



**HAL**  
open science

# Sur l'intégrabilité algébrique des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés à 5 particules

Carlos Augusto León Gil

► **To cite this version:**

Carlos Augusto León Gil. Sur l'intégrabilité algébrique des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés à 5 particules. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Poitiers, 2020. Français. NNT : 2020POIT2280 . tel-03244938v2

**HAL Id: tel-03244938**

**<https://theses.hal.science/tel-03244938v2>**

Submitted on 1 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

**Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées**

(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

*École Doctorale* : Sciences et Ingénierie des Systèmes,  
Mathématiques, Informatique

*Secteur de Recherche* : **Mathématiques et leurs interactions**

Présentée par :

**Carlos Augusto LEÓN GIL**

---

## Sur l'intégrabilité algébrique des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés à 5 particules

---

Directeur de Thèse : **Pol VANHAECKE**

Soutenue le 10 décembre 2020

Devant la Commission d'Examen

### Jury

<b>Moulay BARKATOU</b>	Professeur, Université de Limoges	Examineur
<b>David BLÁZQUEZ SANZ</b>	Professeur, Université Nationale de Colombie	Examineur
<b>Guido CARLET</b>	Professeur, Université de Bourgogne	Rapporteur
<b>Enrica FLORIS</b>	Maître de Conférences, Université de Poitiers	Examinatrice
<b>Andrew HONE</b>	Professeur, Université de Kent	Rapporteur
<b>Vladimir SALNIKOV</b>	Chargé de Recherche, Université de la Rochelle	Examineur
<b>Alessandra SARTI</b>	Professeur, Université de Poitiers	Examinatrice
<b>Pol VANHAECKE</b>	Professeur, Université de Poitiers	Directeur



# Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord l'Université de Poitiers, institution qui m'a accueilli chaleureusement et a mis à ma disposition tous les outils pour poursuivre avec succès ma formation doctorale pendant ces quatre années. Je dédie une mention spéciale à l'École Doctorale SISMI et au Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA) d'avoir créé des conditions favorables au développement de cette thèse de doctorat.

Je remercie d'une manière très spéciale mon directeur de thèse, Pol Vanhaecke, sans qui ce travail n'aurait jamais été possible. Merci pour toutes les discussions et débats académiques, pour la bienveillance, la vigilance et le soutien constant, de m'avoir encouragé à continuer dans les moments les plus difficiles et pour avoir fait en sorte que ce projet porte des fruits académiques inestimables. Son expérience a été d'une importance vitale dans la formulation des questions abordées dans cette thèse, ainsi que ses contributions à la méthodologie de ce travail de recherche.

Je voudrais remercier les professeurs Guido Carlet et Andrew Hone d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, les professeurs Moulay Barkatou, Enrica Floris, David Blázquez Sanz, Vladimir Salnikov, Alessandra Sarti et Pol Vanhaecke pour avoir complété le jury en tant qu'examineurs. À tous, pour la lecture attentive de ce manuscrit, pour leurs observations et critiques constructives afin que ce travail ne fasse qu'améliorer.

Je remercie le professeur David Blázquez Sanz d'avoir semé la graine qui a donné lieu à cette rencontre académique avec le professeur Pol Vanhaecke. Ce travail est le fruit de cette germination.

J'aimerais exprimer ma profonde gratitude à tout le personnel du LMA, où j'ai vécu une merveilleuse expérience. Je remercie le groupe de travail GAGALie pour toutes les réunions, des occasions qui ont sans aucun doute facilité un échange académique avec mes collègues. À Samuel Boissière et Alicia Lecesve pour leur gestion administrative et le suivi constant de l'avancement de cette thèse depuis la direction et le secrétariat de l'École Doctorale. À Alessandra Sarti pour l'accueil et le soutien permanent depuis la direction du LMA. À Benoit Métrot et Philippe Augustin pour leur aide dans le domaine informatique ; à Brigitte Brault, Myriam André, Nathalie Mongin et Léa Nabit pour avoir toujours la meilleure disposition à m'aider, pour leur gentillesse et aussi leur

charisme lors des conversations chaleureuses et passionnantes. À Jocelyne Attab pour son sourire et son enthousiasme dans de longues discussions sur la photographie et le jardinage, qui nous ont permis notamment de profiter des saisons printanières colorées avec la floraison des tulipes dans les installations du laboratoire.

De manière très particulière, j'adresse mes remerciements à tous mes collègues doctorants qui ont joué un rôle important dans cette expérience académique. À Marco pour son accueil et son soutien au début de cette aventure : grazie per avermi fatto scoprire in modo disinteressato la grandezza della piccolina ma estremamente affascinante città di Poitiers ; à Angélique et Marion pour leur esprit et leur engagement auprès des doctoriales. À Léa, Rachad et Romain, futurs docteurs, par leur accompagnement dans ces derniers mois. Un grand merci à Clément, Ahmad, Salima, Alberto, Simone, Shuiran, Paolo, Camille, Meghdad, Pietro, Antoine, Fatma, Abir, Wafa et Sahar, pour les milliards de moments ensemble où j'ai pu connaître un côté humain qui transcende la sphère académique : il fanatismo interista di Simone ; il senso di riflessione profonda e analitica di Paolo ; le charisme accueillant et familier de Camille ; la joie innocente et merveilleuse de Meghdad ; la follia infantile di Pietro ; l'amitié sincère d'Antoine, un crack sur et en dehors des terrains de foot ; l'aura apaisante de Fatma ; les sourires lors d'une surprise d'Abir ; l'amitié inspirante de Wafa pour le jour le jour ; et la patience de Sahar, qui a dû me tolérer en tant que binôme de bureau non seulement quelques heures, pas des jours, pas des semaines, mais de longs mois, du temps qui à la fin reste court pour une amitié qui durera toute une vie. Merci à tous pour leur merveilleuse compagnie.

De même, je remercie Irene et Nasim pour faire partie de ce groupe spécial et pour tant de moments partagés.

Enrica, Gilberto, Pietro e Irene, grazie infinite per gli arricchenti incontri e per i piacevoli momenti di scambi letterari nel fight club.

Au cours de ces années j'ai construit de belles amitiés et je remercie toutes ces personnes de m'avoir fait me sentir de manière splendide dans cette ville : À Carmen, pour tant de conversations culturelles et artistiques, et chacune des découvertes de la ville. A Marzia, per un'estate che rimarrà per sempre nella mia memoria e che ha dato vita a una bella amicizia. À Melissa et Gad, pour leur chaleur humaine ; aux futures sociologues Cveta et Sarah, qui avec leur folie et leurs sourires ont réveillé en moi une affection très particulière ; à Mihaela, Alex et Argos, et à Mateo et Milica pour leur compagnie chaleureuse et exceptionnelle ; à Attila, Irina, Evgeniia, Lamia et Marion pour tant de promenades, soirées, danses et surtout d'avoir porté ma joie à sa plus grande splendeur ; et à la Team Padrino : Federico, Fernando et Diego, d'être toujours présents à mes jours,

avec qui, sans aucun doute, la ville de Poitiers ne connaît pas un seul jour d'ennui. Ce sont de belles amitiés qui apportent un bonheur infini. Merci beaucoup, grazie mille, mulțumesc foarte mult, danke schön, çok teşekkürler, bol'shoye spasibo, hvala vam mnogo, muchísimas gracias.

Je remercie également Luc et Gwenola d'être des personnes si merveilleuses qui ne se rencontrent qu'une fois dans la vie ; pour les cours de français et les pique-niques internationaux, des expériences culturelles qui m'ont touché profondément. Je présente mes remerciements particuliers à Alexis pour sa sympathie, à Punky et à Pascale d'être présentes pour moi quand j'avais tellement besoin de soutien, mais aussi d'être présentes dans mes moments les plus heureux. Ceux qui me connaissent savent très bien que je considère Gwenola et Pascale comme mes mères de cœur, mes mères françaises. Les rencontrer tous et toutes me fait me sentir très chanceux.

J'ai eu le privilège d'être entouré de gens formidables. Et parmi ces personnes, je tiens à remercier Éliane et Paulette pour tant de dîners et de sourires. À Cédric pour ses jeux de mots de niveau superlatif, et surtout pour cet esprit unique que l'on ressent lors de ses visites au marché de Notre Dame ; pour les moments, autour d'un repas, qui mettent en valeur le sens du partage et de la vraie vie en communauté. Je remercie également Bérengère et Youssef pour les moments partagés, agrémentés de conversations sur le cyclisme et pour nos balades à vélo.

Gracias a Laura por cada una de las experiencias de vida, los aprendizajes y el estar permanentemente pendiente de mí, por su cuidado y todo su afecto. El infinito nunca abarcará lo importante y especial que representas en mi vida.

Agradezco encarecidamente a mis profesores en Colombia, Pedro Isaza, Carlos Vélez, Jorge Cossio, Jorge Mejía y Luz Dary Castellanos por haberme apoyado en la continuación de mi formación académica, y quienes son un modelo y ejemplo para mi vida. A Liliana Parra y Liliana Barrera por todo su cariño y acompañamiento a pesar de la distancia. A mi compañero de viajes y amigo Andrés Sarrazola por estos años en Francia descubriendo la experiencia de hacer un doctorado. Un agradecimiento muy especial para mi supercuñis Manuela, por ser mi polo a tierra, mi oído y mi aporte diario de alegría y de buena energía.

Finalmente, quiero agradecer profundamente y con todo mi corazón a mi familia: a mis padres José y Beatriz, a mis hermanos Juanjo y María Isabel, y a mi mascota Bary. Ellos, con su expresión única de amor de familia, un amor que no conoce distancias ni ningún otro obstáculo, me dieron la fuerza necesaria para continuar en el día a día. A ellos, porque su cariño infinito ha permitido construir y recorrer este largo camino.

Como fruto y  
recompensa a todos y cada uno de los  
sacrificios y esfuerzos realizados durante todos  
estos años, en virtud de un sueño que se gestó  
desde el amor, porque para ellos este es también un  
sueño hecho realidad, esta tesis de doctorado está  
dedicada a mi familia: mi padre, José Joaquín  
León Martínez; mi madre, María Beatriz Gil  
Lopera; mi hermana, María Isabel León  
Gil; mi hermano, Juan José León Gil;  
y a mi mascota, alma perruna  
que ahora descansa  
eternamente,  
Bary.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>13</b>
2.1	Variétés de Poisson holomorphes . . . . .	13
2.1.1	Structures de Poisson holomorphes . . . . .	13
2.1.2	Description locale, matrice de Poisson . . . . .	15
2.1.3	Exemples . . . . .	16
2.1.4	Champs hamiltoniens, feuilletage symplectique . . . . .	18
2.2	Intégrabilité complexe au sens de Liouville . . . . .	20
2.2.1	Systèmes hamiltoniens complexes . . . . .	20
2.2.2	Fonctions en involution . . . . .	21
2.2.3	Intégrabilité complexe . . . . .	23
2.3	Intégrabilité algébrique . . . . .	25
2.3.1	Variétés abéliennes . . . . .	26
2.3.2	Intégrabilité algébrique . . . . .	27
2.3.3	Le critère de Kowalevski-Painlevé . . . . .	29
2.3.4	Le théorème de Liouville complexe . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Systèmes de Lotka-Volterra</b>	<b>33</b>
3.1	Systèmes de Lotka-Volterra . . . . .	33
3.2	Systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés . . . . .	38
3.3	Le rapport entre les systèmes KM(5) et BI(5) . . . . .	39
<b>4</b>	<b>L'intégrabilité algébrique du système BI déformé à 5 particules</b>	<b>49</b>
4.1	Le système intégrable $\mathbf{BI}^*(5)$ . . . . .	50
4.2	Comment prouver l'intégrabilité algébrique ? . . . . .	53
4.3	Les solutions de Laurent du système $\mathbf{BI}^*(5)$ . . . . .	55
4.4	Les diviseurs de Painlevé abstraits . . . . .	62
4.5	Un plongement de $\mathbf{H}_\kappa$ dans un espace projectif . . . . .	65



4.6	Extension holomorphe de $\mathcal{X}_{H_1}$ à $\mathbb{P}^{24}$ . . . . .	74
4.7	Analyse des diviseurs de Painlevé . . . . .	77
4.8	Tout point de $\Delta'_\kappa$ est envoyé dans la partie affine . . . . .	84
4.9	Déformations spéciales du système BI(5) . . . . .	90
4.9.1	Un epsilon nul . . . . .	90
4.9.2	Deux epsilons nuls . . . . .	96
4.9.3	Trois epsilons nuls . . . . .	108
4.9.4	Tous les epsilons sont nuls . . . . .	120

<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>
----------------------	------------

# Chapitre 1

## Introduction

Le résultat principal de cette thèse est une preuve de l'intégrabilité algébrique du système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules. Afin de mettre en lumière ce résultat, nous détaillons d'abord dans cette introduction comment la notion d'intégrabilité algébrique se situe parmi les autres notions d'intégrabilité et comment elle est née dans les années 80. Nous présenterons ensuite le système de Bogoyavlenskij-Itoh à  $n$  particules (déformé ou non) et nous expliquerons quelques éléments de notre preuve. Nous finirons avec quelques perspectives et questions ouvertes.

### L'intégrabilité avant le 20-ème siècle

La question de l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens a fait son apparence dès la naissance de la mécanique classique et est encore à ce jour une des questions les plus fondamentales dans ce domaine. Toutefois, au fur du temps, la notion d'intégrabilité des systèmes hamiltoniens a évolué et maintenant on dispose d'un très large spectre de notions, différentes mais fortement reliées, à chaque extrême la superintégrabilité et l'intégrabilité algébrique. La notion de superintégrabilité est la plus ancienne, et en un sens la plus simple, bien que très restrictive. Un champ de vecteurs  $X$  sur une variété  $M$  de dimension  $n$  est *superintégrable* s'il possède  $n - 1$  intégrales premières indépendantes  $F_1, \dots, F_{n-1}$  ; rappelons qu'une fonction  $F$  est une *intégrale première* de  $X$  si  $X(F) = 0$ . L'application  $M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  définie par  $(F_1, \dots, F_{n-1})$  admet alors des fibres, qui sont génériquement lisses et de dimension 1 ; de plus,  $X$  est tangent à ces fibres. L'intégration de  $X$ , avec une condition initiale générique, se réduit alors à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire en une seule variable ; il s'agit d'un premier exemple d'*intégration par quadratures*.

Les recherches de Lagrange, Poisson, Jacobi et leurs contemporains se concentraient alors sur la recherche d'intégrales premières pour les systèmes mécaniques qu'ils étudiaient, ce qui fut une grande source de frustration car, comme on le sait et comprend maintenant, la superintégrabilité est extrêmement rare, même comparée à d'autres notions d'intégrabilité. Précisons que le contexte dans lequel ces pionniers travaillaient était celui de la mécanique hamiltonienne où l'espace des phases est le fibré cotangent de l'espace de configuration du système mécanique étudié (toupie, pendule, problème de Kepler, etc.), muni de coordonnées locales  $q_i$  pour les positions et  $p_i$  pour les impulsions, pour  $i = 1, \dots, n$ . Si l'on note l'énergie du système par  $H$ , que l'on voit comme une fonction sur l'espace des phases (par exemple,  $H$  pourrait être la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'une particule, soumise à des forces extérieures), alors les équations de Hamilton, décrivant l'évolution du système, sont données par

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Pour Hamilton il était déjà clair que ces équations ont une structure sous-jacente, ce que l'on appelle maintenant la structure symplectique, et que l'on voit de nos jours comme la 2-forme

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

Hamilton avait en effet compris que cette structure était préservée lors de l'évolution du système (à partir de n'importe quelle condition initiale) [11]. Il se servait aussi de l'objet dual, qui est dans le langage moderne un *champ de bivecteurs*,

$$\pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Associé à  $\pi$  est ce que l'on appelle maintenant le *crochet de Poisson* : il s'agit d'un produit antisymétrique de fonctions, défini pour deux fonctions  $F, G$  par

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right).$$

Cet objet mystérieux apparaît alors comme un artefact qui permet de réécrire les équations de Hamilton (1.1) de manière plus symétrique, comme suit :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

À noter que pour toute fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  on a alors  $\dot{F} = \{F, H\}$  et  $F$  est une intégrale première si et seulement si  $\{F, H\} = 0$ .

Un faux espoir resulta du Théorème de Poisson, qui énonce que le crochet de Poisson de deux intégrales premières est une intégrale première. À priori, ce théorème permet de construire tant d'intégrales premières que l'on veut, or rien ne dit que le crochet de deux intégrales premières ne soit pas nul, ou constant, ou dépendant des intégrales premières dont elle est le crochet. Mais avec son théorème, Poisson prédisait l'importance en intégrabilité du crochet qui porte son nom. Citons ici Jacobi, qui vingt ans après Poisson, montra que le Théorème de Poisson - que ce dernier obtint par des calculs longs et fastidieux - est une conséquence immédiate d'une identité célèbre qu'il inventa à cette occasion... *l'identité de Jacobi* !

Il a fallu attendre Liouville pour que le rôle essentiel du crochet de Poisson dans l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens soit clairement établi. Il montra que pour qu'un système hamiltonien soit intégrable par quadratures on n'a pas besoin de  $2n - 1$  intégrales premières indépendantes, mais que  $n$  telles fonctions  $F_1, \dots, F_n$  suffisent, à condition que leur crochet de Poisson soit nul,

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

On dit alors que ces fonctions sont en involution et on parle d'intégrabilité *au sens de Liouville*. De plus, Liouville a montré que (sous certaines hypothèses topologiques) les fibres de l'application, définie par les intégrales premières, sont des tores, sur lesquels l'évolution du système est quasi-périodique ; ce qui explique aussi pourquoi la condition de superintégrabilité est beaucoup plus forte que celle d'intégrabilité au sens de Liouville.

Grâce au Théorème de Liouville, beaucoup de systèmes hamiltoniens connus s'avéraient intégrables ; beaucoup, mais pas tous ! Bien au contraire : au tournant du siècle, Poincaré montra que le problème à trois corps n'est pas intégrable (au sens de Liouville) ! Alors les recherches en mécanique se concentraient désormais aux aspects dynamiques et qualitatives des systèmes hamiltoniens. De plus, la mécanique quantique commençait à se développer, au détriment de la mécanique classique, et la question d'intégrabilité de systèmes hamiltoniens n'était plus d'actualité.

## Renaissance et intégrabilité algébrique

Un demi-siècle plus tard, un peu avant 1970, Kruskal et ses collaborateurs faisaient la découverte remarquable que l'équation de Korteweg-de Vries peut être résolue en utilisant la méthode spectrale inverse, qu'elle admet un nombre infini de constantes de mouvement, qu'elle admet également une (en effet plusieurs) structure hamiltonienne et

peut être décrite avec une équation de Lax comme étant un flot isospectral de l'opérateur de Schrödinger (en dimension 1). Une multitude d'idées, de nouveaux exemples et techniques ont rapidement vu le jour, d'abord dans le contexte des systèmes intégrables en dimension infinie (les EDP intégrables, comme l'équation de Korteweg-de Vries), mais ensuite aussi en dimension finie, où tous les systèmes hamiltoniens intégrables classiques ont été revisités avec un nouveau regard, et de nombreux nouveaux tels systèmes ont été construits et leurs structures sous-jacentes (symétries et master symétries, structure multi-hamiltonienne, R-matrice, équation(s) de Lax, etc.), inconnues auparavant, ont été découvertes et étudiées. Entre-temps la théorie de Lie et la géométrie différentielle étaient bien développées et ces nouvelles structures s'inscrivaient naturellement dans ce langage (variétés symplectiques et de Poisson, réduction, groupes de Lie-Poisson, etc.).

C'est à cette époque aussi qu'Adler et van Moerbeke ont introduit la notion d'intégrabilité algébrique, qui trouve ses origines dans les travaux de Kowalevski et Painlevé. Le point essentiel est que l'on s'intéresse aux solutions *complexes* des systèmes hamiltoniens (ici polynomiaux, pour que cela ait un sens). L'intuition de Kowalevski, qui lui fit découvrir *sa* toupie intégrable, était qu'un *bon* système hamiltonien devait avoir des solutions complexes avec de bonnes propriétés (univalentes, méromorphes en fonction du temps). Si l'approche de Kowalevski était analytique et axée sur les solutions, celle d'Adler et van Moerbeke était géométrique et faisait rentrer pleinement les systèmes intégrables au royaume de la géométrie algébrique [22].

D'après Adler-van Moerbeke un système intégrable complexe sur  $\mathbb{C}^n$  est dit *algébriquement intégrable* s'il est intégrable au sens de Liouville (complexe), ayant comme fibre générique de son application moment, définie par les intégrales premières complexes en involution, un ouvert d'une variété abélienne (tore algébrique) complexe sur lequel le flot des champs intégrables est linéaire. Ils découvrirent qu'après complexification la plupart des systèmes intégrables classiques sont algébriquement intégrables ; ils intégrèrent ces systèmes en termes des fonctions thêta et trouvaient beaucoup de nouveaux exemples, souvent grâce aux équations de Lax à paramètre. Une riche interaction entre les systèmes intégrables, la géométrie algébrique et la théorie de Lie commença [1]. Le critère de Kowalevski, utilisé par elle comme ansatz naturel, fut finalement démontré dans [1] où quelques techniques de preuve d'intégrabilité algébrique sont élaborées et illustrées.

## Le système de Bogoyavlenskij-Itoh à $n$ particules

Le système de Bogoyavlenskij-Itoh est un système de Lotka-Volterra bien particulier, dont l'intégrabilité a été démontrée par Bogoyavlenskij et Itoh [3, 4, 12, 13]. Rappelons (voir le chapitre 3 ci-dessous pour plus d'informations) la forme générale d'un système de Lotka-Volterra, que l'on peut considérer sur  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  :

$$\dot{x}_i = \epsilon_i x_i + \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_i x_j, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Dans ces équations, les coefficients  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  sont des constantes scalaires complexes et  $A = (A_{i,j})$  est une matrice carrée complexe de taille  $n$ . Dans le cas dit *antisymétrique*, les  $\epsilon_i$  sont supposés nuls et  $A$  est supposée antisymétrique. (1.3) est alors un système hamiltonien, avec une structure de Poisson quadratique (dite *diagonale*) définie par

$$\{x_i, x_j\} = A_{i,j} x_i x_j, \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n,$$

et avec

$$H := x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

comme hamiltonien. Dans le cas du système de Bogoyavlenskij-Itoh,  $n = 2k + 1$  est impair, la matrice  $A$  est donnée par

$$A_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{si } i < j \leq \min\{i + k, 2k + 1\}, \\ -1, & \text{si } \min\{i + k, 2k + 1\} < j \leq 2k + 1, \end{cases}$$

et (1.3) prend la forme simple et symétrique suivante :

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^k (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Des intégrales premières polynomiales sont construites en utilisant une équation de Lax (voir (3.8)) et elles sont en involution, ce qui prouve l'intégrabilité du système de Bogoyavlenskij-Itoh au sens de Liouville.

En utilisant des structures de Poisson compatibles, une déformation intégrable du système de Bogoyavlenskij-Itoh a été construite dans [8]. Le système déformé est donné par

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^k (x_{i+j} - x_{i-j}) + \epsilon_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

où les paramètres de déformation  $\epsilon_i$  sont des constantes complexes arbitraires de somme nulle,  $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n = 0$ . Les intégrales premières du système déformé sont des

déformations des intégrales premières du système non déformé, et sont obtenues de trois façons différentes : en déformant l'équation de Lax, par un pinceau de structures de Poisson compatibles, et par un opérateur différentiel, naturellement associé à la structure de Poisson (déformée).

Pour  $n = 5$ , le système déformé (1.5) devient

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_2 + x_3 - x_4 - x_5) + \varepsilon_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_3 + x_4 - x_5 - x_1) + \varepsilon_2, \\ \dot{x}_3 &= x_3(x_4 + x_5 - x_1 - x_2) + \varepsilon_3, \\ \dot{x}_4 &= x_4(x_5 + x_1 - x_2 - x_3) + \varepsilon_4, \\ \dot{x}_5 &= x_5(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \varepsilon_5,\end{aligned}$$

où on rappelle que la somme des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  est zéro. Ceci permet d'introduire de nouveaux paramètres qui à leur tour permettent de démontrer que le système déformé, qui n'est plus un système de Lotka-Volterra, est toujours un système hamiltonien. Ces paramètres sont définis (à une constante additive près) par

$$\varepsilon_i = \beta_{i,i+2} - \beta_{i-2,i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 5,$$

et la structure de Poisson déformée est donnée par la matrice de Poisson suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1x_2 & x_1x_3 + \beta_{1,3} & -x_1x_4 - \beta_{4,1} & -x_1x_5 \\ -x_2x_1 & 0 & x_2x_3 & x_2x_4 + \beta_{2,4} & -x_2x_5 - \beta_{5,2} \\ -x_3x_1 - \beta_{1,3} & -x_3x_2 & 0 & x_3x_4 & x_3x_5 + \beta_{3,5} \\ x_4x_1 + \beta_{4,1} & -x_4x_2 - \beta_{2,4} & -x_4x_3 & 0 & x_4x_5 \\ x_5x_1 & x_5x_2 + \beta_{5,2} & -x_5x_3 - \beta_{3,5} & -x_5x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système déformé admet les trois intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned}H_1 &= \sum_{i=1}^5 x_i, \\ H_2 &= \sum_{i=1}^5 x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^5 (\beta_{i+1,i-2} + \beta_{i+2,i-1}) x_i, \\ H_3 &= \prod_{i=1}^5 x_i + \sum_{i=1}^5 \beta_{i-1,i+1} x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^5 \beta_{i+1,i-2} \beta_{i+2,i-1} x_i.\end{aligned}$$

Elles sont indépendantes et en involution ; puisque la structure de Poisson est de rang 4, elles sont en bon nombre pour assurer l'intégrabilité au sens de Liouville du système de Bogoyavlenskij-Itoh à 5 particules. La question abordée dans cette thèse est donc l'intégrabilité algébrique de ce système, et ceci pour *toutes* les valeurs (pas seulement des valeurs génériques) des paramètres de déformation.

## Le théorème principal et quelques éléments de la preuve

Le cœur du présent manuscrit réside dans la preuve de l'intégrabilité algébrique du système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules. Nous avons donc l'intention de montrer que la fibre générique de l'application moment de ce système - qui se construit en utilisant les intégrales premières  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  - est un ouvert d'un tore algébrique complexe sur lequel le flot des champs intégrables est linéaire. Autrement dit, nous souhaitons montrer que pour une valeur générique de  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$ , la fibre générique

$$\mathbf{H}_\kappa := \mathbf{H}^{-1}(\{\kappa\}) = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i(x) = \kappa_i\}$$

de l'application moment du système est isomorphe à une partie affine d'une surface abélienne  $\mathbb{T}_\kappa^2$ , et que les champs de vecteurs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{H_1}$ ,  $\mathcal{X}_{H_2}$  et  $\mathcal{X}_{H_3}$  sont constants sur ce tore algébrique complexe.

Pour ce faire, nous utilisons ce que l'on appelle l'analyse de Painlevé du système en question. On montre que le champ de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  admet cinq familles de solutions de Laurent homogènes dépendant de quatre paramètres libres (c'est-à-dire des balances principales) et dix autres familles de solutions de Laurent homogènes dépendant de trois paramètres libres (les balances inférieures). Une des balances principales est donnée par :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a + (a^2 - 2ac + \varepsilon_1)t + \mathcal{O}(t^2), \\ x_2(t) &= -\varepsilon_2 t + ((-2a^3 + 3a^2b + 6a^2c - ab^2 - 4ac^2 - 4abc - 2d) \\ &\quad - (2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3)a + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)b + (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)c)t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\ x_3(t) &= b + (b^2 - 2ab + 2bc + \varepsilon_3)t + \mathcal{O}(t^2), \\ x_4(t) &= \frac{1}{t} + c + \left( \frac{1}{3}(4ab - 2b^2 + c^2 - 4bc) + \frac{1}{3}(2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4) \right)t + \mathcal{O}(t^2), \\ x_5(t) &= -\frac{1}{t} + (b + c - a) + \left( \frac{1}{3}(-3a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 6ac - 2bc) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_5) \right)t + dt^2 + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned}$$

Une fois les balances principales déterminées, nous procédons à la construction d'un « bon » plongement de la surface invariante affine  $\mathbf{H}_\kappa$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{24}$  : il est construit en utilisant une base de fonctions polynômiales homogènes ayant au pire un pôle simple lorsque l'on y substitue n'importe quelle balance principale. Nous vérifions la formule d'adjonction pour le plongement donné, nous rassurant que le plongement doit être « bon » et nous déterminons l'image des cinq courbes de Painlevé abstraites dans  $\mathbb{P}^{24}$ , ainsi que leurs singularités. Nous montrons que le nombre de paramètres de



déformation nuls est, de manière surprenante, égal au nombre de points de tangence dans la configuration géométrique des courbes plongées.

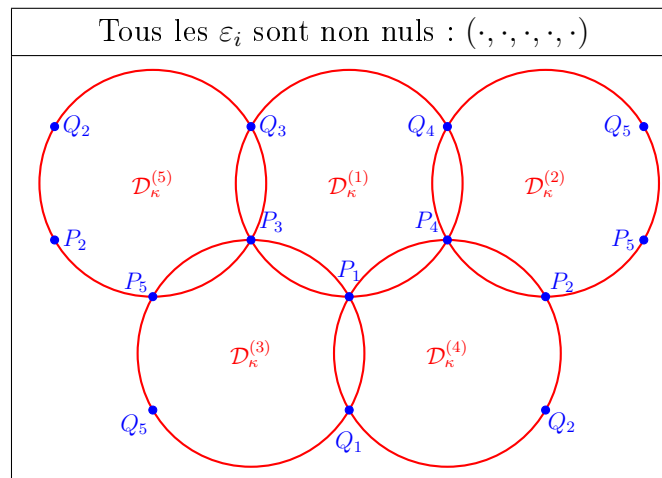
Nous vérifions ensuite que tout point partant de  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  est envoyé immédiatement par le flot du champ de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  dans la partie affine  $\mathbf{H}_\kappa$ . En utilisant enfin le théorème de Arnold-Liouville complexe (Théorème (2.3.7)) on montre que pour  $\kappa$  générique, la surface invariante affine  $\mathbf{H}_\kappa$  se complète en une surface abélienne. Le plongement que nous avons construit est donc bien un plongement d'un tore algébrique, qui est obtenu en ajoutant à la surface affine  $\mathbf{H}_\kappa$  le diviseur de Painlevé décrit ci-dessus, constitué de cinq courbes de genre 2, qui se rencontrent selon un modèle qui dépendent des valeurs des paramètres de déformation. Précisément, nous démontrons le théorème suivant (voir les théorèmes (4.8.1) et (4.9.7)) :

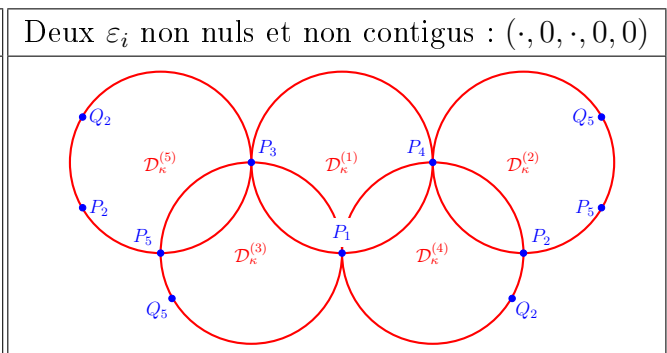
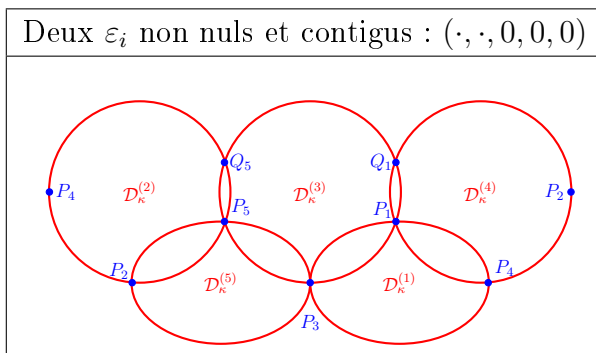
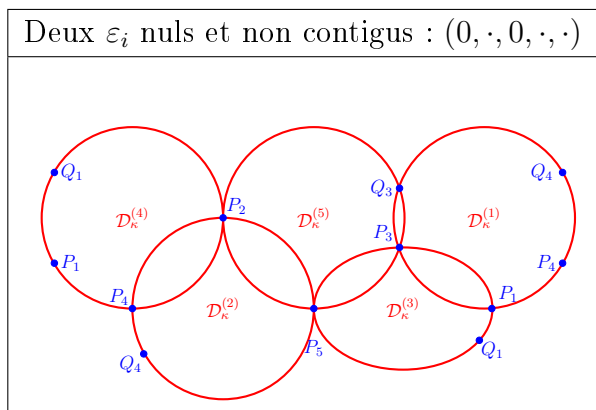
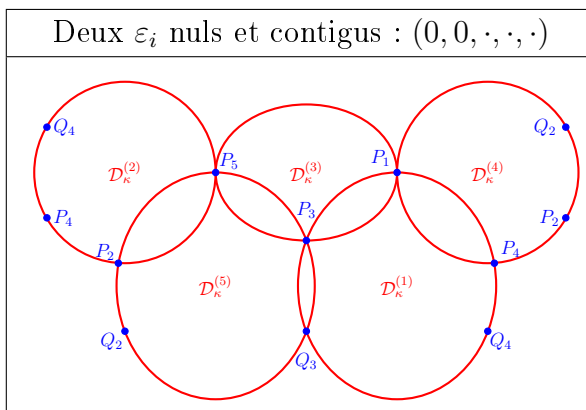
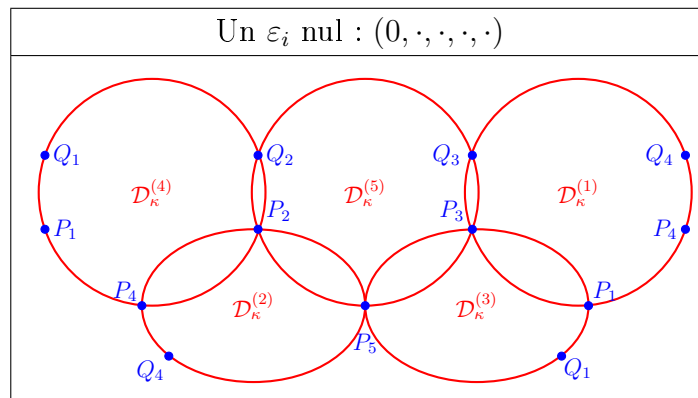
**Théorème.** *Le système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules est algébriquement intégrable pour toutes les valeurs des paramètres de déformation. Pour  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$  générique, la fibre  $\mathbf{H}_\kappa$  de l'application moment est isomorphe à une partie affine de la jacobienne de la courbe algébrique  $\bar{\Gamma}_\kappa$ , où  $\Gamma_\kappa$  est la courbe affine lisse de genre deux, définie par l'équation*

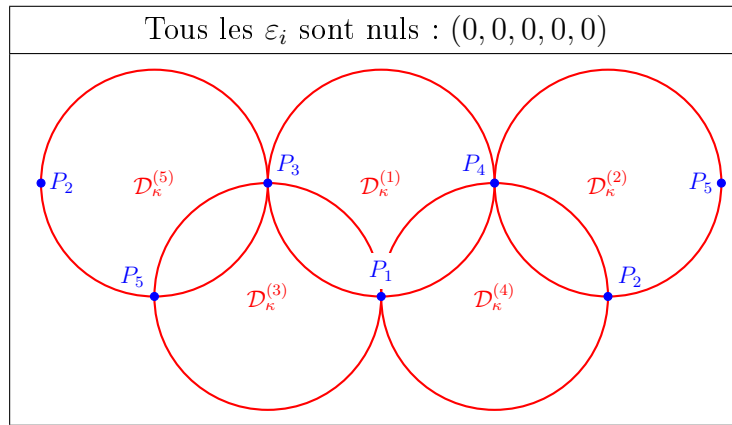
$$F(a, b) := a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + p_{2,1}(\beta, \kappa) a^2 b + p_{1,2}(\beta, \kappa) a b^2 + p_{1,1}(\beta, \kappa) a b + p_{1,0}(\beta, \kappa) a + p_{0,1}(\beta, \kappa) b + p_{0,0}(\beta, \kappa) = 0,$$

où les  $p_{i,j}$  sont des polynômes en les paramètres de déformation  $\beta = (\beta_{1,3}, \beta_{2,4}, \beta_{3,5}, \beta_{4,1}, \beta_{5,2})$  et la valeur générique  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ .

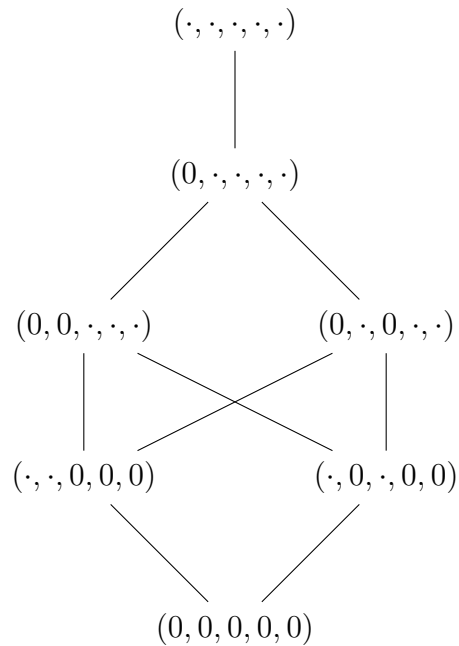
Le diviseur à ajouter pour compléter la partie affine en une variété abélienne consiste de cinq copies de  $\bar{\Gamma}_\kappa$  qui forment une des sept configurations suivantes, dépendant du nombre de paramètres de déformation qui sont nuls et leur contiguïté.







Ces configurations peuvent également être représentées par le graphe suivant :



## Applications et perspectives

Le fait que le système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules soit algébriquement intégrable suscite beaucoup de questions et ouvre quelques perspectives pour des recherches futures. Voici une liste non exhaustive :

- (1) Le résultat, mais pas la preuve, doit se généraliser à un nombre arbitraire de particules. Un bon indicateur est que le système non déformé est étroitement lié au système de Kac-van Moerbeke périodique (non déformé), dont on sait qu'il est algébriquement intégrable [9]. De plus, la technique utilisée dans [9] doit s'adapter

au cas présent, bien que la présence des paramètres de déformation risque de rendre ce cas plus compliqué à traiter.

- (2) Selon une conjecture, d'abord formulée dans [1], les composantes connexes des fibres *non génériques* d'un système algébriquement intégrable sont toutes des ouverts d'un groupe algébrique (complexe), sur lequel le flot des champs intégrables est toujours linéaire (invariant par translations). Les techniques de linéarisation, développées dans [21], doivent permettre de paramétriser les fibres non génériques en termes de diviseurs sur une courbe algébrique à priori singulière, comme cela a été fait dans la thèse [10]. Ceci validerait la conjecture pour le cas des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés.
- (3) Il y a récemment beaucoup d'intérêt pour les discrétisations *intégrables* des systèmes hamiltoniens [7, 15, 19]. Une méthode générale, dite de Kahan, qui s'applique uniquement aux systèmes quadratiques (mais donc à tous les systèmes de Lotka-Volterra, y compris leurs déformations) produit dans plusieurs cas intéressants une discrétisations intégrable ; parfois ce sont les intégrales premières du système continu qui sont des invariants du système discret ; parfois les intégrales premières, et même la structure de Poisson, doivent être déformées pour aboutir à l'intégrabilité du système discret. La question se pose alors aussi si le système discret est (reste) algébriquement intégrable.
- (4) Le système de Kac-van Moerbeke (périodique ou non) s'obtient par une réduction de Poisson-Dirac du réseau de Toda classique (périodique ou non). Il est naturel de conjecturer que le système de Bogoyavlenskij-Itoh non déformé s'obtient par une réduction similaire à partir de *Full Toda* [6]. On peut alors espérer que les déformations puissent être remontées au système de Full Toda, de sorte que le système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé s'obtienne aussi par réduction à partir d'un système intégrable du type Toda.

## La structure de la thèse

Dans le chapitre 2 nous faisons quelques rappels sur les structures de Poisson, ce que nous ferons directement dans le cadre holomorphe/complexe, et qui demande quelques précautions absentes dans le cas réel. Les exemples classiques sont rappelés, mais dans le cadre holomorphe/complexe ; on explique le feuilletage symplectique, important pour l'intégrabilité, toujours dans ce cadre. Les systèmes hamiltoniens complexes et leur intégrabilité au sens de Liouville font l'objet de la section 2.2, ce qui demande aussi quelques précautions par rapport à la théorie classique, car ici on est sur des variétés de

Poisson plutôt que sur des variétés symplectiques, puis on est en holomorphe/complexe, plutôt qu'en réel. Pourtant, la géométrie locale n'est pas différente au cas complexe qu'au cas réel. La différence majeure est la géométrie semi-locale et globale, et c'est là où intervient l'intégrabilité algébrique, que l'on rappelle dans la section 2.3, avec quelques exemples et rappels sur les variétés abéliennes (notamment la jacobienne d'une courbe algébrique lisse). Le théorème de Liouville complexe, qui jouera un rôle important dans la preuve, est rappelé à la fin de la section.

Le chapitre 3 est consacré aux systèmes de Lotka-Volterra, avec l'accent sur le système de Kac-van Moerbeke, que l'on note  $KM(n)$ , les systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh, notés  $BI(n)$ , et également un type de déformation de ces derniers. Nous montrons que, dans le cas de  $N = 5$  particules, ces systèmes sont liés par un morphisme régulier qui permet de conclure, du fait que  $KM(5)$  est algébriquement intégrable, que  $BI(5)$  l'est aussi.

Le cœur de la thèse se trouve au chapitre 4, où nous prouvons l'intégrabilité algébrique du système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules, pour toutes les valeurs des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$ . Certains arguments de la preuve, et en particulier certaines formules, doivent être différenciés selon la valeur de ces paramètres : précisément, ce qui compte, c'est la nullité ou non de chacun des paramètres  $\varepsilon_i$ . Comme indiqué dans la théorème principal énoncé ci-dessus, la géométrie du diviseur à l'infini dépend fortement du cas considéré et est à chaque fois différent, exhibant sept configurations de courbes différentes, sur les jacobienes (hyperelliptiques) de dimension 2.

# Chapitre 2

## Préliminaires

### 2.1 Variétés de Poisson holomorphes

Les espaces des phases des systèmes intégrables que nous allons étudier dans cette thèse sont des variétés de Poisson holomorphes. Nous rappelons ici leur définition et leurs principales propriétés qui seront illustrées dans plusieurs exemples. Pour les preuves des propriétés et pour d'autres informations concernant les variétés de Poisson holomorphes, ainsi que les variétés de Poisson réelles et les algèbres de Poisson, nous référons au livre [16].

#### 2.1.1 Structures de Poisson holomorphes

Pour  $M$  une variété complexe de dimension  $n$  on note par  $\mathcal{F}(M)$  l'algèbre des fonctions holomorphes sur  $M$ , et par  $TM$  et  $T^*M$  le *fibré tangent holomorphe*, respectivement le *fibré cotangent holomorphe* de  $M$ . Les fibrés vectoriels  $TM$  et  $T^*M$  sont des variétés complexes de dimension  $2n$ . Les espaces tangents, respectivement cotangents, en tout point  $m \in M$  sont notés  $T_mM$ , respectivement  $T_m^*M$  ; ce sont les fibres au-dessus de  $m$  des projections canoniques  $TM \rightarrow M$  et  $T^*M \rightarrow M$  et ils sont de dimension  $n$ . Les sections holomorphes de  $TM$  sont appelées des *champs de vecteurs (holomorphes)* tandis que les sections holomorphes de  $T^*M$  sont appelées des *1-formes (holomorphes)*. Plus généralement, pour  $1 \leq k \leq n$ , les sections du fibré vectoriel  $\bigwedge^k TM$  sont appelés des *champs de  $k$ -vecteurs (holomorphes)* et les sections du fibré vectoriel  $\bigwedge^k T^*M$  sont appelés des  *$k$ -formes (holomorphes)* ; on dit aussi *champs de bivecteurs* pour champs de 2-vecteurs. On note  $\mathfrak{X}^k(M)$  le  $\mathcal{F}(M)$ -module des champs de  $k$ -vecteurs sur  $M$  et  $\Omega^k(M)$  le  $\mathcal{F}(M)$ -module des  $k$ -formes sur  $M$ . Il convient de poser  $\mathfrak{X}^0(M) := \mathcal{F}(M)$  et

$\Omega^0(M) := \mathcal{F}(M)$ . Les  $\mathcal{F}(M)$ -modules

$$\mathfrak{X}^\bullet(M) := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{X}^k(M) \quad \text{et} \quad \Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$$

sont des  $\mathcal{F}(M)$ -algèbres graduées, munies du produit extérieur, qui est associatif et commutatif gradué. Chacune est munie d'une opération supplémentaire : sur  $\Omega^\bullet(M)$  on a une opération de degré 1 qui étend la différentielle usuelle de fonctions (complexes) ; on l'appelle également la *différentielle* et on la note  $d$ ,

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M) .$$

On a  $d^2 = 0$  et  $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi$ , si  $\phi$  est homogène de degré  $p$ ,  $\phi \in \Omega^p(M)$ . Ceci détermine complètement  $d$  sur  $\Omega^\bullet(M)$ . D'autre part,  $\mathfrak{X}^\bullet(M)$  admet une deuxième structure d'algèbre, donnée par le crochet de Schouten  $[\cdot, \cdot]_S$ ,

$$[\cdot, \cdot]_S : \mathfrak{X}^p(M) \times \mathfrak{X}^q(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{p+q-1}(M) .$$

Par définition, le crochet de Schouten étend le crochet de Lie sur les champs de vecteurs : pour  $X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$  on a  $[X, Y]_S = [X, Y]$  et si  $P$  et  $Q$  sont homogènes de degrés  $p$  et  $q$  respectivement, alors  $[Q \wedge R, P]_S = [Q, P] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [R, P]_S$ . Combiné avec l'antisymétrie graduée, ceci détermine complètement le crochet de Schouten sur  $\mathfrak{X}^\bullet(M)$ , qui définit alors une structure d'algèbre de Lie graduée sur  $\mathfrak{X}^\bullet(M)$ . À noter que la graduation considérée pour le crochet de Schouten est décalée d'une unité par rapport la graduation standard : pour  $P \in \mathfrak{X}^p(M)$  elle est par définition  $p - 1$  ; ainsi les champs de vecteurs sont de degré (décalé) 0, ce qui est cohérent avec le fait que le crochet de Lie d'une paire de champs de vecteurs est un champ de vecteurs.

Nous avons maintenant à notre disposition les notions nécessaires pour définir une variété de Poisson holomorphe.

**Définition 2.1.1.** Une *structure de Poisson (holomorphe)* sur une variété complexe  $M$  est un champ de bivecteurs holomorphe  $\pi$  sur  $M$ , tel que  $[\pi, \pi]_S = 0$ . La paire  $(M, \pi)$  est alors appelée une *variété de Poisson holomorphe*.

Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson holomorphe et soit  $U$  un ouvert de  $M$ . La structure de Poisson nous permet de définir une loi interne sur  $\mathcal{F}(U)$ , l'algèbre des fonctions holomorphes sur  $U$  : si on note  $\pi|_U$  la restriction de  $\pi$  à  $U$ , alors on peut définir, pour  $f, g \in \mathcal{F}(U)$ ,

$$\{f, g\}_U := \langle \pi|_U, df \wedge dg \rangle .$$

Si  $U = M$ , on écrira  $\{\cdot, \cdot\}$  pour  $\{\cdot, \cdot\}_U$ . Chaque  $\{\cdot, \cdot\}_U$  est antisymétrique et est une dérivation en chacun de ses arguments. Elle est donc une bidérivation antisymétrique

de  $\mathcal{F}(U)$ . De plus, la condition  $[\pi, \pi]_S = 0$  équivaut à la propriété que chaque  $\{\cdot, \cdot\}_U$  satisfait l'identité de Jacobi : pour tous  $f, g, h \in \mathcal{F}(U)$ ,

$$\{\{f, g\}_U, h\}_U + \{\{g, h\}_U, f\}_U + \{\{h, f\}_U, g\}_U = 0 .$$

On appelle  $\{\cdot, \cdot\}_U$  le *crochet de Poisson (sur  $U$ )*. Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , le crochet de Poisson est donc un crochet de Lie (complexe), qui de plus est une bidérivation.

Soient  $(M, \pi)$  et  $(N, \pi')$  deux variétés de Poisson holomorphes et soit  $\Psi : M \rightarrow N$  un morphisme de variétés. Pour tout point  $m \in M$  on peut alors considérer la différentielle de  $\Psi$  en  $m$ , qui est une application linéaire

$$d_m \Psi : T_m M \rightarrow T_{\Psi(m)} N ,$$

ainsi que l'application linéaire induite

$$\bigwedge^2 d_m \Psi : \bigwedge^2 T_m M \rightarrow \bigwedge^2 T_{\Psi(m)} N .$$

**Définition 2.1.2.** Un morphisme de variétés  $\Psi : M \rightarrow M'$  entre deux variétés de Poisson holomorphes  $(M, \pi)$  et  $(M', \pi')$  est appelé *morphisme de Poisson* si

$$\bigwedge^2 (d_m \Psi) \pi_m = \pi'_{\Psi(m)}$$

pour tout  $m \in M$ . Si, de plus,  $\Psi$  est un isomorphisme de variétés, l'application réciproque sera également un morphisme de Poisson ; on dit alors que  $\Psi$  est un *isomorphisme de Poisson*. Si un morphisme de Poisson  $\Psi : (M, \pi) \rightarrow (M', \pi')$  est une immersion injective, on dit que  $M$  ou  $\Psi(M)$  est une *sous-variété de Poisson immergée* de  $M'$  ou de  $(M', \pi')$ .

La condition que  $\Psi$  soit un morphisme de Poisson peut être reformulée en termes des crochets de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_U$  et  $\{\cdot, \cdot\}'_V$  associés à  $\pi$  et  $\pi'$ , où  $U \subseteq M$  et  $V \subseteq M'$  sont des ouverts :  $\Psi$  est un morphisme de Poisson si et seulement si pour chaque paire d'ouverts  $U \subseteq M$  et  $V \subseteq M'$  tels que  $\Psi(U) \subseteq V$ , et pour chaque paire de fonctions  $f, g \in \mathcal{F}(V)$ ,

$$\{f \circ \Psi|_U, g \circ \Psi|_U\}_U = \{f, g\}'_V \circ \Psi|_U . \quad (2.1)$$

## 2.1.2 Description locale, matrice de Poisson

Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$  et soit  $U$  un ouvert de  $M$ , muni de coordonnées locales holomorphes  $x_1, \dots, x_n$ . Tout champ de bivecteurs  $\pi$  sur  $M$  s'écrit sur  $U$  comme

$$\pi|_U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} , \quad \text{où } \pi_{i,j} = \{x_i, x_j\}_U . \quad (2.2)$$



Les coefficients  $\pi_{i,j} \in \mathcal{F}(U)$  déterminent complètement la restriction  $\pi|_U$  de  $\pi$  sur  $U$ . De plus,  $\pi|_U$  est une structure de Poisson sur  $U$  si et seulement si les fonctions coordonnées  $x_i$  vérifient l'identité de Jacobi,

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\} = 0,$$

pour  $1 \leq i < j < k \leq n$ . Cette condition est une condition sur les entrées  $\pi_{i,j}$  de la matrice  $(\pi_{i,j})$ , que l'on appelle alors *matrice de Poisson* de  $\pi$  par rapport aux coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ . Pour tout point  $m \in U$  on peut évaluer la matrice de Poisson en  $m$  : la matrice antisymétrique complexe  $(\pi_{i,j}(m))$  est la matrice de  $\pi_m \in \bigwedge^2 T_m M$  dans la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_m\}$  de  $T_m M$ . Le rang de  $(\pi_{i,j}(m))$  ne dépend alors pas des coordonnées choisies et par antisymétrie il est pair. On l'appelle *rang* de (la structure de Poisson)  $\pi$  en  $m$ , noté  $\text{Rk}_m \pi$ . Comme on le verra dans des exemples, le rang d'une structure de Poisson peut varier d'un point à un autre. Toutefois, si  $M$  est connexe, le rang de  $\pi$  prendra sa valeur maximale sur un ouvert dense de  $M$  ; on appelle cette valeur maximale le *rang* de  $\pi$ , noté  $\text{Rk } \pi$ . Un point où le rang de  $\pi$  prend cette valeur maximale est appelé un *point régulier* (de  $\pi$ ). On note  $M^{\text{reg}}$  la sous-variété des points réguliers de  $\pi$  ; c'est une sous-variété de Poisson de  $(M, \pi)$ . Un point  $m$  où le rang n'est pas maximal est alors un point où le rang n'est constant sur aucun voisinage de  $m$  ; on appelle un tel point un *point singulier* (de  $\pi$ ). Si le rang  $2r$  de  $\pi$  est constant on dit que  $(M, \pi)$  est une variété de Poisson holomorphe *régulière* de rang  $2r$ . La variété de Poisson  $(M^{\text{reg}}, \pi)$  est régulière de rang  $\text{Rk } \pi$ .

### 2.1.3 Exemples

Les principaux exemples qui apparaissent dans la théorie des systèmes intégrables proviennent de structures symplectiques ou d'algèbres de Lie. Nous présentons ici ces exemples, ainsi que deux autres classes d'exemples qui seront importantes pour la suite.

**Exemple 2.1.3.** Soit  $(M, \omega)$  une *variété symplectique holomorphe* de dimension  $n$  :  $\omega$  est une 2-forme fermée et non-dégénérée (en tout point). La non-dégénérescence de  $\omega$  en tout point  $x \in M$  implique que  $\omega_x \in \bigwedge^2 T_x^* M$ , vu comme l'application linéaire  $T_x M \rightarrow T_x^* M$ , est inversible, et son inverse correspond à un élément  $\pi_x \in \bigwedge^2 T_x M$ . Ainsi, à  $\omega$  correspond un champ de bivecteurs  $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ . Le fait que  $\omega$  soit fermée est équivalent à la condition  $[\pi, \pi]_S = 0$ . De façon naturelle, toute variété symplectique holomorphe est donc une variété de Poisson holomorphe. Le rang de  $\pi$  en tout point est  $\dim M = n$ . De plus, toute variété de Poisson holomorphe  $(M, \pi)$  pour laquelle le rang en tout point est égal à  $\dim M$  s'obtient de cette façon.

**Exemple 2.1.4.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Le dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  admet une structure de Poisson holomorphe naturelle, que l'on définit par son crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  : pour  $f, g \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$  leur crochet de Poisson  $\{f, g\}$  est défini, en tout point  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , par

$$\{f, g\}(\xi) := \xi([d_\xi f, d_\xi g]) . \quad (2.3)$$

Dans cette formule,  $d_\xi f$  et  $d_\xi g$  sont des éléments du bidual  $\mathfrak{g}^{**}$ , que l'on voit comme éléments de  $\mathfrak{g}$ , grâce à l'isomorphisme canonique  $\mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$ . On appelle la structure de Poisson  $\pi$  définie par (2.3) la *structure de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}^*$* . Elle est linéaire dans le sens où le crochet de chaque paire de fonctions coordonnées est linéaire. Le rang de  $\pi$  est zéro à l'origine de  $\mathfrak{g}^*$  ; une structure de Lie-Poisson n'est donc jamais régulière (sauf si  $\mathfrak{g}$  est abélien, au cas où la structure de Lie-Poisson est nulle).

**Exemple 2.1.5.** Soit  $\phi$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$ , que l'on munit de coordonnées (holomorphes)  $x, y$ . Un crochet de Poisson est défini sur  $\mathcal{F}(\mathbb{C}^2)$  en posant, pour  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^2)$ ,

$$\{f, g\} := \phi \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right) .$$

La structure de Poisson holomorphe correspondante est alors donnée par

$$\pi = \phi \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} .$$

Son rang est 2 en tout point en dehors du lieu de zéros de  $\phi$ , où il est nul.

**Exemple 2.1.6.** Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice antisymétrique complexe  $n \times n$ . Notons  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées naturelles holomorphes sur  $\mathbb{C}^n$ . Une structure de Poisson holomorphe est définie par le champ de bivecteurs holomorphe

$$\pi := \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} . \quad (2.4)$$

À noter que le crochet de Poisson correspondant est donné par  $\{x_i, x_j\} = a_{i,j} x_i x_j$ . Pour cette raison une telle structure de Poisson est appelé une *structure de Poisson diagonale*. Elle est quadratique dans le sens où le crochet de chaque paire de fonctions coordonnées est une fonction quadratique. Le rang de  $\pi$  est le rang de  $A$  ; si  $A \neq 0$ , alors  $\pi$  n'est pas régulier car il s'annule à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Par contre,  $\pi$  est régulier en dehors des hyperplans  $x_i = 0$ .

### 2.1.4 Champs hamiltoniens, feuilletage symplectique

Les variétés complexes qui apparaîtront dans cette thèse auront toujours beaucoup de fonctions (holomorphes), étant des sous-variétés de  $\mathbb{C}^n$ , par exemple. Ainsi il convient comme dans le cas de variétés de Poisson réelles de considérer des champs hamiltoniens, associés à des fonctions holomorphes globales, ainsi que de considérer des fonctions en involution, comme expliqué dans la section 2.2 ci-dessous.

Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson holomorphe. On suppose que l'algèbre de fonctions holomorphes  $\mathcal{F}(M)$  ne soit pas réduite aux fonctions constantes.

**Définition 2.1.7.** Soit  $H \in \mathcal{F}(M)$  une fonction holomorphe. Le champ de vecteurs sur  $M$ , défini par

$$\mathcal{X}_H := -\iota_{dH}\pi$$

est appelé le *champ hamiltonien* associé à  $H$ , et  $H$  est dit être un *hamiltonien* ou une *fonction hamiltonienne* de  $\mathcal{X}_H$ . On dit que  $H$  est une *fonction de Casimir* de  $\pi$  si  $\mathcal{X}_H = 0$ .

Il convient de considérer aussi les champs hamiltoniens sur des ouverts de  $M$  ; puisque les fonctions holomorphes sur un ouvert  $U$  de  $M$  ne sont pas toujours des restrictions de fonctions holomorphes sur  $M$ , ces champs ne sont pas toujours des restrictions de champs hamiltoniens sur  $M$  (penser au cas où  $M$  est compact et  $U$  est le domaine d'une carte). Pour  $U$  un ouvert de  $M$  et  $H \in \mathcal{F}(U)$  on dit alors que  $\mathcal{X}_H := -\iota_{dH}\pi|_U$  est un *champ hamiltonien sur  $U$*  ; de même, si  $\mathcal{X}_H = 0$  on dit que  $H$  est un *Casimir sur  $U$* . On note  $\text{Ham}(U, \pi)$  l'ensemble des champs hamiltoniens sur  $U$  et  $\text{Cas}(U, \pi)$  l'ensemble des fonctions de Casimir sur  $U$ . La propriété de bidérivation de  $\{\cdot, \cdot\}_U$  implique que  $\text{Cas}(U, \pi)$  est une sous-algèbre (associative) de  $\mathcal{F}(U)$  et que  $\text{Ham}(U, \pi)$  est un  $\text{Cas}(U, \pi)$ -module, tandis que l'identité de Jacobi implique que  $\text{Ham}(U, \pi)$  est une sous-algèbre de Lie de  $(\mathcal{F}(U), \{\cdot, \cdot\}_U)$  : pour  $f, g \in \mathcal{F}(U)$ ,

$$\mathcal{X}_{\{f, g\}} = [\mathcal{X}_g, \mathcal{X}_f] . \tag{2.5}$$

À noter également que  $\text{Cas}(U, \pi)$  est le centre de l'algèbre de Lie  $(\mathcal{F}(U), \{\cdot, \cdot\}_U)$ .

Supposons que l'ouvert  $U$  soit muni des coordonnées locales holomorphes  $x_1, \dots, x_n$  et soit  $H \in \mathcal{F}(U)$ . D'après (2.2), le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_H$  sur  $U$  est donné par

$$\mathcal{X}_H = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \pi_{i, j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad \text{où } \pi_{i, j} = \{x_i, x_j\}_U .$$

Les champs hamiltoniens sur les ouverts de  $M$  définissent une distribution singulière sur  $M$  ; elle est en général singulière car le rang de la distribution en tout point  $m$  de  $M$

est le rang de  $\pi_m$  qui, comme on l'a vu, peut dépendre de  $m$ . Elle est toutefois intégrable et ses variétés intégrales sont des sous-variétés de Poisson immergées ; leur rang étant la dimension de la sous-variété, ce sont de façon canonique des variétés symplectiques, ce qui explique le nom *feuilletage symplectique* pour le feuilletage singulier, définie par la distribution.

Soit  $U$  un ouvert de  $M$  et soient  $C, H \in \mathcal{F}(U)$ , où  $C$  est une fonction de Casimir. Alors

$$\mathcal{X}_H(C) = \{C, H\} = 0 ,$$

ce qui montre que tous les champs hamiltoniens sur  $U$  sont tangents aux fibres lisses de l'application définie par  $C$ . Les fonctions de Casimir sur  $U$  sont donc constantes sur les feuilles symplectiques (les feuilles du feuilletage symplectique).

L'algèbre des Casimir et le module des champs hamiltoniens sur  $U$  sont liés par la suite exacte courte d'algèbres de Lie suivante :

$$0 \longrightarrow \text{Cas}(U, \pi) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \text{Ham}(U, \pi) \longrightarrow 0 .$$

**Exemple 2.1.8.** Dans le cas d'une variété symplectique holomorphe  $(M, \omega)$ , que l'on suppose connexe (voir exemple 2.1.3), le feuilletage symplectique est de rang  $\dim M$  et il n'y a donc qu'une seule feuille symplectique,  $M$  elle-même. Les seules fonctions de Casimir sur des ouverts connexes  $U$  de  $M$  sont des fonctions constantes.

**Exemple 2.1.9.** Soit  $(\mathfrak{g}^*, \pi)$  une variété de Lie-Poisson (exemple 2.1.4). La distribution définie par les champs hamiltoniens coïncide avec celle définie par les champs fondamentaux de l'action coadjointe de tout groupe connexe  $G$  intégrant  $\mathfrak{g}$ . Les feuilles symplectiques sont alors les orbites coadjointes de  $G$ . Les fonctions de Casimir sont les fonctions  $\text{Ad}^*$ -invariantes.

**Exemple 2.1.10.** Soit  $\pi$  une structure de Poisson sur  $\mathbb{C}^2$ , déterminée par une fonction holomorphe  $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^2)$ , comme dans l'exemple (2.1.5). On suppose que  $\phi$  ne soit pas la fonction nulle. Chaque zero de  $\phi$  est une feuille symplectique (de dimension zéro), puis le complément de ces points est une autre feuille symplectique (de dimension deux). Les seules fonctions de Casimir sont les fonctions constantes.

**Exemple 2.1.11.** Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice antisymétrique complexe  $n \times n$  et soit  $\pi$  la structure de Poisson associée sur  $\mathbb{C}^n$ , comme dans l'exemple 2.1.6. On suppose que  $A \neq 0$ . Remarquons que la matrice de Poisson de  $\pi$  dans les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  est reliée à la matrice  $A$  par

$$(\pi_{i,j}) = {}^t X A X , \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Cela implique que le rang de  $\pi$  en chaque point est borné par le rang de  $A$ , et qu'en dehors des hyperplans  $x_i = 0$  il est égal au rang de  $A$ . De plus, cela implique que pour un point  $m$  de  $\mathbb{C}^n$  pour lequel certaines coordonnées sont nulles, disons  $i_1, \dots, i_k$ , le rang de  $\pi_m$  est celui de la matrice obtenue en enlevant de  $A$  les lignes et colonnes d'indices  $i_1, \dots, i_k$ . La matrice  $A$  est aussi utile pour construire des fonctions de Casimir de  $\pi$  : si  ${}^t(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est un vecteur à coefficients dans  $\mathbb{N}$  qui est dans le noyau de  $A$ , alors le polynôme

$$C := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

est une fonction de Casimir de  $\pi$  (sur  $\mathbb{C}^n$ ). De même, tels vecteurs à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  donnent par la même formule une fonction de Casimir sur le complément des hyperplans  $x_i = 0$  de  $\mathbb{C}^n$ .

## 2.2 Intégrabilité complexe au sens de Liouville

Les systèmes intégrables classiques apparaissent en mécanique classique comme des systèmes mécaniques avec un nombre suffisant d'intégrales, souvent provenant d'une symétrie (par exemple, une invariance par translation, par rotation, etc.). Comme l'avait remarqué Liouville, si les intégrales premières sont en involution (commutent pour le crochet de Poisson), on peut étudier et résoudre plus facilement les équations différentielles qui décrivent la dynamique du système. La théorie locale des systèmes intégrables complexes que nous rappelons ici est très analogue à celle des systèmes intégrables réels ; comme on le verra dans la section suivante, la théorie globale est par contre très différente. Pour les preuves des propriétés et pour d'autres informations concernant les systèmes intégrables complexes, ainsi que les systèmes intégrables réels, nous référons au livre [1].

### 2.2.1 Systèmes hamiltoniens complexes

Les systèmes hamiltoniens décrivent les systèmes mécaniques à un nombre fini de libertés, éventuellement soumis à des contraintes. Ils sont définis ici dans le cadre d'une variété de Poisson holomorphe  $(M, \pi)$ . On suppose dans cette section que  $M$  admet des fonctions holomorphes non constantes ; sinon, tout ce qui est introduit ci-dessous est sans intérêt.

**Définition 2.2.1.** Un *système hamiltonien complexe* est un triplet  $(M, \pi, H)$ , où  $(M, \pi)$  est une variété de Poisson holomorphe et  $H$  est une fonction holomorphe sur  $M$ , appelé *le hamiltonien du système*.

À tout système hamiltonien complexe  $(M, \pi, H)$  est associé le champ de vecteurs holomorphe  $\mathcal{X}_H$  sur  $M$ . C'est ce champ de vecteurs, ses courbes intégrales, ses symétries et ses propriétés locales et globales qui sont au centre de l'étude. On décrit souvent le champ de  $\mathcal{X}_H$  dans une carte  $U$  par les équations différentielles dont les solutions sont les courbes intégrales de  $\mathcal{X}_H$ . Elles sont explicitement données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où  $x_1, \dots, x_n$  sont les coordonnées sur  $U$  et les fonctions  $f_i$  sont définies par

$$f_i := \{x_i, H|_U\}_U .$$

Notons que les courbes intégrales considérées ici sont des courbes intégrales complexes, c'est-à-dire qu'elles sont définies sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Si localement on a bien l'existence de telles courbes passant par tout point donné, on ne peut pas toujours recoller des courbes intégrales comme on le fait dans le cas de courbes intégrales réelles ; on ne pourra alors pas parler de courbes intégrales maximales. Nous y reviendrons dans le cadre de l'intégrabilité algébrique.

## 2.2.2 Fonctions en involution

L'involutivité de fonctions est à la base de l'intégrabilité au sens de Liouville. On la présente ici dans le cadre de variétés de Poisson holomorphes.

**Définition 2.2.2.** Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson holomorphe. Deux fonctions  $F, G \in \mathcal{F}(M)$  sont dites *en involution* si  $\{F, G\} = 0$ . Plus généralement, une partie  $S$  de  $\mathcal{F}(M)$  est dite *involutive* si  $\{F, G\} = 0$  pour tous  $F, G \in S$ . Si  $(M, \pi, H)$  est un système hamiltonien complexe, toute fonction en involution avec le hamiltonien  $H$  est appelée *intégrale première* de  $\mathcal{X}_H$ .

Si  $F$  est une intégrale première de  $\mathcal{X}_H$ , alors  $\mathcal{X}_H(F) = \{F, H\} = 0$  et  $F$  est constante sur toutes les courbes intégrales de  $\mathcal{X}_H$ . Puisque les courbes intégrales de  $\mathcal{X}_H$  donnent le mouvement du système mécanique décrit par le système hamiltonien  $(M, \pi, H)$ , les intégrales premières sont aussi appelés des *constantes de mouvement*. Il n'existe aucune méthode générale pour déterminer toutes les constantes de mouvement d'un système hamiltonien (réel ou complexe). Ainsi, le théorème de Poisson, qui stipule que le crochet de Poisson de deux intégrales premières est une intégrale première fut à l'époque considéré comme une avancée importante et était un premier signe de l'importance des

crochets de Poisson. Cependant, comme on le verra un peu plus loin, le rôle précis joué par le crochet de Poisson en intégrabilité sera différent.

Il est clair que si on ajoute à une partie involutive  $S$  de  $\mathcal{F}(M)$  les fonctions de Casimir, elle sera toujours involutive. Ainsi, la sous-algèbre engendrée par une partie involutive  $S$  de  $\mathcal{F}(M)$  et les fonctions de Casimir sera involutive. D'après (2.5), les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_F$  avec  $F \in S$ , commutent deux à deux. De plus, on a la description géométrique suivante de l'involativité :

**Proposition 2.2.3.** Soit  $S = \{F_1, \dots, F_s\} \subseteq \mathcal{F}(M)$  involutive et soit

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &: M \rightarrow \mathbb{C}^s \\ m &\mapsto (F_1(m), \dots, F_s(m)). \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_F$  avec  $F \in S$ , sont tangents aux fibres non-singulières  $\mathbf{F}_c := \mathbf{F}^{-1}(c)$  de  $\mathbf{F}$ .

Par abus de notation, on écrit  $\mathbf{F}$  pour  $S$  ; ainsi,  $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_s\}$ , que l'on peut voir comme une partie de  $\mathcal{F}(M)$  ou comme une application à valeurs dans  $\mathbb{C}^s$ .

On s'intéresse surtout à des fonctions en involution qui sont indépendantes :

**Définition 2.2.4.** Une partie  $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_s\} \subseteq \mathcal{F}(M)$  est dite *indépendante* si l'ouvert

$$M_{\mathbf{F}} := \{m \in M \mid d_m F_1 \wedge \dots \wedge d_m F_s \neq 0\}$$

est non vide.

Puisque les fonctions de  $\mathbf{F}$  sont holomorphes et par connexité de  $M$ , l'ouvert  $M_{\mathbf{F}}$  sera dense dans  $M$  dès qu'il est non vide. La fibre  $\mathbf{F}_c$  au-dessus de chaque valeur régulière  $c$  de  $\mathbf{F}$  est alors une variété complexe de dimension  $\dim M - s$ . D'après la proposition 2.2.3, les courbes intégrales des champs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$  partant d'un point d'une fibre non-singulière  $\mathbf{F}_c$  sont entièrement contenues dans  $\mathbf{F}_c$ .

**Proposition 2.2.5.** Soit  $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_s\} \subseteq \mathcal{F}(M)$  involutive et indépendante. Alors  $s \leq \dim M - \frac{1}{2} \text{Rk}_{\pi}$ . De plus, si  $s = \dim M - \frac{1}{2} \text{Rk}_{\pi}$ , alors

$$\dim \langle \mathcal{X}_{F_1}(m), \dots, \mathcal{X}_{F_s}(m) \rangle = \frac{1}{2} \text{Rk}_{\pi}$$

pour tout  $m \in M_{\mathbf{F}}^{\text{reg}} := M_{\mathbf{F}} \cap M^{\text{reg}}$ .

Dans le cas d'une variété symplectique  $(M, \omega)$ , on a  $\dim M = \text{Rk}_{\pi}$ , où  $\pi$  est la structure de Poisson associée à  $\omega$ . La condition  $s = \dim M - \frac{1}{2} \text{Rk}_{\pi}$  devient alors la condition d'intégrabilité bien connue que le nombre de fonctions indépendantes en involution doit être égal à la moitié de la dimension de l'espace des phases.

### 2.2.3 Intégrabilité complexe

Nous avons maintenant à notre disposition les objets et les outils pour définir la notion d'intégrabilité au sens de Liouville dans le cadre d'une variété de Poisson holomorphe.

**Définition 2.2.6.** Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson holomorphe de dimension  $n$  et de rang  $2r$ . On dit que  $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_s\}$  est un *système intégrable complexe* sur  $M$  si

- (1)  $\mathbf{F}$  est indépendant ;
- (2)  $\mathbf{F}$  est involutif ;
- (3)  $s = n - r$ .

On dit aussi que  $(M, \pi, \mathbf{F})$  est un *système intégrable complexe* et on appelle  $\mathbf{F}$ , vue comme une application  $M \rightarrow \mathbb{C}^s$ , son *application moment (complexe)*. Les champs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , sont appelés les *champs intégrables* du système. Afin d'éviter la confusion avec d'autres notions d'intégrabilité, on dit aussi que le système est *intégrable au sens de Liouville*.

En pratique, on se donne souvent un système hamiltonien complexe  $(M, \pi, H)$  ; dire qu'il est intégrable signifie alors qu'il existe des fonctions holomorphes  $F_2, \dots, F_s$  sur  $M$ , telles que  $(M, \pi, (H, F_2, \dots, F_s))$  soit un système intégrable complexe. À noter que ces fonctions sont des intégrales premières, car en involution avec le hamiltonien  $H$ , et qu'on ne peut pas les construire en utilisant le théorème de Poisson, cité ci-dessus, car toutes ces fonctions sont en involution !

Soit  $(M, \pi, \mathbf{F})$  un système intégrable complexe de dimension  $n$  et de rang  $2r$ . D'après la proposition 2.2.5, les champs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$  définissent une distribution de rang  $r$  sur  $M_{\mathbf{F}}^{\text{reg}}$ . D'après (2.5), ces champs de vecteurs commutent deux à deux, donc la distribution est intégrable. Les variétés intégrales de la distribution définissent un feuilletage sur  $M_{\mathbf{F}}^{\text{reg}}$ . Ses feuilles, qui sont de dimension  $r$ , sont appelées les *variétés invariantes* de  $\mathbf{F}$  (ou de  $(M, \pi, \mathbf{F})$ ).

**Proposition 2.2.7.** Soit  $(M, \pi, \mathbf{F})$  un système intégrable. L'ouvert  $M_{\mathbf{F}}^{\text{reg}}$  est invariant pour les flots des champs  $\mathcal{X}_{F_i}$ . De plus, les variétés invariantes de  $\mathbf{F}$  sont les composantes connexes des fibres de l'application moment complexe  $\mathbf{F}$ , restreinte à  $M_{\mathbf{F}}^{\text{reg}}$ .

On s'intéressera surtout aux variétés invariantes génériques des systèmes intégrables et aux fibres génériques de leur application moment complexe. La proposition ci-dessus dit alors que dans cette étude on peut se restreindre à  $M_{\mathbf{F}}^{\text{reg}}$ , ses variétés invariantes et les fibres de son application moment complexe.

Une propriété généralement imposée à l'intégrabilité de systèmes hamiltoniens est qu'ils soient *intégrables par quadratures*. Cette notion très classique veut dire que les courbes



intégrales de  $\mathcal{X}_H$ , ou plus généralement de chacun des champs intégrables  $\mathcal{X}_{F_i}$ , peuvent être déterminées par quadratures, c'est-à-dire en utilisant uniquement des opérations algébriques, le théorème des fonctions inverses et l'intégration de fonctions d'une variable.

**Théorème 2.2.8.** *Si  $(M, \pi, \mathbf{F})$  est un système intégrable complexe, alors pour tout  $m \in M_{\mathbf{F}}^{reg}$  la courbe intégrale de  $\mathcal{X}_{F_i}$ , à partir de  $m$ , peut être déterminée par quadratures.*

**Exemple 2.2.9.** Un premier exemple de système intégrable complexe est une version complexe de l'oscillateur harmonique. Sur  $T^*\mathbb{C}^n$  avec les coordonnées naturelles  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  (positions et impulsions) on prend la structure de Poisson holomorphe canonique,

$$\pi := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i},$$

et on considère le hamiltonien

$$H := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i^2,$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  sont des constantes. Le champ hamiltonien correspondant à  $H$  est donné explicitement par

$$\mathcal{X}_H : \begin{cases} \dot{q}_i &= p_i, \\ \dot{p}_i &= -2\alpha_i q_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Les  $n$  fonctions  $F_i := p_i^2/2 + \alpha_i q_i^2$ , avec  $1 \leq i \leq n$  sont en involution avec  $H$  car

$$\mathcal{X}_H(F_i) = \dot{F}_i = \left( \frac{p_i^2}{2} + \alpha_i q_i^2 \right)' = p_i(-2\alpha_i q_i) + 2\alpha_i q_i p_i = 0.$$

Il est évident que les fonctions  $F_i$  sont deux à deux en involution. Ces fonctions sont indépendantes et  $H = \sum_{i=1}^n F_i$ . Donc,  $(T^*\mathbb{C}^n, \pi, (H, F_2, \dots, F_n))$  est un système intégrable complexe.

**Exemple 2.2.10.** Le système intégrable complexe de Hénon-Heiles est défini à partir du hamiltonien

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + 2q_1^3 + q_1 q_2^2$$

sur  $T^*\mathbb{C}^2$ , que l'on munit de la même structure de Poisson  $\pi$  que dans l'exemple précédent (pour  $n = 2$ ). Le champ hamiltonien correspondant à  $H$  est donné explicitement par

$$\mathcal{X}_H : \begin{cases} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{p}_1 &= -6q_1^2 - q_2^2, \\ \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{p}_2 &= -2q_1 q_2. \end{cases}$$

Soit  $K$  la fonction, définie par

$$K := 4p_2(p_1q_2 - p_2q_1) + q_2^2(4q_1^2 + q_2^2) .$$

On trouve, par un calcul direct,

$$\begin{aligned} \dot{K} &= -8q_1q_2(p_1q_2 - p_2q_1) + 4p_2(-6q_1^2q_2 - q_2^3 + 2q_1^2q_2) \\ &\quad + 8q_1q_2^2p_1 + 8q_1^2q_2p_2 + 4q_2^3p_2 = 0 . \end{aligned}$$

Il est clair que  $H$  et  $K$  sont indépendantes. Donc,  $(T^*\mathbb{C}^2, \pi, (H, K))$  est un système intégrable complexe.

**Exemple 2.2.11.** Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^3$ , avec  $\phi$  non nul et  $\psi$  non constant. Les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{C}^3$  sont notées  $x, y, z$ . Pour  $F, G \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^3)$ , leur crochet de Poisson est par définition

$$\{F, G\} := \phi \frac{dF \wedge dG \wedge d\psi}{dx \wedge dy \wedge dz} .$$

La structure de Poisson sur  $\mathbb{C}^3$ , définie par ces crochets de Poisson, est notée  $\pi$  et s'appelle la *structure de Nambu-Poisson* sur  $\mathbb{C}^3$ , définie par  $\phi$  et  $\psi$ . Elle est de rang 2 et elle admet  $\psi$  comme fonction de Casimir. Soit  $H$  une fonction sur  $\mathbb{C}^3$ , indépendante de  $\psi$ . Alors  $(\mathbb{C}^3, \pi, (H, \psi))$  est un système intégrable complexe.

## 2.3 Intégrabilité algébrique

Le lecteur habitué aux systèmes intégrables *réels* aura sûrement remarqué l'absence du théorème classique de Liouville qui dit, dans sa version de base, que les composantes connexes compactes des fibres lisses de l'application moment sont des tores, et que le flot des champs intégrables est linéaire sur ces tores. Or, nos systèmes intégrables complexes sont définis sur des variétés affines complexes et tels espaces ne peuvent pas contenir des sous-variétés compactes, comme le montre le théorème de Liouville en analyse complexe. Cependant, il a été remarqué par Adler et van Moerbeke que des *parties affines* de tores complexes algébriques (variétés abéliennes complexes) peuvent apparaître comme fibres de l'application moment d'un système intégrable complexe, ce qui les a conduit à la notion d'intégrabilité algébrique. Nous commençons par un rappel rapide sur les variétés abéliennes complexes avant de donner la définition d'intégrabilité algébrique, suivi d'exemples, puis nous présenterons quelques outils pour les étudier. Pour plus d'information sur l'intégrabilité algébrique nous référons aux livres [1, 22].

### 2.3.1 Variétés abéliennes

Pour tout réseau (sous-groupe discret de rang maximal)  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}^r$ , l'espace quotient  $\mathbb{C}^r/\Lambda$  est une variété complexe compacte de dimension  $r$ , appelé *tore complexe*. On dit qu'un tore complexe  $\mathbb{C}^r/\Lambda$  est *algébrique* s'il existe un plongement de  $\mathbb{C}^r/\Lambda$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^N$ , où l'entier  $N$  peut être arbitrairement grand. La terminologie *variété abélienne complexe* est utilisée comme étant synonyme à tore complexe algébrique ; ici on dira simplement *variété abélienne*, car toutes nos variétés abéliennes sont complexes. Pour  $r = 1$ , le tore complexe  $\mathbb{C}/\Lambda$  est toujours algébrique et on parle d'une *courbe elliptique complexe* ou d'une *surface de Riemann elliptique*. Pour  $r > 1$ , le tore complexe  $\mathbb{C}^r/\Lambda$  est algébrique ou pas, selon le choix du réseau  $\Lambda$  : pour  $\Lambda$  *générique*,  $\mathbb{C}^r/\Lambda$  n'est pas une variété abélienne.

Les variétés abéliennes qui apparaissent en systèmes intégrables sont presque exclusivement des jacobiniennes de courbes algébriques complexes et des variétés de Prym de courbes algébriques complexes munis d'un automorphisme. Puisque dans cette thèse nous rencontrerons uniquement des jacobiniennes, nous rappelons uniquement la définition de ces derniers. On donne deux constructions, l'une qui est analytique, l'autre algébrique.

#### Construction analytique

Soit  $\Gamma$  une surface de Riemann compacte de genre  $g > 0$ . On a

$$\dim \Omega^1(\Gamma) = g \quad \text{et} \quad \text{Rg } H_1(\Gamma; \mathbb{Z}) = 2g ,$$

où  $H_1(\Gamma; \mathbb{Z})$  est le premier groupe d'homologie de  $\Gamma$  à coefficients entiers. L'intégration le long d'une courbes fermée  $\gamma$  sur  $\Gamma$  définit une application linéaire sur  $\Omega^1(\Gamma)$  et ne dépend que de la classe d'homotopie  $[\gamma]$  de  $\gamma$ , de sorte que l'application suivante est bien définie :

$$I : H_1(\Gamma; \mathbb{Z}) \hookrightarrow \Omega^1(\Gamma)^* \\ [\gamma] \mapsto \int_{\gamma} .$$

De plus,  $I$  est injectif et son image est donc un réseau dans  $\Omega^1(\Gamma)$  et le quotient

$$\text{Jac}(\Gamma) := \frac{\Omega^1(\Gamma)^*}{I(H_1(\Gamma; \mathbb{Z}))}$$

est un tore complexe de dimension  $g$  : ce tore est en effet une variété abélienne.

### Construction algébrique

On voit maintenant  $\Gamma$  comme une courbe algébrique (non singulière, projective, de genre  $g$ ) et on considère les diviseurs effectifs de degré  $g$  sur  $\Gamma$ . Un tel diviseur s'écrit  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^g P_i$ , où  $P_1, \dots, P_g \in \Gamma$ , et on peut identifier  $\mathcal{D}$  avec un élément de  $\text{Sym}^g \Gamma := \Gamma^g / S_g$ , où le groupe symétrique  $S_g$  agit sur  $\Gamma^g$  par permutation des facteurs. Deux tels diviseurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont dits *linéairement équivalents*, noté  $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$ , si  $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$  est le diviseur de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe sur  $\Gamma$ . Dans ces termes, la définition algébrique de la jacobienne est

$$\text{Jac}(\Gamma) := \text{Sym}^g \Gamma / \sim .$$

Le théorème d'Abel-Jacobi montre que ces deux définitions sont équivalentes.

### 2.3.2 Intégrabilité algébrique

Nous sommes maintenant en position de rappeler la définition d'un système algébriquement intégrable. On se restreint au cas où l'espace des phases est l'espace affine  $\mathbb{C}^n$  (plutôt qu'une variété affine lisse générale) car les systèmes considérés dans cette thèse seront tous définis sur un espace affine.

**Définition 2.3.1.** Soit  $(\mathbb{C}^n, \pi, \mathbf{F})$  un système intégrable complexe, où  $\pi$  est un crochet de Poisson polynomial de rang  $2r$  et  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  sont des polynômes. On dit que le système est *algébriquement intégrable* ou *a.c.i.* si

- (1) Pour des valeurs génériques de  $\kappa \in \mathbb{C}^s$ , la fibre  $\mathbf{F}_\kappa$  est isomorphe à une partie affine d'une variété abélienne,

$$\mathbf{F}_\kappa \cong (\mathbb{C}^r / \Lambda_\kappa) \setminus \mathcal{D}_\kappa ,$$

où  $\Lambda_\kappa$  est un réseau dans  $\mathbb{C}^r$  et  $\mathcal{D}_\kappa$  est une hypersurface de  $\mathbb{C}^r / \Lambda_\kappa$  ;

- (2) Les champs intégrables  $\mathcal{X}_{F_i}$ , restreints à toute fibre générique  $\mathbf{F}_\kappa$ , sont invariants par translation.

Nous donnons tout de suite quelques exemples qui illustrent que même si les systèmes a.c.i. sont rares dans la famille de systèmes intégrables complexes (sur  $\mathbb{C}^n$ ), ils sont très variés, que ce soit du côté algébrique, géométrique ou mécanique (pour ceux qui proviennent de la mécanique).

**Exemple 2.3.2.** On considère à nouveau le système intégrable complexe  $(\mathbb{C}^2, \pi, \phi)$  de l'exemple 2.1.5. On prend pour  $\phi$  le polynôme  $\phi := y^2 - f(x)$ , où  $f$  est un polynôme unitaire de degré  $d > 2$ . Dans ce cas on peut identifier l'application moment complexe avec  $\phi$ , et les fibres lisses de  $\phi$  sont les courbes algébriques lisses  $y^2 = f(x) + c$ , avec  $c \in \mathbb{C}$ . Une telle courbe est de genre  $(d-1)/2$  ou  $d/2 - 1$  selon si  $d$  est impair ou pair. Si  $d > 4$  les fibres ne sont donc pas des ouvert de courbes elliptiques et le système n'est pas a.c.i. Si  $d = 3$  ou  $d = 4$  les fibres sont bien des courbes elliptiques et le champ intégrable  $\mathcal{X}_\phi$  est invariant par translation sur la fibre ; dans ces deux cas, le système est a.c.i. Si déjà les systèmes intégrables sont rares parmi les systèmes hamiltoniens, cet exemple montre que les systèmes a.c.i. sont à leur tour rares parmi les systèmes intégrables complexes.

**Exemple 2.3.3.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  trois nombres complexes deux à deux distincts mais autrement arbitraires, qui joueront le rôle de paramètres dans le système que nous allons décrire. Sur  $\mathbb{C}^3$  on prend  $x, y$  et  $z$  comme coordonnées et on considère le champ de vecteurs quadratique  $X$  sur  $\mathbb{C}^3$ , donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\lambda_3 - \lambda_2)yz, \\ \dot{y} &= (\lambda_1 - \lambda_3)zx, \\ \dot{z} &= (\lambda_2 - \lambda_1)xy. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ce sont les *équations d'Euler* qui décrivent la rotation d'une toupie dans l'absence de gravité, la *toupie d'Euler*. Le champ de vecteurs quadratique  $X$  admet les deux intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned} H &:= \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2), \\ K &:= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

De plus,  $X$  est hamiltonien,  $X = \mathcal{X}_H$  par rapport à la structure de Lie-Poisson  $\pi$ , définie par sa matrice de Poisson (dans les coordonnées  $x, y, z$ ).

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme  $K$  est une fonction de Casimir de  $\pi$ . En effet,  $\pi$  est la structure de Nambu-Poisson, définie par les polynômes  $\phi = 1$  et  $\psi = K$  (voir l'exemple 2.2.11). La toupie d'Euler est aussi a.c.i. : dans ce cas, la fibre générique de l'application moment complexe, définie par les polynômes  $H$  et  $K$ , est une courbe elliptique, privée de 4 points.

**Exemple 2.3.4.** Le système intégrable complexe de Hénon-Heiles, déjà rappelé dans l'exemple 2.2.10, est a.c.i. La fibre générique de l'application moment complexe est dans ce cas un ouvert d'une surface abélienne de type  $(1, 2)$  ; une telle surface abélienne peut être vue comme un revêtement double (non ramifié) de la jacobienne d'une courbe de genre 2. Le diviseur nécessaire à compléter ces fibres en surfaces abéliennes est une courbe lisse de genre 3, elle-même revêtement double (non ramifié) de la courbe de genre 2.

### 2.3.3 Le critère de Kowalevski-Painlevé

Étant donné un champ vectoriel complexe, le critère de Painlevé-Kowalevski donne des conditions nécessaires pour qu'il soit le champ intégrable d'un système algébriquement intégrable. À noter que le champ donné n'est supposé ni intégrable, ni même hamiltonien. Si le critère de Kowalevski-Painlevé peut être utilisé pour démontrer qu'un tel champ n'est pas a.c.i., son succès a surtout été qu'il permet de sélectionner dans une famille de hamiltoniens (dépendant de paramètres) ceux qui sont de bons candidats pour être a.c.i., et en particulier pour être des systèmes hamiltoniens et intégrables. Ce critère fut déjà utilisé, sans justification, par Kowalevski, ce qui lui permettra de découvrir la toupie qui porte son nom.

**Théorème 2.3.5** (Critère de Kowalevski-Painlevé). *Soit  $(\mathbb{C}^n, \pi, \mathbf{F})$  un système a.c.i. irréductible. Pour chacun des champs intégrables  $\mathcal{X}_{F_i}$  il existe des solutions de Laurent convergentes qui dépendent de  $n - 1$  paramètres libres.*

L'irréductibilité dans cette définition veut dire que la fibre générique de l'application moment complexe, qui est donc un ouvert d'une variété abélienne, ne contient pas de sous-variété abélienne non triviale, comme c'est le cas pour une variété abélienne générique de dimension donnée. Il est clair ce que l'on appelle *solution de Laurent* pour un champ de vecteurs  $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  : il s'agit tout d'abord de séries de Laurent

$$x_i(t) = \frac{1}{t^{\nu_i}} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} t^k, \quad i = 1, \dots, n,$$

où  $\nu_i \in \mathbb{Z}$  et  $x_i^{(k)} \in \mathbb{C}$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Être solution veut dire que

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

La convergence est pour  $|t|$  petit, non nul. Si on ne précise pas les conditions initiales, telles séries, si elles existent, s'organisent naturellement en familles, dépendant d'un

nombre de paramètres qui peut varier selon la famille. Les solutions de Laurent dépendant de  $n - 1$  paramètres libres sont appelées des *balances principales*, tandis que toutes les autres solutions de Laurent sont appelées des *balances inférieures*. Une forme plus élaborée du critère de Kowalevski-Painlevé implique également l'existence de balances inférieures pour tout système a.c.i. irréductible.

**Exemple 2.3.6.** Soient  $e_0, e_1, \dots, e_\ell$  des vecteurs dans  $\mathbb{R}^{\ell+1}$ , tels que

- (1) Les vecteurs  $e_0, e_1, \dots, e_\ell$  sont linéairement dépendants ;
- (2) Pour tout  $i$ , les vecteurs  $e_0, e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_\ell$  sont linéairement indépendants ;
- (3) Si  $\sum_{i=0}^{\ell} \xi_i e_i = 0$  et  $\sum_{i=0}^{\ell} \xi_i = 0$  alors  $(\xi_0, \dots, \xi_\ell) = (0, \dots, 0)$ .

Tout système *générique* de  $\ell + 1$  vecteurs *dépendants* dans  $\mathbb{R}^{\ell+1}$  vérifie ces trois conditions. Soit  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq \ell}$  la matrice définie par

$$a_{ij} := 2 \frac{\langle e_i | e_j \rangle}{\langle e_j | e_j \rangle}.$$

On considère sur  $\mathbb{C}^{2(\ell+1)}$ , dont on note les coordonnées  $x = (x_0, \dots, x_\ell)$  et  $y = (y_0, \dots, y_\ell)$ , le champ de vecteurs

$$X_A : \begin{cases} \dot{x} &= x \cdot y, \\ \dot{y} &= Ax, \end{cases}$$

où  $x \cdot y = (x_0 y_0, \dots, x_\ell y_\ell)$ . Le champ de vecteurs  $X_A$  est un champ intégrable d'un système a.c.i. (irréductible), seulement si  $A$  est la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie affine (éventuellement twistée). Réciproquement, si  $A$  est une telle matrice, alors  $X_A$  est le champ intégrable (au sens de Liouville) ; son appartenance à un système a.c.i. (irréductible) a été établi pour des cas particuliers d'algèbres de Lie, mais pas en toute généralité. Ces systèmes intégrables sont dans la littérature connus comme les *systèmes de Toda périodiques généralisés*.

### 2.3.4 Le théorème de Liouville complexe

Le critère de Kowalevski-Painlevé permet de démontrer qu'un champ de vecteurs n'est pas a.c.i., mais pas de démontrer qu'il est a.c.i. Démontrer qu'un système est a.c.i. est très difficile et aucune méthode générale existe à ce moment pour ce faire. Le problème principal est de démontrer qu'une variété explicitement donnée (par des équations algébriques) est une (partie affine d'une) variété abélienne. Dans le cas des systèmes intégrables provenant de la géométrie algébrique, comme le système de Beauville, c'est la définition elle-même du système qui permet de décrire les fibres de l'application moment complexe comme étant des parties affines de variétés abéliennes. Dans tous les autres cas la tâche est plus complexe.

En petite dimension, le théorème suivant a été utilisé avec succès, même si sa mise en œuvre, c'est-à-dire la vérification des conditions du théorème, est assez compliquée. C'est ce théorème que nous utiliserons pour conclure l'intégrabilité algébrique du système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules.

**Théorème 2.3.7** (Théorème de Liouville complexe). *Soit  $A \subset \mathbb{C}^n$  une variété affine non singulière de dimension  $r$ , munie de  $r$  champs de vecteurs holomorphes  $X_1, \dots, X_r$  et soit  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}^N$  un morphisme. Soit  $\Delta := \overline{\varphi(A)} \setminus \varphi(A)$  que l'on décompose comme  $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ , où  $\Delta'$  est la réunion des composantes irréductibles de  $\Delta$  de dimension  $r-1$  et  $\Delta''$  la réunion des autres composantes irréductibles de  $\Delta$ . On suppose :*

- (0)  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}^N$  est un plongement;
- (1) Les champs commutent deux à deux,  $[X_i, X_j] = 0$  pour  $1 \leq i, j \leq r$ ;
- (2) En chaque point  $m \in A$  les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_r$  sont indépendants ;
- (3) Le champ de vecteurs  $\varphi_* X_1$  se prolonge en un champ de vecteurs  $\overline{X_1}$  qui est holomorphe au voisinage de  $\Delta'$  dans  $\mathbb{P}^N$ ;
- (4) Les courbes intégrales de  $\overline{X_1}$  qui débutent en des points de  $\Delta'$  partent tout de suite dans  $\varphi(A)$ .

Alors  $\overline{\varphi(A)}$  est une variété abélienne de dimension  $r$  et  $\Delta'' = \emptyset$ , de sorte que  $\overline{\varphi(A)} = \varphi(A) \cup \Delta'$ . De plus, les champs de vecteurs holomorphes  $\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_r$  se prolongent en des champs de vecteurs holomorphes sur tout  $\overline{\varphi(A)}$ .





# Chapitre 3

## Systèmes de Lotka-Volterra

Le système intégrable dont nous allons démontrer l'intégrabilité algébrique est une déformation du système de Bogoyavlenskij-Itoh, qui est lui-même un cas particulier d'un système de Lotka-Volterra. Dans ce chapitre on commence avec quelques rappels sur les systèmes de Lotka-Volterra (antisymétriques) et leur structure hamiltonienne, puis nous donnons quelques exemples particuliers qui sont connus être intégrables. Ensuite, nous introduisons les systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés, qui seront étudiés dans la suite.

### 3.1 Systèmes de Lotka-Volterra

Le *système de Lotka-Volterra*, aussi appelé *modèle de Lotka-Volterra*, a été introduit par Lotka et Volterra dans leurs études de la dynamique des populations avec deux espèces, un prédateur et sa proie [17, 24]. Pour  $n$  espèces, le système s'écrit sous sa forme générale à travers du système d'équations différentielles sur  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  suivant :

$$\dot{x}_i = \epsilon_i x_i + \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_i x_j, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Ici, on considère ces équations sur  $\mathbb{C}^n$ , dont on note  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées canoniques. On dira que  $n$  est le nombre de particules, plutôt que le nombre d'espèces. Les coefficients  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  sont des constantes scalaires complexes et  $A = (A_{i,j})$  est une matrice carrée complexe de taille  $n$ .

Une classe particulière de (3.1) est quand tous les  $\epsilon_i$  sont nuls et quand la matrice  $A$  est antisymétrique. On parlera alors de *système de Lotka-Volterra antisymétrique*. L'intérêt

particulier pour ce cas est qu'il est toujours hamiltonien, contrairement au cas général. On rappelle l'argument car il est important pour la suite. On considère donc un système de Lotka-Volterra

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_i x_j, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

avec  $A$  antisymétrique. Comme on l'a rappelé dans l'exemple 2.1.6, on peut associer à  $A$  une structure de Poisson (diagonale) sur  $\mathbb{C}^n$ . On la note  $\pi$  et le crochet de Poisson associé à  $\pi$  sera noté  $\{\cdot, \cdot\}$ . On a alors

$$\{x_i, x_j\} = A_{i,j} x_i x_j, \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Soit

$$H := x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\mathcal{X}_H(x_i) = \{x_i, H\} = \left\{ x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\} = \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_i x_j,$$

ce qui montre que (3.2) est un système hamiltonien. À noter la forme simple de son hamiltonien : il est linéaire ! On rappelle de l'exemple 2.1.11 que le rang de  $\pi$  est le rang de  $A$  et que des vecteurs entiers positifs dans le noyau de  $A$  donnent des fonctions de Casimir de  $\pi$ .

Du point de vue de l'intégrabilité, une question naturelle se pose : pour quelles matrices antisymétriques  $A$ , le système hamiltonien (3.2) est-il intégrable ? Pour l'instant on n'a que des réponses très partielles et la diversité des intégrales premières dans les cas intégrables connus montre qu'une réponse générale est actuellement hors de portée. On se contente ici de quelques exemples qui sont connus être intégrables.

**Exemple 3.1.1.** Le système de Lotka-Volterra intégrable à  $n$  particules le plus connu est celui du système de Kac-van Moerbeke [9, 14]. Les entrées non nulles de la matrice  $A$  sont alors données par

$$a_{i+1,i} = -a_{i,i+1} = 1, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1.$$

Pour le cas du système de Kac-van Moerbeke *périodique*, que l'on note  $\text{KM}(n)$  on y ajoute les crochets non nuls  $a_{1,n} = -a_{n,1} = 1$ . Le rang de  $A$ , et donc de  $\text{KM}(n)$  est alors  $n-1$  et  $x_1 x_2 \dots x_n$  est une fonction de Casimir de  $\text{KM}(n)$  car  ${}^t(1, 1, \dots, 1)$  appartient au noyau de  $A$ . Le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_H$  de  $\text{KM}(n)$  est donné par

$$\dot{x}_i = x_i(x_{i-1} - x_{i+1}), \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Ici, les indices sont pris modulo  $n$  :  $x_0 = x_n$  et  $x_{n+1} = x_1$ . Les intégrales premières sont construites à partir de l'écriture de (3.4) comme équation de Lax  $\dot{L}(h) = [L(h), M(h)]$ , avec

$$L(h) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & h^{-1} \\ 1 & 0 & x_2 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & x_{n-1} \\ hx_n & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

et  $M(h)$  est construit à partir de  $L(h)$ . Les coefficients du polynôme caractéristique de  $L(h)$  donnent assez d'intégrales premières de (3.4) pour établir l'intégrabilité au sens de Liouville de  $\text{KM}(n)$ .

**Exemple 3.1.2.** Le système de Bogoyavlenskij-Itoh [3, 13] à  $n$  particules, noté  $\text{BI}(n)$ , est le système de Lotka-Volterra antisymétrique, défini par la matrice  $A$  de taille impaire,  $n = 2k + 1$ , suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne de cette matrice est obtenue par un décalage d'une unité de la précédente, tandis que la première ligne de  $A$  consiste, après le zéro initial, de  $k$  valeurs 1, puis de  $k$  valeurs  $-1$ . Dit encore différemment, les entrées triangulaires supérieures de  $A$  sont données par

$$A_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{si } i < j \leq \min\{i + k, 2k + 1\}, \\ -1, & \text{si } \min\{i + k, 2k + 1\} < j \leq 2k + 1. \end{cases}$$

On note  $\pi_{\text{BI}}$  la structure de Poisson diagonale, définie par  $A$ , et le crochet de Poisson correspondant est noté  $\{\cdot, \cdot\}_{\text{BI}}$ .

Posons  $x_{n+\ell} = x_\ell$  pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_H$  de  $\text{BI}(n)$  s'écrit alors

comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(x_2 + \cdots + x_{k+1} - x_{k+2} - \cdots - x_{2k+1}), \\
&\vdots \\
\dot{x}_i &= x_i(x_{i+1} + \cdots + x_{i+k} - x_{i+k+1} - \cdots - x_{i+2k}), \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= x_n(x_{n+1} + \cdots + x_{n+k} - x_{n+k+1} - \cdots - x_{n+2k}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ou de façon succincte,

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^k (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \tag{3.7}$$

Une équation de Lax pour BI( $n$ ) est donnée par

$$(X + \lambda M)' = [X + \lambda M, B - \lambda M^{k+1}], \tag{3.8}$$

où  $\lambda$  est un paramètre spectral et  $X$ ,  $M$  et  $B$  sont les matrices carrées de taille  $n$  dont les entrées sont décrites, respectivement, par

$$X_{i,j} := \delta_{i,j+k} x_i, \quad M_{i,j} := \delta_{i+1,j} \quad \text{et} \quad B_{i,j} := -\delta_{i,j} (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k}).$$

On en obtient à nouveau assez d'intégrales premières (en involution) pour l'intégrabilité au sens de Liouville du système de BI( $n$ ). Notons d'abord que le rang de la matrice  $A$  est  $n - 1 = 2k$ , ce qui est alors aussi le rang de la structure de Poisson  $\pi_{\text{BI}}$ .

Le polynôme caractéristique de l'opérateur de Lax  $X + \lambda M$  de (3.8) est donné par

$$\det(X + \lambda M - \mu \text{Id}) = \lambda^n - \mu^n + \sum_{\ell=0}^k H_{\ell+1} \lambda^{k-\ell} \mu^{k-\ell},$$

où par homogénéité chaque polynôme  $H_{\ell+1} = H_{\ell+1}(x_1, \dots, x_n)$  est homogène de degré  $2\ell + 1$ . On y retrouve le hamiltonien  $H_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$  et la fonction de Casimir  $H_{k+1} = x_1 x_2 \dots x_n$ . Étant un coefficient du polynôme caractéristique de l'opérateur de Lax  $X + \lambda M$ , chaque polynôme  $H_{\ell+1}$  est une intégrale première du champ hamiltonien (3.7). En utilisant un argument combinatoire, Itoh prouve que ces polynômes sont indépendants et en involution [13]. Ceci permet de conclure que le système de Bogoyavlenskij-Itoh à  $n$  particules est intégrable au sens de Liouville.

La forme symétrique de (3.7) provient de la présence d'un groupe d'automorphisme (cyclique d'ordre  $n$ ) de BI( $n$ ). Il est engendré par le morphisme  $\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , défini pour  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$  par

$$\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n) := (a_2, a_3, \dots, a_n, a_1).$$

Le morphisme induit  $\sigma^*$  sur  $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$  est alors donné par  $\sigma^*x_i = x_{i+1}$ , où on rappelle que les indices sont pris modulo  $n$ . Il est alors clair que  $\sigma^*H_1 = H_1$  et que  $\sigma^*H_{k+1} = H_{k+1}$  ; on peut également vérifier que plus généralement,  $\sigma^*H_\ell = H_\ell$  pour  $\ell = 1, \dots, k+1$ . De plus, pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\{\sigma^*x_i, \sigma^*x_j\}_{\text{BI}(n)} = \{x_{i+1}, x_{j+1}\}_{\text{BI}(n)} = \sigma^*\{x_i, x_j\},$$

où nous avons utilisé dans la dernière égalité que  $A_{i+1, j+1} = A_{i, j}$  pour tous  $i, j$  (on rappelle que les indices sont pris modulo  $n$ ). Ceci montre que  $\sigma$  est un automorphisme de  $\text{BI}(n)$ . Il est clair que  $\sigma$  engendre un groupe d'automorphismes de  $\text{BI}(n)$  qui est cyclique d'ordre  $n$ .

**Exemple 3.1.3.** Les systèmes de Lotka-Volterra  $(\mathbb{C}^n, \pi, H)$  admettent des réductions de Poisson qui sont également des systèmes de Lotka-Volterra : pour toute partie non vide  $I \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$ , le sous-espace  $S_I$  définie par  $x_i = 0$  pour tout  $i \in I$  est une sous-variété de Poisson de  $(\mathbb{C}^n, \pi)$ . En effet, les fonctions sur  $\mathbb{C}^n$  qui s'annulent sur  $S_I$  forment un idéal de Poisson de  $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$  : pour  $i \in I$  et pour  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ ,

$$\{x_i, F\} = x_i \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial F}{\partial x_j},$$

donc  $\{x_i, F\}$  s'annule sur  $S_I$ . On peut alors restreindre la structure de Poisson  $\pi$  sur  $S_I$  et la restriction est une structure de Poisson sur  $S_I$ , notée  $\pi_I$  ; restreintes à  $S_I$ , les fonctions  $x_i$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$  forment un système de coordonnées linéaires sur  $S_I$ , que l'on notera toujours  $x_i$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ . En termes de ces coordonnées,  $\pi_I$  est donné pour  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$  par  $\{x_i, x_j\}_I = a_{i, j}x_i x_j$ , donc  $\pi_I$  est une structure de Poisson diagonale. La restriction de  $H = \sum_{i=1}^n x_i$  est alors  $H_I = \sum_{i \notin I} x_i$ . La réduction est alors également un système de Lotka-Volterra. À noter que la matrice  $A$  de ce dernier système est obtenue en enlevant de la matrice  $A$  du système de Lotka-Volterra original pour tout  $i \in I$  la  $i$ -ème ligne et colonne. À priori, ces réductions ne conservent pas l'intégrabilité : bien sûr la restriction à  $S_I$  de toute intégrale première de  $(\mathbb{C}^n, \pi, H)$  sera une intégrale première et l'involutivité de fonctions est préservée par la restriction (à une sous-variété de Poisson). Par contre, rien ne garantit que la restriction préserve l'indépendance de fonctions ; après restriction une fonction peut même devenir nulle, comme par exemple le Casimir  $x_1 x_2 \dots x_n$  du système de Kac-van Moerbeke (exemple 3.1.1). Une famille de réductions du système de Bogoyavlenskij-Itoh a été décrite dans [5, 20] ; dans ces cas, après réduction, les intégrales premières du système de Bogoyavlenskij-Itoh ne suffisent pas pour l'intégrabilité au sens de Liouville mais il existe assez d'autres intégrales premières, qui sont rationnelles plutôt que polynomiales.

## 3.2 Systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés

En général, quand on modifie même légèrement un système intégrable, on perd son intégrabilité. Néanmoins, il existe parfois des déformation intégrables d'un système intégrable donné. C'est le cas du système de Bogoyavlenskij-Itoh  $BI(n)$  (exemple 3.1.2), où une déformation intégrable du système a été construite dans [8]. Après déformation, (3.7) devient

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^k (x_{i+j} - x_{i-j}) + \varepsilon_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Les  $\varepsilon_i$  sont des constantes complexes arbitraires de somme nulle,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 0$ . Cette dernière condition est nécessaire et suffisante pour que  $H = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  soit une intégrale première de (3.9). De plus, (3.9) est un champ hamiltonien avec le même hamiltonien, mais par rapport à une structure de Poisson différente, qui est une déformation de la structure de Poisson du système de Bogoyavlenskij-Itoh non déformé. Afin d'introduire cette structure de Poisson on introduit des paramètres  $\beta_{i,i+k} = -\beta_{i+k,i}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , où on rappelle que les indices sont pris modulo  $n$ . Ils sont choisis tels que

$$\varepsilon_i := \beta_{i,i+k} - \beta_{i-k,i}$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . D'une part, le fait que les  $\varepsilon_i$  sont de somme nulle implique que tels  $\beta_{i,i+k}$  existent. D'autre part, il est clair que les  $\beta_{i,i+k}$  sont uniques à une constante additive près (cette constante est indépendante de  $i$ ). Par définition les  $\beta_{i,j}$  avec  $j \neq i+k$  sont nuls. On peut alors considérer la déformation suivante du crochet de Poisson défini par (3.3):

$$\{x_i, x_j\}_{BI^*} := A_{i,j} x_i x_j + \beta_{i,j}, \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n.$$

D'une part, le crochet déformé est toujours un crochet de Poisson. D'autre part, le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_H$  par rapport à cette nouvelle structure de Poisson est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i \sum_{j=1}^n (x_{i+j} - x_{i-j}) + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \\ &= x_i \sum_{j=1}^n (x_{i+j} - x_{i-j}) + (\beta_{i,i+k} - \beta_{i-k,i}) \\ &= x_i \sum_{j=1}^n (x_{i+j} - x_{i-j}) + \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (3.10)$$

ce qui montre que le système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé, que l'on note  $BI^*(n)$  est aussi un système hamiltonien. Tout comme le système non déformé  $BI(n)$ , le système

déformé  $\text{BI}^*(n)$  est intégrable au sens de Liouville. Dans [8], plusieurs constructions des intégrales premières en involution sont données. On peut par exemple citer l'équation de Lax suivante, qui est une déformation de l'équation de Lax (3.8) :

$$(X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M) \cdot = [X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M, B - \lambda M^{k+1}] \quad (3.11)$$

où  $X$ ,  $M$  et  $B$  sont les matrices carrées de taille  $n$  dont les entrées sont décrites, respectivement, par

$$\begin{aligned} X_{i,j} &:= \delta_{i,j+k} x_i, & \Delta_{i,j} &:= \beta_{i+k,j} \delta_{i,j}, & M_{i,j} &:= \delta_{i+1,j}, \\ B_{i,j} &:= b_i \delta_{i,j} := -\delta_{i,j} (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k}). \end{aligned}$$

On retrouve l'équation de Lax (3.8) de  $\text{BI}(n)$  en posant  $\Delta := 0$ . On trouve alors les intégrales premières démontrant l'intégrabilité de (3.9) comme coefficients du polynôme caractéristique de l'opérateur de Lax  $L := X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M$ .

Comme dans le cas du système de Bogoyavlenskij-Itoh non déformé, il existe des réductions de Poisson naturelles du système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé, qui sont toujours intégrables au sens de Liouville ; ces réductions ne sont par contre plus des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés, bien que ce sont des déformations (intégrables) de systèmes de Lotka-Volterra (intégrables). Pour la réduction, qui est toujours sur un sous-espace  $S_I$ , comme dans l'exemple 3.1.3, il faut supposer que les paramètres de déformation correspondant à  $I$  sont nuls. Les intégrales premières du système réduit sont alors en général aussi rationnelles, plutôt que polynomiales, et sont des déformations du système de Lotka-Volterra correspondant non déformé (voir [7]).

À cause des paramètres  $\beta_{i,j}$ , l'automorphisme  $\sigma$  de  $\text{BI}(n)$  n'est pas un automorphisme du système intégrables  $\text{BI}^*(n)$ . Simplement dit, il faudra aussi que  $\sigma^*$  permute les paramètres de déformation  $\beta_{i,j}$ . Nous expliciterons cette extension dans le chapitre suivant au cas où  $n = 5$ .

### 3.3 Le rapport entre les systèmes KM(5) et BI(5)

Dans cette section, nous montrerons qu'il existe une relation étroite entre le système de *Kac-van Moerbeke* à 5-particules et celui de Bogoyavlenskij-Itoh à 5-particules. Plus précisément, un isomorphisme de Poisson sera construit entre les espaces des phases résultants après avoir fixé les valeurs des Casimir.

Il est bien connu que le système de Kac-van Moerbeke à 5-particules, que l'on note KM(5), est a.c.i. (voir [14] et [9]) ; via cet isomorphisme nous prouverons alors automatiquement que le système BI(5) est également a.c.i.



Comme il a été montré dans l'exemple 3.1.1, KM(5) fait partie de la famille des systèmes de Lotka-Volterra (antisymétriques). On considère  $\mathbb{C}^5$  comme l'espace des phases et sur lui les coordonnées linéaires  $y_1, \dots, y_5$  ; on va également utiliser la convention cyclique des coordonnées en posant  $y_{i+5} = y_i$ , pour  $i \in \mathbb{Z}$ . Le système de Kac-van Moerbeke à 5-particules périodique est donné par le système d'équations différentielles quadratiques

$$\dot{y}_i = y_i(y_{i-1} - y_{i+1}), \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.12)$$

Ce système admet les trois constantes de mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} F_1 &:= \sum_{i=1}^5 y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5, \\ F_2 &:= \sum_{i=1}^5 y_i y_{i+2} = y_1 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_1 + y_5 y_2, \\ F_3 &:= \prod_{i=1}^5 y_i = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On munit  $\mathbb{C}^5$  de la structure de Poisson donnée par le crochet

$$\{y_i, y_j\}_{\text{KM}(5)} := (\delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}) y_i y_j, \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (3.14)$$

où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker. KM(5) est alors un système hamiltonien lorsque l'on considère le crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_{\text{KM}(5)}$  et la fonction  $F_1$  en tant que hamiltonien. En effet, le champ de vecteurs hamiltonien  $\mathcal{X}_{F_1}$  est donné par

$$\dot{y}_i = \{y_i, F_1\}_{\text{KM}(5)} = y_i(y_{i-1} - y_{i+1}), \quad i = 1, \dots, 5,$$

comme dans (3.12). Par rapport à ce crochet de Poisson, l'intégrale première  $F_3$  est un Casimir. De même, en considérant  $F_2$  comme hamiltonien, on a un deuxième champ de vecteurs qui commute avec (3.12) ; il est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{y}_i = \{y_i, F_2\}_{\text{KM}(5)} = y_i(y_{i-1} y_{i+2} - y_{i+1} y_{i-2}), \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.15)$$

On va noter  $B$  la matrice du système KM(5), c'est-à-dire la matrice des coefficients  $B_{i,j} := \delta_{i,j+1} - \delta_{j,i+1}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, nous rappelons que le système de Bogoyavlenskij-Itoh à 5 particules (non déformé), que l'on note BI(5), est donné par le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^5 (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3.16)$$

où nous prenons aussi  $\mathbb{C}^5$  comme l'espace des phases, équipé des coordonnées linéaires  $x_1, \dots, x_5$ . Ce système est hamiltonien lorsque l'on considère comme hamiltonien la fonction  $H_1 := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ , et la structure de Poisson donnée par le crochet

$$\{x_i, x_j\}_{\text{BI}(5)} := A_{i,j} x_i x_j, \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (3.17)$$

où  $A$  est la matrice antisymétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteurs hamiltonien  $\mathcal{X}_{H_1}$  admet les trois premières intégrales (indépendantes) suivantes :

$$\begin{aligned} H_1 &:= \sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ H_2 &:= \sum_{i=1}^5 x_{i-2} x_i x_{i+2} = x_4 x_1 x_3 + x_5 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_5 + x_2 x_4 x_1 + x_3 x_5 x_2, \\ H_3 &:= \prod_{i=1}^5 x_i = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous allons ensuite établir un lien entre les deux systèmes décrits ci-dessus. Pour cela on définit l'application  $\varphi : \mathbb{C}_0^5 \rightarrow \mathbb{C}_0^5$ , décrite par

$$\varphi(a) := \left( \frac{1}{a_1 a_3}, \frac{1}{a_4 a_1}, \frac{1}{a_2 a_4}, \frac{1}{a_5 a_2}, \frac{1}{a_3 a_5} \right), \quad \text{pour } a = (a_1, \dots, a_5) \in \mathbb{C}_0^5, \quad (3.19)$$

où  $\mathbb{C}_0^5 := \mathbb{C}^5 \setminus \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{C}^5 \mid a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 0 \}$ .

L'application  $\varphi$  induit naturellement un morphisme au niveau des algèbres des fonctions régulières sur l'ouvert  $\mathbb{C}_0^5$ . Plus précisément, on a l'application  $\varphi^* : \mathcal{F}(\mathbb{C}_0^5) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_0^5)$  définie par

$$\varphi^*(y_i) := \frac{1}{x_{3i-2} x_{3i}}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.20)$$

Dans les lignes suivantes, nous allons détailler le fait que l'application  $\varphi^*$  préserve les structures de Poisson. Autrement dit, nous allons montrer que

$$\varphi^* \left( \{y_i, y_j\}_{\text{KM}(5)} \right) = \{\varphi^*(y_i), \varphi^*(y_j)\}_{\text{BI}(5)}, \quad i, j = 1, \dots, 5. \quad (3.21)$$

En effet, d'une part, en utilisant (3.14), le côté gauche de (3.21) peut se réécrire comme

$$\varphi^* \left( \{y_i, y_j\}_{\text{KM}(5)} \right) = \varphi^*(B_{i,j} y_i y_j) = B_{i,j} \varphi^*(y_i) \varphi^*(y_j). \quad (3.22)$$

D'autre part, on calcule le côté droit de (3.21) comme suit :

$$\begin{aligned} \{\varphi^*(y_i), \varphi^*(y_j)\}_{\text{BI}(5)} &= \left\{ \frac{1}{x_{3i-2} x_{3i}}, \frac{1}{x_{3j-2} x_{3j}} \right\}_{\text{BI}(5)} \\ &= (x_{3i-2} x_{3i})^{-2} (x_{3j-2} x_{3j})^{-2} \{x_{3i-2} x_{3i}, x_{3j-2} x_{3j}\}_{\text{BI}(5)} \\ &= (x_{3i-2} x_{3i})^{-2} (x_{3j-2} x_{3j})^{-2} \left[ x_{3i} x_{3j} \{x_{3i-2}, x_{3j-2}\}_{\text{BI}(5)} + \right. \\ &\quad \left. x_{3i-2} x_{3j} \{x_{3i}, x_{3j-2}\}_{\text{BI}(5)} + \right. \\ &\quad \left. x_{3i} x_{3j-2} \{x_{3i-2}, x_{3j}\}_{\text{BI}(5)} + \right. \\ &\quad \left. x_{3i-2} x_{3j-2} \{x_{3i}, x_{3j}\}_{\text{BI}(5)} \right] \\ &= (x_{3i-2} x_{3i})^{-2} (x_{3j-2} x_{3j})^{-2} [A_{3i-2,3j-2} + A_{3i,3j-2} + A_{3i-2,3j} \\ &\quad + A_{3i,3j}] (x_{3i-2} x_{3i} x_{3j-2} x_{3j}) \\ &= \frac{1}{x_{3i-2} x_{3i}} \frac{1}{x_{3j-2} x_{3j}} [A_{3i-2,3j-2} + A_{3i,3j-2} + A_{3i-2,3j} + A_{3i,3j}] \\ &= [A_{3i-2,3j-2} + A_{3i,3j-2} + A_{3i-2,3j} + A_{3i,3j}] \varphi^*(y_i) \varphi^*(y_j). \quad (3.23) \end{aligned}$$

De (3.22) et (3.23) on déduit que  $\varphi^*$  est un morphisme d'algèbres de Poisson si et seulement si pour tous  $i, j = 1, \dots, 5$ ,

$$B_{i,j} = A_{3i-2,3j-2} + A_{3i,3j-2} + A_{3i-2,3j} + A_{3i,3j}.$$

On remarque que, grâce à la cyclicité de la matrice  $A$ , pour tous  $i, j = 1, \dots, 5$ , on a que  $A_{3i-2,3j-2} = A_{i,j}$  ; de plus, en vertu de la cyclicité des indices modulo 5 on a que

$$\begin{aligned} A_{3i,3j-2} &= A_{3i,3j+3} = A_{3i,3(j+1)}, \\ A_{3i-2,3j} &= A_{3i+3,3j} = A_{3(i+1),3j}. \end{aligned}$$

Au vu de ce qui précède,  $\varphi^*$  est un morphisme d'algèbres de Poisson si et seulement si pour tous  $i, j = 1, \dots, 5$ ,

$$B_{i,j} = 2A_{3i,3j} + A_{3i,3(j+1)} + A_{3(i+1),3j}.$$

Maintenant, la relation ci-dessus nous motive à considérer la matrice carrée  $\tilde{A}$  dont les entrées sont définies par  $\tilde{A}_{i,j} := A_{3i,3j}$ . Explicitement,  $\tilde{A}$  est la matrice donnée par

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la discussion précédente, nous avons enfin que  $\varphi^*$  est un morphisme d'algèbres de Poisson si et seulement si pour tous  $i, j = 1, \dots, 5$ ,

$$B_{i,j} = 2\tilde{A}_{i,j} + \tilde{A}_{i,j+1} + \tilde{A}_{i+1,j}. \quad (3.24)$$

Afin de vérifier la relation (3.24), nous procédons à l'analyse des cas suivants :

$$\begin{aligned} j = i - 2 : & \quad 2\tilde{A}_{i,i-2} + \tilde{A}_{i,i-1} + \tilde{A}_{i+1,i-2} = 2(-1) + (1) + (1) = 0, \\ j = i - 1 : & \quad 2\tilde{A}_{i,i-1} + \tilde{A}_{i,i} + \tilde{A}_{i+1,i-1} = 2(1) + (0) + (-1) = 1, \\ j = i : & \quad 2\tilde{A}_{i,i} + \tilde{A}_{i,i+1} + \tilde{A}_{i+1,i} = 2(0) + (-1) + (1) = 0, \\ j = i + 1 : & \quad 2\tilde{A}_{i,i+1} + \tilde{A}_{i,i+2} + \tilde{A}_{i+1,i+1} = 2(-1) + (1) + (0) = -1, \\ j = i + 2 : & \quad 2\tilde{A}_{i,i+2} + \tilde{A}_{i,i+3} + \tilde{A}_{i+1,i+2} = 2(1) + (-1) + (-1) = 0. \end{aligned}$$

Autrement écrit,

$$(2\tilde{A}_{i,j} + \tilde{A}_{i,j+1} + \tilde{A}_{i+1,j}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

ce qui achève la vérification de (3.24). Nous concluons alors que  $\varphi^* : \mathcal{F}(\mathbb{C}_0^5) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_0^5)$  est un morphisme d'algèbres de Poisson.

Voyons ensuite l'action du morphisme  $\varphi^*$  sur les intégrales premières  $F_1, F_2$  et  $F_3$ . En effet :

Pour  $F_1$ ,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(F_1) &= \varphi^*(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \\
&= \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_4 x_1} + \frac{1}{x_2 x_4} + \frac{1}{x_5 x_2} + \frac{1}{x_3 x_5} \\
&= \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} (x_5 x_2 x_4 + x_3 x_5 x_2 + x_1 x_3 x_5 + x_4 x_1 x_3 + x_2 x_4 x_1) \\
&= \frac{H_2}{H_3}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Pour  $F_2$ ,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(F_2) &= \varphi^*(y_1 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_1 + y_5 y_2) \\
&= \frac{1}{x_1 x_3} \frac{1}{x_2 x_4} + \frac{1}{x_4 x_1} \frac{1}{x_5 x_2} + \frac{1}{x_2 x_4} \frac{1}{x_3 x_5} + \frac{1}{x_5 x_2} \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_3 x_5} \frac{1}{x_4 x_1} \\
&= \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} (x_5 + x_3 + x_1 + x_4 + x_2) \\
&= \frac{H_1}{H_3}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour  $F_3$ ,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(F_3) &= \varphi^*(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5) \\
&= \frac{1}{x_1 x_3} \frac{1}{x_4 x_1} \frac{1}{x_2 x_4} \frac{1}{x_5 x_2} \frac{1}{x_3 x_5} \\
&= \frac{1}{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^2} \\
&= \frac{1}{H_3^2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Dans ce qui suit, on va fixer une valeur non nulle  $\kappa_3$  du Casimir  $H_3$  et on définit  $c_3 := \frac{1}{\kappa_3^2}$ . On va également définir les espaces

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\kappa_3} &:= \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{C}^5 \mid a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = \kappa_3\} \subseteq \mathbb{C}_0^5, \\
\mathcal{M}_{c_3} &:= \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{C}^5 \mid b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 = c_3\} \subseteq \mathbb{C}_0^5,
\end{aligned}$$

munis des structures de Poisson données par les restrictions des crochets (3.17) et (3.14) à  $\mathcal{M}_{\kappa_3}$  et  $\mathcal{M}_{c_3}$ , respectivement.

L'application  $\varphi$  définie dans (3.19) se restreint alors à l'application

$$\varphi: \mathcal{M}_{\kappa_3} \rightarrow \mathcal{M}_{c_3}. \tag{3.28}$$

De plus, l'application induite au niveau des algèbres des fonctions régulières sur  $\mathcal{M}_{c_3}$  et  $\mathcal{M}_{\kappa_3}$ ,  $\varphi^* : \mathcal{F}(\mathcal{M}_{c_3}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}_{\kappa_3})$ , préserve les structures de Poisson et, d'après (3.25) et (3.26), elle est telle que

$$\varphi^*(F_1) = \frac{1}{\kappa_3} H_2, \quad (3.29)$$

$$\varphi^*(F_2) = \frac{1}{\kappa_3} H_1. \quad (3.30)$$

L'application (3.28) est en fait un isomorphisme de Poisson. Pour le prouver, on définit l'application  $\psi : \mathcal{M}_{c_3} \rightarrow \mathcal{M}_{\kappa_3}$  par

$$\psi(b) := \frac{1}{\kappa_3} \left( \frac{1}{b_2 b_4 b_1}, \frac{1}{b_4 b_1 b_3}, \frac{1}{b_1 b_3 b_5}, \frac{1}{b_3 b_5 b_2}, \frac{1}{b_5 b_2 b_4} \right), \quad \text{pour } b = (b_1, \dots, b_5) \in \mathcal{M}_{c_3}, \quad (3.31)$$

Puisque  $c_3 = \kappa_3^{-2}$  et pour tout  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathcal{M}_{c_3}$  on a que  $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 = c_3$ , on peut, de manière équivalente, écrire  $\psi$  comme

$$\begin{aligned} \psi(b) &= \frac{1}{\kappa_3} \left( \frac{b_3 b_5}{c_3}, \frac{b_5 b_2}{c_3}, \frac{b_2 b_4}{c_3}, \frac{b_4 b_1}{c_3}, \frac{b_1 b_3}{c_3} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa_3 c_3} (b_3 b_5, b_5 b_2, b_2 b_4, b_4 b_1, b_1 b_3) \\ &= \kappa_3 (b_3 b_5, b_5 b_2, b_2 b_4, b_4 b_1, b_1 b_3). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Voyons maintenant que l'application  $\psi : \mathcal{M}_{c_3} \rightarrow \mathcal{M}_{\kappa_3}$  est l'inverse de  $\varphi : \mathcal{M}_{\kappa_3} \rightarrow \mathcal{M}_{c_3}$  et vice versa. En effet :

Pour tout  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathcal{M}_{\kappa_3}$  on a que

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= \psi \left( \frac{1}{a_1 a_3}, \frac{1}{a_4 a_1}, \frac{1}{a_2 a_4}, \frac{1}{a_5 a_2}, \frac{1}{a_3 a_5} \right) \\ &= \psi \left( \frac{a_5 a_2 a_4}{\kappa_3}, \frac{a_3 a_5 a_2}{\kappa_3}, \frac{a_1 a_3 a_5}{\kappa_3}, \frac{a_4 a_1 a_3}{\kappa_3}, \frac{a_2 a_4 a_1}{\kappa_3} \right) \\ &= \kappa_3 \left( \frac{a_1 a_3 a_5}{\kappa_3} \frac{a_2 a_4 a_1}{\kappa_3}, \frac{a_2 a_4 a_1}{\kappa_3} \frac{a_3 a_5 a_2}{\kappa_3}, \frac{a_3 a_5 a_2}{\kappa_3} \frac{a_4 a_1 a_3}{\kappa_3}, \right. \\ &\quad \left. \frac{a_4 a_1 a_3}{\kappa_3} \frac{a_5 a_2 a_4}{\kappa_3}, \frac{a_5 a_2 a_4}{\kappa_3} \frac{a_1 a_3 a_5}{\kappa_3} \right) \\ &= \kappa_3 \left( \frac{\kappa_3 a_1}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_3 a_2}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_3 a_3}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_3 a_4}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_3 a_5}{\kappa_3^2} \right) \\ &= (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5). \end{aligned}$$

De même, pour tout  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathcal{M}_{c_3}$  on a que

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) &= \varphi(\kappa_3 b_3 b_5, \kappa_3 b_5 b_2, \kappa_3 b_2 b_4, \kappa_3 b_4 b_1, \kappa_3 b_1 b_3) \\
&= \left( \frac{1}{(\kappa_3 b_3 b_5)(\kappa_3 b_2 b_4)}, \frac{1}{(\kappa_3 b_4 b_1)(\kappa_3 b_3 b_5)}, \frac{1}{(\kappa_3 b_5 b_2)(\kappa_3 b_4 b_1)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(\kappa_3 b_1 b_3)(\kappa_3 b_5 b_2)}, \frac{1}{(\kappa_3 b_2 b_4)(\kappa_3 b_1 b_3)} \right) \\
&= \left( \frac{b_1}{\kappa_3^2 c_3}, \frac{b_2}{\kappa_3^2 c_3}, \frac{b_3}{\kappa_3^2 c_3}, \frac{b_4}{\kappa_3^2 c_3}, \frac{b_5}{\kappa_3^2 c_3} \right) \\
&= (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5).
\end{aligned}$$

On a en conséquence que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes entre les variétés  $\mathcal{M}_{\kappa_3}$  et  $\mathcal{M}_{c_3}$ . De plus, comme  $\varphi$  est un morphisme de Poisson, alors  $\psi$  l'est aussi. En conclusion,  $\varphi$  et  $\psi$  établissent des isomorphismes de Poisson entre les variétés  $\mathcal{M}_{\kappa_3}$  et  $\mathcal{M}_{c_3}$  :

$$\begin{aligned}
\varphi: \mathcal{M}_{\kappa_3} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{c_3}, \\
\psi: \mathcal{M}_{c_3} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\kappa_3}.
\end{aligned}$$

L'application  $\psi^*: \mathcal{F}(\mathcal{M}_{\kappa_3}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}_{c_3})$  est donnée explicitement par

$$y_i := \psi^*(x_i) := \kappa_3 x_{2i-1} x_{2i+1}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.33)$$

En particulier, de (3.29) et (3.30) on obtient que

$$\begin{aligned}
\psi^*(H_1) &= \psi^*(\kappa_3 \varphi^*(F_2)) = \kappa_3 (\varphi \circ \psi)^*(F_2) = \kappa_3 F_2, \\
\psi^*(H_2) &= \psi^*(\kappa_3 \varphi^*(F_1)) = \kappa_3 (\varphi \circ \psi)^*(F_1) = \kappa_3 F_1,
\end{aligned}$$

ce qui peut également être vérifié par un calcul direct à partir de (3.33) et les intégrales premières dans (3.18).

Sachant que le système KM(5) est a.c.i. (voir [14] et [9]), les isomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  nous permettent d'établir la proposition suivante :

**Proposition 3.3.1.** Le système de Bogoyavlenskij-Itoh à 5 particules, BI(5), est a.c.i.

*Démonstration.*

Comme mentionné dans le paragraphe immédiatement précédent, dans les articles [14] et [9] il est établi que le système KM(5) est algébriquement intégrable. On sait également d'après les recherches de Bogoyavlenskij et Itoh, [3, 13], que le système BI(5) est intégrable au sens de Liouville. Alors pour prouver que le système BI(5) est aussi a.c.i., il faut montrer que la fibre générique de l'application moment associée à ce système

est isomorphe à une partie affine d'une variété abélienne, sur laquelle les champs de vecteurs intégrables sont constants.

On considère, pour une valeur générique  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ , la fibre  $\mathbf{H}_\kappa$  du système BI(5) :

$$\mathbf{H}_\kappa := \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i(x) = \kappa_i\}.$$

Considérons aussi que  $\kappa_3 \neq 0$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\kappa_3} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \mathcal{M}_{c_3} \\ (H_1, H_2) \downarrow & & \downarrow (F_2, F_1) \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow[\times \frac{1}{\kappa_3}]{\sim} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

En effet, on a montré dans cette section que  $\varphi$  est une application de Poisson bijective holomorphe entre les variétés  $\mathcal{M}_{\kappa_3}$  et  $\mathcal{M}_{c_3}$ . En conséquence, pour tout  $(\kappa_1, \kappa_2)$ ,  $\varphi$  restreint en un isomorphisme entre

$$(H_1, H_2)^{-1}(\{\kappa_1, \kappa_2\}) \quad \text{et} \quad (F_2, F_1)^{-1}\left(\left\{\frac{\kappa_1}{\kappa_3}, \frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right\}\right).$$

Ceci prouve que pour tout  $c_3 \neq 0$  et pour tous  $c_1$  et  $c_2$  génériques,

$$(F_1, F_2)^{-1}(\{c_1, c_2\}) = (F_1, F_2, F_3)^{-1}(\{c_1, c_2, c_3\})$$

est une partie affine d'une surface abélienne (jacobienne).

On rappelle également de cette section le rapport entre les intégrales premières  $F_1, F_2$  et  $H_1, H_2$  sous les morphismes induits  $\varphi^*$  et  $\psi^*$  :

$$\begin{aligned} \varphi^*(F_1) &= \frac{1}{\kappa_3} H_2, & \psi^*(H_1) &= \kappa_3 F_2, \\ \varphi^*(F_2) &= \frac{1}{\kappa_3} H_1, & \psi^*(H_2) &= \kappa_3 F_1. \end{aligned}$$

Étant donné que  $\varphi$  est un isomorphisme de Poisson, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{H_1} &= \kappa_3 \mathcal{X}_{\varphi^*(F_2)} = \kappa_3 \psi_* \mathcal{X}_{F_2}, \\ \mathcal{X}_{H_2} &= \kappa_3 \mathcal{X}_{\varphi^*(F_1)} = \kappa_3 \psi_* \mathcal{X}_{F_1}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Les champs  $\mathcal{X}_{F_1}$  et  $\mathcal{X}_{F_2}$  sont constants, quand restreints aux fibres  $(F_1, F_2)^{-1}(\{c_1, c_2\})$ . D'après (3.34), il s'ensuit par conséquent que les champs intégrables  $\mathcal{X}_{H_1}$  et  $\mathcal{X}_{H_2}$  sont aussi constants, quand restreints aux fibres  $(H_1, H_2)^{-1}(\{\kappa_1, \kappa_2\})$ . Ce qui précède nous permet de conclure que le système BI(5) est algébriquement intégrable.

□





# Chapitre 4

## L'intégrabilité algébrique du système BI déformé à 5 particules

Ce chapitre est consacré à la preuve de l'intégrabilité algébrique du système de BI déformé à 5 particules,  $\text{BI}^*(5)$ , pour n'importe quelles valeurs des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  (ou, ce qui est équivalent, des paramètres  $\beta_{i,i+2}$ ). D'abord, nous spécialisons les résultats concernant  $\text{BI}^*(n)$  au cas  $n = 5$ , donnant les formules explicites des hamiltoniens, de la structure de Poisson et du champ intégrable  $\mathcal{X}_{H_1}$  qui sera utilisé dans la preuve. Ce sera fait dans la section 4.1, ce qui nous permettra de présenter une esquisse de la preuve dans la section 4.2. Pour les sections suivantes 4.3 – 4.6 on fixera des valeurs génériques  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  des hamiltoniens  $H_1, H_2$  et  $H_3$ , alors que les valeurs des paramètres de déformation restent arbitraires. On y traite en détail (et dans cet ordre) les balances principales et inférieures, les diviseurs de Painlevé abstraits, un plongement prometteur de  $\mathbf{H}_\kappa$  dans  $\mathbb{P}^{24}$ , puis on montre que le champ intégrable  $\mathcal{X}_{H_1}$  sur  $\mathbf{H}_\kappa$  correspond sous le plongement à un champ de vecteurs holomorphe sur tout  $\mathbb{P}^{24}$ . Dans les sections 4.7 et 4.8, nous complétons la preuve d'intégrabilité algébrique sous l'hypothèse que les  $\varepsilon_i$  sont génériques ; pour être précis, ils sont supposés tous non nuls. Pour le cas général, il reste six sous-cas à traiter, qui demandent à chaque fois de refaire certains calculs, mais avec à la fin la surprise agréable que l'on trouve au total six nouvelles configurations de courbes sur une jacobienne, non connues auparavant (section 4.9).

## 4.1 Le système intégrable $\mathbf{BI}^*(5)$

Nous spécialisons d'abord les résultats rappelés dans la section 3.2 concernant les systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés  $\mathbf{BI}^*(n)$  au cas de  $n = 5$  (5 particules). L'espace des phases est alors  $\mathbb{C}^5$ , dont les coordonnées naturelles seront toujours notées  $x_1, \dots, x_5$  ; il convient de poser également  $x_{n+\ell} = x_\ell$  pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_H$  de  $\mathbf{BI}^*(n)$ , donné par (3.9), devient pour  $n = 5$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_2 + x_3 - x_4 - x_5) + \varepsilon_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_3 + x_4 - x_5 - x_1) + \varepsilon_2, \\ \dot{x}_3 &= x_3(x_4 + x_5 - x_1 - x_2) + \varepsilon_3, \\ \dot{x}_4 &= x_4(x_5 + x_1 - x_2 - x_3) + \varepsilon_4, \\ \dot{x}_5 &= x_5(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \varepsilon_5.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Les paramètres de déformation auxiliaires  $\beta_{i,j} = -\beta_{j,i}$ , utilisés pour construire une structure de Poisson rendant ce champ hamiltonien sont maintenant définis en termes de  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$  par

$$\varepsilon_i = \beta_{i,i+2} - \beta_{i-2,i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 5.\tag{4.2}$$

Explicitement,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \beta_{1,3} - \beta_{4,1}, \\ \varepsilon_2 &= \beta_{2,4} - \beta_{5,2}, \\ \varepsilon_3 &= \beta_{3,5} - \beta_{1,3}, \\ \varepsilon_4 &= \beta_{4,1} - \beta_{2,4}, \\ \varepsilon_5 &= \beta_{5,2} - \beta_{3,5}.\end{aligned}$$

Ceci est possible car la somme de  $\varepsilon_i$  est nulle, et les paramètres  $\beta_{i,j}$  qui interviennent dans (4.2) sont uniques à une constante commune additive près ; les autres paramètres  $\beta_{i,j}$  sont par définition nuls. Une structure de Poisson  $\pi_{\mathbf{BI}^*}$  pour  $\mathbf{BI}^*(5)$  est alors donnée par

$$\{x_i, x_j\}_{\mathbf{BI}^*} = A_{i,j} x_i x_j + \beta_{i,j}, \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, 5,\tag{4.3}$$

où  $A$  est la  $A$ -matrice du système non déformé  $\mathbf{BI}(5)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction  $H_{\mathbf{BI}^*} : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$H_{\mathbf{BI}^*} := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \quad (4.4)$$

est un hamiltonien du champ de vecteurs (4.1) par rapport à la structure de Poisson déformée  $\pi_{\mathbf{BI}^*}$ , dont la matrice de Poisson est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1x_2 & x_1x_3 + \beta_{1,3} & -x_1x_4 - \beta_{4,1} & -x_1x_5 \\ -x_2x_1 & 0 & x_2x_3 & x_2x_4 + \beta_{2,4} & -x_2x_5 - \beta_{5,2} \\ -x_3x_1 - \beta_{1,3} & -x_3x_2 & 0 & x_3x_4 & x_3x_5 + \beta_{3,5} \\ x_4x_1 + \beta_{4,1} & -x_4x_2 - \beta_{2,4} & -x_4x_3 & 0 & x_4x_5 \\ x_5x_1 & x_5x_2 + \beta_{5,2} & -x_5x_3 - \beta_{3,5} & -x_5x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  étant de rang 4, la structure de Poisson déformée  $\pi_{\mathbf{BI}^*}$  est de rang 4, comme on peut aussi le vérifier directement en calculant le rang de sa matrice de Poisson en un point générique.

Afin de déterminer explicitement les intégrales premières de  $\mathbf{BI}^*(5)$  nous spécialisons ensuite l'équation de Lax (3.11) au cas  $n = 2k + 1 = 5$  :

$$(X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M)' = [X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M, B - \lambda M^3].$$

Les matrices  $X$ ,  $\Delta$ ,  $M$ ,  $B$  sont maintenant données par :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = - \begin{pmatrix} \beta_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{2,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{3,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{4,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{5,2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = - \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 + x_3 + x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 + x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_5 + x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 + x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de Lax de  $\mathbf{BI}^*(5)$  est donc explicitement écrit comme suit :

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_{1,3}}{\lambda} & \lambda & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{2,4}}{\lambda} & \lambda & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & -\frac{\beta_{3,5}}{\lambda} & \lambda & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & -\frac{\beta_{4,1}}{\lambda} & \lambda \\ \lambda & 0 & x_5 & 0 & -\frac{\beta_{5,2}}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $L(\lambda)$  peut s'écrire sous la forme

$$p_{L(\lambda)}(\mu) := \det(L(\lambda) - \mu \text{Id}) = P_0(\lambda, \mu, \beta) + H_1 \lambda^2 \mu^2 + H_2 \lambda \mu + H_3,$$

où  $P_0(\lambda, \mu, \beta)$  est un polynôme qui ne dépend pas des fonctions coordonnées  $x_i$ , et les polynômes  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  sont donnés par

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{i=1}^5 x_i, \\ H_2 &= \sum_{i=1}^5 x_{i-2} x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^5 (\beta_{i+1, i-2} + \beta_{i+2, i-1}) x_i, \\ H_3 &= \prod_{i=1}^5 x_i + \sum_{i=1}^5 \beta_{i-1, i+1} x_{i-2} x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^5 \beta_{i+1, i-2} \beta_{i+2, i-1} x_i. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les fonctions polynomiales  $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^5)$  sont des intégrales premières indépendantes en involution de  $\text{BI}^*(5)$ , ce qui confirme que  $\text{BI}^*(5)$  est intégrable au sens de Liouville. La fonction  $H_3$  est un Casimir pour  $\pi_{\text{BI}^*}$ , comme on peut vérifier par un calcul direct.

Lorsque l'on considère la fonction  $H_2$  comme hamiltonien, on a un deuxième champ de vecteurs compatible avec (4.1) ; il est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = \{x_i, H_2\}_{\text{BI}^*} &= x_{i-1} x_i x_{i+1} (x_{i+2} - x_{i-2}) + \\ &\quad \beta_{i-1, i+1} x_i (x_{i+2} - x_{i-2}) + \\ &\quad (\beta_{i+2, i-1} x_i x_{i+1} - \beta_{i+1, i-2} x_{i-1} x_i) + \\ &\quad (\beta_{i, i+2} - \beta_{i-2, i}) (x_{i-1} x_{i+1} + \beta_{i-1, i+1}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les intégrales premières  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  sont combinées en une seule application, l'application moment de  $\text{BI}^*(5)$ , définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \mathbb{C}^5 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ x &\mapsto \mathbf{H}(x) := (H_1(x), H_2(x), H_3(x)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Comme nous l'avons vu, le système intégrable  $\text{BI}(n)$  admet un groupe d'automorphismes, qui est dans le cas  $n = 5$  engendré par l'application linéaire  $\sigma : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ , définie pour  $(a_1, \dots, a_5) \in \mathbb{C}^5$  par

$$\sigma(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) := (a_2, a_3, a_4, a_5, a_1). \quad (4.8)$$

Or, à cause des paramètres  $\beta_{i,j}$ ,  $\sigma$  n'est pas un automorphisme de  $\text{BI}^*(5)$ . On peut toujours construire un tel automorphisme sur un espace plus large,  $\mathbb{C}^{10} = \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^5$ , où le premier facteur correspond à l'espace des phases de  $\text{BI}^*(5)$  et le deuxième aux paramètres  $\beta_{i,i+2}$ , avec  $i = 1, \dots, 5$ . Par un léger abus de notation, on notera les coordonnées naturelles sur  $\mathbb{C}^{10}$  par  $x_1, \dots, x_5, \beta_{1,3}, \dots, \beta_{5,2}$ . Une unique structure de Poisson  $\pi'_{\text{BI}^*}$  sur  $\mathbb{C}^{10}$  est définie par  $\{x_i, x_j\}'_{\text{BI}^*} = \{x_i, x_j\}_{\text{BI}^*}$ , pour  $1 \leq i, j \leq 5$  et en demandant que toutes les fonctions  $\beta_{i,i+2}$  soient des Casimir de  $\pi'_{\text{BI}^*}$ . L'automorphisme  $\sigma$  donne alors naissance à un morphisme  $\hat{\sigma} : \mathbb{C}^{10} \rightarrow \mathbb{C}^{10}$ , dont l'homomorphisme induit  $\hat{\sigma}^*$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{10})$  est défini par

$$\hat{\sigma}^* x_i := x_{i+1}, \quad \hat{\sigma}^* \beta_{i,i+2} = \beta_{i+1,i+3}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 5. \quad (4.9)$$

Pour  $i, j = 1, \dots, 5$ , on a alors

$$\begin{aligned} \{\hat{\sigma}^* x_i, \hat{\sigma}^* x_j\}_{\text{BI}^*} &= \{x_{i+1}, x_{j+1}\}_{\text{BI}^*} = A_{i+1,j+1} x_{i+1} x_{j+1} + \beta_{i+1,j+1} \\ &= A_{i,j} x_{i+1} x_{j+1} + \beta_{i+1,j+1} = \hat{\sigma}^*(A_{i,j} x_i x_j + \beta_{i,j}) \\ &= \hat{\sigma}^* \{x_i, x_j\}_{\text{BI}^*}. \end{aligned}$$

Ceci démontre que  $\hat{\sigma}$  est un automorphisme de Poisson de  $(\mathbb{C}^{10}, \pi_{\text{BI}^*})$  ; en étendant  $H_1$  trivialement à  $\mathbb{C}^{10}$ , c'est-à-dire  $H'_1 = x_1 + \dots + x_5$ , on a que  $\hat{\sigma}$  est un automorphisme du système hamiltonien (et intégrable)  $(\mathbb{C}^{10}, \pi'_{\text{BI}^*}, H'_1)$ . Afin d'alléger les notations, on écrira dans la suite  $\sigma, \pi_{\text{BI}^*}$  et  $H_1$  pour  $\hat{\sigma}, \pi'_{\text{BI}^*}$  et  $H'_1$ .

L'intérêt de cet espace des phases étendu est aussi que le système y est homogène à poids, ce qui rend les calculs ci-dessous réalisables. Le poids des variables  $x_i$  est 1, tandis que le poids des variables  $\beta_{i,j}$  est 2. Avec ce choix, les intégrales premières  $H_i$  sont pour  $i = 1, 2, 3$  homogènes à poids, de poids  $2i - 1$  (voir (4.5)). La structure de Poisson  $\pi_{\text{BI}^*}$  est aussi homogène à poids, de poids 2. Par conséquent, le champ de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  est également homogène à poids, de poids 2, ce qui est aussi clair d'après (4.1).

## 4.2 Comment prouver l'intégrabilité algébrique ?

Le cœur de ce manuscrit consiste à prouver que le système  $\text{BI}^*(5)$  est algébriquement intégrable. Comme on sait déjà que  $\text{BI}^*(5)$  est intégrable au sens de Liouville, cela veut dire que l'on doit démontrer que pour une valeur générique de  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$ , la fibre (que l'on appelle *fibre générique*)

$$\mathbf{H}_\kappa := \mathbf{H}^{-1}(\{\kappa\}) = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i(x) = \kappa_i\} \quad (4.10)$$

de l'application moment (4.7) est isomorphe à une partie affine d'une surface abélienne  $\mathbb{T}_\kappa^2$ , et que les champs de vecteurs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{H_1}$ ,  $\mathcal{X}_{H_2}$  et  $\mathcal{X}_{H_3}$  sont constants sur ce tore algébrique complexe. De plus, on veut le faire pour toutes les valeurs des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$ , et non seulement pour des valeurs génériques ; on n'imposera pour l'instant aucune contrainte sur ces paramètres, bien que l'on aura plus tard plusieurs cas à considérer. La méthode utilisée dans les sections suivantes utilise les balances principales du champ de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  pour démontrer que les conditions du théorème de Liouville complexe 2.3.7 sont satisfaites, ce qui permet de conclure.

Voyons d'abord lesquelles de ces conditions sont automatiquement satisfaites. Puisque les hamiltoniens  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  sont indépendants, et puisque  $\kappa$  est une valeur générique, le théorème de Sard dit que la variété  $\mathbf{H}_\kappa$  n'est pas singulière. De plus,  $H_3$  est un Casimir, et puisque  $H_1$  et  $H_2$  sont en involution, les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  et  $\mathcal{X}_{H_2}$  commutent ; ainsi, la condition (1) est vérifiée. On vérifie d'abord la condition (2) au cas où tous les  $\varepsilon_i$  sont nuls. On rappelle que dans ce cas le système est non déformé et est donc un système de Lotka-Volterra. En dehors des hyperplans  $x_i = 0$  on sait alors que le rang de la structure de Poisson est maximal (égal à 4) en tout point. La fibre générique de l'application moment a une intersection vide avec ces hyperplans, car  $H_3$  est nul sur ces hyperplans. Le rang est donc maximal en chaque point de la fibre générique (lisse)  $\mathbf{H}_\kappa$  ; la proposition 2.2.5 dit alors que  $\dim\langle\mathcal{X}_{F_1}(m), \mathcal{X}_{F_2}(m)\rangle = 4/2 = 2$  en tout point  $m$  de  $\mathbf{H}_\kappa$ . Les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  et  $\mathcal{X}_{H_2}$  sont donc indépendants. Au cas où les  $\varepsilon_i$  ne sont pas tous nuls, on utilise l'argument de déformation suivant : puisque les hamiltoniens dépendent de façon polynomiale, donc continue, des paramètres de déformation, ces champs sont indépendants pour *toutes* les valeurs des  $\varepsilon_i$  proches à zéro, les constantes  $\kappa$  étant toujours génériques. Or, les deux champs sont homogènes à poids et une homothétie nous permet de rendre les paramètres de déformation arbitrairement grands (les constantes  $\kappa$  seront aussi redimensionnées, mais restent génériques). Ainsi la condition (2) est aussi vérifiée.

Afin de vérifier les conditions restantes de ce théorème, l'étape suivante consiste à construire, pour une valeur générique de  $\kappa$ , un plongement  $\varphi_\kappa$  de  $\mathbf{H}_\kappa$  dans un espace projectif complexe  $\mathbb{P}^N$  ayant la propriété que la fermeture de  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$  soit une surface abélienne. Pour ce faire, on utilisera les balances principales du champ hamiltonien  $\mathcal{X}_{H_1}$ , pour construire des polynômes ayant au pire un pôle simple quand ces solutions y sont substituées ; si le système est a.c.i., telles fonctions définissent un plongement ayant la propriété souhaitée. De plus, toujours sous cette hypothèse, les équations des champs  $\mathcal{X}_{H_i}$  sur  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$  s'étendent à des champs de vecteurs quadratiques (dans toute carte) sur  $\mathbb{P}^N$  (voir [1, 2]). Ici on construira les équations différentielles quadratiques

(uniquement) pour  $\mathcal{X}_{H_1}$  en deux cartes affines différentes de  $\mathbb{P}^N$  ; ainsi nous aurons vérifié la condition (3) du théorème 2.3.7, car les champs de vecteurs quadratiques sont bien sûr holomorphes dans les deux cartes, puis en vertu du Lemme de Hartogs ces champs de vecteurs sont alors holomorphes sur tout  $\mathbb{P}^N$ .

En suivant la notation du théorème 2.3.7, nous vérifierons enfin que le flot du champ de vecteurs, mentionné dans le paragraphe précédent, qui part de n'importe quel point dans  $\Delta'$  va tout de suite dans  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ . Le théorème permettra alors de conclure que la fermeture projective  $\overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)}$  de  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$  est une variété abélienne et que les champs de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*\mathcal{X}_{H_1}$  et  $(\varphi_\kappa)_*\mathcal{X}_{H_2}$ , qui commutent, s'étendent à des champs de vecteurs holomorphes sur  $\overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)}$ .

Pour la justification de cette méthode, nous référons au chapitre 7 du livre [1].

### 4.3 Les solutions de Laurent du système **BI\***(5)

Comme expliqué ci-dessus, la première étape consiste à déterminer les solutions de Laurent de (4.1), notamment les balances principales, qui dépendent dans le cas présent de 4 paramètres libres (voir section 2.3.3). Il s'avère que dans le cas présent il suffira de considérer les solutions de Laurent homogènes à poids. Puisque le poids de chacune des variables  $x_i$  est de 1, cela veut dire que l'on recherche des solutions de Laurent de la forme

$$x_i(t) = \frac{1}{t} \sum_{j \geq 0} x_i^{(j)} t^j, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (4.11)$$

où  $x^{(0)} \neq 0$ . Pour  $t$  non nul et tel que  $|t|$  est suffisamment petit, de telles solutions de Laurent formelles sont automatiquement convergentes (voir [1, Théorème 7.25]). Notons qu'à priori il peut y exister d'autres solutions de Laurent, mais dans le cas présent les solutions de Laurent homogènes à poids suffiront pour la preuve du théorème. Comme on l'a déjà dit au début du chapitre, les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  sont dans cette section arbitraires.

Lorsque les séries (4.11) sont substituées dans les équations (4.1), les premiers coefficients des séries en question vérifient les *équations indicielles*, données par :

$$x_i^{(0)} \left( 1 + x_{i+1}^{(0)} + x_{i+2}^{(0)} - x_{i-1}^{(0)} - x_{i-2}^{(0)} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (4.12)$$

L'ensemble des solutions des équations indicielles est appelé le *lieu indiciel*. Il est contenu dans  $\mathbb{C}^5$ , mais pourtant il ne faut pas considérer le lieu indiciel comme étant contenu dans l'espace des phases.



On peut facilement résoudre (4.12) à la main. Si tous les coefficients  $x_i^{(0)}$  sont non nuls, alors les équations (4.12) deviennent

$$1 + x_{i+1}^{(0)} + x_{i+2}^{(0)} - x_{i-1}^{(0)} - x_{i-2}^{(0)} = 0,$$

dont la somme donne  $5 = 0$ , ce qui est une contradiction. Supposons que seulement deux des coefficients  $x_i^{(0)}$  sont nuls ; grâce à l'automorphisme  $\sigma$ , on peut supposer que  $x_1^{(0)} = 0$  et que soit  $x_2^{(0)} = 0$  ou  $x_3^{(0)} = 0$  ; dans les deux cas, en prenant la somme des équations linéaires restantes, on arrive à la même contradiction. De même, si un seul des coefficients  $x_i^{(0)}$  est non nul, on arrive à une contradiction : si seulement  $x_i^{(0)}$  est non nul, alors (4.12) devient  $x_i^{(0)}(1 + 0) = 0$ . Les coordonnées des points du lieu indiciel doivent donc avoir un seul zéro ou trois. Supposons qu'il y en ait un seul. Grâce à l'automorphisme  $\sigma$ , on peut supposer que  $x_3^{(0)} = 0$ . Le système d'équations (4.12) devient alors

$$\begin{aligned} 1 + x_2^{(0)} - x_4^{(0)} - x_5^{(0)} &= 0, \\ 1 + x_4^{(0)} - x_5^{(0)} - x_1^{(0)} &= 0, \\ 1 + x_5^{(0)} + x_1^{(0)} - x_2^{(0)} &= 0, \\ 1 + x_1^{(0)} + x_2^{(0)} - x_4^{(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Ce système est non dégénéré et sa solution unique est  $(-3, 1, 0, -1, 3)$ . Supposons maintenant qu'il y ait trois zéros dans ces coordonnées. S'ils sont consécutifs, on peut supposer grâce à l'automorphisme  $\sigma$  que  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$  ; sinon consécutifs, au cas où on peut supposer que  $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_5^{(0)} = 0$ . Le premier cas donne le point  $(0, 0, 0, 1, -1)$ , tandis que le deuxième cas donne le point  $(-1, 0, 0, 1, 0)$ .

En résumé, le lieu indiciel consiste des points  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_5^{(0)})$  suivants :

$$\begin{aligned} m_1 &:= (0, 0, 0, 1, -1), \\ m_2 &:= (-1, 0, 0, 1, 0), \\ m_3 &:= (-3, 1, 0, -1, 3), \end{aligned} \tag{4.13}$$

ainsi que les points obtenus par une permutation cyclique des coordonnées, ce qui donne au total 15 points. Il est en effet clair que l'automorphisme  $\sigma$  induit sur le lieu indiciel une bijection, toujours notée  $\sigma$ , et donnée par (4.8), où  $(a_1, \dots, a_5)$  est maintenant un point du lieu indiciel. Les points du lieu indiciel sont alors les 15 points de la forme  $\sigma^j m_i$  où  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 0, \dots, 4$ .

Pour chacun des points du lieu indiciel, les termes suivants des solutions de Laurent qui l'ont pour terme dominant peuvent être calculés de manière itérative comme la solution d'un système d'équations linéaires. La matrice sous-jacente au problème linéaire à l'étape  $k$  est  $\mathcal{K} - k\text{Id}$ , où  $\mathcal{K}$  est la matrice de Kowalevski, qui est dans le cas présent donnée par

$$\mathcal{K}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1^{(0)} & x_1^{(0)} & x_1^{(0)} & -x_1^{(0)} & -x_1^{(0)} \\ -x_2^{(0)} & \mathcal{K}_2^{(0)} & x_2^{(0)} & x_2^{(0)} & -x_2^{(0)} \\ -x_3^{(0)} & -x_3^{(0)} & \mathcal{K}_3^{(0)} & x_3^{(0)} & x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} & -x_4^{(0)} & -x_4^{(0)} & \mathcal{K}_4^{(0)} & x_4^{(0)} \\ x_5^{(0)} & x_5^{(0)} & -x_5^{(0)} & -x_5^{(0)} & \mathcal{K}_5^{(0)} \end{pmatrix},$$

où, pour  $i = 1, \dots, 5$ ,

$$\mathcal{K}_i^{(0)} = 1 + x_{i+1}^{(0)} + x_{i+2}^{(0)} - x_{i-2}^{(0)} - x_{i-1}^{(0)}.$$

En particulier, pour le point  $m_1 = (0, 0, 0, 1, -1)$  la matrice ci-dessus est spécialisée comme

$$\mathcal{K}(m_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice (4.14) est

$$\det(\mathcal{K}(m_1) - \lambda \text{Id}) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^3(\lambda - 3). \quad (4.15)$$

De même, la matrice de Kowalevski  $\mathcal{K}$  évaluée aux points  $m_2$  et  $m_3$  est, respectivement,

$$\mathcal{K}(m_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(m_3) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les polynômes caractéristiques des deux matrices ci-dessus sont, respectivement :

$$\det(\mathcal{K}(m_2) - \lambda \text{Id}) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2, \quad (4.16)$$

$$\det(\mathcal{K}(m_3) - \lambda \text{Id}) = -(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 5). \quad (4.17)$$

Comme nous l'avons vu, les balances principales doivent dépendre de 4 paramètres libres. Si à l'étape  $k$  la matrice  $\mathcal{K}(m) - k\text{Id}$  est non-singulière, ce qui est équivalent à dire que  $k$  n'est pas une racine du polynôme caractéristique de  $\mathcal{K}(m)$ , alors le  $k$ -ième terme des solutions de Laurent sera uniquement déterminé par les termes précédents et il n'y aura pas de nouveaux paramètres libres au niveau  $k$ . De même, si  $k$  est une valeur propre de multiplicité  $\ell$  de  $\mathcal{K}(m)$  alors il y aura à l'étape  $k$  au plus  $\ell$  nouveaux paramètres libres (indépendants). Le nombre de valeurs propres positives de la matrice  $\mathcal{K}(m)$  nous donne donc une borne supérieure pour le nombre de paramètres libres indépendants qui apparaissent dans une balance. En regardant les polynômes caractéristiques (4.15), (4.16) et (4.17), on voit alors que seulement le point  $m_1$  et ses permutations sous l'automorphisme  $\sigma$  peuvent éventuellement conduire à des balances principales. Pour montrer que c'est bien le cas on utilise un logiciel de calcul formel, qui calcule les premiers termes des solutions de Laurent. En vue de l'automorphisme  $\sigma$  il suffit de le faire pour le point  $m_1 = (0, 0, 0, 1, -1)$ . On trouve le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
x_1(t; m_1) &= a + \left( u_1^{(1)}(\alpha) + p_1^{(1)}(\varepsilon; \alpha) \right) t + \left( u_1^{(2)}(\alpha) + p_1^{(2)}(\varepsilon; \alpha) \right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
x_2(t; m_1) &= -\varepsilon_2 t + \left( u_2^{(2)}(\alpha) + p_2^{(2)}(\varepsilon; \alpha) \right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
x_3(t; m_1) &= b + \left( u_3^{(1)}(\alpha) + p_3^{(1)}(\varepsilon; \alpha) \right) t + \left( u_3^{(2)}(\alpha) + p_3^{(2)}(\varepsilon; \alpha) \right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
x_4(t; m_1) &= \frac{1}{t} + c + \left( u_4^{(1)}(\alpha) + p_4^{(1)}(\varepsilon; \alpha) \right) t + \left( u_4^{(2)}(\alpha) + p_4^{(2)}(\varepsilon; \alpha) \right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
x_5(t; m_1) &= -\frac{1}{t} + (b + c - a) + \left( u_5^{(1)}(\alpha) + p_5^{(1)}(\varepsilon; \alpha) \right) t + dt^2 + \mathcal{O}(t^3),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

où on rappelle que  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$  est le vecteur des paramètres de déformation et où  $\alpha := (a, b, c, d)$  est le vecteur des paramètres libres. Les coefficients des séries ci-dessus s'expriment en termes des polynômes donnés par

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)}(a, b, c, d) &:= a^2 - 2ac, \\
u_1^{(2)}(a, b, c, d) &:= a^3 - 2a^2b - 3a^2c + ab^2 + 2ac^2 + 2abc, \\
u_2^{(2)}(a, b, c, d) &:= -2a^3 + 3a^2b + 6a^2c - ab^2 - 4ac^2 - 4abc - 2d, \\
u_3^{(1)}(a, b, c, d) &:= b^2 - 2ab + 2bc, \\
u_3^{(2)}(a, b, c, d) &:= a^2b - ab^2 + b^2c + 2bc^2 - 2abc, \\
u_4^{(1)}(a, b, c, d) &:= \frac{1}{3} (4ab - 2b^2 + c^2 - 4bc), \\
u_4^{(2)}(a, b, c, d) &:= a^3 - 2a^2b - 3a^2c + ab^2 + 2ac^2 - b^2c - 2bc^2 + 4abc + d, \\
u_5^{(1)}(a, b, c, d) &:= \frac{1}{3} (-3a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 6ac - 2bc),
\end{aligned}$$

et par les polynômes suivants qui s'annulent quand tous les  $\varepsilon$  sont nuls :

$$\begin{aligned}
p_1^{(1)}(\varepsilon; \alpha) &:= \varepsilon_1, \\
p_1^{(2)}(\varepsilon; \alpha) &:= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) a - \varepsilon_1 c, \\
p_2^{(2)}(\varepsilon; \alpha) &:= -(2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) a + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) b + (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c, \\
p_3^{(1)}(\varepsilon; \alpha) &:= \varepsilon_3, \\
p_3^{(2)}(\varepsilon; \alpha) &:= -\varepsilon_3 a - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) b + \varepsilon_3 c, \\
p_4^{(1)}(\varepsilon; \alpha) &:= \frac{1}{3} (2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4), \\
p_4^{(2)}(\varepsilon; \alpha) &:= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) a - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) c, \\
p_5^{(1)}(\varepsilon; \alpha) &:= -\frac{1}{3} (2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_5).
\end{aligned}$$

Nous avons noté les 4 paramètres libres  $a, b, c, d$ . Les trois premiers apparaissent à l'étape 1 et le dernier à l'étape 4, conformément au fait que 1 est une racine triple du polynôme caractéristique de  $\mathcal{K}(m_1)$  tandis que 3 est une racine simple dudit polynôme. Comme 3 est la plus grande valeur propre de  $\mathcal{K}(m_1)$ , les termes suivants des solutions de Laurent existent et sont uniquement déterminées par les termes précédents. Ceci prouve que l'on a bien une balance principale.

Les autres quatre balances principales sont obtenues lorsque, dans les séries (4.18), on permute les coordonnées  $x_i$  et les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$ , en utilisant l'automorphisme  $\sigma$ . Précisément, on obtient les autres balances principales à partir de la balance principale  $x(t; m_1)$  en utilisant

$$x_{j+i}(t; \sigma^i m_1) = x_j(t; m_1), \quad \text{pour } i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 5.$$

On ne permute ou modifie pas les paramètres libres, mais il ne faut pas les considérer comme étant les mêmes, ou liés.

Notons que les polynômes qui figurent dans la balance principale ci-dessus sont homogènes à poids, lorsqu'à chaque paramètre libre on lui associe comme poids l'étape où il apparaît pour la première fois,

$$\begin{aligned}
\varpi(a) = \varpi(b) = \varpi(c) &= 1, \\
\varpi(d) &= 3.
\end{aligned}$$

Les polynômes  $u_i^{(j)}$  et  $p_i^{(j)}$  sont alors homogènes à poids de poids  $j+1$ , pour  $i = 1, \dots, 5$  et  $j \geq 1$  (on rappelle que le poids de chaque  $\varepsilon_i$  est 2). Notons aussi que chaque terme de la série  $x_i(t)$  est alors homogène à poids (et de poids 1) si on associe à  $t$  le poids  $-1$ .

Les points restants dans le lieu indicial  $\mathcal{I}$  mènent à des balances inférieures. En effet, du polynôme caractéristique (4.16),

$$\det(\mathcal{K}(m_2) - \lambda \text{Id}) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2,$$

nous n'allons avoir que 3 paramètres libres, notés  $a$ ,  $b$  et  $c$ , dont le premier apparaît à l'étape 1 et les autres deux apparaissent à l'étape 3. La balance inférieure qui se spécialise en  $m_2 = (-1, 0, 0, 1, 0)$  donne les solutions de Laurent  $x_i(t; m_2)$  suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(t; m_2) &= -\frac{1}{t} + a + \frac{1}{3} [-a^2 + (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)] t + \frac{1}{2} [-b - c - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)a] t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\ x_2(t; m_2) &= -\varepsilon_2 t + bt^2 + \mathcal{O}(t^3), \\ x_3(t; m_2) &= -\varepsilon_3 t + ct^2 + \mathcal{O}(t^3), \\ x_4(t; m_2) &= \frac{1}{t} + a + \frac{1}{3} [a^2 + (2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) + \varepsilon_4] t + \frac{1}{2} [-b - c + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)a] t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\ x_5(t; m_2) &= \frac{\varepsilon_5}{3} t + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned} \tag{4.19}$$

En utilisant l'automorphisme  $\sigma$  on trouve quatre autres balances inférieures, comme ci-dessus, avec

$$x_{j+i}(t; \sigma^i m_2) = x_j(t; m_2), \quad \text{pour } i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 5.$$

De même, à partir du polynôme caractéristique (4.17),

$$\det(\mathcal{K}(m_3) - \lambda \text{Id}) = -(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 5),$$

nous voyons que nous n'aurons que 3 paramètres libres, notés encore  $a$ ,  $b$  et  $c$ , dont le premier apparaît à l'étape 1, le deuxième à l'étape 2 et le dernier à l'étape 3. La balance inférieure qui se spécialise en  $m_3 = (-3, 1, 0, -1, 3)$  donne les solutions de Laurent  $x_i(t; m_3)$  suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(t; m_3) &= -\frac{3}{t} + \left( -\frac{2}{5}a^2 + w_1^{(1)}(\varepsilon; a) \right) t - bt^2 + \left( \frac{2}{525}a^4 - \frac{24}{35}ab + w_1^{(2)}(\varepsilon; a) \right) t^3 \\ &\quad + \left( -\frac{1}{3}a^2b - \frac{3}{2}c + w_1^{(4)}(\varepsilon; a, b) \right) t^4 + \mathcal{O}(t^5), \\ x_2(t; m_3) &= \frac{1}{t} + a + \left( \frac{1}{3}a^2 + w_2^{(1)}(\varepsilon; a) \right) t + bt^2 + \left( -\frac{1}{45}a^4 + \frac{4}{5}ab + w_2^{(3)}(\varepsilon; a) \right) t^3 \\ &\quad + \left( \frac{1}{3}a^2b + c + w_2^{(4)}(\varepsilon; a, b) \right) t^4 + \mathcal{O}(t^5), \\ x_3(t; m_3) &= -\frac{1}{3}\varepsilon_5 t + w_3^{(3)}(\varepsilon; a) t^3 + ct^4 + \mathcal{O}(t^5), \\ x_4(t; m_3) &= -\frac{1}{t} + a + \left( -\frac{1}{3}a^2 + w_4^{(1)}(\varepsilon; a) \right) t + \left( b + w_4^{(2)}(\varepsilon; a) \right) t^2 + \left( \frac{1}{45}a^4 - \frac{4}{5}ab + w_4^{(3)}(\varepsilon; a) \right) t^3 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{3}a^2b + c + w_4^{(4)}(\varepsilon; a, b) \right) t^4 + \mathcal{O}(t^5), \\
x_5(t; m_3) &= \frac{3}{t} + \left( \frac{2}{5}a^2 + w_5^{(1)}(\varepsilon; a) \right) t + \left( -b + w_5^{(2)}(\varepsilon; a) \right) t^2 + \left( -\frac{2}{525}a^4 + \frac{24}{35}ab + w_5^{(3)}(\varepsilon; a) \right) t^3 \\
& + \left( -\frac{1}{3}a^2b - \frac{3}{2}c + w_5^{(4)}(\varepsilon; a, b) \right) t^4 + \mathcal{O}(t^5),
\end{aligned}$$

où  $w_i^{(j)}$  sont des polynômes en les variables  $\varepsilon_i$  et  $a, b$  et  $c$ , qu'on ne détaille pas ici. On trouve à nouveau quatre autres balances inférieures en utilisant l'automorphisme  $\sigma$ ,

$$x_{j+i}(t; \sigma^i m_3) = x_j(t; m_3), \quad \text{pour } i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 5.$$

Le tableau suivant résume les informations décrites ci-dessus, où nous indiquons le terme dominant de chacune des solutions Laurent correspondant à chaque balance.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$m_1$	$a$	$-\varepsilon_2 t$	$b$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t}$
$\sigma m_1$	$-\frac{1}{t}$	$a$	$-\varepsilon_3 t$	$b$	$\frac{1}{t}$
$\sigma^2 m_1$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t}$	$a$	$-\varepsilon_4 t$	$b$
$\sigma^3 m_1$	$b$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t}$	$a$	$-\varepsilon_5 t$
$\sigma^4 m_1$	$-\varepsilon_1 t$	$b$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t}$	$a$
$m_2$	$-\frac{1}{t}$	$-\varepsilon_2 t$	$-\varepsilon_3 t$	$\frac{1}{t}$	$\frac{\varepsilon_5}{3} t$
$\sigma m_2$	$\frac{\varepsilon_1}{3} t$	$-\frac{1}{t}$	$-\varepsilon_3 t$	$-\varepsilon_4 t$	$\frac{1}{t}$
$\sigma^2 m_2$	$\frac{1}{t}$	$\frac{\varepsilon_2}{3} t$	$-\frac{1}{t}$	$-\varepsilon_4 t$	$-\varepsilon_5 t$
$\sigma^3 m_2$	$-\varepsilon_1 t$	$\frac{1}{t}$	$\frac{\varepsilon_3}{3} t$	$-\frac{1}{t}$	$-\varepsilon_5 t$
$\sigma^4 m_2$	$-\varepsilon_1 t$	$-\varepsilon_2 t$	$\frac{1}{t}$	$\frac{\varepsilon_4}{3} t$	$-\frac{1}{t}$

$m_3$	$-\frac{3}{t}$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{\varepsilon_3}{3}t$	$-\frac{1}{t}$	$\frac{3}{t}$
$\sigma m_3$	$\frac{3}{t}$	$-\frac{3}{t}$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{\varepsilon_4}{3}t$	$-\frac{1}{t}$
$\sigma^2 m_3$	$-\frac{1}{t}$	$\frac{3}{t}$	$-\frac{3}{t}$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{\varepsilon_5}{3}t$
$\sigma^3 m_3$	$-\frac{\varepsilon_1}{3}t$	$-\frac{1}{t}$	$\frac{3}{t}$	$-\frac{3}{t}$	$\frac{1}{t}$
$\sigma^4 m_3$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{\varepsilon_2}{3}t$	$-\frac{1}{t}$	$\frac{3}{t}$	$-\frac{3}{t}$

TABLE 4.1 – Les termes dominants de toutes les balances de BI\*(5).

## 4.4 Les diviseurs de Painlevé abstraits

Les premiers termes des balances principales, calculées dans la section précédente, nous permettent ensuite de déterminer et étudier les *diviseurs de Painlevé abstraits*. Ces composantes sont dans le cas de notre système les courbes affines, définies par les équations algébriques

$$\begin{aligned}
 H_1(x(t; \sigma^j m_1)) &= \kappa_1, \\
 H_2(x(t; \sigma^j m_1)) &= \kappa_2, \\
 H_3(x(t; \sigma^j m_1)) &= \kappa_3,
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

où  $j = 0, \dots, 4$  et où  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$  est une valeur générique de l'application moment (4.7). Les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  par contre sont toujours arbitraires. Nous calculons ici la courbe affine correspondant à  $j = 0$ , c'est-à-dire à la balance principale  $x(t; m_1)$ , que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned}
 x_1(t; m_1) &= a + \left(u_1^{(1)}(\alpha) + p_1^{(1)}(\varepsilon; \alpha)\right) t + \left(u_1^{(2)}(\alpha) + p_1^{(2)}(\varepsilon; \alpha)\right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
 x_2(t; m_1) &= -\varepsilon_2 t + \left(u_2^{(2)}(\alpha) + p_2^{(2)}(\varepsilon; \alpha)\right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
 x_3(t; m_1) &= b + \left(u_3^{(1)}(\alpha) + p_3^{(1)}(\varepsilon; \alpha)\right) t + \left(u_3^{(2)}(\alpha) + p_3^{(2)}(\varepsilon; \alpha)\right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
 x_4(t; m_1) &= \frac{1}{t} + c + \left(u_4^{(1)}(\alpha) + p_4^{(1)}(\varepsilon; \alpha)\right) t + \left(u_4^{(2)}(\alpha) + p_4^{(2)}(\varepsilon; \alpha)\right) t^2 + \mathcal{O}(t^3), \\
 x_5(t; m_1) &= -\frac{1}{t} + (b + c - a) + \left(u_5^{(1)}(\alpha) + p_5^{(1)}(\varepsilon; \alpha)\right) t + dt^2 + \mathcal{O}(t^3).
 \end{aligned}$$

Nous rappelons également les intégrales premières du système BI\*(5) :

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{i=1}^5 x_i, \\ H_2 &= \sum_{i=1}^5 x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^5 (\beta_{i+1,i-2} + \beta_{i+2,i-1}) x_i, \\ H_3 &= \prod_{i=1}^5 x_i + \sum_{i=1}^5 \beta_{i-1,i+1} x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^5 \beta_{i+1,i-2} \beta_{i+2,i-1} x_i. \end{aligned}$$

Les termes affichés ci-dessus suffisent pour faire le calcul, que nous avons fait à l'aide d'un logiciel de calcul. Les équations obtenues à partir de (4.21) sont respectivement données par

$$\begin{aligned} 2b + 2c &= \kappa_1, \\ 2a^3 - 4a^2b - 6a^2c + 2ab^2 + 6abc + 4ac^2 + 2[(\beta_{3,5} + \beta_{5,2}) - (\beta_{2,4} + \beta_{4,1})] a \\ &\quad + 2(\beta_{2,4} + \beta_{4,1})b + 2(\beta_{2,4} + \beta_{4,1})c + 2d = \kappa_2, \\ 2a^4b - 3a^3b^2 - 6a^3bc + a^2b^3 + 4a^2b^2c + 4a^2bc^2 + 2abd \\ &\quad + 2\beta_{1,3}a^3 + [(\beta_{3,5} + \beta_{5,2}) - 2(\beta_{2,4} + \beta_{4,1} + \beta_{1,3})] a^2b - 6\beta_{1,3}a^2c + (\beta_{2,4} + \beta_{4,1})ab^2 \\ &\quad + 2(\beta_{2,4} + \beta_{4,1} + \beta_{1,3})abc + 4\beta_{1,3}ac^2 + [\beta_{1,3}((\beta_{1,3} + \beta_{3,5} + \beta_{5,2}) - 2(\beta_{2,4} + \beta_{4,1}))] a \\ &\quad + [\beta_{1,3}((\beta_{2,4} + \beta_{4,1}) - \beta_{1,3}) + \beta_{2,4}\beta_{4,1}] b + 2\beta_{1,3}[(\beta_{2,4} + \beta_{4,1}) - \beta_{1,3}] c + 2\beta_{1,3}d = \kappa_3. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Supposons alors que  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$  soit une valeur générique de l'application moment (4.7). De la première équation dans (4.22), nous pouvons écrire  $c$  en termes de  $b$ . Nous substituons ensuite cette valeur de  $c$  dans la deuxième équation et puis nous résolvons pour  $d$  en termes de  $b$ . Enfin, lorsque cette valeur de  $d$  est substituée dans la troisième équation de la liste (4.22), nous trouvons une relation entre  $a$  et  $b$  qui inclut également les paramètres  $\beta_{i,j}$  et  $\kappa$ . Cette dernière relation décrit une courbe affine  $\Gamma_\kappa$  dans  $\mathbb{C}^2$ , à savoir :

$$\begin{aligned} \Gamma_\kappa : a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + \kappa_2 ab - (\beta_{1,3}^2\kappa_1 - \beta_{1,3}\kappa_2 + \kappa_3) + [2\beta_{1,3} - (\beta_{3,5} + \beta_{5,2})] a^2b \\ + (-2\beta_{1,3}\kappa_1 + \kappa_2) ab + (\beta_{1,3} - \beta_{3,5})(\beta_{1,3} - \beta_{5,2}) a + (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})(\beta_{1,3} - \beta_{2,4}) b \\ + [2\beta_{1,3} - (\beta_{2,4} + \beta_{4,1})] ab^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Soit  $F$  le polynôme défini par

$$\begin{aligned} F(a, b) := a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + p_{2,1}(\beta, \kappa) a^2b + p_{1,2}(\beta, \kappa) ab^2 \\ + p_{1,1}(\beta, \kappa) ab + p_{1,0}(\beta, \kappa) a + p_{0,1}(\beta, \kappa) b + p_{0,0}(\beta, \kappa), \end{aligned}$$



où les coefficients  $p_{i,j}(\beta, \kappa)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} p_{0,0}(\beta, \kappa) &:= -(\beta_{1,3}^2 \kappa_1 - \beta_{1,3} \kappa_2 + \kappa_3), \\ p_{0,1}(\beta, \kappa) &:= (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})(\beta_{1,3} - \beta_{2,4}), \\ p_{1,0}(\beta, \kappa) &:= (\beta_{1,3} - \beta_{3,5})(\beta_{1,3} - \beta_{5,2}), \\ p_{1,1}(\beta, \kappa) &:= -2\beta_{1,3} \kappa_1 + \kappa_2, \\ p_{1,2}(\beta, \kappa) &:= 2\beta_{1,3} - (\beta_{2,4} + \beta_{4,1}), \\ p_{2,1}(\beta, \kappa) &:= 2\beta_{1,3} - (\beta_{3,5} + \beta_{5,2}). \end{aligned}$$

Alors,  $\Gamma_\kappa = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b) = 0\}$ . Montrons que pour n'importe quelles valeurs des paramètres de déformation  $\beta_{i,i+2}$  et pour des valeurs génériques de  $\kappa$ , la courbe affine  $\Gamma_\kappa$  est lisse. On considère d'abord le cas où tous les  $\beta_{i,i+2}$  sont nuls. Alors  $\Gamma_\kappa$  admet un point singulier si et seulement si  $F$  et ses dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent simultanément en un point  $(a_0, b_0)$  :

$$F(a_0, b_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial a}(a_0, b_0) = \frac{\partial F}{\partial b}(a_0, b_0) = 0.$$

Le résultant de ces trois polynômes est donné par

$$-1024 \kappa_3^5 (16\kappa_1^5 \kappa_2^2 - 8\kappa_1^4 \kappa_2^2 \kappa_3 + \kappa_1^3 \kappa_2^4 - 500\kappa_1^2 \kappa_2 \kappa_3^2 + 225\kappa_1 \kappa_2^3 \kappa_3 - 27\kappa_2^5 + 3125\kappa_3^3); \quad (4.24)$$

il est non nul, et les fibres  $\mathbf{H}_\kappa$  sont donc non-singulières pour des valeurs génériques de  $\kappa$  (en effet, précisément pour les valeurs de  $\kappa$  pour lesquelles le résultant ci-dessus ne s'annule pas). Pour des valeurs arbitraires des paramètres de déformation  $\beta_{i,i+2}$  on utilise à nouveau l'argument de déformation déjà évoqué : d'abord, par continuité, le résultat reste vrai pour des valeurs de ces paramètres proches à zéro ; puis, puisque  $F$  est homogène à poids (de degré 5), on peut redimensionner les variables  $a, b$  et les paramètres afin d'obtenir le résultat pour toutes les valeurs des paramètres.

En faisant un changement de variable via la transformation birationnelle,

$$\begin{aligned} a &= a(u, v) := \frac{1}{2} \left[ \frac{v - (-\kappa_1 u^2 + p_{1,1}(\beta, \kappa)u + p_{0,0}(\beta, \kappa))}{u^2 + p_{2,1}(\beta, \kappa)u + p_{1,0}(\beta, \kappa)} \right], \\ b &= b(u, v) := -\frac{1}{2} \left[ \frac{v + (-\kappa_1 u^2 + p_{1,1}(\beta, \kappa)u + p_{0,0}(\beta, \kappa))}{u^2 + p_{1,2}(\beta, \kappa)u + p_{0,1}(\beta, \kappa)} \right], \end{aligned}$$

on trouve la forme de Weierstrass suivante, pour la courbe  $\Gamma_\kappa$  :

$$v^2 = -4u \left[ u^2 + p_{2,1}(\beta, \kappa)u + p_{1,0}(\beta, \kappa) \right] \left[ u^2 + p_{1,2}(\beta, \kappa)u + p_{0,1}(\beta, \kappa) \right] \\ + \left[ -\kappa_1 u^2 + p_{1,1}(\beta, \kappa)u + p_{0,0}(\beta, \kappa) \right]^2.$$

$\Gamma_\kappa$  est donc une courbe hyperelliptique lisse de genre 2. Les autres courbes de Painlevé abstraites, obtenues en utilisant les balances principales  $x(t; \sigma^j m_1)$ , avec  $j = 1, \dots, 4$ , sont calculées de la même façon, ou plus simplement on les obtient en utilisant l'automorphisme  $\sigma$  : la courbe sera donnée par les équations (4.22), auxquelles on applique l'automorphisme  $\sigma^j$ .

## 4.5 Un plongement de $\mathbf{H}_\kappa$ dans un espace projectif

Comme mentionné dans la deuxième section de ce chapitre, l'un des objectifs est de montrer que la fibre générique de l'application moment (4.7) est, à isomorphisme près, une partie affine d'une variété abélienne. Nous considérons dans cette section toujours des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  arbitraires et fixes, et  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$  est générique, donc  $\mathbf{H}_\kappa$  est une fibre générique (lisse) de l'application moment complexe ; nous espérons construire une application  $\varphi_\kappa$  de  $\mathbf{H}_\kappa$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}^N$  telle que la fermeture projective  $\overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)}$  de l'image de  $\varphi_\kappa$  soit une variété abélienne.

Afin de construire une telle application  $\varphi_\kappa: \mathbf{H}_\kappa \rightarrow \mathbb{P}^N$  nous allons commencer par la construction d'une application polynomiale  $\mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^N$  dont la restriction à la fibre générique  $\mathbf{H}_\kappa$  vérifie les propriétés de l'application de Kodaira associée à un fibré en droites très ample sur une variété abélienne (voir [2]). Par simplicité dans la notation, nous noterons aussi  $\varphi_\kappa$  cette application polynomiale. Nous utiliserons dans ce but les balances principales, déterminées dans la section 4.3.

Nous cherchons des polynômes, dans les variables  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , qui aient au plus un pôle simple lorsque n'importe quelle balance principale  $y$  est substituée. Autrement dit, nous avons décidé de travailler avec le vecteur de pôles  $\rho = (1, 1, 1, 1, 1)$ . La motivation de chercher tels polynômes est que si  $\text{BI}^*(5)$  est a.c.i., alors ces polynômes, restreints à une fibre générique  $\mathbf{H}_\kappa$  de  $\mathbf{H}$ , et vus comme fonctions méromorphes sur la surface abélienne qui complète  $\mathbf{H}_\kappa$ , auront un pôle simple au plus sur le diviseur ajouté [1, Prop. 6.14] ; ainsi, ces fonctions vont définir le plongement de Kodaira, associé à ce diviseur. Ces polynômes doivent être linéairement indépendants non seulement sur  $\mathbb{C}$  mais aussi sur l'algèbre des fonctions engendrée par les intégrales premières de  $\text{BI}^*(5)$ , car sinon ils seront dépendants sur  $\mathbf{H}_\kappa$ . Puisque le système est homogène à poids, chaque

composante homogène à poids d'un polynôme qui a au plus un pôle simple lorsque n'importe quelle balance principale  $y$  est substituée, aura la même propriété ; ainsi, dans la recherche de tels polynômes, on peut se restreindre à des polynômes homogènes à poids, ce qui rend la recherche de tels polynômes calculable.

Il est clair qu'il y a un seul tel polynôme de degré 0, c'est le polynôme constant 1, puis que les quatre monômes  $x_1, \dots, x_4$  sont aussi tels polynômes, indépendants ; on ne considère pas ici  $x_5$  qui est dépendant de ces monômes, via le hamiltonien  $H_1$ . À l'aide d'un logiciel de calcul, on trouve cinq polynômes indépendants de degré 2, quatre de degré 3, six de degré 4 et cinq de degré 5, pour en avoir au total vingt-cinq satisfaisant la propriété désirée. On les listera ci-dessous. Au degré 6 on ne trouve pas de nouvelles fonctions, ce qui suggère qu'il n'y en a pas non plus au degré supérieur. En effet, c'est un bon moment pour arrêter la recherche de telles fonctions, car si le système est a.c.i., ce que nous espérons toujours de démontrer, alors les cinq courbes de Painlevé que nous avons trouvées vont constituer le diviseur de Painlevé et induire une polarisation de type (5, 5) sur la surface abélienne ; il y aura alors précisément  $5 \times 5 = 25$  fonctions indépendantes qui auront un pôle au plus sur ce diviseur !

On donne maintenant les vingt-cinq polynômes indépendants trouvés. Comme indiqué, on trouve les cinq premiers sans calcul et on pose

$$\begin{aligned} z_0 &:= 1, \\ z_1 &:= x_1, \\ z_2 &:= x_2, \\ z_3 &:= x_3, \\ z_4 &:= x_4. \end{aligned}$$

Un polynôme homogène à poids de poids 2 général s'écrit alors sous la forme

$$p_2(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ j \geq i}} \alpha_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^5 \alpha_i \varepsilon_i.$$

On voit ici les  $\varepsilon_i$  comme des fonctions de Casimir, comme expliqué plus haut. Lorsque l'on substitue dans  $p_2(x)$  les premiers termes des balances principales, on trouve des conditions sur les coefficients du polynôme ci-dessus, afin de garantir que tel polynôme ait au plus un pôle simple. Plus précisément, lorsqu'une série  $x \left( t; m_1^{(j)} \right)$  y est remplacée, nous demandons que, pour  $j > 1$ , le coefficient de  $t^{-j}$  soit nul. Compte tenu également des intégrales premières, nous ne trouvons pour le polynôme  $p_2(x)$  que dix coefficients

libres, que l'on peut choisir comme

$$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,5} \quad \text{et}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 .$$

Pour que tels polynômes soient indépendants sur les intégrales premières, nous prenons  $\alpha_i = 0$ , pour  $i = 1, \dots, 5$ , car les  $\varepsilon_i$  sont des Casimir. Il reste donc les polynômes indépendants suivants :

$$z_5 := x_1 x_3 ,$$

$$z_6 := x_2 x_4 ,$$

$$z_7 := x_3 x_5 ,$$

$$z_8 := x_4 x_1 ,$$

$$z_9 := x_5 x_2 .$$

On peut facilement vérifier à la main que les dix fonctions  $z_i$ ,  $i = 0, \dots, 9$ , sont polynomialement indépendantes sur l'algèbre engendrée par  $H_1, H_2, H_3$  et les  $\varepsilon_i$ .

Nous continuons à utiliser la même stratégie pour trouver des polynômes de poids supérieur ayant les propriétés souhaitées. Nous précisons ci-dessous tels polynômes.

Polynômes homogènes à poids de poids 3 :

$$z_{10} := x_4 x_1 x_3 ,$$

$$z_{11} := x_5 x_2 x_4 ,$$

$$z_{12} := x_1 x_3 x_5 ,$$

$$z_{13} := x_2 x_4 x_1 .$$

Polynômes homogènes à poids de poids 4 :

$$z_{14} := x_4 x_1^2 x_3 ,$$

$$z_{15} := x_5 x_2^2 x_4 ,$$

$$z_{16} := x_1 x_3^2 x_5 ,$$

$$z_{17} := x_2 x_4^2 x_1 ,$$

$$z_{18} := x_3 x_5^2 x_2 ,$$

$$z_{19} := x_4 x_3 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \varepsilon_1) .$$

Polynômes homogènes à poids de poids 5 :

$$\begin{aligned}
z_{20} &:= x_4 x_1^3 x_3 + x_1^2 (\varepsilon_4 x_3 - \varepsilon_3 x_4) , \\
z_{21} &:= x_5 x_2^3 x_4 + x_2^2 (\varepsilon_5 x_4 - \varepsilon_4 x_5) , \\
z_{22} &:= x_1 x_3^3 x_5 + x_3^2 (\varepsilon_1 x_5 - \varepsilon_5 x_1) , \\
z_{23} &:= x_2 x_4^3 x_1 + x_4^2 (\varepsilon_2 x_1 - \varepsilon_1 x_4) , \\
z_{24} &:= x_3 x_5^3 x_2 + x_5^2 (\varepsilon_3 x_2 - \varepsilon_2 x_3) .
\end{aligned}$$

De façon concise, nous pouvons écrire ces vingt-cinq polynômes homogènes à poids, ayant au plus un pôle simple lorsque l'une balance principale y est substituée, comme suit :

$$\begin{aligned}
z_0 &:= 1 , \\
z_i &:= x_i , & i = 1, \dots, 4 , \\
z_{4+i} &:= x_i x_{i+2} , & i = 1, \dots, 5 , \\
z_{9+i} &:= x_{i-2} x_i x_{i+2} , & i = 1, \dots, 4 , \\
z_{13+i} &:= x_{i-2} x_i^2 x_{i+2} , & i = 1, \dots, 5 , \\
z_{19} &:= x_4 x_3 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \varepsilon_1) , \\
z_{19+i} &:= x_{i-2} x_i^3 x_{i+2} + x_i^2 (\varepsilon_{i-2} x_{i+2} - \varepsilon_{i+2} x_{i-2}) , & i = 1, \dots, 5 .
\end{aligned}$$

Avec un logiciel de calcul formel, on montre que les vingt-cinq fonctions polynomiales précédentes sont polynomialement indépendantes sur l'algèbre engendrée par  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  et les  $\varepsilon_i$ . Ces polynômes, restreints à une fibre générique  $\mathbf{H}_\kappa$  de l'application moment complexe, seront alors linéairement indépendants.

Ci-dessous, nous donnons le terme dominant des fonctions  $z_0, z_1, \dots, z_{24}$ , lorsque la balance principale (4.18),  $x_i(t; m_1)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , y est substituée :

$$\begin{aligned}
z_0(t) &= 1, \\
z_1(t) &= x_1 = a + \mathcal{O}(t), \\
z_2(t) &= x_2 = -\varepsilon_2 t + \mathcal{O}(t^2), \\
z_3(t) &= x_3 = b + \mathcal{O}(t), \\
z_4(t) &= x_4 = \frac{1}{t} + c + \mathcal{O}(t), \\
z_5(t) &= x_1 x_3 = ab + \mathcal{O}(t), \\
z_6(t) &= x_2 x_4 = -\varepsilon_2 + \mathcal{O}(t), \\
z_7(t) &= x_3 x_5 = -\frac{b}{t} + \mathcal{O}(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_8(t) &= x_4x_1 = \frac{a}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_9(t) &= x_5x_2 = \varepsilon_2 + \mathcal{O}(t), \\
z_{10}(t) &= x_4x_1x_3 = \frac{ab}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{11}(t) &= x_5x_2x_4 = \frac{\varepsilon_2}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{12}(t) &= x_1x_3x_5 = -\frac{ab}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{13}(t) &= x_2x_4x_1 = -\varepsilon_2a + \mathcal{O}(t), \\
z_{14}(t) &= x_4x_1^2x_3 = \frac{a^2b}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{15}(t) &= x_5x_2^2x_4 = -\varepsilon_2^2 + \mathcal{O}(t), \\
z_{16}(t) &= x_1x_3^2x_5 = -\frac{ab^2}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{17}(t) &= x_2x_4^2x_1 = -\frac{\varepsilon_2a}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{18}(t) &= x_3x_5^2x_2 = -\frac{\varepsilon_2b}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{19}(t) &= x_4x_1x_3(x_2 + x_3) + \varepsilon_1x_4x_3 = \frac{1}{t}(ab^2 + \varepsilon_1b) + \mathcal{O}(1), \\
z_{20}(t) &= x_4x_1^3x_3 + x_1^2(\varepsilon_4x_3 - \varepsilon_3x_4) = \frac{1}{t}(a^3b - \varepsilon_3a^2) + \mathcal{O}(1), \\
z_{21}(t) &= x_5x_2^3x_4 + x_2^2(\varepsilon_5x_4 - \varepsilon_4x_5) = v_{21}^{(1)}(\varepsilon; \alpha)t + \mathcal{O}(t^2), \\
z_{22}(t) &= x_1x_3^3x_5 + x_3^2(\varepsilon_1x_5 - \varepsilon_5x_1) = \frac{1}{t}(-ab^3 - \varepsilon_1b^2) + \mathcal{O}(1), \\
z_{23}(t) &= x_2x_4^3x_1 + x_4^2(\varepsilon_2x_1 - \varepsilon_1x_2) = \left(q_{23}^{(-1)}(\alpha) + v_{23}^{(-1)}(\varepsilon; \alpha)\right) \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1), \\
z_{24}(t) &= x_3x_5^3x_2 + x_5^2(\varepsilon_3x_2 - \varepsilon_2x_3) = \left(q_{24}^{(-1)}(\alpha) + v_{24}^{(-1)}(\varepsilon; \alpha)\right) \frac{1}{t} + \mathcal{O}(1),
\end{aligned}$$

où  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ ,  $\alpha = (a, b, c, d)$  est le vecteur des paramètres libres, et  $q_i^j$  et  $v_i^j$  sont des polynômes non nuls qui apparaissent dans le coefficient d'ordre  $j$  de la série  $z_i$ . Les polynômes  $q_i^j$  ne dépendent que de  $\alpha$  et les polynômes  $v_i^j$  sont tels que  $v_i^j(0; \alpha) = 0$ . Explicitement,

$$\begin{aligned}
v_{21}^{(1)}(\varepsilon; \alpha) &:= \varepsilon_2^2(\varepsilon_5 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4), \\
q_{23}^{(-1)}(\alpha) &:= -2a^4 + 3a^3b + 6a^3c - a^2b^2 - 4a^2bc - 4a^2c^2 - 2ad, \\
v_{23}^{(-1)}(\varepsilon; \alpha) &:= (-2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)a^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)ab + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)ac + \varepsilon_1\varepsilon_2, \\
q_{24}^{(-1)}(\alpha) &:= 2a^3b - 3a^2b^2 - 6a^2bc + ab^3 + 4ab^2c + 4abc^2 + 2bd, \\
v_{24}^{(-1)}(\varepsilon; \alpha) &:= -\varepsilon_1b^2 - 2\varepsilon_1bc + (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3)ab - \varepsilon_2\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Le tableau suivant, qui est construit ligne par ligne de manière récursive, indique le nombre de polynômes homogènes à poids indépendants que nous avons trouvés à chaque étape. Dans l'étape  $k$  nous indiquons tels polynômes de poids  $k$ . Ce tableau montre également l'étape à laquelle aucun nouveau polynôme n'est trouvé.

$k$	$\dim(\mathcal{F}^k)$	$\dim(\mathcal{H}^k)$	$\dim(\mathcal{Z}_\rho^k)$	$\#_k$ dep	$\zeta_k$	Fonctions indépendantes
0	1	1	1	0	1	$z_0$
1	5	1	5	1	4	$z_1, z_2, z_3, z_4$
2	20	6	15	10	5	$z_5, z_6, z_7, z_8, z_9$
3	60	7	40	36	4	$z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}$
4	160	22	90	84	6	$z_{14}, z_{15}, z_{16}, z_{17}, z_{18}, z_{19}$
5	376	28	186	181	5	$z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}$
6	820	64	355	355	0	-

TABLE 4.2 – Les polynômes homogènes à poids indépendants qui ont au plus un pôle simple lorsque chacune des balances principales  $y$  est substituée.

Nous expliquons ci-dessous la notation utilisée dans le tableau 4.5.

1.  $\dim(\mathcal{F}^k)$  indique le nombre de monômes homogènes de poids  $k$  en  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  et  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ . Ceci est calculé comme le coefficient de  $t^k$  dans la série

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \dim(\mathcal{F}^k) t^k &= \frac{1}{(1-t)^5(1-t^2)^5} \\ &= 1 + 5t + 20t^2 + 60t^3 + 160t^4 + 376t^5 + 820t^6 + \mathcal{O}(t^7). \end{aligned}$$

2.  $\dim(\mathcal{H}^k)$  est le nombre d'intégrales premières linéairement indépendantes de poids  $k$ . Puisque l'on a cinq intégrales premières de poids 2, une de poids 1, une de poids 3 et une autre de poids 5, cette valeur est le coefficient de  $t^k$  dans la série

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \dim(\mathcal{H}^k) t^k &= \frac{1}{(1-t)(1-t^2)^5(1-t^3)(1-t^5)} \\ &= 1 + t + 6t^2 + 7t^3 + 22t^4 + 28t^5 + 64t^6 + \mathcal{O}(t^7). \end{aligned}$$

3.  $\dim(\mathcal{Z}_\rho^k)$  indique le nombre de polynômes linéairement indépendants qui ont au plus un pôle simple lorsque l'une des séries  $x(t; m_1^{(j)})$   $y$  est substituée. Pour des polynômes de poids supérieur à 2, nous avons utilisé un logiciel de calcul formel.

4.  $\#_k \text{dep}$  est le nombre d'éléments dans  $\mathcal{Z}_\rho^k$  qui dépendent des précédents (dans  $\mathcal{Z}_\rho^j$ , pour  $j = 0, \dots, k-1$ ) sur l'algèbre engendrée par les intégrales premières. Ceci est calculé en utilisant la formule

$$\#_k \text{dep} = \sum_{j=0}^{k-1} \zeta_j \dim(\mathcal{H}^{k-j}).$$

5.  $\zeta_k$  est le nombre de nouveaux polynômes homogènes indépendants de degré  $k$ . Il est calculé comme la différence des deux colonnes précédentes :

$$\zeta_k = \dim(\mathcal{Z}_\rho^k) - \#_k \text{dep}.$$

6. Dans la dernière colonne, nous présentons notre choix de ces nouvelles fonctions polynomiales.

À titre d'exemple, nous montrons comment remplir la ligne du tableau (4.5) qui correspond à  $k = 2$  :

$k$	$\dim(\mathcal{F}^k)$	$\dim(\mathcal{H}^k)$	$\dim(\mathcal{Z}_\rho^k)$	$\#_k \text{dep}$	$\zeta_k$
2	20	6	15	10	5

En effet,

- ◇  $\dim(\mathcal{F}^2) = 20$ , car une base de  $\mathcal{F}^2$  est donnée par  $x_i x_j$ , avec  $1 \leq i \leq j \leq 5$  et  $\varepsilon_\ell$  avec  $\ell = 1, \dots, 5$ .
- ◇  $\dim(\mathcal{H}^2) = 6$ , car une base de  $\mathcal{H}^2$  est donnée par  $H_1^2$  et  $\varepsilon_\ell$  avec  $\ell = 1, \dots, 5$ .
- ◇ On a  $\dim(\mathcal{H}^0) = 1$ ,  $\dim(\mathcal{H}^1) = 1$ ,  $\dim(\mathcal{H}^2) = 6$ ,  $\zeta_0 = 1$  et  $\zeta_1 = 4$ . En conséquence,

$$\#_2 \text{dep} = \sum_{j=0}^1 \zeta_j \dim(\mathcal{H}^{2-j}) = \zeta_0 \dim(\mathcal{H}^2) + \zeta_1 \dim(\mathcal{H}^1) = (1)(6) + (4)(1) = 10.$$

- ◇ D'autre part, la forme générale d'un polynôme homogène à poids de degré 2 est

$$p_2(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ j \geq i}} \alpha_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^5 \alpha_i \varepsilon_i.$$

Il est clair d'après la première partie du tableau 4.3 que, lorsque l'on substitue les balances principales dans  $p_2$ , les séries obtenues ont au plus un pôle simple, on trouve comme seule relation sur les  $\alpha_{i,j}$  et  $\alpha_\ell$ , que  $\alpha_{i,i} = 0$  pour  $i = 1, \dots, 5$ . Cela implique que  $\dim(\mathcal{Z}_\rho^2) = 20 - 5 = 15$ .



◇ Finalement,  $\zeta_2 = \dim(\mathcal{Z}_\rho^2) - \#_2 \text{dep} = 15 - 10 = 5$ .

D'autre côté, montrons qu'à l'étape 6 il n'y aura pas de nouvelles fonctions polynomiales indépendantes.

$k$	$\dim(\mathcal{F}^k)$	$\dim(\mathcal{H}^k)$	$\dim(\mathcal{Z}_\rho^k)$	$\#_k \text{dep}$	$\zeta_k$
6	820	64	355	355	0

En effet, d'une part,

$$\#_6 \text{dep} = \sum_{j=0}^5 \zeta_j \dim(\mathcal{H}^{6-j}) = (1)(64) + (4)(28) + (5)(22) + (4)(7) + (6)(6) + (5)(1) = 355.$$

D'autre part, un polynôme homogène à poids général de poids 6 s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} p_6(x) = & \sum_{I=(i_1, \dots, i_6)} \gamma_I^{(1)} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6} + \sum_{j, I=(i_1, \dots, i_4)} \gamma_{I,j}^{(2)} \varepsilon_j x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \\ & + \sum_{I=(i_1, i_2), J=(j_1, j_2)} \gamma_{I,J}^{(3)} \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} x_{i_1} x_{i_2} + \sum_{J=(j_1, j_2, j_3)} \gamma_J^{(4)} \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} \varepsilon_{j_3}. \end{aligned}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on trouve en utilisant ce polynôme général et les balances principales, comme ci-dessus, que  $\dim(\mathcal{Z}_\rho^2) = 355$ . Par conséquent, le nombre de nouvelles fonctions polynomiales indépendantes qui apparaissent à l'étape 6 est

$$\zeta_6 = \dim(\mathcal{Z}_\rho^6) - \#_6 \text{dep} = 355 - 355 = 0.$$

Revenons à la construction de l'application polynomiale  $\varphi_\kappa$ . En utilisant les vingt-cinq fonctions polynomiales trouvées dans cette section, nous définissons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa : \mathbf{H}_\kappa & \rightarrow \mathbb{P}^{24} \\ x & \mapsto \varphi_\kappa(x) := (z_0(x) : z_1(x) : \dots : z_{24}(x)). \end{aligned} \quad (4.25)$$

En regardant les cinq premiers composants de cette application, il est clair que  $\varphi_\kappa$  est un plongement de la variété affine lisse  $\mathbf{H}_\kappa$ .

Ce plongement conduit à cinq plongements des diviseurs de Painlevé abstraits dans  $\mathbb{P}^{24}$ . En effet, pour  $i = 1, \dots, 5$ , notons  $\Gamma_\kappa^{(i)}$  la courbe de Painlevé abstraite correspondante à  $m_1^{(i)}$ ; alors (4.25) donne l'application régulière injective

$$\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \rightarrow \mathbb{P}^{24}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 5, \quad (4.26)$$

lorsque l'on substitue la balance principale  $x(t; m_1^{(i)})$  dans chacune des fonctions  $z_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 24$ , et puis on y fait tendre  $t \rightarrow 0$  :

$$\varphi_\kappa^{(i)} : (a, b) \mapsto \left( \text{Res } z_0(x(t; m_1^{(i)})) : \dots : \text{Res } z_{24}(x(t; m_1^{(i)})) \right).$$

Plus précisément, ces applications sont décrites comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa^{(1)} : (a, b) \mapsto & (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : -b : a : 0 : ab : \beta_{2,4} - \beta_{5,2} : -ab : 0 : a^2b : 0 : -ab^2 : \\ & -(\beta_{2,4} - \beta_{5,2})a : -(\beta_{2,4} - \beta_{5,2})b : ab^2 + (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})b : a^3b + (\beta_{1,3} - \beta_{3,5})a^2 : \\ & 0 : -ab^3 - (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})b^2, -a^3b - a^2b^2 + \kappa_1a^2b + (\beta_{3,5} - \beta_{1,3})a^2 - \kappa_2a \\ & + (\beta_{1,3} + \beta_{5,2})\kappa_1a + (-\beta_{1,3} + \beta_{2,4} + \beta_{4,1} - \beta_{5,2})ab + (\beta_{2,4} - \beta_{5,2})(\beta_{1,3} - \beta_{4,1}) : \\ & a^2b^2 + ab^3 - \kappa_1ab^2 + (\beta_{1,3} + \beta_{2,4} - \beta_{3,5} - \beta_{5,2})ab + (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})b^2 \\ & - (\beta_{1,3} + \beta_{2,4})\kappa_1b + \kappa_2b + (\beta_{2,4} - \beta_{5,2})(\beta_{1,3} - \beta_{3,5}), \\ \varphi_\kappa^{(2)} : (a, b) \mapsto & (0 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -b : a : 0 : ab : \beta_{3,5} - \beta_{1,3} : -ab : (\beta_{1,3} - \beta_{3,5})b : \\ & a^2b : 0 : -ab^2 : (\beta_{1,3} - \beta_{3,5})a : 0 : a^2b^2 - \kappa_1ab^2 + ab^3 + (\beta_{2,4} - \beta_{5,2})b^2 + \kappa_2b \\ & + (-\beta_{1,3} + \beta_{2,4} + \beta_{3,5} - \beta_{4,1})ab - (\beta_{2,4} + \beta_{3,5})\kappa_1b - (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})(\beta_{3,5} - \beta_{1,3}) : \\ & a^3b - (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})a^2 : 0 : -ab^3 - (\beta_{2,4} - \beta_{5,2})b^2, -a^3b - a^2b^2 + \kappa_1a^2b - \kappa_2a \\ & + (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})a^2 + (\beta_{1,3} + \beta_{2,4})\kappa_1a - (\beta_{2,4} + \beta_{5,2})(\beta_{3,5} - \beta_{1,3}) \\ & + (\beta_{3,5} - \beta_{1,3} + \beta_{5,2} - \beta_{2,4})ab), \\ \varphi_\kappa^{(3)} : (a, b) \mapsto & (0 : 1 : -1 : 0 : 0 : a : 0 : 0 : 0 : -b : 0 : 0 : ab : \beta_{4,1} - \beta_{2,4} : -(\beta_{4,1} - \beta_{2,4})a : \\ & -(\beta_{4,1} - \beta_{2,4})b : a^2b : 0 : -ab^2 : (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})a : -a^3b - a^2b^2 + (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})a^2 \\ & + \kappa_1a^2b - \kappa_2a + (\beta_{2,4} + \beta_{3,5})\kappa_1a + (\beta_{1,3} - \beta_{2,4} - \beta_{3,5} + \beta_{4,1})ab \\ & + (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})(\beta_{3,5} - \beta_{1,3}) : a^2b^2 + ab^3 - \kappa_1ab^2 + (-\beta_{2,4} + \beta_{3,5} + \beta_{4,1} - \beta_{5,2})ab \\ & + (\beta_{3,5} - \beta_{1,3})b^2 - (\beta_{3,5} + \beta_{4,1})\kappa_1b + \kappa_2b - (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})(\beta_{4,1} - \beta_{2,4}) : a^3b \\ & - (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})a^2 : 0 : -ab^3 - (\beta_{3,5} - \beta_{1,3})b^2), \\ \varphi_\kappa^{(4)} : (a, b) \mapsto & (0 : 0 : 1 : -1 : 0 : -b : a : 0 : 0 : 0 : -ab : 0 : 0 : ab : -ab^2 : -(\beta_{5,2} - \beta_{3,5})a : \\ & -(\beta_{5,2} - \beta_{3,5})b : a^2b : 0 : a^2b + ab^2 - \kappa_1ab - (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})a : -ab^3 \\ & - (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})b^2 : -a^3b - a^2b^2 + \kappa_1a^2b + (\beta_{2,4} - \beta_{3,5} - \beta_{4,1} + \beta_{5,2})ab \\ & + (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})a^2 - \kappa_2a + (\beta_{3,5} + \beta_{4,1})\kappa_1a + (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})(\beta_{4,1} - \beta_{2,4}) : a^2b^2 + ab^3 \\ & - \kappa_1ab^2 + (\beta_{4,1} - \beta_{2,4})b^2 + (\beta_{4,1} - \beta_{1,3} + \beta_{5,2} - \beta_{3,5})ab - (\beta_{4,1} + \beta_{5,2})\kappa_1b + \kappa_2b \\ & - (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})(\beta_{1,3} - \beta_{4,1}) : a^3b - (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})a^2 : 0), \\ \varphi_\kappa^{(5)} : (a, b) \mapsto & (0 : 0 : 0 : 1 : -1 : 0 : -b : a : 0 : 0 : \beta_{1,3} - \beta_{4,1} : -ab : 0 : 0 : 0 : -ab^2 : \\ & -(\beta_{1,3} - \beta_{4,1})a : -(\beta_{1,3} - \beta_{4,1})b : a^2b : a^2b + ab^2 - (\beta_{2,4} - \beta_{5,2})a - (\beta_{4,1} + \beta_{5,2})\kappa_1 \\ & + (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})b - \kappa_1ab + \kappa_2 : 0 : -ab^3 - (\beta_{5,2} - \beta_{3,5})b^2 : -a^3b - a^2b^2 + \kappa_1a^2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\beta_{2,4} - \beta_{5,2})a^2 - \kappa_2 a + (\beta_{4,1} + \beta_{5,2})\kappa_1 a + (\beta_{1,3} + \beta_{3,5} - \beta_{4,1} - \beta_{5,2})ab + (\beta_{5,2} \\
& - \beta_{3,5})(\beta_{1,3} - \beta_{4,1}) : a^2 b^2 + ab^3 + (\beta_{1,3} - \beta_{2,4} - \beta_{4,1} + \beta_{5,2})ab - \kappa_1 ab^2 \\
& +(\beta_{5,2} - \beta_{3,5})b^2 - (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})(\beta_{2,4} - \beta_{5,2})v - (\beta_{1,3} + \beta_{5,2})\kappa_1 b + \kappa_2 b : \\
& a^3 b - (\beta_{2,4} - \beta_{5,2})a^2 .
\end{aligned}$$

Lorsque l'on prend  $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$  et que l'on se concentre sur les premières coordonnées des applications  $\varphi_\kappa^{(i)}$ , on se rend compte que ces applications sont injectives et que leurs images sont deux-à-deux disjointes. En conclusion, pour une valeur générique de  $\kappa$ , les applications (4.26) donnent un plongement du diviseur de Painlevé abstrait dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{24}$ .

Pour  $i = 1, \dots, 5$ , nous notons  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  la fermeture de l'image de  $\Gamma_\kappa^{(i)}$  sous l'application (4.26) :

$$\mathcal{D}_\kappa^{(i)} := \overline{\varphi_\kappa^{(i)} \left( \Gamma_\kappa^{(i)} \right)} .$$

Comme on le verra plus tard, les courbes projectives  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  se coupent deux-à-deux et sont parfois même tangentes. Si jusqu'à présent tous les résultats obtenus sont valables pour toutes les valeurs des paramètres de déformation, la façon à laquelle ces courbes se coupent dépendra fortement de la valeur de ces paramètres.

## 4.6 Extension holomorphe de $\mathcal{X}_{H_1}$ à $\mathbb{P}^{24}$

Nous allons dans cette section vérifier le point (3) du Théorème de Liouville complexe. On montrera en effet un résultat plus fort, qui dit que le champ de vecteur  $(\varphi_\kappa)_* \mathcal{X}_{H_1}$  s'étend en un champ vectoriel holomorphe sur  $\mathbb{P}^{24}$ . Si le système BI\*(5) est a.c.i., ceci doit être possible, eu égard à la proposition suivante qui établit qu'en termes de toute carte affine d'un espace projectif, un champ vectoriel holomorphe sur une variété abélienne est un champ vectoriel quadratique, et en conséquence il est globalement défini et holomorphe sur tout l'espace projectif en question :

**Proposition 4.6.1** ([1, 18]). Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur une variété abélienne irréductible  $\mathbb{T}^r$  et soit  $\chi$  un champ vectoriel holomorphe sur cette variété. Notons  $\psi: \mathbb{T}^r \rightarrow \mathbb{P}^N$  l'application de Kodaira associée à  $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ . Alors il existe un champ vectoriel quadratique  $\bar{\chi}$  sur  $\mathbb{P}^N$ , tel que  $\psi_*(\chi) = \bar{\chi}$ .

L'idée est donc de démontrer que  $(\varphi_\kappa)_* \mathcal{X}_{H_1}$  s'étend en un champ vectoriel quadratique. On rappelle que  $\mathcal{X}_{H_1}$  est un champ vectoriel holomorphe sur  $\mathbf{H}_\kappa$  où  $\kappa$  est générique, et que les paramètres de déformation sont toujours supposés fixes mais arbitraires.

Notons  $U_j$  l'ouvert de  $\mathbb{P}^{24}$  dont la coordonnée  $z_j$  n'est pas nulle ; alors les fonctions  $z_i/z_j$ ,  $i = 0, \dots, 24$ , définissent un système de coordonnées locales sur cette carte. Pour montrer que  $\mathcal{X}_{H_1}$  peut être prolongé en un champ vectoriel holomorphe sur un voisinage dans  $\mathbb{P}^{24}$  des hypersurfaces de  $\overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)} \setminus \varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ , il suffit d'écrire les équations différentielles de  $\mathcal{X}_{H_1}$  comme un polynôme quadratique en termes des quotients  $z_i/z_j$ .

Nous commençons par écrire ces équations différentielles quadratiques sur un premier ouvert, qui est celui dans lequel nous pouvons prendre les variables  $z_i$  comme coordonnées ; c'est l'ouvert  $U_0$ . Sur cet ouvert, les équations différentielles s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0 &= 0, \\
\dot{z}_1 &= z_1 (-\kappa_1 z_0 + z_1 + 2z_2 + 2z_3) + \varepsilon_1 z_0^2, \\
\dot{z}_2 &= z_2 (-\kappa_1 z_0 + z_2 + 2z_3 + 2z_4) + \varepsilon_2 z_0^2, \\
\dot{z}_3 &= z_3 (\kappa_1 z_0 - 2z_1 - 2z_2 - z_3) + \varepsilon_3 z_0^2, \\
\dot{z}_4 &= z_4 (\kappa_1 z_0 - 2z_2 - 2z_3 - z_4) + \varepsilon_4 z_0^2, \\
\dot{z}_5 &= z_5 (-z_1 + z_3) + \varepsilon_1 z_0 z_3 + \varepsilon_3 z_0 z_1, \\
\dot{z}_6 &= z_6 (-z_2 + z_4) + \varepsilon_2 z_0 z_4 + \varepsilon_4 z_0 z_2, \\
\dot{z}_7 &= z_7 (\kappa_1 z_0 - z_1 - z_2 - 2z_3 - z_4) + \varepsilon_3 z_0 (\kappa_1 z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4) + \varepsilon_5 z_0 z_3, \\
\dot{z}_8 &= z_8 (-z_4 + z_1) + \varepsilon_1 z_0 z_4 + \varepsilon_4 z_0 z_1, \\
\dot{z}_9 &= z_9 (-\kappa_1 z_0 + z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4) + \varepsilon_2 z_0 (\kappa_1 z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4) + \varepsilon_5 z_0 z_2, \\
\dot{z}_{10} &= z_{10} (\kappa_1 z_0 - z_1 - 2z_2 - z_3 - z_4) + \varepsilon_1 z_3 z_4 + \varepsilon_3 z_4 z_1 + \varepsilon_4 z_1 z_3, \\
\dot{z}_{11} &= z_{11} (z_1 - z_3) + (\varepsilon_2 z_4 + \varepsilon_4 z_2) (\kappa_1 z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4) + \varepsilon_5 z_2 z_4, \\
\dot{z}_{12} &= z_{12} (z_2 - z_4) + (\varepsilon_1 z_3 + \varepsilon_3 z_1) (\kappa_1 z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4) + \varepsilon_5 z_1 z_3, \\
\dot{z}_{13} &= z_{13} (-\kappa_1 z_0 + z_1 + z_2 + 2z_3 + z_4) + \varepsilon_1 z_2 z_4 + \varepsilon_2 z_4 z_1 + \varepsilon_4 z_1 z_2, \\
\dot{z}_{14} &= z_{14} (z_3 - z_4) + 2\varepsilon_1 z_0 z_{10} + (\varepsilon_4 z_5 + \varepsilon_3 z_8) z_1, \\
\dot{z}_{15} &= z_{15} (-\kappa_1 z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + 2z_4) + 2\varepsilon_2 z_0 z_{11} + (\varepsilon_5 z_6 + \varepsilon_4 z_9) z_2, \\
\dot{z}_{16} &= z_{16} (\kappa_1 z_0 - 2z_1 - z_2 - z_3 - z_4) + 2\varepsilon_3 z_0 z_{12} + (\varepsilon_1 z_7 + \varepsilon_5 z_5) z_3, \\
\dot{z}_{17} &= z_{17} (z_1 - z_2) + 2\varepsilon_4 z_0 z_{13} + (\varepsilon_2 z_8 + \varepsilon_1 z_6) z_4, \\
\dot{z}_{18} &= z_{18} (z_2 - z_3) + 2\varepsilon_5 z_2 z_7 + (\varepsilon_3 z_9 + \varepsilon_2 z_7) (\kappa_1 z_0 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4), \\
\dot{z}_{19} &= z_{19} (-z_2 + z_4) - z_5 z_{10} + 2z_7 z_{10} - z_5 z_{13} + \varepsilon_4 (z_2 + z_3) z_5 + 2\varepsilon_1 z_4 z_7 + \varepsilon_2 z_0 z_{10} \\
&\quad + \varepsilon_3 (z_2 + 2z_3) z_8 + \varepsilon_1 z_0 (\varepsilon_4 z_3 + \varepsilon_3 z_4), \\
\dot{z}_{20} &= z_{20} (-\kappa_1 z_0 + z_1 + 2z_2 + 3z_3 - z_4) + (\varepsilon_4 + 3\varepsilon_1 + \varepsilon_3) z_0 z_{14} + 2\varepsilon_1 z_0 (\varepsilon_4 z_5 - \varepsilon_3 z_8), \\
\dot{z}_{21} &= z_{21} (-2\kappa_1 z_0 + z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4) + (\varepsilon_5 + 3\varepsilon_2 + \varepsilon_4) z_0 z_{15} + 2\varepsilon_2 z_0 (\varepsilon_5 z_6 - \varepsilon_4 z_9),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{22} &= z_{22}(2\kappa_1 z_0 - 4z_1 - 3z_2 - 2z_3 - z_4) + (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_5) z_0 z_{16} + 2\varepsilon_3 z_0 (\varepsilon_1 z_7 - \varepsilon_5 z_5), \\
\dot{z}_{23} &= z_{23}(\kappa_1 z_0 + z_1 - 3z_2 - 2z_3 - z_4) + (\varepsilon_2 + 3\varepsilon_4 + \varepsilon_1) z_0 z_{17} + 2\varepsilon_4 z_0 (\varepsilon_2 z_8 - \varepsilon_1 z_6), \\
\dot{z}_{24} &= z_{24}(z_1 + 2z_2 - 2z_3 - z_4) + (\varepsilon_3 + 3\varepsilon_5 + \varepsilon_2) z_0 z_{18} + 2\varepsilon_5 z_0 (\varepsilon_3 z_9 - \varepsilon_2 z_7).
\end{aligned}$$

Sur l'ouvert  $U_1$ , où on prend comme coordonnées  $y_i := z_i/z_1$ , pour  $i = 0, \dots, 24$ , les équations différentielles s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= y_0(\kappa_1 y_1 - 2y_5) - y_1(y_1 + 2y_2) - \varepsilon_1 y_0^2, \\
\dot{y}_1 &= 0, \\
\dot{y}_2 &= y_2(-\kappa_1 y_1 + y_5 + 3y_8) + y_1 y_9 + y_0(\varepsilon_2 y_1 - \varepsilon_1 y_2), \\
\dot{y}_3 &= y_3(2\kappa_1 y_1 - 3y_5) - y_5(3y_1 + 4y_2) + y_0(\varepsilon_3 y_1 - \varepsilon_1 y_3), \\
\dot{y}_4 &= y_4(2\kappa_1 y_1 - 4y_5 - y_8) - y_8(y_1 + 4y_2) + y_0(\varepsilon_4 y_1 - \varepsilon_1 y_4), \\
\dot{y}_5 &= y_5(-\kappa_1 y_1 + y_5 + 2y_8) + 2y_1 y_{12} + \varepsilon_3 y_1^2, \\
\dot{y}_6 &= y_6(\kappa_1 y_1 - 2y_5 + y_8) - y_{13}(y_1 + 3y_2) + \varepsilon_2 y_1 y_4 + \varepsilon_4 y_1 y_2 - \varepsilon_1 y_2 y_4, \\
\dot{y}_7 &= y_7(2\kappa_1 y_1 - 4y_5 - y_8) - y_{12}(2y_1 + 3y_2) + (\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4)(\varepsilon_3 y_1 - \varepsilon_1 y_3) \\
&\quad + \varepsilon_5 y_1 y_3, \\
\dot{y}_8 &= y_8(\kappa_1 y_1 - 2y_5 - y_8) - 2y_1 y_{13} + \varepsilon_4 y_1^2, \\
\dot{y}_9 &= y_9(-y_5 + y_8) + \varepsilon_5 y_1 y_2 + (\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4)(\varepsilon_2 y_1 - \varepsilon_1 y_2), \\
\dot{y}_{10} &= y_{10}(-y_5 + y_8) + 2y_8 y_{12} - 2y_5 y_{13} + y_1(\varepsilon_3 y_8 + \varepsilon_4 y_5), \\
\dot{y}_{11} &= y_{11}(\kappa_1 y_1 - 3y_5) - 2y_1 y_{15} - \varepsilon_1 y_0 y_{11} + \varepsilon_2 y_8(\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4) \\
&\quad + y_1(\varepsilon_4 y_9 + \varepsilon_5 y_6), \\
\dot{y}_{12} &= -y_{12}(2y_5 + y_6 + 2y_8 + y_9) - y_8(y_{10} + y_{13}) + (y_9 y_{13} - y_2 y_{16} - y_1 y_{19}) \\
&\quad - \kappa_1 y_1 y_{11} - \kappa_2 y_1(-\kappa_1 y_0 + y_1 + y_2) + (\beta_{5,2} - \beta_{3,5}) y_1 y_5 - (\beta_{2,4} + \beta_{3,5}) y_1(y_5 + y_8) \\
&\quad - (\beta_{1,3} + \beta_{2,4}) y_1 [\kappa_1(\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4) - y_9] - (\beta_{3,5} + \beta_{4,1}) [y_1 y_9 + y_2(y_5 + y_8)] \\
&\quad - (\beta_{4,1} + \beta_{5,2})(2y_0 y_{10} + y_1 y_7 + y_3 y_5) - (\beta_{5,2} + \beta_{1,3}) y_8(\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3), \\
\dot{y}_{13} &= y_{13}(-\kappa_1 y_1 + y_8 + y_9) - y_5(y_{10} + y_{11}) - y_8(y_{10} + y_{12}) - (y_0 y_{20} + y_2 y_{16} + y_9 y_{12}), \\
&\quad - \kappa_1 y_1(y_{11} + y_{12}) + \kappa_2 y_1(\kappa_1 y_0 - y_2) + 2(\beta_{2,4} - \beta_{5,2}) y_1 y_8 - (\beta_{1,3} + \beta_{4,1}) y_1 y_7 \\
&\quad - (\beta_{2,4} + \beta_{5,2}) y_1(y_5 + y_7) - (\beta_{1,3} + \beta_{2,4}) y_1 [\kappa_1(\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4) - y_7 - y_9] \\
&\quad - (\beta_{2,4} + \beta_{3,5}) y_1(\kappa_1 y_1 + y_8) - (\beta_{3,5} + \beta_{4,1}) [y_2(y_5 + y_8) + y_1 y_9] \\
&\quad - (\beta_{4,1} + \beta_{5,2})(y_0 y_{10} + y_3 y_5) - (\beta_{5,2} + \beta_{1,3}) [(\kappa_1 y_0 - y_1 - y_2 - y_3) y_8 + y_0 y_{10}], \\
\dot{y}_{14} &= y_{14}(\kappa_1 y_1 - y_5 - y_8) - y_{20}(y_1 + 2y_2) + \varepsilon_1 y_0 y_{14} - 2y_1(\varepsilon_3 y_{13} + \varepsilon_4 y_{12}) \\
&\quad + 2\varepsilon_4 y_5(\kappa_1 y_1 - y_5 - y_8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_{15} &= y_{15}(-y_5 + 2y_8) - y_1y_{21} - \varepsilon_1y_0y_{15} + 2\varepsilon_2y_8y_9 + 2\varepsilon_5y_2y_{13}, \\
\dot{y}_{16} &= y_{16}(-\kappa_1y_1 + 2y_8) + 3y_{12}^2 + 2\varepsilon_3y_1y_{12} + \varepsilon_5y_5^2, \\
\dot{y}_{17} &= y_{17}(\kappa_1y_1 - 2y_5) - 3y_{13}^2 + \varepsilon_2y_8^2 + 2\varepsilon_4y_1y_{13}, \\
\dot{y}_{18} &= y_{18}(-2y_5 + y_8) + y_1y_{24} - \varepsilon_1y_0y_{18} + 2\varepsilon_5y_5y_9 + 2\varepsilon_2y_{12}(\kappa_1y_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4), \\
\dot{y}_{19} &= y_{19}(-2\kappa_1y_1 + y_5 + 4y_8) + y_2y_{20} + 5y_8y_{16} + y_{14}(y_5 + 3y_9) + (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)y_5y_8 \\
&\quad + \varepsilon_1(\varepsilon_4y_1y_3 - \varepsilon_1y_3y_4 + \varepsilon_3y_1y_4 - y_3y_{10} - y_5y_6 + 5y_7y_8) + 2\varepsilon_3y_1y_{13} + \varepsilon_4y_5^2, \\
\dot{y}_{20} &= y_{20}(y_5 - y_8) + (\varepsilon_4 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3)y_1y_{14} + \varepsilon_1\varepsilon_4y_1y_5 - \varepsilon_1\varepsilon_3y_1y_8, \\
\dot{y}_{21} &= y_{21}(-\kappa_1y_1 + y_5 + 4y_8) - \varepsilon_1y_0y_{21} + (\varepsilon_5 + 3\varepsilon_2 + \varepsilon_4)y_1y_{15} + 2\varepsilon_2\varepsilon_5y_2y_8 - 2\varepsilon_2\varepsilon_4y_1y_9, \\
\dot{y}_{22} &= y_{22}(-2\kappa_1y_1 + y_5 + 4y_8) + 5y_{12}y_{16} - \varepsilon_1y_0y_{22} + 5\varepsilon_1y_7y_{12} + (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_3 - 4\varepsilon_5)y_1y_{16} \\
&\quad + 2\varepsilon_1\varepsilon_3y_1y_7 - 2\varepsilon_3\varepsilon_5y_1y_5, \\
\dot{y}_{23} &= y_{23}(2\kappa_1y_1 - 4y_5 - y_8) - 5y_{13}y_{17} - \varepsilon_1y_0y_{23} + 5\varepsilon_1y_2y_{17} + (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_4 - 4\varepsilon_2)y_1y_{17} \\
&\quad + 2\varepsilon_2\varepsilon_4y_1y_8 - 2\varepsilon_1\varepsilon_4y_1y_6, \\
\dot{y}_{24} &= y_{24}(\kappa_1y_1 - 4y_5 - y_8) - \varepsilon_1y_0y_{24} + (\varepsilon_3 + 3\varepsilon_5 + \varepsilon_2)y_1y_{18} + 2\varepsilon_3\varepsilon_5y_1y_9 - 2\varepsilon_2\varepsilon_5y_1y_7.
\end{aligned}$$

Ce qui précède suffit pour conclure :

**Proposition 4.6.2.** Le champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  se prolonge en un champ vectoriel holomorphe  $\overline{(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})}$  sur  $\mathbb{P}^{24}$ .

En effet, ayant établi que le champ de vecteurs s'étend en un champ qui est holomorphe dans deux cartes différentes, il est holomorphe en dehors d'une sous-variété de codimension au moins deux, donc par le lemme de Hartogs il est holomorphe partout. On peut en effet vérifier qu'il est quadratique sur chaque ouvert  $U_i$  (en termes des coordonnées  $x_j/x_i$ ), mais pour le point (3) du théorème de Liouville, il suffit de savoir que l'extension est holomorphe sur tout  $\mathbb{P}^{24}$ .

## 4.7 Analyse des diviseurs de Painlevé

Le but de cette section est de déterminer comment les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  de  $\mathbb{P}^{24}$  se croisent. Cela dépend des valeurs des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$ . Ainsi, dans cette section et la section suivante nous supposons que les  $\varepsilon_i$  sont génériques, plus précisément qu'ils sont tous non nuls. Le cas où un ou plusieurs  $\varepsilon_i$  sont nuls sera traité dans la section 4.9. On fixe toujours une valeur générique pour  $\kappa$ . On rappelle que la courbe de Painlevé abstraite, associée à la balance principale  $x(t; \Gamma_\kappa^{(1)})$  est la courbe affine

$$\Gamma_\kappa = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b) = 0\},$$

où,

$$F(a, b) = a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + p_{2,1}(\beta, \kappa) a^2 b + p_{1,2}(\beta, \kappa) a b^2 \\ + p_{1,1}(\beta, \kappa) a b + p_{1,0}(\beta, \kappa) a + p_{0,1}(\beta, \kappa) b + p_{0,0}(\beta, \kappa).$$

Cette courbe affine peut être complétée (de façon unique) en une surface de Riemann compacte  $\bar{\Gamma}_\kappa$ , en lui ajoutant cinq points à l'infini, que nous notons  $\infty_{\varepsilon,-}$ ,  $\infty'_{\varepsilon,-}$ ,  $\infty$ ,  $\infty_{\varepsilon,+}$  et  $\infty'_{\varepsilon,+}$ . Ces points correspondent aux points où  $a$  et/ou  $b$  tendent vers l'infini. On aura besoin de paramétrisations autour de ces cinq points. En termes d'un paramètre local  $\zeta$ , ils sont donnés par

$$\begin{aligned} \infty : \quad a &= \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2), \\ \infty_{\varepsilon,-} : \quad a &= \frac{1}{\zeta}, \quad b = (\varepsilon_3 + \varepsilon_5) \zeta - \frac{1}{\varepsilon_5} p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ \infty'_{\varepsilon,-} : \quad a &= \frac{1}{\zeta}, \quad b = \varepsilon_3 \zeta + \frac{1}{\varepsilon_5} p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ \infty_{\varepsilon,+} : \quad b &= \frac{1}{\zeta}, \quad a = -(\varepsilon_4 + \varepsilon_1) \zeta - \frac{1}{\varepsilon_4} p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ \infty'_{\varepsilon,+} : \quad b &= \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\varepsilon_1 \zeta + \frac{1}{\varepsilon_4} p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3). \end{aligned}$$

Les formules ci-dessus ne sont clairement plus valables lorsque certains des  $\varepsilon$  sont nuls. Dans la section 4.5, nous avons construit les plongements  $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \rightarrow \mathbb{P}^{24}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , et nous avons noté  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  la fermeture de l'image de  $\Gamma_\kappa^{(i)}$  sous l'application (4.26),

$$\mathcal{D}_\kappa^{(i)} := \overline{\varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})}.$$

Les points ajoutés pour déterminer la fermeture de ces images peuvent être calculés en utilisant un paramètre local autour de chaque point à l'infini de la courbe  $\Gamma_{\kappa,i}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa^{(i)}(\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}) &\sim \varphi_\kappa^{(i)}(a(\zeta), b(\zeta)), \\ \varphi_\kappa^{(i)}(\infty'_{\varepsilon,-}{}^{(i)}) &\sim \varphi_\kappa^{(i)}(a(\zeta), b(\zeta)), \\ \varphi_\kappa^{(i)}(\infty^{(i)}) &\sim \varphi_\kappa^{(i)}(a(\zeta), b(\zeta)), \\ \varphi_\kappa^{(i)}(\infty'_{\varepsilon,+}{}^{(i)}) &\sim \varphi_\kappa^{(i)}(a(\zeta), b(\zeta)), \\ \varphi_\kappa^{(i)}(\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}) &\sim \varphi_\kappa^{(i)}(a(\zeta), b(\zeta)), \end{aligned}$$

puis, en faisant tendre  $\zeta \rightarrow 0$ . Si on le fait pour les cinq points à l'infini et pour les cinq plongements de la courbe affine, nous trouvons au total dix points (différents) que nous noterons  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ . Ils sont tels que, pour  $i = 1, \dots, 5$ ,

$$P_i = \varphi_\kappa^{(i)}(\infty^{(i)}) \quad \text{et} \quad Q_i = \varphi_\kappa^{(i+2)}\left(\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i+2)}\right) = \varphi_\kappa^{(i-2)}\left(\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i-2)}\right).$$

Plus explicitement, en notant  $0_n$  une suite de  $n$  zéros consécutifs, les coordonnées de ces dix points sont données par :

$$\begin{aligned} P_1 &= (0_{20} : -1 : 0 : 1 : 0 : 0), \\ P_2 &= (0_{20} : 0 : -1 : 0 : 1 : 0), \\ P_3 &= (0_{20} : 0 : 0 : -1 : 0 : 1), \\ P_4 &= (0_{20} : 1 : 0 : 0 : -1 : 0), \\ P_5 &= (0_{20} : 0 : 1 : 0 : 0 : -1), \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\cdots : -p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0), \\ Q_2 &= (\cdots : 0 : -p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0), \\ Q_3 &= (\cdots : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa)), \\ Q_4 &= (\cdots : p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0), \\ Q_5 &= (\cdots : 0 : p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa)), \end{aligned} \tag{4.28}$$

où nous rappelons que  $p_{0,0}$  est le polynôme

$$p_{0,0}(\beta_{i,j}, \kappa) = -(\beta_{i,j}^2 \kappa_1 - \beta_{i,j} \kappa_2 + \kappa_3).$$

Le tableau suivant résume ces informations, indiquant de quel plongement et de quel point à l'infini provient le point  $P_i$  ou  $Q_i$ .

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_1$	$Q_2$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$

Plus succinctement, l'information du tableau ci-dessus peut se résumer en deux colonnes de la façon suivante :



	$\mathcal{D}_k^{(i)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_{i-2}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime(i)}$	$Q_{i-2}$
$\infty^{(i)}$	$P_i$
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime(i)}$	$Q_{i+2}$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_{i+2}$

Nous détaillons ensuite les vecteurs tangents, dans l'espace projectif, de chacune des courbes  $\mathcal{D}_k^{(i)}$  aux points précédemment trouvés et qui correspondent.

Courbe	Vecteur tangent en $P_1$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) : 0 : -\varepsilon_2\varepsilon_5 : 0 : 0 : -\varepsilon_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) : -p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : -\varepsilon_2^2\kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 1 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_2\varepsilon_4 : 0 : \varepsilon_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_5) : 0 : 0 : \varepsilon_2\varepsilon_4 : \varepsilon_2^2\kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : -p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $Q_1$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : \varepsilon_2^3 : -\varepsilon_2^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2^3\varepsilon_4 : 0 : 0 : -\varepsilon_2^3\varepsilon_4 : \varepsilon_2^2 p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2^3\varepsilon_4\kappa_1 - \varepsilon_2^2 p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : - : 0 : - : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : \varepsilon_2^3 : -\varepsilon_3^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2^3\varepsilon_5 : \varepsilon_2^3\varepsilon_4 : 0 : 0 : \varepsilon_2^2 p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : 0 : - : 0 : - : 0 : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_2$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3(\varepsilon_3 + \varepsilon_5) : 0 : -\varepsilon_1\varepsilon_3 : 0 : -\varepsilon_3^2 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : \varepsilon_3^2\kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_3\varepsilon_5 : 0 : \varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) : 0 : \varepsilon_3^2 : 0 : \varepsilon_3^2\kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : -p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $Q_2$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^3 : -\varepsilon_3^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^3 \varepsilon_1 : \varepsilon_3^3 \varepsilon_5 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^2 p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_1 \varepsilon_3^3 \kappa_1 - \varepsilon_3^2 p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : - : 0 : - : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^3 : -\varepsilon_3^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_3^3 \varepsilon_1 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^3 \varepsilon_1 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^2 p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : -\varepsilon_1 \varepsilon_3^3 \kappa_1 + \varepsilon_3^2 p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : - : 0 : - : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_3$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_4 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_4) : 0 : -\varepsilon_2 \varepsilon_4 : -\varepsilon_4^2 : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : \varepsilon_4^2 \kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa))$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1)$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_4 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_4 \varepsilon_1 : 0 : \varepsilon_4(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) : \varepsilon_4^2 : 0 : 0 : \varepsilon_4^2 \kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : -p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa))$

Courbe	Vecteur tangent en $Q_3$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_4^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_4^3 \varepsilon_1 : \varepsilon_4^3 \varepsilon_2 : \varepsilon_4^3 \varepsilon_1 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_4^2 p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : 0 : -\varepsilon_4^2 p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : 0 : - : 0 : -)$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : \varepsilon_4^3 : -\varepsilon_4^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_3^3 \varepsilon_1 : -\varepsilon_4^3 \varepsilon_2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_4^2 p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : \varepsilon_4^2 p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : 0 : - : 0 : -)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_4$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_5 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_3 \varepsilon_5 : 0 : 0 : \varepsilon_5(\varepsilon_2 + \varepsilon_5) : 0 : 0 : \varepsilon_5^2 \kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_5 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_5(\varepsilon_3 + \varepsilon_5) : 0 : 0 : -\varepsilon_2 \varepsilon_5 : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : 0 : \varepsilon_5^2 \kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $Q_4$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : -\varepsilon_5^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_5^3 \varepsilon_2 : \varepsilon_5^3 \varepsilon_3 : \varepsilon_5^3 \varepsilon_2 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_5^2 p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : - : 0 : 0 : - : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_5^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_5^3 \varepsilon_3 : \varepsilon_5^3 \varepsilon_2 : -\varepsilon_5^3 \varepsilon_3 : 0 : \varepsilon_5^2 p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : - : 0 : 0 : - : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_5$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_1 \varepsilon_4 : 0 : 0 : \varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) : 0 : 0 : \varepsilon_1^2 \kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa))$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0 : \kappa_1)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_1(\varepsilon_4 + \varepsilon_1) : 0 : 0 : -\varepsilon_1 \varepsilon_3 : 0 : 0 : -p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : 0 : \varepsilon_1^2 \kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa))$

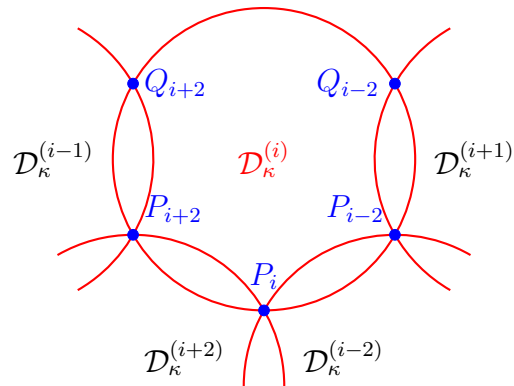
Courbe	Vecteur tangent en $Q_5$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : \varepsilon_1^3, -\varepsilon_1^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_1^3 \varepsilon_3 : \varepsilon_1^3 \varepsilon_4 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_1^2 p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : 0 : 0, -, 0, 0, -)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : -\varepsilon_1^3 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_1^3 \varepsilon_4 : \varepsilon_1^3 \varepsilon_3 : -\varepsilon_1^3 \varepsilon_4 : 0 : \varepsilon_1^2 p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : 0 : 0, -, 0, 0, -)$

Les informations contenues dans les tableaux précédents sont reformulées dans la proposition suivante.

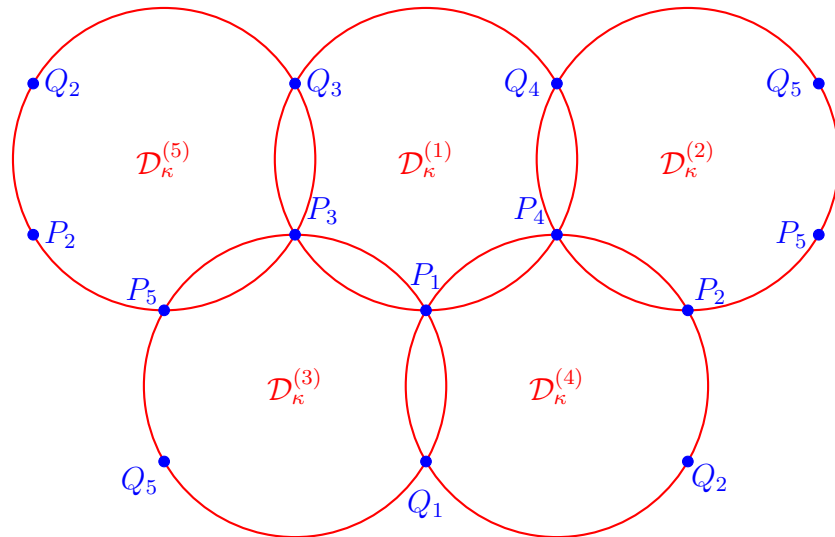
**Proposition 4.7.1.** Pour chaque  $i = 1, \dots, 5$ , la courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  contient les points  $P_{i-2}$ ,  $Q_{i-2}$ ,  $P_i$ ,  $Q_{i+2}$  et  $P_{i+2}$ , et croise transversalement ses deux voisins de la manière suivante :

- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-1)}$  en les points  $P_{i+2}$  et  $Q_{i+2}$ ,
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+1)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $Q_{i-2}$ ,
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .

Alternativement, elles sont représentées dans la figure suivante :



Les cinq courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  sont donc des courbes non singulières de genre 2 qui se rencontrent en dix points, toujours de manière transversale. Nous représentons ci-dessous l'image de cette configuration. Pour rendre l'image exacte, les points étiquetés  $P_5, P_1, P_2, Q_5, Q_1$  et  $Q_2$  doivent être identifiés.



Ensuite, nous vérifions que la réunion  $\mathcal{D}_\kappa$  des courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  vérifie la formule d'adjonction. Autrement dit, nous montrons que son genre arithmétique  $g_a(\mathcal{D}_\kappa)$  est égale à

$$g_a(\mathcal{D}_\kappa) = N + r = \dim \mathbb{P}^{24} + \dim \varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa) = 24 + 2 = 26 .$$

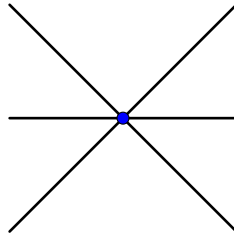
D'après [1, page 148], le genre arithmétique peut être calculé de la façon suivante :

$$g_a(\mathcal{D}_\kappa) = \sum_{i=1}^5 (g(\mathcal{D}_\kappa^{(i)}) - 1) + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \chi(\mathcal{D}_\kappa^{(i)} \cup \mathcal{D}_\kappa^{(j)}) + 1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^5 (2-1) + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \chi(\mathcal{D}_\kappa^{(i)} \cup \mathcal{D}_\kappa^{(j)}) + 1 \\
&= 6 + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \chi(\mathcal{D}_\kappa^{(i)} \cup \mathcal{D}_\kappa^{(j)}), \tag{4.29}
\end{aligned}$$

où  $g$  désigne le genre géométrique et  $\chi(\mathcal{D}_\kappa^{(i)} \cup \mathcal{D}_\kappa^{(j)})$  indique la contribution des points singuliers d'une courbe singulière à son genre arithmétique.

Or, pour calculer la somme du côté droit de l'équation ci-dessus, nous remarquons que le croisement à chacun des dix points  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$  est de la forme



dont la contribution au genre arithmétique est 2. Par conséquent, la contribution totale de ces dix points est 20. Cela permet de montrer que le côté droit de (4.29) devient 26, ce qui vérifie la formule d'adjonction. On a donc vérifié que  $\cup_{i=1}^5 \mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  a le bon genre arithmétique pour être un diviseur d'une surface abélienne, contenue dans  $\mathbb{P}^{24}$ . Ce qui nous conforte dans l'espoir d'avoir trouvé toutes les balances principales et d'avoir trouvé le bon nombre de fonctions définissant notre plongement.

## 4.8 Tout point de $\Delta'_\kappa$ est envoyé dans la partie affine

Dans cette section, notre objectif est de montrer comment vérifier la dernière condition, la condition (4) du théorème 2.3.7. On rappelle que l'on est dans le cas où tous les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  sont non nuls, alors que  $\kappa$  est générique. On décompose, comme dans le théorème 2.3.7,  $\Delta_\kappa := \overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)} \setminus \varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$  comme  $\Delta_\kappa = \Delta'_\kappa \cup \Delta''_\kappa$ , où  $\Delta'_\kappa$  est la réunion des composantes irréductibles de  $\Delta_\kappa$  de dimension 1 et  $\Delta''_\kappa$  les points restants. On doit vérifier que le flot du champ de vecteurs  $\overline{(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})}$  sur  $\mathbb{P}^{24}$ , partant de n'importe quel point de  $\Delta'_\kappa$ , va tout de suite dans la partie affine  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ .

Nous rappelons que, puisque  $\kappa \in \mathbb{C}^3$  est générique, l'application  $\varphi_\kappa : \mathbf{H}_\kappa \rightarrow \mathbb{P}^{24}$  est un plongement. Quand tous les paramètres de déformation sont nuls, la fibre générique  $\mathbf{H}_\kappa$  de l'application moment est connexe. Par l'argument de déformation, il en est de même pour n'importe quelles valeurs des paramètres de déformation.

Pour chacune des cinq balances homogènes à poids  $x \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$ , l'application  $\varphi_\kappa$  induit l'application holomorphe  $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \rightarrow \mathbb{P}^{24}$  (voir (4.26)), dont l'image est de dimension  $r - 1 = 1$ . Nous avons également défini  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)} = \overline{\varphi_\kappa^{(i)} \left( \Gamma_\kappa^{(i)} \right)}$ , pour  $i = 1, \dots, 5$ , où la fermeture est prise relativement à la topologie de Zariski.

Dans [1] il est montré que si  $r \geq 2$  (comme dans notre cas, car ici  $r = 2$ ), alors  $\Delta_\kappa$  est connexe ; en particulier,  $\Delta_\kappa$  ne peut pas avoir de points singuliers,  $\Delta''_\kappa = \emptyset$  et  $\Delta_\kappa = \Delta'_\kappa$ . De plus, comme  $\varphi_\kappa$  est un plongement de  $\mathbf{H}_\kappa$ , nous avons que

$$\Delta_\kappa = \overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)} \setminus \varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa) = \overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)} \cap \{z_0 = 0\}.$$

En particulier,  $\Delta_\kappa$  est contenu dans le sous-espace  $\{z_0 = 0\}$ . En conséquence, si  $z_j(m)$ ,  $j = 0, \dots, 24$ , sont finis, alors  $m$  appartient à la partie affine  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ . Afin de vérifier la condition (4) du théorème 2.3.7 nous devons montrer que les courbes intégrales du champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  qui partent des points  $m \in \Delta_\kappa = \Delta'_\kappa$  sont immédiatement envoyées dans la partie affine  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ . Autrement écrit,

$$\{\Phi_t(m) \mid 0 < |t| < \epsilon\} \subset \varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa),$$

pour  $\epsilon$  petit, et où  $\Phi_t$  désigne le flot du champ de vecteurs  $\overline{(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})}$  sur  $\mathbb{P}^{24}$ . Il y a trois types de points dans  $\Delta_\kappa$ , que l'on considérera un par un :

- (I) les points dans l'image  $\varphi_\kappa^{(i)} \left( \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$ , pour au moins un  $i \in \{1, \dots, 5\}$  ;
- (II) les points dans  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)} \left( \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$ , pour au moins un  $i \in \{1, \dots, 5\}$  ;
- (III) les points dans  $\Delta_\kappa \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{D}_\kappa^{(i)}$ .

Soit  $P$  un point du type (I). Il existe alors  $i \in \{1, \dots, 5\}$  et  $p \in \Gamma_\kappa^{(i)}$  tels que  $P = \varphi_\kappa^{(i)}(p)$ . Puisque les fonctions  $z_0, \dots, z_{24}$  sont des polynômes en les variables  $x_j$  et  $\varepsilon_j$  et que les séries de Laurent  $x_j \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$  sont homogènes, et en conséquence convergentes, on peut trouver  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $0 < |t| < \epsilon$  et pour  $j = 0, \dots, 24$ ,  $z_j \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$  soit finie. Ceci implique que  $\Phi_t(P)$  n'appartient pas à l'hyperplan  $\{z_0 = 0\}$  ; autrement dit,

$$\Phi_t(P) \in \varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa), \quad \text{pour } 0 < |t| < \epsilon.$$

La condition en question est donc automatiquement vérifiée.

Analysons maintenant les points du type (II). Puisque  $r = 2$  dans notre cas, l'ensemble  $K := \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$  est fini. En effet,  $K = \{P_1, \dots, P_5, Q_1, \dots, Q_5\}$ . Soit  $P \in K^{(i)}$  et soit  $p \in \Gamma_\kappa^{(i)}$  tel que

$$\lim_{m \rightarrow p} \varphi_\kappa^{(i)}(m) = P.$$

D'après la section 4.7, l'indice  $i$  n'est pas unique, mais pour un  $i$  donné, le point  $p$  n'est pas nécessairement unique.

Comme précédemment, notons  $z_j \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$  la série de Laurent obtenue lorsque l'on substitue la balance principale  $x \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$  dans le polynôme  $z_j$ , restreint à  $\mathbf{H}_\kappa$ . Pour  $j = 0, \dots, 24$ , écrivons

$$z_j \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right) = \frac{1}{t^l} \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k)} t^k,$$

où l'exposant  $l$  est tel que  $z_j^{(0)}$  soit non nul pour au moins l'un des  $j$ . Parmi les indices  $j$  pour lesquels  $z_j^{(0)} \neq 0$ , on choisit l'indice  $L$  de sorte que la série  $z_L \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$  admet le plus grand pôle lorsque  $m \rightarrow p$  dans  $\overline{\Gamma_\kappa^{(i)}}$ . En ces termes, la limite

$$\lim_{m \rightarrow p} \frac{z_j \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)}{z_L \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)}$$

est finie pour tout indice  $j$ . En conséquence, la carte  $\{z_L \neq 0\}$  de  $\mathbb{P}^{24}$  contient le point  $P$ . Étant donné que le champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  est holomorphe sur  $\mathbb{P}^{24}$ , ce champ de vecteurs est aussi holomorphe en les coordonnées  $y_j := \frac{z_j}{z_L}$ ,  $j = 0, \dots, 24$ .

Or, les séries  $y_j \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$  vérifient, pour  $|t|$  suffisamment petit et non nul, les équations différentielles décrites par  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  sur la carte  $\{z_0 \neq 0\}$ . Ainsi on peut identifier ces séries avec les séries de Taylor qui vérifient  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  sur la carte  $\{z_L \neq 0\}$ . Plus précisément, pour un point  $m \in \Gamma_\kappa^{(i)}$  près de  $p$ , la série  $y_j(t; m)$  est égale à la série  $y_j \left( t; \varphi_\kappa^{(i)}(m) \right)$ , où cette dernière est la série de Taylor de  $y_j$  par rapport au champ  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  et qui part de  $\varphi_\kappa^{(i)}(m)$ . Puisque cette série admet une limite, à savoir  $y_j(t; P)$ , alors la série  $y_j(t; m)$  admet aussi une limite lorsque  $m \rightarrow p$ , que l'on notera  $y_j(t; p)$ . De cette manière et du fait que  $z_j = y_j/y_0$ , si l'on montre que, en tant que série holomorphe non nulle en  $t$ ,  $y_0(t; p) \neq 0$ , alors pour  $|t|$  suffisamment petit toutes les séries  $z_j(t; p)$  sont finies.

En conclusion, afin de montrer que la courbe intégrale du champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  qui part de  $P \in K^{(i)}$  est envoyée dans la partie affine, il suffit de montrer que pour la balance principale  $x \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$ , la série

$$y_0 \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right) := \frac{1}{z_L \left( t; \Gamma_\kappa^{(i)} \right)}$$

admet une limite non nulle lorsque  $m \in \Gamma_\kappa^{(i)}$  tend vers  $p$ . On procède de cette manière pour chaque point  $P_1, \dots, P_5, Q_1, \dots, Q_5$  de  $K$ . Le résultat est résumé dans le tableau

suisant (voir (4.27) et (4.28) pour les coordonnées des points de  $K$ ), où la deuxième colonne contient les séries dont le premier terme admet un pôle maximal pour  $\zeta = 0$  :

Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$Q_1$	$z_5(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_5}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_2$	$z_6(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_6}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_3$	$z_7(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_7}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_4$	$z_8(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_8}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_5$	$z_9(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_9}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$

Il reste à traiter les points du type (III), s'ils existent. Ce sont les points de

$$\Delta_\kappa^+ := \Delta_\kappa \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{D}_\kappa^{(i)}.$$

On montre que, dans notre cas,  $\Delta_\kappa^+ = \emptyset$ . Comme  $\Delta_\kappa$  est connexe, au moins l'une des composantes de  $\Delta_\kappa^+$  intersecte l'un des  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  ; c'est-à-dire il existe au moins un point  $P \in \mathcal{D}_\kappa$  qui appartient aussi à  $\Delta_\kappa^+$ . Disons que  $i$  est un indice tel que  $P \in \mathcal{D}_\kappa^{(i)}$ . Dans le livre [1], il est montré qu'il existe un voisinage  $U \subset \overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)}$  de  $P$  et un réel positif  $\epsilon$  suffisamment petit tels que

$$U \subseteq \{\Phi_t(\mathcal{D}_\kappa^{(i)}) \mid 0 \leq |t| < \epsilon\}.$$



Supposons que le champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  est transversal à l'une des branches de  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  passant par  $P$ . En vertu du théorème des fonctions implicites, il existe un système de coordonnées holomorphes  $(t, s)$  sur un voisinage de  $P$  dans  $\overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)}$ , où  $s$  est la coordonnée qui vient de la coordonnée sur la branche choisie de  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  en  $P$  et la solution du champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  partant de la branche de  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  consiste des fonctions holomorphes  $y_j(t, s)$  de leurs arguments. Comme  $z_j = y_j/y_0$  pour  $j = 0, \dots, 24$ , alors  $z_j$  est fini lorsque  $y_0$  est fini, ce qui indique que l'on est dans la partie affine.

Écrivons la série  $y_0$  comme suit :

$$y_0(t, s) = a_\mu(t, s) + a_{\mu+1}(t, s) + \dots,$$

où  $a_l$  est la somme de tous les monômes de degré  $l$  dans la série, et  $a_\mu(t, s) \neq 0$ . Alors  $\mu = \mu(y_0; P)$  est la multiplicité de  $\mathcal{D}_\kappa$  au point  $P$ , car  $y_0$  est la fonction de définition locale sur  $\mathcal{D}_\kappa$ . De plus, puisque le champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  est transversal à  $\mathcal{D}_\kappa$  en tout point générique de chaque composante irréductible de  $\mathcal{D}_\kappa$  qui passe par  $P$ , on peut calculer la multiplicité de  $y_0$  restreinte à ces composantes comme le pôle générique de  $z_L$  le long de ces composantes. Autrement écrit, si  $\mu(\mathcal{D}_\kappa^{(i)}; P)$  désigne la multiplicité de  $P$  sur  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  et on vérifie que

$$\mu(y_0; P) = \sum_{i=1}^5 \mu(\mathcal{D}_\kappa^{(i)}; P) \cdot (\text{ordre du pôle de } z_L(t; \Gamma_\kappa^{(i)})),$$

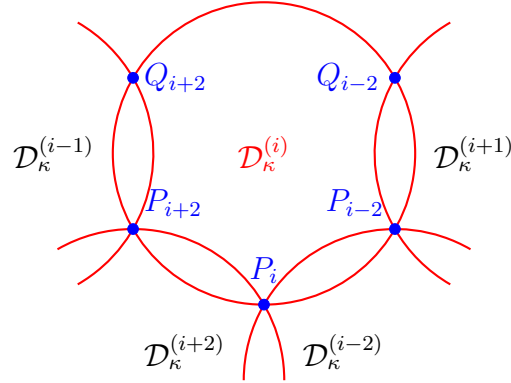
alors il n'existe pas d'autres composantes irréductibles de  $\Delta_\kappa$  de codimension 1 qui contiennent le point  $P$  et différentes de  $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}, \dots, \mathcal{D}_\kappa^{(5)}$ . Par conséquent  $\Delta_\kappa^+ = \emptyset$ , ce qui montre que  $\Delta_\kappa = \mathcal{D}_\kappa$ .

Les résultats établis dans les sections précédentes, du présent chapitre, nous permettent démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.8.1.** *Le système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules,  $\text{BI}^*(5)$ , où tous les paramètres de déformation sont non nuls, est algébriquement intégrable. Pour  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$  générique, la fibre  $\mathbf{H}_\kappa$  de l'application moment est isomorphe à une partie affine de la jacobienne de la courbe algébrique  $\overline{\Gamma}_\kappa$ , où  $\Gamma_\kappa$  est la courbe affine lisse de genre 2, définie par l'équation*

$$\begin{aligned} & a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + \kappa_2 ab - (\beta_{1,3}^2 \kappa_1 - \beta_{1,3} \kappa_2 + \kappa_3) + [2\beta_{1,3} - (\beta_{3,5} + \beta_{5,2})] a^2 b \\ & + (-2\beta_{1,3} \kappa_1 + \kappa_2) ab + (\beta_{1,3} - \beta_{3,5})(\beta_{1,3} - \beta_{5,2}) a + (\beta_{1,3} - \beta_{4,1})(\beta_{1,3} - \beta_{2,4}) b \\ & + [2\beta_{1,3} - (\beta_{2,4} + \beta_{4,1})] ab^2 = 0. \end{aligned}$$

Le diviseur à ajouter pour compléter la partie affine en une variété abélienne consiste de cinq copies de  $\bar{\Gamma}_\kappa$  qui forment la configuration suivante :



*Démonstration.*

Dans la section 4.2 nous avons expliqué comment les conditions (1) et (2) du théorème de Liouville complexe 2.3.7 sont vérifiées. Ces deux conditions concernent la commutativité des champs de vecteurs intégrables  $\mathcal{X}_{H_1}$  et  $\mathcal{X}_{H_2}$  et leur indépendance pour toutes les valeurs des paramètres de déformation.

Ensuite, la proposition 4.6.2 de la section 4.6 établit que le champ de vecteurs  $\mathcal{X}_{H_1}$  s'étend en un champ qui est holomorphe sur tout  $\mathbb{P}^{24}$ , ce qui vérifie la condition (3) du théorème 2.3.7.

La section 4.7 a été consacrée à l'étude de la géométrie des diviseurs de Painlevé, où on montre comme résultat la configuration de courbes représentée ci-dessus.

Finalement, dans la section 4.8 on a montré que les courbes intégrales du champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  qui partent des points  $m \in \Delta_\kappa = \Delta'_\kappa$  sont immédiatement envoyées dans la partie affine  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ , vérifiant ainsi la condition (4) du théorème 2.3.7.

Ayant établi toutes les conditions du théorème de Liouville complexe, on peut alors conclure, à l'aide de ce théorème, que le système  $\text{BI}^*(5)$ , où tous les paramètres de déformation sont non nuls, est a.c.i.

✓

## 4.9 Déformations spéciales du système BI(5)

Comme nous l'avons vu dans la section 4.7, lors du paramétrage formel des courbes  $\bar{\Gamma}_\kappa^{(i)}$  autour des points à l'infini, nous trouvons certaines restrictions sur les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$ , ou ce qui est équivalent, des restrictions sur les paramètres  $\beta_{i,i+2}$ .

Rappelons que l'identification de ces points nous a permis de compléter ces courbes en des surfaces de Riemann compactes, et de mieux étudier la géométrie des objets qui émergent de l'analyse du système BI\*(5).

Plus précisément, les restrictions mentionnées dans les lignes précédentes se réfèrent à la nullité de certains  $\varepsilon_i$ .

Dans cette section, nous verrons en détail comment le fait que certains de ces paramètres soient nuls affecte le système qui nous occupe et emmène à une géométrie différente du diviseur de Painlevé. Quand un ou plusieurs  $\varepsilon_i$  sont nuls, nous parlons de *déformations spéciales de BI*. Nous verrons comme une caractéristique étonnante, qu'il existe une relation étroite entre le nombre de paramètres  $\varepsilon_i$  nuls et le nombre de points à l'infini des courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  qui sont des points de tangence.

Pour toute la discussion qui suit  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  est générique. Et nous rappelons que la somme de tous les  $\varepsilon_i$  est nulle :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = 0.$$

Dans chaque cas nous donnerons les équations des courbes de Painlevé abstraites, une paramétrisation des points à l'infini, la configuration des courbes de Painlevé dans l'espace projectif (qui à la fin s'avère être une configuration dans une surface abélienne), et nous donnons les formules clefs qui permettent de s'assurer que la condition (4) du théorème de Liouville complexe, et ainsi que toute déformation spéciale du système BI(5) est également algébriquement intégrable.

### 4.9.1 Un epsilon nul

Commençons par le cas où un seul des paramètres est nul. Sans perte de généralité et grâce à l'automorphisme  $\sigma$ , on peut supposer que  $\varepsilon_1 = 0$ . Afin de simplifier l'écriture, nous notons dans ce cas les paramètres de déformation comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 0, \\
\varepsilon_2 &= \theta, \\
\varepsilon_3 &= \eta, \\
\varepsilon_4 &= \xi, \\
\varepsilon_5 &= -\theta - \eta - \xi.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

À ce stade il est important de souligner que les familles des solutions de Laurent dans le cas général, évoquées tout au long de ce chapitre, correspondantes à une des balances principales, peuvent être spécialisées en utilisant (4.31) pour obtenir de la même manière une balance principale du cas présent. Pour une valeur générique de  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ , les courbes de Painlevé abstraites sont les courbes algébriques affines obtenues lorsque l'on substitue ces solutions dans les fonctions  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  ; les équations affines qui décrivent ces courbes pour les différentes familles sont détaillées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\Gamma_\kappa^{(1)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + (\theta - \eta + \xi)a^2b + \eta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) ab - \eta(\theta + \xi)a \\
&\quad + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_\kappa^{(2)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 - 2\xi a^2b - (\theta - \eta - \xi)ab^2 + p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) ab + \eta^2a - \theta(\eta + \xi)b \\
&\quad + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_\kappa^{(3)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + (\theta + 2\eta + 2\xi)a^2b + 2\eta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) ab + (\eta + \xi)(\theta + \eta + \xi)a \\
&\quad + \eta^2b + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_\kappa^{(4)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 - \eta a^2b + (\theta + 2\xi)ab^2 + p_{1,1}(\beta_{4,2}, \kappa) ab + \xi(\theta + \xi)b \\
&\quad + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_\kappa^{(5)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 - (2\theta + \xi)a^2b - (2\theta + \eta + 2\xi)ab^2 + p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) ab + \theta(\theta + \xi)a \\
&\quad + (\theta + \xi)(\theta + \eta + \xi)b + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) = 0.
\end{aligned}$$

De la même manière que dans la section 4.7, la courbe affine  $\Gamma_\kappa$  peut être complétée en une surface de Riemann compacte, que nous allons noter  $\bar{\Gamma}_\kappa$ , en lui ajoutant des points à l'infini. Nous notons  $\infty_{\varepsilon,-}$ ,  $\infty'_{\varepsilon,-}$ ,  $\infty$ ,  $\infty_{\varepsilon,+}$  et  $\infty'_{\varepsilon,+}$  ces points à l'infini, en gardant à l'esprit qu'ici certains de ces points peuvent en fait être le même point.

Sur un voisinage de chaque point à l'infini, la surface  $\bar{\Gamma}_\kappa$  peut être paramétrée en fonction d'un paramètre local  $\zeta$ , comme indiqué dans le tableau qui suit.

$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(1)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\theta - \eta) \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{1,3} - \frac{1}{2}(\theta - \eta + \xi), \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \eta \zeta - \frac{1}{\theta + \eta + \xi} p_{0,0}(\beta_{1,3} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -(\theta + \xi) \zeta + \frac{1}{\theta + \eta + \xi} p_{0,0}(\beta_{1,3} - (\theta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\xi \zeta + \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{1,3} - \xi, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(2)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\theta - \eta + \xi) \zeta + p_{1,1}(\beta_{2,4} + \xi, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \xi \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{2,4} + \xi, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{2,4} + \xi, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = (\eta + \xi) \zeta - \frac{1}{\theta + \eta + \xi} p_{0,0}(\beta_{2,4} + (\eta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\theta \zeta + \frac{1}{\theta + \eta + \xi} p_{0,0}(\beta_{2,4} - \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(3)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\theta + 2\xi) \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{3,5} - \frac{1}{2}(\theta + 2\eta + 2\xi), \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -(\eta + \xi) \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5} - (\eta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -(\theta + \eta + \xi) \zeta + \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5} - (\theta + \eta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta^2}, \quad a = -\eta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{3,5} - \eta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{3,5} - \eta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5).$

$\bar{\Gamma}_\kappa^{(4)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\theta + \eta + 2\xi) \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{4,1} + \frac{1}{2}\eta, \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \eta \zeta - \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{4,1} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\xi \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{4,1} - \xi, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -(\theta + \xi) \zeta + \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{4,1} - (\theta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\bar{\Gamma}_\kappa^{(5)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\eta + \xi) \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{5,2} + \frac{1}{2}(2\theta + \xi), \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \theta \zeta + \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{5,2} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = (\theta + \xi) \zeta - \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{5,2} + (\theta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = (\theta + \xi) \zeta + \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{5,2} + (\theta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = (\theta + \eta + \xi) \zeta - \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{5,2} + (\theta + \eta + \xi), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$

Comme précédemment, on note  $P_i$  et  $Q_i$  les points à l'infini, sous l'application  $\varphi_k^{(i)}$ , décrite en (4.26). Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau suivant :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\infty'_{\varepsilon,-}{}^{(i)}$	$Q_4$		$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
$\infty^{(i)}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\infty'_{\varepsilon,+}{}^{(i)}$	$Q_3$	$Q_4$	$P_5$	$Q_1$	$Q_2$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_3$	$P_4$		$P_1$	$P_2$

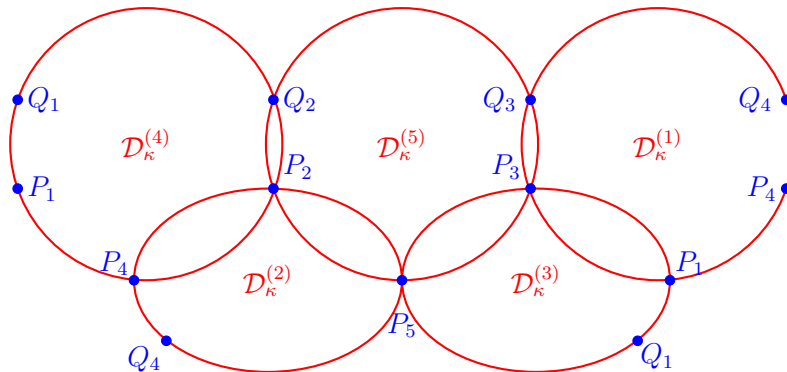
Par rapport à la déformation générique, où tous les  $\varepsilon_i$  sont non nuls, nous voyons ici que les points  $Q_5$  et  $P_5$  coïncident. Autrement dit, en considérant un seul paramètre nul (dans ce cas  $\varepsilon_1$ ), les points  $P_5$  et  $Q_5$  se sont contractés en un seul point, noté ici  $P_5$ .

En ce qui concerne la nature des croisements des courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  en les points  $P_i$  et  $Q_i$ , on peut voir par un calcul simple des vecteurs tangents, comme il a été fait dans la section 4.7, que dans tous les cas, sauf pour le point  $P_5$ , les croisements se font de manière transversale (c'est-à-dire que les vecteurs tangents sont différents).

Par le point  $P_5$  passent les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$ ,  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$ . Nous présentons ci-dessous les vecteurs tangents de ces courbes au point en question.

Courbe	Vecteur tangent en $P_1$
$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) : 0 : -\varepsilon_2\varepsilon_5 : 0 : 0 :$ $-\varepsilon_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) : -p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : \varepsilon_2^2\kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 1 :$ $\kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \varepsilon_2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\varepsilon_2\varepsilon_4 : 0 : \varepsilon_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_5) : 0 : 0 : \varepsilon_2\varepsilon_4 :$ $\varepsilon_2^2\kappa_1 + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : -p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0)$

Le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  du système BI\*(5) dont l'un des paramètres de déformation est nul, consiste alors de cinq courbes non singulières de genre 2 qui se croisent en neuf points, toujours transversalement (en point doubles pour les points  $Q_i$  et triples pour les points  $P_i$ ) sauf pour un seul point où le croisement est tangentiel. Nous représentons ci-dessous l'image de cette configuration. Pour rendre l'image exacte, les points étiquetés  $P_1$  doivent être identifiés, et de même pour les points étiquetés  $P_4$ ,  $Q_1$  et  $Q_4$ .



Les informations contenues dans les tableaux précédents sont reformulées dans la proposition suivante :

**Proposition 4.9.1.** Si  $\varepsilon_1 = 0$ , alors le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  contient neuf points à l'infini, comme suit :

La courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  contient les points  $P_4, Q_4, P_1, P_3$  et  $Q_3$ .

La courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  contient les points  $P_5, P_2, P_4$  et  $Q_4$ .

La courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  contient les points  $P_1, Q_1, P_3$  et  $P_5$ .

La courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  contient les points  $P_2, Q_2, P_4, P_1$  et  $Q_1$ .

La courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  contient les points  $P_3, Q_3, P_5, P_2$  et  $Q_2$ .

De plus, les croisements se font de la façon suivante :

Pour  $i = 1, \dots, 5$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .

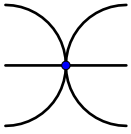
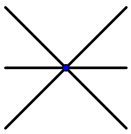
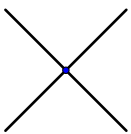
Pour  $i \neq 2, 3$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-1)}$  en les points  $P_{i+2}$  et  $Q_{i+2}$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+1)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $Q_{i-2}$ .

Les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  se croisent tangentiellement en le point  $P_5$ .

Le tableau suivant prouve que dans ce cas la formule d'adjonction est aussi vérifiée.

Type de croisement	Points	Contribution totale à $g_a$
	$P_5$	$4 \times 1 = 4$
	$P_1, P_2, P_3, P_4$	$3 \times 4 = 12$
	$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$	$1 \times 4 = 4$



En procédant de la même manière que dans la section 4.8, les courbes intégrales du champ de vecteurs  $(\varphi_\kappa)_*(\mathcal{X}_{H_1})$  qui partent des points  $m \in \Delta_\kappa = \overline{\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)} \cap \{z_0 = 0\}$  sont immédiatement envoyées dans la partie affine  $\varphi_\kappa(\mathbf{H}_\kappa)$ . En effet, le tableau suivant montre la finitude des limites pour les séries admettant un pôle maximal pour  $\zeta = 0$ , lorsque l'on analyse les points dans  $K = \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$ , où  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})$ , c'est-à-dire les points  $\{P_1, \dots, P_5, Q_1, \dots, Q_4\}$ .

Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$Q_1$	$z_5(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_5}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_2$	$z_6(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_6}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_3$	$z_7(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_7}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_4$	$z_8(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_8}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$

## 4.9.2 Deux epsilons nuls

Nous allons maintenant considérer le cas dans lequel deux des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  sont nuls. Grâce à l'automorphisme  $\sigma$ , nous avons deux cas à distinguer : soit

les deux epsilons en question sont contigus, soit ils ne le sont pas. Schématiquement,

$$(0, 0, \cdot, \cdot, \cdot), \quad (0, \cdot, 0, \cdot, \cdot).$$

Comme on le voit dans cette représentation, et sans perte de généralité grâce à l'automorphisme  $\sigma$ , on peut supposer que pour le premier cas  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  et pour le deuxième cas  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ .

### Deux epsilons nuls contigus

Dans le cas  $(0, 0, \cdot, \cdot, \cdot)$ , et afin de faciliter l'écriture, il nous suffit de définir deux paramètres non nuls  $\xi$  et  $\eta$  comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0, \\ \varepsilon_2 &= 0, \\ \varepsilon_3 &= \xi, \\ \varepsilon_4 &= \eta, \\ \varepsilon_5 &= -\xi - \eta. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Il est à noter, comme indiqué précédemment, que les familles des solutions de Laurent dans le cas général, correspondantes à une des balances principales, peuvent être spécialisées en utilisant (4.31) pour obtenir de la même manière les balances principales du cas présent. Les courbes de Painlevé abstraites sont des courbes algébriques dont les équations affines sont détaillées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa}^{(1)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - (\xi - \eta) a^2 b + \eta a b^2 + p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) a b - \xi \eta a + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(2)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - 2\eta a^2 b - (\xi + \eta) a b^2 + p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) a b + \eta^2 a + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(3)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + 2(\xi + \eta) a^2 b + 2\xi a b^2 + p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) a b + (\xi + \eta)^2 a + \xi^2 b \\ &\quad + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(4)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \xi a^2 b + 2\eta a b^2 + p_{1,1}(\beta_{4,2}, \kappa) a b + \eta^2 b + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(5)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \eta a^2 b - (\xi + 2\eta) a b^2 + p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) a b + \eta(\xi + \eta) b \\ &\quad + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) = 0. \end{aligned}$$

Afin de compléter ces courbes en des surfaces de Riemann compactes, il faut y ajouter certains points. La liste suivante montre les paramétrisations des courbes décrites ci-dessus, autour des points à l'infini à ajouter.

$\overline{\Gamma}_\kappa^{(1)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - \xi \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{1,3} + \frac{1}{2}(\xi - \eta), \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \xi \zeta - \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{1,3} + \xi, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\eta \zeta + \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{1,3} - \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\eta \zeta + \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{1,3} - \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(2)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\xi - \eta) \zeta + p_{1,1}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \eta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = (\xi + \eta) \zeta - \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{2,4} + (\xi + \eta), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(3)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + 2\eta \zeta + p_{1,1}(\beta_{3,5} - (\xi + \eta), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = -(\xi + \eta) \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{3,5} - (\xi + \eta), \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{3,5} - (\xi + \eta), \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta^2}, \quad a = -\xi \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{3,5} - \xi, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{3,5} - \xi, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5).$

$\overline{\Gamma}_\kappa^{(4)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\xi + 2\eta)\zeta + p_{1,1} \left( \beta_{4,1} + \frac{1}{2}\xi, \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \xi\zeta - \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{4,1} + \xi, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta^2}, \quad a = -\eta\zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{4,1} - \eta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{4,1} - \eta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(5)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\xi + \eta)\zeta + p_{1,1} \left( \beta_{5,2} + \frac{1}{2}\eta, \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \eta\zeta - \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{5,2} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \eta\zeta + \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{5,2} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = (\xi + \eta)\zeta - \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{5,2} + (\xi + \eta), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$

On note  $P_i$  et  $Q_i$  les images points à l'infini, sous l'application  $\varphi_k^{(i)}$ , décrite en (4.26).

Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau suivant :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	$Q_4$			$Q_2$	$Q_3$
$\infty^{(i)}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	$Q_3$	$Q_4$	$P_5$	$P_1$	$Q_2$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_3$	$P_4$			$P_2$

Par rapport à la déformation générique, nous voyons ici que les points  $Q_1$  et  $P_1$  d'une part, et  $Q_5$  et  $P_5$  d'autre part, coïncident. En d'autres termes, lorsqu'il y a deux paramètres nuls contigus (dans ce cas  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ ), il peut être interprété que les points  $Q_1$  et  $P_1$  se sont contractés en un seul point (toujours noté  $P_1$ ) et de même pour les points  $Q_5$  et  $P_5$ .

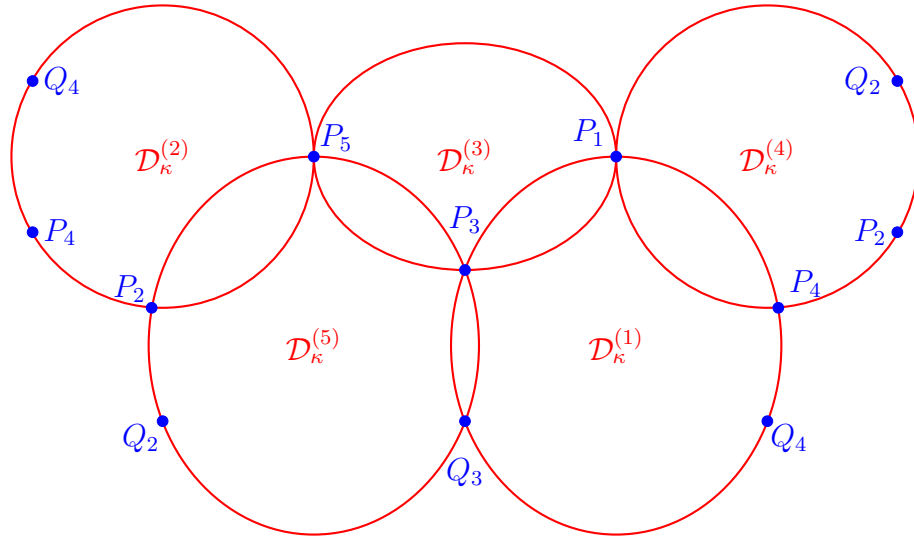
Ensuite, nous présentons les vecteurs tangents des courbes qui passent par les points  $P_1$  et  $P_5$ .

Courbe	Vecteur tangent en $P_1$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 2\eta : 0 : 2(\xi + \eta) : 0 : 0 : 0 : -2\eta : p_{1,1}(\beta_{4,1} - \eta, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{4,1} - \eta, \kappa) : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 1 : 0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 2\eta : 0 : 2(\xi + \eta) : 0 : 0 : 0 : -2\eta : p_{1,1}(\beta_{3,5} - (\xi + \eta), \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{3,5} - (\xi + \eta), \kappa) : 0 : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_5$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2\eta : 0 : 0 : 2\xi : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{3,5} - \xi, \kappa) : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{3,5} - \xi, \kappa))$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0 : \kappa_1)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2\eta : 0 : 0 : 2\xi : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa) : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa))$

Les tableaux ci-dessus montrent que les courbes  $\mathcal{D}_k^{(3)}$  et  $\mathcal{D}_k^{(4)}$ , et  $\mathcal{D}_k^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_k^{(3)}$  se croisent tangentiellement en les points  $P_1$  et  $P_5$ , respectivement. En faisant un calcul similaire, on vérifie que tous les autres vecteurs tangents sont différents. Par conséquent, le reste des croisements se produisent de manière transversale.

Le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  du système BI\*(5) dont deux des paramètres de déformation sont nuls et contigus, consiste alors de cinq courbes non singulières de genre 2 qui se croisent en huit points, toujours transversalement sauf pour deux points où le croisement est tangentiel. Nous représentons ci-dessous l'image de cette configuration. Pour rendre l'image exacte, les points étiquetés  $P_2$  doivent être identifiés, et de même pour les points étiquetés  $P_4$ ,  $Q_2$ , et  $Q_4$ .



Les informations contenues dans les tableaux précédents sont reformulées dans la proposition suivante :

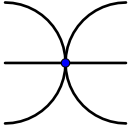
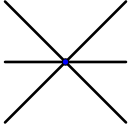
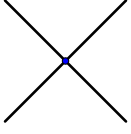
**Proposition 4.9.2.** Si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , alors le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  contient huit points à l'infini,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $Q_2, Q_3, Q_4$ , comme suit :

- $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  contient les points  $P_4, Q_4, P_1, P_3$  et  $Q_3$ .
- $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  contient les points  $P_5, P_2, P_4$  et  $Q_4$ .
- $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  contient les points  $P_1, P_3$  et  $P_5$ .
- $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  contient les points  $P_2, Q_2, P_4$ , et  $P_1$ .
- $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  contient les points  $P_3, Q_3, P_5, P_2$  et  $Q_2$ .

De plus, les croisements se font de la façon suivante :

- Pour  $i = 1, \dots, 5$ ,
  - $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,
  - $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .
- $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  croise transversalement les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  en les points  $P_3$  et  $Q_3$ , et  $P_4$  et  $Q_4$ , respectivement.  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  croise également  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  de manière transversale en les points  $P_2$  et  $Q_2$ .
- La courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  croise tangentiellement les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  en les points  $P_5$  et  $P_1$ , respectivement.

Le tableau suivant prouve que dans ce cas la formule d'adjonction est aussi vérifiée.

Type de croisement	Points	Contribution totale à $g_a$
	$P_1, P_5$	$4 \times 2 = 8$
	$P_2, P_3, P_4$	$3 \times 3 = 9$
	$Q_2, Q_3, Q_4$	$1 \times 3 = 3$

D'autre part, le tableau suivant montre la finitude des limites pour les séries admettant un pôle maximal pour  $\zeta = 0$ , lorsque l'on analyse les points dans  $K = \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$ , où  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})$ , c'est-à-dire les points  $\{P_1, \dots, P_5, Q_2, Q_3, Q_4\}$ .

Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$Q_2$	$z_6(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_6}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_3$	$z_7(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_7}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_4$	$z_8(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_8}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$

### Deux epsilons nuls non contigus

Dans le cas  $(0, \cdot, 0, \cdot, \cdot)$ , et afin de faciliter l'écriture, il nous suffit de définir deux paramètres non nuls  $\theta$  et  $\eta$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= 0, \\
 \varepsilon_2 &= \xi, \\
 \varepsilon_3 &= 0, \\
 \varepsilon_4 &= \eta, \\
 \varepsilon_5 &= -\xi - \eta.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

De même, les balances principales, correspondantes au cas général abordé dans ce chapitre, peuvent être spécialisées en utilisant (4.32) pour obtenir les balances principales du cas présent. Les courbes de Painlevé abstraites sont des courbes algébriques dont les équations affines sont présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\kappa}^{(1)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + (\xi + \eta)a^2b + \eta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) = 0, \\
 \Gamma_{\kappa}^{(2)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 - 2\eta a^2b + (\xi - \eta)ab^2 + p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) ab + \eta^2 a - \xi \eta b \\
 &\quad + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) = 0, \\
 \Gamma_{\kappa}^{(3)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + (\xi + 2\eta)a^2b + p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) ab + \eta(\xi + \eta)a + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) = 0, \\
 \Gamma_{\kappa}^{(4)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 + (\xi + 2\eta)ab^2 + p_{1,1}(\beta_{4,2}, \kappa) ab + \eta(\xi + \eta)b + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) = 0, \\
 \Gamma_{\kappa}^{(5)} &: a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1 a^2b^2 - (2\xi + \eta)a^2b - 2(\xi + \eta)ab^2 + p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) ab + \xi(\xi + \eta)a \\
 &\quad + (\xi + \eta)^2 b + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) = 0.
 \end{aligned}$$

Pour compléter ces courbes en des surfaces de Riemann compactes, il faut y ajouter certains points. Nous montrons dans la liste suivante les paramétrisations des courbes décrites ci-dessus, autour des points à l'infini à ajouter.



$\overline{\Gamma}_\kappa^{(1)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + \xi \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{1,3} - \frac{1}{2}(\xi + \eta), \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -(\xi + \eta) \zeta + \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{1,3} - (\xi + \eta), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\eta \zeta + \frac{1}{\eta} p_{0,0}(\beta_{1,3} - \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(2)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\xi + \eta) \zeta + p_{1,1}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \eta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\xi \zeta + \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{2,4} - \xi, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \eta \zeta - \frac{1}{\xi + \eta} p_{0,0}(\beta_{2,4} + \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(3)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + (\xi + 2\eta) \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{1,3} - \frac{1}{2}(\xi + 2\eta), \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\eta \zeta - \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{3,5} - \eta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -(\xi + \eta) \zeta + \frac{1}{\xi} p_{0,0}(\beta_{3,5} - (\xi + \eta), \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta^2}, \quad a = \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5).$

$\overline{\Gamma}_\kappa^{(4)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\xi + 2\eta)\zeta + p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \pm\sqrt{-p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa)\zeta^3 - \frac{1}{2}p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa)\zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\eta\zeta - \frac{1}{\xi}p_{0,0}(\beta_{4,1} - \eta, \kappa)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -(\xi + \eta)\zeta + \frac{1}{\xi}p_{0,0}(\beta_{4,1} - (\xi + \eta), \kappa)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(5)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + \eta\zeta + p_{1,1}\left(\beta_{5,2} + \frac{1}{2}(2\xi + \eta), \kappa\right)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \xi\zeta + \frac{1}{\eta}p_{0,0}(\beta_{5,2} + \xi, \kappa)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = (\xi + \eta)\zeta - \frac{1}{\eta}p_{0,0}(\beta_{5,2} + (\xi + \eta), \kappa)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta^2}, \quad a = (\xi + \eta)\zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{5,2} + (\xi + \eta), \kappa)\zeta^3 - \frac{1}{2}p_{1,1}(\beta_{5,2} + (\xi + \eta), \kappa)\zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5).$

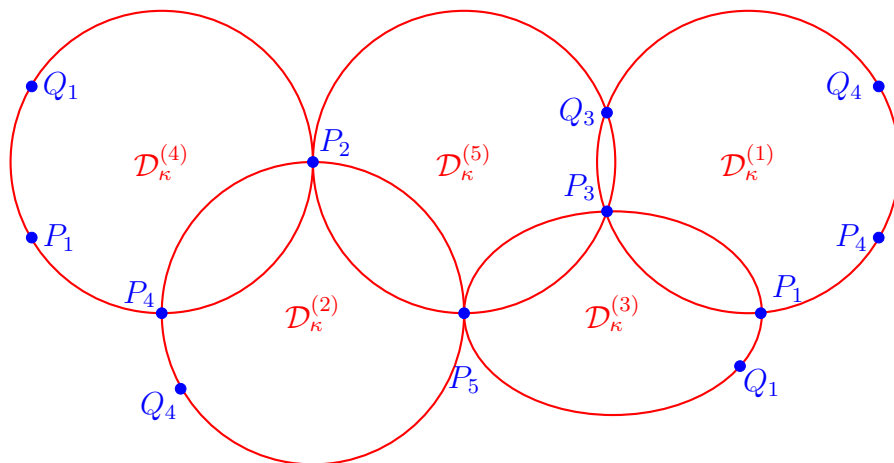
On note  $P_i$  et  $Q_i$  les points à l'infini, sous l'application  $\varphi_k^{(i)}$ , décrite en (4.26). Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau suivant :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\infty'_{\varepsilon,-}{}^{(i)}$	$Q_4$		$Q_1$		$Q_3$
$\infty^{(i)}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\infty'_{\varepsilon,+}{}^{(i)}$	$Q_3$	$Q_4$	$P_5$	$Q_1$	$P_2$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_3$	$P_4$		$P_1$	

Par rapport à la déformation générique, où tous les  $\varepsilon_i$  sont non nuls, nous voyons ici que les points  $Q_2$  et  $P_2$  coïncident, ainsi que les points  $Q_5$  et  $P_5$ . Autrement dit, lorsqu'il y a deux paramètres nuls non contigus (dans ce cas  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_3$ ), les points  $Q_2$  et  $P_2$  se sont contractés en un seul point, et de même pour les points  $Q_5$  et  $P_5$ .

Comme dans le cas précédent, on montre que les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$ , et  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  se croisent tangentiellement en les points  $P_2$  et  $P_5$ , respectivement. Un calcul similaire peut être effectué pour mettre en évidence que tous les autres vecteurs tangents sont différents. En conséquence, le reste des croisements se font de manière transversale.

Le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  du système BI\*(5) dont deux des paramètres de déformation sont nuls et non contigus, consiste alors de cinq courbes non singulières de genre 2 qui se croisent en huit points, toujours transversalement sauf pour deux points où le croisement est tangentiell. Nous représentons ci-dessous l'image de cette configuration. Pour rendre l'image exacte les points étiquetés  $P_1$  doivent être identifiés, et de même pour les points  $P_4$ ,  $Q_1$ , et  $Q_4$ .



Les informations contenues dans les tableaux précédents sont reformulées dans la proposition suivante.

**Proposition 4.9.3.** Si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ , alors le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  contient huit points à l'infini,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $Q_1, Q_3, Q_4$ , comme suit :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  contient les points  $P_4, Q_4, P_1, P_3$  et  $Q_3$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  contient les points  $P_5, P_2, P_4$  et  $Q_4$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  contient les points  $P_1, Q_1, P_3$  et  $P_5$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  contient les points  $P_2, P_4, P_1$  et  $Q_1$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  contient les points  $P_3, Q_3, P_5$  et  $P_2$ .

De plus, les croisements se font de la façon suivante :

Pour  $i = 1, \dots, 5$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .

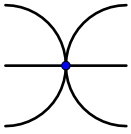
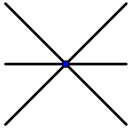
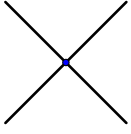
$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  croise transversalement les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  en les points  $P_3$  et  $Q_3$ , et  $P_4$  et  $Q_4$ , respectivement.  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  de manière transversale en les points  $P_1$  et  $Q_1$ .

Les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$ , et  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  se croisent tangentiellement en les points  $P_5$  et  $P_2$ , respectivement.

Par ailleurs, le tableau suivant montre la finitude des limites pour les séries admettant un pôle maximal pour  $\zeta = 0$ , lorsque l'on analyse les points dans  $K = \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$ , où  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})$ , c'est-à-dire les points  $\{P_1, \dots, P_5, Q_1, Q_3, Q_4\}$ .

Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$Q_1$	$z_5(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_5}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_3$	$z_7(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_7}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_4$	$z_8(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_8}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$

Le tableau suivant prouve que dans ce cas la formule d'adjonction est aussi vérifiée.

Type de croisement	Points	Contribution totale à $g_a$
	$P_2, P_5$	$4 \times 2 = 8$
	$P_1, P_3, P_4$	$3 \times 3 = 9$
	$Q_1, Q_3, Q_4$	$1 \times 3 = 3$

### 4.9.3 Trois epsilons nuls

Nous passons maintenant au cas dans lequel trois des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  sont nuls. Ceci équivaut à dire que deux des paramètres ne sont pas nuls. Comme dans la sous-section précédente, nous avons deux cas à distinguer : soit les deux epsilons non nuls sont contigus, soit ils ne le sont pas. Schématiquement,

$$(\cdot, \cdot, 0, 0, 0), \quad (\cdot, 0, \cdot, 0, 0).$$

La représentation ci-dessus nous motive à considérer, sans perte de généralité et grâce à l'automorphisme  $\sigma$ , que pour le premier cas  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$  et pour le deuxième cas  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ .

#### Deux epsilons non nuls contigus

Dans le cas  $(\cdot, \cdot, 0, 0, 0)$ , et afin de faciliter l'écriture, il nous suffit de définir un paramètre non nul  $\theta$  comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \theta, \\ \varepsilon_2 &= -\theta, \\ \varepsilon_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 &= 0, \\ \varepsilon_5 &= 0.\end{aligned}$$

Comme avant, on peut spécialiser les balances principales correspondantes au cas général, en utilisant (4.33), pour obtenir les balances principales du cas présent. Les courbes de Painlevé abstraites sont des courbes algébriques dont les équations affines sont détaillées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\kappa}^{(1)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + 2\theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) ab + \theta^2 b + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(2)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \theta a^2 b - 2\theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) ab + \theta^2 b + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(3)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + \theta a^2 b + \theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(4)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - 2\theta a^2 b - \theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{4,2}, \kappa) ab + \theta^2 a + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) = 0, \\ \Gamma_{\kappa}^{(5)} &: a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + 2\theta a^2 b + p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) ab + \theta^2 a + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) = 0.\end{aligned}$$

Nous écrivons ci-dessous une liste avec les paramétrisations des courbes décrites précédemment, autour des points à l'infini que l'on doit ajouter afin de compléter ces courbes en des surfaces de Riemann compactes.

$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(1)}$
$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - 2\theta \zeta + p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ a &= \frac{1}{\zeta^2}, & b &= \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) \zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5), \\ b &= \frac{1}{\zeta^2}, & a &= -\theta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa) \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa) \zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5).\end{aligned}$
$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(2)}$
$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + \theta \zeta + p_{1,1}\left(\beta_{2,4} + \frac{1}{2}(\theta), \kappa\right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= \theta \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{2,4} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ b &= \frac{1}{\zeta^2}, & a &= \theta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{2,4} + \theta, \kappa) \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{2,4} + \theta, \kappa) \zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5).\end{aligned}$

$\overline{\Gamma}_\kappa^{(3)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + p_{1,1} \left( \beta_{3,5} - \frac{1}{2}\theta, \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\theta \zeta + \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5} - \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\theta \zeta + \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5} - \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(4)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - \theta \zeta + p_{1,1}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \theta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \theta \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(5)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + 2\theta \zeta + p_{1,1}(\beta_{5,2} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = -\theta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{5,2} - \theta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{5,2} - \theta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5).$

On note  $P_i$  et  $Q_i$  les points à l'infini, sous l'application  $\varphi_k^{(i)}$ , décrite en (4.26). Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau suivant :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$		$Q_5$	$Q_1$		
$\infty^{(i)}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	$P_3$	$P_4$	$Q_5$	$Q_1$	$P_2$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$			$P_5$	$P_1$	

Par rapport à la déformation complète, nous voyons ici que les points  $Q_2$  et  $P_2$ ,  $Q_3$  et  $P_3$ , et  $Q_4$  et  $P_4$  coïncident. En d'autres termes, lorsqu'il y a deux paramètres non nuls contigus (dans ce cas  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ ), les points  $Q_2$  et  $P_2$  se sont contractés en un seul point, et de même pour les points  $Q_3$  et  $P_3$  d'une part, et pour  $Q_4$  et  $P_4$  d'autre part.

Dans les tableaux suivants, nous détaillons les vecteurs tangents des courbes qui passent par les points  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ .

Courbe	Vecteur tangent en $P_2$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2\theta : 0 : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2\theta : 0 : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa) : 0)$

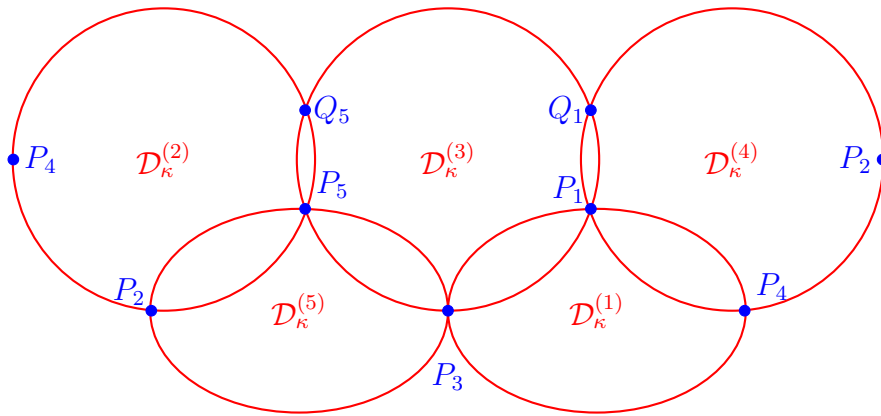
Courbe	Vecteur tangent en $P_3$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 2\theta : 0 : 2\theta : 0 : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa))$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1)$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 2\theta : 0 : 2\theta : 0 : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2} - \theta, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2} - \theta, \kappa))$



Courbe	Vecteur tangent en $P_4$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2\theta : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{2,4} + \theta, \kappa) : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{2,4} + \theta, \kappa) : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2\theta : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0)$

Les trois tableaux précédents montrent que les courbes  $\mathcal{D}_k^{(4)}$  et  $\mathcal{D}_k^{(5)}$ ,  $\mathcal{D}_k^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_k^{(5)}$ , et  $\mathcal{D}_k^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_k^{(2)}$  se croisent tangentiellement en les points  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ , respectivement. Un calcul similaire des autres vecteurs tangents permet de vérifier qu'ils sont des vecteurs différents. Par conséquent, tous les autres croisements sont de façon transversale.

Le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_k$  du système BI\*(5) dont deux des paramètres de déformation sont non nuls et contigus, consiste alors de cinq courbes non singulières de genre 2 qui se croisent en sept points, toujours transversalement sauf pour trois points où le croisement est tangential. Nous représentons ci-dessous l'image de cette configuration. Pour rendre l'image exacte, les points étiquetés  $P_2$  et  $P_4$  doivent être identifiés.



Les informations contenues dans les tableaux précédents sont reformulées dans la proposition suivante.

**Proposition 4.9.4.** Si  $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ , alors le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  contient sept points à l'infini,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $Q_1, Q_5$ , comme suit :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  contient les points  $P_4, P_1$  et  $P_3$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  contient les points  $P_5, Q_5, P_2$  et  $P_4$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  contient les points  $P_1, Q_1, P_3, P_5$  et  $Q_5$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  contient les points  $P_2, P_4, P_1$  et  $Q_1$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  contient les points  $P_3, P_5$  et  $P_2$ .

De plus, les croisements se font de la façon suivante :

Pour  $i = 1, \dots, 5$ ,

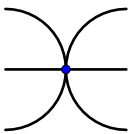
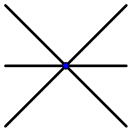
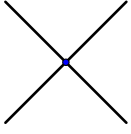
$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  croise transversalement les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  en les points  $P_5$  et  $Q_5$ , et  $P_1$  et  $Q_1$ , respectivement.

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  croise tangentiellement les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  en les points  $P_4$  et  $P_3$ , respectivement.  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  croise également la courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  de manière tangentielle en le point  $P_2$ .

Le tableau suivant prouve que dans ce cas la formule d'adjonction est aussi vérifiée.

Type de croisement	Points	Contribution totale à $g_a$
	$P_2, P_3, P_4$	$4 \times 3 = 12$
	$P_1, P_5$	$3 \times 2 = 6$
	$Q_1, Q_5$	$1 \times 2 = 2$

D'autre côté, le tableau suivant montre la finitude des limites pour les séries admettant un pôle maximal pour  $\zeta = 0$ , lorsque l'on analyse les points dans  $K = \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$ , où  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})$ , c'est-à-dire les points  $\{P_1, \dots, P_5, Q_1, Q_5\}$ .

Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$Q_1$	$z_5(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_5}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_5$	$z_9(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_9}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$

### Deux epsilon non nuls non contigus

Dans le cas  $(\cdot, 0, \cdot, 0, 0)$ , et afin de faciliter l'écriture, il nous suffit de définir un paramètre non nul  $\theta$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \theta, \\
 \varepsilon_2 &= 0, \\
 \varepsilon_3 &= -\theta, \\
 \varepsilon_4 &= 0, \\
 \varepsilon_5 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

En procédant comme avant, on peut spécialiser les balances principales correspondantes au cas général, en utilisant (4.34), pour obtenir les balances principales du cas présent. Les courbes de Painlevé abstraites admettent les équations affines suivantes :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\kappa}^{(1)} : & \quad a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + 2\theta a^2 b + 2\theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) ab + \theta^2 a + \theta^2 b \\
& \quad + p_{0,0}(\beta_{1,3}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_{\kappa}^{(2)} : & \quad a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \theta a^2 b + p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_{\kappa}^{(3)} : & \quad a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_{\kappa}^{(4)} : & \quad a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \theta a^2 b + p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) = 0, \\
\Gamma_{\kappa}^{(5)} : & \quad a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 - \theta ab^2 + p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) = 0.
\end{aligned}$$

Nous présentons ensuite une liste avec les paramétrisations des courbes décrites ci-dessus, autour des points à l'infini que l'on doit ajouter afin de compléter ces courbes en des surfaces de Riemann compactes.

$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(1)}$
$ \begin{aligned} a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + p_{1,1}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ a &= \frac{1}{\zeta^2}, & b &= -\theta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5), \\ b &= \frac{1}{\zeta^2}, & a &= -\theta \zeta^2 \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{1,3} - \theta, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{aligned} $
$\overline{\Gamma}_{\kappa}^{(2)}$
$ \begin{aligned} a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - \theta \zeta + p_{1,1}\left(\beta_{2,4} + \frac{1}{2}\theta, \kappa\right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= \theta \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{2,4} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3), \\ b &= \frac{1}{\zeta^2}, & a &= \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{2,4}, \kappa)} \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{aligned} $

$\overline{\Gamma}_\kappa^{(3)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + \theta \zeta + p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^3} - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \theta \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{3,5} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(4)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - \theta \zeta + p_{1,1} \left( \beta_{4,1} + \frac{1}{2} \theta, \kappa \right) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \theta \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{4,1} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta^2}, \quad a = \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^3} - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5).$
$\overline{\Gamma}_\kappa^{(5)}$
$a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + \theta \zeta + p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $a = \frac{1}{\zeta^2}, \quad b = \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^3} - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{5,2}, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3),$ $b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = \theta \zeta - \frac{1}{\theta} p_{0,0}(\beta_{5,2} + \theta, \kappa) \zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3).$

On note  $P_i$  et  $Q_i$  les points à l'infini, sous l'application  $\varphi_k^{(i)}$ , décrite en (4.26). Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau suivant.





**Proposition 4.9.5.** Si  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ , alors le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_\kappa$  contient sept points à l'infini,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $Q_1, Q_5$ , comme suit :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  contient les points  $P_4, P_1$  et  $P_3$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  contient les points  $P_5, Q_5, P_2$  et  $P_4$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  contient les points  $P_1, P_3, P_5$  et  $Q_5$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  contient les points  $P_2, Q_2, P_4$  et  $P_1$ .

$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  contient les points  $P_3, P_5, P_2$  et  $Q_2$ .

De plus, les croisements se font de la façon suivante :

Pour  $i = 1, \dots, 5$ ,

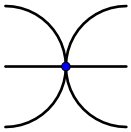
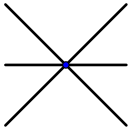
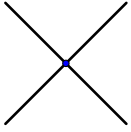
$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,

$\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .

Les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$ , et  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  se croisent transversalement en les points  $P_5$  et  $Q_5$ , et  $P_2$  et  $Q_2$ , respectivement.

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  croise tangentiellement les courbes  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$  en les points  $P_4$  et  $P_3$ , respectivement.  $\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$  croise tangentiellement la courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$  en le point  $P_1$ .

Le tableau suivant prouve que dans ce cas la formule d'adjonction est aussi vérifiée.

Type de croisement	Points	Contribution totale à $g_a$
	$P_1, P_3, P_4$	$4 \times 3 = 12$
	$P_2, P_5$	$3 \times 2 = 6$
	$Q_2, Q_5$	$1 \times 2 = 2$

D'autre part, le tableau suivant montre la finitude des limites pour les séries admettant un pôle maximal pour  $\zeta = 0$ , lorsque l'on analyse les points dans  $K = \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$ , où  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)} \left( \Gamma_\kappa^{(i)} \right)$ , c'est-à-dire les points  $\{P_1, \dots, P_5, Q_2, Q_5\}$ .



Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$Q_2$	$z_6(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_6}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$
$Q_5$	$z_9(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_9}(t; \zeta) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \neq 0$

#### 4.9.4 Tous les epsilons sont nuls

Enfin, le cas particulier qui nous reste à traiter est celui où tous les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  sont nuls ; autrement dit, le cas qui se réfère au système de Bogoyavlenskij-Itoh à 5 particules (sans déformation), dont nous rappelons le champ hamiltonien quadratique :

$$\dot{x}_1 = x_1(x_2 + x_3 - x_4 - x_5),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_3 + x_4 - x_5 - x_1),$$

$$\dot{x}_3 = x_3(x_4 + x_5 - x_1 - x_2),$$

$$\dot{x}_4 = x_4(x_5 + x_1 - x_2 - x_3),$$

$$\dot{x}_5 = x_5(x_1 + x_2 - x_3 - x_4).$$

Nous procédons de la même manière que pour tous les cas considérés précédemment. On peut donc spécialiser les balances principales correspondantes au cas général, en faisant  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ , pour obtenir les balances principales du cas non

déformé. La condition de nullité de tous les paramètres  $\varepsilon_i$  équivaut à dire que l'on peut exprimer tous les  $\beta_{i,j}$  en termes d'un seul d'entre eux. De ce fait, pour la  $i$ -ème famille des solutions de Laurent nous décidons d'exprimer les différents éléments de la preuve de l'intégrabilité algébrique en termes de  $\beta_{i,i+2}$ . Lorsque l'on substitue dans les intégrales premières  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  les séries de Laurent correspondantes à la balance principale de la  $i$ -ème famille des solutions, la courbe de Painlevé abstraite est alors la courbe algébrique  $\Gamma_\kappa^{(i)}$  décrite par l'équation affine :

$$F(a, b) = a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + p_{1,1}(\beta_{i,i+2}, \kappa) ab + p_{0,0}(\beta_{i,i+2}, \kappa) = 0.$$

La courbe affine  $\Gamma_\kappa$  peut être complétée en une surface de Riemann compacte, que nous allons noter  $\bar{\Gamma}_\kappa$ , en lui ajoutant trois points à l'infini. Nous notons  $\infty_{\varepsilon,-}$ ,  $\infty$  et  $\infty_{\varepsilon,+}$  ces points à l'infini.

On peut paramétriser la surface  $\bar{\Gamma}_\kappa$  sur un voisinage de chaque point à l'infini, en fonction d'un paramètre local  $\zeta$ . En effet,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\zeta}, & b &= -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 + p_{1,1}(\beta_{i,j}, \kappa) \zeta^2 + \kappa_1 p_{1,1}(\beta_{i,j}, \kappa) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4), \\ a &= \frac{1}{\zeta^2}, & b &= \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{i,j}, \kappa) \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{i,j}, \kappa) \zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5), \\ b &= \frac{1}{\zeta^2}, & a &= \pm \sqrt{-p_{0,0}(\beta_{i,j}, \kappa) \zeta^3 - \frac{1}{2} p_{1,1}(\beta_{i,j}, \kappa) \zeta^4} + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{aligned}$$

Pour  $i = 1, \dots, 5$ , on note  $P_i$  le point à l'infini, sous l'application  $\varphi_k^{(i)}$ , décrite en (4.26). Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau suivant :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$\infty^{(i)}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$

Par rapport à la déformation complète, nous remarquons l'absence des points  $Q_i$  ou, en d'autres termes, que les points  $Q_i$  et  $P_i$  coïncident. Autrement dit, lorsque tous les paramètres de déformation  $\varepsilon_i$  sont nuls, il peut être interprété que les points  $Q_i$  se sont contractés en les points  $P_i$ , pour  $i = 1, \dots, 5$ .

Dans les tableaux suivants, nous détaillons les vecteurs tangents des courbes qui passent par les points  $P_1, P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$ .

Courbe	Vecteur tangent en $P_1$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 1 :$ $\kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0 : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_2$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $0 : p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 : 0 :$ $0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $0 : p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{4,1}, \kappa) : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_3$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa))$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : -1 : 0 :$ $0 : 0 : \kappa_1 : 0 : -3\kappa_1)$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa) : 0 : p_{1,1}(\beta_{5,2}, \kappa))$

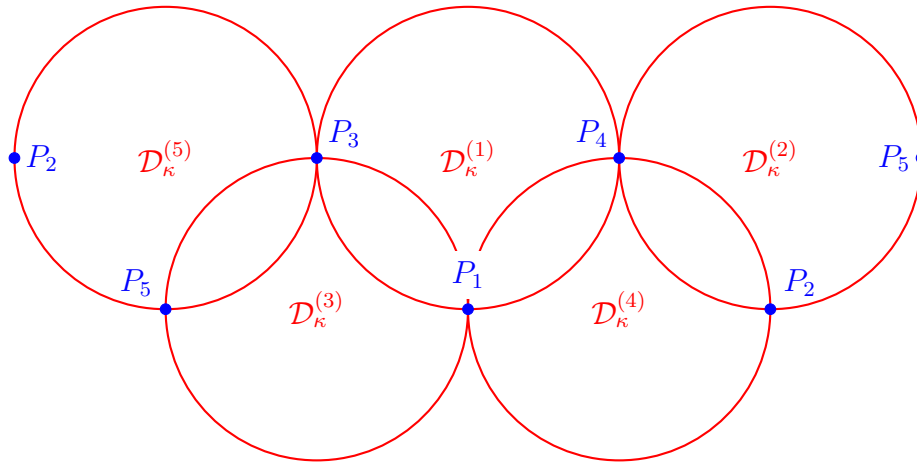
Courbe	Vecteur tangent en $P_4$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 :$ $-3\kappa_1 : 0 : 0 : \kappa_1 : 0)$
$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{1,3}, \kappa) : 0)$

Courbe	Vecteur tangent en $P_5$
$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $0 : p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa) : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{3,5}, \kappa))$
$\mathcal{D}_k^{(5)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 :$ $0 : -3\kappa_1 : 0 : 0 : \kappa_1)$
$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 :$ $0 : p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa) : 0 : 0 : p_{1,1}(\beta_{2,4}, \kappa))$

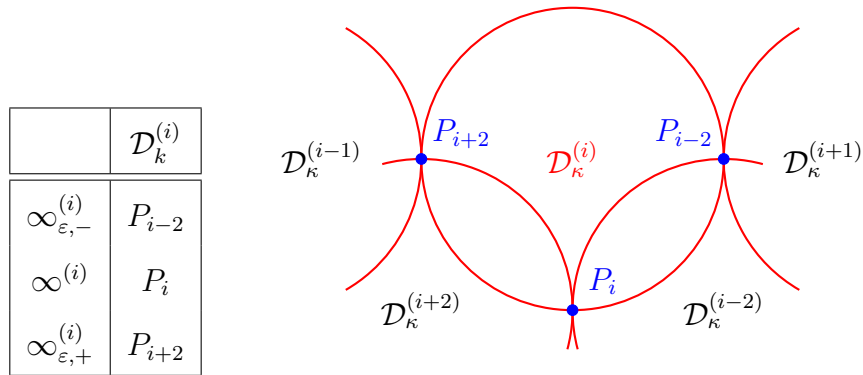
Les informations contenues dans les tableaux précédents sont reformulées dans la proposition suivante.

**Proposition 4.9.6.** Pour chaque  $i = 1, \dots, 5$ , la courbe  $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  contient les points  $P_{i-2}$ ,  $P_i$  et  $P_{i+2}$ , et croise ses voisins de la manière suivante :

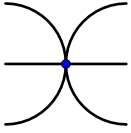
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-2)}$  en les points  $P_i$  et  $P_{i+2}$ ,
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise tangentielllement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i-1)}$  en le point  $P_{i+2}$ ,
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise tangentielllement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+1)}$  en le point  $P_{i-2}$ ,
- $\mathcal{D}_\kappa^{(i)}$  croise transversalement  $\mathcal{D}_\kappa^{(i+2)}$  en les points  $P_{i-2}$  et  $P_i$ .



Les informations des points à l'infini et de la configuration des courbes présentées précédemment peuvent être présentées schématiquement de manière plus succincte comme suit :



Le tableau suivant prouve que dans ce cas la formule d'adjonction est aussi vérifiée.

Type de croisement	Points	Contribution totale à $g_a$
	$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$	$4 \times 5 = 20$

D'autre côté, le tableau suivant montre la finitude des limites pour les séries admetant un pôle maximal pour  $\zeta = 0$ , lorsque l'on analyse les points dans  $K = \bigcup_{i=1}^5 K^{(i)}$ , où  $K^{(i)} := \mathcal{D}_\kappa^{(i)} \setminus \varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})$ , c'est-à-dire les points  $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ .

Point	Série	Limite
$P_1$	$z_{20}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{20}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_2$	$z_{21}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{21}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_3$	$z_{22}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{22}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_4$	$z_{23}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{23}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$
$P_5$	$z_{24}(t; \Gamma_\kappa)$	$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{z_{24}}(t; \zeta) = -t^5 + \mathcal{O}(t^6) \neq 0$

Comme nous l'avons montré dans la section 3.3, le système non déformé BI(5) est a.c.i., du fait que le système bien connu KM(5) est a.c.i. et via un isomorphisme de Poisson que l'on a construit entre les espaces des phases résultants après avoir fixé les valeurs des Casimir. Dans ce chapitre, nous pouvons donner maintenant, en particulier, une autre démonstration de l'intégrabilité algébrique de BI(5), en utilisant l'analyse de Painlevé.

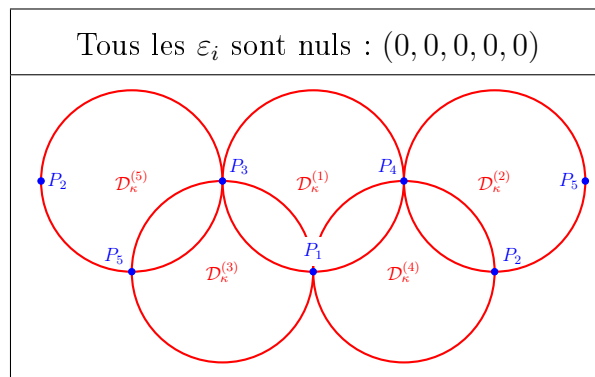
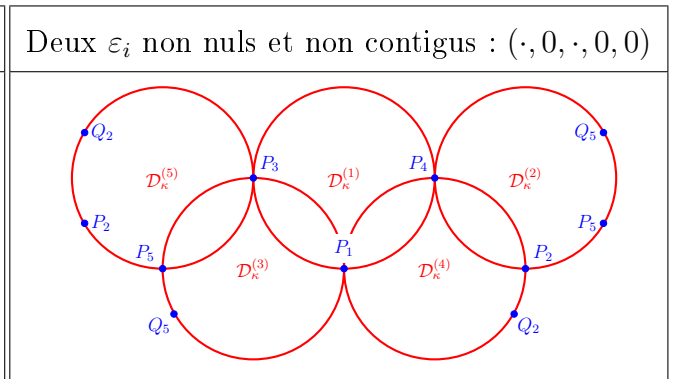
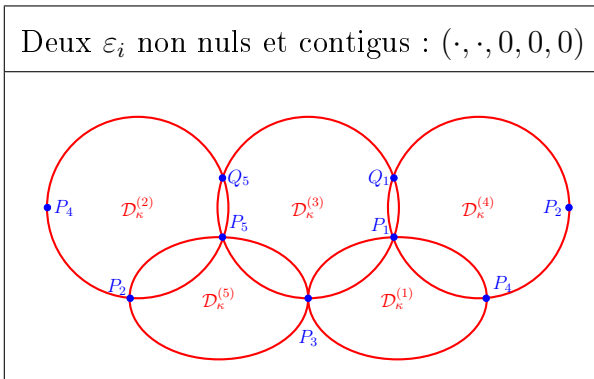
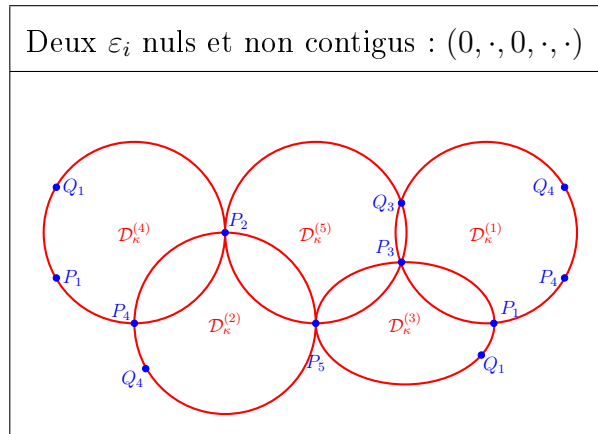
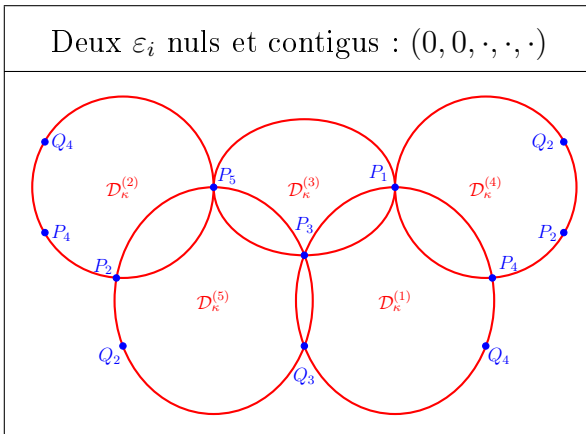
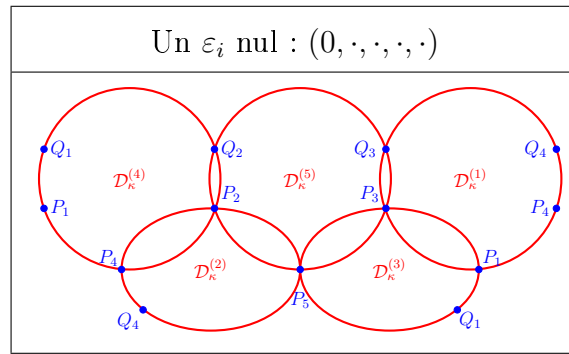
Pour terminer ce chapitre, en ce qui concerne les déformations spéciales du système BI(5), nous résumons dans le théorème suivant les résultats obtenus tout au long de cette dernière section.

**Théorème 4.9.7.** *Le système de Bogoyavlenskij-Itoh déformé à 5 particules est algébriquement intégrable pour tous les cas possibles de nullité des paramètres de déformation. Pour  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$  générique, la fibre  $\mathbf{H}_\kappa$  de l'application moment est isomorphe à une partie affine de la jacobienne de la courbe algébrique  $\bar{\Gamma}_\kappa$ , où  $\Gamma_\kappa$  est la courbe affine lisse de genre 2, définie par l'équation*

$$F(a, b) := a^3 b^2 + a^2 b^3 - \kappa_1 a^2 b^2 + p_{2,1}(\beta, \kappa) a^2 b + p_{1,2}(\beta, \kappa) a b^2 + p_{1,1}(\beta, \kappa) a b \\ + p_{1,0}(\beta, \kappa) a + p_{0,1}(\beta, \kappa) b + p_{0,0}(\beta, \kappa) = 0,$$

où les polynômes  $p_{i,j}$  se spécialisent en fonction de la nullité des paramètres de déformation  $\varepsilon_i$ .

Le diviseur à ajouter pour compléter la partie affine en une variété abélienne consiste de cinq copies de  $\bar{\Gamma}_\kappa$  qui forment une des six configurations suivantes, dépendant du nombre de paramètres de déformation qui sont nuls et leur contiguïté.



# Bibliographie

- [1] M. Adler, P. van Moerbeke, and P. Vanhaecke. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, volume 47 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] C. Birkenhake and H. Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [3] O. I. Bogoyavlenskij. Some constructions of integrable dynamical systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 51(4):737–766, 910, 1987.
- [4] O. I. Bogoyavlenskij. Integrable Lotka-Volterra systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 13(6):543–556, 2008.
- [5] P. A. Damianou, C. A. Evripidou, P. Kassotakis, and P. Vanhaecke. Integrable reductions of the Bogoyavlenskij-Itoh Lotka-Volterra systems. *J. Math. Phys.*, 58(3):032704, 17, 2017.
- [6] P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, and C. Tomei. The Toda flow on a generic orbit is integrable. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(2):183–232, 1986.
- [7] C. Evripidou, P. Kassotakis, and P. Vanhaecke. Integrable reductions of the dressing chain. *J. Comput. Dyn.*, 6(2):277–306, 2019.
- [8] C. A. Evripidou, P. Kassotakis, and P. Vanhaecke. Integrable deformations of the Bogoyavlenskij-Itoh Lotka-Volterra systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 22(6):721–739, 2017.
- [9] R. L. Fernandes and P. Vanhaecke. Hyperelliptic Prym varieties and integrable systems. *Comm. Math. Phys.*, 221(1):169–196, 2001.



- 
- [10] Y. Fittouhi. Étude des fibres singulières des systèmes de mumford impairs et pairs, 2017.
- [11] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [12] Y. Itoh. Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables. *Progr. Theoret. Phys.*, 78(3):507–510, 1987.
- [13] Y. Itoh. A combinatorial method for the vanishing of the Poisson brackets of an integrable Lotka-Volterra system. *J. Phys. A*, 42(2):025201, 11, 2009.
- [14] M. Kac and P. van Moerbeke. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices. *Advances in Math.*, 16:160–169, 1975.
- [15] T. E. Kouloukas, G. R. W. Quispel, and P. Vanhaecke. Liouville integrability and superintegrability of a generalized Lotka-Volterra system and its Kahan discretization. *J. Phys. A*, 49(22):225201, 13, 2016.
- [16] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau, and P. Vanhaecke. *Poisson structures*, volume 347 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [17] A. J. Lotka. *Analytical theory of biological populations*. The Plenum Series on Demographic Methods and Population Analysis. Plenum Press, New York, 1998. Translated from the 1939 French edition and with an introduction by David P. Smith and Hélène Rossert.
- [18] D. Mumford. On the equations defining abelian varieties. I. *Invent. Math.*, 1:287–354, 1966.
- [19] Y. B. Suris. *The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach*, volume 219 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [20] P. H. van der Kamp, T. E. Kouloukas, G. R. W. Quispel, D. T. Tran, and P. Vanhaecke. Integrable and superintegrable systems associated with multi-sums of products. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 470(2172):20140481, 23, 2014.
- [21] P. Vanhaecke. Linearising two-dimensional integrable systems and the construction of action-angle variables. *Math. Z.*, 211(2):265–313, 1992.

- 
- [22] P. Vanhaecke. *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, volume 1638 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.
- [23] A. P. Veselov and A. B. Shabat. A dressing chain and the spectral theory of the Schrödinger operator. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 27(2):1–21, 96, 1993.
- [24] V. Volterra. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1990. Reprint of the 1931 original.

---

# Sur l'intégrabilité algébrique des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés à 5 particules

---

## Résumé

Cette thèse a pour but l'étude de l'intégrabilité algébrique des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés à 5 particules. Nous nous appuyons sur la méthode décrite par l'analyse de Kowalevski-Painlevé pour établir ce résultat d'intégrabilité. De plus, nous montrons que la nullité ou non des paramètres de déformation a des fortes répercussions sur la géométrie du diviseur à l'infini de la fibre générique du système en question. Ceci permet d'exhiber sept configurations de courbes différentes, sur les jacobiniennes (hyperelliptiques) de dimension 2.

**Mots-clés :** systèmes intégrables, variétés abéliennes, intégrabilité algébrique

---

## Abstract

This thesis is devoted to the study of the algebraic integrability of the deformed 5-particle Bogoyavlenskij-Itoh systems. We rely on the method described by the Kowalevski-Painlevé analysis to establish this integrability result. In addition, we show that the nullity or not of the deformation parameters strongly affects the geometry of the divisor at infinity of the generic fiber of the system in question. This allows to show seven different curve configurations, on 2-dimensional (hyperelliptic) Jacobians.

**Keywords:** integrable systems, abelian varieties, algebraic integrability