les poids des atomes de $\nu_{b,[0,1]}$ sont donc les mêmes que ceux de $\nu_{T^{\sigma(n)}b, [0,1] + \epsilon_n}$. Comme on a normalisé ν pour avoir $\nu(\mathbb{T}^d \times [0, 1]) = 1$, on a $|\nu_{T^{\sigma(n)}b, [0,1] + \epsilon_n} - \nu_{T^{\sigma(n)}b, [0,1]}| \leq \epsilon_n$. Le fait que $T^{\sigma(n)}(b) \in \mathcal{E}_{N,k}$ implique alors que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $n \geq 0$ assez grand, on a $\frac{k_i^{(N)}}{2^N} - \epsilon_n \leq c_i \leq \frac{k_i^{(N)} + 1}{2^N} + \epsilon_n$. On fait tendre $n \rightarrow +\infty$ pour obtenir $\frac{k_i^{(N)}}{2^N} \leq c_i \leq \frac{k_i^{(N)} + 1}{2^N}$, puis $N \rightarrow +\infty$ pour obtenir $c_i = \alpha_i$. On a montré que $\llbracket 1, p \rrbracket \subseteq S$ et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $c_i = \alpha_i$. Comme $\sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} c_i = 1 = \sum_{i \in S} \alpha_i$, on a nécessairement que $\llbracket 1, p \rrbracket = S$, ce qui conclut la preuve du lemme 6.5.9. \square

La suite de la preuve consiste à montrer que les mesures $\nu_I \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$ ne dépendent pas de l'intervalle I de longueur 1. Cela implique qu'à I fixé, la mesure projetée ν_I est μ -stationnaire sans atome, donc que les $\nu_{b,I}$ sont sans atomes (via Benoist-Quint). Pour prouver que ν_I ne dépend pas de I , il suffit de remarquer que c'est le cas des mesures limites $\nu_{b,I}$.

Lemme 6.5.11. *Pour β -presque tout $b \in B$, pour tous intervalles $I, J \subseteq \mathbb{R}$ de longueurs 1 on a $\nu_{b,I} = \nu_{b,J}$. En particulier, $\nu_I = \nu_J$.*

Démonstration. Soit $b \in B$ comme dans le lemme 6.5.9 et tel que $\nu_b(\mathbb{T}^d \times \cdot) = \text{leb}$. On énumère l'ensemble des poids α_i en une suite strictement décroissante $a_1 := \max \alpha_i > a_2 := \max_{\alpha_i < a_1} \alpha_i > \dots$ éventuellement finie. On raisonne par couches en

montrant d'abord que les atomes de masse a_1 de $\nu_{b,I}$ et $\nu_{b,J}$ sont les mêmes, puis que ceux de masse a_2 sont les mêmes etc.

Soit $\epsilon \in]0, a_1 - a_2[$. Pour tout $x \in \mathbb{T}^d$ tel que $\nu_{b,I}(x) = a_1$, on a $\nu_{b,I+\epsilon}(x) \geq a_1 - \epsilon > a_2$ (car $\nu_b(\mathbb{T}^d \times \cdot) = \text{leb}$). On a ainsi $\nu_{b,I+\epsilon}(x) = a_1$ d'après le lemme 6.5.9. Par symétrie, on a donc montré que $\{x \in \mathbb{T}^d, \nu_{b,I} = a_1\} = \{x \in \mathbb{T}^d, \nu_{b,I+\epsilon} = a_1\}$. Par connexité de \mathbb{R} , on en déduit que $\{x \in \mathbb{T}^d, \nu_{b,I} = a_1\} = \{x \in \mathbb{T}^d, \nu_{b,J} = a_1\}$.

On reprend ensuite le raisonnement précédant avec $\epsilon \in]0, a_2 - a_3[$, puis $\epsilon \in]0, a_3 - a_4[$, etc. pour en déduire l'égalité des couches successives. Finalement, $\nu_{b,I} = \nu_{b,J}$.

Enfin, $\nu_I = \nu_J$ en intégrant l'égalité obtenue.

□

Corollaire. *Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle de longueur 1, la mesure ν_I est μ -stationnaire.*

Démonstration. Soit $A \subseteq \mathbb{T}^d$ mesurable. On a $\int_G g_* \nu_I(A) d\mu(g) = \int_G \nu(g^{-1}A \times I) d\mu(g) = \int_G \nu(g^{-1}A \times I - \chi(g)) d\mu(g) = \int_G (g_* \nu)(A \times I) d\mu(g) = \nu_I(A)$. □

Conclusion. Soit I_0 l'intervalle mentionné au début de la preuve. Comme la mesure ν_{I_0} sur \mathbb{T}^d est finie, μ -stationnaire, sans atome, et comme μ est à support fini engendrant un semi-groupe $\Gamma := \langle \text{supp } \mu \rangle$ fortement irréductible, on a via Benoist-Quint [13] que les mesures limites $(\nu_{I_0,b})_{b \in B}$ sont sans atome. Or pour β -presque tout $b \in B$, on a $\nu_{b,I_0} = \nu_{I_0,b}$. Cela génère une contradiction car on était parti de l'hypothèse qu'une proportion non nulle de mesures $(\nu_{b,I_0})_{b \in B}$ avait au moins un atome, donc conclut la preuve du théorème 6.5.1. □

6.6 Description des fibres

L'argument de dérive exponentielle repose sur une description précise des fibres du système dynamique (B^+, T^+) introduit dans la section 6.4. Rappelons brièvement sa définition. On s'est fixé une probabilité $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ à support fini, on a noté $\Gamma := \langle \text{supp } \mu \rangle$ le semi-groupe engendré par son support, et on s'est donné $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes. Cela définit une action de Γ sur $X := \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ via $g.(x, t) := (gx, t + \chi(g))$, puis une marche aléatoire sur X de probabilités de transitions $(\mu \star \delta_{(x,t)})_{(x,t) \in X}$. On a noté $B = \Gamma^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, $T : B \rightarrow B$, $(b_i)_{i \geq 1} \mapsto (b_{i+1})_{i \geq 1}$ le shift. On a introduit $G := \bar{\Gamma}^Z \subseteq SL_d(\mathbb{R})$ l'adhérence de Zariski de Γ puis des objets algébriques $K, \mathfrak{a}, \Sigma, \Pi, \mathcal{P}$, etc. permettant d'exploiter la nature algébrique de G , ainsi que des applications $\theta : B \rightarrow \mathfrak{a}^F$, $O : B \rightarrow O_r(\mathbb{R})$. On s'est enfin donné une mesure de Radon $\nu \in \mathcal{M}^{\text{Rad}}(X)$ μ -stationnaire, et une décomposition $(\nu_b)_{b \in B}$ de ν en mesures limites. Tout cela a été possible sous l'hypothèse que Γ est fortement irréductible et $\chi \star \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée.

Dans cette sous-section, on n'utilisera pas les définitions précises des applications θ et O , ni les hypothèses faites sur μ .

Le système dynamique (B^+, β^+, T^+) que nous considérons est donné par :

- $B^+ = B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R}) \times X$
- $T^+ : B^+ \rightarrow B^+$, $(b, z, O, x) \mapsto (Tb, z - \theta(b), OO(b)^{-1}, b_1^{-1}x)$.
- $\beta^+ := \int_B \delta_{(b,z,O)} \otimes \nu_b d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O)$

où $\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}$ et h sont des mesures de Haar sur \mathfrak{a}^F et $O_r(\mathbb{R})$, fixées une fois pour toute. On notera \mathcal{B}^+ la tribu produit sur B^+ .

Dans un premier temps, on donne une description précise des fibres de (B^+, β^+, T^+) et de la désintégration de β^+ le long de celles-ci. On voit ensuite pourquoi les fibres ne peuvent pas s'accumuler dans des parties de petite mesure (ce qui est un phénomène général).

6.6.1 Mesures conditionnelles le long des fibres

Soit $c \in B^+$, $n \geq 0$. On appelle n -fibre passant par c l'ensemble

$$F_{n,c} := \{c' \in B^+, (T^+)^n(c') = (T^+)^n(c)\}$$

Le lemme suivant affirme qu'on peut paramétrer $F_{n,c}$ par Γ^n . On note

$$\theta_n(b) := \sum_{k=0}^{n-1} \theta(T^k b) \quad O_n(b) := O(T^{n-1}b)O(T^{n-2}b) \dots O(b)$$

Lemme 6.6.1. *Pour $c = (b, z, O, x) \in B^f$, $n \geq 0$, définissons*

$$h_{n,c} : \Gamma^n \rightarrow B^+, a \mapsto (aT^n b, z - \theta_n(b) + \theta_n(aT^n b), OO_n(b)^{-1}O_n(aT^n b), a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} .x)$$

où on a noté $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $aT^n b = (a_1, \dots, a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots)$.

Alors $h_{n,c}$ est une bijection entre G^n et $F_{n,c}$.

Démonstration. C'est un calcul direct. □

Désintégrons maintenant β^+ le long des fibres. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{Q}_n^+ := (T^+)^{-n}(\mathcal{B}^+)$. C'est une sous tribu de \mathcal{B}^+ dont l'atome contenant un point $c \in B^+$ est exactement $F_{n,c}$. Comme la mesure restreinte $\beta^+_{|\mathcal{Q}_n^+}$ est σ -finie, on peut se donner une décomposition de β^+ en mesures conditionnelles par rapport à la sous tribu \mathcal{Q}_n^+ , que l'on note $(\beta_{n,c}^+)_{c \in B^+}$. Rappelons que la famille $(\beta_{n,c}^+)_{c \in B^+}$ est une famille \mathcal{Q}_n^+ -mesurable de mesures sur B^+ telle que $\beta^+ = \int_{B^+} \beta_{n,c}^+ d\beta^+(c)$ et vérifiant pour β^+ -presque tout c que $\beta_{n,c}^+$ est concentrée sur $F_{n,c}$. De plus, une telle famille est unique (en dehors d'un ensemble β^+ -négligeable) et liée à la notion d'espérance conditionnelle : si $\varphi : B^+ \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction positive \mathcal{B}^+ -mesurable, alors pour β^+ -presque tout $c \in B^+$, on a $\mathbb{E}(\varphi | \mathcal{Q}_n^+)(c) = \beta_{n,c}^+(\varphi)$.

Le lemme 6.6.1 identifie $F_{n,c}$ à Γ^n . La mesure conditionnelle $\beta_{n,c}^+ \in \mathcal{M}(F_{n,c})$ correspond alors à la probabilité $\mu^{\otimes n}$:

Lemme 6.6.2. *Pour β^+ -presque tout $c \in B^+$, on a $\beta_{n,c}^+ = (h_{n,c})_* \mu^{\otimes n}$*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que les $(h_{n,c})_* \mu^{\otimes n}$ vérifient les propriétés caractérisant les mesures conditionnelles $\beta_{n,c}^+$. L'application $h_{n,c}$ ne dépend que de $(T^+)^n(c)$ donc la famille $(h_{n,c})_* \mu^{\otimes n}$ est $\mathcal{Q}_{n,c}^+$ -mesurable. Le lemme précédent garantit que ces mesures sont concentrées sur les n -fibres. Pour conclure, on doit vérifier que $\int_{B^+} (h_{n,c})_* \mu^{\otimes n} d\beta^+(c) = \beta^+$. Soit $\varphi : B^+ \rightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable. En notant $c = (b, z, O, x) \in B^+$, en utilisant le théorème de Fubini, l'invariance des mesures Haar et l'équivariance des mesures limites, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{B^+} (h_{n,c})_* \mu^{\otimes n}(\varphi) d\beta^+(c) \\ &= \int_{B^+} \int_{\Gamma^n} \varphi(aT^n b, z - \theta_n(b) + \theta_n(aT^n b), OO_n(b)^{-1}O_n(aT^n b), a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta^+(c) \\ &= \int_{B^+} \int_{\Gamma^n} \varphi(aT^n b, z, O, a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta^+(c) \\ &= \int_{B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R})} \int_{\Gamma^n} \int_X \varphi(aT^n b, z, O, a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} x) d\nu_b(x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O) \\ &= \int_{B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R})} \int_{\Gamma^n} \int_X \varphi(aT^n b, z, O, x) d\nu_{aT^n b}(x) d\mu^{\otimes n}(a) d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O) \\ &= \int_{B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R})} \int_X \varphi(aT^n b, z, O, x) d\nu_b(x) d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O) \\ &= \beta^+(\varphi) \end{aligned}$$

□

La preuve de la dérive exponentielle se fera en restriction à une fenêtre $W \subseteq B^+$ (formellement une partie \mathcal{B}^+ -mesurable de mesure finie non nulle). On termine ce paragraphe en désintégrant la mesure $\beta_{|W}^+$ restreinte à la fenêtre par rapport aux morceaux de fibres $F_{n,c} \cap W$. Pour cela, notons $\beta_W^+ := \beta_{|W}^+$, $\mathcal{Q}_{W,n}^+ := (\mathcal{Q}_n^+)_{|W}$ la tribu trace de \mathcal{Q}_n^+ sur W , et $(\beta_{W,n,c}^+)_{c \in W}$ une décomposition de β_W^+ en mesures conditionnelles par rapport à la sous tribu $\mathcal{Q}_{W,n}^+$. On pose par ailleurs $Q_{n,c} := \{a \in \Gamma^n, h_{n,c}(a) \in W\}$.

Le morceau de fibre $F_{n,c} \cap W$ s'identifie à $Q_{n,c}$. Le lemme suivant affirme qu'alors la mesure conditionnelle $\beta_{W,n,c}^+ \in \mathcal{M}(F_{n,c} \cap W)$ correspond à la mesure $\mu_{|Q_{n,c}}^{\otimes n}$ normalisée.

Lemme 6.6.3. *Soit $Q_{n,c} := \{a \in \Gamma^n, h_{n,c}(a) \in W\}$. Pour β_W^+ -presque tout $c \in W$, on a $\mu^{\otimes n}(Q_{n,c}) > 0$ et*

$$\beta_{W,n,c}^+ = (h_{n,c})_* \frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \mu_{|Q_{n,c}}^{\otimes n}$$

Démonstration. Au vu du lemme 6.6.2, il s'agit de montrer que pour β_W^+ -presque tout $c \in W$, on a $\beta_{n,c}^+(W) > 0$ et

$$\beta_{W,n,c}^+ = \frac{1}{\beta_{n,c}^+(W)} (\beta_{n,c}^+)_{|W}$$

Vérifions la première assertion. On pose $E := \{c \in B^+, \beta_{n,c}^+(W) = 0\}$. Alors $0 = \int_E \beta_{n,c}^+(W) d\beta^+(c) = \int_E \mathbb{E}_{\beta^+}(1_W | \mathcal{Q}_n^+)(c) d\beta^+(c) = \int_E 1_W(c) d\beta^+(c)$ car E est \mathcal{Q}_n^+ -mesurable. Ainsi, $\beta^+(E \cap W) = 0$.

Vérifions l'expression de $\beta_{W,n,c}^+$. Il s'agit de voir que la famille $(\frac{1}{\beta_{n,c}^+(W)} (\beta_{n,c}^+)_{|W})_{c \in W}$ (définie pp) vérifie les propriétés caractérisant les mesures conditionnelles. Il est immédiat qu'elle est $\mathcal{Q}_{W,n}^+$ -mesurable, et que pour presque tout $c \in W$, on a $\frac{1}{\beta_{n,c}^+(W)} (\beta_{n,c}^+)_{|W}$ concentré sur l'atome de $\mathcal{Q}_{W,n}^+$ contenant c . Par ailleurs, si $\varphi : W \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction positive $\mathcal{B}_{|W}^+$ -mesurable, on a

$$\begin{aligned} \int_W \frac{(\beta_{n,c}^+)_{|W}(\varphi)}{\beta_{n,c}^+(W)} d\beta^+(c) &= \int_{B^+} 1_W(c) \frac{\mathbb{E}_{\beta^+}(\varphi | \mathcal{Q}_n^+)(c)}{\mathbb{E}_{\beta^+}(1_W | \mathcal{Q}_n^+)(c)} d\beta^+(c) \\ &= \int_{B^+} \mathbb{E}_{\beta^+}(1_W | \mathcal{Q}_n^+)(c) \frac{\mathbb{E}_{\beta^+}(\varphi | \mathcal{Q}_n^+)(c)}{\mathbb{E}_{\beta^+}(1_W | \mathcal{Q}_n^+)(c)} d\beta^+(c) \\ &= \int_{B^+} \mathbb{E}_{\beta^+}(\varphi | \mathcal{Q}_n^+)(c) d\beta^+(c) \\ &= \beta^+(\varphi) \end{aligned}$$

On a donc l'expression annoncée pour les mesures conditionnelles restreintes. □

6.6.2 Equirépartition des morceaux de fibres

Dans cette partie, on montre que les morceaux de fibres $F_{n,c} \cap W$ du paragraphe précédent ne peuvent pas s'accumuler dans des parties de W de mesure trop petite. C'est en fait un résultat général que nous allons expliquer dans un cadre abstrait. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, $m \in \mathcal{M}^\sigma(E, \mathcal{E})$ une mesure σ -finie sur (E, \mathcal{E}) , et $T : E \rightarrow E$ une application mesurable telle que $T_*m = m$.

Cas probabilisé : équirépartition des fibres

Supposons $m(E) = 1$. Pour $c \in E$, $n \geq 0$, on note toujours $F_{n,c} := \{c' \in E, T^n(c') = T^n(c)\}$ la n -fibre passant par c .

On veut comprendre comment se répartissent les points de $F_{n,c}$ dans E pour n grand et c fixé. Pour cela, on introduit $\mathcal{Q}_n := T^{-n}(\mathcal{E})$ sous tribu de \mathcal{E} , dont l'atome contenant c est exactement $F_{n,c}$. Alors, si on se donne une partie mesurable $A \in \mathcal{E}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_m(1_A | \mathcal{Q}_n)(c)$ décrit la proportion selon m d'éléments de $F_{n,c}$ se trouvant dans A . On énonce le théorème d'équirépartition des fibres de la façon suivante : on note $\mathcal{Q}_\infty := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{Q}_n$.

Théorème 6.6.4. *Soit $\psi \in L^1(E, \mathcal{E}, m)$. On a la convergence presque sûre :*

$$\mathbb{E}_m(\psi | \mathcal{Q}_n) \rightarrow \mathbb{E}_m(\psi | \mathcal{Q}_\infty)$$

Démonstration. La suite de sous-tribus $(\mathcal{Q}_n)_{n \geq 0}$ est de plus en plus grossière. On applique un théorème de convergence des martingales (par rapport à des filtrations décroissantes). \square

En restriction à une fenêtre : équirépartition des morceaux de fibres

Nous serons amenés à étudier les fibres d'un système dynamique en mesure infinie, et plus précisément la façon dont ces fibres se répartissent dans une fenêtre de mesure finie. Voyons que les résultats du cas probabilisé se transposent à ce cadre.

Reprenons les notations précédentes, mais avec m seulement supposée σ -finie. On se donne $W \subseteq E$ une partie mesurable de mesure finie non nulle.

On a alors un espace mesuré restreint $(W, \mathcal{E}|_W, m|_W)$ et des sous-tribus traces $\mathcal{Q}_{W,n} := \mathcal{Q}_n|_W$, $\mathcal{Q}_{W,\infty} := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{Q}_{W,n}$. Alors, si on se donne une partie mesurable $A \in \mathcal{E}|_W$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{m|_W}(1_A | \mathcal{Q}_{W,n})(c)$ décrit la proportion d'éléments de $F_{n,c}$ se trouvant dans A parmi ceux qui se trouvent dans la fenêtre W . On énonce le théorème d'équirépartition des morceaux de fibres de la façon suivante :

Théorème 6.6.5. *Soit $\psi \in L^1(W, \mathcal{E}|_W, m|_W)$. On a la convergence presque sûre :*

$$\mathbb{E}_{m|_W}(\psi | \mathcal{Q}_{W,n}) \rightarrow \mathbb{E}_{m|_W}(\psi | \mathcal{Q}_{W,\infty})$$

Démonstration. C'est la même démonstration que dans le cas des fibres. \square

Expliquons enfin pourquoi ce théorème affirme que les morceaux de fibres ne s'accumulent pas dans des parties de W de mesure trop petite.

Corollaire 6.6.6. *Soit $\varepsilon > 0$, $N \subseteq W$ une partie mesurable telle que $m(N) < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Alors il existe $K \subseteq W$ mesurable vérifiant $m(W - K) < \varepsilon$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $c \in K$, pour tout $n \geq n_0$, on a*

$$\mathbb{E}_{m|_W}(1_N | \mathcal{Q}_{W,n})(c) < \varepsilon$$

Remarque. *L'énoncé du corollaire suppose qu'on a fixé des versions des espérances conditionnelles $\mathbb{E}(1_N | \mathcal{Q}_{W,n})$ dans $\mathcal{L}_{m|_W}^1(W, \mathcal{Q}_{W,n})$.*

Démonstration. Notons $\psi = \mathbb{E}_{m|_W}(1_N | \mathcal{Q}_{W,\infty}) \in \mathcal{L}_{m|_W}^1(W, \mathcal{Q}_{W,\infty})$ une version de l'espérance conditionnelle de 1_N par rapport à $\mathcal{Q}_{W,\infty}$. C'est une fonction non négative telle que $\int_W \psi \, dm|_W < \frac{\varepsilon^2}{2}$. On en déduit que $m|_W\{\psi \geq \frac{\varepsilon}{2}\} < \varepsilon$. Or d'après le théorème d'équirépartition des morceaux de fibres, on a la convergence presque sûre $\mathbb{E}_{m|_W}(1_N | \mathcal{Q}_{W,n}) \rightarrow \psi$. De plus, le théorème d'Egoroff donne l'existence d'une partie mesurable $K \subseteq \{\psi < \frac{\varepsilon}{2}\}$ telle que $m(W - K) < \varepsilon$ et sur laquelle la convergence est uniforme. Il existe donc un rang $n_0 \geq 0$ à partir duquel pour tout $c \in K$, on a $|\mathbb{E}_{m|_W}(1_N | \mathcal{Q}_{W,n})(c) - \psi(c)| < \varepsilon/2$ puis $\mathbb{E}_{m|_W}(1_N | \mathcal{Q}_{W,n})(c) < \varepsilon$.

□

6.7 Théorème local limite

Ce qui suit prépare la preuve de la loi des angles donnée dans la section suivante. On y prouve un théorème local limite qui permettra d'estimer selon quelle proportion une fibre du système dynamique (B^+, T^+, β^+) rencontre une fenêtre $W \subseteq B^+$ fixée au préalable.

6.7.1 Rappels

On rappelle un théorème local limite avec déviations modérées démontré dans [16]. Les notations de cette sous-section sont indépendantes de ce qui précède. On pourra se référer à [16] (sections 10, 14, 15) pour un exposé détaillé. Soit X un espace métrique compact, Γ un semi-groupe localement compact à base dénombrable agissant continument sur X , F un groupe fini, $s : \Gamma \rightarrow F$ un morphisme de groupes, et $f : X \rightarrow F$, $x \mapsto f_x$ une application continue Γ -équivariante.

Plus tard, on spécifiera $X = G/P_c$ variété drapeau d'un groupe algébrique réel semi-simple, $\Gamma \subseteq G$ sous groupe discret Zariski-dense agissant sur X par multiplication à gauche, $F = G/G_c$, s, f les projections canoniques sur F .

On se donne une probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\Gamma)$ sur Γ , apériodique dans F (autrement dit, le support de $s_*\mu$ engendre F et n'est contenu dans aucun translaté de sous-groupe cocyclique de F , hormis F tout entier). On suppose de plus que l'action de Γ sur X est μ -contractante au dessus de F (i.e. que l'itération de la μ -marche sur X contracte la distance sur chaque fibre de f , cf. [16], section 10.1 pour une définition précise). Dans ce cas, X admet une unique probabilité μ -stationnaire que l'on note ν_0 (cf. [16], lemme 10.5)

On se donne $\sigma : \Gamma \times X \rightarrow \mathbb{R}^d$ un cocycle continu tel que les fonctions $\sigma_{sup} : \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$, $g \mapsto \sup_{x \in X} \|\sigma(g, x)\|$ et $\sigma_{lip} : \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$, $g \mapsto \sup_{f_x = f_{x'}} \frac{\|\sigma(g, x) - \sigma(g, x')\|}{d(x, x')}$ sont μ -presque sûrement bornées.

D'après ([16], 2.4.1), le cocycle σ est cohomologue à un cocycle $\sigma_0 : \Gamma \times X \rightarrow \mathbb{R}^d$ dont la fonction $\sigma_{0, sup}$ est μ -presque sûrement bornée et tel que l'application de dérive $X \rightarrow \mathbb{R}^d$, $x \mapsto \int_{\Gamma} \sigma_0(g, x) d\mu(g)$ est constante (on dit que σ est spécial). On notera

$$\sigma_\mu := \int_{\Gamma \times X} \sigma(g, x) d\mu \otimes \nu_0(g, x) \in \mathbb{R}^d$$

cette constante et

$$E_\mu := \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{\sigma_0(g, x) - \sigma_\mu, g \in \text{supp } \mu, x \in \text{supp } \nu_0\}$$

On a par ailleurs (via [16], corollary 14.10) l'existence d'un plus petit sous groupe fermé de \mathbb{R}^d , noté Δ_μ , tel qu'il existe une fonction continue $\varphi : \text{supp } \nu_0 \rightarrow \mathbb{R}^d/\Delta_\mu$ et une constante $v \in \mathbb{R}^d/\Delta_\mu$ pour lesquels, pour tout $g \in \text{supp } \mu$, $x \in \text{supp } \nu_0$ on a

$$\sigma(g, x) \pmod{\Delta_\mu} = v + \varphi(x) - \varphi(gx)$$

Remarquons qu'à priori, φ n'admet pas de relevé à \mathbb{R}^d . Le sous groupe Δ_μ est appelé *image résiduelle* du cocycle σ . On a de plus $\Delta_\mu \subseteq E_\mu$ cocompact ([16], proposition 14.8).

On énonce maintenant le théorème local limite sous les hypothèse où $E_\mu = \mathbb{R}^d$ et il existe une fonction continue $\tilde{\varphi}_0 : \text{supp } \nu_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $g \in \text{supp } \mu$, $x \in \text{supp } \nu_0$ on a

$$\sigma(g, x) \pmod{\Delta_\mu} = \tilde{\varphi}_0(x) - \tilde{\varphi}_0(gx) \pmod{\Delta_\mu}$$

La première hypothèse garantit que la matrice de covariance $\Phi_\mu := \text{cov}_{\mu \otimes \nu_0}(\sigma_0) \in M_d(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, et induit donc un produit scalaire sur \mathbb{R}^d . C'est en particulier un produit scalaire sur la composante neutre $\Delta_{\mu,0}$ de Δ_μ (qui est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d). On note π_μ la mesure de Haar sur Δ_μ qui donne le poids 1 aux cubes unités de $\Phi_{\mu|\Delta_{\mu,0}}$. Dans le cas où Δ_μ est discret, il s'agit de la mesure de comptage. La mesure intervenant dans le théorème local limite est une moyenne de translatés de π_μ , définie pour $C \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable, par :

$$\Pi_\mu(C) := \int_X \pi_\mu(C + \tilde{\varphi}_0(x)) d\nu_0(x)$$

On peut enfin énoncer un théorème local limite avec déviations modérées. Une démonstration se trouve dans [16] (theorem 15.1).

Théorème 6.7.1. *Fixons une partie convexe bornée $C \subseteq \mathbb{R}^d$ et une constante $R > 0$. On se donne un point $x \in \text{supp } \nu_0$, une suite de vecteurs $(v_n) \in (\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ telle que $\|v_n\|_{\Phi_\mu} \leq R\sqrt{n \log n}$ pour tout $n \geq 1$. Alors on a la convergence :*

$$(2\pi n)^{\frac{d}{2}} e^{\frac{1}{2n} \|v_n\|_{\Phi_\mu}^2} \mu^{\star n}(g \in \Gamma, \sigma(g, x) - n\sigma_\mu \in C + v_n) - \Pi_\mu(C + v_n + n\sigma_\mu - \tilde{\varphi}_0(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, cette convergence est uniforme en le point $x \in \text{supp } \nu_0$ et en la suite (v_n) satisfaisant l'hypothèse de domination (avec R fixé au préalable.)

6.7.2 Taille des morceaux de fibres

On revient au cadre de la marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. On se donne $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ une probabilité à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ dont l'adhérence de Zariski $G := \bar{\Gamma}^{\mathbb{Z}} \subseteq SL_d(\mathbb{R})$ est semi-simple, et $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes tel que la probabilité image $\chi_\star \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée. Pour prouver la dérive exponentielle, on pourra toujours se ramener au cas où $\mu(e) > 0$ (qui implique que μ est apériodique dans $F := G/G_c$) et $\chi \not\equiv 0$. On fera donc ces hypothèses, qui simplifient les énoncés et les preuves dans la suite.

On reprend les notations de la section 6.4. Nous allons appliquer les rappels précédents à la variété drapeau $\mathcal{P} := G/P_c$ munie de l'action de Γ par translation, les morphismes $s : \Gamma \rightarrow F$, $f : \mathcal{P} \rightarrow F$ désignant les projections canoniques dans F . L'application f est bien continue Γ -équivariante.

L'action de Γ sur \mathcal{P} est μ -contractante au dessus de F (cf. [16], 12.2), on note $\nu_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$ l'unique probabilité μ -stationnaire sur \mathcal{P} . Soit $\mathfrak{a}^F := \{x \in \mathfrak{a}, F.x = x\}$ le sous espace vectoriel de \mathfrak{a} fixé par F , $\sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}$ le cocycle d'Iwasawa, $\sigma_F := \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} f.\sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}^F$ son projeté sur \mathfrak{a}^F . On introduit

$$\sigma_{F,\chi} : \Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}, (g, x) \mapsto (\sigma_F(g, x), \chi(g))$$

Alors $\sigma_{F,\chi}$ est un cocycle continu dont les fonctions $(\sigma_{F,\chi})_{\text{sup}}$ et $(\sigma_{F,\chi})_{\text{lip}}$ sont μ -presque sûrement bornées (car c'est le cas pour σ , cf [16], 12.1). De plus, comme le vecteur de Lyapunov $\sigma_{\mu} := \mu \otimes \nu_{\mathcal{P}}(\sigma) \in \mathfrak{a}^F$ est F -invariant et comme la probabilité $\chi_{\star} \mu$ est centrée, la moyenne $(\sigma_{F,\chi})_{\mu} := \mu \otimes \nu_{\mathcal{P}}(\sigma_{F,\chi})$ de $\sigma_{F,\chi}$ est donnée par $(\sigma_{F,\chi})_{\mu} = (\sigma_{\mu}, 0)$.

On va prouver un théorème local limite pour $\sigma_{F,\chi}$. La première étape sera de démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.7.2. *Pour le cocycle $\sigma_{F,\chi} : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$, nous avons :*

- $E_{\mu} = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$.
- Si $\overline{\chi(\Gamma)} = \mathbb{R}$, alors $\Delta_{\mu} = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$.
- Si $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret, alors $\Delta_{\mu} = \mathfrak{a}^F \times k\chi(\Gamma)$ pour un certain $k \geq 1$.

Notons $l := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}^F$, fixons une fois pour toute $\Pi_{\mu} \in \mathcal{M}^{\text{Rad}}(\mathfrak{a}^F \times \mathbb{R})$ une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}^F \times \chi(\Gamma)$, ainsi qu'une norme sur \mathfrak{a} . Nous déduirons du lemme précédent que quitte à normaliser Π_{μ} , on a un théorème local limite avec déviations modérées pour le cocycle $\sigma_{F,\chi}$:

Théorème 6.7.3 (TLL pour $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$). *Fixons des parties convexes bornées $U \subseteq \mathfrak{a}^F$, $I \subseteq \mathbb{R}$ et une constante $R > 0$. On se donne un point $x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$, et des suites $(u_n) \in (\mathfrak{a}^F)^{\mathbb{N}}$, $(t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\|a_n\|, |t_n| \leq R\sqrt{n \log n}$ pour tout $n \geq 1$. Alors on a la convergence :*

$$(2\pi n)^{\frac{l+1}{2}} e^{\frac{1}{2n} \|(u_n, t_n)\|_{\mathfrak{a}^F}^2} \mu^{\star n}(g \in \Gamma, \sigma_F(g, x) - n\sigma_{\mu} \in U + u_n, \chi(g) \in I + t_n) - \Pi_{\mu}(U \times I + t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, cette convergence est uniforme en le point $x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$ et en les suites $(u_n), (t_n)$ satisfaisant l'hypothèse de domination (avec R fixé au préalable.)

Preuve du lemme 6.7.2

On montre d'abord que l'hypothèse $\mu(e) > 0$ simplifie la caractérisation de Δ_μ . C'est un phénomène général, on reprend donc momentanément les notations de 6.7.1.

Lemme 6.7.4 (“ $v = 0, g \in \Gamma$ ”). *Supposons que $\text{supp } \mu$ engendre Γ comme semi-groupe, et $\mu(e) > 0$. Alors Δ_μ est le plus petit sous-groupe fermé $\Delta \subseteq \mathbb{R}^d$ tel qu'il existe une application continue $\varphi : \text{supp } \nu_0 \rightarrow \mathbb{R}^d/\Delta$ vérifiant pour tout $g \in \Gamma, x \in \text{supp } \nu_0$:*

$$\sigma(g, x) \pmod{\Delta} = \varphi(x) - \varphi(gx)$$

Démonstration. Il est clair qu'un tel sous groupe Δ vérifie la propriété pour laquelle Δ_μ est un minorant global (définie dans le rappel). On a donc $\Delta \supseteq \Delta_\mu$. Par ailleurs, Δ_μ lui même vérifie la propriété du lemme. En effet, par définition, il existe une fonction continue $\varphi : \text{supp } \nu_0 \rightarrow \mathbb{R}^d/\Delta_\mu$ et une constante $v \in \mathbb{R}^d/\Delta_\mu$ pour lesquels, pour tout $g \in \text{supp } \mu, x \in \text{supp } \nu_0$ on a

$$\sigma(g, x) \pmod{\Delta_\mu} = v + \varphi(x) - \varphi(gx)$$

Appliqué en $g = e \in \text{supp } \mu$, on obtient que $v = 0$. On en déduit alors par la propriété de cocycle et le fait que $\text{supp } \nu_0$ est Γ -invariant que $\sigma(g, x) \pmod{\Delta} = \varphi(x) - \varphi(gx)$ pour tout $g \in \Gamma, x \in \text{supp } \nu_0$ \square

On revient au cadre de la section 6.7.2. En particulier, σ désigne le cocycle d'Iwasawa.

Lemme 6.7.5 (Apériodicité d'un projeté du cocycle d'Iwasawa). *Soit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ un sous-espace vectoriel et $p : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ un projecteur sur \mathfrak{b} . Alors pour le cocycle $p \circ \sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{b}$, nous avons*

$$\Delta_\mu(p \circ \sigma) = E_\mu(p \circ \sigma) = \mathfrak{b}$$

C'est en particulier le cas pour le cocycle projeté σ_F .

Démonstration. Remarquons que $p \circ \sigma$ est bien un cocycle continu dont les fonctions $(p \circ \sigma)_{lip}$ et $(p \circ \sigma)_{sup}$ sont μ -presque sûrement bornées. Les notations $\Delta_\mu(p \circ \sigma)$ et $E_\mu(p \circ \sigma)$ ont donc bien un sens. Le reste est une conséquence de l'apériodicité du cocycle d'Iwasawa (voir [14], proposition 17.1). En effet, soit $\Delta \subseteq \mathfrak{b}$ un sous groupe fermé et $\varphi : \text{supp } \nu_\mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{b}/\Delta$ une fonction continue telle que pour tout $g \in \text{supp } \Gamma, x \in \text{supp } \nu_\mathcal{P}$ on a

$$p \circ \sigma(g, x) \pmod{\Delta} = \varphi(x) - \varphi(gx)$$

Alors, pour tout $g \in \text{supp } \Gamma, x \in \text{supp } \nu_\mathcal{P}$ on a

$$\sigma(g, x) \pmod{\text{Ker } p + \Delta} = \varphi(x) - \varphi(gx)$$

où on voit φ comme une fonction à valeurs dans $\mathfrak{a}/(\text{Ker } p + \Delta) \equiv \mathfrak{b}/\Delta$. On en déduit que $\text{Ker } p + \Delta \supseteq \Delta(\sigma) = \mathfrak{a}$ puis que $\Delta = \mathfrak{b}$. □

Lemme 6.7.6. *On a l'inclusion : $\mathfrak{a}^F \times \{0\} \subseteq \Delta_\mu$*

Démonstration. L'idée est de restreindre $\sigma_{F,\chi}$ en un cocycle pour lequel $\chi = 0$ puis d'utiliser l'apériodicité d'un projeté du cocycle d'Iwasawa. La difficulté est que Γ n'est pas un groupe à priori mais seulement un semi-groupe, si bien que l'ensemble d'annulation $\{\chi = 0\}$ pourrait être trivial, et ce même en sachant que Γ est Zariski-dense dans G semi-simple (considérer par exemple : $G = SL_2(\mathbb{R})$, $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ semi-groupe Zariski-dense, librement engendré par deux éléments a_0, a_1 et définir χ tel que $\chi(a_0) = 1$, $\chi(a_1) = -\sqrt{2}$).

Pour contourner cette difficulté, on note $\{g_1, \dots, g_s\} := \text{supp } \mu$, on introduit $L := \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ le groupe libre à s générateurs a_1, \dots, a_s , on pose $\mu_L \in \mathcal{P}(L)$ la probabilité sur L donnée par $\mu_L(a_i) = \mu(g_i)$ et on fait agir L sur la variété drapeau \mathcal{P} via le morphisme de groupes $L \rightarrow G, a_i \mapsto g_i$. Comme les marches sur \mathcal{P} données par (L, μ_L) et (Γ, μ) coïncident, on a en particulier que $\Delta_{\mu_L} = \Delta_\mu$. Dans la suite, on notera abusivement $\Gamma \subseteq L$ le sous semi-groupe de L engendré par a_1, \dots, a_s , $\langle \Gamma \rangle = L$ et $\chi : \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ le morphisme défini par $\chi(a_i) = \chi(g_i)$.

D'après le lemme 6.7.4, il existe une application continue $\varphi : \text{supp } \nu_{\mathcal{P}} \rightarrow (\mathfrak{a}^F \times \mathbb{R})/\Delta_\mu$ vérifiant pour tout $g \in \Gamma, x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$:

$$(\sigma_F(g, x), \chi(g)) \pmod{\Delta_\mu} = \varphi(x) - \varphi(gx) \quad (*)$$

En remplaçant x par $g^{-1}x$, on obtient

$$(-\sigma_F(g^{-1}, x), \chi(g)) \pmod{\Delta_\mu} = \varphi(g^{-1}x) - \varphi(x)$$

puis, Δ_μ étant stable par passage à l'opposé :

$$(\sigma_F(g^{-1}, x), \chi(g^{-1})) \pmod{\Delta_\mu} = \varphi(x) - \varphi(g^{-1}x)$$

Ainsi la relation (*) est également satisfaite pour g^{-1} , puis finalement pour tout $g \in \langle \Gamma \rangle, x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$. Considérons le sous groupe $\Gamma_0 := \{\chi = 0\} \subseteq \langle \Gamma \rangle$. Il contient le sous groupe dérivé $[\langle \Gamma \rangle, \langle \Gamma \rangle]$. Sa réalisation dans G (via le morphisme $L \rightarrow G$) a donc pour adhérence de Zariski un sous groupe G_0 qui contient $[G, G]$, et est en particulier d'indice fini dans G (qui est semi-simple). On se donne une probabilité $\mu_0 \in \mathcal{P}(\Gamma_0)$ à support fini engendrant un sous groupe Zariski dense dans G_0 , et apériodique dans $F_0 := G_0/G_c$. La marche (Γ_0, μ_0) est ainsi contractante sur $\mathcal{P}_0 := G_0/P_c$ au dessus de F_0 , d'unique probabilité stationnaire notée $\nu_{\mathcal{P}_0} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_0)$. On note $\Delta_{\mu_0} \subseteq \mathfrak{a}^F$ l'image résiduelle du cocycle $(\sigma_{F,\chi})|_{\Gamma_0 \times \mathcal{P}_0}$. Comme $\text{supp } \nu_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ est $\langle \Gamma \rangle$ -invariant, il est en particulier Γ_0 -invariant, donc $\text{supp } \nu_{\mathcal{P}_0} \subseteq \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$. La relation (*) entraîne alors l'inclusion : $\Delta_{\mu_0} \subseteq \Delta_\mu$.

Il suffit donc de vérifier que $\Delta_{\mu_0} = \mathfrak{a}^F \times \{0\}$ pour terminer la preuve. Comme $\text{Im}(\sigma_{F,\chi})|_{\Gamma_0 \times \mathcal{P}_0} \subseteq \mathfrak{a}^F \times \{0\}$, on a par minimalité que $\Delta_{\mu_0} \subseteq \mathfrak{a}^F \times \{0\}$, si bien que $\Delta_{\mu_0} = \Delta \times \{0\}$ où $\Delta \subseteq \mathfrak{a}^F$ est un sous groupe fermé de \mathfrak{a}^F . Mais Δ contient l'image essentielle de $(\sigma_F)|_{\Gamma_0 \times \mathcal{P}_0}$ pour la μ_0 -marche, donc $\Delta = \mathfrak{a}^F$ d'après le lemme 6.7.5, ce qui conclut. □

Corollaire 6.7.7. $E_\mu = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Rappelons que

$$E_\mu := \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{(\sigma_F(g, x) - \sigma_\mu, \chi(g)), g \in \text{supp } \mu, x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}\}$$

C'est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$ qui contient Δ_μ donc $\mathfrak{a}^F \times \{0\}$. Par ailleurs, comme χ est non trivial par hypothèse, E_μ n'est pas inclus dans $\mathfrak{a}^F \times \{0\}$. Finalement $E_\mu = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$. □

Corollaire 6.7.8.

Si $\overline{\chi(\Gamma)} = \mathbb{R}$, alors $\Delta_\mu = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$.

Si $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret, alors $\Delta_\mu = \mathfrak{a}^F \times k\chi(\Gamma)$ pour un certain $k \geq 1$.

Démonstration. Δ_μ est un sous groupe fermé cocompact de $E_\mu = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$ et contient $\mathfrak{a}^F \times \{0\}$. Il est donc de la forme $\Delta_\mu = \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$ ou $\Delta_\mu = \mathfrak{a}^F \times c\mathbb{Z}$ pour un $c > 0$. Comme $\Delta_\mu \subseteq \mathfrak{a}^F \times \overline{\chi(\Gamma)}$ par minimalité, on obtient directement l'expression de Δ_μ lorsque $\chi(\Gamma)$ est discret. On traite maintenant le cas où $\chi(\Gamma)$ est dense dans \mathbb{R} en supposant par l'absurde que $\Delta_\mu = \mathfrak{a}^F \times c\mathbb{Z}$ pour un $c > 0$.

Par définition de Δ_μ , il existe une fonction continue $\varphi : \text{supp } \nu_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}/c\mathbb{Z}$ telle que pour tout $g \in \Gamma$, $x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$

$$\chi(g) \pmod{c\mathbb{Z}} = \varphi(x) - \varphi(gx)$$

On enrichit cette égalité en reprenant le groupe L introduit dans la preuve du lemme 6.7.6. Comme montré alors, la relation précédente est valable pour tout $g \in L$, $x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$. On obtient en particulier pour tout $g \in [L, L]$, $x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$, l'égalité $\varphi(x) = \varphi(gx)$.

On en déduit que φ est constante sur chaque composante connexe de \mathcal{P} . Considérons le sous groupe $\Gamma'_c := \langle \Gamma \cap G_c \rangle$ de G_c généré par $\Gamma \cap G_c$ et son groupe dérivé $[\Gamma'_c, \Gamma'_c] \subseteq \Gamma'_c$. Le paragraphe précédent implique que φ est invariante sous l'action de $[\Gamma'_c, \Gamma'_c]$. On se ramène ainsi à vérifier que $[\Gamma'_c, \Gamma'_c]$ agit minimalement sur chaque composante $f \cap \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$ où $f \in F$. Notons $\mathcal{P}_c := G_c/P_c$ et $\Lambda_{\Gamma'_c} \subseteq \mathcal{P}_c$ l'ensemble limite associé au sous groupe Zariski-dense $\Gamma'_c \subseteq G_c$. On trouve dans [14]

la description suivante : $\text{supp } \nu_{\mathcal{P}} = \sqcup_{f \in F} \Lambda_{\Gamma'_c} f$. Par ailleurs $[\Gamma'_c, \Gamma'_c]$ est aussi Zariski-dense dans G_c (en se rappelant que G est semi-simple), et a même ensemble limite que Γ'_c (étant distingué dans Γ'_c). Il agit donc minimalement sur les composantes $f \cap \text{supp } \nu_{\mathcal{P}} = \Lambda_{\Gamma'_c} f$ ce qui prouve le résultat annoncé.

Enfin, on conclut que χ est à valeurs dans un nombre fini de translatés de $c\mathbb{Z}$ ce qui contredit la densité de $\chi(\Gamma)$ dans \mathbb{R} . □

Preuve du théorème 6.7.3

L'enjeu de la preuve est de montrer qu'on peut choisir la fonction $\tilde{\varphi}_0$ qui apparaît dans le théorème local limite à valeurs dans $\mathfrak{a}^F \times \overline{\chi(\Gamma)}$ et de sorte que la mesure Π_μ qu'elle induit est une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}^F \times \chi(\Gamma)$. On conclut alors par une application directe du théorème 6.7.1, avec $C := U \times I$ et $v_n := u_n + t_n$.

Supposons $\chi(\Gamma)$ dense dans \mathbb{R} . D'après le lemme 6.7.2, on peut choisir la fonction $\tilde{\varphi}_0$ identiquement nulle, et la mesure Π_μ induite coïncide alors avec π_μ , i.e. est la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$ qui donne masse 1 aux cubes unités de $\Delta_{\mu,0}$.

Supposons $\chi(\Gamma)$ discret dans \mathbb{R} . On peut supposer $\chi(\Gamma) = \mathbb{Z}$. On commence par construire une bonne fonction $\tilde{\varphi}_0$. Le lemme 6.7.2, combiné au lemme 6.7.4, donne l'existence d'une fonction continue $\varphi : \text{supp } \nu_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}/k\mathbb{Z}$ telle que pour $g \in \text{supp } \Gamma$, $x \in \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$ on a $\chi(g) \bmod k\mathbb{Z} = \varphi(x) - \varphi(gx)$.

En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 6.7.8, on constate que φ est constante sur chaque composante $f \cap \text{supp } \nu_{\mathcal{P}}$ où $f \in F$. On peut donc relever φ en une fonction $\tilde{\varphi} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ localement constante telle que pour tout $g \in \Gamma$, $x \in \mathcal{P}$, on ait $\chi(g) \bmod k\mathbb{Z} = \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(gx) \bmod k\mathbb{Z}$. Quitte à imposer $\tilde{\varphi}|_{\mathcal{P}_c} = 0$, on peut supposer $\tilde{\varphi}$ à valeurs dans $\chi(\Gamma) = \mathbb{Z}$. On pose $\tilde{\varphi}_0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}^F \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (0, \tilde{\varphi}(x))$, fonction localement constante telle que pour tout $g \in G$, $x \in \mathcal{P}$,

$$\sigma_{F,\chi}(g, x) \bmod \Delta_\mu = \tilde{\varphi}_0(x) - \tilde{\varphi}_0(gx) \bmod \Delta_\mu$$

Notons $\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}$ la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{a}^F donnant masse 1 aux cubes unités de $\Phi_\mu|_{\mathfrak{a}^F \times \{0\}}$. On a par définition $\pi_\mu := \text{leb}_{\mathfrak{a}^F} \otimes \sum_{j \in k\mathbb{Z}} \delta_j$, puis $\Pi_\mu = \text{leb}_{\mathfrak{a}^F} \otimes \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} \sum_{j \in k\mathbb{Z}} \delta_{j - \tilde{\varphi}(f)}$.

De plus, pour $g \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \Pi_\mu \{ \cdot - (0, \chi(g)) \} &= \text{leb}_{\mathfrak{a}^F} \otimes \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} \sum_{j \in k\mathbb{Z}} \delta_{j - \tilde{\varphi}(f) + \chi(g)} \\ &= \text{leb}_{\mathfrak{a}^F} \otimes \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} \sum_{j \in k\mathbb{Z}} \delta_{j - \tilde{\varphi}(gf)} \\ &= \Pi_\mu \end{aligned}$$

La mesure Π_μ est donc $\chi(\Gamma)$ -invariante, i.e. de la forme $\Pi_\mu = c \text{leb}_{\mathfrak{a}^F} \otimes \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j$ pour un $c > 0$.

.

□

6.8 Loi des angles et contrôle de la dérive

Reprenons le schéma de preuve de la dérive exponentielle expliqué à la fin de la section 6.4. On dispose de points $c = (b, z, O, x), c_p = (b, z, O, x + u_p) \in B^+$ où $u_p \in \mathbb{R}^d$, est très petit, et agit sur la coordonnée en \mathbb{T}^d . C'est le terme de dérive. Pour $n \geq 0$, nous avons vu dans la section précédente que les n -fibres passant par c et c_p sont paramétrées par Γ^n . Etant donné $a \in \Gamma^n$, les points des n -fibres correspondants diffèrent seulement d'un nouveau terme de dérive, donné par : $D_{n,c,c_p}(a) = a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p \in \mathbb{R}^d$. L'objectif de cette section est de contrôler la norme et la direction de la dérive pour n grand, lorsqu'on ne voit les fibres qu'à travers une fenêtre $W \subseteq B^+$ de mesure finie. On montrera notamment que la norme croît exponentiellement avec n , justifiant le nom de dérive exponentielle.

La section 6.8.1 introduit une notion de points de densité et explique comment ils conditionnent la croissance de la norme et la contraction des directions dans une représentation.

La section 6.8.2 décrit la loi asymptotique de ces points de densité.

La section 6.8.3 est un préliminaire technique à la section 6.8.4.

La section 6.8.4 décrit la loi asymptotique des points de densité le long des morceaux de fibres : c'est la loi des angles.

La section 6.8.5 décrit la divergence de la projection de Cartan le long des morceaux de fibres.

La section 6.8.6 conclut en démontrant les théorèmes de contrôle annoncés.

A partir de la section 6.8.4, les énoncés deviendront plus complexes. Pour les alléger, on utilisera la notation "*Soit $c \in B^+$ β^+ -typique*" pour signifier que les propriétés qui suivent sont valables pour β^+ -presque tout point $c \in B^+$.

6.8.1 Points de densité

Soit G un sous groupe algébrique réel semi-simple (implicitement linéaire, on spécifiera plus tard $G = \bar{\Gamma}^Z \subseteq SL_d(\mathbb{R})$). On se donne pour G des objets $K, \mathfrak{a}, A, \Sigma, \Pi, P, \mathcal{P} = G/P_c$, etc. comme dans les rappels algébriques de la section 6.4. On réalise G via un plongement $G \hookrightarrow SL(V_0)$, où V_0 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On peut munir V_0 d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $K \subseteq O(V_0)$, $A \subseteq \text{Sym}(V_0)$ ([16], 7.9). En considérant la décomposition de Cartan, on constate que le groupe G est alors stable par transposition : $G = {}^tG$.

Rappelons que la décomposition de Cartan introduite dans la section 6.4 est donnée par l'égalité $G = K \exp(\mathfrak{a}^+) K_c$. Cependant, nous aurions très bien pu considérer la décomposition duale $G = K_c \exp(\mathfrak{a}^+) K$. Cette dernière fournit une notion de projection de Cartan κ' liée à κ via l'action de F : si $g \in G$, $\kappa'(g) = f_g \cdot \kappa(g)$ où

$G \rightarrow F, f \mapsto f_g$ est la projection canonique. Nous allons définir des points de densité pour ces deux décompositions et voir comment ils sont liés par l'action de F .

Soit $g \in G$. La décomposition de Cartan permet d'écrire g sous la forme

$$g = k_g^c m_g \exp(x_g) l_g^c$$

où $k_g^c, l_g^c \in K_c, m_g \in M = K \cap P, x_g \in \mathfrak{a}^+$.

On a alors automatiquement une décomposition duale de g et des décompositions de ${}^t g$ via les égalités :

$$\begin{aligned} g &= k_g^c \exp(f_g \cdot x_g) m_g l_g^c \\ {}^t g &= (l_g^c)^{-1} m_g^{-1} \exp(f_g \cdot x_g) (k_g^c)^{-1} \\ {}^t g &= (l_g^c)^{-1} \exp(x_g) m_g^{-1} (k_g^c)^{-1} \end{aligned}$$

On choisit alors pour tout $g \in G$, une décomposition $g = k_g^c m_g \exp(x_g) l_g^c$ comme ci dessus de sorte que la fonction $g \mapsto (k_g^c, m_g, x_g, l_g^c)$ soit mesurable et compatible avec la transposition : $(k_{t_g}^c, m_{t_g}, x_{t_g}, l_{t_g}^c) = (l_g^c)^{-1}, m_g^{-1}, f_g \cdot x_g, (k_g^c)^{-1}$. On définit alors les *points de densité* annoncés en notant $\xi_0 := P_c/P_c \in \mathcal{P}$ le drapeau standard et en posant :

$$\xi_g^+ := k_g^c m_g \xi_0, \quad \xi_g^- := (m_g l_g^c)^{-1} \xi_0, \quad \eta_g^+ := k_g^c \xi_0, \quad \eta_g^- := (l_g^c)^{-1} \xi_0$$

On a $\xi_g^+, \xi_g^- \in \mathcal{P}, \eta_g^+, \eta_g^- \in \mathcal{P}_c = G_c/P_c$ et les relations $\xi_g^+ = \eta_g^+ f_g, \xi_g^- = \eta_g^- f_g^{-1}$. De plus, la compatibilité des décompositions choisies entraîne que $\xi_{t_g}^+ = \xi_g^-, \eta_{t_g}^+ = \eta_g^-$.

Soit (V, ρ) une représentation algébrique irréductible de $G_c, r := \dim_{\text{prox}} \rho(G_c)$ sa dimension proximale, $\omega \in \mathfrak{a}^*$ son plus haut poids. On note $(W, \rho) := \text{Ind}_{G_c}^G (V, \rho)$ sa représentation induite (voir 6.4.1). On munit W d'un "bon" produit scalaire i.e. choisi tel que $\rho(K) \subseteq O(W), \rho(A) \subseteq \text{Sym}(W)$ et les sous espaces $(V^f)_{f \in F}$ décomposant W sont deux à deux orthogonaux. On se donne $g \in G, v \in V$ et on veut estimer la norme et la direction $\rho(g)v \in V$. Cela est possible lorsque v est suffisamment éloigné d'un sous-espace vectoriel $V_g^- \subseteq V$. Plus précisément, on note $V^U := \{v \in V, \rho(U)v = v\}$ (sous espace propre du plus haut poids ω de ρ , de dimension r), et on pose :

$$W_g^+ := \rho(k_g^c m_g) V^U \in \mathbb{G}_r(W), \quad V_g^- := ((l_g^c)^{-1} V^U)^\perp \cap V \in \mathbb{G}_{n-r}(V)$$

On peut les appeler respectivement *espace attracteur* et *espace répulsif* de $\rho(g)$ dans W . Ils sont liés au points de densités ξ_g^+ et η_g^- : en notant $\xi \mapsto V_\xi$ le morphisme G -équivariant de \mathcal{P} dans $\mathbb{G}_r(W)$ vérifiant $V_{\xi_0} = V^U$ (voir 4.1), on a $W_g^+ = V_{\xi_g^+}, V_g^- = V_{\eta_g^-}^\perp \cap V$. On remarquera que les intersections avec V dans les définitions de V_g^- sont là pour garantir que V_g^- ne rencontre aucun autre sous-espace $V^f \subseteq W$ que V , autrement dit on considère l'orthogonal au sein de V et non de W .

Lemme 6.8.1 (Croissance et contraction). *Supposons la représentation $\rho(G_c)$ non bornée dans $SL(V)$ (ou de manière équivalente $r < \dim V$). Alors pour, $g \in G$, $v \in V - \{0\}$, on a :*

- $e^{\omega(\kappa(g))} \|v\| d(\mathbb{R}v, V_g^-) \leq \|\rho(g)v\| \leq e^{\omega(\kappa(g))} \|v\|$
- $d(\rho(g)\mathbb{R}v, W_g^+) \leq \frac{1}{d(\mathbb{R}v, V_g^-)} \max_{\alpha \in \Pi} e^{-\alpha(\kappa(g))}$

Remarque. 1) *Le terme $e^{\omega(\kappa(g))}$ n'est autre que $\|\rho(g)|_V\|$ (cf. lemme 6.4.5). Le premier point compare donc $\|\rho(g)v\|$ et $\|\rho(g)|_V\| \|v\|$.*

2) *On pourrait formuler un lemme similaire contrôlant $\rho(g)w$ pour $w \in V^{f_g^{-1}}$, à l'aide de $V_{\eta_g^+}$, $V_{\xi_g^-}$.*

3) *La distance sur l'espace projectif $\mathbb{P}(W)$ est donnée par $d(\mathbb{R}w, \mathbb{R}w') := \frac{\|w \wedge w'\|}{\|w\| \|w'\|}$, et si $E \subseteq W$ est un sous-espace vectoriel, on définit $d(\mathbb{R}w, E) := \inf_{\mathbb{R}w' \subseteq E} d(\mathbb{R}w, \mathbb{R}w')$.*

4) *Le lemme 6.8.1 reste vrai lorsqu'on remplace V et W par une même représentation fortement irréductible V de G , munie d'un produit scalaire K -invariant tel que les éléments de A sont auto-adjoints. Les espaces attractif et répulsif de $g \in G$ sont définis de même par $V_g^+ := V_{\xi_g^+} (= V_{\eta_g^+})$, $V_g^- := V_{\eta_g^-} (= V_{\xi_g^-})$. La version fortement irréductible se déduit du lemme précédent en utilisant l'application Ψ du lemme 6.4.4.*

Démonstration. En remarquant que $k_g m_g$ n'intervient pas dans les inégalités et quitte à remplacer v par $(I_g^c)^{-1}v$, on pourra supposer que $g = a \in \exp(\mathfrak{a}^+)$. Par abus de notation, on écrira $V_{\xi_0}^\perp$ pour désigner $V_{\xi_0}^\perp \cap V$. On décomposera $v \in V$ en $v = v_0 + v_0^\perp$ où $v_0 \in V_{\xi_0}$, $v_0^\perp \in V_{\xi_0}^\perp$.

Le premier point demande de vérifier que $\|\rho(a)v\| \geq e^{\omega(\kappa(a))} \|v\| d(\mathbb{R}v, V_{\xi_0}^\perp)$. On a $d(\mathbb{R}v, V_{\xi_0}^\perp) = \frac{\|v_0\|}{\|v\|}$. Par ailleurs, en remarquant que $\rho(a)$ stabilise V_{ξ_0} et $V_{\xi_0}^\perp$, on obtient $\|\rho(a)v\| \geq \|\rho(a)v_0\| = e^{\omega(\kappa(a))} \|v_0\| = e^{\omega(\kappa(a))} \|v\| d(\mathbb{R}v, V_{\xi_0}^\perp)$. Cela prouve le premier point.

Le deuxième point demande de vérifier que $d(\rho(a)\mathbb{R}v, V_{\xi_0}) \leq \frac{1}{d(\mathbb{R}v, V_{\xi_0}^\perp)} \max_{\alpha \in \Pi} e^{-\alpha(\kappa(a))}$.

On a $d(\mathbb{R}v, V_{\xi_0}^\perp) = \frac{\|v_0\|}{\|v\|}$. De même, comme $\rho(a)$ stabilise V_{ξ_0} et $V_{\xi_0}^\perp$, on peut écrire $d(\rho(a)\mathbb{R}v, V_{\xi_0}) = \frac{\|\rho(a)v_0^\perp\|}{\|\rho(a)v\|}$. On veut donc montrer que

$$\frac{\|\rho(a)v_0^\perp\|}{\|\rho(a)v\|} \frac{\|v_0\|}{\|v\|} \leq \max_{\alpha \in \Pi} e^{-\alpha(\kappa(a))}$$

Mais $\|\rho(a)v\| \geq \|\rho(a)v_0\| = e^{\omega(\kappa(a))} \|v_0\|$ donc $\frac{\|v_0\|}{\|\rho(a)v\|} \leq e^{-\omega(\kappa(a))}$. Notons $\omega_i \in \mathfrak{a}^*$, $i \in I$ les poids de la représentation $(V, \rho|_{G_c})$ autres que ω . Comme $\rho(G_c)$ n'est pas borné, on a $r := \dim_{\text{prox}} \rho(G_c) < \dim V$ donc $I \neq \emptyset$. Par définition du plus haut poids,

on a pour tout $i \in I$, l'écriture $\omega - \omega_i = \sum_{\alpha \in \Pi} k_{\alpha,i} \alpha$ où $k_{\alpha,i} \in \mathbb{N}$. Décomposons v_0^\perp en vecteurs propres $v_0^\perp = \sum_{i \in I} v_{0,i}^\perp$ avec $\rho(a)v_{0,i}^\perp = e^{\omega_i(\kappa(a))} v_{0,i}^\perp$ et les $v_{0,i}$ deux à deux orthogonaux (quitte à en choisir certains nuls pour qu'il n'y en ait qu'un par valeur propre). Alors

$$\|e^{-\omega(\kappa(a))} \rho(a)v_0^\perp\|^2 = \sum_{i \in I} e^{-2(\omega - \omega_i)(\kappa(a))} \|v_{0,i}^\perp\|^2 \leq \max_{\alpha \in \Pi} e^{-2\alpha(\kappa(a))} \sum_{i \in I} \|v_{0,i}^\perp\|^2$$

car $I \neq \emptyset$ et $\kappa(a) \in \mathfrak{a}^+$. Comme $\sum_{i \in I} \|v_{0,i}^\perp\|^2 \leq \|v\|^2$, on obtient finalement que $\frac{\|\rho(a)v_0^\perp\|}{\|\rho(a)v\|} \frac{\|v_0\|}{\|v\|} \leq \max_{\alpha \in \Pi} e^{-\alpha(\kappa(a))}$, prouvant le point 2. \square

Dans la suite on revient au cadre de la marche sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ correspondant à $V_0 = \mathbb{R}^d$, $G := \bar{\Gamma}^Z \subseteq SL(V_0)$, groupe semi-simple, non borné, fortement irréductible sur V_0 . Le dernier lemme montre que la dérivée $a_1 \dots a_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p \in V_0$ est contrôlée par la position de l'espace répulsif $(V_0)_{a_1 \dots a_n}^-$ par rapport à $b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p$, et par les évaluations $\alpha(\kappa(a_1 \dots a_n)) \in \mathbb{R}_+$. La section est essentiellement consacrée à décrire la distribution des espaces répulsifs $(V_0)_{a_1 \dots a_n}^-$. Cet objectif sera atteint à travers la *loi des angles*. On montrera aussi que les $\alpha(\kappa(a_1 \dots a_n))$ tendent vers $+\infty$, puis les théorèmes de contrôle annoncés.

6.8.2 Convergence des points de densité

Les notations sont celles des sous-sections 6.4.1 et 6.8.1. On reprend le groupe algébrique réel semi-simple G de 6.8.1, on se donne $\mu \in \mathcal{P}(G)$ une probabilité sur G à support fini et *apériodique* dans $F := G/G_c$. Cette dernière hypothèse signifie que $\text{supp } \mu$ engendre un sous-groupe Zariski dense de G et que son image dans F par la projection naturelle n'est pas inclus dans le translaté d'un sous groupe propre cocyclique de F . Elle est par exemple vérifiée si $\mu(e) > 0$ (ce que l'on peut supposer pour prouver le théorème 6.0.1). On note $B := G^{\mathbb{N}^*}$, $\beta := \mu^{\otimes \mathbb{N}^*} \in \mathcal{P}(B)$, $T : B \rightarrow B$, $(b_i)_{i \geq 1} \mapsto (b_{i+1})_{i \geq 1}$ le shift unilatère. On rappelle que la variété drapeau $\mathcal{P} := G/P_c$ admet une unique probabilité μ -stationnaire, notée $\nu_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$, et que ses mesures limites s'écrivent β -presque sûrement $\nu_{\mathcal{P},b} = \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} \delta_{\xi_b \cdot f}$ avec $\xi_b \in \mathcal{P}_c := G_c/P_c$. Nous allons voir que les points de densité $\xi_{b_1 \dots b_n}^+$ approximent bien les drapeaux limites $\xi_b \cdot f_{b_1 \dots b_n}$ si n est assez grand. On notera $\xi_{b,f} := \xi_b \cdot f$.

Lemme 6.8.2. *Soit (V, ρ) une représentation irréductible proximale de G_c , $(W, \rho) := \text{Ind}_{G_c}^G(V, \rho)$ sa représentation induite. Il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, on a :*

$$\beta(b \in B, d(V_{\xi_{b_1 \dots b_n}^+}, \rho(b_1 \dots b_n) V_{\xi_{T^n b}})) \leq e^{-\varepsilon n} \geq 1 - e^{-\varepsilon n}$$

Démonstration. On peut supposer $\dim V \geq 2$. L'hypothèse de proximalité implique alors que l'image $\rho(G_c)$ n'est pas bornée. On peut donc appliquer le lemme 6.8.1 qui donne la majoration

$$d(V_{\xi_{b_1 \dots b_n}^+}, \rho(b_1 \dots b_n)V_{\xi_{T^{n_b}}} \leq \frac{1}{d(V_{\xi_{T^{n_b}}}, V_{b_1 \dots b_n}^-)} \max_{\alpha \in \Pi} e^{-\alpha(\kappa(b_1 \dots b_n))}$$

La régularité Hölder des mesures stationnaires sur les espaces projectifs ([16], section 13.1, appliquée à (G_c, μ_{G_c})) affirme que la loi image de β par l'application $B \rightarrow \mathbb{P}(V), b \mapsto V_{\xi_b}$ est Hölder régulière. Cela signifie qu'il existe des constantes $C, s > 0$ telles que pour tout $r > 0$, pour tout hyperplan $H \subseteq V$,

$$\beta(b \in B, d(V_{\xi_b}, H) \leq r) \leq Cr^s$$

En particulier, pour tout $r > 0$, on a

$$\beta(b \in B, d(V_{\xi_{T^{n_b}}}, V_{b_1 \dots b_n}^-) > e^{-rn}) \geq 1 - Ce^{-rsn}$$

Par ailleurs, le principe des grandes déviations ([16], 12.6) affirme que pour $t > 0$, il existe un rang $n_0 \geq 0$ et une constante $\delta > 0$ tels que pour $n \geq n_0$:

$$\beta(b \in B, \frac{|\kappa(b_1 \dots b_n) - n\sigma_\mu|}{n} \leq t) \geq 1 - e^{-\delta n}$$

Rappelons que le vecteur de Lyapunov σ_μ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl \mathfrak{a}^+ , autrement dit que $m := \min_{\alpha \in \Pi} \alpha(\sigma_\mu) > 0$ ([16], 9.4). On peut donc choisir le paramètre $r < \frac{1}{3}m$, et le paramètre $t > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathfrak{a}$ tel que $\|x\| \leq t$, on a $|\alpha(x)| \leq \frac{1}{3}m$. On déduit alors de ce qui précède que pour tout $n \geq n_0$,

$$\beta(b \in B, d(V_{\xi_{b_1 \dots b_n}^+}, \rho(b_1 \dots b_n)V_{\xi_{T^{n_b}}}) \leq e^{-n\frac{m}{3}}) \geq 1 - Ce^{-rsn} - e^{-\delta n}$$

Cela conduit au résultat en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit puis $n_0 \geq 0$ assez grand. \square

On déduit du lemme précédent l'approximation des drapeaux limites $(\xi_{b,f})_{b \in B, f \in F}$ par les points de densités.

Corollaire 6.8.3. *Il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, on a :*

$$\beta(b \in B, \forall p \geq n, d(\xi_{b_1 \dots b_p}^+, \xi_{b, f_{b_1 \dots b_p}}) \leq e^{-\varepsilon p}) \geq 1 - e^{-\varepsilon n}$$

Démonstration. On a vu dans (4.1) que la variété drapeau admet un plongement

$$\mathcal{P} \hookrightarrow \prod_{f \in F} \prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{P}(V_\alpha^f), \xi \mapsto (V_{\alpha, \xi})$$

où les V_α sont des représentations proximales irréductibles de G_c , et que la distance sur \mathcal{P} est définie via ce plongement. En appliquant le lemme précédent aux représentations V_α , et en se rappelant que $b_1 \dots b_n \xi_{T^n b} = \xi_{b, f_{b_1 \dots b_n}}$ β -ps, on obtient qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\beta(b \in B, d(\xi_{b_1 \dots b_n}^+, \xi_{b, f_{b_1 \dots b_n}}) \leq e^{-\varepsilon n}) \geq 1 - e^{-\varepsilon n}$$

Le corollaire en découle directement : pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \beta(b \in B, \exists p \geq n, d(\xi_{b_1 \dots b_p}^+, \xi_{b, f_{b_1 \dots b_p}}) > e^{-\varepsilon p}) &\leq \sum_{p \geq n} e^{-\varepsilon p} \\ &= \frac{e^{-\varepsilon n}}{1 - e^{-\varepsilon}} \end{aligned}$$

d'où résultat en passant au complémentaire (quitte à diminuer la valeur de $\varepsilon > 0$, augmenter le rang $n_0 \geq 0$).

□

On en déduit la loi des points de densité $(\xi_{b_1 \dots b_n}^+)$ pour n grand.

Corollaire 6.8.4. *Soit $\varphi \in C^0(\mathcal{P})$. Alors*

$$\int_B \varphi(\xi_{b_1 \dots b_n}^+) d\beta(b) \rightarrow \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Remarque. *La relation $\eta_g^+ f_g = \xi_g^+$ entraîne que $\int_B \varphi(\eta_{b_1 \dots b_n}^+) d\beta(b) \rightarrow \nu_{\mathcal{P}_c}(\varphi)$.*

Démonstration. D'après le corollaire 6.8.3, il suffit de noter $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$ la loi de $\xi_{b, f_{b_1 \dots b_n}}$ quand b varie suivant β et de montrer que $\nu_n(\varphi) \rightarrow \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$. Or on a l'égalité β -presque sûre $\xi_{b, f_{b_1 \dots b_n}} = b_1 \dots b_n \xi_{T^n b}$. Cela entraîne $\nu_n = \mu^{\star n} \star \nu_{\mathcal{P}_c}$. Comme l'action de Γ sur \mathcal{P} est μ -contractante au dessus de F , et comme μ est apériodique dans F , on a pour tout $\xi \in \mathcal{P}$ la convergence faible- \star $\mu^{\star n} \star \delta_\xi \rightarrow \nu_{\mathcal{P}}$, ce qui conclut la preuve. Remarquons que dans le cas où F est trivial, cette dernière assertion se démontre en utilisant le lemme 10.5 (b) de [16] qui donne immédiatement que pour toute fonction continue $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\mu^{\star n} \star \delta_\xi(\varphi) - \nu_{\mathcal{P}}(\varphi) = \mu^{\star n} \star \delta_\xi(\varphi) - \mu^{\star n} \star \nu_{\mathcal{P}}(\varphi) \rightarrow 0$. Dans le cas général, on démontre de la même façon que $\mu^{\star n} \star \delta_{\xi|_{\mathcal{P}_c}} \rightarrow \nu_{\mathcal{P}|_{\mathcal{P}_c}}$ puis on utilise le corollaire 10.7 de [16] (requérant l'apériodicité) pour conclure.

□

6.8.3 Contrôle de $\theta_n(b)$

On a défini dans la section 6.4 le projeté du cocycle d'Iwasawa $\sigma_F = \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} f \cdot \sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}^F$, la fonction $\theta : B \rightarrow \mathfrak{a}^F$, $b \mapsto \sigma_F(b_1, \xi_{Tb})$, et posé $\theta_n(b) := \sum_{k=1}^n \theta(b_1 \dots b_k, T^k b) = \sigma_F(b_1 \dots b_n, \xi_{T^n b})$ (où la dernière égalité est β -presque sûre). Nous allons estimer le comportement asymptotique de $\theta_n(b)$. Cela s'avérera utile pour vérifier les conditions de majoration dans le théorème local limite.

Lemme 6.8.5. *Pour β -presque tout $b \in B$, la suite*

$$\left(\frac{\sigma(b_1 \dots b_n, \xi_{T^{nb}}) - n\sigma_\mu}{\sqrt{n \log \log n}} \right)_{n \geq 3}$$

est bornée dans \mathfrak{a} .

Démonstration. La loi du logarithme itéré ([16] 12.6) implique que pour β -presque tout $b \in B$, la suite $\left(\frac{\kappa(b_1 \dots b_n) - n\sigma_\mu}{\sqrt{n \log \log n}} \right)_{n \geq 3}$ est bornée dans \mathfrak{a} . Il suffit donc de prouver que pour β -presque tout $b \in B$, la suite $\left(\frac{\sigma(b_1 \dots b_n, \xi_{T^{nb}}) - \kappa(b_1 \dots b_n)}{\log n} \right)_{n \geq 2}$ est bornée dans \mathfrak{a} . Pour cela, on reprend les représentations $(V_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ introduites dans la section 6.4.1, ainsi que leurs plus hauts poids $(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$. Comme les ω_α forment une base de \mathfrak{a}^* , il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \Pi$, β -presque tout $b \in B$, la suite $\left(\frac{\omega_\alpha(\sigma(b_1 \dots b_n, \xi_{T^{nb}}) - \kappa(b_1 \dots b_n))}{\log n} \right)_{n \geq 2}$ est bornée dans \mathbb{R} . Fixons $\alpha \in \Pi$, notons $(V, \rho, \omega) = (V_\alpha, \rho_\alpha, \omega_\alpha)$. On se donne une famille mesurable $(v_b)_{b \in B} \in V^B$ telle que pour tout $b \in B$, $v_b \in V_{\xi_b} - \{0\}$. En choisissant un bon produit scalaire sur la représentation induite de V et en accord avec le lemme 6.4.5, on peut écrire : $\omega(\sigma(b_1 \dots b_n, \xi_{T^{nb}})) = \log \frac{\|\rho(b_1 \dots b_n)v_{T^{nb}}\|}{\|v_{T^{nb}}\|}$, $\kappa(b_1 \dots b_n) = \log \|\rho(b_1 \dots b_n)|_V\|$. On cherche donc à montrer que pour β -presque tout $b \in B$, il existe $C > 0$ tel que pour $n \geq 0$ assez grand,

$$\frac{\|\rho(b_1 \dots b_n)v_{T^{nb}}\|}{\|\rho(b_1 \dots b_n)|_V\| \|v_{T^{nb}}\|} \geq n^{-C}$$

D'après le lemme 6.8.1, cette condition est réalisée si

$$d(V_{\xi_{T^{nb}}}, V_{b_1 \dots b_n}^-) \geq n^{-C}$$

Fixons $C > 0$. Notons $E_n = \{b \in B, d(V_{\xi_{T^{nb}}}, V_{b_1 \dots b_n}^-) < n^{-C}\}$. Alors $\beta(E_n) \leq Mn^{-Cs}$ pour certains $M, s > 0$ indépendants de n , par régularité Hölder des mesures stationnaires sur les espaces projectifs (voir preuve du lemme 6.8.2). En choisissant $C > s^{-1}$, on obtient que $\sum_{n \geq 0} \beta(E_n) < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli donne alors le résultat. □

Corollaire 6.8.6. *Pour β -presque tout $b \in B$, la suite*

$$\left(\frac{\theta_n(b) - n\sigma_\mu}{\sqrt{n \log \log n}} \right)_{n \geq 3}$$

est bornée dans \mathfrak{a}^F .

Démonstration. Cela découle directement du lemme précédent et l'invariance de σ_μ sous l'action de F sur \mathfrak{a} . □

6.8.4 Loi des angles

Considérons le système dynamique fibré (B^+, β^+, T^+) des sections 6.4.2 et 6.6.1, avec les hypothèses $\mu(e) > 0$ et χ non trivial (permettant d'appliquer le théorème local limite de la section précédente, et garantissant l'apériodicité de μ dans F). On fixe une fenêtre $W \subseteq B^+$ de la forme

$$W = B \times U \times O_r(\mathbb{R}) \times \mathbb{T}^d \times I$$

où $U \subseteq \mathfrak{a}^F$, $I \subseteq \mathbb{R}$ sont des parties convexes bornés ouvertes non vides de \mathfrak{a}^F et \mathbb{R} , avec I assez grand pour que tout translaté $I+t$ de I rencontre $\chi(\Gamma)$. On rappelle que la n -fibre de (B^+, T^+) passant par un point $c \in B^+$ est $F_{n,c} := (T^+)^{-n}(T^+)^n(c)$ et qu'on appelle morceau de fibre l'intersection $F_{n,c} \cap W$. Nous avons expliqué comment désintégrer $\beta_{|W}^+$ par rapport aux morceaux de fibres $(F_{n,c} \cap W)_{c \in W}$, et obtenu ainsi des probabilités conditionnelles $(\beta_{W,n,c}^+)_{c \in W}$, concentrées sur ces morceaux de fibres. Rappelons aussi que si $c = (b, z, O, x) \in W$, tout point c' de la n -fibre passant par c est de la forme $c' = (b'_1 \dots b'_n T^n b, z', O', x')$.

La loi des angles décrit le comportement des points de densité $\xi_{b'_1 \dots b'_n}^+, \xi_{b'_1 \dots b'_n}^- \in \mathcal{P}$, $\eta_{b'_1 \dots b'_n}^+, \eta_{b'_1 \dots b'_n}^- \in \mathcal{P}_c$ le long des morceaux de fibres. On en déduit la distribution des espaces répulsifs dans n'importe quelle représentation irréductible (V, ρ) de G_c grâce à la relation $V_{b'_1 \dots b'_n}^- = (V_{\xi_{b'_1 \dots b'_n}^-})^\perp \cap V$ (l'orthogonal étant pris par rapport à un bon produit scalaire sur la représentation induite). On appelle $\check{\mu} \in \mathcal{P}(G)$ le poussé en avant de la probabilité μ par la transposition, et $\check{\nu}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$ l'unique probabilité $\check{\mu}$ -stationnaire sur \mathcal{P} (voir 4.1) et $\check{\nu}_{\mathcal{P}_c}$ sa restriction à \mathcal{P}_c .

Théorème 6.8.7 (Loi des angles). *Soit $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour β_W^+ -presque tout $c = (b, z, O, x) \in W$, on a :*

$$\int_W \varphi(\xi_{b'_n \dots b'_1}^+) d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$$

$$\int_W \varphi(\xi_{b'_1 \dots b'_n}^-) d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \check{\nu}_{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Remarque. Les relations $\eta_g^+ f_g = \xi_g^+$, $\eta_g^- f_g^{-1} = \xi_g^-$ entraînent les lois des angles pour η^+, η^- :

$$\int_W \varphi(\eta_{b'_n \dots b'_1}^+) d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\mathcal{P}_c}(\varphi) \quad \int_W \varphi(\eta_{b'_1 \dots b'_n}^-) d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \check{\nu}_{\mathcal{P}_c}(\varphi)$$

Exposons tout de suite le corollaire que nous utiliserons.

Corollaire 6.8.8. *Soit (V, ρ) une représentation algébrique irréductible non bornée de G_c . Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $r > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, tout $v \in V - \{0\}$, on ait :*

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^-) \geq r\} > 1 - \varepsilon$$

Démonstration. La définition de $V_{b'_1 \dots b'_n}^-$ suppose implicitement que V est muni d'un produit scalaire, induit par un bon produit scalaire sur $\text{Ind}_{G_c}^G(V, \rho)$. Notons $r_0 := \dim_{\text{prox}} \rho(G_c)$ la dimension proximal de la représentation. Pour $\mathbb{R}v \in \mathbb{P}(V)$, $r > 0$, on pose $B(\mathbb{R}v, r) := \{E \in \mathbb{G}_{r_0}(V), d(\mathbb{R}v, E^\perp) < r\}$ (bien défini car $r_0 < \dim V$ par l'hypothèse de non compacité). Soit $m \in \mathcal{P}(\mathbb{G}_{r_0}(V))$ la probabilité image de $\check{\nu}_{\mathcal{P}_c}$ par le morphisme G_c -équivariant $\mathcal{P}_c \rightarrow \mathbb{G}_{r_0}(V), \xi_0 \mapsto V^U$. Il est prouvé dans ([16], 13.5) que m est Hölder-régulière au sens où il existe $C, s > 0$ tel que pour tout $\mathbb{R}v \in \mathbb{P}(V)$, pour tout $r > 0$, $m(B(\mathbb{R}v, r)) \leq Cr^s$. En particulier, on peut choisir $r > 0$ assez petit pour que $m(B(\mathbb{R}v, 2r)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout $\mathbb{R}v \in \mathbb{P}(V)$.

Notons m_n la loi de $V_{\eta_{b'_1 \dots b'_n}^-} \in \mathbb{G}_{r_0}(V)$ quand $c' = (b', z', O', x') \in W$ varie suivant $\beta_{W,n,c}^+$. La loi des angles affirme que $m_n \rightarrow m$ quand $n \rightarrow \infty$. Il existe donc un rang $n_0 \geq 0$ à partir duquel $m_n(B(\mathbb{R}v, r)) < \varepsilon$ pour tout $\mathbb{R}v \in \mathbb{P}(V)$ (raisonner par l'absurde et utiliser la compacité de $\mathbb{P}(V)$). Comme $m_n(B(\mathbb{R}v, r)) = \beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\xi, V_{b'_1 \dots b'_n}^-) < r\}$, on obtient le résultat voulu. \square

Preuve de la loi des angles

Nous avons choisi les décompositions de Cartan des éléments de G de sorte que pour tout $g \in G$ on ait $\xi_{t_g}^+ = \xi_g^-$. Il suffit donc de vérifier que pour β_W^+ -presque tout $c = (b, z, O, x) \in W$,

$$\int_W \varphi(\xi_{b'_n \dots b'_1}^+) d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Introduisons les suites $q_n := \lfloor \log n \rfloor^2$, $p_n := n - q_n$. On va montrer que

$$\text{a) } \int_W |\varphi(\xi_{b'_n \dots b'_1}^+) - \varphi(\xi_{b'_n \dots b'_{p_n+1}}^+)| d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{b) } \int_W \varphi(\xi_{b'_n \dots b'_{p_n+1}}^+) d\beta_{W,n,c}^+(c') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Nous utiliserons la description des fibres du système dynamique (B^+, β^+, T^+) faite précédemment ainsi que le théorème local limite de la section 6.7.2. Quelques rappels. La n -fibre passant par un point $c = (b, z, O, x) \in W$ est par définition $F_{n,c} := (T^+)^{-n}(T^+)^n(c)$ et est paramétrée par Γ^n via une application notée $h_{n,c}$:

$\Gamma^n \rightarrow F_{n,c}$. Le morceau de fibre $F_{n,c} \cap W$ est alors paramétré par un sous ensemble de Γ^n que l'on note

$$Q_{n,c} := \{a \in \Gamma^n, h_{n,c}(a) \in W\} = \{a \in \Gamma^n, \theta_n(aT^n b) \in U - z + \theta_n(b), \chi(a_1 \dots a_n) \in I - t + \chi(b_1 \dots b_n)\}$$

où t représente la coordonnée réelle de $x \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. Via ces identifications, la mesure conditionnelle $\beta_{W,n,c}^+ \in \mathcal{M}(F_{n,c} \cap W)$ correspond à la probabilité $\frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \mu_{Q_{n,c}}^{\otimes n} \in \mathcal{P}(Q_{n,c})$.

Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ β_W^+ -typique.

Preuve de a) : Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la suite

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\xi_{b'_n \dots b'_1}^+, \xi_{b'_n \dots b'_{p_{n+1}}}^+) \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Mais le terme général de cette suite est plus petit que

$$\frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \mu^{\otimes n} \{a \in \Gamma^n, d(\xi_{a_1 \dots a_n}^+, \xi_{a_1 \dots a_{q_n}}^+) \geq \varepsilon\}$$

Le théorème 6.7.3, combiné avec le corollaire 6.8.6 et le fait que $\chi^* \mu$ est centrée, assure que le dénominateur décroît moins vite qu'une puissance de n : il existe $R > 0$ tel que pour n assez grand, on a $\mu^{\otimes n}(Q_{n,c}) \geq n^{-R}$. Mais le corollaire 6.8.3 sur la convergence des points de densités implique que le numérateur décroît infiniment plus vite : il existe $\alpha > 0$ tel que $\mu^{\otimes n} \{a \in \Gamma^n, d(\xi_{a_1 \dots a_n}^+, \xi_{a_1 \dots a_{q_n}}^+) \geq \varepsilon\} \leq e^{-\varepsilon q_n}$ à partir d'un certain rang. Finalement, le rapport tend vers 0 ce qui justifie le point a).

Preuve de b) :

$$\begin{aligned} & \int_W \varphi(\xi_{b'_n \dots b'_{p_{n+1}}}^+) d\beta_{W,n,c}^+(c') \\ &= \frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \int_{\Gamma^n} \varphi(\xi_{a_n \dots a_{p_{n+1}}}^+) 1_U(z + \theta_n(aT^n b) - \theta_n(b)) 1_I(t + \chi(a_1 \dots a_n) - \chi(b_1 \dots b_n)) d\mu^{\otimes n}(a) \\ &= \int_{\Gamma^{q_n}} \varphi(\xi_{a_1 \dots a_{q_n}}^+) L_{n,c}(a) d\beta(a) \end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient en renversant l'ordre des a_i et en utilisant le théorème de Fubini, la fonction $L_{n,c} : B \rightarrow [0, +\infty]$ étant définie par :

$$L_{n,c}(a) := \frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \int_{\Gamma^{p_n}} 1_U(z + \theta_n(h_1 \dots h_{p_n} a_{q_n} \dots a_1 T^n b) - \theta_n(b)) 1_I(t + \chi(h_1 \dots h_{p_n} a_{q_n} \dots a_1) - \chi(b_1 \dots b_n)) d\mu^{\otimes p_n}(h)$$

Admettons provisoirement que la suite de fonctions $(L_{n,c})_{n \geq 1}$ converge vers 1 dans $L^1(B, \beta)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Comme φ est bornée, on a alors

$$\int_{\Gamma^{q_n}} |\varphi(\xi_{a_1 \dots a_{q_n}}^+) L_{n,c}(a) - \varphi(\xi_{a_1 \dots a_{q_n}}^+)| d\beta(a) \rightarrow 0$$

Or $\int_{\Gamma^{q_n}} \varphi(\xi_{a_1 \dots a_{q_n}}^+) d\beta(a) \rightarrow \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$ d'après le corollaire 6.8.4 sur la convergence des points de densité.

Cela permet de conclure que

$$\int_W \varphi(\xi_{b'_n \dots b'_{p_{n+1}}}^+) d\beta_{W,n,c}^+(c') \rightarrow \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Il reste à prouver le lemme technique suivant :

Lemme. *La suite de fonctions $(L_{n,c})_{n \geq 1}$ converge vers 1 dans $L^1(B, \beta)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Démonstration. On peut réécrire la formule pour $L_{n,c}(a)$ sous la forme :

$$L_{n,c}(a) = \frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \mu^{\otimes p_n} \{ h \in \Gamma^{p_n}, \sigma_F(h_1 \dots h_{p_n} a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^nb}) \in U - z + \theta_n(b), \\ \chi(h_1 \dots h_{p_n} a_{q_n} \dots a_1) \in I - t + \chi(b_1 \dots b_n) \}$$

puis en utilisant la propriété de cocycle et l'équivariance des $(\xi_b)_{b \in B}$,

$$L_{n,c}(a) = \frac{1}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})} \mu^{\otimes p_n} \{ h \in \Gamma^{p_n}, \sigma_F(h_1 \dots h_{p_n}, \xi_{a_{q_n} \dots a_1 T^nb}) \in U - z + \theta_n(b) - \sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^nb}), \\ \chi(h_1 \dots h_{p_n}) \in I - t + \chi(b_1 \dots b_n) - \chi(a_{q_n} \dots a_1) \}$$

Le théorème local limite de la section précédente permet d'estimer de façon précise les numérateurs et dénominateurs de $L_{n,c}(a)$. On a besoin toutefois de vérifier que les perturbations $|\theta_n(b) - n\sigma_\mu - \sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^nb}) + q_n\sigma_\mu|$ et $|\chi(b_1 \dots b_n) - \chi(a_{q_n} \dots a_1)|$ ne croissent pas trop vite avec n , plus précisément qu'elles sont toutes deux inférieures à $R\sqrt{n \log n}$ pour un certain $R > 0$ indépendant de a (mais pouvant dépendre de b). On a d'emblée les majorations suivantes (pour $n \geq 3$) :

- $|\chi(b_1 \dots b_n)| \leq R_1 \sqrt{n \log \log n}$ en utilisant le fait que $\chi_\star \mu$ est centrée à support fini.
- $|\chi(a_{q_n} \dots a_1)| \leq R_2 q_n$ car $\chi_\star \mu$ est à support fini.
- $|\theta_n(b) - n\sigma_\mu| \leq R_3 \sqrt{n \log \log n}$ d'après le corollaire 6.8.6.

Pour la majoration de $|\sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^nb}) - q_n\sigma_\mu|$, on restreint la variable $a \in B$ à un sous ensemble quasi-plein de B . Posons pour cela :

$$E_n := \{ a \in B, \forall p \geq n, \left| \frac{1}{q_n} \sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^nb}) - \sigma_\mu \right| \leq 1 \}$$

Le principe des grandes déviations ([16], 12.4) combiné à la F -invariance de σ_μ implique que $\beta(E_n) \geq 1 - e^{-\alpha n}$ pour $\alpha > 0$ assez petit, $n \geq 0$ assez grand.

On a alors $\int_B |L_{n,c} - 1| d\beta \leq \int_{E_n} |L_{n,c} - 1| d\beta + \int_{E_n^c} L_{n,c} d\beta + \beta(E_n^c)$ et les termes $\int_{E_n^c} L_{n,c} d\beta$ et $\beta(E_n^c)$ tendent vers 0 (pour le premier, remarquer que $\int_{E_n^c} L_{n,c} d\beta \leq$

$\frac{\beta(E_n^c)}{\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})}$ avec $\mu^{\otimes n}(Q_{n,c})$ décroissant moins vite qu'un $n^{-R'}$ via le théorème local limite). Pour conclure la preuve, il suffit de montrer la convergence uniforme $\|1_{E_n} L_{n,c} - 1_{E_n}\|_\infty \rightarrow 0$.

Notons $N_{n,c}(a)$ et $D_{n,c}$ les numérateurs et dénominateurs de $L_{n,c}(a)$. Le théorème 6.7.3 entraîne qu'uniformément pour $a \in E_n$, on a

$$N_{n,c}(a) 2\pi p_n e^{\frac{1}{2pn} \|\theta_n(b) - n\sigma_\mu - \sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^n b}) + q_n \sigma_\mu, \chi(b_1 \dots b_n) - \chi(a_{q_n} \dots a_1)\|_{\Phi_\mu}^2} \rightarrow \Pi_\mu(U \times (I-t))$$

Par ailleurs,

$$D_{n,c} 2\pi n e^{\frac{1}{2n} \|\theta_n(b) - n\sigma_\mu, \chi(b_1 \dots b_n)\|_{\Phi_\mu}^2} \rightarrow \Pi_\mu(U \times (I-t))$$

Remarquons que $\Pi_\mu(U - z \times (I-t)) > 0$ par définition de Π_μ et par choix de I assez grand. On est donc ramené à montrer que, uniformément en $a \in E_n$, on a :

$$\frac{1}{2n} \|\theta_n(b) - n\sigma_\mu, \chi(b_1 \dots b_n)\|_{\Phi_\mu}^2 - \frac{1}{2pn} \|\theta_n(b) - n\sigma_\mu - \sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^n b}) + q_n \sigma_\mu, \chi(b_1 \dots b_n) - \chi(a_{q_n} \dots a_1)\|_{\Phi_\mu}^2 \rightarrow 0$$

Notons pour cela

$$\begin{aligned} r_n &:= (\theta_n(b) - n\sigma_\mu, 0) & s_n &:= (\sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^n b}) + q_n \sigma_\mu, 0) \\ t_n &:= (0, \chi(b_1 \dots b_n)) & u_n &:= (0, \chi(a_{q_n} \dots a_1)) \end{aligned}$$

On a

$$\|\theta_n(b) - n\sigma_\mu, \chi(b_1 \dots b_n)\|_{\Phi_\mu}^2 = \|r_n\|_{\Phi_\mu}^2 + \|t_n\|_{\Phi_\mu}^2 + 2\langle r_n, t_n \rangle_{\Phi_\mu}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \|\sigma_F(a_{q_n} \dots a_1, \xi_{T^n b}) + q_n \sigma_\mu, \chi(b_1 \dots b_n) - \chi(a_{q_n} \dots a_1)\|_{\Phi_\mu}^2 \\ &= \|r_n + s_n + t_n + u_n\|_{\Phi_\mu}^2 \\ &= \sum_{x,y \in \{r,s,t,u\}} \langle x_n, y_n \rangle \\ &= \|r_n\|_{\Phi_\mu}^2 + \|t_n\|_{\Phi_\mu}^2 + 2\langle r_n, t_n \rangle_{\Phi_\mu} + q_n \sqrt{n \log n} \psi(n, a) \end{aligned}$$

où $\psi : \mathbb{N} \times B \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée uniformément pour tout n et β -presque tout a (utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'équivalence des normes en dimension finie et les majorations précédentes de r_n, s_n, t_n, u_n).

On en déduit donc la convergence souhaitée, concluant la preuve du lemme et de la loi des angles. □

6.8.5 Divergence de la projection de Cartan

Le lemme 6.8.1 qui contrôle la norme et la direction de $\rho(g)v$ fait intervenir la projection de Cartan κ , lue par le plus haut poids ω de G_c sur V , ainsi que par les racines simples $\alpha \in \Pi$ du système de racines de \mathfrak{a} . Pour contrôler la dérivée $b'_1 \dots b'_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p$, il convient donc de préciser le comportement asymptotique de $\kappa(b'_1 \dots b'_n)$ quand $c' = (b', z', O', x') \in W$ décrit un morceau de n -fibre, du point de vue de ω et des $\alpha \in \Pi$.

Lemme 6.8.9. *Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $R > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tous $n \geq n_0$, $\xi \in \mathcal{P}_c$,*

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, \|\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \sigma(b'_1 \dots b'_n, \xi)\| \leq R\} \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration. Reprenons les représentations $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ de la section 6.4.1. Leurs plus hauts poids $(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ forment une base de \mathfrak{a}^* . Il suffit donc de prouver le résultat énoncé après avoir remplacé $\|\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \sigma(b'_1 \dots b'_n, \xi)\|$ par $|\omega_\alpha(\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \sigma(b'_1 \dots b'_n, \xi))|$, et ce quelque soit $\alpha \in \Pi$. On rappelle que les V_α sont munis d'un produit scalaire, restriction d'un bon produit scalaire sur leurs représentations induites.

Fixons $\alpha \in \Pi$, notons $(V, \rho, \omega) = (V_\alpha, \rho_\alpha, \omega_\alpha)$. Le lemme 6.4.5 assure que pour $g \in G$, $\xi \in \mathcal{P}_c$, $v \in V_\xi - \{0\}$, on a $\omega(\sigma(g, \xi)) = \log \frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|}$. Le premier point du lemme 6.8.1 entraîne alors que :

$$0 \leq \omega(\kappa(g) - \sigma(g, \xi)) \leq |\log d(V_\xi, V_g^-)|$$

Le corollaire 6.8.8 de la loi des angles implique alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $R > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, tout $\xi \in \mathcal{P}_c$, on ait :

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, |\omega(\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \sigma(b'_1 \dots b'_n, \xi))| \leq R\} > 1 - \varepsilon$$

Cela conclut la preuve. □

On déduit une estimation de $\omega(\kappa(b'_1 \dots b'_n))$ le long des morceaux de fibres.

Corollaire 6.8.10. *Soit (V, ρ) une représentation fortement irréductible de G , de plus haut poids $\omega \in \mathfrak{a}^*$. Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $R > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tous $n \geq n_0$,*

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, |\omega(\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \theta_n(b))| \leq R\} \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration. Cela provient directement du lemme 6.8.9 appliqué avec $\xi = \xi_{T^n b}$, et de la F -invariance du plus haut poids ω . □

Le lemme suivant permettra de minorer les valeurs des $\alpha(\kappa(b'_1 \dots b'_n))$, $\alpha \in \Pi$, le long des morceaux de fibres.

Lemme 6.8.11. *Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Pour tout $t_0, \varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tous $n \geq n_0$,*

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, \|\kappa(b'_1 \dots b'_n) - n\sigma_\mu\| \leq nt_0\} \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration. On note

$$E_n := \{g \in \Gamma, \sigma_F(g, \xi_{T^n b}) \in U - z + \theta_n(b), \chi(g) \in I - t + \chi(b_1 \dots b_n)\}$$

$E := \{g \in \Gamma, \|\kappa(g) - n\sigma_\mu\| \leq nt_0\}$. D'après la description des mesures conditionnelles (6.1), pour $n \geq 0$, la probabilité à estimer est $\frac{\mu^{*n}(E_n \cap E)}{\mu^{*n}(E_n)}$. Le principe des grandes déviations pour la projection de Cartan ([16], 12.6) affirme qu'il existe $c > 0$ tel que pour n assez grand, on a $\mu^{*n}(E) \geq 1 - e^{-cn}$. Par ailleurs, d'après le théorème 6.7.3, il existe $R > 0$ tel que pour n assez grand, on a $\mu^{*n}(E_n) \geq n^{-R}$. Finalement, à partir d'un certain rang, on a $\frac{\mu^{*n}(E_n \cap E)}{\mu^{*n}(E_n)} = 1 - \frac{\mu^{*n}(E_n \cap E^c)}{\mu^{*n}(E_n)} \geq 1 - \frac{e^{-cn}}{n^{-R}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. D'où le résultat. □

6.8.6 Contrôle de la dérive

On conclut la section par les théorèmes de contrôle annoncés, valables pour des représentations très générales.

Soit (V, ρ) une représentation algébrique fortement irréductible non bornée de G , et $\omega \in \mathfrak{a}^*$ le plus haut poids de $(V, \rho|_{G_c})$. On suppose V muni d'un produit scalaire tel que $\rho(K) \subseteq O(V)$, $\rho(A) \subseteq \text{Sym}(V)$.

- **Contrôle de la norme.** Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tel que pour tous $n \geq n_0$, $v \in V$, on ait :

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, C^{-1}e^{\omega(\theta_n(b))} \|v\| \leq \|\rho(b'_1 \dots b'_n)v\| \leq Ce^{\omega(\theta_n(b))} \|v\|\} > 1 - \varepsilon$$

- **Contrôle de la direction.** Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\delta > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que pour tous $n \geq n_0$, $v \in V - \{0\}$, on ait :

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\rho(b'_1 \dots b'_n)\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^+) \leq e^{-\delta n}\} > 1 - \varepsilon$$

Démonstration. Pour la norme : Soit $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 6.8.8 de la loi des angles et le corollaire 6.8.10, il existe des constantes $r > 0$, $R > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v \in V - \{0\}$ on a

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^-) \geq r \text{ et } \|\omega(\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \theta_n(b))\| \leq R\} > 1 - \varepsilon$$

Le résultat est alors une conséquence directe du premier point du lemme 6.8.1.

Pour la direction : Soit $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 6.8.8 et le lemme 6.8.11, étant donné $t_0 > 0$, il existe des constantes $r > 0$, $R > 0$ et un rang $n_0 \geq 3$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v \in V - \{0\}$ on a

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^-) \geq r \text{ et } \|\kappa(b'_1 \dots b'_n) - n\sigma_\mu\| \leq nt_0\} > 1 - \varepsilon$$

Soit $c' \in W$ dans cet ensemble. En utilisant le point 2 du lemme 6.8.1, on obtient que

$$\begin{aligned} d(\rho(b'_1 \dots b'_n)\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^+) &\leq \frac{1}{d(\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^-)} \max_{\alpha \in \Pi} e^{-\alpha(\kappa(b'_1 \dots b'_n))} \\ &\leq r^{-1} \max_{\alpha \in \Pi} e^{-n(\alpha(\sigma_\mu) + \alpha(x_{n,c'}))} \end{aligned}$$

où on a noté $x_{n,c'} := \frac{1}{n}\kappa(b'_1 \dots b'_n) - \sigma_\mu$, élément de \mathfrak{a} de norme au plus t_0 . Il est prouvé dans [16] (section 9.4) que le vecteur de Lyapunov σ_μ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl \mathfrak{a}^+ , autrement dit que pour tout $\alpha \in \Pi$, on a $\alpha(\sigma_\mu) > 0$. On peut donc choisir $t_0 > 0$ tel que $\|\alpha\| \leq \frac{1}{2t_0}\alpha(\sigma_\mu)$ pour tout $\alpha \in \Pi$. On a alors

$$d(\rho(b'_1 \dots b'_n)\mathbb{R}v, V_{b'_1 \dots b'_n}^+) \leq r^{-1} e^{-\frac{n}{2} \min_{\alpha \in \Pi} \alpha(\sigma_\mu)}$$

Cela donne le résultat annoncé. \square

Remarque. *Le contrôle de la direction reste vrai pour des représentations induites à G à partir de représentations irréductibles non bornées de G_c , et munies d'un bon produit scalaire. L'hypothèse de forte irréductibilité est seulement utilisée dans le contrôle de la norme, pour lequel on utilise la F -invariance du plus haut poids à travers le corollaire 6.8.10.*

On termine la section par un dernier corollaire qui permettra de préciser le contrôle directionnel dans la preuve de la dérive.

Corollaire 6.8.12. *Soit $c = (b, z, O, x) \in W$ un point β_W^+ -typique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que, pour $n \geq n_0$, on a*

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(b'_1 \dots b'_n \xi_{T^nb}, \xi_{b'_1 \dots b'_n}^+) < e^{-\delta n}\} > 1 - \varepsilon$$

Démonstration. En raisonnant à l'aide des $(V_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ comme dans la preuve du corollaire 6.8.3, on voit qu'il suffit de prouver le résultat suivant : Soit (V, ρ) une représentation irréductible proximale non bornée de G_c , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un bon produit scalaire sur la représentation induite à G . Alors pour β_W^+ -presque tout $c = (b, z, O, x) \in W$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que, pour $n \geq n_0$, on a

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\rho(b'_1 \dots b'_n)V_{\xi_{T^nb}}, V_{\xi_{b'_1 \dots b'_n}^+}) < e^{-\delta n}\} > 1 - \varepsilon$$

Comme (V, ρ) est proximale, les $V_\xi \in \mathbb{P}(V)$ sont des droites. On conclut directement à partir du contrôle de la direction démontré plus haut (avec $\mathbb{R}v = V_{\xi_{T^nb}}$) combiné à la dernière remarque. \square

6.9 Preuve de la dérive exponentielle

Nous allons mettre ensemble les résultats des sections précédentes pour prouver le théorème de dérive exponentielle. On rappelle quelques hypothèses : $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ est une probabilité sur $SL_d(\mathbb{Z})$ à support fini engendrant un semigroupe Γ fortement irréductible (donc d'adhérence de Zariski $G \subseteq SL_d(\mathbb{R})$ semi-simple, non bornée), et $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes tel que $\chi_*\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée. On fait de plus les hypothèses $\mu(e) > 0$ et χ non trivial pour pouvoir appliquer le théorème local limite et les théorèmes de contrôle démontrés dans les sections 6.7.2 et 6.8.6. La notation $\nu \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ désigne une mesure de Radon stationnaire ergodique pour la marche induite par (μ, χ) sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, dont la projection sur \mathbb{T}^d est sans atome. Ces données ont permis de construire un système dynamique fibré (B^+, T^+, β^+) dans la section 6.4.2. On note \mathcal{Q}_∞^+ sa tribu queue.

Théorème 6.9.1 (Dérive exponentielle). *Soit Y un espace mesurable standard, $\sigma : B^+ \rightarrow Y$ une application \mathcal{Q}_∞^+ -mesurable, $E \subseteq B^+$ une partie β^+ -pleine. Alors pour presque tout $c \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c', c'' \in E$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ non nul, tels que $c'' = \phi_t(c')$ et $\sigma(c) = \sigma(c') = \sigma(c'')$.*

Démonstration. Soit $U \subseteq \mathfrak{a}^F$, $I \subseteq \mathbb{R}$ des ouverts convexes bornés non vides, avec I assez grand pour que tous ses translatés $I + t$ intersectent $\chi(\Gamma)$. Posons $W := B \times U \times O_r(\mathbb{R}) \times (\mathbb{T}^d \times I) \subseteq B^+$. On va montrer le résultat pour β^+ -presque tout $c \in W$, ce qui est suffisant car U et I peuvent être choisis arbitrairement grands. Les points c', c'' seront construits dans W également. L'espace d'arrivée Y étant standard, on peut supposer $Y = [0, 1]$. Quitte à multiplier ν par une constante, on peut supposer $\beta^+(W) = 1$. Enfin, comme la composante sur \mathfrak{a} est uniformément bornée dans la fenêtre W , il suffit de prouver le théorème 6.9.1 en remplaçant le flot ϕ_t par le flot $\phi'_t(b, z, O, x) = (b, z, O, x + \sum_{i=1}^r t_i e_{b,i})$ (voir section 6.4 pour la définition des $e_{b,i}$).

Dans un premier temps, introduisons des compacts $K_0, K_1 \subseteq W$ vérifiant de bonnes propriétés. Soit $\alpha > 0$ (petit). D'après le théorème de Lusin, il existe un compact $K_0 \subseteq W$ de mesure $\beta_W^+(K_0) > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ sur lequel les restrictions $\sigma|_{K_0} : K_0 \rightarrow Y$, $\xi|_{K_0} : K_0 \rightarrow \mathcal{P}$, $c = (b, z, O, x) \mapsto \xi_b$ sont continues. D'après le théorème d'équirépartition des morceaux de fibres (plus précisément le corollaire 6.6.6), il existe un compact $K_1 \subseteq W$ de mesure $\beta_W^+(K_1) > 1 - \alpha$, et un rang $N_0 \geq 0$ tels que pour tout $c \in K_1$, $n \geq N_0$, on a

$$\beta_{W,n,c}^+(K_0) > 1 - \alpha$$

D'après le théorème de Lusin, quitte à réduire K_1 , on peut supposer que l'application $\sigma|_{K_1} : K_1 \rightarrow Y$ est continue. On montre de plus que la non-dégénérescence des mesures limites ν_b (corollaire 6.5.2) assure que β_W^+ -presque tout $c = (b, z, O, x) \in K_1$ est limite d'une suite $(c_p)_{p \geq 1}$ de points de K_1 de la forme $c_p = (b, z, O, x + (u_p, t_p))$ où $u_p \in \mathbb{R}^d$, $t_p \in \mathbb{R}$, u_p agit sur la coordonnée en \mathbb{T}^d , a sa projection sur \mathbb{T}^d en dehors de l'ensemble stable $W_b(0)$, et u_p, t_p tendent vers 0 quand p tend vers l'infini. En

effet, remarquons que la mesure $\beta_{W|K_1}^+$ s'écrit

$$\beta_{W|K_1}^+ = \int_{B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R})} \delta_{(b,z,O)} \otimes \nu_{b|K_1^{(b,z,O)}} d\beta(b) d\text{leb}_{\mathfrak{a}^F}(z) dh(O)$$

où $K_1^{(b,z,O)} := \{x \in X, (b, z, O, x) \in K_1\}$. Ainsi, pour β_W^+ -presque tout $c = (b, z, O, x) \in K_1$, on a x dans le support de $\nu_{b|K_1^{(b,z,O)}}$, autrement dit, pour tout voisinage V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, on a $\nu_{b|K_1^{(b,z,O)}}(x + V) > 0$. En remarquant que $W_b(x) = x + W_b(0)$, le corollaire 6.5.2 implique que

$$\nu_{b|K_1^{(b,z,O)}}(x + (V - W_b(0) \times \mathbb{R})) > 0$$

On obtient donc la suite $(c_p)_{p \geq 1}$ annoncée en se donnant une base décroissante de voisinages $(V_p)_{p \geq 1}$ de $(0, 0)$ dans $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, en choisissant x_p dans $K_1^{(b,z,O)} \cap x + (V_p - W_b(0) \times \mathbb{R})$ puis en posant $c_p := (b, z, O, x_p)$.

Fixons un point $c \in K_1$ admettant une telle approximation $(c_p) \in K_1^{\mathbb{N}^*}$. On va construire les points c', c'' du théorème de dérive exponentielle comme limites de points pris dans les fibres passant par c et les c_p . Pour $c' = (b', z', O', x') \in W$, notons

$$D_n(c') = b'_1 \dots b'_n b_n^{-1} \dots b_1^{-1} \in SL_d(\mathbb{Z})$$

Le calcul explicite des mesures conditionnelles par rapport aux morceaux de fibres montre que lorsque $c' = (b', z', O', x')$ varie dans W selon la loi $\beta_{W,n,c}^+$, le translaté $c'' = c' + (D_n(c')u_p, t_p) := (b', z', O', x' + (D_n(c')u_p, t_p))$ varie selon la loi β_{W,n,c_p}^+ . En particulier, on a

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, c' + (D_n(c')u_p, t_p) \in K_0\} > 1 - \alpha$$

On applique maintenant les théorèmes de contrôle donnés par la loi des angles pour la représentation canonique de G sur $V = \mathbb{R}^d$. Quitte à réduire K_1 dès le début, cela donne :

Lemme. • (Contrôle de la norme) *Soit $\varepsilon_2 > 0$. Il existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_2[$, $p_0 \geq 0$ tel que pour tout $p \geq p_0$, il existe un entier $n_p \geq 1$ pour lequel*

$$\beta_{W,n_p,c}^+ \{c' \in W, \|D_{n_p}(c')u_p\| \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]\} > 1 - \alpha$$

• (Contrôle de la direction) *Pour toute constante $\delta > 0$, il existe un rang $N_1 \geq 0$ tel que pour $n \geq N_1$, pour tout $p \geq 0$, on a*

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(D_n(c')\mathbb{R}u_p, V_{b'_1 \dots b'_n T^n b}) < \delta\} > 1 - \alpha$$

Démonstration. Reportée plus bas. □

Concluons la preuve. On se donne $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ et $p_0 \geq 0$ comme dans le lemme précédent. Quitte à tronquer la suite (c_p) , on peut supposer que $p_0 = 0$. Par ailleurs, la suite n_p tend vers $+\infty$. Quitte à tronquer davantage, on peut donc supposer $n_p \geq N_0$ pour tout $p \geq 1$. On peut de plus choisir $\alpha < 1/4$ dès le début de la preuve. D'après ce qui précède, on peut alors se donner pour tout $p \geq 1$, un point $c'_p \in K_0$ de la n_p fibre passant par c tel que :

- $c_p'' := c_p' + (D_{n_p}(c_p')u_p, t_p) \in K_0 \cap F_{n_p, c_p}$
- $\|D_{n_p}(c_p')u_p\| \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$
- $d(D_{n_p}(c_p')\mathbb{R}u_p, V_{b_1^{(p)} \dots b_{n_p}^{(p)} T^{n_p} b}) < \delta_p$ avec $\delta_p \rightarrow 0$ (en notant $c_p' = (b_1^{(p)} \dots b_{n_p}^{(p)} T^{n_p} b, \dots)$)

Par compacité de K_0 et quitte à extraire, on peut supposer qu'on a la convergence $(c_p') \rightarrow c'$ et $(c_p'') \rightarrow c''$ avec $c', c'' \in K_0$.

On a les égalités $\sigma(c) = \sigma(c') = \sigma(c'')$. En effet, comme l'application σ est \mathcal{Q}_∞^+ -mesurable, elle est en particulier constante sur les fibres. On a ainsi $\sigma(c) = \sigma(c_p')$ et $\sigma(c_p) = \sigma(c_p'')$ pour $p \geq 1$. Comme l'application σ est continue sur K_0 et K_1 , on a finalement $\sigma(c') = \lim \sigma(c_p') = \sigma(c)$, et $\sigma(c'') = \lim \sigma(c_p'') = \lim \sigma(c_p) = \sigma(c)$.

Enfin, quitte à extraire on peut supposer que la dérivée $D_{n_p}(c_p')u_p$ converge vers un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ de norme $\|v\| \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Vérifions qu'alors c' et c'' sont liés par l'action du flot. Écrivons $c' = (b', z', O', x')$. La convergence de c_p' vers c' implique que $b_1^{(p)} \dots b_{n_p}^{(p)} T^{n_p} b \rightarrow b'$. La continuité de l'application ξ sur K_0 et le contrôle directionnel de la dérivée entraînent alors que $v \in V_{b'}$. Finalement, en utilisant que la suite $(t_p)_{p \geq 1}$ tend vers 0, on obtient $c'' = c' + (v, 0)$ avec $v \in V_{b'}$, de norme dans $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Comme ε_2 est arbitrairement petit, cela prouve la dérivée exponentielle pour presque tout point de K_1 . Comme α peut être choisi arbitrairement petit, la preuve est terminée. \square

Il reste à démontrer le lemme utilisé dans la preuve de la dérivée exponentielle.

Démonstration du lemme. Vérifions le premier point. Notons $\omega \in \mathfrak{a}^*$ le plus haut poids de G_c sur $V = \mathbb{R}^d$. D'après le contrôle de la norme, il existe une constante $C > 0$ et un rang $N'_0 \geq 0$ tel que pour tous $n \geq N'_0$, $p \geq 1$ on a :

$$\beta_{W, n, c}^+ \{c' \in W, C^{-1} e^{\omega(\theta_n(b))} \|b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p\| \leq \|D_n(c')u_p\| \leq C e^{\omega(\theta_n(b))} \|b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p\|\} > 1 - \alpha$$

Il suffit donc de montrer que si $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_2[$ est assez petit, et $p \geq 0$ assez grand, alors il existe $n \geq N'_0$ tel que l'intervalle $[s_n, t_n] := e^{\omega(\theta_n(b))} \|b_n^{-1} \dots b_1^{-1} u_p\| [C^{-1}, C]$ est inclus dans $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. On note $R = \max\{\|g\| + \|g^{-1}\|, g \in \text{supp} \mu\}$. On choisit $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > C^2 R^2$. On se donne $p_0 \geq 0$ tel que pour $p \geq p_0$ on a $\|u_p\| < R^{-2N'_0} \varepsilon_1$. Soit $p \geq p_0$, et n_p le premier entier tel que $s_{n_p} > \varepsilon_1$. Un tel entier existe bien car la suite (s_n) n'est pas bornée (par la condition $u_p \notin W_b(0)$ dans \mathbb{T}^d et la positivité du premier Lyapunov sur V qui donne $\omega(\theta_n(b)) \rightarrow +\infty$ via le corollaire 6.8.6). Comme $s_{n+1}/s_n \leq R^2$ pour tout $n \geq 1$, on a de plus $n_p \geq N'_0$ et $s_{n_p} \leq \varepsilon_1 R^2$. Comme $t_n/s_n \leq C^2$ pour tout $n \geq 1$, on a $t_n \leq \varepsilon_1 R^2 C^2 \leq \varepsilon_2$ d'où l'inclusion $[s_{n_p}, t_{n_p}] \subseteq [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. D'où le premier point.

Vérifions le second point. Soit $\delta > 0$. D'après le contrôle de la direction donné par la loi des angles (voir 6.8.6), il existe un rang $N \geq 0$ tel que pour $n \geq N$, pour tout $p \geq 0$, on a

$$\beta_{W, n, c}^+ \{c' \in W, d(D_n(c')\mathbb{R}u_p, V_{\xi_{b_1' \dots b_n'}}^+) < \delta/2\} > 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Il reste à vérifier que $V_{\xi_{b'_1 \dots b'_n}^+}$ est proche de $V_{b'_1 \dots b'_n T^{nb}}$ pour n grand. Soit $r := \dim_{\text{prox}} G$ la dimension proximal de $G \subseteq SL_d(\mathbb{R})$. On voit $\mathbb{G}_r(V)$ comme un sous-ensemble des parties fermées de $\mathbb{P}(V)$ et on le munit de la distance de Hausdorff. On munit \mathcal{P} de la distance introduite dans la section 6.4. L'application $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{G}_r(V), \xi \mapsto V_\xi$ est continue sur \mathcal{P} compact, donc uniformément continue. Il existe ainsi $\delta' > 0$ tel que pour tous $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}$ à distance $d(\xi_1, \xi_2) < \delta'$, on a $d(V_{\xi_1}, V_{\xi_2}) < \delta/2$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un rang $N' \geq 0$ tel que pour $n \geq N'$, on a

$$\beta_{W,n,c}^+ \{c' \in W, d(\xi_{b'_1 \dots b'_n}^+, \xi_{b'_1 \dots b'_n T^{nb}}) < \delta'\} > 1 - \frac{\alpha}{2}$$

C'est une application directe du corollaire 6.8.12 du contrôle de la direction dans la section précédente.

□

6.10 Conclusion

On termine la preuve du théorème 6.1.1 en prouvant le théorème 6.4.1 énoncé dans la section 6.4 :

Théorème. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ une probabilité à support fini engendrant un sous semi-groupe $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{Z})$ fortement irréductible, et soit $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de semi-groupes tel que la probabilité $\chi_*\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est centrée. Alors toute mesure de Radon μ -stationnaire ergodique ν sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ dont la projection $\nu(\cdot \times \mathbb{R}) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ est sans atome est (à translation près) une mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d \times \chi(\Gamma)$.*

Notons $X := \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ et $(\nu_b)_{b \in B} \in \mathcal{M}^{Rad}(X)^B$ les mesures limites associées à ν . On a en particulier la décomposition $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$ (cf. section 2.1). Nous allons montrer que les ν_b sont invariants par translation de leur coordonnée en \mathbb{T}^d . C'est alors aussi le cas de ν . On conclura ensuite en utilisant que la projection de ν sur \mathbb{R} est une mesure de Radon $\chi(\Gamma)$ -invariante. On note toujours $r := \dim_{\text{prox}} \Gamma \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$ la dimension proximale de $\Gamma \subseteq SL_d(\mathbb{R})$.

Soit $b \in B$, $V_b \subseteq \mathbb{R}^d$ le r -plan limite associé (cf. section 6.4). On désintègre la mesure de Radon $\nu_b \in \mathcal{M}^{Rad}(X)$ sous l'action de V_b par translation de la coordonnée en \mathbb{T}^d . On obtient une application mesurable $\sigma_b : X \rightarrow \mathcal{M}_1^{Rad}(V_b)$, $x \mapsto \sigma_{b,x}$. On voudrait montrer que les $\sigma_{b,x}$ sont invariants par une même droite de V_b . On aurait alors que la mesure ν_b est invariante sous l'action de cette droite. La forte irréductibilité de Γ sur \mathbb{R}^d permettrait alors de conclure que ν_b est \mathbb{T}^d -invariante pour presque tout b (voir plus bas). Pour se ramener à ce cas là, on note pour $x \in X$, $V_{b,x} := [\text{Stab}_{V_b} \sigma_{b,x}]_0$ la composante neutre du stabilisateur de $\sigma_{b,x}$ dans V_b (agissant par translation sur les mesures projectives de $\mathcal{M}_1^{Rad}(V_b)$). C'est un élément de $\mathbb{G}(V_b)$ ensemble des sous-espaces vectoriels de V_b . On désintègre ν_b par rapport à l'application $\pi_b : X \rightarrow \mathbb{G}(V_b)$, $x \mapsto V_{b,x}$ et on obtient une famille mesurable $(\nu_{b,x})_{x \in X} \in \mathcal{M}^{Rad}(X)^X$ ν_b -presque partout caractérisée par :

- $\nu_b = \int_X \nu_{b,x} d\nu_b(x)$
- Pour tout $x \in X$, $\nu_{b,x}$ est concentré sur $\pi_b^{-1}(V_{b,x}) \subseteq X$.

Lemme 6.10.1. *Soit $b \in B$. Pour ν_b -presque tout $x \in X$, la mesure $\nu_{b,x}$ est $V_{b,x}$ -invariante.*

Démonstration. Remarquons que l'action de V_b sur $X = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ ne modifie pas la coordonnée réelle. Il suffit donc de montrer que pour tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$, pour ν_b -presque tout $x \in X$, la mesure finie $\nu_{b,x}|_{\mathbb{T}^d \times I}$ est $V_{b,x}$ -invariante. Cela est démontré dans ([13], proposition 4.3). \square

Le théorème de dérive exponentielle est utilisé pour obtenir le résultat suivant.

Lemme 6.10.2. *Pour β -presque tout $b \in B$, ν_b -presque tout $x \in X$, on a $V_{b,x} \neq \{0\}$.*

Rappelons d'abord un lemme général les mesures conditionnelles. On dira qu'une action d'un groupe topologique G sur un ensemble Z est à stabilisateurs discrets si pour tout $z \in Z$, le fixateur $G_z := \{g \in G, g.z = z\}$ est discret dans G .

Lemme 6.10.3. *Soit Z un espace borélien standard, m une mesure σ -finie sur Z , G un groupe localement compact à base dénombrable muni d'une action sur Z qui est mesurable à stabilisateurs discrets. De même soit (Z', m', G') . On se donne $f : Z \rightarrow Z'$ une bijection bimesurable telle que $f_*m = m'$ et $\phi : G \rightarrow G'$ un isomorphisme de groupes topologiques tel que pour tout $z \in Z$, $g \in G$, on a $f(g.z) = \phi(g).f(z)$.*

Alors, si $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{M}_1(G)$, $\sigma' : Z' \rightarrow \mathcal{M}_1(G)'$ sont des décompositions de m et m' en mesures conditionnelles pour les actions de G et G' , on a pour m -presque tout $z \in Z$ que

$$\sigma'(f(z)) = \phi_*\sigma(z)$$

Démonstration. Cela découle de l'unicité des mesures conditionnelles. Voir [31] pour plus de détails. \square

Démonstration du lemme 6.10.2. On reprend les notations de la section 6.4. Pour $\beta \otimes \text{leb}_a \otimes h$ -presque tout $(b, z, O) \in B \times \mathfrak{a}^F \times O_r(\mathbb{R})$, on a que (\star) la famille de mesures projectives $(\sigma(b, z, O, x))_{x \in X} \in \mathcal{M}_1^{\text{Rad}}(\mathbb{R}^r)$ est une décomposition de $\delta_{(b,z,O)} \otimes \nu_b \in \mathcal{M}^{\text{Rad}}((b, z, O) \times X)$ par rapport à l'action de \mathbb{R}^r -flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^r}$. Soit $b \in B$ tel qu'il existe (z, O) vérifiant (\star) . Notons A l'isomorphisme vectoriel $A : \mathbb{R}^r \rightarrow V_b, t \mapsto \langle t, e^{\omega(z)} O e_b \rangle'$. On a ainsi $\phi_t(b, z, O, x) = (b, z, O, x + A(t))$. On déduit de lemme 6.10.3 que pour ν_b -presque tout $x \in X$, on a $A_*\sigma(b, z, O, x) = \sigma_{b,x}$. Quitte à bien choisir (b, z, O) dès le départ, le théorème de dérive exponentielle donne que pour ν_b -presque tout $x \in X$, la mesure projective $\sigma(b, z, O, x)$ est invariante selon une droite de \mathbb{R}^r (corollaire 6.4.10). On en déduit que $\sigma_{b,x}$ est invariante par une droite V_b , i.e. $V_{b,x} \neq \{0\}$. \square

Corollaire 6.10.4. *Pour β -presque tout $b \in B$, ν_b -presque tout $x \in X$, on a $V_{b,x} = \mathbb{T}^d$.*

Pour prouver ce corollaire, nous utiliserons le lemme général suivant :

Lemme 6.10.5. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(SL_d(\mathbb{Z}))$ une probabilité dont le support engendre un semi-groupe Γ fortement irréductible sur \mathbb{R}^d . Soit \mathcal{F} l'ensemble (dénombrable) des sous-groupes fermés connexes non nuls du tore \mathbb{T}^d . Alors \mathcal{F} n'admet qu'une seule probabilité μ -stationnaire : la masse de Dirac $\delta_{\mathbb{T}^d}$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $m \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ une probabilité μ -stationnaire sur \mathcal{F} telle que $m(\{\mathbb{T}^d\}) < 1$. Quitte à restreindre m à $\mathcal{F} - \{\mathbb{T}^d\}$ (Γ -stable) puis normaliser, on peut même supposer $m(\{\mathbb{T}^d\}) = 0$. On note $\alpha = \max_{u \in \mathcal{F}}(m(u))$ et $\mathcal{F}' = \{u \in \mathcal{F}, m(u) = \alpha\}$. Pour $u \in \mathcal{F}'$, on pose $V_u \subseteq \mathbb{R}^d$ le sous espace vectoriel se projetant sur u . Alors $\{V_u, u \in \mathcal{F}'\}$ est un ensemble fini Γ -invariant de sous-espaces vectoriels stricts non triviaux de \mathbb{R}^d . Cela contredit la forte irréductibilité de Γ sur \mathbb{R}^d . \square

Démonstration du corollaire 6.10.4. Notons $B^X := B \times X$, $\beta^X := \int_B \delta_b \otimes \nu_b d\beta(b) \in \mathcal{M}^{\text{Rad}}(B^X)$.

Remarquons que pour β^X -presque tout $(b, x) \in B^X$, μ -presque tout $g \in \Gamma$, on a $gV_{b,x} = V_{gb,gx}$. En effet, pour β -presque tout $b \in B$, μ -presque tout $g \in \Gamma$, on a

$g_*\nu_b = \nu_{gb}$ et $gV_b = V_{gb}$. Le lemme 6.10.3 implique alors que pour ν_b -presque tout $x \in X$, on a $g_*\sigma_{b,x} = \sigma_{gb,gx}$, ce qui prouve l'affirmation.

Considérons l'application $\Phi : B^X \rightarrow \mathcal{F}$, $(b, x) \mapsto V_{b,x}$. Elle est presque sûrement Γ -équivariante d'après ce qui précède. La mesure de Radon μ -stationnaire β^X a donc pour image une mesure μ -stationnaire $\Phi_*\beta^X \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. On montre que cette mesure est concentrée sur \mathbb{T}^d .

1er cas : $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est discret. C'est alors un sous groupe de \mathbb{R} (cf. lemme 6.1.2). L'ergodicité de ν implique que ν , et donc les ν_b , sont portés par un ensemble de la forme $\mathbb{T}^d \times (r + \chi(\Gamma))$ où $r \in \mathbb{R}$. On peut supposer que c'est $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$. Notons $\tau : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $b \mapsto \inf\{n \geq 1, \chi(b_1 \dots b_n) = 0\}$ (fini β -ps) le temps de retour au bloc de départ, et $\mu_\tau \in \mathcal{P}(\Gamma)$ la loi de $b_1 \dots b_{\tau(b)}$ quand b varie selon β . D'après la section 6.2, la mesure β^X est μ_τ -stationnaire. Soit $N \geq 0$ un entier. Comme la μ_τ -marche stabilise les blocs $(\mathbb{T}^d \times \{k\})_{k \in \mathbb{Z}}$, la mesure finie $\beta_{|\mathbb{T}^d \times [-N, N]}$ est également μ_τ -stationnaire sur B^X . Par ailleurs, le semi-groupe Γ_0 engendré par le support de μ_τ est fortement irréductible sur \mathbb{R}^d (lemme 6.2.3). Le lemme 6.10.5 implique donc que la mesure image $\Phi_*\beta_{|\mathbb{T}^d \times [-N, N]}$ sur \mathcal{F} est concentrée sur \mathbb{T}^d . Comme N est arbitraire, c'est finalement le cas de β^X .

2-ème cas : $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense. La preuve est essentiellement la même que celle donnée dans la sous-section 6.6.2 où on montre la non-dégénérescence des mesures limites. On rappelle les grandes lignes. On fixe $(\beta_b^X)_{b \in B}$ une décomposition de β^X en mesures limites ainsi qu'une constante $r > 0$, et pour tout $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle de longueur r , et on note $\beta_{b,I}^X := \beta_{|B \times \mathbb{T}^d \times I}$. On montre que les mesures finies $(\Phi_*(\beta_{b,I}^X))_{b,I} \in \mathcal{M}^f(\mathcal{F})$ ont presque-toutes les mêmes poids (comptés avec multiplicités, voir lemme 6.5.9). On en déduit que pour presque tout $b \in B$, la mesure $\Phi_*(\beta_{b,I}^X)$ ne dépend pas de I à translation près, puis que la mesure finie $m := \Phi_*\beta_{|B \times \mathbb{T}^d \times I}^X = \int_B \Phi_*(\beta_{b,I}^X) d\beta(b)$ est μ -stationnaire. Par le lemme 6.10.5, elle donc concentrée sur \mathbb{T}^d ce qui conclut étant donné que I est de taille arbitraire. \square

Corollaire. *Pour β -presque tout $b \in B$, ν_b est \mathbb{T}^d -invariante.*

Démonstration. Cela découle du lemme 6.10.1, du corollaire 6.10.4 et de l'expression de ν_b comme moyenne intégrale des $\nu_{b,x}$. \square

Preuve du théorème 6.4.1. D'après le corollaire précédent, les ν_b sont invariants par translation quelconque de la coordonnée en \mathbb{T}^d . C'est donc aussi le cas de ν car $\nu = \int_B \nu_b d\beta(b)$.

Supposons $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ discret. C'est alors un sous groupe de \mathbb{R} (cf. lemme 6.1.2). L'ergodicité de ν implique que ν est portée par un ensemble de la forme $\mathbb{T}^d \times (r + \chi(\Gamma))$ où $r \in \mathbb{R}$. On peut supposer que c'est $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$. La mesure ν se décompose sur les blocs $\nu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_{|\mathbb{T}^d \times \{k\}}$ et chaque mesure $\nu_{|\mathbb{T}^d \times \{k\}}$ est \mathbb{T}^d -invariante donc une mesure de Haar. D'après le deuxième point du corollaire 6.1.3, les masses totales des $\nu_{|\mathbb{T}^d \times \{k\}}$ sont les mêmes, ce qui conclut.

Supposons que $\chi(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}$ est dense. Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ mesurable, la mesure $\nu(\cdot \times I) \in \mathcal{M}^f(\mathbb{T}^d)$ est \mathbb{T}^d -invariante donc $SL_d(\mathbb{Z})$ -invariante. La relation de μ -stationnarité donne alors que pour $A \subseteq \mathbb{T}^d, I \subseteq \mathbb{R}$ mesurables, on a : $\nu(A \times I) = \int_G \nu(A \times [I - \chi(g)]) d\mu(g)$. La mesure $\nu(A \times \cdot) \in \mathcal{M}^{Rad}(\mathbb{R})$ est donc $\chi_*\mu$ -stationnaire, i.e. un multiple de la mesure de lebesgue (cf. lemme 6.1.2). Finalement, $\nu(A + z, I + t) = \nu(A \times I)$ pour tout $z \in \mathbb{T}^d, t \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

□

Bibliographie

- [1] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*. Number 50. American Mathematical Soc., 1997.
- [2] M. Akcoglu and L. Sucheston. Pointwise convergence of alternating sequences. *Canadian Journal of Mathematics*, 40(3) :610–632, 1988.
- [3] V. I. Arnold. Uniform distribution of points on a sphere and some ergodic properties of solutions of linear ordinary differential equations in a complex region. *Soviet. Math. Dokl* 4, 1963.
- [4] M. Babillot, P. Bougerol, and L. Elie. The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case. *The Annals of Probability*, 25(1) :478–493, 1997.
- [5] M. Babillot and F. Ledrappier. Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers. *Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)*, 14 :1–32, 1998.
- [6] B. Bárány, M. Pollicott, and K. Simon. Stationary measures for projective transformations : the blackwell and furstenberg measures. *Journal of Statistical Physics*, 148(3) :393–421, 2012.
- [7] B. Bekka, P. de La Harpe, and A. Valette. *Kazhdan’s property (T)*. Cambridge university press, 2008.
- [8] M. Bekka. On uniqueness of invariant means. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(2) :507–514, 1998.
- [9] T. Bénard. Drift of a random walk on an abelian cover of a finite volume homogeneous space. *coming soon*, 2020.
- [10] T. Bénard. Radon stationary measures for a random walk on $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$. *arXiv preprint arXiv :2006.05742*, 2020.
- [11] T. Bénard. Transience of a symmetric random walk in infinite measure. *arXiv preprint arXiv :2006.04459*, 2020.
- [12] Y. Benoist. *Cours de M2 : Réseaux des groupes de Lie* <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~benoist/prepubli/08m2p6ch1a13.pdf>. 2007-2008.
- [13] Y. Benoist and J.-F. Quint. Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes (i). *Annals of Mathematics*, 2008.
- [14] Y. Benoist and J.-F. Quint. Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (ii). *Journal of the American Mathematical Society*, 2013.

- [15] Y. Benoist and J.-F. Quint. Stationnary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (iii). *Annals of Mathematics*, pages 1017–1059, 2013.
- [16] Y. Benoist and J. F. Quint. *Random Walks on Reductive groups* <https://www.math.u-bordeaux.fr/~jquint/publications/walk.pdf>. Springer International Publishing, 2016.
- [17] Y. Benoist and J.-F. Quint. On the regularity of stationary measures. (226) :1–14, 2018.
- [18] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*. Birkhäuser, 1985.
- [19] P. Bougerol and N. Picard. Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *The Annals of Probability*, pages 1714–1730, 1992.
- [20] J. Bourgain. Finitely supported measures on $sl_2(\mathbb{R})$ which are absolutely continuous at infinity, geometric aspect of functional analysis (b. klartag et al. eds.), 133-141. *Lecture Notes in Math*, 2050.
- [21] J. Bourgain, A. Furman, E. Lindenstrauss, and S. Mozes. Invariant measures and stiffness for non-abelian groups of toral automorphisms. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(12) :737–742, 2007.
- [22] J. Bourgain, A. Furman, E. Lindenstrauss, and S. Mozes. Stationnary measures and equidistribution for orbits of non-abelian semigroups on the torus. *J. Amer. Math. Soc.*, 24 :231–280, 2011.
- [23] E. Breuillard. Equidistribution of random walks on nilpotent lie groups and homogeneous spaces. 2004.
- [24] S. Brofferio. How a centred random walk on the affine group goes to infinity. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, volume 39, pages 371–384. Elsevier, 2003.
- [25] A. Brown and F. Rodriguez-Hertz. Measure rigidity for random dynamics on surfaces and related skew-products. *J. Amer. Math. Soc.*, 30 :1055–1132, 2017.
- [26] A. I. Bufetov. Convergence of spherical averages for actions of free groups. *Annals of mathematics*, 155(3) :929–944, 2002.
- [27] G. Choquet. Représentation intégrale dans les cônes à base non compacte. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, 4 :1–1.
- [28] Y. S. Chow. Martingales in a σ -finite measure space indexed by directed sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 97(2) :254–285, 1960.
- [29] S. Dani. On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, ii. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 6(2) :167–182, 1986.
- [30] J. Deny. Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, 4ème année, exp n°5, 1960.
- [31] L. Dufloux. *Dimension de Hausdorff des ensembles limites*. PhD thesis, Université Paris 13, 2015.

- [32] T. Duquesne. Cours de M1 (UPMC) Probabilités approfondies : martingales à temps discret et chaînes de markov à espace d'états dénombrable. https://www.lpsm.paris/pageperso/brouinn/teaching/4M011_poly_duquesne.pdf.
- [33] M. Dussaule, C. Garban, and P. Ueber. *Probabilités avancées Cours de Master 1 ENS Lyon*. 2014.
- [34] L. Élie. Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de lie. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 15, pages 257–364, 1982.
- [35] N. Enriquez and Y. Le Jan. Statistic of the winding of geodesics on a riemann surface with finite area and constant negative curvature. *Revista Matemática Iberoamericana*, 13(2) :377–401, 1997.
- [36] A. Eskin and E. Lindenstrauss. Random walks on locally homogeneous spaces. *Preprint*, 1(2) :6, 2018.
- [37] A. Eskin and E. Lindenstrauss. Random walks on locally homogeneous spaces. *Preprint*, 2018.
- [38] A. Eskin and G. Margulis. Recurrence properties of random walks on homogeneous manifolds. *Random Walks and geometry*, pages 431–444, 2004.
- [39] A. Eskin and M. Mirzakhani. Invariant and stationnary measures for the $SL_2(\mathbb{R})$ -action on moduli space. *Publication mathématique de l'IHES*, 127 :95–324, 2018.
- [40] H. Furstenberg. Noncommuting random products. *Transactions of the American Mathematical Society*, 108(3) :377–428, 1963.
- [41] H. Furstenberg. Random walks and discrete subgroups of lie groups. *Advances in probability and related topics*, 1 :1–63, 1971.
- [42] H. Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, 26 :193–229, 1973.
- [43] Y. Guivarc'h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic theory and dynamical systems*, 10(3) :483–512, 1990.
- [44] Y. Guivarc'h and Y. Le Jan. Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continuous fractions. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 26, pages 23–50, 1993.
- [45] Y. Guivarc'h and É. Le Page. Spectral gap properties for linear random walks and pareto's asymptotics for affine stochastic recursions. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, volume 52, pages 503–574. Institut Henri Poincaré, 2016.
- [46] Y. Guivarc'h and C. Raja. Polynomial growth, recurrence and ergodicity for random walks on locally compact groups and homogeneous spaces. In *Random Walks, Boundaries and Spectra*, pages 65–74. Springer, 2011.

- [47] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontiere de Furstenberg, propriétés de contraction et théoremes de convergence. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 69(2) :187–242, 1985.
- [48] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Products of random matrices : convergence theorems. *Contemp. Math*, 50(31-54) :2, 1986.
- [49] S. Helgason. *Groups & Geometric Analysis : Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions*. Academic press, 1984.
- [50] H. Hennion and L. Hervé. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, volume 1766. Springer Science & Business Media, 2001.
- [51] M. Jerison. Martingale formulation of ergodic theorems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(4) :531–539, 1959.
- [52] V. A. Kaimanovich. Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1994(455) :57–104, 1994.
- [53] D. A. Kazhdan. Uniform distribution on a plane. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 14 :299–305, 1965.
- [54] H. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Mathematica*, 131(1) :207–248, 1973.
- [55] G. F. Lawler and V. Limic. *Random Walk : A Modern introduction*. Cambridge University Press, 2010.
- [56] É. Le Page. Théoremes limites pour les produits de matrices aléatoires. In *Probability measures on groups*, pages 258–303. Springer, 1982.
- [57] F. Ledrappier and O. Sarig. Fluctuations of ergodic sums for horocycle flows on \mathbb{Z}^d -covers of finite volume surfaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(1, 2) :247, 2008.
- [58] J. Li. *Harmonic analysis of stationary measures*. PhD thesis, 2018.
- [59] G. Margulis. On the action of unipotent groups in the space of lattices. In *Proc. of the summer school on group representations. Bolyai Janos Math. Soc., Budapest*, pages 365–370, 1971.
- [60] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17. Springer Science & Business Media, 1991.
- [61] P.-A. Meyer. Le théorème ergodique de chacón-ornstein. *Seminaire Bourbaki*, 17 :10–18, 1965.
- [62] S. V. Nagaev. Some limit theorems for stationary markov chains. *Theory of Probability & Its Applications*, 2(4) :378–406, 1957.
- [63] S. V. Nagaev. More exact statement of limit theorems for homogeneous markov chains. *Theory of Probability & Its Applications*, 6(1) :62–81, 1961.
- [64] J. Neveu. Bases mathématiques du calcul des probabilités. 1970.

- [65] H. Oh and W. Pan. Local mixing and invariant measures for horospherical subgroups on abelian covers. *International Mathematics Research Notices*, 2019(19) :6036–6088, 2019.
- [66] V. I. Oseledets. Markov chains, skew products and ergodic theorems for “general” dynamic systems. *Theory of Probability & Its Applications*, 10(3) :499–504, 1965.
- [67] W. Pan. Local mixing on abelian covers of hyperbolic surfaces with cusps. *arXiv preprint arXiv :1712.06030*, 2017.
- [68] F. Paulin. *Cours de M2 : Groupes et Géométrie* https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_georiem.pdf. 2013-2014.
- [69] R. R. Phelps. *Lectures on Choquet’s theorem*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [70] R. Prohaska. Spread out random walks on homogeneous spaces. *arXiv preprint arXiv :1910.00467*, 2019.
- [71] R. Prohaska. Spread out random walks on homogeneous spaces. *arXiv preprint arXiv :1910.00467*, 2019.
- [72] M. Ratner. Distribution rigidity for unipotent actions on homogeneous spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 24(2) :321–325, 1991.
- [73] G.-C. Rota. An “alternierende verfahren” for general positive operators. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 68(2) :95–102, 1962.
- [74] O. Sargent and U. Shapira. Dynamics on the space of 2-lattices in 3-space. *Geometric and Functional Analysis*, 29 :890–948, 2019.
- [75] O. Sarig. Lecture notes : Introduction to the transfer operator method <http://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/sites/math.sarigo/files/uploads/transferoperatorcourse-bonn.pdf>.
- [76] O. Sarig. Invariant radon measures for horocycle flows on abelian covers. *Inventiones mathematicae*, 157(3) :519–551, 2004.
- [77] O. Sarig. The horocycle flow and the laplacian on hyperbolic surfaces of infinite genus. *Geometric and Functional Analysis*, 19(6) :1757–1812, 2010.
- [78] K. Schmidt. On joint recurrence. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 327(9) :837–842, 1998.
- [79] Y. Shalom. Explicit kazhdan constants for representations of semisimple and arithmetic groups. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 50, pages 833–863, 2000.
- [80] D. Sullivan. Ergodic theory at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. In *Proceedings of Stonybrook conference on kleinian groups*. Princeton University Press, 1980.
- [81] M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory*. Chelsea Publishing Company, Incorporated, 1975.
- [82] R. J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81. Springer Science & Business Media, 2013.

Titre : Marches aléatoires sur les espaces homogènes de volume infini

Mots clés : Marche aléatoire, dynamique homogène, théorie ergodique

Résumé : Soit G un groupe de Lie réel et $\Lambda \subseteq G$ un sous-groupe discret. La donnée d'une mesure de probabilité μ sur G permet de définir une marche aléatoire sur le quotient G/Λ , la probabilité de transition en un point $x \in G/\Lambda$ étant $\mu \star \delta_x$. Nous étudierons la μ -marche sur G/Λ dans le cas où le sous-groupe Λ est de covolume infini dans G . Les questions abordées sont multiples : récurrence en loi, récurrence presque-sûre, estimation de la dérive dans le cas d'un revêtement abélien, classification des mesures de Radon stationnaires.

Title : Random walks on homogeneous spaces of infinite volume

Keywords : Random walk, homogeneous dynamics, ergodic theory

Abstract : Let G be a real Lie group and $\Lambda \subseteq G$ a discrete subgroup. Given a probability measure μ on G , one can define a random walk on the quotient space G/Λ , the probability of transition starting from a point $x \in G/\Lambda$ being $\mu \star \delta_x$. We shall study the μ -walk on G/Λ in the case where Λ has infinite covolume in G . Multiple questions are discussed : recurrence in law, almost-sure recurrence, estimate of the drift in the case of abelian covers, classification of locally finite stationary measures.