



HAL
open science

Le rôle de la schématisation segmentaire dans la résolution de problèmes arithmétiques : une étude de cas en 3ème cycle du primaire en Tunisie

Nejib Belguesmi

► To cite this version:

Nejib Belguesmi. Le rôle de la schématisation segmentaire dans la résolution de problèmes arithmétiques : une étude de cas en 3ème cycle du primaire en Tunisie. Education. Université de Bordeaux; Université virtuelle de Tunis, 2021. Français. NNT : 2021BORD0039 . tel-03245717

HAL Id: tel-03245717

<https://theses.hal.science/tel-03245717v1>

Submitted on 2 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE EN COTUTELLE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX ET DE L'UNIVERSITÉ VIRTUELLE DE TUNIS

ÉCOLE DOCTORALE SP2 – UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DISEMEF – INSTITUT SUPÉRIEURE DE L'ÉDUCATION ET DE LA
FORMATION CONTINUE

SPÉCIALITÉ : Sciences de l'Éducation - Didactique des Mathématiques

Par Nejb BELGUESMI

**Le rôle de la schématisation segmentaire dans la résolution de
problèmes arithmétiques : une étude de cas en 3^{ème} cycle du primaire
en Tunisie**

Sous la direction de Mme **Lalina COULANGE** et Mme **Yomna REBAÏ**

Soutenue le 9 février 2021

Membres du jury :

Directrices de thèse

Mme Lalina COULANGE : Professeur, INSPÉ de l'Académie
de Bordeaux, Université de Bordeaux.

Mme Yomna REBAÏ : Maître de Conférences, HDR, École
Polytechnique de Tunisie, Université de Carthage.

Rapporteuses

Mme Magali HERSANT : Professeur, INSPÉ de L'Académie
de Nantes, Université de Nantes.

Mme Faïza CHELLOUGUI : Maître de Conférences,
HDR, Université de Carthage.

Président

M. Abdelmajid NACEUR : Professeur,
Directeur de l'ISEFC, Université De Tunis.

Examineurs

Mme Christine CHAMBRIS : Maître de Conférences,
Université Cergy-pontoise.

M. Rahim KOUKI : Maître de Conférences, HDR,
Université de Tunis.

M. Grégory TRAIN : Maître de Conférences, INSPÉ
de l'Académie de Bordeaux, Université de Bordeaux.

Invitée

Mme Isabelle BLOCH : Professeur émérite, Université de Bordeaux.

Titre :

Le rôle de la schématisation segmentaire dans la résolution de problèmes arithmétiques : une étude de cas en 3^{ème} cycle du primaire en Tunisie

Résumé :

Dans notre recherche, nous nous intéressons aux connaissances et savoirs mathématiques relatifs à la résolution de problèmes arithmétiques outillée par un type de schémas particulier : le schéma « segmentaire ».

Nous nous centrons plus spécifiquement sur des problèmes arithmétiques classiquement proposés en fin d'école primaire en Tunisie, que nous modélisons par des énoncés-schémas fondamentaux – en leur associant des variables didactiques, en vue d'élucider les connaissances mathématiques possiblement en jeu dans leur résolution.

Une étude de manuels, de réponses d'élèves (tunisiens et français) à un questionnaire et une expérimentation conduite dans deux classes tunisiennes de fin de primaire (élèves de 11 – 12 ans) ont permis d'identifier un ensemble de conditions et des contraintes à même de peser sur l'enseignement et l'apprentissage de telles connaissances et savoirs mathématiques. Nous avons notamment identifié des systèmes d'attentes implicites régissant les comportements d'élèves et d'enseignants dans la résolution de tels problèmes, que nous modélisons par des contrats didactiques de différentes échelles.

Mots clés : Problèmes arithmétiques – Schématisation – Énoncés-schémas fondamentaux – Théorie des situations didactiques – Variables didactiques – Contrat didactique – Méso-contrat.

Title :

The role of segmental schematization in solving arithmetic problems : a case study in the third cycle of primary education in Tunisia

Abstract :

In our research, we are interested in the mathematical knowledge and skills related to the solution of arithmetic problems using a particular type of schema : the «segmental» schema.

More specifically, we focus on arithmetic problems classically proposed at the end of elementary school in Tunisia, which we model using fundamental schema statements – by associating didactic variables to them – in order to elucidate the mathematical knowledge that may be involved in their resolution.

A study of textbooks, pupil responses (Tunisian and French) to a questionnaire, and an experiment conducted in two Tunisian classes at the end of elementary school (pupils aged 11 – 12 years) have made it possible to identify a set of conditions and constraints that may influence the teaching and learning of such mathematical knowledge and skills. In particular, we have identified implicit expectation systems governing the behavior of students and teachers in solving such problems, which we model through didactic contracts of different scales.

Keywords : Arithmetical problems – Schematization – Fundamental statement-diagrams – Didactical situations – Didactical variables – Didactical contract – Meso-contract.

Dédicace :

Je dédie cette thèse

Aux âmes de mes deux parents, Mohammed et Fatma,

À ma famille...

Remerciements :

- *Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à Madame Lalina COULANGE et Madame Yomna REBAÏ qui ont accepté de diriger ma thèse. Leurs contributions étaient primordiales à l'élaboration et à l'aboutissement de ce travail de recherche. Je remercie Madame Lalina d'avoir savouré à ses côtés les goûts gracieux de la persévérance et de la découverte et Madame Yomna pour son dévouement inconditionnel.*
- *Je remercie Madame Magali HERSANT et Madame Faïza CHELLOUGUI d'avoir accepté de se rendre disponibles pour être rapporteuses de cette thèse et de faire partie du jury.*
- *Mes remerciements vont également à Monsieur Abdelmajid NACEUR pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de cette thèse.*
- *Je remercie cordialement Madame Christine CHAMBRIS, Monsieur Rahim KOUKI et Monsieur Grégory TRAIN d'avoir accepté de se rendre disponibles et faire partie du jury de cette thèse en tant qu'examineurs.*
- *Toute ma gratitude pour Madame Isabelle BLOCH qui m'a honoré d'être membre de jury en tant qu'invitée.*
- *Ma gratitude va aussi à Madame Magali HERSANT et à Madame Martine JAUBERT qui ont su trouver le temps de me lire, de m'encourager et de m'éclairer de leurs remarques judicieuses, à Monsieur Grégory TRAIN pour sa disponibilité et ses conseils lors de l'élaboration de ce travail et à Madame Claire MARGOLINAS d'avoir accepté à l'aube de mes études doctorales l'annotation de mon mémoire de master.*
- *Enfin je remercie ma famille, soumise à rude épreuve lors de ces quatre dernières années, de m'avoir soutenu tout le long de ce travail.*

Table des matières

Chapitre A	17
Une problématique centrée sur la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire	17
I. Introduction.....	18
II. Contexte et point de départ de l'étude	21
1. Le point de départ.....	21
2. Des problèmes arithmétiques ou « entre arithmétique et algèbre » ?	23
III. La schématisation, une démarche pour résoudre les problèmes.....	28
1. Des travaux en didactique des mathématiques prenant d'autres schémas pour résoudre d'autres problèmes comme objet d'étude	28
2. Des travaux qui évoquent le schéma segmentaire comme outil de résolution de problèmes arithmétiques.....	31
IV. Organisation générale de la thèse.....	35
Chapitre B	39
Une problématique centrée sur les connaissances mathématiques en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques et les schémas segmentaires.....	39
Des couples « énoncés-schémas » fondamentaux.....	39
Partie B1 :.....	40
Outils d'analyse des connaissances mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire	40
I. Une démarche de type situation fondamentale : des énoncés-schémas fondamentaux et des variables didactiques.....	41
II. Structures et complexités d'énoncés de problèmes arithmétiques.....	47
1. Des structures d'énoncés entre arithmétique et algèbre.....	47
2. Une complexité et des structures d'énoncés arithmétiques à réinterroger au regard de l'outil schéma « segmentaire ».....	52
3. Des relations entre les grandeurs du problème et leur expression.....	63
III. Conversions et traitements dans le registre de la langue naturelle et graphique segmentaire	68
1. Traitements liés aux relations additives dans les deux registres de représentation.....	71
a. Relations additives simples.....	71

b. Relations additives rattachées à des problèmes déconnectés à deux branches.....	73
c. Relations additives rattachées à des problèmes déconnectés à trois branches.....	75
2. Traitements liés aux relations multiplicatives.....	79
a. Relations multiplicatives simples rattachées à des problèmes connectés	80
b. Relations multiplicatives rattachées à des problèmes déconnectés à trois branches.....	82
3. Traitements liés aux relations mixtes (multiplicatives et additives).....	86
a. Relations mixtes (multiplicatives et additives) rattachées à des problèmes déconnectés à deux branches.....	87
b. Relations mixtes (multiplicatives et additives) rattachées à des problèmes déconnectés à trois branches	91
c. En résumé	94
IV. Des systèmes d'unités et d'unités relatifs caractéristiques des connaissances mathématiques en jeu dans la production et l'interprétation de schémas.....	97
1. Relations multiplicatives et schématisation	97
2. Relations additives et schématisation.....	99
3. Limites de la schématisation et choix de la stratégie optimale dans la résolution des problèmes en lien avec les 5 ^{ème} et 6 ^{ème} énoncés-schémas fondamentaux.....	102
4. Des connaissances mathématiques pour produire/interpréter des schémas.....	105
Partie B2.....	110
Description des connaissances mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire	110
Introduction.....	111
I. Identification des valeurs de la variable associée à chaque énoncé-schéma fondamental et connaissances mathématiques en jeu dans la résolution des problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire.....	113
1. 1 ^{er} énoncé-schéma fondamental	113
2. 2 ^{ème} énoncé-schéma fondamental.....	119
3. 3 ^{ème} énoncé-schéma fondamental.....	124
4. 4 ^{ème} énoncé-schéma fondamental.....	130

5. 5 ^{ème} énoncé-schéma fondamental.....	134
6. 6 ^{ème} énoncé-schéma fondamental.....	148
Conclusion du chapitre B.....	155
Chapitre C.....	157
Etude de manuels scolaires.....	157
Quelques conditions et contraintes sur l'enseignement de savoirs dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par les schémas segmentaires	157
I. Introduction.....	158
1. But de l'analyse	158
2. Manuels scolaires retenus et première analyse	159
3. Présentation des manuels scolaires retenus	160
a. Bodard, Bréjaud, Le Calcul quotidien CM2 (1960)	160
b. Brandicourt, Penneçot, Problèmes et calculs CM1 (1963)	161
c. Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître	163
d. Guide pédagogique CM1. Méthode de Singapour	164
e. Guide pédagogique CM2. Méthode de Singapour	166
II. Deuxième analyse des manuels scolaires retenus.....	170
1. Absences/présences d'énoncés-schémas fondamentaux dans différents manuels scolaires.....	170
2. Quelques premières caractéristiques des énoncés-schémas au sein des manuels.....	171
a. Types de schémas	172
b. Types de relations entre les grandeurs dans les énoncés de problèmes	173
3. Etude de connaissances mathématiques enseignées sur la résolution des énoncés-schémas fondamentaux dans les manuels	175
a. 1 ^{er} énoncé-schéma fondamental.....	176
i. Choix de l'unité graphique	176
ii. Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés.....	178
b. 2 ^{ème} énoncé-schéma fondamental	182
i. Choix de l'unité graphique	182

ii.	Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés.....	185
c.	3 ^{ème} énoncé-schéma fondamental	186
i.	Choix de l'unité graphique	186
ii.	Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés.....	188
d.	4 ^{ème} énoncé-schéma fondamental	190
i.	Choix de l'unité graphique	190
ii.	Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés.....	192
e.	5 ^{ème} énoncé-schéma fondamental	194
i.	Choix de l'unité graphique	195
ii.	Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés.....	197
f.	6 ^{ème} énoncé-schéma fondamental	201
i.	Choix de l'unité graphique	202
ii.	Faits observables sur les rapports entre choix d'unités graphiques, structures de problèmes et complexités de résolutions	204
III.	Conclusion.....	208
	Chapitre D.....	211
	Etude d'un questionnaire posé à des élèves tunisiens et français et d'une expérimentation en classe de sixième année de base en Tunisie	211
	Des conditions et contraintes sur l'enseignement et l'apprentissage de connaissances et de savoirs sur la résolution de problèmes arithmétiques en lien avec les schémas segmentaires	211
I.	Introduction.....	212
1.	Méso-contrats liés à la production de schémas segmentaires	216
a.	Pour les relations multiplicatives	216
b.	Pour les relations additives.....	219
2.	Méso-contrats liés à des généralisations.....	220
a.	Méso-contrats modélisés par des formules en l'absence/présence de schémas	221
b.	Méso-contrats modélisés par des formules après interprétation de schémas	222
c.	Méso-contrat d'interprétation généralisée via la schématisation	224

3.	Effets potentiels des méso-contrats didactiques	225
a.	Un effet productif d'un méso-contrat ne garantit pas la réussite (réussite : résolution correcte d'un problème).....	225
b.	Effets productifs/contre productifs de méso-contrats dus à l'interprétation	226
II.	Analyse <i>a priori</i> du questionnaire	230
1.	Analyse <i>a priori</i> de la feuille n°1 du questionnaire	230
a.	Problème 5 de la Feuille n° 1.....	231
b.	Problème 3 de la Feuille n° 1.....	234
c.	Problème 1 de la Feuille n° 1.....	236
d.	Problème 4 de la Feuille n° 1.....	239
e.	Problème 2 de la Feuille n° 1.....	243
2.	Analyse <i>a priori</i> de la feuille n°2 du questionnaire	245
3.	Analyse <i>a priori</i> de la feuille n°3 du questionnaire	249
III.	Analyse <i>a posteriori</i> du questionnaire.....	257
1.	Analyse des réponses de la feuille 1 du questionnaire	257
a.	Introduction	257
b.	La production d'un schéma correct ne garantit pas la réussite.....	259
i.	Productions correctes de schémas qui relèvent du contrat didactique.....	259
ii.	Effet non productif du méso-contrat R_S_D.....	263
c.	Des effets « classes » en Tunisie	265
d.	Des effets « élèves » en Tunisie et en France.....	270
2.	Analyse des réponses de la feuille 2 du questionnaire	277
a.	Des réussites qui relèvent du contrat	277
b.	Impact des structures des problèmes sur les productions des élèves	280
c.	Le schéma comme une prise d'appui pour résoudre les problèmes.	283
d.	Trajectoire improbable pour résoudre un problème déconnecté à trois branches de type Composition	287
e.	Evolution de la réussite	289
3.	Analyse des réponses de la feuille 3 du questionnaire	290
IV.	Présentation globale et analyse <i>a priori</i> de la séquence expérimentale	294

1. Des contrats didactiques à installer dans des représentations segmentaires - la question du choix de l'unité graphique.....	298
2. D'une relation simple à une composition de relations :.....	300
3. La double désignation (fonctionnelle) liée à une grandeur.....	302
4. Une progressivité vers la résolution d'un problème "mixte".....	304
V. Séances de la partie expérimentale et analyse a posteriori.....	306
1. 1 ^{ère} Séance.....	306
a. 1 ^{ère} phase expérimentée.....	306
i. Installation d'un méso-contrat de représentation (R _{us_m_e}) d'une relation multiplicative entière.....	307
ii. Confusion entre relation additive et multiplicative.....	309
iii. Officialisation de la règle du contrat R _{us_m_e}	310
b. 2 ^{ème} phase expérimentée.....	315
i. Installation du méso-contrat régi par la règle R _{Rme_S}	316
c. 3 ^{ème} phase expérimentée.....	320
i. Installation d'un méso-contrat (R _{us_m_f}) de représentation d'une relation multiplicative fractionnaire.....	320
d. 4 ^{ème} phase expérimentée.....	322
i. Des difficultés liées à la mise en œuvre de la règle R _{us_m_f}	322
ii. Ré-initiation de la mise en œuvre de la règle R _{us_m_f}	324
iii. Instauration du méso-contrat régi par la règle R _{Rmf_S}	325
2. 2 ^{ème} Séance.....	329
a. 1 ^{ère} phase expérimentée.....	330
i. Une congruence sémantique non respectée.....	330
ii. Un effet productif d'un méso-contrat ne garantit pas la réussite.....	332
b. 2 ^{ème} phase expérimentée.....	336
i. Pilotage didactique pour une mise en œuvre du méso-contrat lié à R _{us_m_e}	337
ii. Justification d'une renégociation d'un nouveau contrat didactique.....	340
iii. Répondre à un système d'attente est-il un facteur de réussite ?.....	341
c. 3 ^{ème} phase expérimentée.....	343
i. Confusion entre relation additive et multiplicative.....	344
ii. Une représentation coûteuse est-elle source d'erreurs ?.....	346

iii.	Représentations qui relèvent du contrat et éventualités de réussite.....	348
d.	4 ^{ème} phase expérimentée.....	350
i.	Des difficultés que les élèves éprouvent lors de la schématisation.....	351
ii.	Trajectoires possibles de résolution de l'énoncé en jeu.....	353
iii.	Consolidation de nos attentes au niveau de la production et de l'interprétation du schéma associé au problème posé.....	357
3.	3 ^{ème} séance.....	361
a.	1 ^{ère} phase expérimentée.....	362
i.	Effets redondants du contrat didactique.....	363
ii.	Une double désignation mal négociée.....	365
iii.	Installation du méso-contrat régi par la règle R_Rme_D.....	368
b.	2 ^{ème} phase expérimentée.....	370
i.	Types de schémas et représentations.....	370
ii.	La résolution du problème posé outillée par un schéma segmentaire : quelles connaissances mathématiques mises en œuvre par les élèves ?.....	372
iii.	Méso-contrat d'interprétation et effet non productif.....	374
iv.	Initiation de la mise en œuvre de la double désignation fonctionnelle et du changement d'unité de référence.....	377
4.	4 ^{ème} séance.....	379
a.	Des difficultés qui impactent la représentation.....	381
b.	Une production correcte d'un schéma ne garantit pas une interprétation correcte.....	383
c.	Une mise en commun avec la 6C.....	384
VI.	Conclusion.....	388
Chapitre E.....		390
I.	Conclusion générale.....	391
1.	Connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes – outillée par la schématisation segmentaire.....	392
2.	Conditions d'enseignement des connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes - outillée par la schématisation segmentaire.....	393

3. Conditions liées à l'apprentissage des connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes - outillée par la schématisation segmentaire et des effets de contrat didactique	395
II. Perspectives.....	398
Références bibliographiques	400
Annexes	404
1. Annexe 1 : feuille n°1 - questionnaire	404
2. Annexe 2 : feuille n°2 - questionnaire	405
3. Annexe 3 : feuille n°3 - questionnaire	408
4. Annexe 4 : feuille n°1 et 2 - séance 1 de la séquence expérimentale	410
5. Annexe 5 : feuille n°1 et 2 - séance 2 de la séquence expérimentale	412
6. Annexe 6 : feuille n°1 et 2 - séance 3 de la séquence expérimentale	413
7. Annexe 7 : feuille de la séance 4 de la séquence expérimentale	415
8. Annexe 8 : connaissances convoquées pour résoudre le problème 5 de la feuille 1 du questionnaire	416
9. Annexe 9 : connaissances convoquées pour résoudre le problème de la feuille n°2 (séance 3 de la séquence expérimentale)	417
10. Annexe 10 : hiérarchie de complexité et types de relations	418
11. Annexe 11 : problèmes connectés et déconnectés	419
12. Annexe 12 : énoncés fondamentaux, grandeurs connues et inconnues et nombre de relations entre les grandeurs liées aux énoncés.....	420
13. Annexe 13 : règles de contrat.....	422
14. Annexe 14 : ورقة عدد 1 - دراسة استقصائية	423
15. Annexe 15 : ورقة عدد 2 - دراسة استقصائية	425
16. Annexe 16 : ورقة عدد 3 - دراسة استقصائية	428
17. Annexe 17 : ورقة عدد 1 و 2 - تجربة عدد 1	430
18. Annexe 18 : ورقة عدد 1 و 2 - تجربة عدد 2	431
19. Annexe 19 : ورقة عدد 1 و 2 - تجربة عدد 3	433
20. Annexe 20 : ورقة التجربة عدد 4	435
21. Annexe 21 : informations sur les classes tunisiennes et françaises	435

Chapitre A

Une problématique centrée sur la résolution de
problèmes arithmétiques outillée par la
schématisation segmentaire

I. Introduction

La résolution de problèmes constitue un aspect essentiel de la maîtrise des connaissances en mathématiques. Elle est d'ailleurs souvent considérée comme une des compétences majeures à acquérir dans cette discipline par l'institution scolaire.

Toutefois, les façons d'aborder la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques peuvent paraître d'emblée assez multiples : comment s'assurer que des connaissances et des savoirs mathématiques enseignés deviennent « outils » dans la résolution de problèmes ? Au-delà des connaissances et des savoirs, s'agit-il d'enseigner des démarches, des méthodes ou d'autres outils plus spécifiques de la résolution de problèmes en mathématiques ?

La résolution de problèmes arithmétiques, parfois qualifiés d'énoncés verbaux (Feyfant, 2015) est une thématique « tout naturellement » au cœur de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques, et ce, depuis plusieurs années. Cette thématique recouvre d'ailleurs une grande diversité d'approches théoriques (didactiques, psychologiques, etc.) et d'entrées possibles : champs conceptuels additif ou multiplicatif (Vergnaud, 1993), transition arithmétique et algèbre (Bednarz & Janvier, 1994), modélisation (Chevallard, 1989), problèmes complexes ou basiques (Houdement, 2017), etc. pour n'en citer que quelques-unes parmi celles que nous avons eu l'occasion d'étudier de plus près.

La recherche conduite dans cette thèse s'appuie sur une enquête préalable menée dans le cadre de notre mémoire de master (Belguesmi, 2016).

Dans ce travail, nous avons repéré une variété de problèmes arithmétiques classiquement donnés à résoudre aux élèves de fin de primaire dans l'institution tunisienne. Une expérimentation conduite dans les classes autour de la résolution de ces problèmes avait permis de montrer des phénomènes liés à l'utilisation d'un type de schémas particulier (parmi d'autres) pour résoudre ces problèmes : le schéma que nous qualifions de « segmentaire »¹.

Dans notre recherche, nous nous intéressons ainsi aux connaissances et savoirs mathématiques relatifs à la résolution de problèmes arithmétiques outillée par ce type de schémas en particulier.

¹ Le choix d'un tel qualificatif sera justifié plus loin.

Ces schémas étaient présents dans l'arithmétique autrefois enseignée en France (Chevallard, 1984a ; Coulange, 2001 ; Julo, 1995, 2000)² et ont le même rôle que ceux parfois actuellement plus connues sous le nom de « modèle barres »³, pour résoudre des problèmes arithmétiques. La question des connaissances et des savoirs relatifs à la production et à l'interprétation de schémas (et de ce type de schémas en particulier) par les élèves dans la résolution arithmétique de problèmes a été toutefois assez peu mise à l'étude à ce jour dans le domaine de la didactique des mathématiques.

Pour autant, c'est une question qui mérite toute notre attention, du fait notamment de l'actualité qui semble (re)mettre le « modèle barres » au goût du jour, au sein de l'institution française. Dans le cadre de la recherche présentée, nous étudierons également plus avant ce qui se passe au sein d'une autre institution scolaire, l'école primaire tunisienne, au sein de laquelle un enseignement de la résolution de problèmes arithmétiques outillée par le schéma segmentaire ne semble pas avoir disparu (Belguesmi, 2016) des pratiques d'enseignement de mathématiques. Précisons d'ailleurs dès maintenant qu'il ne s'agira pas ici, de prendre parti « pour » ou « contre » les schémas segmentaires, mais plutôt de chercher à approfondir la question des connaissances mathématiques potentiellement mises en jeu dans la production et l'interprétation de tels schémas par des élèves des deux institutions, et d'interroger un ensemble de conditions et de contraintes relatives à l'apprentissage et l'enseignement de telles connaissances.

Notre mémoire de master avait permis de produire des premiers résultats sur les potentialités, les limites et les rôles de schémas produits par les élèves de la fin du primaire en Tunisie (11 à 12 ans) (dont des schémas segmentaires) dans la résolution de problèmes arithmétiques. Une expérimentation en classe reposant sur une

² Julo parle d'une « schématisation de l'énoncé [de partage en parties inégales] sous forme de segments de droite », (op. cité, p. 1).

³ Notons que nous préférons parler de schémas segmentaires au lieu de schémas ou de modèles « barres », y compris lorsque la représentation graphique convoquée est une « bande ». Les actions convoquées dans le registre graphique sur ce type de schémas relèvent davantage de la grandeur longueur que de la grandeur aire (s'agissant d'actions de report d'une grandeur étalon par exemple). Nous ne faisons aucune différence entre les deux types de schémas.

succession d'énoncés de problèmes donnés à résoudre aux élèves⁴, a ainsi montré une acquisition progressive de pratiques de la schématisation segmentaire qui permettaient d'outiller des stratégies de résolution de ces problèmes par les élèves. Nous avons conduit une expérimentation visant à enseigner la démarche de schématisation pour résoudre des problèmes dans trois classes de sixième année de primaire tunisiennes.

Nous livrons ci-après quelques résultats de cette première étude qui ont constitué le point de départ de la réflexion conduite dans la thèse.

⁴ Un travail qui a été accompagné par nous-même tout en participant à l'institutionnalisation des savoirs en jeu avec trois classes, la sixième C (6C) et la sixième D (6D) lors de l'année scolaire 2014-2015, et la sixième A (6A) lors de l'année scolaire 2015-2016, à l'école primaire Omar Ibn-Elkhattab à Kasserine, petite ville située au centre-ouest de la Tunisie.

II. Contexte et point de départ de l'étude

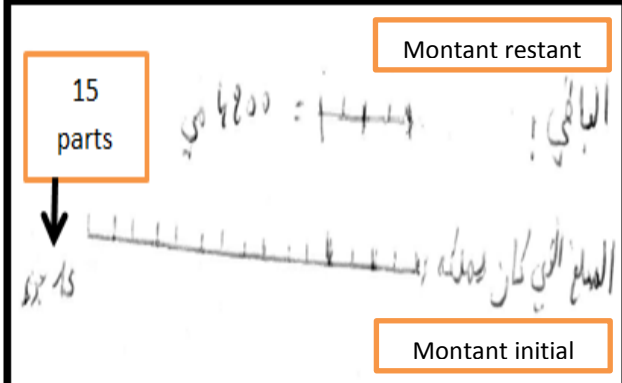
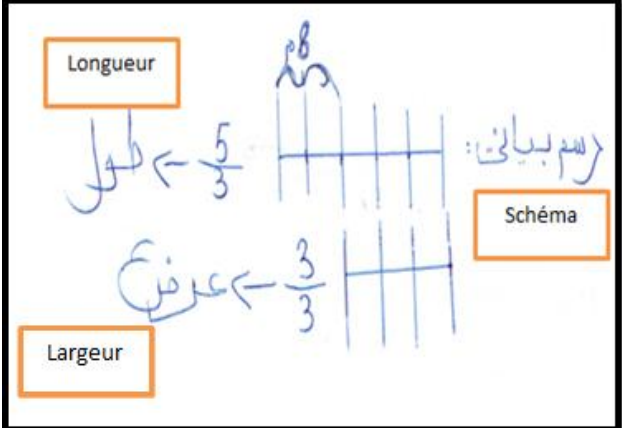
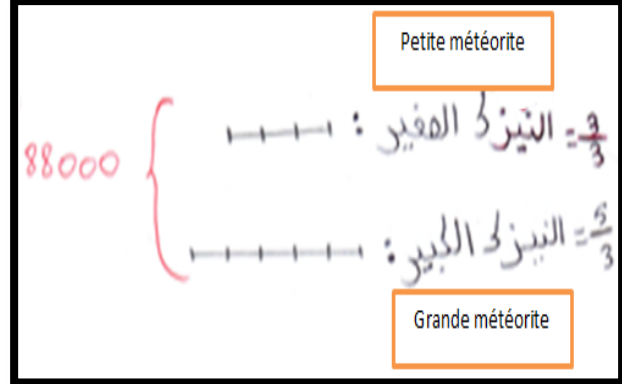
1. Le point de départ

Comme évoqué précédemment, nous avons recensé dans notre travail de master (Belguesmi, 2016) une certaine variété de problèmes arithmétiques donnés à résoudre aux élèves de fin de primaire : des problèmes de partage en parties inégales et d'autres problèmes faisant intervenir des relations multiplicatives fractionnaires entre grandeurs. Le tableau ci-après illustre quelques exemples de problèmes :

	Nombre de relations entre grandeurs		
	1	2	3
<p>Problèmes où nous identifions des relations multiplicatives fractionnaires entre grandeurs</p>	<p>« Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ? »</p>	<p>« On a demandé à votre ami de trouver la surface du jardin rectangulaire de son école. Essayez de l'aider à la trouver sachant que : sa longueur L est égale à $\frac{5}{3}$ de sa largeur l et que la différence entre la longueur et la largeur est 8m. »</p>	<p>« À l'occasion de l'Aïd, Fatma a acheté à sa fille une robe, des souliers est un jouet avec un prix égal à 99 dinars. À l'aide d'un schéma, essayez de trouver le prix de chaque article acheté si vous saviez que : le prix du jouet = $\frac{1}{2}$ du prix des souliers ; le prix des souliers = $\frac{1}{3}$ du prix de la robe. »</p>
<p>Problèmes de partage en parties inégales</p>		<p>« Dans une école on compte 360 élèves. Sachant qu'il y a 28 filles de plus que de garçons, trouvez : - le nombre des filles ; - le nombre des garçons. »</p>	<p>« La masse totale de trois météorites est de 82 tonnes. Sachant que la masse de la troisième météorite a 17 tonnes de plus que celle de la deuxième, et la masse de la deuxième météorite a 10 tonnes de plus que celle de la première, trouvez la masse de chaque météorite. »</p>

Tableau A1 : types de problèmes proposés aux élèves (Belguesmi, 2016)

La démarche de schématisation qui pouvait *a priori* outiller la résolution de tels problèmes par les élèves est une démarche faisant intervenir et visant pour partie l'enseignement et l'apprentissage d'une schématisation particulière, celle que nous avons qualifié de « segmentaire » – subsumant grandeurs discrètes et continues (au départ considérées comme des variables didactiques). Nous donnons ci-après quelques exemples de schémas produits par des élèves tunisiens de fin de primaire pour résoudre les problèmes arithmétiques donnés – Le tableau ci-après donne ainsi des exemples de schématisations valides d'élèves recueillis lors de nos travaux de master (Belguesmi, 2016) :

Problème	Schéma représentant le problème
<p>Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ?</p>	
<p>On a demandé à votre ami de trouver la surface du jardin rectangulaire de son école. Essayer de l'aider à la trouver sachant que : sa longueur L est égale à $\frac{5}{3}$ de sa largeur l et que la différence entre la longueur et la largeur est 8m.</p>	
<p>La masse de deux météorites ensemble est de 88000 tonnes. Sachant que la masse de la grande météorite est égale à $\frac{5}{3}$ de celle de la petite, trouvez la masse de chaque météorite.</p>	

<p>Dans une école on compte 360 élèves. Sachant qu'il y a 28 filles de plus que de garçons, trouvez :</p> <ul style="list-style-type: none"> - le nombre des filles ; - le nombre des garçons. 	
<p>À l'occasion de l'Aïd, Fatma a acheté à sa fille une robe, des souliers et un jouet avec un prix égal à 99 dinars. À l'aide d'un schéma, essayez de trouver le prix de chaque article acheté si vous saviez que :</p> <p>prix du jouet = $\frac{1}{2}$ prix des souliers, prix des souliers = $\frac{1}{3}$ prix de la robe.</p>	

Tableau A2 : exemples de schémas segmentaires produits par des élèves (Belguesmi, 2016)

Les résultats de notre mémoire ont soulevé un certain nombre de questions laissées ouvertes à la fin de cette enquête qui nous ont paru autant de perspectives de recherche pour le travail à conduire dans le cadre de notre thèse. Par exemple, si ce travail donne à voir le rôle de certaines caractéristiques des problèmes arithmétiques et des schémas produits par les élèves, il ne permet pas d'élucider totalement la pertinence ou non de certains types de schémas pour certaines catégories de problèmes donnés. Si les expérimentations ont permis d'attester que les schémas segmentaires semblaient participer à une plus grande réussite des élèves dans la résolution des problèmes donnés, cette étude ne permet pas d'élucider complètement la question des connaissances et savoirs en jeu dans de telles résolutions, outillées par une démarche de schématisation que ce soit lors des productions des schémas ou lors de leurs interprétations.

2. Des problèmes arithmétiques ou « entre arithmétique et algèbre » ?

Comme l'illustrent les quelques problèmes donnés en exemple ci-avant, les problèmes arithmétiques considérés, classiquement étudiés en 6^{ème} année de base dans l'institution tunisienne, ne sont pas des problèmes basiques (Houdement, 2017).

D'autres auteurs ont pu s'intéresser à certains de ces problèmes mais en les positionnant dans une transition entre des savoirs enseignés en arithmétique et en algèbre. Ainsi, dans les travaux de Chevallard (1984a), certains de ces problèmes, dits de partages en parties inégales, sont cités comme étant le lieu privilégié à une époque du passage de l'arithmétique à l'algèbre enseignée – certains manuels comme celui cité ci-après mettant d'ailleurs les deux types de résolution (arithmétique outillée par le schéma et algébrique) en avant pour un même problème.

Dans les travaux de Chevallard (1984a), nous trouvons les traces du schéma segmentaire dans des extraits de manuels cités par cet auteur pour exemplifier son propos sur la transition arithmétique-algèbre :

Problème : on a un coupon de drap d'une certaine longueur et un deuxième coupon qui a 4 mètres de plus. Ces deux coupons mesurent ensemble 40 mètres. On demande la longueur de chaque coupon.

SOLUTION ARITHMÉTIQUE

40 m. } $\left\{ \begin{array}{l} \text{1}^{\text{er}} \text{ —————} \\ \text{2}^{\text{me}} \text{ —————} \end{array} \right.$

Représentons la longueur du 1^{er} coupon par une ligne.
Une ligne semblable augmentée de 4 m. figurera le 2^{me} coupon.

En examinant cette représentation graphique, on voit de suite que : petit coupon + petit coupon + 4 m. ou 2 fois le petit coupon + 4 m. = 40 m.
par conséquent, 2 fois le petit coupon = 40 m. - 4 m. = 36 m.
d'où, petit coupon = 36 m. : 2 = 18 m.
et, grand coupon = 18 m. + 4 m. = 22 m.

SOLUTION ALGÈBRIQUE

40 m. } $\left\{ \begin{array}{l} \text{1}^{\text{er}} \ x \\ \text{2}^{\text{me}} \ x + 4 \text{ m.} \end{array} \right.$

Au lieu de la ligne, mettons pour le 1^{er} coupon la lettre x .
Nous aurons pour le 2^{me} coupon : $x + 4$.

Nous avons ainsi sous les yeux, comme pour la solution précédente, une image très nette de l'énoncé et nous pouvons écrire :

$$x + x + 4 = 40 \text{ m.}$$

$$2 \text{ fois } x + 4 = 40 \text{ m.}$$

$$2 \text{ fois } x = 40 \text{ m.} - 4 \text{ m.} = 36 \text{ m.}$$

$$x = 36 : 2 = 18 \text{ m.}$$

et, grand coupon = 18 m. + 4 m. = 22 m.

Chaque fois que nous emploierons des lettres dans la résolution des problèmes, nous ferons de l'algèbre
La solution algébrique est plus simple, plus rapide que la solution arithmétique. Elle dispense de faire de longs raisonnements.

Figure A1 : extrait de manuel cité par Chevallard (1984a), pp. 53-54

Chevallard fait le constat d'une mise en concurrence entre arithmétique et algèbre enseignée pour résoudre ce type de problème.

C'est une problématique d'ailleurs reprise par Coulange (2000, 2001). Cette auteure utilise également des schémas segmentaires pour modéliser certains raisonnements d'élèves dans la résolution arithmétique de problèmes de partage en partie inégales.

Les traces des schémas « segmentaires » ou « modèles barres » que nous trouvons dans les travaux de Coulange (2000), illustrées par la figure ci-après, modélisent les raisonnements arithmétiques d'élèves considérés dans ses travaux, en réponse à des problèmes souvent considérés dans une stratégie d'introduction à l'algèbre contemporaine :

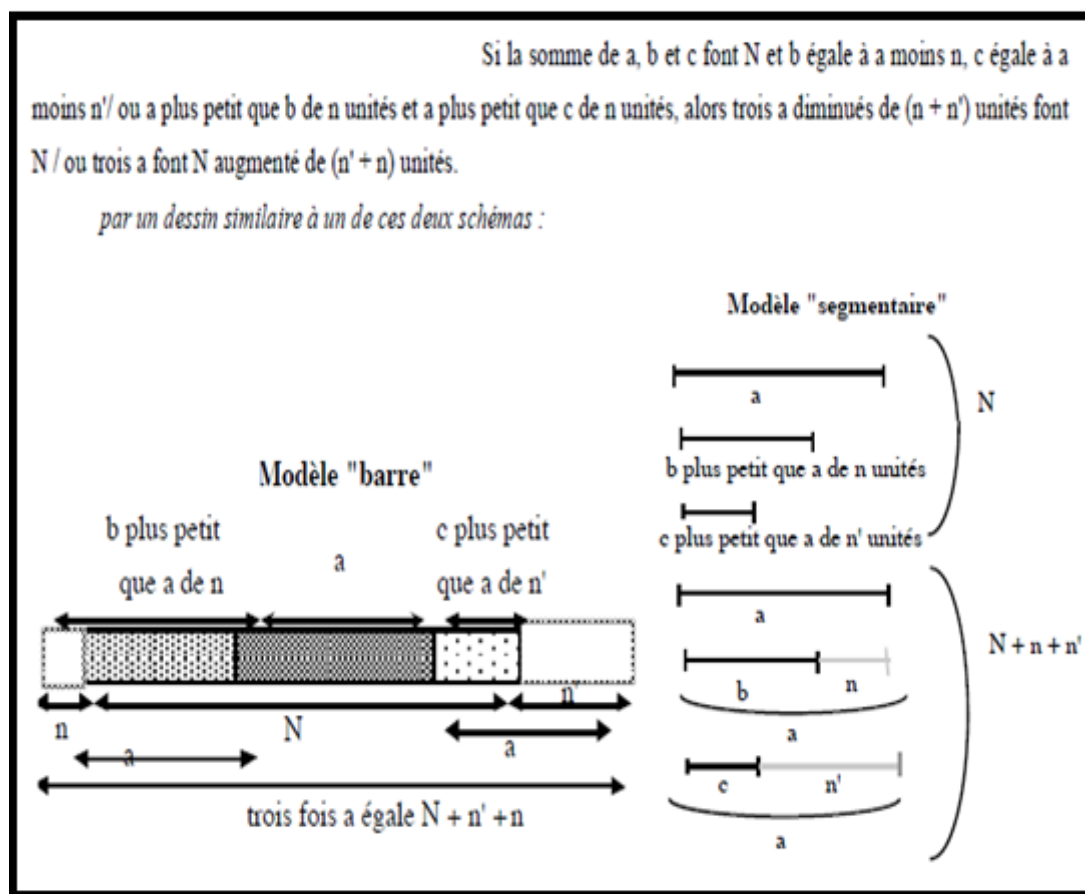


Figure A2 : modélisation des raisonnements arithmétiques d'élèves – extrait de Coulange (2000)

Toutefois cette auteure n'étudie pas à proprement parler la démarche de schématisation segmentaire qui n'est d'ailleurs pas convoquée par les élèves français – y compris lorsqu'ils résolvent arithmétiquement certains problèmes donnés à résoudre par l'algèbre, dans le cadre de son travail de thèse.

L'intérêt de ces travaux à cette transition est dû au fait que l'algèbre est considérée comme un instrument mis en concurrence avec l'arithmétique pour un corpus de problèmes donnés :

« L'algèbre apparaît, positivement, comme l'accomplissement de l'arithmétique. S'appliquant à l'origine au même corps de problèmes, elle est une arithmétique délivrée de l'opacité et de l'oubli qui dérobent à nos yeux la structure des problèmes étudiés. Elle est un instrument supérieur pour une tâche semblable. Elle est une arithmétique universelle – comme l'appelle Newton – ou encore une arithmétique généralisée, comme le note Poincaré un bon siècle plus tard. » (Chevallard, 1984a, p. 57)

Si comme le dit Coulange (2001, p. 65), ces problèmes étaient autrefois le lieu d'étude de techniques de résolution arithmétique, elle montre par ailleurs que l'enseignement de telles techniques outillées par la schématisation segmentaire a disparu de l'institution française.

Ces problèmes, dont elle montre la reprise pour introduire l'algèbre à partir des années 1990, sont mis un temps en avant comme mettant en concurrence des techniques algébriques avec des stratégies arithmétiques d'élèves ne correspondant pas à des techniques arithmétiques enseignées outillées par des schémas, ces techniques n'étant plus enseignées préalablement. Ce sont des stratégies arithmétiques que cette auteure modélise parfois dans ses analyses *a priori*, par des schémas segmentaires (pour mieux cerner les connaissances sous-jacentes à la résolution de ces problèmes), mais qui de fait ne sont pas convoquées par les élèves eux-mêmes dans la résolution arithmétique de tels problèmes.

Les travaux de Bednarz & Janvier (1994, 1996) sont davantage dans une perspective liée à la complexité de tels problèmes « entre arithmétique et algèbre » – dans le rôle que de tels problèmes peuvent jouer dans la transition arithmétique-algèbre du point de vue des élèves. Ces auteurs identifient deux principales catégories de problèmes : les problèmes connectés et les problèmes déconnectés⁵, pour lesquels l'algèbre peut devenir un outil de résolution (du fait du détour à opérer du connu vers l'inconnu). Ils distinguent des structures possibles des problèmes déconnectés – notamment ceux de

⁵Voir plus sur problèmes connectés et déconnectés dans l'annexe 11, p. 419.

« partages en parties inégales » (Source, Puits et Composition – nous y reviendrons plus loin), en prise d'appui sur les travaux de Vergnaud (1993). Toutefois, pas plus que Coulange (2000, 2001), ils ne s'intéressent pas au rôle de la schématisation segmentaire dans la résolution arithmétique de tels problèmes, puisqu'elle n'est pas objet d'enseignement dans l'institution québécoise.

Bednarz & Janvier (1994, 1996) puis Schmidt (Schmidt & Bednarz, 1997 ; Schmidt, 1996) ont approfondi l'étude en étudiant le rôle de ces structures de problèmes sur les mises en œuvre de stratégies arithmétiques ou algébriques de résolution par des élèves ou par des futurs enseignants. Ces auteurs en tirent des conclusions sur la complexité des problèmes proposés au regard de ces différents types de solutions arithmétiques ou algébriques, conclusions sur lesquelles nous serons conduits à revenir par la suite.

Ainsi en résumé, l'ensemble des auteurs cités ci-avant se sont intéressés à des problèmes du même type que ceux que nous allons considérer dans notre propre travail de thèse en positionnant ces problèmes dans une transition entre des savoirs enseignés ou des connaissances mobilisées par des apprenants sur l'arithmétique et l'algèbre. Ils signalent pour certains d'entre eux la présence des schémas segmentaires dans l'enseignement de l'arithmétique autrefois enseignée et mise en concurrence avec l'algèbre enseignée. Pour autant quand certains d'entre eux s'intéressent aux résolutions arithmétiques d'élèves « contemporains », celles-ci ne sont pas outillées par des schémas segmentaires qui ne sont plus enseignés dans les institutions considérées, du moins si nous nous référons aux manuels officiels des élèves.⁶

⁶ Par exemple les manuels officiels tunisiens des mathématiques de la sixième année de l'école de base (du maître et de l'élève) ne portent aucune trace d'un schéma segmentaire.

III. La schématisation, une démarche pour résoudre les problèmes

Ainsi la question de la schématisation et l'usage de schémas pour résoudre de tels problèmes ont été assez peu abordés. Plus globalement la question de la schématisation et l'usage de schémas dans la résolution de problèmes mathématiques s'avère assez peu problématisée dans les recherches en didactique des mathématiques, comme le signalent d'ailleurs Laparra & Margolinas (2009) :

« Néanmoins, malgré l'importance que la théorie accorde aux représentations et aux formulations, dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques, les travaux de recherche qui concernent spécifiquement le schéma et son intervention dans le processus de compréhension et de résolution de problèmes sont assez peu nombreux, malgré le travail pionnier de Bessot et Richard (1980). » (Laparra & Margolinas 2009, p. 53)

Nous avons identifié des travaux prenant le schéma comme objet d'étude (à d'autres niveaux scolaires, pour d'autres problèmes) : ceux pionniers cités ci-dessus de Bessot & Richard (1980), et ceux plus récents des auteures précitées, Laparra & Margolinas (2009). Sans en faire à proprement parler, quelques travaux évoquent par ailleurs la schématisation segmentaire pour résoudre des problèmes arithmétiques : ceux de Julo (2000) et de Novotna (2003).

Il s'avère difficile de faire une synthèse de ces travaux, finalement assez peu nombreux, ou de les mettre en regard du fait des problèmes, des schémas et des niveaux scolaires considérés (au début ou à la fin d'école primaire, secondaire) voire des projets initiaux de leurs auteurs, tout aussi variés. Toutefois nous retenons que ces travaux tendent à prouver que les usages par les élèves de schémas dans la résolution de problèmes peuvent s'avérer délicats, et ce, à plusieurs titres.

1. Des travaux en didactique des mathématiques prenant d'autres schémas pour résoudre d'autres problèmes comme objet d'étude

Le travail, élaboré par Bessot & Richard (1980), soulève certains problèmes sous-jacents à l'utilisation des schémas dans l'enseignement des mathématiques, et apporte en particulier des réponses aux questions de recherche suivantes.

- Le schéma ne risque-t-il pas d'appauvrir la situation en la restreignant aux seuls éléments codés ? (disponibilité du référent) ;
- Ne risque-t-il pas de se couper durablement de ce qu'il représente et de s'y substituer ? (pas de retour au signifié).

Pour se placer dans le champ de ces problèmes, l'équipe de la recherche a pris en compte le schéma dans le cadre de l'enseignement des mathématiques ; à savoir au sein d'un système constitué par : les connaissances des élèves, les objectifs d'apprentissage recherchés par l'enseignant, les propriétés de la situation et de la notion mathématique en cause (point de vue didactique).

Le schéma choisi lors de ce travail est le « schéma arbre », qui intervient couramment en analyse combinatoire. Et Contrairement aux situations scolaires où l'arbre se présente comme le « bon » schéma, l'équipe de recherche a choisi une situation dans laquelle le schéma arbre soit un « bon schéma provisoire ».

L'algorithme de subdivisions répétées associé au schéma arbre est contraint de se complexifier en un nouvel algorithme prenant en compte un élément supplémentaire de la situation ; ce nouvel algorithme impose à l'élève l'abandon du schéma arbre initial dont le signifié ignore cet élément du référent.

L'équipe de recherche a montré la difficulté qu'éprouvent les élèves à s'écarter de leur premier schéma pour construire de nouveaux schémas, plus adéquats à la nouvelle procédure, ce qui révèle la difficulté des activités de codage.

Le travail élaboré par Laparra & Margolinas (2009), s'intéresse au schéma, dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques au début de l'école primaire (classe de C. P., équivalent à la deuxième année de l'école de base en Tunisie). Ce travail se situe dans le cadre d'une réflexion sur le schéma, considéré comme un « écrit de savoir » lié à la résolution de problèmes arithmétiques « basiques ».

Répondant à la question « que sont les schémas pour l'enseignant ? », l'équipe de recherche affirme que :

- Le recours à la schématisation de ces problèmes peut renvoyer, au-delà d'un outillage efficace pour la résolution de ces problèmes, à une forme de nécessité pour l'enseignant :

« [...] Ainsi notre observation, même si elle a lieu en classe « ordinaire » n'est pas banale. Elle nous donne l'occasion de comprendre les difficultés insurmontables auxquelles se confrontent inévitablement l'enseignant qui, sans autre viatique que les connaissances communes de la profession, introduit le schéma comme un outil méthodologique pour la résolution de problème. »

(Laparra & Margolinas, 2009, p. 4).

- L'enseignant tout au long de son questionnement ou de ses manipulations manifeste que les schémas qu'il montre aux élèves ne sont qu'une simple trace d'une activité, en quelque sorte le dépôt sur le papier d'un « faire » antérieur.

Et en guise de conclusion, l'équipe de recherche affirme :

« Tout ce qui dans l'écrit n'est pas susceptible de pouvoir être transformé en discours oral est minoré voire négligé ainsi que l'a montré Jack Goody. Le métalangage pour le décrire est instable.

Les spécificités du schéma sont de ce point de vue encore plus malaisées à décrire que celles qui concernent les listes ou les tableaux, qui eux procèdent à une organisation graphique de ce qui est encore un matériau linguistique, même s'il ne relève plus du discours (nombre, mot, syntagme). Ce n'est pas le cas du schéma dont on pourrait dire qu'il est une forme limite d'écrit, puisque si tout ce qui relève du langage en est absent (hormis les légendes),

Dès lors, les seuls schémas qui sont l'objet de réflexions disciplinaires et didactiques sont ceux qui sont considérés comme des savoirs.» (Laparra & Margolinas, 2009, p.36).

Nous retenons des travaux pionniers de Bessot & Richard (1980) des difficultés constatées chez des élèves de niveau secondaire à adapter les procédures de schématisation liées à l'utilisation d'un type de schéma conventionnel donné (autre que celui segmentaire), de type « arbre », et donc les connaissances mathématiques liées à la production et à l'usage de ces schémas au regard de la nature des problèmes donnés.

Laparra & Margolinas (2009) mettent quant à elles en avant, des difficultés liées à l'identification et la prise en charge de connaissances mises en fonctionnement par les élèves de début de primaire (C. P.) dans la production et l'usage de schémas, pour résoudre des problèmes arithmétiques donnés. Considérant le schéma comme un écrit de savoir à enseigner, ces dernières proposent des pistes à cet effet à la fin de leur article, en proposant d'introduire des schémas adaptés à la résolution des problèmes étudiés : ceux liés aux travaux de Vergnaud (1993) qui pourraient être utiles à la fois pour faire identifier des catégories différentes de problèmes arithmétiques et pour les faire résoudre par les élèves. Les deux auteures mettent par ailleurs en avant la nécessité d'une prise en charge d'un enseignement de la schématisation pour résoudre des problèmes.

2. Des travaux qui évoquent le schéma segmentaire comme outil de résolution de problèmes arithmétiques

Si les travaux pionniers de Bessot & Richard (1980) identifient les difficultés que des élèves de niveau secondaire éprouvent pour adapter les procédures de schématisation à un type de schéma conventionnel bien précis, ceci fait écho à ce que Julo (1995, 2000) considère quant à lui qu'il y a des précautions à prendre dans l'enseignement de tels outils de modélisation. L'orientation particulière que recouvrent des schémas conventionnels peut selon cet auteur entraver l'activité de représentation d'un problème par les élèves qui adopteraient potentiellement spontanément d'autres points de vue sur ce même problème. Toutefois ce que cet auteur met en avant ne relève pas d'un questionnement lié à la nature des problèmes posés (et à la portée de schémas pour des types de problèmes donnés qu'il serait crucial d'identifier), mais plutôt d'interrogations relatives aux élèves (considérés comme sujets psychologiques) et à des entrées différentes dans la représentation et la résolution d'un problème par différents élèves, ce qui peut d'ailleurs paraître *a priori* assez orthogonal avec une démarche d'enseignement liée à un schéma conventionnel donné pour enseigner la schématisation. Cette vision de Julo qui prône différentes entrées dans la représentation d'un problème inclut le schéma segmentaire comme une possibilité parmi d'autres :

EXEMPLE DE CORRIGÉ

Pour le problème suivant :

Théo, Daniel et Sandra ont 81 cassettes à eux 3.
Daniel a 3 fois plus de cassettes que Théo.
Sandra a 5 fois de plus de cassettes que Théo.
Combien de cassettes à Théo ?
Combien de cassettes à Daniel ?
Combien de cassettes à Sandra ?

le corrigé suivant est proposé :

Un de tes camarades a rédigé ainsi sa solution :

—	—	—
—	—	—
—	—	—
T	D	S

Donc Théo a $81 : 9$, soit 9 cassettes.
Donc Daniel a 27 cassettes.
Donc Sandra a 45 cassettes.
Il a juste. Comment a-t-il fait pour avoir toutes ses réponses justes ?

Figure A3 : extrait des travaux de Julo (2000)

Novotna (2003) s'est également intéressée à la schématisation segmentaire (qu'elle qualifie de modèle écrit graphique) dans la résolution de problèmes arithmétiques, comme une démarche de résolution parmi d'autres possibles, comme en attestent les deux extraits suivants :

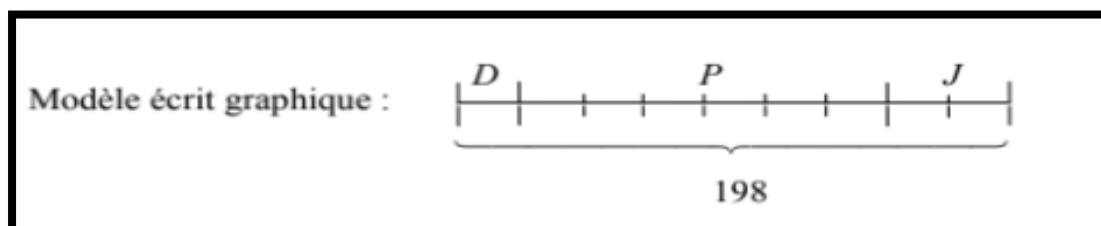


Figure A4 : extraits des travaux de Novotna (2003)

Problème B : Trois filles de M. Novák, Pavla, Dana et Marie, ont 181 Kč (couronnes tchèques) au total. Marie a de 37 Kč plus que Pavla et Dana a de 14 Kč plus que Marie. Combien Kč a chaque fille ?

Elle propose comme représentation pour le problème ci-dessus le schéma segmentaire suivant :

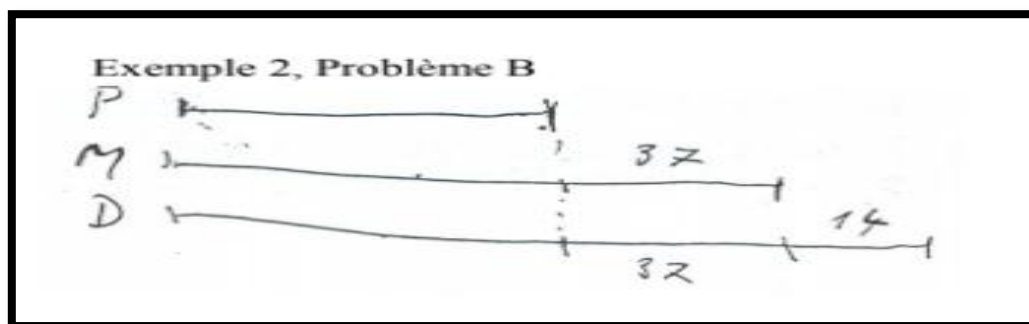


Figure A5 : extraits des travaux de Novotna (2003)

Novotna souligne l'efficacité d'un tel modèle graphique ou schéma segmentaire dans la résolution de certains problèmes arithmétiques. En étudiant des problèmes proches et relevant des mêmes classes de problèmes qui sont objet de notre étude, Novotna (2003) montre l'efficacité de la schématisation comme outil de résolution :

« Il existe des problèmes pour lesquels le modèle élaboré par l'utilisation d'un langage graphique donne directement le résultat sans que l'élève soit contraint de passer par un calcul » (Novotna J., 2003, p. 29).

Ces derniers propos montrent comment la production même du schéma peut rendre économique la résolution du problème – l'interprétation du schéma en « livrant » directement la solution.

L'auteure met par ailleurs en avant aussi que ce type de modèles ou de schémas n'est que rarement utilisé par les élèves (les élèves tchèques) s'il n'a pas été objet d'étude en amont. Novotna conclut toutefois que si certaines stratégies, comme celles outillées par ce type de schémas, semblent « efficaces » il demeure complexe d'élucider les connaissances mathématiques en jeu dans la résolution de tels problèmes au regard du grand nombre de variables didactiques possiblement en jeu.

Plus globalement, que l'élaboration d'un modèle mathématique permettant de résoudre un problème soit liée ou non à l'usage de tels schémas, Novotna (2003) met en avant les difficultés éprouvées du fait d'un nombre de variables possibles, dans l'élucidation des processus et des connaissances mathématiques en jeu :

« Malgré le nombre grandissant de travaux publiés et de variables étudiées, les processus qui déterminent le passage de la lecture d'un énoncé à la construction du modèle mathématique qui le résout restent dans une « boîte noire ». »

« [...] Mais je dois avouer que compte tenu de la quantité de variables en jeu qu'il fut alors très difficile (sinon impossible) de déterminer les variables cognitives qui pourraient expliquer les processus susceptibles d'éclairer la « boîte noire » dans laquelle se produirait le passage entre la lecture de l'énoncé et le modèle mathématique élaboré par l'élève. »

Cette voie semble donc bel et bien restée ouverte pour notre propre travail de thèse ...

Tous ces travaux, que nous venons d'évoquer dans la partie III du chapitre A, vont nous amener à même de mieux amorcer notre propre démarche méthodologique.

IV. Organisation générale de la thèse

En plus du chapitre A qui se veut introductif de l'ensemble du propos, notre manuscrit de thèse s'organise en trois principaux chapitres (B, C et D) :

- Dans le chapitre B, nous décrivons un ensemble d'outils théoriques retenus pour étudier les connaissances et savoirs mathématiques en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes-segmentaires. Nous montrerons comment partis d'une modélisation de couples « énoncés-schémas fondamentaux » dans une démarche apparentée à celle de la recherche d'une situation fondamentale, nous avons pris appui sur différents travaux pour dégager des variables didactiques liées à ces énoncés-schémas fondamentaux qui nous permettent d'appréhender des connaissances et savoirs mathématiques associés à des procédures de résolution de problèmes outillées par la schématisation segmentaire.
- Dans le chapitre C, en prise d'appui sur l'outillage développé dans le chapitre précédent, nous conduirons une analyse de manuels scolaires visant l'enseignement de la démarche de schématisation segmentaire dans la résolution arithmétique de problèmes. Cette analyse de manuels (d'anciens manuels d'arithmétiques élémentaires et français et d'un manuel contemporain – la méthode Singapour) permettra de dégager des premières conditions d'étude des connaissances et savoirs mathématiques mis en fonctionnement dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire : en termes de savoirs mathématiques institutionnalisés et de progressivité liés aux connaissances et aux procédures de résolution arithmétiques exposées. Ceci nous permettra notamment de formuler des hypothèses quant à des conditions et des contraintes à même de peser sur l'enseignement de ces savoirs et de ces connaissances en termes de systèmes d'attentes implicites régissant pour partie les comportements des élèves et des enseignants sur lesquelles nous prenons appui dans le chapitre suivant.
- Le chapitre D, se centre quant à lui sur la conception et l'analyse d'un corpus de données expérimentales, constitué de : réponses d'élèves tunisiens et français à un questionnaire et de données liées à une séquence expérimentale

mise en œuvre dans deux classes tunisiennes (6^{ème} année de base). Outre les outils présentés dans le chapitre B (qui ont permis l'élaboration du questionnaire et de la séquence expérimentale ainsi que des premières analyses *a priori*), nous étudierons ce corpus à l'aune d'un nouvel outillage théorique présenté au début du chapitre : la modélisation de systèmes d'attentes réciproques d'enseignants et d'élèves dans l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques outillée par les schémas segmentaires par des échelles de contrat didactique. L'étude de ce corpus nous permettra de pointer des phénomènes en lien avec ces contrats didactiques et les effets de tels contrats, mettant en lumière des conditions et des contraintes liées à l'économie des connaissances et des savoirs mathématiques visés.

- Le chapitre E, dernier chapitre de la thèse fera la synthèse de l'ensemble des résultats de ce travail de thèse et nous permettra de formuler ce qui nous semble des perspectives dégagées à l'issue de ce travail sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation segmentaire.

L'organigramme de la thèse compte tenu du chapitre A est le suivant :

Chapitre A

Une problématique centrée sur la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire

<i>Introduction</i>
<i>Contexte et point de départ</i>
<i>La schématisation, une démarche pour résoudre les problèmes</i>
<i>Organisation générale de la thèse</i>

Chapitre B

Une problématique centrée sur les connaissances mathématiques
en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques et les
schémas segmentaires

Des couples "énoncés-schémas" fondamentaux

<p>Partie B1</p> <p>Outils d'analyse des connaissances mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes outillée par la schématisation segmentaire</p>
<i>Une démarche de type situation fondamentale</i>
<i>Structures et complexités d'énoncés de problèmes arithmétiques</i>
<i>Conversions et traitements dans le registre de la langue naturelle et graphique segmentaire</i>
<i>Des systèmes d'unités relatifs caractéristiques des connaissances mathématiques en jeu dans la production et l'interprétation de schémas</i>
<p>Partie B2</p> <p>Description des connaissances mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation segmentaire</p>
<i>Introduction</i>
<i>Identification des valeurs de la variable associée à chaque énoncé-schéma fondamental et connaissances mathématiques en jeu dans la résolution des problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire</i>
<i>Conclusion du chapitre B</i>

Chapitre C

Etude d'extraits de manuels scolaires d'arithmétiques anciens et d'un
manuel contemporain (la méthode Singapour)

*Quelques conditions et contraintes sur l'enseignement de savoirs dans la
résolution de problèmes arithmétiques "outillée" par les schémas
segmentaires*

<i>Introduction et première analyse des manuels scolaires retenus</i>
<i>Deuxième analyse des manuels scolaires retenus</i>
<i>Conclusion</i>

Chapitre D

Etude d'un questionnaire posé à des élèves tunisiens et français et d'une expérimentation en classe de sixième année de base en Tunisie

Des conditions et contraintes sur l'enseignement et l'apprentissage de connaissances et de savoirs sur la résolution de problèmes arithmétiques en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques et les schémas segmentaires

<i>Introduction</i>
<i>Analyse a priori du questionnaire</i>
<i>Analyse a posteriori du questionnaire</i>
<i>Présentation globale et analyse a priori de la séquence expérimentale</i>
<i>Séances de la partie expérimentale et analyse a posteriori</i>
<i>Conclusion</i>

Chapitre E

<i>Conclusion générale</i>
<i>Perspectives</i>

Chapitre B

**Une problématique centrée sur les
connaissances mathématiques en lien avec la
résolution de problèmes arithmétiques et les
schémas segmentaires**

Des couples « énoncés-schémas » fondamentaux

Partie B1 :

**Outils d'analyse des connaissances
mathématiques en jeu dans la résolution de
problèmes arithmétiques outillée par la
schématisation segmentaire**

En vue d'étudier les connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire, nous avons convoqué un ensemble d'outils théoriques que nous présentons ci-après.

I. Une démarche de type situation fondamentale : des énoncés-schémas fondamentaux et des variables didactiques

L'enjeu central de notre travail de thèse est d'identifier des connaissances mathématiques possiblement en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation.

La première démarche envisagée à ce sujet s'ancre dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et s'apparente à la recherche d'une « situation fondamentale » ou « mathématique à usage didactique » (Brousseau 1997). La modélisation didactique renvoyant à la notion de situation fondamentale cherche à identifier une classe de situations « qui fait correspondre à tout savoir déterminé une classe minimale de situations qui font apparaître cette connaissance comme le moyen optimal et autonome de solution de ces situations » (Brousseau 1997, p. 10).

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, la notion de situation fondamentale est associée à celle de variables cognitives et didactiques, soit un jeu de « variables » à même de générer cette classe de situations associée à la situation dite fondamentale. Les variables cognitives sont « telles que par le choix de valeurs différentes, nous pouvons provoquer des changements de la connaissance ». Nous nous intéressons plus particulièrement aux variables cognitives qui correspondent aux variables didactiques, c'est-à-dire celles possiblement modifiables par l'enseignant.

Précisons que s'agissant de la résolution de problèmes arithmétiques du fait de la multiplicité des connaissances et des savoirs mathématiques, et donc des variables en jeu, une telle démarche ne paraît pas aisée. Novotna (2003) va jusqu'à parler de « boîte noire », compte tenu de la quantité de variables en jeu qui rend « très difficile » (sinon impossible) de déterminer les variables cognitives qui pourraient expliquer les processus susceptibles de l'éclairer (op. cité, p. 35).

C'est pourquoi dans un tel projet, nous avons cherché à réduire la complexité, en faisant des choix. Nous détaillons ces choix ci-après :

Nous partons d'énoncés de problèmes d'arithmétique donnés. Ils correspondent d'une part à des énoncés pour lesquels une schématisation de type « segmentaire » peut

s'avérer *a priori* un « assez bon » outil de résolution. Ils correspondent d'autre part à des énoncés adaptés au niveau scolaire considéré dans l'institution tunisienne (6ème année de primaire). Nous avons pris appui sur nos travaux antérieurs (Belguesmi, 2016) pour constituer ce corpus d'énoncés de problèmes arithmétiques : ce sont des problèmes qui ont fait l'objet de premières expérimentations dans les classes (voir partie précédente). Nous justifions le choix de ces énoncés du fait qu'à travers les problèmes proposés dans le manuel officiel tunisien de la sixième année de l'école de base, *a priori* seuls les problèmes qui sont en lien avec ces énoncés suscitent potentiellement l'outil schéma segmentaire comme outil de résolution.

À chacun de ces énoncés, nous associons d'emblée un « schéma de type segmentaire » pour former un couple « énoncé-schéma (segmentaire) ». Ce faisant, nous laissons volontairement de côté la description de connaissances mathématiques possiblement convoquées par la résolution de ces problèmes, en laissant aux élèves un choix de stratégies de résolution (sans schéma) ou de modèle (ouvrant la possibilité à d'autres représentations schématiques possibles que celle retenue). Ce choix est justifié par le fait que ce qui nous intéresse est bel et bien la question des connaissances mathématiques liées à l'usage de ce type de schémas en particulier, pour résoudre des problèmes d'arithmétique.

Enfin, nous remontons, partant de ce couple « énoncé-schéma », à un couple « énoncé-schéma » générique en identifiant des variables didactiques en jeu. Cette remontée permet d'aboutir à ce que nous appelons un « énoncé-schéma fondamental ».

Précisons dès maintenant que les étapes de notre démarche d'élaboration « d'énoncés-schémas fondamentaux » s'éloignent un peu de la démarche d'élaboration d'une situation fondamentale associée à un savoir mathématique donné, en tout cas telle que Guy Brousseau l'envisageait initialement. C'est inhérent au fait que ce qui est en jeu dans notre travail (la résolution de problèmes outillée par le schéma, et qui plus est, un schéma donné), ne peut être tout à fait considéré comme un savoir mathématique, tel que les rationnels ou les décimaux pour reprendre un exemple emblématique de la théorie des situations. Pour autant, à l'instar de Coulange (2000), nous considérons qu'il s'agit bien à travers une telle démarche de « remontée » à une certaine genericité « d'énoncés-schémas », d'envisager un découpage didactique, permettant d'élucider plus avant la question des connaissances et des savoirs mathématiques potentiellement

convoqués dans la résolution de tels problèmes, outillée par la schématisation segmentaire.

Pour remonter à des énoncés de problèmes génériques, nous sommes donc partis d'un corpus préexistant de problèmes arithmétiques qui convoquent possiblement différentes représentations schématiques de type segmentaire dans leur résolution (couple « énoncés-schémas »). En vue de décrire ces énoncés, nous avons dans un premier temps algébrisé les relations entre grandeurs connues et inconnues que recouvrent chacun de ces énoncés de problèmes et les transformations de ces relations que recouvrent potentiellement la résolution de tels problèmes tout en précisant les grandeurs connues et inconnues concernées.

Les tableaux ci-dessous (tableau B1 et B2) synthétisent les résultats ainsi obtenus : le tableau B1 renseigne les relations algébriques multiplicatives ou additives entre grandeurs en jeu ; le tableau B2 indique le caractère connu ou inconnu de ces grandeurs dans les énoncés ainsi décrits.

Précisons dès maintenant que la numérotation associée à ce que nous appelons des « énoncés fondamentaux » dans le premier tableau sera conservée par la suite dans l'ensemble de la thèse : nous parlerons de 1^{er} énoncé fondamental, 2^{ème} énoncé fondamental, etc.

Dans toute la suite de la thèse, tous les nombres proposés sont des entiers naturels non nuls, sauf indication contraire.

Énoncés fondamentaux	Relations algébriques entre grandeurs (connues et inconnues) données dans l'énoncé et transformation de relations convoquées dans la résolution	Nombre de relations (données dans l'énoncé)
1 ^{er}	Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B. A et B étant deux grandeurs non nécessairement de valeurs entières (l'inversion du rapport).	1

2 ^{ème}	<p>On suppose que : $\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D (A > B) \end{cases}$</p> <p>Trouver A ; trouver B. (A et B étant deux grandeurs non nécessairement de valeurs entières).</p>	2
3 ^{ème}	<p>On suppose que : $\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A + B = S \end{cases}$</p> <p>Trouver A ; trouver B. (A et B deux grandeurs non nécessairement de valeurs entières).</p>	2
4 ^{ème}	<p>On suppose que : $\begin{cases} A + B = S \\ A - B = D (A > B) \end{cases}$</p> <p>Trouver A ; trouver B. (A et B étant deux grandeurs non nécessairement de valeurs entières).</p>	2
5 ^{ème}	<p>Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que : (m et n dans \mathbb{Z})</p> <p>1^{er} cas : 2^{ème} cas : 3^{ème} cas :</p> <p>▪ $A = B + m$ ▪ $A = C + m$ ▪ $A = B + m$</p> <p>▪ $B = C + n$ ▪ $B = C + n$ ▪ $A = C + n$</p> <p>▪ $A + B + C = S$ ▪ $A + B + C = S$ ▪ $A + B + C = S$</p> <p>Trouver A, B et C. Trouver A, B et C. Trouver A, B et C.</p>	3

	Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :			
6 ^{ème}	1^{er} cas	2^{ème} cas	3^{ème} cas	3
	$A = \frac{m}{n} B ;$	$A = \frac{m}{n} C$	$A = \frac{m}{n} B ;$	
	$B = \frac{p}{q} C ;$	$B = \frac{p}{q} C$	$A = \frac{p}{q} C ;$	
	$A + B + C = S$	$A + B + C = S$	$A + B + C = S.$	
	Trouver A, B et C.	Trouver A, B et C.	Trouver A, B et C.	
	m, n, p et q dans IN	m, n, p et q dans IN	m, n, p et q dans IN	

Tableau B1 : énoncés fondamentaux correspondant aux problèmes arithmétiques étudiés

Enoncés fondamentaux	Grandeur(s) connue(s)	Grandeur(s) inconnue(s)	Nombres de relations
1 ^{er}	A	B	1
2 ^{ème}		A et B	2
3 ^{ème}		A et B	2
4 ^{ème}		A et B	2
5 ^{ème}		A, B et C	3
6 ^{ème}		A, B et C	3

Tableau B2 : grandeurs connues, inconnues et nombre de relations entre les grandeurs liées aux énoncés

Notons que dans le tableau B1, pour certains de nos énoncés fondamentaux (1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés), nous avons fait le choix de représenter certaines des relations multiplicatives entre les grandeurs sous forme d'une écriture fractionnaire générique de type $\frac{m}{n}$, considérant que cette écriture englobe des cas différents selon les valeurs que prendront m, et n :

- $\frac{m}{n}$ est un entier (m est multiple de n) ;
- $\frac{m}{n}$ est une fraction unitaire (m = 1 et n > 1) ;
- $\frac{m}{n}$ est une fraction ni unitaire ni dans IN. (m et n premiers entre eux).

Ce choix s'explique d'une part, par le fait que les énoncés instanciés à partir desquels nous avons organisé la remontée à des énoncés plus génériques convoquaient des fractions, d'autre part que la schématisation associée (tant du point de vue de la production du schéma que de son interprétation) convoque des jeux de connaissances mathématiques spécifiques – liées à la notion « fraction d'une grandeur » – que nous décrirons ci-après. Ceci nous conduit d'ailleurs à préciser que si ici, nous n'avons renseigné que ce qui concerne les énoncés de problèmes génériques, qualifiés de fondamentaux, c'est bien toujours des couples énoncés-schémas fondamentaux qu'il s'agit de caractériser et que cette première catégorisation, bien qu'isolant le premier terme du couple, n'est pas faite indépendamment des schémas segmentaires potentiellement convoqués dans la résolution mathématique de tels énoncés. Précisons également que l'algébrisation de ces relations entre grandeurs (connues et inconnues) de tels énoncés génériques fait apparaître des premières variables didactiques, celles correspondant précisément aux nombres en jeu associés aux relations multiplicatives entre les grandeurs ($\frac{m}{n}$; m ; n), aux nombres de grandeurs en jeu connues ou inconnues (A, B, C...) et aux structures génériques de ces relations multiplicatives ou additives entre grandeurs en jeu ($A+B+C = S$; $A = B + m$; ...). C'est donc une première description de variables didactiques associées à des « énoncés-schémas » fondamentaux qui est décrite ci-avant dans les deux tableaux.

Toutefois il nous a paru nécessaire d'enrichir ce premier « jeu de variables didactiques » en vue de mieux appréhender les connaissances mathématiques potentiellement convoquées dans la résolution des problèmes associés à nos « énoncés-schémas fondamentaux ». Pour ce faire, nous avons convoqué différents outils théoriques liés pour une part, à des efforts de catégorisation de problèmes arithmétiques-algébriques (travaux de Bednarz & Janvier) ou de problèmes du champ multiplicatif/additif (travaux de Vergnaud), aux représentations sémiotiques potentiellement en jeu dans les « énoncés verbaux » - « schémas » (travaux de Duval), et enfin s'agissant des grandeurs en jeu, aux types d'unités potentiellement en jeu dans la résolution/schématisation (travaux de Chambris). Nous présentons ci-après cet outillage à la fois théorique et méthodologique en l'ensemble de variables didactiques à associer à nos « énoncés-schémas fondamentaux », progressivement enrichi par les apports de ces différents travaux.

II. Structures et complexités d'énoncés de problèmes arithmétiques

1. Des structures d'énoncés entre arithmétique et algèbre

Les travaux de Bednarz & Janvier (1994) proposent une catégorisation de problèmes positionnés « entre arithmétique et algèbre » (du point de vue des stratégies de résolution potentiellement convoquées), elle-même en partie inspirée des travaux de Vergnaud (1993) (sur lesquels nous reviendrons d'ailleurs après). Nous pourrions nous étonner de nous voir reprendre cet outillage dans le cadre de notre thèse, pour nous intéresser à des problèmes proposés à des élèves de fin de primaire, et pour lesquels sera envisagée une résolution ne convoquant pas l'algèbre (en tout cas dans ses formes habituelles d'usages de lettres et d'équations). Pour autant, ces travaux nous ont intéressé à double titre : d'une part pour la distinction faite par ces auteurs entre problèmes *connectés* et problèmes *déconnectés*, d'autre part pour les différentes catégories qu'ils distinguent dans *les problèmes de comparaison* auxquels nos énoncés-schémas fondamentaux s'avèrent tous affiliés.

Bednarz & Janvier (1996) envisagent une distinction entre des problèmes qualifiés de connectés et des problèmes qualifiés de déconnectés :

« En arithmétique, les problèmes qui sont généralement présentés aux élèves sont des problèmes que nous qualifions de « connectés » : une relation peut facilement être établie entre des quantités connues conduisant à la possibilité d'un raisonnement arithmétique (du connu à l'inconnu en fin de processus). Au contraire, en algèbre, les problèmes normalement présentés aux élèves sont qualifiés de déconnectés : aucun pont ne peut être établi directement entre les données connues (Bednarz & Janvier, 1996) » (Marchand P. & Bednarz J., 1999).

Comme l'indique cette citation, les problèmes déconnectés seraient davantage positionnés dans le champ de l'algèbre et ceux connectés davantage dans le champ de l'arithmétique. Pour autant dans nos énoncés fondamentaux nous retrouvons les deux types de problèmes.

Par exemple, le 1^{er} énoncé fondamental appartient à la catégorie « problème connecté » – le « pont » entre la grandeur connue et la grandeur inconnue étant déjà renseigné et autorisant un cheminement quasi-direct du connu vers l'inconnu, comme nous l'illustrons ci-dessous à partir d'un exemple de problème afférent :

Exemple de problème - 1^{er} énoncé-schéma fondamental :

« Ali a trois fois plus de timbres qu'Hatem. Ali possède 504 timbres. Combien de timbres possède Hatem ? »

Le nombre de timbres d'Ali est connu, la relation (multiplicative) entre ce dernier nombre et le nombre de timbres d'Hatem est aussi connu (mais à l'inverse), seul le nombre de timbres d'Hatem est inconnu. Nous voyons dès lors que l'on peut prendre comme point de départ le nombre de timbres d'Ali puis, en « remontant » les calculs (ce qui correspond à inverser la relation multiplicative « trois fois plus » – Hatem a trois fois moins de timbres qu'Ali), retrouver directement le nombre de timbres d'Hatem (en divisant par trois).

Toutefois parmi les énoncés-schémas fondamentaux qui nous intéressent, c'est le seul qui s'avère de nature connectée.

Tous les autres énoncés-schémas fondamentaux recouvrent quant à eux des problèmes dits déconnectés.

Exemple de problème - 5^{ème} énoncé-schéma fondamental :

« Trois enfants jouent aux billes. Ils ont ensemble 198 billes. Ahmed a six fois plus de billes que Fatma et trois fois plus de billes qu'Inès. Combien chaque enfant possède-t-il de billes ? »

Nous connaissons le nombre de billes total et des relations multiplicatives qui lient les nombres de billes des trois enfants, mais nous n'avons pas de données numériques qui permettent de cheminer directement « du connu vers l'inconnu ».

L'outil algébrique permet de résoudre ce problème en utilisant une inconnue (supposée connue), par exemple, le nombre de billes d'Ahmed ou celui de Fatma pour faire ensuite des calculs qui aboutissent au résultat.

Ceci pourrait d'ailleurs (re)poser la question de la résolution de tels énoncés en l'absence de savoirs algébriques enseignés. Ceci nous semble aller de pair avec le fait que le couple envisagé « énoncés-schémas » fondamentaux peut tendre à « rebattre les cartes » du point de vue des jeux de connaissances mathématiques potentiellement convoquées dans leur résolution : ainsi si du point de vue des savoirs arithmétiques et algébriques potentiellement, l'énoncé ci-dessus (1^{er} énoncé et l'énoncé générique associé) semble particulièrement se distinguer et s'avérer « plus élémentaire » que les autres, il n'en est peut-être pas tout à fait de même pour le couple « énoncé-schéma fondamental » associé, la difficulté ici pouvant résider dans l'inversion du rapport entre les deux grandeurs en jeu si celui-ci n'est pas rabattu à la stricte application de la formule algébrique consacrée et institutionnalisée en amont. De la même manière, nous pouvons envisager que si les autres énoncés génériques (2^{ème}, 3^{ème}, etc.) apparaissent comme recouvrant des problèmes déconnectés, l'usage d'un schéma de type segmentaire dans leur résolution prend en charge ce que décrivent comme la « construction de ponts » entre des grandeurs inconnues et connues.

Par ailleurs, par rapport à l'effort de catégorisation de Bednarz & Janvier (1994), tous nos énoncés fondamentaux (y compris celui connecté) relèvent d'une seule et même grande classe – les problèmes dits de comparaison ou de partages en parties inégales. Notons que d'autres auteurs que Bednarz & Janvier (1994) ont pu mettre en avant le rôle de ces problèmes, quand ils sont déconnectés, dans la transition arithmétique-algèbre (Chevallard, 1984a ; Coulange, 2001 ; ...) même si ce n'est pas tout à fait ce qui nous intéresse dans le cas présent.

Ces problèmes de comparaison impliquent des relations de comparaison multiplicatives et additives entre des grandeurs (connues ou inconnues). Bednarz & Janvier (1994) en proposent la schématisation suivante tout en adaptant cette schématisation à nos propres travaux [par exemple, nous distinguons entre une relation additive (+) et une relation additive (-)] :


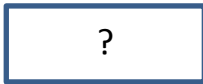




Grandeur connue	
Grandeur inconnue	
Grandeur connue somme d'une relation additive(+)	
Grandeur connue somme d'une relation additive (-)	
Relations additives	
Relation multiplicative	

Tableau B3 : schématisation des relations (multiplicatives et additives) entre grandeurs (inconnues ou connues) dans les travaux de Bednarz & Janvier (1994)

Bednarz & Janvier (1994) et d'autres auteurs à leur suite (Schmidt & Bednarz 1997 ; Marchand & Bednarz 1999) ont cherché à mesurer la complexité de tels problèmes à résoudre par l'arithmétique et/ou l'algèbre selon des critères donnés : nombre de relations (de comparaison et d'addition) entre les grandeurs (qualifiées de « branches »), nature de ces relations (notamment s'agissant pour les problèmes « à trois branches » parfois de composition de relations pour des problèmes : composition de relations additives, composition de relations multiplicatives ou composition de relations additives et multiplicatives), enchaînement de ces relations (composition ou non – place du « générateur ») (Schmidt & Bednarz, 1999).

Ce type d'analyse invite Bednarz & Janvier à penser une « montée en complexité » associée à des types de problèmes qualifiés pour les problèmes à trois branches de « Source », « Composition » ou « Puits ».


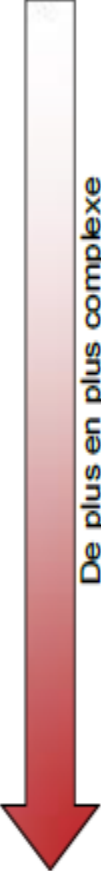
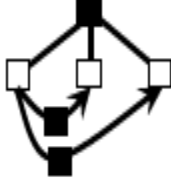
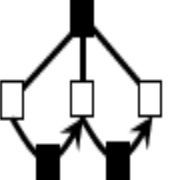
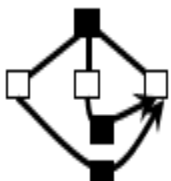
Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)		 De plus en plus complexe
Problèmes à 3 branches	SOURCE Les deux relations ont la même donnée comme point de départ.		
	COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.		
	PUITS Les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée.		
Nature et structure des problèmes de comparaison.			

Tableau B4 : sous-catégories de problèmes déconnectés de type comparaison : « une relation », source, composition, puits (Bednarz & Janvier 1992, cité par Saboya & al. 2013).

Il nous a semblé intéressant de retenir la représentation ainsi mise en avant dans les travaux de Bednarz & Janvier (1994, 1996) pour décrire nos énoncés-fondamentaux comme permettant de mettre en avant :

- la structure générale de chaque problème en lien avec un énoncé-schéma fondamental en lien avec les catégories ainsi établies au sein de la classe problèmes de comparaison – dans laquelle s’inscrivent tous nos énoncés fondamentaux ;
- les nombres de relations impliquées dans ce problème (les « branches ») ;
- l’enchaînement de ces relations qui renvoie aussi au positionnement des grandeurs inconnues et connues (le « générateur » - composition ou autre)

2. Une complexité et des structures d'énoncés arithmétiques à réinterroger au regard de l'outil schéma « segmentaire »

Bednarz & Janvier (1994) distinguent dans la transition arithmétique-algèbre trois types de problèmes :

- les problèmes de type partage inéquitable (ayant des relations de comparaison) ;
- les problèmes impliquant une transformation ;
- les problèmes impliquant une relation entre grandeurs non homogènes par l'intermédiaire d'un taux.

Les problèmes qui sont en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux sont ceux de comparaison ou de « partage inéquitable » et qui renvoient à la comparaison d'au moins deux données inconnues (excepté ceux qui sont en lien avec le 1^{er} énoncé-schéma fondamental). Les travaux de Bednarz & Janvier (1994) se focalisent sur le nombre de grandeurs ou d'inconnues en jeu (deux, trois ou plus), la nature des relations (additives et/ou multiplicatives) et l'enchaînement des relations (Source, Composition, Puits)⁷ pour déterminer la complexité des problèmes impliquant des comparaisons.

Néanmoins, ces travaux ne distinguent pas, en termes de comparaison, entre les relations de type « ...de moins... » et « ...de plus... » et entre les relations de type « ...fois moins... » et « ...fois plus... ». À l'instar de ces travaux, les champs additif et multiplicatif de Vergnaud ne distinguent pas aussi entre ces relations :

Exemple de deux problèmes dont les relations sont de type « ...de moins... » ou « ...de plus... » :

P1 : J'ai 9 billes. J'ai 3 billes de plus que mon voisin. Combien de billes possède mon voisin ?

P2 : J'ai 9 billes. Mon voisin a 3 billes de moins que moi. Combien de billes possède mon voisin ?

Dans ces deux problèmes, nous connaissons l'état initial et la valeur de la transformation et nous cherchons l'état final. Les deux relations « ...de plus... » et « ...de moins... » n'ont aucun impact sur la classification de ces deux problèmes.

Prenons l'exemple suivant :

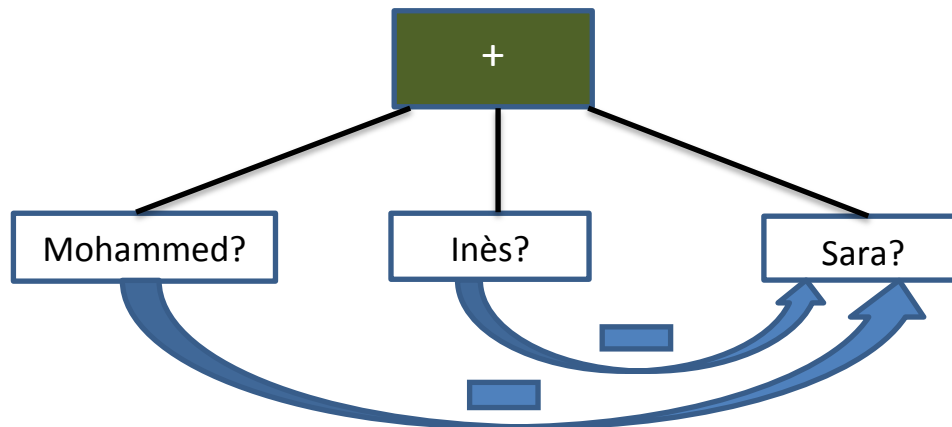
⁷ Catégorisation explicitée ci-après.

Problème « Puits » (suivant la catégorisation de Bednarz & Janvier, 1994) :

P3 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Sara en reçoit 36 de moins que Mohammed, et 27 de moins qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? »

(un problème dont les relations entre les grandeurs sont de type « ...de moins... »).

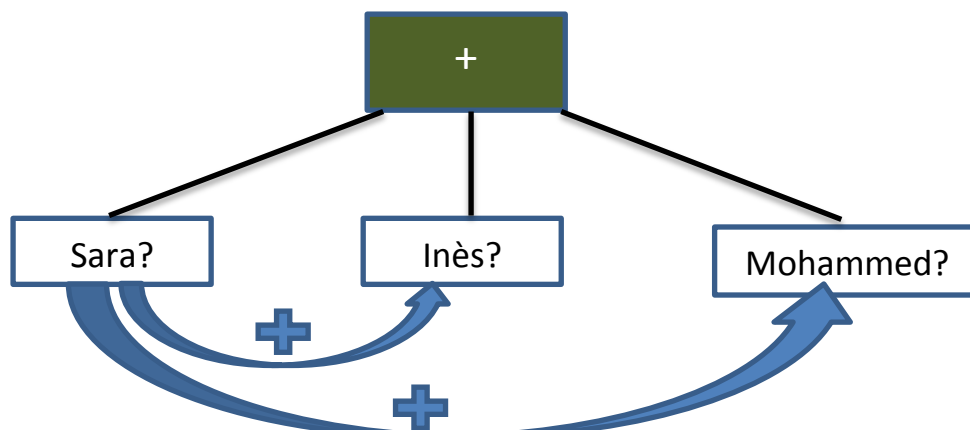
Une schématisation en se référant au tableau B3 est la suivante :



Le problème P_t3 (P_t veut dire problème traité) correspondant qui traduit les deux relations « ...de moins... » en deux relations « ...de plus... » est un problème « Source » suivant la même catégorisation :

P_t3 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Inès en reçoit 27 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? » (un problème dont les relations qui relient les grandeurs sont de type « ...de plus... »)

Une schématisation en se référant au tableau B3 est la suivante :



Dans le registre de représentation graphique segmentaire un seul schéma représente les deux problèmes :

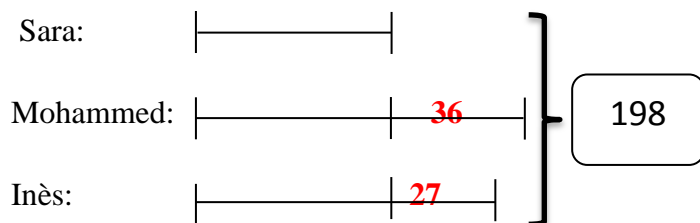


Schéma B1

Pour mettre en schéma le problème P3, il faut trouver tout d'abord la grandeur à partir de laquelle nous pouvons exprimer les deux autres grandeurs (exprimer le nombre de billes de Mohammed et celui d'Inès à partir du nombre de billes de Sara). En plus il faut penser le « 36 et le 27 de moins » comme des ajouts pour produire le schéma. Alors que pour produire le schéma associé au problème P_t3, il suffit de représenter le nombre de billes de Sara (grandeur génératrice) par un segment puis ajouter un autre segment de valeur 36 pour représenter la part de Mohammed et un troisième segment de valeur 27 pour représenter la part d'Inès.

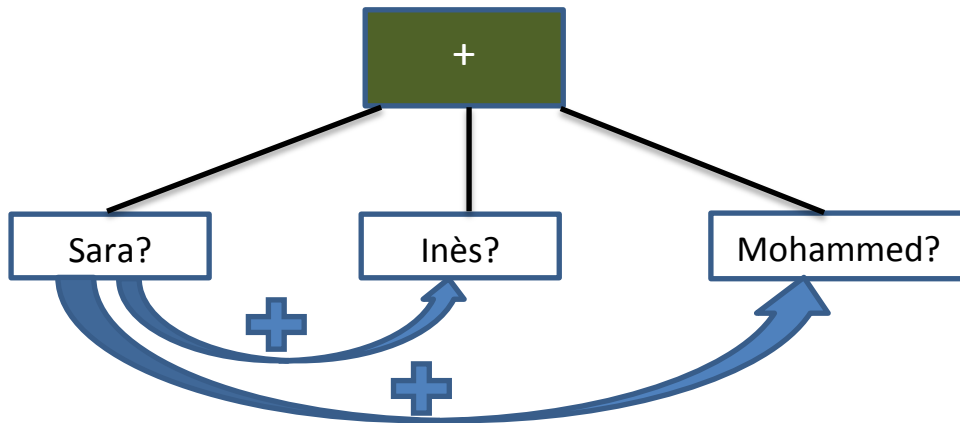
Les problèmes déconnectés à trois branches ne renfermant que des relations additives, et qui font l'objet de notre étude, sont des problèmes en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental. En se référant aux travaux de Bednarz & Janvier (1994), ces problèmes ont trois structures différentes : Source, Composition et Puits.

Nous proposons trois exemples génériques correspondant aux trois structures citées ci-dessus, dont les relations additives sont de type « ...de plus... » :

Source (« ...de plus... ») :

P4 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Inès en reçoit 27 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? ».

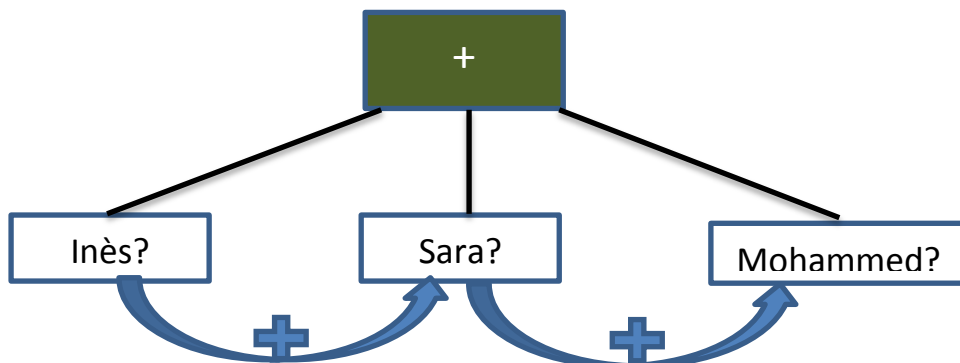
Représentation de Bednarz & Janvier (1994) correspondante :



Composition (« ...de plus... »)

P5 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Sara en reçoit 27 de plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? ».

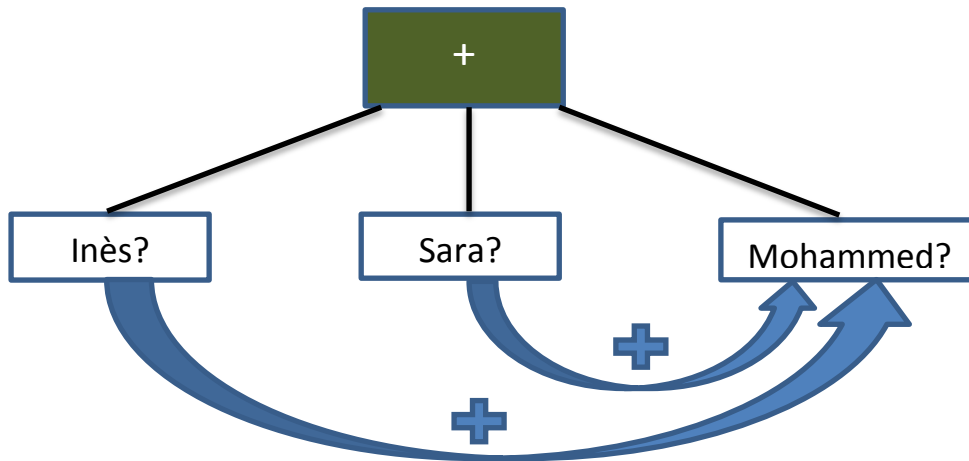
Représentation de Bednarz & Janvier (1994) correspondante :



Puits (« ...de plus... ») :

P6 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus qu'Inès, et 27 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? »

La représentation de Bednarz et Janvier (1994) correspondante est la suivante :



Un schéma représentatif du problème P4 est le suivant :

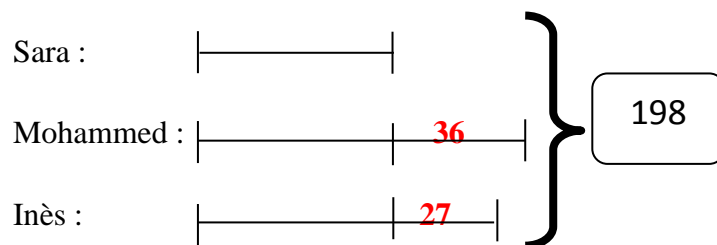


Schéma B2

Les problèmes de types Source sont considérés comme des problèmes faciles à résoudre. Les modélisations des deux relations qui suivent ne sont pas difficiles à réaliser :

- Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara ;
- Inès en reçoit 27 de plus que Sara.

À partir du schéma, le nombre de billes de Sara = $[198 - (36 + 27)] : 3 = 45$.

Un schéma représentatif du problème P5 est le suivant :

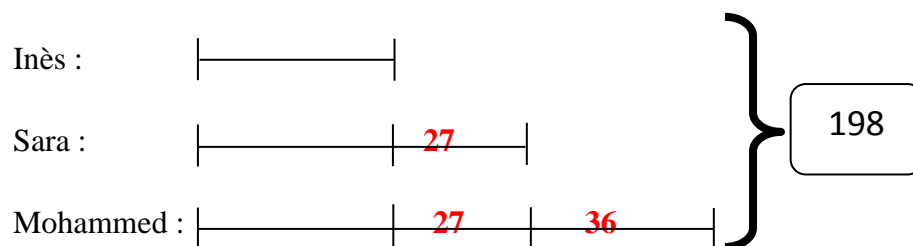


Schéma B3.

Le segment représentant le nombre de billes d'Inès, apparaît dans les trois parts qui représentent les nombres de billes des trois enfants. À partir du schéma, le nombre de billes d'Inès est égal à :

$$[198 - (27 + 27 + 36)] : 3 = 36.$$

La seule difficulté pour produire ce schéma est de représenter le 27 sur la part de Mohammed. Les élèves ont tendance à produire le schéma comme suit :

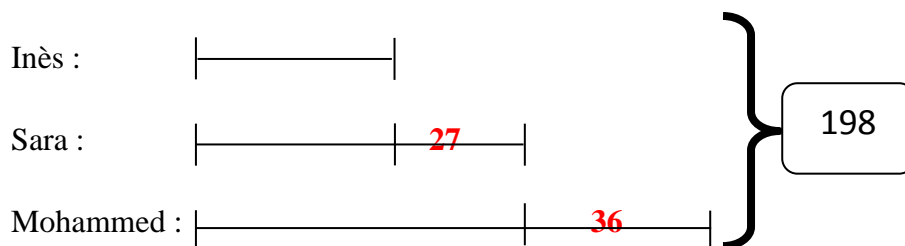


Schéma B4

La composition de deux relations additives n'est pas schématisée sur le schéma B4. Rien ne peut nous renseigner *a priori* sur le nombre de billes de n'importe quel enfant. Si le schéma B3 prend en charge la composition de deux relations additives, le schéma B4 n'aide pas à la percevoir et rien ne garantit *a priori* une résolution correcte du problème en s'appuyant sur ce schéma.

Un schéma représentatif du problème P6 est le suivant :

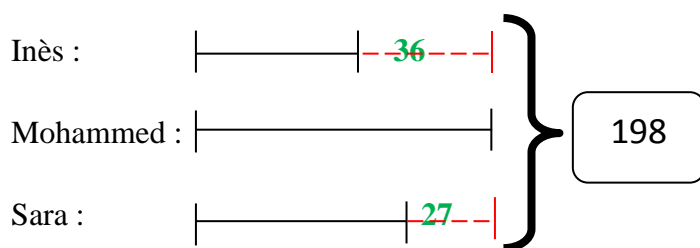


Schéma B5

Les problèmes de types Puits sont considérés comme des problèmes les plus difficiles à résoudre. Pour produire le schéma B5 il faut tout d'abord commencer par trouver la grandeur génératrice à partir de laquelle nous pouvons expliciter les deux autres grandeurs :

- Mohammed en reçoit 36 de plus qu'Inès ;
- Mohammed en reçoit 27 de plus que Sara.

À partir des deux relations précédentes, la grandeur génératrice est le nombre de billes de Mohammed. La part à considérer, et qui nécessite un coût minimal en termes de connaissances convoquées, est le segment représentant le nombre de billes de Mohammed. Les ajouts des deux segments rouges de valeurs 36 et 27 pour mettre en avant trois parts égales à celle qui représente le nombre de billes de Mohammed permettent de voir que ce nombre est égal à :

$$[198 + 36 + 27] : 3 = 87.$$

Sur ce, cette démarche apparaît coûteuse en termes de connaissances et savoirs convoqués.

Et en termes de complexité, nous pouvons établir la hiérarchie ascendante suivante [évoquée par Bednarz & Janvier (1994) : voir tableau B4, p. 51] :



Notons que cette hiérarchie serait inversée si les relations du problème Source et Puits étaient de type « ...de moins... » et que nous opérions un traitement intermédiaire consistant à reformuler les relations entre les grandeurs en jeu (propos explicité dans l'annexe 10, pp. 418-419)

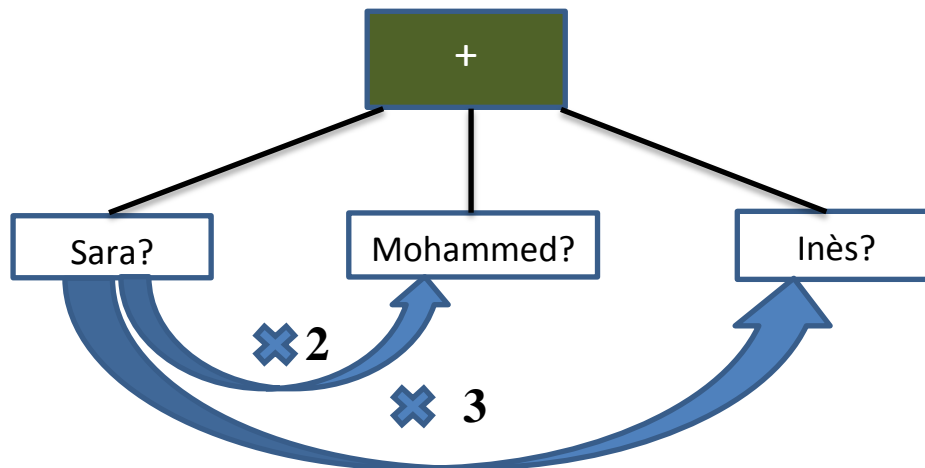
Les problèmes déconnectés à trois branches ne renfermant que des relations multiplicatives entre les grandeurs deux à deux qui font l'objet de notre étude, sont des problèmes en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental. En se référant aux travaux de Bednarz & Janvier (1994), ces problèmes ont aussi trois structures différentes : Composition, Source et Puits.

Nous proposons trois exemples génériques correspondants aux trois structures citées ci-dessus, dont les relations multiplicatives sont de type « ...fois plus... » :

Source (« ...fois plus... ») :

P7 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 2 fois plus que Sara, et Inès en reçoit 3 fois plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? ».

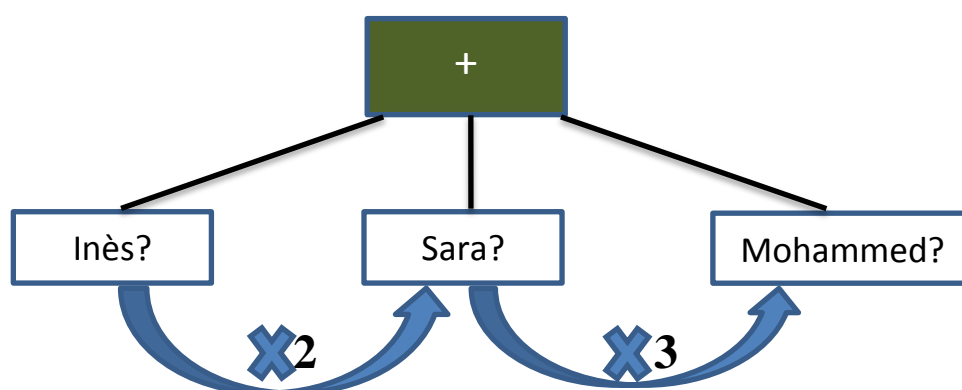
Représentation de Bednarz & Janvier (1994) correspondante :



Composition (« ...fois plus... »)

P8 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 3 fois plus que Sara, et Sara en reçoit 2 fois plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? ».

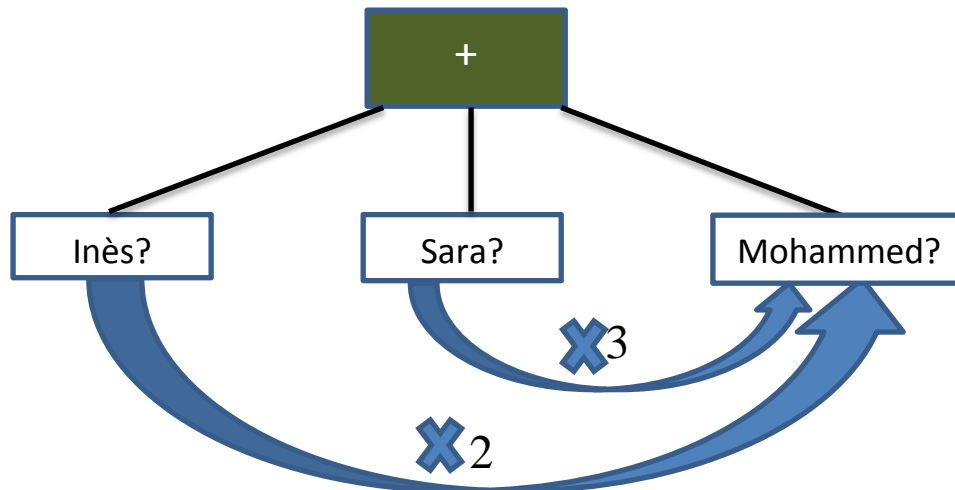
Représentation de Bednarz & Janvier (1994) correspondante :



Puits (« ...fois plus... ») :

P9 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 2 fois plus de billes qu’Inès, et 3 fois plus de billes que Sara. Quelle est la part de chacun ? »

Représentation de Bednarz & Janvier (1994) correspondante :



Un schéma représentatif du problème P7 est le suivant :

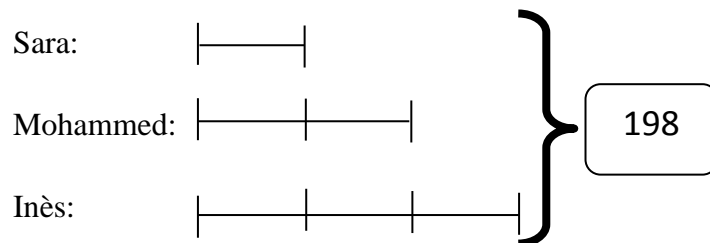


Schéma B6

Comme c'est le cas pour les relations additives, les problèmes de type Source sont considérés comme des problèmes faciles à résoudre. Les représentations des deux relations qui suivent ne sont pas difficiles à réaliser :

- Mohammed en reçoit 2 fois plus que Sara ;
- Inès en reçoit 3 fois plus que Sara.

À partir du schéma, le nombre de billes de Sara = $198 : 6 = 33$.

Un schéma représentatif du problème P8 est le suivant :

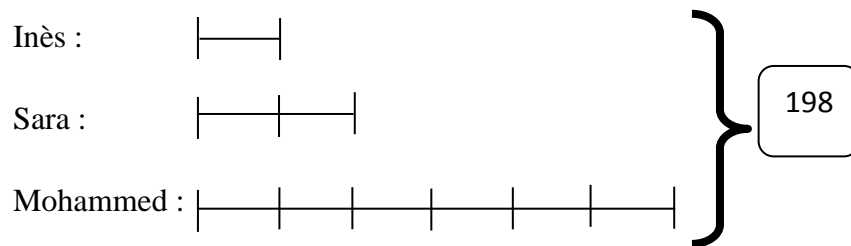


Schéma B7

La seule difficulté pour produire ce schéma est de voir le nombre de billes de Mohammed comme à la fois « trois fois le nombre de billes de Sara » et surtout « six fois le nombre de billes d’Inès » grâce, pour la première relation, à la donnée explicite du problème et, pour la deuxième relation, à la composition des deux relations additives ($2 \times 3 = 6$). Cette composition de deux relations fera l’objet d’une étude plus explicite ultérieurement. À partir du schéma B7, le nombre de billes d’Inès est égal à : $198 : 9 = 22$.

Pour le schéma représentatif du problème P9, reprenons tout d’abord les deux relations contenues dans ce problème :

- Mohammed en reçoit 2 fois plus qu’Inès ;
- Mohammed en reçoit 3 fois plus que Sara.

Il est clair que la plus petite grandeur est le nombre de billes de Sara. La plus grande grandeur est le nombre de billes de Mohammed. Et comme 2 et 3 sont premiers entre eux, il n’y a aucune relation entière qui peut relier le nombre de billes de Sara avec celui d’Inès. D’où la complexité de mettre en œuvre une démarche de schématisation qui s’appuie sur une modélisation par des parts égales. En effet, si nous partons de la relation « Mohammed en reçoit 2 fois plus qu’Inès », le schéma correspondant est facile à produire :

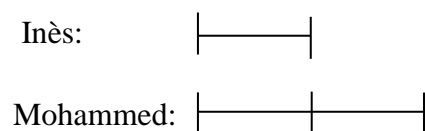


Schéma B8

Partant maintenant de la relation « Mohammed en reçoit 3 fois plus que Sara », le schéma correspondant est aussi facile à produire :

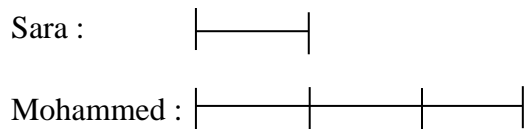


Schéma B9

La combinaison des deux schémas B8 et B9 ne peut pas générer une conversion du problème avec des relations multiplicatives entières entre grandeurs représentées dans le registre de représentation graphique segmentaire, d'où la nécessité de penser à modéliser la grandeur génératrice le nombre de billes de Mohammed autrement. La clé de la schématisation correcte d'un tel problème repose sur la notion du « p.p.c.m. » (ici de 2 et 3 pour opter à modéliser le nombre de billes de Mohammed par 6 *unités segmentaires*). Certes que la notion du « p.p.c.m. » fait partie des savoirs acquis par les élèves de la sixième année de l'école de base, mais rien ne garantit une convocation automatique de ce savoir surtout que les élèves évoluent dans un registre (représentation graphique) autre que le registre arithmétique.

La hiérarchie ascendante en termes de complexité établie pour les relations additives est vérifiée aussi pour les relations multiplicatives :



Notons que cette hiérarchie serait inversée si les relations du problème Source et Puits étaient de type « ...de moins... » et que nous opérions un traitement intermédiaire consistant à reformuler les relations entre les grandeurs en jeu.

Vu que les problèmes de type « Source » sont faciles à résoudre et que les problèmes de type « Puits » ont des degrés de complexité *a priori* difficiles à négocier par des élèves dont la tranche d'âge est entre 11 et 12 ans, seuls les problèmes de type « Composition » feront l'objet de notre séquence expérimentale .

Dans la partie suivante, nous allons montrer comment le schéma prend en charge la composition de deux relations de comparaison d'état dans un problème de type Composition et la réduire à un coût minimum en termes de connaissances convoquées pour résoudre des tels problèmes.

3. Des relations entre les grandeurs du problème et leur expression

Les problèmes qui nous intéressent convoquent *via* les relations multiplicatives ou additives énoncées, des sous-problèmes que l'on peut rattacher aux catégories de problèmes des champs additif et multiplicatif, telles que mises en avant par Vergnaud. Il s'agit des catégories de problèmes de comparaison additive et de comparaison multiplicative.

Ce que nous intéresse le plus est la composition de deux relations additives ou multiplicatives de comparaison d'états, qui concerne potentiellement les 5^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux.

Exemple issu du manuel « Le Moniteur de Mathématiques, p. 15 »⁸ :

Jean a 3 ans de plus que Daniel, et Daniel 1 an de moins que sa cousine Berthe. Qui est le plus vieux de Berthe et de Jean ? Et de combien ?

Jean		←	+	3	→	
Daniel		↑	-	1	↓	?
Berthe		↑			↓	

Ce type de problème (de comparaison additive) peut être considéré comme un sous-problème intégré dans notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental. La différence d'âge entre Berthe et Jean ne peut être trouvée qu'après une composition de deux relations additives de comparaison d'états :

$$3 + (-1) = 2.$$

Prenons l'exemple suivant de problème qui est en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental :

P9 : « Le nombre de billes de Karim est égal à $\frac{1}{2}$ de celui d'Atef, et le nombre de billes d'Atef est égal à $\frac{1}{3}$ de celui d'Ali. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien chaque garçon possède-t-il de billes ? ».

C'est un problème à trois branches de type Composition (Bednarz & Janvier, 1994). Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.

⁸ Fiche Pédagogique. Résolution des problèmes cycle 3, sous la direction de Vergnaud (1997). Nathan.

Pour établir une relation entre le nombre de billes de Karim et celui d'Ali, d'après la catégorisation de Vergnaud, nous sommes obligés de passer par une composition de deux relations de comparaison d'états multiplicatives (1. Nombre de billes de Karim = $\frac{1}{2}$ nombre de bille d'Atef, 2. Nombre de billes d'Atef = $\frac{1}{3}$ celui d'Ali). La composition de deux relations donne :

$$\text{Nombre de billes de Karim} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{ nombre de billes d'Ali.}$$

La composition de relations multiplicatives fractionnaires ainsi envisagée recouvre la multiplication de deux rationnels. Une procédure néanmoins possible en l'absence d'une telle connaissance pour résoudre ce problème est de reformuler le problème comme suit :

P₉ « Le nombre de billes d'Ali est trois fois plus grand que celui d'Atef, et le nombre de billes d'Atef est deux fois plus grand que celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien chaque garçon possède-t-il de billes? ».

La composition des deux relations ainsi reformulées donne :

$$\text{Nombre de billes d'Ali} = 2 \times 3 \text{ nombre de billes de Karim.}$$

Même en reformulant le problème en utilisant des entiers, le degré de difficulté que recouvre une composition de deux relations reste conséquent en l'absence d'un schéma. Le schéma, sans recourir à reformuler le problème autrement, peut prendre en charge cette difficulté et offre un outil permettant de rendre plus accessible la résolution d'un tel problème.

En effet, la relation :

« nombre de billes de Karim = $\frac{1}{2}$ nombre de billes d'Atef », se schématise de la façon suivante :

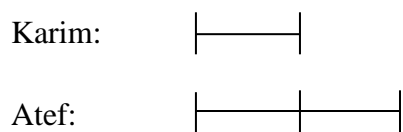


Schéma B10

et la relation :

« nombre de billes d'Atef = $\frac{1}{3}$ celui d'Ali », se schématise à son tour de la façon suivante :

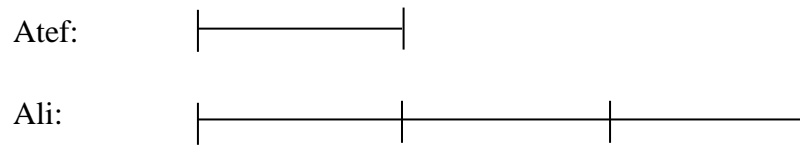


Schéma B11

Maintenant, il suffit de penser à mobiliser la première relation et diviser sur le schéma B11 la part d'Atef par deux, et chaque part des trois parts qui représentent le nombre de billes d'Ali aussi par deux, pour obtenir le schéma final représentant le problème :

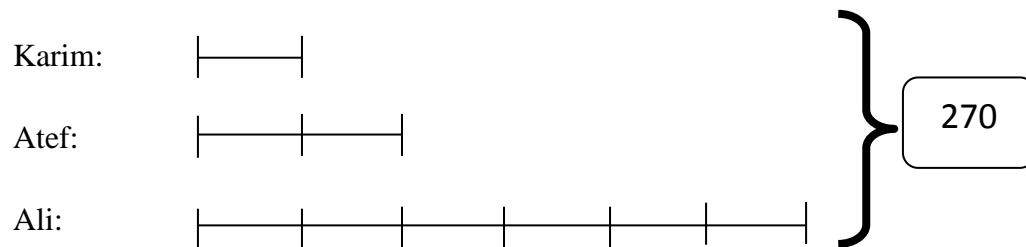


Schéma B12

Le nombre de billes de Karim en découle : $270 : 9 = 30$ billes.

Cette démarche de schématisation s'est-elle appuyée sur la composition des deux de comparaison d'états ? Nous pensons que non. Le passage du nombre de billes de Karim à celui d'Atef s'est appuyé sur la schématisation d'une première relation multiplicative (nombre de billes de Karim = $\frac{1}{2}$ nombre de bille d'Atef, symétrisée en deux fois plus). Le passage du nombre de billes d'Atef à celui d'Ali s'est appuyé sur une deuxième relation multiplicative (nombre de billes d'Atef = $\frac{1}{3}$ celui d'Ali, symétrisée en trois fois plus). La partition de chaque part du nombre de billes d'Ali ou du nombre de billes d'Atef s'est appuyée sur la schématisation de la première relation multiplicative. En produisant le schéma et en l'interprétant nous ne sommes pas en train de résoudre le problème tel qu'il est pensé dans la catégorisation de Vergnaud, mais nous avons fait évoluer la catégorisation du problème d'une catégorie bien déterminée (composition des deux relations de comparaison d'états) à une catégorie nettement plus simple (comparaison d'états).

La complexité de la composition de deux relations de comparaison d'états peut être plus conséquente si les deux relations sont mixtes (une additive et l'autre multiplicative) comme l'illustre l'exemple suivant de problèmes que nous qualifions de « mixte » :

P10 : « Khadija a 72 fruits dans son panier. Elle a 12 poires de moins que de fraises et 3 fois plus d'oranges que de poires. Combien a-t-elle de fraises ? »

C'est un problème déconnecté qui est partiellement en lien avec à la fois le 5^{ème} et le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental.

La donnée totale (nombre de fruits) et les relations (10 de moins, 3 fois plus) sont connues. Par contre, la donnée initiale (nombre de poires) est inconnue. Nous ne pouvons pas trouver le nombre d'oranges et de fraises, car le nombre de poires n'est pas connu. C'est une réflexion sur les relations connues, notamment via la schématisation, qui va permettre de générer un raisonnement pour déterminer les quantités des différents fruits.

La complexité des problèmes « mixtes » est d'autant plus conséquente si nous ajoutons une relation multiplicative fractionnaire comme donnée du problème, comme l'illustre le problème ci-dessous :

P11 : « On dispose de trois bassins, un grand, un moyen et un petit. La capacité de trois bassins est égale à 280 L. Sachant que la capacité du grand bassin dépasse celle du moyen de 40 L, et la capacité du petit bassin est égale à $\frac{2}{3}$ celle du moyen, trouvez la capacité de chaque bassin. »

Le schéma semble prendre en charge une part de la complexité liée à la composition de telles relations – sous certaines conditions que nous venons de tenter de délimiter – ce qui peut expliquer en quoi l'usage de schémas dans la résolution de problèmes arithmétiques bouleverse partiellement la complexité établie par Bednarz & Janvier (1994) dans la résolution de tels problèmes. Un autre aspect qui nous semble à considérer pour mesurer la complexité en termes de variables didactiques (liées à nos couples d'énoncés schémas-fondamentaux) est la possibilité d'opérer des traitements internes au registre de la langue naturelle (lié aux descriptions des relations

multiplicatives et additives entre les grandeurs dans l'énoncé) et au registre graphique (lié au schéma segmentaire).

C'est précisément cette question que nous mettons à l'étude ci-après.

Notons que nous considérons le système sémiotique en lien avec les schémas segmentaires comme un registre de représentation puisqu'il permet les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis : la formation, le traitement et la conversion.

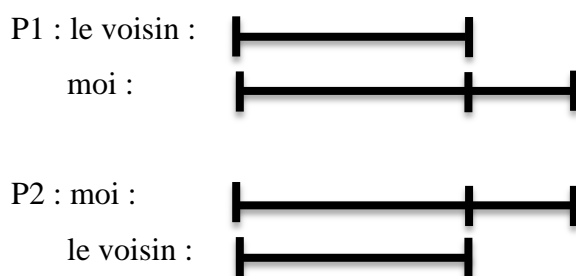
III. Conversions et traitements dans le registre de la langue naturelle et graphique segmentaire

Reprenons les deux problèmes de la page 52 :

P1 : J'ai 9 billes. J'ai 3 billes de plus que mon voisin. Combien mon voisin possède-t-il de billes?

P2 : J'ai 9 billes. Mon voisin a 3 billes de moins que moi. Combien mon voisin possède-t-il de billes?

Même si au regard des travaux de Vergnaud (1993), les deux relations « ...de plus... » et « ...de moins... » n'ont aucun impact sur la classification de ces deux problèmes, leurs représentations graphiques segmentaires peuvent *a priori* ne pas être obtenues de manière identique :



La première représentation segmentaire est obtenue dans une optique d' « ajout » : nous commençons par représenter la plus petite grandeur correspondant à la quantité de billes du voisin puis nous ajoutons la différence. La deuxième s'obtient dans une optique de « retranchement » : nous représentons la plus grande grandeur correspondant à ma quantité de billes puis nous retranchons la différence sur le schéma obtenu.

De même pour deux problèmes dont les relations sont de type « ...fois moins... » ou « ...fois plus... » :

P12 : J'ai 24 billes. J'ai 4 fois plus de billes que mon voisin. Combien mon voisin possède-t-il de billes?

P13 : J'ai 24 billes. Mon voisin a 4 fois moins de billes que moi. Combien mon voisin possède-t-il de billes?

Leurs représentations graphiques segmentaires correspondantes peuvent ne pas être obtenues de la même manière :

P12 : Le voisin : 
 moi : 

P13 : moi : 
 le voisin : 

La première représentation segmentaire est obtenue dans une optique de « report » : nous commençons par représenter la plus petite grandeur correspondant à la quantité de billes du voisin puis nous la reportons 4 fois. La deuxième s'obtient dans une optique de « partage » : nous représentons la plus grande grandeur correspondant à ma quantité de billes puis nous la partageons en 4 parts égales.

Toutes les relations entre les grandeurs de nos énoncés-schémas fondamentaux sont des relations multiplicatives ou additives. Nous nous intéressons en particulier, comme évoqué précédemment, aux relations de type :

- « ... de plus ... » ;
- « ... de moins ... » ;
- « ... fois plus ... » ;
- « ... fois moins ... ».

Nous nous intéressons donc ici à ces relations en termes de registres de représentation sémiotiques (de la langue naturelle et graphique segmentaire) et de traitements internes à ces registres ou de conversions d'un registre à l'autre (Duval, 1993).

Remarquons tout d'abord les deux équivalences entre les relations dans le registre de la langue naturelle, le passage de l'une à l'autre pouvant correspondre à un traitement interne à ce registre :

- équivalence entre les relations de type « ... de moins ... » à des relations de type « ... de plus ... » ;

Exemple :

Ali a 25 billes de moins qu'Ahmed \Leftrightarrow Ahmed a 25 billes de plus qu'Ali ;

- équivalence entre les relations de type « ... fois moins ... » à des relations de type « ... fois plus ... » ;

Exemple :

Ali a 3 fois moins de billes qu'Ahmed \Leftrightarrow Ahmed a 3 fois plus de billes qu'Ali.

Les deux couples de problèmes suivants sont alors équivalents :

P14 : « Adam et Meriem possèdent 288 billes. Adam possède 26 billes de moins que Meriem. Combien de billes possède chaque enfant? »

P15 : « Adam et Meriem possèdent 288 billes. Meriem possède 26 billes de plus qu'Adam. Combien de billes possède chaque enfant? »

P16 : « Adam et Meriem possèdent 288 billes. Adam possède 2 fois moins de billes que Meriem. Combien de billes possède chaque enfant? »

P17 : « Adam et Meriem possèdent 288 billes. Meriem possède 2 fois plus de billes qu'Adam. Combien de billes possède chaque enfant? »

Les deux transformations des deux problèmes P14 et P16 ainsi établies permettent de procéder à une conversion des problèmes tels que P15 et P17 du registre de la langue naturelle à celui de représentation graphique segmentaire. La transformation d'un problème P à un problème P_t via un traitement intrinsèque au registre de la langue naturelle peut aboutir à une variation sur la structure du problème ainsi converti.

La dualité « Énoncé/Schéma » évoquée précédemment renvoie dans les faits, à deux registres de représentations sémiotiques, différents l'un de l'autre : le registre de la langue naturelle en lien avec l'énoncé et le registre de représentation graphique segmentaire en lien avec le schéma. Le schéma produit dans le registre de représentation graphique segmentaire est en lien étroit avec la formulation de l'énoncé du problème représenté par ce schéma. Pour cela, et lors de cette partie, notre intérêt sera porté sur les traitements/conversions que ce soit intrinsèques ou entre différents registres de représentation, notamment le registre de la langue naturelle et celui de la représentation graphique segmentaire.

Les unités signifiantes de différentes représentations ne sont pas forcément appréhendées par nous-même dans l'ordre de leurs arrangements dans ces différentes représentations.

1. Traitements liés aux relations additives dans les deux registres de représentation

Nous traitons dans cette partie les relations additives rattachées à des problèmes connectés, déconnectés à deux branches ou déconnectés à trois branches. Tous les traitements que nous exposerons seront sur des relations/problèmes génériques.

a. Relations additives simples

Partons de la relation suivante :

R1 : « Mon voisin a 3 billes de moins que moi ».

Trois unités signifiantes figurent dans la relation R1 :

- « mon voisin » ;
- « 3 billes de moins » : unité qui précise l'écart entre ma part et celle de mon voisin ;
- « moi ».

Pour procéder à une conversion de la relation R1 dans le registre de représentation graphique segmentaire, nous commençons par coder le nombre de mes billes (grandeur génératrice) par une unité figurale (un segment) :



Puis sur ce segment nous codons la deuxième unité signifiante (3 billes de moins) par une deuxième unité figurale [une partie du segment (déjà représenté) et qui représente l'écart entre les deux parts] :



Ce qui permet de coder la troisième unité signifiante (nombre de billes du voisin) par une troisième unité figurale (un segment auquel si nous ajoutons la deuxième unité figurale nous obtenons la première) :



Cette conversion donne une représentation graphique segmentaire de la relation R1 en termes d'un groupement des trois unités figurales tout en intégrant la valeur numérique de l'unité figurale 2 :

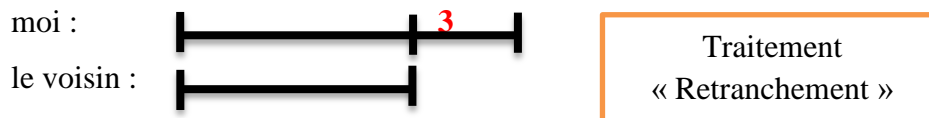


Schéma B13

La conversion ainsi faite est dans une optique d'un traitement de type « Retraitement » en termes d'unités figurales.

Un traitement interne au registre de la langue naturelle de la relation R1 donne :

R 2 : « J'ai 3 billes de plus que mon voisin ».

Trois unités signifiantes figurent alors dans la relation R2 :

- « moi » ;
- « 3 billes de plus » : Unité qui précise l'écart entre ma part et celle de mon voisin ;
- « mon voisin ».

Pour procéder à une conversion de la relation R2 dans le registre de représentation graphique segmentaire, nous commençons par coder la part de mon voisin (grandeur génératrice) par une unité figurale (un segment) :



Puis nous codons la deuxième unité signifiante par une deuxième unité figurale (segment qui représente les 3 billes d'écart) :



Ce qui code en même temps la troisième unité signifiante via une troisième unité figurale (correspondant à la réunion des deux segments).

Cette conversion donne une représentation graphique de la relation R2 comme réunissant trois unités figurales :

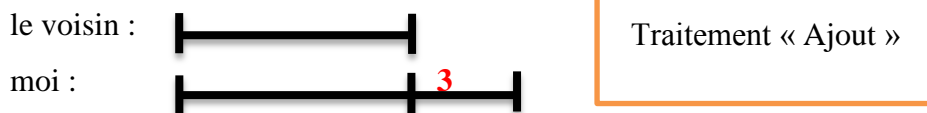


Schéma B14

La conversion ainsi faite est dans une optique d'un jeu d'« ajout » en termes d'unités figurales.

En pratique, rien n'exclut *a priori* de représenter la relation R1 par le schéma B14 ou représenter la relation R2 par le schéma B13.

b. Relations additives rattachées à des problèmes déconnectés à deux branches

Un problème déconnecté à deux branches, dont les deux relations qui relient entre ces deux grandeurs sont additives, est un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental :

On suppose que $A + B = S$ et $A - B = D$, ($A > B$), trouver A ; trouver B.

Considérons le problème suivant :

P18 : « Dans une école on compte 360 élèves. Sachant qu'il y a 28 garçons de moins que de filles, trouvez :

- le nombre des filles ;
- le nombre des garçons ».

En partant de la relation « Il y a 28 garçons de moins que de filles », et en appliquant le traitement de type « Retranchement » (voir page 72), nous obtenons comme conversion de cette relation dans le registre de représentation graphique segmentaire le schéma suivant :

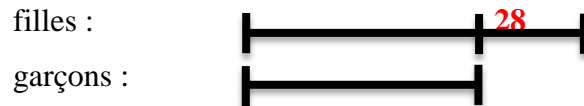


Schéma B15

Sur ce, il suffit d'intégrer le nombre total des élèves dans le schéma pour obtenir le schéma segmentaire représentatif du problème P18 :



Schéma B16

Une modification du problème P18 via un traitement interne au registre de la langue naturelle donne :

P₁₈ : « Dans une école on compte 360 élèves. Sachant qu'il y a 28 filles de plus que de garçons, trouvez :

- le nombre des filles ;
- le nombre des garçons. »

Le schéma correspondant à la relation « Il y a 28 filles de plus que de garçons » de l'énoncé dans le registre de représentation graphique segmentaire est le schéma obtenu par le traitement de type « Ajout » (voir page 73) :



Schéma B17

Ce qui donne comme conversion du problème P₁₈ dans le registre de représentation graphique segmentaire le schéma suivant :



Schéma B18

Le schéma B17 génère l'unité figurale qui représente le nombre de garçons à partir de celle qui représente le nombre de filles, par contre le schéma B18 génère l'unité figurale qui représente le nombre de filles à partir de celle qui représente le nombre de garçons. Pour résoudre les deux problèmes P18 et P₁18 deux procédures de résolutions différentes seront exposées lors de nos analyses à venir.

c. Relations additives rattachées à des problèmes déconnectés à trois branches

Nous nous intéressons en particulier aux problèmes de type Composition (Bednarz & Janvier, 1994). Un problème dans lequel nous identifions une composition de deux relations additives de comparaison d'états est un problème en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental (1^{er} cas) :

soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

- $A = B + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z}).

Partons du problème afférent suivant :

Problème P19 : « Dans un tiroir on dispose de 108 stylos appartenant à 3 enfants : Chaouki, Hichem et Rachida. Chaouki possède 6 stylos de moins qu'Hichem, et Hichem possède 12 stylos de moins que Rachida. Combien de stylos possède chaque enfant? »

Pour procéder à une conversion du problème P19 dans le registre de la représentation graphique segmentaire, il faut prendre en compte les deux unités significatives suivantes :

- R1 : Chaouki possède 6 stylos de moins qu'Hichem ;
- R2 : Hichem possède 12 stylos de moins que Rachida.

Une application du type de traitement « Retranchement » donne comme représentation de la relation R2 dans le registre de représentation graphique segmentaire le schéma suivant :



De même, la conversion de la relation R1 en termes de schéma en appliquant le même type de traitement (« Retranchement ») donne :



La réunion des quatre unités figurales précédentes et l'ajout du nombre total de stylos en termes de légende donnent le schéma représentatif du problème P19 dans le registre de représentation graphique segmentaire :

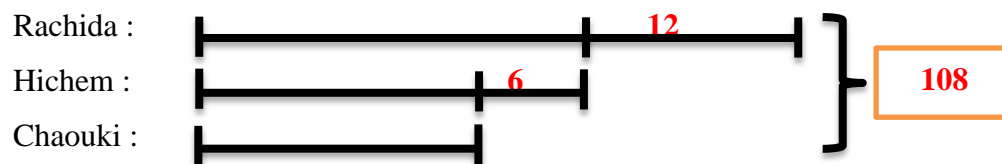


Schéma B19

La stratégie correspondante à la résolution du problème P19 sera explicitée ultérieurement.

Une modification du problème P19 via un traitement interne au registre de la langue naturelle donne :

P₁₉ : « Dans un tiroir on dispose de 108 stylos appartenant à 3 enfants : Chaouki, Hichem et Rachida. Hichem possède 6 stylos de plus que Chaouki, et Rachida possède 12 stylos de plus qu'Hichem. Combien de stylos possède chaque enfant? »

Les deux relations R1 et R2 citées ci-avant deviennent ainsi :

- R1 : Hichem possède 6 stylos de plus que Chaouki ;
- R2 : Rachida possède 12 stylos de plus qu'Hichem.

Une application du type de traitement « Ajout » donne comme représentation de la relation R1 par une conversion dans le registre de représentation graphique segmentaire le schéma suivant :



De même, la conversion de la relation R2 en termes de schéma en appliquant le même traitement « Ajout » donne :



Ce qui donne comme schéma représentatif du problème P_t19 après réunion des quatre unités figurales précédentes et l'ajout du nombre total de stylos, en termes de légende, le schéma suivant :

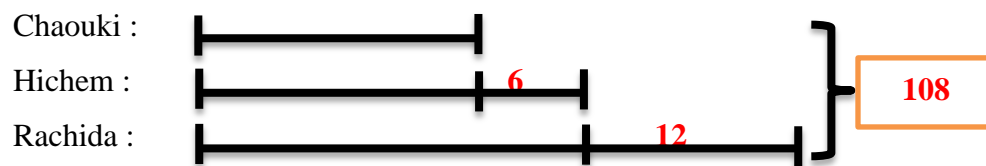


Schéma B20

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la stratégie correspondante à la résolution du problème P_t19 sera explicitée ultérieurement.

Le schéma B19 est généré à partir de la plus grande grandeur (le nombre de stylos de Rachida) tandis que Le schéma B20 est généré à partir de la plus petite grandeur (le nombre de stylos de Chaouki).

Le tableau suivant résume d'une façon générique les types de traitements dans le registre de représentation graphique segmentaire rattachés à des types de problèmes dont les relations qui relient les grandeurs afférentes sont toutes additives :

	Types de problèmes (Additifs)	Schémas
--	----------------------------------	---------











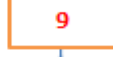









Traitements « Ajout »	Connectés	<p>Le Voisin : </p> <p>Moi : </p> <p></p>
	Déconnectés à deux branches	<p>Garçons : </p> <p>Filles : </p> <p></p>
	Déconnectés à trois branches (Composition)	<p>Chaouki : </p> <p>Hichem : </p> <p>Rachida : </p> <p></p>
Traitements « Retranche- ment »	Connectés	<p></p> <p>Moi : </p> <p>Le voisin : </p>
	Déconnectés à deux branches	<p>Filles : </p> <p>Garçons : </p> <p></p>
	Déconnectés à trois branches (Composition)	<p>Rachida : </p> <p>Hichem : </p> <p>Chaouki : </p> <p></p>

Tableau B5 : types de traitements dans le registre de représentation graphique segmentaire via un exemple (relations additives)

À partir du tableau B1 (voir pp. 43-45) et du tableau précédent nous proposons le tableau suivant qui résume d'une façon générale les types de traitement de représentation rattachés à différents types de problèmes dont les relations qui relient les grandeurs afférentes sont toutes additives. Ce tableau, en association avec le tableau B1, concrétise relativement la notion d' « *énoncés-schémas fondamentaux* » évoquée précédemment :

	Types de problèmes (additifs)	Schémas
Traitements « Ajout »	Connectés	
	Déconnectés à deux branches	
	Déconnectés à trois branches (Composition)	
Traitements « Retranche- ment »	Connectés	
	Déconnectés à deux branches	
	Déconnectés à trois branches (Composition)	

Tableau B6 : types de traitements dans le registre de représentation graphique segmentaire de façon générale (relations additives)

2. Traitements liés aux relations multiplicatives

Nous traitons dans cette partie les relations multiplicatives rattachées à des problèmes « connectés » ou « déconnectés à trois branches de type Composition ». Les problèmes où nous identifions des relations mixtes entre grandeurs (multiplicatives et additives) seront traités ci-après. Tous les traitements que nous exposerons seront sur des problèmes génériques.

a. Relations multiplicatives simples rattachées à des problèmes connectés

Considérons le problème suivant :

P20 : « La hauteur de la maison est 4 fois moins grande que celle de l'immeuble. Trouvez la hauteur de la maison sachant que la hauteur de l'immeuble égale 12 m. ».

Trois unités significantes émergent de l'énoncé :

- « la hauteur de l'immeuble » ;
- « 4 fois moins grande » : Unité qui précise le rapport entre les deux hauteurs ;
- « la hauteur de la maison ».

Pour procéder à une conversion du problème P20 dans le registre de représentation graphique segmentaire, nous commençons par coder la première unité significative (La hauteur de l'immeuble) par une unité figurale (un grand segment) :



Par le biais de la deuxième unité significative (4 fois moins grande), cette dernière unité figurale sera partagée en 4 petits segments égaux :



Ce qui permet de coder la troisième unité significative (la hauteur de la maison) par un des 4 petits segments :



La représentation du problème dans le registre de représentation graphique segmentaire en découle après ajout des 12 m en termes de légende :

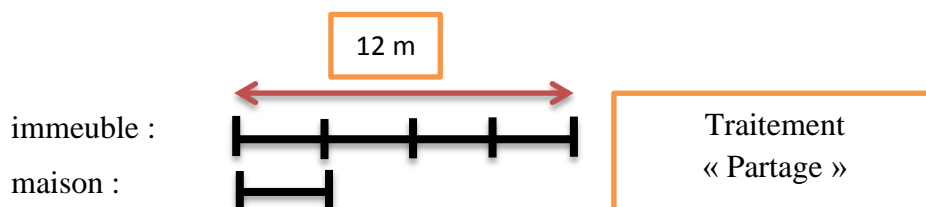


Schéma B21

Une modification du problème P18 via un traitement interne au registre de la langue naturelle donne :

P₁20 : « La hauteur de l'immeuble est 4 fois plus grande que celle de la maison. Trouver la hauteur de l'immeuble sachant que la hauteur de la maison est égale à 3 m ».

À partir de l'énoncé, nous identifions les trois unités signifiantes suivantes :

- « la hauteur de la maison » ;
- « 4 fois plus grande » : unité qui précise le rapport entre les deux hauteurs ;
- « la hauteur de l'immeuble ».

Pour procéder à une conversion du problème P₁20 dans le registre de représentation graphique segmentaire, nous commençons par coder la première unité signifiante (la hauteur de la maison) par une unité figurale (un petit segment) :



Par le biais de la deuxième unité signifiante (4 fois plus grande), cette dernière unité figurale sera reportée 4 fois :



Ce qui permet déjà de coder la troisième unité signifiante (la hauteur de l'immeuble).

Et comme représentation du problème dans le registre de représentation graphique segmentaire nous obtenons le schéma suivant après union des deux unités figurales et l'ajout des 3m en termes de légende :

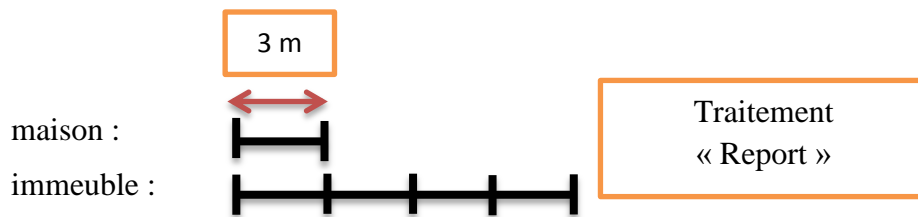


Schéma B22

Le type de traitement « Partage » a été élaboré dans une optique de division à partir de la plus grande grandeur (hauteur de l'immeuble), et le type de traitement « Report » a été élaboré dans une optique de multiplication à partir de la plus petite grandeur (hauteur de la maison).

b. Relations multiplicatives rattachées à des problèmes déconnectés à trois branches

Nous nous intéressons en particulier aux problèmes de type Composition (Bednarz & Janvier, 1994). Un problème dans lequel nous identifions une composition de deux relations multiplicatives de comparaison d'états est un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental (1^{er} cas) :

soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

$$A = m B ;$$

$$B = n C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Trouver A, B et C.

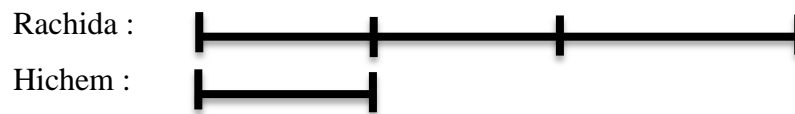
Partons du problème afférent suivant :

Problème P21 : « Dans un tiroir on dispose de 108 stylos appartenant à 3 enfants : Chaouki, Hichem et Rachida. Chaouki possède deux fois moins de stylos qu'Hichem, et Hichem possède 3 fois moins de stylos que Rachida. Combien de stylos possède chaque enfant? »

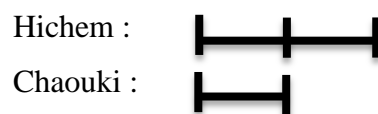
Pour procéder à une conversion du problème P21 dans le registre de représentation graphique segmentaire, il faut prendre en compte les deux relations suivantes :

- R1 : Chaouki possède 2 fois moins de stylos qu'Hichem ;
- R2 : Hichem possède 3 fois moins de stylos que Rachida.

Une application du traitement « Partage » donne comme représentation de la relation R2 dans le registre de représentation graphique segmentaire le schéma suivant :



De même, la conversion de la relation R1 en termes de schéma en appliquant le même type de traitement « Partage » donne :



Ce qui donne comme schéma représentatif du problème P21 : d'une part la réunion des quatre unités figurales précédentes et d'autre part l'ajout du nombre total de stylos en termes de légende :

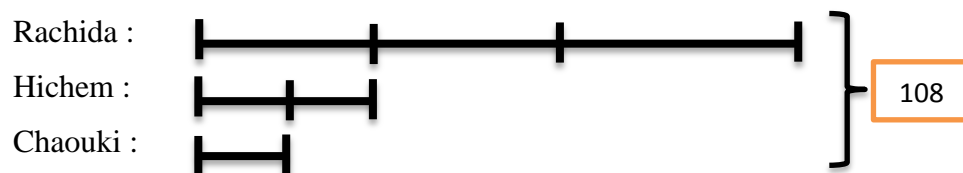


Schéma B23

La stratégie correspondante à la résolution du problème P21 sera explicitée ultérieurement.

Une modification du problème P21 via un traitement interne au registre de la langue naturelle donne :

Problème P₁21 : « Dans un tiroir on dispose de 108 stylos appartenant à 3 enfants : Chaouki, Hichem et Rachida. Rachida possède 3 fois plus de stylo qu'Hichem et Hichem possède 2 fois plus de stylos que Chaouki. Combien de stylos possède chaque enfant? »

Les deux relations R1 et R2 citées ci-avant deviennent ainsi :

- R1 : Hichem possède 2 fois plus de stylos que Chaouki ;
- R2 : Rachida possède 3 fois plus de stylos qu'Hichem.

Une application du traitement de type « Report » donne comme représentation de la relation R1 dans le registre de représentation graphique segmentaire le schéma suivant :



De même, la conversion de la relation R2 en termes de schéma en appliquant le même type de traitement « Report » donne :



La réunion des quatre unités figurales précédentes et l'ajout du nombre total de stylos en termes de légende donnent comme schéma représentatif du problème P_i21 le suivant:



Schéma B24

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la stratégie correspondante à la résolution du problème P_i21 sera explicitée ultérieurement.

Le schéma B22 est généré à partir de la plus grande grandeur (le nombre de stylos de Rachida) et Le schéma B23 est généré à partir de la plus petite grandeur (le nombre de stylos de Chaouki).

Le tableau suivant résume d'une façon générique les types de traitements dans le registre de représentation graphique segmentaires rattachés à des types de problèmes dont les relations qui relient les grandeurs afférentes sont toutes multiplicatives :

	Types de problèmes (Multiplicatifs)	Schémas
Traitements « Report »	Connectés	
	Déconnectés à trois branches (Composition)	
Traitements « Partage »	Connectés	
	Déconnectés à trois branches (Composition)	

Tableau B7 : types de traitements dans le registre de représentation graphique segmentaire via un exemple (relations multiplicatives)

À partir du tableau B1 (voir pp. 43-45) et du tableau précédent nous proposons le tableau suivant qui résume d'une façon générale les types de traitements de représentation rattachés à différents types de problèmes dont les relations qui relient les grandeurs afférentes sont toutes multiplicatives. Ce tableau, en association avec le

tableau B1, concrétise relativement une fois de plus la notion d' « *énoncés-schémas fondamentaux* » évoquée précédemment ($\frac{m}{n} = 3$ et $\frac{p}{q} = 2$ pour les problèmes déconnectés à 3 branches ; voir Tableau B1, 1^{er} cas du 6^{ème} énoncé-schéma fondamental, p. 45) :

	Types de problèmes (multiplicatifs)	Schémas
Traitements « Report »	Connectés	
	Déconnectés à trois branches (Composition)	
Traitements « Partage »	Connectés	
	Déconnectés à trois branches (Composition)	

Tableau B7 : types de traitements dans le registre de représentation graphique segmentaire de façon générique (relations multiplicatives)

3. Traitements liés aux relations mixtes (multiplicatives et additives)

Nous traitons dans cette partie les relations additives et multiplicatives rattachées à des problèmes déconnectés à deux ou à trois branches. Tous les traitements que nous exposerons seront sur des problèmes génériques.

a. Relations mixtes (multiplicatives et additives) rattachées à des problèmes déconnectés à deux branches

Un problème déconnecté à deux branches dont les relations qui relient ces deux grandeurs sont mixtes (une additive et l'autre multiplicative) est un problème en lien ou bien avec le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental ou bien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental (A et B étant des grandeurs de valeurs non nulles) :

▪ **2^{ème} énoncé-schéma fondamental :**

On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D \end{array} \right.$$

Trouver A ; trouver B.

▪ **3^{ème} énoncé-schéma fondamental :**

On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m}{n} B \\ A + B = S \end{array} \right.$$

Trouver A ; trouver B.

Nous avons vu précédemment que la fraction $\frac{m}{n}$ peut-être un entier, une fraction unitaire ou une fraction non unitaire. Le cas où $\frac{m}{n}$ est un entier a été traité via les relations de la forme « ...n fois plus... », et le cas où $\frac{m}{n}$ est une fraction unitaire a été traité via les relations de la forme « ...n fois moins... » (en fait $\frac{1}{n}$ peut être négocié comme « ...n fois moins... »). Sur ce, notre intérêt portera que sur les cas où $\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire (m et n premiers entre eux).

Considérons les deux problèmes suivants :

Conversions et traitements dans les registres verbaux et graphiques

P22 : « Fatma a 27 ans de plus que sa fille Meriem. Sachant que l'âge de Meriem est égal à $\frac{2}{5}$ l'âge de Fatma, trouvez l'âge de Meriem et celui de Fatma ».

P23 : « L'âge de Meriem et l'âge de sa mère Fatma ensemble est 63 ans. Sachant que l'âge de Meriem est égal à $\frac{2}{5}$ l'âge de Fatma, trouvez l'âge de Meriem et celui de Fatma ».

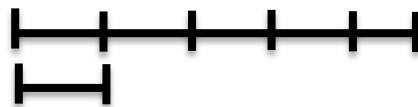
Commençons par l'unité signifiante commune aux deux problèmes :

« L'âge de Meriem est égal à $\frac{2}{5}$ l'âge de Fatma »

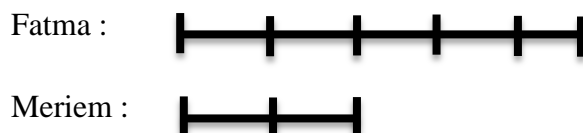
$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Comme $\frac{1}{5}$ peut-être négocié comme « 5 fois moins grand » via une conversion entre registres de représentations (numérique/symbolique et langue naturelle), alors :

l'âge de Meriem est 2 fois « 5 fois moins grand » que l'âge de sa mère.

Par le biais du traitement « Partage », la relation « 5 fois moins grand » est représentée par le schéma suivant :



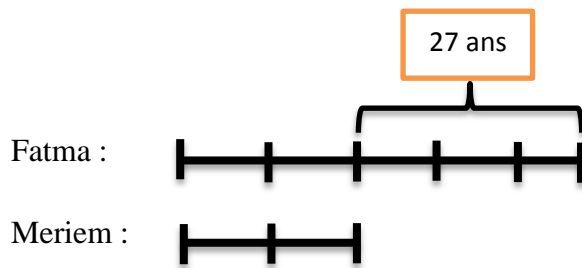
Vu que l'âge de Meriem est 2 fois « 5 fois moins grand » que l'âge de sa mère, l'âge de Meriem doit être représenté par une unité figurale qui vaut deux petits segments. Le schéma segmentaire représentatif des deux âges est alors le suivant :



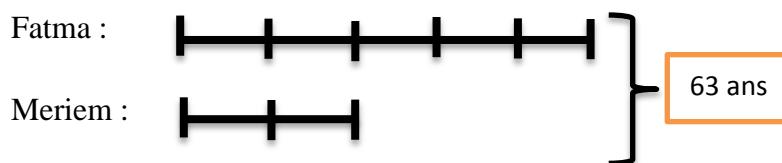
Les deux schémas représentatifs des deux problèmes P22 et P23 en découlent :

➤ Schéma représentatif du problème P22 :

Conversions et traitements dans les registres verbaux et graphiques



➤ Schéma représentatif du problème P23 :



Les deux schémas sont générés à partir de l'unité figurale qui représente la plus grande grandeur, à savoir l'âge de Fatma.

Formulons les deux problèmes P22 et P23 comme suit :

P₁22 : « Fatma a 27 ans de plus que sa fille Meriem. Sachant que l'âge de Fatma est égal à $\frac{5}{2}$ l'âge de Meriem, trouvez l'âge de Meriem et celui de Fatma ».

P₁23 : « L'âge de Meriem et l'âge de sa mère Fatma ensemble est 63 ans. Sachant que l'âge de Fatma est égal à $\frac{5}{2}$ l'âge de Meriem, trouvez l'âge de Meriem et celui de Fatma ».

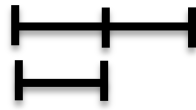
Considérons l'unité significative commune aux deux problèmes :

« L'âge de Fatma est égal à $\frac{5}{2}$ l'âge de Meriem »

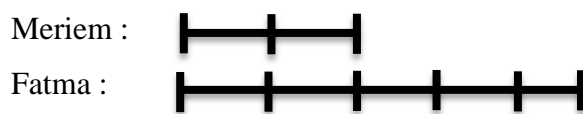
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2}$ peut être négocié « 2 fois moins grand » via une conversion entre registres de représentation (numérique/symbolique et langue naturelle), alors :

l'âge de Fatma est 5 fois « 2 fois moins grand » que l'âge de Meriem.

Par le biais du traitement « Partage », la relation « 2 fois moins grand » est représentée par le schéma suivant :

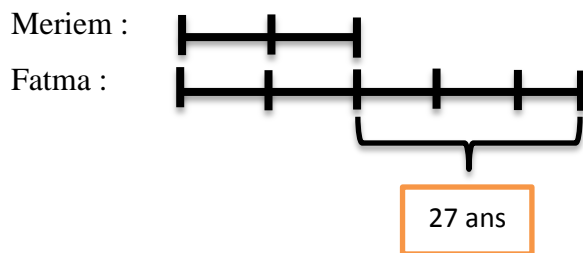


Vu que l'âge de Fatma est 5 fois « 2 fois moins grand » que l'âge de Meriem, l'âge de Fatma doit être représenté par une unité figurale qui vaut 5 petits segments. Le schéma segmentaire représentatif des deux âges est le suivant :

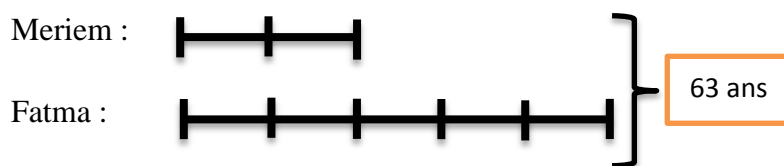


Les deux schémas représentatifs des deux problèmes P_t22 et P_t23 en découlent :

- Schéma représentatif du problème P_t23 :



- Schéma représentatif du problème P_t22 :



Les deux schémas sont générés à partir de l'unité figurale qui représente la plus petite grandeur, à savoir l'âge de Meriem. Nous verrons ultérieurement que l'ordre des organisations des unités significatives dans l'énoncé du problème peut orienter le choix au traitement à suivre pour schématiser.

b. Relations mixtes (multiplicatives et additives) rattachées à des problèmes déconnectés à trois branches

Un problème déconnecté à trois branches dont les relations qui relient ces grandeurs sont mixtes (deux additives et une multiplicative) n'est en lien à aucun de nos énoncés-schémas fondamentaux. Notre attention à ce genre de problèmes est due à notre intérêt à une forme de progressivité. Nous portons toutefois une attention à ce genre de problèmes, dans la recherche de ce qui peut être considéré comme d'éventuels nouveaux critères de complexité non identifiés *a priori* dans notre première modélisation sous forme d'énoncés-schémas fondamentaux.

Considérons le problème suivant :

P24 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 176 billes. Mohammed reçoit 16 billes de moins que Sara, et Inès reçoit 2 fois plus de billes que Mohammed. Quelle est la part de chacun ? ».

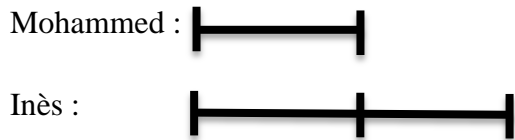
Nous distinguons les trois unités signifiantes suivantes :

- Mohammed, Sara et Inès se partagent 176 billes : unité signifiante qui précise le nombre total de billes (nombre de billes de Mohammed + nombre de billes de Sara + nombre de billes d'Inès = 176) ;
- Mohammed reçoit 16 de billes de moins que Sara : unité signifiante qui précise l'écart entre le nombre de billes de Mohammed et celui de Sara (nombre de billes de Sara – nombre de billes de Mohammed = 16) ;
- Inès reçoit 2 fois plus de billes que Mohammed : unité signifiante qui précise le rapport entre le nombre de billes d'Inès et celui de Mohammed (nombre de billes d'Inès = $2 \times$ nombre de billes de Mohammed).

En appliquant le type de traitement « Retranchement », la deuxième unité signifiante est convertie dans le registre de représentation graphique segmentaire par le schéma suivant :



En appliquant le type de traitement « Report », la troisième unité signifiante est convertie dans le registre de représentation graphique segmentaire par le schéma suivant :



L'union des deux schémas, tout en intégrant la première unité signifiante à cette union en termes de légende donne comme schéma représentatif du problème P24 le suivant :

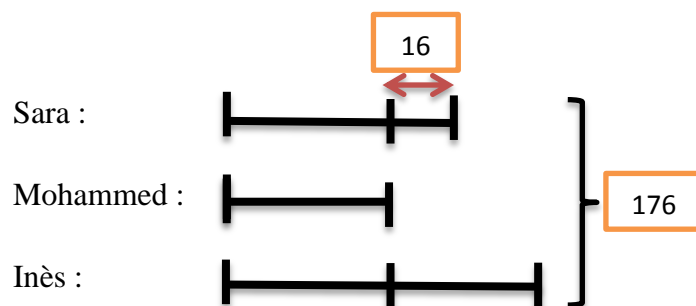


Schéma B25

La part commune qui entre dans la composition des trois unités figurales est celle qui représente le nombre de billes de Mohammed (la plus petite part).

Le schéma ainsi produit communique le nombre de billes de Mohammed :

$$(176 - 16) : 4 = 40.$$

Considérons à présent le problème suivant :

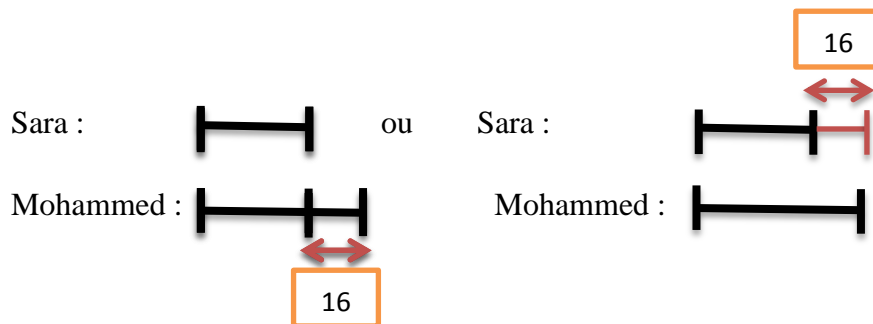
P25 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 176 billes. Mohammed reçoit 16 billes de plus que Sara, et Inès en reçoit 2 fois plus de billes que Mohammed. Quelle est la part de chacun ? ».

Nous distinguons les trois unités signifiantes suivantes :

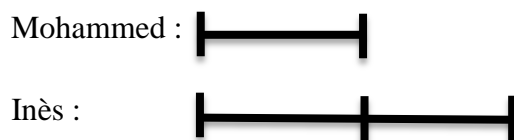
- Mohammed, Sara et Inès se partagent 176 billes : unité qui précise le nombre total de billes ;

- Mohammed reçoit 16 billes de plus que Sara : unité signifiante qui précise l'écart entre le nombre de billes de Mohammed et celui de Sara (nombre de billes de Sara + 16 = nombre de billes de Mohammed) ;
- Inès en reçoit 2 fois plus de billes que Mohammed : unité signifiante qui précise le rapport entre le nombre de billes d'Inès et celui de Mohammed.

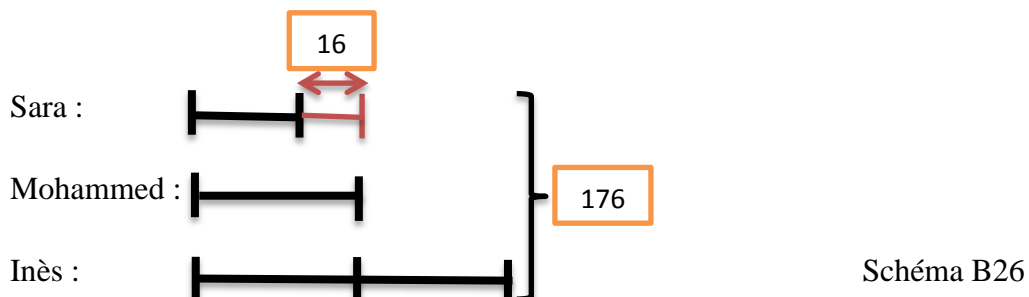
En appliquant le type de traitement « Ajout », la deuxième unité signifiante est convertie dans le registre de représentation graphique segmentaire par le schéma suivant :



En appliquant le type de traitement « Report », la troisième unité signifiante est convertie dans le registre de représentation graphique segmentaire par le schéma suivant :



La réunion des deux schémas, tout en intégrant la première unité signifiante à cette réunion en termes de légende donne comme schéma représentatif du problème²⁵ le suivant :



La part commune qui entre dans la composition des trois unités figurales est celle qui représente le nombre de billes de Mohammed (ce qui ne représente pas la plus petite

grandeur comme c'est le cas dans le problème P24, plutôt la grandeur moyenne). En prise d'appui sur le schéma ainsi produit, le nombre de billes de Mohammed en découle : $(176 + 16) : 4 = 48$.

Pour résoudre des tels problèmes (P24 et P25) et même les problèmes cités dans la partie III, il s'agit de s'appuyer sur des systèmes d'unités et d'*unités relatives*, ce que nous allons précisément expliciter dans la partie suivante.

c. En résumé

Pour une conversion d'un énoncé d'un problème arithmétique dans un registre de représentation graphique segmentaire, nous avons mis en avant quatre types de traitements-conversions :

- deux types de traitements-conversions pour les relations additives : le type de traitement « Ajout » et le type de traitement « Retranchement » ;
- deux types de traitements-conversions pour les relations multiplicatives : le type de traitement « Report » et le type de traitement « Partage ».

Les traitements de type « Ajout » et « Report » prennent appui sur la représentation segmentaire de la plus petite grandeur du problème lorsque la relation (additive ou multiplicative) est entre deux grandeurs (une grandeur et une autre plus grande), alors qu'inversement les traitements de type « Retranchement » et « Partage » prennent appui sur la représentation segmentaire de la plus grande grandeur du problème lorsque la relation (additive ou multiplicative) est entre deux grandeurs (une grandeur et une autre plus petite). Les grandeurs à partir desquelles s'appuient les différents traitements (sur leurs représentations) pour modéliser d'autres grandeurs se positionnent comme unités signifiantes aux dernières positions comme l'indique le tableau ci-dessus (grandeurs sélectionnées en bleu).

Ce tableau expose les différentes relations entre grandeurs et les types de traitements liés aux conversions entre registres de la langue naturelle et graphique segmentaire associés :

Types de traitements	Relations dans le registre de représentation de la langue naturelle
Traitement « Ajout »	« J'ai 3 billes de plus que mon voisin ». « Il y a 28 filles de plus que de garçons ». « Hichem possède 6 stylos de plus que Chaouki ». « Rachida possède 12 stylos de plus qu' Hichem ».
Traitement « Retranchement »	« Mon voisin a 3 billes de moins que moi ». « Il y a 28 garçons de moins que de filles ». « Chaouki possède 6 stylos de moins qu' Hichem ». « Hichem possède 12 stylos de moins que Rachida ».
Traitement « Report »	« La hauteur de l'immeuble est 4 fois plus grande que celle de la maison » « Hichem possède 2 fois plus de stylos que Chaouki ». « Rachida possède 3 fois plus de stylos qu' Hichem ».
Traitement « Partage »	« La hauteur de la maison est 4 fois moins grande que celle de l'immeuble » « Chaouki 2 fois moins de stylos qu' Hichem ». « Hichem possède 3 fois moins de stylos que Rachida ».

Tableau B8 : type de traitements liés aux conversions entre registres de la langue naturelle et graphique segmentaire associés

Ici nous avons considéré principalement ce qui a trait aux registres de représentation sémiotique (de la langue naturelle et graphique segmentaire) dans des opérations cognitives liées à la production des schémas (conversion : d'unités signifiantes du registre de la langue naturelle aux unités figurales dans le registre de représentation graphique segmentaire) en identifiant différents types de traitements possibles. Toutefois comme nous allons le voir ci-après des opérations cognitives peuvent également être considérées en lien avec l'interprétation des schémas pour résoudre des problèmes, notamment celle de double *désignation*

fonctionnelle au sens de Duval (2017)⁹ : visant à mettre en relation deux désignations d'une même grandeur représentée sur le schéma. Toutefois pour comprendre de quoi il en relève exactement, il nous faut introduire un nouvel outil théorique : celui des systèmes d'unités et des *unités relatives et simples* au sens de Chambris (2008, 2021).

⁹ « pour pouvoir écrire une égalité, il faut avoir deux désignations différentes d'une même valeur », Duval R. (2017), p. 117

IV. Des systèmes d'unités et d'unités relatifs caractéristiques des connaissances mathématiques en jeu dans la production et l'interprétation de schémas

Nous avons employé ci-avant les expressions unités « signifiantes » et « figurales » pour évoquer les traitements internes aux registres et les conversions entre registres de représentation sémiotiques. Toutefois, nous nous intéressons ici à des systèmes d'unités au sens de Chambris (2008) comme étant à même de caractériser plus avant les connaissances mathématiques mises en fonctionnements dans les usages des schémas de type segmentaires – qui jouent sur *des unités relatives* au sens de Chambris (2021) et de Chambris, Coulange, Rinaldi & Train (2021).

1. Relations multiplicatives et schématisation


Considérons les trois relations suivantes :


Relation1 : la hauteur de l'immeuble est trois fois plus grande que celle de la maison.

Relation2 : la hauteur de la maison est égale à $\frac{1}{3}$ la hauteur de l'immeuble (cette dernière relation peut être formulée par la façon suivante : La hauteur de la maison est trois fois moins grande que la hauteur de l'immeuble).

Relation3 : la hauteur de la maison est égale à $\frac{2}{7}$ la hauteur de l'immeuble.

Les connaissances et savoirs convoqués pour mettre de telles relations en schéma ne sont pas les mêmes. Un schéma correspondant aux deux premières relations est le suivant :

hauteur de la maison : 


hauteur de l'immeuble : 

Traitement
« Report »

Avant d'entamer la question des connaissances et savoirs convoqués pour mettre en schéma des telles relations, nous allons essayer de définir deux notions sur lesquelles nos travaux vont s'appuyer lors de nos analyses :

la hauteur de la maison = $\frac{1}{3}$ la hauteur de l'immeuble, cela sous-entend que si nous divisons la hauteur de l'immeuble par 3 cela va coïncider avec la hauteur de la maison. Par conséquent, si nous associons la fraction $\frac{1}{3}$ à la hauteur de la maison par rapport à la hauteur de l'immeuble, la fraction associée à la hauteur de l'immeuble par rapport à elle-même est $\frac{3}{3}$. Il s'agit en fait ici de partager une unité en trois parts égales pour obtenir une fraction de cette unité. Cette unité que nous partageons en général en n parties égales, et à laquelle nous associons la fraction $\frac{n}{n}$, nous l'appelons l'« *unité du problème* » :

hauteur de la maison : $\frac{1}{3}$ 


hauteur de l'immeuble : $\frac{3}{3}$ 

Le segment représentant le $\frac{1}{3}$ (ou le $\frac{1}{n}$ en général) nous l'appelons l'« *unité graphique* », Brousseau (1987) l'a qualifié d'unité intermédiaire. Dans les deux cas de figures des relations 1 et 2 la plus petite grandeur (ici la hauteur de la maison) coïncide avec une *unité graphique*.

Pour produire un schéma à partir des deux relations données, le recours aux concepts de multiplication et division est nécessaire. Les concepts de multiplication et division impliquent un tout divisé en plusieurs parts égales.

Alors que pour produire un schéma à partir de la troisième relation, nous devons recourir à ce que nous avons appelé précédemment la notion de l'*unité du problème* :

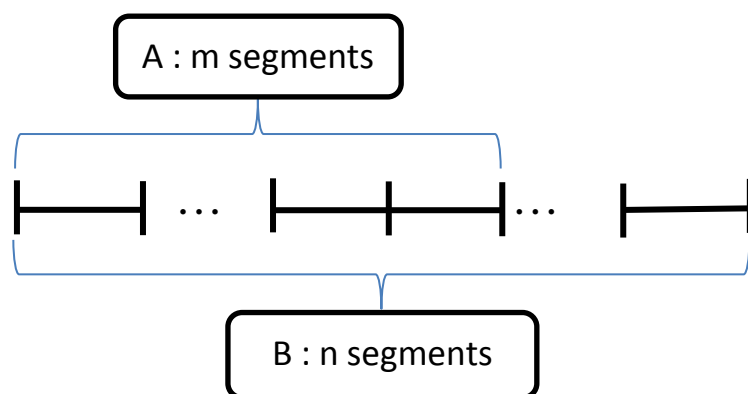
la hauteur de la maison est égale à $\frac{2}{7}$ la hauteur de l'immeuble, cela sous-entend que nous avons divisé la hauteur de l'immeuble en 7 parts égales et que la hauteur de la maison en vaut deux. La fraction correspondante à la hauteur de l'immeuble est alors $\frac{7}{7}$. Sur ce, le schéma correspondant à la troisième relation est le suivant :

hauteur de la maison :  : $\frac{2}{7}$

hauteur de l'immeuble :  : $\frac{7}{7}$

Dans ce cas, le segment représentant la plus petite grandeur (hauteur de la maison) ne coïncide pas avec une *unité graphique*, plutôt à deux *unités graphiques*.

En général $A = \frac{m}{n} B$, la fraction associée à A par rapport à B est $\frac{m}{n}$, et la fraction associée à B par rapport à B est alors $\frac{n}{n}$. Il y a une sorte de contrat entre l'institution didactique (du moins représentée par nous-même) et l'élève de la sixième année (non nécessairement implicite) que si par exemple $A = \frac{m}{n} B$, alors cette égalité doit être interprétée comme l'indique le schéma suivant :



La fraction qui doit représenter B est $\frac{n}{n} \cdot B$, dans ce cas de figure, représente *l'unité du problème*. ($A = \frac{m}{n}$ l'unité du problème : rapport partie-tout)

La propriété mathématique mise en jeu est la suivante :

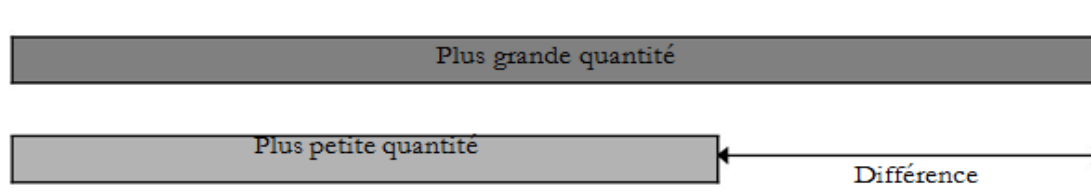
$A = \frac{m}{n} B$ alors $A = m \times (\frac{1}{n} B)$ et $B = n (\frac{1}{n} B)$ donc avec $u = (\frac{1}{n} B)$, $A = m u$ et $B = n u$ (rapports multiplicatifs entiers entre A, B et u : ramener le travail du \mathbb{Q} dans \mathbb{IN}) ;

$\frac{m}{n}$ d'une grandeur B étant donné, choisir $\frac{1}{n} B$ comme *unité graphique*.

2. Relations additives et schématisation

Les relations additives peuvent apparaître, en termes d'unités, plus simples à représenter avec des schémas que les relations multiplicatives. Représenter une relation additive de comparaison d'états par un schéma segmentaire ne nécessite que

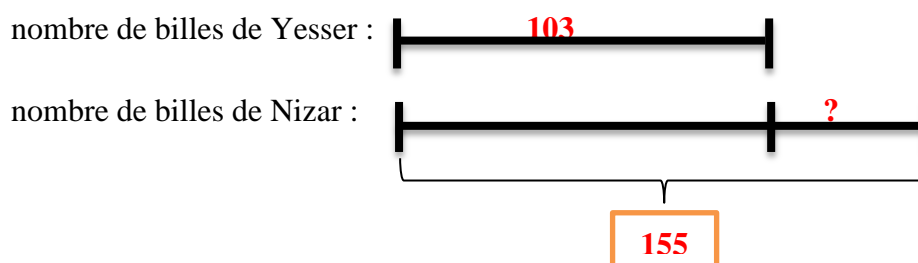
la mobilisation du traitement de type « Ajout/Retranchement » entre deux grandeurs (exemple : traitement « Retranchement » représenté ci-dessous):



Exemple :

« Nizar a 155 billes et Yesser 103. Combien Nizar a-t-il de billes de plus que Yesser ? »

Un schéma correspondant au problème précédent est le suivant :



Représenter une composition de deux relations additives de comparaison d'états par un schéma nécessite toutefois la mise en schéma de deux relations de comparaison d'une façon successive impliquant là-aussi des unités liées au graphique.

Nous définissons une *unité graphique* dans le cas d'un schéma représentant un problème en lien avec notre 4^{ème} ou 5^{ème} énoncé-schéma fondamental la grandeur correspondant à celle représentée par un premier segment (*unité graphique*), les autres étant exprimées/représentées en fonction de cette *unité graphique*.

Considérons le problème suivant pour expliciter cette définition :

« Alia a 12 jouets de plus que Fatma, et Fatma a 6 jouets de plus que Sabiha. Le nombre total de jouets est 96. Combien de jouets possède chaque fille? »

Désignons par A le nombre de jouets d'Alia, par F le nombre de jouets de Fatma et par S le nombre de jouets de Sabiha.

- Un premier schéma correspondant au problème en considérant le segment représentant la plus petite grandeur comme *unité graphique* :

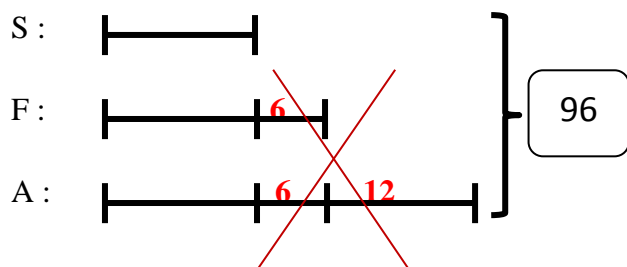


Schéma B27

$$F = S + 6 \text{ et } A = S + 6 + 12.$$

- Un deuxième schéma correspondant au problème en considérant le segment représentant la grandeur moyenne comme *unité graphique* :

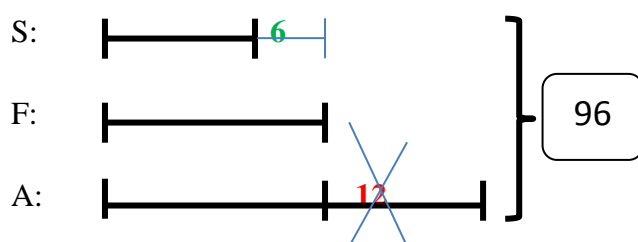


Schéma B28

$$S = F - 6 \text{ et } A = F + 12.$$

- Un troisième schéma correspondant au problème en considérant le segment représentant la plus grande grandeur comme *unité graphique* :

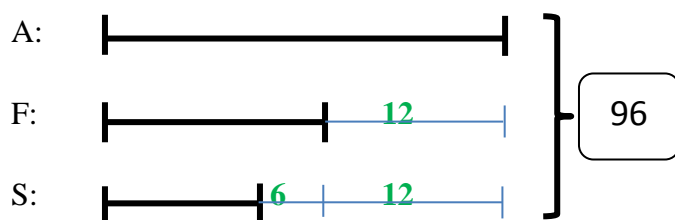


Schéma B29

$$S = A - 6 - 12 \text{ et } F = A - 12.$$

C'est-à-dire faire en sorte que dans les trois cas nous mettons en avant trois parts égales, appelées *unités graphiques*.

L'*unité graphique* diffère selon les traitements – conversions envisagés dans la schématisation (voir partie précédente). Notamment pour l'ensemble des problèmes posés les choix d'*unités graphiques* correspondant à la plus petite grandeur ou non

semblent pouvoir jouer un rôle important dans l'interprétation et les traitements à opérer dans le registre graphique par la suite.

La notion de *l'unité graphique* diffère aussi selon l'énoncé-schéma à considérer. Cette notion coïncide avec celle de « l'unité intermédiaire » évoquée par Brousseau (1987) quand il s'agit de résoudre un problème en lien avec nos 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux et elle coïncide avec la notion que nous venons d'explicitier quand il s'agit de résoudre un problème en lien avec nos 4^{ème} et 5^{ème} énoncés-schémas fondamentaux.

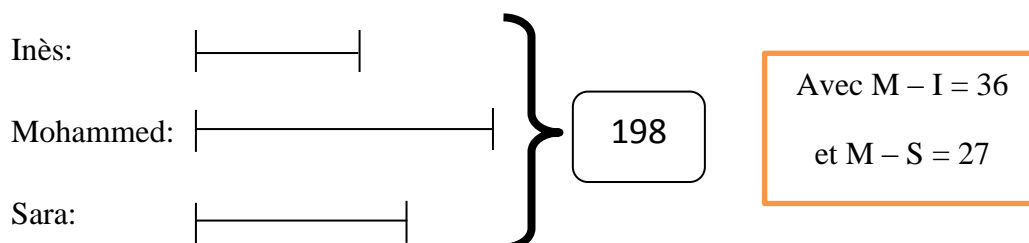
La notion de *l'unité du problème* concerne potentiellement les 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux qui mettent en jeu des relations multiplicatives fractionnaires entre les grandeurs, celle de « *l'unité graphique* » avec ces différentes significations touchera la totalité de nos énoncés-schémas fondamentaux.

3. Limites de la schématisation et choix de la stratégie optimale dans la résolution des problèmes en lien avec les 5^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux

Reprenons le problème P6 de la page 55 :

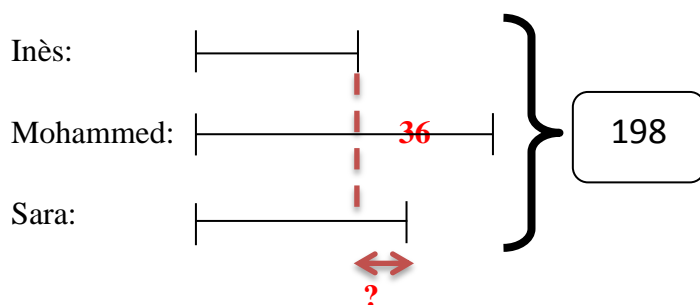
« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus qu'Inès, et 27 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? »

Un schéma représentatif de ce problème est le suivant :



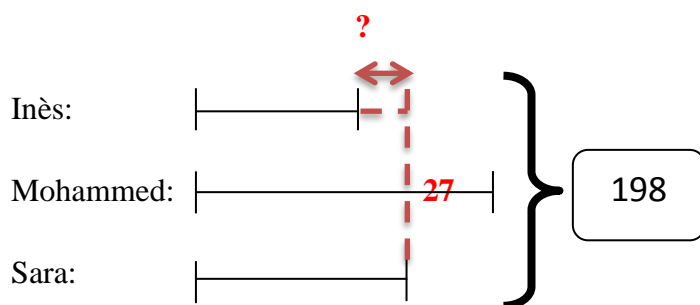
Pour trouver une relation entre le nombre de billes d'Inès et celui de Sara il faut passer une composition de deux relations additives. Le schéma tel qu'il est produit ne prend pas en charge cette composition des deux relations. Retenir la plus petite grandeur correspondant à la part d'Inès comme *unité graphique* ou retenir la grandeur moyenne correspondant à la part de Sara comme *unité graphique* est coûteux en

termes de connaissances convoquées, à savoir la mobilisation de la composition de deux relations additives. Le schéma considérant comme *unité graphique* le segment qui représente la plus petite grandeur (nombre de billes d'Inès) est le suivant :



Toute la complexité réside dans la recherche de la valeur de la différence entre le nombre de billes de Sara et celui d'Inès. Cette valeur étant trouvée, le nombre de billes d'Inès = $(198 - 36 - \text{cette valeur}) : 3$.

Le schéma considérant comme *unité graphique* le segment qui représente la grandeur moyenne (nombre de billes de Sara) est le suivant :

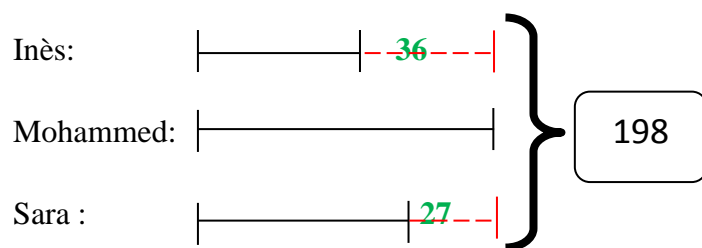


Le même problème se pose : trouver la différence entre le nombre de billes de Sara et celui d'Inès.

Cette valeur étant connue, le nombre de billes de Sara = $(198 - 27 + \text{cette valeur}) : 3$.

Dans les deux cas précédents, la mobilisation de la composition des deux relations additives est obligatoire. Une des limites de la schématisation est de ne pas prendre en charge la complexité que la mobilisation d'une telle connaissance provoque.

Une troisième production de schéma possible est de prendre comme *unité graphique* le segment qui représente la plus grande grandeur (nombre de billes de Mohammed) :



La résolution du problème à travers ce schéma nécessite la connaissance suivante : si nous augmentons les deux parts (la part d’Inès et celle de Sara) de 36 et 27 il faut aussi augmenter le tout (198 billes) de 36 et 27 (deux ajouts qui s’opèrent dans deux registres de représentations différents) :

$$A \text{ correspond à } B \Leftrightarrow A + s \text{ correspond à } B + s.$$

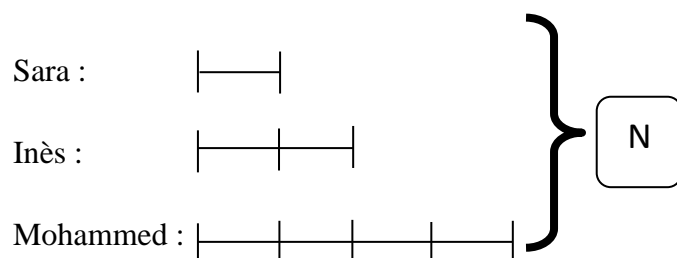
Ainsi le nombre de billes de Mohammed = $(198 + 36 + 27) : 3 = 87$ billes.

A priori, la mobilisation de cette dernière connaissance est moins coûteuse en termes de connaissances convoquées que la mobilisation de la composition des deux relations additives.

Des limites de la schématisation pour les relations multiplicatives ont été traitées précédemment (voir page 61 et 62). Considérons le problème $P_{m,n}$ suivant :

« Mohammed, Sara et Inès se partagent N billes. Mohammed en reçoit m fois plus de billes qu’Inès, et n fois plus de billes que Sara. Quelle est la part de chacun ? »

Pour $m = 2$ et $n = 4$, le schéma segmentaire correspondant au problème $P_{2,4}$ est le suivant :



La résolution du problème en découle :

nombre de billes de Sara = $N : 7$.

Mais pour des valeurs de m et n telles que m et n soient premiers entre eux, par exemple pour $m = 2$ et $n = 5$, la production du schéma représentatif du problème $P_{2,5}$ est moins évidente voire même très compliquée par rapport à la production du schéma représentatif du problème $P_{2,4}$. (Voir p. 61 et 62 pour $m = 2$ et $n = 3$).

Ces limites de la schématisation vont impacter nos choix de problèmes qui feront l'objet d'une mise en œuvre lors de nos expérimentations à venir.

4. Des connaissances mathématiques pour produire/interpréter des schémas

Nous nous intéressons ci-après, en lien avec les unités définies préalablement (*unité du problème* et *unité graphique*), aux connaissances liées à des systèmes d'*unités relatives* mises en fonctionnement à la fois pour produire et interpréter des schémas associés aux énoncés-schémas fondamentaux.

Reprenons le problème P_{121} de la page 83 :

« Dans un tiroir on dispose de 108 stylos appartenant à 3 enfants : Chaouki, Hichem et Rachida. Hichem possède 2 fois plus de stylos que Chaouki, et Rachida possède 3 fois plus de stylos qu'Hichem. Combien de stylos possède chaque enfant? »

Le schéma segmentaire représentatif de ce problème en termes d'unités figurales au sens de Duval est le suivant (voir p. 84) :



Désignons par C le nombre de billes de Chaouki, par H le nombre de billes d'Hichem et par R le nombre de billes de Rachida. Au sens de Chambris (2021), « une unité ne peut être « seule ». Elle doit être associée à (au moins) une autre et une relation quantitative (i.e. numérique) doit être établie entre les deux ». Nous savons que $H = 2 \times C$. Pour penser que H est une unité, il faut obligatoirement penser en même temps

que C est une unité. C est considéré comme *unité simple* et H est considéré comme *unité relative*. Nous savons aussi que $R = 3 \times H$. Pour penser que R est une unité, il faut obligatoirement penser en même temps que H est une unité. Cette fois-ci H est considéré comme *unité simple* et R est considéré comme *unité relative*. Ce qui donne en jouant sur ces *unités simples et relatives* $R = 3 \times H = 3 \times (2 \times C) = 6 \times C$.

Pour produire le schéma ci-dessus, nous commençons par reporter 2 fois le segment qui représente C (considéré comme *unité graphique*) pour représenter H, puis reporter 3 fois le segment qui représente H (qui est lui-même un groupement de deux *unités graphiques*) pour représenter R. Ainsi, et grâce aux jeux sur ces différentes unités, le schéma prend en charge les connaissances mathématiques liées à la composition de comparaison multiplicative. Le schéma ci-dessus se transforme alors comme suit :



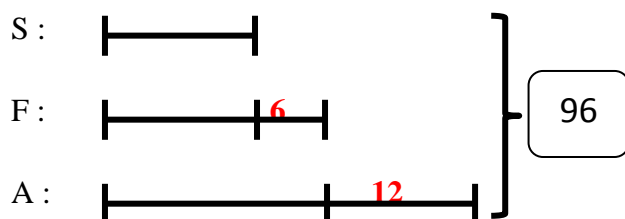
Un dénombrement des *unités graphiques* permet de trouver le nombre de billes de Chaouki : $C = 108 : 9 = 12$ billes.

Considérons maintenant un problème où nous identifions une composition de comparaison additive :

« Alia a 12 jouets de plus que Fatma, et Fatma a 6 jouets de plus que Sabiha. Le nombre total de jouets est 96. Combien de jouets possède chaque fille? »

Désignons par A le nombre de jouets d'Alia, par F le nombre de jouets de Fatma et par S le nombre de jouets de Sabiha.

Le schéma segmentaire correspondant au problème en termes d'unités figurales et en considérant comme *unité graphique* la part qui représente S est le suivant :

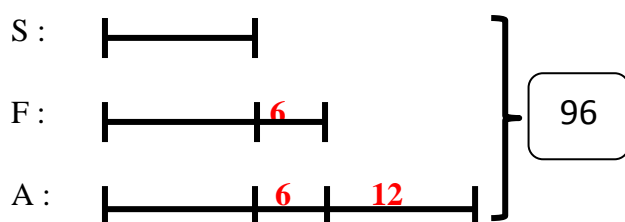


$1u = S$ (u : valeur d'une unité graphique)

$1u + 6 = F$ avec un traitement de type « Ajout » dans le registre graphique segmentaire.

Changement d'unité : $1u+6$ devient une « nouvelle unité » $1U = F$

Nous savons que $1U + 12 = A$ soit $(1u + 6) + 12 = A$ avec un traitement de type « Ajout » dans le registre graphique segmentaire. Grâce à ce changement d'unités, le schéma prend en charge les connaissances mathématiques liées à la composition de comparaison additive. Le schéma ci-dessus se transforme alors comme suit :



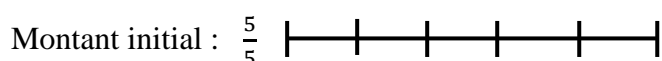
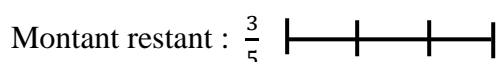
Pour interpréter un tel schéma, les connaissances que nous devons mobiliser se réduisent à une simple comparaison d'états (3 fois S et 96) suivies par une division sur trois :

$$S = \frac{96 - (6+6+12)}{3} = 24 \text{ jouets.}$$

Pour finir avec ces systèmes d'unités, considérons à présent un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental :

« Adam a acheté un livre scolaire. Il lui reste dans sa poche 2700 millimes, ce qui représente $\frac{3}{5}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ? »

Le schéma segmentaire associé à ce problème est le suivant :



Pour produire le schéma segmentaire ci-dessus, des connaissances liées à deux types d'unités sont potentiellement en jeu, tout en en considérant une généralisation

possible :

- l'une que nous avons qualifiée d'*unité graphique* (correspondant à un « petit » segment reporté n fois et m fois) correspondant à $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{5}$) de la grandeur inconnue. Le montant restant est doublement désignable comme étant égal à 2700 millimes et comme étant représenté par 3 *unités graphiques*, ce qui permet de trouver la valeur d'une *unité graphique* : $1 u = \frac{2700 \text{ millimes}}{m(3)} = 900 \text{ millimes}$.

- l'autre que nous avons qualifié d'*unité du problème* (grandeur inconnue), dont nous considérons une relation multiplicative entre deux grandeurs dont une connue égale à $\frac{m}{n}$ ($\frac{3}{5}$) de cette grandeur inconnue ($\frac{5}{5}$ du montant initial).

Un élément clé de la résolution de ce problème avec le schéma segmentaire considéré réside dans le fait de considérer que $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue ($\frac{1}{5}$ du montant initial) correspond à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue ($\frac{1}{3}$ du montant restant). Nous parlons d'un changement d'unité de référence lié aux grandeurs en jeu dans le problème : l'unité de référence initiale, l'*unité du problème* liée à la grandeur inconnue (le montant initial) partagée en n devient une autre unité de référence, la grandeur connue (le montant restant) partagée en m . Ce jeu sur des *unités relatives* (Chambris, Coulange, Rinaldi et Train, 2021) est décrit par Thompson, Carlson, Byerley et Hatfield (2014). Nous identifions une « sous-unité » commune pour deux grandeurs, ce qui permet d'exprimer chacune des deux grandeurs, à l'aide de cette sous-unité, elle-même appréhendée comme « relative » à ces deux grandeurs. Ce changement d'unité de référence peut se faire en prise d'appui sur le schéma via ce que Duval (2017) appelle une double *désignation fonctionnelle* dans le registre graphique. L'*unité graphique* correspond initialement à $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{5}$) de la grandeur inconnue (montant initial) lors de la production du schéma. Une fois codé, le schéma fait apparaître qu'elle est (re)désignable autrement, comme $\frac{1}{m}$ ($\frac{1}{3}$) de la grandeur connue (montant restant). Ce traitement intrinsèque au registre graphique permet dès lors d'inverser le rapport fractionnaire entre les deux grandeurs en jeu. En effet, une fois ce changement d'unité de référence opéré par le biais de cette opération de double désignation de l'*unité graphique* en lien avec les grandeurs en jeu dans l'énoncé, il ne reste plus qu'à conclure que la valeur de la grandeur inconnue (montant initial) correspond à $\frac{n}{m}$ ($\frac{5}{3}$) de

la grandeur connue (montant restant) : Montant initial = $\frac{2700 \times 5}{3} = 4500$ millimes.

Nous laissons de côté les techniques de calcul que cette dernière étape dans la résolution convoque potentiellement, celles-ci n'étant pas au cœur de notre propos dans cette analyse.

L'étude de ces deux problèmes conduite ci-dessus montre comment une réflexion sur les différentes unités (*unité du problème, unité graphique*) et les systèmes d'*unités relatives* au sens de Chambris peuvent outiller nos analyses.

C'est ainsi le dernier des outils retenus pour l'étude des connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution outillée par la schématisation segmentaire d'un corpus de problèmes arithmétiques correspondant à nos « énoncés-schémas » fondamentaux.

Partie B2

**Description des connaissances
mathématiques en jeu dans la résolution de
problèmes arithmétiques outillée par la
schématisation segmentaire**

Introduction

Tous les outils présentés dans la première partie de ce chapitre B permettent de décrire ces connaissances et vont nous orienter et nous aider à identifier les valeurs de chaque variable identifiée, qui est en lien avec l'un de nos énoncés-schémas fondamentaux. Comme évoqué précédemment, nous retenons une première variable $V_{m,n}$ qui correspond à la modélisation du type de relation (additive, multiplicative entière ou fractionnaire) entre les grandeurs en jeu et qui pèse sur les procédures de résolutions des problèmes traités et par conséquent sur les productions des schémas associés et leurs interprétations.

Nous commencerons par présenter nos énoncés-schémas fondamentaux un par un. L'identification des valeurs de la variable $V_{m,n}$ retenue pour chaque énoncé-schéma fondamental suivra sa présentation.

Nous retiendrons comme points d'appui lors de l'identification des valeurs de la variable associée à nos énoncés-schémas fondamentaux ce que nous avons appelé *l'unité du problème* et *l'unité graphique*.

Pour chaque énoncé-schéma fondamental, l'identification des valeurs de la variable $V_{m,n}$ correspondante va nous permettre de mettre en avant, pour chaque valeur identifiée, une modification qualitative de la stratégie de la résolution du problème correspondant à la valeur identifiée.

Les outils retenus pour décrire les connaissances mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire sont les suivants :

- les structures des problèmes au sens de Bednarz & Janvier et les éléments des relations entre grandeurs liés à la classification de Vergnaud (comparaison et composition de comparaison d'états) ;
- les traitements liés aux registres de représentation dans la conversion du registre de la langue naturelle au registre graphique (production du schéma) et la double *désignation fonctionnelle* liée au registre graphique (interprétation du schéma) au sens de Duval et parfois des doubles désignations dans deux registres de représentation différents ;

- les unités en jeu (*unités graphiques* et *unité du problème*) et les systèmes d'*unités relatives* mises en jeu dans la production et l'interprétation du schéma.

I. Identification des valeurs de la variable associée à chaque énoncé-schéma fondamental et connaissances mathématiques en jeu dans la résolution des problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire

Pour chaque énoncé-schéma fondamental nous commençons par identifier les valeurs de la variable que nous retenons et expliciterons ci-après, puis nous identifions par le biais de tableaux les connaissances mathématiques en jeu dans la résolution des problèmes arithmétiques rattachés à chaque énoncé-schéma fondamental.

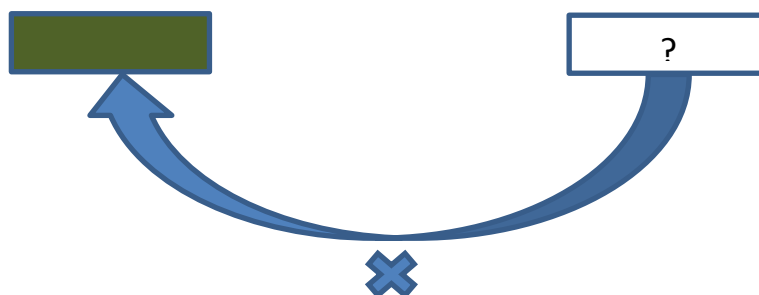
1. 1^{er} énoncé-schéma fondamental

Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B (m, n dans \mathbb{IN}^*)

(l'inversion du rapport).

- A est une grandeur connue.
- B est une grandeur inconnue.
- La relation entre A et B est connue et multiplicative de type fractionnaire.

En se référant au tableau B3 (p. 50), un problème relatif à notre 1^{er} énoncé fondamental se schématise de la façon suivante :



C'est un problème qui implique une seule relation entre une grandeur connue et une autre inconnue, c'est un problème connecté (Bednarz & Janvier, 1994). La relation en jeu ici est : $A = \frac{m}{n} B$, le connu A est égal à une fraction de l'inconnu B, et l'opérateur de cette relation est la fraction $\frac{m}{n}$.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

La difficulté qui réside dans de tels problèmes est que la fraction est du côté de la grandeur inconnue. A est le produit d'une grandeur inconnue B par une fraction. Il s'agit donc d'inverser la fraction pour déterminer la valeur de cette grandeur inconnue, comme le produit d'une grandeur connue (A) par l'inverse de la fraction donnée ($B = \frac{n}{m} A$: inversion du rapport).

La relation $A = \frac{m}{n} B$ va nous renseigner sur les valeurs de la variable associée à notre 1^{er} énoncé fondamental, et cela suivant les valeurs de m et n. la variable que nous allons désigner par $V_{m,n}$, qui va dépendre de m et n, va peser sur la façon de procéder à la résolution d'un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental et par conséquent sur la production du schéma représentatif du problème considéré et sur son interprétation. La variable V_A qui va dépendre de la grandeur A proposée et qui va plutôt peser sur la nature des schémas produits ne fera pas l'objet de notre étude.

- **Valeurs de la Variable associée au 1^{er} énoncé-schéma fondamental :**

Désignons par $V_{m,n}$ la variable qui va dépendre des valeurs de m et n.

Nous décrivons le 1^{er} énoncé-schéma fondamental de la manière suivante – en mettant en avant les relations génériques qu'il recouvre par rapport aux grandeurs en jeu (A connue et B inconnue) et le rapport fractionnaire générique en jeu $\frac{m}{n}$.

Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B (m, n dans \mathbb{IN}^*).

Nous cherchons la valeur de B, ce qui suppose l'inversion de la relation multiplicative

$$\frac{m}{n} : \frac{n}{m}$$

1^{er} cas :

V_1 : m est multiple de n ($m = p \times n$), c'est-à-dire la fraction $\frac{m}{n}$ est un entier. C'est un cas de figure simple de notre 1^{er} énoncé fondamental, et nous distinguons deux sous-valeurs associées à la valeur V_1 de la variable $V_{m,n}$:

$V_{1,1}$: La relation entre A et B est de la forme : « $A = p \times B$ », p dans \mathbb{IN}^* (formulation dans le registre algébrique)

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

Exemple : « Trouver la largeur l d'un terrain rectangulaire sachant que sa longueur $L = 135$ m et que $L = 5 \times l$ ».

V_{1,2}: la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois plus grand que B » (formulation dans le registre de la langue naturelle. Les formulations de type « le double », « le triple » etc., relève de ce cas de figure).

Exemple : « Trouver la largeur l d'un terrain rectangulaire sachant que sa longueur $L = 135$ m et que L est cinq fois plus grande que l »

A priori, dans ces deux cas de figures, les élèves n'ont pas nécessairement besoin de recourir à un schéma pour résoudre le problème posé. Il est facile pour la partie prépondérante des élèves via un raisonnement arithmétique de voir que si $L = 5 \times l$ alors $l = \frac{L}{5}$. Le schéma segmentaire représentant le problème posé est le suivant :



La production du schéma se base sur le concept d'une partie reportée n fois ($n = 5$). Il est clair que la division de L par 5 va donner la valeur d'une *unité graphique* qui coïncide avec la mesure de l .

Les représentations sous forme de schémas des relations simples par la mise en œuvre des valeurs $V_{1,1}$ et $V_{1,2}$ seront réinvesties dans les mises en schémas des problèmes en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux.

2^{ème} cas :

V₂: n est multiple de m ($n = pm$). C'est-à-dire la fraction $\frac{m}{n}$ est unitaire. C'est un cas de figure du 1^{er} énoncé fondamental qui est considéré aussi comme un cas simple à résoudre, où nous distinguons deux sous-valeurs associées à la valeur V_2 de la variable $V_{m,n}$:

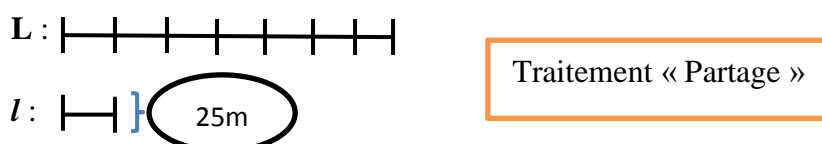
V_{2,1}: la relation entre A et B est de la forme : « $A = \frac{1}{p} \times B$ », p dans \mathbb{IN}^* (formulation dans le registre algébrique).

Exemple : « Trouver la longueur L d'un terrain rectangulaire sachant que sa largeur $l = 25$ m et que $l = \frac{1}{7} \times L$ ».

V_{2,2} : la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois moins grand que B » (formulation dans le registre de la langue naturelle. Les formulations de type « la moitié », « le tiers » etc., relève de ce cas de figure).

Exemple : « Trouver la longueur L d'un terrain rectangulaire sachant que sa largeur $l = 25$ m et que l est 7 fois moins grande que L ».

Dans ces deux cas de figures aussi, les élèves n'ont pas nécessairement besoin de recourir à un schéma pour résoudre le problème posé. Il est facile de voir que si $l = \frac{1}{7} \times L$ alors $L = 7 \times l$. Le schéma segmentaire représentant le problème posé est le suivant :



La production du schéma se base sur le concept d'un tout divisé en n parts égales ($n = 7$). Il est clair à travers le schéma que la multiplication de l par 7 va donner la valeur de 7 *unités graphiques* qui coïncide avec la mesure de L .

3^{ème} cas :

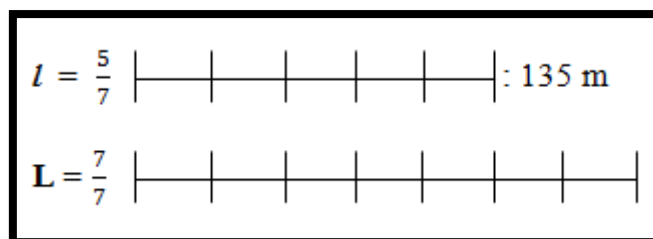
V₃ : m ne divise pas n et n ne divise pas m (m et n premiers entre eux).

Nous nous plaçons dans le cas où m et n sont différents de 1, qui s'avère le plus fréquent à trouver dans des problèmes proposés dans le manuel scolaire officiel tunisien¹⁰. Le recours au schéma segmentaire peut être une technique enseignée pour résoudre ce type de problèmes. Nous donnons un exemple ci-après pour illustrer notre propos.

« Trouver la longueur L d'un terrain rectangulaire sachant que sa largeur

$l = 135$ m et que $l = \frac{5}{7} \times L$ ».

¹⁰ Manuel scolaire officiel tunisien des mathématiques de l'élève de la sixième année de l'école de base.



$\frac{1}{7}$ de L correspond à $\frac{1}{5}$ de l soit $135 \text{ m} : 5 = 27 \text{ m} =$ valeur d'une *unité graphique*. L correspond dès lors à $27 \text{ m} \times 7$, soit 189 m .

La production d'une telle solution avec un schéma de type segmentaire suppose un certain nombre de connaissances mathématiques que nous décrivons ci-après.

Le tableau ci-dessous résume les connaissances mathématiques potentiellement mises en jeu en lien avec la solution donnée ci-dessus (outillée par le schéma segmentaire) – en distinguant celles qui apparaissent nécessaires pour produire le schéma et celles qui sont convoquées pour l'interpréter de manière à résoudre le problème posé.

$l = \frac{5}{7} \times L$ L'unité graphique $u : \frac{1}{7}$ de L	Production du schéma
$l = 5u$ traitement de type « Report » dans le registre graphique – u comme unité de compte reportée 5 fois. L'unité du problème : $\frac{7}{7}$ de L . $L = 7u$ traitement de type « Report » dans le registre graphique – u comme unité de compte reportée 7 fois.	
$l = 5u$ et 135 m : double désignation qui nous permet de déterminer la valeur de l'unité graphique: $1u = \frac{135}{5}$.	Interprétation du schéma



<p>$\frac{1}{15}$ du montant initial = $\frac{1}{4}$ de 4200 millimes.</p> <p>Changement d'unité de référence (qui du $\frac{1}{7}$ de L devient $\frac{1}{5}$ de I) : Double désignation fonctionnelle de l'unité graphique dans le registre graphique segmentaire qui permet de trouver L :</p> <p>$L = (135 : 5) \times 7 = \frac{135 \times 7}{5} = \frac{7}{5}$ de I.</p>	
--	--

Ce tableau fait tout d'abord apparaître que pour produire le schéma de type segmentaire, des connaissances liées à deux types d'unités sont potentiellement en jeu – que nous généralisons ci-après :

- l'une que nous avons qualifiée précédemment d'*unité graphique* (correspondant à un « petit » segment reporté n fois et m fois) correspondant à $\frac{1}{7}$ de la longueur. La largeur est doublement désignable comme étant égale à 135 m et comme étant représentée par 5 *unités graphiques*, ce qui permet de trouver la valeur d'une *unité graphique* : $1 u = \frac{135 \text{ m}}{m(5)} = 27 \text{ m}$.

- l'autre que nous avons qualifié d'unité du problème (grandeur inconnue), dont nous considérons une relation multiplicative entre deux grandeurs dont une connue égale à $\frac{m}{n}$ ($\frac{5}{7}$) de cette grandeur inconnue ($\frac{7}{5}$ du montant initial).

Pour résoudre ce problème avec le schéma segmentaire ainsi produit, il s'agit de considérer que $\frac{1}{7}$ de la grandeur inconnue (**L**) correspond aussi à $\frac{1}{5}$ de la grandeur connue (**I**) ce qui recouvre un changement d'unité de référence correspondant aux grandeurs en jeu dans le problème. Il s'agit de penser une unité commune pour les deux grandeurs **L** et **I** (longueur et largeur) pour exprimer chacune des deux grandeurs à l'aide de cette unité. Il peut se faire ici, comme nous l'avons évoqué précédemment, en prise d'appui sur le schéma produit via ce que Duval (2017) appelle une *double désignation fonctionnelle* permise dans le registre graphique : l'*unité graphique* correspondant $\frac{1}{7}$ de la grandeur inconnue (la longueur) apparaissant étant également désignable comme $\frac{1}{5}$ de la grandeur connue (la largeur).

2. 2^{ème} énoncé-schéma fondamental

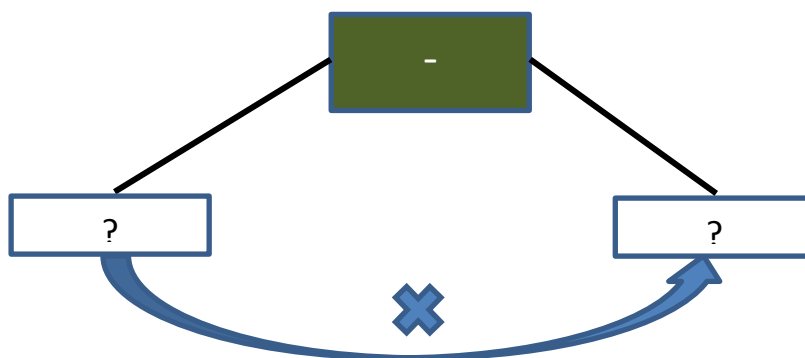
On suppose que :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

En se référant au tableau B3 (p. 50), un problème relatif à notre 2^{ème} énoncé fondamental se schématise de la façon suivante :



Exemple : «Ahmed a 32 billes de plus qu'Ali. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est égal à $\frac{9}{5}$ celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes ? »

Les problèmes impliquant deux relations de comparaison sont plus complexes à gérer par les élèves, surtout dans le registre arithmétique. Ce sont des problèmes qui motivent le passage à l'algèbre et qui sont appelés, comme mentionné précédemment, problèmes déconnectés (Bednarz & Janvier, 1994). Ce type de problème compose deux relations : une additive et une autre multiplicative. Les deux relations en jeu dans le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental sont :

$A = \frac{m}{n} B$ et $A - B = D$, ce qui forme un système à deux équations et à deux inconnues. Les techniques de résolution des tels systèmes feront l'objet d'un apprentissage ultérieur. C'est pour cela que toute autre technique ou démarche de

résolution, notamment la technique de schématisation, paraît comme technique de recours et d'appui pour la résolution de tels problèmes.

Les deux relations évoquées ci-dessus nous renseignent sur les valeurs de la variable associée à notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental, et cela suivant les valeurs de m et n. La variable qu'on va désigner par $V_{m,n}$ et qui va dépendre de m et n va peser sur la façon de procéder à la résolution d'un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental et par conséquent sur la production du schéma représentatif du problème considéré et sur son interprétation.

- **Valeurs de la Variable associée au 2^{ème} énoncé-schéma «fondamental» :**

Désignons par $V_{m,n}$ la variable qui va dépendre des valeurs de m et n, et rappelons que notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

on suppose que :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

1^{er} cas :

V₁ : m est multiple de n ($m = p \times n$). La fraction $\frac{m}{n}$ est un entier. Nous distinguons deux sous-valeurs associées à la valeur V_1 de la variable $V_{m,n}$:

V_{1,1} : la relation entre A et B est de la forme : « $A = p \times B$ », p dans \mathbb{IN}^* (formulation dans le registre algébrique).

Exemple 1 : «Ahmed a 63 billes de plus qu'Ali. Sachant que :

le nombre de billes d'Ahmed = 4×Nombre de billes d'Ali, combien chacun a-t-il de billes ? ».

V_{1,2} : la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois plus grand que B » (formulation dans le registre de la langue naturelle).

Exemple 2 : «Ahmed a 63 billes de plus qu'Ali. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 4 fois plus grand que celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? ».

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

2^{ème} cas :

V₂ : n est multiple de m ($m = \frac{1}{p} \times n$). Nous distinguons deux sous-valeurs associées à cette valeur de la variable $V_{m,n}$:

V_{2,1} : la relation entre A et B est de la forme : « $A = \frac{1}{p} \times B$ », p dans \mathbb{IN}^* (formulation dans le registre algébrique).

Exemple 3 : « Ahmed a 63 billes de plus qu'Ali. Sachant que :

Le « nombre de billes d'Ali = $\frac{1}{p} \times$ nombre de billes d'Ahmed, combien chacun a-t-il de billes ? ».

V_{2,2} : la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois moins grand que B » (formulation dans le registre de la langue naturelle)

Exemple 4 : « Ahmed a 63 billes de plus qu'Ali. Sachant que le nombre de billes d'Ali est 4 fois moins grand que celui d'Ahmed, combien chacun a-t-il de billes ? ».

Une procédure de résolution du problème de l'exemple 1 est la suivante :

$$A = 4 \times B \Rightarrow D = A - B = 4 \times B - B = 3 \times B, \text{ d'où } B = \frac{D}{3}. (*)$$

Résolution sans recourir à un schéma via un raisonnement arithmétique proche d'un raisonnement algébrique [à cause de la substitution de A à $4 \times B$ dans (*)]. Cette technique de résolution reste au-dessus des capacités de la partie prépondérante des élèves, voire même de tous les élèves.

Un schéma correspondant à ce problème est le suivant (mobilisation du traitement « Report ») :

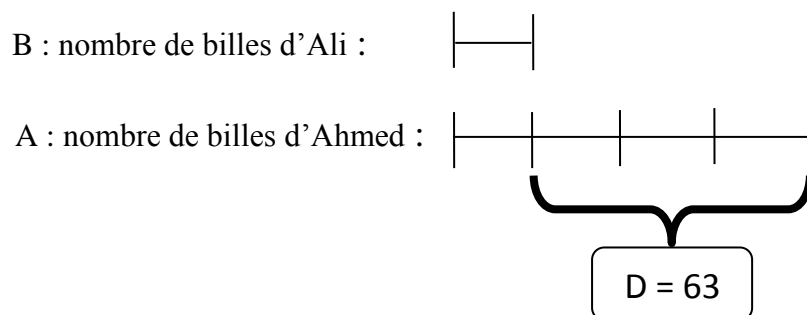


Schéma B28

Quelles sont les connaissances nécessaires pour produire le schéma B28 ou pour l'interpréter?

Ces connaissances sont résumées par le tableau suivant :

<p>Nombre de billes d'Ahmed = 4 fois le nombre de billes d'Ali ; Nombre de billes d'Ahmed = nombre de billes d'Ali + 63 ;</p> <p><i>L'unité graphique</i> : « la plus petite grandeur » ; <i>u</i> : le nombre de billes d'Ali.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>Nombre de billes d'Ali : $1u$; Nombres de billes d'Ahmed : $4u$; Traitement de type « Report » – l'unité graphique comme unité de compte reportée 4 fois ;</p> <p>Traitement de type « écart » entre deux segments ; Légende de l'écart entre les deux segments $1u$ et $4u$: valeur 63.</p>	
<p>Double désignation de l'écart : valeur 63 et $3u$ (unité de compte reportée 3 fois), ce qui permet de trouver la valeur de l'unité graphique :</p> <p>$1u = 63 : 3 = 21$ – soit le nombre de billes d'Ali. Substitution de la valeur de $1u$ dans $4u$ et $21 \times 4 = 84$ – soit le nombre de billes d'Ahmed.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>

3^{ème} cas :

V₃ : la fraction $\frac{m}{n}$ n'est ni unitaire ni dans IN.

Nous distinguons deux sous-valeurs de la valeur V₃ :

V_{3,1} : $\frac{m}{n} > 1$.

V_{3,2} : $\frac{m}{n} < 1$.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

C'est le cas de figure des problèmes les plus compliqués de notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental. Ce sont des problèmes qui introduisent le passage au raisonnement algébrique. En fait :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D \quad (m > n) \end{cases}$$

est un système à deux équations et à deux inconnues qui se résout de la façon suivante :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \quad (1) \\ A - B = D \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ donne } B = \frac{m}{n} B - D \Rightarrow B \left(1 - \frac{m}{n}\right) = D$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{D}{m-n}\right)n$$

$$\text{et } A = \frac{m}{n} B = \frac{m}{n} \left(\frac{D}{m-n}\right)n = \left(\frac{D}{m-n}\right)m$$

Les techniques utilisées lors de cette résolution sont des techniques qui seront étudiées dans un stade plus avancé de scolarité, et cela légitime le recours à la schématisation pour résoudre de tels problèmes et produire par exemple le schéma suivant pour le problème qui suit correspondant à la sous-valeur $V_{3,1}$:

«Ahmed a 32 billes de plus qu'Ali. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est égal à $\frac{9}{5}$ celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »

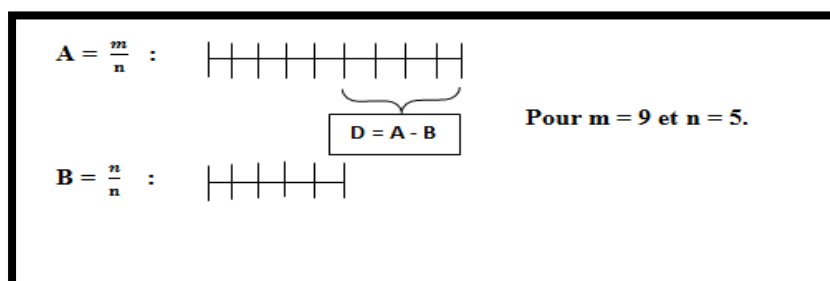


Schéma B29

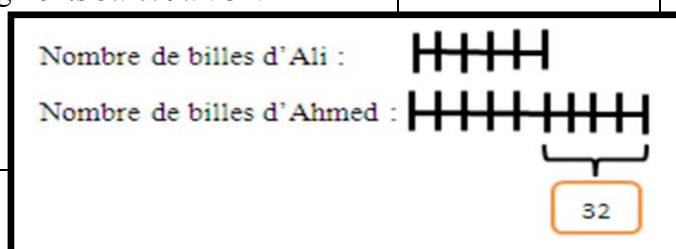
Remarquant que la différence $D = 32$ entre le nombre de billes d'Ahmed et le nombre de billes d'Ali représente 4 *unités graphiques*, la division de 32 par 4 permet de

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

trouver la valeur d'*une unité graphique*, puis la multiplication de cette valeur par 5 permet de trouver le nombre de billes d'Ali, et par 9 permet de trouver le nombre de billes d'Ahmed.

Les connaissances mises en œuvre pour produire le schéma B29 et pour l'interpréter sont résumées à travers le tableau suivant (les connaissances mises en jeu en lien avec les deux sous-valeurs $V_{3,1}$ ou $V_{3,2}$ sont identiques) :

<p>Nombre de billes d'Ahmed $= \frac{9}{5}$ du nombre de billes d'Ali ; <i>L'unité graphique</i> $u : \frac{1}{5}$ du nombre de billes d'Ali ; <i>L'unité du problème</i> : nombre de billes d'Ali $= 5u$ (u comme unité de compte) ; Traitement de type « Report » – <i>l'unité graphique</i> comme unité de compte reportée 5 fois ;</p> <p>Le nombre de billes d'Ahmed : $9u$ (u comme unité de compte) ; Traitement de type « Report » – <i>l'unité graphique</i> comme unité de compte reportée 9 fois ;</p> <p>Traitement de type « écart » entre deux segments. Légende de l'écart entre les deux segments $5u$ et $9u$: 32.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>Double désignation de l'écart : valeur 32 et $4u$ pour déterminer la valeur de <i>l'unité graphique</i> : $32 : 4 = 8$ donne la valeur de $1u = 8$. Substitution de la valeur de $1u$ dans $5u$ et $8 \times 5 = 40$ – Soit le nombre De billes d'Ali.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>



3. 3^{ème} énoncé-schéma fondamental

On suppose que :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A+B = S \end{cases}$$

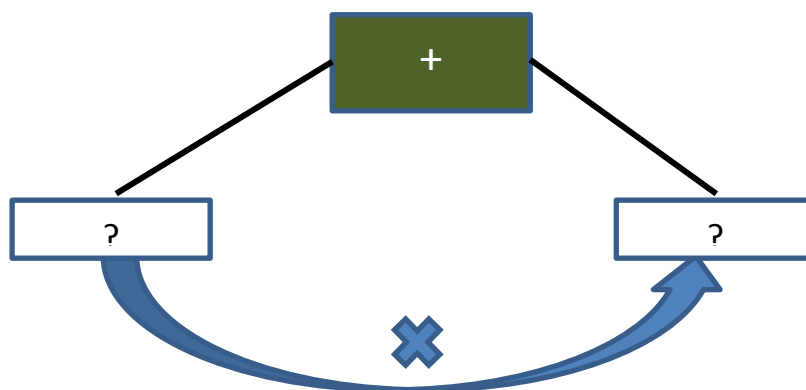
Trouver A ; trouver B.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

➤ Les relations entre A et B sont connues.

Si dans le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental nous connaissons la valeur de $A - B$, dans le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental nous connaissons plutôt la valeur de $A + B$. En nous référant au tableau B3 (p. 50), un problème relatif à notre 3^{ème} énoncé fondamental se schématise de la façon suivante :



Exemple : «Ahmed et Ali ont 280 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est égal à $\frac{9}{5}$ celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »

C'est un problème qui implique aussi deux relations de comparaison, et qui sont, comme nous l'avons mentionné auparavant, plus complexes à gérer par les élèves, surtout dans le registre arithmétique. Ce type de problème compose deux relations : une additive et une autre multiplicative. Les deux relations en jeu dans le 3^{ème} énoncé fondamental sont :

$$A = \frac{m}{n} B \text{ et } A + B = S.$$

Ces deux relations nous renseignent sur les valeurs de la variable associée à notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental, et cela suivant les valeurs de m et n. la variable qu'on va désigner par $V_{m,n}$ qui va dépendre de m et n va peser sur la façon de procéder à la résolution d'un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental et par conséquent sur la production du schéma représentatif du problème considéré et sur son interprétation.

- **Valeurs de la Variable associée au 3^{ème} énoncé-schéma «fondamental» :**

Désignons par $V_{m,n}$ la variable qui va dépendre des valeurs de m et n, et rappelons que notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

On suppose que :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A + B = S \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

1^{er} cas :

V₁ : m est multiple de n ($m = p \times n$), c'est-à-dire la fraction $\frac{m}{n}$ est un entier. Nous distinguons deux sous-valeurs associées à cette valeur de la variable $V_{m,n}$:

V_{1,1} : la relation entre A et B est de la forme : « $A = p \times B$ », p dans \mathbb{IN}^* (formulation dans le registre algébrique).

Exemple1 : « Ahmed et Ali ont ensemble 264 billes. Sachant que :

Le nombre de billes d'Ahmed = 5 × Nombre de billes d'Ali, combien chacun a-t-il de billes ? ».

V_{1,2} : la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois plus grand que B » (formulation dans le registre de la langue naturelle).

Exemple2 : « Ahmed et Ali ont ensemble 264 billes. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 5 fois plus grand que celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes ? ».

2^{ème} cas :

V₂ : n est multiple de m ($n = pm$). Nous distinguons deux sous-valeurs associées à cette valeur de la variable $V_{m,n}$:

V_{2,1} : la relation entre A et B est de la forme : « $A = \frac{1}{p} \times B$ », p dans \mathbb{IN}^* (formulation dans le registre algébrique).

Exemple3 : « Ahmed et Ali ont ensemble 264 billes. Sachant que :

Le nombre de billes d'Ali = $\frac{1}{5}$ nombre de billes d'Ahmed, combien chacun a-t-il de billes ? ».

V_{2,2} : la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois moins grand que B » (formulation dans le registre de la langue naturelle).

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

Exemple4 : «Ahmed et Ali ont ensemble 264 billes. Sachant que le nombre de billes d'Ali est 5 fois moins grand que celui d'Ahmed, combien chacun a-t-il de billes? ».

Une procédure de résolution du problème de l'exemple1 est la suivante :

$$A = 5 \times B \Rightarrow S = A + B = 5 \times B + B = 6 \times B, \text{ d'où } B = \frac{S}{6}. (*)$$

Résolution sans recourir à un schéma via un raisonnement arithmétique proche d'un raisonnement algébrique (à cause de la substitution de A à $5 \times B$ dans (*)). Cette technique de résolution, et comme nous l'avons évoqué précédemment, reste au-dessus des capacités de la partie prépondérante des élèves.

Un schéma correspondant à ce problème est le suivant (mobilisation du traitement « Report ») :

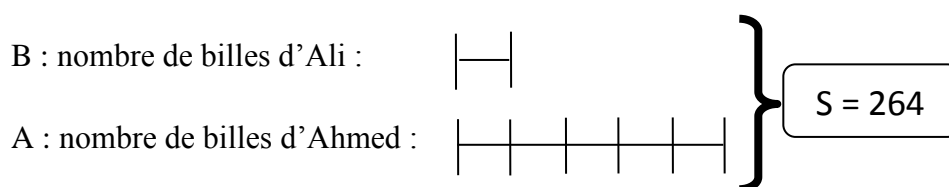


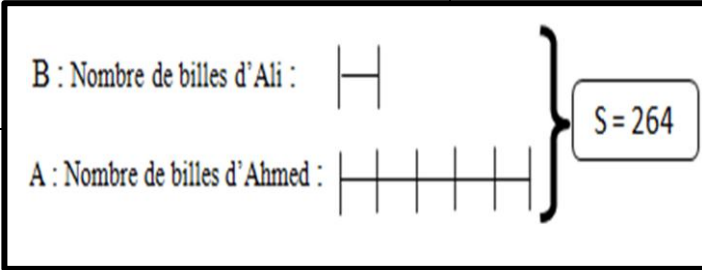
Schéma B30

C'est un schéma qui traduit juste les données du problème, et l'égalité $B = \frac{S}{6}$ trouvée dans (*) paraît *a priori* triviale sur le schéma.

Quelles sont les connaissances nécessaires pour produire le schéma B30 ou pour l'interpréter?

Ces connaissances sont résumées par le tableau suivant :

<p>Nombre de billes d'Ahmed = 5 fois le nombre de billes d'Ali ; nombre de billes d'Ahmed + nombre de billes d'Ali = 264 ; l'unité graphique : « la plus petite grandeur » ; l'unité graphique u : le nombre de billes d'Ali.</p>	<p>Production du schéma</p>
---	--

<p>Nombre de billes d'Ali : $1u$; Nombre de billes d'Ahmed : $5u$; Traitement de type « Report » – l'unité graphique comme unité de compte reportée 5 fois ;</p> <p>Traitement de type « Somme » entre deux segments ; Légende de la somme des deux segments $1u$ et $5u$: valeur 264.</p>	
	
<p>Double désignation de la somme : valeur 264 et $6u$ qui permet de trouver la valeur de l'unité graphique $1u = 264 : 6$</p> <p>Nombre de billes d'Ali = $1u = 264 : 6 = 44$ Nombre de billes d'Ahmed = $5u = 44 \times 5 = 220$</p>	<p>Interprétation du schéma</p>

3^{ème} cas :

V_3 : n ne divise pas m et m ne divise pas n . (n et m premiers entre eux)

Nous distinguons deux sous-valeurs de la valeur V_3 :

$V_{3,1}$: $\frac{m}{n} > 1$.

$V_{3,2}$: $\frac{m}{n} < 1$.

C'est le cas de figure des problèmes les plus compliqués de notre 3^{ème} énoncé fondamental. Le passage du registre arithmétique au registre graphique permet d'accéder à des traitements plus économiques (Duval, 1993) pour résoudre de tels problèmes. En fait :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m}{n} B \\ A + B = D \quad (m > n) \end{array} \right.$$

est un système à deux équations et à deux inconnues qui se résout de la façon suivante :

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

On a:
$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B & (1) \\ A + B = S & (2) \end{cases}$$

(2) - (1) donne $B = S - \frac{m}{n} B \Rightarrow B \left(1 + \frac{m}{n}\right) = S$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{S}{m+n}\right)n$$

$$\text{Et } A = \frac{m}{n} B = \frac{m}{n} \left(\frac{S}{m+n}\right)n = \left(\frac{S}{m+n}\right)m$$

Les techniques utilisées lors de cette résolution sont une fois de plus des techniques qui seront étudiées dans un stade plus avancé de scolarité.

Exemple de problème correspondant à la sous-valeur $V_{3,2}$:

«Ahmed et Ali ont 280 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est égal à $\frac{3}{7}$ celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »

Un schéma représentatif du problème précédent est le suivant :

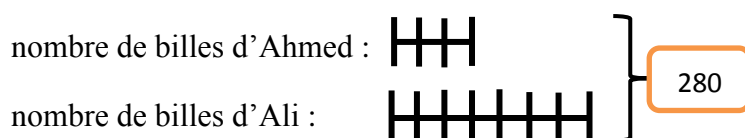


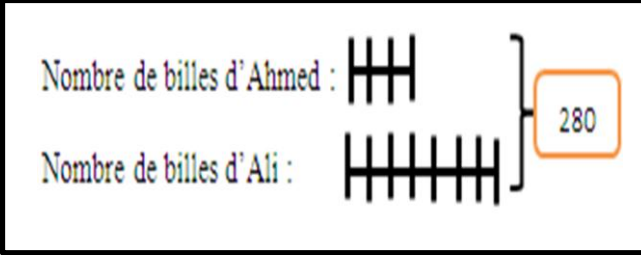
Schéma B31

Remarquant que $A + B$ (S) représente 10 *unités graphiques*, pour trouver la valeur d'une *unité graphique* nous devons diviser S par 10, puis nous multiplions cette valeur par 3 pour trouver le nombre de billes d'Ahmed, et par 7 pour trouver le nombre de billes d'Ali.

Les connaissances nécessaires pour produire le schéma B31 et pour l'interpréter sont résumées à travers le tableau suivant (les connaissances mises en jeu en lien avec les deux sous-valeurs $V_{3,1}$ ou $V_{3,2}$ sont identiques) :

Nombre de billes d'Ahmed = $\frac{3}{7}$ du nombre de billes d'Ali ; L' <i>unité graphique</i> u : $\frac{1}{7}$ du nombre de billes d'Ali ;	
---	--

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

<p>L'unité du problème : nombre de billes d'Ali = $7u$ (u comme unité de compte) ; Traitement de type « Report » – l'unité graphique comme unité de compte reportée 7 fois ;</p> <p>Le nombre de billes d'Ahmed : $3u$ (u comme unité de compte) ; Traitement de type « Report » – l'unité graphique comme unité de compte reportée 3 fois ;</p> <p>Traitement de type « somme » des deux segments Légende de la somme des deux segments $3u$ et $7u$: 280.</p>	<p>Production du schéma</p>
	
<p>Double désignation de la somme : valeur 280 et $10u$ qui permet de trouver la valeur de l'unité graphique :</p> <p>$1u = 280 : 10 = 28$ billes.</p> <p>Nombre de billes d'Ahmed = $3u = 3 \times 28 = 84$ billes. Nombre de billes d'Ali = $7u = 7 \times 28 = 196$ billes.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>

4. 4^{ème} énoncé-schéma fondamental

On suppose que :

$$\begin{cases} A + B = S \\ A - B = D \quad (A > B) \end{cases}$$

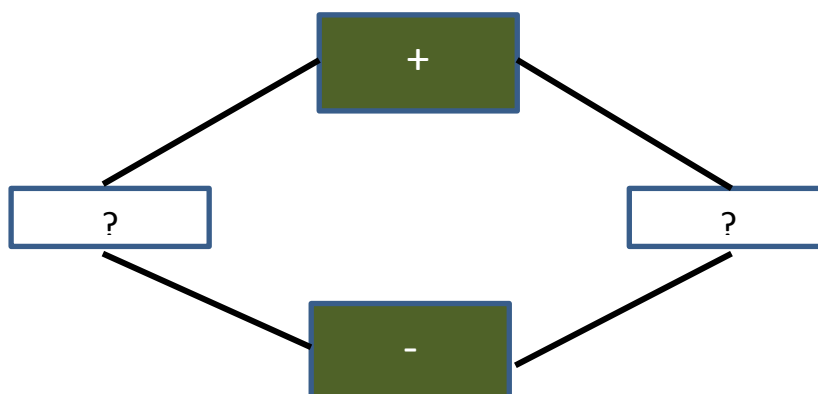
Trouver A ; trouver B.

(partages en parts inégales)

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

En se référant au tableau B3 (p. 50), un problème relatif à notre 4^{ème} énoncé fondamental se schématise de la façon suivante :



Exemple :

« Dans une école on compte 860 élèves. Sachant qu'il y a 62 filles de plus que de garçons, trouvez :

- Le nombre des filles ; Le nombre des garçons. »

C'est un problème déconnecté qui implique deux relations de comparaison et qui motive le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Les deux relations en jeu dans ce type de problèmes sont les suivantes : $A + B = S$ et $A - B = D$.

Ces deux relations additives peuvent nous renseigner sur les valeurs de la variable associée à notre 4^{ème} énoncé fondamental, et cela suivant les valeurs de S et D. la variable qu'on va désigner par $V_{S,D}$ qui va dépendre de S et D va peser sur la façon de procéder à la résolution d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental et par conséquent sur la production du schéma représentatif du problème considéré et sur son interprétation.

- **Valeurs de la Variable associée au 4^{ème} énoncé-schéma «fondamental» :**

Désignons par $V_{S,D}$ la variable qui va dépendre des valeurs de S et D.

1^{er} cas :

V_1 : $D = 0$

C'est un cas de figure très facile à résoudre puisque dans ce cas $A = B = \frac{S}{2}$

2^{ème} cas :

$V_2 : D \neq 0$.

C'est le cas de figure des problèmes les plus fréquents trouvés dans le manuel scolaire¹¹ tunisien.

Dans ces problèmes, les valeurs des grandeurs A et B peuvent parfois ne pas être des entiers lorsqu'elles sont des grandeurs continues.

Lors de nos travaux de master (Belguesmi, 2016), nous avons supposé *a priori* que les « bons » élèves des deux classes sur lesquelles nous avons mené nos expérimentations peuvent ne pas recourir à un schéma pour résoudre le problème proposé ci-dessus. Ils peuvent :

- ou bien retrancher la différence puis diviser par deux pour trouver le nombre des garçons puis celui des filles ;
- ou bien ajouter la différence puis diviser par deux pour trouver le nombre des filles puis celui des garçons ;
- ou bien diviser 860 sur deux pour obtenir 430, et penser à distribuer 62 de part et d'autre de 430 d'une façon égale pour obtenir le nombre des filles et celui des garçons.

Mais l'expérimentation conduite antérieurement à la thèse (Belguesmi, 2016) a montré qu'une partie prépondérante des élèves n'a pas utilisé ces méthodes arithmétiques, et ont plutôt commencé par diviser 860 par deux puis ajouter ou retrancher 62 pour trouver le nombre de chaque sexe. C'est une erreur que nous avons considérée comme potentiellement récurrente au regard des résultats de nos travaux antérieurs (Belguesmi, 2016). Un schéma correspondant au problème posé et produit via le traitement « Ajout » est le suivant :

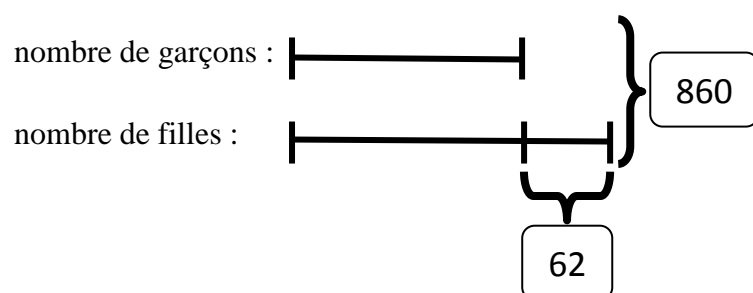


Schéma B32

C'est un schéma qui considère comme *unité graphique* le segment qui représente la plus petite grandeur (nombre de garçons). Le schéma B32 est congruent à la relation « ...de plus... » du problème.

¹¹ Manuel scolaire officiel tunisien des mathématiques de la sixième année de l'école de base.

Un second schéma correspondant au même problème et produit via le traitement « Retraitement » est le suivant :

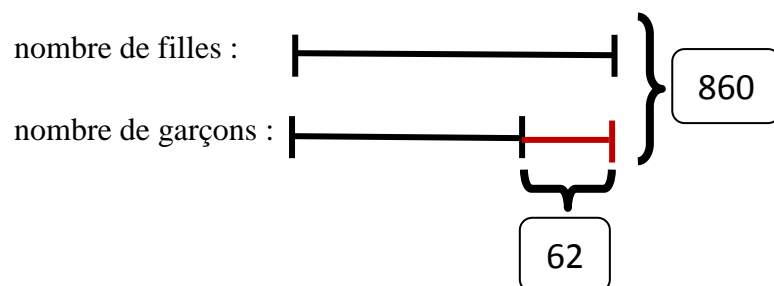


Schéma B33

C'est un schéma qui considère comme *unité graphique* le segment qui représente la plus grande grandeur (nombre de filles). Le schéma B33 est congruent à la relation « ...de moins... » symétrique à celle proposée dans le problème.

À chaque schéma correspond une procédure de résolution. En retranchant 62 de 860, nous trouvons 2 fois le nombre de garçons (il suffit de cacher le segment qui représente 62 sur le schéma B32). Par contre, si nous ajoutons 62 à 860 nous trouvons 2 fois le nombre de filles (il suffit d'ajouter, sur le schéma B33, un segment de valeur 62 au segment représentant le nombre des garçons). Il suffit de diviser à chaque fois par 2 pour trouver le nombre de chaque sexe.

Les connaissances nécessaires pour produire le schéma B32 et pour l'interpréter sont résumées à travers le tableau suivant :

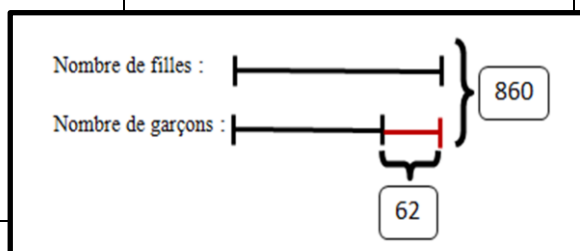
<p>Nombre de filles = nombre de garçons + 62 ; <i>L'unité graphique u</i> : nombre de garçons ; Nombre de garçons = u ; Nombre de filles = $u + 62$; Traitement de type « Ajout » dans le registre graphique segmentaire : l'unité graphique considérée comme unité de compte augmentée par un segment de valeur 62.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>Nous comptons 2 fois l'unité de compte plus 62 dans la somme de valeur 860. La somme de laquelle nous retranchons 62 devient 2 fois l'unité segmentaire</p>	

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

<p>correspondant au nombre de garçons.</p> $860 \text{ enfants} = \text{Nombre de filles} + \text{nombre de garçons}$ $= u + u + 62 = 2u + 62.$ $2u = 860 - 62$ $u = \frac{860 - 62}{2} = 399 = \text{Nombre d'enfants.}$ <p>Nombre de filles = $u + 62 = 461$.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>
--	---------------------------------

Les connaissances nécessaires pour produire le schéma B33 et pour l'interpréter sont résumées à travers le tableau suivant :

<p>Nombre de garçons = nombre de filles – 62 ;</p> <p>L'unité graphique u : nombre de filles ;</p> <p>Nombre de filles = u ;</p> <p>Nombre de garçons = $u - 62$;</p> <p>Traitement de type « Retraitement » dans le registre graphique segmentaire :</p> <p>l'unité graphique considérée comme unité de compte diminuée d'un segment de valeur 62.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>Pour compter deux fois l'unité de compte considérée nous ajoutons 62 (petit segment en rouge), et donc à la somme 860 nous ajoutons 62 pour maintenir l'égalité :</p> $2u = 860 + 62$ $u = \frac{860 + 62}{2} = 461 = \text{Nombre de filles.}$ <p>Nombre de garçons = $u - 62 = 399$.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>



5. 5^{ème} énoncé-schéma fondamental

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

1^{er} cas :

- $A = B + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

2^{ème} cas :

- $A = C + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problèmes à trois branches : **Source**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Les deux relations ont la même donnée comme point de départ.

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

3^{ème} cas :

- $A = C + m$;
- $A = B + n$;
- $A + B + C = S$.

Problèmes à trois branches : **Puits**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée.

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

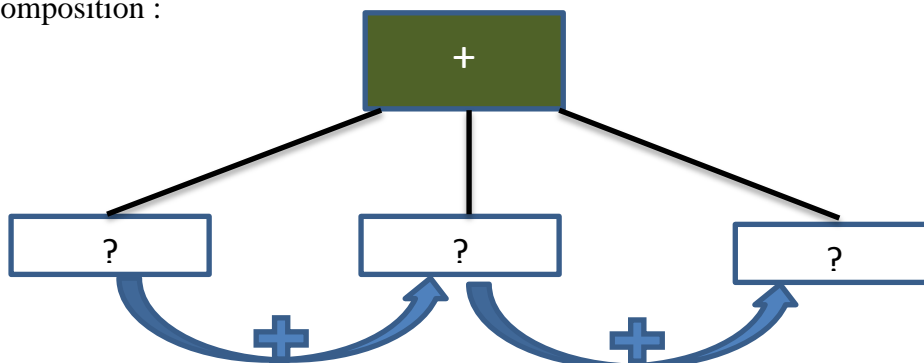
Les problèmes liés à notre 5^{ème} énoncé fondamental sont des problèmes de partages inégaux dont les relations entre les grandeurs en jeu sont uniquement additives.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- C est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre (A et B), (B et C) et (A et B et C) sont connues.

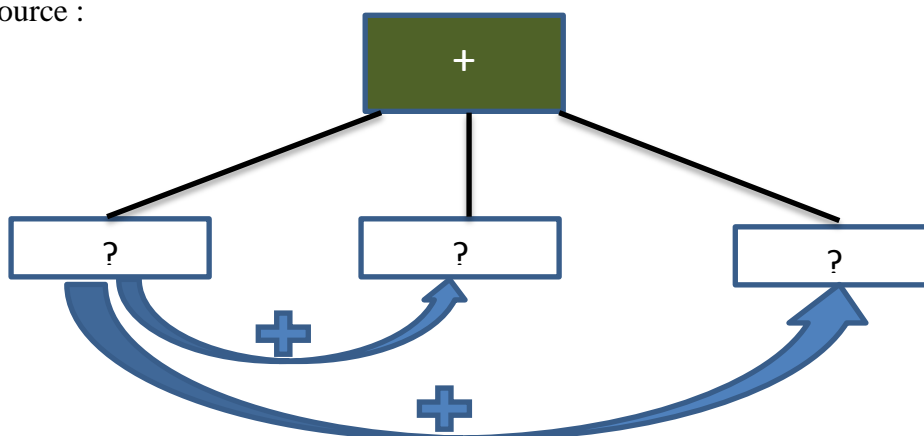
En se référant au tableau B3 (p. 50), un problème relatif à notre 5^{ème} énoncé fondamental se schématise de la façon suivante : (le « + » peut être un « - »)

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

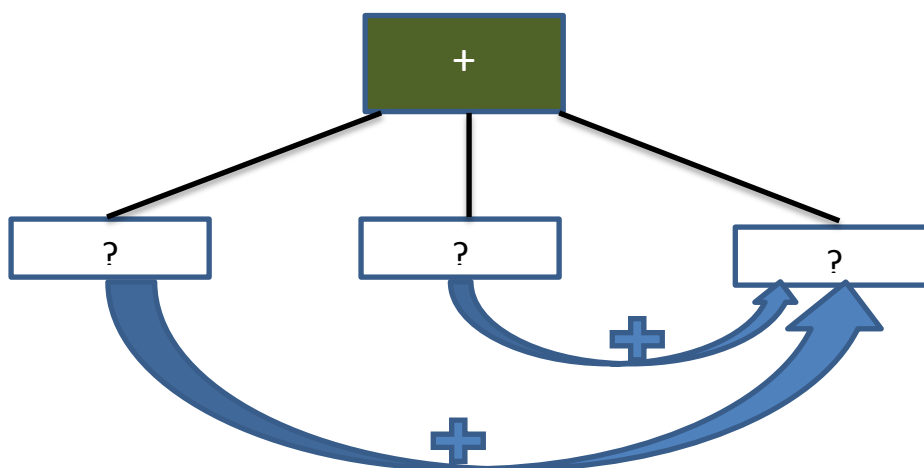
Composition :



Source :



Puits :



Les trois relations mises en jeu dans des tels problèmes sont les suivantes (par exemple pour un problème le type Composition) : $A = B + m$, $B = C + n$ et $A + B + C = S$. C'est à travers ces trois relations que nous allons essayer d'identifier les valeurs des variables $V_{m,n}$ (Composition, Source et Puits) associées au 5^{ème} énoncé-schéma fondamental.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

- **Valeurs des Variables associées au 5^{ème} énoncé-schéma «fondamental» :**
(m et n sont dans IN).

Désignons par $V_{m,n}$ (Composition) la variable qui va dépendre des valeurs de m et n, et rappelons que le 1^{er} cas de notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

- $A = B + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problème à trois branches de type Composition

Trouver A, B et C.

1^{er} cas :

V_1 : $m = n = 0$. C'est le cas de figure le plus simple du 5^{ème} énoncé fondamental. Dans ce cas $A = B = C = \frac{S}{3}$.

2^{ème} cas :

V_2 : $m = 0$ ou $n = 0$, c'est-à-dire $A = B$ ou $B = C$. Sans perte de généralité supposons que $m = 0$ et $n \neq 0$. Dans ce cas nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B \\ B = C + n \\ A + B + C = S. \end{array} \right.$$

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = C + n \\ 2B + C = S \end{array} \right.$$

C'est un système à deux équations et à deux inconnues. Pour des élèves de la sixième année de l'école de base, une résolution d'un tel système dans le registre arithmétique sans recourir à la schématisation semble *a priori* compliquée.

La représentation du problème dans le registre graphique segmentaire donne :

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

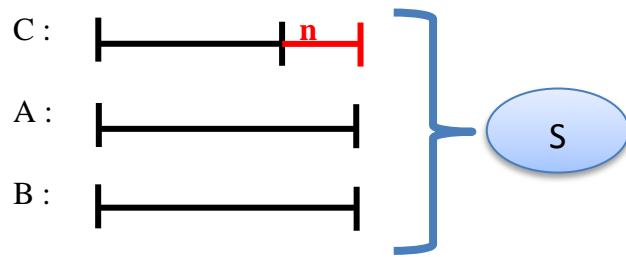


Schéma B34

L'égalité $3B - n = S$ peut être déduite directement du schéma, soit $B = \frac{S+n}{3}$.

3^{ème} cas :

V₃ : $m.n \neq 0$. C'est le cas de figure le plus compliqué du 5^{ème} énoncé fondamental. Le système d'équation qui en résulte est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B + m \\ B = C + n \\ A + B + C = S. \end{array} \right.$$

Exemple :

« La masse totale de trois météorites est de 82 tonnes. Sachant que la masse de la troisième météorite a 17 tonnes de plus que celle de la deuxième, et la masse de la deuxième météorite a 10 tonnes de plus que celle de la première, trouvez la masse de chaque météorite ».

Raisonnement algébrique :

Désignons par M_i ($1 \leq i \leq 3$) La masse de la $i^{\text{ème}}$ météorite, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_3 = M_2 + 17 \quad (1) \\ M_2 = M_1 + 10 \quad (2) \\ M_3 + M_2 + M_1 = 82 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$(1) + (2) \text{ donne } M_3 + M_2 = M_2 + 17 + M_1 + 10 \Rightarrow M_1 = M_3 - 27$$

$$(1) \text{ Donne } M_2 = M_3 - 17$$

D'où (3) devient $M_3 + M_3 - 17 + M_3 - 27 = 82$; Soit $M_3 = 42$, $M_2 = 42 - 17 = 25$ et $M_1 = 25 - 10 = 15$.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

C'est un problème qui favorise le passage au raisonnement algébrique, deux substitutions ont été nécessaires pour le résoudre.

Raisonnement graphique :

Schéma correspondant au problème posé dans le registre graphique segmentaire :

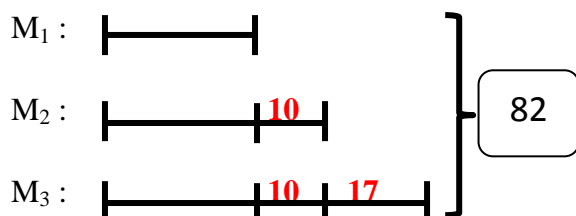


Schéma B35

C'est un schéma qui traduit avec exactitude les données du problème. La seule difficulté pour produire ce schéma, comme nous l'avons évoqué précédemment, est d'intégrer le segment de valeur 10 dans la représentation de M_3 . Les élèves ont tendance à le produire comme suit :

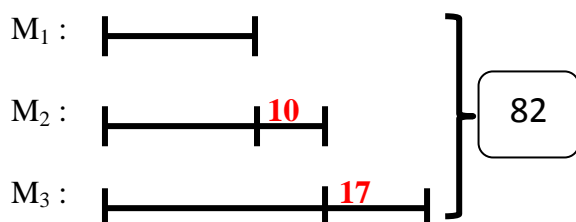


Schéma B36

En cachant sur le schéma B35 les différences [tout ce qui dépasse la part qui représente M_1 (considérer comme *unité graphique* le segment qui représente la plus petite grandeur)] nous trouvons trois fois la part qui représente la masse de la première météorite.

$$\text{D'où } M_1 = \frac{[82 - (10 + 10 + 17)]}{3} = 15.$$

$$M_2 = 15 + 10 = 25 \text{ et } M_3 = 25 + 17 = 42.$$

Une interprétation qui a nécessité comme connaissances élémentaires la mobilisation d'une soustraction, d'une addition et d'une division.

Pour résoudre le problème autrement, nous pouvons considérer comme *unité graphique* le segment qui représente la masse de la deuxième météorite ou celui qui représente la masse de la troisième météorite :

Le schéma qui considère comme *unité graphique* le segment qui représente la grandeur moyenne (masse de la deuxième météorite) est le suivant :

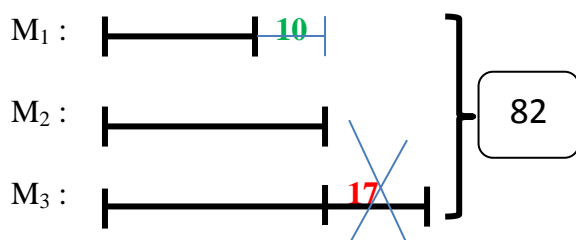
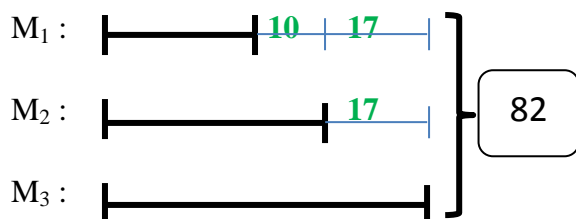


Schéma B37

$$M_2 = \frac{82 + 10 - 17}{3} = 25.$$

Une interprétation qui paraît *a priori* compliquée à négocier : si nous ajoutons 10 au segment représentant M₁ et nous retranchons 17 au segment représentant M₃, il faut aussi ajouter 10 et retrancher 17 de la somme 82.

Le schéma qui considère comme *unité graphique* le segment qui représente la plus grande grandeur (masse de la troisième météorite) est le suivant :



$$M_3 = \frac{82 + 10 + 17 + 17}{3} = 42.$$

Une interprétation qui a nécessité la mobilisation de la connaissance : si nous ajoutons 10 + 17 au segment qui représente M₁ et 17 au segment qui représente M₂, nous ajoutons aussi 10 + 17 + 17 à 82, sans compter la mobilisation d'une addition et d'une division.

A priori, la première stratégie (considérer le segment qui représente la masse de la première météorite comme *unité graphique*) est la stratégie optimale vu le coût de connaissances mobilisées lors de cette trajectoire de résolution.

Désignons maintenant par $V_{m,n}$ (Source) la variable qui va dépendre des valeurs de m et n , et rappelons que le 2^{ème} cas de notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Soient A , B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

- $A = C + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problème à trois branches de type Source

Trouver A , B et C .

1^{er} cas :

V_1 : $m = n = 0$. C'est le cas de figure le plus simple du 5^{ème} énoncé fondamental. Dans ce cas $A = B = C = \frac{S}{3}$.

2^{ème} cas :

V_2 : $m = 0$ ou $n = 0$, c'est-à-dire $A = C$ ou $B = C$. Sans perte de généralité supposons que $m = 0$ et $n \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = C \\ B = C + n \\ A + B + C = S. \end{array} \right.$$

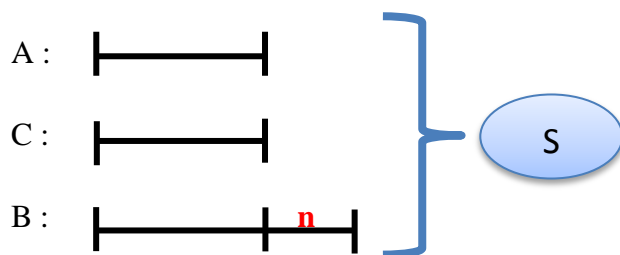
C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = C + n \\ 2C + B = S \end{array} \right.$$

C'est un système à deux équations et deux inconnues. Une résolution d'un tel système dans le registre arithmétique sans recourir à la schématisation semble *a priori* compliquée à des élèves de la sixième année de l'école de base.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

La mise en schéma segmentaire du problème donne :



L'égalité $3A + n = S$ peut être déduite directement du schéma, soit $A = \frac{S-n}{3}$.

3^{ème} cas :

V₃ : $m.n \neq 0$. C'est le cas de figure le plus compliqué du 5^{ème} énoncé fondamental. Le système d'équations qui en résulte est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = C + m \\ B = C + n \\ A + B + C = S. \end{array} \right.$$

Exemple : « La masse totale de trois météorites est de 183 tonnes. Sachant que la masse de la 1^{ère} météorite dépasse celle de la 3^{ème} de 17 tonnes, et la masse de la 2^{ème} météorite dépasse celle de la 3^{ème} de 10 tonnes, trouvez la masse de chaque météorite »

Raisonnement algébrique :

Désignons par M_i ($1 \leq i \leq 3$) La masse de la $i^{\text{ème}}$ météorite, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = M_3 + 17 \quad (1) \\ M_2 = M_3 + 10 \quad (2) \\ M_3 + M_2 + M_1 = 183 \quad (3) \end{array} \right.$$

(1) - (2) donne $M_1 - M_2 = 7 \Rightarrow M_1 = M_2 + 7$

(3) Donne $M_3 + M_2 + M_2 + 7 = 183$, par suite $M_3 + M_3 + 10 + M_3 + 10 + 7 = 183$

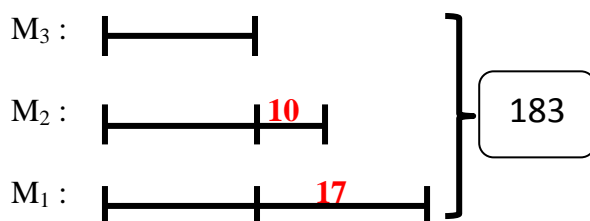
Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

D'où $3M_3 = 183 - 27$ soit $M_3 = 52$, $M_2 = 62$ et $M_1 = 69$.

C'est un problème qui favorise aussi le passage au raisonnement algébrique, deux substitutions ont été nécessaires pour le résoudre.

Raisonnement graphique :

Schéma correspondant au problème posé :



L'égalité $M_3 = \frac{183 - (10 + 17)}{3}$ peut être déduite directement à partir du schéma.

L'*unité graphique* considérée est le segment qui représente la masse de la 3^{ème} météorite.

Deux autres trajectoires de résolution, qui ont été évoquées précédemment, sont possibles : Considérer comme *unité graphique* le segment qui représente la masse de la 2^{ème} météorite ou la masse de la 3^{ème} météorite.

Désignons par $V_{m,n}$ (Puits) la variable qui va dépendre des valeurs de m et n , et rappelons que le 3^{ème} cas de notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Soient A , B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

- $A = B + m$;
- $A = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problème à trois branches de type Source

Trouver A , B et C .

1^{er} cas :

V_1 : $m = n = 0$. C'est le cas de figure le plus simple du cinquième énoncé fondamental. Dans ce cas $A = B = C = \frac{S}{3}$.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

2^{ème} cas :

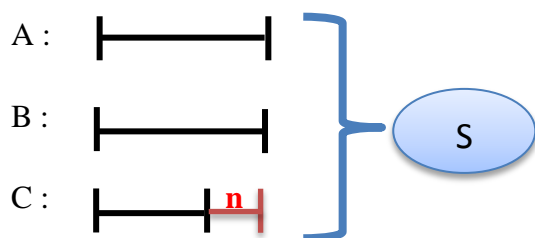
V₂ : $m = 0$ ou $n = 0$, c'est-à-dire $A = B$ ou $A = C$. Sans perte de généralité supposons que $m = 0$ et $n \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B \\ A = C + n \\ A + B + C = S. \end{array} \right.$$

C'est-à-dire :
$$\left\{ \begin{array}{l} A = C + n \\ 2A + C = S \end{array} \right.$$

C'est un système à deux équations et deux inconnues. Une résolution d'un tel système dans un registre arithmétique sans recourir à la schématisation, comme évoqué précédemment, semble *a priori* compliquée pour des élèves de la sixième année de l'école de base.

Une fois de plus le passage au registre graphique segmentaire paraît *a priori* un outil pour résoudre un tel problème :



L'égalité $3A - n = S$ peut être déduite directement du schéma, soit $A = \frac{S+n}{3}$.

3^{ème} cas :

V₃ : $m, n \neq 0$. C'est le cas de figure le plus compliqué du 5^{ème} énoncé fondamental. Le système d'équations qui en résulte est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B + m \\ A = C + n \\ A + B + C = S. \end{array} \right.$$

Exemple :

« La masse totale de trois météorites est de 82 tonnes. Sachant que la masse de la 1^{ère} météorite dépasse celle de la deuxième météorite de 17 tonnes et dépasse celle de la troisième météorite de 10 tonnes, trouvez la masse de chaque météorite ».

Raisonnement algébrique :

Désignons par M_i ($1 \leq i \leq 3$) La masse de la $i^{\text{ème}}$ météorite, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = M_2 + 17 \quad (1) \\ M_1 = M_3 + 10 \quad (2) \\ M_3 + M_2 + M_1 = 82 \quad (3) \end{array} \right.$$

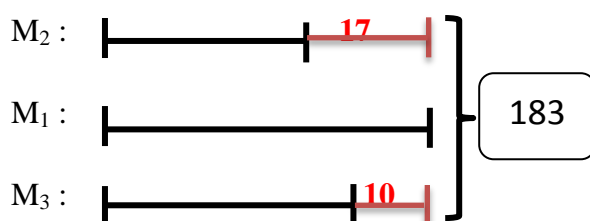
(1) - (2) donne $M_3 - M_2 = 7$ soit $M_3 = M_2 + 7$

(3) Donne $M_2 + 7 + M_2 + M_2 + 17 = 183$ d'où $M_2 = \frac{183 - 24}{3} = 53$, $M_1 = 70$ et $M_3 = 60$.

Deux substitutions ont été nécessaires pour le résoudre.

Raisonnement graphique :

Schéma segmentaire correspondant au problème posé :



Le degré de complexité d'une telle représentation est conséquent, et les problèmes de type Puits sont difficiles à résoudre même via une représentation graphique segmentaire.

L'égalité $M_1 = \frac{183 + (10 + 17)}{3}$ peut être déduite directement à partir du schéma.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

L'*unité graphique* considérée est le segment qui représente la masse de la 3^{ème} météorite. Deux autres trajectoires de résolution, qui ont été évoquées précédemment sont possibles : Considérer comme *unité graphique* le segment qui représente la masse de la 1^{ère} ou de la 2^{ème} météorite. Sachant que le schéma ne prend pas en charge la composition des deux relations additives, ces deux trajectoires possibles sont plus coûteuses en termes de connaissances convoquées que la première trajectoire explicitée ci-dessus (voir plus, pp. 102-103)

Considérons le problème suivant :

« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Sara en reçoit 27 de plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? »
(problème de type Composition)

Les connaissances nécessaires pour produire un schéma représentatif de ce problème et pour l'interpréter en considérant le segment qui représente la plus petite grandeur (nombre de billes d'Inès) comme *unité graphique* sont résumées à travers le tableau suivant :

<p>Nombre de billes de Mohammed = nombre de billes de Sara + 36 ; Nombre de billes de Sara = nombre de billes d'Inès + 27 ;</p> <p>L'<i>unité graphique</i> : « le segment représentant la plus petite grandeur » ; u : nombre de billes d'Inès ;</p> <p>$1u$ = Nombre de billes d'Inès ; $1u + 27$ = Nombre de billes de Sara avec un traitement de type « Ajout » dans le registre graphique ; Changement d'unité : $1u+27$ devient une « nouvelle unité » $1U$ à considérer ; $1U + 36$ soit $(1u + 27) + 36$ = nombre de billes de Mohammed avec un traitement de type « Ajout » dans le registre graphique ;</p> <p>Traitement de type « somme » liée à trois segments ; Légende de la somme liée à 3 segments $1u, 1u + 27, 1u+27+36$ de valeur 198.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>Nous comptons 3 fois l'<i>unité graphique</i> ($1u$ utilisée comme unité de compte) auxquelles s'ajoutent 27 et $(27+36)$ – la composition de</p>	

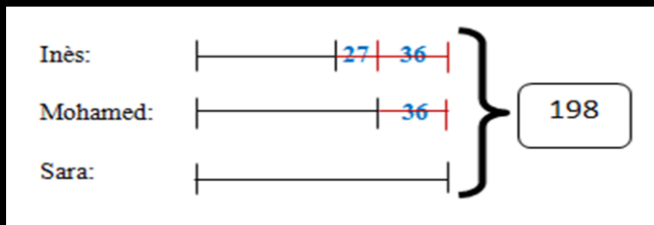
Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

<p>relations de comparaison additive étant prise en charge par le schéma produit (via le changement d'unité $1U = 1u+27$), l'interprétation du schéma se ramène à une comparaison d'états entre $3u$ et 198 :</p> $3u + 27 + 27 + 36 = 198$ $3u = 198 - 27 - 27 - 36 = 108$ $u = 108 : 3 = 36$	<p>Interprétation du schéma</p>
--	---------------------------------

Les connaissances nécessaires pour produire un schéma représentatif du problème proposé et pour l'interpréter en considérant le segment qui représente grandeur moyenne (nombre de billes de Sara) comme *unité graphique* sont résumées à travers le tableau suivant :

<p>Nombre de billes de Mohammed = nombre de billes de Sara + 36 ; Nombre de billes de Sara = nombre de billes d'Inès + 27 ;</p> <p>L'<i>unité graphique</i> : « le segment représentant la grandeur moyenne » ;</p> <p>u : nombre de billes de Sara ;</p> <p>$1u$ = Nombre de billes de Sara ; $1u - 27$ = Nombre de billes d'Inès avec un traitement de type « Retraitement » dans le registre graphique ; $1u + 36$: nombre de billes de Mohammed avec un traitement de type « Ajout » dans le registre graphique ;</p> <p>Traitement de type « somme » liée à trois segments ;</p> <p>Légende de la somme liée à 3 segments $1u - 27$, $1u$, $1u+36$ de valeur 198.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>La somme est égale à $u + (u - 27) + (u + 36) = 198$ $3u = 198 + 27 - 36 = 189$ $u = 189 : 3 = 63$</p>	<p>Interprétation du schéma</p>

Les connaissances nécessaires pour produire un schéma représentatif du problème proposé et pour l'interpréter en considérant le segment qui représente la plus grande grandeur (nombre de billes de Mohammed) comme *unité graphique* sont résumées à travers le tableau suivant :

<p>Nombre de billes de Mohammed = nombre de billes de Sara + 36 ; Nombre de billes de Sara = nombre de billes d'Inès + 27 ;</p> <p>L'<i>unité graphique</i> : « le segment représentant la grande grandeur » ;</p> <p>u : nombre de billes de Mohammed ;</p> <p>$1u$ = Nombre de billes de Mohammed ; $1u - 36$ = nombre de billes de Sara avec un traitement de type « Retraitement » dans le registre graphique ; $(1u - 36) - 27$: nombre de billes d'Inès avec un traitement de type « Retraitement » dans le registre graphique ;</p> <p>Traitement de type « somme » liée à trois segments ;</p> <p>Légende de la somme liée à 3 segments $1u - 36 - 27, 1u - 36, 1u$ de valeur 198.</p>	<p>Production du schéma</p>
	
<p>La somme est égale à $1u - 36 - 27 + 1u - 36 + 1u = 198$ $3u = 198 + 27 + 36 + 36 = 297$ $u = 297 : 3 = 99$</p>	<p>Interprétation du schéma</p>

6. 6^{ème} énoncé-schéma fondamental

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

1^{er} cas :

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

$$B = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

Trouver A, B et C.

2^{ème} cas :

$$A = \frac{m}{n} C ;$$

$$B = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Problèmes à trois branches : **Source**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Les deux relations ont la même donnée comme point de départ.

Trouver A, B et C.

3^{ème} cas :

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

$$A = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Problèmes à trois branches : **Puits**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée.

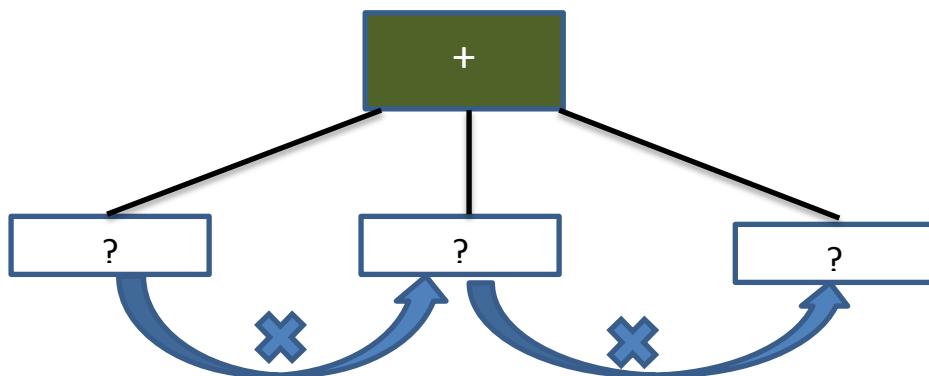
Trouver A, B et C.

Les problèmes liés à notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental sont des problèmes de partages inégaux dont les relations entre les grandeurs deux à deux sont uniquement multiplicatives.

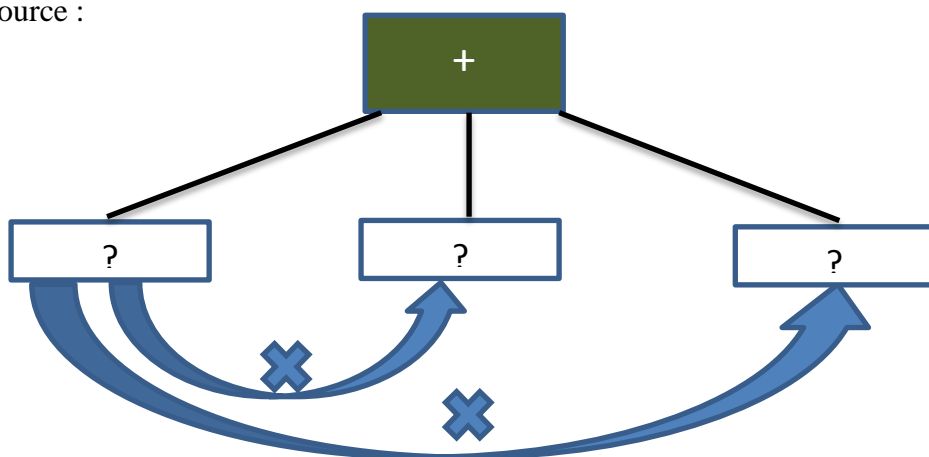
- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- C est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre (A et B), (A et C) et (A et B et C) sont connues.

En se référant au tableau B3 (p. 50), un problème relatif à notre 6^{ème} énoncé fondamental se schématise de la façon suivante :

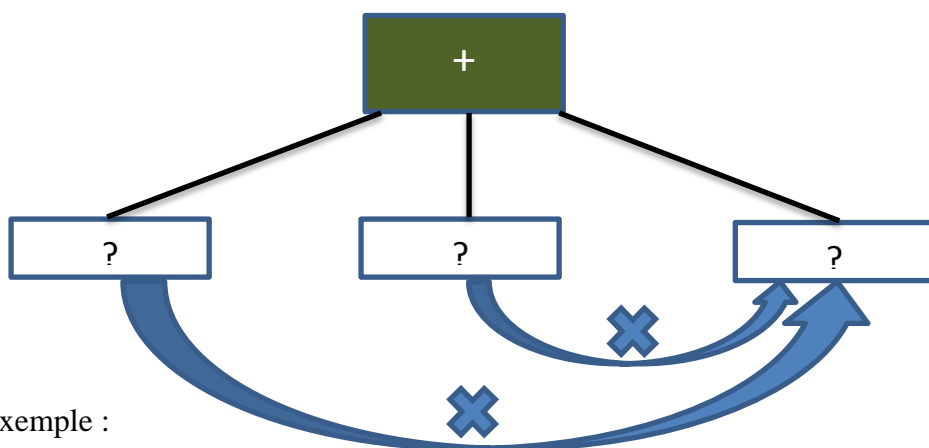
Composition :



Source :



Puits :



Exemple :

« Le nombre des billes d'Ali est trois fois plus grand que celui d'Atef, et le nombre de billes de ce dernier est deux fois plus grand que celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien chaque garçon possède-t-il de billes ? »

C'est un problème de type Composition à trois branches (Bednarz & Janvier, 1994).

Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

Le premier schéma (des trois derniers schémas) illustre la structure générale de ce problème (nombre et nature de relations entre les données et le type d'enchaînement).

Ce type de problème mène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = 2z \\ x + y + z = 270 \end{cases}$$

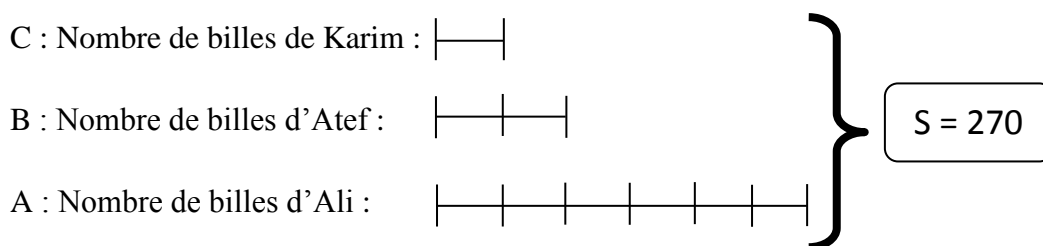
C'est aussi un problème qui favorise le passage à un raisonnement algébrique. Ce problème implique trois relations entre les grandeurs proposées, et c'est à travers ces trois relations qu'on va essayer d'identifier les valeurs de la variable associée au 6^{ème} énoncé-schéma fondamental.

- **Valeurs des variables associées au 6^{ème} énoncé-schéma «fondamental» :**

Désignons par $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Composition, source et Puits) les variables qui vont dépendre des valeurs des deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$.

Plaçons-nous dans le où $n = q = 1$: à chaque fois que nous attribuons à m et p des valeurs de plus en plus grandes, la production du schéma correspondant au problème posé devient plus laborieuse.

Reprenons l'exemple ci-dessus. Le schéma correspondant est le suivant :



Si $m = 3$ et $p = 4$, le schéma correspondant est le suivant :



Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

Nous remarquons, à ce niveau, les limites de la schématisation. Pour des valeurs très grandes de m et p , le schéma ne peut pas être réalisable sur une simple feuille d'essais.

Une telle représentation graphique segmentaire n'est alors efficace que pour des valeurs « petites » de m et p .

Les deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ peuvent être deux entiers, deux fractions unitaires ou deux fractions non unitaires. Commençons par identifier les valeurs de la variable $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}^m$ (Composition) et notons que les mêmes valeurs de cette variable vont se réitérer pour les variables $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}^m$ (Source) et $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}^m$ (PUITS).

Considérons les types de relations possibles entre A et B :

- $R_1(A,B) : A = k.B$;
- $R_2(A,B) : A$ est k fois plus grand que B. (le double, le triple,...) ;
- $R_3(A,B) : A = \frac{1}{k} B$;
- $R_4(A,B) : A$ est k fois moins grand que B. (la moitié, le tiers,...) ;
- $R_5(A,B) : A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire).

Considérons aussi les types de relations possibles entre B et C (qui sont d'ailleurs les mêmes) :

- $R_1(B,C) : B = l.C$;
- $R_2(B,C) : B$ est l fois plus grand que C. (le double, le triple,...) ;
- $R_3(B,C) : B = \frac{1}{l} C$;
- $R_4(B,C) : B$ est l fois moins grand que C. (la moitié, le tiers,...) ;
- $R_5(B,C) : B = \frac{p}{q} C$. ($\frac{p}{q}$ fraction non unitaire).

Si nous considérons toutes les combinaisons possibles d'un énoncé d'un problème de type Composition nous distinguons vingt-cinq valeurs possibles de la variable $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}^m$ (Composition). Nous donnons ci-après quelques exemples de problèmes selon les types de relations (« ...fois plus... », « ...fois moins... », etc.) ou selon les structures de ces problèmes (Composition, Source et Puits)

➤ Exemples de problèmes relatifs à trois valeurs de la variable

$V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Composition) :

R₄(A,B) et R₄(B,C) : « Le nombre des billes d’Atef est 5 fois moins grand que celui d’Ali, et le nombre de billes de Karim est 3 fois moins grand que celui d’Ali. Sachant que le nombre total des billes est 380, combien chaque garçon possède-t-il de billes? »

R₂(A,B) et R₂(B,C) : « Le nombre des billes d’Ali est 5 fois plus grand que celui d’Atef, et le nombre de billes de ce dernier est 3 fois plus grand que celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 380, combien chaque garçon possède-t-il de billes ? »

R₂(A,B) et R₄(B,C) : « Le nombre des billes d’Ali est 5 fois plus grand que celui d’Atef, et le nombre de billes Karim est 3 fois moins grand que celui d’Ali. Sachant que le nombre total des billes est 380, combien chaque garçon possède-t-il de billes? »

➤ Exemples de problèmes relatifs aux variables $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Composition),

$V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Source) et $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Puits)

R₂(A,B) et R₂(B,C) (Composition) : « Le nombre des billes d’Ali est 5 fois plus grand que celui d’Atef, et le nombre de billes de ce dernier est 3 fois plus grand que celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 380, combien chaque garçon possède-t-il de billes ? »

R₂(A,C) et R₂(B,C) (Source) : « Le nombre des billes d’Ali est 6 fois plus grand que celui de Karim et le nombre de billes d’Atef est 3 fois plus grand que celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 380, combien chaque garçon possède-t-il de billes ? »

R₂(A,B) et R₂(A,C) (Puits) : « Le nombre des billes d’Ali est 2 fois plus grand que celui d’Atef et 3 fois plus grand que celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 360, combien chaque garçon possède-t-il de billes? »

Considérons à présent le problème suivant :

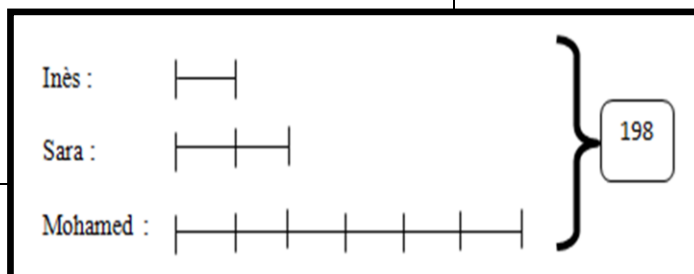
Variable associée aux énoncés-schémas fondamentaux et connaissances mise en jeu

« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed reçoit 3 fois plus de billes que Sara, et Sara reçoit 2 fois plus de billes qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? » (problème de type Composition : $R_2(A,B)$ et $R_2(A,C)$).

Quelles sont les connaissances nécessaires que ce soit pour produire le schéma représentatif de ce problème ou pour l'interpréter?

Ces connaissances sont résumées par le tableau suivant :

<p>Nombre de billes de Mohammed = nombre de billes de Sara $\times 3$; Nombre de billes de Sara = nombre de billes d'Inès $\times 2$;</p> <p>L'unité graphique : « la plus petite grandeur » ; u : nombre de billes d'Inès ;</p> <p>$1u$ = Nombre de billes d'Inès ; $1u \times 2$ = Nombre de billes de Sara avec un traitement de type « Report » dans le registre graphique ; Changement d'unité : $1u \times 2$ devient une « nouvelle unité » $1U$ à considérer ; $1U \times 3$ soit $(1u \times 2) \times 3$ = Nombre de billes de Mohammed avec un traitement de type « Report » dans le registre graphique ;</p> <p>Traitement de type « Report » lié à trois segments ; Légende du report liée à 3 segments correspondant à $1u$, $1u \times 2$, $(1u \times 2) \times 3$ de valeur 198.</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>$1u$ utilisée comme unité de compte, nous reportons cette unité 2 fois pour obtenir la nouvelle unité $1U = 2u$ puis nous reportons cette nouvelle unité 3 fois : $2u \times 3$ – la composition de relations de comparaison multiplicative étant prise en charge par le schéma produit (via le changement d'unité $1U = 1u \times 2$) ;</p> <p>La somme est donc égale à $1u + 2u + (2u \times 3) = 9u = 198$; $u = 198 : 9 = 22 =$ nombre de billes d'Inès.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>



Conclusion du chapitre B

Les connaissances possiblement mises en jeu pour résoudre des problèmes en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux, via l’outil de la schématisation, dépendent des valeurs des variables associées à ces énoncés (données numériques), mais aussi des structures de ces problèmes (qui sont en lien avec ces énoncés) au regard des travaux de Bednarz & Janvier (1994).

L’étude approfondie que nous venons de conduire a permis d’élucider la nature des connaissances et savoirs possiblement en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire, notamment celles en lien avec :

- des changements d’unités (*unités relatives*) – sous-tendus par des actions dans le registre graphique (de type « Report » ou « Ajout ») permettant de produire des schémas segmentaires ;
- des changements d’unités de référence (*unités relatives*) – sous-tendus par des doubles désignations permettant d’interpréter des schémas segmentaires.

Ces changements d’unités – liés à des conversions du registre de la langue naturelle au registre graphique et à des traitements dans le registre graphique qui interviennent dans la production et l’interprétation de schémas permettent d’une part une prise en charge de la complexité de certains problèmes arithmétiques tels que caractérisés par les structures de Bednarz & Janvier (1994). Ainsi s’agissant des problèmes faisant intervenir des compositions de relations de comparaison multiplicative (entière ou fractionnaire unitaire) ou additive, nous avons montré comment des actions de type « report/ajout » liées à des *unités relatives* permettaient d’abaisser la complexité des procédures en jeu dans la résolution de tels problèmes arithmétiques. De tels changements d’unités peuvent être à l’œuvre dans les énoncés-schémas fondamentaux : 5^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux. Toutefois nous avons montré dans le même temps que s’agissant de ces mêmes énoncés-schémas fondamentaux de telles connaissances et jeux sur les *unités relatives* ne réglaient pas totalement le cas de problèmes de type puits au sens de Bednarz & Janvier (1994). Ces problèmes rendent nécessaires la mise en jeu d’autres connaissances

arithmétiques du type « augmentation de la somme associée à l'augmentation d'un terme de la somme ».

D'autres changements d'unités – liés à des opérations de double désignation permise par le registre de représentation graphique – que nous avons qualifiés de changement d'unités de référence (*unités relatives*) – permettent de prendre en charge la complexité de résolution arithmétique de certains problèmes faisant intervenir des relations fractionnaires entre des grandeurs : en lien avec les énoncés-schémas fondamentaux : 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux. Remarquons que les connaissances mises en fonctionnement dans la résolution de tels problèmes peuvent d'ailleurs par là même participer à l'apprentissage de connaissances liées à ces relations multiplicatives – rapports multiplicatifs fractionnaires de grandeurs – en mettant en lien des *unités relatives* en lien avec ces relations.

Le changement d'unité de référence dans un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental du $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue au $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue permet de trouver la grandeur inconnue. Ce changement d'unité de référence peut se faire en prise d'appui sur le schéma via ce que Duval (2017) appelle une double *désignation fonctionnelle* dans le registre graphique. L'*unité graphique* correspond initialement à $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue lors de la production du schéma. Une fois codé, le schéma fait apparaître qu'elle est (re)désignable autrement, comme $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue.

Chapitre C

Etude de manuels scolaires

*Quelques conditions et contraintes sur
l'enseignement de savoirs dans la résolution de
problèmes arithmétiques outillée par les schémas
segmentaires*

I. Introduction

1. But de l'analyse

Dans ce chapitre, nous voulons répondre à la question générale suivante : quelles conditions et contraintes pèsent sur l'enseignement de savoirs dans la résolution de problèmes arithmétiques "outillée" par les schémas segmentaires ?

Pour trouver des premiers éléments de réponse à cette question, nous avons étudié des manuels scolaires visant à enseigner des démarches de résolution de problèmes arithmétiques – outillée par la schématisation segmentaire.

Nous avons choisi dans le cadre de notre recherche d'analyser trois manuels d'arithmétique élémentaire anciens, ainsi que le manuel français intitulé « *Méthode Singapour* », « méthode » actuellement mise sur le devant de la scène au sein de l'institution française (Chambris, 2017) : ces manuels ayant pour particularité d'organiser un processus d'enseignement autour des schémas segmentaires. Ainsi le manuel scolaire tunisien ou de nombreux manuels français contemporains ont été exclus de notre analyse car ne faisant aucunement mention explicite des schémas de type segmentaire.

Nous avons réalisé une analyse de manuels dont nous rendrons compte des principaux résultats suivant le plan suivant :

- nous commencerons par présenter des manuels étudiés tout en pointant quelques aspects caractéristiques de la structuration des contenus autour des énoncés et des schémas trouvés dans ces différents manuels ;
- nous ferons un point synthétique sur la présence et l'absence des énoncés-schémas fondamentaux du chapitre B dans les différents manuels, ceux-ci étant parfois inégalement représentés dans ces manuels ;
- nous pointerons quelques caractéristiques notables des schémas ou des énoncés représentés dans ces différents manuels, concernant des types de schémas ou des formulations de relations (multiplicatives) entre les grandeurs en jeu ;

- enfin, nous exposerons ce qui nous paraît à retenir pour chacun des énoncés-schémas fondamentaux au regard de notre étude : de manière globale sur le choix d'*unité graphique*, de manière plus qualitative, sur des faits observables sur les connaissances en jeu dans les démarches de résolution données à voir et sur l'exposition de ces connaissances, voire l'institutionnalisation des savoirs mathématiques en lien avec ces connaissances.

2. Manuels scolaires retenus et première analyse

Bien que les manuels scolaires soient très répandus comme support à l'enseignement/apprentissage, l'utilisation de la schématisation comme méthode ou stratégie de résolution dans les manuels scolaires actuels, reste inexistante dans de nombreux manuels de l'institution française et même dans le manuel scolaire officiel actuel de l'institution tunisienne (alors même que des pratiques d'enseignement relatives à la schématisation segmentaire semblent exister dans cette institution – nous y reviendrons dans le chapitre D). C'est pour cela notre analyse va se restreindre aux manuels suivants :

Manuels anciens d'arithmétique (élémentaire) :

- Bodard, Bréjaud, Le Calcul quotidien CM2 (1960) ;
- Brandicourt, Penneçot, Problèmes et calculs CM1 (1963) ;
- Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître.

Si les deux premiers manuels présentent beaucoup d'illustrations et d'images et de schémas segmentaires ou en barres, le troisième manuel ne présente que des schémas de type segmentaire.

Manuels récents :

- Guide pédagogique CM1. Méthode de Singapour ;
- Guide pédagogique CM2. Méthode de Singapour.

S'agissant de la méthode Singapour, nous avons privilégié les guides pédagogiques dans notre étude en pensant que ces ouvrages documenteraient davantage les conditions d'étude des schémas segmentaires, même si dans Belguesmi et Coulangue

(à paraître) nous avons pu constater que l'étude d'extraits de manuels destinés aux élèves pouvait apporter d'autres types d'informations que nous évoquerons qu'un seul exemple extrait d'un de ces manuels¹² lors de nos analyses à venir.

3. Présentation des manuels scolaires retenus

Nous avons choisi de présenter brièvement chaque manuel en mettant en avant des éléments qui nous ont semblé caractériser la progressivité liée à l'enseignement d'une démarche de schématisation dans chacun des manuels retenus pour notre analyse.


a. Bodard, Bréjaud, *Le Calcul quotidien CM2 (1960)*

Il s'agit d'un manuel de 1960 [Cours moyen 2^{ème} année (entrée en 6^{ème})] proposé aux enseignants de l'époque de la CM2. La présence de dessins, schémas et diagrammes est très importante comme support à la résolution des différents problèmes proposés. Les auteurs du manuel modélisent différents concepts (prix d'achat, prix de revient,...) par des schémas. Les relations définies entre ces types de grandeurs sont représentées par des schémas segmentaires ou par le modèle « barres ». Une caractéristique de ce manuel est le rôle des schémas pour institutionnaliser des savoirs en lien avec des grandeurs mais aussi comme nous le verrons plus loin avec l'inversion d'une fraction...

Les exemples suivants attestent de ces faits :

PRIX D'ACHAT - PRIX DE REVIENT

L'épicier achète des fruits.
Que paie-t-il ?



L'épicier paie :

le prix d'achat des fruits
+ le transport
+ les emballages
= prix de revient.

Traduisez par un graphique :

P.A+ frais

P. R.

Prix de revient = Prix d'achat + frais.

¹² Voir page 181.

Poids net = poids brut — tare

Représentez par un graphique :
Poids brut

Poids net Tare

PERTE - PRIX DE VENTE

ACHAT

Le colis
75 F

La pièce
0,40 F

Bénéfice
ou Perte?

VENTE : 170 roses seulement

Calculez :
1° Quel est le prix d'achat des roses ?
2° Quel est le prix de vente des roses ?
3° Comparez les 2 prix.

Traduisez par un graphique :

Perte = prix d'achat — prix de vente.

Prix d'achat

Prix de vente Perte

b. Brandicourt, Penneçot, Problèmes et calculs CM1 (1963)

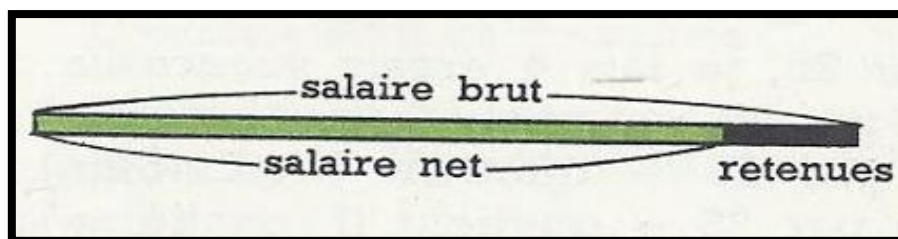
Il s'agit d'un manuel de 1963 (Arithmétique cours moyen 1^{ère} année) proposé aux élèves de l'époque. Comme le manuel précédent, la présence de dessins, schémas et diagrammes est très importante comme support à la résolution des différents problèmes proposés. Les caractéristiques de ce manuel sont identiques à celles du manuel précédent – les exemples suivants attestent notamment de l'étude concomitante de certaines grandeurs en lien avec les schémas segmentaires :

J'ai commandé un téléviseur de 1 255 F :
pour moi qui l'achète, 1 255 F est le **prix d'achat** du téléviseur.
Le fabricant me fait payer, en plus, 5 F pour l'emballage et 12 F pour le transport de l'appareil chez moi ;
je paie réellement le prix d'achat augmenté des **frais** :
 $1\ 255\ F + 5\ F + 12\ F = 1\ 272\ F$

prix d'achat 1 255 5 + 12 frais

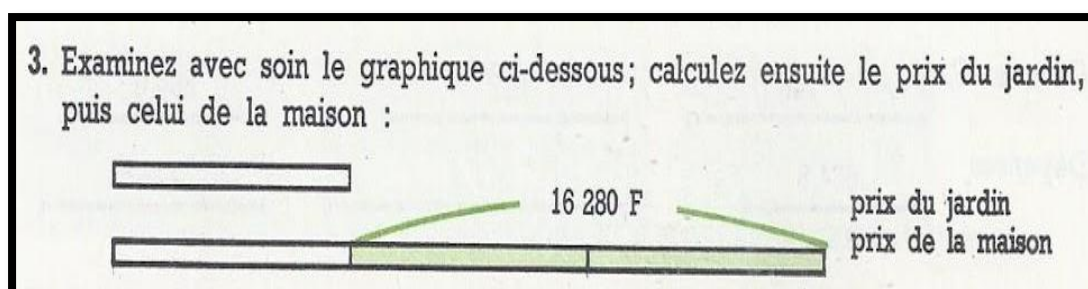
prix de revient

L'appareil me revient à 1 272 F ; 1 272 F est son **prix de revient**.



Une autre caractéristique propre à ce manuel est de proposer des tâches intermédiaires – des progressivités qui dénotent une forme de progressivité envisagée dans l’enseignement de connaissances liées à la production et à l’interprétation de schémas segmentaires :

1. Proposer des schémas qui représentent des problèmes aux élèves et les inviter à les résoudre :



Le problème (à droite) de ce dernier extrait pourrait être formulé de la façon suivante: « Fatma et Inès se partagent une pièce d'étoffe de 28,5 m. Fatma prend 4 fois plus d'étoffe qu'Inès. Trouvez la part de chaque fille ».

Un problème déconnecté en lien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental. À partir de l'énoncé, aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre les données connues, par exemple entre la longueur de la pièce d'étoffe et la part d'Inès. Le schéma fait en sorte qu'un pont direct soit possible entre ces deux grandeurs :

le schéma reconnecte un problème déconnecté.

2. Proposer un schéma et inviter les élèves à rédiger l'énoncé correspondant et résoudre le problème correspondant :

2. Le graphique ci-dessous représente la décomposition du prix d'un tailleur ; rédigez l'énoncé du problème, et donnez sa solution.

3. Proposer un schéma inachevé et inviter les élèves à le compléter, rédiger l'énoncé correspondant et résoudre le problème ainsi élaboré :

2. Complétez le graphique ci-dessous, représentant le prix d'une salle à manger, en divisant convenablement la bande qui représente le prix du buffet. Rédigez l'énoncé — Résolvez le problème.

Ces tâches intermédiaires font apparaître des étapes dans :

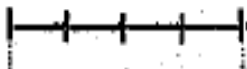
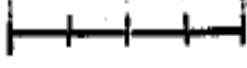
- l'interprétation de schémas donnés représentant des relations entre des grandeurs, avec des conversions envisagées entre registre graphique et registre de la langue naturelle dans un sens un peu inversé (schéma => énoncé de problème ou relation entre deux grandeurs à formuler dans le registre de la langue naturelle) ;
- l'utilisation d'un schéma donné pour résoudre un problème représenté par ce schéma.

c. Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître

Il s'agit d'un manuel de 1932 proposé aux enseignants de CM2. La représentation de la réalité telle qu'elle est, à travers des dessins, est absente dans ce manuel. Tous les schémas proposés aux enseignants pour représenter des problèmes qui sont en lien avec nos énoncés fondamentaux sont des schémas de type « segmentaire » :


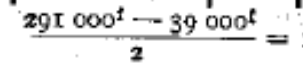
Exemple :

932. — Partager 16 500 francs entre deux personnes de manière que la part de l'une soit les $\frac{4}{7}$ de la part de l'autre. Faire un graphique.

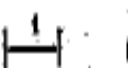

S. — Première part, $\frac{7}{7}$:  } En tout,
Deuxième part, $\frac{4}{7}$:  } $\frac{11}{7}$ valant
16 500 francs.

Ce manuel présente un format un peu différent des deux ouvrages précédents. Il prend la forme d'un recueil de problèmes et de corrections organisés selon différentes catégories (problèmes de partage en deux parties inégales connaissant leur somme et leur différence, problèmes de partage en deux parties inégales connaissant leur somme et leur rapport, etc.) :

381. — En un mois, une ligne d'avions Paris-Londres a distribué des billets de voyageurs pour une somme totale de 291 000 francs. Le prix des billets d'aller et retour a surpassé de 39 000 francs le prix des billets simples. Combien de billets de chaque sorte a-t-on distribués si le billet simple coûte 700 francs et le billet aller et retour, 1 250 francs ?

S. — Prix des billets simples :  } 291 000 francs.
Prix des billets aller et retour :  }
Prix des billets simples : $\frac{291\ 000^f - 39\ 000^f}{2} = 126\ 000$ francs.
Prix des billets aller et retour : $291\ 000^f - 126\ 000^f = 165\ 000$ francs.
Nombre de billets simples : $\frac{126\ 000}{700} = 180$ billets simples.
Nombre de billets aller et retour : $\frac{165\ 000}{1\ 250} = 132$ billets aller et retour.

345. — Un volume relié revient à 22^f,50. La reliure vaut 2 fois le prix du volume broché. Calculer le prix de la reliure et le prix du volume broché.

S. — Prix du volume broché :  } 22^f,50 22^f,50 : 3 = 7^f,50.
Prix de la reliure :  } 7^f,50 × 2 = 15 francs.

d. Guide pédagogique CM1. Méthode de Singapour

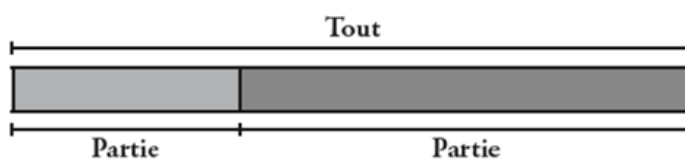
La méthode de Singapour déclare enseigner une démarche par « modélisation » — associée à la production d'un schéma lié à des problèmes : elle invite en effet les élèves à représenter de façon schématique un problème mathématique ou une partie

de ce problème. Nous identifions dans ce manuel un discours qui se focalise sur des concepts en lien avec deux grandes classes de relations entre grandeurs associées aux champs additifs et multiplicatifs : parties-tout et comparaison, contrairement à deux des manuels arithmétiques anciens qui présentent un discours en termes de grandeurs (prix d'achat, prix de revient,...). La modélisation de ces concepts est présente dans ce manuel et les exemples suivants en attestent :

- **Exemple 1 :**

Addition et soustraction

Un tout divisé en 2 parties



Dans le concept des « parties dans le tout », il y a une relation de quantité entre les 3 quantités représentées : le tout et les deux parts.

Pour trouver le tout lorsque l'on connaît les deux parties, les élèves additionnent :

$$\text{Partie} + \text{Partie} = \text{Tout}$$

Lorsque seuls le tout et une partie sont connus, pour trouver l'autre partie, les élèves soustraient :

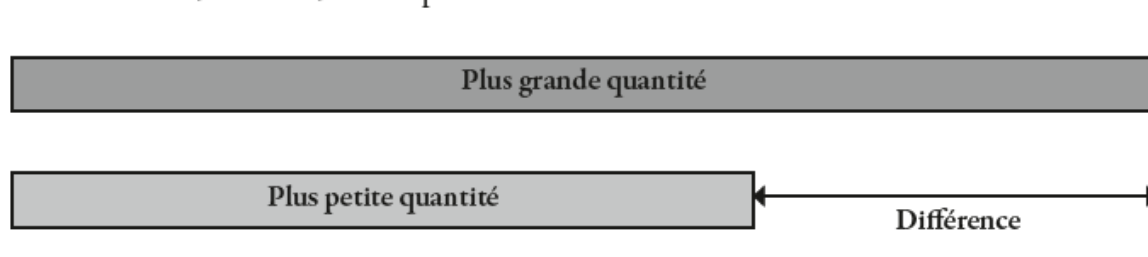
$$\text{Tout} - \text{Partie} = \text{Partie}$$

- **Exemple 2 :**

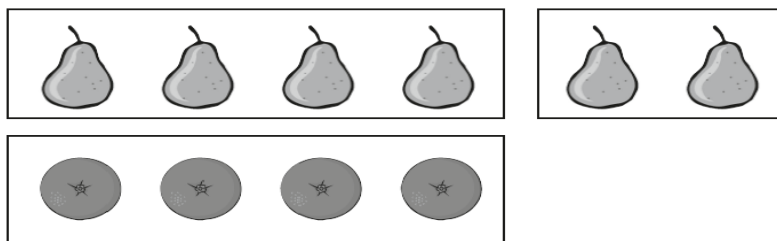
La modélisation de la comparaison

Il y a 2 poires de plus que d'oranges. S'il y a 6 poires, combien y a-t-il d'oranges ?

On obtient la modélisation de la comparaison :



Parfois la modélisation est imagée et représente la réalité telle qu'elle est :

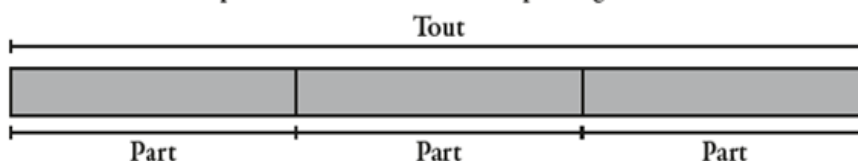


• **Exemple 3 :**

Multiplication et Division

Les concepts de multiplication et division impliquent un tout divisé en plusieurs parts égales.

Par exemple, le modèle suivant présente un tout divisé en 3 parts égales.



Il y a une relation de quantité entre les 3 quantités représentées : le tout, la valeur d'une part et le nombre total de parts.

Ces types de représentation induisent chez les élèves un apprentissage systématique de la schématisation comme outil de résolution des problèmes arithmétiques.

e. Guide pédagogique CM2. Méthode de Singapour

Tous les concepts vus et modélisés lors de la CM1 sont des acquis pour les élèves de la CM2. Ce manuel propose deux autres modélisations :

- le modèle de comparaison pour les additions et les soustractions ;
- le modèle de comparaison pour les multiplications et les divisions.

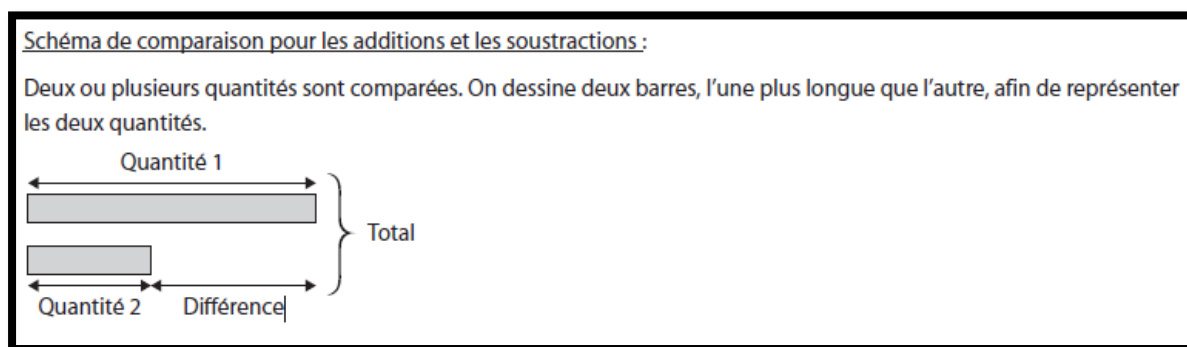
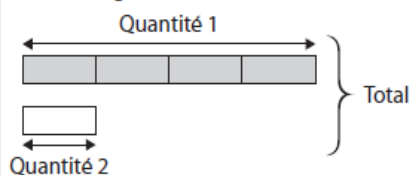


Schéma de comparaison pour les multiplications et les divisions.

A l'aide de ce schéma, on compare deux ou plusieurs quantités. On nous indique combien une quantité représente de plus qu'une autre. La plus petite est représentée par une part. On peut dessiner les deux quantités sous la forme de parts égales. On veut en général trouver la valeur d'une unité.

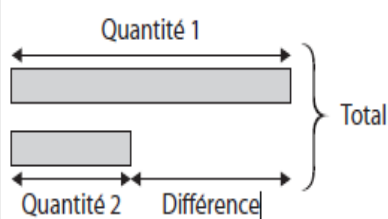


Après l'acquisition de ces concepts modélisés, Il y a une sorte de progressivité vers des problèmes déconnectés en termes de schématisation.

Les auteurs commencent par proposer le schéma général de comparaison pour les additions et les soustractions :

Schéma de comparaison pour les additions et les soustractions :

Deux ou plusieurs quantités sont comparées. On dessine deux barres, l'une plus longue que l'autre, afin de représenter les deux quantités.



Puis ils proposent des exemples de problèmes résolus en faisant varier la grandeur inconnue recherchée (la plus grande, la plus petite, etc.) :

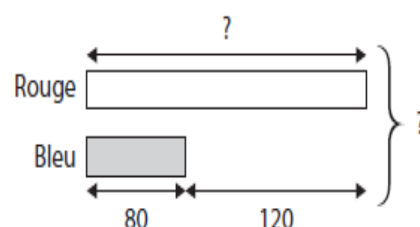
1^{er} énoncé :

Si l'énoncé nous donne la valeur d'une quantité et la différence entre les deux quantités, on peut voir d'après le schéma qu'il faut additionner pour trouver la valeur de l'autre quantité. Par exemple :

Un sac contient des billes bleues et des billes rouges. Il y a 80 billes bleues. Il y a 120 billes rouges de plus que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes ?

Nombre total de billes rouges : $80 + 120 = 200$

Nombre total de billes : $200 + 80 = 280$

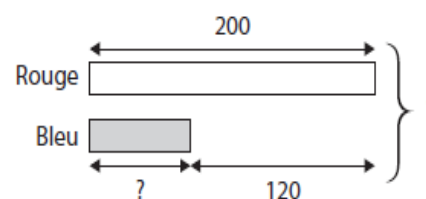


2^{ème} énoncé :

Si l'énoncé nous donne les valeurs des deux quantités, on soustrait pour trouver la différence. Ou, si l'énoncé donne la valeur du nombre le plus grand et la différence, on peut voir d'après le schéma qu'on soustrait la différence au total pour trouver la valeur de la plus petite quantité. Par exemple :
Un sac contient des billes rouges et des billes bleues. Il y a 200 billes rouges. Il y a 120 billes rouges de plus que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes au total ?

Nombre de billes bleues = $200 - 120 = 80$

Nombre de billes au total = $200 + 80 = 280$

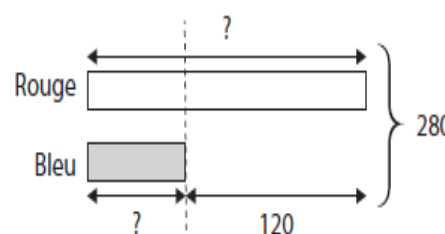


3^{ème} énoncé :

Si l'énoncé donne le total et la plus grande quantité, on soustrait cette quantité au total pour trouver la valeur de la plus petite quantité puis on divise le résultat par 2. Par exemple :

Un sac contient 280 billes bleues et rouges. Il y a 120 billes rouges de plus que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes bleues ?

Nombre de billes bleues = $(280 - 120) \div 2 = 80$

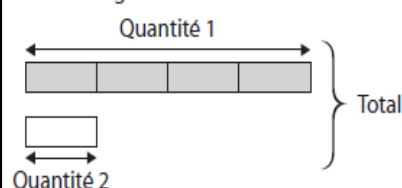


Notons que ces trois énoncés n'appartiennent pas de notre propre point de vue à la même catégorie d'énoncés-schémas fondamentaux, les deux premiers étant de natures connectées au sens de Bednarz & Janvier (1994) et le troisième déconnecté, en lien avec notre 4^e énoncé-schéma fondamental.

Les auteurs procèdent de la même façon pour les relations de comparaison liées au champ multiplicatif – ils commencent par proposer le schéma général de comparaison pour les multiplications et les divisions :

Schéma de comparaison pour les multiplications et les divisions.

À l'aide de ce schéma, on compare deux ou plusieurs quantités. On nous indique combien une quantité représente de plus qu'une autre. La plus petite est représentée par une part. On peut dessiner les deux quantités sous la forme de parts égales. On veut en général trouver la valeur d'une unité.



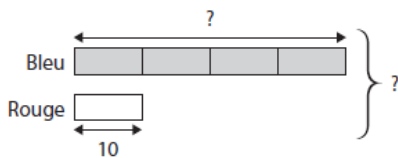
Puis ils proposent des exemples de problèmes résolus en faisant varier la grandeur inconnue recherchée (la plus grande, la plus petite, la somme et la différence des deux grandeurs) :

1^{er} énoncé

Si l'énoncé nous donne la plus petite quantité (une part), on peut alors trouver la valeur de la plus grande, la différence entre les deux ou le total en multipliant. Par exemple :

Un bocal contient 4 fois plus de billes bleues que de billes rouges. Il y a 10 billes rouges. Combien y a-t-il de billes bleues ? Combien de billes bleues y a-t-il de plus que de billes rouges ? Combien y a-t-il de billes au total ?

1 part représente le nombre de billes rouges. Il y a 4 parts de billes bleues c'est-à-dire 3 de plus que les billes rouges et 5 parts de billes au total. On sait qu'une part = 10, on peut donc trouver les valeurs de 3 parts, 4 parts et 5 parts. Il y a 40 billes bleues, 30 billes bleues de plus que de billes rouges, et 50 billes au total.

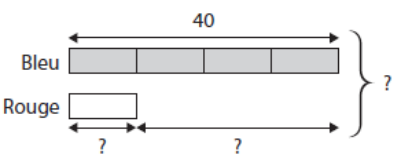


1 part = 10
 3 parts = $10 \times 3 = 30$
 4 parts = $10 \times 4 = 40$
 5 parts = $10 \times 5 = 50$

2^{ème} énoncé :

Si l'énoncé nous donne la plus grande quantité, on peut voir d'après le schéma qu'on divise pour trouver la plus petite (une part). Une fois qu'on a trouvé la valeur d'une part, on peut répondre à d'autres questions. Par exemple :

Un bocal contient 4 fois plus de billes bleues que de billes rouges. Il y a 40 billes bleues. Une part représente la quantité de billes rouges. Une fois qu'on connaît la valeur d'une part (la quantité de billes rouges), on peut alors trouver la différence entre les deux quantités, et le nombre total de billes.



4 parts = 40
 1 part = $40 \div 4 = 10$
 3 parts = $10 \times 3 = 30$
 5 parts = $10 \times 5 = 50$

Cette présentation brève de manuels ainsi terminée nous ouvre la porte à une analyse de manuels plus approfondie sur certains points retenus comme particulièrement en lien avec la problématique de notre thèse.

II. Deuxième analyse des manuels scolaires retenus

Dans cette analyse, nous commencerons par pointer les absences/présences d'énoncés-schémas fondamentaux (identifiés dans le chapitre B) dans différents manuels scolaires retenus.

Nous essaierons par la suite de délimiter les connaissances et savoirs enseignés au sein de ces manuels – en lien avec la production et l'interprétation des schémas segmentaires utilisés pour résoudre différents problèmes.

1. Absences/présences d'énoncés-schémas fondamentaux dans différents manuels scolaires

Le tableau suivant résume les absences/présences de nos énoncés-schémas fondamentaux dans les manuels scolaires retenus pour notre analyse (présence concomitante à une schématisation) :

	1 ^{er} énoncé	2 ^{ème} énoncé	3 ^{ème} énoncé	4 ^{ème} énoncé	5 ^{ème} énoncé	6 ^{ème} énoncé	Total
Bodard, Bréjaud, Le Calcul quotidien CM2 (1960)	Présent (2)	Absent	Absent	Présent (1)	Présent (1)	Présent (1)	5
Brandicourt, Penneçot, Problèmes et calculs CM1 (1963)	Absent	Présent (2)	Présent (5)	Présent (7)	Absent	Absent	14
Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître	Absent	Présent (2)	Présent (3)	Présent (4)	Absent	Présent (6)	15
Guide pédagogique CM1. Méthode de Singapour	Présent (2)	Présent (1)	Absent	Présent (1)	Absent	Présent (1)	5

Guide pédagogique CM2. Méthode de Singapour	Présent (6)	Présent (1)	Présent (6)	Présent (2)	Présent (2)	Présent (2)	19
Total	10	6	14	15	3	10	58

Tableau C1 : illustration des présences/absences des énoncés-schémas fondamentaux dans les manuels analysés.

Les nombres entre parenthèses correspondent aux nombres de problèmes traités en lien avec les énoncés-schémas fondamentaux concernés.

Le tableau ci-dessus montre que même si les problèmes qui sont en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental (problèmes où nous identifions un rapport et une somme entre deux grandeurs inconnues) sont absents dans deux manuels, ils sont les plus traités (avec le 4^{ème} énoncé schéma-fondamental) par rapport aux autres énoncés-schémas fondamentaux. Les problèmes en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental (problèmes où nous identifions une composition de deux relations additives de comparaison d'états) sont absents dans trois manuels scolaires retenus pour l'analyse et par conséquent sont les moins traités par rapport aux autres énoncés-schémas fondamentaux. La composition de relations de comparaison additives ne semble pas constituer un enjeu d'enseignement dans ces trois manuels, cependant la composition de relations multiplicatives est quant à elle plus systématiquement traitée à part dans tous les manuels [excepté dans le manuel Brandicourt, Penneçot, Problèmes et calculs CM1 (1963)]. Le « Guide pédagogique CM2, Méthode de Singapour », en plus de traiter un plus grand nombre de problèmes arithmétiques à résoudre par la schématisation segmentaire en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux, est le seul manuel où l'on identifie tous les problèmes qui sont en lien avec ces énoncés.

2. Quelques premières caractéristiques des énoncés-schémas au sein des manuels




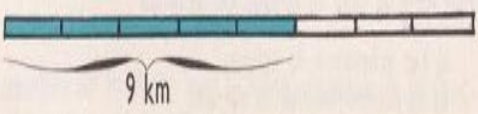
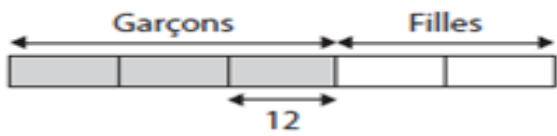
Après avoir repéré les absences/présences des énoncés-schémas fondamentaux au sein de chaque manuel étudié, nous avons identifié des premières caractéristiques qui

nous ont paru à retenir, soit des types de schémas segmentaires utilisés ou des types d'énoncés de problèmes retenus (et notamment des formulations des relations multiplicatives entre grandeurs) dont nous faisons état ci-dessous car comme à retenir pour la suite de notre propos.

a. Types de schémas

Si tous ces manuels proposent des schémas de type segmentaire (ou de type « barres »), nous avons constaté des différences dans l'organisation des unités signifiantes du registre graphique, selon que celles-ci représentent de manière « séparée » ou de manière « superposée » les grandeurs en jeu dans les problèmes.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous quelques exemples de schémas séparés – superposés que nous commentons plus avant ci-après :

Schéma séparé	<p>352. — Partager une somme de 140 francs en 3 parts telles que la première soit le double de la deuxième et celle-ci le double de la troisième.</p> <p>R. — Troisième part :  20 francs. Deuxième part :  40 francs. Première part :  80 francs.</p> <p style="text-align: right;">} 140 francs</p>
Schéma superposé	<p>Jean va à la gare à bicyclette. $\frac{5}{8}$ du parcours Après avoir parcouru 9 km, il est aux $\frac{5}{8}$ du parcours. A quelle distance de la gare était-il au départ ?</p> <p style="text-align: center;"><u>Faisons un graphique :</u></p> 
	<p>— Les $\frac{3}{5}$ des enfants d'une colonie de vacances sont des garçons. Il y a 12 garçons de plus que de filles. Combien de filles y a-t-il dans la colonie ?</p> 

Les schémas superposés sont souvent présents quand il y a une fraction d'une grandeur à représenter liée à l'énoncé – ce que nous avons qualifié ci-avant d'*unité du problème* – par exemple la fraction de la distance parcourue par Jean. Ceci peut faciliter l'interprétation de l'*unité graphique* en lien avec « fraction de » et sa double désignation fonctionnelle au sens de Duval (2017) (l'*unité graphique* à voir comme un huitième du parcours et comme un cinquième de 9km), mais dans le même temps cette représentation avec un schéma de type « superposé » peut rendre cette double désignation plus transparente car celle-ci demeure en quelque sorte plus implicite dans le registre graphique que sur un schéma de type séparé qui fait apparaître plus clairement les unités signifiantes en jeu – en lien avec la notion de fraction d'une grandeur ($\frac{1}{8}$ d'une grandeur inconnue à redésigner comme un $\frac{1}{5}$ d'une grandeur de valeur donnée).

Dans le schéma lié au nombre d'enfants, cette superposition liée à la fraction d'un nombre d'enfants en colonie de vacances tend même à rendre opaque ce sur quoi repose le traitement graphique ayant permis de désigner « doublement » l'*unité graphique* correspondant à un cinquième du nombre total d'enfants et à la différence entre le nombre de garçons et de filles dont la valeur numérique est donnée. C'est pour ce type de raisons, que nous privilégierons par la suite (dans le chapitre D) la production de schémas séparés.

Les types de schémas les plus utilisés dans l'ensemble des manuels sont d'ailleurs des schémas de type « séparé ». Un schéma de type superposé n'est utilisé que dans des problèmes contenant deux grandeurs dont l'une est une partie intégrante de l'autre.

b. Types de relations entre les grandeurs dans les énoncés de problèmes

Nous avons relevé une deuxième caractéristique liée aux types de relations décrites dans les énoncés de problèmes donnés. Cette caractéristique nous a paru intéressante au regard de ses potentiels effets sur des choix d'*unités graphiques* à effectuer pour produire des schémas segmentaires. Des différences notables ont été constatées s'agissant plus précisément des relations multiplicatives entre les grandeurs.

Les absences/présences de formulations possibles des relations multiplicatives ne concerneront que les 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux.

Le tableau suivant résume les absences/présences de ces formulations dans les manuels retenus pour l'analyse :

	<p align="center">Présence/Absence des formulations des relations multiplicatives entre deux grandeurs dans des problèmes en liens avec les 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux</p>
<p align="center">1^{er} énoncé-schéma fondamental</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Présence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - $A = \frac{m}{n} B$; $\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire. • Absence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - $A = n \times B$; - « ... n fois plus (le double, le triple)... » ; - « ... n fois moins (la moitié, le tiers)... » ; - $A = \frac{1}{n} \times B$.
<p align="center">2^{ème} énoncé-schéma fondamental</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Présence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - « ... n fois plus (le double, le triple)... » ; - $A = n \times B$. • Absence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - « ... n fois moins... » ; - $A = \frac{1}{n} \times B$; - $A = \frac{m}{n} B$; $\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire.
<p align="center">3^{ème} énoncé-schéma fondamental</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Présence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - « ... n fois plus (le double)... » ; - $A = n \times B$; - $A = \frac{m}{n} B$, $\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire ; • Absence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - $A = \frac{1}{n} \times B$; - « ... n fois moins... ».

<p>6^{ème} énoncé-schéma fondamental</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Présence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - « ... n fois plus (le double)... » ; - « ... n fois moins (la moitié)... » ; - $A = \frac{m}{n} B$; $\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire ; • Absence des relations de la forme : <ul style="list-style-type: none"> - $A = n \times B$; - $A = \frac{1}{n} \times B$.
---	--

Tableau C2 : présences/absences des formulations des relations multiplicatives dans les problèmes en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux (1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème})

Les relations de type « $A = \frac{1}{n} \times B$ » sont absentes dans tous les énoncés du tableau C1 et les relations de type « A est n fois moins... que B » ne sont identifiées que dans des énoncés en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental, et finalement très rarement si nous regardons l'ensemble des problèmes mis à l'étude. Ce constat dans notre étude nous est intéressant à relever car il nous renseigne sur le fait que s'agissant des relations multiplicatives, deux systèmes d'attentes peu mis en relation peuvent coexister : l'un lié aux relations multiplicatives entières liées à des actions de report congruentes aux relations exprimées sous la forme « n fois plus » et d'autres liées à des fractions non unitaires de grandeurs de « $\frac{m}{n}$ de » ($A = \frac{m}{n} B$), correspondant par exemple à des actions de report d'*unités graphiques* correspondant à « $\frac{1}{m}$ de A » ou « $\frac{1}{n}$ de B ». Ces systèmes d'attentes dans la production/interprétations de schémas ne nous semblent potentiellement que faiblement mis en lien – du fait notamment de la quasi-absence de ces relations multiplicatives « n fois moins » ou « $\frac{1}{n}$ de ».

Ce constat n'est pas sans lien avec les hypothèses que nous formulerons plus tard en lien avec la notion de contrat didactique et des pistes à ce sujet que nous explorerons dans la partie expérimentale de la thèse.

3. Etude de connaissances mathématiques enseignées sur la résolution des énoncés-schémas fondamentaux dans les manuels

Ci- après, nous conduisons une analyse des connaissances mathématiques exposées et des savoirs mathématiques institutionnalisés en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire dans les différents manuels.

À cet effet, nous avons choisi de revenir sur chacun des énoncés-schémas fondamentaux identifiés préalablement (dans le chapitre B de la thèse) et de mettre en avant des points liés à chacun de ces couples « énoncés-schémas » au regard :

- des choix d'*unités graphiques* retenus comme un élément ayant une incidence potentielle forte sur les connaissances mises en fonctionnement dans la résolution de ces problèmes outillée par la schématisation segmentaire ;
- des faits observables liés aux connaissances mathématiques exposées et aux savoirs institutionnalisés en lien avec la résolution de ces problèmes – pour partie relatifs aux systèmes d'*unités relatives* que ces connaissances et savoirs mettent potentiellement en fonctionnement.

a. 1^{er} énoncé-schéma fondamental

Rappelons que notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B (m, n dans \mathbb{N}^*).



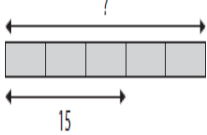
- A est une grandeur connue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- La relation entre A et B est connue et multiplicative.

i. Choix de l'*unité graphique*

Dans tous les manuels scolaires retenus, seule la relation de type $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire) est présente dans les problèmes qui sont en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental. Les absences des quatre valeurs $V_{1,1}$, $V_{1,2}$, $V_{2,1}$ et $V_{2,2}$ (voir chapitre B, pp. 114-116) de la variable $V_{m,n}$ sont attendues. Ce sont des cas de figures qui sont plutôt faciles à résoudre comme nous l'avons mentionné lors de l'identification de ces valeurs. Sur ce, le choix de l'*unité graphique* pour produire

différents schémas correspondent alors à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue ou $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue. Le tableau ci-après illustre des exemples qui montrent que le choix de l'*unité graphique* correspond dans la plupart des cas à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue.

Le tableau suivant illustre des exemples du choix de l'*unité graphique* en lien avec ce couple énoncé-schéma fondamental :

Problèmes et schémas	Choix de l' <i>unité graphique</i>
<p>2 parts = 18 € 1 part = 18 € ÷ 2 = 9 € 3 parts = 9 € × 3 = 27 € Les économies de Théodore = 27 €</p> <p>- Les $\frac{2}{3}$ des économies de Théodore représentent 18 €. À combien se montent les économies de Théodore ?</p> 	<p>L'<i>unité graphique</i> correspond au rectangle qui représente le $\frac{1}{2}$ des 18 € (une part = 18 € : 2)</p> <p>$\frac{1}{m}$ de la grandeur connue</p>
<p>« Combien y a-t-il de disques au total ? Comment l'illustrer à l'aide d'un schéma ? »</p>  <p>$\frac{3}{5}$ du total = 9 $\frac{1}{5}$ du total = 9 ÷ 3 = 3 $\frac{5}{5}$ du total = 3 × 5 = 15</p>	<p>L'<i>unité graphique</i> correspond au rectangle qui représente le $\frac{1}{3}$ des 9 disques (une part = 9 : 3)</p> <p>$\frac{1}{m}$ de la grandeur connue</p>
<p>• Les élèves ont utilisé le modèle en barre représentant le tout et les parties afin de trouver un tout à partir d'une fraction. Par exemple, si on sait que $\frac{3}{5}$ d'un nombre inconnu est 15, on peut trouver ce nombre à l'aide du modèle. On peut dessiner une barre divisée en cinquièmes, et indiquer que 3 parts correspondent à 15. En observant le modèle, on peut trouver $\frac{1}{5}$, ou 1 part, en divisant par 3. On multiplie ensuite la valeur d'1 part par 5 pour trouver le total.</p>  <p>$\frac{3}{5} = 3 \text{ parts} = 15$ $\frac{1}{5} = 1 \text{ part} = 15 \div 3 = 5$ $\frac{5}{5} = 5 \text{ parts} = 5 \times 5 = 25$</p>	<p>L'<i>unité graphique</i> correspond au rectangle qui représente le $\frac{1}{3}$ de 15 (une part = 15 : 3)</p> <p>$\frac{1}{m}$ de la grandeur connue</p>

<p>Jean va à la gare à bicyclette. Après avoir parcouru 9 km, il est aux $\frac{5}{8}$ du parcours. A quelle distance de la gare était-il au départ ?</p> <p>Solution : Le parcours comprend 8 parties égales. Une partie ou un huitième vaut $\frac{9}{5}$ km. Le parcours entier mesure : $\frac{9 \times 8}{5}$ km = 14,4 km.</p>	<p>L'unité graphique correspond au segment qui représente le $\frac{1}{8}$ du parcours total (une partie ou un huitième vaut $\frac{9}{5}$ km)</p> <p>$\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue</p>
--	---


Tableau C3 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 1^{er} énoncé-schéma fondamental

Remarquons, que même si l'unité graphique correspond à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue ou $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue, aucune correspondance n'a été mentionnée au niveau de ce changement d'unité de référence, nous revenons sur ce point ci-après en conduisant l'étude détaillée de deux extraits de manuels.

ii. Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés

Le premier extrait de manuel est tiré d'un manuel d'arithmétique de 1960¹³ adressé à des élèves de CM2.

CALCUL D'UN NOMBRE DONT ON CONNAIT UNE FRACTION



Jean va à la gare à bicyclette. Après avoir parcouru 9 km, il est aux $\frac{5}{8}$ du parcours. A quelle distance de la gare était-il au départ ?

Solution :
Le parcours comprend 8 parties égales.
Une partie ou un huitième vaut $\frac{9}{5}$ km.
Le parcours entier mesure :
 $\frac{9 \times 8}{5}$ km = 14,4 km.

Faisons un graphique :

Pour calculer un nombre dont on connaît une fraction, on divise le nombre connu par le numérateur de la fraction et on multiplie le résultat par le dénominateur. (Pratiquement on multiplie avant de diviser.)

Extrait d'un ancien manuel d'arithmétique de CM2

¹³ Bodard et Bréjaud (1960) : p 102.

Les auteurs du manuel commencent la résolution du problème par la phrase suivante : « *Le parcours comprend 8 parties égales* ». Ceci sous-entend que l'*unité graphique*, d'ailleurs désignée par la suite par « *une partie ou un huitième* », est à associer à la grandeur correspondant à la longueur totale du parcours, à considérer comme l'*unité du problème* – soit $\frac{8}{8}$ de cette longueur. Ceci permet de produire le schéma correspondant à 8 *unités graphiques*. Nous pouvons dès lors associer aux $\frac{5}{8}$ du parcours 5 *unités graphiques* correspondant à une longueur donnée de 9 km d'après l'énoncé – comme c'est indiqué sur le schéma donné dans le manuel. Il s'agit ensuite de trouver la valeur correspondant à une *unité graphique* (une partie ou un huitième).

Nous notons que dans la solution, il n'est pas indiqué comment on détermine que celle-ci vaut $\frac{9}{5}$ km. Le changement d'unité de référence (qui du $u = \frac{1}{8}$ du parcours entier devient $u = \frac{1}{5}$ de la distance parcourue) nécessaire à opérer dans l'interprétation du schéma est passé sous silence comme si celui-ci allait de soi à partir du schéma donné ou que le schéma porte à lui seul cette information sans qu'il soit nécessaire de le commenter plus avant. Le traitement intrinsèque au registre graphique correspondant ne fait pas l'objet d'une formulation liée aux grandeurs et aux systèmes d'unités en jeu. Il devient ensuite possible de trouver la valeur de la longueur totale du parcours en multipliant la valeur obtenue par 8, ce qui dans ce manuel se fait par le produit $\frac{9 \times 8}{5}$ km comme cela était classique à l'époque au regard des techniques de calcul enseignées sur les fractions.

Nous notons également l'encart jaune en bas à droite de la page du manuel cité. Cet encart semble dédié à l'institutionnalisation d'un nouveau savoir : « *pour calculer un nombre dont on connaît une fraction, on divise le nombre connu par le numérateur de cette fraction et on multiplie le résultat par le dénominateur. (Pratiquement, on multiplie avant de diviser).* »

La présence de ce discours peut être questionnée à plusieurs titres :

- d'une part quant à sa possible construction à partir de l'unique solution donnée en prise d'appui sur un schéma de type segmentaire. Un tel savoir n'a pas été à proprement parler, convoqué dans la résolution envisagée – il ne peut être construit que dans un après coup, en rapprochant la dernière étape de la solution (le produit de la longueur donnée par $\frac{8}{5}$) des données du problème (celle-ci représente $\frac{5}{8}$ de la

longueur totale) sans qu'aucunement le schéma et la façon dont on a pu aboutir à ce résultat, ne soient mis en jeu. Nous notons également que dans le discours généralisateur ainsi produit, la référence aux grandeurs disparaît (les auteurs parlant de « *fraction d'un nombre* », appellation qui mériterait à elle-seule d'être interrogée¹⁴).

- d'autre part quant au devenir d'un tel savoir dans le processus d'enseignement ainsi envisagé¹⁵. Ce savoir est-il à envisager comme une connaissance utile future pour la résolution de ce type de problèmes ? Autrement dit, à la condition de reconnaître un problème de ce type, convoquant une grandeur inconnue dont on connaîtrait la valeur correspondant à une fraction donnée de cette grandeur, s'agit-il de multiplier cette valeur par l'inverse de la fraction donnée ? Mais alors, qu'advient-il de la résolution initialement outillée par un schéma de type segmentaire ? Est-elle à considérer comme le savoir en jeu, visé ou bien comme un moyen intermédiaire de construire le savoir exposé et institutionnalisé dans cet encart ?

Il nous sera sans doute difficile dans les analyses de travaux d'élèves de la séquence expérimentale, de répondre à cette deuxième question¹⁶. Toutefois elle nous est apparue intéressante à signaler pour soulever la question d'un projet plus global d'enseignement de savoirs mathématiques lié à ce couple énoncé-schéma qui n'est pas si simple à identifier dans le cas présent.

Nous analysons ci-dessous un extrait tiré du manuel élève « Méthode Singapour CM1 » datant de 2017¹⁷, correspondant au manuel du maître « Guide pédagogique CM1. Méthode de Singapour » :

¹⁴ Le passage d'une fraction d'une grandeur à un produit d'un nombre par une fraction est souvent « transparent »... C'est pourtant une question bien complexe, au demeurant sur laquelle nous ne nous attarderons pas plus ici, mais qui mériterait à elle seule, une recherche plus avancée!

¹⁵ Nous notons que trois problèmes du même type sont donnés par la suite dans ce même manuel – sans qu'il n'y ait de précisions données sur la démarche de résolution à adopter pour les résoudre.

¹⁶ L'absence de schéma dans une production d'élève en réponse à la question ne peut nous renseigner sur le fait que le schéma ait été considéré comme moyen intermédiaire pour construire un savoir lié à l'inversion d'une « fraction de ». Sa présence ne nous signale pas plus si le schéma est à considérer comme transitoire dans la résolution de tels problèmes, ou comme une fin d'enseignement en soi.

¹⁷ Collars, C., Nghan Hoe L., Phong Lee K., Cheow Seng T., Kritter C. (2017) : p. 97.

1 Léonard a dépensé $\frac{3}{5}$ de son argent en jouets. Il a dépensé 48 €. Combien d'argent Léonard avait-il au départ ?

3 parts = 48 €

1 part = € ÷

= €

5 parts = € ×

= €

Léonard avait € au départ.

Extrait du manuel élève « méthode Singapour » - CMI

Le problème et le schéma sont du même type que ceux considérés ci-avant mais ce qui nous intéresse ici, s'agissant d'un manuel destiné aux élèves, est la façon dont la résolution de ce problème, outillée par la schématisation est guidée suivant différentes étapes. Contrairement à l'extrait précédent, nous ne trouvons pas trace de discours sur ce que nous avons appelé l'*unité du problème* – correspondant dans le cas présent à la somme totale d'argent et ce qui sous-tend la représentation de 5 « parts » correspondant à $\frac{5}{5}$ de cette grandeur – l'*unité graphique* correspondant dès lors à $\frac{1}{5}$ de cette même grandeur.

Qui plus est, tout comme dans le manuel précédent, il n'est pas fait mention du changement d'unité de référence de $u = \frac{1}{5}$ de la somme d'argent de Léonard à $u = \frac{1}{3}$ de 48 €. Cette étape est prise en charge par ce manuel de manière encore plus muette que dans le manuel précédent. Le résultat « 3 parts = 48€ » est directement donné et les étapes de calcul permettant de trouver la valeur de l'*unité graphique* puis de déterminer la valeur de la somme d'argent de Léonard sont fortement guidées, les opérations à effectuer étant indiquées au fur et à mesure, sans discours explicatif sur les grandeurs en jeu.

Nous notons que l'on ne trouve pas dans ce manuel élève, ni dans celui du maître qui l'accompagne, un discours qui viserait à institutionnaliser un savoir sur l'inversion d'une fraction pour résoudre de tels problèmes – et que contrairement au manuel ancien, un tel savoir ne semble pas visé. Ici, c'est bien la démarche de résolution outillée par un schéma qui paraît constituer un enjeu de connaissances et de savoirs et

uniquement celle-ci. Ce problème est d'ailleurs le premier d'une série de huit énoncés donnés par la suite dans ce même manuel et le manuel du maître associé insiste précisément sur la démarche associée à l'usage des schémas de type barres pour résoudre de tels problèmes.¹⁸ Nous pouvons toutefois se demander si l'étalement donné qui réduit la mise en œuvre d'une telle démarche à des étapes de calcul, dictées au fil d'égalités à compléter, avec des opérations dès lors indiquées par avance (division puis multiplication), permettait aux élèves de s'approprier la démarche visée, outillée par le schéma segmentaire, dans la résolution d'un tel problème.

b. 2^{ème} énoncé-schéma fondamental

Rappelons que notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

$$\text{On suppose que : } \begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

i. Choix de l'unité graphique

Les trois formulations « A est n fois moins ... que B », « $A = \frac{1}{n} \times B$ » et « $A = \frac{m}{n}$ B. ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire) » sont absentes dans les problèmes qui sont en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental dans différents manuels scolaires retenus pour l'analyse.

¹⁸ Ceci constitue bien une spécificité reconnue de la « méthode Singapour » que de transposer un processus organisé et progressif d'enseignement autour de ce type de schéma. Nous notons d'ailleurs que la « nouveauté » des manuels de CM1 et de CM2 à ce sujet semble bien être la représentation de fractions de grandeurs... D'où la présence d'un nombre assez important de problèmes correspondant à notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental.

La formulation de type $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire), qui est le cas de figure le plus compliqué à résoudre en lien avec le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental comme indiqué dans le chapitre B, est présente dans le manuel officiel tunisien des élèves de la 6^{ème} année de l'école de base à travers les deux problèmes suivants :¹⁹

9) قطعة أرض في شكل مستطيل قياس طولها $\frac{5}{3}$ قياس عرضه ويفوقه بـ 8 م.
 ■ ما قياس مساحة قطعة الأرض ؟

10) لما كان عمر السيد حامد يزيد عن عمر ابنه نادر بـ 30 سنة و6 أشهر كان عمر نادر $\frac{5}{8}$ عمر أبيه حامد.
 ■ كم عمر كل من الأب حامد والابن نادر آنذاك ؟

9) Une parcelle de terrain rectangulaire dont la longueur est $\frac{5}{3}$ la largeur et la dépasse par 8 m.

Trouvez la surface de cette parcelle.

10) Lorsque l'âge de Monsieur Hamed dépassait celui de son fils Nader de 30 ans et 6 mois, l'âge de Nader était égal à $\frac{5}{8}$ l'âge de se son père.

Trouvez à cette époque l'âge : - du père ;

- de son fils.

La relation multiplicative qui relie les deux grandeurs A et B dans les six problèmes en lien avec notre 2^{ème} énoncé schéma fondamental identifiés dans les manuels analysés sont de type « ... fois plus... ». L'unité graphique considérée pour mettre en schéma un des six problèmes est *a priori*, et en se référant au chapitre B, le segment représentant la plus petite grandeur via la mobilisation du traitement « Report ». Le tableau suivant illustre ces derniers propos :

¹⁹ Problème du manuel officiel tunisien des élèves de la 6^{ème} année de l'école de base, p : 101.


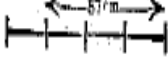

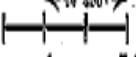
Problèmes et schémas	Choix de l'unité graphique
<p>391. — Quelle longueur de baguelette faut-il employer pour faire un cadre rectangulaire dont la longueur sera 4 fois plus grande que la largeur et mesurera 57 centimètres de plus que celle-ci?</p> <p>S. — Largeur du cadre : </p> <p>Longueur du cadre : </p> <p>Largeur du cadre : $57^{\text{cm}} : 3 = 19 \text{ centimètres.}$ Longueur du cadre : $19^{\text{cm}} \times 4 = 76 \text{ centimètres.}$ Longueur de la baguelette : $(19^{\text{cm}} + 76^{\text{cm}}) \times 2 = 190^{\text{cm}} = 1^{\text{m}},90.$</p>	<p>Le segment représentant la plus petite grandeur (la largeur)</p>
<p>390. — Deux personnes se partagent une certaine somme de manière que la part de l'une soit le triple de la part de l'autre et surpasse celle-ci de 14 490 francs. Quelle est la part de chacune? Quelle est la somme?</p> <p>S. — Part d'une personne : </p> <p>Part de l'autre : </p> <p>Part de la première : $14\,490^{\text{f}} : 2 = 7\,245 \text{ francs.}$ Part de la deuxième : $7\,245^{\text{f}} + 14\,490^{\text{f}} = 21\,735 \text{ francs.}$ Somme totale : $7\,245^{\text{f}} + 21\,735^{\text{f}} = 28\,980 \text{ francs.}$</p>	<p>Le segment représentant la plus petite grandeur (la petite somme)</p>

Tableau C4 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 2^{ème} énoncé-schéma fondamental

Mais rien n'empêche pour mettre en schéma un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental d'opter au segment représentant la plus grande grandeur comme *unité graphique* même si la relation reliant les deux grandeurs du problème est de type « ...fois plus... » :

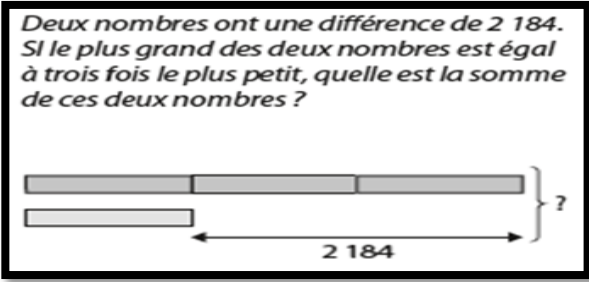
Problème et schéma	Choix de l'unité graphique
<p>Deux nombres ont une différence de 2 184. Si le plus grand des deux nombres est égal à trois fois le plus petit, quelle est la somme de ces deux nombres ?</p> 	<p>Le segment représentant la plus grande grandeur (le grand nombre)</p>


Tableau C5 : exemple d'un choix d'unité graphique liés au 2^{ème} énoncé-schéma fondamental

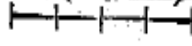
Dans la formulation « Le plus grand des deux nombres est égal à trois fois le plus petit » le plus grand nombre est généré à partir du plus petit nombre. En se référant aux traitements évoqués dans le chapitre B, cette dernière formulation correspond au traitement « Report » pour sa conversion dans le registre graphique segmentaire (ou en barres dans le cas présent). Le traitement considéré par les auteurs du manuel²⁰ est plutôt le traitement « Partage ».

ii. Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés

Considérons le problème suivant extrait du manuel « Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître »²¹ et sa correction [en lien à notre 2^{ème} énoncé fondamental (correspondant à la valeur $V_{1,2}$ de la variable $V_{m,n}$, 1^{er} cas, voir chapitre B, p. 120] :

391. — Quelle longueur de baguette faut-il employer pour faire un cadre rectangulaire dont la longueur sera 4 fois plus grande que la largeur et mesurera 57 centimètres de plus que celle-ci ?

S. — Largeur du cadre : 

Longueur du cadre : 

Largeur du cadre : $57^{\text{cm}} : 3 = 19 \text{ centimètres.}$

Longueur du cadre : $19^{\text{cm}} \times 4 = 76 \text{ centimètres.}$

Longueur de la baguette : $(19^{\text{cm}} + 76^{\text{cm}}) \times 2 = 190^{\text{cm}} = 1^{\text{m}},90.$

À partir du schéma produit, la valeur de l'*unité graphique* est triplement désignable comme étant égale à :

- la largeur ;
- $\frac{1}{4}$ de la longueur ;
- $\frac{1}{3}$ de la différence (57 cm).

La division de 57 par 3 effectuée par les auteurs du manuel comme étant égale à la valeur de la largeur prend en charge en elle-même l'égalité « Valeur d'une *unité graphique* = $57 : 3$ » qui elle-même (cette valeur) coïncide avec celle la largeur. Cette dernière égalité passe sous silence comme si elle allait de soi. Notons que ces faits

²⁰ Guide pédagogique CM1. Méthode Singapour.

²¹ Problème P. 68.

observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés à travers cet exemple sont aussi observables à travers les cinq autres problèmes recensés dans les manuels analysés et qui sont en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental.

c. 3^{ème} énoncé-schéma fondamental

Rappelons que notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

On suppose que :

$$\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A+B=S \end{cases}$$

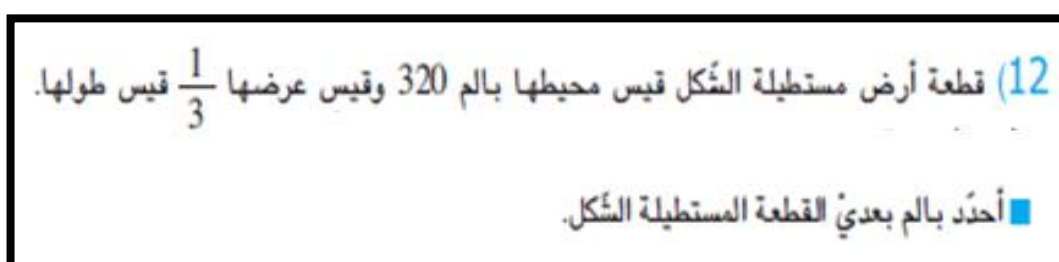
Trouver A ; trouver B.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

i. Choix de l'unité graphique

Les relations de la forme « $A = \frac{1}{n} \times B$ » ou « A est n fois moins ... que B » sont absentes dans les problèmes qui sont en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental dans différents manuels scolaires retenus pour l'analyse.

L'absence de la formulation « $A = \frac{1}{n} \times B$ » est présente dans le manuel officiel tunisien des élèves de la 6^{ème} année de l'école de base :²²



12) Une parcelle de terrain rectangulaire de largeur égale à $\frac{1}{3}$ la longueur et dont le périmètre est égal à 320 m.

Trouvez en mètres les deux grandeurs de cette parcelle rectangulaire.

²² Problème du manuel officiel tunisien des élèves de la 6^{ème} année de l'école de base, p : 137.

Les relations multiplicatives qui relient les deux grandeurs A et B dans les quatorze problèmes en lien avec notre 3^{ème} énoncé schéma fondamental identifiés dans les manuels analysés sont ou bien de type « A est n fois plus...que B » ou bien de type « $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire) ». Le choix de l'*unité graphique* correspondant à un problème où nous identifions une relation de type « ... n fois plus ... » (le double) correspond *a priori* au segment représentant la plus petite grandeur (traitement « Report » pour mettre la relation en schéma), tandis que le choix de l'*unité graphique* correspondant à un problème où nous identifions une relation de type $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire) correspond *a priori* à $\frac{1}{m}$ de A ou $\frac{1}{n}$ de B, un choix de l'*unité graphique* piloté par la notion de l'*unité du problème*. Le tableau suivant illustre ces propos :

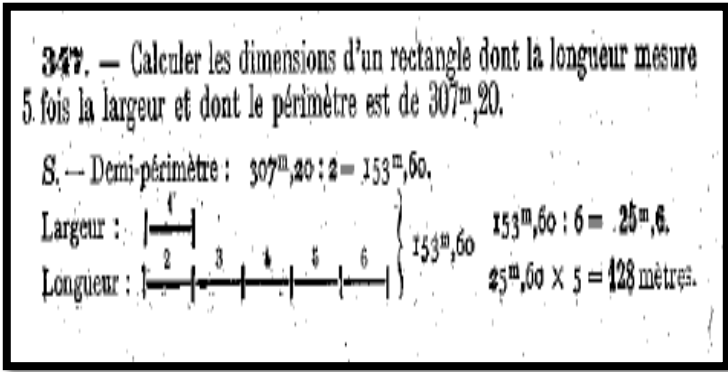
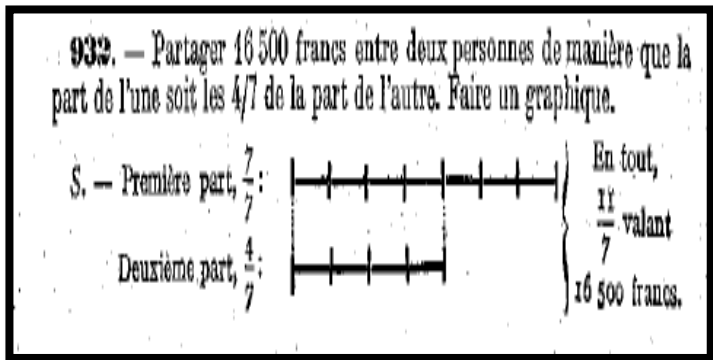
Problèmes et schémas	Choix de l' <i>unité graphique</i>
	<p>L'<i>unité graphique</i> correspond au segment qui représente la plus petite grandeur (la largeur)</p>
	<p>L'<i>unité graphique</i> correspond au segment qui représente le $\frac{1}{4}$ de la 2^{ème} part ou le $\frac{1}{7}$ de la 1^{ère} part</p> <p>$\frac{1}{m}$ de la petite grandeur</p> <p>ou $\frac{1}{n}$ de la grande grandeur</p>

Tableau C6 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 3^{ème} énoncé-schéma fondamental

Mais, comme évoqué précédemment, rien n'empêche que pour produire un schéma représentant un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental d'opter pour un traitement « Partage » et choisir le segment représentant la grande grandeur comme *unité graphique* même si la relation reliant les deux grandeurs du problème est de type « ...fois plus... » :

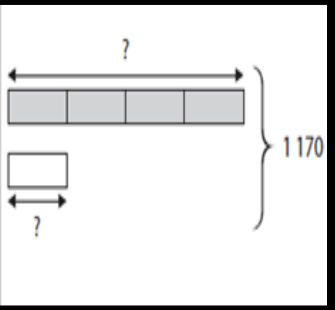

Problème et schéma	Choix de l' <i>unité graphique</i>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>L'énoncé nous dit que Pierre possède 4 fois plus de timbres français que de timbres étrangers. On sait donc qu'on compare deux quantités, dont l'une est un multiple de l'autre. On va donc utiliser un schéma de comparaison pour les multiplications et les divisions. On représentera le nombre de timbres français par 4 parts, et le nombre de timbres étrangers par 1 part.</p>  </div>	<p>Le segment représentant la grande grandeur (le nombre de timbres français)</p>

Tableau C7 : exemple d'un choix d'unité graphique lié au 3^{ème} énoncé-schéma fondamental

ii. Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés

Pour résoudre le problème suivant du manuel « Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître »²³ les auteurs de ce manuel proposent un schéma de type « séparé » comme représentation graphique du problème :

933. — Partager 16 500 francs entre deux personnes de manière que la part de l'une soit les $\frac{4}{7}$ de la part de l'autre. Faire un graphique.

S. — Première part, $\frac{7}{7}$:  En tout, $\frac{11}{7}$ valant 16 500 francs.

Deuxième part, $\frac{4}{7}$:

Valeur de la première part : $\frac{16\ 500^f \times 7}{11} = 10\ 500$ francs.

Valeur de la deuxième part : $\frac{16\ 500^f \times 4}{11} = 6\ 000$ francs.

²³ Problème p. 166

Ce problème est le cas de figure des problèmes les plus compliqués à résoudre de notre 3^{ème} énoncé fondamental (correspondant à la valeur $V_{3,2}$ de la variable $V_{m,n}$, 3^{ème} cas, voir p. 128). Rappelons que dans ce problème deux *unités relatives* et une *unité simple* sont identifiables :

- Valeur de la première part, valeur de la deuxième part comme *unités relatives* ;
- valeur d'un segment (ou d'une *unité graphique* ou d'une part) comme *unité simple*.


Nous identifions aussi la valeur de la première part comme étant *l'unité du problème*.

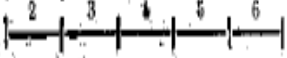
La valeur d'une *unité graphique* est triplement désignable comme $\frac{1}{7}$ de la première part (une désignation, donnée du problème) ou $\frac{1}{4}$ de la deuxième part ou $\frac{1}{11}$ de l'ensemble des deux parts (deux désignations non données dans le problème mais identifiables grâce à un jeu sur les *unités relatives* associé à cette triple désignation). Le fait de correspondre le $\frac{1}{7}$ de la première part à $\frac{1}{11}$ de l'ensemble des deux parts ou à $\frac{1}{4}$ de la deuxième part permet de trouver les valeurs des deux parts. Ici, dans l'extrait de manuel ci-dessus qui n'expose qu'une solution du problème, les connaissances ainsi mises à jour par notre analyse sont passées sous silence – comme si la production et l'interprétation d'un tel schéma allaient de soi.

Considérons à présent le problème suivant extrait du manuel « Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître »²⁴ et sa correction [en lien à notre 3^{ème} énoncé fondamental (correspondant à la valeur V_1 de la variable $V_{m,n}$, 1^{er} cas, voir chapitre B, p. 126)] :

347. — Calculer les dimensions d'un rectangle dont la longueur mesure 5 fois la largeur et dont le périmètre est de 307^m,20.

S. — Demi-périmètre : $307^m,20 : 2 = 153^m,60$.

Largeur : 

Longueur :  } $153^m,60$ $153^m,60 : 6 = 25^m,6$
 $25^m,60 \times 5 = 128^m,60$

²⁴Problème p. 345

À partir du schéma produit, la valeur de l'*unité graphique* est triplement désignable comme étant égale à :

- La largeur ;
- $\frac{1}{5}$ de la longueur ;
- $\frac{1}{6}$ de la somme (153,6 m).

La division de 153,6 par 3 proposée par les auteurs du manuel comme étant égale à la valeur de la largeur prend en charge en elle-même l'égalité « Valeur d'*une unité graphique* = $153,6 : 3$ » qui elle-même (cette valeur) coïncide avec celle la largeur. Cette dernière égalité, comme évoquée précédemment, passe sous silence comme si elle allait de soi.

d. 4^{ème} énoncé-schéma fondamental

Rappelons que notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

On suppose que :
$$\begin{cases} A + B = S \\ A - B = D \quad (A > B) \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

(partages en parts inégales)

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

i. Choix de l'*unité graphique*

Un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental est un problème déconnecté qui implique deux relations de comparaison additives entre les deux grandeurs A et B : une relation additive qui renseigne sur la somme des deux grandeurs A et B et une autre relation de type « ...de plus... » ou de type « ...de moins... » indiquant la différence entre ces deux grandeurs. La relation indiquant la différence entre A et B de type « ...de plus... » correspond à un traitement de type « Ajout » lors de sa mise en schéma et l'*unité graphique* à considérer est le segment

représentant la petite grandeur. La relation indiquant la différence entre A et B de type « ...de moins... » correspond à un traitement de type « Retraitement » lors de sa mise en schéma et l'unité graphique à considérer est le segment représentant la grande grandeur. Aucune relation de type « ...de moins... » indiquant la différence entre A et B n'a été identifiée dans les 15 problèmes recensés dans les manuels scolaires analysés. Le tableau suivant présente deux problèmes où nous identifions dans chacun une relation de type « ...de plus... » avec un traitement de type « Ajout » lors de sa mise en schéma et renseigne sur le choix de l'unité graphique pour représenter le problème considéré :


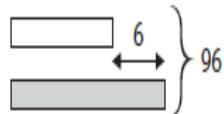
Problèmes et schémas	Choix de l'unité graphique
<p>381. -- En un mois, une ligne d'avions Paris-Londres a distribué des billets de voyageurs pour une somme totale de 291 000 francs. Le prix des billets d'aller et retour a surpassé de 39 000 francs le prix des billets simples. Combien de billets de chaque sorte a-t-on distribués si le billet simple coûte 700 francs et le billet aller et retour, 1 250 francs?</p> <p>S. -- Prix des billets simples : </p> <p>Prix des billets aller et retour : $\frac{291\ 000 - 39\ 000}{2} = 126\ 000$ francs.</p> <p>Prix des billets simples : $291\ 000 - 126\ 000 = 165\ 000$ francs.</p> <p>Nombre de billets simples : $\frac{126\ 000}{700} = 180$ billets simples.</p> <p>Nombre de billets aller et retour : $\frac{165\ 000}{1\ 250} = 132$ billets aller et retour.</p>	<p>Le segment (ou barre) qui représente la petite grandeur</p>
<p>• 13. (c)</p> <p>Poids total des deux garçons = $48\text{ kg} \times 2 = 96\text{ kg}$ Si on ajoutait 6 kg au poids total, les deux frères pèseraient alors le même poids que le plus lourd. $96 + 6 = 102\text{ kg}$ Poids du plus lourd = $\frac{102}{2}\text{ kg} = 51\text{ kg}$</p> <p>- Le poids moyen de deux frères est de 48 kg. Sachant que l'aîné pèse 6 kg de plus que le cadet, trouvez le poids du plus âgé des deux frères.</p> 	

Tableau C8 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 4^{ème} énoncé-schéma fondamental (traitement « Ajout »)

La correspondance d'une relation de type « ...de plus... » à un traitement de type « Ajout » n'est pas automatique dans les manuels analysés, et par conséquent le choix de l'*unité graphique* pour mettre en schéma un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental peut être le segment qui représente la grande grandeur. Le tableau ci-après illustre ce propos :

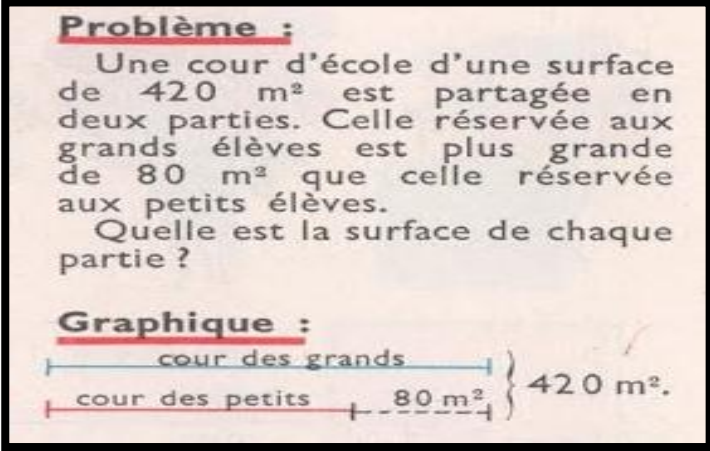
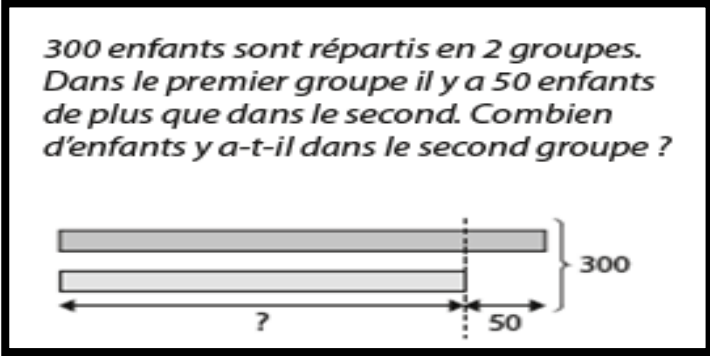
Problèmes et schémas	Choix de l' <i>unité graphique</i>
<p>Problème : Une cour d'école d'une surface de 420 m² est partagée en deux parties. Celle réservée aux grands élèves est plus grande de 80 m² que celle réservée aux petits élèves. Quelle est la surface de chaque partie ?</p> <p>Graphique :</p> 	Le segment (ou barre) qui représente la grande grandeur
<p>300 enfants sont répartis en 2 groupes. Dans le premier groupe il y a 50 enfants de plus que dans le second. Combien d'enfants y a-t-il dans le second groupe ?</p> 	

Tableau C9 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 4^{ème} énoncé-schéma fondamental (traitement « Retranchement »)

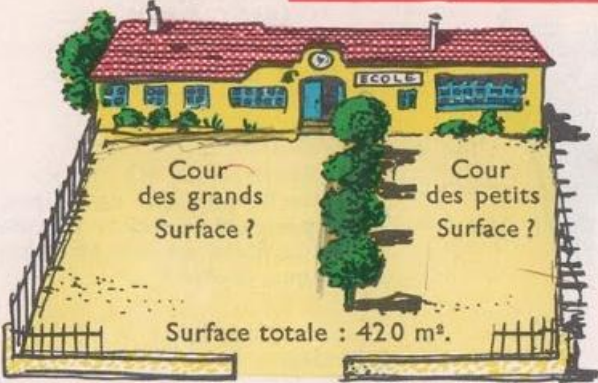
ii. Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés

Lors de cette sous-partie nous allons étudier plus avant ce qui peut résulter d'un choix d'*unité graphique*, autre que la plus petite grandeur – pour les problèmes ne

convoquant pas de relations multiplicatives fractionnaires – choix qui s'avère assez rares mais existe pour certains problèmes rencontrés dans les manuels étudiés.

Nous nous interrogerons sur les raisons d'un tel choix au regard des solutions exposées par les auteurs de manuels en lien avec ces problèmes. Considérons le problème de la page 71 du manuel « Bodard, Bréjaud, Le Calcul quotidien CM2 (1960) » et sa résolution :

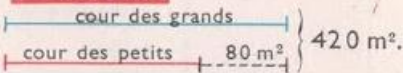
PARTAGES (2 parts inégales)



Surface totale : 420 m².

Problème :
Une cour d'école d'une surface de 420 m² est partagée en deux parties. Celle réservée aux grands élèves est plus grande de 80 m² que celle réservée aux petits élèves.
Quelle est la surface de chaque partie ?

Graphique :



Solution. J'ajoute 80 m², j'obtiens 2 fois la surface de la cour des grands.
Je retire 80 m², j'obtiens 2 fois la surface de la cour des petits.

<p>Surface réservée aux grands :</p> $\frac{420 \text{ m}^2 + 80 \text{ m}^2}{2} = 250 \text{ m}^2$	<p>Surface réservée aux petits :</p> $\frac{420 \text{ m}^2 - 80 \text{ m}^2}{2} = 170 \text{ m}^2$
---	---

Vérification : 250 m² + 170 m² = 420 m² et 250 m² - 170 m² = 80 m².

Les auteurs du manuel commencent par exposer la résolution du problème en considérant comme *unité graphique* le segment représentant la surface de la cour des grands et proposent comme solution :

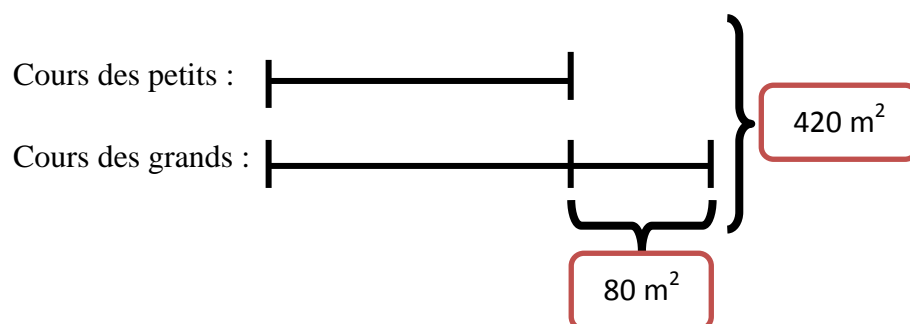
« J'ajoute 80 m², j'obtiens 2 fois la surface de la cour des grands ». En fait les 80 m² doivent être ajoutés dans deux registres différents : le registre de représentation graphique segmentaire (l'ajout du segment de valeur 80 m² en pointillé à la représentation de la cour des petits) et le registre numérique/symbolique (420 m² + 80 m² = 500 m²). La mobilisation de la connaissance « si A correspond à B alors A + s correspondent à B + s » est passée sous silence.

Si nous augmentons une part de 80 m² il faut augmenter le tout de 80 m². Le nouvel état correspond à deux *unités graphiques* qui représentent chacune la cour des grands.

L'égalité : cour des grands = $\frac{420 \text{ m}^2 + 80 \text{ m}^2}{2} = 250 \text{ m}^2$, est une conséquence immédiate d'une interprétation triviale du schéma.

Les auteurs du manuel finalisent par exposer la résolution du problème en considérant comme *unité graphique* le segment représentant la surface de la cour des petits et proposent comme solution :

« Je retire 80 m², j'obtiens 2 fois la surface de la cour des petits », sans proposer le schéma segmentaire représentant ce cas de figure :



Les 80 m², différence entre les deux surfaces, doivent figurer dans le schéma sur la part qui représente la cour des grands. L'*unité graphique* du schéma proposé, dans ce cas de figure, est le segment représentant la cour des petits.

La mobilisation de la connaissance « si A correspond à B alors A – s correspondent à B – s » nécessaire pour résoudre le problème dans ce cas de figure est aussi passée sous silence.

Lors de la résolution d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental il y a donc deux cheminements possibles : retenir comme *unité graphique* le segment représentant la plus petite grandeur ou bien retenir comme *unité graphique* celui qui représente la plus grande grandeur. Dans les deux cas, la mobilisation de la connaissance « si A correspond à B alors A +/- s correspondent à B +/- s » est nécessaire pour résoudre le problème posé.

e. 5^{ème} énoncé-schéma fondamental

Rappelons que notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

1^{er} cas :

- $A = B + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

2^{ème} cas :

- $A = C + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Problèmes à trois branches : **Source**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

3^{ème} cas :

- $A = C + m$;
- $A = B + n$;
- $A + B + C = S$.

Problèmes à trois branches : **Puits**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

Les problèmes liés à notre 5^{ème} énoncé fondamental sont des problèmes de partages inégaux dont les relations entre les grandeurs en jeu sont uniquement additives.

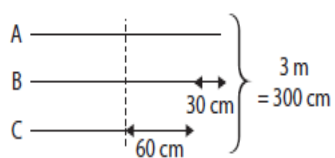
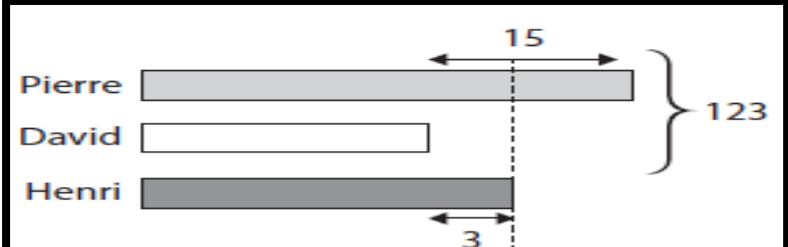
- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- C est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre (A et B), (B et C), (A et C) et (A et B et C) sont connues.

i. Choix de l'unité graphique

Nous avons identifié dans le chapitre B trois choix d'*unités graphiques* possibles quand il s'agit de mettre en schéma ou à interpréter un problème en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental :

- L'*unité graphique* correspondante au segment représentant la plus petite grandeur ;
- L'*unité graphique* correspondante au segment représentant la grandeur moyenne ;
- L'*unité graphique* correspondante au segment représentant la plus grande grandeur.

Les trois types d'*unités graphiques* sont identifiables dans les manuels scolaires étudiés comme l'illustre le tableau ci-après :

Problèmes et schémas	Choix de l' <i>unité graphique</i>
<p>• 20.</p> <p>La ficelle A mesure 30 cm de plus que la ficelle B. La ficelle B mesure 60 cm de plus que la ficelle C. La longueur totale des trois ficelles est de 3 m. Combien mesure la ficelle C ?</p> <p>• Si on coupe 30 cm à la ficelle A et 60 cm aux ficelles A et B, les trois ficelles seraient alors de la taille de la ficelle C. Prenons la longueur de la ficelle C pour représenter 1 part. $3 \text{ parts} = 300 \text{ cm} - 30 \text{ cm} - (2 \times 60 \text{ cm})$ $= 300 - 30 - 120 = 150 \text{ cm}$ $1 \text{ part} = 150 \div 3 = 50 \text{ cm}$ La ficelle C mesure 50 cm.</p> 	<p>Le segment qui représente la plus petite grandeur (la ficelle C).</p>
 <p><i>1 part = le poids d'Henri</i> $3 \text{ parts} = 123 + 3 - 12 = 114 \text{ kg}$ $1 \text{ part} = 114 \div 3 = 38 \text{ kg}$ <i>Henri pèse 38 kg.</i></p>	<p>La barre qui représente la grandeur moyenne (le poids d'Henri).</p>

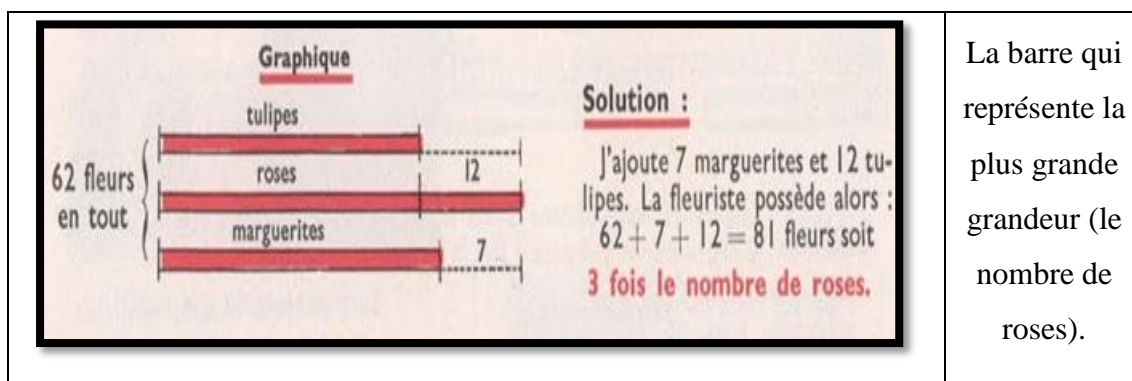


Tableau C10 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 5^{ème} énoncé-schéma fondamental

À travers les exemples donnés, nous allons voir ci-après que les choix des *unités graphiques* sont sources de variabilités en termes de connaissances convoquées pour les différentes interprétations des schémas représentatifs des problèmes traités.

ii. Faits observables sur les connaissances et savoirs mathématiques institutionnalisés

Le manuel « guide pédagogique CM2. Méthode Singapour » propose à la page 51 un problème de type Source en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental (voir 2^{ème} cas ci-dessus) :

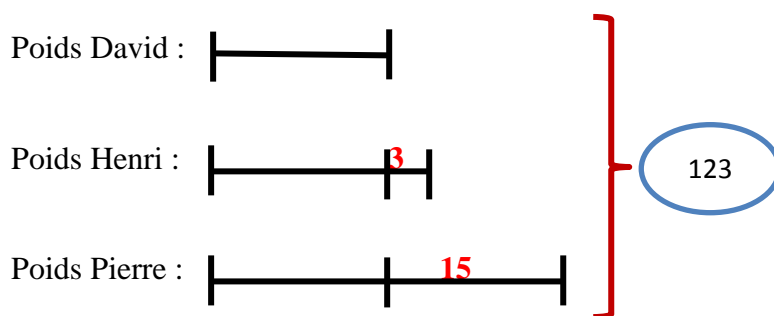
<p>1. (c) Trois poids sont comparés. Puisque Pierre est plus lourd que David, la barre qui représente son poids sera plus longue que celle de David, et puisque David est plus léger qu'Henri, la barre qui représente le poids d'Henri sera plus longue que celle du poids de David. Henri pèse 3 kg de plus que David. Pierre pèse 15 kg de plus que David. La barre d'Henri est donc plus courte que celle de Pierre.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Essayez à présent d'obtenir des parts égales. Puisqu'on cherche le poids d'Henri, c'est celui-là qui sera représenté par une part. • Si 3 kg étaient ajoutés au poids de David, il représenterait 1 part. • Si $15 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 12 \text{ kg}$ étaient retirés du poids de Pierre, il représenterait 1 part. 	<div style="text-align: center;"> </div> <p style="margin-top: 10px;"> $1 \text{ part} = \text{le poids d'Henri}$ $3 \text{ parts} = 123 + 3 - 12 = 114 \text{ kg}$ $1 \text{ part} = 114 \div 3 = 38 \text{ kg}$ <i>Henri pèse 38 kg.</i> </p> <p style="margin-top: 10px;"> <i>Ou :</i> $1 \text{ part} = \text{le poids de David}$ $3 \text{ parts} = 123 - 15 - 3 = 105$ $1 \text{ part} = 105 \div 3 = 35$ $\text{Le poids d'Henri} = 35 + 3 = 38 \text{ kg}$ </p>
---	---

Les auteurs du manuel proposent deux procédures de résolution :

- une procédure qui considère la barre qui représente la masse d'Henri comme *unité graphique* et,
- une autre procédure qui considère la barre qui représente la masse de David comme *unité graphique*.

Les connaissances mobilisées lors de la première procédure pour construire le schéma proposé par les auteurs du manuel sont un double recours à « la modélisation de la comparaison » : « Henri pèse 3 kg de plus que David » et « Pierre pèse 15 kg de plus que David ». Interpréter le schéma en considérant la barre qui représente la masse d'Henri comme *unité graphique* nécessite une « composition de deux relations additives » pour mettre en avant les 12 kg différence entre le poids de Pierre et d'Henri. Sans oublier la mobilisation d'une soustraction et d'une addition pour trouver 3 fois le poids d'Henri : $123 + 3 - 12$.

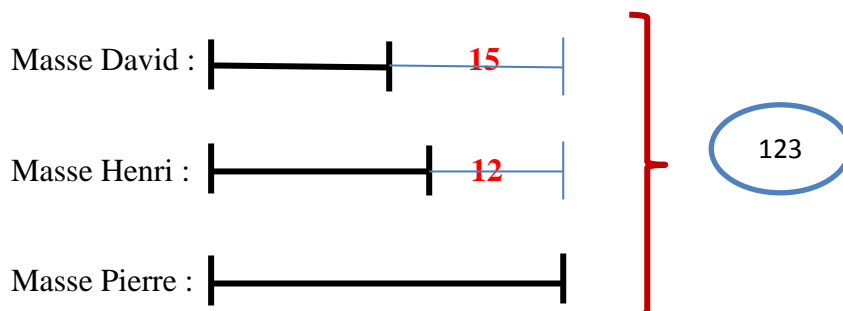
Alors que le cheminement qui considère le segment qui représente la masse de David comme *unité graphique* réduit le coût de la mobilisation d'une « composition de deux relations additives » au coût de la mobilisation d'une simple comparaison d'états (comparer 3 fois le poids de David et 123 kg) :



Ce cheminement a nécessité deux simples soustractions ($123 - 3 - 15$) pour trouver 3 fois la masse de David, pour en déduire sa masse et puis celle d'Henri. Le problème, vu sous cet angle, est un problème de type Source avec des relations additives de la forme « ...de plus... », qui est un problème, comme évoqué précédemment, facile à résoudre.

Un troisième cheminement est possible pour la résolution du problème : considérer le segment qui représente la masse de Pierre comme *unité graphique*.

Un schéma correspondant à ce cheminement est le suivant :



C'est un cheminement coûteux en termes de connaissances mobilisées. Pour obtenir les 12 kg, différence entre la masse de Pierre et celle d'Henri, il a fallu la mobilisation d'une composition de deux relations additives ($15 - 3$). En plus pour trouver 3 fois la masse de Pierre il faut augmenter les deux autres masses (de David et Henri) de 15 et 12 kg et il faut aussi augmenter la masse totale des trois hommes aussi de 15 et 12 kg – une connaissance à mobiliser, évoquée précédemment, qui pèse en plus sur la procédure de résolution.

Considérons à présent le problème suivant²⁵ et sa stratégie de résolution :

PARTAGES INÉGAUX

Trois ou quatre parts

Problème :

La fleuriste a 62 fleurs :
12 roses de plus que de tulipes,
7 marguerites de moins que de roses. Combien a-t-elle de fleurs de chaque espèce ?

Graphique

62 fleurs en tout

tulipes

roses

marguerites

12

7

Solution :

J'ajoute 7 marguerites et 12 tulipes. La fleuriste possède alors :
 $62 + 7 + 12 = 81$ fleurs soit
3 fois le nombre de roses.

Nombre de roses : $81 : 3 = 27$

Nombre de tulipes : $27 - 12 = 15$

Nombre de marguerites : $27 - 7 = 20$

Vérifiez : $27 + 15 + 20 = 62$ fleurs.

Sur le graphique, représentez d'abord la part la plus petite.

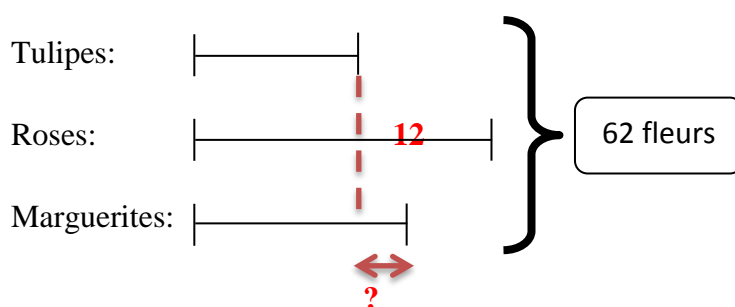
²⁵ Bodard, Bréjaud, Le Calcul Quotidien CM2 (1960). p 72

Commencer par représenter la grandeur moyenne (nombre des marguerites) est une autre alternative pour produire un schéma représentatif du problème proposé, et par conséquent rien ne justifie la nécessité de commencer par représenter la petite grandeur comme demandé par les auteurs du manuel à la fin de la résolution (*Sur le graphique, représenter d'abord la part la plus petite*).

L'*unité graphique* considérée pour résoudre ce problème est la barre qui représente la plus grande grandeur (nombre des roses). Pour mettre en avant trois parts égales à celle qui représente le nombre de roses, les auteurs du manuel ajoutent en pointillé deux segments qui représentent respectivement 12 tulipes (différence entre nombre des roses et des tulipes) et 7 marguerites (différence entre nombre des roses et des marguerites). La connaissance mise en œuvre pour trouver trois fois le nombre des roses est la connaissance suivante (évoquée à des reprises multiples lors de nos analyses précédentes) : on a augmenté les deux parts qui représentent les tulipes et les marguerites par deux segments qui représentent 12 tulipes et 7 marguerites on doit alors augmenter le nombre total des fleurs par $12 + 7$. Comme nous l'avons évoqué lors du traitement du problème P6 du chapitre B²⁶, nous pensons que cette stratégie de résolution est la moins coûteuse en étapes de résolution et nécessite la mobilisation de la connaissance évoquée ci-dessus. Deux autres stratégies de résolution sont possibles :

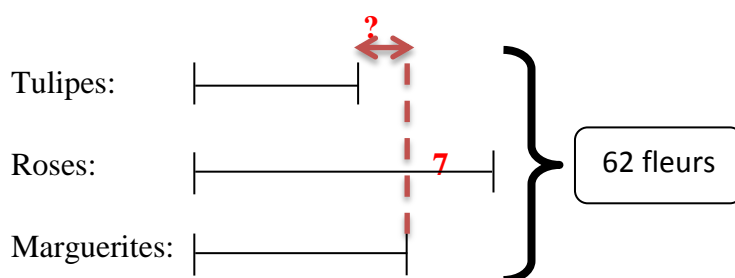
- 1- Considérer le segment qui représente la plus petite grandeur (nombre de tulipes) comme *unité graphique* ;
- 2- Considérer le segment qui représente la grandeur moyenne (nombre de marguerites) comme *unité graphique*.

Schéma correspondant au premier cas :



²⁶ pp. 102-104 du chapitre B.

Schéma correspondant au deuxième cas :



Dans les deux cas nous sommes obligés à chercher la différence entre le nombre des tulipes et celui des marguerites. Et pour trouver cette différence la mobilisation d'une composition de deux relations additives est nécessaire : $12 - 7 = 5$. Le 12 est issu de la relation « 12 roses de plus que de tulipes » et le 7 est issu de la relation « 7 marguerites de moins que des roses ». Cette différence ainsi trouvée, le nombre de tulipes sera égal à $(62 - 12 - 5) : 3 = 15$, et le nombre marguerites sera égal à $(62 - 7 + 5) : 3 = 20$.

En raison de la composition de ces deux relations additives, et que le schéma ne prend pas en charge la complexité d'une telle composition, nous pensons que la première stratégie est la stratégie optimale. Toutefois la connaissance arithmétique «si on augmente les deux parts qui représentent les tulipes et les marguerites par deux segments qui représentent 12 tulipes et 7 marguerites on doit augmenter le nombre total des fleurs par $12 + 7$ » nécessaire pour résoudre le problème est passée sous silence. Certes, cette dernière stratégie est la stratégie optimale, mais à quel prix ?

f. 6^{ème} énoncé-schéma fondamental

Rappelons que le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

1^{er} cas :

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

$$B = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Trouver A, B et C.

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

2^{ème} cas :

$$A = \frac{m}{n} C ;$$

$$B = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Trouver A, B et C.

Problèmes à trois branches : **Source**

(Bednarz & Janvier, 1994)

3^{ème} cas :

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

$$A = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Trouver A, B et C.

Problèmes à trois branches : **Puits**

(Bednarz & Janvier, 1994)

i. Choix de l'unité graphique

Les formulations de la forme « $A = n \times B$ » et « $A = \frac{1}{n} \times B$ » sont absentes dans les problèmes qui sont en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental dans différents manuels scolaires retenus pour l'analyse.

La relation multiplicative qui relie les trois grandeurs A, B et C dans les dix problèmes en lien avec notre 6^{ème} énoncé schéma fondamental identifiés dans les manuels analysés sont de type « ...n fois plus... », « ...n fois moins... » et « $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire) ». En l'absence de la formulation de la forme « $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ est une fraction non unitaire) », l'unité graphique retenue systématiquement dans la production du schéma associé à ce type de problèmes correspond au segment (ou barre) qui représente la plus petite grandeur :

Problèmes et schémas	Choix de l'unité graphique
----------------------	----------------------------------

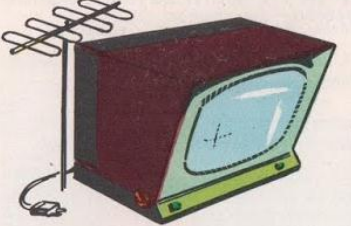
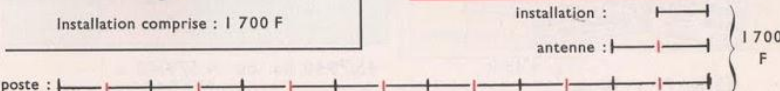



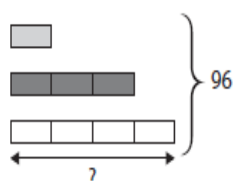
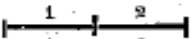

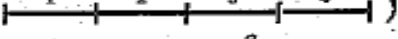
<p style="text-align: center;">PARTAGES</p> <p style="text-align: center;">(Plusieurs parts multiples)</p>  <p>Installation comprise : 1 700 F</p> <p>Problème : Un poste de télévision, l'antenne et son installation ont coûté au total 1 700 F. Le poste coûte 7 fois plus cher que l'antenne. L'installation coûte la moitié du prix de l'antenne. Quelle est le prix du poste et celui de l'antenne ?</p> <p>Traduisez par un graphique :</p>  <p>Solution : Le prix total représente 17 fois les frais d'installation. Montant de l'installation : $1\ 700\text{ F} : 17 = 100\text{ F}$ Prix de l'antenne : $100\text{ F} \times 2 = 200\text{ F}$ Prix du poste : $200\text{ F} \times 7 = 1\ 400\text{ F}$ Vérification : $100\text{ F} + 200\text{ F} + 1\ 400\text{ F} = 1\ 700\text{ F}$.</p>	<p>Le segment représentant la plus petite grandeur</p>
<p>352. — Partager une somme de 140 francs en 3 parts telles que la première soit le double de la deuxième et celle-ci le double de la troisième.</p> <p>R. — Troisième part :  20 francs. Deuxième part :  40 francs. Première part :  80 francs.</p> <p style="text-align: right;">} 140 francs</p>	
<p>• 2. (e)</p> <p><i>Le rapport de la longueur de trois planches est de 1 : 3 : 4. Sachant que la longueur totale des trois planches est de 96 cm, combien mesure la plus longue des trois planches ?</i></p> <p>Le nombre de parts au total = $1 + 3 + 4 = 8$ 8 parts = 96 cm 1 part = $96\text{ cm} \div 8 = 12\text{ cm}$ La planche la plus longue = 4 parts 4 parts = $12 \times 4 = 48\text{ cm}$</p> 	

Tableau C11 : exemples de choix d'unités graphiques liés au 6^{ème} énoncé-schéma fondamental

Considérons maintenant le problème²⁷ correspondant à la valeur $R_5(A,B)$ et $R_4(B,C)$ de la variable $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Puits) (voir chapitre B, pp. 152-153)

²⁷ Delfaud et Millet 1932 - cours moyen certificat d'étude. Livre du maître p. 183

1011. — Un caissier a payé 3 factures s'élevant ensemble à 3 780 francs. Le montant de la première est les $\frac{2}{3}$ de celui de la deuxième et la moitié de celui de la troisième. A combien s'élève chaque facture?

S. — Première facture :  }
 Deuxième facture :  } Total : 3 780 francs.
 Troisième facture :  }

Montant de la première facture : $3\,780^f \times \frac{2}{9} = 840$ francs.
 Montant de la deuxième facture : $3\,780^f \times \frac{3}{9} = 1\,260$ francs.
 Montant de la troisième facture : $3\,780^f \times \frac{4}{9} = 1\,680$ francs.

Nous identifions deux relations multiplicatives qui relient les trois grandeurs du problème posé : (F_i , $1 \leq i \leq 3$, veut dire montant de la $i^{\text{ème}}$ Facture)

- R_1 : montant de la première facture = $\frac{2}{3}$ montant de la deuxième facture ;
- R_2 : montant de la première facture est la moitié du montant de la troisième facture (ou 2 fois moins grand que le montant de la troisième facture).

Pour représenter F_1 et F_2 , l'*unité graphique* est le segment qui représente $\frac{1}{2}$ du montant de la première facture ou $\frac{1}{3}$ du montant de la deuxième facture (schématisation pilotée par la notion de *l'unité du problème*), alors que pour mettre en schéma F_1 et F_3 , l'*unité graphique* correspond au segment qui représente le montant de la première facture. Ce schéma a été produit grâce à un jeu sur deux *unités relatives* : le montant de la deuxième facture comme première unité de référence et le montant de la troisième facture comme deuxième unité de référence. Le montant de la première facture représente ainsi une *unité simple*. Le fait de référer cette *unité simple* à une des deux *unités relatives* citées ci-avant, nous permet de produire le schéma du problème traité. Le jeu sur des *unités relatives* cité ci-avant a piloté la production du schéma représentatif du problème proposé et a permis de mettre en avant deux types d'*unités graphiques*, l'une correspondant au segment représentant le montant de la première facture et l'autre correspondant à la moitié de ce segment.

ii. Faits observables sur les rapports entre choix d'*unités graphiques*, structures de problèmes et complexités de résolutions



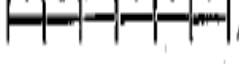
Comme l'indique le titre ci-dessus, nous allons voir que la complexité de résolution va être tributaire d'une part de la structure du problème traité et d'autre part du choix de l'*unité graphique* considéré pour représenter un tel problème.

Parmi les dix problèmes en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental identifiés dans les manuels scolaires analysés il y a :

- 4 problèmes de type Composition ;
- 3 problèmes de type Source ;
- 3 problèmes de type Puits.

Nous avons montré, que pour un problème de type composition, le schéma outille la démarche correspondant à une composition – en lien avec des jeux sur les *unités relatives* étudiés dans le chapitre B de la thèse et rappelé ci-avant. Nous avons aussi montré, de point de vue du schéma segmentaire, qu'un problème de type Source avec deux relations multiplicatives de type « ...fois plus... » est facile à résoudre alors que si ces deux relations étaient de type « ...fois moins... » devient difficile à résoudre. Et inversement, nous avons montré qu'un problème de type Puits avec deux relations multiplicatives de type « ...fois plus... » est difficile à résoudre alors que si ces deux relations étaient de type « ...fois moins... » devient facile à résoudre. Les 3 problèmes de type source proposés dans les manuels scolaires analysés sont des problèmes où nous identifions deux relations multiplicatives de type « ...fois plus... », en conséquence ils peuvent être considérés comme des problèmes assez aisés à résoudre de ce point de vue.

S'agissant des problèmes de type Puits, le tableau suivant expose les trois problèmes de ce type :

<p>353. — Paul a 2 fois plus de billes que Pierre et 3 fois moins que Jean. Us ont ensemble 81 billes. Combien en ont-ils chacun ?</p> <p>R. — Part de Pierre :  9 billes.</p> <p>Part de Paul :  18 billes.</p> <p>Part de Jean :  54 billes.</p> <p style="text-align: right;">} 81 billes</p>	<p>nous identifions une relation de type « ...fois plus... » et une autre de type « ...fois moins... »</p>
--	--

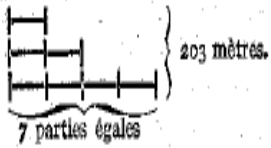
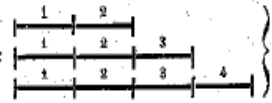
<p>354. — Partager une pièce d'étoffe de 203 mètres en trois parties telles que la première soit le double de la deuxième et la moitié de la troisième.</p> <p>S. — Deuxième partie : Première partie : Troisième partie :</p>  <p>203 mètres.</p> <p>7 parties égales</p> <p>Longueur de la deuxième partie : $203^m : 7 = 29$ mètres. Longueur de la première partie : $29^m \times 2 = 58$ mètres. Longueur de la troisième partie : $29^m \times 4 = 116$ mètres.</p>	<p>nous identifions une relation de type « ...fois plus... » (le double) et une autre de type « ...fois moins... » (la moitié).</p>
<p>1011. — Un caissier a payé 3 factures s'élevant ensemble à 3 780 francs. Le montant de la première est les $\frac{2}{3}$ de celui de la deuxième et la moitié de celui de la troisième. A combien s'élève chaque facture?</p> <p>S. — Première facture : Deuxième facture : Troisième facture :</p>  <p>Total : 3 780 francs.</p> <p>Montant de la première facture : $3\ 780^f \times \frac{2}{9} = 840$ francs. Montant de la deuxième facture : $3\ 780^f \times \frac{3}{9} = 1\ 260$ francs. Montant de la troisième facture : $3\ 780^f \times \frac{4}{9} = 1\ 680$ francs.</p>	<p>nous identifions une relation de type « ...fois moins... » (la moitié) et une autre fractionnaire non unitaire.</p>

Tableau C12 : problèmes de type Puits en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental

Les auteurs résolvent ces problèmes de type puits en retenant comme *unité graphique* soit la plus petite grandeur (dans les deux premiers problèmes), soit $\frac{1}{n}$ d'une grandeur (ici $\frac{1}{2}$ de la plus petite grandeur ou $\frac{1}{3}$ de la grandeur moyenne : dans le 3^{ème} problème). Un traitement des relations interne au registre de la langue naturelle (inverser une des deux relations) permet de convertir les deux premiers problèmes « Puits » en « Composition » :

<p>Paul a deux fois plus de billes que Pierre et 3 fois moins que Jean. Ils ont ensemble 81 billes. Combien ont-ils chacun ?</p> <p style="text-align: center;"><u>Puits</u></p>	<p>Pierre a deux fois moins de billes que Paul, et Paul a 3 fois moins de billes que Jean. Ils ont ensemble 81 billes. Combien ont-ils chacun ?</p> <p style="text-align: center;"><u>Composition</u></p>
<p>Partager une pièce d'étoffe de 203 m en trois parties telles que la première soit le double de la deuxième et la moitié de la troisième.</p> <p style="text-align: center;"><u>Puits</u></p>	<p>Partager une pièce d'étoffe de 203 m en trois parties telles que la deuxième soit la moitié de la première et la première soit la moitié de la troisième.</p> <p style="text-align: center;"><u>Composition</u></p>

La complexité établie lors du chapitre B pour résoudre un problème Puits où nous identifions deux relations de types « ...fois plus... » n'est pas d'actualité. Cette complexité n'est pas aussi établie lors de la résolution du troisième problème quoique la présence de la fraction $\frac{2}{3}$ amène un autre type de complexité qui réside dans la mobilisation de la notion de *l'unité du problème* pour le choix de *l'unité graphique* nécessaire pour mettre en schéma le problème traité.

Considérons le problème suivant :

« Un caissier a payé 3 factures s'élevant ensemble à 3780 francs. Le montant de la première est 2 fois plus que celui de la deuxième et 3 fois plus que celui de la troisième ».

C'est un problème qui paraît *a priori* plus facile à résoudre que le problème posé avec la fraction $\frac{2}{3}$, alors qu'il est compliqué pour mettre en schéma un tel problème (voir plus dans le chapitre B, pp. 61-62).

Aucun problème de type Puits dont les deux relations multiplicatives sont de type « ...fois plus... » n'a été recensé dans les manuels scolaires retenus pour l'analyse. Le fait que les deux premiers problèmes contiennent deux relations symétriques (une de type « ...fois plus... » et l'autre de type « ...fois moins... » renvoie à un problème de type Composition par le biais d'un traitement, d'une des deux relations, interne au registre de la langue naturelle.

III. Conclusion

À travers cette analyse nous avons commencé par mettre en avant des structurations de connaissances et de savoirs différents dans les manuels étudiés pour partie parfois liés aux grandeurs ou aux champs additifs/multiplicatifs en jeu. Un autre élément lié à la structuration a particulièrement attiré notre attention dans l'un des manuels étudiés : des tâches possiblement intermédiaires dans la schématisation de relations entre deux grandeurs (à partir de schémas, formuler des relations entre des grandeurs) sans nécessairement confronter d'emblée les élèves à la production d'un schéma pour résoudre un problème. Nous avons trouvé ce point intéressant à retenir pour la conception d'expérimentations – nous y reviendrons.

Toutefois, l'ensemble de ces manuels conserve pour la plupart une structuration des connaissances et savoirs en jeu en lien avec des catégorisations de problèmes arithmétiques liés à leurs structures, catégories d'ailleurs officialisées dans certains manuels d'arithmétique anciens (comme celui qui prend la forme d'un recueil de problèmes regroupés selon les dites catégories) et que nous avons recoupées avec nos propres choix de découpages en énoncés-schémas fondamentaux (en pointant les absences/présences de ces derniers dans chacun des manuels étudiés).

Il nous a fallu rentrer plus avant dans l'étude des problèmes et les exemples de solutions souvent données en lien avec ces problèmes dans les différents manuels pour en savoir plus sur les connaissances exposées et savoirs institutionnalisés en lien avec la démarche de schématisation segmentaire.

Nos analyses (liées à différentes entrées sur lesquelles nous ne revenons pas ici) nous ont permis d'identifier plusieurs phénomènes liés aux conditions d'étude en lien avec nos « énoncés-schémas fondamentaux ». Ainsi nous avons pu constater des récurrences dans les choix d'*unités graphiques* associés à des énoncés-schémas fondamentaux (la plus petite grandeur ou $\frac{1}{n}$ d'une grandeur que nous avons appelé l'*unité du problème*). Ces récurrences permettent de fait une économie dans la résolution de la plupart des problèmes posés – comme nous avons pu le montrer dans le chapitre B. Toutefois, elles peuvent d'une part contribuer à créer des systèmes d'attentes implicites liés aux connaissances mathématiques pilotant ces choix d'unités. D'autre part, pour les quelques problèmes où d'autres choix s'opèrent,

parfois du fait d'ailleurs de leur structure au sens de Bednarz & Janvier (1994) (comme dans celui de la fleuriste²⁸, en lien avec le 5^{ème} énoncé-schéma fondamental), la question se pose de ce qui pourrait à la fois piloter ce nouveau choix d'*unité graphique* et les connaissances arithmétiques inédites devenues nécessaires pour l'interprétation du schéma et sa résolution (augmenter la valeur d'un (ou deux) termes d'une somme augmente la somme d'autant) en l'absence d'un discours lié à la formulation de telles connaissances.

Nous avons identifié des choix d'*unités graphiques* qui peuvent d'une part être mis en lien avec la formulation de relations entre les grandeurs. Nous avons pu montrer à ce sujet deux types de choix principaux d'*unités graphiques* en lien avec des relations multiplicatives entre grandeurs : la plus petite grandeur en jeu quand il s'agit de relations multiplicatives entières et $\frac{1}{n}$ de la grandeur quand il s'agit d'une fraction $\frac{m}{n}$ de cette grandeur. Nous avons pu noter à ce sujet que les formulations de type « n fois moins » ou « $\frac{1}{n}$ de » liées à des fractions unitaires sont sous-représentées dans l'ensemble à part quelques exceptions liées au 6^{ème} énoncé- schéma fondamental. Ces choix d'*unités graphiques* peuvent d'autre part être mis en relation avec d'autres aspects liés à une recherche d'économie dans la stratégie de résolution. Ce qui peut comme nous venons de le voir conduire à une certaine variété de cas considérés pour certains problèmes, notamment dans le champ additif en vue de viser l'économie d'une démarche de résolution en lien avec des problèmes de type « Puits » ou « Composition » que ces choix permettent de traiter comme des problèmes de type Source (via un travail intermédiaire dans le registre de la langue naturelle). Toutefois ce jeu sur le choix d'une *unité graphique* « adaptée » conduit parfois à convoquer d'autres types de connaissances arithmétiques dans l'interprétation du schéma : « Si on augmente la valeur d'un (ou deux) segment(s) représentant une (deux) grandeur(s) dans le registre graphique par un (ou deux) segment(s) de valeur(s) S on doit aussi augmenter la somme des grandeurs considérées par S ». En lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental, le choix d'une *unité graphique* (le segment représentant la petite grandeur et celui qui représente la grande grandeur) conduit à convoquer la connaissance : « Si on augmente/diminue la valeur d'un segment représentant une des

²⁸ Bodard, Bréjaud, Le Calcul Quotidien CM2 (1960). p 72

deux grandeurs dans le registre graphique par un segment de valeur S on doit aussi augmenter/diminuer la somme des deux grandeurs considérées par S »

Les connaissances mathématiques que nous avons considérées comme principalement mises en jeu dans des démarches de schématisation segmentaire liées à nos énoncés-schémas fondamentaux liées à des changements d'unités dans la production et dans l'interprétation des schémas sont rendues « muettes » voire transparentes.

Dans les solutions exposées de manière ostensive comme des exemples de résolution dans les manuels d'arithmétique élémentaires anciens, ou guidées dans le manuel élève de la méthode Singapour, nous ne trouvons pas trace d'un discours lié à la formulation de telles connaissances – elles sont mises en fonctionnement de manière transparente. Ce constat vaut que ce soit des changements d'unités liés à la composition de relations de comparaison ou d'opération de double désignation – tels que décrits dans le chapitre précédent (chapitre B).

Si certains savoirs mathématiques sont institutionnalisés, ils relèvent de formules comme celles de l'inversion d'une fraction, qui interrogent sur le statut que prend la schématisation segmentaire comme outil de construction intermédiaire de telles formules. Là aussi, nous pouvons dès lors faire l'hypothèse de systèmes d'attentes implicites réciproques liés cette fois pour partie à la généralisation en lien avec l'interprétation de schémas segmentaires.

Ce sont ces systèmes d'attentes réciproques à même d'orienter la mise en fonctionnement de connaissances convoquées dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire que nous modélisons par des contrats didactiques dans la partie suivante de notre thèse.

Chapitre D

**Etude d'un questionnaire posé à des élèves
tunisiens et français et d'une
expérimentation en classe de sixième année
de base en Tunisie**

*Des conditions et contraintes sur l'enseignement et
l'apprentissage de connaissances et de savoirs sur
la résolution de problèmes arithmétiques en lien
avec les schémas segmentaires*

I. Introduction

L'enjeu central de notre travail de thèse est d'identifier des connaissances mathématiques possiblement en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation. Notre intérêt porté au contrat didactique vient de deux hypothèses différentes :

- Suite à notre étude des connaissances mathématiques mises en fonctionnement (chapitre B) et possiblement enseignées sur la schématisation segmentaire, nous faisons l'hypothèse qu'une part d'entre elles demeure potentiellement implicite dans les situations d'enseignement et d'apprentissage. Notre analyse de manuels tend à confirmer que certaines de ces connaissances, liées à des choix possibles d'*unités graphiques* et de « jeux » sur les *unités relatives* demeurent implicites, et ce malgré un processus d'enseignement explicite d'une démarche de schématisation segmentaire comme outil de résolution de problèmes, au sein de différentes institutions didactiques.
- Du fait de ce caractère potentiellement implicite de telles connaissances, nous faisons l'hypothèse de systèmes d'attentes pour une part implicites à leur tour à même de piloter les comportements d'élèves et d'enseignants dans l'enseignement/apprentissage de la schématisation segmentaire comme outil de résolution de problèmes arithmétiques. Ces systèmes d'attentes seraient d'une part liés aux conversions et aux traitements internes aux registres de représentation sémiotique (de la langue naturelle, graphique ou numérique/symbolique) et liés d'autre part aux systèmes d'*unités relatives* et aux « jeux » sur ces unités (tels que décrits dans le chapitre B).

Ce sont précisément ces systèmes d'attentes liés à des connaissances demeurant implicites dans un processus d'enseignement/apprentissage de la résolution arithmétique de problèmes outillée par la schématisation segmentaire que nous chercherons à modéliser par des contrats didactiques.

Le fait que ces contrats puissent se « jouer », voire se renégocier à différentes échelles – en lien avec des savoirs mathématiques, des classes de problèmes ou de situations ou plus localement en lien avec une action d'élève dans la résolution d'un problème donné nous ont amené à nous intéresser aux échelles de contrat didactique au sens de

Hersant (2001, 2010) et Hersant & Perrin-Glorian (2003) en articulant ces échelles de contrat aux couples énoncés-schémas fondamentaux décrits dans le chapitre B de la thèse.

▪ Les échelles de contrat didactique

Pour permettre l'analyse *a posteriori* de toutes les situations, quelles que soient les propriétés du milieu, Hersant (2001), Perrin-Glorian & Hersant (2003) et Hersant, 2010 ont proposé une structuration du contrat didactique qui repose sur l'identification et l'organisation de quatre composantes non indépendantes de ce contrat sur lesquelles l'enseignant (ou éventuellement les élèves) peut (resp. peuvent) agir :

- le domaine mathématique du savoir ;
- le statut didactique du savoir qui correspond à son degré d'institutionnalisation et de familiarité ;
- les caractéristiques du milieu de la situation choisie par l'enseignant, c'est-à-dire en particulier ses possibilités d'apporter des rétroactions interprétables par les élèves ;
- la répartition des responsabilités relatives au savoir entre le professeur et les élèves.

Le schéma ci-dessous synthétise la façon dont se déclinent les différentes échelles de contrats au regard des composantes ainsi retenus vis-à-vis de l'étude de savoirs et de connaissances mathématiques :

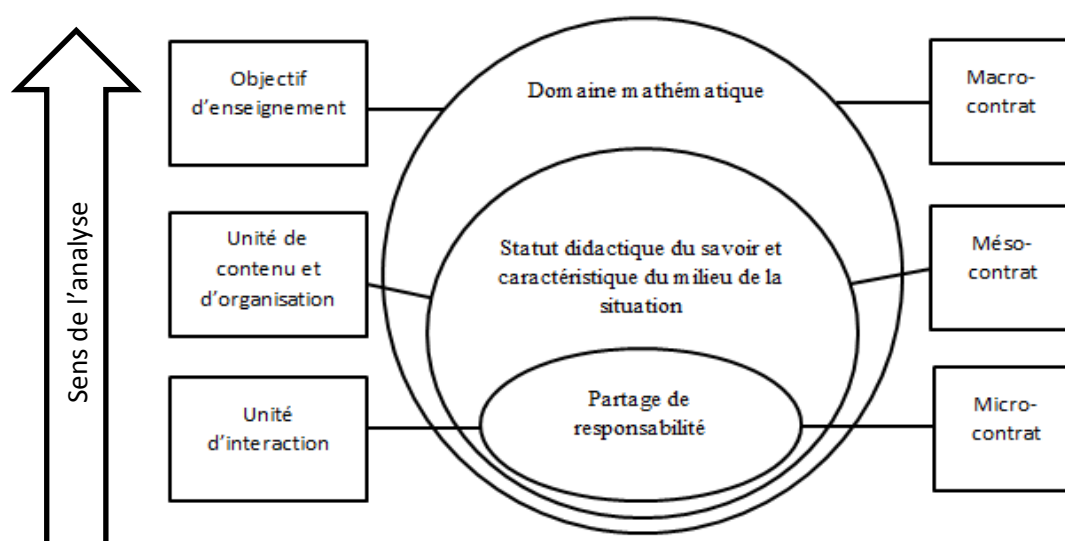


Figure D1 : Structuration du contrat didactique – extraite de Hersant (2010)

Nous allons montrer ci-après comment nous avons essayé d'articuler les échelles de contrats à nos énoncés-schémas fondamentaux sur la base d'un exemple lié à un énoncé-schéma fondamental donné (le 1^{er} énoncé-schéma fondamental).

- **une première mise en fonctionnement de ces échelles de contrat en lien avec un énoncé-schéma fondamental donné :**

Lorsque nous parlons par exemple du 1^{er} énoncé-schéma fondamental :

si $A = \frac{m}{n} B$, alors $B = \frac{n}{m} A$ (m, n dans \mathbb{N}^*), nous sommes au niveau d'un objectif d'enseignement.

Comme nous l'avons vu dans certains manuels, l'inversion d'une fraction et la formule associée peuvent devenir un objectif d'enseignement associé à ce problème – lié à un domaine d'étude de savoirs (lié aux relations multiplicatives fractionnaires entre deux grandeurs). Si tel est le cas, nous pouvons envisager que les élèves réinvestissent la formule d'inversion d'une fraction dans la résolution d'un tel problème par la suite, sous l'effet d'un macro-contrat du type « inverser une fraction ». Si une telle règle de macro-contrat didactique est installée, elle peut d'ailleurs pousser les élèves à abandonner la schématisation segmentaire dans la résolution de tels problèmes.

S'agissant de méso-contrat didactique lié à une unité d'enseignement : « la schématisation segmentaire pour résoudre ce type de problème arithmétique », nous pouvons imaginer d'autres systèmes d'attentes à même de piloter leur activité mathématique : liée à la représentation schématique des grandeurs et des micro-contrats associés (par exemple pilotant le choix de « *l'unité graphique* » ou une action de report/partage » de cette *unité graphique*...)

Prenons l'exemple du problème suivant :

« Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ? »

Le milieu proposé est à associer aux caractéristiques d'énoncés-schémas liées à l'étude des énoncés-schémas fondamentaux et aux variables didactiques identifiées

(chapitre B) : nous regardons certaines caractéristiques des énoncés et des schémas à même de déterminer l'activité mathématique des élèves du point de vue de leurs connaissances, voire de fournir des rétroactions – mais de manières complémentaires des règles de contrat à même d'orienter cette activité. Le milieu proposé a des caractéristiques propres, par exemple la fraction qui relie les deux grandeurs est non unitaire.

La représentation des deux grandeurs à partir de la relation multiplicative fractionnaire présente dans l'énoncé peut être régie par un méso-contrat didactique que nous tentons de décrire ci-après.

Dans les méso-contrats liés à la production de schémas segmentaires nous identifions le méso-contrat lié au choix d'une *unité graphique* : ici le $\frac{1}{15} (\frac{1}{n})$ d'une grandeur qui constitue ce que nous avons appelé *l'unité du problème* qui ne concerne pas que ce problème mais tout problème intégrant une relation fractionnaire multiplicative entre deux grandeurs ($\frac{1}{n}$ d'une grandeur) : $A = \frac{m}{n} B$ alors $A = m \times (\frac{1}{n} B)$ et $B = n (\frac{1}{n} B)$ donc avec $u = (\frac{1}{n} B)$, $A = m u$ et $B = n u$, ce qui permet de représenter la grandeur A par m *unités graphiques* et la grandeur B par n *unités graphiques*.

Dans les méso-contrats liés à l'interprétation de schémas segmentaire nous identifions des méso-contrats liés à la généralisation qui peuvent prendre différentes formes : soit liées au macro-contrat décrit ci-avant (réappliquer une formule enseignée), soit liées à des interprétations généralisées de schémas segmentaires données, nous y reviendrons plus explicitement ultérieurement.

Le but de notre projet à suivre est de modéliser des systèmes d'attentes implicites par des échelles de contrat liés à la production/interprétation de schémas dans la résolution arithmétique de problèmes associés à nos énoncés-schémas fondamentaux. A toute valeur de la variable associée à chacun de nos énoncés-schémas fondamentaux nous avons associé une classe de problèmes qui représentent des unités de contenu pour les différents domaines mathématiques auxquels ils sont associés. Sur ce, l'échelle du contrat qui sera privilégié comme modèle des systèmes des attentes implicites pilotant possiblement l'activité des élèves quand ils produisent des schémas segmentaires est le méso-contrat. Si nous privilégions au final cette échelle

de contrats dans ces analyses, c'est par ce qu'à ce stade de notre réflexion, nous considérons les énoncés-schémas fondamentaux comme des unités d'enseignement, tout en nous questionnant comme nous l'avons fait ci-avant (avec l'exemple du savoir mathématique : inversion d'une fraction) sur les éventuelles relations de ces méso-contrats avec des macro-contrats didactiques possibles.

S'agissant des micro-contrats, ceux-ci étant liés à des unités d'interaction, c'est davantage dans des analyses *a posteriori* liées à l'étude de comportements d'élèves et de l'enseignant dans la classe – à l'occasion de la séquence expérimentale que nous essaierons d'identifier ce qui semble relever d'attentes implicites pilotant ces interactions.

Nous faisons ci-après une liste de méso-contrats didactiques possibles liés à la production/interprétation de schémas segmentaires qui prend appui sur nos études préliminaires (chapitre B et chapitre C) – ces hypothèses de méso-contrats didactiques possibles outilleront par la suite nos analyses *a priori* et *a posteriori* liées au questionnaire et à la séquence expérimentale.

1. Méso-contrats liés à la production de schémas segmentaires

Nous distinguons des méso-contrats relatifs à des relations multiplicatives de comparaison entre grandeurs et à des relations additives de comparaison entre grandeurs.

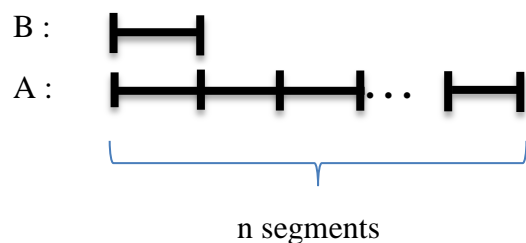
a. Pour les relations multiplicatives

Nous distinguons deux types de relations multiplicatives entre deux grandeurs A et B données dans nos énoncés-schémas fondamentaux (A connue et B inconnue, cas du 1^{er} énoncé-schéma fondamental, ou A et B sont toutes les deux des grandeurs inconnues, cas des 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux) :

Relation multiplicative entière ($A = n \times B$) ou fractionnaire ($A = \frac{m}{n} B$). Lorsque la relation multiplicative est fractionnaire nous avons distingué dans la partie B deux cas de figure : - $\frac{m}{n}$ fraction non unitaire ;

- $\frac{m}{n}$ fraction unitaire ($m = 1, A = \frac{1}{n} \times B, n > 1$).

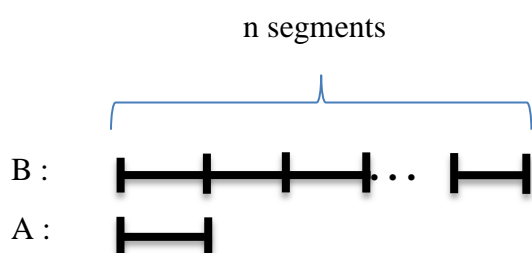
Dans le cas où $A = n \times B$, chose que nous pouvons trouver exprimée de plusieurs façons, par exemple « A est n fois plus grand que B », en nous référant au chapitre B, pour schématiser une telle relation nous représentons la petite grandeur (ici B) par un segment (*unité graphique*) et nous reportons ce segment n fois pour représenter la grande grandeur (ici A) :



Une telle représentation n'est possible qu'après repérage de la petite grandeur, micro-contrat qui nous codifions par **I_P_G** (identification de la petite grandeur).

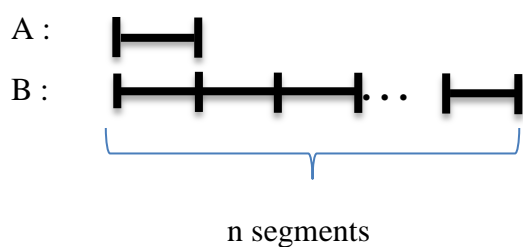
Représenter la petite grandeur par une unité segmentaire dans une relation multiplicative entière puis reporter cette unité n fois pour représenter la grande grandeur est une règle que nous codifions par **R_us_m_e**.

Dans le cas où $A = \frac{1}{n} \times B$, chose que nous pouvons trouver exprimée de plusieurs façons, comme par exemple « A est n fois plus petit que B », en nous référant au chapitre B, pour schématiser une telle relation nous représentons la grande grandeur (ici B) par un grand segment et nous partageons ce segment n fois pour représenter la petite grandeur (ici A) :

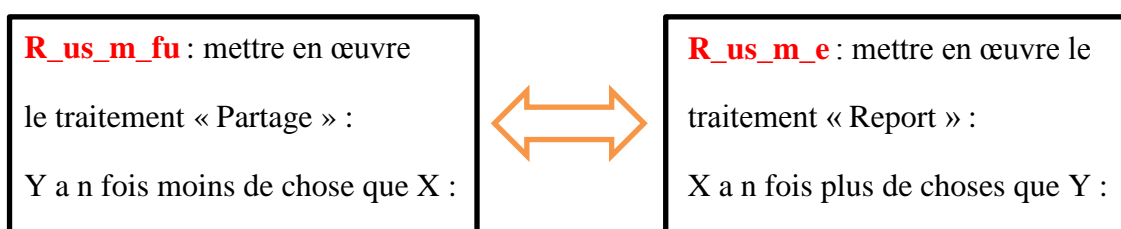


La représentation de la grande grandeur par un segment et partager ce segment sur n pour représenter la petite grandeur dans une relation multiplicative fractionnaire unitaire est une règle que nous codifions par **R_us_m_fu**.

La règle **R_us_m_e** peut toutefois s'avérer unificatrice pour l'ensemble des relations multiplicatives (y compris celles pouvant relever de **R_us_m_fu**) à la condition d'un traitement interne en amont dans le registre de la langue naturelle opérant une symétrisation des relations multiplicatives entre grandeurs en jeu. La relation « A est n fois plus petit que B » peut être négociée comme « B est n fois plus grand que A » dont le schéma congruent est celui qui correspond au suivant :



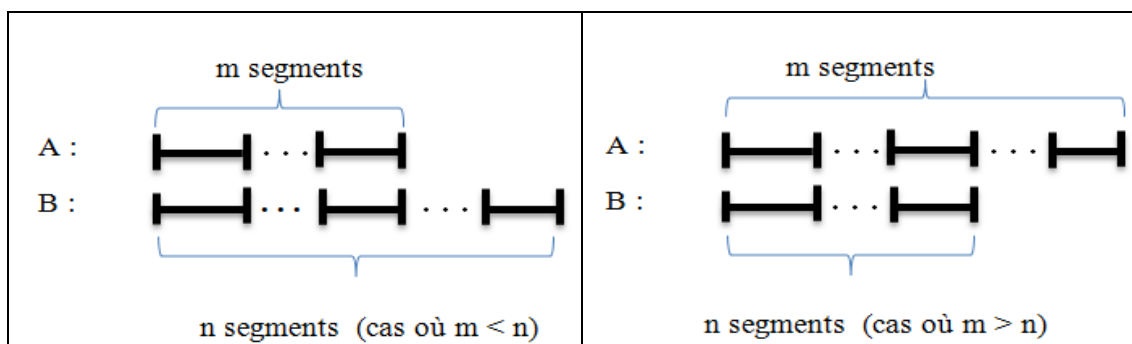
Un micro-contrat de symétrisation en lien avec ces possibles représentations d'une relation multiplicative peut être installé :



En résumé, soit nous envisageons un méso-contrat de type **R_us_m_e** mais avec des traitements internes de symétrisation de relations multiplicatives lorsque ces relations sont de type « ... $\frac{1}{n}$ de... » ou « ...n fois moins... » pour les transformer à des relations multiplicatives de type « ... n fois plus... », soit nous envisageons deux méso-contrats qui cohabiteraient : **R_us_m_e** pour les relations de type $A = n \times B$ ou de type « ...n fois plus... » et **R_us_m_fu** pour les relations de type $A = \frac{1}{n} \times B$ ou de type « ...n fois moins... ».

Le cas où $A = \frac{m}{n} B$, avec $\frac{m}{n}$ fraction non unitaire, rend nécessaire l'instauration d'un autre système d'attente que nous pouvons modéliser par un autre méso-contrat que nous codifions par la règle **R_us_m_f**. L'instauration de ce nouveau système sera régie par la mise en œuvre de ce que nous avons appelé dans le chapitre B la notion de *l'unité du problème*. En fait $A = \frac{m}{n} B$ alors $A = m \times (\frac{1}{n} B)$ et $B = n (\frac{1}{n} B)$ donc avec

$u = (\frac{1}{n}B)$, $A = m.u$ et $B = n.u$ (u est la valeur d'un segment ou *unité graphique*). La grandeur correspondant à cette *unité du problème* est alors représentée par n segments :



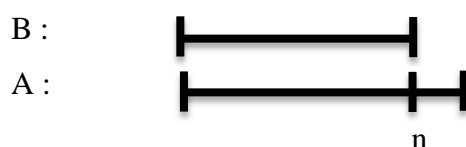
La valeur d'un segment est égale à $\frac{1}{n}B$ (ou $\frac{1}{m}A$).

La mise en œuvre de la notion de *l'unité du problème* d'une façon systématique nous l'appellerons méso-contrat de « *l'unité de problème* » lié à la représentation d'une relation multiplicative « fraction de ... » ou tout simplement sera codifiée comme cité ci-avant par **R_us_m_f** (représentation de A par m unités segmentaire et B par n unités segmentaire dans une relation multiplicative fractionnaire « $A = \frac{m}{n} B$ », $\frac{m}{n}$ fraction non unitaire).

b. Pour les relations additives

Les relations additives entre deux grandeurs A et B dans nos énoncés-schémas fondamentaux sont de la forme « $A = B + n$ » ou « $A = B - n$ » (les deux grandeurs A et B sont inconnues, cas des 4^{ème} et 5^{ème} énoncés-schémas fondamentaux). Ces relations sont exprimées dans le registre de la langue naturelle comme suit : « A a n choses de plus que B » ou « A a n choses de moins que B ».

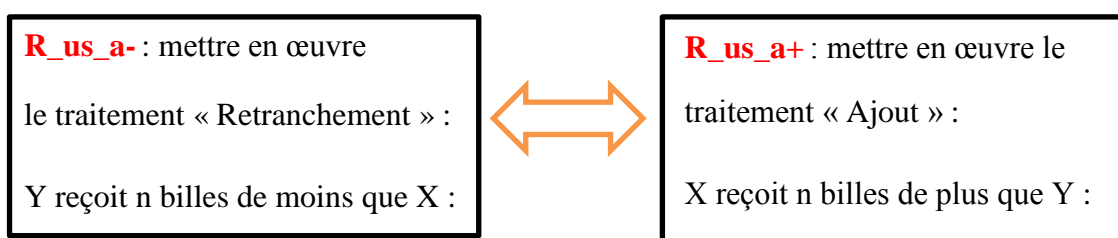
Le schéma correspondant à la règle implicite que nous allons codifier par **R_us_a+** (représenter la petite grandeur par une unité segmentaire puis ajouter un petit segment de valeur n pour représenter la grande grandeur dans une relation additive « ...de plus... ») pour représenter la relation « $A = B + n$ » est le suivant :



Le système d'attente implicite pour représenter la relation « $A = B - n$ » est différent que celui occasionné par la règle **R_us_a+**. La règle qui va piloter la représentation d'une telle relation sera codifiée par **R_us_a-** (représenter la grande grandeur par un segment puis en retrancher un petit segment de valeur n pour représenter la petite grandeur dans une relation additive « ...de moins... »). Le schéma correspondant à la relation ci-dessus et qui répond au système d'attente régi par la règle **R_us_a-** est le suivant :



La règle **R_us_a+** peut s'avérer unificatrice pour les relations additives à la condition d'un traitement interne en amont dans le registre de la langue naturelle opérant une symétrisation des relations additives entre grandeurs en jeu. La relation « $A = B - n$ » peut être négociée comme « $B = A + n$ » et un micro-contrat (exprimer « ... n de moins... » comme « ... n de plus... ») en lien avec ces possibles représentations d'une relation additive peut être installé :



En résumé, et comme évoqué avec les relations multiplicatives, soit nous envisageons un méso-contrat de type **R_us_a+** mais avec des traitements internes de symétrisation de relations additives lorsque ces relations sont de type « ... n de moins... » pour les transformer en des relations additives de type « ... n de plus... », soit nous envisageons deux méso-contrats qui cohabiteraient : **R_us_a+** pour les relations de type $A = B + n$ et **R_us_a-** pour les relations de type $A = B - n$.

2. Méso-contrats liés à des généralisations

Des méso-contrats liés à des généralisations peuvent être modélisés par des formules. Ces formules peuvent être enseignées, y compris en l'absence des schémas, ou bien être construites enseignées à partir de schémas, ou bien construites, généralisées par les élèves eux-mêmes à l'occasion de la fréquentation récurrente de

problèmes à résoudre par le biais de la schématisation. Ces méso-contrats sont en lien avec des macro-contrats visant un objectif d'enseignement plus global (voir exemple p. 214).

a. Méso-contrats modélisés par des formules en l'absence/présence de schémas

Les résolutions des 1^{er} et 4^{ème} énoncés-schémas fondamentaux peuvent être modélisées par les deux formules suivantes :

- Si $A = \frac{m}{n} B$ alors $B = \frac{n}{m} A$ (1^{er} énoncé-schéma fondamental) ;
- $A + B = S$ et $A - B = D$, Alors : $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$ (4^{ème} énoncé-schéma fondamental).

Ces deux formules pouvant permettre de résoudre les problèmes associés peuvent être :

- ou bien communiquées aux élèves sans éclairage sur les connaissances à même de justifier cette inversion de rapport ou à la règle « somme et différence » ;
- ou bien institutionnalisées suite à une résolution d'un problème afférent par le biais de la schématisation. Les applications directes des deux formules se substitueront au futur à toutes autres formes de résolutions, ce qui pose la question de la schématisation comme un objet d'étude transitoire : Qu'advient-il de la résolution outillée par un schéma de type segmentaire ? Est-elle à considérer comme le savoir en jeu, visé ou bien un moyen intermédiaire de construire le savoir exposé et institutionnalisé ?
- ou bien construites, généralisées par les élèves eux-mêmes à l'occasion de la fréquentation récurrente de problèmes à résoudre par le biais de la schématisation.

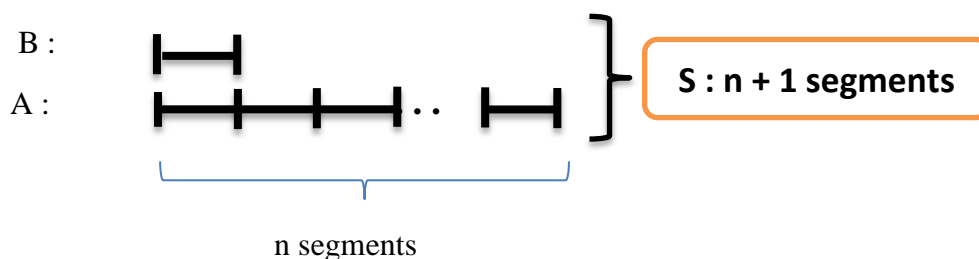
La distinction de ces différents cas à partir des observables uniquement liés à l'activité des élèves peut s'avérer difficile. D'où notre choix de coder indifféremment ce qui relèverait d'observables liés à la mise en application de telles formules (notamment dans le cas d'absence de schémas, mais aussi dans les deux autres cas cités ci-avant) :

- Un méso-contrat que nous codifierons par **R_INV_F** pour la première formule (règle d'inversion d'une fraction) ;
- Un autre méso-contrat que nous codifierons par **R_S_D** pour la deuxième formule (règle pour trouver deux grandeurs à partir de leur somme et différence).

b. Méso-contrats modélisés par des formules après interprétation de schémas

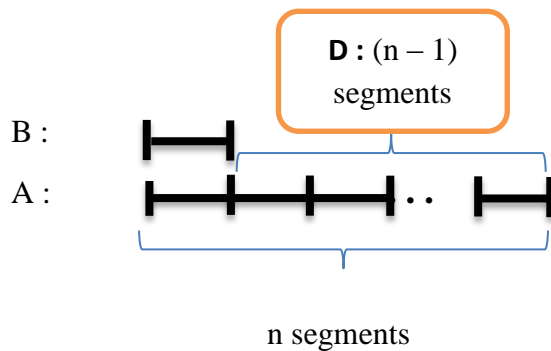
Les résolutions des 2^{ème} et 3^{ème} énoncés-schémas fondamentaux peuvent être modélisées par des formules via la schématisation comme nous venons de voir pour les 1^{er} et 4^{ème} énoncés-schémas fondamentaux. Nous distinguons les formules décrites ci-après des deux formules précédentes – du fait que ces formules ne sont nécessairement pas enseignées, mais construites, généralisées par les élèves « à partir des schémas produits pour résoudre ce type de problèmes » :

- Si on nous donne $A = n \times B$ et $A + B = S$ (3^{ème} énoncé-schéma fondamental),
Le schéma segmentaire correspondant est le suivant :



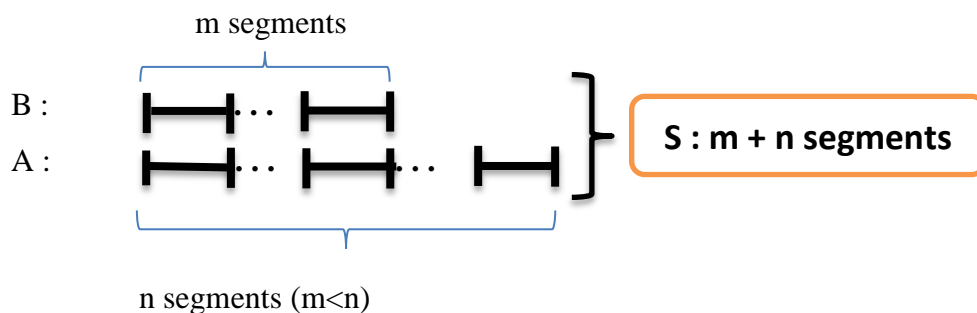
La somme S est représentée par $n + 1$ segments et B par un seul segment. Une interprétation triviale du schéma donne **$B = S : (n + 1)$** . Cette dernière formule peut être considérée comme un méso-contrat que nous codifierons par **R_Rme_S** (règle pour un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental où nous identifions deux grandeurs inconnues dont nous connaissons la somme et reliées par une relation multiplicative entière) : *Si on nous donne la somme S de deux grandeurs et si l'opérateur qui relie ces deux grandeurs est un entier, alors la petite grandeur est égale à la somme S divisée par l'opérateur + 1.*

- Pareillement, Si on nous donne $A = n \times B$ et $A - B = D$ (2^{ème} énoncé-schéma fondamental), Le schéma segmentaire correspondant est le suivant :



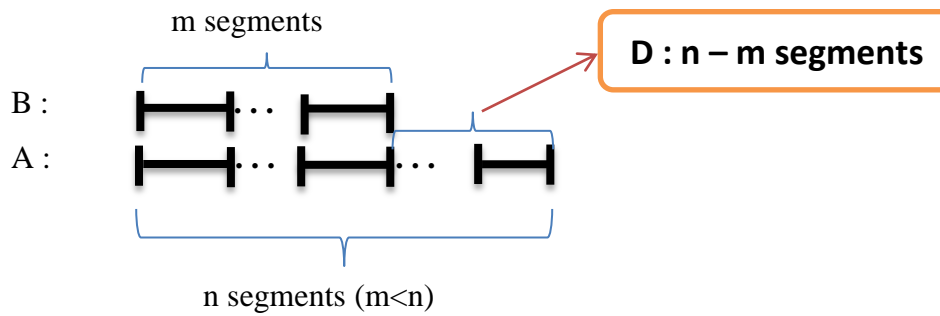
La différence D est représentée par $n - 1$ segments et B par un seul segment, ce qui donne $\mathbf{B = D : (n - 1)}$. Cette dernière formule peut être aussi considérée comme un méso-contrat de généralisation que nous codifierons par **R_Rme_D** (règle pour un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental où nous identifions deux grandeurs inconnues dont nous connaissons la différence et reliées par une relation multiplicative entière) : *Si on nous donne la différence D entre deux grandeurs et si l'opérateur qui relie ces deux grandeurs est un entier, alors la petite grandeur est égale à la différence D divisée par l'opérateur $- 1$.*

- Si on nous donne $A = \frac{m}{n} B$ et $A + B = S$, $\frac{m}{n}$ fraction non unitaire (3^{ème} énoncé-schéma fondamental), Le schéma segmentaire qui représente ces relations est le suivant :



À partir du schéma, la valeur d'un segment est égale à $\mathbf{S : (m + n)}$. C'est un méso-contrat qu'on codifiera par **R_Rmf_S**

- Si on nous donne $A = \frac{m}{n} B$ et $A - B = D$, $\frac{m}{n}$ fraction non unitaire (2^{ème} énoncé-schéma fondamental), Le schéma segmentaire qui représente ces relations est le suivant :



La valeur d'un segment est égale à **D : (n - m)**. C'est un méso-contrat que nous codifierons par **R_Rmf_D**.

c. Méso-contrat d'interprétation généralisée via la schématisation

Contrairement aux méso-contrats de représentation, qui peuvent être mis en œuvre pour représenter différents problèmes en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux, les méso-contrats d'interprétation nous venons de citer touchent chacun un énoncé-schéma fondamental bien précis. Néanmoins, le méso-contrat d'interprétation nous présenterons ci-après va toucher quatre énoncés-schémas fondamentaux :

Les énoncés-schémas fondamentaux où nous identifions des sommes de grandeurs (A + B ou A + B + C) sont les 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux. Un méso-contrat qui généralise la procédure à suivre pour trouver la valeur d'une *unité graphique*, et que nous codifierons par **R_V_us** (règle pour trouver la valeur d'une *unité segmentaire*), est de diviser :

- La valeur de la somme donnée par le nombre des *unités graphiques* pour les 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux ;
- La valeur de la somme donnée (augmentée et/ou diminuée par les différences entre grandeurs) par le nombre des *unités graphiques* (notons que pour les 4^{ème} et 5^{ème} énoncés-schémas fondamentaux il faut compter que le nombre de l'*unité graphique* considérée sans compter les différences entre les grandeurs et ce nombre d'unités est 2 pour les problèmes en lien avec le 4^{ème} énoncé-schéma fondamental, 3 pour les problèmes en lien avec le 5^{ème} énoncé-schéma fondamental).

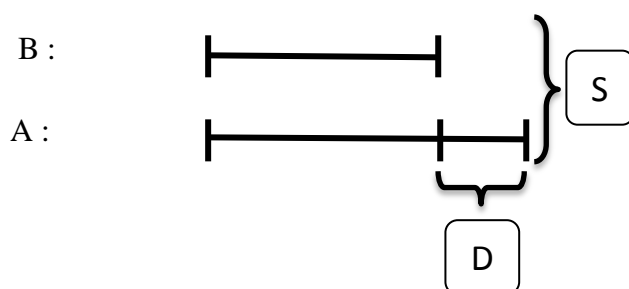
Un méso-contrat plus global, recouvre les cas de problèmes cités ci-avant et qui coïncide avec **R_Rme_S** et **R_Rmf_S**, mais en rupture avec **R_Rme_D** et **R_Rmf_D** et **R_INV_F** (ces trois dernières règles ne correspondent pas à la division d'une donnée connue du problème traité sur le nombre total des *unités graphiques* dénombrées à partir de son schéma représentatif).

3. Effets potentiels des méso-contrats didactiques

Dans un premier temps, après avoir établi ces listes de méso-contrats didactiques, nous nous sommes interrogés sur des effets potentiels de tels méso-contrats didactiques, comme de possibles observables de l'activité mathématique d'élèves dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la démarche de schématisation segmentaire. Nous exposons ci-après nos réflexions à ce sujet qui donnent à voir la complexité de caractériser des observables liés à d'éventuels effets de ces contrats didactiques.

a. Un effet productif d'un méso-contrat ne garantit pas la réussite (réussite : résolution correcte d'un problème)

Si des schémas sont produits par le biais d'effets de contrat, nous pouvons éventuellement envisager de trouver des représentations correctes de problèmes mais que l'interprétation de schémas pose problème aux élèves, car les schémas auront été produits sans les connaissances mathématiques associées. Par exemple, pour résoudre un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental ($A + B = S$ et $A - B = D$, trouver A et B) nous pouvons produire un schéma correct avec une résolution erronée :



Solution éventuelle fournie : $A = (S : 2) + D$ et $B = (S : 2) - D$, erreur que nous avons qualifiée de récurrente. Répondre à des systèmes d'attentes implicites (**R_us_a+**) ne garantit pas toujours la réussite (résolution correcte du problème). Ce sont des schémas qui répondent à ces attentes mais qui ne sont pas porteurs de connaissances nécessaires pour les produire.

b. Effets productifs/contre productifs de méso-contrats dûs à l'interprétation

Les méso-contrats cités ci-dessus peuvent possiblement parfois assurer des réussites sans que nous ne soyons assurés des connaissances en jeu. Pour autant, ils peuvent d'une part, être cause et être à l'origine d'erreurs, notamment lorsqu'il y a des ruptures de contrat non officialisées ou non contrôlées du point de vue des élèves – qui pourront être pour nous-même des occasions d'identifications de ces systèmes d'attentes implicites que modélisent les méso-contrats décrits ci-avant. D'autre part, dans le cadre d'une expérimentation, de telles règles peuvent faire l'objet de négociations, voire d'officialisations, à même de nous renseigner plus avant sur ces contrats locaux et leurs fonctionnements.

Dans cette partie, nous étudierons des trajectoires possibles des résolutions des problèmes en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux sous les effets des méso-contrats décrits ci-avant :

- Pour résoudre un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental ($A = \frac{m}{n} B$ et $A - B = D$, trouver A et B), et sous l'effet de la règle de calcul qui permet de résoudre un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental (**R_S_D** : $A + B = S$ et $A - B = D$, Alors : $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$), ramener la résolution d'un problème en lien à notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental à une résolution d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental est probable.

En fait, dans un problème en lien à notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental nous avons la différence entre A et B et le rapport entre A et B et dans un problème en lien à notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental nous avons la

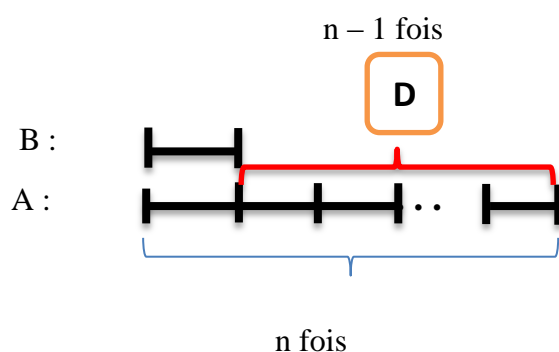
différence entre A et B et la somme de A et B. Une trajectoire possible pour résoudre un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental est de chercher la somme de A et B pour appliquer la règle du calcul qui permet de résoudre le problème comme s'il était en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental (fait que nous explicitons à travers un cas particulier du 2^{ème} énoncé-schéma fondamental ci-après) :

- Effet productif du méso-contrat régi par la règle de calcul **R_S_D** ($A + B = S$ et $A - B = D$, Alors : $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$) :

Si on nous donne deux grandeurs A et B telles que $A - B = D$ et $A = n \times B$ (2^{ème} énoncé-schéma fondamental), nous savons que $B = \frac{D}{n-1}$ (ce que nous attendons des élèves via la mobilisation de la règle **R_Rme_D**). Sous l'effet de la règle du contrat **R_S_D**, la somme de A et B est possible à trouver.

En fait $A + B = n \times \left(\frac{D}{n-1}\right) + \left(\frac{D}{n-1}\right) = \left(\frac{D}{n-1}\right) \times (n+1)$.

$\left(\frac{D}{n-1}\right)$ pour trouver la valeur d'un segment, puis multiplier par $(n+1)$ pour trouver la somme de A et B puisque nous avons en tout $(n+1)$ segments :



Nous ramenons ainsi la résolution d'un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental à une résolution d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental.

- L'effet de cette même règle (**R_S_D** : $A + B = S$ et $A - B = D$, Alors : $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$) peut être productif même si l'élève produit ou choisit un schéma incorrect pour résoudre un problème en avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental. L'application directe de cette règle sans maîtriser les

connaissances qui sont derrière cette règle peut permettre une « pseudo-réussite ».

- Le méso-contrat de l'*unité du problème* **R_us_m_f** qui régit la représentation d'une relation multiplicative de la forme $A = \frac{m}{n} B$ ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire) peut affecter celui qui régit la représentation d'une relation de la forme « $A = n \times B$ » (**R_us_m_e**). Au lieu de recourir au traitement « Report », la mobilisation du méso-contrat régi par la règle **R_us_m_f** est probable et la grandeur B sera éventuellement représentée par plus qu'un segment. Nous pouvons même nous attendre à un effet inverse lors de la résolution d'un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental quand la fraction $\frac{m}{n}$ qui relie les deux grandeurs est non unitaire. La petite grandeur qui doit être représentée par m segments risque d'être considérée lors de la résolution du problème comme représentée par un seul segment sous l'effet du méso-contrat régi par la règle **R_us_m_e**.
- La représentation de la relation « A reçoit n choses de plus que B » (avec $A + B = S$, problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental) risque de donner lieu à l'erreur qui suit : (identifier **R_us_a+** à **R_us_m_e**)



Identifier la différence n à une *unité graphique* peut induire l'élève en erreur (diviser S par 3 pour trouver A). Les grandeurs A et B étant inconnues, la question de codage du connu par rapport à l'inconnue « par une autre *unité graphique* » peut poser question – ce qui peut provoquer ce type d'erreurs.

- Nous savons que la valeur d'une *unité graphique* est égale à :
 - (A : m) pour un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental (sachant que $A = \frac{m}{n} B$ trouver B) ;

- [D : (n - m)] pour un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental ($A = \frac{m}{n} B$ et $A - B = D$ trouver A, trouver B) (Cas où $n > m$).

Sous l'effet de la règle **R_V_us** (règle pour trouver la valeur d'une unité segmentaire : diviser la somme donnée par le nombre des *unités graphiques*), l'erreur est possible lors de la résolution d'un problème en lien avec notre 1^{er} ou 2^{ème} énoncé-schéma fondamental. Au lieu de diviser la donnée du problème (A ou D) par m ou par n - m, la division par m + n est possible.

Ainsi, comme le donne à voir cette étude préalable d'effets potentiels des méso-contrats didactiques en jeu, certaines erreurs d'élèves commises dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire pourront être analysées au prisme de tels contrats didactiques. Pour autant, s'agissant de réponses d'élèves à un questionnaire, il est possible que celles-ci ne nous donnent accès que partiellement à de tels contrats didactiques ou à leurs effets (notamment en cas de réussites dans la production/interprétation des schémas segmentaires). C'est peut-être dès lors davantage dans l'expérimentation et en faisant le lien avec des observables liés à des micro-contrats installés par le professeur et investis par les élèves – et même à des macro-contrats (non envisagés ici mais qui seront rediscutés par la suite) que nous serons plus à même d'identifier d'éventuels effets de ces méso-contrats didactiques, que nous avons distingués au regard de leur caractère crucial vis-à-vis des connaissances mathématiques en jeu dans la démarche de schématisation segmentaire.

II. Analyse *a priori* du questionnaire

Nous avons conçu un questionnaire²⁹ à poser à une cohorte d'élèves tunisiens – mais aussi à une cohorte plus réduite d'élèves français à même de nous renseigner sur :

- les connaissances et savoirs appris par les élèves des deux institutions (première partie du questionnaire – feuille n°1 du questionnaire) avec des problèmes donnés à résoudre sans indication sur la démarche à suivre ;
- des propriétés de certaines tâches « intermédiaires » (association de schémas à des problèmes, compléter des schémas) proposées à ces élèves en lien avec des énoncés-schémas fondamentaux (feuilles n°2 et n°3) pour l'apprentissage des connaissances mathématiques associées à des énoncés-schémas fondamentaux ;
- des règles de contrat didactique (liées aux méso-contrats didactiques décrits ci-avant) à même d'avoir piloté l'activité des élèves au regard de leurs seules productions en réponse à ce questionnaire (feuilles 1, 2 et 3) – à mettre en regard des connaissances et savoirs appris en amont (feuille 1) ou mis à l'étude (feuilles 2 et 3). Notons que comme nous l'avons signalé ci-avant qu'une telle étude n'est pas aisée car si nous pouvons repartir de certaines erreurs d'élèves pour inférer des systèmes d'attentes implicites à même d'être à l'origine de telles erreurs – des réussites ne peuvent être interrogées – quand bien même elles seraient davantage pilotées par des contrats didactiques.

1. Analyse *a priori* de la feuille n°1 du questionnaire

À travers cette feuille, nous avons proposé aux élèves 5 problèmes en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux à résoudre librement avec ou sans schéma. Seul le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental n'a pas été traité dans cette feuille (voir annexe 1, pp. 404-405)

Nous présentons les résultats de nos analyses comme suit :

²⁹ Questionnaire posé aux deux cohortes d'élèves en mars 2018 – sans aucune consigne, autre que celles du questionnaire, ni aux élèves, ni aux enseignants.

- par énoncé-schéma fondamental (1^{er}, 2^{ème} ...). Nous indiquerons la numérotation correspondant à l'ordre dans lequel ces problèmes étaient posés dans le questionnaire ;
- avec des critères d'analyse – en lien avec les outils suivants : en termes de variables didactiques, en envisageant des trajectoires possibles d'élèves dans la résolution en lien avec ces variables et des règles de contrat.

a. Problème 5 de la Feuille n° 1

Rappelons que notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B (m, n dans \mathbb{IN}^*).

- A est une grandeur connue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- La relation entre A et B est connue et multiplicative.

Lors de notre identification des valeurs de la variable associée à notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental, nous avons estimé que les valeurs de la variable $V_{m,n}$ associées aux deux valeurs de la fraction $\frac{m}{n}$ lorsque $\frac{m}{n}$ est un entier ou $\frac{m}{n}$ est une fraction unitaire ne posent pas *a priori* de difficultés pour les élèves lors de la résolution des problèmes afférents. Pour cela, nous avons joué sur les valeurs possibles de la variable $V_{m,n}$, et la fraction proposée dans le Problème 5 de la *Feuille n° 1* du questionnaire est $\frac{4}{15}$. C'est le cas de figure le plus compliqué de notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental et le plus fréquenté par les élèves, notamment les élèves tunisiens.

Dans le problème posé nous donnons une mesure d'une grandeur connue A (montant restant) en termes d'unités d'une mesure d'une grandeur inconnue B (montant initial) :

« Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ? »

On demande de trouver une mesure de B (montant initial) en termes d'unités de A (montant restant). Nous attendons, lors de la résolution d'un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma, le passage de B comme *unité de problème* à A comme nouvelle unité partagée en un certain nombre de parts, et c'est au niveau de ce changement d'unité de référence que va s'opérer l'inversion du rapport de la fraction proposée.

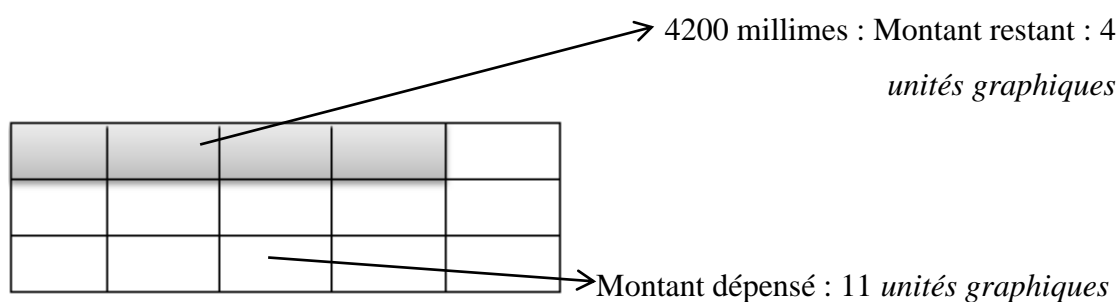
Analyse a priori liée aux stratégies des élèves :

- Un premier travail possible :

Sous l'effet du méso-contrat **R_INV_F**, nous pensons *a priori* qu'un nombre d'élèves peut mettre en œuvre ce méso-contrat pour résoudre le problème posé en appliquant la formule d'inversion du rapport par la mise en application d'une formule ou d'un processus de calcul généralisé qui revient à inverser le rapport. Une application d'une formule sans nécessaire prise d'appui sur un schéma et sans vraiment se poser la question des connaissances qui sont derrière cette inversion du rapport, notamment le changement d'unité de référence de la valeur d'une *unité graphique* de $\frac{1}{15}$ du montant initial à $\frac{1}{4}$ du montant restant.

- Un deuxième travail possible :

Un nombre d'élèves, qui ne mettrait pas en fonctionnement les connaissances attendues via la schématisation segmentaire, peut voir que 4200 millimes représentent 4 parts du montant initial sur 15 parts et donc que le montant dépensé correspond à 11 parts de ce montant. Nous avons procédé à diviser le montant initial en 15 parts égales ou *unités graphiques*, nous avons dépensé la valeur de 11 *unités graphiques* et il nous reste la valeur de 4 *unités graphiques*. Le montant initial est alors perçu comme le montre le schéma suivant :



Par conséquent, les élèves vont penser à diviser 4200 par 4 pour trouver la valeur d'une *unité graphique*, puis multiplier par 15 pour résoudre le problème posé. Une trajectoire de résolution *a priori* peu probable à mettre en œuvre.

➤ Un troisième travail possible :

Sachant que 4200 est divisible à la fois par 4 et 15, ce fait peut rendre l'erreur possible. Une partie des élèves a tendance à utiliser les données telles qu'elles sont présentées dans l'énoncé du problème. Suite à la mise en œuvre du contrat qui stipule l'utilisation des données du problème telles qu'elles sont, nous pensons que la multiplication de 4200 par $\frac{4}{15}$ est probable, chose qui met 4200 dans le statut de l'*unité du problème*, alors que 4200 représente une partie de cette unité et non un tout.

➤ Un quatrième travail possible :

Une procédure possible est celle qui s'appuie sur la proportionnalité. Vu la maîtrise d'une partie conséquente des élèves de la proportionnalité (du moins les élèves tunisiens), le schéma suivant peut être proposé par les élèves :

$$\begin{array}{l} \frac{4}{15} \longrightarrow 4200 \text{ millimes} \\ \frac{15}{15} \longrightarrow ? \end{array}$$

Mais ce schéma se heurte à une division dans \mathbb{Q} – connaissance hors programme. Nous savons que les deux dénominateurs des deux fractions vont se simplifier dans l'opération résultante du schéma de la proportionnalité ci-dessus :

$$\frac{4200 \times \frac{15}{15}}{\frac{4}{15}},$$

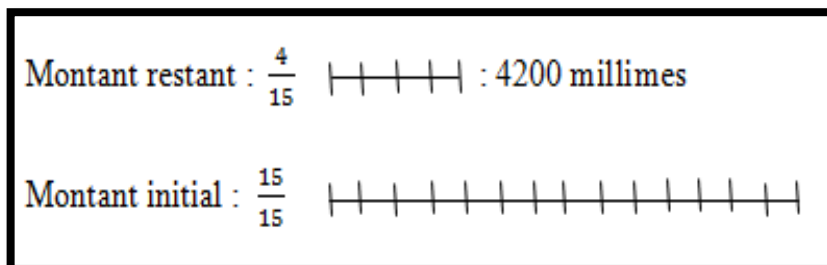
mais comme mentionné ci-dessus, la division dans \mathbb{Q} ne fait pas partie du programme officiel tunisien de la sixième année de l'école de base ni du programme officiel de la sixième en France.

➤ Un cinquième travail possible :

La mise en œuvre via la schématisation de la règle du contrat **R_us_m_f** (représentation de la petite grandeur par m unités segmentaire et la grande grandeur

par n unités segmentaires dans une relation multiplicative fractionnaire « $\frac{m}{n}$ de ... », $\frac{m}{n}$ fraction non unitaire).

Schéma segmentaire correspondant au problème :



$\frac{1}{15}$ du montant initial correspond à $\frac{1}{4}$ du montant restant, soit 4200 millimes : 4 = 1050 millimes. Le montant initial correspond dès lors à 1050 millimes \times 15, soit 15 750 millimes.

Ayant déjà détaillé les connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution de ce problème avec ce schéma segmentaire (ce problème est cité plusieurs fois dans la thèse – il sera également repris dans le cadre de la séquence expérimentale), pour plus de commodité, nous renvoyons le lecteur à l'annexe 8 (pp. 416-417) s'il souhaite (re)prendre connaissance de l'analyse *a priori* de cet « énoncé-schéma ».

b. Problème 3 de la Feuille n° 1

Rappelons que notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

$$\text{On suppose que : } \begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A+B = S \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

Nous demandons des élèves de résoudre le problème suivant :

« Sara a 63 billes de plus que Yakin. Sara a 4 fois plus de billes que Yakin. Combien de billes chacune d'elles a-t-elle? »

$$A = 4 \times B \text{ et } A - B = 63.$$

Analyse a priori liée aux stratégies des élèves :

- Un premier travail possible :

Sachant que 63 n'est pas divisible par 4, cela ne peut pas empêcher l'erreur de penser que le nombre de billes d'Adam est égal à $63 : 4$ sous l'effet du macro-contrat : « utiliser les données du problème et opérer de manière directe dessus ». Une rétroaction du milieu est fort probable à ce stade, car $63 : 4 = 15,75$ n'est pas un entier.

- Un deuxième travail possible :

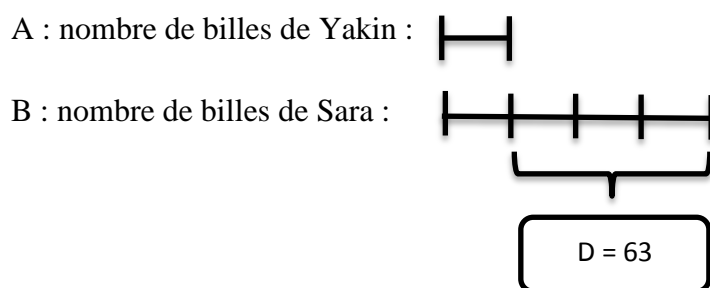
Un nombre d'élèves, qui ne mettrait pas en fonctionnement les connaissances attendues via la schématisation, peuvent éventuellement voir que A est représentée par 4 parts et B par une part, par suite la différence $D = 84$ est représentée par 3 parts, ce qui donne :

$$B = \text{nombre de billes d'Adam} = \frac{63}{3} = 21.$$

Une fois de plus une trajectoire de résolution *a priori* peu probable à mettre en œuvre.

- Un troisième travail possible :

Le schéma segmentaire correspondant au problème posé en mobilisant la règle implicite **R_us_m_e** est le suivant :



Pour produire le schéma, rien n'empêche la démarche qui mobilise la règle implicite **R_us_m_fu** :



Le nombre de billes de Yakin peut être aisément trouvé et d'une façon triviale à partir des deux schémas précédents. 63 étant représenté par 3 *unités graphiques* et le nombre de billes de Yakin étant représenté par une *unité graphique*, l'égalité :

Le nombre de billes de Yakin = valeur d'une *unité graphique* = $\frac{63}{3} = 21$ s'en suit.

Sachant que la relation additive est de la forme « ...n fois plus... », nous supposons *a priori* que la mobilisation de la règle implicite **R_us_m_e** est plus probable. A ce stade, le méso-contrat de généralisation **R_Rme_D** peut être instauré : si $A = n \times B$ et $A - B = D$ alors $B = D : (n - 1)$.

➤ Un quatrième travail possible :

A l'occasion de la fréquentation récurrente de problèmes à résoudre par le biais de la schématisation, le méso-contrat **R_Rme_D** peut être généralisé par les élèves eux-mêmes, et l'application de ce méso-contrat peut garantir la résolution du problème sans le recours à la schématisation.

c. Problème 1 de la Feuille n° 1

Rappelons que notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant :

On suppose que :
$$\begin{cases} A + B = S \\ A - B = D \quad (A > B) \end{cases}$$

Trouver A ; trouver B.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B sont connues.

Le problème 1 de la Feuille n° 1 du questionnaire est en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental.

Lors de l'identification des valeurs de la variable associées à notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental nous avons distingué 2 cas :

1^{er} cas : D divise S

2^{ème} cas : D ne divise pas S.

Le deuxième cas est le cas de figure des problèmes les plus fréquents à trouver à travers différents manuels scolaires. Pour cela, le problème posé relève de ce deuxième cas :

« Dans une école, on compte 360 élèves. Il y a 28 garçons de moins que de filles dans cette école. Trouvez :

- Le nombre de filles ;
- Le nombre de garçons. »

Analyse a priori liée aux stratégies des élèves :

- Un premier travail possible :

Comme évoqué précédemment, lors de nos travaux de master (Belguesmi, 2016) nous avons supposé *a priori* que les « bons » élèves peuvent ne pas recourir à un schéma pour résoudre le problème. Ils peuvent :

- Ou bien retrancher la différence puis diviser par deux pour trouver le nombre des garçons puis celui des filles.
- Ou bien ajouter la différence puis diviser par deux pour trouver le nombre des filles puis celui des garçons.
- Ou bien diviser 360 sur deux pour obtenir 180, et penser à distribuer 28 de part et d'autre de 180 d'une façon égale pour obtenir le nombre des filles et celui des garçons.

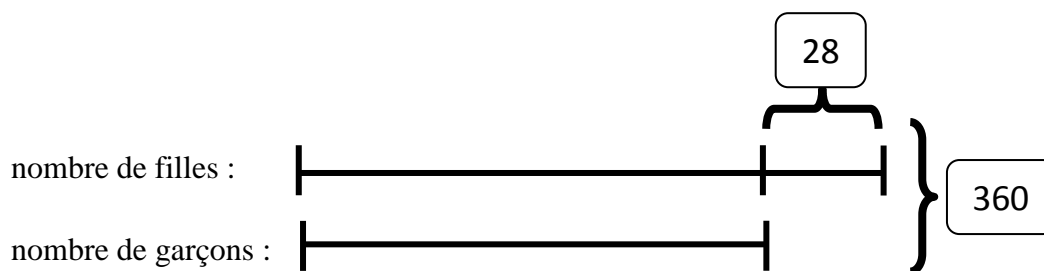
- Un deuxième travail possible :

En se référant à nos travaux de master (Belguesmi, 2016), Un nombre d'élèves peut commencer par diviser 360 par deux, puis ajouter 28 pour trouver le nombre de filles ou retrancher 28 pour trouver le nombre de garçons. Nous avons qualifié cette erreur par « erreur récurrente ».

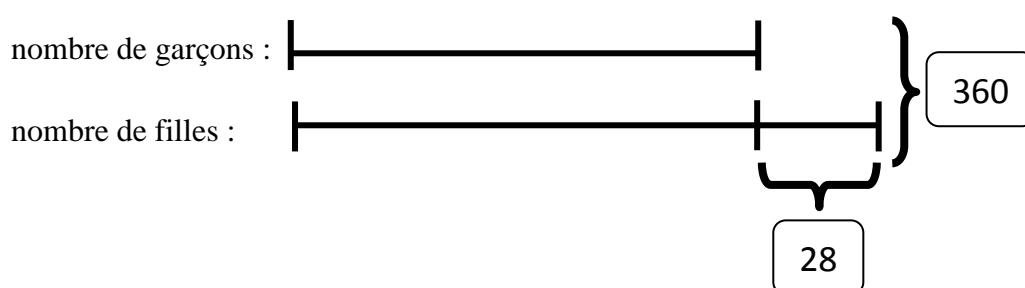
- Un troisième travail possible :

Le Schéma segmentaire correspondant au problème est le suivant :

Mobilisation de la règle **R_us_a** - :



Via un traitement interne en amont dans le registre de la langue naturelle opérant une symétrisation des relations additives entre grandeurs en jeu, la relation « Il y a 28 garçons de moins que de filles » peut être reformulée comme « Il y a 28 filles de plus que de garçons », et la production du schéma suivant en mobilisant la règle **R_us_a +** est probable :

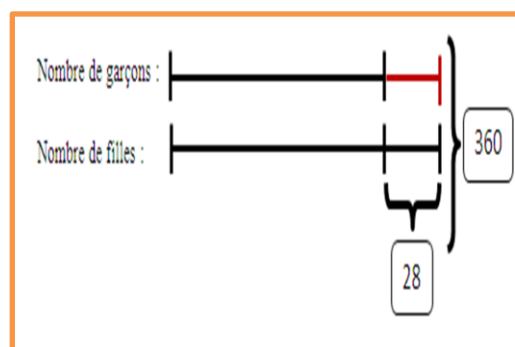
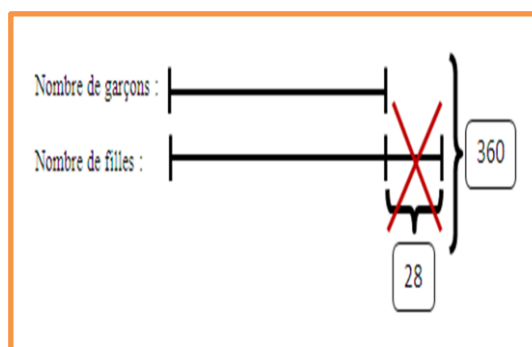


En retranchant 28 de 360 nous trouvons 2 fois l'unité (le nombre des garçons) [c'est-à-dire prendre comme *unité graphique* le segment représentant le nombre des garçons (il suffit de cacher le segment représentant 28 sur le schéma)], et il suffit de diviser à par 2 pour trouver le nombre des garçons ($2u = 360 - 28$).

Par contre si nous nous appuyons sur le schéma correspondant à la règle **R_us_a -**, nous ajoutons un segment de valeur 28 au segment représentant le nombre de garçons pour trouver 2 fois l'unité (c'est-à-dire prendre comme *unité graphique* le segment représentant le nombre des filles), et dans ce cas de figure il faut aussi ajouter 28 à 360 puis diviser par 2 pour trouver le nombre de filles ($2u = 360 + 28$).

Stratégie pour trouver le nombre de garçons.

Stratégie pour trouver le nombre de filles.



d. Problème 4 de la Feuille n° 1

Rappelons que notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental est le suivant (nous avons proposé un problème de type composition):

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

- $A = B + m$;
- $B = C + n$;
- $A + B + C = S$.

Trouver A, B et C.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- C est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre (A et B), (B et C) et (A et B et C) sont connues.

Lors de l'identification des valeurs de la variable associée à notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental, nous avons mis l'accent sur la valeur de la variable $V_{m,n}$ (Composition) où $m.n \neq 0$ (voir p. 239). Le problème 4 de la Feuille n° 1 relève de ce cas de figure :

« La masse totale de trois météorites est de 84 tonnes. La masse de la 3^{ème} météorite est de 15 tonnes de plus que celle de la deuxième. La masse de la 2^{ème} météorite est de 9 tonnes de plus que celle de la première. Trouvez la masse de chaque météorite. »

Analyse a priori liée aux stratégies des élèves :

- Un premier travail possible :

Un nombre d'élèves, qui ne mettrait pas en fonctionnement les connaissances attendues via la schématisation peut :

- ou bien retrancher de la masse totale $[9 + (9 + 15)]$ tonnes puis diviser par 3 pour trouver la masse de la première météorite pour ensuite trouver celles de la deuxième et la troisième ;

- ou bien ajouter à la masse totale $[15 + (9 + 15)]$ tonnes puis diviser par 3 pour trouver la masse de la troisième météorite pour enfin trouver celles de la première et la deuxième ;
- ou bien retrancher de la masse totale 15 tonnes, puis ajouter 9 tonnes, puis diviser par 3 pour trouver la masse de la deuxième météorite pour enfin trouver celles de la première et la troisième.

Dans les deux premiers cas de figure, pour trouver la différence entre la masse de la 3^{ème} météorite et celle de la 1^{ère} météorite nous procédons à chaque fois, tel qu'il est pensé dans la catégorisation de Vergnaud, à une composition de deux relations additives :

R1 : la masse de la 3^{ème} météorite dépasse celle de la deuxième de 15 tonnes.

R2 : la masse de la 2^{ème} météorite dépasse celle de la 1^{ère} météorite de 9 tonnes.

Nous pensons que de telles démarches, surtout la troisième démarche, sont trop coûteuses en termes de connaissances mobilisées.

- Un deuxième travail possible :

Une des stratégies erronées pour résoudre un tel problème, est celle liée au macro-contrat « utiliser les données du problème et opérer de manière directe dessus » :

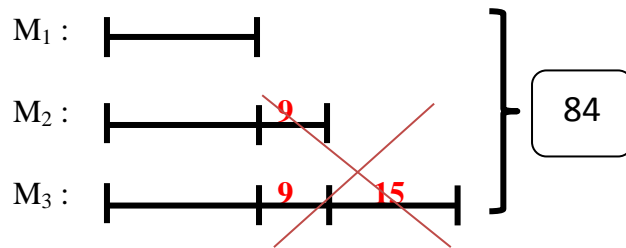
Retrancher 9 et 15 tonnes de la masse totale puis diviser par 3 pour trouver la masse de la première météorite, ajouter 9 et 15 tonnes à la masse totale puis diviser par 3 pour trouver la masse de la troisième météorite. En plus, les données numériques de l'énoncé du problème posé autorisent ces erreurs : $[84 + \text{ou} - (9 + 15)] : 3 = 20 \text{ ou } 92$.

- Un troisième travail possible :

Procéder à élaborer par exemple l'un des trois schémas suivants : (désignons par M_i ($1 \leq i \leq 3$) La masse de la $i^{\text{ème}}$ météorite)

Schéma 1 : (qui est congruent aux données du problème)

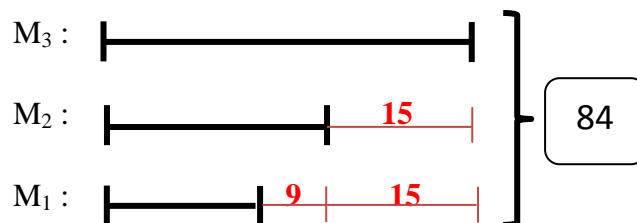
Mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_a+** pour produire le schéma suivant : représenter le segment relatif à M_2 à partir du segment relatif à M_1 puis représenter le segment relatif à M_3 à partir du segment relatif à M_2 :



C'est un schéma qui, en termes d'interprétation, considère comme *unité graphique* le segment représentant la masse de la première météorite.

Schéma 2 :

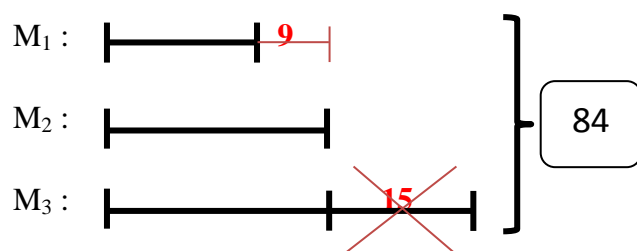
Mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_a-** pour produire le schéma suivant : représenter le segment relatif à M_2 à partir du segment relatif à M_3 puis représenter le segment relatif à M_1 à partir du segment relatif à M_2 :



C'est un schéma qui, en termes d'interprétation, considère comme *unité graphique* le segment représentant la masse de la troisième météorite.

Schéma 3 :

Mettre en œuvre les deux règles **R_us_a+** et **R_us_a-** pour produire le schéma suivant : représenter le segment relatif à M_3 à partir du segment relatif à M_2 (**R_us_a+**) puis représenter le segment relatif à M_1 à partir du segment relatif à M_2 (**R_us_a-**) :



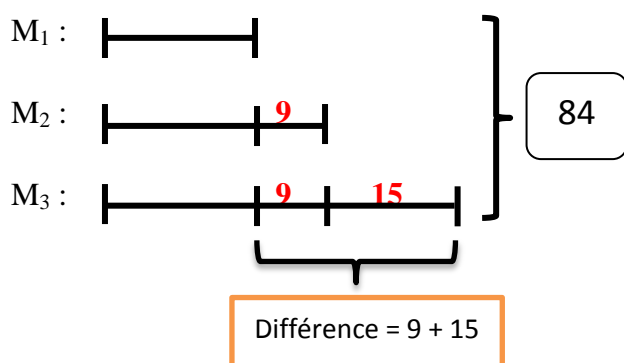
C'est un schéma qui, en termes d'interprétation, considère comme *unité graphique* le segment représentant la masse de la deuxième météorite.

Nous pensons *a priori* que le premier schéma est le plus probable à produire. À travers ce schéma, et en considérant le segment représentant la masse de la première météorite comme *unité graphique*, la masse de la 1^{ère} météorite est égale à :

$$M_1 = \frac{[84 - (9 + 9 + 15)]}{3} = 17.$$

Rappelons qu'en produisant un tel schéma et en l'interprétant pour résoudre le problème posé (voir chapitre B), nous avons abaissé la complexité d'un problème qui recouvre la composition de deux relations de comparaison additive entre des grandeurs : le schéma ayant permis de la ramener à une comparaison entre deux grandeurs : 3 fois M_1 et 84 tonnes.

Pour trouver la différence entre la masse de la 3^{ème} météorite et celle de la 1^{ère} météorite à partir du schéma nous ne sommes pas obligés de passer par la masse de la deuxième météorite grâce à un jeu sur des *unités relatives* décrit dans le chapitre B :



Par contre en considérant le schéma 2, nous sommes contraints de mobiliser la connaissance :

$A + B + C$ correspond à $S \Leftrightarrow A + B + \mathbf{b} + C + \mathbf{c}$ correspond à $S + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. En fait, en ajoutant deux segments de valeurs 15 et un segment de valeur 9 au schéma nous ajoutons aussi à la somme (84) $9 + 15 + 15$ pour avoir $3u = 84 + 9 + 15 + 15$ ($u = \text{unité graphique} = \text{valeur du segment représentant } M_3$). En plus une composition de deux relations additives est nécessaire pour trouver la différence entre M_3 et M_1 ($9 + 15$).

e. Problème 2 de la Feuille n° 1

Rappelons que notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental de type composition est le suivant :

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

$$A = \frac{m}{n} B;$$

$$B = \frac{p}{q} C;$$

$$A + B + C = S.$$

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Un des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.

Trouver A, B et C.

- A est une grandeur inconnue ;
- B est une grandeur inconnue ;
- C est une grandeur inconnue ;
- Les relations entre A et B, B et C, et A et B et C sont connues.

Le problème posé est un problème de type Composition (de deux relations multiplicatives entières entre des grandeurs) :

« Le nombre de billes de Mohammed est trois fois plus grand que celui de Layla. Le nombre de billes de Layla est deux fois plus grand que celui de Karim. Le nombre total de billes des trois enfants est 270. Combien de billes possède chaque enfant? » [$R_2(A,B)$ et $R_2(B,C)$; A : nombre de billes de Mohammed, B : nombre de billes de Layla et C : nombre de billes de Karim].

Analyse a priori liée aux stratégies des élèves :

- Un premier travail possible :

Des élèves, qui ne mettraient pas en fonctionnement les connaissances attendues via la schématisation, peuvent considérer le nombre de billes de Karim comme unité de compte, le nombre de billes de Layla en représentera 2 unités de compte (le nombre de billes de Layla est deux fois plus grand que le nombre de billes de Karim) et par

conséquent le nombre de billes de Mohammed représentera 6 unités de compte grâce à la composition de deux relations :

- R_1 : le nombre de billes de Layla est deux fois plus grand que le nombre de billes de Karim ;
- R_2 : le nombre de billes de Mohammed est trois fois plus grand que celui de Layla.

Le 6 est obtenu par la composition de deux rapports scalaires 2×3 .

Le nombre de billes de Karim peut être trouvé par l'opération suivante :

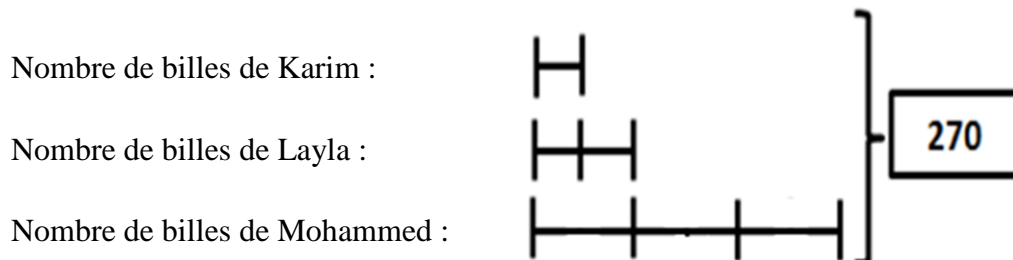
$$270 : (1 + 2 + 6) = 30.$$

Une fois de plus nous pensons *a priori* que cette démarche dépourvue des aides que le schéma peut fournir est coûteuse en termes de connaissances mobilisées.

- Un deuxième travail possible :

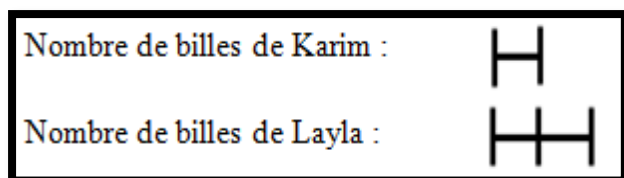
Procéder par exemple à l'élaboration du schéma suivant :

Mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_m_e** pour produire le schéma suivant : représenter le nombre de billes de Layla à partir de celui de Karim puis représenter le nombre de billes Mohammed à partir de celui de Layla :



L'élaboration de ce dernier schéma s'est faite en deux étapes :

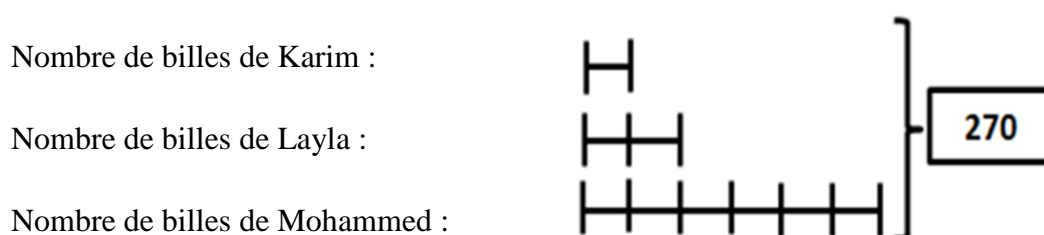
La première étape consiste à mettre une première fois la règle **R_us_m_e** et représenter le nombre de billes de Karim et celui de Layla :



La deuxième étape consiste à mettre en œuvre une deuxième fois la règle **R_us_m_e** et représenter le nombre de billes de Layla et celui de Mohammed :



Enfin, il suffit de mettre en œuvre une fois de plus la relation R_1 pour subdiviser les trois segments modélisant le nombre de billes de Mohammed pour aboutir au schéma final suivant :



La division de 270 par 9 pour trouver le nombre de billes de Karim paraît triviale à partir du schéma.

La composition de deux relations R_1 et R_2 n'a pas été mise en œuvre dans la production de ce schéma.

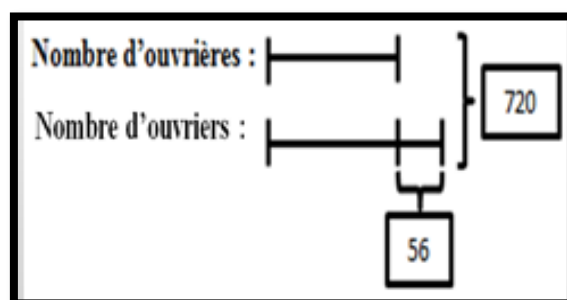
2. Analyse *a priori* de la feuille n°2 du questionnaire

La feuille n°2 comporte 3 tâches (portant au total cinq problèmes) : la première tâche consiste à associer à chaque énoncé de trois problèmes posés (en lien avec les

4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux) un schéma qui lui correspond parmi deux schémas donnés. Cette première tâche invite ainsi explicitement à faire une correspondance entre ce qui relève du registre de la langue naturelle (dans l'énoncé d'un problème) et ce qui relève du registre de la représentation graphique lié aux schémas segmentaires. La deuxième tâche consiste à produire un schéma associé à un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental pour le résoudre. La dernière tâche consiste à résoudre un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental en s'appuyant sur un schéma donné. À travers ces tâches, nous allons essayer d'installer des règles de représentations pour des relations additives et multiplicatives (relations simples et composition de deux relations) et rendre l'utilisation de la schématisation comme outils de résolution une pratique plus fréquente chez les élèves (voir annexes 2, pp. 405-408).

Nous attendons des élèves de :

- Correspondre le problème 1³⁰ au schéma suivant :

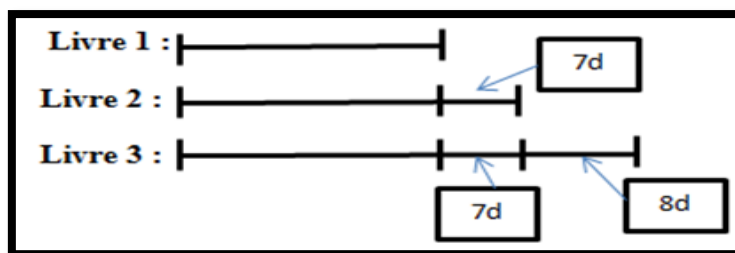


La production d'un tel schéma a nécessité en un premier lieu de négocier la relation « 56 ouvrières de moins que d'ouvriers » comme « 56 ouvriers de plus que d'ouvrières » et de mettre en œuvre la règle **R_us_a+** pour représenter cette dernière relation.

- Correspondre le problème 2³¹ au schéma suivant :

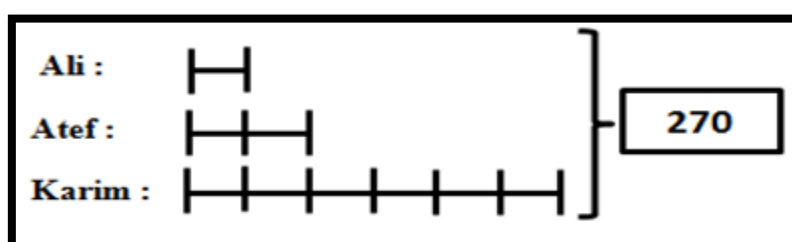
³⁰ Dans une usine on compte 720 ouvriers et ouvrières. Il y a 56 ouvrières de moins que d'ouvriers dans cette usine. Trouvez :

- le nombre d'ouvriers ;
- le nombre d'ouvrières.



La production d'un tel schéma a nécessité de mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_a+** pour représenter les deux relations du problème.

- Correspondre le problème 3³² au schéma suivant :



La présence des fractions ou non dans un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental peut impacter à la fois les productions des schémas correspondantes aux problèmes ou les procédures de résolution (Belguesmi, 2016. pp. 101-113), et par suite va faire varier les connaissances mises en œuvre dans la production des schémas ou dans leurs interprétations.

La production d'un tel schéma nécessite de mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_m_e** pour représenter les deux relations du problème après une conversion des deux relations de la forme « ... $\frac{1}{n}$ de ... » à « ... n fois plus... » :

Le nombre de billes d'Ali est égal à $\frac{1}{2}$ de celui d'Atef \Leftrightarrow Le nombre de billes d'Atef est deux fois plus que celui d'Ali.

³¹ Mariem a acheté 3 livres scientifiques pour un prix total de 145 d. Sachant que le deuxième livre coûte 7 d de plus que le premier et que le troisième coûte 8 d de plus que le deuxième, chercher le prix de chaque livre.

³² Le nombre de billes d'Ali est égal à $\frac{1}{2}$ de celui d'Atef, et le nombre de billes d'Atef est égal à $\frac{1}{3}$ de celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien de billes possède chaque enfant?

Le nombre de billes d'Atef est égal à $\frac{1}{3}$ de celui de Karim \Leftrightarrow Le nombre de billes de Karim est trois fois plus que celui d'Atef.

Nous pensons *a priori* que répondre aux attentes régies par les règles du contrat **R_us_a+** et **R_us_m_e** sont des facteurs qui garantissent la réussite (faire correspondre le problème au « bon » schéma) et aident à résoudre les problèmes posés. Nous pensons aussi *a priori* que correspondre un problème au « mauvais » schéma est un indicatif de l'échec (qui sous-entendrait qu'un élève adoptant une démarche de résolution outillé par le schéma aboutirait à une réponse erronée).

Lors de nos travaux de master (Belguesmi, 2016, pp. 101-113) nous avons mis l'accent sur la variable $V_{E,F}$ associée à notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental. La valeur V_E de la variable correspond à m et n dans IN et la valeur V_F de la variable correspond à m et n dans $\mathbb{Q} \setminus \text{IN}$. Nous avons montré que la présence des fractions dans le milieu proposé impacte (dans « un sens négatif ») la capacité de schématiser chez les élèves. Le problème 4³³ traite le cas de la valeur V_E .

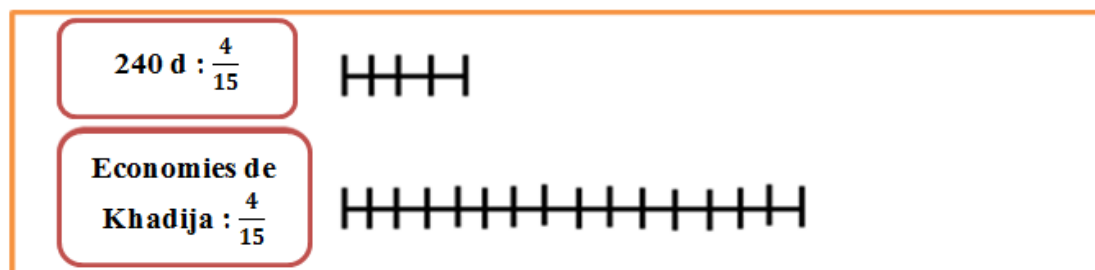
Le problème 4 est une occasion pour les élèves de mettre en œuvre la règle **R_us_m_e** pour représenter ce problème après la négociation de la relation « Fatma possède 3 fois moins de couronnes que Khadija » comme « Khadija possède 3 fois plus de couronnes que Fatma » via un traitement intrinsèque au registre de la langue naturelle pour optimiser une démarche de schématisation. Un traitement qui transforme un problème de type Puits à un problème de type composition.

(P4)_t: Khadija possède 3 fois plus de couronnes que Fatma et Fatma possède 2 fois plus de couronnes que Zeyneb. Sachant le nombre total des couronnes est 126, combien de couronnes possède chaque fille?

La production du schéma étant à la charge des élèves, ce problème peut occasionner un apprentissage lié à la démarche de schématisation.

³³ Fatma possède 3 fois moins de couronnes que Khadija et 2 fois plus de couronnes que Zeyneb. Sachant le nombre total des couronnes est 126, combien de couronnes possède chaque fille?

Le problème 5³⁴ est en lien avec notre 1^{er} énoncé schéma fondamental. Le schéma proposé représentant le problème a été produit par la mise en œuvre de la règle **R_us_m_f** :



Nous attendons *a priori* que les élèves mettent en œuvre le changement d'unité de référence de la valeur d'une *unité graphique* de $\frac{1}{15}$ des économies de Khadija à $\frac{1}{4}$ des 240 d pour résoudre le problème.

Le montant restant étant exprimée en termes d'unités des économies de Khadija, cela sous-entend que ces économies représentent *l'unité du problème*, et la fraction qui lui correspond est $\frac{15}{15}$. Pour cela que nous proposons, dans l'exercice 5 la fraction $\frac{15}{15}$ comme valeur en termes de rapport pour les économies de Khadija, une sorte de guidage orienté surtout aux élèves qui échoueraient lors de leurs réponses au problème 5 de la feuille n°1.³⁵

3. Analyse *a priori* de la feuille n°3 du questionnaire

La feuille n°3 comporte 2 tâches : la première tâche consiste à associer à chaque problème posé, parmi 4 problèmes (un problème en lien avec le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental, un problème en lien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental et deux problèmes en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental), un schéma qui lui

³⁴ Avec ses économies, Khadija a acheté un ordinateur. Il lui reste 240 d, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de ses économies initiales. Trouvez le montant de ce que Khadija avait économisé avant son achat (d : dinar).

³⁵ Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ?

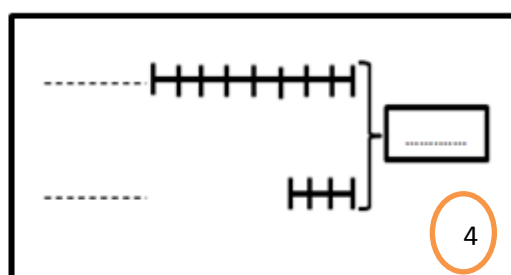
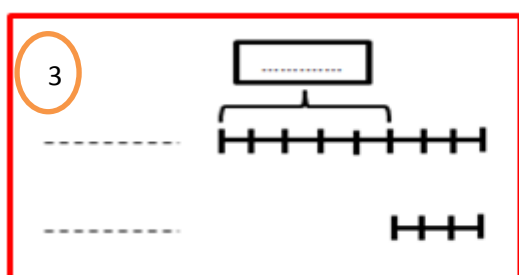
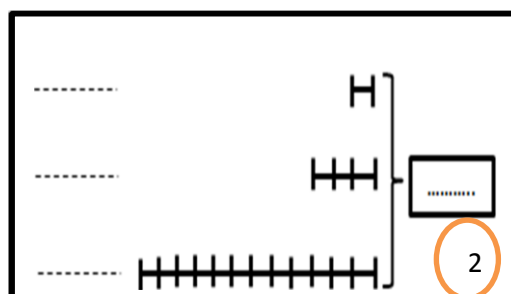
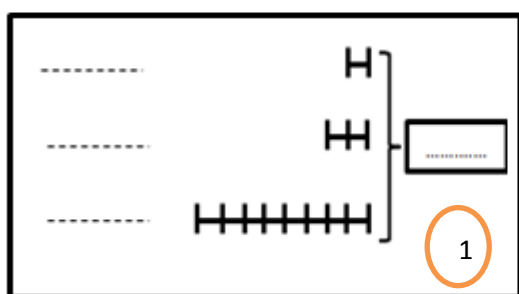
correspond parmi 4 schémas proposés. La deuxième tâche consiste à élaborer un énoncé (en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental) qui pourrait correspondre à un schéma donné. L'enjeu de cette feuille est de pouvoir correspondre à des relations (additives ou multiplicatives, simples ou composition de deux relations) leurs représentations graphiques segmentaires ou correspondre à une représentation graphique segmentaire donnée l'énoncé qui pourrait lui correspondre en termes de relations multiplicatives et additives entre deux grandeurs. Nous pourrions considérer qu'il s'agit d'un jeu retourné au sens de Bloch (2005).

Considérons Le problème 1₄ de la Feuille n° 3 (1_i, 1 ≤ i ≤ 4, veut dire le i^{ème} problème de la tâche 1) :

« Le prix de la chemise d'Amir est égal à $\frac{3}{8}$ de celui de son pantalon. Le prix du pantalon est plus cher que celui de la chemise de 35 d. Trouvez :

- le prix du pantalon ;
- le prix de la chemise. »

Il s'agit de correspondre le problème ci-dessus au schéma encadré par le rouge parmi les schémas suivants :



Réponses possibles des élèves : (une réponse consiste en un choix du schéma éventuellement correspondant au problème proposé tout en complétant la légende de ce schéma).

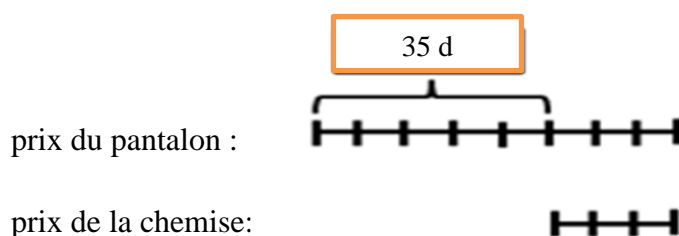
À cause de la donnée numérique 8 (ici le dénominateur de la fraction donnée), trois réponses sont plus probables : la réponse 1, la réponse 3 et la réponse 4 (un segment divisé par 8 n'apparaît que dans les schémas 1, 3 et 4). Et à cause du nombre des grandeurs inconnues du problème (ici deux grandeurs : prix de la chemise et prix du pantalon), les deux réponses 3 et 4 sont plus probables que la première (le schéma 1 est *a priori* à éliminer d'emblée des choix possibles des élèves car il contient les représentations de trois grandeurs).

Et à cause de la donnée numérique 3 (ici le numérateur de la fraction donnée), trois réponses sont plus probables : La réponse 2, la réponse 3 et la réponse 4 (un segment divisé par 3 n'apparaît que dans les schémas 2, 3 et 4). Mais à cause du nombre des grandeurs inconnues du problème (ici deux grandeurs : prix de la chemise et prix du pantalon), les deux réponses 3 et 4 sont plus probables que la deuxième (le schéma 2 est *a priori* à éliminer des choix possibles des élèves car il contient les représentations de trois grandeurs).

Le choix du schéma étant correct, il faut voir dans l'égalité :

$$\text{prix de la chemise} = \frac{3}{8} \text{ du prix du pantalon,}$$

que le prix de la chemise est en termes de 3 unités du prix du pantalon. Le prix de pantalon mesure 8 unités, ce qui permet de compléter le schéma comme suit :



La différence 35 d doit être représentée par 5 unités graphiques :

$$8 \text{ unités graphiques} - 3 \text{ unités graphiques} = 5 \text{ unités graphiques}$$

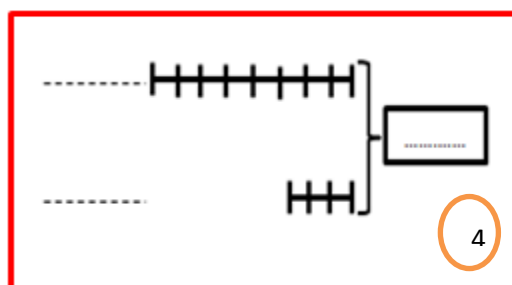
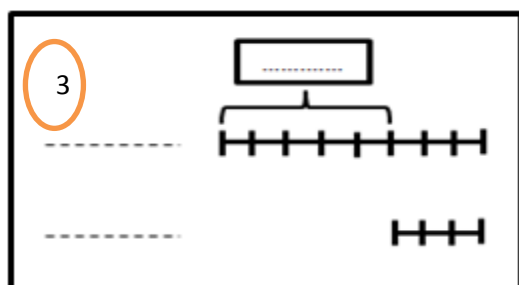
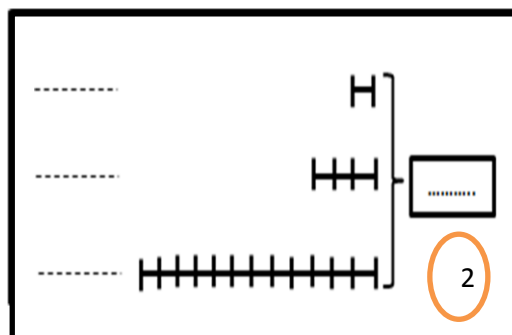
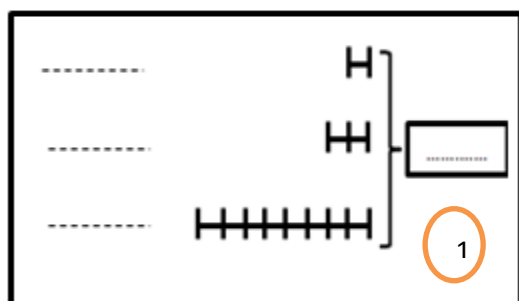
La mise en œuvre de la règle **R_us_m_f** est nécessaire pour produire le schéma ci-dessus. La présence de la fraction $\frac{3}{8}$ d'une grandeur (inconnue) dans le problème incite à représenter un segment de 3 unités graphiques ($\frac{3}{8}$) et un autre de 8 unités graphiques ($\frac{8}{8}$) (mise en œuvre de la notion de l'unité du problème).

Le problème 1₁ de la *Feuille n° 3* est en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental :

« Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante. Le prix des deux appareils est 1122 d. Trouvez :

- le prix de l'imprimante ;
- le prix de l'ordinateur. »

Il s'agit de correspondre le problème 1₁ au schéma encadré par le rouge parmi les schémas suivants :



Comme évoqué précédemment, à cause de la donnée numérique 8 (ici le numérateur de la fraction donnée), trois réponses sont plus probables : la réponse 1, la réponse 3

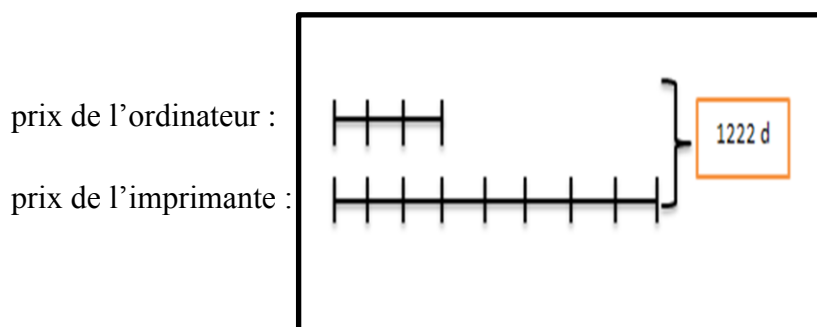
et la réponse 4 (un segment divisé par 8 n'apparaît que dans les schémas 1, 3 et 4). Et à cause du nombre des grandeurs inconnues du problème (ici deux grandeurs : prix de l'imprimante et prix de l'ordinateur), les deux réponses 3 et 4 sont plus probables que la première (le schéma 1 est *a priori* à éliminer des choix possibles des élèves car il contient les représentations de trois grandeurs).

Compte tenu de la donnée numérique 3 (ici le dénominateur de la fraction donnée), trois réponses sont plus probables : La réponse 2, la réponse 3 et la réponse 4 (un segment divisé par 3 n'apparaît que dans les schémas 2, 3 et 4). Mais à cause du nombre des grandeurs inconnues du problème (ici deux grandeurs : prix de la chemise et prix du pantalon), les deux réponses 3 et 4 sont plus probables que la deuxième (le schéma 2 est *a priori* à éliminer des choix possibles des élèves car il contient les représentations de trois grandeurs).

Le choix du schéma étant correct, il faut voir dans l'égalité :

$$\text{prix de l'ordinateur} = \frac{8}{3} \text{ le prix du pantalon,}$$

que le prix de l'ordinateur est représenté par 8 *unités graphiques*. Le prix de l'imprimante mesure 3 unités, ce qui permet de compléter le schéma comme suit :



La Somme 1122 d est être représentée par 13 *unités graphiques* :

$$8 \text{ unités graphiques} + 3 \text{ unités graphiques} = 13 \text{ unités graphiques.}$$

La mise en œuvre de la règle **R_us_m_f** est aussi nécessaire pour produire le schéma ci-dessus. La maîtrise de la mise en œuvre d'une telle règle par les élèves peut être une indication pour choisir le « bon » schéma. Pour interpréter correctement le schéma, une des attentes possibles est de mobiliser la règle **R_V_us** (règle pour

trouver la valeur d'une unité segmentaire : diviser la somme par le nombre total des *unités graphiques*).

Considérons Les deux problèmes 1_2 et 1_3 de la Feuille n° 3 :

1_2 : « Hiba a 4 fois plus de stylos que de cahiers et 2 fois plus de cahiers que de livres. Elle a au total 66 fournitures (stylos, livres et cahiers). Trouver le nombre de chaque article. »

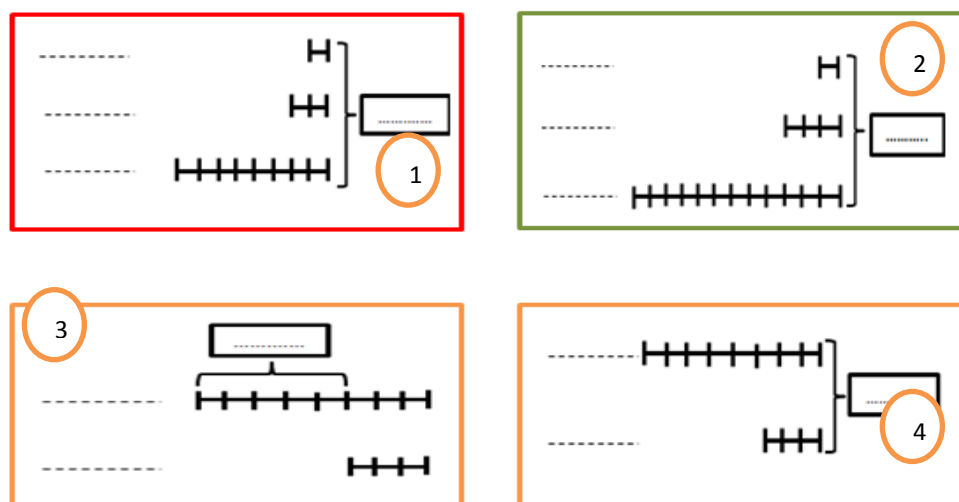
1_3 : « Imed, Zeyneb et Nathalie partagent la somme de 234 d comme suit :

La part d'Imed égale à $\frac{1}{3}$ de la part de Zeyneb ;

La part de Zeyneb est égale à $\frac{1}{4}$ de la part de Nathalie.

Trouvez la part de chacun. »

Il s'agit de correspondre le problème 1_2 au schéma encadré par le rouge et le problème 1_3 au schéma encadré par le vert parmi les schémas suivants :

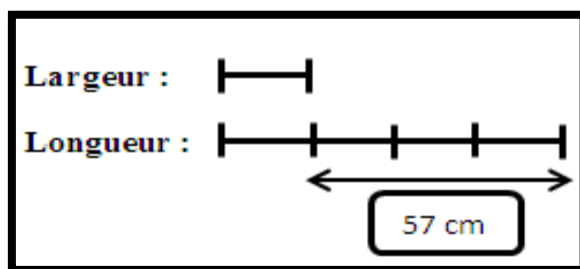


En s'appuyant sur le nombre des grandeurs inconnues de deux problèmes (trois grandeurs inconnues pour chaque problème), il est plus probable que les élèves choisissent le schéma 1 ou le schéma 2 à cause des trois grandeurs représentées dans chaque schéma. L'expression « ...2 fois plus... » du problème 1_2 doit orienter les élèves vers le schéma 1 comme schéma correspondant au problème (le schéma contient un segment divisé en deux), et la donnée numérique 3 du problème 1_3 (qui est le dénominateur de la première fraction du problème) doit orienter les élèves vers le

schéma 2 comme schéma correspondant au problème (le schéma contient un segment divisé en trois). La composition de deux relations n'est pas vraiment nécessaire pour identifier le problème correspondant à chaque problème.

Considérons La tâche 2 de la Feuille n° 3 :

- 1) Pour ce schéma, élaborer un énoncé de problème qui pourrait lui correspondre :



Réponses possibles :

Sans compter les réponses fausses, La relation multiplicative peut être formulée comme suit:

- ❖ Un énoncé qui contient l'expression : « ... quatre fois plus ... » ;
- ❖ Un deuxième énoncé qui contient l'expression : « ... quatre fois moins ... » ;
- ❖ Un troisième énoncé qui contient l'égalité : « ... = $\frac{1}{4}$... ».

Ce qui donne comme énoncés élaborés probables :

- ✓ « Trouvez le périmètre d'un carton rectangulaire dont la longueur est 4 fois plus grande que la largeur et mesure 57 cm de plus que celle-ci » ;
- ✓ « Trouvez le périmètre d'un carton rectangulaire dont la largeur est 4 fois moins grande que la longueur et mesure 57 cm de moins que celle-ci » ;
- ✓ « Trouvez le périmètre d'un carton rectangulaire dont la largeur = $\frac{1}{4}$ la longueur et mesure 57 cm de moins que celle-ci ».

La relation additive à son tour peut être aussi formulée comme suit :

- ✓ La longueur est de 57 cm de plus que la largeur ;
- ✓ La largeur est de 57 cm de moins que la longueur ;
- ✓ La différence entre la largeur et la longueur est 57 cm.

Via ces possibilités correspondant à cet exercice, nous touchons la totalité des valeurs de la variable identifiée dans notre partie théorique excepté le cas où la fraction n'est ni unitaire ni un entier.

Comme classes de réponses fausses nous pouvons envisager les éventualités suivantes :

- 1^{ère} classe : Les erreurs en lien avec le coté verbal, comme confondre « 4 fois plus » à un « 4 fois moins » ;
- 2^{ème} classe : ne pas identifier l'*unité du problème* et se tromper sur la valeur de l'*unité graphique* ;
- 3^{ème} classe : ne pas identifier les deux relations numériques ($L = 4l$ et $L - l = 57$ cm)
- ...

III. Analyse *a posteriori* du questionnaire

Notre analyse *a posteriori* sera plus focalisée sur les productions des élèves à la feuille n°1 car nous renseignant davantage que les autres sur des connaissances apprises d'élèves tunisiens et français sur la résolution de problèmes outillée (ou non) par la schématisation segmentaire. Nous croisons des points de vue à la fois quantitatif et qualitatif dans l'étude des productions d'élèves recueillies.

Le questionnaire a été proposé à 136 élèves tunisiens provenant de 9 classes de fin du primaire et 48 élèves français provenant de deux classes de sixième.³⁶

Pour les analyses à venir, « réussite » veut dire résolution correcte d'un problème et « échec » veut dire le cas contraire.

Une réussite est tributaire de la démarche de résolution, le résultat numérique ne sera pas pris en compte comme facteur d'échec.

Toutes les statistiques sont données à 10^{-2} près.

1. Analyse des réponses de la feuille 1 du questionnaire

a. Introduction

Le nombre total des élèves (tunisiens et français) qui ont répondu à la feuille 1 du questionnaire est 184 élèves. Leurs réponses sont réparties comme suit :

	Réussite avec schéma	Réussite sans schéma	Échec avec schéma	Échec sans schéma
Nombre d'élèves de fin de primaire tunisiens	177	168	77 (16 productions correctes de schémas)	258
<i>Effectif total : 136 élèves</i>				

Tableau D1 : réussites-échecs avec ou sans schéma des élèves tunisiens (réponses aux problèmes de la feuille 1)

³⁶ Voir plus d'informations sur les classes dans l'annexe 21, pp. 435-436.

	Réussite avec schéma	Réussite sans schéma	Échec avec schéma	Échec sans schéma
Nombre d'élèves français de sixième	5	12	9 (7 productions correctes de schémas)	214
<i>Effectif total : 48 élèves</i>				

Tableau D2 : réussites-échecs avec ou sans schéma des élèves français (réponses aux problèmes de la feuille 1)

Chaque élève a répondu à 5 problèmes. Nous avons recueilli alors 680 réponses (136×5) des élèves tunisiens et 240 réponses (48×5) des élèves français.

Pour les élèves tunisiens :

Dans 254 réponses, c'est-à-dire 37,35 % du nombre total des réponses, nous avons remarqué la présence des schémas comme technique de résolution. Le taux de réussite dans ce cas de figure est de **69,68 %**. Alors que dans 426 réponses, c'est-à-dire 62,65 % du nombre total des réponses, nous avons remarqué l'absence des schémas comme technique de résolution. Le taux de réussite dans ce deuxième cas est de **39,44 %**.

Pour les élèves français :

Dans 14 réponses, c'est-à-dire 5,83 % du nombre total des réponses, nous avons remarqué la présence des schémas comme technique de résolution. Le taux de réussite dans ce cas de figure est de **35,71 %**. Alors que dans 226 réponses, c'est-à-dire 94,17 % du nombre total des réponses, nous avons remarqué l'absence des schémas comme technique de résolution. Le taux de réussite dans ce deuxième cas est de **5,31 %**.

Les deux pourcentages en gras des deux populations (élèves tunisiens et français) montrent que la réussite est plus probable quand l'élève s'appuie sur un schéma que dans le cas contraire. Mais ce constat global reste bel et bien à affiner comme nous allons le voir par la suite, et ce, pour différentes raisons.

Par ailleurs, le nombre total des schémas produits corrects est de 205 pour les deux populations. Seules 23 réponses parmi les 205 réponses ont abouti à un échec. Le taux de réussite dès lors qu'on produit un schéma correct est alors de 91,71 %. Ce qui n'est

pas le cas si nous considérons que les élèves français : 58,33 % des élèves français qui ont produit un schéma correct ont abouti à un échec. *A priori*, la production d'un schéma incorrect garantit l'échec, alors que la production d'un schéma correct ne garantit pas forcément la réussite.

Le fait de dénombrer 23 réponses qui ont abouti à un échec, alors que les schémas correspondants sont corrects, peut constituer un élément de preuve du fait que les connaissances mobilisées pour produire un schéma peuvent s'avérer différentes de celles qu'on mobilise pour l'interpréter, fait que nous mettons en lien avec les effets de contrat didactique supposé. Nous décidons précisément d'approfondir cette hypothèse ci-après en examinant de plus près certaines de ces 23 productions d'élèves.

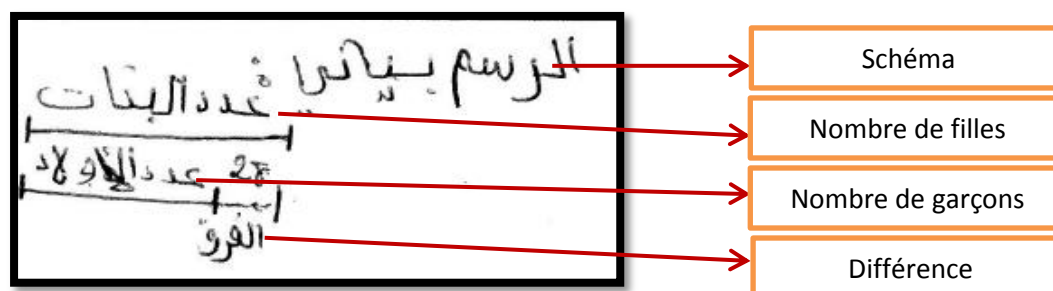
b. La production d'un schéma correct ne garantit pas la réussite

À partir d'une étude qualitative de productions d'élèves, nous allons montrer que la production correcte d'un schéma représentatif d'un problème n'est pas forcément un indicateur de réussite, et ce, en lien avec des effets de contrat. Notons que pour bien comprendre les productions des élèves tunisiens, la lecture des opérations doit se faire de droite à gauche.

i. Productions correctes de schémas qui relèvent du contrat didactique

Exemple 1 :

Pour répondre au problème 1 de la feuille 1 du questionnaire³⁷, problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental, l'élève Saief Eddine (élève en difficulté de la 6D de l'École Primaire Omar Ibn Elkhattab) produit le schéma suivant :



³⁷ (Dans une école, on compte 360 élèves. Il y a 28 garçons de moins que de filles dans cette école. Trouvez Le nombre de filles et Le nombre de garçons)

La production d'un tel schéma a nécessité la « modélisation de la comparaison » (il y a 28 garçons de moins que de filles). L'élève choisi comme *unité graphique* le segment représentant le nombre de filles et opte au traitement « Retranchement » pour produire son schéma. Par contre sa procédure de résolution est doublement erronée :

عدد البنات : 342
 عدد الأولاد : 28
 $342 = 28 - 360$
 $334 = 28 - 342$

Nombre de filles
 Nombre de garçons

Pour trouver le nombre de filles, non seulement il retranche la différence au lieu de l'ajouter, il oublie la division par deux. Nous pensons que la mobilisation de la règle **R_us_a-** est le seul facteur qui a permis la production correcte du schéma qui représente le problème posé. Répondre à un système d'attentes implicites pour produire un schéma ne garantit pas une interprétation correcte de ce schéma.

Une erreur récurrente³⁸ produite par les élèves lors de la résolution d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental est de diviser le total avant de retrancher (respectivement ajouter) pour trouver la petite part (respectivement la grande part), comme si le schéma produit n'était pas un outil d'interprétation – cette erreur étant par ailleurs rencontrée dans des productions « sans schéma ». La 3^{ème} expérimentation de nos travaux de master (Belguesmi, 2016, p. 79) nous avait d'ailleurs montré que l'utilisation d'un schéma pour résoudre des tels problèmes minimise le fait que cette erreur récurrente se produisait. La production de l'élève Med Koussay (élève en difficulté de la 6C de l'École Primaire Argoub Mimoun) montre également que cette erreur peut se produire même si le schéma est correct :

Élèves

عدد البنات : 360 كملية
 عدد الأولاد : 28
 $208 = 28 + (2 : 360)$
 $152 = 208 - 360$

Nombre de filles
 Nombre de garçons

³⁸ Un fait observable à partir des productions des élèves.

Une bonne interprétation du schéma produit, est de commencer par ajouter à 360 la différence 28 pour obtenir la valeur des deux *unités graphiques* qui représentent chacune le nombre de filles (ce que l'élève a fait via son schéma), puis enchaîner par la division par deux pour obtenir ce nombre. Et pour que la production de Med Koussay ne soit pas une exception, nous présentons les deux productions suivantes de l'élève Med Ali et l'élève Adam de la 6C de l'École Primaire Cité Elmanar :

The image displays two examples of handwritten mathematical work. The top example shows a student's calculation: $208 = 28 + (2 \times 360)$ and $152 = 208 - 360$. The bottom example shows a diagram with three boxes: 'Garçons', 'Filles', and 'Nombre total'. Red arrows point from the top example to the bottom example, indicating the flow of information.

Exemple 2 :

L'élève Maram (de la 6C de l'École Primaire Cité Olympique) propose la résolution suivante pour le problème 2 de la feuille 1 : « Le nombre de billes de Mohammed est trois fois plus grand que celui de Karim. Le nombre de billes de Karim est deux fois plus grand que le nombre de billes d'Ali. Le nombre total de billes des trois enfants est 270. Combien de billes possède chaque enfant? »

Handwritten work in Arabic showing a problem about beads. The work includes a bar model with 9 units, calculations for each boy's share, and a total sum. Labels in orange boxes point to specific parts of the work:

- Nombre de billes d'Ali
- Nombre de billes de Karim
- Nombre de billes de Mohammed
- Nombre total de billes

Bien qu'elle mette en évidence 9 *unités graphiques* qui modélisent les trois parts des trois garçons, elle divise le nombre total de billes par 6 pour trouver la part d'Ali. Elle confond le nombre total de billes avec celui de Mohammed, alors qu'elle sait que le nombre total de billes est la somme des nombres de billes de trois garçons, et la dernière opération de son travail en atteste. La composition de deux relations additives pour trouver le nombre d'*unités graphiques* qui représentent la part de Mohammed ($2 \times 3 = 6$) n'a pas posé à cette élève de difficultés, alors qu'elle échoue au niveau d'un simple dénombrement des *unités graphiques* qui représentent le nombre total de billes. Cela nous laisse penser que pour produire son schéma, l'élève Maram a juste répondu à un système d'attente implicite régi par la règle **R_us_m_e** que ce soit pour représenter la part de Karim à partir de la part d'Ali ou la part de Mohammed à partir de la part de Karim. Le travail de l'élève Maram n'est pas une exception, Raef, un élève de la même classe, reproduit le même travail (via un type de schéma non considéré lors de nos analyses a priori que nous qualifions par linéaire) :

Handwritten work in Arabic showing a problem about beads. The work includes a bar model with 9 units, calculations for each boy's share, and a total sum. Labels in orange boxes point to specific parts of the work:

- Nombre de billes d'Ali
- Nombre de billes de Karim
- Nombre de billes de Mohammed
- Bille

Les élèves produisent des schémas par effet de contrat didactique (et ces schémas sont corrects), mais visiblement ne les utilisent pas pour résoudre le problème posé.

37 élèves ont produit un schéma correct modélisant le problème 2 et uniquement trois parmi ces élèves ont échoué. Ce qui donne comme taux de réussite en s'appuyant sur un schéma 91,89 %. 75 élèves ont procédé à résoudre le problème 2 sans l'aide d'un schéma, uniquement 13 d'entre eux ont réussi. Le taux de réussite cette fois-ci est de 17,33 %. Même si la mise correcte en schéma de quelques problèmes relève du contrat, la réussite est d'autant plus grande quand nous produisons un schéma que dans le cas contraire (résoudre le problème proposé sans schéma).

Exemple 3 :

La production de l'élève française Eugénie ci-après laisse penser que sa production répond à un système d'attente en lien avec la représentation d'une fraction (ici une bande ou un rectangle divisé en 15 parties et considérer que 4 parties).

Ahmed avait
63000 millimes
sur lui pour faire
ses courses.

4200
× 15

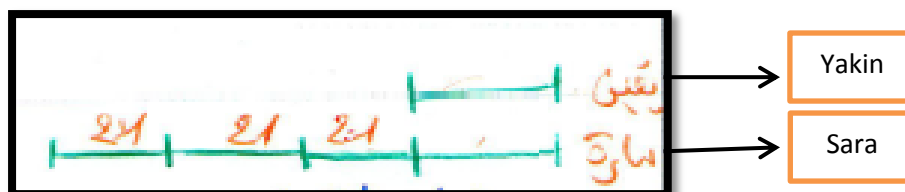
63000

« Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses ? »

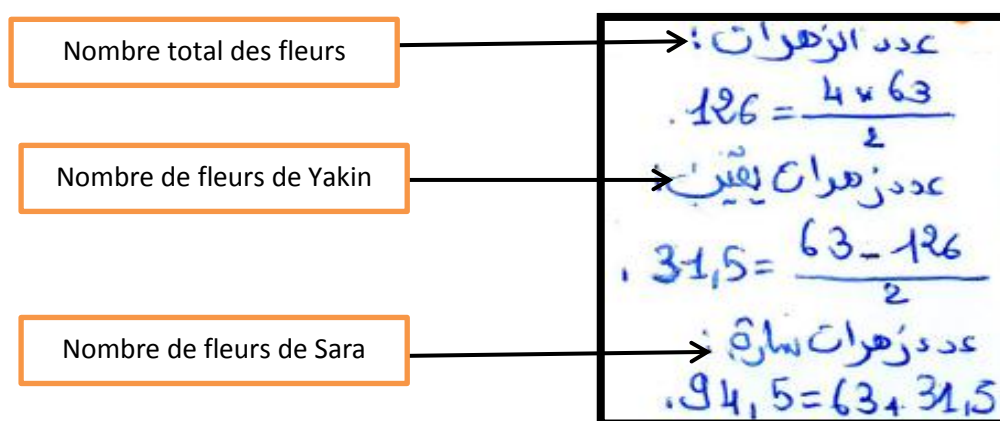
Elle correspond les 4200 millimes à une seule *unité graphique* alors que ce montant représente à travers son schéma 4 *unités graphiques*. La réussite aurait pu être du côté cet élève si elle a commencé par diviser les 4200 millimes par 4. Nous y reviendrons à travers d'autres productions similaires d'élèves français.

ii. Effet non productif du méso-contrat R_S_D

L'élève Nourane (de la 6 A l'École Primaire Privée les Collines) a produit le schéma suivant pour répondre au problème 3 de la feuille 1 du questionnaire : « Sara a 63 fleurs de plus que Yakin. Sara a 4 fois plus de fleurs que Yakin. Combien chacune a-t-elle de fleurs ? » :



Une production qui a nécessité la mise en œuvre de la règle **R_us_m_e** (un segment représentant le nombre de fleurs de Yakin reporté 4 fois pour représenter le nombre de fleurs de Sara) et la modélisation de la comparaison (Sara a 63 fleurs de plus que Yakin). Nourane propose la démarche suivante comme interprétation de son schéma correctement produit :



Sous l'effet du méso-contrat **R_S_D** ($A + B = S$ et $A - B = D$, Alors : $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$) elle ramène un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental à un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental. Puisqu'elle a la différence entre les nombres des fleurs, elle cherche à trouver le nombre total des fleurs pour en retrancher la différence et diviser par deux pour trouver le nombre de fleurs de Yakin, alors qu'un simple dénombrement des *unités graphiques* représentant la différence (63 fleurs) peut communiquer aisément le nombre de fleurs de Yakin : $63 : 3 = 21$, vue que ce dernier nombre est représenté par une seule *unité graphique*. Paradoxalement, elle le fait d'une manière unique par schématisation, mais elle n'arrive pas à interpréter correctement ce qu'elle a convenablement produit sous l'effet du méso-contrat cité ci-avant.

c. Des effets « classes » en Tunisie

Les statistiques en termes des quatre critères « Réussite avec ou sans schéma et échec avec ou sans schéma » pour la 6A de l'École Privée Les Collines et la 6A de l'École Primaire Omar Ibn Elkhatab sont respectivement les suivantes :

(le nombre entre parenthèses est le nombre d'élèves correspondant au pourcentage).

	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
Réussite avec schéma	100 % (16)	75 % (12)	62,5 % (10)	56,25 % (9)	62,5 % (10)
Réussite sans schéma	0 %	0 %	0 %	0 %	6,25 % (1)
Échec avec schéma	0 %	18,75 % (3)	25 % (4)	37,5 % (6)	6,25 % (1)
Échec sans schéma	0 %	6,25 % (1)	12,5 % (2)	6,25 % (1)	25 % (4)

(6A de l'École Primaire Privée Les Collines)

	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
Réussite avec schéma	0 %	6,25 % (1)	6,25 % (1)	6,25 % (1)	0 %
Réussite sans schéma	75 % (12)	31,25 % (5)	50 % (8)	6,25 % (1)	81,25 % (13)
Échec avec schéma	0 %	6,25 % (1)	0 %	0 %	0 %
Échec sans schéma	25 % (4)	56,25 % (9)	43,75 % (7)	87,5 % (14)	17,75 % (3)

(6A de l'École Primaire Omar Ibn Elkhatab)

A priori, l'utilisation du schéma est très fréquente chez la première classe, et nettement moins fréquente chez la deuxième classe. Ce constat est surtout identifiable

lors des résolutions du problème 1 et 5. Pour conforter notre constat, nous avons mesuré la dépendance de la variable « classe » de modalités « 1 » et « 2 », et de la variable « traitement » de modalités « résolution avec schéma » ou « résolution sans schéma » :

Variable 1 : « Classes » de modalités 1 et 2. (6A de l'École Privée Les Collines et 6A de l'École Primaire Omar Ibn El Khattab).

Variable 2 : « Traitement » de modalité « Résolution avec schéma » et « Résolution sans schéma ».

Le tableau de contingence est le suivant :

	Classe 1	Classe 2
Résolution avec schéma	71	4
Résolution sans schéma	9	76

Nous formulons les deux hypothèses :

H0 : il n'y a aucun lien entre la classe choisie et le traitement.

H1 : il y a un lien entre la classe choisie et le traitement.

L'application du test Chi-Deux pour mesurer la dépendance de ces deux variables qualitatives donne :

Résultats du test		
•	Méthode : Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction	
•	Statistique observée Qobs : 109.32705882353	
•	p-value : 1.3760100238298E-25	
•	Paramètre du test : 1	
•	Tableau des effectifs attendus sous H0 :	
	Y1	Y2
X1	37.5	37.5
X2	42.5	42.5
La valeur p (p-value) de votre test est 1.3760100238298E-25.		

Comme $p < 1,38 \times 10^{-25} < 0,01 < 0,05 \Rightarrow$ Très forte présomption contre l'hypothèse nulle.

L'hypothèse H1 est confirmée, et il y a même un très fort lien entre les deux classes 1 et 2 et la manière de traiter les problèmes posés. Nous pensons que cette forte

dépendance entre les deux variables traitées est subordonnée à des pratiques enseignantes différentes. Les élèves de la première classe, qui est une classe enseignée par nous-même, ont toujours l'habitude d'utiliser la schématisation comme technique de résolution, ce qui n'est, *a priori*, pas le cas pour les élèves de la deuxième classe.

Et pour affiner nos investigations, nous nous sommes intéressés aux deux classes et leurs manières de procéder à la résolution du problème 1. Les 16 élèves de la première classe ont résolu le problème 1 avec schéma alors que 14 élèves de la deuxième classe l'ont résolu sans schéma. Nous postulons que la résolution du problème 1 sans schéma et avec un pourcentage de 75 % en termes de réussite est sous l'effet du méso-contrat régi par la règle **R_S_D** : si on donne deux grandeurs de somme S et différence D alors :

- la petite grandeur = $\frac{S - D}{2}$,
- la grande grandeur = $\frac{S + D}{2}$.

Pareillement, le taux de réussite de la deuxième classe lors de la résolution du problème 5 (13 sur 16 élèves ont réussi la résolution sans schéma) est expliqué par la mise en œuvre de la règle **R_INV_F** : si $A = \frac{m}{n} B$ alors $B = \frac{n}{m} A$.

La dépendance de deux variables « classes » et « traitement » a été vérifiée avec les classes : 3 (6B de l'École primaire les Collines) et 4 (6D de l'École Primaire Omar Ibn Elkhatab) et avec les classes : 5 (6C de l'École Primaire Cité Olympique) et 6 (6C de l'École Primaire Argoub Mimoun). Nous pensons que cette dépendance est due à deux facteurs : le premier facteur, comme évoqué précédemment, est les pratiques enseignantes et le deuxième facteur est le niveau de la classe (classe en difficulté versus classe à « bon niveau »).

Nous avons remarqué que le résultat (réussite ou échec) a un lien avec le problème traité. Et pour étudier ce lien nous avons défini les variables suivantes :

Variable 1 : « Problèmes » de modalités 1, 2, 3, 4 et 5.

Variable 2 : « Résultat » de modalité Réussite et Echec.

Le tableau de contingence correspondant aux deux variables est le suivant :

	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
Réussite	99	47	48	49	90
Echec	37	89	88	87	46

Nous formulons les deux hypothèses :

H0 : il n'y a aucun lien entre les résultats et les problèmes posés.

H1 : il y a un lien entre les résultats et les problèmes posés.

L'application du test Chi-Deux pour mesurer la dépendance de ces deux variables qualitatives donne :

Résultats du test					
<ul style="list-style-type: none"> Méthode : Pearson's Chi-squared test Statistique observée Qobs : 77.597597597598 p-value : 5.6203808021859E-16 Paramètre du test : 4 Tableau des effectifs attendus sous H0 : 					
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
X1	66.6	66.6	66.6	66.6	66.6
X2	69.4	69.4	69.4	69.4	69.4
La valeur p (p-value) de votre test est 5.6203808021859E-16.					

Comme $p < 5,63 \times 10^{-16} < 0,01 < 0,05 \Rightarrow$ Très forte présomption contre l'hypothèse nulle H0. L'hypothèse H1 est confirmée, et il y a même un fort lien entre le résultat et les problèmes posés. La réussite est du côté des deux problèmes 1 et 5 et l'échec est du côté des problèmes 2, 3 et 4.

Le tableau suivant résume le nombre de relations dans chaque problème :

	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
Nombre de relations	2	3	2	3	1

Ce qui nous interpelle dans ce tableau c'est le nombre d'échecs constaté au niveau du problème 3 alors que le nombre de relations dans ce problème est 2. Il est logique de constater un nombre d'échecs au niveau des problèmes 2 et 4 puisque le problème 2 est en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental (contient une composition de relations multiplicatives et une troisième additive) et le problème 4 est en lien avec

notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental (contient une composition de relations additive et 3 relations additives au total).

Nous avons isolé les modalités 2, 3 et 4 de la variable « Problèmes » et nous avons procédé à la mesure de la dépendance de cette nouvelle variable avec la variable « résultat » :

Variable 1 : « Problèmes » de modalité 2, 3, et 4.

Variable 2 : « Résultat » de modalités réussite et échec.

Le tableau de contingence correspondant aux deux variables est le suivant :

	Problème 2	Problème 3	Problème 4
Réussite	47	48	49
Echec	89	88	87

Nous formulons les deux hypothèses :

H0 : il n'y a aucun lien entre les résultats et les problèmes posés.

H1 : il y a un lien entre les résultats et les problèmes posés.

L'application du test Chi-Deux pour mesurer la dépendance de ces deux variables qualitatives donne :

Résultats du test

- Méthode : Pearson's Chi-squared test
- Statistique observée Qobs : 0.06439393939393939
- p-value : 0.96831583441758
- Paramètre du test : 2
- Tableau des effectifs attendus sous H0 :

	Y1	Y2	Y3
X1	48	48	48
X2	88	88	88

La valeur p (p-value) de votre test est 0.96831583441758.

Comme $p > 0,96 > 0,05 \Rightarrow$ pas de présomption contre l'hypothèse nulle H0. L'hypothèse H0 est confirmée, et il n'y a aucun lien entre les résultats et les problèmes posés.

Cette indépendance des deux variables montre que le problème 3, bien qu'il soit déconnecté à deux branches, a le même niveau de difficulté des problèmes 2 et 4 qui sont déconnectés à trois branches. Une des explications de ce constat, et contrairement aux problèmes 1 et 5 qui peuvent être résolus via des formules explicites, est le fait qu'il n'y a aucune règle ou formule qui peut aider à résoudre que ce soit le problème 3 ou les deux problèmes 2 et 4 sans sa généralisation à partir d'un schéma. Pourtant, rappelons que ce problème (problème 3) tel que proposé dans le questionnaire ne représente pas le cas de figure le plus difficile de notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental (identification des valeurs de la variable associée au 2^{ème} énoncé-schéma fondamental, 1^{er} cas V_{1,2} p. 120). Le problème sera d'autant plus compliqué si la fraction $\frac{m}{n}$ n'est ni entier ni unitaire.

d. Des effets « élèves » en Tunisie et en France

Une première étude des types de réponses produites par les uns et les autres (voir tableau 1 et tableau 2 ci-dessous) pour résoudre le problème 5 de la feuille 1 donne à voir d'autres premiers faits saillants.

	Réussite avec schéma	Réussite sans schéma	Échec avec schéma	Échec sans schéma
Nombre d'élèves de fin de primaire tunisiens <i>Effectif total : 136 élèves</i>	21	69	3	43

Tableau D3 : réussites-échecs avec ou sans schéma des élèves tunisiens

	Réussite avec schéma	Réussite sans schéma	Échec avec schéma	Échec sans schéma
Nombre d'élèves français de sixième <i>Effectif total : 48 élèves</i>	3	5	7	33

Tableau D4 : réussites-échecs avec ou sans schéma des élèves français

Pour les deux populations d'élèves, les réussites sans schéma sont d'effectifs supérieurs aux réussites avec schémas – mais il en est de même pour les échecs sans schémas plus nombreux que les échecs avec schéma (d'effectifs très réduits chez les élèves tunisiens), ce qui rend l'interprétation d'un tel fait numérique plus complexe qu'il n'y paraît. Par exemple, notons 12,5 % d'élèves tunisiens faisant un schéma échouent quand près de 38,39 % d'élèves tunisiens ne faisant pas de schéma échouent – ce qui malgré un effectif plus grand d'élèves réussissant « sans schémas », pourrait conduire à penser que l'usage d'un schéma augmente la chance de résoudre correctement le problème. Ceci semble indiquer que les élèves tunisiens qui ont produit des schémas segmentaires (car ils le sont presque tous dans les faits) ont réussi à interpréter correctement le problème arithmétique posé et à s'approprier la démarche de résolution d'un tel problème, liée à l'usage de tels schémas, quand ceux-ci apparaissent valides. Nous verrons par la suite, que cela n'est peut-être pas si simple que cela en a l'air ... Il n'en demeure pas moins qu'au sein de chaque institution, des élèves (en effectif assez important dans l'institution tunisienne, beaucoup plus restreint dans l'institution française) semblent avoir réussi à résoudre le problème « sans » utiliser de schémas : soit à inverser le rapport fractionnaire donné entre les deux grandeurs. Est-ce parce que cette connaissance leur a été préalablement enseignée par un enseignant, ou s'agissant des élèves tunisiens, généralisée à partir des problèmes donnés à résoudre en amont (à l'instar des savoirs possiblement visés dans le manuel d'arithmétique de 1960) ?³⁹ Et qu'en est-il des élèves français, ce résultat (5 élèves ayant réussi à résoudre le problème sans schéma) pouvant paraître surprenant au regard du fait que ni la résolution de tels problèmes, ni l'inversion d'une fraction n'est enseignée à ce niveau scolaire ?

L'étude des productions d'élèves ne comportant pas de trace d'éléments explicatifs liés à l'inversion du rapport, nous ne pouvons guère en dire plus sur le sujet et la question reste relativement ouverte à nos yeux, si ce n'est que pour les élèves tunisiens, l'application immédiate du « produit en croix » peut laisser penser à l'emploi d'une technique systématique institutionnalisée en amont pour résoudre ce type de problèmes (réponse à l'attente régie par le méso-contrat **R_INV_F**). En l'absence d'une explication de la procédure de résolution, l'élève procède à l'application d'une formule enseignée préalablement).

³⁹ Bodard et Bréjaud (1960) : p 102.

Nous présentons deux exemples illustrés par le tableau ci-après :

<p>قيمة المبلغ :</p> $15750 = \frac{15 \times 4200}{4}$	<p>المبلغ الذي كان يمتلكه :</p> $15750 = \frac{15 \times 4200}{4}$
---	--

Montant initial

Tableau D5 : productions d'élèves tunisiens – réussites sans schémas

Ce qui nous mène à mettre en avant comme résultat une forme de tension entre : **règle de contrat en lien avec des généralisations** versus **outils schéma segmentaire**.

Ce qui nous a paru intéressant au regard de notre problématique de départ, c'est d'analyser les productions « avec schéma » d'élèves français et d'élèves tunisiens (ayant réussi ou échoué), afin de mieux élucider la question des connaissances mathématiques en jeu dans les productions des schémas ou dans leurs interprétations en vue de résoudre le problème posé.

Nous avons constaté que les schémas produits, que ce soit par les élèves tunisiens ou par les élèves français, présentent des proximités apparentes. Les schémas produits par les élèves tunisiens (voir pp. 273-275 : Omar, Yakin, Rayen et Maram) sont tous de modèles segmentaires et proches de ceux donnés en exemple dans la partie B de la thèse, la plupart du temps avec une représentation « séparée » des deux grandeurs en jeu (exception faite de Rayen, voir p. 274).

Les schémas produits par les élèves français sont plus variés (voir pp. 273-275 : Yoni, Judith, Shaynaz et Lucie) :

nous pouvons les considérer comme segmentaires mais les représentations sont à 50% liées à des « barres » ou à des « surfaces rectangulaires » avec une représentation « superposée » des grandeurs en jeu, plus proches de ceux donnés en exemple dans les manuels étudiés (p. 178 et 181) :

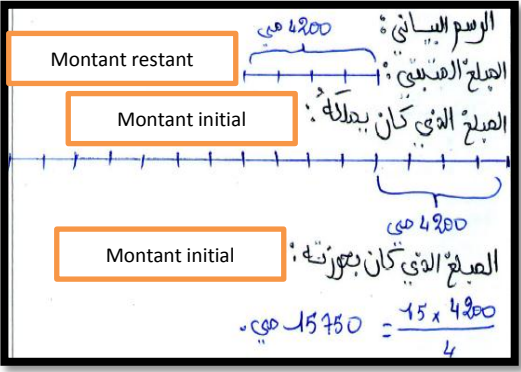
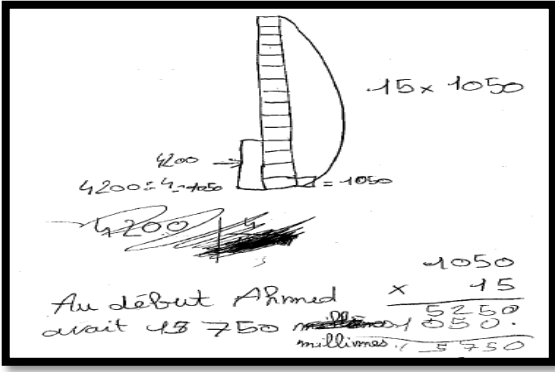
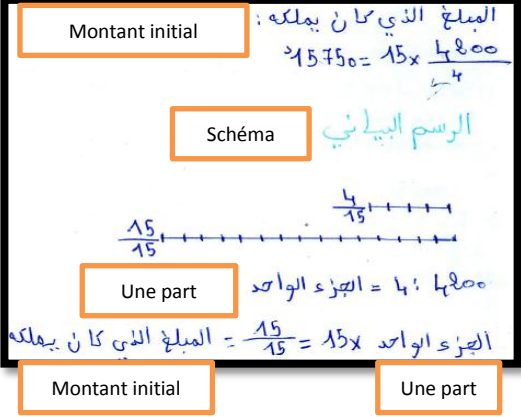
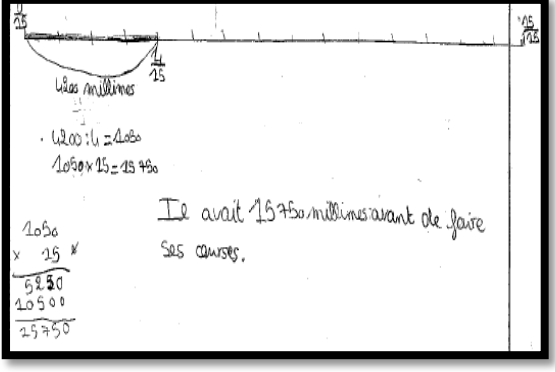
 <p>Montant restant</p> <p>Montant initial</p> <p>Montant initial</p> <p>الرسم البياني : المبلغ المتبقي : المبلغ الذي كان يمتلكه : المبلغ الذي كان يمتلكه : $15750 = \frac{15 \times 4200}{4}$</p>	 <p>15×1050</p> <p>$4200 = 4 \times 1050$</p> <p>4200</p> <p>Au début Ahmed avait 4200 millimètres</p> <p>$1050 \times 15 = 15750$</p>
Production de l'élève tunisien Omar	Production de l'élève français Yoni
 <p>Montant initial</p> <p>الرسم البياني</p> <p>Schéma</p> <p>Une part</p> <p>Montant initial</p> <p>Une part</p> <p>المبلغ الذي كان يمتلكه : $15750 = 15 \times \frac{4200}{4}$</p> <p>الجزء الواحد = 4 : 4200</p> <p>المبلغ الذي كان يمتلكه = $\frac{15}{15} = 15 \times$ الجزء الواحد</p>	 <p>1050 millimètres</p> <p>$1050 \times 15 = 15750$</p> <p>Il avait 15750 millimètres avant de faire ses courses.</p> <p>$1050 \times 15 = 15750$</p>
Production de l'élève tunisienne Yakin	Production de l'élève française Judith

Tableau D6 : productions d'élèves français et tunisiens – réussites avec schémas

Nous pouvons faire l'hypothèse que ces différentes représentations correspondent à des connaissances anciennes enseignées sur la schématisation au sein de chaque institution : outillant la résolution de tels problèmes en Tunisie avec des schémas de modèle segmentaire (accompagnés d'éléments de discours « normés » sur ces schémas sur les grandeurs en jeu : mise en œuvre de la règle **R_us_m_f**), davantage en lien avec les fractions et leurs représentations (en lien avec les grandeurs aires ou longueurs) en France.

Pour autant si nous étudions plus avant les productions de ces élèves français (Yoni, Judith) ou tunisiens (Omar, Yakin) qui ont réussi à résoudre le problème en utilisant un schéma, elles sont proches et semblent convoquer pour partie les connaissances détaillées dans notre analyse de l'énoncé (voir annexe 8, pp. 416-417), ou faite en amont sur un problème isomorphe (voir page pp. 107-108). Ainsi ces élèves ont produit des représentations de ce que nous avons qualifié d'*unité du problème* (correspondant à la grandeur inconnue du montant d'argent initial) en reportant 15

fois une *unité graphique* ou en partageant cette unité en 15 pour obtenir cette nouvelle *unité graphique*. Une fois le montant initial représenté sur ce même schéma, par l'intermédiaire de la double désignation apparente de ce montant correspondant à 4 *unités graphiques*, ils opèrent le changement d'unité de référence prévu ($\frac{1}{15}$ du montant initial appréhendé et vue comme $\frac{1}{4}$ du montant restant), ce qui leur permet de déterminer directement la valeur de l'*unité graphique* ($\frac{4200 \text{ millimes}}{4}$) puis la valeur du montant initiale correspondant au report de ces 15 *unités graphiques* ($\frac{4200 \text{ millimes}}{4} \times 15$).

Nous remarquons sur la production de l'élève française Judith la présence d'un « 0 » qui indique que la représentation schématique produite par cette élève semble renvoyer à la représentation de fractions sur une droite graduée (familière chez les élèves français). Nous pouvons même penser que c'est chez les deux élèves français (Yoni et Judith), la représentation schématique du « $\frac{4}{15}$ » donné dans l'énoncé qui a initialement piloté la production des schémas leur permettant de résoudre le problème inhabituel pour eux. Toutefois, ceci donne déjà à voir que si les connaissances, notamment celle liée au changement d'unité de référence nécessaire à l'interprétation des schémas produits par les élèves français ou tunisiens pour résoudre le problème posé et ayant permis d'aboutir à une solution correcte, sont identiques, il peut y avoir des variations dans les connaissances qui ont piloté la production de ces schémas.

L'analyse de schémas produits par les élèves n'ayant pas réussi à résoudre le problème apporte des informations nouvelles quant à la nature potentiellement différente de ces connaissances :

<p>العدد الأول = $\frac{4200}{15}$</p> <p>$\frac{4200}{15} = 280$</p> <p>العدد الثاني = $\frac{4200}{15}$</p> <p>$4200 \div 15 = 280$</p> <p>$4200 \div 15 = 280$</p>	<p>Bebe de Ahmed</p> <p>$4200 \div 15 = 280$</p> <p>$4200 \div 15 = 280$</p>
Production de l'élève tunisien Rayen	Production de l'élève française Shaynaz

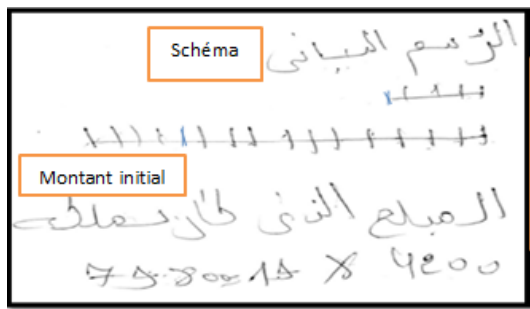
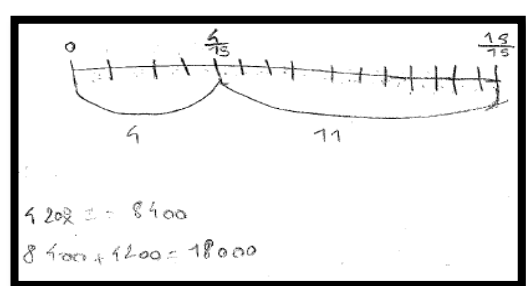
 <p>Production de l'élève tunisienne Maram</p>	 <p>Production de l'élève française Lucie</p>
---	---

Tableau D7 : productions d'élèves français et tunisiens – échecs avec schémas

Les schémas produits par ces élèves sont visiblement très proches de ceux produits par les élèves ayant réussi à résoudre le problème. Et pourtant, dans leur cas, la démarche outillée par la schématisation ne leur a pas permis d'aboutir à une solution valide au problème posé. Plus encore l'étude de ces productions fait apparaître des connaissances potentiellement différentes convoquées par les un-e-s et les autres.

Prenons tout d'abord l'exemple de la production de l'élève tunisienne Maram – elle a représenté deux segments conformes aux attentes en termes de traitements graphiques liés à une *unité graphique* correspondant à $\frac{1}{15}$ du montant initial : l'un faisant apparaître le report de 15 *unités graphiques* qui correspondrait à l'*unité du problème*, soit le montant initial et l'autre faisant apparaître 4 *unités graphiques* qui correspond au montant restant ($\frac{4}{15}$ du montant initial), soit à la valeur donnée de 4200 millimes.

Toutefois Maram ne semble pas avoir été capable d'interpréter le schéma ainsi produit pour résoudre le problème. Le fait qu'elle effectue le produit $4200 \times 19 = 79800$ semble montrer qu'elle associe 4200 millimes à une *unité graphique* mais sans donner le sens prévu à l'*unité graphique* et au segment ainsi représenté. Nous pouvons dès lors s'agissant de cette élève (et d'autres élèves tunisiens), faire l'hypothèse que les connaissances qui ont piloté la production de ce schéma sont d'un autre ordre que celles identifiées dans notre analyse, relatives aux fractions de grandeurs et à des systèmes d'*unités relatives*. Nous faisons l'hypothèse que Maram et d'autres élèves tunisiens ont produit de tels schémas pour répondre à des attentes implicites créées par un processus d'enseignement qui prend en charge la schématisation segmentaire. Rappelons que la règle de contrat didactique relative à un tel système d'attentes est formulée de la manière suivante : « quand il y a présence d'une fraction $\frac{m}{n}$ d'une grandeur (inconnue) dans un problème alors je représente un segment de m unités

graphiques ($\frac{m}{n}$) et un autre de n unités graphiques ($\frac{n}{n}$) » coupant potentiellement la production d'une telle représentation graphique d'une signification liée à la fraction d'une grandeur.

Pour les élèves français comme Lucie, la difficulté nous paraît d'un autre ordre. La présence du « 0 » mentionné sur son schéma nous invite à penser que cette élève a cherché à représenter la fraction $\frac{4}{15}$ sur la droite graduée puis a représenté $\frac{15}{15}$ mais en la considérant comme l'unité « absolue » correspondant au nombre « 1 » (tout comme Shaynaz, mais aussi, peut-être Yoni ou Judith au moins dans un premier temps...) et non pas comme une *unité relative* correspondant dans le cas présent au montant initial dont nous cherchons la valeur. Nous faisons l'hypothèse que ces comportements d'élèves français sont régis par d'autres systèmes d'attentes implicites liés aux savoirs et aux connaissances enseignées sur les fractions et sur leurs représentations graphiques au sein de l'institution française : « *quand il y a présence d'une fraction $\frac{m}{n}$ (<1) dans un problème alors je représente cette fraction comme un partage d'une unité en représentant m parties incluses dans un tout de n parties (sur la droite graduée ou sur une représentation rectangulaire ou circulaire) – correspondant à l'unité* ». L'accent est mis sur la fraction partage d'une unité « absolue » - « 1 », d'où une difficulté de raccord pour ces élèves avec un autre point de vue, celui de la fraction partage d'une grandeur, à considérer dès lors comme une *unité relative* - celle que l'on désigne précisément par *l'unité du problème*. À regarder ce qu'ont produit ces élèves français, il peut d'ailleurs paraître presque étonnant de voir que d'autres élèves (très peu au final, rappelons-le : 3 seulement) ont réussi à étendre leurs connaissances sur la fraction « partage d'une unité » à la fraction « partage d'une grandeur ». Il est probable que ce soit la mise en relation de leurs schémas produits initialement comme des « partages de l'unité » avec les données du problème qui ait permis cette extension et au final la mise en œuvre du changement d'unité de référence nécessaire pour résoudre le problème.⁴⁰ Notons d'ailleurs que des élèves comme Shaynaz ou Lucie ont également tenté des mises en relation de leurs schémas avec les grandeurs (connue et inconnue) de l'énoncé, en mettant d'ailleurs en œuvre des connaissances qui ne sont pas si éloignées de celles en jeu – par exemple pour Shaynaz qui considérant $\frac{11}{15}$ correspond à la fois à l'argent « dans la poche d'Ahmed »

⁴⁰ Le zéro sur la droite représentée par l'élève Judith nous paraît un indice dans ce sens ...

et à 4200 millimes tente de diviser 4200 millimes par 11 ... ce qui pourrait tendre à laisser penser qu'un tel schéma segmentaire pourrait avoir un potentiel adidactique en lien avec cette extension de la fraction partage « d'une unité » à la fraction partage « d'une grandeur » (considérée comme *unité relative*).

2. Analyse des réponses de la feuille 2 du questionnaire

Nous avons proposé à travers la feuille 2 cinq problèmes dans cet ordre :

- un problème en lien avec le 4^{ème} énoncé-schéma fondamental ;
- un problème en lien avec le 5^{ème} énoncé-schéma fondamental ;
- deux problèmes en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental ;
- et un problème en lien avec le 1^{er} énoncé-schéma fondamental.

Les consignes étaient comme suit :

La consigne pour les trois premiers problèmes est : « Résoudre les problèmes suivants après avoir associé l'énoncé du problème au schéma qui lui correspond (entourer le « bon schéma ») ».

La consigne pour le quatrième problème est : « Résoudre le problème suivant en produisant un schéma qui pourrait t'aider dans la résolution de ce problème ».

Pour le dernier problème, la consigne est: « En s'appuyant sur le schéma proposé, résoudre le problème suivant tout en expliquant la procédure de résolution » (voir problème ci-dessous)

a. Des réussites qui relèvent du contrat

Le problème 5 de la feuille 2 du questionnaire est le suivant :

En s'appuyant sur le schéma proposé, résoudre le problème suivant tout en expliquant la procédure de résolution :

Avec ses économies, Khadija a acheté un ordinateur. Il lui reste 240 d, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de ses économies initiales. Trouvez le montant de ce que Khadija avait économisé avant son achat. (d : dinar)

$240 \text{ d} : \frac{4}{15}$	
Economies de Khadija : $\frac{4}{15}$	

Bien que nous ayons demandé explicitement aux élèves d'expliquer leurs procédures de résolution, tous les élèves de la 6 C de l'école primaire Argoub Mimoun, et qui ont répondu correctement au problème 5, n'ont pas apporté une explication à leurs procédures de résolution excepté l'élève Joulounnar dont nous présentons sa production :

<p>قيمة المدخرات :</p> $900 = \frac{15 \times 240}{4}$ <p>نقوم بالضرب في مقلوب الكسر لكي نجد القيمة الجمالية.</p>	<p>Valeur des économies</p> <p>Nous multiplions par l'inverse de la fraction pour trouver la valeur des économies</p>
---	---

Ce qui prouve à partir de la réponse ci-dessus que les élèves de cette classe appliquent automatiquement une formule (mise en œuvre de la règle du contrat **R_INV_F**) donnée préalablement pour résoudre le problème posé. Le recours au schéma donné est inexistant.

Productions de deux élèves parmi les élèves qui ont répondu correctement au problème 5 :

Production de l'élève Amani

Production de l'élève Nesrine

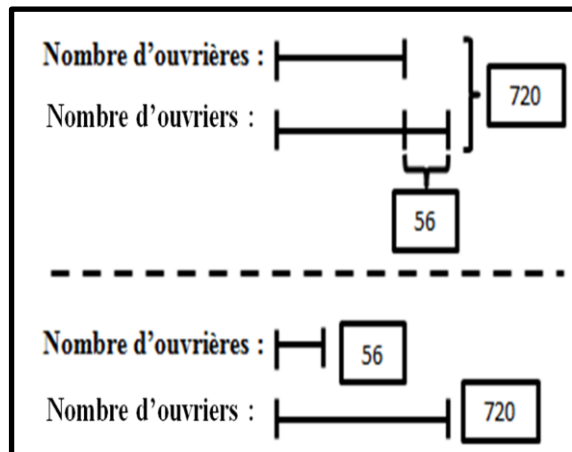
<p>قيمة المدخرات :</p> $360 = \frac{15 \times 240}{4}$	<p>Montant des économies</p>	<p>قيمة المدخرات :</p> $900 = \frac{15 \times 240}{4}$
--	------------------------------	--

Le premier problème de la feuille 2 est le suivant :

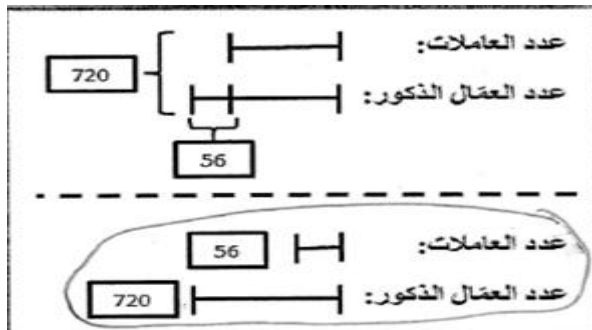
Résoudre le problème suivant après avoir associé l'énoncé du problème au schéma qui lui correspond (entourer le « bon schéma ») :

Dans une usine on compte 720 ouvriers et ouvrières. Il y a 56 ouvrières de moins que d'ouvriers dans cette usine. Trouvez :

- le nombre d'ouvriers,
- le nombre d'ouvrières.



L'élève Chaouki (élève de la 6C de l'École Primaire Argoub Mimoun), en répondant à ce problème, entoure le schéma incorrect :



Et malgré l'erreur commise, qui doit garantir normalement l'échec dans la suite de la résolution, il résout le problème correctement :

Handwritten solution showing the calculation of the number of workers and workers. The equations are:

$$388 = \frac{56 + 720}{2}$$

$$332 = \frac{56 - 720}{2}$$

Arrows point from the labels 'Nombre d'ouvriers' and 'Nombre d'ouvrières' to the corresponding terms in the equations.

L'association du problème à un schéma incorrect n'a pas empêché l'élève Chaouki de résoudre correctement le problème, et cela montre d'une façon claire que l'élève répond au système d'attente régi par la règle **R_S_D** en appliquant la formule numérique déjà apprise auparavant pour résoudre le problème posé ($A + B = S$ et $A - B = D \Rightarrow A = \frac{S + D}{2}$ et $B = \frac{S - D}{2}$).

Inversement, l'association du problème à un schéma correct ne garantit pas une résolution correcte du problème, comme le montre la production de l'élève Meriem N. (élève de la 6C de l'École Primaire Argoub Mimoun) :

يعدّ مصنع 720 عاملا و عاملة.
عدد العاملات يقلّ عن عدد العمال الذكور بـ 56. ابحث عن:
عدد العمال الذكور،
عدد العاملات.

عدد العاملات: 720
عدد العمال الذكور: 56

عدد العاملات: 56
عدد العمال الذكور: 720

عدد العمال الذكور: 144 = 56 : 720
عدد العاملات: 299 = 56 : 144

Nombre d'ouvriers
Nombre d'ouvrières
Nombre d'ouvriers
Nombre d'ouvrières

Ça laisse à penser que l'association correcte du problème au bon schéma n'est *a priori* régie que par la règle **R_us_a+** et non régie par les connaissances qui sont derrière cette règle.

Ce dernier constat montre que répondre correctement à une clause de contrat n'est pas nécessairement source de réussite.

b. Impact des structures des problèmes sur les productions des élèves

Les deux problèmes 3 et 4 de la feuille 2 sont les suivants :

Problème 3 : « Le nombre de billes d'Alia est égal à $\frac{1}{2}$ de celui d'Atef, et le nombre de billes d'Atef est égal à $\frac{1}{3}$ de celui de Karima. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien de billes possède chaque enfant? »

Problème 4 : « Fatma possède 3 fois moins de couronnes que Khadija et 2 fois plus de couronnes que Zeyneb. Sachant le nombre total des couronnes est 126, combien de couronnes possède chaque fille? »

Le problème 3 est un problème à trois branches de type Composition et le problème 4 est un problème à trois branches de type Puits (Bednarz & Janvier, 1994), en lien tous les deux avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental. Le taux de réussite au niveau du problème 3 est plus élevé que celui au niveau du problème 4. Via un traitement intrinsèque au registre de langue naturelle, le problème 4 devient un problème de type Composition : « Khadija possède 3 fois plus de couronnes que Fatma et Fatma possède 2 fois plus de couronnes que Zeyneb. Sachant le nombre total des couronnes est 126, combien de couronnes possède chaque fille? »

Ce traitement dans le registre de la langue naturelle montre que les deux problèmes sont isomorphes, mais les élèves éprouvent beaucoup de difficultés quand il s'agit de résoudre un problème en lien à notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental de type Puits. Les productions suivantes viennent pour confirmer ces derniers propos :

	Résolution du problème 3 (Réussite)	Résolution du problème 4 (Échec)
Israa		

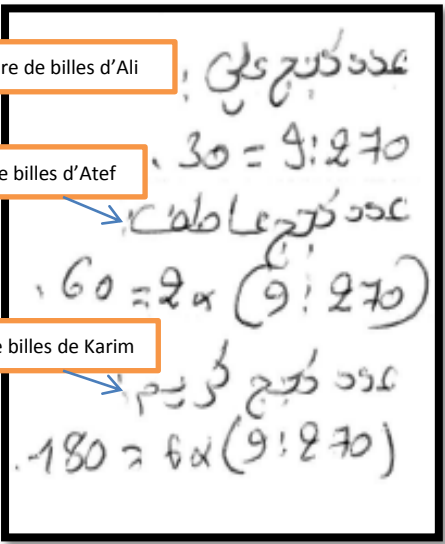

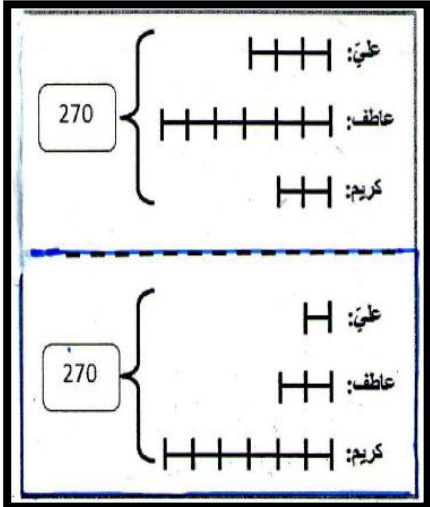
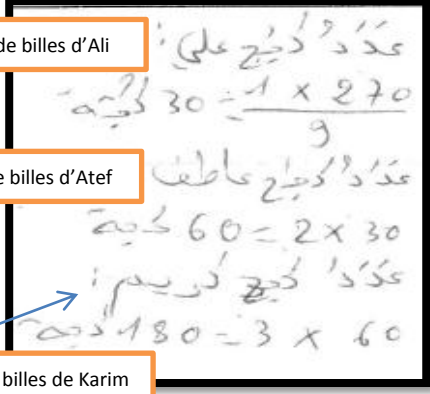
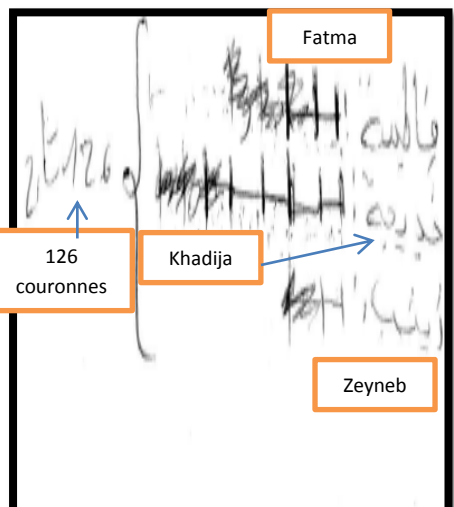
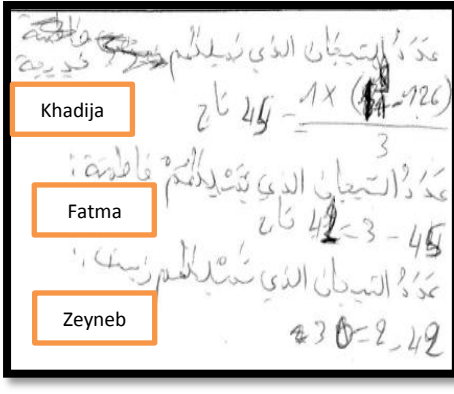
<p>Nombre de billes d'Ali</p> <p>Nombre de billes d'Atef</p> <p>Nombre de billes de Karim</p> 	<p>Zeyneb</p> <p>Fatma</p> <p>Khadija</p> 
<p>Jihen</p>  <p>Nombre de billes d'Ali</p> <p>Nombre de billes d'Atef</p> <p>Nombre de billes de Karim</p> 	<p>Fatma</p> <p>Khadija</p> <p>Zeyneb</p> <p>126 couronnes</p>  <p>Khadija</p> <p>Fatma</p> <p>Zeyneb</p> 

Tableau D8 : résolution d'un problème de type Composition et d'un problème de type Puits par deux élèves tunisiennes

Les deux relations multiplicatives sont plus faciles à gérer par les élèves quand elles sont énoncées d'une façon linéaire, c'est-à-dire A est en relation avec B et B est en relation avec C (problème de type Composition), elles sont moins faciles à gérer

quand elles ont un même point de départ, c'est-à-dire A est en relation avec B et C (problème de type Puits).

c. Le schéma comme une prise d'appui pour résoudre les problèmes

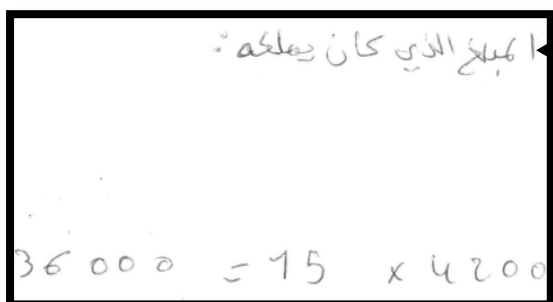
Les deux problèmes 5 de la feuille 1 et 2 du questionnaire sont en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental :

Problème 5 Feuille 1	Problème 5 Feuille 2						
<p>5) Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses.</p>	<p>En s'appuyant sur le schéma proposé, résoudre le problème suivant tout en expliquant la procédure de résolution :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Avec ses économies, Khadija a acheté un ordinateur. Il lui reste 240 d, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de ses économies initiales. Trouver le montant de ce que Julie avait économisé avant son achat.</p> </div> <div style="border: 1px solid orange; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid red; border-radius: 10px; padding: 5px; width: 25%;">240 d : $\frac{4}{15}$</td> <td style="width: 20%; text-align: center;"> </td> <td style="width: 55%;"></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid red; border-radius: 10px; padding: 5px;">Economies de Khadija : $\frac{4}{15}$</td> <td style="text-align: center;"> </td> <td style="text-align: center;"> </td> </tr> </table> </div>	240 d : $\frac{4}{15}$			Economies de Khadija : $\frac{4}{15}$		
240 d : $\frac{4}{15}$							
Economies de Khadija : $\frac{4}{15}$							

Tableau D9 : deux problèmes en lien avec le 1^{er} énoncé-schéma fondamental

Non seulement les deux problèmes sont tous les deux en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental, mais ils sont presque identiques : nous avons remplacé les fruits et légumes par l'ordinateur et 4200 millimes par 240 d. Le problème 5 de la feuille 2 dispose en plus d'un schéma qui le représente. Nous avons remarqué que le taux de réussite au niveau du problème 5 de la feuille 2 est plus élevé que celui au niveau de la feuille 1. Ce constat tend à montrer que le schéma (de type segmentaire) peut

constituer « un bon » outil pour résoudre ce type de problème arithmétique. L'élève Chaouki a échoué lors de la résolution du problème 5 de la feuille 1 :

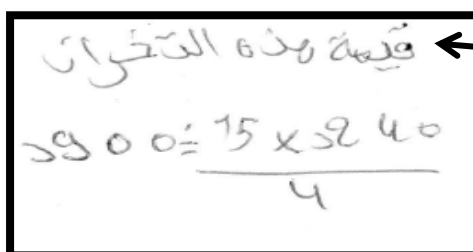


المبلغ الذي كان يملكه

$$36000 = 15 \times 4200$$

Montant initial

Par contre il a réussi lors de la résolution du problème 5 de la feuille 2 :



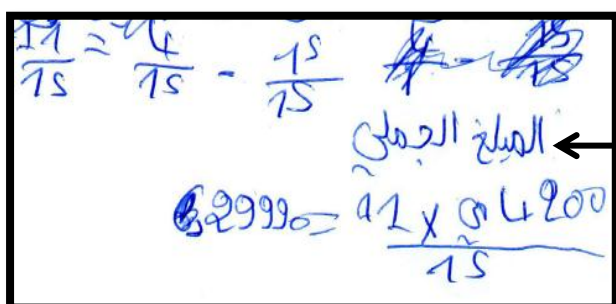
قيمة هذه التوفيران

$$29000 = 15 \times 240$$

Valeur des économies

Cette accessibilité offerte par le schéma pour résoudre correctement un problème associé à ce schéma est identifiable à travers la production de l'élève Imen C. (élève de la 6B de l'École Primaire Manar) :

Résolution de l'élève Imen C. du problème 5 de la feuille 1 :



المبلغ الجملي

$$\frac{11}{15} = \frac{4}{15} - \frac{15}{15}$$

$$229990 = 42 \times 4200$$

Montant initial

Sans l'aide d'un schéma, l'élève perçoit le montant initial comme $\frac{11}{15}$ de 4200.

Résolution de l'élève Imen C. du problème 5 de la feuille 2 :

Puisque le reste est égal à $\frac{4}{15}$ alors
l'ordinateur est égal à

$$\frac{15}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

Prix de l'ordinateur

Valeur des économies

La valeur des économies est le prix de l'ordinateur + le reste

En s'appuyant sur le schéma, l'élève perçoit que le prix de l'ordinateur représente $\frac{11}{15}$ de la valeur des économies, c'est-à-dire représenté par 11 *unités graphiques*. Pour trouver le prix de l'ordinateur l'élève divise 240 par 4 pour trouver la valeur d'une *unité graphique* puis multiplie par 11 pour trouver le prix de l'ordinateur. La double désignation d'une *unité graphique* comme $\frac{1}{4}$ de 240 puis comme $\frac{1}{11}$ du prix de l'ordinateur a permis à l'élève de trouver ce dernier prix. Par suite, elle additionne le prix de l'ordinateur avec 240 pour trouver la valeur des économies.

Considérons à présent le problème 4 de la feuille 1:

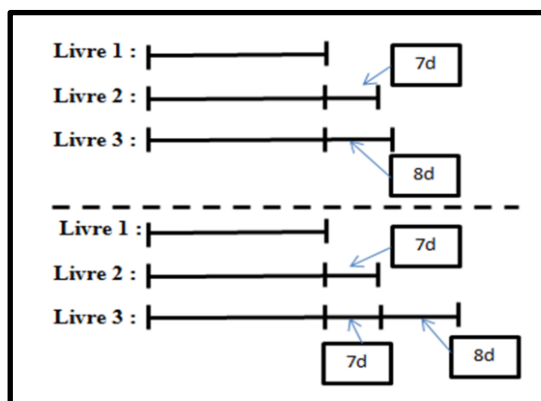
Résoudre le problème suivant :

« La masse totale de trois météorites est de 82 tonnes. La masse de la 3^{ème} météorite dépasse celle de la deuxième de 17 tonnes. La masse de la 2^{ème} météorite dépasse celle de la 1^{ère} météorite de 10 tonnes. Trouvez la masse de chaque météorite. »

Et le problème 2 de la feuille 2 :

Résoudre le problème suivant après avoir associé l'énoncé du problème au schéma qui lui correspond (entourer le « bon schéma ») : (d : dinar)

Marien a acheté 3 livres scientifiques pour un prix total de 145 d. Sachant que le deuxième livre coûte 7 d de plus que le premier et que le troisième coûte 8 d de plus que le deuxième, chercher le prix de chaque livre.



Les deux problèmes sont en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental. Le taux de réussite de la résolution du problème 4 de la feuille 1 est de 36,03 %. Le taux de réussite de la résolution du problème 2 de la feuille 2 de 52,94 %. Cette progression en termes de réussite est *a priori* due au schéma fourni représentant le problème 2 de la feuille 2. Le schéma aide-t-il les élèves à mieux maîtriser les procédures à mettre en jeu pour résoudre le problème posé ? *A priori* oui, pour une tranche d'élèves qui peut être considérée comme « non négligeable » (16,91 % des élèves).

Tous les élèves qui ont associé au problème 2 de la feuille 2 le schéma incorrect ont échoué. Alors que correspondre au problème 2 de la feuille 2 le « bon schéma » n'a pas forcément garanti la réussite. La production de l'élève Moulka de la 6A de l'Ecole Privée les Collines en atteste :

The image shows a student's handwritten work. On the left, there is a schematic diagram with two parts separated by a dashed line. The top part shows three books: 1: كتاب (7d), 2: كتاب (7d), 3: كتاب (8d). The bottom part shows three books: 1: كتاب (7d), 2: كتاب (7d), 3: كتاب (8d, 7d). On the right, there is a text box with the problem statement in Arabic: "اشترت مريم 3 كتب علمية بـ 145 د. يفوق ثمن الكتاب الثاني ثمن الكتاب الأول بـ 7 د و يفوق ثمن الكتاب الثالث ثمن الكتاب الثاني بـ 8 د. ابحث عن ثمن كل كتاب." Below this, there are calculations: "ثمن الكتاب 1 $> 48 = 3 : 145$", "ثمن الكتاب 2 $> 55 = 7 + \dots$", and "ثمن الكتاب 3 $> 63 = 8 + 55$". On the right side, there are three orange boxes with labels: "Prix du livre 1", "Prix du livre 2", and "Prix du livre 3", with arrows pointing to the corresponding parts of the calculations.

Une fois de plus, ce constat montre que cette association correcte entre schéma et problème n'est *a priori* régie que par des systèmes d'attentes implicites (ici **R_us_a+**).

d. Trajectoire improbable pour résoudre un problème déconnecté à trois branches de type Composition

Pour résoudre le problème précédent, il y a trois procédures différentes. Une première proposée par l'élève Med Adam de la 6C de l'Ecole Primaire Omar Ibn Elkhattab :

The image shows a student's handwritten solution to a math problem. At the top left, there is a diagram with three horizontal bars representing books. The first bar is labeled 'كتاب :1' and has a box above it containing '7d'. The second bar is labeled 'كتاب :2' and has a box above it containing '8d'. The third bar is labeled 'كتاب :3' and has a box above it containing '7d'. Below this diagram is a dashed line, followed by another diagram where the first bar is labeled '7d', the second '8d', and the third '7d'. To the right of the diagrams is a text box containing the problem in Arabic: 'اشترت مريم 3 كتب علمية بـ 145 د. يفوق ثمن الكتاب الثاني ثمن الكتاب الأول بـ 7 د و يفوق ثمن الكتاب الثالث ثمن الكتاب الثاني بـ 8 د. ابحث عن ثمن كل كتاب.' Below the diagrams and text is a handwritten calculation: 'ثمن الكتاب الثالث بالـ', followed by a vertical addition:
$$\begin{array}{r} 145 \\ + 8 \\ \hline 153 \\ - 75 \\ \hline 78 \\ \div 3 \\ \hline 26 \end{array}$$
 The result '26' is written below the calculation. To the right of the calculation are three orange boxes with arrows pointing to the numbers in the calculation: 'Prix du livre 3' points to '145', 'Prix du livre 2' points to '75', and 'Prix du livre 1' points to '26'.

Il considère comme *unité graphique* le segment qui représente la plus grande grandeur (le prix du 3^{ème} livre). Il ajoute les différences pour mettre en avant trois parts égales qui représentent chacune le prix du 3^{ème} livre, puis il divise par 3 pour trouver ce prix (un jeu sur des *unités relatives* négocié sans prise d'appui sur son schéma et mobilisation d'une composition de deux relations additives de comparaison d'états). La suite de la résolution est facile.

Une deuxième procédure proposée par l'élève Ikhlas de la 6C de l'Ecole Primaire Cité Elmanar :

اشترت مريم 3 كتب علمية بـ 145 د. يفوق ثمن الكتاب الثاني ثمن الكتاب الأول بـ 7 د و يفوق ثمن الكتاب الثالث ثمن الكتاب الثاني بـ 8 د. ابحث عن ثمن كل كتاب.

كتاب :1 7d
 كتاب :2
 كتاب :3 8d

كتاب :1 7d
 كتاب :2
 كتاب :3 8d 7d

ثمن شراء الكتاب الأول
 $145 - (8 + 7) = 130$
 ثمن شراء الكتاب الثاني
 $130 - 7 = 123$
 ثمن شراء الكتاب الثالث
 $123 - 8 = 115$

Prix du livre 1
 Prix du livre 2
 Prix du livre 3

Elle considère comme *unité graphique* le segment qui représente la plus petite grandeur (le prix du 1^{er} livre). Elle retranche les différences pour mettre en avant trois parts égales qui représentent chacune le prix du 1^{er} livre, puis elle divise par 3 pour trouver ce prix (le schéma prend en charge la composition des deux relations additives). La suite de la résolution est aussi facile.

Aucun élève n'a considéré comme *unité graphique* le segment qui représente la grandeur moyenne (le prix du 2^{ème} livre). Ce qui conforte nos analyses précédentes du chapitre B qui postulent que la troisième procédure (s'appuyer le segment qui représente la grandeur moyenne comme *unité graphique*) est la plus coûteuse en termes de connaissances mobilisées. Pour trouver directement le prix du 2^{ème} livre il faut mobiliser d'une façon concomitante une addition et une soustraction suivies d'une division :

$$\text{prix du 2}^{\text{ème}} \text{ livre} = \frac{145 - 8 + 7}{3}.$$

Lors des deux procédures précédentes on retranche ou on ajoute puis on divise par 3, alors que lors de cette dernière procédure on retranche et on ajoute à la fois avant de diviser par 3. Nous pensons que c'est la procédure la plus compliquée à gérer par les élèves, et les choix des élèves à opter pour les deux autres procédures est en lien avec le coût des connaissances mobilisées.

e. Evolution de la réussite

Nous avons remarqué une évolution de la réussite des élèves en répondant aux tâches proposées (notamment l'association d'un problème au schéma qui lui correspond), montrant que l'ensemble des tâches proposées semble avoir permis aux élèves (notamment français) de s'être approprié les schémas segmentaires comme des outils pour résoudre les problèmes posés :

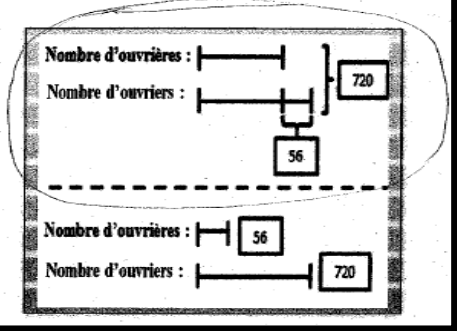
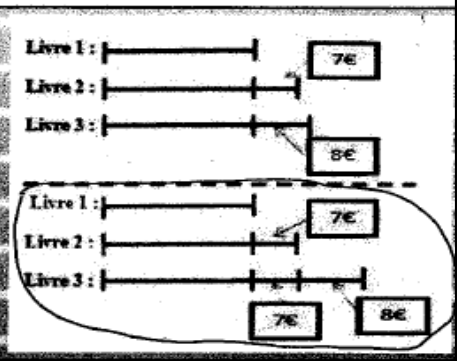
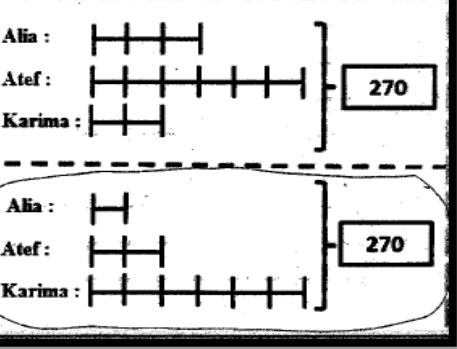
<p>Production de l'élève française Lola</p>	<p>Dans une usine on compte 720 ouvriers et ouvrières. Il y a 56 ouvrières de moins que d'ouvriers dans cette usine. Trouver :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ le nombre d'ouvriers, ▪ le nombre d'ouvrières. 
<p>Production de l'élève française Louna</p>	<p>Sandrine a acheté 3 livres scientifiques pour un prix total de 144 €. Sachant que le deuxième livre coûte 7 € de plus que le premier et que le troisième coûte 8 € de plus que le deuxième, chercher le prix de chaque livre.</p> 
<p>Production de l'élève français Luis</p>	<p>Le nombre de billes d'Alia est égal à $\frac{1}{2}$ de celui d'Atef, et le nombre de billes d'Atef est égal à $\frac{1}{3}$ de celui de Karima. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien chaque enfant possède-t-il de billes ?</p> 

Tableau D10 : trois exemples illustrant l'évolution de la réussite chez les élèves français

Un taux d'évolution en termes de réussite qui mérite à lui seul de mettre la question de la schématisation segmentaire au centre d'une réflexion plus avancée.

3. Analyse des réponses de la feuille 3 du questionnaire

La première tâche demandée à travers la feuille 3 est de correspondre à 4 problèmes proposés les schémas représentatifs de ces problèmes tout en complétant la légende de chaque schéma (deux problèmes en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental, un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental et un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental) :

<p>Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante. Le prix des deux appareils est 1122 €. Trouvez :</p> <ul style="list-style-type: none"> - le prix de l'imprimante ; - le prix de l'ordinateur. 	<p>Problème 1</p>
<p>Hiba a 4 fois plus de stylos que de cahiers et 2 fois plus de cahiers que de livres. Elle a au total 66 fournitures (stylos, livres et cahiers). Trouvez le nombre de chaque article.</p>	<p>Problème 2</p>
<p>Imed, Zeyneb et Nathalie partagent la somme de 224 € comme suit :</p> <p>la part d'Imed égale à $\frac{1}{3}$ de la part de Zeyneb ;</p> <p>la part de Zeyneb est égale à $\frac{1}{4}$ de la part de Nathalie.</p> <p>Trouvez la part de chacun.</p>	<p>Problème 3</p>
<p>Le prix de la chemise d'Amir est égal à $\frac{3}{8}$ de celui de son pantalon. Le prix du pantalon est plus cher que celui de la chemise de 35 €. Trouvez :</p> <ul style="list-style-type: none"> - le prix du pantalon ; - le prix de la chemise 	<p>Problème 4</p>

Schémas proposés :

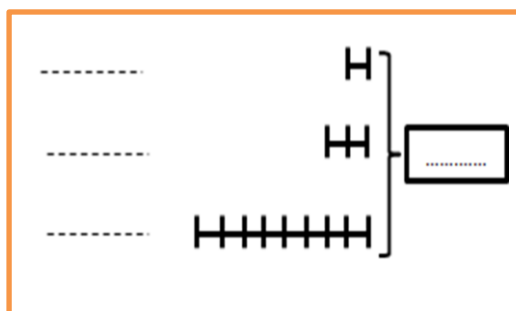


Schéma 1

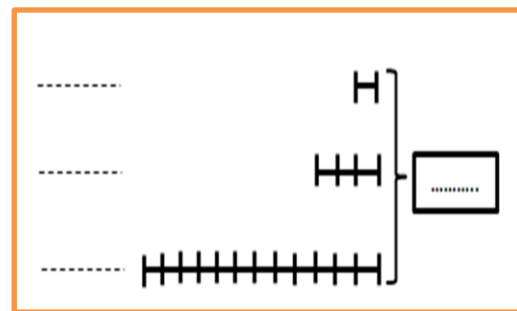


Schéma 2

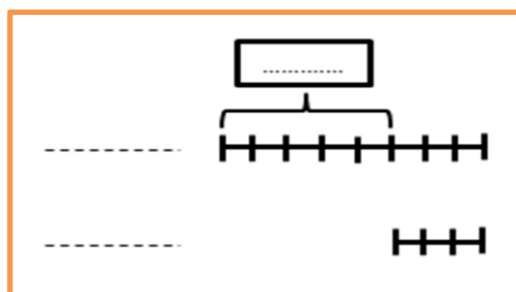


Schéma 3

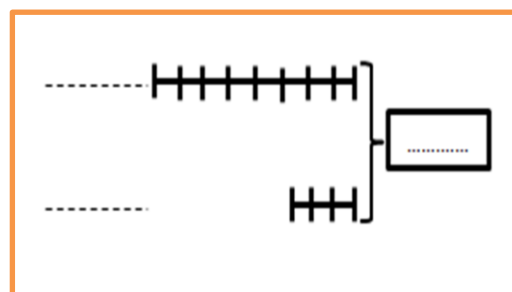


Schéma 4

La feuille 3 a été proposée à 136 élèves tunisiens et 50 élèves français⁴¹. Une réussite est tributaire d'une correspondance correcte entre schéma et problème. Les réponses des élèves au problème 1 de la feuille 3 sont résumées dans le tableau suivant :

	Réussite	Réussite partielle	Echec
Elèves tunisiens	111	23	2
Elèves français	27	20	3

(Réussite partielle veut dire que l'élève a associé à un ou deux problèmes des schémas corrects)

Bien que les élèves français n'aient pas l'habitude d'utiliser des schémas conventionnels de type segmentaire, la réussite aux niveaux des réponses fournies que ce soit totale ou partielle est de l'ordre de 94%. Cette réussite est d'autant plus

⁴¹ Deux élèves français absents, qui n'ont pas répondu à la feuille 1 et 2 du questionnaire, participent pour répondre à la feuille 3.

importante chez les élèves tunisiens qui ont l'habitude d'utiliser des schémas de type segmentaires (98,53 %).

Le taux de réussite évolue le long de la mise en œuvre de notre questionnaire. La maîtrise des enjeux de connaissances nécessaires pour produire un schéma ou pour le correspondre à un problème ou pour l'interpréter est palpable à travers les réponses des élèves. 74,19 % de la totalité des élèves, que ce soit français ou tunisiens, ont répondu correctement au problème 1 de la feuille 3. Le même constat a été vérifié dans les réponses aux autres problèmes. Des erreurs prévues dans nos analyses *a priori* subsistent dans les productions de deux publics d'élèves.

En résumé, nous avons identifié à travers ce questionnaire des réussites dans les productions des schémas qui ne garantissent pas complètement les résolutions correctes des problèmes. Nous avons mis en avant des effets de contrats sans doute non identifiables sur la base des réponses aux questionnaires car nous pouvons aussi envisager que des réussites à la fois dans la production et résolution puissent également reposer sur des effets de contrat – ce que ne permet pas d'identifier l'étude faite à partir du questionnaire – et pourtant une hypothèse qui va de pair peut-être avec aussi l'augmentation forte du taux de réussite d'ailleurs des élèves français à la succession de tâches proposées.

Au final, une question se pose d'elle-même : quelles garanties avons-nous sur les connaissances mathématiques apprises par ces élèves ou même en amont par les élèves tunisiens en lien avec ces schémas et la résolution de problèmes arithmétiques outillée par ces schémas ?

Certaines des difficultés rencontrées par ces mêmes élèves dans la dernière tâche de la dernière feuille du questionnaire (voir détails en annexe 3, pp. 408-410) nous interrogent tout particulièrement : les élèves confrontés qu'ils soient français ou tunisiens à la formulation en langue naturelle de relations multiplicatives et additives à partir de schémas donnés échouent plus massivement. Malgré le succès d'une proportion importante d'élèves tunisiens dans la résolution de problèmes outillée par la schématisation segmentaire, et le succès grandissant d'élèves français dans les tâches intermédiaires, la difficulté d'une telle tâche n'est pas levée par un grand nombre d'entre eux. Est-ce lié au caractère inédit d'une telle tâche pour les uns et les autres (un jeu retournée au sens de Bloch (2005) auquel se rajoute éventuellement la

position de cette tâche : comme dernière tâche à la fin du questionnaire) ? Mais ce caractère inédit se situe-t-il par rapport aux connaissances mathématiques en jeu ou par rapport aux règles de contrat qui régissent des comportements d'élèves ?

IV. Présentation globale et analyse *a priori* de la séquence expérimentale

Notre séquence expérimentale comportera quatre séances (aucune consigne n'a été donnée aux élèves autres que celles mentionnées dans la feuille de chaque séance) :

- une première séance sera consacrée à des installations de contrats didactiques locaux (méso-contrats) relatifs au choix de l'*unité graphique* dans la représentation de relations multiplicatives entre grandeurs dans les problèmes arithmétiques. Ceci se traduit notamment par des consignes focalisées sur les représentations graphiques segmentaires de telles relations, données en amont de problèmes à résoudre et permettant de réinvestir ces représentations dans des cas de problèmes identifiés lors du chapitre B :

L'énoncé-schéma fondamental qui sera traité lors de cette séance pour réinvestir deux types de relations multiplicatives est le troisième :

On suppose que : $A = \frac{m}{n} B$ et $A+B = S$; trouver A, trouver B.

Nous traiterons en particulier :

- la sous-valeur $V_{2,2}$ de la valeur V_2 associée à la variable $V_{m,n}$ identifiée dans le chapitre B : **la relation entre A et B est de la forme « B est p fois moins grand que A » ;**
- et la valeur V_3 de la de la même variable $V_{m,n}$: **n ne divise pas m et m ne divise pas n (n et m premiers entre eux).**

Notons que nous avons choisi de nous centrer sur les relations multiplicatives plus qu'additives. Les représentations de relations additives seront traitées dans des problèmes donnés directement à résoudre lors de la deuxième phase de la deuxième séance dans le but d'installer deux méso-contrats distincts **R_us_a+** et **R_us_a-** ;

- une deuxième séance sera centrée sur la résolution de problèmes plus complexes – liée à la composition de relations de comparaison soit multiplicatives soit additives. Ce choix de nous focaliser sur la composition de relations soit multiplicatives soit additives se justifie par le potentiel identifié

des schémas segmentaires dans la résolution de tels problèmes (chapitre B) – s’agissant de problèmes de type Composition au sens de Bednarz & Janvier (1994).

Les énoncés-schémas fondamentaux qui seront traités sont le 5^{ème} et le 6^{ème}.

Nous traiterons en particulier le premier cas de chaque énoncé :

Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :

1^{er} cas - 5^{ème} énoncé :

$$A = B + m ;$$

$$B = C + n ;$$

$$A + B + C = S.$$

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Un des données est le point d’arrivée d’une relation et le point de départ de l’autre.

Trouver A, B et C. (m et n dans \mathbb{Z})

On traitera en particulier la valeur $V_3(m.n \neq 0)$ de la variable $V_{m,n}$ (Composition) identifiée dans le chapitre B.

1^{er} cas - 6^{ème} énoncé :

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

$$B = \frac{p}{q} C ;$$

$$A + B + C = S.$$

Problèmes à trois branches : **Composition**

(Bednarz & Janvier, 1994)

Un des données est le point d’arrivée d’une relation et le point de départ de l’autre.

Trouver A, B et C.

Nous traiterons en particulier la valeur $R_2(A,B)$ et $R_2(B,C)$ de la variable $V_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ (Composition) identifiée dans le chapitre B :

$R_2(A,B)$: **A est k fois plus grand que B ;**

$R_2(B,C)$: **B est l fois plus grand que C.**

- la troisième séance sera centrée sur la résolution de deux problèmes en lien avec nos 1^{er} et 2^{ème} énoncés-schémas fondamentaux ; Elle permettra de se focaliser sur les connaissances mathématiques que nous avons identifiées comme en partie communes à ces deux types de problèmes : double

désignation d'une grandeur à appréhender dans le registre graphique et le registre symbolique/numérique et changement d'unité de référence. [des réinstallations de contrats didactiques locaux (mésos-contracts) relatifs au choix de l'*unité graphique* précéderont les résolutions des deux problèmes].

- 1^{er} énoncé-schéma fondamental :

Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B (m, n dans \mathbb{N}^*).

Nous traiterons en particulier la valeur V_3 : **m ne divise pas n et n ne divise pas m** de la variable $V_{m,n}$ identifiée dans le chapitre B.

- 2^{ème} énoncé-schéma fondamental :

On suppose que : $A = \frac{m}{n} B$ et $A - B = D$, trouver A et B.

Nous traiterons en particulier la sous-valeur $V_{1,2}$ de la valeur V_1 de la variable $V_{m,n}$ identifiée dans le chapitre B : **la relation entre A et B est de la forme : « A est p fois plus grand que B ».**

- la quatrième séance se centrera sur une extension à la résolution d'un problème recouvrant « une mixité » de relations de comparaison additives et multiplicatives – s'agissant d'un problème Source (Bednarz & Janvier, 1994). Des tels problèmes n'avaient pas été considérés initialement dans nos analyses d'énoncés-schémas fondamentaux.

Le tableau ci-après donne une vision synthétique de l'ensemble des séances mises en œuvre et d'éléments les caractérisant :

<p>1^{ère} séance (consignes proposées dans deux pages de feuilles)</p>	<p>1) Installation du système d'attente implicite régi par la règle R_us_m_e par la mise en schéma d'une relation de type « n fois plus » (après symétrisation d'une relation de type « n fois moins ») : « La hauteur d'une maison est 4 fois moins grande que celle d'un immeuble. À l'aide d'un schéma, représenter les deux hauteurs. »</p>	<p>2) Proposer un problème à résoudre qui comporte une relation de type « n fois moins » en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental : « Le prix de la chemise d'Amir est 5 fois moins cher que celui de son pantalon. Le prix de deux vêtements est de 150 €. Trouvez : - le prix du pantalon ; - le prix de la chemise. »</p>
---	--	--

	<p>3) Installation du système d'attente implicite régi par la règle R_us_m_f par la mise en schéma d'une relation de type $A = \frac{m}{n} B$ où $\frac{m}{n}$ n'est ni une fraction unitaire ni dans \mathbb{IN} :</p> <p>« Les économies d'Ayemen sont égales à $\frac{2}{3}$ de celles d'Inès. À l'aide d'un schéma, représenter les deux sommes d'argent. »</p>	<p>4) Proposer un problème à résoudre qui comporte une relation de type de type $A = \frac{m}{n} B$ en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental ($\frac{m}{n} > 1$) :</p> <p>« Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante. Le prix des deux appareils est 1320 d. Trouvez :</p> <ul style="list-style-type: none"> - le prix de l'imprimante ; - le prix de l'ordinateur. »
<p>2^{ème} séance (consignes proposées dans deux pages de feuilles)</p>	<p>1) résoudre un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental où nous identifions une relation multiplicative simple :</p> <p>« Ahmed et Fatma ont 320 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 4 fois plus grand que celui de Fatma, combien chacun a-t-il de billes ? »</p>	<p>2) résoudre un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental où nous identifions une composition de deux relations multiplicatives :</p> <p>« Ahmed, Ali et Fatma ont 360 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 2 fois plus grand que celui de Fatma, le nombre de billes de Fatma est 3 fois plus grand que celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »</p>
	<p>3) résoudre un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental où nous identifions que deux relations additives simples</p> <p>« Mohammed et Sara se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? »</p>	<p>4) résoudre un problème en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental où nous identifions, en plus d'une relation additive simple, une composition de deux relations additives</p> <p>« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Sara en reçoit 27 de plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? »</p>
<p>3^{ème} séance (consignes proposées dans deux pages de feuilles)</p>	<p>1) Réinstallation du système d'attente implicite régi par la règle R_us_m_e par la mise en schéma d'une relation de type « n fois plus »</p> <p>« La longueur d'un rectangle est trois fois plus grande que sa largeur. À l'aide d'un schéma, représenter les deux grandeurs. »</p> <p>2) Proposer un problème à résoudre où nous identifions une relation de type « n fois plus » en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental</p> <p>« Fatma a 72 billes de plus qu'Ahmed. Fatma a 4 fois plus de billes qu'Ahmed. combien chacun a-t-il de billes? »</p>	

	<p>3) Réinstallation du système d'attente implicite régi par la règle R_us_m_f par la mise en schéma d'une relation de type $A = \frac{m}{n} B$ où $\frac{m}{n}$ n'est ni une fraction unitaire ni dans IN</p> <p>« À l'aide d'un schéma, représenter les deux grandeurs de cette égalité : Distance parcourue = $\frac{3}{7}$ Distance totale ».</p> <p>4) Proposer un problème à résoudre où nous identifions une relation de type de type $A = \frac{m}{n} B$ en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental</p> <p>« Pour visiter sa mère, Sonia a parcouru dans un premier temps 180 km, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de la distance qui sépare sa maison de la maison de sa mère. Trouvez la distance totale qui sépare le domicile de Sonia de celui de sa mère. »</p>
<p>4^{ème} séance (consignes proposées dans une seule page de feuille)</p>	<p>Résolution d'un problème recouvrant « une mixité » de relations de comparaison additives et multiplicatives – s'agissant d'un problème Source.</p> <p>« La surface totale de trois parcelles de terrain est de 2675 m². Sachant que la surface de la première parcelle est égale à $\frac{3}{5}$ de celle de la deuxième et que la surface de la troisième parcelle a 75 m² de plus que la surface de la deuxième, trouvez la surface de chaque parcelle».</p>

Tableau D11 : récapitulatif de la séquence expérimentale

Nous présentons ci-après les enjeux de cette séquence expérimentale au regard de notre questionnement relatif aux méso-contrats didactiques identifiés préalablement, mais aussi à la nature des problèmes donnés liés aux énoncés-schémas fondamentaux identifiés dans le chapitre B de la thèse.

1. Des contrats didactiques à installer dans des représentations segmentaires - la question du choix de l'unité graphique

Les relations entre les grandeurs dans nos énoncés-schémas fondamentaux sont "communes", multiplicatives ou additives et renvoient comme nous l'avons vu au début de ce chapitre potentiellement à des contrats didactiques locaux de représentation graphique via le choix de l'unité graphique segmentaire à négocier.

- Deux contrats didactiques locaux correspondant à deux types de choix d'unités graphiques : **R_us_m_e** ou **R_us_m_fu** pour les relations multiplicatives et **R_us_a+** ou **R_us_a-** pour les relations additives.
- Un contrat didactique lié à l'unité du problème correspondant à une relation multiplicative fractionnaire non unitaire : **R_us_m_f**

Sur ce, et lors de la première séance, deux consignes sans problèmes seront proposées à résoudre visant à négocier les deux contrats locaux **R_us_m_e** (ou **R_us_m_fu**) et **R_us_m_f** avec les élèves – Chacune de ces consignes sera suivie d'un problème correspondant au 3^{ème} énoncé-schéma fondamental permettant le réinvestissement immédiat des attentes négociées pour produire des schémas associés aux deux problèmes proposés et par suite les résoudre :

Consigne 1 : « La hauteur d'une maison est 4 fois moins grande que celle d'un immeuble. À l'aide d'un schéma, représenter les deux hauteurs. »

Les élèves, s'ils agissent conformément à des règles établies préalablement, soit ils mettent en œuvre la règle **R_us_m_fu** pour représenter les deux hauteurs soit ils symétrisent la relation donnée et la négocier comme suit : « La hauteur de l'immeuble est 4 fois plus grande que celle de la maison », puis mettre en œuvre la règle **R_us_m_e**. À la suite de cette consigne, un problème est proposé et comporte une relation formulée de la même façon que dans la consigne 1:

Problème 1 : « Le prix de la chemise d'Amir est 5 fois moins cher que celui de son pantalon. Le prix de deux vêtements est de 140 dinars. Trouvez :

- le prix du pantalon ;
- le prix de la chemise. »

Consigne 2 : « Les économies de Aymen sont égales à $\frac{2}{3}$ de celles d'Inès. À l'aide d'un schéma, représenter les deux sommes d'argent. »

Dans la représentation de la première consigne le segment qui représentera la petite grandeur coïncide avec l'*unité graphique*, alors que pour représenter cette consigne par un schéma une rupture potentielle de la première représentation est à considérer : la part qui représente la petite grandeur coïncide avec deux *unités graphiques*.

De même, Les élèves, s'ils agissent conformément à des règles établies préalablement, ils mettent en œuvre la règle **R_us_m_f** pour représenter les deux montants d'argent. Pareillement, et à la suite de cette consigne, un problème est proposé et comporte une relation formulée de la même façon que dans la consigne 2 avec une fraction donnée supérieure à 1 tout en restant sur des tiers , et avec un saut de complexité qui permettra d'identifier d'éventuels effets du contrat contre-

productifs en termes de connaissances mathématiques s'agissant de la désignation des grandeurs en jeu :

Problème 3 : « Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante. Le prix des deux appareils est 1320 dinars. Trouvez :

- le prix de l'imprimante ;
- le prix de l'ordinateur. »

Ces mêmes Consignes liées à la représentation de relations multiplicatives feront l'objet de reprises lors des deux phases 1 et 2 de la troisième séance :

Consigne 3 : « La longueur d'un rectangle est trois fois plus grande que sa largeur. À l'aide d'un schéma, représenter les deux grandeurs »

La relation entre les deux grandeurs est de type « ...fois plus... ». L'action conforme des élèves à des règles établies préalablement pour représenter les deux grandeurs est de mettre en œuvre le méso-contrat de réinvestissement régi par la règle **R_us_m_e**.

Consigne 4 : En s'appuyant sur les travaux déjà faits en répondant à la consigne 2 de la première séance, représenter à l'aide d'un schéma les deux grandeurs de cette égalité :

$$\text{Distance parcourue} = \frac{3}{7} \text{ distance totale.}$$

La relation entre les deux grandeurs est de type « $A = \frac{m}{n} B$ où $\frac{m}{n}$ n'est ni une fraction unitaire ni dans \mathbb{IN} ». L'action conforme des élèves à des règles établies préalablement pour représenter les deux grandeurs est de mettre en œuvre le méso-contrat de réinvestissement régi par la règle **R_us_m_f**.

2. D'une relation simple à une composition de relations :

Des progressivités de relations simples (additives ou multiplicatives) à la composition de relations (additives ou multiplicatives) – passant également de deux relations à trois relations, feront l'objet de la deuxième séance. Lors de cette séance nous invitons les élèves à résoudre un problème en lien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental puis à résoudre un problème en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma

fondamental. Puis dans un deuxième temps, nous les invitons à résoudre un problème en lien avec le 4^{ème} énoncé-schéma fondamental puis à résoudre un problème en lien avec le 5^{ème} énoncé-schéma fondamental. Les activités des élèves seront centrées sur la résolution de problèmes plus complexes – liée à la composition de relations de comparaison soit multiplicatives, soit additives :

Problème 1 : « Ahmed et Fatma ont 288 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 5 fois plus grand que celui de Fatma, combien chacun a-t-il de billes ? »

Nous attendons des élèves de mettre en œuvre la règle **R_us_m_e** pour représenter le nombre de billes de chaque enfant pour produire un schéma associé au problème posé puis le résoudre dans un premier cas simple qui doit servir de point d'appui avant de passer au problème 2 qui nécessite la gestion de la composition de relations :

Problème 2 : « Ahmed, Ali et Fatma ont 264 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 2 fois plus grand que celui de Fatma, le nombre de billes de Fatma est 3 fois plus grand que celui de d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »

Cette fois-ci, nous attendons des élèves de mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_m_e** pour représenter le problème posé par un schéma segmentaire puis essayer de le résoudre en ramenant la composition des deux relations multiplicatives de comparaison d'états à une comparaison d'états simple grâce au schéma segmentaire produit.

Problème 3 : « Mohammed et Sara se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? »

Nous attendons à présent des élèves de mettre en œuvre la règle **R_us_a+** pour représenter le nombre de billes de chaque enfant pour mettre en schéma le problème posé puis le résoudre. Idem, le but de proposer un tel problème est d'aider les élèves à représenter, en partie, un problème qui comporte une composition de deux relations additives.

Dans un problème de type Composition qui comporte trois grandeurs A, B et C telles que $A R B$ et $B R C$, si nous commençons par représenter la relation $A R B$, nous

réitérons ce que nous venons de faire dans la représentation du problème 2 sans pour autant faciliter entièrement la représentation de la composition des deux relations additives. Nous savons que la difficulté générée par cette composition de relation sera prise en charge par le schéma après la représentation correcte de la relation $B R C$. La proposition du problème 2 peut ainsi éventuellement garantir une représentation correcte de la première relation de la composition des deux relations multiplicatives $(A R B)$.

Problème 4 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 27 de plus que Sara, et Sara en reçoit 36 de plus qu’Inès. Quelle est la part de chacun ? »

Cette fois-ci, nous attendons des élèves de mettre en œuvre deux fois de suite la règle **R_us_a+** pour représenter le problème posé par un schéma segmentaire puis essayer de le résoudre en ramenant la composition des deux relations additives de comparaison d’états à une simple comparaison d’états grâce au schéma segmentaire produit.

3. La double désignation (*fonctionnelle*) liée à une grandeur

Lors de la troisième séance, deux consignes (3 et 4) qui feront l’objet d’un réinvestissement de ce que nous avons vu lors de la première séance en termes de représentation ont été proposées aux élèves (voir p. 300).

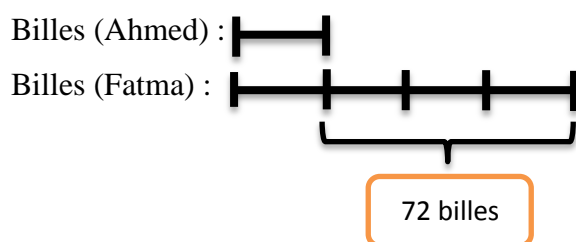
Les deux problèmes posés pour un deuxième réinvestissement immédiat des deux attentes ci-avant et pour instaurer des nouveaux contrats locaux sont les suivants :

Problème 1 : « Fatma a 72 billes de plus qu’Ahmed. Fatma a 4 fois plus de billes qu’Ahmed. Combien chacun a-t-il de billes? »

Problème 2 : « Pour visiter sa mère, Sonia a parcouru dans un premier temps 180 km, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de la distance qui sépare sa maison de la maison de sa mère. Trouvez la distance totale qui sépare le domicile de Sonia de celui de sa mère. »

Les règles de représentations pour mettre en schéma les grandeurs des deux problèmes ont été mises en œuvre lors de la première séance, à savoir **R_us_m_e** et **R_us_m_f**, mais avec le but d'instaurer d'autres contrats liés à l'interprétation des deux schémas représentatifs de ces deux problèmes au regard de la double désignation d'une grandeur et des changements des unités de références que nous expliciterons ci-dessous :

Schéma (problème 1) :



$1u =$ Billes d'Ahmed ;

$4u =$ Billes de Fatma ;

Différence entre les billes d'Ahmed et de Fatma : 72 billes ;

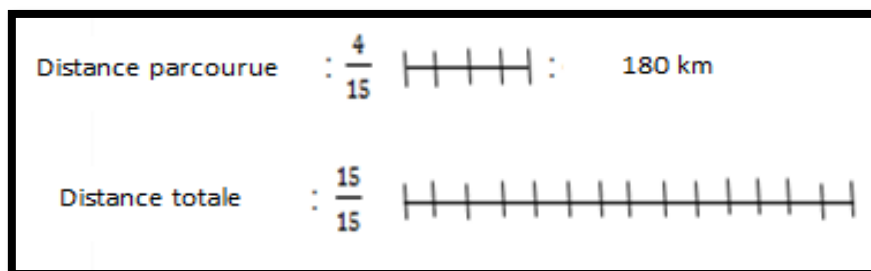
$3u = 72$ billes.

La double désignation de l'*unité graphique* est donnée à voir (et prise en charge par le schéma) comme étant égale au $\frac{1}{3}$ du segment représentant la différence et égale au segment représentant le nombre de billes d'Ali.

Ce qui permet de déterminer la valeur de l'*unité graphique* et par ailleurs le nombre de billes d'Ali :

$$\text{Valeur de } 1u = \frac{72}{3} = \text{Nombre de billes d'Ahmed.}$$

Schéma (problème 2) :



$\frac{1}{15}$ du montant initial correspond à $\frac{1}{4}$ du montant restant soit $180 \text{ km} : 4 = 45 \text{ km}$. La distance totale correspond dès lors à $45 \text{ km} \times 15$, soit 675 km .

Ayant déjà détaillé les connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution de ce problème avec ce schéma segmentaire (ce problème est cité plusieurs fois dans la thèse – il sera également repris dans le cadre de la séquence expérimentale), pour plus de commodité, nous renvoyons le lecteur à l'annexe (annexe 9, pp. 417-418) s'il souhaite (re)prendre connaissance de l'analyse *a priori* de cet énoncé-schéma.

4. Une progressivité vers la résolution d'un problème "mixte"

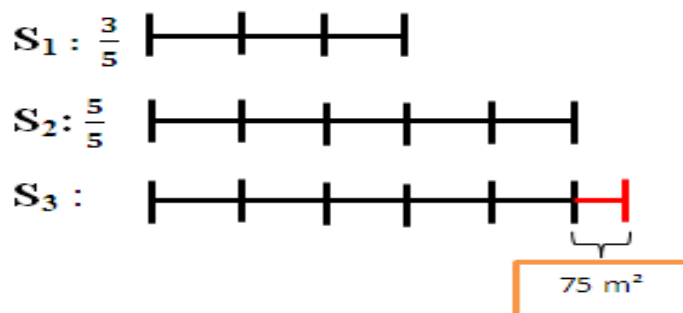
Lors de la quatrième et dernière séance, nous avons décidé de proposer aux élèves un problème que nous qualifions de mixte : un problème déconnecté qui contient trois grandeurs inconnues et une mixité de relations (deux relations additives et une troisième multiplicative). Un tel problème n'avait pas été envisagé initialement dans nos énoncés-schémas fondamentaux. Toutefois, nous trouvons intéressant de voir comment les élèves pouvaient étendre leurs connaissances sur la schématisation pour résoudre ce type de problèmes, plus rarement rencontré.

Problème posé :

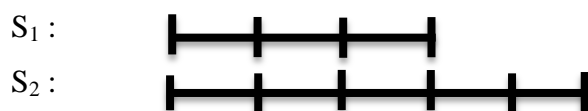
« La surface totale de trois parcelles de terrain est de 2675 m^2 . Sachant que la surface de la première parcelle est égale à $\frac{3}{5}$ de celle de la deuxième et que la surface de la troisième parcelle dépasse la surface de la deuxième de 75 m^2 , trouvez la surface de chaque parcelle. »

Nous attendons des élèves dans un premier temps de répondre au système d'attentes implicite régi par la règle **R_us_m_f** pour représenter les 1^{ère} et 2^{ème} surfaces puis répondre au système d'attente implicite régi par la règle **R_us_a+** pour représenter les 2^{ème} et 3^{ème} surfaces. Pour mettre en schéma un tel problème, les systèmes d'attentes implicites sont de deux natures différentes, ce qui rend des tels problèmes plus compliqués à résoudre. Une tentative d'extension au-delà des énoncés fondamentaux initialement envisagés.

Le schéma segmentaire correspondant au problème est le suivant :



Nous attendons des élèves de commencer par mettre en schéma les 1^{ère} et 2^{ème} surfaces en mettant en œuvre la règle **R_us_m_f** :



Puis mettre en schéma les 2^{ème} et 3^{ème} surfaces en mettant en œuvre la règle **R_us_a+** :



La difficulté réside dans le fait d'une mise en conflit potentielle entre deux systèmes d'attentes implicites (**R_us_m_f** et **R_us_a+**) qui permettra de les questionner dans la production du schéma mais aussi dans son interprétation et utilisation pour résoudre le problème. La donnée 75 m² complexifie la procédure de résolution et sa valeur n'est pas nécessairement égale à la valeur d'une *unité graphique*, ce qui complexifie la représentation du problème. La valeur des *unités graphiques* (qu'on doit dénombrer) est égale à la surface totale diminuée de 75.

V. Séances de la partie expérimentale et analyse *a posteriori*

1. 1^{ère} Séance

La première séance a été menée avec deux classes :

La **6A** : 16 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Privée les Collines, Kasserine. (20 mai 2019 : 60 mn de 8h à 9h).

La **6C** : 19 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Omar Ibn Elkhatab, Kasserine. (20 mai 2019 : 60 mn de 13h à 14h).

Cette séance se compose de quatre phases (voir tableau récapitulatif pp. 296-298).

Lors de cette première séance, les analyses portent sur les trois premières phases expérimentées dans la classe avec la 6A – et sur la quatrième phase expérimentée dans la classe avec la 6C. Les trois premières phases menées avec les deux classes étaient presque identiques, et au regard des phénomènes semblables observés dans les deux classes, nous avons opté pour une présentation unique du déroulement de ces trois premières phases de la séance 1 dans une des deux classes, la 6A. La quatrième phase a été réussie par la totalité des élèves de la 6A, sur ce, nous présenterons que les travaux de la 6C afin de mettre en avant les difficultés auxquelles les élèves de cette classe sont confrontés surtout celles liées à la mise en œuvre des règles de représentations déjà installées en amont.

a. 1^{ère} phase expérimentée

La consigne suivante est proposée aux élèves :

« La hauteur d'une maison est 4 fois moins grande que celle d'un immeuble. À l'aide d'un schéma, représenter les deux hauteurs. »

Un des enjeux de cette consigne est d'instaurer la règle du méso-contrat local liée au choix d'*unité graphique* : **R_us_m_e**. Il s'agit donc de commencer par symétriser la relation proposée via un traitement interne dans le registre de la langue naturelle et schématiser la relation : « La hauteur de l'immeuble est 4 fois plus grande que celle de la maison ». Ce système d'attentes oriente les actions des élèves vers

l'identification de la petite grandeur pour ensuite la reporter n fois pour schématiser la grande grandeur, inversement au système d'attente régi par la règle **R_us_m_fu** qui oriente les élèves vers l'identification de la grande grandeur puis la partager n fois pour schématiser la petite grandeur.

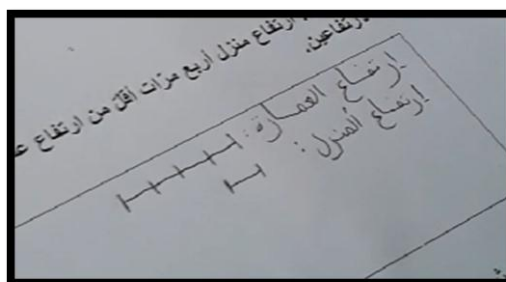
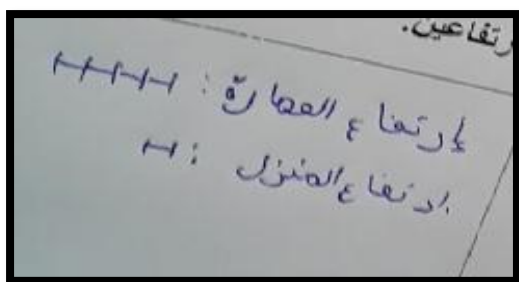
i. Installation d'un méso-contrat de représentation (R_us_m_e) d'une relation multiplicative entière

Un schéma davantage congruent dans le registre graphique à l'expression « 4 fois moins grande » serait celui régi par **R_us_m_fu** : commencer par représenter la hauteur de l'immeuble (même si ce n'est pas celle citée « en premier » dans l'énoncé). À partir de la consigne nous générons la hauteur de la maison à partir de celle de l'immeuble. La hauteur de l'immeuble se positionne comme une « donnée source » pour celle de la maison :

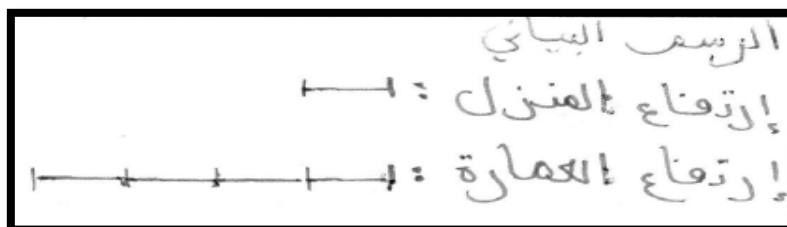
« La hauteur d'une maison est 4 fois moins grande que celle d'un immeuble ».

De ce fait, il était probable que les élèves commencent par représenter la hauteur de l'immeuble que celle de la maison. Les transcriptions suivantes et les productions des deux élèves qui suivent en attestent (transcription 6A) :


1	P	Laquelle des deux hauteurs vous allez schématiser en premier ?	
2	Adam	La hauteur de l'immeuble.	
3	P	Tout le monde va commencer par la représentation de la hauteur de l'immeuble ?	
4	La plupart des élèves	Oui.	Micro-contrat d'adhésion presque collectif.



D'autres élèves ont opté à la hauteur de la maison comme *unité graphique* et ont commencé par représenter la hauteur de la maison. Ce qui suppose que ces élèves ont symétrisé la relation de « ...4 fois moins grand... » à « ...4 fois plus grand... ». La production de l'élève Anes en atteste :



Bien que la majorité des élèves de la 6A (10 sur 16 élèves) aient produit un schéma régi par la règle **R_us_m_fu** et ont commencé par représenter la hauteur de l'immeuble, ce fait n'a pas empêché le professeur via une intervention publique de réorienter les élèves au système d'attente régi par la règle **R_us_m_e** surtout pour essayer de faciliter la production d'un tel schéma aux élèves qu'il identifie comme en difficulté (transcription 6A) :

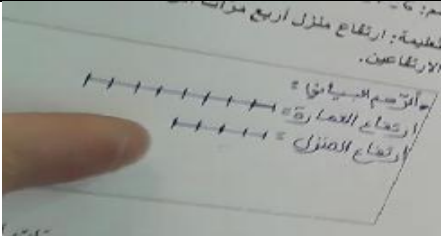
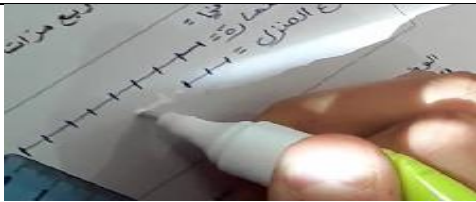
1	P	Anwer, peux-tu reformuler la consigne autrement ?	
2	Anwer	Euh....	
3	P	Oui Omar...	Interaction entre Elève-Professeur visant l'installation du méso-contrat R_us_m_e .
4	Omar	La hauteur de l'immeuble est 4 fois	Reformuler la relation donnée entre les deux grandeurs en jeu pour qu'elle soit

		plus grande que celle de la Maison.	congruente à un report (R_us_m_e).
--	--	-------------------------------------	---

ii. Confusion entre relation additive et multiplicative

La nouvelle formulation n'a rien apporté pour quatre élèves qui sont en difficulté, dont Nourane en fait partie (transcription 6A) :

1	P	Nourane, que dit la consigne ?	
2	Nourane	La hauteur de l'immeuble est égale à $\frac{8}{8}$ et la hauteur de la maison est égale à $\frac{4}{8}$	
3	P	Alors, d'après ton schéma, la hauteur de l'immeuble est égale à combien de fois la hauteur de la maison ?	
4	Nourane	4 fois... Euh, moins 4 fois... On ajoute 4 à la hauteur de la maison pour obtenir la hauteur de l'immeuble.	
5	P	C'est comme ça que tu as compris l'expression « 4 fois moins » ? Ou « 4 fois plus » ?	
6	Nourane	...	

7	P	D'après ton schéma, la hauteur de l'immeuble est égale à combien de fois celle de la maison ?	
8	Nourane	Monsieur, 2 fois !	
9	P	Et que dis la consigne ?	
10	Nourane	4 fois...	
11	P	Donc...	
Réaction immédiate de Nourane, tout en laissant la hauteur de l'immeuble représentée par 8 parts.			

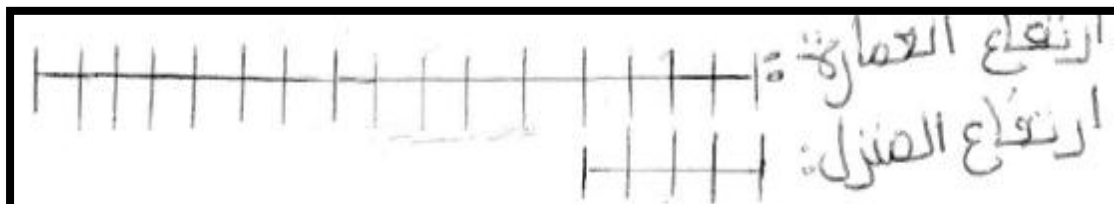
Pour justifier sa démarche erronée de schématisation, Nourane dit : «...On ajoute 4 à la hauteur de la maison pour obtenir la hauteur de l'immeuble ». Elle confond relation additive et relation multiplicative (micro-contrat lié à la présence du mot « moins » : relation additive).

Le professeur intervient pour revenir sur le sens de l'expression « 4 fois moins » mais l'élève semble toujours en difficulté. La reformulation proposée par le professeur « combien de fois la hauteur de la maison » en prise d'appui sur le schéma déjà produit par Nourane déclenche l'identification d'une relation multiplicative « 2 fois » entre les grandeurs représentées et la prise de conscience du caractère erroné de sa première production. Elle modifie dès lors son premier schéma pour le rendre conforme à la relation multiplicative reformulée « 4 fois ».

iii. Officialisation de la règle du contrat $R_{us_m_e}$

Ceci conduit le professeur à tenter une nouvelle régulation collective pour installer la règle de méso-contrat didactique en jeu. Le schéma modifié est indice d'une nouvelle connaissance liée à la représentation de la relation multiplicative reformulée mais le choix de l'*unité graphique* reste non conforme (la hauteur de la maison étant représentée par 2 segments). Nourane propose une représentation correcte en adaptant

son schéma à la relation multiplicative proposée mais en s'appuyant sur une *unité graphique* qui ne correspond ni à la hauteur de la maison ni à celle de l'immeuble. L'élève Malek propose une autre représentation valide, de point de vue de la connaissance qui est derrière la relation proposée, qui est de plus en plus coûteuse en termes de représentation :



(La hauteur de la maison étant représentée cette fois-ci par 4 segments)

Nous constatons qu'une économie en termes de représentation d'une relation multiplicative entière n'est garantie que par l'installation d'une clause de contrat afférente à cette représentation (à savoir **R_us_m_e** dans le cas présent).

<p>Mise en commun de la première phase. Moulka (qui a produit le même travail que celui de Nourane) et Adam sont invités à reproduire leurs schémas au tableau.</p>	

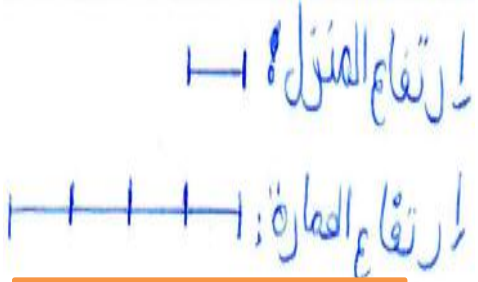
Malgré le fait que les schémas produits par Nourane et Moulka soient valides en termes de relations multiplicatives entre les grandeurs représentées, le professeur interroge l'ensemble de la classe pour tenter d'installer le méso-contrat local prévu (transcription 6A) :

1	P	Moulka, pourquoi as-tu représenté la hauteur de la maison par deux segments ?	
---	---	---	--

2	Moulka	...	
3	P	y-a-t-il dans la consigne quelque chose qui t'a invitée à le faire ?	
4	Moulka	C'est une deuxième méthode...	
5	Nourane	La consigne dit : « La hauteur de la maison est 4 fois moins grande que celle de l'immeuble » et si on multiplie 2 par 4 on trouve la hauteur de l'immeuble...	
6	P	Je sais, et le schéma n'est pas faux, mais j'aime bien savoir pourquoi représenter la hauteur de la maison par deux segments ? Pourquoi ne pas la représenter par un seul segment, comme Adam? Parmi les deux représentations, laquelle est plus facile et plus rapide à exécuter ?	
7	Yakin	Celle d'Adam.	

La transcription suivante montre qu'il n'est pas toujours facile de négocier des telles règles de contrat. Une transcription dénote une forme de résistance de la part de quelques élèves qui n'ont pas eu l'occasion d'éprouver l'argument d'économie avancé par le professeur à la fin de cet épisode.

Pour consolider l'installation du méso-contrat régi par la règle **R_us_m_e**, P incite les élèves à commencer par représenter la petite grandeur puis la reporter 4 fois afin de représenter la grande grandeur (transcription 6A) :

1	P	Revenons à toi Adam, tu nous as dit au début de la séance que tu commenceras par représenter la hauteur de l'immeuble, ce que tu n'as pas fait déjà, ni sur ta feuille, ni sur le tableau, pourquoi ?	 <p>Production de l'élève Adam</p>
2	Adam	J'ai changé d'avis, hhh ...	
3	P	Je suis tout à fait d'accord, je vous conseille tous, de toujours commencer, si rien ne l'empêche, par représenter la plus petite grandeur.	

Le milieu avec lequel les élèves interagissent ne donne pas des rétroactions pour imposer un choix bien précis de représentation, ce qui oblige P à travers ces interactions professeur/élèves à officialiser la règle du méso-contrat liée à l'ordre de représentation, et ainsi oriente les actions des élèves vers une représentation qui sera régie par la règle du contrat **R_us_m_e**.

Malgré ce fait, quelques élèves résistent et ne répondent pas à ce dernier système d'attentes. Cela provient sans doute du fait de l'absence d'arguments convaincants de la part du professeur : le principe d'économie avancé dans la représentation ne pouvant être mis en avant pour le schéma conforme à **R_us_m_fu** et n'étant pas vraiment non plus très convaincant s'agissant des productions avec une petite grandeur représentée par plusieurs *unités graphiques* (production de Malek, Moulka, Nourane) – de tels arguments de coût ne renvoient pas à grand-chose dans le cas de cette consigne mais ne peuvent prendre sens que lorsque l'on considère un champ de problèmes (transcription 6A) :

1	P	Med Rayen (J.), tu nous expliques comment tu as fait, tu as commencé par	
---	---	--	--

		représenter la hauteur de l'immeuble.	
2	Med Rayen (J.)	J'ai considéré un grand segment, je l'ai divisé par 4, j'ai obtenu la hauteur de la maison, c'est simple Monsieur !	

En résumé, les élèves ont produit :

Des schémas valides mais non conformes à la règle **R_us_m_e** :

- des schémas attendus conformes à la règle **R_us_m_fu** ;
- des schémas non attendus représentant la plus petite grandeur par plusieurs segments.

Nous avons pu constater des difficultés dans la gestion enseignante de la négociation de **R_us_m_e** avec des arguments d'économie dont les élèves ne peuvent être en mesure de comprendre la portée à ce stade : nous pouvons même noter que le geste de report simultané d'un ensemble d'*unités graphiques* peut-être sous-jacent aux productions de Moulka et de Malek (Nourane ayant produit son schéma en cherchant à corriger son schéma de départ) est un geste qui sera à reprendre plus tard dans la résolution de problèmes liés à la composition de relations multiplicatives de comparaison. Toutefois, si l'énoncé évoquait un troisième bâtiment dont la hauteur serait trois fois plus grande que celle de l'immeuble, en se basant sur la production de Malek, il nous faudrait 48 *unités graphiques* pour représenter la hauteur de ce nouveau bâtiment. Le fait de ne pas représenter la petite grandeur par une seule *unité graphique* peut générer une trajectoire laborieuse voire même contre-productive.

La difficulté de prise d'appui sur des arguments de coût se fait sentir, le professeur officialise dès lors la règle de contrat sous la forme d'un conseil sans nécessairement justifier ce « choix de la plus petite grandeur », certains élèves exprimant jusqu'à la fin une forme de résistance à un tel choix ne répondant pas à une forme de nécessité dans la situation.

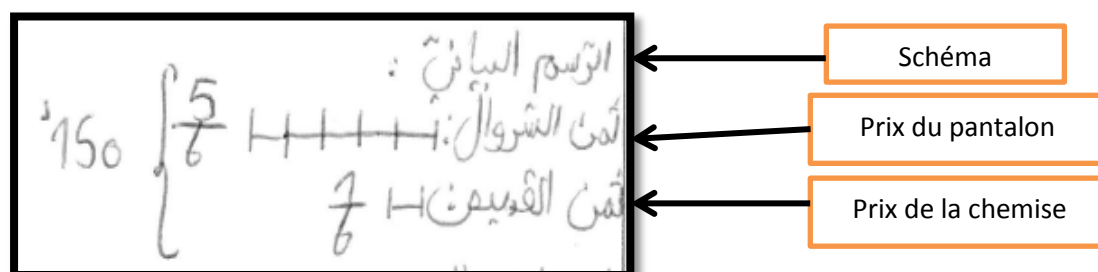
b. 2^{ème} phase expérimentée

Cette deuxième phase consiste à résoudre un problème en lien avec notre 3^e énoncé-schéma fondamental qui conduit à convoquer les représentations graphiques de relations multiplicatives de comparaison entre deux grandeurs travaillées en amont « n fois moins ». Pour cela, nous proposons aux élèves le problème suivant :

« Le prix de la chemise d'Amir est 5 fois moins cher que celui de son pantalon. Le prix de deux vêtements est de 150 d. Trouvez :

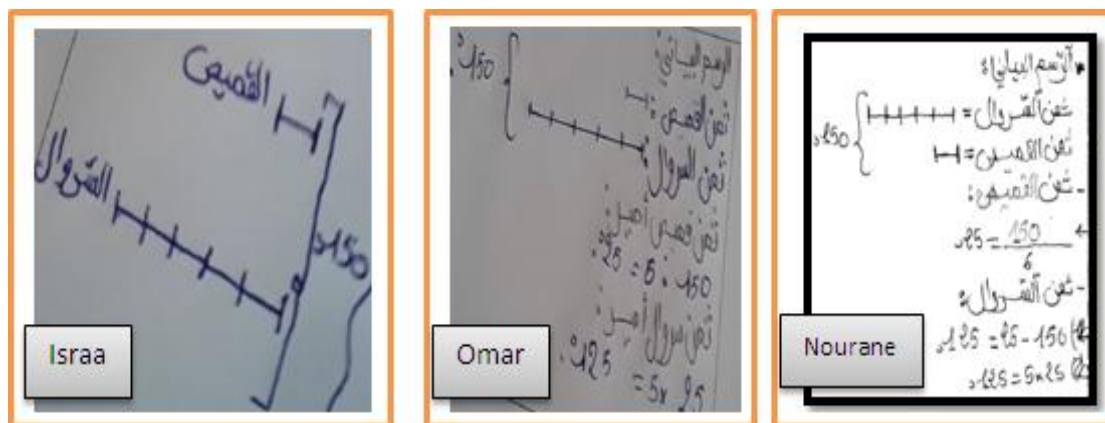
- le prix du pantalon ;
- le prix de la chemise. »

Bien qu'un méso-contrat lié à un ordre de représentation dans le registre graphique des grandeurs en jeu se soit établi lors de la phase précédente entre le professeur et les élèves d'une façon explicite (le fait de commencer par représenter la plus petite grandeur), l'élève Lamè (6A), à travers son schéma, commence par représenter la plus grande grandeur :



Cette dernière production occasionne une rupture du méso-contrat de l'ordre de représentation non sanctionnée par nous-même à cause de la mise en œuvre d'une façon convenable du méso-contrat régi par la règle **R_us_m_fu**.

Quelques élèves se comportent de manière conforme à **R_us_m_e**. Nourane se comporte de manière conforme à **R_us_m_fu** et a commencé par représenter la plus grande grandeur « partagée » en 5. Toutefois nous notons s'agissant de cette élève que la relation multiplicative est cette fois appréhendée (plus de confusion avec la relation additive) d'une manière économique :



Tous les élèves ont correctement résolu le problème, et pour une mise en commun, l'élève Omar reproduit son schéma au tableau.

1	Omar	Ecrit sur le tableau.	
---	------	-----------------------	--

Quel que soit le schéma produit, que ce soit conforme à **R_us_m_e** ou à **R_us_m_fu**, ce dernier a permis la résolution du problème, et ce, par l'ensemble des élèves.

i. Installation du méso-contrat régi par la règle R_Rme_S

Dans le problème posé on nous donne :

- prix du pantalon = 5 fois le prix de la chemise ;
- Les deux prix = 150 d.

Le schéma segmentaire correspondant au problème est le suivant :

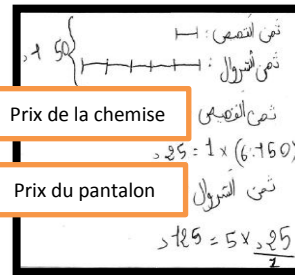


Le prix des deux articles est appréhendé comme 150 d et comme $5 + 1 = 6$ segments dans le registre graphique segmentaire, ce qui permet à travers cette double désignation de trouver la valeur d'une *unité graphique* $u = 150 : 6 = 25$ d – qui coïncide avec le prix de la chemise.

Comme la classe semble en grande réussite, le professeur prend une initiative voulant inviter les élèves à réfléchir sur une classe de problèmes de ce type (problèmes en lien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental). Son intervention vise à installer un contrat **R_Rme_S** : construction d'une formule ou d'un processus généralisé de calcul : *Si on nous donne la somme S de deux grandeurs et si l'opérateur qui relie ces deux grandeurs est un entier, alors la petite grandeur est égale à la somme S divisée par l'opérateur + 1* (transcription 6A) :

1	P	Qu'est-ce qu'on déduit à travers ce schéma ?	
2	Lamè	On remarque que le prix de la chemise représente $\frac{1}{6}$ et le prix du pantalon représente $\frac{5}{6}$.	Intervention de Lamè conforme à son schéma
3	P	$\frac{5}{6}$ de quoi ?	
4	Lamè	Du prix total.	Interprétation qui ne répond pas à nos attentes.
5	P	Oui, c'est juste. Qui peut interpréter le schéma autrement ?	
6	Adam	6 parts représentent 150 d, pour trouver le prix de la chemise, on procède à une division par 6 pour trouver la valeur d'une part, ce qui est proportionnelle au prix de la chemise, puis on multiplie ce dernier prix par cinq pour trouver celui pantalon.	Double désignation de l'unité graphique bien négociée : $\frac{1}{6}$ du prix total et $\frac{1}{1}$ prix de la chemise.
7	P	Très bien !	
8	Med Adam	Le prix du pantalon est cinq fois plus cher que celui de la chemise !	
9	P	Oui, c'est une autre formulation équivalente à celle de l'énoncé, bien !	
10	P	Nous avons dit que le prix du pantalon est cinq fois plus cher que celui de la chemise, le total est représenté par combien de	

		parts ?	
11	les élèves	Six !	
12	P	Et dans la consigne qui a précédé ce problème, (La hauteur de l'immeuble est 4 fois plus grande que celle de la maison) les deux hauteurs sont représentées par combien de parts ?	
13	Les élèves	Cinq !	
14	P	Y-a-t-il une remarque dans ce sens ?	
15	La totalité des élèves	Pas de réponse.	
16	P	Si par exemple le prix d'un livre est 3 fois plus cher que celui d'un cahier, les deux prix seront représentés par combien de parts ? essayez de trouver ça mentalement.	
17	Omar	4 parts.	
18	P	Alors 3 fois ça correspond à ...	
19	Les élèves	4.	
20	P	Et 4 fois ça correspond à ...	
21	Les élèves	5.	
22	P	Et 5 fois ça correspond à ...	
23	Les élèves	6.	
24	P	Donc...	
25	Aness	On ajoute toujours à la donnée du problème « 1 »...	

26	P	C'est ça...Le nombre des parts qui représentent les deux grandeurs est toujours égal à la donnée du problème qui vient juste avant le mot « fois » + le « 1 ».	
27	Malek	À l'air de ne pas comprendre.	
28	P	Si on te dis que la longueur est le double de la largeur et on te donne la valeur du demi-périmètre, comment trouver la largeur ?	
29	Malek	Euh, on divise par 3...	
30	P	Tu divises quoi ?	
31	Malek	Le demi-périmètre	
32	P	C'est ça, et le double, c'est 2 fois plus grand non ?	
33	Malek	Oui.	
34	P	Tu as compris quand même la division par 6 de tout à l'heure ?	
35	Malek	Oui Monsieur !	
36	P	Alors procède toujours par produire un schéma, tu comprendras mieux ! Sors au tableau et reproduis ce que tu as produit sur ta feuille.	
37		Fin de la deuxième phase par cette dernière mise en commun. (production de l'élève Malek)	 <p> ثمن التمشيط : 1 ثمن الشترال : 6 ثمن التمشيط : 1 ثمن الشترال : 6 $25 = 1 \times (6 \times 150)$ ثمن الشترال : 150 $125 = 5 \times 25$ </p>

Le devenir d'un tel savoir dans le processus d'enseignement est à envisager comme une connaissance utile future pour la résolution de ce type de problèmes. Autrement dit, à la condition de reconnaître un problème de ce type, convoquant deux grandeurs inconnues dont on connaîtrait leur somme S et le rapport entier n qui relie ces deux grandeurs, il s'agit de diviser S par $n + 1$ pour trouver la valeur de la petite grandeur.

La résolution outillée par un schéma de type segmentaire est alors à considérer comme un moyen intermédiaire pour construire le savoir institutionnalisé.

c. 3^{ème} phase expérimentée

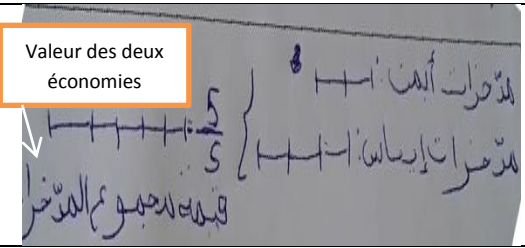
La troisième phase consiste à initier les élèves à schématiser une relation de type $A = \frac{m}{n} B$ où $\frac{m}{n}$ n'est ni une fraction unitaire ni dans \mathbb{N} en mobilisant le méso-contrat de l'unité du problème régi par la règle **R_us_m_f**. Nous proposons la consigne suivante aux élèves :

« Les économies d'Aymen sont égales à $\frac{2}{3}$ celles d'Inès. À l'aide d'un schéma, représenter les deux sommes d'argent. »

i. Installation d'un méso-contrat (R_us_m_f) de représentation d'une relation multiplicative fractionnaire

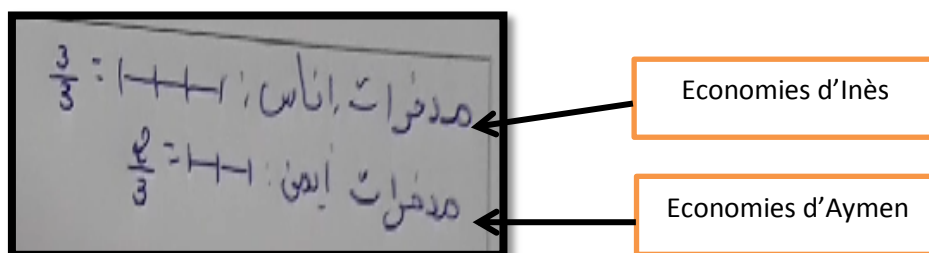
(transcription 6A)

1	P	Ok, par combien de parts nous modélisons les économies d'Aymen ? Nourane...	
2	Nourane	Par deux parts !	
3	P	Pourquoi ?	
4	Nourane	Parce que les économies d'Aymen sont égales à $\frac{2}{3}$.	
5	P	$\frac{2}{3}$ est inférieur à 1 non ?	
6	Rayen J.	Non Monsieur, une part correspond à $\frac{1}{3}$ et on a $\frac{2}{3}$!	
7	P	Il faut le dire, je ne suis pas intelligent comme vous !	
8	Élèves	Rires !	
9	P	Et quelle est la fraction correspondante aux économies d'Inès ?	
10	Rayen G.	$\frac{3}{3}$.	D'une façon immédiate.
11	P	Alors on les représente par...	

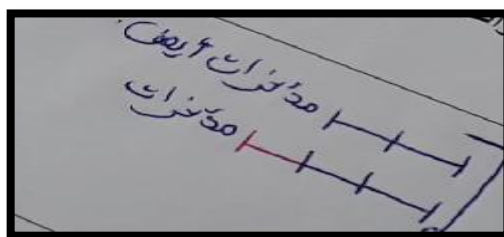
12	Rayen G.	3 parts.	
13	P	Et d'après ton schéma Hiba, les deux sommes sont représentées par combien de parts ?	
14	Hiba	Par 5 Monsieur !	Quoi que la fraction correspondante au total est $\frac{5}{3}$ et non $\frac{5}{5}$.
15	P	Ok, nous allons essayer de mobiliser tout ça pour résoudre le dernier problème de cette séance !	

La totalité des élèves a schématisé correctement la relation proposée. *L'unité du problème* (ici les économies d'Inès) a été correctement représentée par 3 *unités graphiques* :

Production de l'élève Med Adam :



Production de l'élève Israa :



Rappelons que le méso-contrat de *l'unité du problème* régi par la règle **R_us_m_f** peut être formulé de la manière suivante : « quand il y a présence d'une fraction $\frac{m}{n}$ d'une grandeur (inconnue) dans un problème alors je représente un segment de m unités graphiques ($\frac{m}{n}$) et un autre de n unités graphiques ($\frac{n}{n}$) ». Un tel contrat peut toutefois se substituer à la compréhension de ce que recouvre la signification d'une

fraction d'une grandeur – comme tend à l'illustrer ce que nous observons ci-après.

La fraction $\frac{3}{3}$ associée aux économies d'Inès n'est pas donnée dans la consigne. La règle **R_us_m_f** a été mise en œuvre correctement par la totalité des élèves qui ont associé par effet de cette règle la fraction $\frac{3}{3}$ aux économies d'Inès. Suite à l'intervention 9 du professeur : « Et quelle est la fraction correspondante aux économies d'Inès ? », l'élève Rayen G. répond d'une façon immédiate : « $\frac{3}{3}$ ». Le caractère immédiat d'une telle réponse tend à montrer que ce qui la pilote relève peut-être plutôt d'un effet de contrat que de connaissances mathématiques qui n'ont d'ailleurs pu être convoquées initialement par les élèves dans la résolution du problème donné.

d. 4^{ème} phase expérimentée

Cette quatrième phase consiste à résoudre un problème en lien avec notre 3^e énoncé-schéma fondamental qui conduit à convoquer les représentations graphiques de relations multiplicatives de comparaison entre deux grandeurs travaillées en amont lors de la troisième phase : « $A = \frac{m}{n} B$, $\frac{m}{n} \notin \mathbb{IN}$ et $m > 1$ ». Pour cela, nous proposons aux élèves le problème suivant :

« Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante. Le prix des deux appareils est 1320 d. Trouvez :

- le prix de l'imprimante ;
- le prix de l'ordinateur. »


Tous les élèves de la 6A de l'école privée les Collines ont correctement résolu le problème, pour cela nous avons choisi exceptionnellement d'exposer nos analyses *a posteriori* du travail fait avec la 6C de l'École Primaire Omar Ibn Elkhattab qui a rencontré plus de difficultés dans la résolution de ce même problème.

i. Des difficultés liées à la mise en œuvre de la règle **R_us_m_f**

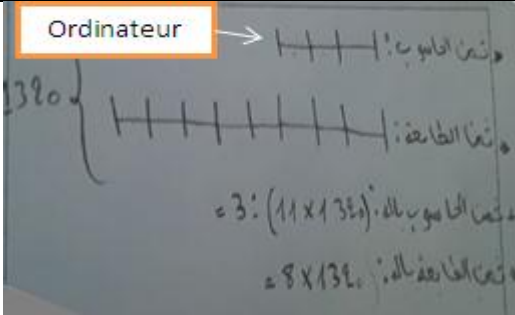
Sachant que Le prix de l'ordinateur = $\frac{8}{3}$ du prix de l'imprimante, et via la mise en œuvre du méso-contrat de *l'unité du problème* régi par la règle **R_us_m_f** le schéma

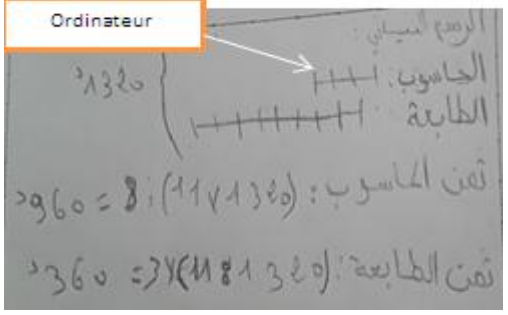
segmentaire qui respecte le méso-contrat de de l'ordre de représentation correspondant à cette dernière relation est le suivant :

prix de l'imprimante : 

prix de l'ordinateur : 

Bien que l'activité qui consiste à reproduire ce schéma ait été précédée par une activité similaire (représentation de la relation Economies d'Aymen = $\frac{2}{3}$ celles d'Inès), les élèves éprouvent des difficultés pour mettre en schéma la relation qui relie les deux grandeurs du problème posé (transcription 6C) :

1	P	Lequel des deux appareils est le plus cher Ichrak ?	
2	Ichrak	L'ordinateur !	
3	P	Oui... Et donc...	(nous la laissons réfléchir).

1	P	Wissal (travaille en commun avec Kaouther), le prix de l'ordinateur est égal à combien par rapport au prix de l'imprimante ?	
2	Quelques élèves	voulant répondre !	
3	P	Laissez la répondre ! lis l'énoncé.	
4	Wissal	Est égal à trois, non $\frac{8}{3}$.	
5	P	Donc on le représente par combien de parts ?	

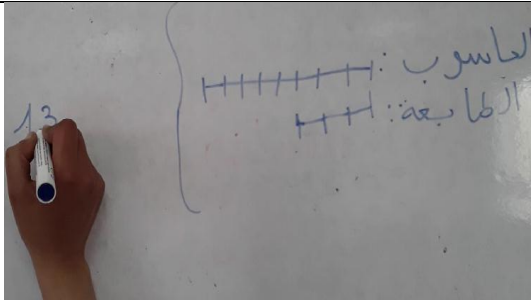
6	Wissal	Par 3 ?	
---	--------	---------	--

La notion de *l'unité du problème* n'est manifestement pas acquise par une partie d'élèves qui est en difficulté (Ichrak, Wissal, Kaouther et aussi bien d'autres élèves). Les élèves associent inversement les nombres de parts pour chaque prix (ce qui justifie l'identification par nous-même de deux sous valeurs de la valeur V_3 identifiée à la page 128 : $\frac{m}{n} < 1$ et $\frac{m}{n} > 1$). Pour ces élèves, ce qui représente *l'unité du problème* est toujours la grande grandeur, ici le prix de l'ordinateur, et cela justifie la représentation de ce prix par 3 parts. Dans la relation proposée lors de la 3^{ème} phase (économies d'Ayemen = $\frac{2}{3}$ économies d'Inès) *l'unité du problème* est la grande grandeur : économies d'Inès, alors que dans la relation du problème posé (prix de l'ordinateur = $\frac{8}{3}$ prix de l'imprimante) *l'unité du problème* est la petite grandeur : prix de l'imprimante. Le fait de proposer dans la consigne une fraction d'une grandeur n'a pas permis aux élèves d'identifier *l'unité du problème* graphiquement lors de la représentation de la relation qui relie les deux grandeurs du problème avec comme opérateur une fraction > 1 . C'est un effet de contrat « contre-productif » révélé par une fraction > 1 : la grande grandeur est toujours considérée comme *l'unité du problème*.

ii. Ré-initiation de la mise en œuvre de la règle R_us_m_f

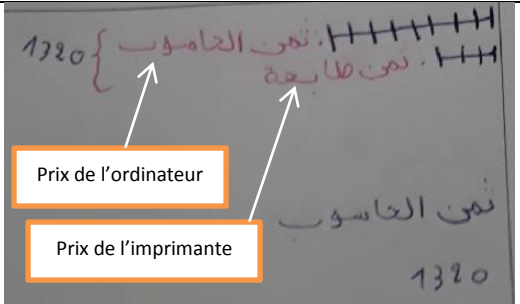
Suite à l'intervention de P : « Donc on le représente par combien de parts ? », Kaouther répond (transcription 6C) :

1	Wissal	Par 3 ?	
2	Kaouther	Monsieur huit ?	
3	P	Tout à l'heure, les économies d'Ayemen étaient égales à $\frac{2}{3}$, on les a représentées par combien de parts ?	
4	Kaouther	Par deux !	
5	P	Et alors, Pour	

		l'ordinateur qui est égale à $\frac{8}{3}$.	
6	Kaouther	On le représente par huit parts Monsieur.	
7	P	Quelle est la fraction correspondante au prix de l'imprimante ?	
8	Takwa	$\frac{3}{3}$.	
Quelques élèves en difficulté, profitent de la dernière interaction professeur/élèves pour rectifier leurs productions.			
9	P	Tu sors au tableau Takwa !	
10	Takwa	En train de schématiser le problème au tableau.	

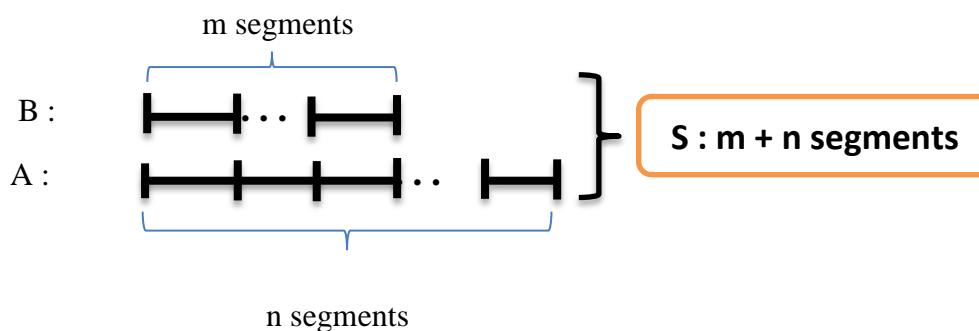
Cette mise en commun a permis aux élèves, surtout ceux qui sont en difficulté, d'identifier *l'unité du problème* comme étant le prix de l'imprimante. Notons que la partie prépondérante des élèves a su représenter correctement la relation proposée :

Production de l'élève Med Adam (transcription 6C) :

1	P	Tu es sur la bonne voie Med Adam !	
---	---	---------------------------------------	--

iii. Instauration du méso-contrat régi par la règle R_Rmf_S

Le but de cette dernière activité est d'amener les élèves à dénombrer correctement le nombre des *unités graphiques* pour bien interpréter un schéma représentatif d'un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental. Nous avons mentionné précédemment que si on nous donne $A = \frac{m}{n} B$ et $A + B = S$ ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire), alors le schéma segmentaire qui représente cette relation est le suivant :



et la valeur d'un segment est : $\frac{S}{m+n}$

La clé de la résolution du problème proposé réside alors dans le fait de dénombrer 11 *unités graphiques* qui représentent les deux grandeurs du problème. Sans un dénombrement correct du nombre des *unités graphiques*, la division de 1320 par 11 ne sera ni probable, ni perçue (transcription 6A) :

1	P	Les deux prix sont représentés par combien de parts ?	
2	Takwa	11.	
3	P	Pour trouver par exemple le prix de l'ordinateur, qu'est-ce qu'on fait Kaouther?	
4	Kaouther	1320 on la multiplie par 8 puis on divise par 11.	
5	P	On commence par multiplier ou par diviser ?	
6	La plupart des élèves	On commence par diviser	
7	P	En fait, est ce qu'il y a de différence en termes de résultat ?	

8	La plupart des élèves	Non !	
9	P	Et pourquoi commencer par diviser ?	
10	Med Yesser	Parce qu'on doit commencer par chercher la valeur d'une part.	
11	P	Kaouther, pour trouver la valeur d'une part, que fait-on ?	
12	Kaouther	On divise par 11 et on multiplie par 8.	
13	P	Et c'est ça la valeur d'une part ?	
14	Ilef (M)	On divise par 11.	
15	P	Alors par la logique des choses, on commence par diviser par 11 pour trouver la valeur d'une part, puis on multiplie par 8 pour trouver le prix de l'ordinateur. Et en fait, pourquoi on multiplie par 8 Mazen ?	
16	Mazen	Parce que le prix de l'ordinateur est représenté par 8 parts !	
17	P	Bien ! Maintenant, c'est quoi la fraction donnée dans le problème ?	
18	La plupart des élèves	$\frac{8}{3}$.	
19	P	Et combien y-a-t-il de parts dans chacun de vos schémas ?	
20	La plupart des élèves	11.	
21	P	y-a-t-il une relation entre 11 et $\frac{8}{3}$?	
22	Gaieth	$\frac{8}{3} + \frac{3}{3} = \frac{11}{3}$	
23	P	Oui c'est juste, mais sans compter les $\frac{3}{3}$, y-a-t-il une relation entre 11 et $\frac{8}{3}$?	
24		11 est multiple de trois.	

	Maram		
25	P	Non seulement ce n'est pas ça, 11 n'est pas multiple de trois !!!	
26	Med Adam	$8 + 3 = 11$	
27	P	Très bien ! Maintenant y-a-t-il une relation entre $\frac{8}{3}$ et le nombre de parts qui représentent le prix de chaque appareil ?	
28	Maysoun	Le numérateur est égal au nombre de parts qui représentent le prix de l'ordinateur et le dénominateur est égal au nombre de parts qui représentent le prix de l'imprimante.	
29	P	Voilà, si une première grandeur est une fraction d'une deuxième grandeur alors le numérateur est égal au nombre de parts qui représentent la première grandeur et le dénominateur est égal au nombre de parts qui représentent la deuxième grandeur. C'est un peu compliqué, mais on peut toujours s'appuyer sur un schéma pour ne pas se tromper.	

Sous l'effet de la règle **R_us_m_f**, L'élève Takwa répond à notre intervention (« Quelle est la fraction correspondante au prix de l'imprimante ? ») par : « $\frac{3}{3}$ ». Cette dernière fraction ne figure pas dans l'énoncé du problème et c'est à la charge de l'élève par dévolution de l'enseignant de la trouver.

À partir de ces dernières transcriptions, nous avons mené les élèves à se rendre compte que pour deux grandeurs A et B telles que $A = \frac{m}{n} B$, $\frac{m}{n} \notin \mathbb{IN}$ et $m > 1$, et $A +$

$B = S$, pour connaître la valeur d'une *unité graphique* il suffit de diviser S par $m + n$. La division d'une somme S par le nombre total des *unités graphiques* pour trouver la valeur d'une *unité graphique* n'est valable que pour la résolution d'un problème en lien avec notre 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} ou 6^{ème} énoncé-schéma fondamental et cela renvoie à un méso-contrat plus global régi par la règle **R_V_us**. Dans le cas du problème posé, il n'est pas difficile de trouver les valeurs de A et de B sachant que A est représentée par m *unités graphiques* et que B est représentée par n *unités graphiques*.

2. 2^{ème} Séance

La deuxième séance a été menée avec deux classes :

La **6A** : 16 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Privée les Collines, Kasserine. (21 mai 2019 : 60 mn de 8h à 9h).

La **6C** : 19 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Kasserine. (21 mai 2019 : 60 mn de 14h à 15h).

Cette deuxième séance se compose de quatre phases (voir tableau récapitulatif pp. 296-298) :

- deux phases pendant lesquelles nous proposons aux élèves de résoudre un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental puis de progresser vers la résolution d'un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma-fondamental ;
- deux autres phases pendant lesquelles nous proposons aux élèves de résoudre un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental puis de progresser vers la résolution d'un problème en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma-fondamental.

Ces quatre phases visent une forme de progressivité dans le passage du traitement de relations de comparaison (additives ou multiplicatives) simples à la composition de relations de comparaison (additives ou multiplicatives) , allant de pair avec le passage de la prise en considération de deux relations à trois relations entre les grandeurs en jeu.

Lors de nos analyses, nous exposerons les trois premières phases avec la **6A** et la **6C** et la quatrième phase avec la **6A**.

a. 1^{ère} phase expérimentée

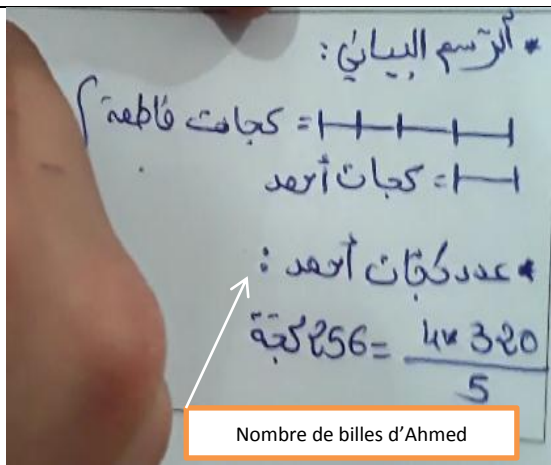
Lors de cette phase, nous proposons aux élèves de résoudre un problème déconnecté à deux relations, une additive et une autre multiplicative, en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental :

«Ahmed et Fatma ont 320 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 4 fois plus grand que celui de Fatma, combien chacun a-t-il de billes ? »

Sachant que lors de la deuxième phase de la première expérimentation les élèves ont résolu un problème similaire au problème ci-dessus, nous supposons *a priori* que le taux de réussite sera plus conséquent pour cette phase du côté surtout des élèves de la 6A (rappelons que réussite veut dire résolution correcte du problème). Nous avons décidé d'intégrer dans nos analyses des passages des retranscriptions avec la 6A (classe à « bon niveau ») et la 6C (classe à « niveau moyen »).

i. Une congruence sémantique non respectée

Avec la **6A** :

<p>Le taux de la réussite lors de la production du schéma représentatif du problème est 100 %. Même Nourane (6A), élève en difficulté hier lors de sa réponse à la consigne de la première phase, résout le problème avec succès.</p>	 <p>التقسيم البياني: كرات فاطمة = 11111 كرات أحمد = 44444 عدد كرات أحمد : $320 = \frac{4 \times 320}{5}$</p> <p>Nombre de billes d'Ahmed</p>
---	---

Ci-après quelques productions des élèves (6A et 6C) :

	<p>عدد كُتبات فاطمة:</p> $64 = 5 : 320$ <p>عدد كُتبات أحمد:</p> $256 = 4 \times (5 : 320)$
--	--

<p>Abaidi (6C)</p>	
--------------------	--

<p>Omar (6A)</p>	
------------------	--

<p>* عدد كُتبات فاطمة:</p> $64 = 256 - 320$ <p>Nourane (6A)</p>	<p>* أنرسم البياني:</p> <p>* عدد كُتبات أحمد:</p> $256 = \frac{4 \times 320}{5}$
---	--

<p>Med Adam (6C)</p>	
----------------------	--

المرسوم البياني:

فاطمة: 320 بكرة

أحمد: 4

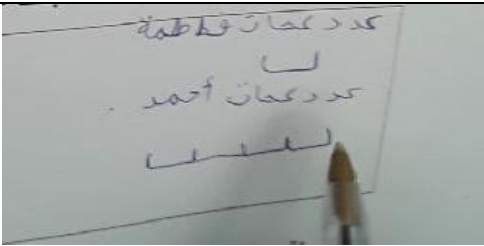
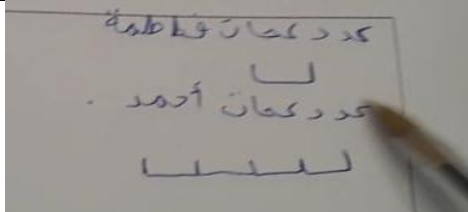

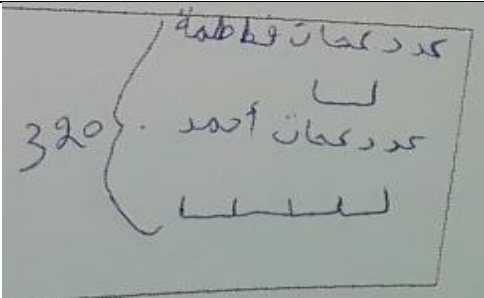
عدد البكرات فاطمة: $956 = 4 \times (5 : 320)$

عدد البكرات أحمد: $64 = 1 \times (5 : 320)$

Bien que la relation « le nombre de billes d’Ahmed est 4 fois plus grand que celui de Fatma » soit congruente à un traitement de type « Report » dans le registre graphique, les quatre élèves Omar et Nourane (6A) et Med Adam et Ichrak (6C), qui n’ont pas respecté le méso-contrat de l’ordre de représentation, ont commencé par représenter le nombre de billes d’Ahmed. Ils ont adopté une représentation congruente à un traitement de type « Partage ». Au lieu de commencer par trouver le nombre de billes de Fatma, qui est le plus facile à trouver, car il nécessite qu’une division de 320 par 5 pour le trouver, ils commencent par trouver le nombre de billes d’Ahmed qui nécessite pour le trouver une division de 320 par 5 suivie d’une multiplication par 4. Un des avantages de la mise en œuvre du méso-contrat de l’ordre de représentation (commencer par représenter la plus petite grandeur) est de proposer via les schémas produits des trajectoires de résolutions plus économiques. Les deux élèves Yakin (6A) et Abaidi (6C) qui ont respecté le méso-contrat de l’ordre de représentation ont commencé par chercher le nombre de billes de Fatma en suivant la trajectoire la plus optimale en termes de connaissances convoquées pour résoudre le problème posé.

ii. Un effet productif d’un méso-contrat ne garantit pas la réussite

Lors de l’analyse *a posteriori* du questionnaire nous avons montré que la production d’un schéma correct ne garantit pas la réussite (résolution correcte du problème) à cause des effets du contrat. Pareillement, nous allons montrer dans les transcriptions à venir que répondre à un système d’attentes implicites pour produire un schéma ne garantit pas l’interprétation correcte de ce schéma (transcription 6C) :

1	P	C'est bien Abaidi (élève en difficulté), ça c'est le nombre de billes de ...	
2	Abaidi	Ahmed !	
3	P	Et ça c'est le nombre de billes de ...	
4	Abaidi	Fatma !	
5	P	Très bien ! Et combien ont-ils de billes tous les deux ?	
6	Abaidi	Monsieur ils ont 5 parts...	
7	P	Oui, je suis d'accord avec toi, mais combien ils ont de billes ?	
8	Abaidi	Monsieur ils ont 320 billes !	
9	P	Qu'est-ce qu'on fait alors ?	
10	Abaidi	En train d'intégrer la donnée 320 dans son schéma.	
11	P	Très bien, Comment maintenant à partir de ton schéma peux-tu trouver le nombre de billes de chaque enfant ?	
12	Abaidi	$320 : 4$ pour trouver le nombre de billes de Fatma...	

L'élève Abaidi met en œuvre le méso-contrat régi par la règle **R_us_m_e** pour produire son schéma. Toutefois, il ne semble pas percevoir que le nombre total de billes est représenté par 5 fois une grandeur correspondant au nombre de billes de Fatma, même s'il est capable de dire que l'*unité graphique* correspond à ce nombre de billes et d'annoter la valeur du « tout » sur le schéma, il cherche à réinvestir la donnée numérique 4 (donnée dans l'énoncé) dans la résolution du problème. Les élèves en difficulté ont du mal à s'écarter de tout ce qui est donné dans le problème. Une division sur 4 sera congruente à la donnée 4 du problème, alors que la division sur 5 pour trouver la valeur correcte d'une *unité graphique* ne figure pas dans les données du problème. Son action renvoie à un macro-contrat plus global (utilisation automatique des données du problème), et une tranche d'élèves, dont Abaidi en fait partie, n'arrive pas à négocier la rupture de ce contrat. Cette interaction professeur/élève montre dans le cas présent que la production du schéma relève d'un méso-contrat mais que son interprétation relève d'un macro-contrat non cohérent avec le rôle que peut jouer ce schéma dans la résolution du problème.

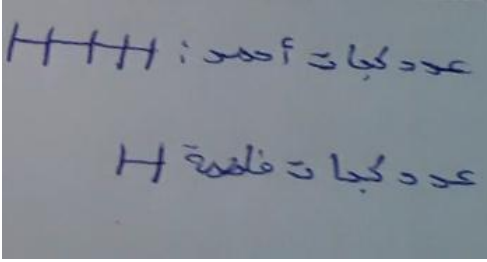
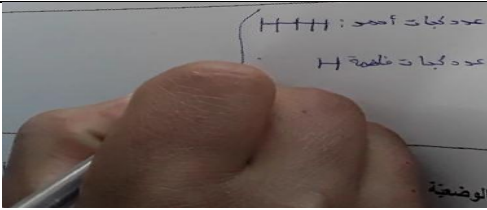
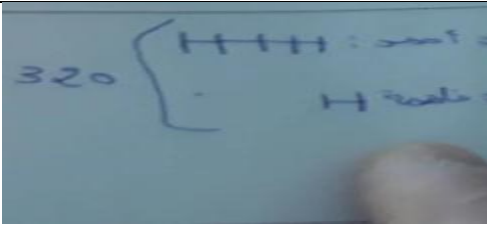
Un pilotage didactique a été nécessaire pour que cet élève résolve avec succès le problème posé (transcription 6 C) :

1	P	La donnée 320 est représentée par combien de parts ?	
2	Abaidi	Par 5 Monsieur !	
3	P	Et alors ?	
4	Abaidi	Je divise par 5 pour trouver le nombre de billes de Fatma.	
5	P	Très bien ! Continue...	

P pilote l'interprétation du schéma mais par un effet de type « topaze » qui réduit fortement l'incertitude liée à l'interprétation du schéma produit, à tel point que l'on peut s'interroger quant à l'effet d'une telle intervention didactique.

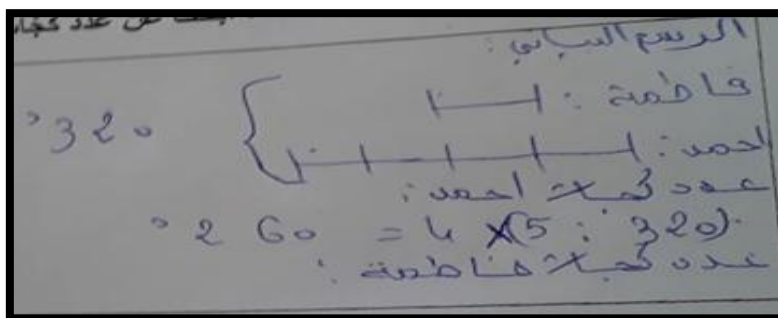
Ce que nous constatons des actions et des difficultés de l'élève surnommé Abaidi n'est pas une exception. L'effet productif au niveau de la production du schéma offert

par la mise en œuvre de la règle **R_us_m_fu** par l'élève Med Amin (6C) ne garantit pas une fois de plus une interprétation correcte du schéma (transcription 6 C) :

1	P	Qu'est-ce qu'il manque sur ton schéma Med Amin (élève en difficulté) ?	
2	Med Amin	Le total.	
3	P	Bien, comment peut-on trouver par exemple le nombre de billes de Fatma, à partir de ton schéma?	
4	Med Amin	Sans réponse.	
5	P	320 est représenté par combien de parts ?	
6	Med Amin	5	
7	P	Donc pour trouver le nombre de billes de Fatma, que fait-on ?	
8	Med Amin	5 divisé par 320	
9	P	5 divisé par 320 ?	
10	Med Amin	320 divisé par 5	
11	P	C'est ça, bien.	Sans aucune conviction, il a eu une maîtrise de l'enjeu derrière cette division.

À la suite d'interactions avec le professeur, tous les élèves arrivent à produire la résolution escomptée, via des effets contractuels nouveaux liés à l'étayage de l'enseignant, se substituant au macro-contrat d'utilisation des données : diviser la valeur par le nombre d'*unités graphiques* au lieu de la donnée présente dans la consigne...

Production de l'élève Kaouther (élève en difficulté de la 6C) : en train de finaliser sa procédure de résolution avec une erreur du calcul au niveau du nombre des billes d'Ahmed :



b. 2^{ème} phase expérimentée

Cette phase consiste à progresser avec les élèves vers la résolution d'un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental. Pour cela le problème suivant est posé aux élèves :

« Ahmed, Ali et Fatma ont 360 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 2 fois plus grand que celui de Fatma, le nombre de billes de Fatma est 3 fois plus grand que celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »

Nous avons décidé que le problème posé soit un problème de type composition. Ce choix de type de problème est lié au fait que le schéma prend en charge la complexité liée à la composition des deux relations multiplicatives. Les deux relations du problème sont de type « ...n fois plus... », ce qui invite les élèves à répondre au système d'attentes : mettre en œuvre le méso-contrat régi par la règle **R_us_m_e** deux fois de suite pour représenter les grandeurs du problème.

Dans un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental nous avons toujours deux grandeurs liées par une relation multiplicative et une autre additive.

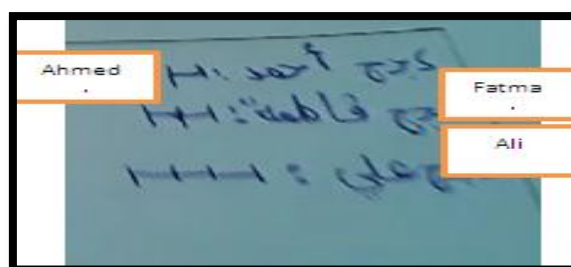
Dans un problème en lien avec notre 6^{ème} énoncé-schéma fondamental nous avons toujours 3 grandeurs liées par deux relations multiplicatives et une troisième additive. Dans ce dernier cas de figure, l'ordre de représentation peut impacter les productions des élèves. La mise en œuvre du méso-contrat de l'ordre de représentation est a priori nécessaire pour une prise en charge du schéma de la composition des deux relations.

i. Pilotage didactique pour une mise en œuvre du méso-contrat lié à R_us_m_e

(transcription 6 C)

1	P	On commence par représenter quelle part ?	(en s'adressant à tous les élèves)
2	Omar	La plus petite !	
3	Gaeith	On représente les billes par des segments.	
4	P	Les billes de qui ?	
5	Maysoun	D'Ali.	
6	P	Pourquoi ?	
7	Maysoun	Il a la plus petite part.	
8	P	On est d'accord avec Maysoun, et on l'a déjà dit avant, on commence toujours par représenter la plus petite grandeur !	(instaurer un contrat d'adhésion)

La mise en œuvre du méso-contrat de l'ordre de représentation est toujours précédée par la mise en œuvre du micro-contrat régi par la règle **I_P_G** (identification de la petite grandeur). Cette dernière règle n'est pas toujours facile à mettre en œuvre, la production de l'élève Anes (6A) en atteste :



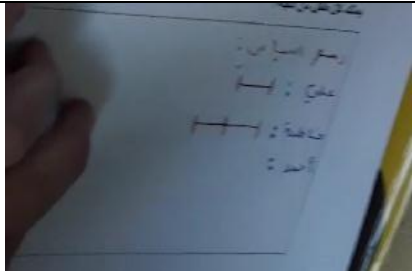
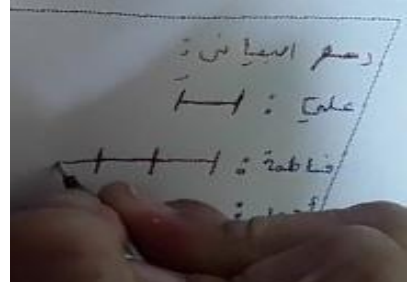
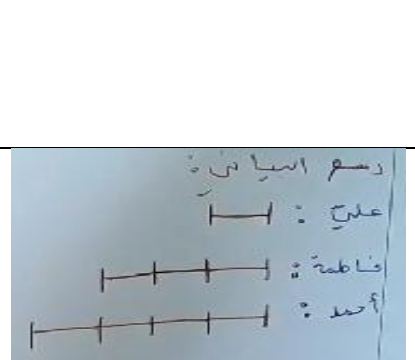
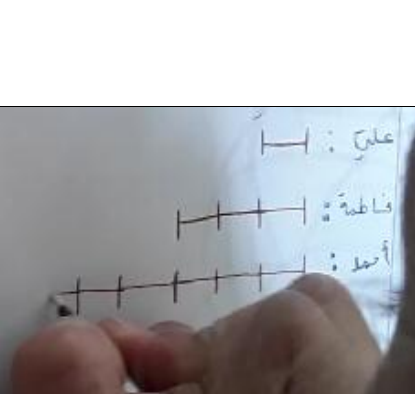
Excepté l'élève Anes, La totalité des élèves de la 6A ont identifié la petite grandeur (nombre de billes d'Ali) et la mise en œuvre du méso-contrat **R_us_m_e** deux fois de suite fait en sorte que la totalité des élèves de cette classe sont arrivés à résoudre correctement le problème posé via des schémas convenablement produits.

Productions de 4 élèves (6A) :

Avec la 6C, la mise en œuvre du micro-contrat régi par la règle **I_P_G** (identification de la petite grandeur) n'a pas garanti une production correcte du schéma représentatif du problème (transcription 6 C) :

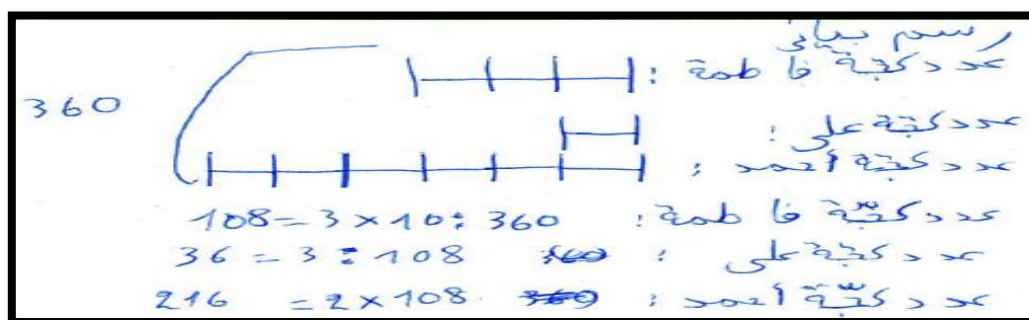
1	P	<p>Regarde Maram, Nombre de billes de Fatma est égal à trois fois celui d'Ali, ça c'est ok, mais le nombre de billes d'Ahmed est égal à deux fois celui de Fatma ! Les billes de Fatma sont représentés par combien de parts ?</p>	
---	---	--	--

L'identification de la petite grandeur n'est pas source de réussite (production du « bon schéma »). La composition de deux relations multiplicatives doit être aussi prise en compte pour réussir la production du schéma. Quelques élèves éprouvent des difficultés non seulement pour représenter des compositions de relations mais aussi dans la représentation d'une seule relation multiplicative entière entre deux grandeurs (transcription 6 C) :

1	P	Nombre de billes de Fatma est égal à trois fois celui d'Ali, qu'est-ce qu'on fait ? (en s'adressant à Dhikra)	
2	Dhikra	En train d'ajouter la troisième part sans rien dire.	
3	P	Qu'est-ce qu'on dit après ? Le nombre de billes d'Ahmed est égal à deux fois celui de Fatma !	
4	Dhikra	Représente les billes d'Ahmed par 4 parts, sans toujours rien dire.	
5	P	Ce que tu viens de représenter, c'est deux fois la part de Fatma ?	
6	Dhikra	En train d'ajouter 2 autres parts, silencieusement !	

De ce qui précède, nous pouvons affirmer qu'identifier la petite grandeur et représenter les grandeurs du problème avec un ordre hiérarchique peut aboutir à une résolution correcte du problème sans pour autant la garantir.

La production de l'élève Ilef N (6C) montre que le non-respect de l'ordre de représentation peut n'avoir aucun impact sur la résolution correcte du problème :



ii. Justification d'une renégociation d'un nouveau contrat didactique

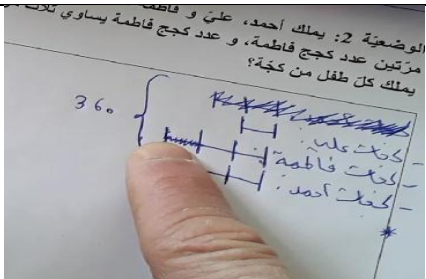
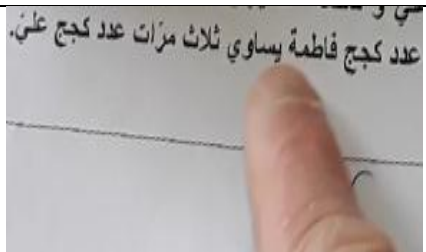
Dans le premier problème, la donnée 4 est présente dans la représentation du nombre de billes d'Ahmed. Dans le problème posé, la donnée 3 sera présente dans la représentation du nombre de billes de Fatma mais la donnée 2 sera absente à cause de la composition des deux relations multiplicatives :

- le nombre de billes de Fatma est 3 fois plus grand que celui d'Ali ;
- le nombre de billes d'Ahmed est 2 fois plus grand que celui de Fatma.

L'absence de la donnée 2 dans le schéma segmentaire représentatif du problème va provoquer une rupture du macro-contrat qui stipule l'utilisation des toutes les données du problème telles quelles sont. Ce changement de contrat didactique, qui est nécessaire à l'apprentissage, est source de difficulté et même d'échec pour de nombreux élèves (transcription 6 A):

1	P	Anes, quel est l'enfant qui a le moins de billes ?	
2	Anes	Sans réponse.	

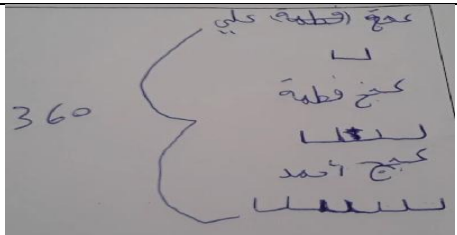
Non seulement l'élève Anes (6A) se trompe dans la hiérarchie correspondante au nombre de billes, il tient à utiliser les données du problème telles qu'elles sont proposées dans son énoncé. Cette incapacité de renégociation est sans conteste éprouvée par l'élève Ichrak (6C) (transcription 6 C) :

3	P	Pourquoi tu as supprimé ce segment de la représentation de billes de Fatma ?	
4	Ichrak	Aucune réponse.	
5	P	Que dis l'énoncé ? : nombre de billes de Fatma est égal à trois fois celui d'Ali. Tu as bien représenté les deux parts, pourquoi enlever ce segment ?	
6	Ichrak	Parce que le nombre de billes d'Ahmed est égal à deux fois le nombre de billes de Fatma !	

L'intervention 6 de l'élève Ichrak montre qu'elle se rend compte que son schéma ne contient pas une représentation congruente à la donnée 2 et veut à tout prix faire apparaître cette donnée dans son schéma même au détriment d'une représentation correcte. Cette correspondance entre schéma et données du problème fait disparaître la composition des deux relations entre le nombre de billes d'Ali et celui d'Ahmed (nombre de billes d'Ahmed = 2×3 Nombre de billes d'Ali).

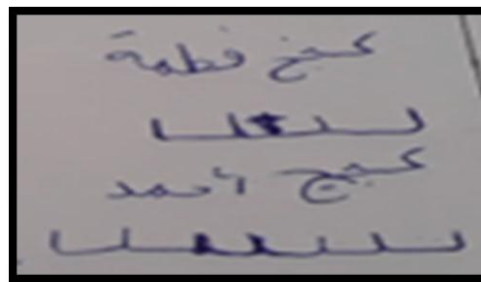
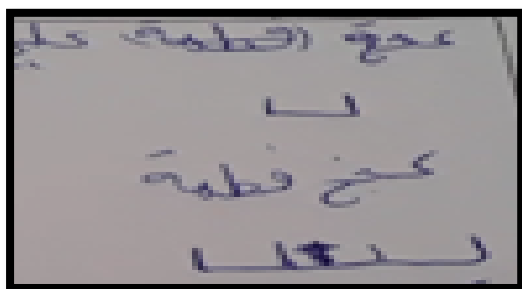
iii. Répondre à un système d'attente est-il un facteur de réussite ?

(transcription 6 C)

1	P	Bien que ton schéma soit un peu moche, il est juste, bien Abaidi !	
2	Abaidi	Sourit !	

3	P	Et comment je trouve le nombre de billes d'Ali ?	
4	Abaidi	10 : 360.	
5	P	Comment ?	
6	Abaidi	10 : 360.	

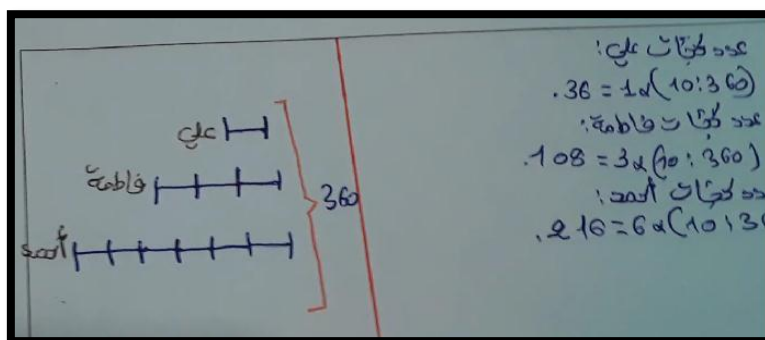
L'élève Abaidi produit un schéma correct par la mise en œuvre deux fois de suite du méso-contrat régi par la règle **R_us_m_e** :



La mise en œuvre du méso-contrat régi par la règle **R_V_us** (règle pour trouver la valeur d'une unité segmentaire : diviser la somme par le nombre total des *unités graphiques*) est nécessaire pour répondre au système d'attente régi par cette règle. L'interprétation de l'élève Abaidi de son schéma montre que les connaissances nécessaires pour produire son schéma sont en fait réduites à une réponse à un système d'attente lié à la représentation de son schéma (mise en œuvre de la règle **R_us_m_e**). De ce qui précède, et une fois de plus, nous pouvons également affirmer que la production d'un schéma correct représentatif d'un problème, lorsque celle-ci est pilotée par des règles de contrat didactique et seulement par celles-ci, n'est pas source d'une garantie de résolution correcte du problème posé.

Pour autant, pour une partie conséquente des élèves des deux classes, la réponse au système d'attente régi par la règle **R_us_m_e** fait en sorte que les schémas produits prennent en charge la composition de deux relations multiplicatives et permettent la résolution du problème posé. Un nombre important d'élèves (15 sur 16 élèves de la classe de la 6A et 13 sur 18 élèves de la classe de la 6C) arrivent à dénombrer 10 *unités graphiques* sans passer par la composition des deux relations multiplicatives. Cette prise en charge de la composition des deux relations multiplicatives par le schéma a assuré une réussite de l'ordre de 82,35 % (6 parmi 34 élèves ont échoué). Ce constat tend à montrer que le schéma de type segmentaire peut constituer « un

bon » outil pour résoudre un problème arithmétique complexe où nous identifions une composition de deux relations multiplicatives :



L'élève Israa commence par représenter la petite grandeur (nombre de billes d'Ali) par un petit segment, puis elle met en œuvre la règle du contrat **R_us_m_e** pour représenter la grandeur moyenne (nombre de billes de Fatma) par le même segment reporté 3 fois (nombre de billes de Fatma = 3 fois nombre de billes d'Ali). Ensuite elle reporte la représentation de la part de Fatma 2 fois pour représenter la grande grandeur (nombre de billes d'Ahmed) puisque le nombre d'Ahmed est égal à 2 fois le nombre de billes de Fatma. Elle dénombre ainsi dans son schéma 10 *unités graphiques* dont la valeur de chacune coïncide avec le nombre de billes d'Ali. C'est pour cela qu'en cherchant à travers sa résolution ce dernier nombre elle ne se contente pas de diviser 360 par 10, parce que pour elle, cette division représente la valeur d'une *unité graphique*, mais elle multiplie le résultat de cette division par 1 différenciant ainsi entre la valeur d'une *unité graphique* et la part d'Ali, même si ces deux valeurs coïncident. Israa pointe alors la double désignation de la valeur de l'*unité graphique* comme étant égale au nombre de billes d'Ali mais aussi au $\frac{1}{10}$ du nombre total des billes.

c. 3^{ème} phase expérimentée

Lors de cette phase nous proposons aux élèves de résoudre un problème déconnecté à deux relations additives en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental :

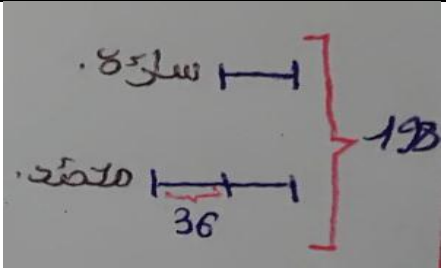
« Mohammed et Sara se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? »

La relation entre les deux grandeurs du problème est de type « ...de plus... ». Nous attendons des élèves la mise en œuvre du méso-contrat régi par la règle **R_us_a+** : représenter la petite grandeur (ici le nombre de billes de Sara) par une *unité graphique* puis représenter la grande grandeur (le nombre de billes de Mohammed) par cette même *unité graphique* augmentée par un segment qui représente la différence de 36 billes – dont la mesure n'est pas forcément égale à celle de l'*unité graphique*. Notons que 19 élèves parmi 34 ont mis en œuvre le méso-contrat régi par la règle **R_us_a-** (commencer par représenter le nombre de billes d'Ahmed et mobiliser le traitement « Retraitement » pour représenter le nombre de billes de Fatma). Ce constat montre, même si la part explicite d'une règle du contrat est importante, répondre au système d'attente régi par cette règle est improbable.

Lorsque nous représentons une relation multiplicative d'un problème en lien avec nos énoncés-schémas fondamentaux, les parts qui représentent les grandeurs de ce problème doivent être impérativement égales. Tandis qu'en représentant des relations additives, les segments qui représentent les parts ne sont pas forcément égaux, ils sont dans la plupart des cas de mesures différentes.

i. Confusion entre relation additive et multiplicative

Le fait de ne pas différencier entre la représentation d'une *unité graphique* et celle de la différence entre les deux grandeurs peut induire l'élève dans l'erreur (transcription 6 A):

1	P	Les trois parts, ainsi représentées, sont égales ? (en s'adressant à Israa, élève à « bon niveau »).	
2	Israa	Non Monsieur !	
3	P	Alors il faut montrer ça à travers ton schéma ! Je sais très bien que tu as compris, mais on a l'impression que la relation entre les deux	

		nombres de billes est multiplicative, comme tout à l'heure !	
--	--	--	--

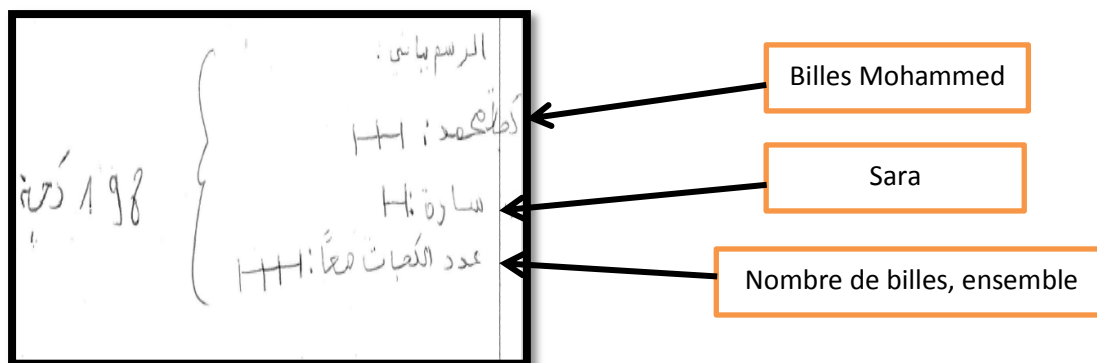
Cette erreur possible sera prouvée ci-après par des faits observables avec la 6C. Certes que l'élève Israa (6A) a correctement résolu son problème, mais ce n'est pas le cas avec l'élève Med Yesser (6C) :

The image shows a student's handwritten work on a blue background. On the left, the number '198' is written next to a large curly brace. To the right of the brace, there are two rows of graphical units (vertical bars) with Arabic text. The top row is labeled 'بيلس سارة' (Billes de Sara) and the bottom row is labeled 'بيلس احمد' (Billes d'Ahmed). Below these, there is a line of text: 'عدد بيلس سارة : 30' (Number of beads of Sara: 30). Three arrows point from labels on the right to the corresponding parts of the work: 'Billes de Sara' points to the top row, 'Billes d'Ahmed' points to the bottom row, and 'Nombre de billes de Sara' points to the final line of text.

Pour trouver le nombre de billes de Sara, et en considérant la différence comme une *unité graphique*, ce dernier élève divise la somme par le nombre des unités segmentaires dénombrées dans son schéma. Ce qui gouverne l'action de l'élève Med Yesser est la règle du contrat **R_V_us** (règle pour trouver la valeur d'une *unité graphique* : diviser La valeur de la somme donnée par le nombre des *unités graphiques*).

Cette confusion au niveau de la représentation n'est pas un cas isolé, les deux productions de Maram et de Nour Elimen de la 6C en attestent :

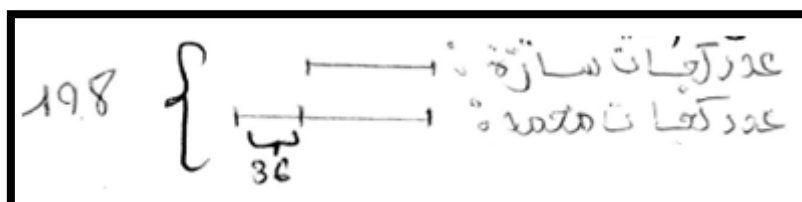
The image shows a student's handwritten work on a white background. On the left, the number '498' is written next to a large curly brace. To the right of the brace, there are three rows of graphical units (vertical bars) with Arabic text. The top row is labeled 'محمد' (Mohammed), the middle row is labeled 'سارة' (Sara), and the bottom row is labeled 'اجمالي' (Total). Three arrows point from labels on the right to the corresponding parts of the work: 'Mohammed' points to the top row, 'Sara' points to the middle row, and 'Total' points to the bottom row. A small box labeled 'Maram' is in the top left corner of the work area.



Une partie des élèves n'arrive pas à négocier la rupture du contrat régi par la règle **R_us_m_e**. Pour les deux élèves précédentes la somme de billes est représentée par 3 *unités graphiques* et ils mentionnent ce fait sur leurs feuilles de réponses.

ii. Une représentation coûteuse est-elle source d'erreurs ?

Une de nos attentes lors de la schématisation d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental était de faire représenter la plus petite grandeur par une seule *unité graphique*. La représentation de l'élève Omar répond à ce système d'attente :



La production de l'élève Adam est en rupture avec cette règle de contrat (transcription 6 A):

1	P	Ici Adam, pourquoi tu représentes le nombre de billes de Sara par 2 parts ?	
2	Adam	C'est comme ça !	

3	P	Je sais que ça ne change rien, mais pourquoi deux parts ?	
4	Adam	Si je représente le nombre de billes de Sara par une seule part je peux la confondre avec 36 ! (la différence entre les nombres de billes)	
5	P	Ok, continue ton travail.	

L'élève Adam justifie son choix de schématisation à travers l'intervention 4 : « Si je représente le nombre de billes de Sara par une seule part je peux la confondre avec 36 ! » Alors qu'il suffit à l'élève de représenter la différence par un segment moins ou plus long que le segment représentant la part de Sara (dans le cas présent le segment représentant la différence doit être moins long que celui qui représente la part de Sara). À travers ce dernier schéma produit, qui est plus coûteux en termes de représentation, l'élève Adam a failli diviser la somme 198 par 4 (production en amont soulignée en blanc, effacée par l'élève au cours de la résolution du problème) :

$$81 = \frac{36 - 198}{2} \quad 4 = 98$$

$$117 = \frac{36 + 98}{2}$$

Cette division par 4 renseignée par la rature ci-dessus renvoie une fois de plus au méso-contrat d'interprétation régi par la règle **R_V_us**. La mise en œuvre de cette règle du contrat (diviser la somme par le nombre des *unités graphiques*) est incontestable à travers l'interprétation de l'élève Abaidi de son schéma incorrectement produit (diviser 198 par 5) :

$$198 = 5 \cdot \dots$$

عدد الكرات
HHH
عدد الكرات
HHHHH

Ce qui importe pour cet élève, dès qu'on a une donnée, on divise cette donnée sur le nombre d'*unités graphiques* dénombrées à partir du schéma.

iii. Représentations qui relèvent du contrat et éventualités de réussite

Nous avons mentionné précédemment que la production correcte d'un schéma représentatif d'un problème n'est pas forcément un indicateur de réussite. Le tableau suivant expose deux schémas produits correctement par deux élèves de la 6C et leurs interprétations :

The image contains two hand-drawn mathematical diagrams in Arabic. The top diagram shows a problem with a sum of 198 and a difference of 36, with calculations for Sara's and Ahmed's marbles. The bottom diagram shows the same problem with calculations for Sara's and Ahmed's marbles.

Top Diagram:

$(198) \left\{ \begin{array}{l} 36 \\ \text{أحمد : 1} \\ \text{سارة : 1} \end{array} \right.$
 $135 = 36 * (2 : 198)$
 $63 = 36 - (2 : 198)$

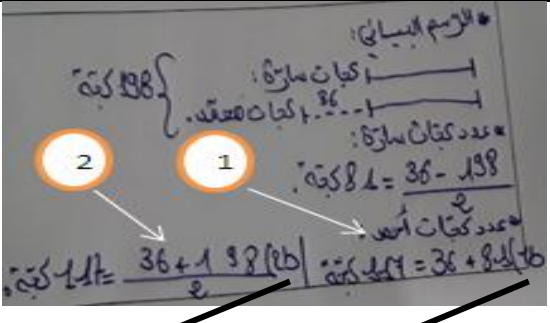
Bottom Diagram:

الرسم البياني :
 أحمد : 1
 سارة : 1
 198 كبة
 $135 = 36 * (2 : 198)$
 $63 = 36 - (2 : 198)$

Pour produire leurs schémas, les deux élèves ont mis en œuvre la règle d'action **R_us_a-**. Ils choisissent comme *unité graphique* la part qui représente le nombre de billes de Sara. Au lieu de retrancher la différence 36 de la somme 198 pour trouver deux fois le nombre de billes de Sara et par suite diviser par 2 pour trouver ce nombre, les deux élèves divisent la somme 198 par 2 puis retranchent la différence 36 pour le trouver – erreur qualifiée par nous-même de récurrente précédemment et apparue dans de nombreuses réponses au questionnaire. Ces interprétations erronées des schémas produits montrent que les productions des deux schémas sont régies que par des systèmes d'attentes et des règles de représentations sans pour autant que les deux élèves maîtrisent les connaissances qui sont derrière ces clauses de représentations.

Les productions des schémas, qui ne sont gouvernées que par des règles de contrat, n'assurent pas forcément des réussites afférentes.

Par contre, ces règles de contrat de représentations peuvent assurer une diversité en termes de résolutions correctes (transcription 6 A) :

1	Nourane	Nourane propose deux méthodes pour trouver le nombre de billes d'Ahmed !!	
---	---------	---	--

Méthode 2

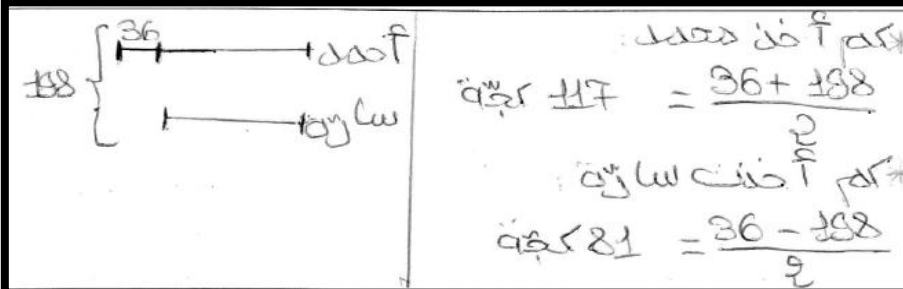
Méthode 1

Nourane se base sur la représentation de son schéma régi par la règle du contrat **R_us_a+** pour trouver le nombre de billes de Sara (en retranchant les 36 en pointillé, puis diviser par deux) puis celui de Mohammed. Ensuite elle se base sur la représentation régie par la règle **R_us_a-** pour trouver directement le nombre de bille de Mohammed en ajoutant 36 à la somme puis diviser par deux. Notons que les deux trajectoires de résolution ont nécessité respectivement la mise en œuvre des deux connaissances suivantes :

« si on augmente une part de 36 on doit augmenter le tout de 36 » ;

« si on diminue une part de 36 on doit diminuer le tout de 36 ».

La production de l'élève Rayen G. (6A), comme celle de Nourane, illustre les deux trajectoires via son interprétation :



d. 4^{ème} phase expérimentée

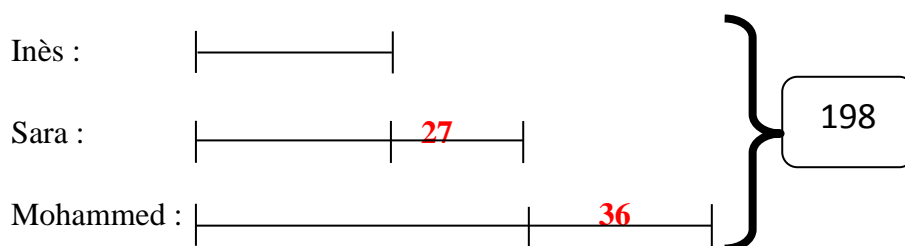
Cette phase consiste à progresser avec les élèves vers la résolution d'un problème en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental. Pour cela le problème suivant est posé aux élèves :

« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Sara en reçoit 27 de plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? »

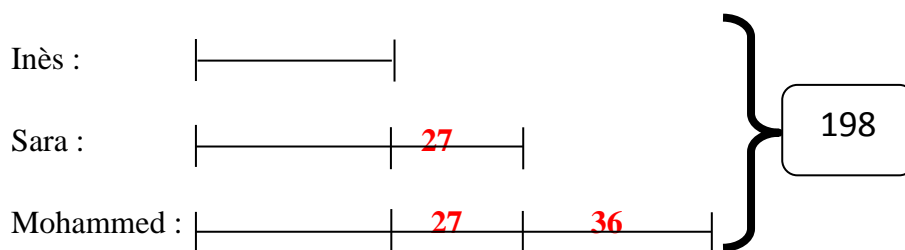
Une progression qui se fait dans deux sens :

- De la résolution d'un problème déconnecté à deux branches vers la résolution d'un problème déconnecté à trois branches ;
- De la résolution d'un problème où nous identifions une relation additive simple vers la résolution d'un problème où nous identifions une composition de deux relations additives.

Les deux relations du problème sont de type « ...de plus... », ce qui invite les élèves à répondre deux fois de suite au système d'attentes régi par la règle **R_us_a+** pour représenter les grandeurs du problème après l'identification de la petite grandeur : Mettre en œuvre cette règle pour représenter le nombre de billes de Sara à partir de celui d'Inès puis le nombre de billes de Mohammed à partir de celui de Sara. La mise en œuvre de cette règle de représentation deux fois de suite peut ne pas suffire à cause d'une problématique évoquée précédemment au niveau de la représentation du nombre de billes de Mohammed. La difficulté majeure pour produire le schéma représentatif du problème posé est d'intégrer le segment qui représente la différence de 27 billes entre le nombre de billes de Sara et celui d'Inès dans la représentation du nombre de billes de Mohammed. Les élèves ont tendance à produire le schéma représentatif du problème posé comme suit (fait évoqué dans le chapitre B) :



Ce qui correspond à nos attentes est plutôt la production du schéma suivant :

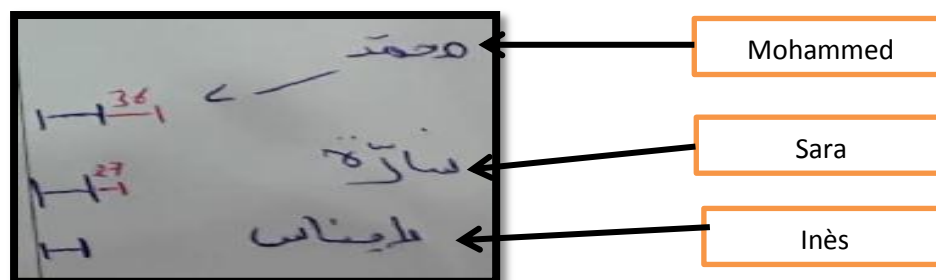


i. Des difficultés que les élèves éprouvent lors de la schématisation

Commencer par la mise en œuvre du micro-contrat codé **I_P_G** (identification de la petite grandeur) peut faciliter la production d'un schéma représentatif d'un problème où nous identifions une composition de deux relations, et ce, que ce soit additives ou multiplicative. La mise en œuvre d'un tel micro-contrat n'est pas toujours facile (transcription 6 A) :

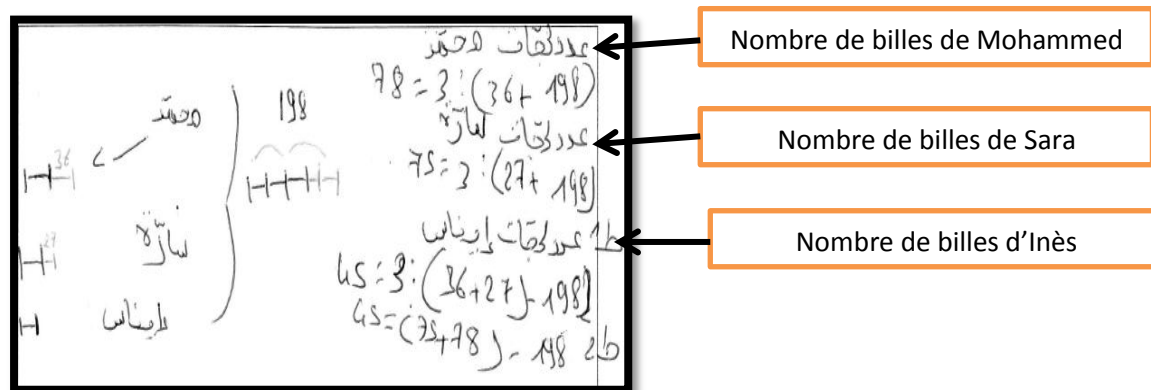
1	Anes	Se rend compte qu'il a produit un schéma faux en attribuant à Mohammed la plus petite part et à Inès et Sara deux parts égales.	
---	------	---	--

Non seulement l'élève Anes se trompe en identifiant la plus petite grandeur, en plus il représente cette grandeur en dernier. Cinq élèves de la 6A n'ont pas respecté cette hiérarchie de représentation. Hiba en fait partie. Elle commence par représenter le nombre de billes de Mohammed (la plus grande part) pour finir par la représentation du nombre de billes d'Inès (la plus petite part) :

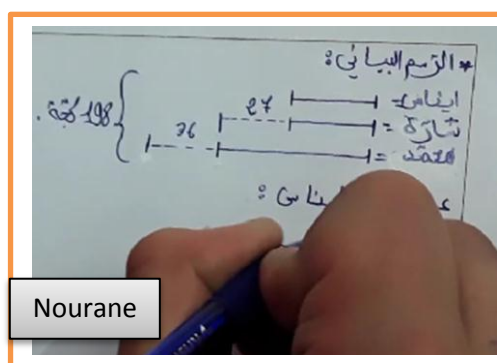


Certes les nombres de billes d'Inès et de Sara sont correctement représentés, mais en commençant par représenter le nombre de billes de Mohammed, Hiba ne considère comme différence entre le nombre de bille de ce dernier et le nombre de billes d'Inès que 36. La composition de deux relations additives pour schématiser le nombre de billes de Mohammed à partir du nombre de billes d'Inès est inexistante en termes de représentation sur son schéma. Nous pensons que si l'élève a commencé par représenter le nombre de billes d'Inès puis celui de Sara, puis représenter le nombre de billes de Mohammed, que la mise en œuvre de cette composition des deux relations additives serait *a priori* probablement prise en charge par son schéma.

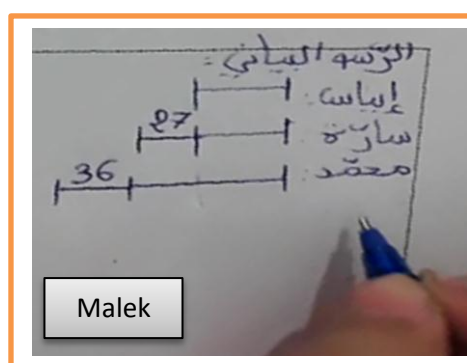
Le schéma produit de Hiba ne lui a pas permis d'aboutir :



Mais rien ne garantit le succès même si la règle de l'ordre de représentation est respectée :



Nourane



Malek

Les deux élèves Nourane et Malek répondent à nos attentes en respectant cette règle lors de la production de leurs schémas, mais l'oubli de marquer la différence 27 sur la part de Mohammed a induit les deux élèves en erreur. Les deux schémas ainsi produits ne mettent pas en avant trois *unités graphiques* égales à la part d'Inès pour

pouvoir diviser par 3 après avoir retranché les différences (27 + 27 + 36), et ainsi trouver le nombre de billes d'Inès. Les deux élèves ont échoué à cause de leurs deux schémas incomplets (un jeu sur des *unités relatives* mal négocié) :

The image shows two handwritten mathematical solutions in Arabic. The first solution, written by a student, shows three equations:

1. $\text{عدد كرات إينيس} = \frac{(36+27) - 198}{3} = 45$ (Number of beads of Inès)

2. $\text{عدد كرات سارة} = 15+36+198$ (Number of beads of Sara)

3. $\text{عدد كرات محمد} = 36+12$ (Number of beads of Mohammed)

The second solution, written by another student, shows two equations:

1. $\text{عدد كرات إينيس} = \frac{(36+27) - 198}{3} = 45$ (Number of beads of Inès)

2. $\text{عدد كرات سارة} = \frac{69+45+(36-198)}{3}$ (Number of beads of Sara)

Arrows point from orange boxes on the right to the corresponding equations in the handwritten work.

ii. Trajectoires possibles de résolution de l'énoncé en jeu

Dans le chapitre B, nous avons mentionné que trois trajectoires sont possibles pour résoudre un problème en lien avec notre 5^{ème} énoncé-schéma fondamental :

- 1) Considérer le segment qui représente le nombre de billes d'Inès (la plus petite grandeur) comme *unité graphique* ;
- 2) Considérer le segment qui représente le nombre de billes de Sara (la grandeur moyenne) comme *unité graphique* ;
- 3) Considérer le segment qui représente le nombre de billes de Mohammed (la plus grande grandeur) comme *unité graphique*.

Lors de l'analyse *a posteriori* du questionnaire nous avons constaté qu'aucun élève n'a considéré la deuxième trajectoire comme piste de résolution.

Dix élèves de la 6A ont résolu correctement le problème. La trajectoire choisie par ces dix élèves est la première trajectoire qui considère comme *unité graphique* le segment qui représente la part d'Inés. Parmi ces dix réponses correctes, les trois suivantes ont attiré notre attention :

The image shows three hand-drawn mathematical solutions for a problem involving the number 198 and its factors. Each solution uses a different 'graphical unit' to represent the problem.

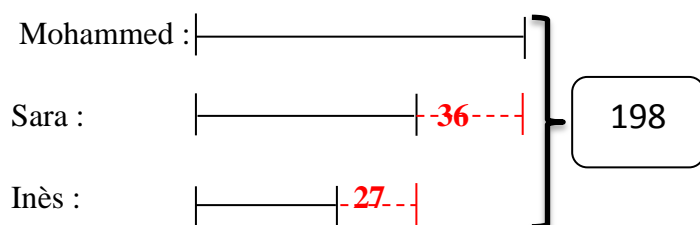
Solution 1 (Top): The student uses a unit of 198. A bracket groups three segments of length 36, 27, and 27, labeled 'معدود' (divisors), 'سازگار' (compatible), and 'ایناس' (Inés). Below, the calculation is shown as $3698 = \frac{(36 + 27 + 27) \cdot 198}{3}$ and $98 = \frac{(36 + 36 + 27) \cdot 198}{3}$. A final line shows $63 = (36 + 99) - 198$.

Solution 2 (Middle): The student uses a unit of 198. Three segments of length 36, 27, and 27 are shown, labeled 'معدود', 'سازگار', and 'ایناس'. The calculation is shown as $36 = 3 \cdot [36 + (2 \times 27) - 198]$ and $63 = 27 + 36 - 198$. A final line shows $99 = 36 + 63$.

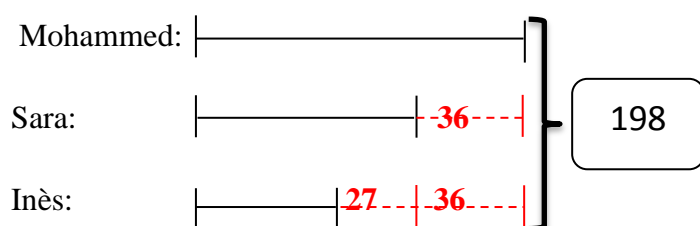
Solution 3 (Bottom): The student uses a unit of 36. Three segments of length 36, 27, and 27 are shown, labeled 'معدود کجایان', 'معدود کجایان باره', and 'معدود کجایان ایناس'. The calculation is shown as $36 = 3 \cdot [(2 \times 27) + 36] - 198$ and $63 = 27 + 36$. A final line shows $99 = 36 + 63$.

Bien que les trois schémas précédents soient produits en commençant par représenter la plus grande grandeur, les trois élèves considèrent comme *unité graphique* le

segment qui représente le nombre de billes d'Inès. En commençant par représenter la plus grande part on s'attend à la production d'un schéma segmentaire autre que ceux produits par les trois élèves par la mise en œuvre deux fois de suite du méso-contrat régie par la règle **R_us_a-** :



Pour mettre en avant trois *unités graphiques* qui représentent le nombre de billes de Mohammed il suffit d'ajouter un segment de valeur 36 à la part d'Inès augmentée par 27 :

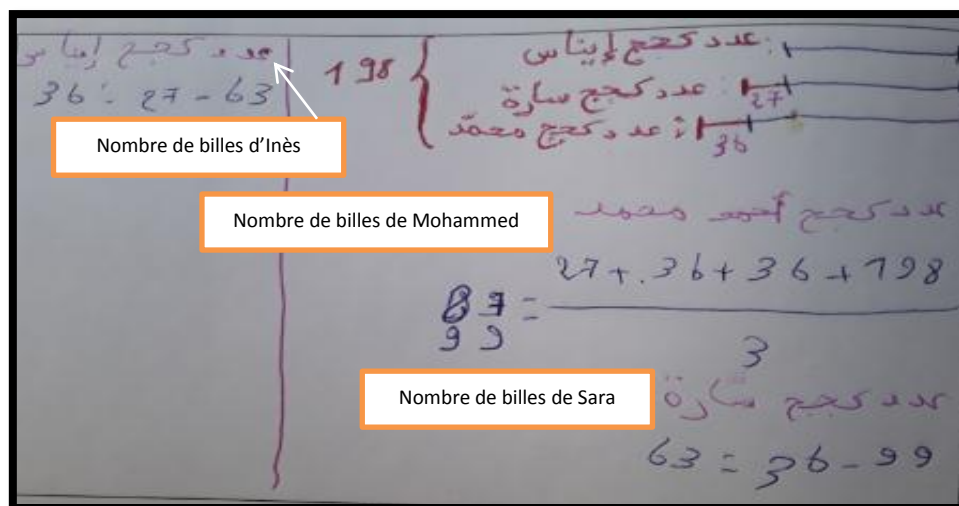


C'est un schéma qui correspond à la troisième trajectoire citée ci-dessus et qui nécessite pour trouver la part de Mohammed la mobilisation de la connaissance évoquée précédemment : « si on augmente la valeur d'une part de X, il faut augmenter la somme de X » ($X = 36 + 27 + 36$), sans oublier un jeu sur des *unités relatives* pour pour augmenter la part d'Inès par 36 et 27.

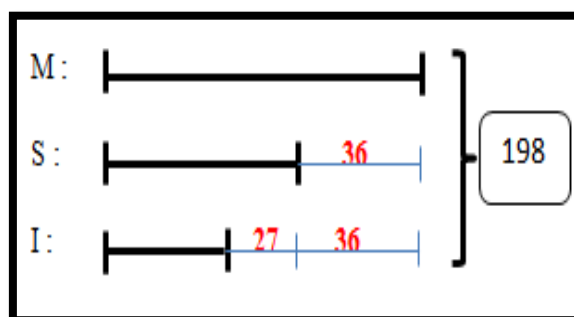
$$\text{Nombre de billes de Mohammed} = \frac{198 + (36 + 27 + 36)}{3} = 99 \text{ billes.}$$

Un seul élève de la 6C a opté à cette trajectoire de résolution par le biais d'un schéma qui correspond à la première trajectoire de résolution :

Production de l'élève Med Adam (6C) :



Notons que sa résolution est non conforme à son schéma qui considère la plus petite grandeur comme *unité graphique* lors de sa production mais plutôt conforme au schéma suivant qui considère la plus grande grandeur comme *unité graphique* :



et nécessité de mobiliser la connaissance décrite ci-dessus :

Si $A + B + C$ correspond à S alors $A + B + \mathbf{b} + C + \mathbf{c}$ correspond à $S + \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

Notons aussi que si Adam a ajouté sur son schéma un segment de valeur 27 sur le segment représentant le nombre de billes de Mohammed, la complexité du problème se ramène à une simple comparaison d'états, mais il préfère, non seulement mobiliser cette connaissance inédite qu'on vient d'évoquer, mais en plus il négocie un jeu sur des *unités relatives* sans prise d'appui sur son schéma.

Ce dernier épisode nous permet d'affirmer que les choix d'unités graphiques que nous avons considérés comme les plus optimaux pour schématiser un champ de problèmes donné, ne sont pas réellement problématisés du point de vue des élèves.

Les quatre dernières productions prouvent qu'une façon de représenter n'induit pas forcément une trajectoire à suivre.

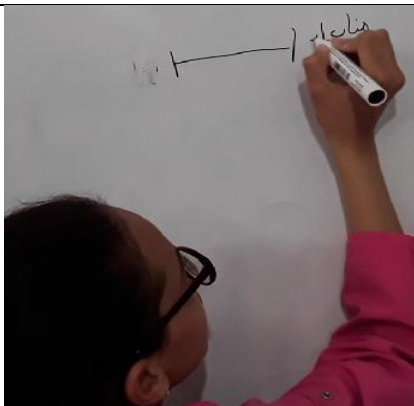
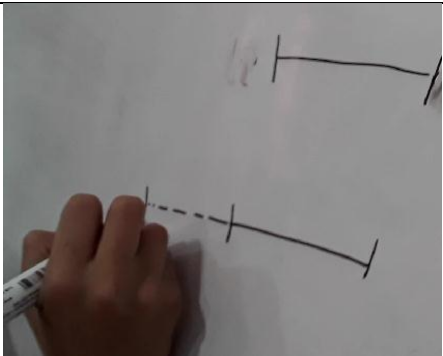
Lors de la deuxième séance nous avons constaté que la prise en charge de la composition des deux relations multiplicatives par le schéma a assuré une réussite de l'ordre de 82,35 % (6 parmi 34 élèves ont échoué). La prise en charge de la composition de deux relations additives par le schéma n'a assuré cette fois-ci qu'une réussite de l'ordre 41,18 %. (20 parmi 34 élèves ont échoué). Avec un schéma à l'appui, et contre toute attente, les élèves éprouvent plus de difficultés de gérer une composition de deux relations additives que de gérer une composition de deux relations multiplicatives.

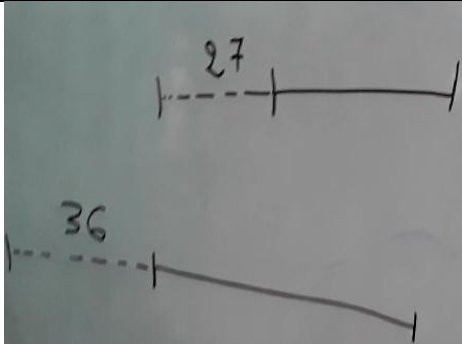
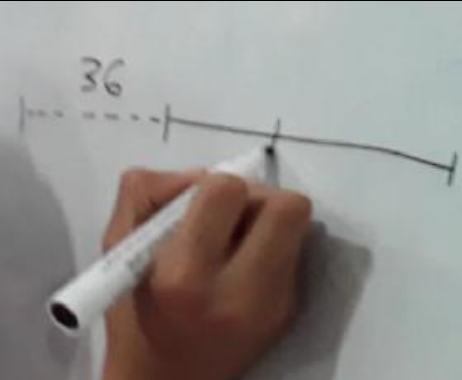
D'autre part, aucun élève n'a emprunté la trajectoire de résolution qui considère le segment qui représente le nombre de billes de Sara comme *unité graphique*. Ce qui conforte une fois de plus nos analyses précédentes qui postulent que la deuxième trajectoire de résolution (s'appuyer sur l'*unité graphique* qui représente la grandeur moyenne) est la plus coûteuse en termes de connaissances mobilisées. Pour trouver directement le nombre de billes de Sara il faut mobiliser d'une façon concomitante une addition et une soustraction suivies d'une division :

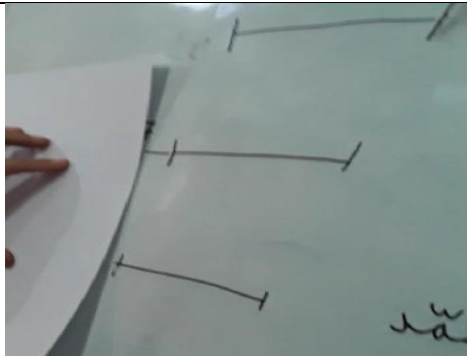
$$\text{Nombre de billes de Sara} = \frac{198 + 27 - 36}{3} = 63.$$

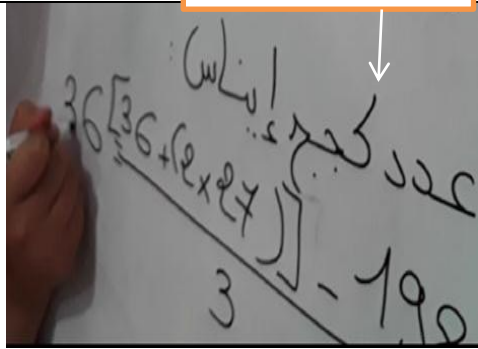
iii. Consolidation de nos attentes au niveau de la production et de l'interprétation du schéma associé au problème posé

L'enseignant intervient alors pour rappeler la règle régie par le micro-contrat codé **I_P_G** et ferme la porte à certaines des trajectoires non fructueuses pourtant empruntées par certains élèves initialement. L'enseignant impose la trajectoire à suivre dans la résolution du problème, puis procède à un étayage du traitement de la « composition » dans le registre graphique qui fait apparaître qu'au-delà d'un ajout à un segment représentant la grandeur correspondant à la part de Sara dans le cas présent pour représenter la part de Mohammed, il faut reporter sa représentation graphique faisant apparaître sa relation avec la part d'Inès – c'est précisément ce traitement dans le registre graphique qui prend en charge la composition des deux relations additives en faisant apparaître la part de Mohammed comme celle d'Inès à laquelle nous ajoutons deux valeurs données (27 et 36) (transcription 6 A):

1	P	Qu'elle est la plus petite part ? Anwar...	
2	Anwar	Inès !	
3	P	La part d'Inès, oui. Qui sort au tableau pour représenter la part d'Inès ? Yakin, tu sors au tableau ?	
4	Yakin	En train de schématiser la part d'Inès.	
5	P	La part d'Inès est en relation avec qu'elle part ?	
6	La totalité des élèves	La part de Sara !	
7	P	Et c'est quoi cette relation ?	
8	Adam	La part d'Inès est moins grande que celle de Sara de 27...	
9	P	Ok, continue Yakin !	
10	Yakin	En train de schématiser la part de Sara.	
11	P	Et la part de Sara est en relation avec qu'elle part ? Omar...	

12	Omar	La part de Sara est moins grande que celle de Mohammed de 36...	
13	P	Représente ça Yakin !	
14	Yakin	Représente la part de Mohammed.	
15	P	Y-a-t-il quelque chose de manquant sur ce schéma ?	
16	Yakin	Réaction immédiate de Yakin, elle rajoute le segment représentant les 27 billes sur la part de Mohammed.	
17	P	J'ai remarqué tout à l'heure que quelques élèves, qui n'ont pas rajouté ce segment dans la part de Mohammed, se sont trompés. Si on ne représente pas ce segment, on risque d'oublier sa valeur dans les opérations.	
18	P	Il y a quelque chose d'autre de manquant...	
19	Quelques élèves	Le total, 198...	

20	P	Malek, au tableau. Pour trouver la part d'Inès, que fait-on ? Comment peut-on exploiter ce schéma ?	
21	Malek	Du nombre total, je retranche les différences...	
22	P	Et c'est quoi ces différences ?	
23	Malek	27 et 36 ...	
24	P	Que 27 et 36... ?	
25	Quelques élèves	Communiquent la réponse sans autorisation.	
26	P	Laissez la parler !!	
27	Malek	2 fois 27...	
28	P	Pour mieux comprendre la suite, prend une feuille et cache les différences, qu'est-ce qu'il reste ?	Essayer de ramener la résolution du problème à une simple comparaison d'états (comparer 3 fois le nombre de billes d'Inès et 198 billes).
29	Malek	3 Parts.	
30	P	Et chaque part est égal à quoi ?	
31	Malek	À la part d'Inès...	
32	P	Donc après avoir retranché ces différences, que dois-je faire pour trouver la part d'Inès ?	
33	Malek	Je divise par trois.	

34	P	Ecris l'opération correspondante à tout ça !	
35	Malek	En train de trouver correctement le nombre de billes d'Inès.	
36	P	La suite est facile !	

3. 3^{ème} séance

La troisième expérimentation a été menée avec deux classes :

La **6A** : 16 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Privée les Collines, Kasserine. (23 mai 2019 : 60 mn de 8h à 9h).

La **6C** : 19 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Kasserine. (23 mai 2019 : 60 mn de 14h à 15h).

La troisième expérimentation sera consacrée aux 1^{er} et 2^{ème} énoncés-schémas fondamentaux. Le but de proposer ces deux énoncés-schémas dans la même séance est motivé par la double désignation et le changement de l'unité de référence, évoqués dans le Chapitre B, et nécessaires pour résoudre de problèmes en lien avec ces deux énoncés-schémas fondamentaux.

Cette troisième expérimentation comportera deux phases (voir tableau récapitulatif pp. 296-298) :

- une première phase pendant laquelle nous invitons les élèves à représenter une relation de type « ...n fois plus... » puis résoudre un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental ;
- une deuxième phase pendant laquelle nous invitons les élèves à représenter une fois de plus une relation de type $A = \frac{m}{n} B$ où $\frac{m}{n}$ n'est ni une fraction

unitaire ni dans IN, puis résoudre un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental.

a. 1ère phase expérimentée

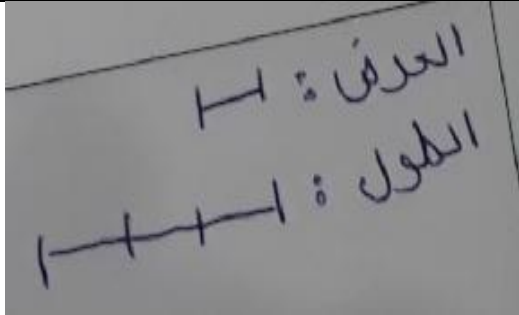
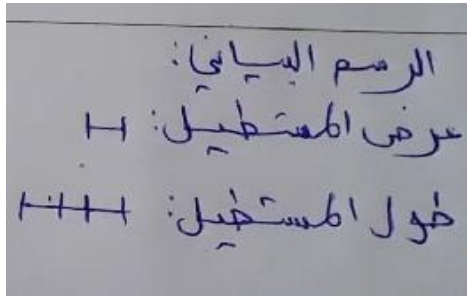
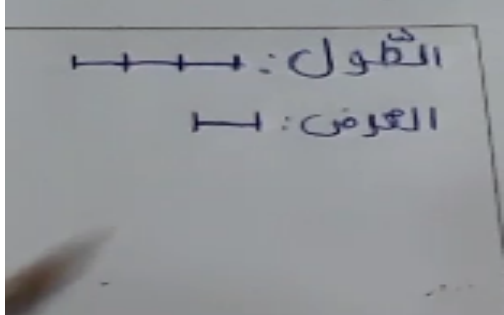
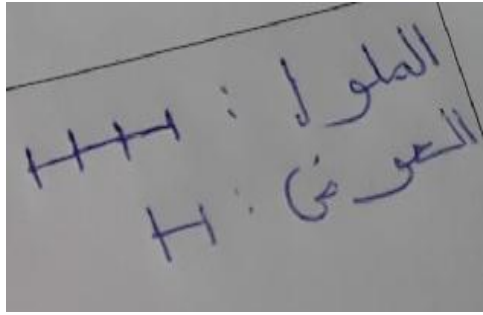
Le but de cette phase est d'amener l'élève à réinvestir la représentation d'une relation de la forme « ...n fois plus... » dans un problème déconnecté en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental pour le résoudre. Pour cela la consigne et le problème suivants sont proposés aux élèves :

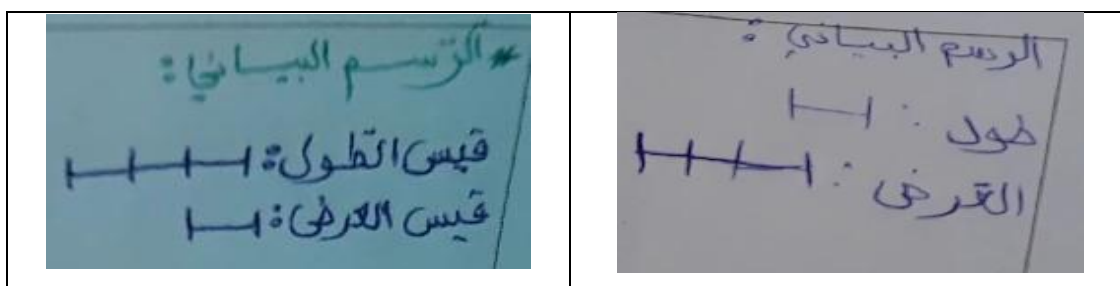
La consigne : « La longueur d'un rectangle est trois fois plus grande que sa largeur. À l'aide d'un schéma, représenter les deux grandeurs. »

Le problème : « Fatma a 72 billes de plus qu'Ahmed. Fatma a 4 fois plus de billes qu'Ahmed. Combien chacun a-t-il de billes? »

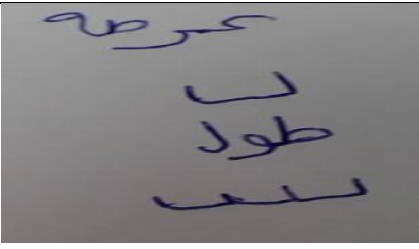
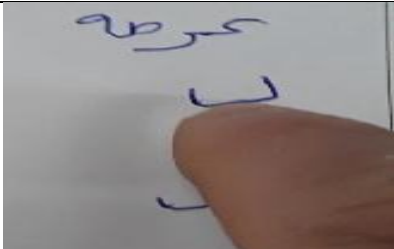
Le taux de réussite avec les élèves de la 6A lors de cette phase était de 87,5 %. Seulement deux élèves ont échoué en résolvant le problème.

La représentation de la largeur et de la longueur était une formalité pour la totalité des élèves des deux classes, dont nous exposons ci-dessus des exemples :

6A	6C
	
	



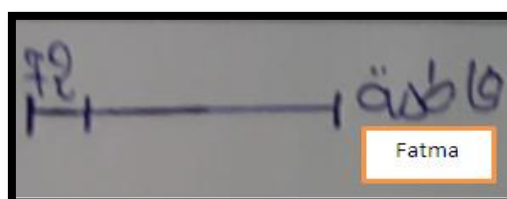
Seule une petite régulation a été opérée avec l'élève Abaidi (élève en difficulté) (transcription 6 C) :

1	Abaidi	« Élève en difficulté ».	
2	P	La part représentant la largeur est plus grande que les autres ?	
3	Abaidi	Non, égale aux autres...	

i. Effets redondants du contrat didactique

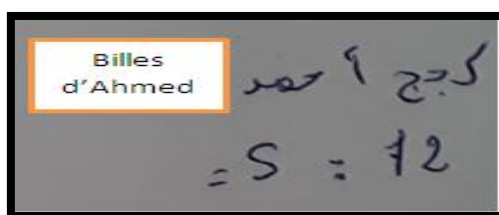
Lors de la résolution du problème posé, des effets de ce que les élèves ont établi pendant les expérimentations précédentes retentissent sur leurs travaux.

L'élève Rayen G. (6A), sous l'effet du méso-contrat régi par la règle **R_{us}a+**, schématise la part de Fatma en se basant sur la relation additive et en ignorant la relation multiplicative :



La mesure m_1 du segment qui représente les 72 billes est nettement moins grande que la mesure m_2 du segment qui représente le reste de billes de Fatma, alors que $m_1 = 3 \times m_2$.

Sous l'effet du méso-contrat régi par la règle **R_V_us** (diviser la somme par le nombre des *unités graphiques*), l'élève Anes (6A) ramène d'une manière erronée la résolution du problème posé qui est en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental à un problème en lien avec notre 3^{ème} énoncé-schéma fondamental :



Il divise 72 par 5 comme si 72 représente la somme et non la différence des deux grandeurs proposées dans le problème. L'élève Anes n'arrive pas à négocier la rupture du méso-contrat régi par la règle **R_Rme_S**.

L'élève Nourane, sous l'effet du méso-contrat régi par la règle **R_S_D** résout le problème correctement et ramène un problème en lien avec notre 2^{ème} énoncé-schéma fondamental à un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental :

The image shows a student's handwritten work with three orange boxes on the left containing labels in French, and arrows pointing to corresponding parts of the student's work in Arabic. The work includes a diagram of a number line with 5 segments, and several calculations:

- Box 1: "Nombre total de billes" points to the calculation $72 \times 5 = 360$.
- Box 2: "Nombre de billes d'Ahmed" points to the calculation $360 - 72 = 288$.
- Box 3: "Nombre de billes d'Ahmed" points to the calculation $288 - 72 = 216$.

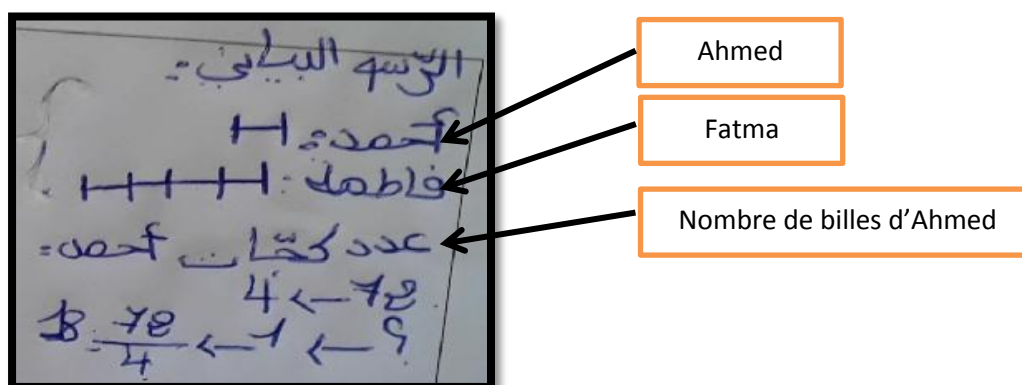
The student's work also includes the final calculation $96 = 72 + 24$ and other Arabic text.

Une fois de plus, Nourane n'arrive pas à négocier la rupture de ce méso-contrat relatif à la résolution d'un problème en lien avec notre 4^{ème} énoncé-schéma fondamental (si $A + B = S$ et $A - B = D$ alors $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$).

Elle a déjà la différence entre les nombres de billes, elle cherche le nombre total de billes en s'appuyant sur la proportionnalité, et applique ce qu'elle a appris lors de la 3^{ème} phase de la 2^{ème} expérimentation en retranchant 72 de 120 puis diviser par deux pour trouver la plus petite part qui n'est autre que le nombre de billes d'Ahmed. Une résolution correcte qui a nécessité un long détour. Notons que le problème « représenter la petite grandeur par une seule *unité graphique* » négocié avec Nourane lors de la première expérimentation ne revient pas. Nourane représente bel et bien le nombre de billes d'Ahmed par une seule *unité graphique*.

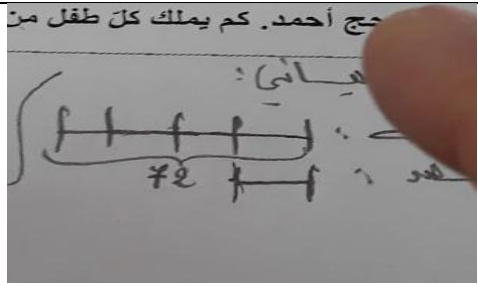
ii. Une double désignation mal négociée

Nous avons montré lors de l'analyse *a posteriori* du questionnaire que la production d'un schéma correct représentatif d'un problème donné ne garantit pas forcément la réussite (résolution correcte du problème). Un constat une fois de plus observable à travers la production de l'élève Malek (6A) :



Elle correspond à 72 billes 4 parts et utilise la proportionnalité pour trouver la valeur d'une part qui correspond au nombre de billes d'Ahmed. Elle confond entre le nombre de billes de Fatma et la différence entre les nombres de billes. Certes qu'une interprétation juste est tributaire d'une représentation correcte, mais une représentation correcte ne garantit pas forcément une interprétation juste.

La confusion de Malek entre le nombre de billes de Fatma et la différence entre les nombres de billes n'est pas un cas isolé, les interactions suivantes entre professeur/élève [Ilef M. (6C)] en attestent (transcription 6 C) :

1	P	72 représente quoi ? (en s'adressant à l'élève Ilef M.)	
2	Ilef M.	Nombre de billes de Fatma.	(réponse identique à celle de l'élève Malek de la 6A)
3	P	Tu en es sûre ? Relie l'énoncé !	
4	Ilef M.	Fatma a 72 billes de plus qu'Ahmed...	
5	P	Elle possède 72, ou elle a 72 de plus ?	(nous la laissons réfléchir)

Une interprétation correcte des schémas produits a été évoquée précédemment :

$1u$ = Billes Ahmed ;

$4u$ = Billes Fatma ;

$3u = 72$ billes (double désignation) : la différence est appréhendée comme 3 *unités graphiques* et 72 billes, ce qui permet de trouver la valeur d'une *unité graphique* :

$$1u = \frac{72}{3} ;$$

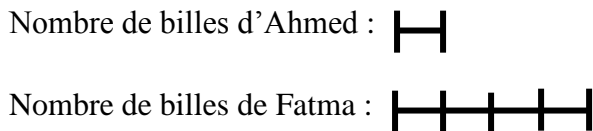
Désigner la valeur de l'*unité graphique* comme étant égale à $\frac{1}{3}$ de 72 billes à $\frac{1}{1}$ nombre de billes d'Ahmed permet de trouver ce dernier nombre.

Enfin substitution de la valeur de $1u$ dans $4u$, nous trouvons $24 \times 4 = 96$ – Soit le nombre De billes de Fatma.

Les élèves éprouvent des difficultés à mettre en œuvre cette double désignation, surtout les élèves de la 6C. Le taux de réussite lors de cette phase avec cette classe est de moins de 20 %. Trois élèves ont produit des schémas corrects sans pouvoir

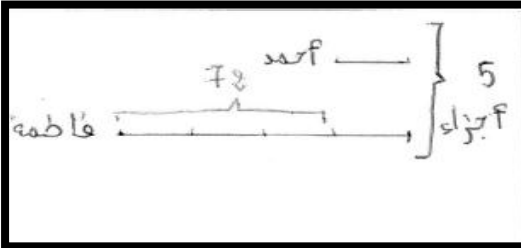
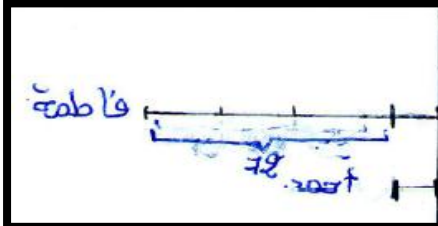
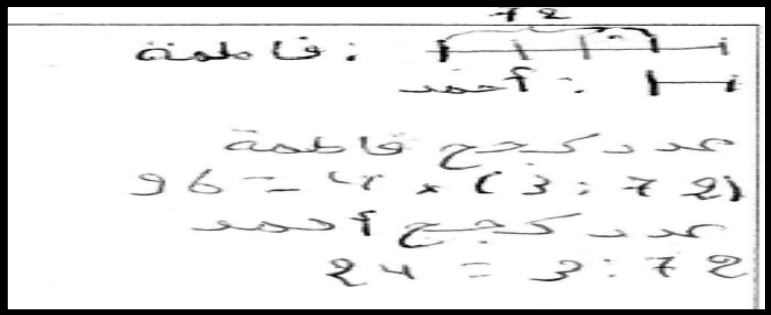
résoudre le problème, et cinq élèves ont produit des schémas partiellement corrects sans même pouvoir entamer une procédure de résolution du problème :

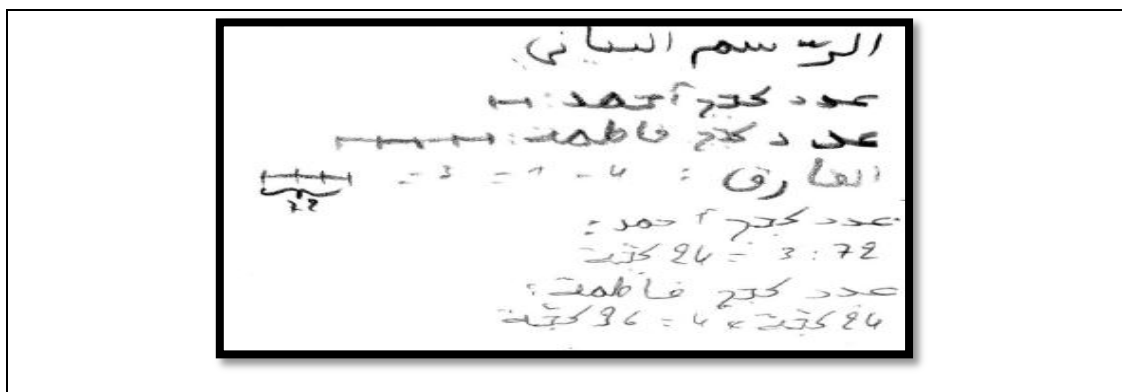
Schéma partiellement correct :



Un schéma incomplet au niveau de sa légende. Les 72 billes, donnée importante et nécessaire pour la suite de la résolution du problème, ne figure pas comme légende du schéma.

Par ailleurs, cette double désignation a été mise en œuvre correctement par une partie des élèves. Nous exposons quelques exemples ci-après :

6A	
	<p style="text-align: right;">عدد كجج فاطمة : 72</p> <p style="text-align: right;">$24 = 3 : 72$</p> <p style="text-align: right;">عدد كجج فاطمة :</p> <p style="text-align: right;">$96 = 4 \times (3 : 72)$</p>
	<p style="text-align: right;">عدد كجج فاطمة :</p> <p style="text-align: right;">$24 = 3 : 72$</p> <p style="text-align: right;">عدد كجج فاطمة :</p> <p style="text-align: right;">$96 = 4 \times (3 : 72)$</p>
6C	
	



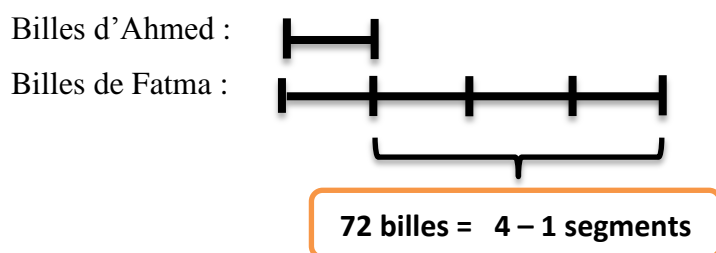
La première production de l'élève Med Adam de la 6C montre que ce dernier maîtrise parfaitement les connaissances qui relèvent de la double désignation. Il trouve directement le nombre de billes de Fatma sans passer par le nombre de billes d'Ahmed. Il divise 72 par 3 parce qu'il voit la valeur d'une *unité graphique* comme $\frac{1}{3}$ de 72, puis il multiplie cette valeur par 4 parce qu'elle est d'emblée désignable comme le $\frac{1}{4}$ du nombre de billes de Fatma.

iii. Installation du méso-contrat régi par la règle R_Rme_D

Dans le problème posé on nous donne :

- nombre de billes de Fatma = 4 fois le nombre de billes d'Ahmed ;
- la différence entre les deux nombres = 72 billes.

Le schéma segmentaire correspondant au problème est le suivant :



La différence est appréhendée comme 72 billes et comme $4 - 1 = 3$ segments dans le registre graphique, ce qui permet à travers cette double désignation de trouver la valeur d'une *unité graphique* $u = 72 : 3 = 24$ billes – qui coïncide avec le nombre de billes d'Ahmed.

L'enseignant prend une initiative voulant inviter les élèves à réfléchir sur une classe de problèmes de ce type (problèmes en lien avec le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental), et installer un contrat **R_Rme_D** : construction d'une formule ou d'un processus généralisé de calcul : *Si on nous donne la différence D de deux grandeurs et si l'opérateur qui relie ces deux grandeurs est un entier, alors la petite grandeur est égale à la différence D divisée par l'opérateur – 1.*

(transcription 6 A) :

1	P	Qu'est ce qu'on déduit à travers ce schéma ?	
2	Adam	3 parts représentent 72 billes, pour trouver le nombre de billes d'Ahmed, on divise 72 par 3.	
3	P	Très bien !	
4	P	On a dit que Fatma a 4 fois plus de billes qu'Ahmed, la différence est représentée par combien de parts ?	
5	les élèves	trois !	
6	P	Et dans la consigne, La longueur d'un rectangle est trois fois plus grande que sa largeur, la différence entre les deux grandeurs est représentée par combien de parts ?	
7	Les élèves	Deux !	
8	P	Y-a-t-il une remarque ?	
9	Yakin	On divise par 4 – 1 ou 3 – 1	
10	Aness	On retranche toujours « 1 » de la donnée du problème ...	
11	P	C'est ça...Le nombre des parts qui représentent la différence entre les	

		deux grandeurs est toujours égal à la donnée du problème qui vient juste avant le mot « fois », moins le « 1 ».	
--	--	---	--

b. 2ème phase expérimentée

Le but de cette phase est d'amener les élèves à :

- mettre en schéma un problème en lien avec notre 1^{er} énoncé-schéma fondamental dont la relation multiplicative qui relie les deux grandeurs de ce problème est fractionnaire non unitaire ;
- apporter une explication à l'inversion du rapport pour résoudre un tel problème (si $A = \frac{m}{n} B$ alors $B = \frac{n}{m} A$).

Pour cela, la consigne et le problème suivant sont posés aux élèves :

La consigne : « À l'aide d'un schéma, représenter les deux grandeurs de cette égalité : Distance parcourue = $\frac{3}{7}$ Distance totale. »

Le problème : « Pour visiter sa mère, Sonia a parcouru dans un premier temps 180 km, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de la distance qui sépare sa maison de la maison de sa mère. Trouvez la distance totale qui sépare le domicile de Sonia de celui de sa mère. »

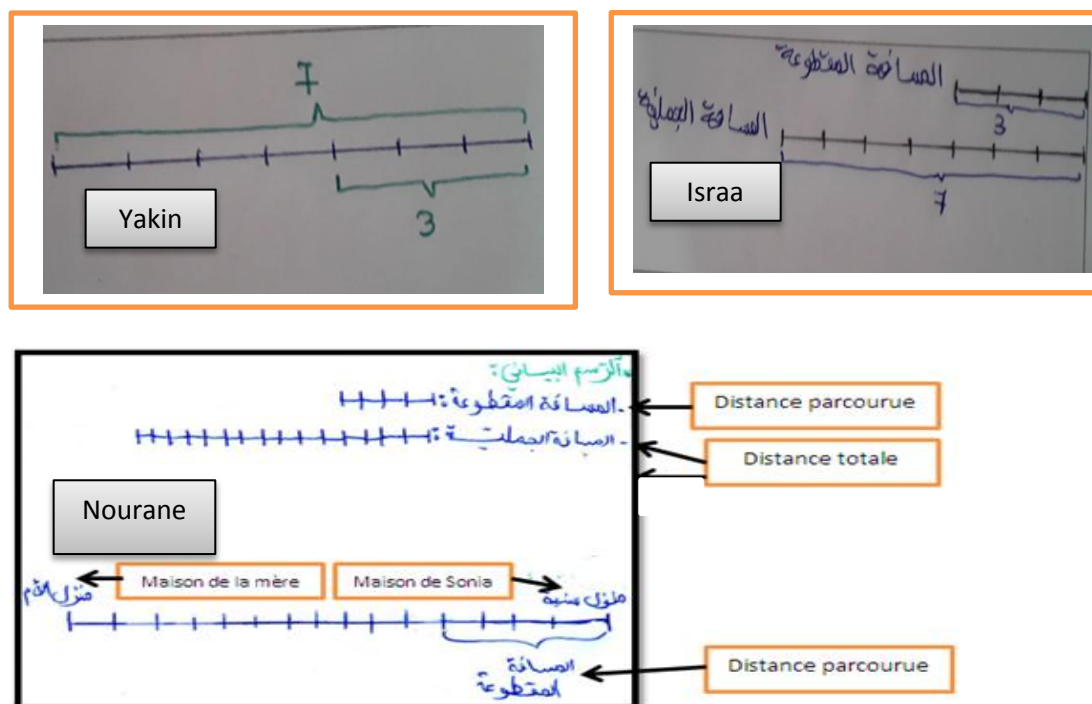
i. Types de schémas et représentations

Pour produire un schéma qui représente la relation de la consigne, la mise en œuvre du méso-contrat régi par la règle **R_us_m_f** est nécessaire (transcription 6 C) :

1	P	Si on correspond à la distance parcourue $\frac{3}{7}$, qu'elle est la fraction correspondante à la distance totale ? Med Adam...	
---	---	--	--

2	Med Adam	$\frac{7}{7}$	
3	P	Donc on représente la distance parcourue par combien de parts ?	
4	Mazen	Par 3 parts.	
5	P	Et on représente la distance totale par combien de parts ?	
6	Omar	7 parts.	

Lors de notre partie théorique, nous avons mentionné les différents types de schémas possibles. Nous avons recensé deux types : schémas séparés, schémas superposés. Yakin propose un schéma superposé comme modélisation de la consigne, Israa en propose un schéma séparé, tandis que Nourane en propose deux schémas : un schéma séparé et un autre superposé en modélisant les deux grandeurs du problème :



Trois élèves seulement n'ont pas respecté l'ordre de représentation. L'énoncé du problème peut expliquer le fait que la partie prépondérante des élèves ont respecté ce micro-contrat cette fois-ci en commençant par représenter la plus petite distance :

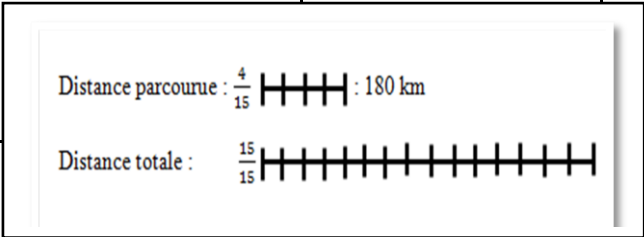
« ... Sonia a parcouru dans un premier temps **180 km**, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de la **distance...** ».

L'ordre de citation des grandeurs à travers l'énoncé a impacté *a priori* l'ordre des représentations des grandeurs en jeu par les élèves.

ii. La résolution du problème posé outillée par un schéma segmentaire : quelles connaissances mathématiques mises en œuvre par les élèves ?

En nous basant sur le chapitre B, nous rappelons brièvement le tableau qui résume les connaissances mathématiques potentiellement mises en jeu dans la résolution du problème outillée par le schéma segmentaire – en distinguant celles qui apparaissent nécessaires pour produire le schéma et celles qui sont convoquées pour l'interpréter :

<p>Distance parcourue = $\frac{4}{15}$ distance totale ;</p> <p>L'unité graphique u : $\frac{1}{15}$ de la distance totale ;</p> <p>Distance parcourue = $4u$;</p> <p>Distance totale = $15u$;</p> <p>L'unité du problème : $\frac{15}{15}$ de la distance totale</p>	<p>Production du schéma</p>
<p>Distance parcourue = $4u$ et 180 km : double désignation qui permet de trouver la valeur de l'unité graphique :</p> $1u = 180 : 4$ <p>$\frac{1}{15}$ de la distance totale = $\frac{1}{4}$ de la distance parcourue</p> <p>Changement d'unité de référence et double désignation fonctionnelle permise dans le registre graphique segmentaire (qui du $\frac{1}{15}$ de la distance totale devient $\frac{1}{4}$ de la distance parcourue) permet de trouver la distance totale = $(180 : 4) \times 15$</p>	<p>Interprétation du schéma</p>



$= \frac{180 \times 15}{4}$ $= \frac{15}{4} \text{ de la distance parcourue}$	
---	--

Pour résoudre ce problème avec le schéma segmentaire ainsi produit, il s'agit de considérer que $\frac{1}{15}$ de la distance totale correspond aussi à $\frac{1}{4}$ de la distance parcourue, ce qui recouvre un changement d'unité de référence correspondant aux grandeurs en jeu dans le problème. Il s'agit de penser une unité commune pour les deux grandeurs (distance totale et distance parcourue) pour exprimer chacune des deux grandeurs à l'aide de cette unité. Il peut se faire ici, et comme évoqué précédemment, en prise d'appui sur le schéma produit via ce que Duval (2017) appelle une double *désignation fonctionnelle* dans le registre graphique segmentaire : l'*unité graphique* correspondant à $\frac{1}{15}$ de la grandeur inconnue (distance totale) apparaissant étant également désignable comme $\frac{1}{4}$ de la grandeur connue (distance parcourue). Ce traitement intrinsèque au registre graphique permet dès lors d'inverser le rapport fractionnaire entre les deux grandeurs en jeu et de conclure que la valeur de la grandeur inconnue (distance totale) correspond à $\frac{15}{4}$ de la grandeur connue (distance parcourue).

La procédure de résolution de l'élève Rayen J. montre qu'il s'est appuyé sur la double *désignation fonctionnelle* et le changement d'unité de référence évoqués ci-dessus pour résoudre le problème posé :

المسافة المقطوعة

المسافة الفاصلة بين منزل شيبه ومنزل أمها

J'ai divisé par 4 pour trouver la valeur d'une part, puis j'ai multiplié par 15 pour trouver la mesure de la distance totale

Distance totale

فيس طول هذه المسافة

(180 / 4) x 15 = 675 كم

قسمتها على 180 على أن نجد قيمة الجزء الواحد ونضرب في 15 لنجد طول كل المسافة

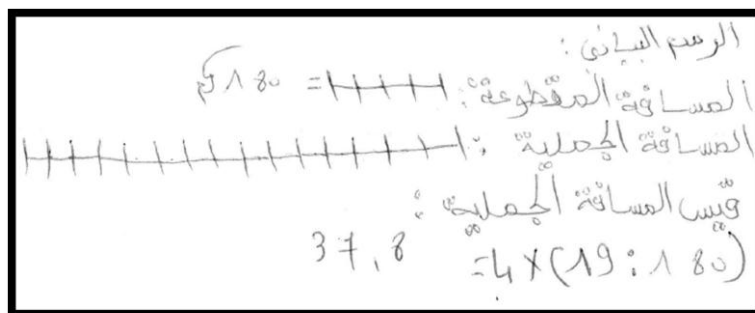
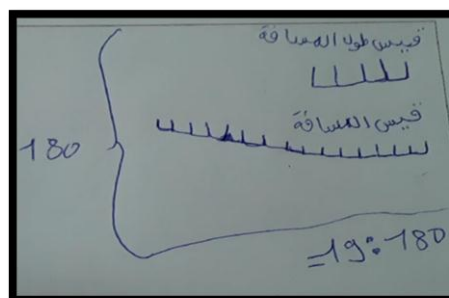
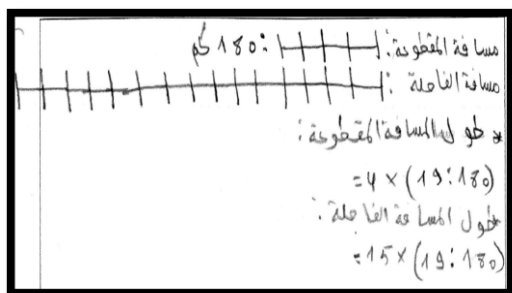
Ci-après quatre procédures de résolutions correctes :

<p>قيس المسافة الفاصلة بين منزل سنية و منزل أمّتها: $675 = 15 \times (4: 180)$</p> <p>1</p>	<p>الزمن البياني: المسافة المقطوعة: المسافة الجملية: قيس طول المسافة الجملية: $4 \leftarrow 180$ $675 = 15 \times 180 \div 4$</p> <p>2</p>
<p>المسافة المقطوعة: المسافة الجملية: قيس طول المسافة الجملية: $675 = 15 \times 45$</p> <p>3</p>	<p>الزمن البياني: المسافة المقطوعة: المسافة الجملية: المسافة الجملية: $4 \leftarrow 180$ $675 = 15 \times 45$</p> <p>4</p>

Même si la procédure de résolution qui s'appuie la proportionnalité renvoie à la base à celle qui s'appuie sur la double *désignation fonctionnelle* et le changement de l'unité de référence, rien ne garantit que les élèves qui se sont appuyé sur la proportionnalité (productions 2 et 4) perçoivent que $\frac{1}{15}$ de la distance totale correspond à $\frac{1}{4}$ de la distance parcourue. Nous pensons que la mise en œuvre de la proportionnalité via la fameuse « règle de trois » se substitue d'une façon automatique à la double *désignation fonctionnelle* et au changement de l'unité de référence sans que les élèves maîtrisent ces connaissances qui sont derrière la proportionnalité.

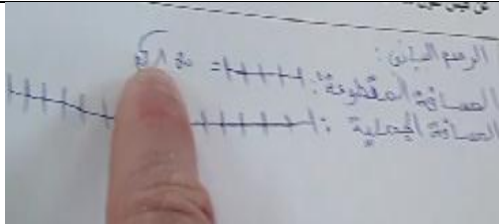
iii. Méso-contrat d'interprétation et effet non productif

Sous l'effet du méso-contrat d'interprétation régi par la règle **R_V_us** (diviser une donnée du problème par le nombre total des *unités graphiques* pour trouver la valeur d'une *unité graphique*), quelques élèves n'arrivent pas à négocier la rupture de ce méso-contrat. Les trois productions des trois élèves Kaouther, Abaidi et Ichrak en attestent :



Les trois élèves arrivent à schématiser correctement le problème (hormis les 180 km mal placés dans le schéma de l'élève Abaidi), et au lieu de diviser 180 km par 4 pour trouver la valeur d'une *unité graphique* puis multiplier par 15 pour trouver la valeur de la distance totale, les trois élèves divisent 180 par 19. Sur ce, la seule explication plausible de ces actions est l'effet du méso-contrat évoqué ci-dessus. Même à travers un pilotage didactique, l'élève Kaouther n'arrive pas à négocier la rupture de ce méso-contrat (transcription 6 C) :

1	P	Ton schéma est juste, Les 180 km représentent combien de parts ?	
2	Kaouther	4 parts.	
3	P	Et qu'est-ce qu'on nous demande de trouver ?	
4	Kaouther	La longueur de la distance.	
5	P	Qu'elle distance ?	
6	Kaouther	Qui sépare les deux maisons ?	

7	P	C'est-à-dire la distance parcourue ou la distance totale ?	
8	Kaouther	La distance parcourue.	
9	P	Tu l'as déjà !!	
10	Kaouther	La distance totale.	Rien ne prouve qu'elle ait compris. Ça se peut que sa réponse fût par élimination.
11	P	Elle est représentée par combien de parts ?	
12	Kaouther	15	
13	P	Comment maintenant à partir de ton schéma, on peut trouver la mesure de cette distance totale ?	
14	Kaouther	Je divise 180 par 19 et je multiplie par 4.	
15	P	Nous Laissons l'élève réfléchir !	

L'effet du contrat (**R_V_us**) est tellement déterminant qu'une des deux élèves n'arrive pas à négocier une rupture avec cette règle de contrat même par le biais d'un pilotage didactique voir même un guidage entrepris par le professeur. L'effet du contrat prend le dessus sur toute tentative de « l'enseignant régulateur »⁴² pour réorienter l'élève à une interprétation correcte de son propre schéma correctement produit.

Au fur et à mesure que nous progressons dans les expérimentations, des retentissements des effets des contrats viennent entraver ou bien aider les élèves à progresser dans leurs différentes résolutions de problèmes. Une fois de plus, et à

⁴² Au sens de Bloch (2006).

cause de ces effets de contrat, nous constatons aussi que la production d'un schéma correct représentatif d'un problème ne garantit pas forcément sa résolution de façon correcte.

iv. Initiation de la mise en œuvre de la double désignation fonctionnelle et du changement d'unité de référence

(transcription 6 C)

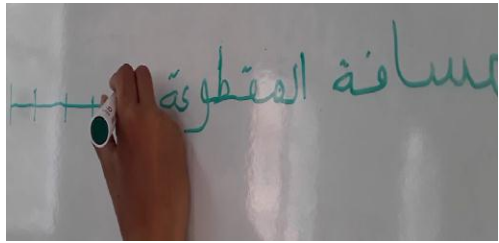
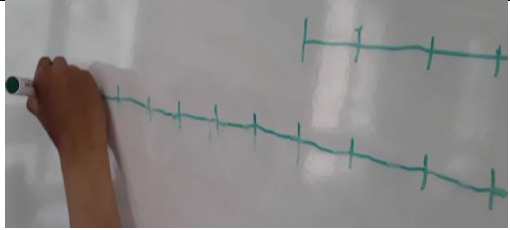
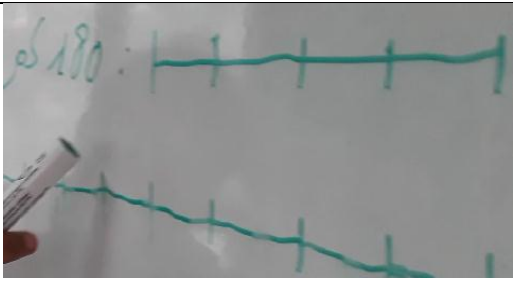
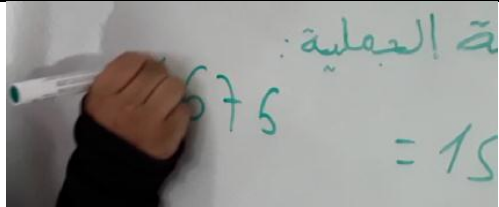
1	P	On va commencer par quoi Mohammed ?	
2	Mohammed	La distance parcourue.	(en train de la représenter). 
3	P	Tu veux dire représenter la distance parcourue !	
4	Mohammed	Puis la distance totale.	
5	P	Par combien de parts ?	
6	Mohammed	15 parts.	
7	P	Tu nous expliques comment tu as fait ? Mais avant de commencer, ça manque quelque chose à ton schéma !	
8	Mohammed	180 km	
9	P	Mentionne ça sur le	

		schéma. Maintenant explique ta procédure de résolution.	
10	Mohammed	On divise 180 par 4 pour trouver la valeur d'une part ...	
11	P	Et pourquoi diviser par 4 ?	
12	Mohammed	Pour trouver la valeur d'une part.	
13	P	Tu ne me réponds pas là !	
14	Quelques élèves	Monsieur ! Monsieur !	
15	P	Prends la relève Maysoun !	
16	Maysoun	Parce que 180 km sont représentés par 4 parts, et si on la divise par 4 on trouve la valeur d'une part.	
17	P	Et puis ?	
18	Maysoun	Puis on multiplie par 15 pour trouver la valeur des 15 parts qui représentent la distance totale	
19	P	Très bien ! Termine l'opération de Mohammed.	

20	Maysoun	En train d'écrire le résultat numérique.	
21	P	Donc à quoi est égale la distance totale en termes de fraction par rapport à la distance parcourue ?	
22	Med Adam	$\frac{15}{4}$.	
23	P	Y-a-t-il une remarque ?	
24	Gaieth	C'est l'inverse de la fraction du problème !	
25	P	Très bien, c'est ça !	

L'enseignant opère un retour sur le sens de l'*unité graphique* rendu muet par l'élève qui représente directement avec cette unité les deux grandeurs en jeu – à noter qu'il ne revient pas sur le « 4 unités graphiques » d'ailleurs le considérant sans doute comme une évidence liée à la donnée du problème. Par contre, il s'attarde sur le sens à donner à l'opération « : 4 » qui résulte de l'interprétation de ce schéma en vue de résoudre le problème – l'intervention de Maysoun permettant d'explicitier une partie des connaissances en jeu en lien avec la double *désignation fonctionnelle* liée au schéma – même si la mise en relation avec la relation fractionnaire multiplicative donnée initialement dans le problème reste « muette ».

Notons aussi que l'intervention de Gaieth à propos du macro-contrat de généralisation reste elle aussi « muette » – l'inversion du rapport fractionnaire n'a pas fait l'objet d'une connaissance pouvant se substituer au futur à la démarche de résolution outillée par la schématisation.

4. 4^{ème} séance

La quatrième expérimentation a été menée avec deux classes :

La **6A** : 16 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Privée les Collines, Kasserine. (24 mai 2019 : 45 mn de 8h à 8h 45 mn).

La **6C** : 19 élèves de la sixième année de l'école de base. École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Kasserine. (24 mai 2019 : 45 mn de 14h à 14h 45 mn).

C'est une expérimentation qui vise une progression vers la complexité. Une tentative d'extension au-delà des énoncés fondamentaux initialement envisagés. Un problème déconnecté qui contient trois grandeurs inconnues (dont les relations entre eux sont : une additive et l'autre multiplicative) est posé aux élèves :

« La surface totale de trois parcelles de terrain est de 2675 m². Sachant que la surface de la première parcelle est égale à $\frac{3}{5}$ de celle de la deuxième et que la surface de la troisième parcelle a 75 m² de plus que la surface de la deuxième, trouvez la surface de chaque parcelle».

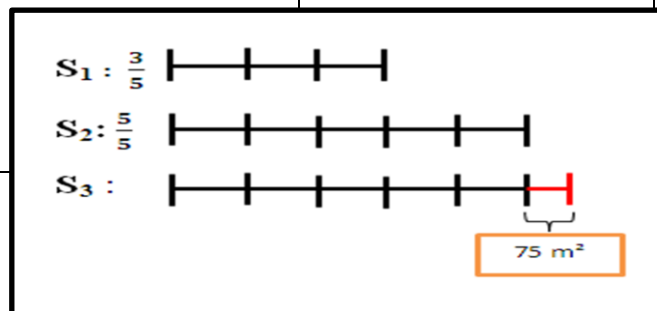
C'est un problème qui nous qualifions de « mixte » à cause de la relation multiplicative qui relie la surface de la première parcelle et celle de la deuxième parcelle et de la relation additive qui relie la surface de la deuxième parcelle et celle de la troisième parcelle.

Nous basant sur ce qui précède, nous commençons par identifier les connaissances mathématiques convoquées *a priori* dans la production et l'interprétation du schéma représentatif de ce problème :

Désignons par S_1 , S_2 et S_3 les surfaces des trois parcelles un, deux et trois :

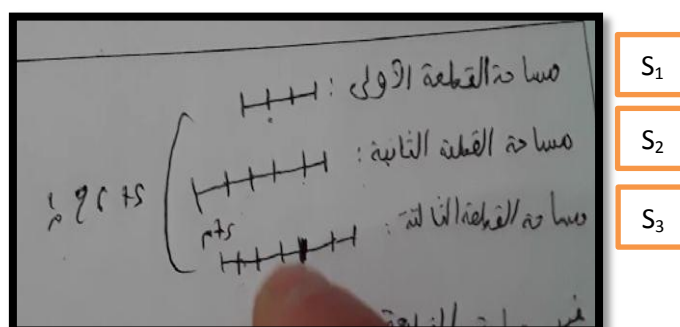
$S_1 < S_2 < S_3$; $S_1 = \frac{3}{5} S_2$; <i>L'unité graphique</i> $u : \frac{1}{5}$ de S_2 ;	
<i>L'unité du problème</i> : $S_2 = 5u$ (u comme unité de compte) ; Traitement de type « Report » – <i>l'unité graphique</i> comme unité de compte reportée 5 fois ;	Production du schéma

<p>$S_1 : 3u$ (u comme unité de compte) ; Traitement de type « Report » – l'unité graphique comme unité de compte reportée 3 fois ;</p> <p>$S_3 = S_2 + 75 = 5u + v$ (v segment représentant 75) ; Traitement de type « somme » des deux segments Légende de la somme des deux segments : $5u$ et v.</p>	
<p>$2675 \text{ m}^2 = 3u + 5u + 5u + v = 13u + v$; $u = (2675 - v) : 13 = 200 \text{ m}^2$; $S_1 = 200 \times 3 = 600 \text{ m}^2$; $S_2 = 200 \times 5 = 1000 \text{ m}^2$; $S_3 = 200 \times 5 + 75 = 1075 \text{ m}^2$.</p>	<p>Interprétation du schéma</p>



a. Des difficultés qui impactent la représentation

Une première difficulté réside dans la différenciation entre *unité graphique* et toute autre unité figurale. L'élève Rayen J. (6A) produit le schéma suivant :



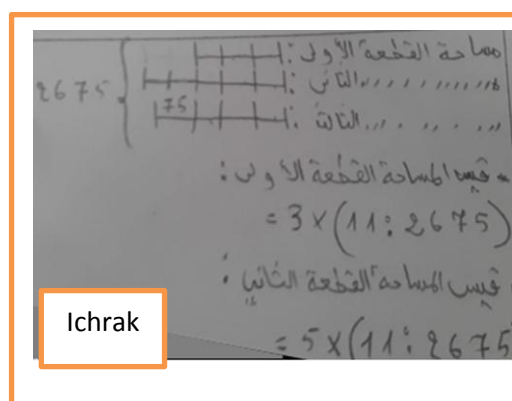
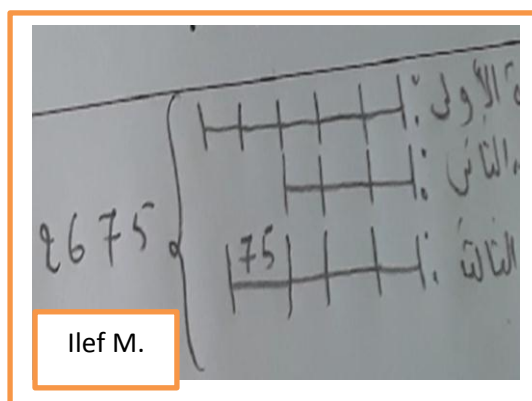
Ce schéma ne différencie pas entre la mesure de l'unité graphique et toute autre mesure que celle de l'unité graphique (ici la mesure du segment qui représente les 75 m^2). Certes que l'élève a correctement résolu le problème, mais à travers son schéma, et en mettant en œuvre le méso-contrat régi par la règle **R_V_us**, une division par 14

serait probable (nous dénombrons dans le schéma 14 petits segments qui paraissent *a priori* égaux).

Quelques exemples d'interactions professeur/élèves à ce sujet (transcription 6 C) :

1	Med Adam (6C)	En train de produire un schéma correct, quoi que la part qui représente les 75 m ² ne doit pas être égale aux autres parts.	
2	P	Toutes les parts sont égales ?	
1	P	Toutes les parts sont égales ? (en s'adressant à Takwa, élève de la 6C).	

Les difficultés qui peuvent impacter la représentation du problème posé par un schéma concernent aussi les représentations des relations qui relient les grandeurs :



L'élève Illef M. (6C) représente la relation « $S_1 = \frac{3}{5} S_2$ » comme étant « $S_2 = \frac{3}{5} S_1$ ». Elle inverse les rôles des deux parcelles à travers son schéma. Par contre l'élève

Ichrak (6C) représente la relation « $S_3 = S_2 + 75$ » comme étant « $S_3 = S_1 + 75$ ». Des telles erreurs garantissent l'échec du fait qu'on ne peut dénombrer que 11 *unités graphiques* à travers chaque schéma. L'interprétation de l'élève Ichrak de son schéma en atteste :

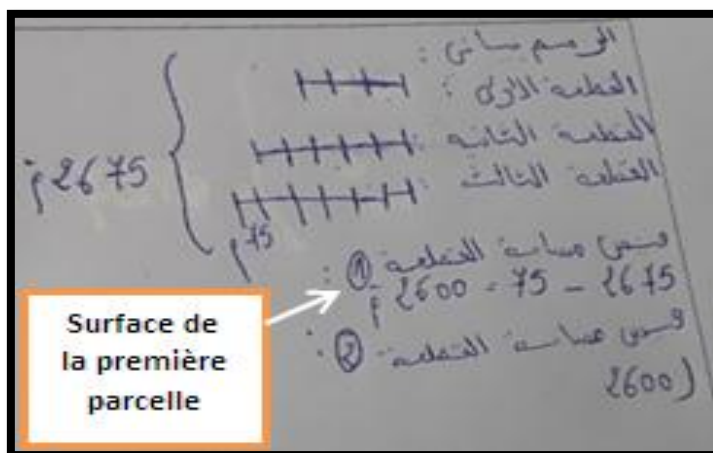
Interprétation de l'élève Ichrak	
S_1	<p>* قياس المساحة القطعة الأولى $= 3 \times (11 : 2675)$</p>
S_2	<p>* قياس المساحة القطعة الثانية $= 5 \times (11 : 2675)$</p>
S_3	<p>* قياس المساحة القطعة الثالثة $= (75 + 2675)$</p>

b. Une production correcte d'un schéma ne garantit pas une interprétation correcte

Nous avons mentionné précédemment que, sous des effets du contrat didactiques, des élèves arrivent à produire des schémas corrects sans pouvoir les interpréter d'une façon correcte. L'élève Moulka (6A) arrive à représenter correctement le problème lors de sa mise en schéma :

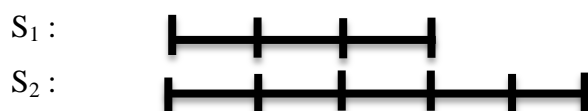
2×11
 3×11
 قياس مساحة القطعة 1
 $200 = 23 : (75 - 2675)$
 قياس مساحة القطعة 2
 $1000 = 5 \times [13 : (75 - 2675)]$
 قياس مساحة القطعة 3
 $1475 = (200 + 1000) - 2675$

Mais lors de son interprétation, elle confond entre l'*unité graphique* et la plus petite grandeur. Elle considère la valeur de la surface de S_1 comme étant égale à la valeur de l'*unité graphique*. L'interprétation de l'élève Omar (6C) de son schéma correct montre que ce dernier ne maîtrise pas aussi les connaissances qui sont derrière les règles qui ont régi sa production :



Tout ce qui pilote les représentations des deux élèves sont les deux règles de contrat :

la mise en œuvre la règle **R_us_m_f** pour représenter les 1^{ère} et 2^{ème} surfaces :



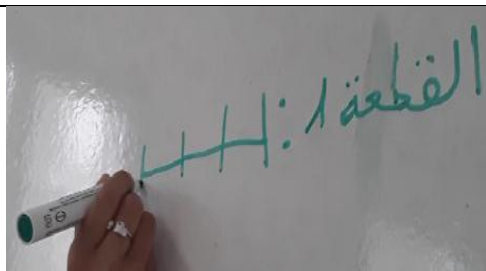
et la mise en œuvre de la règle **R_us_a+** pour représenter les 2^{ème} et 3^{ème} surfaces :


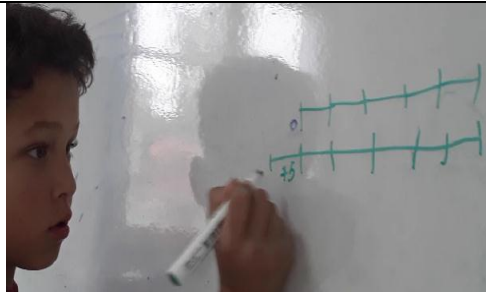
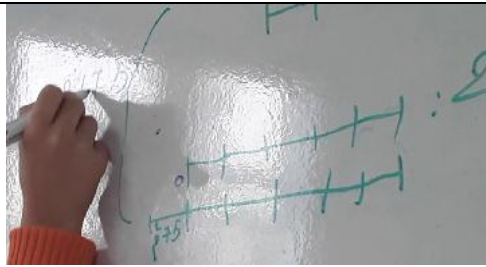


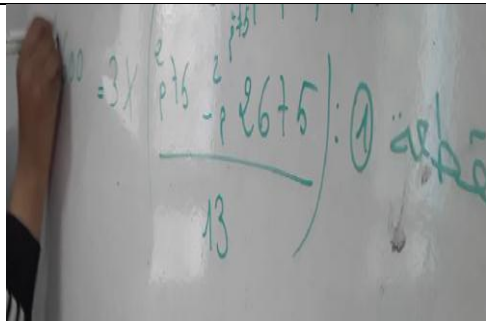
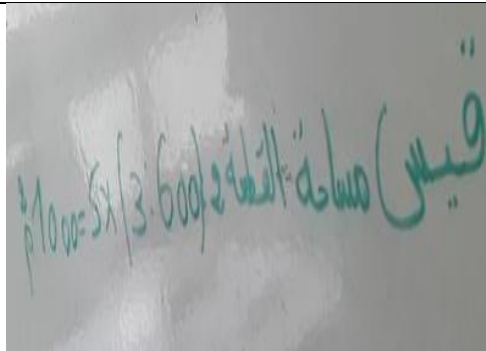
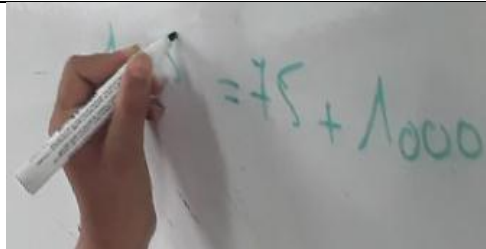
Ce sont des schémas qui répondent à des systèmes d'attentes et qui sont résultats et aboutissements des occasions de la fréquentation récurrente de problèmes à résoudre par le biais de la schématisation.

c. Une mise en commun avec la 6C

La nouveauté en jeu (mise en œuvre des deux règles **R_us_m_f** et **R_us_a+** pour représenter le problème posé) n'a pas représenté de difficulté. Répondre aux règles de contrat qui régissent la production du schéma tout en maîtrisant les connaissances qui sont derrière ces règles a permis une conversion correcte du problème posé du registre de la langue naturelle au registre de la représentation graphique segmentaire. Les interactions suivantes entre professeur/élèves en attestent (transcription 6 C) :

Pour une mise en commun, Ichrak sort au tableau.			
1	Ichrak	En train de schématiser la surface de la 1 ^{ère} parcelle.	
2	P	Pourquoi 3 parts ?	
3	Ichrak	Euh... Euh...	
4	P	Alors... ?	
5	Ichrak	Parce que la deuxième est plus grande.	
6	Quelques élèves	Monsieur, Monsieur...	
7	P	Gaieth au tableau ! Pourquoi on a représenté la surface de la troisième parcelle par 3 parts ?	
8	Gaieth	Monsieur parce qu'elle est égale à $\frac{3}{5}$ la surface de la 2 ^{ème} parcelle !	
9	P	Bien, et la deuxième surface...	
10	Gaieth	Par 5 parts...	
11	P	Et pourquoi ?	
12	Gaieth	Parce que la fraction correspondante à la	Mise en œuvre de la règle d'action R_us_m_f.

		deuxième surface est $\frac{5}{5}$.	
13	P	Bien !	
14	Gaieth	En train de représenter la surface de la deuxième parcelle.	
15	P	Et comment représenter la troisième surface ? Med Adam...	
16	Med Adam	Sort au tableau et représente la surface de la troisième parcelle.	
17	P	Et qu'est-ce qu'il manque encore ? Amel ...	
18	Amel	La surface totale !	
19	P	Au tableau.	
20	Amel	En train de finaliser la légende du schéma.	
21	P	Pour trouver par exemple la surface de la première parcelle, qu'est-ce qu'on fait ? Maysoun au tableau !	
22	Maysoun	Monsieur on retranche 75 de 2675 et on divise par 13 pour trouver la valeur d'une seule part...	

23	P	C'est ça, en éliminant l'intrus 75, la tâche devient plus facile, les parts restantes sont toutes égales !	
24	Maysoun	Traduit ce qu'elle vient d'expliquer par l'opération adéquate.	
25	Med Yesser	Se charge de trouver la surface de la 2 ^{ème} parcelle en s'appuyant sur l'inversion du rapport : $S_2 = \frac{5}{3} S_1$	
26	P	Peut-on trouver la surface de la deuxième parcelle autrement ?	
27	Amel	$\frac{(2675-75)}{13} \times 5$	
28	P	Oui, c'est bien !	
29	Ilef M.	Se charge de finir la résolution du problème.	

La mobilisation des clauses de contrat nécessaires pour produire le schéma représentant le problème posé et la maîtrise des connaissances qui sont derrière ces règles de contrat ont permis à résoudre le problème posé, et ce, pour la majorité des élèves.

VI. Conclusion

La partie expérimentale de notre travail de thèse, liée au questionnaire et à la séquence mise en œuvre dans deux classes a fait apparaître plusieurs phénomènes.

Elle a tout d'abord confirmé un certain nombre d'hypothèses quant à la complexité des problèmes associés à nos énoncés-schémas fondamentaux et sur les connaissances mises en jeu dans leur résolution outillée par la schématisation segmentaire.

Ainsi retenons que les problèmes associés au 1^{er} énoncé-schéma fondamental qui font intervenir un changement d'unité associé à une double *désignation fonctionnelle*, liée à une fraction d'une grandeur (choix fait à la fois dans le questionnaire et dans l'expérimentation) paraissent complexes d'autant que les problèmes en lien avec les 3^{ème} et 4^{ème} énoncés-schémas fondamentaux. Cette opération de double désignation (fonctionnelle ou non) a d'ailleurs fait l'objet d'une attention particulière de la part de l'enseignant dans les expérimentations conduites dans les deux classes. Une forme de progressivité liée aux représentations de relations multiplicatives (entières et fractionnaires) entre grandeurs a par ailleurs été au cœur du travail conduit dans la séquence expérimentale – du fait notamment des contrats didactiques possiblement en jeu (nous revenons ci-après) – permettant par là même à tous les élèves d'entrer aisément dans les changements d'unités relatifs sous-jacents aux problèmes (en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental) nécessitant la composition de relation de comparaison multiplicative entre grandeurs. Force est d'avouer que par contre, les relations de comparaison additive entre grandeurs n'ayant pas été abordées de manière aussi progressive dans le cadre de cette expérimentation, la composition de ces relations a posé davantage de difficultés toutefois assez rapidement réglées in situ.

En l'absence d'un tel questionnement, les interventions de l'enseignant lors des séances expérimentées ont d'ailleurs parfois rencontré des résistances de la part d'élèves du fait de l'absence d'argument dans ce sens. Pour autant il faut bien avouer que la question ne paraît pas si aisée qu'elle peut le paraître car dans le même temps, il s'agit pour ces mêmes élèves de s'approprier parfois les relations additives et multiplicatives en jeu, un choix d'*unité graphique* « imposé » participant sans doute de fait à permettre cette appropriation : le sens d'une *unité graphique* correspondant à une grandeur en jeu ou à une fraction de cette grandeur – elle-même à considérer

comme unité dans les conceptualisations visées. À ce sujet, le rapprochement opéré entre les productions d'élèves français « hors contrat » de ce type et celles d'élèves tunisiens de même âge en réponse au questionnaire en lien avec le 1^{er} énoncé-schéma fondamental. Des phénomènes également observés lors de l'expérimentation en lien avec d'autres énoncés-schémas fondamentaux éclairent le fait que des schématisations de type segmentaire peuvent participer à la construction de signification de la fraction d'une grandeur (considérée comme *unité du problème*) et de son inversion...

S'agissant cette fois des méso-contrats de généralisation, nous avons vu que des formules pouvaient être construites en prise d'appui sur et même prendre le pas sur la démarche de schématisation segmentaire (quand les élèves préfèrent appliquer directement de telles formules). Si nous avons pu observer des tentatives de l'enseignant expérimentateur dans ce sens qui ont trouvé une forme d'écho auprès de certains élèves produisant les généralisations attendues, il est difficile à ce stade de la réflexion conduite, le rôle que pourraient jouer de telles formules – qui peuvent parfois être appliquées directement pour certaines d'entre elles par les élèves sans garantie stricte de la signification construite en lien avec ces formules. Peuvent-elles jouer le rôle de mémoire des structures de problèmes identifiées sur la base des schémas segmentaires ? Si oui, sous quelles conditions ?

La séquence expérimentale a largement montré que les connaissances nécessaires pour produire un schéma sont différentes de celles nécessaires pour le produire. Dans ce sens, nous avons mis en avant que la production d'un schéma correct représentatif d'un problème n'est pas forcément source de réussite.

Chapitre E

Conclusion générale

Perspectives

I. Conclusion générale

Dans le cadre de notre thèse, nous nous sommes intéressés aux connaissances et savoirs mathématiques relatifs à la résolution de problèmes arithmétiques outillée par un type de schémas en particulier : les schémas de type segmentaires (qualifiés par d'autres que nous de « modèles barres », de « modèles graphiques », etc.) qui permettent de représenter graphiquement des relations entre des grandeurs ou des nombres et d'utiliser ces représentations en vue de résoudre des problèmes de manière arithmétique.

Nous structurons notre conclusion générale en trois parties principales :

- la première partie se centre sur les connaissances et savoirs mathématiques mis en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation segmentaire. Nous reviendrons sur les résultats de notre thèse et sur la nature de ces connaissances et savoirs, considérés au regard de champs d'énoncés de problèmes et de schémas segmentaires, modélisés par des énoncés-schémas fondamentaux ;
- la deuxième partie se centre sur l'étude de conditions d'enseignement des connaissances et savoirs mathématiques mises en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation segmentaire. En prise d'appui sur la partie précédente, nous reviendrons sur des résultats de la thèse qui éclairent des conditions d'enseignement de ces connaissances et savoirs mathématiques, notamment dans leurs mises en relation avec d'autres domaines d'étude mathématiques (grandeurs, arithmétique, formules algébriques...);
- enfin dans une troisième et dernière partie de cette conclusion, nous reviendrons sur des conditions d'apprentissage et d'enseignement des connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques, outillée par la schématisation segmentaire. Il s'agira de revenir sur le rôle de(s) contrat(s) didactique(s) dans la mise en fonctionnement de telles connaissances et savoirs par les élèves dans la résolution de problèmes donnés.

1. Connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes – outillée par la schématisation segmentaire

Un des premiers enjeux de notre travail de thèse était d'élucider la question des connaissances et des savoirs mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire. Au terme de ce travail de recherche, les différentes analyses menées le long de ce travail ont fait ressortir les résultats suivants :

Une des difficultés auxquelles les élèves sont confrontés lors de la résolution des problèmes arithmétiques est la composition de relations de comparaison d'états (additive ou multiplicative). Certains des problèmes modélisés par des énoncés-schémas fondamentaux dans le chapitre B de notre thèse recouvraient possiblement des compositions de relations de comparaison additives, multiplicatives ou « mixtes » entre grandeurs. Ces compositions de relations de comparaison appréhendées en lien avec les champs conceptuels additif et multiplicatif étaient considérées comme complexes par Vergnaud (1993). Nous avons montré en quoi par des traitements internes communs de type reports ou ajouts dans le registre graphique, associés à des changements d'unités ou à des jeux sur des *unités relatives* au sens de Chambris (2021) (liées à l'*unité graphique*) permettent de prendre en charge cette complexité.

De la même manière, en prise d'appui sur l'opération de double *désignation fonctionnelle* d'une grandeur dans le registre graphique au sens de Duval (2017), d'autres problèmes arithmétiques convoquant des relations multiplicatives fractionnaires peuvent être résolus à l'aide de l'outil schéma segmentaire.

Les changements d'unités, ainsi permis au sein du registre graphique via la démarche de schématisation segmentaire, peuvent potentiellement participer à l'apprentissage de connaissances liées à la résolution de problèmes arithmétiques complexes, mais aussi à la conceptualisation de relations multiplicatives et additives entre les grandeurs en jeu dans ces problèmes. Nous avons notamment pu montrer en quoi le changement d'unité en jeu dans la résolution d'un problème arithmétique – liée à l'inversion d'une relation multiplicative fractionnaire – constitue d'après d'autres auteurs (Chambris et al., 2021 ; Thompson & al., 2014) une connaissance qui

constitue potentiellement une clé pour conceptualiser la notion de fraction d'une grandeur.

Pour autant, des questions se posent sur ces potentialités de la démarche de schématisation segmentaire. Par exemple les choix d'*unités graphiques* à opérer, [associés à des traitements internes au registre de la langue naturelle (pour inverser des relations additives ou multiplicatives exprimées dans ce registre) et à des conversions du registre de la langue naturelle au registre graphique] posent parfois question au regard du coût des connaissances arithmétiques convoquées dans la résolution de tels problèmes. De tels choix peuvent de fait transformer les structures de problèmes arithmétiques telles que considérées initialement par Bednarz & Janvier (1994). Ils peuvent aussi impliquer de nouvelles connaissances arithmétiques dans la résolution de tels problèmes outillée par les schémas segmentaires : s'agissant par exemple de l'augmentation d'un (ou plusieurs) terme(s) d'une valeur donnée – à considérer comme augmentant à son tour la valeur de la somme d'autant.

2. Conditions d'enseignement des connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes - outillée par la schématisation segmentaire

Les apprentissages liés aux unités et aux changements d'unités décrites ci-avant (*unités relatives, unités graphiques et unités des problèmes*) ne peuvent se faire que sous certaines conditions qu'il nous a tenu à cœur d'étudier dans cette thèse. Tout d'abord nous avons cherché à appréhender des conditions d'enseignement des connaissances et savoirs mathématiques ainsi identifiés dans différentes institutions didactiques : au travers de l'analyse de manuels d'arithmétique visant l'enseignement de la schématisation segmentaire comme outil de résolution de problèmes arithmétiques, et via l'étude de réponses d'élèves tunisiens qui ont reçu pour certains d'entre eux un tel enseignement.

Certains de nos résultats tendent à prouver d'une part que si certains savoirs mathématiques sont exposés et institutionnalisés en lien avec la démarche de schématisation segmentaire dans la résolution arithmétique de problèmes, ils ne correspondent pas nécessairement aux connaissances mathématiques que nous avons

identifiées en amont : principalement liées à un travail sur les unités (relatives) et sur des changements d'unités. Certains des savoirs institutionnalisés dans les manuels étudiés prennent parfois la forme de formules (liées à la définition d'une grandeur, à l'inversion d'une fraction...) prenant parfois appui sur des généralisations liées aux schémas segmentaires. Le plus souvent les autres connaissances enseignées sont exposées de manière ostensive ou quasi-ostensive sur la base d'exemples donnés de problèmes résolus ou donnés à résoudre de manière « guidée ». Quoiqu'il en soit, une part des connaissances identifiées en amont (dans le chapitre B de notre thèse) dans l'usage de schémas segmentaires pour résoudre des problèmes arithmétiques semblent bel et bien demeurer dans l'implicite en étant convoquées dans les exemples ainsi mis à l'étude de manière transparente. Nous avons fait l'hypothèse que ce caractère implicite de certaines des connaissances en jeu pouvaient contribuer à créer des systèmes d'attentes réciproques des comportements d'élèves et d'enseignants dans l'enseignement de la démarche de schématisation segmentaire, tout aussi implicites que nous avons modélisés par des contrats didactiques (dans le chapitre D de notre thèse). De tels contrats didactiques peuvent également contribuer à rendre complexe l'identification de ce qui peut fonder une progressivité dans l'enseignement de telles connaissances, qui semble davantage prise en charge dans les manuels étudiés par des efforts de catégorisation de problèmes arithmétiques mis à l'étude (qui diffèrent entre les manuels anciens et le manuel plus contemporain de la "méthode Singapour") que par un cheminement organisé lié à ces connaissances. Nous avons toutefois noté dans un des manuels la présence de tâches intermédiaires qui ont d'ailleurs nourri notre réflexion dans la conception de certaines des tâches envisagées dans la partie expérimentale de la thèse.

Nous avons par ailleurs noté que certains problèmes arithmétiques ainsi donnés en exemple pouvaient, de par leur structure au sens de Bednarz & Janvier (1994), s'avérer « en rupture » avec les systèmes d'attentes ainsi potentiellement créés. Une rupture soit dans les choix d'*unités graphiques* à opérer pour produire les schémas segmentaires, soit dans les interprétations à faire de tels schémas sans que ces « ruptures » ne soient négociées de manière explicite : rendant muet ce qui peut relever de choix faits pour rendre une résolution arithmétique plus « économique », parfois en prise d'appui sur des connaissances nouvelles liées à l'interprétation d'un

schéma, rendues toutes aussi muettes (comme celle liée à l'augmentation d'un terme d'une somme d'une valeur donnée décrite ci-avant).

Des effets de ces systèmes d'attentes implicites à même de baliser l'enseignement de la démarche de schématisation segmentaire (lorsque celle-ci est enseignée) se sont donnés à voir dans les réponses d'élèves tunisiens à certaines des questions posées dans notre questionnaire. Ces effets se sont traduits à la fois par la mise en application de formules privilégiées à l'usage de schémas (sans que l'on ne puisse savoir si les schémas ont participé à la construction de telles formules et dans quelle mesure), mais se traduisent aussi par des difficultés rencontrées, parfois de manière un peu inattendue de prime abord dans l'interprétation des schémas produits (y compris apparemment corrects) par les élèves tunisiens.

3. Conditions liées à l'apprentissage des connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution arithmétique de problèmes - outillée par la schématisation segmentaire et des effets de contrat didactique

C'est ce type de phénomènes liés à des effets de contrat didactique repositionnés à différentes échelles au sens de Hersant (2001 ; 2010), Hersant & Perrin-Glorian (2003) qui nous ont semblé à même de nous aider à approfondir l'étude des conditions d'apprentissage des connaissances et des savoirs mathématiques potentiellement en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques outillée par la schématisation segmentaire. Nous avons ainsi proposé une modélisation sous forme de règles de contrat didactique – positionnées à un niveau méso-didactique (car concernant des unités d'enseignement liées à des problèmes donnés eux-mêmes modélisés par des énoncés-schémas fondamentaux) : les méso-contrats didactiques considérés sont d'une part spécifiques des choix d'*unités graphiques* à opérer pour produire des schémas segmentaires et d'autre part liés à des généralisations plus ou moins directement liées à l'interprétation de tels schémas.

- Si l'analyse de réponses d'élèves (tunisiens et français) au questionnaire a permis d'identifier des premiers effets possibles de ces contrats didactiques (ou d'autres contrats didactiques, comme par exemple ceux liés à la schématisation d'une fraction au sein de l'institution française), les analyses

de la séquence expérimentale ont largement contribué à documenter les phénomènes concernés. Ainsi la séquence expérimentale a fait apparaître des difficultés à appréhender ce qui peut piloter du point de vue des élèves un « bon choix » d'*unité graphique* en vue de résoudre des problèmes donnés.

- Les choix d'*unités graphiques* sont orientés par le biais des interventions enseignantes visant à réduire l'incertitude des tâches ou problèmes donnés à résoudre de ce point de vue. Parfois dès lors privés d'une activité autonome dans de tels choix, les élèves se conformant pour une part à ce système d'attentes pour produire leurs schémas segmentaires, n'ont pas nécessairement les moyens d'utiliser ces schémas pour résoudre le problème donné en prise d'appui sur des *unités relatives* ou des changements d'unités, voire en perdant parfois le sens des grandeurs représentées ou des relations (additives, multiplicatives entières ou fractionnaires) entre ces grandeurs. D'autres phénomènes, pour partie liés à des effets de contrat didactique, liés à des généralisations viennent parfois également interférer. De telles généralisations deviennent parfois abusives privant certains élèves d'interprétations correctes des schémas produits, tout comme elles peuvent s'avérer à d'autres moments productives de connaissances : les schémas ayant permis de construire des généralisations en réel prise d'appui sur les relations (multiplicatives ou additives) entre les grandeurs en jeu, connues et inconnues.
- Ces contrats didactiques liés à la production et à l'interprétation des schémas segmentaires sont parfois pour partie officialisés par l'enseignant expérimentateur de la séquence expérimentale, tout comme leurs ruptures : lorsqu'il s'agit par exemple de passer du choix d'une *unité graphique* correspondant à la plus petite grandeur à celle correspondant à la fraction unitaire d'une grandeur. Toutefois, ces officialisations sont quelquefois délicates à négocier dans le sens où les portées des éléments de démarche ainsi explicités n'apparaissent autrement que par le biais de déclarations enseignantes : ainsi les choix d'*unités graphiques* « les plus optimales » pour un champ de problèmes donné ne sont pas réellement problématisés du point de vue des élèves. De ce fait, les élèves n'ont guère l'occasion d'éprouver ce caractère optimal dans les faits : à l'occasion d'un problème donné impliquant une composition de relations de comparaison additives où un autre choix

d'*unité graphique* (que celui de la petite grandeur) coûteux en termes de connaissances convoquées est apparu pour un élève donné qui a d'ailleurs résolu le problème avec succès en convoquant une connaissance arithmétique nouvelle (l'augmentation de la somme des valeurs correspondant aux augmentations de chaque terme de cette somme) et en s'appuyant sur un jeu sur des *unités relatives* sans prise d'appui sur son schéma.

- Pour autant, d'autres phénomènes (d'ailleurs non sans lien avec celui que nous venons d'évoquer) ont pu illustrer des potentialités des usages de schémas segmentaires dans la résolution des problèmes arithmétiques – et pas seulement en termes d'augmentation de réussite des élèves aux problèmes posés – mais aussi en termes de connaissances mathématiques, acquises progressivement sur des relations multiplicatives et additives entre les grandeurs en jeu. S'agissant notamment des relations multiplicatives entières et fractionnaires entre grandeurs, plusieurs épisodes analysés montrent comment des systèmes d'unités relatifs au sens de Chambris (2008, 2021) ont été convoqués par les élèves et ont outillé la résolution des problèmes arithmétiques concernés.

II. Perspectives

L'ensemble du travail conduit nous permet aujourd'hui de dégager de nouvelles perspectives de recherche en lien avec notre objet d'étude.

Une première perspective est en lien avec la problématisation de choix d'*unités graphiques*. Comme nous l'avons dit, nous avons mis à jour le fait que de tels choix peuvent s'avérer délicats à problématiser et semblent y compris dans le cadre de notre expérimentation reposer sur des choix contractuels de la part des élèves et de l'enseignant. Comment penser une progressivité en lien avec des énoncés-schémas fondamentaux à même de mieux faire rentrer les élèves dans un questionnement plus ouvert lié à des choix possibles d'*unités graphiques*, à opérer au regard des différentes variables didactiques que notre travail a permis de dégager par ailleurs (structures des énoncés, nature des relations de comparaison multiplicatives ou additives entre grandeurs, etc.) ?

Une deuxième perspective serait davantage en lien avec les connaissances liées au changement d'unités, associées à différentes actions liées au registre graphique (reports, ajouts, double *désignation fonctionnelle*, ...) que notre travail a contribué à mettre en lumière. Nous avons pu constater que ces connaissances restaient souvent implicites dans les manuels et faisaient finalement également assez peu l'objet de formulation lors des séances expérimentées. Quel discours enseignant pourrait être tenu – en vue de mieux faire identifier de telles connaissances mathématiques en lien avec des changements d'unités – en prise d'appui sur le registre graphique ? En quoi et sous quelles conditions un tel discours pourrait-il participer de la conceptualisation de relations de comparaison multiplicatives (entières ou fractionnaires) ou additives entre des grandeurs dont nous avons vu qu'elle pouvait par ailleurs constituer *a priori* « un bon enjeu » de savoir associé à la démarche de schématisation segmentaire – puisque potentiellement en lien direct avec ces changements d'unités (relatives) ?

Enfin une troisième perspective de travail, peut-être plus prospective, serait liée à la généralisation en prise d'appui sur les usages des schémas segmentaires. En effet certains élèves semblent s'emparer du travail sur les schémas segmentaires pour produire des formules associées à des problèmes d'une structure donnée. Comme nous l'avons dit au début de cette thèse, certains de ces problèmes ont longtemps été

considérés comme un lieu de transition de l'arithmétique vers l'algèbre au regard de leur mise en équation. Mais au final, un travail de généralisation en prise d'appui sur les schémas segmentaires – et en lien avec des structures données de problèmes – ne constituera-t-il pas une autre piste possible pour un passage à l'algèbre ?

Références bibliographiques

- Bednarz N., Janvier B. (1994).** *The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis.* Papier présenté à Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lisbonne: Université de Lisbonne.
- Bednarz N., Janvier B. (1996).** Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds). *Approaches of algebra: Perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 115-136.
- Belguesmi N. (2016).** *L'utilisation de la schématisation dans la résolution de de problèmes en mathématique dans le cadre de la théorie des situations didactiques : cas des élèves de la sixième année de l'école de base.* Mémoire de master de recherche en didactique des mathématiques – l'Université Virtuelle de Tunis – Institut Supérieure de l'Education et de la Formation Continue.
- Belguesmi N., & Coulange L. (à paraître).** Le schéma segmentaire, un « bon » outil pour résoudre des problèmes arithmétiques ? Un exemple : inverser une fraction de Article à paraître dans la revue *Petit x*.
- Bessot A., Richard F. (1980).** Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande de variable d'une situation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(3), 387-422.
- Bloch I. (2005).** *Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de retournement d'une situation.* IUFM d'Aquitaine et DAEST.
- Bloch I. (2006).** *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches.
- Brousseau G. (1987).** *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Comptes rendus d'observations de situations et de processus didactique à l'école Jules Michelet de Talence. Document pour les enseignants et pour les formateurs.
- Brousseau G. (1997).** *La théorie des situations didactiques.* Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.
- Brousseau G. (1998).** *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.
- Chambris C. (2008).** *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Chambris C. (2017). *L'enseignement des maths à l'école et la méthode Singapour.* Bulletin CFEM, 44, 13-18.

En ligne sur : <http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem>

Chambris C. (2021). *Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire.* In H. Chaachoua et al. (Éds), Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures (vol. 1). Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris C., Coulange L., Rinaldi A-M., Train G. (2021). *Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école : vers un état des lieux – potentialités.* In H. Chaachoua et al. (Éds), Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures (vol. 2 – CD-ROM). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1984a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, n° 5, pp. 51-94.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, p. 43-72.

Coulange L. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équation en classe de troisième.* Thèse de l'Université Joseph Fourier.

Coulange L. (2001). Evolution du passage Arithmétique-Algèbre dans les manuels et les programmes du 20^{ème} siècle : Contraintes et espaces de liberté pour le professeur. Equipe DDM, Laboratoire Leibnitz, Grenoble. « *Petit x* » n° 57, pp. 61 à 77.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval R. (2017). How To Learn To Undrestand Mathematics. *JIEFM* v 10, n.2 pp. 114-122, 2017.

Feyfant A. (2015). *La résolution de problèmes de mathématiques au primaire.* Dossier de veille de l'IFÉ, 105. Lyon : ENS de Lyon.

En ligne sur : <http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf>

Hersant M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège.* Thèse de l'Université Paris 7.

Hersant M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse en séquence ordinaire au développement de situations pour les classes ordinaires.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en science de l'éducation. Université

de Nantes.

Houdement C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78.

Julo J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

Julo J. (2000). Aide à la représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Publications de l'IREM de Rennes de 1999-2000 - fascicule 3 de didactique des mathématiques et de l'EIAO*, 6, p. 1-14.

Laparra M., Margolinas C. (2009). Le schéma : un écrit de savoir ? *Pratiques : linguistique, littérature, didactique, numéro spécial : les écrits de savoir*, 51-82.

Marchand P., Bednarz N. (1999). *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : Une analyse des problèmes présentés aux élèves*. Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, n°4.

Novotna J. (2003). *Etude de la résolution des « problèmes verbaux » dans l'enseignement des mathématiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Victor Segalen Bordeaux.

Perrin-Glorian M., Hersant M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, n° 2, pp. 217-276, 2003.

Saboya et al. (2013). *Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre : analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire*. Papier présenté à Actes du colloque GDM.

Schmidt S. (1996). La résolution des problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol. XXII, n° 2, 1996, pp. 277-294.

Schmidt S., Bednarz N. (1997). Raisonnement arithmétique et algébrique dans un contexte de résolution de problème : difficultés rencontrées par les futures enseignantes. *Educational Studies in Mathematics* 32, pp. 127-155.

En ligne sur : <https://www.researchgate.net/publication/251110263>

Thompson P. W., Carlson M. P., Byerley C., Hatfield N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Steffe & L. L. Hatfield (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing*. *WISDOMe Monographs*, 41-24.

En ligne sur : <http://bit.ly/1aNquwz>

Vergnaud G. (1993). *Les quatre opérations de l'arithmétique sont-elles quatre ?* Les entretiens Nathan, Acte 4, 1993.

Vergnaud G. (1997). *Le moniteur de mathématiques, cycle 3*. Nathan, 2001.

Manuels scolaires

Bodard G., Bréjaud H. (1960). *Le Calcul Quotidien CM2*. Paris: Editions Fernand Nathan.

Brandicourt R., Brandicourt S., Penneçot R. (1963). *Problèmes et calculs CM1*. Librairie Armand Colin. Editions Bourrelier.

Collars C., Nghan Hoe L., Phong Lee K., Cheow Seng T., Kritter C. (2018). *Méthode Singapour CM1 - Manuel de l'élève - Pratique guidée*. Paris : Editions La librairie des écoles.

Delfaud M., Millet A. (1932). *Cours moyen certificat d'étude. Livre du maitre*. Edition Hachette.

Guide pédagogique. *Méthode Singapour CM1*. Editions La librairie des écoles.

Guide pédagogique. *Méthode Singapour CM2*. Editions La librairie des écoles.

Kritter C., Caira S., Cerquetti-Aberkane F., Houkari M., Rittaud B. (2019). *Méthode Singapour CM2 - Manuel de l'élève - Pratique guidée*. Paris : Editions La librairie des écoles.

Manuel scolaire officiel tunisien de la sixième année de l'école de base (2018) (destiné à l'élève). Edition centre National Pédagogique.

Manuel scolaire officiel tunisien de la sixième année de l'école de base (destiné au maître). Edition centre National Pédagogique, 502 603.

Annexes

1. Annexe 1 : feuille n°1 - questionnaire

Nom, prénom :

Classe : Durée : 60 mn.

Résoudre les problèmes suivants :

1) Dans une école, on compte 360 élèves. Il y a 28 garçons de moins que de filles dans cette école. Trouvez :

- le nombre de filles ;
- le nombre de garçons.

2) Le nombre de billes de Mohammed est trois fois plus grand que celui de Layla. Le nombre de billes de Layla est deux fois plus grand que celui de Karim. Le nombre total de billes des trois enfants est 270. Combien chaque enfant possède-t-il de billes ?

3) Sara a 63 fleurs de plus que Yakin. Sara a 4 fois plus de fleurs que Yakin. Combien chacune a-t-elle de fleurs ?

4) La masse totale de trois météorites est de 84 tonnes. La masse de la 3ème météorite est de 15 tonnes de plus que celle de la deuxième. La masse de la 2ème météorite est de 9 tonnes de plus que celle de la première. Trouvez la masse de chaque météorite.

5) Ahmed a acheté des fruits et des légumes. Il lui reste dans sa poche 4200 millimes, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de l'argent qu'il avait en poche initialement. Combien avait-il d'argent avant de faire ses courses.

2. Annexe 2 : feuille n°2 - questionnaire

Nom, prénom :

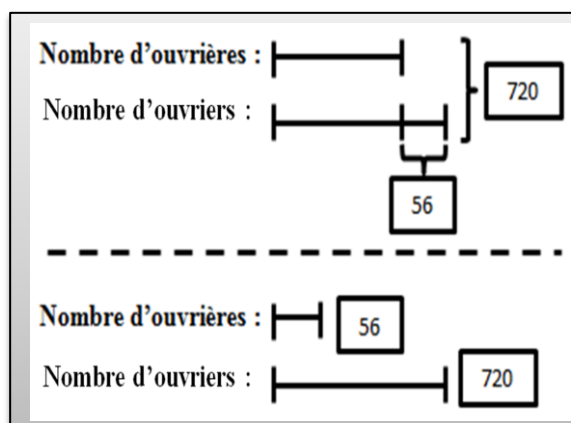
Classe : Durée : 60 mn.

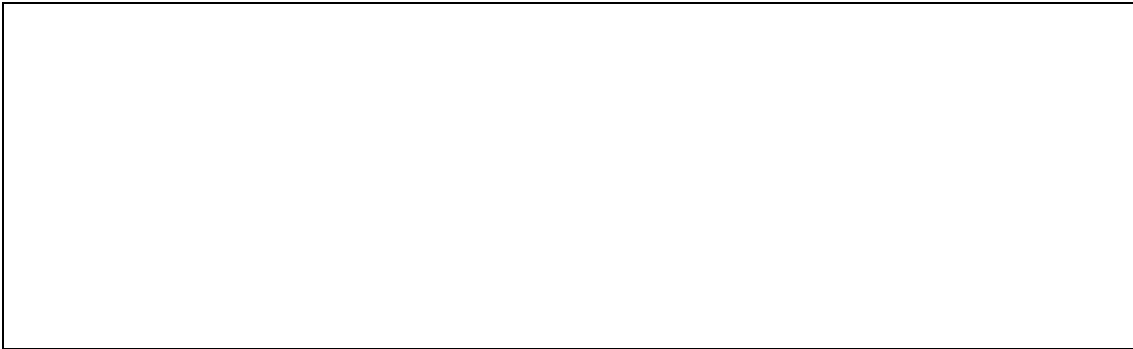
1) Résoudre les problèmes suivants après avoir associé l'énoncé du problème au schéma qui lui correspond (entourer le « bon schéma ») :

a)

Dans une usine on compte 720 ouvriers et ouvrières. Il y a 56 ouvrières de moins que d'ouvriers dans cette usine. Trouver :

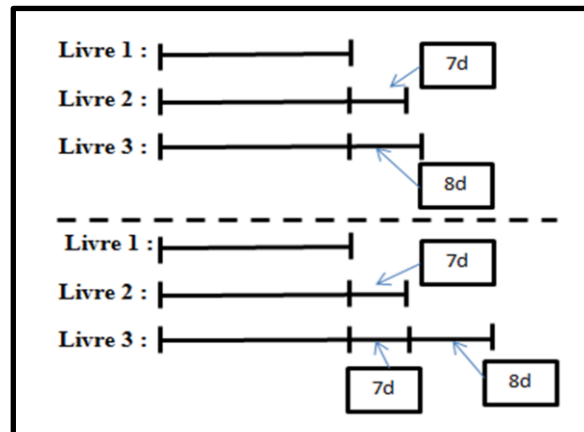
- le nombre d'ouvriers ;
- le nombre d'ouvrières.





b)

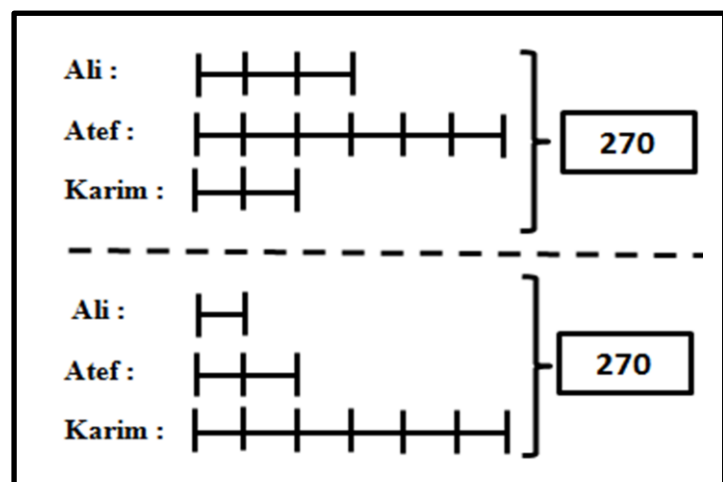
Mariam a acheté 3 livres scientifiques pour un prix total de 145 d. Sachant que le deuxième livre coûte 7 d de plus que le premier et que le troisième coûte 8 d de plus que le deuxième, chercher le prix de chaque livre.



c)



Le nombre de billes d'Ali est égal à $\frac{1}{2}$ de celui d'Atef, et le nombre de billes d'Atef est égal à $\frac{1}{3}$ de celui de Karim. Sachant que le nombre total des billes est 270, combien chaque enfant possède-t-il de billes ?



2) Résoudre le problème suivant en produisant un schéma qui pourrait t'aider dans la résolution de ce problème :

Fatma possède 3 fois moins de couronnes que Khadija et 2 fois plus de couronnes que Zeyneb. Sachant le nombre total des couronnes est 126, combien de couronnes possède chaque fille ?

Schéma correspondant

3) En s'appuyant sur le schéma proposé, résoudre le problème suivant tout en expliquant la procédure de résolution :

Avec ses économies, Khadija a acheté un ordinateur. Il lui reste 240 d, ce qui représente $\frac{4}{15}$ de ses économies initiales. Trouvez le montant de ce que Khadija avait économisé avant son achat. (d veut dire dinar)

$240 \text{ d} : \frac{4}{15}$	
Economies de Khadija : $\frac{4}{15}$	

3. Annexe 3 : feuille n°3 - questionnaire

Nom, prénom :

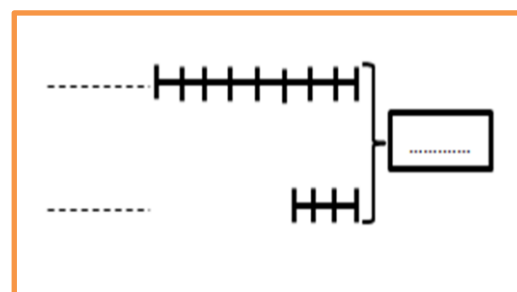
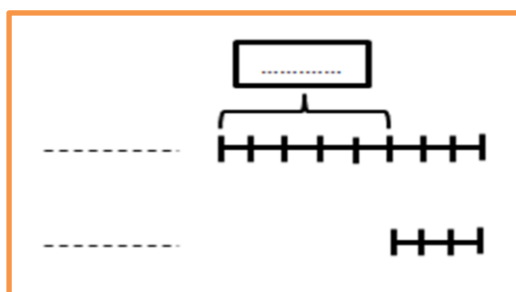
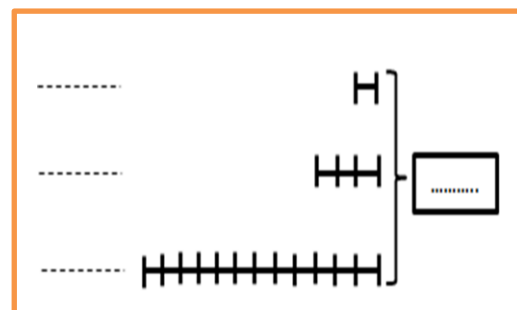
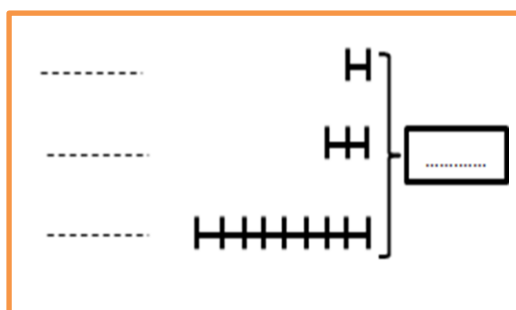
Classe : Durée : 45 mn.

- 1) En vous appuyant éventuellement sur le travail effectué dans la feuille n°2, coller devant chaque problème le schéma qui lui correspond et compléter la légende de ce schéma :

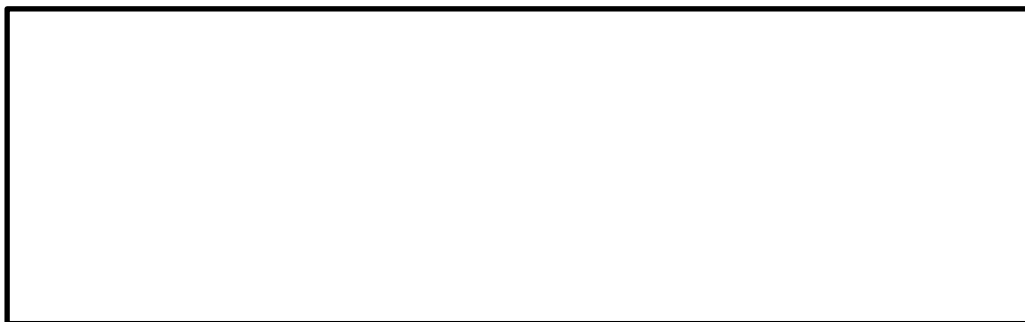
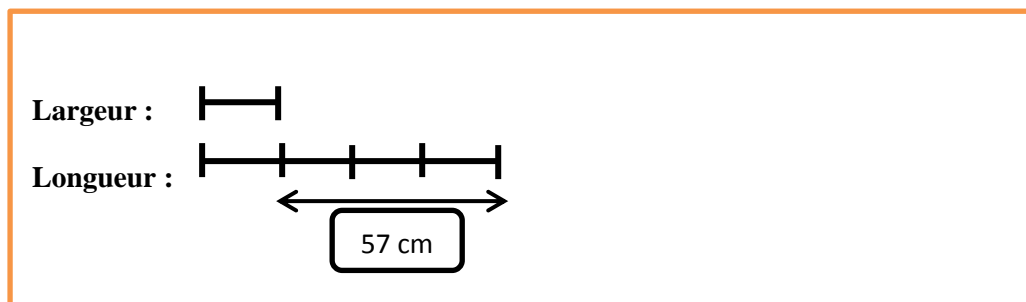
<p>Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante.</p> <p>Le prix des deux appareils est 1122 d. Trouvez :</p> <ul style="list-style-type: none"> - le prix de l'imprimante ; - le prix de l'ordinateur. 	
<p>Hiba a 4 fois plus de stylos que de cahiers et 2 fois plus de cahiers que de livres. Elle a au total 66 fournitures (stylos, livres et cahiers).</p> <p>Trouvez le nombre de chaque article.</p>	

<p>Imed, Zeyneb et Nathalie partagent la somme de 224 d comme suit :</p> <p>la part d'Imed égale à $\frac{1}{3}$ de la part de Zeyneb ;</p> <p>la part de Zeyneb est égale à $\frac{1}{4}$ de la part de Nathalie.</p> <p>Trouvez la part de chacun.</p>	
<p>Le prix de la chemise d'Amir est égal à $\frac{3}{8}$ de celui de son pantalon. Le prix du pantalon est plus cher que celui de la chemise de 35 d.</p> <p>Trouvez :</p> <ul style="list-style-type: none"> - le prix du pantalon ; - le prix de la chemise. 	

Schémas à couper puis coller :



2) **Elaborer un énoncé de problème qui pourrait correspondre le schéma suivant:**



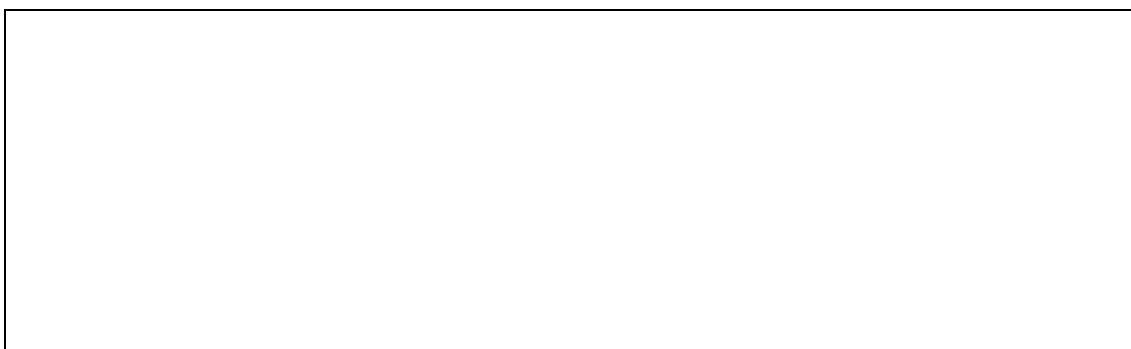
4. Annexe 4 : feuille n°1 et 2 - séance 1 de la séquence expérimentale

Feuille n°1 (séance 1 de la séquence expérimentale)

Nom, prénom :

Classe : Durée : 60 mn.

Consigne 1 : « La hauteur d'une maison est 4 fois moins grande que celle d'un immeuble. À l'aide d'un schéma, représenter les deux hauteurs. »



Problème 1 : « Le prix de la chemise d'Amir est 5 fois moins cher que celui de son pantalon. Le prix de deux vêtements est de 150 dinars. Trouvez :

- le prix du pantalon ;
- le prix de la chemise. »



Feuille n°2 (séance 1 de la séquence expérimentale)

Consigne 2 : « Les économies d'Aymen sont égales à $\frac{2}{3}$ celles d'Inès. À l'aide d'un schéma, représenter les deux sommes d'argent. »



Problème 2 : « Le prix de l'ordinateur de Fatma est égal à $\frac{8}{3}$ de celui de son imprimante. Le prix des deux appareils est 1320 d. Trouvez :

- le prix de l'imprimante ;
- le prix de l'ordinateur. »



5. Annexe 5 : feuille n°1 et 2 - séance 2 de la séquence expérimentale***Feuille n°1 (séance 2 de la séquence expérimentale)*****Nom, prénom :****Classe :** **Durée : 60 mn.**

Problème 1 : «Ahmed et Fatma ont 320 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 4 fois plus grand celui de Fatma, combien chacun a-t-il de billes ? »

Problème 2 : « Ahmed, Ali et Fatma ont 360 billes ensemble. Sachant que le nombre de billes d'Ahmed est 2 fois plus grand que celui de Fatma, le nombre de billes de Fatma est 3 fois plus grand que celui d'Ali, combien chacun a-t-il de billes? »

Feuille n°2 (séance 2 de la séquence expérimentale)

Problème 3 : « Mohammed et Sara se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara. Quelle est la part de chacun ? »



Problème 4 : « Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de plus que Sara, et Sara en reçoit 27 de plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? »

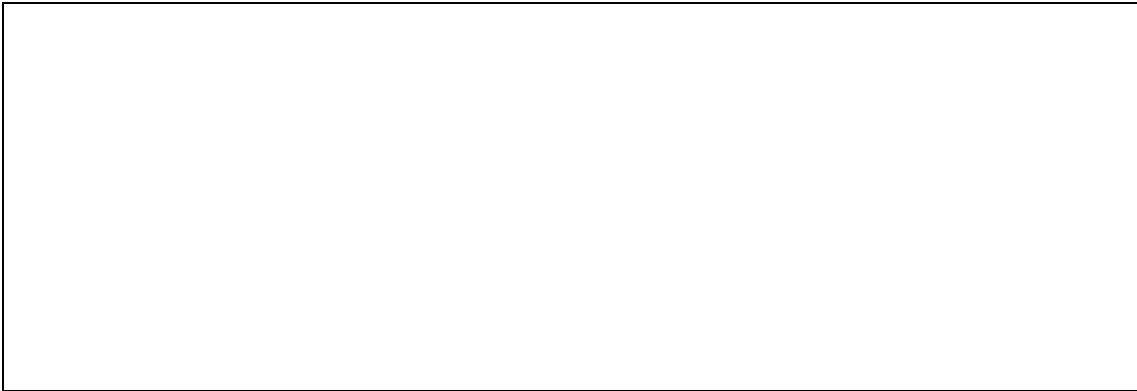


6. Annexe 6 : feuille n°1 et 2 - séance 3 de la séquence expérimentale

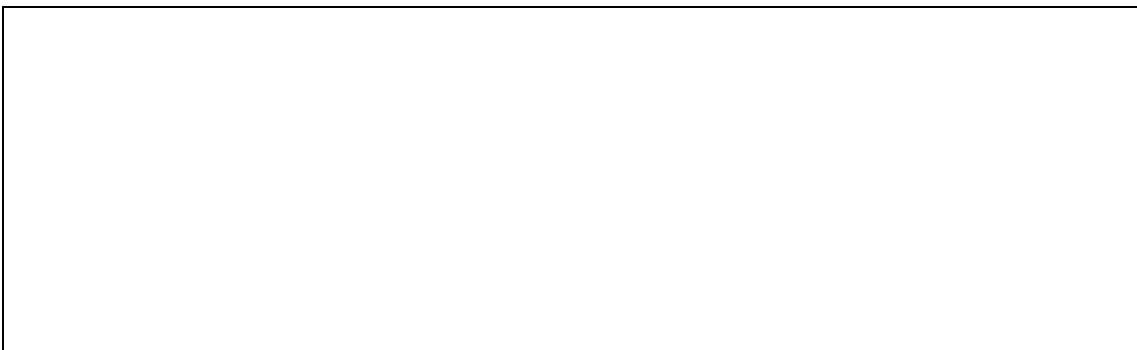
Feuille n°1 (séance 3 de la séquence expérimentale)

Nom, prénom :.....
Classe :..... **Durée : 60 mn.**

Consigne 1 : « La longueur d'un rectangle est trois fois plus grande que sa largeur. À l'aide d'un schéma, représenter les deux grandeurs »



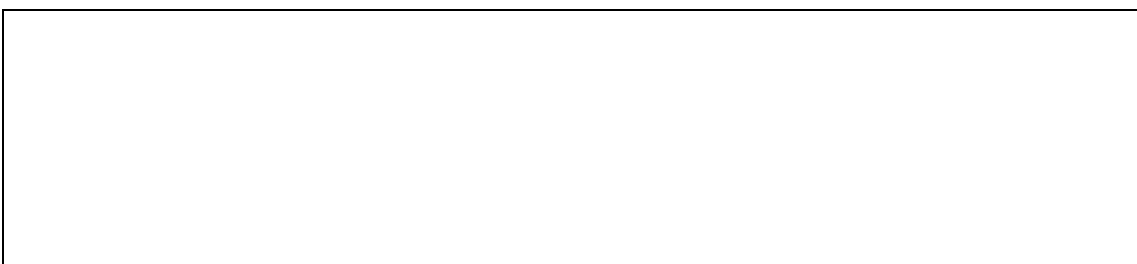
Problème 1 : « Fatma a 72 billes de plus qu'Ahmed. Fatma a 4 fois plus de billes qu'Ahmed. Combien chacun a-t-il de billes? »



Feuille n°2 (séance 3 de la séquence expérimentale)

Consigne 2 : En s'appuyant sur les travaux déjà faits en répondant à la consigne de la feuille 2 de la première expérimentation, représenter à l'aide d'un schéma les deux grandeurs de cette égalité :

Distance parcourue = $\frac{3}{7}$ distance totale.



En s'appuyant sur la réponse à la consigne précédente, résoudre le **Problème 2** suivant:

« Pour visiter sa mère, Sonia a parcouru dans un premier temps 180 km, ce que représente $\frac{4}{15}$ la distance que sépare sa maison de la maison de sa mère. Trouvez la distance totale qui sépare le domicile de Sonia de celui de sa mère. »

7. Annexe 7 : feuille de la séance 4 de la séquence expérimentale

Feuille (séance 4 de la séquence expérimentale)

Nom, prénom :.....
Classe :..... **Durée : 45 mn.**

Problème : « La surface totale de trois parcelles de terrain est de 2675 m^2 . Sachant que la surface de la première parcelle est égale à $\frac{3}{5}$ de celle de la deuxième et que la surface de la troisième parcelle dépasse la surface de la deuxième de 75 m^2 , trouvez la surface de chaque parcelle. »

8. Annexe 8 : connaissances convoquées pour résoudre le problème 5 de la feuille 1 du questionnaire

- l'une que nous avons qualifié d'*unité graphique* (correspondant à un « petit » segment reporté n fois et m fois) correspondant à $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{15}\right)$ de la grandeur.

- l'autre que nous avons qualifiée d'*unité du problème* (grandeur inconnue), dont nous considérons une relation multiplicative entre deux grandeurs dont une connue égale à $\frac{m}{n} \left(\frac{3}{5}\right)$ de cette grandeur inconnue $\left(\frac{5}{5}\right)$ du montant initial).

Pour résoudre ce problème avec le schéma segmentaire ainsi produit, il s'agit de considérer que $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue $\left(\frac{1}{15}\right)$ du montant initial) correspond aussi à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue $\left(\frac{1}{4}\right)$ du montant restant) ce qui recouvre un changement d'unité de référence correspondant aux grandeurs en jeu dans le problème. Ce jeu sur des *unités relatives* (Chambris, Coulange, Rinaldi et Train, 2021) est parfaitement décrit par Thompson, Carlson, Byerley et Hatfield (2014) : il s'agit de penser une unité commune pour les deux grandeurs A et B (montant initial et montant restant) pour exprimer chacune des deux grandeurs à l'aide de cette unité. Il peut se faire ici en prise d'appui sur le schéma produit via ce que Duval (2017) appelle une double désignation dans le registre graphique : l'*unité graphique* correspondant à $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{15}\right)$ de la grandeur inconnue (montant initial) apparaissant étant également désignable comme $\frac{1}{m} \left(\frac{1}{4}\right)$ de la grandeur connue (montant restant). Ce traitement intrinsèque au registre graphique permet dès lors d'inverser le rapport fractionnaire entre les deux grandeurs en jeu et de conclure que la valeur de la grandeur inconnue (montant initial) correspond à $\frac{n}{m} \left(\frac{15}{4}\right)$ de la grandeur connue (montant restant) via des techniques de calcul sur lesquelles nous ne nous attardons pas ici car elles ne sont pas nécessairement au cœur de notre propos.

Le schéma segmentaire ci-dessus permet de voir la fraction $\frac{1}{15}$ comme une *unité graphique*. Cette *unité graphique* désigne dans un premier lieu le $\frac{1}{4}$ de 4200, c'est pourquoi il faut procéder tout d'abord par diviser 4200 (nouvelle unité de partage) par 4 pour trouver la valeur de cette part. La valeur étant trouvée, cette *unité graphique*

désignera en un deuxième lieu le $\frac{1}{15}$ du montant initial (*unité du problème*), et il suffit alors, pour trouver ce dernier montant, de multiplier la valeur de l'*unité graphique* par 15. Le passage par la double désignation du segment représentant les 4200 millimes comme un tout divisé en quatre puis comme quatre *unités graphiques* correspondant à $\frac{4}{15}$ est nécessaire pour résoudre le problème (Duval, 2017). Cette double désignation permet le changement d'unité de référence de la valeur d'une *unité graphique* de $\frac{1}{15}$ du montant initial à $\frac{1}{4}$ du montant restant, clé de la résolution du problème.

9. Annexe 9 : connaissances convoquées pour résoudre le problème de la feuille n°2 (séance 3 de la séquence expérimentale)

- l'une que nous avons qualifié d'*unité graphique* (correspondant à un « petit » segment reporté n fois et m fois) correspondant à $\frac{1}{n} (\frac{1}{15})$ de la grandeur.
- l'autre que nous avons qualifiée d'*unité du problème* (grandeur inconnue), dont nous considérons une relation multiplicative entre deux grandeurs dont une connue égale à $\frac{m}{n} (\frac{3}{5})$ de cette grandeur inconnue ($\frac{5}{5}$ du montant initial).

Pour résoudre ce problème avec le schéma segmentaire ainsi produit, il s'agit de considérer que $\frac{1}{n}$ de la grandeur inconnue ($\frac{1}{15}$ de la distance totale) correspond aussi à $\frac{1}{m}$ de la grandeur connue ($\frac{1}{4}$ de la distance parcourue) ce qui recouvre un changement d'unité de référence correspondant aux grandeurs en jeu dans le problème. Ce jeu sur des *unités relatives* (Chambris, Coulange, Rinaldi et Train, 2021) est parfaitement décrit par Thompson, Carlson, Byerley et Hatfield (2014) : il s'agit de penser une unité commune pour les deux grandeurs A et B (distance totale et distance parcourue) pour exprimer chacune des deux grandeurs à l'aide de cette unité. Il peut se faire ici en prise d'appui sur le schéma produit via ce que Duval (2017) appelle une double désignation fonctionnelle dans le registre graphique : l'*unité graphique* correspondant à $\frac{1}{n} (\frac{1}{15})$ de la grandeur inconnue (distance totale) apparaissant étant également désignable comme $\frac{1}{m} (\frac{1}{4})$ de la grandeur connue (distance parcourue). Ce traitement

intrinsèque au registre graphique permet dès lors d'inverser le rapport fractionnaire entre les deux grandeurs en jeu et de conclure que la valeur de la grandeur inconnue (distance totale) correspond à $\frac{n}{m} \left(\frac{15}{4}\right)$ de la grandeur connue (distance parcourue) via des techniques de calcul élémentaires.

10. Annexe 10 : hiérarchie de complexité et types de relations

Sans compter les problèmes mixtes, dans un problème déconnecté à 3 branches nous identifions trois relations entre trois grandeurs A, B et C :

- Trois relations additives (en lien avec le 5^{ème} énoncé-schéma fondamental) ;
- ou deux relations multiplicatives et une autre additive (en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental).

Considérons les deux relations autres que la relation $A + B + C = \text{Total}$.

Dans un problème Source (en lien avec le 5^{ème} énoncé-schéma fondamental) :

- Si ces deux relations sont de type « ...de plus... », le problème est facile à résoudre via la schématisation ;
- Si ces deux relations sont de type « ...de moins... », le problème est difficile à résoudre via la schématisation.

Notons que nous disons bien via la schématisation (en restant dans le registre arithmétique) et non au regard des travaux de Bednarz & Janvier. En fait via un traitement interne au registre de la langue naturelle, un problème de type Source avec deux relations de type « ...de moins... » devient un problème Puits avec deux relations de type « ...de plus... » :

Exemple :

« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Mohammed en reçoit 36 de moins que Sara, et Inès en reçoit 27 de moins que Sara. Quelle est la part de chacun ? ».

C'est un problème de type Source qui, via un traitement interne au registre de la langue naturelle (symétrisation des deux relations), devient un problème de type Puits :

« Mohammed, Sara et Inès se partagent 198 billes. Sara en reçoit 36 de plus que Mohammed, et 27 de plus qu'Inès. Quelle est la part de chacun ? ».

Inversement, Dans un problème Puits :

- Si ces deux relations sont de type « ...de plus... », le problème est difficile à résoudre du point de vue du schéma segmentaire ;
- Si ces deux relations sont de type « ...de moins... », le problème est facile à résoudre du point de vue du schéma segmentaire.

Même constat avec les problèmes en lien avec le 6^{ème} énoncé-schéma fondamental.

11. Annexe 11 : problèmes connectés et déconnectés

Les problèmes dits connectés :

"Une relation peut être facilement établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement possible de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à la donnée inconnue."

Exemple : Ali a trois fois plus de timbres qu'Atef. Si Ali possède 504 timbres, combien Atef possède-il de timbres?

Nous voyons que l'on peut prendre comme point de départ le nombre de timbres d'Ali puis, "en remontant les calculs", nous pouvons retrouver le nombre de timbres d'Atef (en divisant par 3).

Les problèmes dits déconnectés :

"Aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre les données connues."

Exemple : Trois enfants jouent aux billes. Ils ont ensemble 198 billes. Pierre a six fois plus de billes que Denis et trois fois plus de billes qu'Alain. Combien de billes possède chaque enfant?

Ici nous connaissons le nombre de billes total et des relations multiplicatives qui lient les nombres de billes des trois enfants, mais nous n'avons pas d'état initial. L'outil algébrique est alors nécessaire ici car il permet de nommer cet état initial en utilisant une inconnue (supposée connue) pour faire ensuite des calculs qui aboutissent au résultat.

12. Annexe 12 : énoncés fondamentaux, grandeurs connues et inconnues et nombre de relations entre les grandeurs liées aux énoncés

Tableau B1 : énoncés fondamentaux correspondant aux problèmes arithmétiques étudiés

Enoncés fondamentaux	Relations algébriques entre grandeurs (connues et inconnues) données dans l'énoncé et transformation de relations convoquées dans la résolution	Nombre de relations (données dans l'énoncé)
1 ^{er}	Sachant que $A = \frac{m}{n} B$, trouver B (m, n dans \mathbb{N}^*). (l'inversion du rapport)	1
2 ^{ème}	On suppose que : $\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A - B = D \end{cases}$ trouver A, trouver B.	2
3 ^{ème}	On suppose que : $\begin{cases} A = \frac{m}{n} B \\ A+B = S \end{cases}$ trouver A, trouver B.	2
4 ^{ème}	Si $A + B = S$ et $A - B = D$, ($A > B$), Alors : trouver A, trouver B.	2
5 ^{ème}	Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que : (m et n dans \mathbb{Z})	3

	<p>1^{er} cas :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ $A = B + m$ ▪ $B = C + n$ ▪ $A + B + C = S$ <p>Trouver A, B et C.</p>	<p>2^{ème} cas :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ $A = C + m$ ▪ $B = C + n$ ▪ $A + B + C = S$ <p>Trouver A, B et C.</p>	<p>3^{ème} cas :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ $A = B + m$ ▪ $A = C + n$ ▪ $A + B + C = S$ <p>Trouver A, B et C.</p>			
6 ^{ème}	<p>Soient A, B et C trois grandeurs de valeurs non nulles telles que :</p> <p>1^{er} cas :</p> $A = \frac{m}{n} B$ $B = \frac{p}{q} C$ $A + B + C = S$ <p>Trouver A, B et C.</p> <p>(m, n, p et q dans IN).</p>			<p>2^{ème} cas :</p> $A = \frac{m}{n} C$ $B = \frac{p}{q} C$ $A + B + C = S$ <p>Trouver A, B et C.</p> <p>(m, n, p et q dans IN).</p>	<p>3^{ème} cas :</p> $A = \frac{m}{n} B$ $A = \frac{p}{q} C$ $A + B + C = S$ <p>Trouver A, B et C.</p> <p>(m, n, p et q dans IN).</p>	3

Tableau B2 : grandeurs connues, inconnues et nombre de relations entre les grandeurs liées aux énoncés

Enoncés- schémas fondamentaux	Grandeur(s) connue(s)	Grandeur(s) inconnue(s)	Nombre de relations
1 ^{er}	A	B	1
2 ^{ème}		A et B	2
3 ^{ème}		A et B	2
4 ^{ème}		A et B	2
5 ^{ème}		A, B et C	3
6 ^{ème}		A, B et C	3

13. Annexe 13 : règles de contrat

- **I_P_G** : identification de la petite grandeur (micro-contrat).
- **R_us_me** : représenter la petite grandeur par une unité segmentaire dans une relation multiplicative entière puis reporter cette unité n fois pour représenter la grande grandeur (mésos-contrat en lien avec les 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux).
- **R_us_m_fu** : représenter la grande grandeur par une unité segmentaire dans une relation multiplicative fractionnaire unitaire et partager cette unité sur n pour représenter la petite grandeur (mésos-contrat en lien avec les 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux).
- **R_us_a+** : représenter la petite grandeur par une unité segmentaire dans une relation additive de type « ...de plus... » ($A = B + n$) puis ajouter à cette unité un petit segment de valeur n pour représenter la grande grandeur (mésos-contrat en lien avec les 4^{ème} et 5^{ème} énoncés-schémas fondamentaux).
- **R_us_a-** : représenter la grande grandeur par une unité segmentaire dans une relation additive de type « ...de moins... » ($A = B - n$) puis retrancher de cette unité un petit segment de valeur n pour représenter la petite grandeur (mésos-contrat en lien avec les 4^{ème} et 5^{ème} énoncés-schémas fondamentaux).
- **R_INV_F** : Si $A = \frac{m}{n} B$ alors $B = \frac{n}{m} A$ (mésos-contrat de généralisation en lien avec le 1^{er} énoncé-schéma fondamental).
- **R_S_D** : $A + B = S$ et $A - B = D$, Alors : $A = \frac{S+D}{2}$ et $B = \frac{S-D}{2}$ (mésos-contrat de généralisation en lien avec le 4^{ème} énoncé-schéma fondamental).
- **R_Rme_S** : Si on nous donne la somme S de deux grandeurs et si l'opérateur qui relie ces deux grandeurs est un entier, alors la petite grandeur est égale à la somme S divisée par l'opérateur $+ 1$: $A + B = S$ et $A = n.B$ alors $B = S : (n+1)$ (mésos-contrat d'interprétation en lien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental).
- **R_Rme_D** : Si on nous donne la différence D entre deux grandeurs et si l'opérateur qui relie ces deux grandeurs est un entier, alors la petite grandeur est égale à la différence D divisée par l'opérateur $- 1$: $A - B = D$ et $A = n.B$ alors $B = D : (n - 1)$ (mésos-contrat d'interprétation en lien avec le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental).

- **R_Rmf_S** : Si on nous donne $A = \frac{m}{n} B$ et $A + B = S$ ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire) La valeur d'un segment est $S : (m + n)$. (B est représentée par m segments et A est représentée par n segments : voir plus dans la thèse sur le choix de l'*unité graphique* régi par la notion de l'*unité du problème*). (mésos-contract d'interprétation en lien avec le 3^{ème} énoncé-schéma fondamental).
- **R_Rmf_D** : Si on nous donne $A = \frac{m}{n} B$ et $A - B = D$ ($\frac{m}{n}$ fraction non unitaire) La valeur d'un segment est : $D : (n - m)$ si $n > m$, $D : (m - n)$ si $n < m$. (B est représentée par m segments et A est représentée par n segments : idem, voir plus dans la thèse sur le choix de l'*unité graphique* régi par la notion de l'*unité du problème*). (mésos-contract d'interprétation en lien avec le 2^{ème} énoncé-schéma fondamental).
- **R_V_us** : règle pour trouver la valeur d'une unité segmentaire (ou graphique) : Diviser la donnée du problème (cette donnée doit être une somme de deux ou trois grandeurs) sur le nombre total des *unités graphiques* pour trouver la valeur d'une *unité graphique*. (mésos-contract d'interprétation en lien avec les 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} énoncés-schémas fondamentaux).

Le mésos-contract de l'ordre de représentation n'a pas été codifié.

14. Annexe 14 : ورقة عدد 1 - دراسة استقصائية

..... الاسم و اللقب:

..... القسم: الزمن : 60 دق.

أحلّ الوضعيات التالية:

1) تعدّ مدرسة 360 تلميذا. يقلّ عدد الأولاد عن عدد البنات بـ 28. ابحث عن:

▪ عدد البنات،

▪ عدد الأولاد.

(2) عدد كجّات محمّد يساوي 3 مرّات عدد كجّات كريم و عدد كجّات كريم يساوي مرّتين عدد كجّات عليّ. المجموع الجملي لعدد الكجّات يساوي 270. كم يملك كلّ طفل من كجّة؟

(3) تملك سارّة 63 زهرة أكثر من يقين. عدد زهرات سارّة يساوي 4 مرّات عدد زهرات يقين. كم تملك كلّ بنت من زهرة؟

(4) الكتلة الجمليّة لثلاثة نيازك بالطّنّ 82. تزيد كتلة النيزك الثّالث عن كتلة النيزك الثّاني بـ 17 ط و تزيد كتلة النيزك الثّاني عن كتلة النيزك الأوّل بـ 10 ط. ابحث عن كتلة كلّ نيزك.

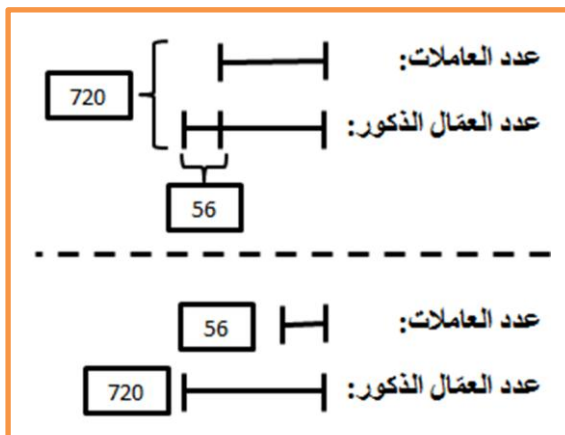
5) اشترى أحمد خضرا و غلالا و بقي له في جيبه 4200 مي و هو ما يمثل $\frac{4}{15}$ المبلغ الذي كان يملكه. ابحث عن هذا المبلغ.

ورقــــة عدد 2 - دراسة استقصائية : 15 Annexe 15.

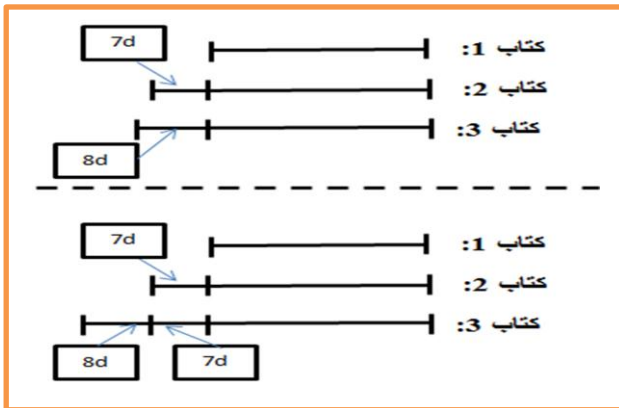
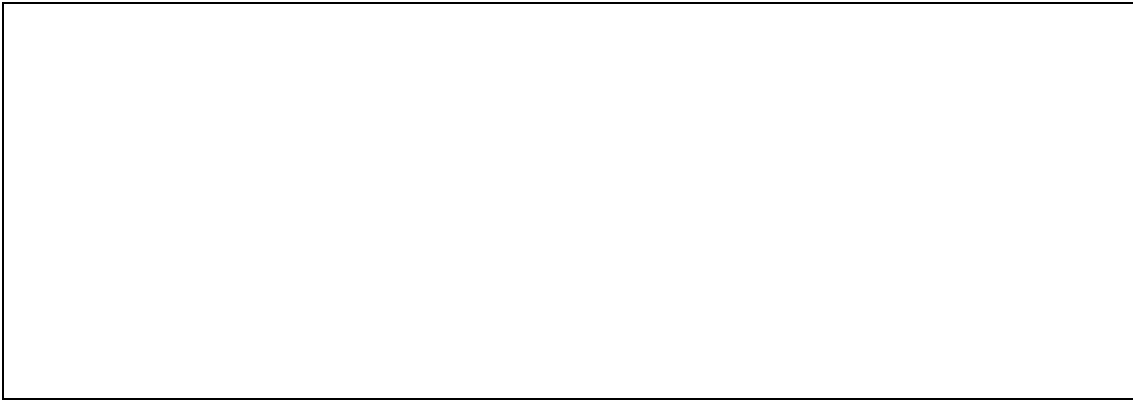
الاسم و اللقب:

القسم: الزمن : 60 دق.

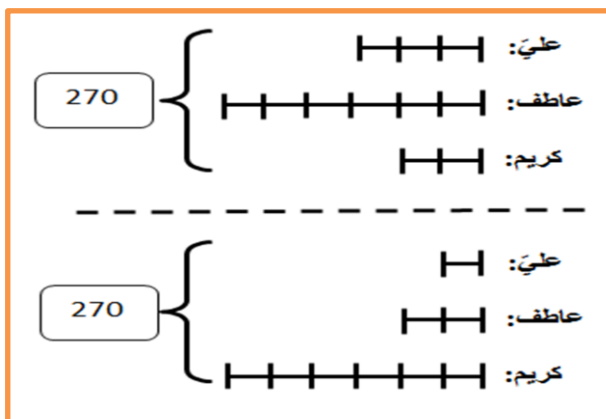
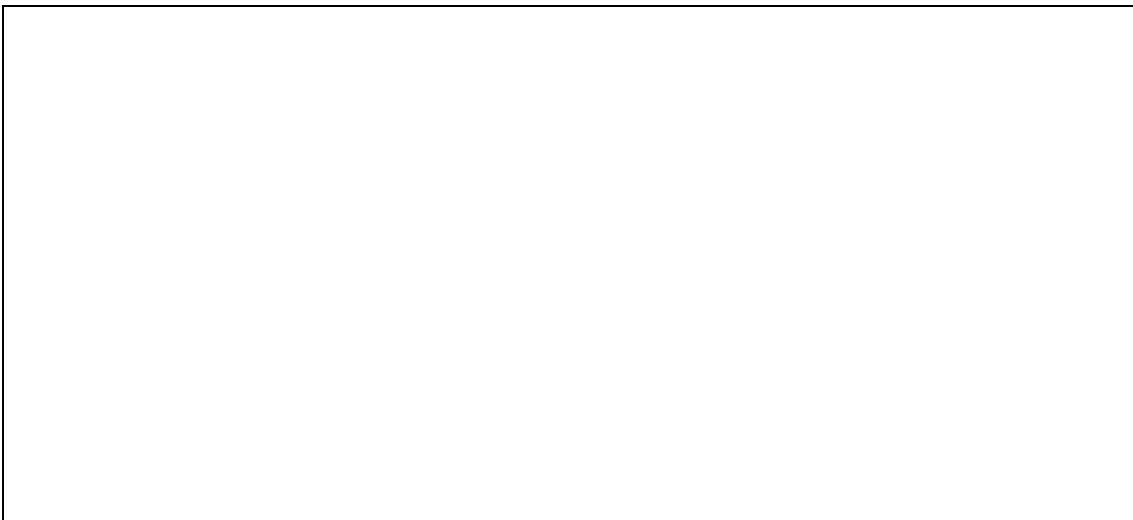
1. في ما يلي، أضع داخل إطار الرسم البياني الموافق لكل وضعية ثم أحلها:
- 2.



يعدّ مصنع 720 عاملا و عاملة.
عدد العاملات يقلّ عن عدد العمال الذكور بـ 56. ابحث عن:
- عدد العمال الذكور،
- عدد العاملات.



اشترت مريم 3 كتب علمية بـ 145 د. يفوق ثمن الكتاب الثاني ثمن الكتاب الأول بـ 7 د و يفوق ثمن الكتاب الثالث ثمن الكتاب الثاني بـ 8 د. ابحث عن ثمن كل كتاب.



عدد كجج عليّ يساوي $\frac{1}{2}$ عدد كجج عاطف وعدد كجج عاطف يساوي $\frac{1}{3}$ عدد كجج كريم. العدد الجملي للكجج 270. كم يملك كل طفل من كجّة.

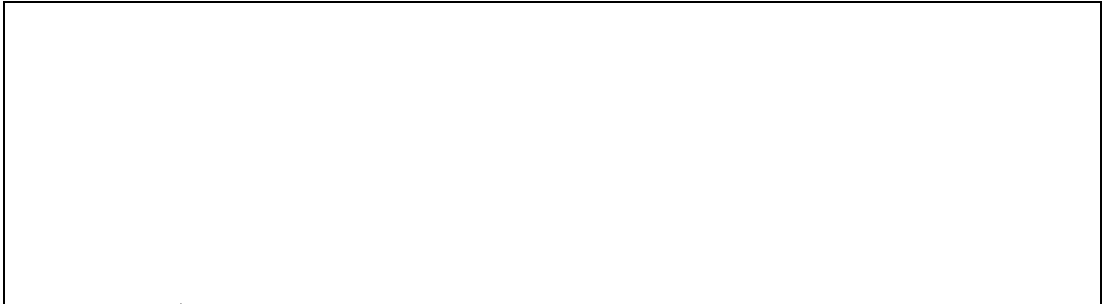


3. أنتج رسماً بيانياً يوافق الوضعية التالية ثم أحلّها:



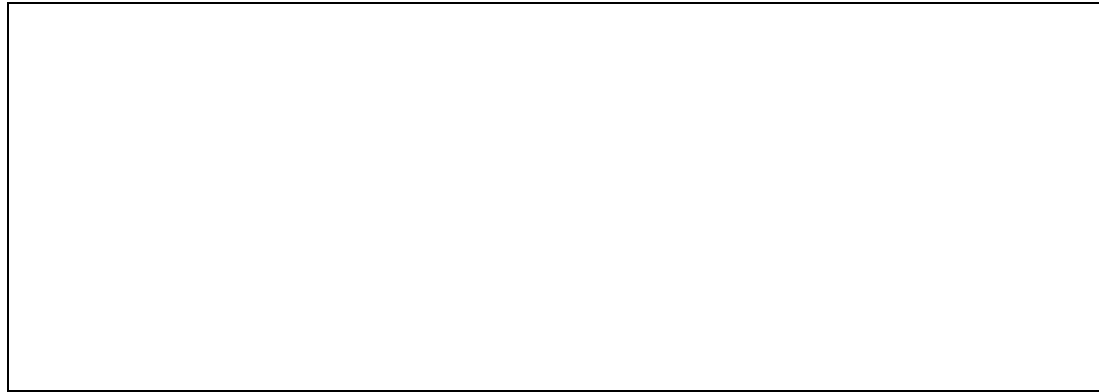
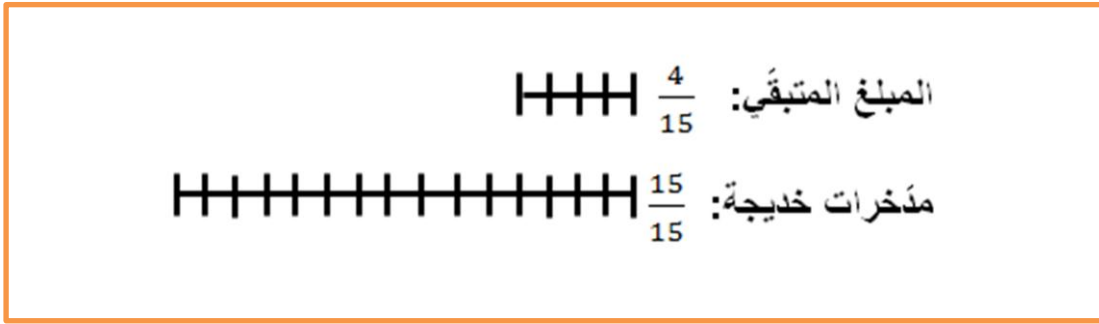
رسم بياني

تملك فاطمة من التّيجان 3 مرّات
أقلّ ممّا تملكه خديجة و مرّتين
أكثر ممّا تملكه زينب. علماً وأنّ
العدد الجملي للتّيجان يساوي
126، كم تملك كلّ بنت من تاج؟



4. معتمداً على الرّسم البياني المقترح، أحلّ الوضعية التالية معللاً إجابتك في كلّ مرحلة من مراحل الحلّ:

اشترت خديجة بمدّخراتها حاسوباً و بقي لها 240 د و هو ما يمثّل $\frac{4}{15}$ جملة المدّخرات. ابحث عن قيمة هذه مدّخرات.



ورقــــــــــــــــة عدد 3 - دراسة استقصائية : 16. Annexe 16

الاسم و اللقب:

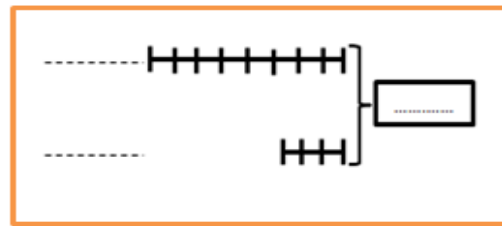
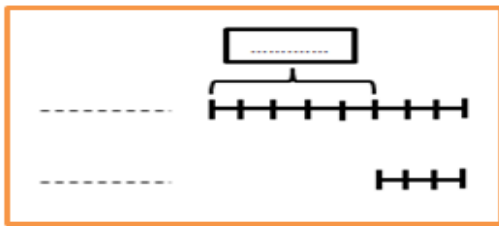
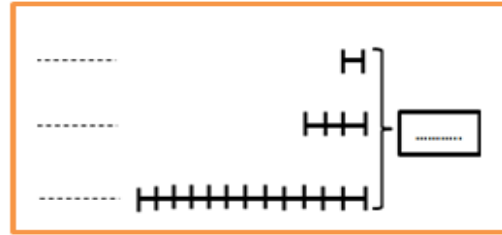
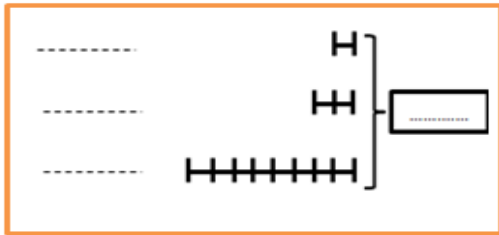
القسم: الزمن : 45 دق.

1. ألصق أمام كلّ وضعية الرّسم البياني الذي يلائمها مع إتمامه بما يناسب:

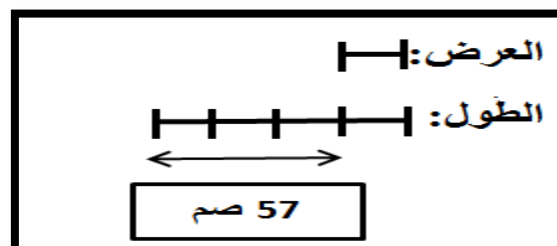
	<p>ثمن حاسوب فاطمة يساوي $\frac{8}{3}$ ثمن طابعتها. ثمن الآلتين معا بالدينار 1122. ابحث عن:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ثمن الطّابعة، - ثمن الحاسوب.
	<p>عدد أقلام هبة يساوي 4 مرّات عدد كرّاساتها، وعدد كرّاساتها يساوي مرّتين عدد كتبها. العدد الجملي للأقلام و الكرّاسات و الكتب 66. ابحث عن عدد كلّ من الكتب و الكرّاسات و الأقلام.</p>

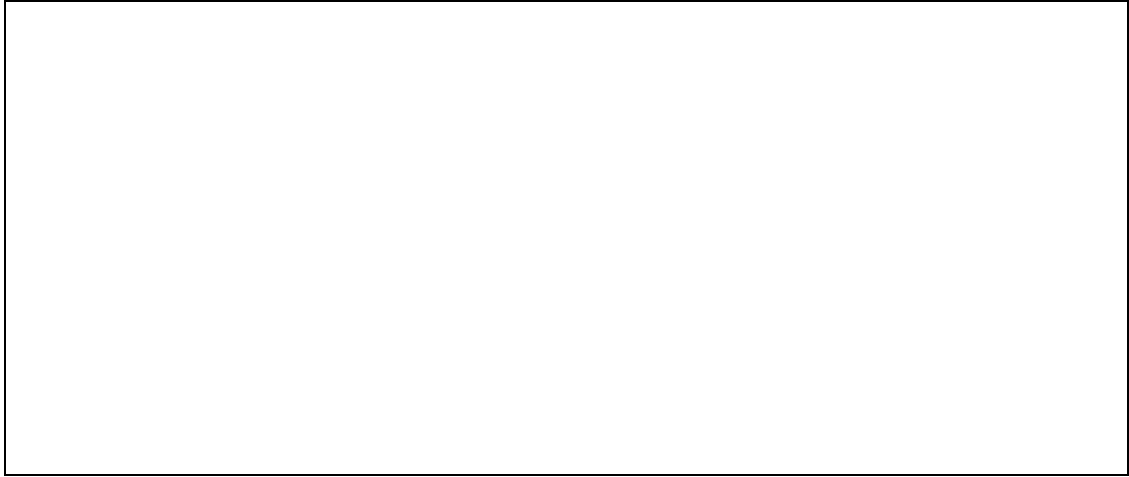
	<p>يملك عماد و زينب و رضا 422 د كما يلي:</p> <p>مناب عماد = $\frac{1}{3}$ مناب زينب،</p> <p>مناب زينب = $\frac{1}{4}$ مناب رضا.</p> <p>ابحث عن مناب كل طفل.</p>
	<p>ثمن قميص أمير يساوي $\frac{3}{8}$ ثمن سرواله. يفوق ثمن السروال ثمن القميص بـ 35د. ابحث عن:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ثمن القميص، - ثمن السروال.

رسوم بيانية للقصّ ثمّ للتصيق:



2. أنتج وضعية توافق الرسم البياني التالي:





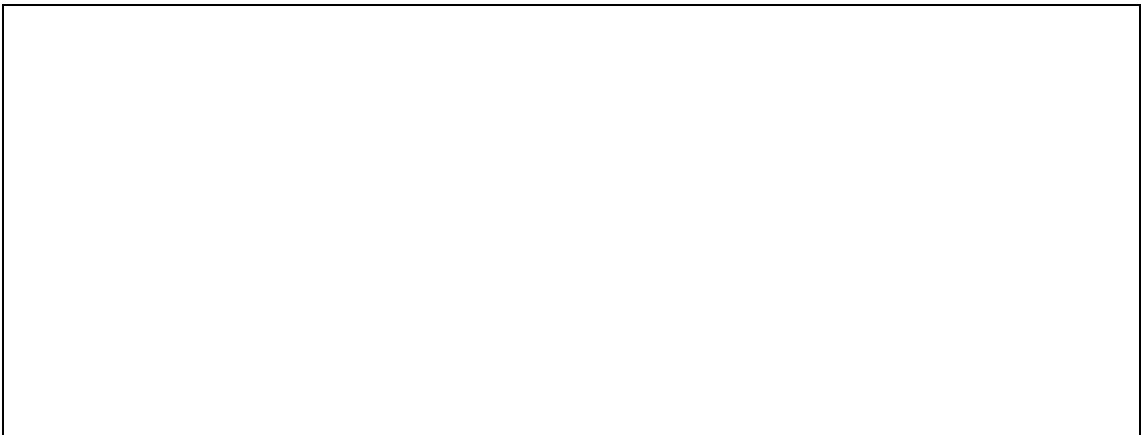
ورقــــــــــــــــة عدد 1 و 2 - تجربة عدد 1 : 17. Annexe 17

ورقــــــــــــــــة عدد 1 (تجربة 1)

الاسم و اللقب:

القسم: الزمن : 60 دق.

التعليمة: ارتفاع منزل أربع مرّات أقلّ من ارتفاع عمارة. مستعينا برسم بيانيّ، مثل الارتفاعين.



الوضعية: ثمن قميص أمير خمس مرّات أقلّ من ثمن سرواله. ثمن اللباسين معا 150د. ابحث عن:

- ثمن السّروال،
- ثمن القميص.

ورقــــة عدد 2 (تجربة 1)

التعليمة: مدّخرات أيمن تساوي $\frac{2}{3}$ مدّخرات إيناس. مثل المبلغين مستعينا برسم بيانيّ.

الوضعية: ثمن حاسوب فاطمة يساوي $\frac{8}{3}$ ثمن طابعتها. ثمن الآلتين 1320د. ابحث عن ثمن كلّ من الآلتين.

18. Annexe 18 : 2 - تجربة عدد 2 ورقــــة عدد 1 و 2

ورقــــة عدد 1 (تجربة 2)

الاسم و اللقب:

القسم: الزمن : 60 دق.

الوضعية 1: يملك أحمد و فاطمة معا 320 كجة. علما و أنّ عدد كجات أحمد يساوي أربع مرّات عدد كجات فاطمة، ابحث عن عدد كجات كلّ طفل.

الوضعية 2: يملك أحمد، عليّ و فاطمة معا 360 كجة. عدد كجاج أحمد يساوي مرّتين عدد كجاج فاطمة، و عدد كجاج فاطمة يساوي ثلاث مرّات عدد كجاج عليّ. كم يملك كلّ طفل من كجة؟

ورقة عدد 2 (تجربة 2)

الوضعية 1: اقتسم محمّد و سارة 198 كجة. أخذ محمّد 36 كجة أكثر من سارة. كم أخذ كلّ طفل من كجة؟

الوضعية 2: اقتسم محمد، سارة و ايناس 198 كجة. أخذ محمد 36 كجة أكثر من سارة، و أخذت سارة 27 كجة أكثر من ايناس. كم أخذ كل طفل من كجة؟

ورقــــــــــــــــة عدد 1 و 2 - تجربة عدد 3 : 19. Annexe 19

ورقــــــــــــــــة عدد 1 (تجربة 3)

الاسم و اللقب:

القسم: الزمن : 60 دق.

التعليمة: طول مستطيل يساوي ثلاث مرّات عرضه. مثلّ البعدين بواسطة رسم بيانيّ.

الوضعية: تملك فاطمة 72 كجة أكثر مما يملكه أحمد. عدد كجج فاطمة يساوي 4 مرّات عدد كجج أحمد. كم يملك كل طفل من كجة؟

ورقـة عدد 2 (تجربة 3)

التّعليمة: مثل البعدين التّالين بواسطة رسم بيانيّ:

$$\text{المسافة المقطوعة} = \frac{3}{7} \text{ المسافة الجمليّة.}$$

الوضعية: أعتد على التّعليمة السّابقة و أحلّ الوضعية التّالية: لزيارة أمّها، قطعت سنية بسيّارتها 180 كم و هو ما يمثّل $\frac{4}{15}$ المسافة الفاصلة بين منزلها منزل أمّها. ابحث عن قيس طول هذه المسافة.

ورقــــــــة التجربة عدد 4 : 20. Annexe 20

ورقــــــــة التجربة 4

الاسم و اللقب:.....

القسم:..... الزمن : 45 دق.

الوضعية: المساحة الجملية لثلاث قطع من الأرض بالم² 2675. مساحة القطعة الأولى تساوي $\frac{3}{5}$ مساحة القطعة الثانية و تزيد مساحة القطعة الثالثة عن مساحة القطعة الثانية بالم² 75. ابحث عن مساحة كل قطعة.

21. Annexe 21 : informations sur les classes tunisiennes et françaises

Les classes qui ont répondu au questionnaire :

- 6 A : École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Cité Ennour Kasserine.
- 6 A : École Primaire Privée Les Collines, Cité Olympique Kasserine.
- 6 B : École Primaire Privée Les Collines, Cité Olympique Kasserine.
- 6 B : École Primaire Elmanar, Cité Elmanar Kasserine.
- 6 C : École Primaire Elmanar, Cité Elmanar Kasserine.
- 6 C : École Primaire Argoub Mimoun, Cité Ennour Kasserine.
- 6C : École Primaire Cité Olympique, Cité Olympique Kasserine.
- 6 C : École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Cité Ennour Kasserine.
- 6 D : École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Cité Ennour Kasserine.

- 6 D : Collège Noës de Pessac, Bordeaux.
- 6° 5 : Collège Aliénor d'Aquitaine, Bordeaux.

Les deux classes de la séquence expérimentale :

- 6 A : École Primaire Privée Les Collines, Cité Olympique Kasserine.
- 6 C : École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Cité Ennour Kasserine.

Les classes enseignées par nous-même :

- 6 A : École Primaire Privée Les Collines, Cité Olympique Kasserine.
- 6 C : École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Cité Ennour Kasserine.
- 6 D : École Primaire Omar Ibn Elkhattab, Cité Ennour Kasserine.