



HAL
open science

Richard Feynman et la mécanique quantique : genèse, développement et pérennité du concept d'intégrale de chemins

Alain Bousselin

► **To cite this version:**

Alain Bousselin. Richard Feynman et la mécanique quantique : genèse, développement et pérennité du concept d'intégrale de chemins. Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2021. Français. NNT : 2021PAUU1090 . tel-03252449

HAL Id: tel-03252449

<https://theses.hal.science/tel-03252449v1>

Submitted on 7 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Épistémologie et Histoire des Sciences

Par

Alain BOUSSELIN

RICHARD FEYNMAN ET LA MÉCANIQUE QUANTIQUE : GENÈSE, DÉVELOPPEMENT ET PÉRENNITÉ DU CONCEPT D'INTÉGRALE DE CHEMINS

Thèse dirigée par Messieurs les professeurs Jacky Cresson et Laurent Jalabert
et soutenue le 27 mai 2021
devant la Commission d'Examen composée de :

Examineur : M. Gérard Grenier	Maître de conférence à l'Université Lyon1
Examineur : M. Jean-Francis Loiseau	Professeur émérite (Université de Pau)
Rapporteur : M. Richard Taillet	Professeur à l'Université de Savoie
Rapporteur : M. Jean-Claude Zambrini	Professeur à l'Université de Lisbonne

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Épistémologie et Histoire des Sciences

Par

Alain BOUSSELIN

RICHARD FEYNMAN ET LA MÉCANIQUE QUANTIQUE : GENÈSE, DÉVELOPPEMENT ET PÉRENNITÉ DU CONCEPT D'INTÉGRALE DE CHEMINS

Thèse dirigée par Messieurs les professeurs Jacky Cresson et Laurent Jalabert
et soutenue le 27 mai 2021
devant la Commission d'Examen composée de :

Examineur : M. Gérard Grenier
Examineur : M. Jean-François Loiseau
Rapporteur : M. Richard Taillet
Rapporteur : M. Jean-Claude Zambrini

Maître de conférence à l'Université Lyon1
Professeur émérite (Université de Pau)
Professeur à l'Université de Savoie
Professeur à l'Université de Lisbonne

A mes petits-enfants : Laura, Lino, Adam et Louison, pour leur montrer que quels que soient l'âge et les conditions, il ne faut jamais s'interdire d'entreprendre.

Il y a deux sortes de génies, les « ordinaires » et les « magiciens ». Un génie ordinaire, c'est quelqu'un d'aussi bon que vous et moi le serions, si nous étions simplement bien meilleurs.

La façon dont son esprit travaille ne pose aucun mystère. Une fois que nous avons compris ce qu'il a fait, nous sommes certains que nous aurions pu en faire autant. Il en va différemment avec les magiciens. Ils sont, pour reprendre le jargon mathématique, dans le supplémentaire orthogonal de là où nous sommes, et le fonctionnement de leur esprit nous reste, en général, incompréhensible. Même une fois qu'on a compris ce qu'ils ont fait, le processus par lequel ils y sont parvenus demeure complètement obscur. Ils ont rarement, et parfois jamais, de disciples, parce qu'on ne peut les égaler, et il doit être terriblement frustrant, pour un esprit jeune et brillant, d'affronter le mécanisme mystérieux qui caractérise l'esprit d'un magicien. Richard Feynman en est un, et de tout premier plan.

Mark KAC (Mathématicien américain : 1914 – 1984)

Disséminée dans l'univers, l'énergie primordiale qui s'est exprimée en créant l'espace, la matière et le temps, avance inexorablement vers une complexité toujours plus grande. De la matière inerte au vivant, elle se transforme sans cesse. Dans le cœur des étoiles, elle devient tous les atomes plus ou moins lourds qui vont donner naissance au vivant. De l'ADN à l'être multicellulaire, elle semble se transcender chez l'homme en cette activité de l'esprit que l'on nomme la pensée.

Aussi, pourrait-on définir la science par le plaisir de chercher et de comprendre le sens profond de ce qui nous entoure.

Aussi, pourrait-on définir l'épistémologie comme l'apport de la connaissance par le cheminement de la pensée.

Et si la lecture de cette thèse communique à tous un réel sentiment d'émerveillement pour l'extraordinaire efficacité des mathématiques dans l'explication des phénomènes naturels, alors mon but sera atteint.

Remerciements

Ce travail se situe à la frontière entre trois disciplines : les mathématiques, la physique et l'histoire, aussi, mes remerciements s'adressent-ils en premier à mes trois responsables du Comité de suivi de thèse :

- Le mathématicien et Professeur Jacky CRESSON,
- L'historien et Professeur Laurent JALABERT,
- Le physicien et Directeur de Recherches Daniel SANTOS.

Je les remercie sincèrement pour leurs conseils et leur soutien moral, qui ont permis que cet ouvrage historique voit le jour.

Je dois particulièrement la suggestion de mon planning de travail à Jacky CRESSON et c'est grâce à ce plan que l'on retrouve via la table des matières de la thèse que j'ai pu avancer méthodiquement et avec rigueur.

Avant que je puisse étudier l'histoire de la mécanique quantique à travers les travaux de Richard Feynman et des protagonistes de cette théorie, d'éminents professeurs m'ont enseigné la mécanique quantique et la physique des particules à l'Université Claude Bernard Lyon 1 :

- Aldo DEANDREA,
- Gérald GRENIER,
- Michel LAMBERT.

Je remercie aussi particulièrement Nicolas CHANON et les chercheurs de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon qui ont toujours répondu patiemment à mes sollicitations, à travers les cours que j'ai suivis à l'Université Ouverte Lyon 1.

Mes remerciements vont aussi à mes professeurs du Master 2 Recherche en Logique, Epistémologie et Histoire des Sciences de l'Université de Lorraine, qui m'ont permis d'acquérir des compétences :

- en analyse historique,
- en construction rationnelle d'une argumentation,
- en gestion d'une bibliographie relative à la problématique traitée,

afin d'avoir pu organiser mon travail tel qu'on le trouve dans l'Introduction générale.

Et ceci dans le but de produire ce document issu de mes recherches, avec le souci constant de sa valeur épistémologique par toutes les réflexions et pensées que j'ai mis en avant afin de conduire à l'enchaînement des faits montrant la véracité et la validité de la théorie de la mécanique quantique de Feynman basée sur l'intégrale de Feynman.

Je ne sous-estime pas l'importance qu'ont pu avoir les conférences organisées par mon Laboratoire de rattachement, l'ITEM, de l'Institut Claude Laugénie, dans la manière de concevoir la méthode historique utile à toute recherche en épistémologie.

Que son directeur Laurent JALABERT et sa responsable communication Joëlle SAUCÈS en soient amplement remerciés.

Je remercie aussi vivement :

- Le Professeur Jacques JAUSSAUD, Directeur Adjoint de l'Ecole Doctorale des Sciences Sociales et Humanités ED 481,

- Jean-Marc SOTIROPOULOS, Directeur de Recherches au CNRS à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour,
pour les conseils judicieux et l'aide qu'ils m'ont prodigués dans la présentation de mes travaux de recherche lors du concours « Ma thèse en 180 secondes ».
Ils m'ont permis de synthétiser et d'exprimer clairement de manière concrète des notions complexes assez abstraites associées au sujet de ma thèse.

Je n'oublie pas dans mes remerciements :

- Catherine SALOMONI dont l'objectif de son cours d'anglais m'a aidé à mieux présenter en anglais le résultat de mes recherches,
- Robert TORRES dont le cours d'anglais très pragmatique m'a permis d'être plus à l'aise dans les traductions des diverses publications traitant de physique quantique,
- Ana ARMENTA pour son cours d'espagnol très bien structuré.

Je tiens aussi à remercier :

- Marie-Josée JOUBERT du secrétariat administratif de l'Ecole Doctorale des Sciences Sociales et Humanités ED 481,
 - Anne-Marie VENANCIO du secrétariat de l'Ecole Doctorale des Science et leurs Applications ED 211 et de l'Ecole Doctorale des Sciences Sociales et Humanités ED 481,
- pour toutes les réponses qu'elles m'ont apportées dans la logistique inhérente à L'Ecole Doctorale.

- Enfin, je remercie Vincent DAMERON, mon voisin, ami et collègue du Conseil Municipal de Marsas, petit village de 71 habitants situé dans nos montagnes des Hautes-Pyrénées, pour m'avoir si gentiment prêté ses cours de l'Ecole Polytechnique.

Ma pensée va aussi à Céline Ricaud, Jean-Michel escoula, Guy RICAUD, Jérôme DUBAU, tous membres du Conseil Municipal et à notre maire Philippe VIAU pour l'indulgence qu'ils ont à mon égard lorsque je ne peux, hélas, être présent à certaines séances du Conseil.



Résumé

Après le bouleversement à la fois intellectuel et philosophique qu'ont suscité la théorie des quanta et celle de la relativité restreinte, le vingtième siècle a été confronté au besoin d'approfondir la nature exacte des quatre interactions fondamentales. Ces dernières expliquent tous les processus physiques, chimiques ou biologiques qui font partie de notre histoire.

La contribution du physicien Richard Feynman (11 mai 1918 - 15 février 1988) est principalement analysée car c'est lui qui trouva, avec beaucoup d'audace dans sa formulation mathématique, la méthode des *intégrales de chemins* ; cette méthode permet le développement de la théorie quantique des champs. Et c'est cette théorie qui va justement rendre possible une meilleure connaissance de l'infiniment petit.

La théorie quantique des champs a commencé par l'électrodynamique quantique, pour laquelle Feynman a été récompensé par un prix Nobel en 1965. Et le domaine d'application de l'intégrale de chemins vise toute la physique microscopique, des quatre interactions (dont celle associée au boson de Higgs avec toutes les particules) aux tentatives d'unification, en passant par le mécanisme de création et d'annihilation des particules subatomiques.

Les travaux de Feynman en mécanique quantique à travers la **genèse, le développement et la pérennité du concept d'intégrale de chemins** constituent l'objet de notre thèse.

La thèse est structurée en neuf chapitres.

Le premier chapitre se situe entre 1900 et 1941 et concerne la partie historique de la mécanique quantique. Nous trouvons aussi la description d'un panorama complet (1927 à 1941) des problèmes de cette nouvelle physique associée au couplage entre les champs électromagnétiques et les charges électriques au niveau quantique (l'Electrodynamique Quantique).

Nous donnons de manière chronologique, en nous basant toujours sur des sources primaires, une vue d'ensemble assez technique de l'histoire conceptuelle de la mécanique quantique, afin de connaître son état et ses implications lorsque Feynman est étudiant au MIT de l'automne 1935 à l'été 1939.

En outre, d'un point de vue épistémologique, une réflexion profonde sur l'origine des quanta et sur leurs premiers développements permettra de prendre conscience du travail accompli par Feynman quelques années plus tard.

Qui plus est, les travaux du physicien américain font souvent référence à ceux des pionniers des années 1920 et 1930, afin de vérifier la convergence de ses résultats avec ceux des théories reconnues.

Ce chapitre repose sur les publications de Planck, Einstein, Bohr, Louis de Broglie, Heisenberg, Schrödinger et Dirac.

Le deuxième chapitre se situe entre 1935 et 1939 correspondant à la période pendant laquelle Feynman est étudiant au MIT (Massachusetts Institut of Technology).

Il commence par une introduction qui permet de percevoir chez Feynman la manière dont il s'est construit, afin de comprendre la nature de l'homme, son mode de pensée et son originalité.

Puis nous consacrons une thématique sur le point de vue de Feynman concernant la mécanique quantique au MIT, afin de déceler l'origine de sa motivation et les problèmes qu'il voudrait voir résolus.

Pour réaliser ce travail, bon nombre d'archives et d'interview de Feynman ont été consultées. Le recoupement avec les ouvrages de Feynman dont son autobiographie ainsi qu'avec les biographies de ceux qui l'ont côtoyés, garantissent une grande fiabilité de nos propos.

Le troisième chapitre est situé dans la période allant de 1939 à 1941 et correspondant aux années de Feynman à Princeton en vue d'obtenir son doctorat.

Il montre, dans un premier temps, que le fait d'utiliser des potentiels pour moitié avancés et pour moitié retardés, afin d'éliminer les infinis de l'électrodynamique classique, permet à Feynman de s'engager dans la voie du principe de moindre action.

Dans ce chapitre, via les Annexes 15 à 19, je trace en détail l'histoire des différentes étapes du travail de recherche de Feynman qui vont peu à peu l'orienter vers la découverte de l'intégrale de chemins. Il se termine par la manière dont Feynman retrouve (en 1941) l'équation de Schrödinger en interprétant différemment la formulation quantique du principe de moindre action ébauché par Dirac en 1933.

Le quatrième chapitre contient les réflexions et le travail de Feynman concernant la construction de l'action qui sera l'objet de sa thèse de Doctorat présentée en juin 1942.

Il montre comment le futur physicien théoricien relie la fonction d'onde au Lagrangien afin de voir tout naturellement se dessiner la notion de chemins pour une particule dans l'espace-temps.

Le cinquième chapitre couvre la période allant de 1942 à 1948. Il s'agit d'une période pendant laquelle le jeune physicien américain n'a de cesse de réfléchir sur une idée de trajectoires multiples d'une particule dans l'espace-temps, c'est-à-dire sur la construction d'une intégrale comprenant comme variable d'intégration une fonction représentant tous les chemins d'une région de l'espace-temps, afin de bâtir un nouveau formalisme en mécanique quantique.

Ce chapitre se soucie aussi de montrer comment, à partir des travaux antérieurs, principalement de Huygens et de De Broglie, Feynman va concrétiser sa notion d'intégrale de chemins ; il met aussi en valeur le nouveau point de vue de Feynman concernant le paradigme de la trajectoire d'une particule en mécanique quantique.

Le sixième chapitre, basé en partie sur les deux importantes publications de septembre 1949, montre la solution mise en place par Feynman consistant à visualiser l'intégrale de chemins en termes de dessins, ainsi que la méthode de calcul qui leur sont allouée. Nous sommes alors en mesure de comprendre comment la puissance de cette construction intellectuelle l'a conduit tout naturellement à la théorie quantique des interactions électromagnétiques, théorie pour laquelle il sera co-lauréat du prix Nobel de physique en 1965.

J'ai aussi analysé en détail les diagrammes issus du concept de l'intégrale de chemins qui sont les plus pertinents, afin de donner une idée claire de leur obtention et de leur efficacité. A ce propos, afin de ne pas surcharger la thèse de termes trop techniques, j'ai conçu les annexes 1 à 4 pour expliquer comment sont obtenus les propagateurs de l'électron et du photon pour différents contextes dans le but de mesurer toute l'originalité de la théorie quantique de Feynman concernant le champ électromagnétique.

Le septième chapitre explique que l'intégrale de chemins reste une vue intuitive, malgré la publication de Feynman (1950) tentant de calculer de manière rigoureuse les règles de sa théorie de l'électrodynamique quantique.

Nous examinons donc les travaux de divers mathématiciens (de 1951 à 2020) qui tentent d'apporter un cadre rigoureux aux intégrales de chemins selon différentes approches.

Ainsi, nous aborderons les travaux associés aux théories :

- de l'intégration,
- stochastiques dans l'analyse du bruit blanc et du mouvement brownien,
- basées sur la construction d'une distribution de chemin.

Le huitième chapitre est dédié à la recherche et à l'étude de la pérennité de l'intégrale de chemins à travers la Théorie Quantique des Champs ; ma recherche et mon étude s'effectuant via les diagrammes de Feynman, qui sont la partie calculatoire de l'intégrale de chemins.

J'ai donc détaillé avec précision selon un même canevas, le rôle joué par les particules subatomiques intervenant dans les interactions fortes, les interactions faibles et celle associée au mécanisme de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie.

En effet, cette approche m'a paru indispensable pour appréhender avec clarté l'ensemble des documents d'archives que j'ai consulté.

Ma recherche a donc été de montrer le rôle joué par les diagrammes de Feynman dans une trentaine de publications et de thèses de Doctorat dont une bonne dizaine examinée en détail (pour une période allant de 2000 à 2019), sans oublier les travaux des lauréats de prix Nobel tels que Gross, Politzen, Wilczek, Weinberg, Salam, Glashow et Higgs (entre 1979 et 2013).

Le neuvième chapitre cherche à savoir si les intégrales de chemins irriguent un certain nombre de travaux en mathématiques pures et si oui, si ces dernières bénéficient alors d'une meilleure compréhension des théorèmes et des structures originales permettant une généralisation facilitant les connexions entre leurs différentes branches, voire même extrapolant de nouveaux points de vue.

Aussi, j'ai recherché les publications (entre 1960 et 2020) se rapportant à l'important travail des mathématiciens dans cette perspective. J'ai donc vérifié dans quelles mesures les recherches vers de nouveaux concepts non explorés jusqu'à présent ont été impactées par les intégrales dites de Feynman issues de la découverte des intégrales de chemins.

Abstract

After the upheaval, both intellectual and philosophical, which the quantum and special relativity theories stirred, the twentieth century was marked by the need to understand the true nature of the four fundamental interactions. The latter explain all the physical, chemical and biological processes that make up our history.

The contribution of the physicist Richard Feynman (11 May 1918 – 15 February 1988) is the subject of this study, because through an audacious mathematical formulation, he found method of *path integrales*; this method was going to allow for the Fields Quantum Theory development. That Fields Theory was to provide better knowledge of the infinitely small.

The Fields Quantum Theory started by the conception of Quantum Electrodynamics, for which Feynman was awarded a Nobel prize in 1965. Its application area concerns all the microscopic physics from the four interactions whose Higgs boson) to the unification attempt while taking into account the mechanisms of subatomic particle creation and annihilation.

Feynman's work through genesis, development and longevity of path integral are the subject of my thesis.

The thesis is divided into nine chapters.

The first one takes place on the hand between 1900 and 1941 regarding Quantum mechanics history part. We also find the description of a complete panorama about problems of this new science concerning coupling between electromagnetic fields and electric charges at quantum level (Quantum Electrodynamics: QED).

We give a chronological account of a rather technical overview of the conceptual history Quantum mechanics based on primary sources. We thus mean to find out the state of Quantum mechanics and its implications when Feynman was a student at MIT from Autumn 1935 to Summer 1939.

In addition, it seems that from an epistemological point of view, reflecting on the origin of Quanta and their first developments goes to apprehend Feynman's momentous works many years later.

Moreover, they often refer to pioneering works of the nineteen twenties and the nineteen thirties in order to check the convergence of Feynman's results with recognized theories.

This chapter is based on publications of Planck, Einstein, Bohr, Louis de Broglie, Heisenberg, Schrödinger and Dirac.

The second chapter covers the period between 1939 and 1949 when Feynman was studying at MIT (Massachusetts Institut of Technology).

This chapter begins by introducing Feynman in order to grasp the way his father fashioned his perception of natural things so as to understand the man's nature, his thought and his originality. Lastly, we devote a topic to Feynman's point of view on Quantum Theory so as to find out what initially motivated him and what issue he wanted solved.

To carry out this work, many archives and interview were consulted. Cross-checking with Feynman's books whose his autobiography as well as biography of people who were close to him, guarantee a great reliability of our writings.

The third chapter takes place between 1939 and 1941 when Feynman was studying at Princeton in order to obtain his PhD (Philosophiæ doctor).

In the first place, we show that the fact Feynman uses symmetric combination of half-advanced and half-retarded potentials in order to eliminate classic electrodynamics infinities permits to take into consideration the least action principal.

In this chapter, via appendices 15 to 18, I detail the history of the different stages of Feynman's research work which will gradually orient him towards the discovery of the path integral. It ends with the way in which Feynman finds (in 1941) the Schrödinger equation by interpreting differently the quantum formulation of the principle of least action outlined by Dirac in 1933.

The fourth chapter contains the thoughts and work of Feynman concerning the construction of the action that will be subject of his doctoral thesis will be presented in June 1942.

It shows how the future theoretical physicist connects the wave function to the Lagrangian in order to see quite naturally the notion of path for a particle in space-time.

The fifth chapter takes place on the hand between 1942 and 1948. This is a period during which the young American physicist deeply reflects on an idea of multiple trajectories of a particle in space-time, i.e. on the construction of an integral including as variable of integration all the paths of a region of space-time, in order to build a new formalism in quantum mechanics.

This chapter is also concerned with showing, how, starting from the previous works of Huygens and De Broglie, Feynman will concretize its notion of path integral; it also highlights Feynman's new perspective on the paradigm of particle trajectory in quantum mechanics.

The sixth chapter, based in part on the two publications dating September 1949, shows the solution implemented by Feynman to visualize path integral in term of drawing, as well as his method of calculation. Then, we are able to understand how the power of this intellectual construction leads him quite naturally to electromagnetic interactions quantum theory, theory for which he will be co-winner of Nobel prize in physics in 1965.

I also analyzed in detail the diagrams resulting from path integral concept which are the most relevant, in order to give a clear idea of their obtaining and their efficiency. In this regard, in order not to overload the thesis with many technical terms, I have designed appendices 1 to 4 to explain how electron and photon propagators are obtained in order to understand all the originality of Feynman's electromagnetic field quantum theory.

The seventh chapter explains that *path intergrales* stays an intuitive vision although Feynman published (1950) how he rigorously calculated Quantum electrodynamics theory rules.

Therefore we will examine the mathematical works on *path integrales*, oriented towards the research of a rigourous foundation of these integrales, according to different approaches.

So, we will analyse mathematical works associated with theories here after:

- integration,
- stochastic,
- construction of Discret-time Distributions on Hilbert Space.

The eighth chapter concerns the longevity of the *path integrales* concept through Fields Quantum Theory with regard to:

- electromagnetic interaction,
- strong interaction,
- weak interaction,
- Higgs's boson interaction coupled with all the particles allows us to understand mass origin.

My research and study are carried out via Feynman diagrams, which are the computational part of the path integral.

Therefore, I have detailed with precision according to a same framework, the role of subatomic particles involved in strong interactions, weak interactions and that associated with the Higgs mechanism in the context of spontaneous symmetry breaking.

Indeed, this approach seemed essential to me to understand clearly all the archival documents I consulted.

My research was therefore to show the role of Feynman diagrams in some thirty publications and doctoral theses, many of them examined in detail (between 2000 and 2019), without forgetting work of Nobel Prize laureates such as Gross, Politzen, Wilczek, Weinberg, Salam, Glashow and Higgs (between 1979 et 2013).

The ninth chapter is concerned to know if path integral could irrigate research regarding fundamental mathematics that could benefit a better understanding about theorems and original structures allowing a generalization facilitating connections between their different branches; even extrapolating new points of view.

Also, I searched publications (between 1960 and 2020) relating important work of mathematicians in this perspective. Therefore, I checked if new concepts, not explored so far, could have been impacted by Feynman integrals resulting from path integrals discovery.

Table des matières

	Page
Introduction générale	23
1- Brève histoire de la mécanique quantique de 1900 à 1939	36
<u>Résumé</u>	
1.1- Introduction	37
1.2- La mécanique quantique : ses origines et ses difficultés	38
1.2.1- Les pères fondateurs	38
a) Planck et le rayonnement du corps noir (1900)	39
b) Einstein : l'explication de l'effet photoélectrique (1905) et la dualité onde-corpuscule (1909)	44
c) Le modèle atomique de Bohr (1913)	48
d) Louis de Broglie et sa mécanique ondulatoire (novembre 1924)	53
e) La mécanique matricielle (novembre 1925) et le principe d'indétermination de Heisenberg (1927)	60
f) Schrödinger et sa fonction d'onde (1926)	63
g) La mécanique quantique relativiste de Dirac (1928) et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule (1939)	68
1.2.2- Les principaux problèmes	73
1.3- Références	76
2- La physique quantique présentée aux étudiants du MIT entre 1935-1939 et la perception de Feynman	79
<u>Résumé</u>	
2.1- Introduction	80
2.2- Arrivée au MIT et choix de Feynman pour la physique	82
2.3- Les cours de physique au MIT principalement en mécanique quantique	82
2.4- Perception de Feynman sur sa formation au MIT	84
2.5- Le travail de Bachelor of science de Feynman	89
2.6- Conclusion	90
2.7- Références	92
3- Vers l'intégrale de chemins. Les années à Princeton (1939 - 1942)	94

Résumé

3.1- Introduction	95
3.1.1- L'université de Princeton	95
3.1.2- Le professeur John Wheeler	96
3.1.3- Les idées de Feynman	97
3.1.4- Description de notre travail et documentation associée	97
3.2- Les années de thèse à Princeton (1939-1942)	98
3.2.1- La résistance de rayonnement (1939-1940)	99
a) Le problème de l'auto-interaction de l'électron	99
b) L'idée de Feynman	100
c) L'action à distance remplace la notion de champ	101
d) Les réflexions de Wheeler suite aux idées de Feynman	102
3.2.2- Wheeler et une théorie de l'interaction à distance : moitié avancée, moitié retardée (1940-1941)	103
a) La proposition de Wheeler (1940)	103
b) La rencontre puis le rendez - vous chez Einstein (fin 1940-Début 1941)	104
c) Les publications de 1941, 1945 et 1949	107
3.2.3- Vers la découverte de l'intégrale de chemin : chronologie	108
a) La volonté de quantifier l'action	108
b) Feynman butte sur la quantification de l'action	109
c) La solution passe par Dirac	110
d) Le papier de Dirac	110
e) L'interprétation par Feynman du papier de Dirac	113
f) Feynman retrouve l'équation de Schrödinger	117
3.3- Références	122

4- Les débuts de l'intégrale de chemins 124

Résumé

4.1- Introduction	124
4.2- Le nouveau formalisme de la théorie quantique basé sur l'intégrale de chemins (thèse de Feynman : 1942)	126
4.3- Les limites du nouveau formalisme	131
4.4- L'histoire de Feynman et du principe de moindre action	137
4.5- Feynman et Newton	138
4.6- Références	139

5- L'intégrale de chemins 141

Résumé

5.1- Introduction	142
5.2- La première mise en forme des idées de Feynman sur un nouveau formalisme en mécanique quantique basé sur l'intégrale de chemins	143
5.2.1- Les principes de Fermat et d'Huygens	144
a) Principe de Fermat concernant la réfraction	145
b) Principe d'Huygens en optique ondulatoire	147
5.2.2- Idée de base de la formulation lagrangienne de la mécanique quantique : le principe de Feynman	150

5.2.3- Les avantages du nouveau point de vue de Feynman : le paradigme de la trajectoire (le chemin)	152
5.2.4- Les deux postulats de quantification de Feynman	155
a) Postulat 1	155
a.1) Amplitude de probabilité dans la théorie quantique de Schrödinger	156
a.2) Amplitude de probabilité dans la théorie quantique de Feynman	157
b) Postulat 2 : la relation fondamentale $\langle x''t'' x't' \rangle$	159
c) Application des deux postulats au calcul du propagateur de Feynman (le noyau ou kernel) pour une particule libre	161
d) Interprétation physique du propagateur de Feynman pour la particule libre	163
d.1) Energie et Impulsion	165
d.2) Optique et mécanique analytique	167
d.3) Réflexion sur l'essence même de la phase du propagateur	167
5.2.5- Conclusion	170
5.3- Références	170
6- Les aspects calculatoires de l'intégrale de chemins	172
<u>Résumé</u>	
6.1- Introduction	173
6.2- Les idées fondatrices , les règles et les méthodes de calcul en Electrodynamique Quantique	174
6.2.1- Le concept symbolique des diagrammes de Feynman	174
6.2.2- Introduction des diagrammes par Feynman	174
6.2.3- Formalisme des diagrammes	177
6.2.4- Statut des diagrammes	179
6.3- Illustrations des calculs de Feynman par les diagrammes	181
6.3.1- L'analyse quantitative de l'interaction fondamentale entre deux électrons (diffusion Möller)	182
6.3.2- L'analyse qualitative de l'interaction d'un électron avec lui-même	190
6.3.3- L'analyse qualitative de la diffusion Compton	192
6.3.4- L'analyse qualitative de la polarisation du vide associée à la diffusion d'un électron incident par un photon : le problème de la renormalisation	192
6.4- Comment Feynman justifie ses procédés de calcul	195
6.4.1- La seconde quantification	196
6.4.2- Le critère d'invariance de jauge	197
6.5- Conclusion	198
6.6- Références	199

7- Vers un cadre rigoureux pour les intégrales de chemins	202
<u>Résumé</u>	
7.1- Introduction	203
7.2- Présentation de la base de données MathSciNet	205
7.3- Méthode de travail	206
7.4- Période de recherche allant de 1951 à 1975 : Cécile DeWitt-Morette	208
7.5- L'année charnière 1976 : Sergio Albeverio et Raphael Hoegh-Krohn	211
7.6- Période de recherche allant de 1977 à 2020	224
7.6.1- Années 1983, 1993, 2002 : travaux de Ludwig Streit , Takeyudi Hida et José L. Silva	224
7.6.2- Années 1993 , 1995 : Les travaux de Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette	233
a) Les réflexions de Pierre Cartier en 1993	234
b) Une nouvelle perspective concernant l'intégration fonctionnelle (1995)	243
7.6.3- Années 1999, 2008, 2012 : Les travaux de Erik G.F. Thomas , Mathieu Beau et Tony Dorlas, Sonia Mazzucchi	249
7.7- Conclusion	260
7.8- Références	261

8- Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs 264

Résumé

8.1- Introduction	265
8.2- L'intégrale de chemins et la recherche fondamentale en Théorie Quantique des Champs	268
8.2.1- Une nouvelle façon plus efficace de faire de la physique	269
8.2.2- Le paradigme de l'Electrodynamique Quantique	272
a) La critique des concepts d'espace absolu et de simultanéité du temps	272
b) De l'Electrodynamique Quantique à la théorie quantique des champs	275
c) La puissance de la pensée chez Feynman	276
8.2.3- La chromodynamique quantique	281
a) Le modèle standard des particules élémentaires en chromodynamique quantique	282
b) Condition d'invariance de jauge locale en chromodynamique quantique	286
c) La chromodynamique quantique étudiée à partir des diagrammes de Feynman : Travaux des physiciens	288
8.2.4- La théorie des interactions faibles	297
a) Le modèle standard des particules élémentaires en Radioactivité	298
b) Le groupe de symétrisation $SU(2)$ et l'interaction faible	300
c) L'interaction faible étudiée à partir des diagrammes de Feynman : Travaux des physiciens	301

8.2.5- Le boson de Higgs	311
a) Brisure spontanée de symétrie : La courbe $V(\Phi)=f(\Phi)$ en "chapeau mexicain"	312
b) Recherche théorique du boson de Higgs dans un contexte de brisure spontanée de symétrie associé à une symétrie de jauge globale	314
c) Recherche théorique du boson de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie relative au modèle standard des interactions faibles associé à une symétrie de jauge locale (mécanisme de Higgs)	317
d) Principe de recherche expérimentale du boson de Higgs au LHC : les diagrammes de Feynman	323
e) Publications sur le boson de Higgs se couplant aux particules massives du modèle standard et portant sur l'utilisation des diagrammes de Feynman , à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon	331
8.3- Références	332

9- Une autre pérennité du concept d'intégrale de chemins : La recherche en mathématique pure 336

Résumé

9.1- Introduction	337
9.2- Méthode de travail et résultats obtenus	340
9.3- Les domaines concernés en mathématique pure (non exhaustif)	341
9.3.1- Les matroïdes	341
9.3.2- Les fonctions zêtas	342
9.3.3- Les fonctions polylogarithmes	342
9.3.4- Les fonctions polyzêtas	343
9.3.5- les multiple-polylogarithmes et hyperlogarithmes	345
9.3.6- L'algèbre de Hopf	347
9.3.7- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur	349
9.3.8- Les fonctions hypergéométriques	349
9.3.9- Les fonctions méromorphes	350
9.3.10- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau	351
9.3.11- L'objet mathématique « <i>Diagramme de Feynman</i> » à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs	359
9.4- Les recherches dans le monde (non exhaustif)	352
9.4.1- La recherche en Allemagne	352
9.4.2- La recherche au Vietnam	354
9.4.3- La recherche en Italie	354
9.4.4- La recherche au Danemark	354
9.4.5- La recherche en France	354
9.4.6- La recherche en Suisse	354
9.4.7- La recherche aux USA	355
9.4.8- La recherche en Chine	355
9.4.9- La recherche au Japon	355

9.4.10- La recherche en Inde	355
9.4.11- La recherche en Corée du Sud	355
9.4.12- La recherche au Royaume – Uni	355
9.4.13- La recherche en Belgique	355
9.4.14- La recherche en Russie	355
9.5- Détail des travaux effectués	356
9.5.1- Les matroïdes	356
9.5.2- Les séries hypergéométriques multiples et polyzêta	358
9.5.3- Les hyperlogarithmes	359
9.5.4- Les multiple-polylogarithmes	359
9.5.5- Les algèbres de Hopf	361
9.5.6- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur	363
9.5.7- Les fonctions hypergéométriques	364
9.5.8- Les fonctions méromorphes	364
9.5.9- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau	365
9.5.10- Compléments	365
9.6- Références	366
Conclusion générale	371
Annexes	
<u>Annexe 1</u> : Détail des propagateurs de l'électron et du photon associés à l'interaction fondamentale entre deux électrons	374
A1.1 Propagateur relativiste de l'électron libre	376
A1.2 Propagateur du photon	378
<u>Annexe 2</u> : Calcul des propagateurs de l'électron et du photon associés à l'interaction d'un électron avec lui-même	381
<u>Annexe 3</u> : Calcul des propagateurs de l'électron et du photon associés à la diffusion Compton	383
A3.1 Calcul des propagateurs	383
A3.2 Analyse détaillée de la diffusion Compton	384
<u>Annexe 4</u> : Calcul des propagateurs associés à l'effet de la polarisation du vide sur la diffusion d'un électron incident par un photon virtuel issu de la fluctuation du "vide quantique"	390
<u>Annexe 5</u> : Biographie du professeur John Archibald Wheeler	392
<u>Annexe 6</u> : Aperçu de la signification d'une dérivée covariante	394
A6.1 Principe de la géométrie riemannienne	394
A6.2 Caractérisation des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatio-temporel de Riemann par rapport aux éléments $\eta_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatio-temporel de Minkowski	396
A6.3 Equation des géodésiques	397
A6.4 La connexion affine	398
A6.5 Différentielle absolue et dérivée covariante	400
<u>Annexe 7</u> : Transport parallèle et courbure de l'espace-temps	401
A7.1 Déplacement le long d'un triangle sphérique	401

A7.2 Déplacement le long d'un triangle plan	402
A7.3 Quantités Ω^j_v définissant une rotation faisant passer d'une base à l'autre suite au déplacement associé à un cycle: méthode d'Elie Cartan	403
A7.4 Les quantités Ω^j_v sont les composantes d'un tenseur : démonstration	407
A7.5 Tenseur de courbure (Riemann - Christoffel) issu du tenseur de rotation d'Elie Cartan	408
<u>Annexe 8 : Théorie des perturbations : cas général sur deux exemples simples</u>	410
A8.1 La solution statique de l'équation tensorielle de la relativité générale dans le vide pour un champ à symétrie sphérique : métrique de Schwarzschild	411
A8.2 La déviation des rayons lumineux : une solution statique dans le vide pour un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil	415
A8.3 L'avance du périhélie de Mercure : une autre solution statique dans le vide pour un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil	423
<u>Annexe 9 : Analyse de l'article d'Albert Einstein de 1905 sur les particules Lumineuses</u>	431
<u>Annexe 10 : Cheminement de la pensée de Heisenberg dans la conception de sa mécanique matricielle</u>	440
<u>Annexe 11 : Solution de l'équation de Schrödinger des états stationnaires sans champ extérieur pour l'atome d'hydrogène associé au modèle de Bohr</u>	443
<u>Annexe 12 : Obtention de l'équation temporelle de Schrödinger pour une particule située dans un potentiel scalaire</u>	446
<u>Annexe 13 : Dirac et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule</u>	448
<u>Annexe 14 : Le principe de moindre action en mécanique classique vu par Feynman</u>	453
<u>Annexe 15 : Année 1940 : Résultats connus et idées en cours sur l'Electrodynamique classique</u>	457
<u>Annexe 16 : L'espace-temps et sa représentation dans le cône de lumière</u>	462
<u>Annexe 17 : Point de vue épistémologique associé au concept $exp [iS/\hbar]$</u>	467
<u>Annexe 18 : Mécanisme du rayonnement d'une particule accélérée et principe de moindre action pour les charges ponctuelles évoluant sur leur ligne d'univers (Wheeler-Feynman 1941, 1945, 1949)</u>	470
<u>Annexe 19 : Opérateur Hamiltonien en mécanique classique , en mécanique quantique et formulation de l'action en mécanique quantique</u>	482
<u>Annexe 20 : Première et seconde quantification</u>	487
<u>Annexe 21 : Changement et invariance de jauge</u>	491
<u>Annexe 22 : Détail du calcul associé au propagateur de Feynman pour la particule libre</u>	504
<u>Annexe 23 : Les travaux de Pierre Cartier en collaboration avec Cécile DeWitt-Morette : <i>Une nouvelle perspective concernant l'intégration fonctionnelle (1995)</i></u>	509
<u>Annexe 24 : Les travaux de Dirk Kreimer sur les matroïdes (2011)</u>	532
<u>Annexe 25 : Condition d'invariance de jauge en chromodynamique quantique : Le groupe $SU(3)$</u>	545
<u>Annexe 26 : Application des diagrammes de Feynman à l'interaction faible</u>	551
<u>Annexe 27 : Le groupe de symétrisation $SU(2)$ et l'interaction faible</u>	555
<u>Annexe 28 : La brisure spontanée de symétrie : La courbe en « chapeau mexicain</u>	561
<u>Annexe 29 : Calcul du Lagrangien L_1 de perturbation</u>	571

Remarque sur la structure du document

Dans ce document, nous nommons :

- **Chapitre 1 à 9** : la structure principale,
- **Paragraphe 1.1, 1.2, etc.** : les items associés au chapitre 1, et cette appellation est reprise de la même façon pour ce qui concerne les chapitres 2 à 9,
- **Section 1.2.1, 1.2.2, etc.** : les items associés au paragraphe 1.2 du chapitre 1 et il en sera de même pour tous les paragraphes des chapitres de ce document,
- **Sous-Section 1.2.1.a, 1.2.1.b, etc.** : les items associés à la section 1.2.1 du paragraphe 1.2 appartenant au chapitre 1 et il en sera de même pour toutes les sections concernant le paragraphe auquel elle se rapporte.

Introduction générale

Le contexte associé à l'intégrale de chemins

2- Bref survol de l'évolution et de l'importance du concept de l'intégrale de chemins en physique

3- La situation historiographique

3.1- Travaux sur Feynman et l'intégrale de chemin accessible au grand public, proche de la vulgarisation

3.2- Travaux académiques en histoire des sciences sur Feynman et l'intégrale de chemins

4- Contribution apportée dans cette thèse

5- Les sources utilisées

1- Le contexte associé à l'intégrale de chemins

Au début du vingtième siècle, la physique va être bouleversée par une remise en question à la fois intellectuelle et philosophique, dépassant largement le « sens commun ».

D'une part le paradigme du temps absolu dans un espace rigide et immuable va être remis en question par la théorie de la relativité restreinte, établissant ainsi une liaison inattendue entre l'espace et le temps : l'espace-temps.

D'autre part le paradigme de la nature essentiellement ondulatoire et continue de la lumière va être révolutionné par la discontinuité des ondes électromagnétiques. En effet, dans tout rayonnement l'énergie est concentrée en particules de lumière (les quanta ou photons).

Aussi dans la nature, non seulement la discontinuité existe dans la structure de la matière, mais aussi dans la structure même de la lumière par le quantum d'énergie.

Ces deux concepts d'espace-temps et de quantum d'énergie constituent le fondement même sur lequel repose les intégrales de chemins.

Si le cadre mathématique de la théorie de la mécanique quantique s'est largement appuyé très rapidement sur les « espaces de Hilbert », la théorie quantique des champs introduit, sur un « espace de Fock », des opérateurs se comportant comme si des particules étaient créées ou annihilées.

Aussi, il va s'avérer que les diagrammes de Feynman, issus du concept d'intégrales de chemins, vont être d'une extrême efficacité pour exprimer les commutations des opérateurs cités ci-avant, qui interviendront dans un nouveau formalisme permettant une grande facilité dans l'exécution des calculs associés aux interactions.

Ces interactions sont :

- * les interactions électromagnétiques associées aux électrons et photons en Electro-dynamique Quantique,
- * les interactions fortes liées aux quarks et gluons en Chromodynamique Quantique,
- * les interactions faibles concernant les quarks et les bosons W lors des désintégrations radioactives dont la radioactivité bêta,
- * l'interaction du boson de Higgs avec toutes les particules en vue de leur communiquer la masse inertielle.

Et si le concept d'intégrale de chemins a pu voir le jour, c'est parce que Feynman utilisa un principe de moindre action qui lui permettait de solutionner le problème des infinis de l'électrodynamique classique.

Les travaux de Feynman en mécanique quantique à travers la **genèse, le développement et la pérennité du concept d'intégrale de chemins** constituent l'objet de notre thèse.

2- Bref survol de l'évolution et de l'importance du concept de l'intégrale de chemins en physique

L'histoire du concept de l'intégrale de chemins qui se distingue de l'intégrale ordinaire par le fait d'une somme prise sur des fonctions et non sur des nombres réels ou complexes, est associée au physicien américain Richard Feynman pour ses travaux sur la théorie quantique des interactions électromagnétiques (l'Electrodynamique Quantique).

En fait, le nouveau formalisme de la théorie quantique à base d'intégrales de chemins présenté par Feynman dans sa thèse soutenue en juin 1942 à Princeton, même s'il concurrence les travaux de Schrödinger à travers sa célèbre équation, n'intéresse que très peu les scientifiques et à fortiori les historiens.

Il faut attendre la conférence de Oldstone-on-the-Hudson du 11 au 14 avril 1949 pour que les physiciens théoriciens commencent seulement à constater sans vraiment comprendre et vraiment s'y intéresser, la puissance de l'outil mathématique que constitue l'intégrale de chemins en mécanique quantique.

En effet, ayant montré lors de cette conférence le bond conceptuel apporté par sa nouvelle théorie de l'Electrodynamique Quantique basée sur la notion d'intégrales de chemins, Feynman publie en septembre 1949 l'article fondamental intitulé « *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics* » qui permet de maîtriser ses techniques de calcul et d'utiliser ses diagrammes, ouvrant ainsi la physique quantique et l'Electrodynamique Quantique au plus grand nombre.

L'année 1965 voit le prix Nobel de physique attribué en partie à Richard Feynman pour l'ensemble de ses travaux sur l'Electrodynamique Quantique basée sur l'intégrale de chemins. Aussi, le premier article décrivant l'histoire de l'Electrodynamique Quantique à travers cette intégrale se trouve être le texte de la conférence prononcée par Richard Feynman lors de la remise de son prix Nobel qu'il partage avec J. Schwinger et S. Tomonaga.

Cette même année 1965, Feynman en collaboration avec Albert Hibbs, publie un livre sur la mécanique quantique et les intégrales de chemins qui permet d'appréhender dans le détail le sens physique que l'on peut attribuer à ces intégrales : « *Quantum Mechanics and path Integrals* ».

C'est donc à partir des années 1960 que bon nombre de physiciens théoriciens tels que les futurs « *prix Nobel* » Gross, Politzen, Wilczek, Weinberg, Salam et Higgs se mirent à regarder de plus près l'influence des idées de Feynman sur l'étude des interactions fortes, des interactions faibles et des interactions d'une hypothétique particule avec toutes les particules pour leur conférer une masse inertielle (le boson de Higgs).

Aussi, autour des années 1960 et 1970, des cours commencent à s'organiser autour du concept théorique de l'intégrale de chemins par des professeurs tels que Larry S. Schulman et Claude Cohen-tannoudji assisté de son étudiant Serge Haroche respectivement prix Nobel de Physique 1997 et 2012.

Signalons cependant que dans ces années 1960 et 1970 les historiens et les épistémologues ne s'intéressent guère à l'intégrale de chemins associée aux travaux de Richard Feynman.

Ce sont plutôt des mathématiciens tels que Cécile DeWitt-Morette et Serge Albeverio qui, entre 1951 et 1980, seront concernés par ces intégrales dans le but de trouver un fondement rigoureux au concept de trajectoire contenu dans la théorie quantique de Feynman.

3- La situation historiographique

Dans les années 1960 et 1970, avant que ne se fasse ressentir la forte influence de l'intégrale de chemins dans les activités quotidiennes de la plupart des physiciens théoriciens, aucun travail pertinent n'existe réellement en histoire des sciences sur l'intégrale de chemins.

L'intérêt des historiens et des épistémologues se mit à augmenter progressivement vers la fin des années 1970, dans les années 1980, 1990 et après, suite aux travaux des mathématiciens qui s'emparent du sujet dès 1951, afin d'apporter plus de crédibilité à cette intégrale et parallèlement à certaines avancées en Théorie Quantique des Champs et en physique des particules.

Ces avancées en physique fondamentale ont été récompensées plus tard par plusieurs prix Nobel, dont les lauréats, de leurs propres aveux, disent avoir été largement influencés par le concept de l'intégrale de chemins ou bien le montrent en utilisant les fameux diagrammes dit de Feynman issus du concept de cette intégral. ^a

a. David Gross. 2005. « *The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD* ». Nobel Lecture. Reviews of Modern Physics. Volume 77. Pages 837-849.

a. Steven Weinberg. 1979. « *Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions* ». Nobel Lecture. Page 549.

a. Carlo Rubbia. 1984. « *Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0* ». Nobel Lecture. Page 242.

a. Peter Higgs. 2013. « *Evading the goldstone theorem* ». Nobel Lecture.

Peter Higgs. 1964. « *Broken symmetries, massless particles and gauge fields* ». Physics Letters. 12: 132-133

Peter Higgs. 1964. « *Broken symmetries and the masses of gauge bosons* ». Physical Review Letters. 13: 508-509

Peter Higgs. 1966. « *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons* ». Physical Review. 145: 1156- 1163.

Pour ce qui concerne les travaux des mathématiciens, citons ceux d'Albeverio, de Ito et de Cécile DeWitt-Morette dont il est fait référence en bas de page.^b

Il faut donc attendre d'une part 1985 pour que Feynman lui-même se mette à publier un premier ouvrage grand public, vulgarisant le concept de l'intégrale de chemins, et d'autre part 1986 pour que Silvan Schweber écrive de façon académique la biographie scientifique de Feynman associée à cette intégrale.

De manière brève, brosons donc respectivement en paragraphes 3.1 et 3.2 ci-après, les travaux les plus intéressants sur l'histoire de l'intégrale de chemins à travers les biographies de Feynman, que l'on peut trouver d'une part dans les ouvrages de vulgarisation les plus sérieux et d'autre part dans les ouvrages plus académiques.

3.1- Travaux sur Feynman et l'intégrale de chemins accessibles au grand public, proche de la vulgarisation

En 1985, dans un livre de vulgarisation ayant pour titre « *The Strange Theory of Light and Matter* », Feynman explique qualitativement au moyen de petites flèches sur une feuille de papier, le concept de l'intégrale de chemins et soulignant son importance dans sa théorie de l'Electrodynamique Quantique, il généralise ses idées à la Théorie Quantique des Champs. Cette publication aux explications très concrètes, caractérisant bien Feynman dans sa manière de rendre compte des concepts les plus abstraits, m'a été très utile pour comprendre dans un tout premier temps le rôle de l'intégrale de chemins en physique théorique.

Toujours en 1985, Feynman publie son autobiographie dans un livre intitulé « *Surely You're Joking Mr Feynman ! Adventures of a Curious Character* » dans lequel il livre toutes les facettes les plus originales de son personnage.

Cet ouvrage s'il aide à cerner le caractère du physicien américain, permettant de comprendre son mode de pensée, n'entre dans aucun détail concernant sa vie scientifique.

Ce livre qui a été traduit en français par le physicien Claude Guthmann et la physicienne, historienne des sciences Françoise Balibar aux éditions Odile Jacob sous le titre « *Vous voulez rire Monsieur Feynman!* », m'a permis de comprendre peu à peu, la façon atypique dont l'esprit de Richard Feynman travaille.

En 1992, James Gleick qui est journaliste spécialisé dans la vulgarisation scientifique, publie une biographie complète de Feynman en décrivant sa vie dans un contexte assez large et en insistant sur l'originalité du personnage : « *Le génial professeur Feynman* » dont la traduction française a été effectuée par J.P. Murlon.

b. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. « *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics* ». Springer.

b. K. Ito. 1967. « *Generalized uniform complex measure in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman path integral* ». Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University California Press, Berkeley. Volume II, part 1.

b. DeWitt-Morette. 1951. « *On the definition and approximation of Feynman's path integral* ». Physical Review, volume 81.

DeWitt-Morette, Maheshwari, Nelson. 1979. « *Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Physics Reports, volume 50.

DeWitt-Morette, Elworthy, Nelson, Sammelman. 1980. « *A stochastic scheme for constructing solutions of the Schrödinger equation* ». Institut Henri Poincaré, A32.

Comme il l'écrit lui-même dans la partie de son livre dédiée aux « Remerciements », Gleick n'a jamais rencontré Feynman. Cependant, sa biographie est complète et très fortement documentée, faisant d'une part référence à de nombreuses interviews de physiciens ayant directement travaillé avec Feynman et mentionnant d'autre part de nombreuses archives consultées à Far Rockaway (la ville natale de Feynman dans la banlieue de New-York), au MIT, à Princeton, à Cornell et au Caltech.

Le cheminement de la pensée de Feynman transparait tout au long de ce livre ainsi que ses motivations, et les anecdotes ne manquent pas.

La vie de Feynman, hors de son aspect scientifique est largement décrite, avec une chronologie des événements assez bien respectée.

Les travaux scientifiques de Feynman à travers l'intégrale de chemins ne sont jamais décrits que de manière anecdotique et nous ne trouvons aucune équation. Si nous pouvons qualifier cet ouvrage d'excellent pour le grand public, force est de reconnaître qu'il n'a aucune prétention scientifique.

Cependant, cet ouvrage m'a permis d'approfondir encore un peu plus le caractère particulier de Feynman.

En 2004 Elena Castellani (chercheur en philosophie des sciences) et Leonardo Castellani (professeur de physique théorique) font paraître dans la revue « *Les génies de la science* » une synthèse exhaustive des ouvrages cités ci-avant c'est-à-dire publiés en 1985 par Feynman, en 1992 par Gleick, en 1986 par Schweber et en 1994 par Mehra, que nous allons voir plus loin.

Cette revue m'a permis en tout début de mon travail de thèse, de globaliser rapidement les tenants et les aboutissants des travaux de Feynman à travers l'intégrale de chemins.

Et je dois même reconnaître que cette publication a été parmi les déclencheurs qui ont motivé mon intérêt pour les travaux de Feynman.

En 2013 le physicien théoricien espagnol Miguel Angel Sabadell publie un ouvrage « *Feynman et l'Electrodynamique Quantique* ».

Il s'agit d'une biographie de Feynman. Cette biographie n'est pas chronologique et aborde la description de la vie du physicien américain à travers six chapitres associés chacun à un thème scientifique ayant trait à ses travaux.

Qualitativement, les aspects scientifiques sont assez bien décrits sans toutefois, comme le sont toujours les ouvrages de vulgarisation, un certain approfondissement qui permettrait d'aller plus loin dans la compréhension des choses.

Si le concept de l'intégrale de chemins est cité, aucune explication ne permet de s'en faire une idée précise.

Malgré tout, cet ouvrage présente un intérêt pratique qui m'a forcé à concrétiser les notions abstraites associées aux travaux de Feynman.

3.2- Travaux académiques en histoire des sciences sur Feynman et l'intégrale de chemins

En 1986, Silvan Schweber publie un livre ayant pour titre : « *Feynman and the visualisation of space-time process* » (langue anglaise originale).

Schweber, à la fois physicien théoricien et historien des sciences, a côtoyé Feynman et a reçu l'autorisation de la part du physicien américain de pouvoir consulter ses rapports déposés à la *Millikan Library* du *California Institute of Technology*. Cette biographie, que nous pourrions qualifier de scientifique est très complète et fortement documentée.

Les travaux de Feynman sont assez détaillés et présentés avec toute la rigueur que l'on peut attendre d'un physicien théoricien ayant vécu la grande aventure de la théorie quantique des champs.

Les conditions de la découverte de l'intégrale de chemin sont parfaitement bien décrites.

Soulignons que Schweber dans sa manière de décortiquer avec précision les travaux de Feynman à travers les nombreuses publications du physicien parfois difficilement accessibles, a grandement facilité mon travail dans la compréhension des phénomènes abstraits.

En 1994, Jagdish Mehra, à la fois physicien théoricien et historien des sciences qui a très bien connu Feynman, publie une biographie sur ce dernier et à sa demande : « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* » (langue anglaise originale).

Cet ouvrage contient bon nombre d'écrits directement issus des nombreuses interviews de l'auteur avec Feynman lui-même.

La vie privée de Feynman n'est pas abordée car cette bibliographie, comme le voulait Feynman, est essentiellement dédiée à sa vie scientifique.

Si les travaux scientifiques de Feynman sont largement mentionnés avec les équations qui leur sont associées, le détail de ces équations est bien moins abordé que dans la biographie de Silvan Schweber.

Cependant, compte-tenu des rapports privilégiés de Mehra avec Feynman, cette biographie peut être considérée comme la biographie scientifique de référence de Feynman.

En 2005 David Kaiser, physicien et historien des sciences, publie un ouvrage dédié aux diagrammes de Feynman issus de son concept d'intégrale de chemins.

Ce livre de haut niveau et très détaillé techniquement est d'une grande valeur pour les gens avertis, désirant comprendre la manière dont les jeunes physiciens théoriciens se sont emparés de la symbolique contenue dans les diagrammes pour adopter leur propre recherche conformément à cette symbolique.

La publication, très focalisée sur les diagrammes de Feynman à travers leur richesse dans l'étude de la trajectoire des particules subatomiques, explique comment ils ont révolutionné la physique théorique depuis le milieu du vingtième siècle.

David Kaiser a d'ailleurs obtenu le prix Pfizer décerné chaque année par l'History of Science Society pour cet ouvrage de référence sur l'histoire des diagrammes inventés par Feynman.

En 2010 Adrian Wüthrich, historien des sciences, publie un livre chez Springer concernant la genèse des diagrammes de Feynman.

Si cette publication fait référence comme Kaiser aux diagrammes du physicien américain, le contenu en est fort différent.

En effet, Wüthrich mentionne la façon d'aborder les problèmes de l'Electrodynamique Quantique dans les années 1930 sans les diagrammes de Feynman afin de montrer toute la puissance de leur symbolique dans la manière de traiter les interactions électromagnétiques.

De plus, il explique avec tous les détails que l'on peut attendre, toute la théorie conduisant du concept de l'intégrale de chemins à la symbolique contenue dans les diagrammes via les apports de Dirac en Electrodynamique Quantique.

Wüthrich n'oublie pas non plus de mentionner et d'expliquer le rôle de Dyson à propos de la découverte de ce qu'il y a de commun dans le fondement mathématique des trois approches de Feynman, Schwinger et Tomonaga concernant leur manière de traiter les problèmes de l'Electrodynamique Quantique.

Il montre aussi comment Dyson, dans les années 1950 et 1960, d'un point de vue quantique, a prouvé à l'ensemble de la communauté des physiciens théoriciens, la virtuosité que l'emploi des diagrammes de Feynman permet d'acquérir. En effet, les diagrammes ont une façon de

traiter de manière beaucoup plus fiable, plus claire et plus compréhensibles les interactions électromagnétiques que ne possèdent les calculs mathématiques fastidieux de Schwinger.

A la vue de toute cette littérature historique existante et à la façon dont elle traite le sujet selon telle ou telle approche, il semblerait qu'il n'y ait plus rien à dire sur l'intégrale de chemins. En effet, tout semble avoir été écrit sur l'histoire de l'Electrodynamique Quantique à travers cette intégrale datant maintenant de plus de soixante dix ans.

Cependant, une première question se pose : Ne serait-il pas intéressant de s'interroger, entre autre, sur la pérennité de l'intégrale de chemin dans les domaines actuels concernant la physique fondamentale et les mathématiques, dans le sens le plus large ?

De plus, la lecture des ouvrages mentionnés ci-avant n'a pas répondu à mes attentes. L'histoire de l'intégrale de Feynman et les travaux qui s'y rattachent sont presque toujours :

- soit trop succincts,
- soit trop détaillés techniquement au point d'en perdre les tenants et les aboutissants, - soit se focalisent sur une particularité de l'œuvre de Feynman comme par exemple les fameux diagrammes sans les relier à leur concept d'origine.

En outre, si les ouvrages de vulgarisation manquent cruellement de précision, dans ceux qui se réclament académiques, l'histoire de Richard Feynman à travers ses travaux en mécanique quantique et l'intégrale de chemins ne m'a pas satisfaite. Elle est trop souvent décrite au moyen d'équations introduites de façon plus ou moins pêle-mêle, même si elles sont analysées avec précision, sans une certaine vision globale et surtout sans les rattacher aux motivations du physicien américain au fur et à mesure de sa pensée dans les diverses périodes de sa vie.

Aussi, en sachant rester rigoureux dans les détails, comme exigé dans un travail de thèse, mon projet devra trouver des réponses claires à de nombreuses questions que je me suis posées et que je n'ai pas trouvé de manière simple et précise dans les ouvrages existants, à savoir :

- Question 1 : Quel est la situation en mécanique quantique et quels sont les problèmes rencontrés lorsque Feynman est étudiant au MIT en vue d'obtenir son « *Bachelor of Science* » ?
- Question 2 : Quelle part tient dans son éducation le formidable mécanisme caractérisant l'esprit de Feynman ?
- Question 3 : Quelles sont la perception et les ressentiments de Feynman sur sa formation en mécanique quantique au MIT ?
- Question 4 : Quels sont le sens des motivations et des engagements de Feynman en physique théorique au cours de son doctorat à Princeton ?
- Question 5 : Quels sont les réflexions de Feynman qui vont le conduire à construire l'action associée à la trajectoire d'une particule dans l'espace-temps ?
- Question 6 : Comment progresse chez Feynman l'idée d'intégrale de chemins associée à l'ensemble des trajectoires possibles d'une particule entre deux points d'une région de l'espace-temps ?
- Question 7 : Quels sont les avantages du nouveau formalisme de la théorie quantique à base d'intégrales de chemins par rapport aux formalismes développés par Heisenberg et Schrödinger ?
- Question 8 : Comment Feynman résout-il la problématique consistant à la mise en pratique de l'intégrale de chemins dans les processus d'interaction entre les électrons, les positrons, via l'échange de photons virtuels ?
- Question 9 : La part d'intuition contenue dans l'intégrale de chemin associée à la théorie quantique de Feynman peut-elle être supplantée par des travaux en mathématiques pouvant

apporter un cadre rigoureux à ces intégrales ? Et pourrait-on y parvenir par diverses approches prouvant justement la pertinence apportée par les mathématiques ?

- Question 10 : Quels sont les apports de l'intégrale de Feynman dans la recherche en théorie quantique des champs ?

- Question 11 : Quels travaux en mathématiques pures pourraient être irrigués par le concept d'intégrales de chemins ?

N'ayant trouvé dans les principales publications des historiens des sciences ni des réponses claires à mes questions, ni les clefs de la pensée de Feynman et sa manière de faire de la physique, j'ai organisé mon projet de thèse de la manière qui suit.

4- Contribution apportée dans cette thèse

Mon travail se distingue des études précédentes par **ma façon de saisir l'ensemble des travaux de Feynman et de situer leur pérennité à la fois dans le contexte actuel que dans celui ayant trait à la fin des années 1900 et au début des années 2000.**

Et cette pérennité sera recherchée aussi bien dans le domaine de la physique fondamentale que dans celui des mathématiques pures.

En effet, rester sur l'histoire du concept de l'intégrale de chemins associée à la théorie de l'Electrodynamique Quantique est trop restreint, a déjà largement été traité et surtout élimine l'ensemble des travaux périphériques qui éclairent l'histoire de Feynman à travers la mécanique quantique et l'intégrale de chemins.

Mon parti a donc été de rechercher et de prendre en compte les travaux des mathématiciens qui tentent d'apporter un cadre rigoureux aux intégrales de chemins selon différentes approches et de chercher à savoir si, par voie de conséquence, ces intégrales irriguaient un certain nombre de données en mathématiques pures.

Mon parti a aussi été de rechercher comment l'intégrale de chemins et les diagrammes qui lui sont associés ont contribué à façonner de manière concrète la Théorie Quantique des Champs à travers les interactions fortes, les interactions faibles et l'interaction du boson de Higgs avec toutes les particules en vue de leur communiquer la masse inertielle.

Et tout au long de mes recherches, j'ai eu le souci constant de la valeur épistémologique de mon travail par ce côté réflexions, pensées, que j'ai mis en avant afin de conduire à l'enchaînement des faits montrant la véracité et la validité de la théorie de la mécanique quantique de Feynman basée sur l'intégrale de chemins.

Aussi, à travers ces recherches, j'ai pu répondre en partie aux questions que je me posais.

Le chapitre 1 répond donc aux questions 1. De plus, afin de susciter une réflexion profonde sur l'origine des quanta, je trace aussi une chronologie de l'histoire conceptuelle de la mécanique quantique depuis son origine (1900) jusqu'en 1941 qui est la date où Feynman commence à émettre ses nouvelles idées dans la manière d'aborder d'un œil neuf la théorie quantique des interactions électromagnétiques.

J'ai voulu en effet saisir la façon dont Feynman fait référence aux travaux des pionniers des années 1920 et 1930 afin de vérifier la convergence de ses résultats avec ceux des théories reconnues par les paradigmes de la physique fondamentale aux cours de ces années.

Par rapport à tout ce que l'on peut trouver dans la littérature sur le sujet, j'ai insisté sur le côté épistémologique en m'efforçant de faire parler les équations afin de traduire, là aussi, le cheminement de la pensée de ceux qui les ont trouvées. En effet je veux aussi souligner comment la science évolue en permanence par l'intermédiaire d'hommes et de femmes toujours motivés par les résultats antérieurs et perfectibles de leurs prédécesseurs.

Il m'a aussi paru intéressant, au point de vue historique, de détailler les travaux de Dirac qui ont permis à Feynman de concrétiser son intégrale de chemins en introduisant le quantum d'action h de Planck.

Ainsi :

- Une section est dédiée à la description d'un panorama complet (1927 à 1941) des problèmes de la physique associée au couplage entre les champs électromagnétiques et les charges électriques au niveau quantique (l'Electrodynamique Quantique). D'autant plus que c'est à travers la publication de Dirac de 1935 que Feynman étudie la mécanique quantique et spécialement les problèmes inhérents à l'Electrodynamique Quantique.

- Une sous-section est consacrée à l'histoire de l'équation de Dirac d'une part pour l'électron libre dans l'atome d'hydrogène, d'autre part pour l'électron dans un champ électromagnétique extérieur.

- Une sous-section assez conséquente est aussi dédiée à l'histoire de la découverte de l'analogie quantique du principe de moindre action par Dirac en 1933, tout en soulignant comment Feynman au fur et à mesure de ses interrogations en vient à cette unique possibilité pour résoudre son problème. Cependant, j'ai volontairement rattaché cette section au chapitre 3 afin de respecter une certaine chronologie historique puisque c'est à Princeton que Feynman a eu l'idée de quantifier l'action en physique en introduisant le quantum d'action h de Planck.

Le chapitre 2 répond aux questions 2 et 3. La réponse à la question 2 se situe principalement dans l'introduction qui permet de percevoir chez Feynman la manière dont il s'est construit afin de comprendre la nature de l'homme, son mode de pensée et toute son originalité. Appréhender son caractère par la façon dont son père lui fait découvrir les phénomènes physiques qui l'entourent explique bien son naturel de vouloir comprendre les choses par lui-même. En effet, sans s'attarder sur les calculs qu'il avoue ne pas comprendre dans la célèbre publication de Dirac de 1935 lorsqu'il n'était qu'un étudiant aspirant au « *Bachelor of Science* » (MIT), sa nature va le pousser à émettre ses propres hypothèses qui vont finir par déboucher sur sa théorie quantique originale des interactions électromagnétiques (l'Electrodynamique Quantique) via son invention des intégrales de chemins.

Afin d'apporter une réponse à la question 3, nous nous intéressons à la formation suivie par Feynman au MIT. Puis nous essayons de dégager la base conceptuelle du futur « *prix Nobel* » en exprimant ses ressentiments vis-à-vis d'une théorie quantique de l'électricité et du magnétisme qu'il trouve compliquée et comment il voudrait voir l'ensemble de ses problèmes résolu.

De fil en aiguille nous appréhendons la façon atypique dont l'esprit de Richard Feynman travaille, notamment dans son travail de mémoire de « *Bachelor of Science* », ce qui va nous permettre de faire ressortir le cheminement d'une pensée qui le conduira au prix Nobel de physique 1965.

Le chapitre 3 répond à la question 4. Ce chapitre retrace donc en détail l'histoire des travaux du physicien américain dans la période allant de 1939 à 1941, qui englobe ses années de thèse à Princeton en vue d'obtenir son doctorat.

Mon travail traite à la fois d'épistémologie et d'histoire des sciences, la seconde apportant tous les éclairages utiles à la première

Dans ce chapitre 3, via les Annexes 15 à 19, je trace en détail l'histoire des différentes étapes du travail de recherche de Richard Feynman à Princeton qui vont peu à peu l'orienter vers la découverte de l'intégrale de chemins.

Cette histoire montre les prémices de la découverte de l'intégrale de chemins qui se dessine à travers :

- les échanges de réflexion entre Feynman et Wheeler, son directeur de thèse, qui vont tout naturellement conduire à la découverte d'un principe de moindre action associé aux potentiels pour moitié avancés et pour moitié retardés, associé à trois publications débouchant sur l'équation classique A de l'action liée aux interactions directes entre particules,
- les tentatives de Feynman pour quantifier l'équation A afin de la transposer à l'Electrodynamique Quantique,
- la manière dont Feynman retrouve (en 1941) l'équation de Schrödinger en interprétant différemment la formulation quantique du principe de moindre action ébauchée par Dirac en 1933.

Le chapitre 4 répond à la question 5. Il contient donc les réflexions et le travail de Feynman concernant la construction de l'action qui sera l'objet de sa thèse de Doctorat présentée en juin 1942.

Il montre comment le futur physicien théoricien relie la fonction d'onde au Lagrangien afin de voir tout naturellement se dessiner la notion de chemins pour une particule dans l'espace-temps.

Le chapitre 5 répond aux questions 6 et 7. Il couvre la période allant de 1942 à 1948.

Tout au long de cette période, le jeune physicien américain n'a de cesse de réfléchir sur une nouvelle façon de traiter la mécanique quantique.

Aussi, je vais montrer comment progresse chez Feynman l'idée d'intégrale de chemins associée à l'ensemble des trajectoires possibles d'une particule entre deux points d'une région de l'espace-temps ; en d'autres termes sur la construction d'une intégrale comprenant comme variable d'intégration une fonction représentant tous les chemins d'une région de l'espace-temps. Et ceci va tout naturellement conduire à un nouveau formalisme en mécanique quantique.

Dans ce chapitre 5, je ne vais pas oublier de montrer comment à partir des travaux antérieurs, principalement de Huygens et de Broglie, Feynman va concrétiser son idée d'intégrale de chemins.

Je vais aussi mentionner les avantages de ce nouveau point de vue de Feynman concernant le paradigme de la trajectoire d'une particule en mécanique quantique.

Le chapitre 6 répond à la question 8. Dans ce chapitre , je montre la solution mise en place par Feynman qui consiste à visualiser l'intégrale de chemins en termes de dessins, ainsi que la méthode de calcul qui leur sont allouée.

En outre, ce chapitre 6, via l'Annexe 22, nous montre aussi que pour une simple particule libre, c'est-à-dire non soumise à un champ électromagnétique, le calcul du propagateur est déjà très compliqué. Alors, on peut se poser la question de ce qu'il en sera du calcul des propagateurs

pour un processus décrivant plusieurs particules en interaction, soumises au champ électromagnétique généré par chacune d'entre elles.

Et c'est justement parce que pour un tel processus les quantités à manipuler deviennent vite compliquées, à la limite de l'inexplicable et de l'incompréhensible, que Feynman va trouver un moyen visuel de résoudre les difficultés qui se présentent à lui.

Ce chapitre montre bien comment le concept d'intégrale de chemins conduit à la théorie quantique des interactions électromagnétiques de Feynman, théorie pour laquelle il sera co-lauréat du prix Nobel de physique en 1965.

J'ai aussi analysé en détail les principaux diagrammes issus du concept de l'intégrale de chemins afin de donner une idée claire de leur obtention et de leur efficacité. A ce propos, afin de ne pas surcharger la thèse de termes trop techniques, j'ai conçu les annexes 1 à 4 pour expliquer comment sont obtenus les propagateurs de l'électron et du photon pour différents contextes associés à l'originalité de la théorie quantique de Feynman concernant le champ électromagnétique.

J'espère avoir ajouté plus de clarté et de rigueur par rapport à la littérature existante afin de diffuser au plus grand nombre des informations assez abstraites. En effet, ce que nous pouvons trouver provient le plus souvent d'historiens des sciences qui sont aussi physiciens théoriciens et leurs écrits sont plutôt destinés à des lecteurs avertis.

Le chapitre 7 répond à la question 9. Il est dédié à la recherche et à l'examen des travaux entrepris entre 1951 et 2020 par les mathématiciens qui tentent d'apporter plus de rigueur dans le développement des intégrales de chemins ; ceci afin de passer d'une vue intuitive à un cadre formel et précis pour ces intégrales.

Et pour cela, dans le but d'embrasser une vision assez large de ce qui se fait, j'ai consulté, en plus de ce que j'ai trouvé sur *internet*, la base de données *MathSciNet* très exhaustive.

Différentes approches telles que celles mettant en œuvre :

- les théories de l'intégration,
- les théories stochastiques dans l'analyse du bruit blanc et du mouvement brownien,
- les théories des distributions,

sont examinées en détail, formalisant ainsi les paradigmes mathématiques tels que l'épistémologie s'efforce de le faire.

Le chapitre 8 répond à la question 10. Il est dédié à la recherche et à l'étude de la pérennité de l'intégrale de chemins à travers la Théorie Quantique des Champs.

Ma recherche et mon étude s'effectuent via les diagrammes de Feynman, qui sont, rappelons-le la partie calculatoire de l'intégrale de chemins.

J'ai détaillé avec précision selon un même canevas, le rôle joué par les particules subatomiques intervenant dans les interactions fortes, les interactions faibles et celle associée au mécanisme de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie.

Cette approche m'a paru indispensable pour appréhender avec clarté l'ensemble des documents d'archives que j'ai consulté.

Ma recherche a donc été de montrer le rôle joué par les diagrammes de Feynman dans une trentaine de publications et de thèses de Doctorat dont une bonne dizaine examinée en détail (pour une période allant de 2000 à 2019), sans oublier les travaux des lauréats de prix Nobel tels que Gross, Politzen, Wilczek, Weinberg, Salam, Glashow et Higgs (entre 1979 et 2013).

J'ai aussi pris contact et interrogé des physiciens de l'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules (l'IN2P3) à l'Université Claude Bernard Lyon1 (UCBL), qui participent aux recherches qui sont actuellement effectuées au LHC sur le boson de Higgs et

d'autres particules subatomiques, afin de montrer la part jouée par les diagrammes de Feynman dans leur travail de tous les jours.

J'ai aussi recherché si les jeunes physiciens théoriciens d'aujourd'hui étudient la physique subatomique selon les méthodes de Richard Feynman.

Le chapitre 9 répond à la question 11, à savoir si les intégrales de chemins irriguent un certain nombre de travaux en mathématiques pures et si oui, si ces dernières bénéficient alors d'une meilleure compréhension des théorèmes et des structures originales permettant une généralisation facilitant les connexions entre leurs différentes branches, voire même extrapolant de nouveaux points de vue.

Aussi, j'ai recherché les publications se rapportant à l'important travail des mathématiciens dans cette perspective. J'ai donc vérifié dans quelles mesures les recherches vers de nouveaux concepts non explorés jusqu'à présent ont été impactées par les intégrales dites de Feynman issues de la découverte des intégrales de chemins.

Pour se faire, j'ai consulté la base de données MathScinet, les archives de l'Institut de Mathématique de l'Université Humboldt de Berlin et celles du Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications (LMAP) de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA).

J'ai donc pu consulter plus d'une bonne centaine de publications allant de 1998 à 2019, et portent principalement sur les fonctions Zêta, les fonctions Polylogarithmes, les intégrales et séries particulières associées aux deux fonctions précédentes, les algèbres de Hopf, les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur, les fonctions hypergéométriques, les fonctions méromorphes, les espaces de Calabi – Yau, les diagrammes de Feynman à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs.

Et toujours dans le même souci d'appréhender avec rigueur l'ensemble des documents d'archives, j'ai défini avec précision ce que sont :

- Les matroïdes,
- Les fonctions Zêta,
- Les fonctions Polylogarithmes,
- Les nombres polyzêtas,
- Les multiple – polylogarithmes et les hyperlogarithmes,
- l'algèbre de Hopf,
- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur,
- Les fonctions hypergéométriques,
- Les fonctions méromorphes,
- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau,
- Les avantages de l'objet mathématique « *Diagramme de Feynman* » à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs.

5- Les sources utilisées

Nous avons vu ci-avant au §2 que l'intérêt des physiciens théoriciens pour les travaux de Feynman issus de l'intégrale de chemins a commencé véritablement une bonne dizaine d'années après la conférence de Oldstone – on – the – Hudson du 11 au 14 avril 1949.

Notons cependant qu'en janvier 1949, lors de la réunion de l'American Physical Society, les interventions de Slotnik et de Feynman montrent que la structure de la théorie quantique du physicien américain pour ce qui concerne les interactions électromagnétiques peut s'avérer une base de départ excellente pour la description de phénomènes relevant du reste de la physique.

En fait, c'est à partir des années 1960, période correspondant à l'obtention du prix Nobel par Feynman, que la communauté scientifique commence peu à peu à saisir l'intérêt des diagrammes inventés par Feynman. En effet ils peuvent s'appliquer à des particules subatomiques autres que les électrons, échangeant des bosons autres que des photons.

Aussi dispose-t-on sur l'intégrale de chemins, à partir des années 1960 jusqu'à nos jours, de manuels universitaires, de notes de cours et de bibliographies en nombre illimité ; il suffit d'interroger « *Internet* » pour s'en rendre compte.

Ainsi, dans tout ce qui peut exister sur l'intégrale de chemins, il a été nécessaire d'effectuer un choix drastique afin de formaliser au mieux les paradigmes scientifiques c'est-à-dire l'ensemble des principes admis par la communauté scientifique à l'heure actuelle tout en recherchant l'émergence des concepts scientifiques ayant trait à notre étude.

Ce travail d'épistémologie et d'histoire des sciences se distingue des études précédentes par sa manière de saisir l'ensemble des publications contemporaines ayant trait à tout ce qui concerne de près ou de loin l'intégrale de chemins et ses retombées aussi bien en physique qu'en mathématique.

Pour se faire, **mon parti a été de consulter le plus possible de sources primaires dans leur langue originale**. Néanmoins, lorsque la traduction en français existe pour certaines sources primaires et quelques sources secondaires, j'ai opté pour des traductions effectuées par des spécialistes du sujet comme par exemple les physiciens théoriciens Françoise Balibar et Jean - Marc Lévy – Leblond.

Le **chapitre 1** fait largement référence à des sources primaires pour ce qui concerne l'histoire conceptuelle de la mécanique quantique.

Pour le **chapitre 2** concernant l'analyse comportementale de Feynman et ses ressentiments vis-à-vis de la mécanique quantique lorsqu'il était étudiant au MIT, j'ai consulté ses écrits autobiographiques tels que « *Vous voulez rire Monsieur Feynman!* », « *What Do You Care What Other People Think?* », « *Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ?* », « *Vous y comprenez quelque chose, Monsieur Feynman ?* », « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps : Conférence Nobel* ».

Pour saisir toute l'originalité du caractère de Feynman, j'ai aussi consulté les biographies des historiens des sciences qui l'ont bien connus comme Schweber et Merha mais aussi celle du journaliste scientifique James Gleick dont les archives sont particulièrement référencées.

Les sources primaires que l'on trouve aux **chapitre 3, 4, 5** et **6** concernant les publications de Feynman, sont archivées à Cambridge (MIT), Princeton (University), Cornell(University), Pasadena (Caltech) et ont largement été consultées sur Internet.

Le **chapitre 7** qui trace le panorama des travaux de divers mathématiciens sur l'intégrale de chemins et qui ne fait l'objet d'aucune publication antérieure de la part d'historien des sciences, ne traite que des sources primaires dans leur langue d'origine.

Là aussi, les archives des Universités américaines, européennes et japonaises ont largement été consultées sur internet, de même que la base de données MathSciNet.

Pour le **chapitre 8**, l'ensemble des archives des Universités de Paris, Lyon, Cornell, Edimbourg, Caroline du Nord, Santa Barbara (UC), Bruxelles, Montréal et Cambridge (Harvard) ont pu être consultées via Internet.

Enfin pour le **chapitre 9**, l'ensemble des archives des Universités de Berlin, de Pau ont pu être consultées via Internet, de même que la base de données MathSciNet.

Chapitre 1

Brève histoire de la mécanique quantique de 1900 à 1939

Résumé

1.1- Introduction

1.2- La mécanique quantique : ses origines et ses difficultés

1.2.1- Les pères fondateurs

- a) Planck et le rayonnement du corps noir (1900)
- b) Einstein : l'explication de l'effet photoélectrique (1905) et la dualité onde-corpuscule (1909)
- c) Le modèle atomique de Bohr (1913)
- d) Louis de Broglie et sa mécanique ondulatoire (novembre 1924)
- e) La mécanique matricielle (novembre 1925) et le principe d'indétermination de Heisenberg (1927)
- f) Schrödinger et sa fonction d'onde (1926)
- g) La mécanique quantique relativiste de Dirac (1928) et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule (1939)

1.2.2- Les principaux problèmes

1.3- Références

Résumé

Afin de connaître d'une part l'origine des quanta et d'autre part l'état de la physique lorsque Richard Feynman est étudiant au MIT puis à Princeton, ce premier chapitre retrace de manière chronologique l'histoire conceptuelle de la mécanique quantique depuis 1900 jusqu'en 1941, date à laquelle le jeune étudiant se met à imaginer de nouvelles idées sur le sujet.

Insistant sur le côté épistémologique en m'efforçant de faire parler les équations, il m'a aussi paru pertinent de détailler les travaux de Paul Dirac qui ont permis à Feynman de construire le concept de son intégrale de chemins en introduisant le quantum d'action de max Planck.

1.1- Introduction

L'histoire de l'intégrale de chemins à travers la vie scientifique de Richard Feynman ne saurait se passer d'une description rigoureuse des événements relatifs à l'origine de la mécanique quantique. D'autant plus que les travaux du physicien américain font souvent référence à ceux des pionniers des années 1900 à 1930 dans la construction de ses équations et dans sa façon de vérifier la convergence de ses résultats avec ceux associés aux théories reconnues.

Aussi, en sous-section 1.2.1.a et 1.2.1.b, j'ai trouvé intéressant de développer l'histoire du rayonnement du corps noir par Planck en 1900, origine de la théorie quantique, grâce à la découverte du quantum d'action h . Le concept de quantum d'énergie indivisible est donc largement abordé, consolidé par la théorie d'Einstein conduisant à la notion de quanta lumineux en 1909.

En sous-section 1.2.1.c, j'ai détaillé les travaux de Bohr concernant son modèle d'atome datant de 1913, car ceux-ci ont posé les fondations d'une unification rationnelle de la théorie quantique et de la physique classique.

Les travaux de Louis de Broglie (1924), à savoir l'unification des points de vue ondulatoire et corpusculaire pour les électrons, comme pour la lumière, ne sont pas oubliés et sont largement présentés en sous-section 1.2.1.d. Il m'a en effet paru important de traiter ce sujet, car nous verrons ultérieurement que ces travaux ont pu donner à Feynman l'idée de chemin d'une particule associée à une fonction d'onde.

La sous-section 1.2.1.e décrit les travaux de Heisenberg (1925 à 1927) et le très important principe d'indétermination dont tout physicien théoricien fait référence dans la représentation d'une particule dans l'espace et le temps ; à l'exception d'un Feynman plein d'audace qui construira une théorie à contre courant en réintroduisant la notion de trajectoire d'une particule dans l'espace-temps de la relativité restreinte.

La sous-section 1.2.1.f concerne la mécanique ondulatoire de Schrödinger (1926), au moyen de son équation différentielle, qui conduira l'ensemble de la communauté scientifique à une interprétation probabiliste de la fonction d'onde. Nous verrons ultérieurement Feynman utiliser ce concept probabiliste dans sa façon de trouver une particule subatomique dans une région de l'espace-temps en effectuant le carré de la somme des contributions de cette particule pour chaque chemin de la région.

La sous-section 1.2.1.g est dédiée à l'histoire de l'équation de Dirac (1928) pour l'électron libre dans l'atome d'hydrogène, pour l'électron dans un champ électromagnétique extérieur et au formalisme de Dirac dans la représentation des états quantiques d'une particule (1939). Toutes les connaissances approfondies que j'ai pu ainsi acquérir, m'ont permis de déchiffrer les publications de Feynman auxquelles ont conduit sa notion d'intégrale de chemins.

Enfin, la section 1.2.2 liste un panorama complet (1927 à 1941) des problèmes de la physique associée au couplage entre les champs électromagnétiques et les charges électriques au niveau quantique (l'Electrodynamique Quantique). Il m'a en effet paru indispensable de passer en revue de manière exhaustive ces problèmes, car c'est à partir de ceux-ci que Feynman, encore étudiant au MIT entre 1935 et 1939, s'est mis à douter des théories quantiques de ses prédécesseurs, qui ne permettaient pas de les résoudre.

Les publications fondamentales que j'ai consultées sont les suivantes :

- PLANCK Max (14 décembre 1900). Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im normalspektrum. Société de Physique de Berlin.
- PLANCK Max (1937, 1941, 1946). Autobiographie scientifique et derniers écrits. Traduit de l'allemand par A. George. Editions Champs sciences pour le dépôt légal février 2010,
- EINSTEIN Albert (1904). Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme. Annalen der Physik, vol. XIV,
- EINSTEIN Albert (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta),
- EINSTEIN Albert (1909). Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta),
- BOHR Niels (1913). On the Constitution of Atoms and Molecules. Philosophical Magazine N°26, pages 1 à 24,
- De BROGLIE Louis (1925). Recherches sur la Théorie des Quanta. Thèse. Annales de Physique. Masson et Cie, Editeurs, Paris,
- HEISENBERG Werner (1927). Sur le contenu intuitif de la cinématique et la mécanique quantique . Traduction Anna Svenbro,
- HEISENBERG Werner (1932). Les principes physiques de Théorie des Quanta. Traduction B. Champion et E. Hochard de l'édition en allemand de 1930. Gautier-Villars, Paris. Editions Jacques Gabay,
- SCHRÖDINGER Erwin (1933). Mémoires sur la mécanique ondulatoire. Traduction Al. Proca des six mémoires en allemand publiés en 1926 et 1927 dans Annalen der Physik (Quantification et valeurs propres ; Le passage continu de la micro-mécanique à la mécanique macroscopique ; Sur les rapports qui existent entre la mécanique quantique de Heisenberg-Born-Jordan et la mienne ; Sur l'effet Compton ; Le théorème de la conservation d'énergie et de quantité de mouvement pour les ondes matérielles ; Echanges d'énergie d'après la mécanique ondulatoire). Librairie Félix Alcan, Paris. Editions Jacques Gabay,
- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la mécanique quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay,
- DIRAC Paul (Second edition 1935). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford. At the Clarendon Press. Source en langue originale pour la seconde édition,
- DIRAC Paul (Third edition 1947). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, London. Source en langue originale pour la troisième édition,
- DARRIGOL Olivier (1982). Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948). Thèse de doctorat (Université Paris I : Panthéon-Sorbonne).

1.2- La mécanique quantique : ses origines et ses difficultés

1.2.1- Les pères fondateurs

Comme nous l'avons écrit, la formation en mécanique quantique au MIT suivait assez largement le contenu de la publication de Dirac de 1930 ; et cette dernière s'inspire des travaux

de Heisenberg (1925) et de Schrödinger (1926) en vue de leur généralisation au moyen des opérateurs linéaires.

Rappelons que Schrödinger a construit sa théorie à partir des travaux de Louis de Broglie en mécanique ondulatoire (1925) et aussi à partir de ceux de Hamilton (1834) sur la vitesse de groupe et de phase d'une onde dans le cadre de la nature ondulatoire de la lumière.¹³

Aussi, les travaux de ces protagonistes de la mécanique quantique que sont De Broglie, Heisenberg, Schrödinger et Dirac, seront analysés avec détail, car traitant un sujet au sens épistémologique du terme, il est important de s'appuyer sur des connaissances scientifiques de première main. Ceci, d'autant plus que les travaux de Feynman se rapportant à notre thèse, font souvent référence à ceux de Heisenberg, Schrödinger, Dirac, etc., afin entre autres, de vérifier, pour Feynman, la convergence de ses résultats avec les théories reconnues.

De plus, afin de saisir avec exactitude la signification physique se cachant derrière des mots décrivant une pseudo-réalité que nous n'appréhendons pas, nous n'avons pas hésité dans ce chapitre, d'un point de vue épistémologique, à rappeler largement les travaux des pères fondateurs que sont Planck (1900), Einstein (1905, 1909) et Bohr (1903). Les travaux d'Einstein sont particulièrement analysés, afin d'essayer de sentir dans son essence même cette nature microscopique basée sur le phénomène de discrétisation de l'énergie électromagnétique. Il ne fait aucun doute que ceci favorisera la compréhension du contexte associé à l'intégrale de chemin, de même que le cheminement de la pensée de Feynman.

1.2.1.a) Planck et le rayonnement du corps noir (1900)

Les historiens des sciences sont quasiment tous d'accord pour considérer l'origine de la théorie quantique principalement due à l'étude du rayonnement du corps noir. Aussi, nous allons nous intéresser aux travaux ayant permis la découverte du quantum élémentaire d'action formalisé par la constante de Planck h .

En effet, c'est en recherchant les toutes premières hypothèses de la nature quantique du rayonnement électromagnétique que nous pourrions faire ressortir véritablement le rôle de cette constante dans l'intégrale de chemin.

Des mesures, relatives à l'étude du spectre thermique (grâce à l'obtention pratique d'un corps noir parfait électriquement chauffé), effectuées par Lummer et Pringsheim en 1898 à l'Institut de Physique et de technologie situé à Charlottenburg dans la banlieue de Berlin, attirèrent l'attention de Max Planck (1858 – 1947) sur la loi de Kirchhoff (1859)¹⁴.

Cette loi du rayonnement thermique utilise le concept d'un objet parfaitement absorbant et parfaitement émissif appelé « corps noir ». Kirchhoff se représentait idéalement son corps noir imaginaire comme une enceinte fermée (un four) percée d'un petit orifice permettant d'analyser l'ensemble des radiations émises. L'orifice devait être suffisamment petit pour que le rayonnement sortant ne puisse perturber l'équilibre du four, c'est-à-dire le fait que l'ensemble des parois du four absorbent complètement tout le rayonnement émis par celui-ci.

La loi de Kirchhoff¹⁵ concerne la proportionnalité des pouvoirs émissifs et absorbants pour tout rayonnement thermique, indépendamment des propriétés physiques des corps, lorsque l'équilibre du four est atteint.

13. Schrödinger. « *Mémoires sur la mécanique ondulatoire.* »

14. Planck. « *Autobiographie scientifique.* »

15. $\rho_T = f(\nu)$ avec ρ_T la densité de l'énergie rayonnée sous forme d'ondes électromagnétique (lumière) par le four soumis à une température d'équilibre T donnée (paramètre) et ν la fréquence du rayonnement dit thermique

L'incapacité d'approfondir la théorie par des expériences, due à l'absence d'un corps noir parfait (difficultés techniques en 1859 pour la construction d'un corps noir réel s'approchant du concept imaginé par Kirschhoff) et d'autre part à l'impossibilité de pouvoir détecter précisément le rayonnement émis sur une gamme de fréquences assez large, fait qu'il n'y eut aucun progrès pendant plus de trente ans.

En 1896, Wilhelm Wien (1864 – 1928), à la fois expérimentateur et théoricien, publia sa loi de répartition du rayonnement d'un corps noir :

$$\rho_T = \frac{C1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(C2/\lambda T)}}$$

avec :

- * $C1 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ m}^4 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$ (première constante de rayonnement),
- * $C2 = 0,01439 \text{ m} \cdot \text{K}$ (deuxième constante de rayonnement),
- * λ la longueur d'onde du rayonnement thermique en m ,
- * ρ_T la densité volumique de flux énergétique rayonné en $J \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$.

Wien trouva donc qu'à l'équilibre thermique, pour une température T du four donnée, la distribution de l'énergie spectrale est telle que la densité d'énergie lumineuse croît vers une valeur maximale (un pic) puis décroît, au fur et à mesure de la décroissance des longueurs d'onde du rayonnement. De plus, ce pic de densité maximale d'énergie lumineuse rayonnée se déplace vers les ondes courtes lorsque la température T du four, à l'équilibre thermique, est plus importante.

Mais si les mesures effectuées par Lummer et Pringsheim confirmèrent ce résultat, ainsi que les faibles énergies obtenues aux petites longueurs d'ondes, il n'en était pas de même pour les grandes valeurs de l'énergie. En effet, pour les grandes ondes, des divergences sensibles furent trouvées.¹⁶

Le travail de Planck consista à reconsidérer la loi de Wien dans les grandes ondes. Par une heureuse intuition, comme il l'écrit dans son « *Autobiographie scientifique* », Planck trouva « *une méthode directe pour résoudre le problème par une application de la théorie électromagnétique de la lumière, instaurée par Maxwell* » : il supposa les parois de la cavité du four constituées d'oscillateurs non amortis, chacun associé à une charge électrique. En chauffant les parois, chaque oscillateur rayonne selon sa fréquence propre, différente d'un oscillateur à l'autre. Il présuma que « *l'échange d'énergie causé par la radiation réciproque des oscillations finissait par amener au cours du temps un état stationnaire de la distribution normale d'énergie, correspondant à la loi de Kirschhoff.* »

En d'autres termes, sous l'effet de la chaleur, les charges électriques rayonnent à l'intérieur de la cavité du four selon les lois de Maxwell, et chaque oscillateur absorbe le rayonnement émis à sa fréquence propre. Un équilibre s'établit, de telle façon que chaque oscillateur associé à une certaine fréquence propre, absorbe autant d'énergie en provenance de l'enceinte qu'il n'en émet dans cette même enceinte.

Confiant dans ses recherches touchant au second principe de la thermodynamique, Planck eut ensuite « *l'idée de mettre, non pas la température, mais bien l'entropie de l'oscillateur, en*

(en fait rayonnement électromagnétique monochromatique dont la fréquence ν_i est associée à $(\rho_T)_i$ émis par le four).

16. Planck. « *Autobiographie scientifique.* »

corrélation avec son énergie ». En effet, parmi toutes les recherches déjà effectuées par une légende de physiciens : « *chacun d'entre eux n'avait orienté ses efforts que pour prouver la dépendance de l'intensité de la radiation par rapport à la température, tandis que je soupçonnais au contraire que le lien fondamental résidait dans la dépendance de l'entropie par rapport à l'énergie* ».

Dans la genèse de sa loi sur le rayonnement du corps noir, Planck garde les coefficients $C1$ et $C2$ de la loi de Wien mais les interpréta de la manière suivante :

$$C1 = 2.\pi.h.c^2 \quad \text{et} \quad C2 = h.c / k$$

Avec :

* c la vitesse de la lumière dans le vide,

* $k = 1,380 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

* $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

La loi de Wien peut alors se ré-écrire, selon Planck et sachant que $\lambda = c / \nu$:

$$\rho_T = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)}}$$

Cette interprétation physique des coefficients $C1$ et $C2$ de Wien, résulte de l'étude de Planck sur les relations réciproques entre entropie et probabilité. Elle orienta sa réflexion dans la ligne de pensée inaugurée par Boltzmann, qui, en 1877, avait défini l'entropie en terme de probabilité : « *puisque l'entropie S est une grandeur additive, alors que la probabilité W est une grandeur multiplicative, je postulais simplement que :*

$$S = k . \ln W \quad \text{soit} \quad W = e^{S/k}$$

où k est une constante universelle ; puis je recherchais si l'expression de W , obtenue lorsque S est remplacée par sa valeur correspondant à la loi du rayonnement ci-dessus, pouvait être interprétée comme une grandeur de probabilité. Le résultat fut que j'en trouvai effectivement la possibilité et qu'avec cette correspondance, k représente la constante connue sous le nom de constante des gaz parfaits, rapportée non pas aux molécules-gramme ou moles, mais bien aux molécules réelles elles-mêmes. Elle est le plus souvent appelée, comme on le sait, constante de Boltzmann. »

Ainsi, en considérant :

$$W = e^{S(J.K^{-1})/k(J.K^{-1})}$$

Planck peut écrire :

$$W = e^{ST(\text{Joule})/kT(\text{Joule})}$$

et formuler ainsi le résultat de sa réflexion : « *S'agissant de la grandeur W , je trouvais que pour l'interpréter comme une probabilité ainsi qu'il convenait, il était nécessaire d'introduire une constante universelle, que j'appelais h . Comme elle avait les dimensions d'une action (une énergie multipliée par un temps), je lui donnais le nom de quantum élémentaire d'action. »*

Ainsi, Planck établit intuitivement la correspondance : $ST (\text{Joule}) \leftrightarrow h \nu (\text{Joule})$,

avec :

* h en $J.s$ (la constante de Planck),

* ν en s^{-1} (la fréquence propre associée à chacun des oscillateurs dans la distribution fréquentielle de l'énergie lumineuse rayonnée).

Planck postule donc que l'énergie totale de l'ensemble des oscillateurs ayant une même fréquence propre ν , est décomposable en petites énergies multiples de $h\nu$. Il obtient ainsi une formule en accord avec la loi de Wien pour les grandes ondes. En d'autres termes, Planck considéra l'énergie, à chaque fréquence propre ν , comme étant composée d'un nombre d'éléments (un élément constituant le quantum élémentaire d'énergie, indivisible) qu'il nomme quanta¹⁸ (pluriel de quantum signifiant en latin « combien » dans le sens de quantité finie, déterminée, discrète donc discontinue).

Et Planck de souligner dans son *Autobiographie scientifique* : « Ainsi, la nature de l'entropie en tant que mesure d'une probabilité, au sens indiqué par Boltzmann, se trouvait dès lors bien établie dans le domaine du rayonnement. »

De même, pour Feynman :

« L'hypothèse de Planck était que l'oscillateur harmonique ne peut recevoir de l'énergie que pour un montant $h\nu$ à chaque fois. L'idée qu'ils peuvent avoir n'importe quelle énergie est fausse. Bien entendu, ce fut le commencement de la fin la mécanique classique. »¹⁹

Mais la formule de Wien ré-écrite par Planck précédemment ne convient pas, du fait des mesures de Lummer et Pringsheim, montrant des divergences sensibles pour les grandes ondes. Il nous reste donc à donner la formule définitive de Planck sur la loi de rayonnement du corps noir et surtout d'expliquer comment il l'obtient. Pour cela, nous travaillons sur la publication originale de Planck datant du 14 décembre 1900 (voir note 18) tout en consultant les compléments d'information fournis par Feynman lui-même (voir note 19).

Comme nous l'avons entrevu ci-avant, Planck utilisa la méthode statistique de Boltzmann associée au calcul de l'entropie S relative à l'énergie moyenne d'un ensemble de $(n+1)$ oscillateurs. Pour que la probabilité statistique liée à la répartition de l'énergie entre les $(n+1)$ oscillateurs soit finie, il fallait que l'énergie soit divisée en éléments $\varepsilon = h\nu$.

La probabilité d'occuper un niveau d'énergie E est $P(E) = e^{-E/kT}$ à une constante de normalisation près.

Planck procéda donc de la manière suivante :

→ Soient N_0 le nombre d'oscillateurs se trouvant dans l'état fondamental (l'état d'énergie la plus faible), N_1 le nombre d'oscillateurs dont chacun est dans l'état d'énergie $E_1 = h\nu$, N_2 le nombre d'oscillateurs dont chacun est dans l'état d'énergie $E_2 = 2h\nu$, etc.

→ A l'équilibre thermique du four, au fur et à mesure de l'accroissement d'énergie $\varepsilon = h\nu$, c'est-à-dire $E_1 = h\nu$, puis $E_2 = 2h\nu$, etc., l'entropie de l'assemblée de tous les oscillateurs est telle que la probabilité du nombre d'oscillateur N_1 puis N_2 , etc., diminue. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 e^{-h\nu/kT} \\ N_2 &= N_1 e^{-h\nu/kT} = N_0 e^{-2h\nu/kT} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

18. Planck. « Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im normalspektrum. »

19. Feynman. « Le cours de physique : mécanique 2 », page 229.

Par commodité, en écrivant $x = e^{-h\nu/kT}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 x \\ N_2 &= N_1 x = N_0 x^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ N_n &= N_0 x^n \end{aligned}$$

→ Pour un oscillateur dans l'état fondamental, il n'y a pas d'énergie,

→ Pour un oscillateur dans le premier état : $E_1 = h\nu$ d'où $E_{1\text{ tot}} = N_1 h\nu = h\nu N_0 x$,

→ Pour un oscillateur dans le deuxième état : $E_2 = 2 h\nu$ d'où $E_{2\text{ tot}} = N_2 2 h\nu = 2 h\nu N_0 x^2$,

⋮
⋮
⋮
etc.

→ Le calcul de l'énergie totale associé à l'entropie de l'assemblée des (n+1) oscillateurs (four à l'équilibre thermique) donne:

$$E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 + \dots = N_0 h\nu (0 + x + 2x^2 + \dots)$$

→ Le nombre total d'oscillateurs est :

$$N_{\text{tot}} = N_0 + N_1 + N_2 + \dots = N_0 + N_0 x + N_0 x^2 + \dots$$

→ L'énergie moyenne est donc :

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{tot}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{N_0 h\nu (0 + x + 2x^2 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + \dots)} = \frac{h\nu \sum_0^m m x^m}{\sum_0^m x^m} = \frac{h\nu x (1-x)^{-2}}{(1-x)^{-1}} = \frac{h\nu x}{(1-x)} = \frac{h\nu}{x^{-1} - 1}$$

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

La formule de Planck s'écrit alors :

$$\rho_T = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)} - 1},$$

et des mesures effectuées par Lummer et Pringsheim confirmèrent totalement cette formule du rayonnement.²⁰

En remarquant que le développement limité à l'ordre 1 de $e^{(h\nu/kT)}$ (pour ε égal à $h\nu$ tendant vers 0 dans le cas d'un retour au continu sans discrétiser l'énergie) s'écrit :

$$e^{(h\nu/kT)} = 1 + h\nu/kT$$

20. Planck. « *Autobiographie scientifique.* »

on obtient :

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT}} = kT,$$

ce que Planck a refusé de faire compte-tenu de toutes les explications qui précèdent.

En effet, dans un tel cas, sachant que $\lambda = c / \nu$, Planck aurait obtenu :

$$\rho_T = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)} - 1} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^4 c/\nu} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)} - 1} = \frac{2\pi hc}{\lambda^4} \frac{h\nu}{e^{(h\nu/kT)} - 1} = \frac{2\pi hc}{\lambda^4} kT,$$

qui est la formule de Rayleigh-Jeans dont l'utilisation pour les fréquences élevées (les ondes courtes), conduit à une densité volumique du flux énergétique rayonné ne cessant de croître avec la fréquence, une aberration physique connue sous le nom de « catastrophe ultraviolette ». Et comme nous l'avons vu, pour obtenir sa loi, Planck a dû garder ε fini et de valeur $h\nu$.

Comme nous l'avons écrit, ce qui précède a été, en partie, inspiré du *Cours de physique* de Feynman (voir note 19) donné au Caltech pendant l'année 1961-1962,²¹ c'est-à-dire trois années avant l'obtention de son prix Nobel. Tous les questionnements de Feynman sur l'origine de la mécanique quantique apparaissent en filigrane dans cette publication et on peut, à juste titre, se demander si toutes les explications données par le physicien n'ont pas trouvé leur source dans ses premières années passées au MIT.

Enfin, pour conclure cette section, nous dirons que Planck n'accorda pas de signification particulière et essentielle au découpage discret de l'énergie des résonateurs. Conservateur, il se félicitait de la fusion qu'il venait d'établir entre la théorie du champ électromagnétique de Maxwell et la théorie de la matière. En fait, en 1900, il n'avait pas du tout pressenti le rôle important qu'allait jouer le quantum élémentaire d'action.²²

Cependant, cette réflexion de Planck sur le rayonnement du corps noir allait intéresser bon nombre de physiciens de la nouvelle génération. Et tout particulièrement un jeune homme de 25 ans, Albert Einstein, alors modeste employé au Bureau des brevets à Berne, qui aura l'audace, dès 1905, de remettre en question l'hypothèse de Planck. C'est ce que nous allons suivre en section suivante.

1.2.1.b) Einstein : l'explication de l'effet photoélectrique (1905) et la dualité onde-corpuscule (1909)

L'hypothèse que la matière absorbant le rayonnement se comporte comme un ensemble d'oscillateurs parfaits associés à la paroi interne du four constituant le corps noir (appelé ainsi parce que tout rayonnement émis est totalement absorbé) et que l'énergie de ces oscillateurs qui émettent à la fréquence ν puisse, à un instant considéré, être égale à un nombre entier de fois $h\nu$ ne convient pas à Einstein : « *Planck suppose qu'une catégorie bien déterminée de résonateurs (de période et d'amortissement bien déterminés) conditionne les transferts de l'énergie du rayonnement - hypothèse que j'ai du mal à faire mienne.* »²³

21. Feynman. « *Le cours de physique : mécanique 2* », Introduction de R. Leighton.

22. Planck. « *Autobiographie scientifique.* »

23. Einstein. « *Lettre à Mileva Maric* », du mercredi 10 avril 1901 (traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech, A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

En effet, pour Einstein, l'hypothèse de Planck ayant conduit à sa formule ne fait référence à aucun principe physique rigoureusement établi. Il préfère donc s'en tenir aux lois de la physique en s'appuyant sur des bases beaucoup plus solides telles que la thermodynamique (largement associée depuis une centaine d'années à tous les phénomènes liés à la chaleur) et à tout ce qui concerne les expériences, depuis plus d'une dizaine d'années, sur le rayonnement (expériences effectuées par des grands noms de la science tels que Hertz, Hallwachs et Lenard). Son principal souci sera de comprendre le lien existant entre la thermodynamique et le rayonnement afin de réfuter l'hypothèse de Planck.

La première publication d'Einstein, alors âgé de vingt-trois ans, concernant ses réflexions sur la thermodynamique, date de 1902.²⁴ Dans cette étude, Einstein montre que les principes de l'équilibre thermique et le concept d'entropie peuvent être déduits à l'aide de la théorie cinétique de la chaleur. Dans cette publication, Einstein porte le constat suivant : *Aussi grands que soient les succès de la théorie cinétique de la chaleur dans le domaine de la théorie des gaz, la mécanique n'a pourtant pas encore pu fournir une base adéquate à la théorie générale de la chaleur car personne n'est encore parvenu à dériver les théorèmes concernant l'équilibre thermodynamique et le second principe de la seule exploitation des équations de la mécanique et du calcul des probabilités, bien que les théories de Maxwell et de Boltzmann se soient déjà rapprochées de ce but* ». ²⁵

Aussi, il publie en 1903 « *Une théorie des fondements de la thermodynamique* »²⁶, où il montre par quelles hypothèses générales, on peut obtenir les fondements de la théorie de la chaleur sans pour autant considérer comme indispensable la théorie cinétique.

En 1904, il publie un article intitulé « *Théorie moléculaire de la chaleur* »²⁷ qui constitue quelques compléments à celui de 1903 (note 26). Dans cet article, il redéfinit l'entropie d'un système par une expression identique à celle de Boltzmann dans le cas d'un gaz parfait et tel que Planck l'a supposé dans sa théorie du rayonnement du corps noir. Ensuite, après avoir déduit le second principe de la thermodynamique, il explique le rôle important joué par la constante universelle k (la constante de Boltzmann) dans la théorie moléculaire générale de la chaleur. Il montre ainsi que la « fluctuation en énergie » est liée à cette constante k . Par cette théorie des fluctuations, qui montre bien la réalité des molécules et des atomes, Einstein déduit que la constante k détermine la stabilité thermique du système. Il souligne aussi que cette constante est étroitement liée au nombre de molécules réelles (qu'on appelle une molécule aujourd'hui) contenues dans une « molécule » au sens des chimistes (que l'on nomme une mole aujourd'hui), et il aboutit à la formule $R=N.k$ dans laquelle R est la constante des gaz parfaits et N le nombre d'Avogadro.

Enfin, Einstein mentionne qu'il ne connaît qu'un seul type de système physique pour lequel l'expérience suggère des fluctuations d'énergie telles que l'écart quadratique moyen de l'énergie soit du même ordre de grandeur que le carré de l'énergie moyenne: « *celui où l'on a un espace vide siège d'un rayonnement thermique* (système particulier que constitue le rayonnement contenu dans un volume V) ». Et il poursuit : « *En effet, il est clair que, pour un espace siège d'un rayonnement thermique et, dont les dimensions linéaires sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde correspondant au maximum d'énergie rayonnée à la température considérée, le module de fluctuation en énergie est beaucoup plus petit, en moyenne, que la valeur moyenne de l'énergie rayonnée dans cet espace ; en revanche, lorsque*

24. Einstein. « *Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.* » Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

25. Ibid.

26. Einstein. « *Eine theorie der Grundlagen der Thermodynamik* ».

27. Einstein. « *Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme* ».

l'espace a une taille qui est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde mentionnée, les fluctuations en énergie sont du même ordre de grandeur que l'énergie rayonnée dans l'espace ».

De là, il se donne le droit d'appliquer la théorie qu'il présente, au moins « *tant que l'on ne s'intéresse qu'aux ordres de grandeur.* » Aussi, en appliquant sa théorie moléculaire générale de la chaleur au rayonnement du corps noir, Einstein en déduit naturellement d'après tout ce qui précède : « *une relation extrêmement intéressante entre la constante universelle k et l'ordre de grandeur des longueurs d'onde du rayonnement.* »

Et il termine de la manière suivante : « *Il apparaît donc que l'utilisation de la théorie moléculaire générale de la chaleur permet de déterminer de façon correcte à la fois la dépendance de la longueur d'onde correspondant au maximum d'énergie du rayonnement (λ_m) en température et son ordre de grandeur. Je ne pense pas, compte tenu du caractère extrêmement général des hypothèses faites ici, que cette concordance soit le fait du hasard.* »

En résumé, Einstein, en se basant sur les conceptions statistiques de Boltzmann, établit sa propre version de la mécanique statistique en donnant un sens plus physique au « principe de Boltzmann » associé à la célèbre formule donnant la relation entre l'entropie S d'un système et le logarithme népérien de la probabilité W de formation de sa structure : $S = k \cdot \ln W$ (voir l'article de 1903 en note 26). Et ses travaux, qui dépassent largement ceux de Boltzmann, concordent en grande partie avec ceux de Gibbs sur les fondements de la thermodynamique statistique, qu'à priori, il ne connaissait pas (voir l'article de 1904 en note 27). Ainsi, en ayant montré dans l'article de 1904 que W représente une probabilité au sens strict du terme, Einstein prouve, dans ce même article, que la constante universelle k est associée aux fluctuations temporelles d'énergie que subit tout système maintenu à température constante. Toutes les variations du système en dehors de l'équilibre thermodynamique, peuvent donc être évaluées en fonction même des données associées à cet équilibre thermodynamique.

De 1902 à 1904, les travaux d'Einstein semblent motivés par son besoin de comprendre le comportement, sous l'effet de la chaleur, des corps composés d'atomes (les molécules : point de vue macroscopique) à partir des hypothèses reposant sur les atomes (particules microscopiques).

Comme nous l'avons vu ci-avant, Einstein conclut son article de 1904 en étant persuadé que le corps noir est un système physique dans lequel l'expérience suggère des fluctuations en énergie. Persévérant dans cette direction, et mûri d'une expérience profonde suite à toutes les réflexions qu'il se posa durant les cinq années allant de 1900 à 1904, va naître l'article novateur de 1905 sur les quanta de lumière, basé sur l'étude des fluctuations du rayonnement contenu dans un volume donné.

Dans son article de 1905²⁸, l'idée forte d'Einstein est de comparer, selon un contexte volumique identique, le comportement d'un gaz parfait avec le rayonnement thermique du corps noir. S'il s'avère que du point de vue de la thermodynamique statistique, des similitudes existent entre les deux, alors on peut imaginer que le rayonnement thermique du corps noir est constitué de particules de rayonnement tout comme un gaz est composé d'atomes. Le rayonnement pourra donc être assimilé à un gaz de quanta lumineux.

Nous analysons en *Annexe 9* le contenu de l'article de 1905, en nous référant directement à la source primaire de 1905 (voir note 28) et en consultant l'excellente traduction de François

28. Einstein. « *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

Balibar, Olivier Darrigol et Bruno Jech (voir note 29) ; pour une meilleure compréhension du lecteur, nous complétons les explications physiques par des notes personnelles.

Les travaux d'Einstein présentés le 21 septembre 1909 à Salzbourg³⁵, font part de ses interrogations sur la nature profonde d'un rayon lumineux qui peut être profondément décrit par des formules mathématiques soit dans un contexte ondulatoire, soit dans un contexte corpusculaire.

La dualité onde-corpuscule, un des principes de base de la physique quantique, considère que selon l'expérience réalisée, la lumière présente des caractéristiques soit propres à une onde (objet délocalisé), soit propres à un corpuscule (objet localisé : grain de lumière ou quantum d'énergie unitaire ou particule de rayonnement, qui seront appelés plus tard photon).

Aussi, une description complète de la lumière doit impérativement faire intervenir ces deux aspects de façon complémentaire.

C'est ce que propose Einstein dans ses travaux présentés à Salzbourg. Dans cet article, Einstein dépasse l'hypothèse de 1905 selon laquelle ses résultats de la théorie corpusculaire de la lumière sont valables seulement aux faibles densités lumineuses (les petites ondes), conformément à la loi de Wien.

Pour cela, Einstein applique³⁶ une formule établie en 1904 (voir note 27) :

$$\left(\overline{E-E}\right)^2 = k T^2 \frac{d\overline{E}}{dt},$$

dans laquelle la « fluctuation en énergie »

$$\varepsilon = \left(E-\overline{E}\right), \text{ c'est-à-dire } \left(\overline{\varepsilon}\right)^2 = \left(\overline{E-E}\right)^2,$$

donne la mesure de la stabilité thermique d'un système à la température T (k est la constante de Boltzmann).

Extrapolant les résultats précédents, Einstein imagine une cavité contenant une plaque métallique. Cette cavité, remplie d'un gaz parfait, est le siège d'un rayonnement thermique. A l'intérieur de la cavité, non seulement le gaz, mais aussi le rayonnement agissent sur la plaque. Il obtient ainsi la formule suivante :

$$\left(\overline{\Delta}\right)^2 = \frac{1}{c} h \rho v d v f \tau + \frac{1}{c} \frac{c^3 \rho^2}{8 \pi v^2} d v f \tau$$

avec :

- * c la vitesse de la lumière,
- * h la constante de Planck,
- * ρ la densité d'énergie lumineuse du rayonnement à l'équilibre statique,
- * Δ la quantité de mouvement qui est transférée à la plaque pendant la durée τ , du fait des fluctuations aléatoires du rayonnement,
- * v la fréquence du rayonnement,
- * f la surface de la plaque.

Einstein explique que :

35. Einstein. « *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung* ».

36. F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech : A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta, page 85.

- le deuxième terme de la formule s'explique par la théorie ondulatoire de la lumière,
- le premier terme permet de se faire une idée très grossière de l'hypothèse des quanta,

et il reconnaît : « *A ma connaissance, on n'est pas encore parvenu à élaborer une théorie mathématique du rayonnement qui rende compte à la fois de la structure que l'on doit déduire du premier terme de la formule ci-dessus (structure en quanta). La difficulté vient principalement de ce que les caractéristiques propres des fluctuations du rayonnement, telles qu'elles sont exprimées par la formule ci-dessus, n'offrent guère de points d'appui formels permettant d'élaborer une théorie.* »³⁷

La formule précédente est démontrée page 190 de l'article de janvier 1909 : « *Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems* » (Physikalische Zeitschrift, volume X).

Pour terminer cette section, rappelons deux expériences importantes :

- premièrement, que la nature ondulatoire de la lumière a été déterminée expérimentalement par l'Anglais Thomas Young en 1801 du fait même de sa diffraction,
- deuxièmement, qu'à la suite de l'article d'Einstein de 1905, le physicien américain Robert Millikan se lança dans un programme de recherche expérimentale sur l'effet photoélectrique, qui confirma en 1916 la nature corpusculaire de la lumière, tout en déterminant expérimentalement la valeur de la constante de Planck.

Vers 1910, le problème du corps noir restait obscur. En effet, Planck et Einstein avaient introduit deux types différents de quanta $h\nu$. Pour Planck, les quanta concernaient les échanges d'énergie des résonateurs avec le rayonnement, tandis que pour Einstein, ils étaient carrément des particules de rayonnement. Il faudra attendre 1926, avec les travaux de Heisenberg, Born et Jordan, à l'aide de la nouvelle mécanique quantique, pour que soit justifiée l'idée d'Einstein des quanta lumineux, de même que leur statistique.

D'ici là, dès 1913, les travaux de Niels Bohr confirmaient sinon la nature mais tout du moins l'existence de la constante $h = \left(\frac{R\beta}{N}\right)$ dans le traitement des problèmes atomiques : « *Bohr, avec son modèle d'atome et son principe de correspondance, posa les fondations pour une unification rationnelle de la théorie quantique et de la physique classique. Schrödinger, au moyen de son équation différentielle, créa la mécanique ondulatoire, et par-là même le dualisme entre onde et particule.* »³⁸ (Sans oublier Louis de Broglie).

1.2.1.c) Le modèle atomique de Bohr (1913)

En 1910, les physiciens se posent de nombreuses questions sur le déplacement et la trajectoire des électrons à l'intérieur de l'atome en se demandant par quel phénomène physique ils peuvent se tenir à distance du noyau.

En 1911, Ernst Rutherford conçoit un modèle de l'atome dans lequel les électrons chargés négativement gravitent autour du noyau chargé positivement, sous l'action de la force électrostatique de Coulomb. L'énergie potentielle de l'électron à la distance r du noyau est donc :

37. Einstein. « *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung* ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

38. Planck. « *Autobiographie scientifique.* »

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{r},$$

Avec :

- * ϵ_0 la permittivité du vide,
- * q_e la charge de l'électron.

Soit : $E_p = -\frac{e^2}{r}$, en considérant la charge réduite $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$, par commodité d'écriture.

Mais ce modèle est loin d'être stable car d'après les lois de l'électromagnétisme, les électrons tendent à perdre de l'énergie par rayonnement et rapidement s'effondrer sur le noyau. De plus le modèle n'expliquait pas du tout, pour un atome donné, préalablement excité puis désexcité, son rayonnement à certaines fréquences bien particulières, c'est-à-dire l'existence d'un spectre de fréquences matérialisé par la distribution de raies spectrales.

Dès 1912, deux problèmes des plus importants attiraient l'attention de Bohr. D'une part le fait que le mouvement des électrons produisant un rayonnement en continu devait impliquer une perte d'énergie conduisant à précipiter l'électron sur le noyau et annihiler ainsi toutes ses propriétés. D'autre part le fait que le spectre des fréquences rayonnées par l'atome soit discret (discontinu).

Nos explications de l'obtention du modèle atomique de Bohr s'effectuent directement à partir de la source primaire que constitue sa publication de juillet 1913.³⁹

Le premier postulat introduit par Bohr, dans le §1 « *General Considerations* », consiste à considérer les électrons en mouvement selon une orbite circulaire stable : « *Let us further assume that the electron after interaction has taken place has settled down in a stationary orbit around the nucleus. We shall, for reasons referred to later, assume that the orbit in question is circular : this assumption will, however, make no alteration in the calculations for system containing only a single electron.* »

En d'autres termes, l'électron se mouvant indéfiniment selon cette orbite stable, ne perd aucune énergie électromagnétique par rayonnement. Ainsi, il ne s'effondre pas sur le noyau. Ce postulat arbitraire va à l'encontre de toutes les connaissances acquises dans le domaine classique de l'électromagnétisme. De plus, à chaque orbite correspond un niveau d'énergie particulier de l'électron en interaction avec le noyau.

Les équations traduisant le système stable décrit par Bohr sont :

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W}{eE\sqrt{m}}, \quad 2a = \frac{eE}{W}, \quad W = -\frac{1}{2} \frac{eE}{a},$$

avec:

- * m la masse de l'électron,
- * ω la fréquence de révolution de l'électron,
- * a la moitié de l'axe-majeur d'une orbite elliptique, soit le rayon du cercle dans le cas d'une orbite circulaire,
- * E la charge électrique du noyau,
- * e la charge électrique de l'électron,
- * W l'énergie mécanique totale ($W_c + W_p$) de l'électron en orbite autour du noyau, assurant sa stabilité,
- * W_c l'énergie cinétique de l'électron ($\frac{1}{2} mv^2$),

39. Bohr. « *On the Constitution of Atoms and Molecules.* »

* W_p l'énergie potentielle de l'électron $\left(\frac{-e^2}{r}\right)$.

Puis Bohr postule que l'électron peut aller d'une orbite à une autre, c'est-à-dire d'un niveau d'énergie à un autre, en émettant un rayonnement électromagnétique.

La formule W ci-avant, montre que l'énergie mécanique de l'électron est d'autant plus grande que celui-ci se trouve éloigné du noyau. Ainsi, Bohr considère que le niveau d'énergie orbital le plus bas est celui correspondant à l'orbite la plus proche du noyau. Alors, il postule que l'électron peut aller d'une orbite à une autre, soit par exemple d'un niveau d'énergie plus élevé à un autre plus faible, en rayonnant une énergie lumineuse (il explique au §4 « *Absorption of Radiation* » qu'il y a absorption de quanta d'énergie lumineuse lorsque l'électron va cette fois-ci, d'une orbite proche du noyau (énergie faible) à une orbite plus éloignée (énergie plus élevée). Mais laissons Bohr s'exprimer : « *Now the essential point in Planck's theory of radiation is that the energy radiation from an atomic system does not take place in the continuous way assumed in the ordinary electrodynamics, but that it, on the contrary, takes place in distinctly separated emissions, the amount of energy radiated out from an atomic vibrator of frequency ν in a single emission being equal to $\tau.h\nu$, where τ is an entire number, and h is a universal constant. Let us now assume that, during the binding of the electron, a homogeneous radiation (rayonnement monochromatique) is emitted of a frequency ν , equal to half the frequency of revolution of the electron in its final orbit; then from Planck's theory, we might expect that the amount of energy emitted by the process considered is equal to $\tau.h\nu$, where h is Planck's constant an entire number. »*

Aussi, Bohr pose:

$$W = \tau h \frac{\omega}{2}.$$

En injectant $W = \tau h \frac{\omega}{2}$ dans l'équation $\omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{W}{eE\sqrt{m}}$, Bohr obtient :

$$\omega = \frac{4\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^3 h^3}.$$

En injectant l'expression obtenue ci-avant pour ω dans l'équation $W = \tau h \frac{\omega}{2}$, Bohr obtient :

$$W = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{\tau^2 h^2}.$$

En injectant l'expression obtenue ci-avant pour W dans l'équation $2a = \frac{eE}{W}$, Bohr écrit :

$$2a = \frac{\tau^2 h^2}{2\pi^2 m e E}.$$

Et Bohr de conclure : « *If in these expressions we give τ different values, we get a series of values for W , ω , and a corresponding to a series of configurations of the system. According to the above considerations, we are led to assume that these configurations will correspond to states of the system in which there is no radiation of energy; states which consequently will be stationary as long as the system is not disturbed from outside.* », en citant entre autres la publication d'Einstein de 1905.⁴⁰

40. Einstein. « *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* ».

Toujours au §1 de son article, pour $\tau = 1$ et $E = e$ (l'atome d'hydrogène contient un électron égal en valeur absolue à la charge électrique du noyau), Bohr, d'après l'expression de « a » vue précédemment, calcule la valeur :

$$a = \frac{1}{2} \frac{\tau^2 h^2}{2\pi^2 m e E} = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} = 5,55 \cdot 10^{-11}.$$

En posant :

$$\hbar = h/2\pi,$$

on obtient :

$$a = \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

qui est l'expression classique du « rayon de Bohr », le plus petit rayon atomique correspondant à $\tau = 1$.

Ce rayon donne l'échelle des tailles atomiques. Cette échelle correspondant à la distance moyenne entre l'électron et le noyau dans l'atome d'hydrogène pour l'état dit fondamental, lorsque l'orbite de l'électron est stable.

Bohr termine son §1 en précisant les hypothèses qui ont guidé ses travaux, à savoir :

* l'équilibre dynamique des systèmes dans les états stationnaires peut être analysé à l'aide de la mécanique classique (la force électrostatique, la force centrifuge, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, etc.), tandis que la transition entre les différents états stationnaires ne peut être traitée sur cette base,

* la transition d'un état stationnaire à un autre est suivie d'un rayonnement homogène (onde monochromatique), pour lequel la relation entre la fréquence et la qualité d'énergie émise est celle donnée par la théorie de Planck ($h\nu$).

Dans le §2 « *Emission of Line-spectra* », Bohr rappelle que ses travaux portent sur le spectre de l'atome d'hydrogène, en précisant que cet atome ne contient qu'un seul électron en mouvement autour du noyau et égal en valeur absolue à la charge du noyau (afin d'obtenir un atome électriquement neutre puisque la charge de l'électron et celle du noyau sont de signe opposé : négative pour l'électron, positive pour le noyau), c'est-à-dire :

$$E = e$$

Ainsi, Bohr reprend la formule $W=f(\tau)$ quantifiant l'énergie mécanique totale (l'énergie potentielle et l'énergie cinétique) de l'électron en mouvement autour du noyau selon une orbite stationnaire (voir §1).

En posant :

$$E = e$$

il obtient:

$$W_\tau = \frac{2\pi^2 m e^4}{\tau^2 h^2}.$$

Puis Bohr donne l'expression de la formule associée au processus d'émission (ou d'absorption) d'un quantum d'énergie lumineuse lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie $\tau=\tau_1$ à un niveau $\tau=\tau_2$:

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right),$$

en indiquant la relation suivante :

$$W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = h \nu,$$

c'est-à-dire la fréquence de l'onde monochromatique ainsi rayonnée :

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right).$$

avec :

$$* R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = 3,1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \text{ calculé par Bohr.}$$

Sachant que :

$$1/\lambda = \nu/c,$$

on peut écrire :

$$1/\lambda = \nu/c = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right),$$

avec :

$$* R_H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1},$$

définissant la constante de Rydberg.

Puis, dans sa publication, Bohr propose de poser $\tau_2 = 2$ et de laisser τ_1 varier (τ_1 et τ_2 sont deux entiers caractérisant les niveaux d'énergie entre lesquels s'effectue la transition), d'où :

dans laquelle τ_1 caractérise la longueur d'onde λ du rayonnement monochromatique (transition d'un état excité $\tau_1 > 2$ vers l'état $\tau_2 = 2$).

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène justifie donc la formule précédente trouvée par Balmer en 1885 de manière empirique, afin de trouver la répartition et la valeur des fréquences de chacune des quatre raies du spectre de l'hydrogène. Mais cette formule est obtenue par Bohr de manière scientifique et rigoureuse. Et comme l'écrit Bohr, elle identifie chaque raie du spectre d'émission avec la transition entre deux niveaux d'énergie des électrons. Les raies correspondant à ces transitions sont organisées en séries, conformément à l'état de départ. Elles sont associées à des longueurs d'onde comprises entre 365 nm et $656,5 \text{ nm}$. Les quatre premières raies sont situées dans le domaine des ondes visibles :

- * $\lambda = 656,5 \text{ nm}$ située dans le rouge,
- * $\lambda = 486 \text{ nm}$ située dans le bleu-vert,
- * $\lambda = 434 \text{ nm}$ située dans le violet,
- * $\lambda = 410 \text{ nm}$ située aussi dans le violet.

Puis Bohr propose de poser $\tau_3 = 3$, tel que :

$$1/\lambda = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right),$$

représente la série de Paschen, série de raies spectrales de l'atome d'hydrogène, découverte en 1908 par Friedrich Paschen, et correspondant aux transitions d'un état excité $\tau_1 > 3$ vers l'état $\tau_3 = 3$). Ces transitions sont associées à des longueurs d'onde comprises entre $0,82 \mu\text{m}$ et $1,88 \mu\text{m}$, situées dans l'infrarouge.

Nous verrons plus loin que le développement du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène conduira à la mécanique quantique et que la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'électron de cet atome, soumis au potentiel électrostatique du noyau, permettra également de démontrer la formule de Bohr :

$$N = R_H \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right).$$

Dès 1914, les expériences de Gustave Hertz, neveu de Heinrich Hertz, et de James Franck allaient montrer l'évidence de la quantification des énergies dans les atomes. Ainsi, l'histoire avait tenu à ce que la quantification de la lumière soit découverte avant celle de la matière. Et si l'hypothèse des quanta de lumière fut longtemps mise en doute par les physiciens théoriciens, celle de la matière, semblant impliquer un caractère discontinu des lois de la nature, les déstabilisa encore bien plus.

Que la lumière pût présenter un comportement corpusculaire suite aux travaux de physiciens tels que Planck et Einstein passe encore, mais élargir ce principe aux particules de matière elles-mêmes, comme par exemple l'électron, pour affirmer que ce dernier devait avoir un comportement ondulatoire tel que

$$\lambda = h / mv$$

devenait ahurissant. En effet, cette hypothèse entrevoyait la quantification de la matière comme un phénomène d'ondes stationnaires.

Cette histoire de la science en marche telle que présentée aux étudiants du MIT en 1936 fait l'objet de la section suivante.

1.2.1.d) Louis de Broglie et sa mécanique ondulatoire (novembre 1924)

Dans sa thèse de doctorat intitulée « *Recherches sur la théorie des quanta* » et présentée le 25 novembre 1924 à Paris, Louis de Broglie suggérait qu'il était possible de réunir dans une même discipline certains principes de la mécanique et de l'optique présentant des points de vue analogues.

Aussi, notre présentation porte-t-elle sur l'étude de la source primaire que constitue la thèse de Louis de Broglie datant de 1924.⁴¹

De Broglie commence par une introduction historique dans laquelle il rappelle que Maupertuis et Hamilton (d'une autre manière) ont réussi à faire découler toute la mécanique de Newton en un seul principe : le principe de moindre action (que nous verrons en détail en Annexe 14 puisque ce principe est à la base des intégrales de chemin).

Ensuite, il mentionne les travaux sur l'optique géométrique (propagation rectiligne, réflexion, réfraction) de Newton, en citant Fermat et son principe de moindre temps (dont justement découle le principe de moindre action dont on vient de parler), en n'oubliant pas Huyghens et ses travaux sur la théorie ondulatoire de la lumière.

Puis il rappelle les travaux de Planck sur le corps noir et le rôle joué par la constante h qui porte son nom, tout en mentionnant les travaux d'Einstein de 1905 sur l'explication de l'effet photoélectrique à l'aide de la conception corpusculaire de la lumière.

Le but de sa thèse, ainsi qu'il le mentionne, est d'unifier les points de vue corpusculaire et ondulatoire afin d'en tirer des idées nouvelles.

Dans le chapitre premier, De Broglie souligne le fait que la théorie des quanta a plusieurs fois mis en vedette l'action mécanique, en écrivant que la constante h possède les dimensions d'une action c'est-à-dire ML^2T^{-1} (Js) qui n'a rien d'étrange puisque l'action est classée parmi les principaux invariants de la physique.

En émettant l'hypothèse fondamentale qu'à chaque morceau d'énergie de masse propre m_0 (la masse au repos) puisse être associé un phénomène périodique de fréquence ν_0 , De Broglie a l'idée de réécrire la fameuse équation d'Einstein sous la forme :

$$E = h \nu_0 = m_0 c^2,$$

en insistant sur liaison entre ν_0 et le morceau d'énergie matérialisé par la masse m_0 . Ainsi, pour une masse se mouvant à une vitesse très inférieure à la vitesse de la lumière, la physique classique permet d'écrire :

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h},$$

soit :

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{m_0 c^2}{h},$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}.$$

Convaincu d'une masse du photon imposant la cohérence de sa théorie, de Broglie généralise la formule précédente en suggérant que toute particule massique est une concentration d'énergie qui est transportée par une onde (de longueur λ_0) dans laquelle elle est incorporée.

D'où l'équation suivante :

$$\lambda_0 = h / m_0 v = h / p$$

avec:

* $p = m_0 v$ la quantité de mouvement associée à la masse propre m_0 de la particule.

41. Louis de Broglie. « Recherche sur la Théorie des Quanta ».

Dans cette équation de la mécanique classique, De Broglie interprétait l'onde de longueur λ_0 comme une onde guidant tout corpuscule de matière. En considérant par exemple une balle de golf de masse propre égale à 100g et lancée à une vitesse de 30 m/s, la constante de Planck rend ce phénomène imperceptible du fait d'une longueur d'onde de 2.10^{-34} m.

Mais Louis de Broglie va encore plus loin dans sa réflexion, en considérant la mécanique relativiste issue de la théorie de la relativité restreinte, c'est-à-dire le cas où la particule se meut à une vitesse v non négligeable vis-à-vis de celle de la lumière.

Dans ce cas, nous savons que la masse relativiste de la particule en mouvement est :

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

avec :

- * m_0 la masse de la particule au repos,
- * $\beta=v/c$,
- * c la vitesse de la lumière,
- * v la vitesse relative entre deux référentiels S_0 (supposé fixe) et S mobile par rapport à S_0 ,
- * t l'écoulement du temps dans le référentiel S ,
- * t_0 l'écoulement du temps dans le référentiel S_0 .

- * m_0 la masse de la particule au repos,
- * D'où :

$$v = \frac{1}{h} \left(m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) c^2,$$

soit :

$$v = v_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Or l'équation traduisant le phénomène de ralentissement du temps t dans le référentiel S est la suivante :

$$t = t_0 \sqrt{1-\beta^2},$$

correspondant à une fréquence observée dans ce référentiel S :

$$v = v_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Les deux valeurs précédentes de v étant incompatibles, De Broglie écrit : « Il y a là une difficulté qui m'a longtemps intrigué ». ⁴² Aussi émet-il l'hypothèse suivante permettant de distinguer deux ondes de nature différente :

42. Louis de Broglie. « Recherche sur la Théorie des Quanta ».

* une onde de phase de fréquence $\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ se propageant dans la même direction que le mobile

(la particule massive) avec une vitesse $v = c/\beta$. « *L'onde de phase correspond au transport de la phase et aucunement à celui de l'énergie* ».

* une onde de groupe de fréquence $\nu_0 \sqrt{1-\beta^2}$ dont la vitesse $v = \beta c$ est égale à la vitesse du mobile (la vitesse de la particule massive dont il est question dans le terme β contenu dans le coefficient relativiste $\sqrt{1-\beta^2}$). « *La vitesse du mobile n'est pas autre chose que la vitesse du déplacement de l'énergie.* » En d'autres termes plus modernes, l'onde de groupe correspond au déplacement des amplitudes de l'onde, c'est-à-dire à l'enveloppe associée à l'énergie de la particule.

L'onde de phase est une onde appartenant à l'espace des phases. Il existe donc pour De Broglie un lien entre le mouvement du mobile et la propagation de cette onde. Et il insiste sur le fait que son hypothèse est fortement suggérée par la notion de quantum (puisque la fréquence de phase $\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est directement issue de la relation liant l'énergie ($m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$) c^2 de la particule

massique en mouvement au quantum $h\nu$).

Mais citons directement De Broglie : « *Déjà, nous pouvons noter que la propagation rectiligne de l'onde de phase est liée au mouvement rectiligne du mobile ; le principe de Fermat appliqué à l'onde de phase détermine la forme de ces rayons qui sont des droites tandis que le principe de Maupertuis appliqué au mobile détermine sa trajectoire rectiligne qui est l'un des rayons de l'onde . Au chapitre II, nous tenterons de généraliser cette coïncidence.* »

Enfin, pour terminer ce chapitre premier, De Broglie étudie l'onde de phase de vitesse c/β dans l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte, c'est-à-dire en considérant une géométrie pseudo-euclidienne dont l'invariant fondamental est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

En considérant la vitesse de groupe βc (la vitesse du mobile) par l'observateur situé dans le référentiel fixe S_0 , il trace la ligne d'univers de la particule de masse propre m_0 , de telle sorte qu'en tout point appartenant à ce lieu géométrique, l'écoulement du temps t dans le référentiel S est ralenti par rapport au temps t_0 dans le référentiel S_0 . Cette trajectoire d'espace-temps décrit complètement son mouvement par la donnée du paramétrage ct, x (espace-temps à deux dimensions : une dimension d'espace x et une dimension temporelle t).

Puis en prenant pour hypothèse que l'espace entourant le mobile est le siège d'un phénomène périodique, il identifie des espaces équiphasés sous la forme de plans équiphasés se déplaçant à la vitesse c/β (la vitesse de phase) dans l'espace de l'observateur fixe associé au référentiel S_0 . En reprenant la notion de simultanéité telle que définie par la théorie de la relativité restreinte, De Broglie retrouve tous les résultats obtenus précédemment et plus particulièrement la fréquence de phase :

$$v = \nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{h} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dans le chapitre II, De Broglie se propose d'appliquer « *le principe Hamiltonien à toutes les trajectoires « variées » qui conduisent d'un état initial donné à un état final donné et qui correspond à une valeur déterminée de l'énergie W .* »

Il étudie le principe de moindre action sous sa forme Hamiltonienne pour une particule chargée en mouvement dans un champ électrique et ceci d'un point de vue relativiste, en utilisant les notations du calcul tensoriel.

Pour cela, il prend deux points P et Q de l'espace-temps associés à des valeurs données des coordonnées d'espace et du temps en envisageant une intégrale curviligne prise le long d'une ligne d'univers allant de P à Q. En considérant le quadrivecteur de l'espace-temps de Minkowski et la fonction de Lagrange (le Lagrangien) d'une particule chargée en mouvement dans un champ électromagnétique, il obtient l'expression connue traduisant le principe de moindre action :

$$\delta \int_P^Q J_i dx^i = 0$$

avec :

- * $i = 1, 2, 3, 4,$
- * J_i les composantes covariantes du vecteur Impulsion d'univers synthétisant l'énergie et la quantité de mouvement de la particule ($J_i = m_0 c u_i + e \varphi_i$),
 c la vitesse de la lumière,
- * u_i les composantes covariantes du vecteur vitesse de la particule,
- * e la charge électrique de la particule,
- * φ_i les composantes covariantes d'une fonction exprimée en fonction des trois composantes spatiales covariantes du potentiel-vecteur a_i ($i=1, 2, 3$) du champ électromagnétique et de la composante covariante temporelle du potentiel scalaire Ψ ($i=4$).

Puis De Broglie étudie la propagation de la phase d'un phénomène sinusoïdal par le principe de Fermat (méthode parallèle à ce qui précède c'est-à-dire au principe de moindre action développé en mécanique par Maupertuis et Lagrange).

Il obtient ainsi :

$$\delta \int_P^Q O_i dx^i = 0$$

avec :

- * $i = 1, 2, 3, 4,$
- * O_i les composantes covariantes du vecteur Onde d'univers.

Des deux entités J_i et O_i dépend l'intégrale Hamiltonienne c'est-à-dire l'intégrale d'action, puisque J_i et O_i sont l'expression du Lagrangien placé sous les intégrales d'action $\int_P^Q J_i dx^i$ et

$$\int_P^Q O_i dx^i.$$

En comparant les deux équations :

$$\delta \int_P^Q J_i dx^i = 0 \quad \text{et} \quad \delta \int_P^Q O_i dx^i = 0$$

issues du principe de moindre action, et en étendant le quantum d'énergie tel que :

$$O_4 = \frac{J_4}{h},$$

de Broglie insiste sur le fait que si le vecteur Onde \vec{O} et le vecteur Impulsion \vec{J} ont une composante égale, cela ne signifie pas qu'il en soit de même pour les trois autres, mais que cependant, en effectuant une généralisation tout indiquée telle que :

$$O_i = \frac{J_i}{h}, \text{ avec } i = 1, 2, 3, 4,$$

alors la variation relative à une portion infiniment petite de l'onde de phase est telle que le principe de Fermat devient :

$$\delta \int_P^Q J_i dx^i = \delta \int_P^Q P_i dx^i = 0$$

avec :

$$* P_i = h O_i,$$

$$* i = 1, 2, 3.$$

Et De Broglie de conclure: « *Le principe de Fermat appliqué à l'onde de phase est identique au principe de Maupertuis appliqué au mobile ; les trajectoires dynamiquement possibles du mobile sont identiques aux rayons possibles de l'onde. Nous pensons que cette idée d'une relation profonde entre les deux grands principes de l'Optique et de la Dynamique pourrait être un guide précieux pour réaliser la synthèse des ondes et des quanta.* »

Le chapitre III concerne les conditions quantiques de stabilité des trajectoires associées aux couches électroniques à l'intérieur de l'atome. De Broglie rappelle le postulat quantique émis par Bohr à la fin de sa publication de 1913 et qu'il n'avait pas su démontrer : « *In any molecular system consisting of positive nuclei and electrons in which the nuclei are at rest relative to each other and the electrons move in circular orbits, the angular momentum of every electron round the center of its orbit will in the permanent state of the system be equal to $h/2\pi$, where h is Planck's constant.* »⁴³ (Le contexte de Bohr est celui de la mécanique classique dans lequel il considère la vitesse de l'électron petite devant celle de la lumière).

La citation de Louis de Broglie est la suivante : « *Dans sa théorie de l'atome, M. Bohr a le premier émis l'idée que, parmi les trajectoires fermées qu'un électron peut décrire autour d'un centre positif, certaines seules sont stables, les autres étant irréalisables dans la nature ou tout au moins si instable qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte. Se limitant aux trajectoires circulaires mettant en jeu un seul degré de liberté, M Bohr énonça la condition suivante : «Seules, sont stables les trajectoires circulaires pour lesquelles le moment de la quantité de mouvement est un multiple entier de $h/2\pi$, h étant la constante de Planck.» »*

D'où l'expression mentionnée par De Broglie concernant le mouvement de l'électron dans l'atome d'hydrogène à l'équilibre orbital :

$$m_0 \omega R^2 = n \frac{h}{2\pi} \quad (n \text{ entier}).$$

En effet, le moment angulaire (ou moment cinétique) est le suivant :

$$\vec{L}_0 = \vec{R} \wedge \vec{P}$$

43. Bohr. « *On the Constitution of Atoms and Molecules.* »

Soit :

$$\|\vec{L}_0\| = \|\vec{R}\| \wedge \|\vec{P}\| \sin\theta = R m_0 (v) = R m_0 (\omega R) = m_0 \omega R^2$$

avec :

- * R le rayon de l'orbite électronique,
- * m_0 la masse propre de l'électron,
- * v la vitesse linéaire de l'électron sur son orbite autour du noyau,
- * $P = m_0 v$ la quantité de mouvement associée à la masse m_0 se mouvant à la vitesse v ,
- * $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'angle formé par les vecteurs \vec{R} et \vec{P} ,
- * $\omega = v/R$ la vitesse angulaire de l'électron autour du noyau.

Dans le contexte de la mécanique classique de Bohr, la fréquence de phase et la fréquence de groupe issues de la théorie de De Broglie sont les mêmes car le coefficient relativiste $\sqrt{1-\beta^2}$ disparaît. A l'intérieur de l'atome d'hydrogène, à l'équilibre orbital, l'onde de matière est donc stationnaire, périodique et circulaire fermée (l'onde pilote). Et dans ce contexte, seules les ondes qui ont une certaine longueur sont permises. En effet, dans l'atome d'hydrogène de Bohr, sans action extérieure, l'électron tourne autour du noyau sur une orbite stable de rayon R par rapport au centre du noyau. Aussi, cela conduit, dans la théorie de Louis de Broglie, à ce que le groupe d'ondes composant « l'onde pilote » périodique et stationnaire soit d'une longueur $2\pi R$ (la circonférence de l'orbite) et que cette longueur soit un multiple de sa longueur d'onde λ . En d'autres termes pour une orbite donnée, le nombre n d'ondes composant « l'onde pilote » est tel que :

$$2\pi R = n \lambda.$$

On peut donc écrire :

$$2\pi R = n (h / m_0 v) = n (h / m_0 \omega R),$$

Soit :

$$m_0 \omega R^2 = n \frac{h}{2\pi},$$

qui est la formule trouvée intuitivement par Bohr.

Mais laissons Louis de Broglie conclure : « C'est bien là la forme simple primitivement envisagée par Bohr. Nous voyons donc bien pourquoi certaines orbites sont stables, mais nous ignorons encore comment a lieu le passage d'une orbite stable à une autre. Le régime troublé qui accompagne ce passage ne pourra être étudié qu'à l'aide d'une théorie électromagnétique convenablement modifiée et nous ne la possédons pas encore. »⁴⁴

En fait, Louis de Broglie postule l'existence d'une onde de phase et d'une onde de groupe en mentionnant leur fréquence, sans avoir posé leur équation.

De Broglie perçoit donc le mouvement de l'électron dans l'atome d'une manière différente de celle de Bohr. L'électron sur son orbite n'est pas simplement une particule mais aussi une onde

44. Louis de Broglie. « Recherche sur la Théorie des Quanta ».

reliée aux deux extrémités et vibrant à une fréquence ν parfaitement déterminée qui traduit le niveau d'énergie de l'orbite électronique. Et le passage de l'électron d'une orbite à une autre pourrait bien se faire par une modification de la fréquence de l'onde associée à une énergie orbitale différente. Si cette hypothèse contredit celle conduisant aux sauts quantiques de l'électron en tant que particule, elle va motiver Schrödinger qui ne trouve pas très réaliste le fait d'imaginer un électron se déplaçant par sauts en bon ordre autour du noyau de l'atome selon un niveau d'énergie donné. Mais elle convient tout à fait à Heisenberg dont nous allons présenter les travaux dans la section qui suit.

1.2.1.e) La mécanique matricielle (novembre 1925) et le principe d'indétermination de Heisenberg (1927)

En 1925, la méthodologie associée à la mécanique quantique (l'ensemble des « petits trucs » permettant d'étudier le comportement de l'électron à l'intérieur de l'atome associé à son rayonnement) est un condensé inextricable d'hypothèses, de principes, de théorèmes et de recettes de calcul plutôt qu'une théorie cohérente. Chaque problème de physique quantique devait d'abord être résolu en termes de physique classique puis quantifié (appliquer la constante de Planck aux différentes grandeurs physiques : principe de correspondance de Bohr). Ceci afin de travailler sur des grandeurs discontinues (discrètes).

L'hypothèse fondamentale de Heisenberg fut de rejeter les notions classiques de position et de vitesse d'un électron à l'intérieur de l'atome. Il y avait pour cela deux raisons : d'une part aucune expérience ne mesurait alors directement ces quantités pour un électron atomique, et d'autre part, la théorie qui suppose leur existence conduit à l'échec.

Le problème qui se posait alors à Heisenberg n'était plus de deviner la solution d'un problème quantique particulier, mais de trouver la structure mathématique propre à l'ensemble des phénomènes quantiques.

Aussi, Heisenberg, imprégné par les travaux de Bohr avec lequel il avait travaillé à Copenhague en 1924, eut l'intuition d'envisager toutes les transitions de la position de l'électron par rapport au noyau, qui peuvent se produire à l'intérieur de l'atome, et de les ranger dans un tableau *Tik* contenant i lignes et k colonnes.

La probabilité d'émission d'un quantum de lumière est associée, pour l'électron, au passage d'un état orbital i , plus riche en énergie, à l'état k , plus pauvre en énergie. Réciproquement, la probabilité d'absorption d'un quantum de lumière est associée, pour l'électron, au passage d'un état orbital i , plus pauvre en énergie, à l'état k , plus riche en énergie.

Pour un atome contenant par exemple 4 orbites circulaires, concentriques, et un électron (comme l'atome d'hydrogène) pouvant effectuer un saut quantique d'une orbite à une autre, Heisenberg considère $(4 \text{ orbites})^2 \text{ transitions} = 16$ combinaisons possibles qu'il range dans un tableau contenant 16 éléments associés à ces 16 combinaisons (4 lignes i de 1 à 4 et 4 colonnes k de 1 à 4), permettant de matérialiser toutes les transitions possibles d'une orbite à une autre, y compris les cas où $i = k$ correspondant à la stabilité de l'électron sur une des orbites.

Puis il remplit d'autres tableaux dont chaque élément ik est associé à chaque élément ik du tableau précédent. Pour chacun d'eux, il range les données suivantes: la position de l'électron

correspondant à telle ou telle orbite, sa quantité de mouvement et la fréquence de rayonnement de l'atome en fonction des transitions exprimées dans le premier tableau.

Il note ν_{ik} la fréquence de rayonnement lorsque l'électron effectue un saut quantique du niveau d'énergie W_i au niveau W_k .

Ainsi pour l'électron se rapprochant du noyau (par exemple saut quantique de l'orbite 3 à l'orbite 2), restituant une énergie $W_i - W_k = W_3 - W_2$, nous avons :

$$\nu_{ik} = \nu_{32} = \frac{1}{h} (W_3 - W_2).$$

La fréquence de rayonnement émis par l'atome est désignée par ν_{32} dans le tableau prévu pour les fréquences de raie spectrale.

Pour l'électron s'éloignant du noyau (par exemple saut quantique de l'orbite 2 à l'orbite 3), absorbant une énergie $W_i - W_k = W_2 - W_3$, nous avons :

$$\nu_{ik} = \nu_{23} = \frac{1}{h} (W_2 - W_3).$$

La fréquence de rayonnement absorbée par l'atome est désignée par ν_{23} dans le tableau ci-avant des fréquences de raie.

Pour l'électron stable sur son orbite dans un atome en contenant trois, nous avons $i = k$ avec $i = 1, 2, 3, 4$, c'est-à-dire :

$$W_i - W_i = W_2 - W_2 = W_3 - W_3 = W_4 - W_4 = 0.$$

Nous avons donc :

$$\nu_{ik} = \nu_{11} = \nu_{22} = \nu_{33} = \nu_{44} = \frac{1}{h} (W_1 - W_1) = \frac{1}{h} (W_2 - W_2) = \frac{1}{h} (W_3 - W_3) = \frac{1}{h} (W_4 - W_4) = 0.$$

Aucune radiation n'est émise ou absorbée par l'atome.

Enfin, en effectuant de multiples opérations sur ces tableaux, Heisenberg s'aperçut qu'il retrouvait l'équation du mouvement de l'électron.

En remarquant que les tableaux sont une réinvention de la notion de matrice en mathématique, Heisenberg venait d'inventer la mécanique matricielle (premier formalisme mathématique de la nouvelle physique quantique), permettant de décrire d'une manière inédite ce qui se passe dans un atome ; et par-là, de retrouver les différentes valeurs des fréquences des quatre raies principales du spectre de l'atome d'hydrogène trouvées par Bohr, ce qui constituait son principal objectif.

En Annexe 10, nous expliquons le cheminement de la pensée de Heisenberg dans la conception de sa mécanique matricielle en exploitant la source primaire que constitue sa publication de 1932.⁴⁵

En 1927, Heisenberg publie un nouvel article⁴⁸, dans lequel il démontre et commente son célèbre principe d'indétermination. En fait, il s'agit d'un théorème, découvert par Heisenberg, aboutissant à l'élaboration d'une relation parfaitement justifiée mathématiquement, qui montre définitivement la nature indéterministe de la mécanique quantique.

45. Heisenberg. « *Les principes physiques de théorie des quanta* ». Traduction Champion et Hochard.

48. Heisenberg. « *Sur le contenu intuitif de la cinématique et la mécanique quantique* ». Traduction Anna Svenbro.

Mais citons Heisenberg lui-même (à partir de l'article fondateur de 1927), à propos de l'effet Compton reposant sur la conservation de l'énergie cinétique globale lorsqu'un photon incident entre en collision avec un électron libre d'un atome :

« Chaque observation de lumière diffusée provenant de l'électron suppose un effet photoélectrique (dans l'œil, sur la plaque photographique, dans la phot cellule) qu'on peut interpréter comme suit : un quantum de lumière rencontre l'électron, est réfléchi ou diffusé par lui, et est encore dévié par la lentille du microscope pour produire l'effet photoélectrique. A l'instant même où la position est mesurée, et aussi à l'instant même où le quantum de lumière est diffusé par l'électron, l'électron change de quantité de mouvement de manière discontinue. Ce changement est aussi grand que la longueur d'onde de la lumière utilisée est petite, c'est-à-dire que la précision de la mesure de la position est élevée. A l'instant où l'on connaît la position de l'électron, on ne peut par conséquent connaître sa quantité de mouvement qu'avec une précision dont l'amplitude correspond à ce changement discontinu ; ainsi, plus la position est mesurée précisément, moins on connaît précisément la quantité de mouvement, et vice versa ; en cela, nous entrevoyons une interprétation intuitive et directe de la relation $p q - q p = \frac{h}{2\pi i}$. Soit q_1 la précision avec laquelle la valeur q est connue (q_1 est en quelque sorte l'erreur moyenne de q), c'est-à-dire la longueur d'onde de la lumière, p_1 la précision avec laquelle p est déterminable, c'est-à-dire le changement discontinu de p par l'effet Compton, alors d'après les formules élémentaires de l'effet Compton, p_1 et q_1 vérifient la relation suivante :

$$p_1 q_1 \sim h.$$

On montrera plus tard que cette relation est une conséquence mathématique directe de la relation de commutation $p q - q p = \frac{h}{2\pi i}$. » (Note 48).

De manière plus précise, la relation d'indétermination :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h / 4\pi$$

stipule qu'une particule ne peut être conçue comme simultanément localisée, en position et en impulsion (la quantité de mouvement $m \cdot \vec{v}$ impliquant la vitesse de la particule), en deçà de la limite $h / 4\pi$.

En d'autre terme, si la position « x » de la particule est connue avec une grande précision, alors sa vitesse est d'autant plus imprécise. Réciproquement, mieux on connaît la vitesse v de la particule, plus grande est l'indétermination sur sa position géographique Δx .

Ainsi, dans le monde microscopique de la mécanique quantique, dans la mesure simultanée d'un couple des caractéristiques physiques d'une particule, il existe toujours une indétermination sur l'une de ces caractéristiques.

Ceci implique donc qu'en mécanique quantique, contrairement à la mécanique classique touchant le monde macroscopique, l'idée de trajectoire n'existe pas, puisqu'on ne peut connaître avec précision la position et la vitesse d'une particule. Cette notion s'appuie sur des calculs probabilistes. Et cet indéterminisme est inclus dans la conception même de la nature au cœur de l'infiniment petit car la relation d'indétermination est la propriété intrinsèque de la description quantique de tout système : elle n'a rien à voir avec une quelconque incertitude sur la mesure elle-même ou sur la précision des instruments de mesure.

Enthousiasmé par les travaux de Louis de Broglie et non convaincu du saut des électrons autour du noyau selon un niveau d'énergie donné tel que Bohr l'imaginait, Schrödinger va développer début 1926, c'est-à-dire tout juste quelques mois après Heisenberg, une tout autre théorie

permettant de retrouver les différentes valeurs des fréquences rayonnées par l'atome d'hydrogène. C'est ce que l'on va développer dans la section suivante.

1.2.1.f) Schrödinger et sa fonction d'onde (1926)

Comme nous l'avons écrit à la fin de la section 1.2.1.d, Schrödinger ne trouvait pas réaliste le fait d'imaginer, de la manière dont Bohr le prétendait, des sauts d'électrons autour du noyau de l'atome selon un niveau d'énergie donné : « *Il est à peine nécessaire de remarquer à quel point une représentation des phénomènes qui ferait intervenir au moment d'une transition quantique un simple échange d'énergie entre deux formes de vibration distinctes, serait plus facilement acceptable que l'image actuelle des électrons qui sautent sur un autre.* »⁴⁹

De plus, enthousiasmé et très intéressé par les travaux de Louis de Broglie en mécanique ondulatoire, il entreprend dès 1925, sur les conseils du physicien néerlandais Peter Debye, un travail de réflexion sur l'onde de matière associée à une particule.

En effet, la légende voudrait que Schrödinger exposant à Debye l'hypothèse de De Broglie concernant le comportement ondulatoire de toute particule en mouvement, celui-ci se serait exclamé : « Qu'est-ce que c'est que cette onde qui n'a pas d'équations ? ».

Dans le premier article du 27 janvier 1926 (voir note 49), Schrödinger rappelle que dans cette communication, il se place dans le contexte de l'atome d'hydrogène en négligeant la variation de la masse avec la vitesse (contexte non-relativiste) pour l'unique électron de cet atome.

Puis il procède à un argumentaire mathématique assez bien construit basé sur l'hypothèse d'une fonction d'onde Ψ unique et bien déterminée, associée à un phénomène de vibration intra-atomique, dans tout l'espace de configuration.

Il mentionne aussi qu'après avoir pris connaissance de la remarquable thèse de Louis de Broglie, il a été amené à réfléchir à la distribution spatiale des ondes de phase dont le physicien français a montré « *qu'il y en a toujours le long de la trajectoire un nombre entier par période ou quasi-période de l'électron.* »

Mais il précise que la principale différence entre les résultats de De Broglie et les siens est basée sur la nature même des ondes qui sont progressives chez De Broglie, alors que pour sa part, les ondes sont des vibrations propres stationnaires. De fait, il ajoute qu'il existe pour lui, une certaine relation entre la fréquence d'un phénomène ondulatoire intra-atomique et la grandeur E (l'énergie mécanique totale de l'électron : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle).

Dans le deuxième article du 23 février 1926, Schrödinger construit sa nouvelle théorie quantique basée sur son équation des états stationnaires, d'une part à partir des découvertes de Louis de Broglie en mécanique ondulatoire (1924), et d'autre part à partir de l'extension du travail de Euler-Lagrange par Hamilton. En effet, Hamilton avait réexaminé le principe de Fermat (associé à l'optique géométrique) en considérant la vitesse de groupe et la vitesse de phase d'une onde dans le cadre de la nature ondulatoire de la lumière (1834).

Hamilton s'était lui-même inspiré :

- * du principe de moindre temps de Fermat en optique géométrique (1655),
- * des travaux de Huygens sur la nature ondulatoire de la lumière (1678),
- * de l'extrapolation en mécanique, par Maupertuis, du principe de moindre temps afin de définir le principe de moindre action (1744),
- * de l'équation des cordes vibrantes de d'Alembert (1747),

49. Schrödinger. « *Quantification et valeurs propres (première communication)* ». Traduction Al. Proca.

* des travaux de Euler-Lagrange sur la formalisation mathématique du principe de Maupertuis (1755).

Mais citons Schrödinger lui-même :

« L'existence d'une relation intime entre la théorie de Hamilton et le phénomène de propagation des ondes est loin d'être quelque chose de nouveau. Hamilton lui-même le connaissait très bien et l'avait même choisi comme point de départ de sa théorie de la dynamique, laquelle n'était d'ailleurs qu'un prolongement de son « Optique des milieux non-homogènes ». Le principe de variation de Hamilton peut être considéré comme un principe de Fermat pour une propagation d'ondes dans l'espace de configuration et son équation aux dérivées partielles n'exprime autre chose que le principe d'Huygens pour cette même propagation. »⁵¹

Aussi, Schrödinger donne-t-il quelques explications théoriques sur l'analogie qu'il convient de formuler entre l'optique géométrique et la mécanique « géométrique » pour une longueur d'onde de De Broglie $\lambda = h / mv$ (avec m la masse de l'électron à la vitesse v dans l'atome d'hydrogène) « comparée aux dimensions de la trajectoire parcourue d'après la mécanique classique par l'électron d'un atome d'hydrogène ».

Il parvient ainsi à l'équation donnant la vitesse de phase, c'est-à-dire la vitesse de déplacement d'un point situé sur une surface d'équiphase :

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{h\nu}{\sqrt{2m(h\nu-V)}},$$

avec :

- * E l'énergie mécanique totale de l'électron,
- * V l'énergie potentielle de l'électron,
- * m la masse propre (au repos) de l'électron,
- * h la constante de Planck,
- * ν la fréquence de l'onde.

Puis Schrödinger rappelle que la fonction d'onde Ψ doit satisfaire à l'équation des cordes vibrantes de d'Alembert :

$$\Delta \Psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

« équation valable uniquement pour des phénomènes qui dépendent du temps par l'intermédiaire d'un facteur $e^{-i2\pi\nu t}$. » (voir note 51).

Soit :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{-i2\pi\nu t},$$

avec :

- * $\Psi(x, y, z, t)$ l'évolution temporelle de la fonction d'onde, c'est-à-dire la fonction d'onde des états stationnaires en fonction du temps,
- * $\Phi(x, y, z)$ les états stationnaires de la fonction d'onde Ψ .

En injectant l'équation précédente dans l'équation des cordes vibrantes de d'Alembert, Schrödinger obtient :

51. Schrödinger. « Quantification et valeurs propres (deuxième communication) ». Traduction Al. Proca.

$$\Delta(\Phi)e^{-i2\pi vt} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i2\pi vt}) = e^{-i2\pi vt} \Delta\Phi - \frac{1}{u^2} \Phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i2\pi vt}) = e^{-i2\pi vt} \Delta\Phi - \frac{1}{u^2} i^2 4\pi^2 v^2 \Phi e^{-i2\pi vt} = 0$$

Soit :

$$\Delta\Phi + \frac{4\pi^2 v^2}{u^2} \Phi = 0$$

En injectant l'expression de u dans l'équation précédente et en sachant que $v = E / h$, Schrödinger écrit :

$$\Delta\Phi + \frac{4\pi^2 E^2}{h^2 \left(\frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \right)^2} \Phi = 0 ,$$

Soit :

$$\Delta\Phi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E-V) \Phi = 0 ,$$

qui est l'équation de Schrödinger des états stationnaires (le temps n'intervient pas: l'électron, soumis au champ électrique créé par le proton du noyau de l'atome d'hydrogène, est dans un état stationnaire). Les valeurs de E peuvent former un ensemble discret, notées généralement E_n , appelé spectre de l'énergie.

Cette équation de Schrödinger des états stationnaires, pour une particule dans un potentiel scalaire, s'écrit de manière moderne :

$$\frac{-\hbar}{2m} \Delta\Phi + V\Phi = E\Phi ,$$

avec:

$$* \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ la constante de Planck réduite.}$$

Dans le troisième article du 10 mai 1926⁵², Schrödinger applique son équation des états stationnaires. Le physicien Autrichien prend pour contexte l'atome d'hydrogène soumis à un champ électrique extérieur (l'effet Stark), tel que le champ de force qui agit sur l'électron n'est plus à symétrie sphérique.

Aussi, procède-t-il en utilisant des coordonnées paraboliques permettant, d'obtenir la solution de l'équation des états stationnaires pour l'atome d'hydrogène (le calcul des fonctions d'onde) afin de calculer le décalage des raies spectrales. En effet, le système de coordonnées paraboliques s'avère particulièrement adapté puisque, contrairement aux systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques, il privilégie une direction qui peut être choisie comme étant celle du champ électrique extérieur.

Chemin faisant, en négligeant dans un premier temps le champ électrique extérieur conduisant à l'effet Stark, Schrödinger obtient l'expression :

52. Schrödinger. « *Quantification et valeurs propres (troisième communication)* ». Traduction Al. Proca.

$$E = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 l^2},$$

qui est celle obtenue par Bohr (voir section 1.2.3) et représentant les niveaux d'énergie mécanique totale de l'électron de l'atome d'hydrogène en fonction du nombre quantique principal l (la position de l'orbite, c'est-à-dire la couche électronique l : voir note 52).

Comme a pu procéder dix ans plus tard Feynman au MIT, nous montrons en Annexe 11 comment en résolvant l'équation de Schrödinger des états stationnaires sans champ extérieur, pour l'atome d'hydrogène associé au modèle de Bohr, nous obtenons l'expression de E précédente.

Dans le quatrième article du 21 juin 1926⁵³, Schrödinger parvient enfin à son équation, l'équation de Schrödinger, contenant explicitement le temps. Ainsi, la fonction d'onde Ψ dépendant de l'espace et du temps, permettra de décrire les états d'énergie de l'électron en fonction du temps et d'évaluer sa présence dans un volume spatial centré autour d'un point défini par le vecteur d'onde :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{h} m \vec{V} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\vec{V}}{V} \right),$$

c'est-à-dire :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

avec :

* $\lambda = \frac{h}{mV}$ la longueur d'onde de De Broglie, c'est-à-dire la longueur d'onde du phénomène ondulatoire associé à l'électron (hypothèse non relativiste dans laquelle vitesse de phase et vitesse de groupe sont confondues).

En Annexe 12, nous montrons comment Schrödinger obtient son équation temporelle pour une particule située dans un potentiel scalaire :

$$\Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \Psi + \frac{4\pi m i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle faisant intervenir la fonction d'onde Ψ et plusieurs de ses dérivées partielles qui sont du premier ordre en temps et du second ordre pour l'espace (le Laplacien $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$).

Cette équation de Schrödinger temporelle, pour une particule dans un potentiel scalaire, s'écrit de manière moderne :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi,$$

avec:

53. Schrödinger. « Quantification et valeurs propres (quatrième communication) ». Traduction Al. Proca.

* $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Signalons pour terminer que le caractère physique de la théorie de Schrödinger fut accepté avec soulagement par les physiciens car beaucoup plus accessible que la théorie matricielle de Heisenberg.

Cependant, mentionnons le rôle de Max Born quant à l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, pour laquelle Schrödinger considère son évolution temporelle parfaitement déterministe. En se basant sur l'équation de Schrödinger, Max Born, dès le printemps 1926, affirme que la fonction d'onde $\Psi(r)$ indique une probabilité de présence de l'électron dans un volume élémentaire donné à un instant t donné.

En effet, nous avons vu dans le troisième article de Schrödinger ci-avant, que les solutions $\Psi(r,t)$ de son équation sont des fonctions à valeurs complexes qui ne peuvent donc pas représenter directement une onde physique. Aussi, les solutions $\Psi(r,t)$ sont interprétées par Born en termes probabilistes et non considérées comme une description d'ondes réelles.

Les solutions $\Psi(r,t)$ de l'équation de Schrödinger pour tout système physique seront appelées des fonctions d'onde, et il sera posé comme postulat que les fonctions d'onde constituent la description de tout système physique en mécanique quantique.

En d'autres termes, Born, en considérant un volume élémentaire d^3r de l'espace et en notant $P(r)d^3r$ la probabilité de trouver l'électron dans cet élément de volume, définit la quantité $P(r)$ comme la densité de probabilité de présence définie par :

$$P(r) = \Psi^*(r,t) \Psi(r,t) = |\Psi(r,t)|^2,$$

sonnant la fin du déterminisme dans le contexte de l'infiniment petit.

Dans l'expression $P(r)$, la fonction d'onde $\Psi(r,t)$ est l'état quantique du système au temps t . L'expression $\Psi^*(r,t)$ est la conjuguée complexe de $\Psi(r,t)$ et r un point de l'espace de configuration du système.

Notons que bien que jamais infirmée par l'expérience, la probabilité de présence $P(r)$ ne repose aucunement sur des mathématiques claires et précises ; de plus, aucun espace de probabilité n'est définissable mathématiquement en mécanique quantique pour rendre compte avec rigueur du point de vue de Max Born.

Précisons que dans un atome, un électron se déplace à une vitesse telle que les effets de la relativité restreinte introduisent des petites imprécisions dans les valeurs du spectre de raie des fréquences rayonnées. Aussi, si Heisenberg et Schrödinger n'ont pas su prendre en compte dans leur théorie quantique l'effet relativiste pourtant alors bien connu, Paul Dirac va intégrer les influences relativistes à l'équation d'onde, permettant ainsi de décrire le plus fidèlement possible les événements de l'infiniment petit. Ces travaux font l'objet de la section suivante.

Notons que si l'équation de Schrödinger est en accord avec l'expérience sans pour autant tenir compte de la relativité restreinte et du spin de l'électron tous deux alors connus, ce n'est que pure coïncidence. En effet, les effets de l'interaction spin-orbite et les effets relativistes sont de sens contraire et se compensent mutuellement.

1.2.1.g) La mécanique quantique relativiste de Dirac (1928) et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule (1939)

Feynman lui-même, mentionne dans sa conférence Nobel de 1965⁵⁶, qu'au MIT il apprenait la physique alors connue, entre autre, dans le livre de Dirac en avouant que c'étaient plutôt les discussions et les remarques qui l'inspiraient et non les passages où tout était démontré et calculé soigneusement. En effet, à cette époque de sa vie, il reconnaît ne pas pouvoir comprendre tous les passages.

Dans sa biographie sur Feynman⁵⁷ à la demande de ce dernier, Jadish Mehra précise que le livre ci-avant de Dirac concerne la seconde édition de 1935 intitulée « *The Principles of Quantum Mechanics* » dont l'édition originale date de 1930.

Aussi, allons-nous travailler sur cette publication de 1935 pour en extraire l'essentiel, car la dernière phrase de ce livre : « *Il semble que nous avons besoin de quelques idées physiques radicalement nouvelles.* », comme l'écrit Feynman⁵⁸, l'a fortement motivé en lui lançant un défi et une inspiration.

Et Feynman d'ajouter : « *J'avais aussi le sentiment personnel que, puisqu'ils (les physiciens de l'époque) n'avaient pas obtenu de réponse satisfaisante au problème que je voulais résoudre (un état plus convenable de la théorie quantique de l'électricité et du magnétisme), il ne m'était pas nécessaire d'accorder une attention exagérée à ce qu'ils ont fait.* »

En fait, nous allons aussi travailler sur l'édition française de 1931⁵⁹, en notant les écarts par rapport aux seconde et troisième éditions, datant respectivement de 1935 et 1947. En effet, dans chacune des préfaces, l'auteur mentionne les améliorations qu'il a apportées en vue d'une présentation moins abstraite pour la seconde et l'introduction de la notation des vecteurs bra et ket pour la troisième, qu'il a développé depuis 1939 comme il l'écrit justement dans cette préface associée à la troisième édition.

Rappelons que dans sa thèse de doctorat (1926), Dirac montre l'équivalence de la mécanique matricielle d'Heisenberg et de la mécanique ondulatoire de Schrödinger.

Et en 1928, il postule l'équation de Dirac décrivant le spin de l'électron en prédisant le fameux positron, c'est-à-dire l'antiparticule de l'électron, en tentant d'introduire la relativité restreinte dans la mécanique quantique.

Aussi, dans un premier temps, nous allons décrire comment Dirac a obtenu, en 1928, son équation d'onde relativiste (pour l'électron libre et pour l'électron soumis à un champ électromagnétique) à partir des informations données dans l'édition de 1931 en tenant compte des explications de Jean Hladik⁶⁰.

Puis à l'aide de l'édition de 1947, nous expliciterons le formalisme de représentation des états quantiques d'une particule en explicitant le rôle des vecteurs bra et ket qui seront utilisés par Feynman dans ses recherches ultérieures à 1939 (Princeton).

56. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

57. Mehra. « *The beat of a different drum* », page 120.

58. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

59. Dirac. « *Les Principes de la Mécanique Quantique* ». Traduction Al. Proca et J. Ullmo. Edition française 1931.

60. Hladik. « *Mécanique Quantique. Atomes et noyaux. Applications technologiques* ».

a) Equation d'onde relativiste pour l'électron libre dans l'atome d'hydrogène

En mécanique relativiste, lorsque l'électron est en mouvement libre, son énergie est :

$$W = mc^2(1-\beta^2)^{-1/2}$$

Avec;

- * m la masse de l'électron au repos,
- * $\beta=v/c$,
- * v la vitesse de l'électron,
- * c la vitesse de la lumière.

Lorsque l'électron se déplace dans un champ électromagnétique défini par les potentiels scalaire et vecteur (respectivement A_0 et \vec{A}) du champ à l'endroit où se trouve l'électron, l'énergie totale de cet électron est alors :

$$W = mc^2(1-\beta^2)^{-1/2} + q A_0 ,$$

Avec:

- * $q = -e$ la charge de l'électron.

Son impulsion (sa quantité de mouvement relativiste) est :

$$\vec{p} = m\vec{v}(1-\beta^2)^{-1/2} + q\vec{A} .$$

Les composantes de \vec{p} et la quantité W/c forment les composantes d'un quadrivecteur de l'espace-temps de Minkowski. De même, le quadrivecteur \vec{A}_i a trois composantes spatiales ($A_1= A_x$, $A_2= A_y$, $A_3= A_y$) pour le potentiel vecteur du champ électromagnétique et une composante temporelle pour le potentiel scalaire.

Les deux équations précédentes peuvent respectivement se mettre sous la forme :

$$(W - q A_0)^2 = \frac{m^2 c^4}{(1-\beta^2)} \quad \text{et} \quad (\vec{p} - q \vec{A})^2 = \frac{m^2 v^2}{(1-\beta^2)} ,$$

d'où :

$$\frac{1}{c^2} (W - q A_0)^2 - (\vec{p} - q \vec{A})^2 = \frac{1}{c^2} \frac{m^2 c^4}{(1-\beta^2)} - \frac{m^2 v^2}{(1-\beta^2)} ,$$

donne :

$$\frac{1}{c^2} (W - q A_0)^2 - (\vec{p} - q \vec{A})^2 - m^2 c^2 = 0 .$$

Pour un électron libre (cas où $A_0 = \vec{A} = 0$), Dirac obtient :

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 - m^2 c^2 - \vec{p}^2 = 0 ,$$

qui est invariante du point de vue relativiste, c'est-à-dire à travers la transformation de Lorentz. En introduisant les opérateurs quantiques de la même manière que Klein et Gordon, c'est-à-dire en supposant que l'équation d'onde de la théorie quantique relativiste peut être obtenue en utilisant les mêmes règles de correspondance entre grandeur physique et opérateur qu'en théorie quantique non relativiste :

$$\frac{W}{c} \rightarrow \frac{1}{c} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = P_0, \quad p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z},$$

Dirac obtient l'équation d'onde suivante:

$$(P_0^2 - m^2 c^2 - \vec{P}^2) \Psi = 0 \text{ qu'il nomme équation (4).}$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables d'espace et de temps. Dirac retrouve bien l'équation de Klein-Gordon et il mentionne :

« On obtient l'équation (4) qui est invariante du point de vue relativiste et peut par conséquent être prise plus commodément pour base d'une telle théorie. »⁶¹

Mais il précise aussitôt :

« l'équation d'onde (4) n'est pas d'accord avec les lois générales de la mécanique quantique, du fait qu'elle est quadratique en W . Au § 37 nous avons déduit d'un raisonnement tout à fait général que l'équation d'onde doit être linéaire par rapport à l'opérateur $\partial/\partial t$ ou W , comme l'équation $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$. Nous devons chercher par conséquent une équation d'onde qui soit linéaire en W , et qui soit en gros équivalente à (4). »⁶²

Pour Dirac, l'équation d'onde cherchée pour l'électron libre (se déplaçant dans le champ électrostatique créé par le proton) doit se transformer de façon simple par une transformation de Lorentz. Et pour cela, il essaye de faire en sorte qu'elle soit rationnelle et linéaire aussi bien en p_x, p_y, p_z (soit respectivement p_1, p_2, p_3) qu'en W , et que sa forme doit rappeler l'équation (4) mais avec des opérateurs du premier ordre. En effet, le principe de relativité restreinte jouant le rôle d'invariant par rapport aux coordonnées d'espace et de temps, l'équation d'onde doit être de même du premier ordre par rapport aux quatre variables d'espace-temps.

Dirac propose donc l'équation d'onde suivante :

$$(-P_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta) \Psi = 0 \text{ qu'il nomme équation (5),}$$

en mentionnant que les α et β sont indépendants de $W = P_0$ et des P , puis il ajoute : « Comme nous considérons le cas où il n'y a pas de champ, tous les points de l'espace-temps doivent être équivalents, donc l'opérateur d'onde ne doit pas renfermer x, y, z , ou t . Donc, les α et β doivent aussi être indépendants de x, y, z , et t . Ces grandeurs désignent par conséquent des variables dynamiques qu'on n'a jamais prises en considération jusqu'à présent ; on peut supposer qu'elles décrivent un certain mouvement interne de l'électron. Nous verrons plus loin qu'elles décrivent sa effectivement sa rotation propre. Les α et β doivent, bien entendu, commuter avec W et les P , et aussi avec x, y, z et t . »

61. Dirac. « Les Principes de la Mécanique Quantique ». Traduction Al. Proca et J. Ullmo. Edition française 1931.

62. Ibid.

Posant $\beta = \alpha_4 mc$, Dirac multiplie l'équation précédente par l'opérateur $(P_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \alpha_4 mc)$ et obtient ainsi :

$$[-P_0^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \alpha_4 mc)^2] \Psi = 0,$$

qui est la même chose que (4) si les α vérifient les relations :

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk}, \text{ avec } j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Pour :

* $j, k = 1, 2, 3$, les matrices de Pauli vérifient ces relations,

* $j, k = 4$, la matrice α_4 représentée ci-après vérifie aussi ces relations.

Et une écriture matricielle d'ordre 4 est implicite.

« les quatre α anticommulent tous entre eux, et le carré de chacun est l'unité. »⁶³

Ainsi, en donnant des propriétés convenables aux α , Dirac peut rendre l'équation d'onde (5) équivalente à (4) et donc faire l'hypothèse que (5) est l'équation d'onde relativiste exacte pour le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène en l'absence d'un champ extérieur.

L'équation d'onde relativiste de Dirac pour l'électron libre dans l'atome d'hydrogène est donc :

$$P_0 \Psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \alpha_4 mc) \Psi,$$

soit :

$$\frac{1}{c} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (mc \alpha_4 - i\hbar \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \Psi,$$

c'est-à-dire :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (mc^2 \alpha_4 - i\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \Psi,$$

avec :

* Ψ la fonction d'onde de l'électron libre nécessitant d'avoir 4 composantes correspond aux 4 lignes et 4 colonnes des matrices $\alpha_4, \alpha_i, i, -i$.

* $(\alpha_4, \alpha_i, i, -i)$ un ensemble de 6 matrices définies par :

$$\rightarrow \alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \text{ avec } I \text{ la matrice Identité } 2 \times 2,$$

$$\rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_i \text{ les matrices de Pauli (} i \text{ de } 1 \text{ à } 3)$$

$$\rightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

63. Dirac. « Les Principes de la Mécanique Quantique ». Traduction Al. Proca et J. Ullmo. Edition française 1931.

$$\rightarrow i = i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\rightarrow -i = -i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Dirac précise que la rotation de l'électron sur lui-même (le spin) demande à ce que la fonction d'onde ait deux composantes. Et il ajoute que le fait de la présente théorie en donnant quatre, est dû à ce que l'équation (5) a deux fois plus de solutions qu'elle ne devrait en avoir, la moitié d'entre elles correspondant à des états d'énergie cinétique négative (prédiction de l'existence d'une antiparticule de l'électron, le positron, qui sera découvert en 1932 par David Anderson).

Développons l'équation (5) pour trouver l'expression de ces quatre composantes :
Sachant que $\beta = \alpha_4 mc$ l'équation (5) devient :

$$(-P_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \alpha_4 mc) \Psi = 0,$$

de la forme :

$$\left\{ -P_0 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{P} + mc \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -P_0 I + mc I & \vec{\sigma}_i \cdot \vec{P} \\ \vec{\sigma}_i \cdot \vec{P} & -P_0 I - mc I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc deux équations couplées ayant chacune deux composantes :

$$I(-P_0 + mc) \xi + \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i \cdot \vec{P} \chi = 0 \text{ dont l'énergie cinétique est positive (l'électron),}$$

et

$$I(-P_0 - mc) \chi + \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i \cdot \vec{P} \xi = 0 \text{ dont l'énergie cinétique est négative (le positron).}$$

b) Equation d'onde relativiste pour l'électron dans un champ électromagnétique

Dirac rappelle la règle classique concernant le passage d'un électron libre à un électron soumis à un champ électromagnétique :

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad ; \quad P_0 \rightarrow P_0 + \frac{e}{c} A_0.$$

Puis en effectuant cette substitution dans l'équation (5), il obtient :

$$\left\{ -P_0 - \frac{e}{c} A_0 + \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \alpha_4 mc \right\} \Psi = 0$$

c'est-à-dire:

$$\left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + e A_0 \right) \Psi = \left(mc^2 \alpha_4 + c \sum_{i=1}^3 \alpha_i e A_i - i\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Psi,$$

ou la matrice unité d'ordre 4 est implicite. Il s'agit de l'équation de Dirac de l'électron dans un champ électromagnétique.

c) Dirac et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule

Afin de ne pas surcharger le corps de texte de termes trop techniques, les sous-paragraphes c.1 à c.4 sont détaillés en Annexe 13.

1.2.2- Les principaux problèmes

L'électrodynamique quantique est le domaine de la physique associée au couplage entre les champs électromagnétiques et les charges électriques au niveau quantique. Elle permet aussi une description de la lumière en termes de particules de lumière (les photons).

Dans le contexte de l'électrodynamique quantique, le champ électromagnétique est quantifié, c'est-à-dire qu'il est considéré comme constitué de photons. Et ce sont ces photons qui transmettraient les interactions entre les particules chargées électriquement telles que les électrons entre eux, lorsqu'ils sont soumis au champ électromagnétique.

Nous avons vu plus haut que pour élaborer son équation relativiste de l'électron soumis à un champ électromagnétique, Dirac s'est appuyé en 1928 sur l'électrodynamique classique de Maxwell (le potentiel vecteur \vec{A} et le potentiel scalaire A_0 du champ électromagnétique).

Mais l'expression même de son équation relativiste de l'électron dans un champ électromagnétique extérieur, présente une quantification (la constante de Planck) du champ électromagnétique. En effet, dès 1927, Dirac a l'intuition que l'existence du champ électromagnétique est une conséquence de la présence de charges électriques interagissant entre elles par l'intermédiaire des particules de lumière que sont les photons. Et de là, émettant l'hypothèse que ces photons peuvent être à l'origine des forces présentes physiquement de manière macroscopique dans le champ électromagnétique, il crée l'électrodynamique quantique.

Laissons à ce sujet Dirac s'exprimer par ses écrits : « *Dans le chapitre X, nous avons exposé la théorie de la diffusion, de l'absorption et de l'émission d'une particule par un système atomique. On faisait l'hypothèse que l'interaction de la particule et du système atomique pouvait être représentée par une énergie d'interaction V introduite dans l'hamiltonien. Cette énergie d'interaction devait être petite, mais était, par ailleurs arbitraire. Si l'on pouvait déterminer l'énergie d'interaction entre un photon et un atome ou une molécule, on pourrait immédiatement appliquer les méthodes du chapitre X au cas où la particule incidente est un photon. De cette façon, on obtiendrait une théorie de l'interaction de la lumière avec un système atomique. En comparant cette interaction avec celle avec celle qui est donnée par l'électrodynamique classique, nous pourrions calculer V . Notre problème consiste maintenant à traiter de façon générale l'interaction d'un grand nombre de photons avec un atome.* »⁶⁵

La remarquable thèse d'Olivier Darrigol⁶⁶ brosse un panorama complet des débuts de l'électrodynamique quantique. Dans ce panorama de 417 pages, nous avons extrait les apports de Dirac entre 1927 et 1943, dont nous rapportons ci-après quelques points importants. Ces

65. Dirac. « *Les Principes de la Mécanique Quantique* ». Traduction Al. Proca et J. Ullmo. Edition française 1931.

66. Darrigol. « *Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948)* ». Thèse de doctorat.

travaux de Dirac ont pu, dans leur grande ligne (de la même manière que la citation précédente) inspirer Feynman lors de ses études au MIT de 1936 à 1939, puis à Princeton de 1939 à 1942.

1927

Dirac quantifie le champ électromagnétique et explique ainsi complètement l'émission et l'absorption des photons par les atomes. Dans sa théorie générale de la diffusion qu'il publie en 1927⁶⁷, il démontre l'existence d'un déplacement des niveaux d'énergie du système diffusant et en donne l'expression.

1928

Dirac propose, comme nous l'avons vu plus haut, sa théorie de l'électron avec spin et corrélativement avec un moment magnétique responsable de l'effet Zeeman anormal. Son équation⁶⁸ est assez étrange, car la fonction d'onde Ψ présente quatre composantes dont pour deux d'entre elles une énergie qui peut prendre des valeurs négatives associées à un antiélectron ou positron.

1929

Dirac publie « *une théorie des électrons et des protons* » dans laquelle il émet une hypothèse sur l'identification des états d'énergie négative. Mais cette hypothèse associant l'identification des états d'énergie négative à des états de proton conduit à trois paradoxes :

- Les transitions d'un état d'énergie positive à un état d'énergie négative violent la conservation de la charge.
- Le champ créé par un proton est celui d'une charge négative.
- L'énergie d'un proton diminue quand il va plus vite et par là même, il se meut dans la direction opposée à la force appliquée.

Le point de départ de Dirac est le problème de l'instabilité des états d'énergie positive : ils se désintègrent spontanément.

1930

Dirac publie « *On the Annihilation of Electrons and Protons* ».⁶⁹ dans laquelle il émet l'hypothèse qu'un électron d'énergie positive tombant dans un trou et le remplissant, l'électron et le proton disparaissent simultanément en émettant un rayonnement. Se pose alors la question de savoir si cette annihilation est due à un proton rencontrant un électron ou à un antiélectron (positron) rencontrant un électron.

1932

Dirac présente un article dans « *Proceedings of the Royal Society of London* » dans lequel il insiste sur la nécessité de traiter de manière dissymétrique matière et rayonnement. Pour cela, il faut selon Dirac, traiter de manière dissymétrique le champ électromagnétique et les particules chargées. Et cela conduit à une électrodynamique quantique relativiste dans sa formulation même grâce à l'introduction de temps différents pour chacune des particules chargées.

67. Dirac. Théorie générale de la diffusion. Zeitschrift für Physik, vol.44, p585, 1927.

68. Dirac. "The Quantum Theory of the Electron". Proceeding of the Royal Society of London, vol.117, p610, 1928.

69. Dirac. Proceedings Cambridge Phil. Soc. , vol. 26, p361.

1933

Dirac effectue une communication lors du Congrès Solvay de 1933⁷⁰, dans lequel il résume sa théorie des trous, confirmée par la découverte expérimentale du positron par Anderson en 1932. Il aborde les difficultés formelles posées par la complexité du vide et en tire une prédiction des phénomènes physiques nouveaux par rapport aux propriétés du vide de l'électrodynamique classique. Ainsi, il met en évidence le phénomène de polarisation du vide sous l'effet d'un champ électromagnétique extérieur.

1934

L'article de Dirac « *Discussion de la distribution infinie des électrons dans la théorie du positron* » présenté dans « *Proceedings Cambridge Phil. Soc.* » est une première étape dans l'élaboration de prescriptions précises permettant d'éliminer les divergences de la distribution d'électrons.

1938

Les insurmontables problèmes de divergence rencontrés en électrodynamique quantique faisaient dire à Dirac qu'il fallait d'abord donner une construction plus élaborée de la théorie classique. Il élabore ainsi une nouvelle théorie⁷¹ dans laquelle il se réfère au travail de Fokker de 1929⁷² donnant une dynamique rigoureuse invariante relativiste pour un système isolé d'électrons ponctuels.

En effet, une fois les variables du champ éliminées, Fokker cherche un principe variationnel pour décrire le système isolé d'électrons ponctuels, en utilisant non pas les potentiels retardés, mais la demi-somme des potentiels retardés et avancés.

Pour Dirac, plutôt que d'utiliser comme Lorentz ou Born un modèle fondé sur des idées physiques ordinaires, il valait mieux établir à priori un schéma mathématique bien défini et cohérent, en accord avec les principes fondamentaux associés aux connaissances récentes en mécanique quantique.

Et de cette façon, Dirac a pu obtenir pour la première fois une électrodynamique quantique parfaitement invariante relativiste, délivrée du problème des divergences et déduite d'un nombre restreint d'hypothèses. L'équation à laquelle il est parvenu s'appelle aujourd'hui l'équation de « Dirac-Lorentz ».

1939

Lors d'une conférence à l'Institut Poincaré, Dirac introduit un 4-vecteurs λ de genre temps, signifiant que deux particules ne devaient interagir que lorsque l'une était légèrement (à λ -près) écartée vers l'extérieur du cône de lumière de l'autre. Il s'agit du concept de λ -limite qui a pour effet d'introduire dans les intégrales portant sur les photons virtuels un facteur tel que sous certaines conditions, les intégrales entendues au sens des distributions, deviennent convergentes. Ainsi, les divergences d'origines classiques liées au caractère ponctuel de l'électron disparaissent pour les valeurs n des couches électroniques paires, mais il subsiste des divergences de rang n impair.

1941

Dirac soutient un exposé (compte-rendu dans *Proceedings of the Royal Society of London*) très abstrait en raison de la conception très symbolique des mathématiques dont il fait usage. Il s'agit d'un nouveau concept qui a pour effet de concevoir le λ -limite avec une nouvelle méthode de

70. Dirac. « *Théorie du Positron* ». Rapport du 7^{ème} Congrès Solvay de Physique. 1934.

71. Dirac. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 167, p148, 1938.

72. Fokker. *Zeitschrift für Physik*.

quantification faisant usage d'une métrique « indéfinie » (c'est-à-dire non positive) dans l'espace de Hilbert des états. Cela permet d'éliminer les divergences de rang n impair.

1.4- Références

- 1- ALLEGRE Claude (2006). Un peu de physique pour tout le monde. Fayard.
- 2- BASDEVANT Jean-Louis (1994). Mécanique quantique : Tome I et II. Cours du Département de Physique de l'Ecole Polytechnique.
- 3- BASDEVANT Jean-Louis (2005). Principes variationnels et dynamique. Vuibert.- BOHR Niels (1913). On the Constitution of Atoms and Molecules. Philosophical Magazine N°26, pages 1 à 24.
- 4- BOHR Niels (1913). On the Constitution of Atoms and Molecules. Philosophical Magazine N°26, pages 1 à 24.
- 5- CASTELLANI Elena et Leonardo (revue N°19, Mai 2004). Feynman, Génie magicien. Les Génies de la Science. Pour la Science (Edition française de Scientific American).
- 6- DARRIGOL Olivier (1982). Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948). Thèse de doctorat (Université Paris I : Panthéon-Sorbonne).
- 7- De BROGLIE Louis (1925). Recherches sur la Théorie des Quanta. Thèse. Annales de Physique. Masson et Cie, Editeurs, Paris.
- 8- DIRAC Paul (1927). Théorie générale de la diffusion. Zeitschrift für Physik, vol.44, p. 585.
- 9- DIRAC Paul (1928). The Quantum Theory of the Electron. Proceeding of the Royal Society of London, vol.117, p. 610.
- 10- DIRAC Paul (1930). On the Annihilation of Electrons and Protons. Proceedings Cambridge Philosophy Society, vol. 26, p. 361.
- 11- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la Première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay.
- 12- DIRAC Paul (Second edition 1935). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford. At the Clarendon Press. Source en langue originale pour la seconde édition.
- 13- DIRAC Paul (1934). Théorie du Positron. Rapport du 7^{ème} Congrès Solvay de Physique.
- 14- DIRAC Paul (1938). La Théorie de Dirac. Proceedings of the Royal Society of London, vol. 167, p. 148.
- 15- DIRAC Paul (Third edition 1947). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, London. Source en langue originale pour la troisième édition.
- 16- DIU Bernard (2008). Traité de physique à l'usage des profanes. Editions Odile Jacob.
- 17- EINSTEIN Albert (1901). Lettre à Mileva Maric' du mercredi 10 avril 1901. (traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech) (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).
- 18- EINSTEIN Albert (1902). Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).
- 19- EINSTEIN Albert (1903). Eine theorie der Grundlagen der Thermodynamik. Annalen der Physik, vol. XI, p. 170-187.
- 20- EINSTEIN Albert (1904). Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme. Annalen der Physik, vol. XIV, p. 354-362.
- 21- EINSTEIN Albert (1904). A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta. F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech, page 85.

- 22- EINSTEIN Albert (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).
- 23- EINSTEIN Albert (1909). Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).
- 24- EINSTEIN Albert & INFELD Léopold (1938). L'évolution des idées en physique. Traduit de l'anglais par Maurice Solovine. Editions Champs sciences le dépôt légal de février 2009.
- 25- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1985). Vous voulez rire Monsieur Feynman! Odile Jacob (2000). Traduction F. Balibar, C. Guthmann de la publication originale « *Surely You're Joking Mr Feynman!* » *Adventures of a Curious Character* » publiée aux USA par W.W. Norton & Company, Inc., New York. Ce livre peut être considéré comme des mémoires autobiographiques.
- 26- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1988). What Do You Care What Other People Think? Further Adventures of a Curious Character. W.W. Norton & Company, Inc., New York.
- 27- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph & SANDS Matthew (1963, 1964, 1965). Le cours de physique de Feynman: mécanique 1, mécanique 2, électromagnétisme 1, électromagnétisme 2, mécanique quantique. Dunod (1998-2000). Traduction Faculté des Sciences de Paris, Collège de France, Ecole Polytechnique des 3 volumes originaux « *The Feynman lectures on Physics* » publiés aux USA par Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts.
- 28- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « *The development of the space-time view of quantum electrodynamics* » : Nobelprize.org.
- 29- FEYNMAN Richard (1939). Forces in molecules. *Physical Review*, vol. 56, p. 340-343.
- 30- FOKKER Adriaan (1929). Ein invarianter Variationsatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen. *Zeitschrift für Physik*, vol. 58, page 386.
- 31- GLEICK James (1992). Le génial professeur Feynman. Odile Jacob (1994). Traduction J.P. Mourlon de l'édition originale « *Genius. The life and Science of Richard Feynman* » publiée aux USA par Pantheon Books, New York.
- 32- HEISENBERG Werner (1927). Sur le contenu intuitif de la cinématique et la mécanique quantique. Traduction Anna Svenbro.
- 33- HEISENBERG Werner (1932). Les principes physiques de Théorie des Quanta. Traduction B. Champion et E. Hochard de l'édition en allemand de 1930. Gautier-Villars, Paris. Editions Jacques Gabay.
- 34- HEISENBERG Werner (1969). La partie et le tout. Traduit de l'allemand par P. Kessler. Editions Champs sciences pour le dépôt légal d'avril 2016.
- 35- HERMANN Grete (1996). Les fondements philosophiques de la mécanique quantique. Librairie Philosophique J. Vrin.
- 36- HLADIK Jean (2009). Mécanique Quantique. Atomes et noyaux. Applications technologiques. Dunod.
- 37- KLEIN Etienne (2007). Il était sept fois la révolution. Editions Champs sciences.
- 38- KUMAR Manjit (2011). Le grand roman de la physique quantique. Traduction B. Sigaud. Editions JC Lattès.
- 39- KUHN Thomas (1962). La structure des révolutions scientifiques. Traduit de l'américain par L. Meyer. Editions Champs sciences le dépôt légal de mai 2008.
- 40- LOUIS-GAVET Guy (2011). La physique quantique. Eyrolles.
- 41- MEHRA Jagdish (1994). The beat of a different drum. The life of science of Richard Feynman. Clarendon Press. Oxford.

- 42- PENROSE Roger (1997). Les deux infinis de l'esprit humain. Traduction de l'anglais R. Olmnès. Editions Champs sciences pour le dépôt légal de février 2011.
- 43- PLANCK Max (14 décembre 1900). Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im normalspektrum. Société de Physique de Berlin.
- 44- PLANCK Max (1937, 1941, 1946). Autobiographie scientifique et derniers écrits. Traduit de l'allemand par A. George. Editions Champs sciences pour le dépôt légal février 2010.
- 45- SABADELL Miguel (2013). Quand un photon rencontre un électron. Feynman et l'électrodynamique quantique. Traduction française Charlotte Bacot et Géraldine Lavielle. RBA.
- 46- SCHWEBER Silvan (1986). Feynman and the visualization of space-time processes. Reviews of Modern Physics : 58, 449-512.
- 47- SCHRÖDINGER Erwin (1933). Mémoires sur la mécanique ondulatoire. Traduction Al. Proca des six mémoires en allemand publiés en 1926 et 1927 dans Annalen der Physik (Quantification et valeurs propres ; Le passage continu de la micro-mécanique à la mécanique macroscopique ; Sur les rapports qui existent entre la mécanique quantique de Heisenberg-Born-Jordan et la mienne ; Sur l'effet Compton ; Le théorème de la conservation d'énergie et de quantité de mouvement pour les ondes matérielles ; Echanges d'énergie d'après la mécanique ondulatoire). Librairie Félix Alcan, Paris. Editions Jacques Gabay.
- 48- SCHRÖDINGER Erwin (1935, 1951). Physique quantique et représentation du monde. Traductions J. Ladrière, M. Bitbol. Editions chez Points pour le dépôt légal de mars 1992.
- 49- STAHL Alain (2010). Science et Philosophie. Rivalentes, étrangères, ou complémentaires? Publication de l'Institut Interdisciplinaire d'Etudes Epistémologiques.
- 50- WIEN Wilhelm (1894). Temperatur und Entropie der Strahlung. Vol. LII, p. 132-165.
- 51- WIKIPEDIA (2017). Far Rockaway High School.

Chapitre 2

La physique quantique présentée aux étudiants du MIT entre 1935-1939 et la perception de Feynman

Résumé

- 2.1- Introduction
- 2.2- Arrivée au MIT et choix de Feynman pour la physique
- 2.3- Les cours de physique au MIT principalement en mécanique quantique
- 2.4- Perception de Feynman sur sa formation au MIT
- 2.5- Le travail de Bachelor of science de Feynman
- 2.6- Conclusion
- 2.7- Références

Résumé

Nous avons décrit au chapitre 1 l'état de la mécanique quantique lorsque Feynman est étudiant au MIT en vue d'obtenir son « *Bachelor of Science* », ainsi que les problèmes de divergence associés à cette théorie.

Aussi, dans ce chapitre 2, nous nous intéressons à la base conceptuelle du futur « *prix Nobel* » encore étudiant au MIT, en exprimant ses ressentiments vis-à-vis d'une théorie quantique de l'électricité et du magnétisme qu'il trouve compliquée et comment il voudrait voir l'ensemble de ses problèmes résolu.

De fil en aiguille nous appréhendons la façon atypique dont l'esprit de Richard Feynman travaille, ce qui va nous permettre de faire ressortir le cheminement d'une pensée qui le conduira au prix Nobel de physique 1965.

En effet, en percevant chez Feynman la manière dont il s'est construit sous l'éducation d'un père qui lui fait découvrir les phénomènes physiques qui l'entourent, nous dégageons son naturel de vouloir comprendre les choses par lui-même, la nature de l'homme et toute son originalité.

2.1- Introduction

Richard Feynman, né le 11 mai 1918 dans le Queens un des cinq arrondissements de New-York et décédé le 15 février 1988 à l'âge de 69 ans est un des physiciens américains les plus influents de la seconde moitié du vingtième siècle.

Impliqué dans le développement de la bombe atomique au cours de la seconde guerre mondiale, il enseigna à Cornell puis au Caltech où il acquit, entre autre, une excellente réputation de pédagogue.

En automne 1935, Richard Phillips Feynman entre au Massachusetts Institute of Technology (MIT) situé à Cambridge au Nord-Est de Etats-Unis, à proximité immédiate de Boston.

A la fois Institut de recherche et Université dans le domaine des sciences et des technologies, le MIT est considéré comme une des meilleures, sinon la première, des écoles scientifiques aux Etats-Unis et son admission est extrêmement sélective.⁰

A cette époque, adolescent de 17 ans, Feynman est déjà comme il le restera tout au long de sa vie, un être avide de connaissance et bouillonnant d'imagination. Et cet enthousiasme qui le caractérise si bien, peut s'expliquer par la manière dont il s'est construit enfant, sous l'influence bénéfique de son père. En effet, Melville Feynman est un père plein d'attention, et il est un fait certain, comme le mentionne son fils¹ : l'éducation qu'il reçut n'a pu que développer sa capacité à raisonner et son amour pour la science. Découvrir la nature profonde des choses, comprendre ce qui se dissimule derrière ce qui paraît sans intérêt, observer de la façon la plus exhaustive possible les phénomènes physiques et le monde qui l'entoure, poser des questions, et tout ceci sous forme de discussions intéressantes, sans pression, telle fut l'éducation prodiguée par le père à son fils. Aussi, ne faut-il pas s'étonner de l'esprit critique que manifesta très tôt le jeune Feynman et surtout le fait qu'il lui faudra toujours redécouvrir les choses par ses propres moyens et ses propres méthodes. Comme par exemple la redémonstration à l'âge de onze ou douze ans de toutes les relations trigonométriques à partir de considérations sur les triangles rectangles.² Son originalité était telle qu'il imagina d'autres symboles mathématiques que ceux utilisés conventionnellement, notamment en trigonométrie, en calcul différentiel et intégral qu'il maîtrisait déjà lors de sa quinzième année.³ Inventer des problèmes et des théorèmes mathématiques passionnait Feynman. Et chaque fois qu'il travaillait sur un sujet mathématique, il cherchait un exemple pratique auquel ce sujet mathématique puisse s'appliquer (voir note 2).

Durant ses années d'étude à la Far Rockaway High School (lycée public situé dans le quartier du Queens à New York, créé en 1897 et fermé depuis 2011)⁴, Feynman était sans conteste le meilleur en mathématiques, en physique et en chimie.⁵ Et même si, au club de physique, il étudiait les phénomènes liés à la lumière et refaisait l'expérience de Millikan concernant la mesure de la charge électrique de l'électron, il se confia lors d'une interview, que rien ne le passionnait tant que les compétitions mathématiques.⁶ Il avouait d'ailleurs détenir un goût prononcé pour tout ce qui est puzzles et énigmes.⁷

Cependant, contrairement à Julian Schwinger, qui partagea en 1965 le prix Nobel de physique avec Feynman (et aussi avec le Japonais Sin-Itiro Tomonaga pour les travaux fondamentaux en

0. Classement de Shanghai des Universités, 2020.

1. Feynman « *What do you care what other people think ?* », page 16.

2. Feynman « *Vous voulez rire Monsieur Feynman* », page 24.

3. Schweber « *Feynman and the visualisation of space-time processes* », page 452.

4. Wikipedia. Far Rockaway High School

5. Feynman « *Vous voulez rire Monsieur Feynman* », page 30.

6. Gleick. « *Le génial professeur Feynman* », page 45.

7. Feynman « *Vous voulez rire Monsieur Feynman* », page 22.

électrodynamique quantique), ce dernier ne semble pas s'être préoccupé de ce que la physique nouvelle (la mécanique quantique) avait de plus par rapport à la physique classique.⁸ En d'autres termes, son besoin de « toucher à tout », mû par une curiosité insatiable ne lui laissait guère de répit.

Après avoir montré la manière dont Feynman s'est construit sous l'éducation d'un père curieux du monde qui l'entoure, nous entreprenons de dégager chez le futur physicien théoricien cette part de lui-même faite de volonté, d'originalité et d'esprit critique qui le conduiront au prix Nobel de physique 1965.

A ce propos, je commence par commenter au paragraphe 2.2 le choix de Feynman pour la physique au tout début de sa première année au MIT.

Puis, au paragraphe 2.3, j'explique la façon dont la mécanique quantique est enseignée sous l'influence des idées de Paul Dirac, montrant ainsi que désormais les mathématiques font partie intégrante de la physique. Et ce sera bien le génie de Feynman pour les mathématiques qui va lui permettre de mettre en pratique ses idées en physique.

Le paragraphe 2.4 exprime les ressentiments du futur prix Nobel vis-à-vis d'une théorie quantique de l'électricité et du magnétisme qu'il trouve compliqué et comment il voudrait voir l'ensemble de ses problèmes résolu. Et c'est bien la manière dont il voudrait les voir résolu qui sera le point de départ de ses recherches à Princeton qui le conduiront à la découverte du concept mathématique de l'intégrale de chemins à travers le principe de moindre action.

Enfin, au paragraphe 2.5 nous détaillons le travail de Feynman pour l'obtention de son « *Bachelor of Science* » en montrant toute son originalité dans la résolution des problèmes de mécanique quantique.

Les publications fondamentales que j'ai consultées sont les suivantes :

- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1988). *What Do You Care What Other People Think? Further Adventures of a Curious Character*. W.W. Norton & Company, Inc., New York,
- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1985). *Vous voulez rire Monsieur Feynman!* Odile Jacob (2000). Traduction F. Balibar, C. Guthmann de la publication originale « *Surely You're Joking Mr Feynman!* » *Adventures of a Curious Character* » publiée aux USA par W.W. Norton & Company, Inc., New York. Ce livre peut être considéré comme des mémoires autobiographiques,
- SCHWEBER Silvan (1986). Feynman and the visualization of space-time processes. *Reviews of Modern Physics* : 58, 449-512,
- GLEICK James (1992). *Le génial professeur Feynman*. Odile Jacob (1994). Traduction J.P. Mourlon de l'édition originale « *Genius. The life and Science of Richard Feynman* » publiée aux USA par Pantheon Books, New York,
- MEHRA Jagdish (1994). *The beat of a different drum. The life of science of Richard Feynman*. Clarendon Press. Oxford,
- DIRAC Paul (Première édition 1931). *Les Principes de la mécanique quantique*. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay,
- DIRAC Paul (Second edition 1935). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford. At the Clarendon Press. Source en langue originale pour la seconde édition,

8. Gleick. « *Le génial professeur Feynman* », pages 61 à 63.

- DIRAC Paul (Third edition 1947). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, London. Source en langue originale pour la troisième édition,
- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « *The development of the space-time view of quantum electrodynamics* » : Nobelprize.org.,
- Richard (1939). Forces in molecules. *Physical Review*, vol. 56, p. 340-343.

2.2- Arrivée au MIT et choix de Feynman pour la physique

Ce n'est qu'au MIT, en début de première année, que Feynman décida de la matière principale qui allait orienter sa vie professionnelle (mathématicien, physicien ou ingénieur). Entre les mathématiques qu'il se mit à entrevoir essentiellement comme un outil abstrait et l'engineering concerné exclusivement par l'application pratique des lois de la nature, il choisit la physique qui réalisait un bon compromis et qui devrait beaucoup plus le rassasier de son besoin boulimique de comprendre les phénomènes naturels qui l'entourent.⁹ Et pour la physique, le MIT comptait parmi des physiciens les plus réputés des Etats-Unis tels que Philip Morse, Julius Stratton et John Slater. Regardons plus en détail l'enseignement dispensé par ces professeurs.

2.3- Les cours de physique au MIT principalement en mécanique quantique

Pendant ses quatre années au MIT, Feynman étudie la mécanique quantique en se référant notamment à la publication de Dirac originellement de 1930¹⁰ et plus spécialement la seconde édition de 1935 comme le spécifie le physicien Jagdish Mehra qui a côtoyé Feynman pendant plus de trente ans et dont la biographie sur celui-ci écrite à la demande de l'intéressé est une référence: voir note 9).

Et dans cette publication, Dirac utilise des opérateurs linéaires comme une généralisation des théories de Heisenberg et de Schrödinger. Le cours est principalement donné par le professeur Morse qui, devant les questions posées par Feynman, lui propose (ainsi qu'à deux autres élèves Théodore Walton et Al Glagston) de se réunir dans son bureau une après-midi par semaine afin d'expliquer plus en détail diverses parties du cours.¹¹ Notons en effet qu'entre 1936 et 1937, il n'existait pas encore de cours suffisamment structurés en mécanique quantique à la portée des étudiants.¹²

Et pour pallier à l'insuffisance de cours bien agencés en mécanique quantique, les professeurs et leurs étudiants, entre 1935 et 1939, n'avaient guère d'autres choix que de consulter entre peu d'autres, la seconde édition (1935) de Dirac : « *The principles of Quantum Mechanics* » que nous savons être le livre de référence de Feynman lorsqu'il est étudiant au MIT.

9. Mehra. « *The beat of a different drum* », page 49.

10. Dirac. « *The principles of Quantum Mechanics* ».

11. Schweber « *Feynman and the visualisation of space-time processes* », page 454.

12. Mehra. « *The beat of a different drum* », page 54.

Rappelons en effet qu'à cette époque, Paul Dirac à la fois mathématicien et physicien, jouissait d'un grand prestige dû à l'importance de ses travaux en mécanique quantique récompensés par le prix Nobel de physique qu'il partagera avec Erwin Schrödinger en 1933.

A cette époque, Dirac est un acteur majeur du changement de paradigme en physique pour ce qui concerne la mécanique quantique.

En effet, Dirac conçoit dorénavant la physique comme reposant essentiellement sur les mathématiques. Et ces mathématiques, se mettent à caractériser des méthodes nouvelles en physique théorique par l'utilisation de la théorie des transformations qui consiste à prendre en compte la notion de symétrie intimement liée à la notion d'invariance.

En d'autres termes, les lois de la physique quantique doivent dorénavant à l'instar de la théorie de la relativité, être régies :

« par la recherche d'équations qui soient invariantes par rapport à des transformations de plus en plus générales. A un point de vue purement philosophique cet état de choses est extrêmement satisfaisant ; en effet il montre implicitement qu'on estime de plus en plus à sa juste valeur le rôle prépondérant joué par l'observateur, qui introduit lui-même dans ses observations les régularités qui s'y manifestent, et prouve de cette façon qu'il y a, de toute évidence, une certaine absence d'arbitraire dans les procédés de la Nature. Cependant, ce même état de choses rend la tâche beaucoup moins aisée pour celui qui veut étudier la physique théorique.

Lorsqu'on fait abstraction de l'échafaudage mathématique, on constate que les nouvelles théories sont construites en partant de concepts qui ne peuvent pas être décrits au moyen des notions qui nous sont familières et dont on ne peut même pas définir le contenu au moyen des mots connus.

On ne pourra vraiment comprendre la signification des concepts récemment introduits en physique, qu'après s'être longtemps familiarisé avec leurs propriétés et leur emploi, tout comme s'il s'agissait de notions premières, par exemple celle d'identité ou de proximité, dont nous devons commencer par apprendre le sens à notre arrivée dans le monde.

Lorsqu'on aborde les théories nouvelles du côté mathématique, on ne rencontre pas de telles difficultés ; »^{12.1}

Désormais les mathématiques deviendront l'outil nécessaire pour « faire de la physique » et cette physique sera soumise à des traités présentant la manipulation d'objets abstraits qui, en dernière étape, seront reliés à des quantités associées au réel.

D'ailleurs dans la préface de sa publication de 1930, Dirac annonce clairement le contenu de son ouvrage concernant les principes de la mécanique quantique :

« L'analyse mathématique constitue l'instrument idéal pour étudier des concepts abstraits de toute nature, et sa puissance dans ce domaine n'a pas de limites. Pour cette raison, tout traité concernant la physique nouvelle et ne se bornant pas uniquement à décrire des faits expérimentaux, doit être nécessairement un traité de mathématique. »

en indiquant cependant que les mathématiques ne sont qu'un instrument et qu'il faut apprendre à dominer les idées physiques fondamentales, sans avoir besoin de recourir tout le temps à leur expression analytique.

Soulignons qu'il fallait bien un homme de la trempe de Dirac, aussi génial en mathématique qu'en physique, pour réaliser un tel ouvrage.

12.1. Dirac. « *The principles of Quantum Mechanics* ».

Et nous verrons plus bas en paragraphe 2.5 que Feynman de la même envergure que Dirac, conduit son travail de « Bachelor » en obtenant des résultats qui montrent bien son génie des mathématiques au service de la physique qu'il ne perd pas de vue.

Aussi, comme l'écrit Thomas Kuhn page 80 de sa publication « *La structure des révolutions scientifiques* » éditée chez Flammarion (2008) à propos de la priorité des paradigmes :

« *La signification de la mécanique quantique dans l'esprit de chacun d'eux (les physiciens) dépend de l'enseignement qu'il a suivi, des manuels qu'il a lus, et des revues qu'il suit.* »

Ainsi, nous ne doutons pas que le jeune étudiant ait été fortement conditionné par les écrits de Dirac et par sa manière de « faire de la physique ». D'ailleurs, Feynman ne confie-t-il pas dans sa conférence Nobel, que nous verrons ci-après, qu'il a plus été influencé dans l'ouvrage de Dirac par le côté philosophique conduisant à telles discussions, à telles remarques qui l'inspiraient, et non aux passages où tout était démontré et calculé.^{12.2}

Ainsi Feynman par l'invention de l'intégrale de chemins, concept purement mathématique, abordant la mécanique quantique dans le sens préconisé par Dirac obtiendra à l'instar de son maître le prix Nobel de physique pour l'ensemble de son œuvre.

2.4- Perception de Feynman sur sa formation au MIT

Connaissant Feynman et son insatiable curiosité, nous ne doutons pas qu'il se soit largement imprégné des théories quantiques contenues en chapitre 1, d'autant plus que nous savons, aux dires de Mehra, qu'il se référait à la seconde publication de Dirac datant de 1935 « *The principles of quantum mechanics* » qui justement compare les travaux de Schrödinger et de Heisenberg.

Nous pouvons tout de même être surpris de constater que lors de ses études au MIT de 1935 à 1939, Feynman n'avait pas vu que les pages 124 à 126 de cette publication de Dirac datant de 1935 traitait du principe de l'action en mécanique quantique, en reprenant partiellement la publication « *The Lagrangian in Quantum mechanics* » de ce même auteur datant de 1933.

En effet, comme nous le verrons plus tard, Feynman passa plusieurs semaines début 1941 à chercher à faire de la mécanique quantique en partant de l'action jusqu'à ce que Herbert Jehle lui indique l'article de Dirac datant de 1933.

Mais il faut se mettre à la portée du jeune étudiant de 20 ans dont les quatre années d'études au MIT ne constituaient pas une spécialisation en physique quantique.

Afin de saisir la pensée de Feynman sur la mécanique quantique lorsqu'il sort du MIT, j'ai trouvé intéressant :

* d'une part de faire le point exact des connaissances retenues par Feynman pendant sa période au MIT, tout en décelant ce qu'il en pense,

* de montrer d'autre part l'origine de sa motivation pour la mécanique quantique et les problèmes qu'il voulait voir résolus.

Et pour se faire, j'ai effectué :

12.2. . Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 236.

- * Une synthèse des travaux effectués en section 1.2.1 du chapitre 1 afin de me placer dans le contexte des connaissances en mécanique quantique en 1939,
- * Une synthèse des grands problèmes mis en exergue par Dirac et que l'on trouve en section 1.2.2 également contenue au chapitre 1.
- * Une recherche des problèmes rencontrés par Dirac dans sa publication de 1935 largement consultée par le futur prix Nobel dans la période allant de l'automne 1935 à l'automne 1939, qui correspond aux quatre années d'étude de Feynman au MIT, lorsqu'il était âgé de dix-sept à vingt et un ans,
- * Une lecture approfondie des écrits autobiographiques de Feynman et des documents biographiques qui m'ont parus pertinents.

Parmi les écrits autobiographiques de Feynman j'ai retenu les suivants :

- * « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel* » (1965),
- * « *Vous voulez rire, Monsieur Feynman !* » (1985).

Parmi les écrits biographiques sur Feynman j'ai retenu principalement :

* « *Feynman and the visualization of space-time processes* » du physicien théoricien américain Silvan Schweber (1986 : langue anglaise originale), qui a côtoyé Feynman et qui a reçu de la part de celui-ci la permission de consulter ses rapports déposés à la *Millikan Library* du *California Institute of Technology*. Cette biographie, que nous pourrions qualifier de scientifique est très complète et fortement documentée. Les travaux de Feynman sont assez détaillés et présentés avec toute la rigueur que l'on peut attendre d'un physicien théoricien ayant vécu la grand aventure de la théorie quantique des champs.

* « *Le génial professeur Feynman* » du journaliste James Gleick (1992 : traduction française J.P. Mourlon). Gleick est journaliste et comme il l'écrit lui-même dans la partie de son livre dédiée aux « Remerciements », il n'a jamais rencontré Feynman. Cependant, sa biographie est complète et très fortement documentée, faisant d'une part référence à de nombreuses interviews de physiciens ayant directement travaillé avec Feynman et mentionnant d'autre part de nombreuses archives consultées à Far Rockaway (la ville natale de Feynman dans la banlieue de New-York), au MIT, à Princeton, à Cornell et au Caltech. Le cheminement de la pensée de Feynman transparaît tout au long du livre ainsi que ses motivations, et les anecdotes ne manquent pas,

* « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* » du physicien théoricien indien-américain Jagdish Mehra (1994 : langue anglaise originale) qui a très bien connu Feynman, à tel point que cette bibliographie a été écrite à sa demande. Et bien évidemment, bon nombre d'écrits sont directement issus des nombreuses interviews de l'auteur avec Feynman lui-même.

Ce qui transparaît immédiatement dans l'historique du chapitre 1, aussi bien chez De Broglie, Heisenberg, Schrödinger que chez Dirac, est la restriction des théories qui ne s'appliquent qu'à une particule, en l'occurrence l'électron, soumis au champ électrostatique du proton présent dans le noyau de l'atome d'hydrogène.

En effet, comme nous l'avons vu en analysant ces travaux, toutes les théories étaient destinées à étudier le comportement de l'atome d'hydrogène vis-à-vis des raies spectrales associées au rayonnement électromagnétique ; ce rayonnement étant dû aux variations d'énergie de l'électron à l'intérieur de l'atome le plus simple : l'atome d'hydrogène. En effet, l'atome d'hydrogène ne comporte qu'un seul électron et un seul proton.

De fait, nous sommes bien obligés de reconnaître que les applications concernant à l'époque toutes ces théories, sont assez limitées.

Et même si le travail mathématique de l'époque permet d'obtenir d'une part la convergence de toutes les théories et d'autre part un formalisme adéquat pour l'étude de la physique quantique, il n'en reste pas moins vrai que ces avancées demeuraient incapables de prendre en compte les interactions entre plusieurs électrons.

Ainsi, une théorie quantique appliquée aux phénomènes pouvant être associés au champ électromagnétique dans lequel pouvaient interagir simultanément plusieurs électrons, n'existait pas.

Dans les biographies de Schweber⁸⁹, Gleick⁹⁰, Merha⁹¹, archives à l'appui, il est mentionné la redécouverte de l'équation de Klein-Gordon en 1936 par Feynman simplement âgé de dix-huit ans. Il s'agit de l'équation relativiste de l'électron dans un champ magnétique, dont nous avons parlé en sous-section 1.2.1.g dans la partie « a ».

En fait, comme nous l'avons vu, dans la deuxième édition de 1935 "*The Principles of Quantum Mechanics*", que possédait Feynman et qui constituait sa référence en mécanique quantique, Dirac mentionne cette équation qui lui servira de départ dans l'élaboration de sa célèbre équation.

Mais peu importe que Feynman ait redécouvert ou non l'équation de Klein-Gordon, ce qui est important c'est de constater qu'à dix-huit ans à peine, il était déjà capable de suivre de tels développements théoriques avec des outils mathématiques abstraits tel que le calcul tensoriel.

Cependant, ne réussissant pas à appliquer cette équation au calcul des niveaux d'énergie orbital dans l'atome d'hydrogène (y compris pour l'électron libre soumis aux lois de la relativité restreinte), Feynman constatait (avec son condisciple Welton), qu'en mécanique quantique, s'il n'était pas très difficile d'obtenir des équations, il n'en était pas de même pour les résoudre.

Citons à cet effet Welton, en accord avec Feynman, page 454 de la biographie de Schweber :

*« I'll probably get an equation that I can't solve anyway. That's the trouble with quantum mechanics. It's easy enough to set up equations for various problems, but it takes a mind twice as good as the differential analyzer to solve them »*⁹².

Lors de ses études au MIT, Feynman était-il déjà convaincu que les formalismes de Heisenberg, Schrödinger et Dirac n'étaient pas complets puisqu'ils ne traitaient dans leurs équations que le comportement d'un seul électron ?

Avait-il conscience de l'aspect particulièrement obscur de cette nouvelle physique, de ces formalismes compliqués à mettre en œuvre, conduisant à une multitude de publications entre 1927 et 1939 (comme nous l'avons vu en section 1.2.2), sitôt que l'on veut élargir leur champ d'action ?

Et ceci principalement en ce qui concerne, entre autres, les procédures de « Renormalisation » qui permettent de gérer le problème des infinis que posent la relativité et les quantas dans les intégrales et séries divergentes.

Feynman répond en partie à ces deux questions lors de sa conférence Nobel en 1965, exprimant ses ressentiments vis-à-vis des théories quantiques de l'époque où il était étudiant au MIT de 1935 à 1939 :

89. Schweber. « *Feynman and the visualization of space-time processes* », page 454.

90. Gleick. « *Le génial professeur Feynman* », pages 91 et 92.

91. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* », pages 55 et 56.

92. Schweber. « *Feynman and the visualization of space-time processes* », page 454.

« J'apprenais la physique alors connue, assimilant lentement les questions qui tracassaient les gens du métier, et il m'apparut finalement que l'état peu satisfaisant de la théorie quantique de l'électricité et du magnétisme était le problème fondamental du moment. J'appris ceci dans des livres comme ceux de Heiter et de Dirac. »⁹³

Et il mentionne que dans ces livres (y compris la publication de Dirac datant de 1935 que nous avons citée à maintes reprises), c'est plutôt le côté philosophique des choses conduisant à telles discussions et à telles remarques qui l'inspirait et non les passages où tout était démontré et calculé. Car en effet, il avoue ne pas très bien comprendre tous les passages. Qui plus est, les remarques concernant le manque de sens de tel ou tel calcul l'ont durablement marqué.

En d'autres termes, toutes ces théories aux procédés abstraits et compliqués manquaient de pragmatisme lorsqu'il s'agissait de passer en mode calculatoire. Aussi, elles ne trouvaient pas chez Feynman un grand écho.

Son sentiment personnel était que les physiciens de l'époque étaient loin d'avoir obtenu une réponse satisfaisante en théorie quantique de l'électricité et du magnétisme⁹⁸.

Aussi, il ne jugera pas très important de connaître en détail tous les travaux effectués de 1936 à 1939 ne permettant pas de résoudre les problèmes rencontrés en section 1.2.2 et ceux contenus dans la publication de Dirac de 1935.

Mais laissons Feynman s'exprimer lui-même à ce sujet :

« J'avais aussi le sentiment personnel que, puisqu'ils n'avaient pas obtenu de réponse satisfaisante au problème que je voulais résoudre, il ne m'était pas nécessaire d'accorder une attention exagérée à ce qu'ils avaient fait ».⁹⁹

De plus, lors d'une interview avec Mehra, Feynman ajouta :

« I psyched myself up like a Watusi tribal warrior, and said to myself : " these men, like Heisenberg and Pauli, who had worked on quantum electrodynamics and had been stuck with the difficulties of solving the problem of infinities, did not know anything; I'm going to show them how to do it! " ».¹⁰⁰

Le caractère original et la grande acuité de Feynman pour tout ce qui traite de l'aspect scientifique des choses a pu faire en sorte qu'il ne prenne pas le temps et la patience de suivre les calculs assez abstraits et difficiles du mathématicien et physicien anglais.

93. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 236.

98. Ibid. Page 236.

99. Ibid. Pages 236 et 237.

100. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* », page 89.

101. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 237.

102. Feynman. « *Vous voulez rire, Monsieur Feynman* ». Traduction F. Balibar, C. Guthmann, page 79.

Sans s'attarder sur les calculs qu'il avoue ne pas totalement comprendre dans la célèbre publication de Dirac de 1935 lorsqu'il n'était qu'un étudiant aspirant au « *Bachelor of Science* » (MIT), son caractère va tout au long de sa vie le pousser à émettre ses propres hypothèses.

Aussi, ne faut-il pas nous étonner :

- d'une part que Feynman ait pu redécouvrir par sa propre méthode l'équation de Klein-Gordon (généralisation de l'équation de Schrödinger à la relativité), dont nous avons parlé plus haut sans se préoccuper des calculs de Dirac,

- d'autre part qu'il ait inventé l'intégrale de chemins favorisant un formalisme nouveau en mécanique quantique qui va s'avérer être le départ de ce qui le conduira à sa théorie de l'Electrodynamique Quantique à travers ses fameux diagrammes.

De plus, comme mentionné lors de sa Conférence Nobel, Feynman avait bien compris, au cours de ses lectures, « *qu'il y avait deux sources aux difficultés des théories électrodynamiques quantiques :*

** La première résidait dans la valeur infinie de l'énergie d'interaction de l'électron avec lui-même, de son « auto-énergie ». Et cette difficulté existait déjà dans la théorie classique.*

** L'autre difficulté provenait d'infinités liées au nombre infini de degrés de liberté du champ électromagnétique ».¹⁰¹*

Et comme le mentionne Feynman dans son autobiographie¹⁰² :

Lorsqu'il était étudiant au MIT, pour solutionner les difficultés précédentes liées aux infinis, il avait eu l'idée qu'un électron puisse ne jamais interagir avec lui-même mais toujours avec d'autres électrons.

Cette idée qu'il trouva claire et élégante et dont il tombera amoureux¹⁰³, sera le point de départ de ses recherches à Princeton et le conduira à découvrir un principe de moindre action en introduisant le concept mathématique des intégrales de chemins.

Ce concept mathématique des intégrales de chemins n'a cessé d'être développé depuis ;

« ... Et c'est parce que Feynman pose le problème de la mécanique quantique dans l'espace-temps (de Minkowski) que les intégrales de chemins ont été si prolifiques en théorie quantique des champs. »¹⁰⁴

L'approche originale de Feynman basée sur le concept de l'intégrale de chemins dans la résolution des problèmes de l'Electrodynamique Quantique est décrite au chapitre 3.

Muni de tout le formalisme quantique que nous venons de décrire, nous expliquons au paragraphe suivant comment Feynman va effectuer, avec beaucoup d'originalité, son travail de recherche associé à son mémoire validant l'obtention du « *Bachelor of Science* » en fin de

103. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

104. Basdevant. « *Principes variationnels et dynamique, pages 161 et 162.*

quatrième année au MIT (1939). Ceci nous permettra de saisir un peu plus encore son caractère et de comprendre le sens de ses motivations.

2.5- Le travail de Bachelor of science de Feynman

Le MIT comptait les meilleurs physiciens des Etats-Unis. Parmi eux, se trouvait John Clarke Slater. Ce physicien américain (1900-1976) fut professeur de physique au MIT de 1930 à 1966. La connaissance de la structure électronique, c'est-à-dire de la répartition des électrons dans les atomes et les molécules selon leur énergie et leur spin, doit beaucoup à Slater. En 1929, il était déjà connu pour ses travaux en mécanique quantique concernant l'expression de la fonction d'onde d'un système de N électrons exprimé sous la forme d'un déterminant : « le déterminant de Slater ».

Pour Slater, une théorie doit permettre des prédictions raisonnables sur les expériences et rien de plus. En cela, Slater était un adepte du sens commun, du sens pratique, et la théorie ne doit être là que pour servir l'expérience. Ainsi, Slater exprimait au MIT l'esprit d'Edison.

Autant dire que Feynman trouvait en Slater l'expression même de tout ce qu'il pouvait ressentir dans la manière de « faire de la physique », et le chercheur qu'il sera ne trahira jamais l'enseignement qu'il reçut au MIT.

A la fin de l'année scolaire 1939, ce fut Slater en personne qui dirigea Feynman pour son mémoire de « Bachelor of Science » en lui soumettant un problème associé aux forces dans les molécules. Et ce problème se terminera par une publication dans la *physical review*⁹⁴ et un théorème « le théorème de Feynman » considéré comme « la loi » des forces moléculaires⁹⁵.

Par l'originalité de son travail, Feynman montre déjà tout son talent. Et Mehra dans sa biographie consacre les pages 71 à 78 à expliquer en détail la manière dont le futur « Nobel » entreprend sa recherche en donnant les principales équations au fur et à mesure de son avancée. Slater expliqua à Feynman que lorsque le quartz est chauffé, il se dilate bien moins que d'autres substances, car il est très stable. Aussi lui demande-t-il de comprendre pourquoi.

La matière ne pouvant se dilater et se comprimer que sous l'effet d'une force, Feynman aborda le problème en pensant qu'il serait efficace de trouver une méthode mettant en jeu les forces agissant entre le noyau atomique et les électrons dans les atomes composant les molécules du quartz. Ainsi, en comprenant comment les forces agissent, il saura pourquoi le quartz possède une certaine stabilité vis-à-vis de la chaleur.

Or les forces en question sont dues au champ électrique exercé par les noyaux sur les électrons au sein de l'atome formant ainsi une liaison cristalline. En d'autres termes, les forces de liaison sont essentiellement de nature électrostatique, et résultent d'une redistribution plus ou moins importante des électrons de valence entre les noyaux atomiques impliqués dans la liaison entre atomes.

Aussi, faut-il déterminer, à l'aide de la mécanique quantique, la distribution de la charge électrique du nuage d'électrons qui entoure les noyaux. Puis il suffira de déterminer la force électrostatique existant entre ce nuage et les noyaux de n'importe quel atome (noyaux caractérisés par leur charge électrique variant d'une substance à une autre en fonction du

94. Feynman. « *Forces in molecules* ». 1939.

95. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* », page 78.

nombre de protons), pour comprendre pourquoi le quartz est plus stable que les autres substances, en fonction de la chaleur.

Feynman comprit très vite que travailler en considérant les variations d'énergie d'une orbitale à une autre (voir sous-section 1.2.1.f) serait long et fastidieux. Aussi, décidant de calculer la force électrostatique d'une manière assez originale en adaptant l'effet des forces de Van der Waals (entre atomes et molécules) à son problème, il répondit à la question que Slater lui posait. Impressionné par les résultats obtenus et la méthode utilisée, Slater demanda à Feynman de publier son mémoire à la *Physical Review* qui accepta.

Ainsi Feynman venait de commencer à mettre en pratique la dernière phrase qu'il avait retenue du livre de Dirac :

« *It seems that some essentially new physical ideas are here needed* »⁹⁶

Et comme il le mentionne dans sa Conférence Nobel⁹⁷, il trouve en cette phrase à la fois un défi et une inspiration.

2.6- Conclusion

Résumons brièvement les connaissances en mécanique quantique, les impressions et l'état d'esprit de Richard Feynman en 1939, avant son entrée à Princeton dans le but de préparer un Doctorat dont il ne sait pas encore s'il sera dédié aux mathématiques ou aux sciences physiques.

Premièrement, la seconde édition du livre de Dirac "*The Principles of Quantum Mechanics*" datant de 1935 a été son ouvrage de référence en mécanique quantique.

Cet ouvrage contient les instruments de calcul mathématique utilisés en mécanique quantique permettant de traduire en équations symboliques des conditions physiques données, et inversement, de prévoir des résultats physiques à partir de relations entre les symboles envisagés (l'algèbre des états et des observables associés au formalisme de représentation des états quantiques d'une particule).

En précurseur de l'Electrodynamique Quantique (la théorie quantique des interactions électromagnétiques), Dirac aborde les hypothèses et les problèmes se rapportant à l'interaction entre l'électron et le noyau à l'intérieur de l'atome, le traitement de l'interaction d'un photon avec un atome et la quantification du champ électromagnétique.

Cette publication de 1935 aborde certaines applications en mécanique quantique traitées d'une part selon la théorie de Schrödinger basée sur l'utilisation de sa célèbre équation, d'autre part selon la théorie de Heisenberg fondée sur sa mécanique matricielle.

Deuxièmement, Feynman avoue en 1965 lors de sa conférence Nobel, qu'à l'époque où il était étudiant au MIT, il était plus inspiré par les discussions et les remarques contenues dans le livre de Dirac que par les passages où tout était démontré et calculé soigneusement, ajoutant même qu'il ne comprenait pas très bien toutes les équations qui s'y rapportaient.

Avec le bon sens et l'esprit de synthèse qui le caractérisaient déjà, Feynman souligne qu'il parvenait cependant à saisir les remarques sur le manque de sens de tels ou tels calculs.

96. Dirac. "*The principles of quantum mechanics*". Edition 1935. Page 297.

97. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 236.

Nul doute que la façon dont son père lui fait découvrir, encore enfant, les phénomènes physiques qui l'entourent, explique assez bien de quoi son avenir serait fait.

En effet, tout naturellement il sera vite conduit à émettre ses propres hypothèses, ne s'embarrassant pas de se conformer à un moule intellectuel établi par d'autres conduisant à un système de pensée pouvant guider ses choix, d'autant plus qu'il trouve compliqué cette physique quantique qu'on lui enseigne ; mais ne soyons pas naïf, ce désintérêt de rentrer dans les détails est certainement dû à son manque de connaissance et à son peu d'envie de passer du temps à comprendre ce qu'ont fait les autres vis-à-vis de son empressement à mettre en pratique toutes les idées issues de son imagination bouillonnante.

C'est ainsi, comme il le mentionne dans son autobiographie "*Surely You're Joking Mr Feynman ! Adventures of a curious Character*" datant de 1985, que pour solutionner le problème de la valeur infinie de l'énergie d'interaction de l'électron avec lui-même, il avait tout simplement eu l'idée au MIT qu'un électron puisse ne jamais interagir avec lui-même mais toujours uniquement avec d'autres électrons.

Troisièmement, l'originalité et le succès obtenu par Feynman dans la conduite de ses recherches associées à l'obtention de son « Bachelor of Science », impressionna un physicien de la renommée de Slater.

En effet, non seulement il résolu le problème soumis par Slater à propos du comportement du quartz en fonction de la température, mais il élargit son champ d'action en démontrant un théorème, appelé "*Théorème de Feynman*", associé à une loi relative aux forces moléculaires. Fidèle à sa nature, il su très rapidement comme il le fera plus tard, percevoir dans le côté abstrait de la mécanique quantique toute l'utilité concrète que l'on peut en tirer. Assurément, à l'aide de la physique quantique, il détermina la distribution de la charge électrique du nuage d'électrons qui entoure les noyaux de n'importe quel atome pour inventer une méthode mettant en jeu les forces agissant entre les noyaux atomiques et les électrons dans les atomes composant n'importe quelle molécule.

Je dirais personnellement en termes imagés que toutes les fibres de son corps ressentaient ces lois de la nature qui nous entoure, en d'autres termes, je dirais qu'il avait "*la physique dans le sang*".

Quatrièmement, la manière dont s'est construit Feynman, enfant, sous l'influence bénéfique de son père, a sans conteste favorisé sa conviction que rien ne saurait lui être interdit dans la compréhension de la nature des choses.

Tout ce que j'ai pu lire de Feynman lui-même, des interviews qu'il a donné, des conférences qu'il a faites, des fameux cours de physique qu'il a publiés et que j'ai étudié, de l'opinion de ses collègues sur ses capacités hors normes et sa prodigieuse intelligence, telle que nous confie Mark Kac en début de cette thèse, et j'en passe, me donnent l'intime conviction d'un être infiniment imprégné d'une faculté quasiment innée dans la compréhension des phénomènes physiques qui nous entourent.

Aussi, je ne m'étonne pas du fait que dans l'interview qu'il donne à Mehra, contenue dans l'ouvrage « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* », le futur prix Nobel ait pu sérieusement penser qu'il savait au plus profond de lui-même qu'il allait montrer un jour à des gens comme Heisenberg et Pauli comment résoudre le problème des infinis en développant une théorie quantique de l'électricité et du magnétisme beaucoup plus simple.

Cinquièmement, comme le souligne Mehra dans son ouvrage « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* », c'est en première année au MIT que feynman décida de devenir physicien à la place de mathématicien ou d'ingénieur.

En effet, entre les mathématiques qu'il se mit à entrevoir essentiellement comme un outil abstrait et l'engineering concerné exclusivement par l'application pratique des lois de la nature, il choisit la physique qui réalisait un bon compromis et qui devrait beaucoup plus le rassasier de son besoin boulimique de comprendre les phénomènes naturels qui l'entourent.

A partir de là, tout va se passer de la même manière que l'assemblage logique des éléments d'un puzzle. Sa destinée va suivre instinctivement ce à quoi il semble prédestiné : la recherche en physique théorique. Et ses pensées ne s'éloigneront jamais d'une sorte de fatalité dans la tâche qu'il se sentait devoir accomplir, qui viendra le motiver et peser sur ses décisions tout au long de son existence.

Aussi, comme il le dit lui-même dans sa conférence Nobel, il va toute sa vie se souvenir de la dernière phrase de la publication de Dirac :

« *It seems that some essentially new physical ideas are here needed* »

qui semblera agir comme un signe promontoire de son destin et qu'il ressent à la fois comme un déficit et une inspiration.

2.7- Références

- 1- BASDEVANT Jean-Louis (2005). Principes variationnels et dynamique. Vuibert.- BOHR Niels (1913). On the Constitution of Atoms and Molecules. Philosophical Magazine N°26, pages 1 à 24.
- 2- DIRAC Paul (1927). Théorie générale de la diffusion. Zeitschrift für Physik, vol.44, p. 585.
- 3- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la Première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay.
- 4- DIRAC Paul (Second edition 1935). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford. At the Clarendon Press. Source en langue originale pour la seconde édition.
- 5- DIRAC Paul (Third edition 1947). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, London. Source en langue originale pour la troisième édition.
- 6- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1985). Vous voulez rire Monsieur Feynman! Odile Jacob (2000). Traduction F. Balibar, C. Guthmann de la publication originale « *Surely You're Joking Mr Feynman!* » *Adventures of a Curious Character* » publiée aux USA par W.W. Norton & Company, Inc., New York. Ce livre peut être considéré comme des mémoires autobiographiques.
- 7- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1988). What Do You Care What Other People Think? Further Adventures of a Curious Character. W.W. Norton & Company, Inc., New York.
- 8- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « *The development of the space-time view of quantum electrodynamics* » : Nobelprize.org.
- 9- FEYNMAN Richard (1939). Forces in molecules. Physical Review, vol. 56, p. 340-343.
- 10- GLEICK James (1992). Le génial professeur Feynman. Odile Jacob (1994). Traduction J.P. Mourlon de l'édition originale « *Genius. The life and Science of Richard Feynman* » publiée aux USA par Pantheon Books, New York.
- 11- KUHN Thomas (1962). La structure des révolutions scientifiques. Flammarion, Champs sciences (édition 2008).

- 12- MEHRA Jagdish (1994). The beat of a different drum. The life of science of Richard Feynman. Clarendon Press. Oxford.
- 13- SCHWEBER Silvan (1986). Feynman and the visualization of space-time processes. Reviews of Modern Physics : 58, 449-512.
- 14- WIKIPEDIA (2017). Far Rockaway High School.

Chapitre 3

Vers l'intégrale de chemins.

Les années à Princeton (1939 - 1942)

Résumé

3.1- Introduction

- 3.1.1- L'université de Princeton
- 3.1.2- Le professeur John Wheeler
- 3.1.3- Les idées de Feynman
- 3.1.4- Description de notre travail et documentation associée

3.2- Les années de thèse à Princeton (1939-1942)

- 3.2.1- La résistance de rayonnement (1939-1940)
 - a) Le problème de l'auto-interaction de l'électron
 - b) L'idée de Feynman
 - c) L'action à distance remplace la notion de champ
 - d) Les réflexions de Wheeler suite aux idées de Feynman
- 3.2.2- Wheeler et une théorie de l'interaction à distance : moitié avancée, moitié retardée (1940-1941)
 - a) La proposition de Wheeler (1940)
- b) La rencontre puis le rendez-vous chez Einstein (fin 1940-Début 1941)
- c) Les publications de 1941, 1945 et 1949
- 3.2.3- Vers la découverte de l'intégrale de chemin : chronologie
 - a) La volonté de quantifier l'action
 - b) Feynman butte sur la quantification de l'action
 - c) La solution passe par Dirac
 - d) Le papier de Dirac
 - e) L'interprétation par Feynman du papier de Dirac
 - f) Feynman retrouve l'équation de Schrödinger

3.3- Références

Résumé

Le chapitre 2 nous a montré, entre autres, les facultés exceptionnelles de Feynman lorsqu'il mène le travail de recherche nécessaire à l'obtention de son *Bachelor of Science* », au point

d'être publié dans la prestigieuse revue américaine *Physical review*.

Ainsi se voit-il conseillé puis admis à Princeton, une des universités les plus renommées des Etats-Unis.

Dans ce chapitre 3, via les Annexes 15 à 19, nous traçons en détail l'histoire des différentes étapes du travail de recherche de Richard Feynman à Princeton (1939 à 1941) qui vont peu à peu l'orienter vers la découverte de l'intégrale de chemins.

Cette histoire montre les prémices de la découverte de l'intégrale de chemins qui se dessine à travers :

- les échanges de réflexion entre Feynman et Wheeler, son directeur de thèse, qui vont tout naturellement conduire à la découverte d'un principe de moindre action associé aux potentiels pour moitié avancés et pour moitié retardés, associé à trois publications débouchant sur l'équation classique A de l'action liée aux interactions directes entre particules,
- les tentatives de Feynman pour quantifier l'équation A afin de la transposer à l'Electrodynamique Quantique,
- la manière dont Feynman retrouve (en 1941) l'équation de Schrödinger en interprétant différemment la formulation quantique du principe de moindre action ébauchée par Dirac en 1933.

3.1- Introduction

3.1.1- L'université de Princeton

En automne 1939, Feynman entre à la prestigieuse Université de Princeton située dans l'état du New – Jersey. Cette Université a le privilège de se trouver à proximité de l' « *Institute for Advanced Study* » conçue pour stimuler la recherche fondamentale au plus haut niveau dans de nombreux domaines, dont ceux de la physique et des mathématiques. A cette époque, des savants, tel qu'Einstein, y travaillent sur des thèmes de leur choix sans aucune contrainte. Nous verrons d'ailleurs que des jeunes chercheurs de l'Université tels que Wheeler et Feynman n'hésitaient pas à solliciter l'avis d'Einstein lui-même.

Le choix de Princeton fut largement conseillé par Slater¹⁰⁵, son directeur de mémoire de dernière année au MIT de Boston, qui avait été fortement impressionné par son travail¹⁰⁶.

Feynman entre donc à Princeton en tant que « *Research Assistant* » du professeur Wheeler à peine plus âgé que lui.

Une lettre de Feynman à sa mère, datant du 11 octobre 1939¹⁰⁷ montre déjà combien la joie d'enseigner anime le jeune étudiant. Une autre lettre également à sa mère, datant de novembre 1939¹⁰⁸ souligne tout le bonheur qu'il ressent dans son travail de recherche : « ... , *je rencontre des difficultés mathématiques qu'il me faut surmonter, soit contourner, soit attaquer différemment. Cela me prend tout mon temps, mais j'aime vraiment ça et je suis très heureux. Je n'ai jamais autant et aussi continûment réfléchi sur un problème. ... J'ai quand même avancé, et assez loin même – à la grande satisfaction du professeur Wheeler. Le problème n'est pas encore achevé, mais je commence à en voir la fin et à voir comment je peux y arriver ... SUPER !* »

105. Feynman. « *Vous voulez rire, Monsieur Feynman* ». Traduction Françoise Balibar et Claude Guthmann.

106. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* ».

107. Feynman. « *Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ?* ». Traduction Christian Jeanmougin.

108. Ibid.

Il me paraît pertinent de brosse brièvement l'état des recherches en physique des particules lors de l'arrivée de Feynman à Princeton en 1939.

En 1939, Anderson avait déjà découvert le positron (prédit par les calculs de Dirac en 1928: voir chapitre 1, sous-section 1.2.1.g) dans les rayons cosmiques (1932), et Pauli prédisait l'existence du neutrino afin d'expliquer le phénomène de la désintégration « bêta – plus » (1933).

En effet, nous savons aujourd'hui, en prenant pour exemple la désintégration du fluor 18 de lui-même en oxygène 18, que l'issue de la désintégration donne :

* un atome d'oxygène 18 chargé négativement car ce nouvel atome contient un proton de moins que le nombre d'électrons qui le constitue,

* un rayonnement radioactif sous la forme d'une particule « bêta – plus » constituée d'un positron chargé positivement, et émis en dehors de l'atome de fluor 18,

* un neutrino non radioactif.

Nous savons également aujourd'hui :

* que le type de radioactivité précédente affecte en général les noyaux riches en protons. Ceux-ci étant beaucoup plus rares dans la nature que les noyaux riches en neutrons, la radioactivité « bêta – plus » est moins fréquente,

* que cette radioactivité met en jeu l'interaction nucléaire faible par le fait qu'un quark « u » mute en quark « d » transformant ainsi un proton en neutron.

Avant 1939, c'est-à-dire en 1933, Patrick Blackett et Giuseppe Occhialini observent la production et l'annihilation de paire électron -positron¹⁰⁹.

En 1934, Fermi propose un modèle des interactions faibles associé à la radioactivité « bêta – plus » que nous venons de voir ci-avant, Chadwick découvre le neutron et les Joliot – Curie découvrent la radioactivité artificielle.

En 1938, Otton Hahn et Fritz Strassmann découvrent la fission nucléaire de l'uranium (la fission des noyaux lourds), dont Lise Meitner fournit la première explication théorique.

Ainsi, si la physique des particules ne jouissait pas encore de la popularité qu'elle connaît de nos jours, leur découverte commençait à prendre de l'importance ; à tel point que l'Université de Princeton possédait son propre cyclotron conçu par ses propres ingénieurs et chercheurs. De l'avis de Feynman, ce cyclotron produisait la plupart des résultats en physique des particules¹¹⁰. Mais laissons Feynman s'exprimer à ce sujet : « *Le lundi matin de mon arrivée donc, je me suis rendu au département de physique et j'ai demandé où se trouvait le bâtiment du cyclotron.... Et, du coup, j'ai compris pourquoi à Princeton ils obtenaient tant de résultats ; c'est qu'ils travaillaient réellement avec l'instrument ; ils l'avaient construit eux-mêmes et ils savaient exactement où se trouvaient les diverses pièces et comment elles fonctionnaient. ...C'était extraordinaire !* »

3.1.2- Le professeur John Wheeler

Aussi, le professeur John Wheeler dont nous trouvons une courte biographie en annexe 5, superviseur de Feynman à Princeton, était passionné par le comportement des particules.

En 1934, avec Breit, il avait calculé le processus de diffusion photon – photon montrant que le vide peut absorber l'énergie du rayonnement incident, via la création de paires réelles électron

109. Blackett. « *Cloud Chamber Researches in Nuclear Physics and Cosmic Radiation* ». Nobel Lecture.

110. Feynman. « *Vous voulez rire Monsieur Feynman !* ». Traduction Françoise Balibar et Claude Guthmann.

- positron¹¹¹ : « *In the present note are given analogous calculations for the production of positron electron pairs as a result of the collision of two light quanta.* »

Notons aussi les travaux de Wheeler datant de 1937, concernant la matrice S ¹¹² : « *The wave function for the composite nucleous is written as a property antisymmetrized combination of partial wave functions, corresponding to various possible ways of distributing the neutrons and protons into various groups, ... The dependance of the total wave function on the intergroup separations is determined by the variation principle. The analysis is carried out in detail for the case that the configurations considered contain only two groups. Integral equations are derived for the functions of separation.* »

Le concept de cette matrice sera déterminant dans l'élaboration de ses diagrammes par Feynman, issus de celui des intégrales de chemins. La matrice S décrit l'évolution d'un système quantique suite à une interaction, en établissant une correspondance linéaire, plus exactement matricielle, entre les états initiaux et les états finaux.

A cette époque, la théorie quantique des champs se battait avec les infinis et Wheeler proposait d'abandonner le principe de « Renormalisation » (qui traitait le problème des infinis que nous avons vu au chapitre 1, section 1.2.2) au profit d'une théorie purement mathématique fondée seulement sur la matrice S . En fait, Wheeler cherchait par une méthode variationnelle les meilleures fonctions d'ondes nucléaires décomposables en produit de fonction d'ondes de groupes stables.

3.1.3- Les idées de Feynman

Le travail de Feynman à Princeton le conduit à étudier en détail divers problèmes de physiques associés aux recherches de Wheeler, assez difficiles à résoudre¹¹³.

Et de fil en aiguille, débattant des problèmes assez abstraits que lui soumet Wheeler à partir de 1939, Feynman finira par concevoir en 1942 une nouvelle façon d'exprimer la mécanique quantique à l'aide de l'action sous forme d'intégrales qu'il ne nomme pas encore « *intégrales de chemins* ».

Tout naturellement, le concept de l'intégrale de chemins le conduira en 1949 à sa théorie de l'électrodynamique quantique qui lui permettra d'obtenir le prix Nobel de physique en 1965.

Et tout ceci via son idée de diagrammes fournissant une représentation graphique de la trajectoire des particules sub-atomiques dans l'espace-temps de la relativité restreinte (Minkowski). Ce qui permettra de mettre en évidence les réactions élémentaires entre électrons et photons impliqués dans un processus quantique.

3.1.4- Description de notre travail et documentation associée

Le travail ci-après examine le cheminement de la pensée de Feynman vers ce qui a le conduire au concept de l'intégrale de chemins.

Ce chapitre 3 est là pour mener à bien la prise en compte de la progression des idées de Feynman, au fur et à mesure de ses diverses réflexions.

L'histoire des années de thèse à Princeton est fondamentale, dans le sens où elle indique que c'est finalement en cherchant à résoudre le problème des infinis en électrodynamique, que Feynman arrive au concept d'une éventuelle troisième formulation de la mécanique quantique après celle de Heisenberg et de Schrödinger.

Section 111. Breit et Wheeler. « *Collision of two Light Quanta* ». 1934.

112. Wheeler. « *On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure* ». 1937.

113. Feynman. « *Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ?* ». Lettre à sa mère datant de novembre 1939. Traduction Christian Jeanmougin.

Mais si l'idée d'intégrer le long d'un chemin associé à l'évolution de la fonction d'onde (liée au mouvement d'une particule) d'un point (x,t) à un autre point (x',t') de l'espace-temps, germe dans la tête de Feynman, il reste encore beaucoup à faire pour aboutir à sa théorie quantique à travers l'intégrale de chemins.

Les publications fondamentales que j'ai consultées sont les suivantes :

- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « The development of the space-time view of quantum electrodynamics » : Nobelprize.org.,
- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1985). Vous voulez rire Monsieur Feynman! Odile Jacob (2000). Traduction F. Balibar, C. Guthmann de la publication originale « Surely You're Joking Mr Feynman ! Adventures of a Curious Character » publiée aux USA par W.W. Norton & Company, Inc., New York. Ce livre peut être considéré comme des mémoires autobiographiques,
- WHEELER John & FEYNMAN Richard (21 Février 1941). Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping . Physical Review, volume 59. Page 683,
- WHEELER John & FEYNMAN Richard (1945). Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. Reviews of Modern Physics, volume 17, 426,
- WHEELER John & FEYNMAN Richard (1949). Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action ». Reviews of Modern Physics. Volume 21. Page 425.
- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la mécanique quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay,
- DIRAC Paul (Second edition 1935). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford. At the Clarendon Press. Source en langue originale pour la seconde édition,
- DIRAC Paul (Third edition 1947). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, London. Source en langue originale pour la troisième édition,
- FEYNMAN Richard (1942). Le principe de moindre action en mécanique quantique . Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education France. 2007,
- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste. Review of Modern Physics, volume 20, 367. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007),
- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. Review of Modern Physics, volume 20, 367.

3.2- Les années de thèse à Princeton (1939-1942)

C'est à Princeton que Feynman établit les bases de la théorie des intégrales de chemins, qui va constituer une nouvelle manière d'aborder la mécanique quantique. Sa thèse soutenue en juin 1942 mentionne en Introduction qu'il est nécessaire de développer une théorie de l'électrodynamique quantique capable de décrire des charges n'agissant pas sur elles-mêmes, sachant que la théorie actuelle est loin d'être satisfaisante.

Aussi, cite-t-il en début de sa thèse, ses travaux effectués avec Wheeler en 1941 concernant leur théorie de l'action à distance (théorie classique dont la version quantique ne sera jamais réalisée). Cette théorie utilise dans sa formulation, pour moitié des solutions avancées et pour moitié des solutions retardées des équations de Maxwell.

Il faut bien comprendre que tout démarre chez Feynman par sa volonté de résoudre le problème des infinis lié à l'auto-interaction de l'électron (la self-masse infinie aussi bien en électrodynamique classique qu'en électrodynamique quantique). Et cette motivation va le conduire à utiliser le principe de moindre action qui allait justement résoudre son problème en utilisant des potentiels pour moitié avancés et pour moitié retardés.

Il nous paraît donc important de retracer dans les sections 3.2.1 et 3.2.2 les réflexions et les idées de Feynman appuyées par les connaissances de Wheeler, afin de dégager le cheminement de la pensée du jeune étudiant ; cheminement d'une pensée qui le conduira à la quantification du principe de moindre action en se référant aux travaux de Dirac de 1933.

Comme nous pourrons le voir dans leurs publications (1941, 1945, 1949), les travaux de Feynman et de Wheeler sont fortement motivés par la notion de trajectoire des particules, c'est-à-dire par une description plus classique, plus réaliste des phénomènes physiques par rapport à ce que préconise l'École de Copenhague conduite par Bohr concernant l'aspect probabiliste de la mécanique quantique.

La section 3.2.3 est dédiée au travail de Feynman découlant de son idée d'interpréter à sa façon le résultat des travaux de Dirac de 1933 ; idée qui le conduira, comme nous le verrons au chapitre 4, à relier la fonction d'onde au Lagrangien, c'est-à-dire à construire l'action associée au mouvement d'une particule, en d'autres termes à exprimer directement la mécanique quantique à l'aide de l'action.^{113 bis}

3.2.1- La résistance de rayonnement (1939-1940)

3.2.1.a) Le problème de l'auto-interaction de l'électron

Dans la théorie classique, une charge électrique q immobile (considérée ponctuelle comme l'électron) crée en un point de l'espace situé à une distance r le champ électrique suivant :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} ,$$

associé au potentiel électrique en ce point :

$$V = E r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} .$$

Ainsi, toute charge électrique q' ponctuelle ou non, se trouve soumise de manière instantanée à la force de Coulomb suivante :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} = q'E$$

La notion de champ fait donc appel à une action instantanée de la charge électrique q sur l'autre charge électrique q' .

Dans les équations précédentes, le fait de faire tendre r vers 0 revient à considérer une interaction de la charge q sur elle-même. Dans ce cas, la valeur V devient infinie ainsi que la force électrostatique F , auxquelles est associée une énergie potentielle électrique E_p infinie.

La loi d'Einstein associe l'énergie totale E_T de la charge q , au produit de sa masse par la constante c^2 (c étant la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide), soit :

$$E_T = E_C + E_P = m c^2,$$

Avec :

^{113 bis}. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 257.

* $E_C = 0$, puisque l'énergie cinétique de la particule est nulle du fait de son immobilité.
D'où :

$$m = E_P / c^2 = \infty,$$

traduisant l'absurdité de l'électrodynamique classique associée aux charges ponctuelles pour les petites distances.

Mais si les calculs en électrodynamique classique pour r tendant vers 0, par rapport à ceux effectués en électrodynamique quantique dont nous parlerons plus tard, sont absurdes, il ne reste pas moins vrai que l'interaction de l'électron avec lui-même est une réalité de la nature associée à la loi sur la conservation de l'énergie. En effet, le physicien Nikola Tesla (1856-1943) a découvert en 1887 qu'une particule chargée émet un rayonnement électromagnétique lorsqu'elle traverse un champ électrique. Puis le physicien Joseph Larmor (1857-1942) établit justement en 1897 la formule décrivant la puissance P émise sous forme de rayonnement électromagnétique par cette particule de charge électrique q subissant une accélération a :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} .$$

En d'autres termes, à titre d'exemple, un électron chargé $q = -e_0$ animé d'une force de Coulomb F en mouvement accéléré a vers un proton chargé $+e_0$, va émettre un rayonnement électromagnétique à la puissance P , entraînant une perte d'énergie de sa part. Aussi, afin de respecter le principe de conservation d'énergie du système constitué par l'électron en mouvement accéléré, celui-ci doit dépenser un travail afin de compenser l'énergie perdue. Et c'est pour vaincre cette perte d'énergie assimilée à une résistance radiative (ou de rayonnement) que l'électron trouve, à priori en lui-même, une force supplémentaire.

Mais laissons Feynman s'exprimer à ce sujet : « *Suivant une idée de Lorentz, on considérait à l'époque que l'origine de cette force se trouvait dans l'action de l'électron sur lui-même.* »¹¹⁴

3.2.1.b) L'idée de Feynman

Ainsi que nous en avons parlé à la fin du chapitre 2, au MIT déjà, Feynman avait eu l'idée qu'un électron puisse ne jamais interagir avec lui-même : « *Avant même d'avoir terminé mes études à Princeton, j'ai entrepris un travail de recherche sous la direction de John Wheeler. Le sujet sur lequel il m'avait mis n'était pas des plus faciles et comme je n'arrivais pas à grand-chose, je me suis remis à travailler sur une idée que j'avais eue auparavant au MIT. J'avais eu l'idée qu'un électron n'interagit jamais avec lui-même mais toujours avec d'autres électrons.* »¹¹⁵

Se souvenant de la phrase de Dirac (voir chapitre 2, paragraphe 2.5) mentionnant le « *besoin de quelques idées physiques radicalement nouvelles* », et fidèle à son mode de fonctionnement que nous avons largement décrit au chapitre 2, Feynman va donc postuler le fait que l'électron ne puisse pas agir sur lui-même, mais seulement sur les autres électrons. En effet, en électrodynamique classique le fait de prendre pour hypothèse la non interaction de l'électron sur lui-même revient tout simplement à s'affranchir dans les calculs associés au problème en question, de l'inconvénient de la self-masse infinie de la particule associée à l'énergie potentielle infinie.

Mais si l'électron n'agit pas sur lui-même, cela signifie comme le montre l'équation

114. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

115. Feynman. « *Vous voulez rire Monsieur Feynman !* ». Traduction Françoise Balibar et Claude Guthmann.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

que cet électron ne "sent" pas son propre champ. Alors Feynman émet l'idée d'éliminer le champ en tant qu'intermédiaire instantané des forces.

Pourquoi, en effet, ne pas considérer qu'une charge électrique puisse agir directement sur une autre charge. Mais en faisant sauter la notion de champ et donc l'instantanéité de l'action que celui-ci véhicule, toute charge électrique agit sur une autre avec un décalage dans le temps associé à la vitesse c de propagation des ondes électromagnétiques¹¹⁶. La force doit pouvoir s'exercer sans l'intermédiaire du champ en prenant la forme d'une *action à distance*. Feynman remet donc carrément en question la notion de champ, c'est-à-dire le fait que le champ tel qu'admis jusqu'à présent soit généré par l'échange virtuel de photons. En d'autres termes, dans l'esprit du jeune étudiant plein d'audace, le champ ne serait qu'une entité fictive : « *Et je me fais donc à moi-même la suggestion que les électrons ne peuvent pas agir chacun sur lui-même, mais seulement sur les autres électrons. Ce qui veut dire qu'il n'y a pas de champ ! ... Tout simplement, il se passe que si vous agitez une charge, une autre s'agitiera plus tard.* »¹¹⁶

Ainsi, cette idée de s'affranchir du problème de l'auto-énergie de l'électron et du champ, « *présente l'avantage de résoudre les deux problèmes d'un coup* »¹¹⁷, c'est-à-dire les deux problèmes mentionnés au chapitre 2, paragraphe 2.4.

Les deux postulats précédents de Feynman concernant **la non-interaction de l'électron sur lui-même et l'idée d'un champ qui n'existe pas constitue pour Feynman ce qu'il nomme « sa théorie »**.¹¹⁸

Mais il convient assez vite, à Princeton, qu'un des postulats de sa théorie, en l'occurrence celui considérant la non-interaction de l'électron avec lui-même, viole la loi de la conservation de l'énergie¹¹⁹ stipulée dans les travaux de Tesla et de Larmor (voir sous-section 3.2.1.a).

Signalons que Wheeler, dans ses travaux de 1937¹²⁰, avait déjà remis en question le principe de « Renormalisation » associé à l'auto-interaction de l'électron, au profit d'une théorie purement mathématique (la matrice S) basée sur une méthode variationnelle. Aussi, écoutait-il toujours les idées de son élève avec un grand intérêt¹²¹.

3.2.1.c) L'action à distance remplace la notion de champ¹²²

Malgré le problème de la non-conservation de l'énergie dû au fait de ne pas considérer l'auto-interaction de l'électron, Feynman reste convaincu que sa théorie reste une alternative aux résultats non satisfaisants des physiciens quant à la résolution du problème des infinis.¹²³

Feynman imagine donc de remplacer la résistance de rayonnement par une *action à distance* sur la particule chargée, de la part d'une autre particule se trouvant dans son environnement.

116. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

117. Ibid.

118. Feynman. « *Vous voulez rire Monsieur Feynman !* ». Traduction Françoise Balibar et Claude Guthmann.

119. Ibid.

120. Wheeler. « *On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure* ». 1937.

121. Feynman. « *Q'en pensez-vous Monsieur Feynman ?* ». Lettre à sa mère datant de novembre 1939. Traduction Christian Jeanmougin.

122. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

123. Ibid.

Aussi, suppose-t-il deux électrons.¹²⁴ Un premier électron S en mouvement accéléré, considéré comme source, induit par *action à distance* une force F (la force de Coulomb) sur un autre électron R considéré comme récepteur qui se met à vibrer. Alors, l'électron R réagit à son tour en faisant vibrer l'électron S dont l'amplitude de vibration pourrait être assimilée à la résistance de rayonnement cherchée.

Trouvant un résultat différent de celui correspondant à la résistance de rayonnement, Wheeler explique à Feynman (conférence Nobel : note 122) que cette résistance de rayonnement telle qu'il la suggère, ne saurait être correcte car elle dépend de l'électron R , en variant comme l'inverse du carré de la distance entre les deux électrons (la force de Coulomb de l'électron R sur l'électron S), « *alors que la résistance radiative ne dépend d'aucune de ces quantités !* » De plus, comme l'explique Wheeler, pour une valeur d'accélération a_1 au temps t_1 , de l'électron S , il doit être associé instantanément un travail correspondant à la résistance de rayonnement, afin de vaincre la perte d'énergie par rayonnement de celui-ci. Et ce n'est certainement pas l'électron R qui peut y suppléer du fait des temps de transit de l'*action à distance*, la force de coulomb (telle que transmise de l'électron R à l'électron S à la vitesse c : voir sous-section a) agissant trop tard.

Ainsi, Wheeler explique à Feynman que la première des hypothèses concernant la théorie qu'il entend défendre à propos de la non-interaction de l'électron sur lui-même n'est pas une bonne théorie. En effet, dans la formulation de la résistance radiative associée à sa théorie, Feynman utilise des paramètres physiques qui n'ont rien à voir avec ceux dont dépend justement la résistance de rayonnement.

Rappelons à ce propos la publication de Pierre Duhem (1906) aux éditions Vrin (2007) relative à la Bibliothèque des textes philosophiques :

« *La théorie a pour principe des postulats, c'est-à-dire des propositions qu'il lui est loisible d'énoncer comme il lui plaît, pourvu qu'il n'y ait contradiction ni entre les termes d'un même postulat, ni entre deux postulats distincts. Mais une fois ces postulats posés, elle est tenue de les garder avec une jalouse rigueur. Si, par exemple, elle a placé le principe de la conservation de l'énergie à la base de son système, elle doit s'interdire toute affirmation en désaccord avec ce principe.* »

3.2.1.d) Les réflexions de Wheeler suite aux idées de Feynman

La théorie de Feynman (l'action à distance sans considération de champ rayonné occupant tout l'espace et la non auto-interaction particulaire) présente bien des lacunes au niveau de sa mise en œuvre. Mais la pensée qu'elle véhicule va permettre au professeur Wheeler de rebondir sur une proposition beaucoup plus en phase avec les résultats connus et les idées en cours, que nous exprimons en détail en Annexe 15.

Le paragraphe suivant décrit la proposition de Wheeler suite à ses réflexions consécutives aux idées de Feynman quant à la non-interaction de l'électron et à la suppression du champ électromagnétique remplacée par le concept d'*action à distance*. Nous verrons aussi comment Wheeler et Feynman justifient la présence du champ d'amortissement de Dirac en introduisant la théorie de l'absorbeur de tétrode.

3.2.2- Wheeler et une théorie de l'interaction à distance : moitié avancée, moitié retardée (1940-1941)

124. Ibid.

Si « l'action à distance » (à ne pas confondre avec « le principe de moindre action ») et la non-interaction de l'électron avec lui-même étaient des concepts connus dans les années 1930, aucun physicien, à part Dirac mais sans réussir véritablement à étayer son raisonnement, ne remettait en cause la conception de Lorentz sur la résistance de rayonnement (voir 3.2.1.a).

A priori, Feynman ne connaissait pas au MIT la théorie de « l'action à distance ». En effet, dans son discours Nobel, il mentionne ce que nous avons exprimé en 3.2.1.b, à savoir qu'il devait être possible de résoudre le problème des infinis en se passant d'une part du champ électromagnétique et d'autre part de l'auto-interaction de l'électron.

Malgré les idées de Lorentz sur la résistance de rayonnement, Feynman reste convaincu, par une sorte d'intuition qui le caractérise entièrement (voir 3.2.1.c), que sa théorie « contient la solution des difficultés de l'électrodynamique quantique »¹³². Aussi, il persiste « à essayer tant bien que mal de la sauver ».

Et c'est justement en essayant à tout prix de chercher comment trouver par « l'action à distance » une solution qui évite de tenir compte de l'auto-interaction de l'électron, qu'il finit par convaincre Wheeler.

Wheeler, comme indiqué par Schweber¹³³, avait étudié « l'action à distance » telle que mentionnée par Schwarzschild (1903), Tétrode (1922) et Fokker (1929). En outre, à priori, il ne pouvait pas ignorer les travaux récents de Dirac datant de 1938 (voir Annexe 15 §5).

Alors, commençant à prendre au sérieux l'entêtement de Feynman, et muni du solide bagage scientifique qui était le sien, Wheeler décide d'entreprendre une recherche approfondie sur l'action à distance. L'objectif est de s'affranchir de l'auto-interaction de l'électron, source de la plupart des problèmes en électrodynamique quantique. De plus, on peut à juste raison supposer que pour Wheeler ces travaux devaient corriger le défaut principal de la formulation de Dirac sur le sujet¹³⁴.

3.2.2.a) La proposition de Wheeler (1940)

En fait ce que propose Wheeler correspond à première vue aux explications contenues dans l'Annexe 15 §4 relatives à Fokker. La seule différence vient de la généralisation de l'absorbant à non pas un électron, mais à un ensemble de particules chargées (qui peuvent aussi être des électrons).

Une particule source, comme un électron, se trouve donc dorénavant en interaction avec la matière constituée d'une multitude d'autres particules « absorbantes » qui l'entourent.

Ainsi la résistance de rayonnement peut s'expliquer par « *a direct action of the charges of the absorber acting back by advanced waves on the source* ».¹³⁵

Pour Wheeler, la combinaison des ondes avancées et des ondes retardées doit pouvoir s'affranchir du temps de transit de l'*action à distance* dont nous avons parlé en sous-section 3.2.1.c.

De fait, il devient maintenant possible d'interpréter une rétroaction de l'absorbant sur la source comme une force de réaction radiative. En d'autres termes, cette réaction radiative ne serait rien d'autre que l'effet associé à la résistance de rayonnement. Cette hypothèse jette à bas celle de Lorentz (voir 3.2.1.a) qui était basée sur la perte d'énergie de la particule due à son rayonnement électromagnétique.

132. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar.

133. Schweber « *Feynman and the visualisation of space-time processes* », page 456.

134. Dirac. « *La Théorie de Dirac. Proceedings of the Royal Society of London* ». Vol. 167, p. 148, 1938

135. Schweber. « *Feynman and the visualisation of space-time processes* », page 457.

Selon Wheeler, la particule ne compense plus sa perte d'énergie par un phénomène d'auto-interaction puisque la résistance de rayonnement ne dépend plus d'elle. Le principe de la conservation d'énergie du système constitué par la seule particule source n'est donc plus d'actualité car la conservation de l'énergie est maintenant intrinsèquement liée au système complet source-absorbeur.

Le rayonnement de la particule en mouvement accéléré, constaté expérimentalement par Tesla (voir 3.2.1.a), la résistance de radiation et la conservation de l'énergie font partie d'un système beaucoup plus large.

Ainsi, comme le mentionne Tétrode (voir Annexe 15 §3), la particule source est considérée rayonner que par la présence d'un absorbeur : la conservation de l'énergie devient fonction de la constitution des charges électromagnétiques associées à toutes les particules élémentaires absorbantes en relation avec la particule considérée comme source.

Mais citons Feynman lui-même : « *Il devient ainsi clair qu'en supposant d'une part toutes les actions transmises par les solutions pour moitié avancées et pour moitié retardées des équations de Maxwell, et d'autre part toutes les sources entourées par un milieu absorbant l'intégralité de la lumière émise, alors nous pouvions rendre compte de la résistance radiative comme due à une action directe des charges de l'absorbeur réagissant sur la source par ondes avancées.* »¹³⁶

Wheeler demanda à Feynman de calculer par quelle combinaison de solutions avancées et retardées il était possible d'obtenir la résistance de rayonnement telle qu'exprimée par la physique du moment. En effet, cette résistance pouvait être estimée par un raisonnement de physique classique associé à la charge et à l'indice de réfraction n de l'absorbeur, à l'indice de réfraction de l'espace source-absorbeur égal à 1, à la longueur et à la phase de l'onde rayonnée, etc..

Tout naturellement, Feynman détermina que l'action à distance devait être par moitié avancée et pour moitié retardée : « *Wheeler me renvoya chez moi avec mission de calculer précisément quelle proportion d'ondes avancées et d'ondes retardées il fallait pour obtenir le bon résultat numérique (la résistance radiative), et ensuite d'évaluer ce qui se passe pour les effets anticipés qu'on doit attendre, si l'on place une charge d'essai près de la source. Car, si toutes les charges engendrent des ondes avancées aussi bien que retardées, pourquoi cette charge d'essai ne serait-elle pas affectée par les ondes avancées émises par la source ?*

Je trouvai qu'on obtient la bonne réponse (la résistance radiative), en utilisant comme champ engendré par chaque charge une moitié d'ondes avancées et une moitié d'ondes retardées, c'est-à-dire qu'on doit utiliser la solution des équations de Maxwell qui est symétrique par rapport au temps. »¹³⁷

3.2.2.b) La rencontre puis le rendez-vous chez Einstein (fin 1940-début 1941)

On peut se demander ce qu'Einstein a à faire avec la théorie de l'absorbeur de Wheeler et Feynman.

En fait, c'est en présentant cette théorie que Feynman fut pour la première fois en présence du grand physicien. Pour ce dernier, la théorie était plutôt intéressante¹³⁸ dans le sens où elle fait appel à un concept relevant de la symétrie du passé et du futur associé à la combinaison de

136. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Pages 243-244.

137. Ibid. Pages 242-243.

138. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* ». Page 97.

potentiels avancés et retardés. Comme nous le savons, Einstein avait déjà réfléchi au problème des ondes avancées et retardées dans les années 1900 concernant la question de la résistance de rayonnement¹³⁹. Aussi, Einstein invita-t-il Wheeler et Feynman à venir lui rendre visite chez lui, 112 Mercer Street à Princeton.

Afin de comprendre l'intérêt de cette visite, il est bon de procéder aux rappels qui suivent. Les équations de Maxwell relatives à la propagation de la lumière ou d'une radiation dans le vide sont parfaitement symétriques par rapport au temps.

Nous pouvons observer en Annexe 15 §4 que ces équations admettent deux types de solutions :

- * les ondes « retardées » qui se propagent à partir de la particule source (électron excité) et qui atteignent leur cible (l'absorbeur) après un certain retard $\frac{R}{c}$,

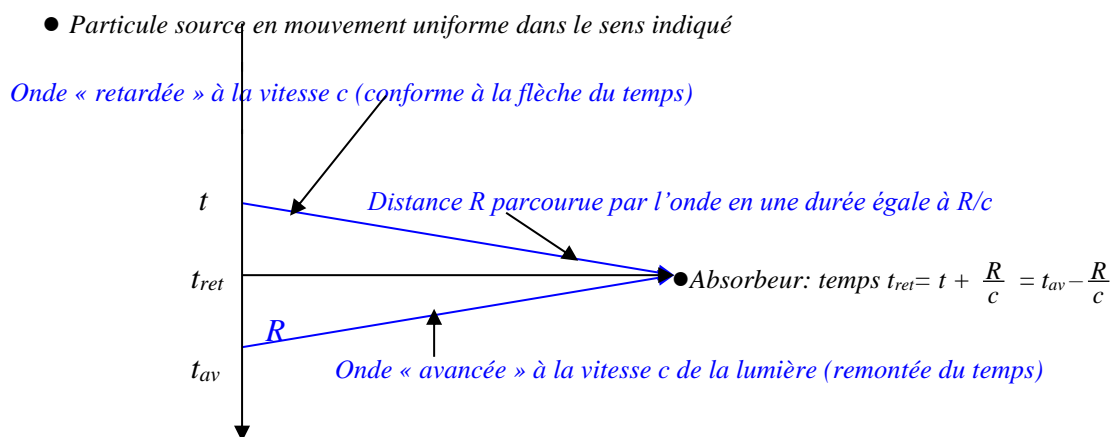
- * les ondes « avancées » qui parviennent à l'absorbeur avant d'être parties de la source c'est-à-dire avec une avance $\frac{R}{c}$.

La solution des ondes avancées semblant absurde, les physiciens n'ont retenu que la solution des ondes retardées. Si une relation entre la solution des ondes retardées et la direction du temps est implicitement et naturellement établie par ce que nous nommons la « flèche du temps », la théorie électromagnétique en elle-même n'impose aucune « flèche du temps » particulière (le renversement de la direction du temps n'est pas incompatible).

Ainsi, pour la particule source au temps t_{ret} (mouvement de la source à une distance R par rapport à l'absorbeur) on peut considérer une combinaison d'ondes avancée et retardée respectivement à :

$$t_{ret} = t + \frac{R}{c} \quad \text{et} \quad t_{av} = t_{ret} + \frac{R}{c} \quad (\text{soit } t_{ret} = t_{av} - \frac{R}{c}),$$

tel que montré sur le dessin ci-après :



L'onde émise par la source au temps t est reçue par l'absorbeur au temps $t_{ret} = t + \frac{R}{c}$.

Au temps t_{ret} l'absorbeur reçoit l'onde « avancée » qui sera émise par la source à t_{av} .

Si la physique théorique peut prétendre à une explication réversible pour le temps, le second principe de la thermodynamique, basé sur le principe de l'entropie, exige une irréversibilité

139. Wheeler et Feynman. 1945. « Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation ». Reviews of Modern Physics, volume 17. Page 160.

intrinsèque du temps. En effet, la notion d'écoulement du temps n'a de sens que pour certains systèmes complexes qui évoluent hors de l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire à un niveau macroscopique qui crée une impression d'existence de la « flèche du temps ». Mais à un niveau microscopique associé à l'équilibre thermodynamique, tout se passe comme si le renversement du temps possible rejetait la notion de « flèche du temps ».

Insistons sur la réflexion que suscite la notion de flèche du temps toujours d'actualité, en mentionnant les publications de Ilya Prigogine, prix Nobel de chimie 1977 : *La fin des certitudes* (Editions Odile Jacob : 1996), *Entre le temps et l'éternité* (Flammarion : 1992).

En physique, comme nous venons de le dire, l'entropie stipule une flèche du temps montrant que celui-ci s'écoule toujours dans la même direction, fidèle au principe de causalité.

Alors que penser du paradoxe de la non-causalité associé à la remontée du temps pour l'onde avancée au temps t_{ret} mentionné dans le dessin ci-avant ?

En fait, comme nous pouvons le voir en Annexe 18 (§1), ce paradoxe sera levé par Wheeler et Feynman en bâtissant un modèle mathématique assez subtil.

En attendant, le raisonnement conduit par Wheeler et Feynman passe par une flèche du temps réversible qui contredit ce que l'on est en droit d'attendre pour une bonne théorie.

Cette façon de raisonner se comprend en effectuant une analogie avec les travaux effectués en thermodynamique selon que l'on s'attache à considérer une vue macroscopique ou microscopique des choses.

Pour des vues macroscopiques, domaine de l'observation par excellence, la flèche du temps est non réversible mais la question qui demeure est la suivante : peut-on déduire tout phénomène macroscopique irréversible à partir de descriptions microscopiques plus profondes basées sur une réversibilité du temps ? La réponse est "oui" si l'on considère le point de vue d'Einstein ci-après pour lequel le phénomène macroscopique est une description purement statistique.

En effet, si les études microscopiques des particules prises individuellement, au niveau atomique, sont plutôt basées sur des théories réversibles en temps, globalement la flèche du temps est irréversible.

Exprimons maintenant les idées d'Einstein en analysant l'article qu'il publia début 1909 avec Walter Ritz (1878-1909)¹⁴⁰ concernant le problème de la résistance de rayonnement.

En 1908 et 1909, Einstein et Ritz étaient en effet en désaccord sur ce que nous avons nommé la « flèche du temps » associée à l'électrodynamique et à l'entropie. Pour Einstein, l'électrodynamique est invariante par rapport à l'inversion temporelle car les équations de Maxwell sont symétriques par rapport au temps. Ainsi, l'origine de l'irréversibilité de l'amortissement du rayonnement due à la résistance de rayonnement est contenue dans la nature macroscopique et statistique des systèmes contenant de nombreuses particules chargées. Pour Ritz, l'irréversibilité est la racine de la deuxième loi de la thermodynamique (l'entropie), c'est-à-dire que cette irréversibilité naît d'une asymétrie temporelle de l'électrodynamique elle-même.

Wheeler et Feynman sont en accord complet avec le point de vue d'Einstein : « *However, complete reversibility is assumed here because it is an essential element in a unified theory of action at a distance. I proceeding on the basis symmetrical law of interaction, we shall be*

140. Einstein et Ritz. 1909. «*Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems; On the Current State of the radiation Problem*». *Physikalische Zeitschrift*. Volume 10. Pages 323-324.

testing not only Tetrode's idea of absorberreaction, but also Einstein's view that the one-sidedness of the force of radiative reaction is a purely statistical phenomenon. »¹⁴¹

Ainsi vont suivre successivement en 1941, 1945 et 1949, les publications concernant l'absorbeur associé au mécanisme du rayonnement d'une particule accélérée que nous allons voir ci-après.

3.2.2.c) Les publications de 1941, 1945 et 1949

Les travaux de Wheeler et Feynman présentés à l'American Physical Society le 21 février 1941 font l'objet d'une première publication assez succincte dans la Physical Review.

Wheeler, qui considérait comme très importante la théorie de l'absorbeur, projetait de publier un article assez conséquent. Mais courant 1942, suite à l'entrée en guerre des Etats-Unis, Wheeler rejoignit Fermi à Chicago pour travailler à la conception et à la construction du premier réacteur nucléaire. Quant à Feynman, il se retrouva à Los Alamos afin de participer au Projet Manhattan¹⁴². Ceci explique les publications tardives de 1945 et de 1949.

La publication de 1945 contient 25 pages très détaillées et fait suite à celle du 21 février 1941. La publication de 1949 contient 9 pages concernant une analyse approfondie du concept classique de champ électromagnétique associé au comportement de la matière et de l'énergie ; en reprenant le concept d'action à distance de Schwarzschild, Tétrode et Fokker, Wheeler et Feynman reprennent la question de l'auto-interaction de l'électron : «*It is after all essential in classic field theory to require that a particle act upon itself ?* »¹⁴³

En fait, après tout ce travail, Feynman avoue : « *..., je n'ai jamais résolu le problème des potentiels semi-avancés, semi-retardés en théorie quantique, bien que j'y aie travaillé pendant des années.* »¹⁴⁴

Bien plus, en mai 1951, mentionnant le déplacement de Lamb principalement dû à l'auto-énergie de l'électron, Feynman ira jusqu'à écrire à Wheeler au sujet de leur vieille théorie de l'action à distance : « *... there is the Lamb shift in hydrogen which is supposedly due to the self-action of the electron. So I think we guessed wrong in 1941. Do you agree?* »¹⁴⁵

Ces trois publications se trouvent en Annexe 18.

De ces trois publications, nous pouvons constater qu'en allant plus loin que Fokker, Wheeler et Feynman ont montré que dans le cas de particules chargées en interaction, le principe de moindre action est respecté lorsque la ligne d'univers des particules ainsi que les potentiels vecteur et scalaire du champ électromagnétique, répondent à des équations qui sont la transposition des équations de l'électrodynamique classique dans l'espace-temps.

En d'autres termes, le principe de moindre action appliqué à l'action de Fokker, décrit l'interaction entre les particules chargées en mouvement sur leur ligne d'univers. Et ceci de façon identique au principe de moindre action appliqué à l'action d'une particule chargée en

141. Wheeler et Feynman. 1945. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». Reviews of Modern Physics. Volume 17. Page 160.

142. Schweber « *Feynman and the visualisation of space-time processes* ».

143. Wheeler et Feynman. 1949. « *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action* ». Reviews of Modern Physics. Volume 21. Page 425.

144. Feynman. « *Vous voulez rire, Monsieur Feynman* ». Traduction Françoise Balibar et Claude Guthmann. Page 82.

145. Feynman. « *Lettre de Feynman à Wheeler du 4 mai 1951* ». Feynman Papers. Caltech, folder 3.10.

146. Wheeler et Feynman. 21 Février 1941. « *Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping* ». Physical Review, volume 59. Page 683.

interaction avec le champ électromagnétique tel que nous pouvons le voir avec Schwarzschild en Annexe 15 §2.

Wheeler et Feynman ont donc combiné les idées antérieures s'appliquant aux concepts d'absorbeur et de potentiel avancé en montrant que les théories de l'action à distance et du champ électromagnétique ne sont en fait que les deux aspects d'une théorie identique.

Dans sa conférence Nobel¹⁸⁴, Feynman insiste sur la belle allure et la simplicité de l'expression A , en précisant que pour le débutant qu'il était dans les années 1940, cette formule ne pouvait qu'être vraie.

En effet, l'expression A contient toute l'électrodynamique classique¹⁸⁵. Cette formule fournit automatiquement des potentiels mi-avancés mi-retardés, sans avoir besoin de champ électromagnétique remplissant tout l'espace. De plus, elle supprime les termes de la somme associés à $i = j$, éliminant de fait l'auto-interaction.

La réflexion de Feynman sur son expérience acquise lors de ses travaux sur la théorie de l'absorbeur, en vue de résoudre le problème de l'auto-énergie infinie de l'électron, est assez révélatrice : « *En résumé, après ce travail, j'avais, en tant que physicien, fait deux acquisitions. D'une part, je connaissais diverses façons de formuler l'électrodynamique classique, sous plusieurs formes mathématiques différentes. D'autre part, j'avais acquis un point de vue général, le point de vue global de l'espace-temps, et un certain dédain pour la méthode hamiltonienne de description du monde physique.* »

Ainsi prend naissance chez Feynman une volonté d'approfondir les formalismes mathématiques, notamment en mécanique quantique, qui le conduiront à la création de son concept d'« *intégrales de chemin* » qui constitue l'entrée en matière de la section suivante.

3.2.3- Vers la découverte de l'intégrale de chemin : chronologie

3.2.3.a) La volonté de quantifier l'action

Le 21 février 1941, Feynman et son directeur de thèse Wheeler publient : « *Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping* ». Physical Review, volume 59. Page 683.

Feynman et son directeur de thèse Wheeler postulent qu'aucune source située dans un univers donné ne saurait rayonner sans matière absorbante située dans sa périphérie. C'est justement la matière absorbante, excitée, qui communique en retour le champ électromagnétique à la « charge source » accélérée et ceci indépendamment des propriétés de la matière.

Ils arrivent à l'expression de l'action A suivante (voir détail en Annexe 18 §3) :

184. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 246.

185. Ibid. Page 246.

$$A = \sum_i m_i \int (\dot{X}_\mu^i)^2 d\alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} e_i e_j \iint \delta(I_{ij}^2) \dot{X}_\mu^i(\alpha_i) \dot{X}_\mu^j(\alpha_j) d\alpha_i d\alpha_j,$$

liée aux interactions directes entre particules, rendant inutile la formulation des champs électromagnétiques environnants ainsi que la prise en compte de l'auto-interaction de l'électron.

L'électrodynamique quantique, dans les années 1940, se trouvait en proie à des problèmes insurmontables dus à des énergies infinies en partie compte-tenu de l'interaction de l'électron avec lui-même et de l'infinité des degrés de liberté du champ électromagnétique.

Et c'est justement dans le but de trouver une théorie de l'électrodynamique quantique débarrassée de tous les problèmes d'infinis, que Feynman va s'obstiner à vouloir à tout prix obtenir une version quantique de la théorie de l'action à distance formulée en utilisant pour moitié des solutions avancées et pour moitié des solutions retardées des équations de Maxwell. Et cette réussite passe par la quantification de l'action telle que présentée dans l'expression A :

« J'étais convaincu maintenant que, puisque nous avons résolu le problème de l'électrodynamique classique (et en complet accord avec mon programme du MIT, à l'aide d'interactions directes entre particules, d'une façon qui rendait inutile les champs), tout irait bien dorénavant. J'étais convaincu qu'il me suffisait de fabriquer une théorie quantique analogue à cette théorie classique et que tous les problèmes seraient résolus.

Le problème était donc seulement de faire cette théorie quantique ayant comme analogue classique l'expression A. » (Feynman. « L'électrodynamique quantique et l'espace-temps ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 253.)

3.2.3.b) Feynman butte sur la quantification de l'action

En Annexe 19 nous définissons le formalisme Hamiltonien de la mécanique classique, l'opérateur Hamiltonien et la formulation de l'action en mécanique quantique.

Nanti des connaissances et des savoir-faires exprimés en Annexe 19, Feynman butte sur la façon de procéder à la quantification de son équation A de l'action pour une double raison :

* d'une part, ainsi que Feynman l'a mentionné (voir Annexe 19 §3), il n'y a aucune possibilité de former un Hamiltonien à partir du Lagrangien, du fait que ce dernier (l'expression sous l'intégrale double du second terme de A) contient des variables de position à des temps différents puisque les interactions entre particules ne sont pas instantanées. En effet, on ne peut former un Hamiltonien à partir du Lagrangien seulement si l'intégrale du Lagrangien se calcule pour des vitesses et des positions au même instant¹⁹⁰,

* d'autre part, dans les expressions menant à l'équation A de l'action, il n'y a aucune variables du moment (momentum variables : l'impulsion ou quantité de mouvement) qui peut être remplacée par $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}$. En effet, dans la théorie de l'absorbéur de Wheeler et Feynman, basé sur

un point de vue global de l'espace-temps, cette variable de moment n'existe tout simplement pas : « ... je ne pouvais trouver une variable de moment, puisqu'il n'y en avait pas ! »¹⁹¹

3.2.3.c) La solution passe par Dirac

190. Feynman. « L'électrodynamique quantique et l'espace-temps ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Pages 253 et 254.

191. Ibid. Page 253.

Le seul choix possible pour Feynman d'arriver à ses fins était de trouver comment quantifier l'expression A de l'action, c'est-à-dire d'enrichir cette équation en introduisant le quantum d'action h de Planck.

Cette recherche de solution devait certainement l'accaparer à tout instant puisqu'il en parla au physicien allemand Herbert Jehle lors d'une fête de la bière à la Taverne de Nassau à Princeton. Demandant à Jehle s'il connaissait une façon de faire de la mécanique quantique à partir de l'action, c'est-à-dire de faire intervenir l'intégrale d'action en théorie quantique, il s'entendit répondre qu'il existait un papier de Dirac qui traitait de cette question.^{191 bis}

3.2.3.d) Le papier de Dirac

La publication de Dirac de 1933 («*The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics*») ayant été le point de départ de Feynman dans la concrétisation de son intégrale de chemins, représente une valeur historique certaine.

Dans cet article de 1933, les équations de départ constituant le pivot de toute sa démonstration, sont issues du paragraphe V intitulé «*La théorie des transformations*» contenu dans la première édition de sa publication de 1930.

Le formalisme de représentation des états quantiques et des observables ne se présente pas encore sous la forme des $\langle bra|$ et des $|ket\rangle$ pour la bonne raison que ce formalisme a été introduit par Dirac en 1939.

Dirac adopte donc la convention d'écriture qui est celle contenue dans la première édition de sa publication de 1930.

Dans sa publication de 1933, Dirac manipule des concepts mathématiques sans trop de commentaires mais cependant il ne cède en rien à toute la rigueur du raisonnement qui est le sien. Par contre, dans la troisième édition de sa publication en 1947, il reprend au paragraphe 32 «*The action principle*» de manière beaucoup plus explicite en introduisant évidemment cette fois les notations de $\langle bra|$ et de $|ket\rangle$.

Expliquons le contenu de l'article de 1933. Dirac commence par mentionner que le formalisme de la dynamique classique obtenue à partir du lagrangien est plus fondamental que celui de la théorie hamiltonienne :

* d'une part parce que la méthode lagrangienne permet de regrouper toutes les équations du mouvement et de les exprimer comme une propriété de l'action, qui est justement l'intégrale temporelle du lagrangien,

* d'autre part parce que l'approche lagrangienne s'exprime facilement dans un formalisme relativiste en tenant compte du fait que l'action est un invariant relativiste.

Il devient donc plus commode pour Dirac de déterminer par rapport au formalisme lagrangien ce qui lui correspond en mécanique quantique : «*Nous devons obtenir notre théorie lagrangienne quantique de manière indirecte. Nous devons nous efforcer de dépasser les idées de la théorie lagrangienne classique mais non les équations de cette même théorie.*»^{191 ter}

Rappelant que la théorie de Lagrange est reliée de près à la théorie des transformations de contact, Dirac commence par une réflexion sur l'éventuelle analogie entre les transformations de contact classiques et quantiques. Pour cela, il suppose deux ensembles de coordonnées

191 bis. Ibid. Page 254.

191 ter. Dirac. «*Le Lagrangien en mécanique quantique*». 1933. Traduction Emile Biémont. Page 107.

spatiales ayant pour variables (p_r, q_r) et (P_r, Q_r) avec r de 1 à n et de plus que ces variables q et Q sont toutes indépendantes :

* dans la théorie classique, les équations de transformation de contact correspondant aux deux hypothèses précédentes sont représentées par :

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r} \quad \text{et} \quad P_r = - \frac{\partial S}{\partial Q_r} ,$$

dans lesquelles S est évidemment une fonction dépendant des q et des Q ,

* dans la théorie quantique rien n'empêche d'adopter une représentation dans laquelle les q sont diagonales et une seconde représentation dans laquelle les Q sont également diagonales,

* il existera alors une fonction de transformation $(q|Q')$ reliant les deux représentations ci-avant dont il convient de démontrer qu'elle est l'analogue quantique de $e^{iS/\hbar}$.

Posant, au cours de sa démonstration, $(q|Q') = e^{iU/\hbar}$, où U est une nouvelle fonction des q' et des Q' , Dirac arrive aux deux équations suivantes :

$$p_r = \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad \text{et} \quad P_r = - \frac{\partial U}{\partial Q_r} ,$$

montrant que U est l'analogue de la fonction classique S définissant l'action par l'intégrale suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q} = \frac{q_{t2} - q_{t1}}{dt}, t) dt$$

associée à un chemin (ou trajectoire) $q(t)$ d'une particule de t_1 à t_2 .

Dirac poursuit donc en mentionnant que pour une fonction de transformation de contact $(q_t|q_T)$ reliant les deux représentations classiques et quantiques, le développement précédent établit que $(q_t|q_T)$, représentant la coordonnée q_T initiale à l'instant T et la coordonnée finale q_t à l'instant t de la particule, il correspond l'expression suivante :

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] = \exp\left[i \int_T^t \frac{L dt}{\hbar}\right] \quad (8)$$

où L est le lagrangien.

Dirac mentionne ensuite le résultat évident : « Si nous supposons que T diffère seulement infiniment peu de t , nous obtenons le résultat $(q_{t+dt}|q_t)$ correspondant à : »

$$\exp\left[i \frac{L dt}{\hbar}\right] . \quad (9)$$

Et d'ajouter:

« Les fonctions de transformation, dans (8) et (9), sont vraiment fondamentales dans la théorie quantique et il est satisfaisant de constater qu'elles ont leurs analogues classiques simplement exprimables en fonction du lagrangien. Nous obtenons ici l'extension naturelle du résultat bien

connu que la phase de la fonction d'onde correspond à la fonction du principe de Hamilton en théorie classique. L'analogie (9) suggère que nous devrions considérer le lagrangien non pas comme une fonction des coordonnées et des vitesses mais plutôt comme une fonction des coordonnées au temps t et des coordonnées au temps $t+dt$. »^{191 quater}

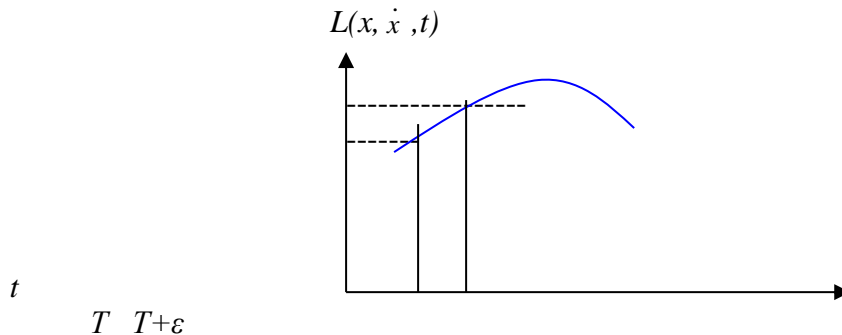
En effet, pour $T + dt = T + \varepsilon \cong T$, c'est-à-dire un échantillonnage (ou découpage) très serré sur l'échelle des temps, le graphe suivant montre que pour ε infinitésimal, Dirac suggère que les grandeurs x et \dot{x} intervenant dans L à l'instant $T + \varepsilon$ sont des constantes pour un échantillon de temps ε considéré le long de la courbe $L(x, \dot{x}, t)$, et donc que le lagrangien L est une fonction du temps uniquement. Aussi, il écrit :

$$\int_T^{T+\varepsilon} L dt \cong L \varepsilon$$

c'est-à-dire:

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_T^t L dt\right] = \exp\left[i \frac{L dt}{\hbar}\right] = \exp\left[i \frac{L \varepsilon}{\hbar}\right],$$

symbolisé par le dessin suivant:



dont :

* S est l'action classique associée aux coordonnées d'espace q_T à q_t ,

* $\int_{q_T}^{q_t} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] dq$ exprime la future intégrale de chemins dont l'intégration sur la fonction

$q(\text{temps})$ symbolisée par l'espace dq s'appelle une intégrale fonctionnelle.

La suggestion de Dirac de la non considération de la variation de \dot{x} (donc aussi de x) est plausible dans le sens où si cette variation avait lieu alors on devrait considérer pour $\varepsilon \rightarrow 0$, une variation $\dot{x} \rightarrow \infty$ ce qui n'est pas plausible compte-tenu du postulat d'Einstein sur la vitesse limite de la lumière elle-même.

191 quater. Dirac. « *Le Lagrangien en mécanique quantique* ». 1933. Traduction Emile Biémont. Page 107.

Ensuite Dirac divise l'intervalle de temps $T \rightarrow t$ en un grand nombre de petites portions $T \rightarrow t_1$, $t_1 \rightarrow t_2$, ... $t_{m-1} \rightarrow t_m$, $t_m \rightarrow t$ par l'introduction d'une séquence de temps intermédiaire t_1, t_2, \dots, t_m .

L'application de l'équation de Chapman-Kolmogorov une première fois nous permet d'obtenir :

$$(q_t|q_T) = \int (q_t|q_1) dq_1 (q_1|q_T)$$

Puis une application répétée de l'équation ci-avant nous permet d'écrire l'équation de la théorie quantique suivante :

$$(q_t|q_T) = \int (q_t|q_m) dq_m (q_m|q_{m-1}) dq_{m-1} \dots (q_2|q_1) dq_1 (q_1|q_T) . \quad (11)$$

Et Dirac de conclure : « *L'équation (11) contient l'analogue quantique du principe d'action, ainsi que cela apparaît plus explicitement à partir de l'argument suivant. De l'équation (11), nous pouvons déduire la conclusion (plutôt triviale) selon laquelle, si nous choisissons des valeurs déterminées pour q_T et q_t , alors la nécessité de considérer n'importe quel ensemble pour les coordonnées q intermédiaires est déterminée par l'importance de cet ensemble de valeurs dans l'intégration du membre de droite de (11). Si h tend vers zéro, cette affirmation se transforme dans l'assertion classique selon laquelle, si nous adoptons des valeurs spécifiques pour q_T et q_t , alors l'importance de considérer n'importe quel ensemble de valeurs pour les q intermédiaires est nulle à moins que ces valeurs ne rendent la fonction d'action stationnaire. Cette affirmation est une manière de formuler le principe d'action classique »^{191 cinq}*

Il nous paraît intéressant d'aborder d'un point de vue épistémologique le concept associé à l'expression $\exp[\frac{i}{\hbar} S]$. Nous avons pour cela créé l'Annexe 17.

3.2.3.e) L'interprétation par Feynman du papier de Dirac

Dirac mentionnait que si dt est infiniment petit (pour la particule en mouvement entre la coordonnée initiale (x,t) et la coordonnée finale (x,t') traduisant le chemin suivi), on obtient le résultat :

$$(q_{t+dt}|q_t)$$

191 cinq. Ibid. Page 107.

191 six. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 255.

appelé noyau $K(q_{t+dt}, q_t)$ par Feynman dans sa conférence Nobel (dénommé aussi propagateur de façon moderne) et que Dirac qualifie d'analogue à :

$$\exp \left[i \frac{L dt}{\hbar} \right] = \exp \frac{i dt}{\hbar} L \left(q, \dot{q} = \frac{q_{t+dt} - q_t}{dt} \right),$$

associé au chemin (ou trajectoire) $q(t)$ de la particule de t à $t+dt$, et qui est la même chose que $\exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$ dans la cas où S est intégrée sur un chemin de t à $t+\varepsilon$ avec ε infiniment petit.

Ce que Feynman traduit en 1965 dans sa conférence Nobel¹⁹¹ six, en rappelant Dirac et en simplifiant volontairement l'espace à une seule dimension spatiale $q_r = x$:

« ... il existe en théorie quantique une entité très importante qui effectue la transformation de la fonction d'onde d'un instant à un autre, par delà l'équation différentielle, tout en lui étant équivalente. Ce noyau comme on l'appelle, noté $K(x', x)$, change la fonction d'onde $\Psi(x)$ connue au temps t en la fonction d'onde $\Psi(x')$ au temps $t+\varepsilon$. Dirac montrait que cette fonction K est analogue à la quantité que vous obtiendriez en mécanique classique en calculant l'exponentielle du Lagrangien $L(\dot{x}, x)$ multiplié par $i\varepsilon$ – en supposant que les deux positions x et x' correspondent aux instants t et $t + \varepsilon$. En d'autres termes :

$$K(x', x) \text{ est } \underline{\text{analogue}} \text{ à } \exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L \left(\frac{x' - x}{\varepsilon}, x \right) \right].$$

On reconnaît par rapport au papier de Dirac :

$$* \varepsilon = dt,$$

* $L \left(\frac{x' - x}{\varepsilon}, x \right) = L \left(q, \dot{q} = \frac{q_{t+dt} - q}{dt} \right)$, car Feynman par mesure de simplicité considère un espace à une seule dimension spatiale selon l'axe des x .

Feynman, se demande ce que Dirac veut dire par le mot « analogue », entre :

$$K(x', x) \text{ et } \exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L \left(\frac{x' - x}{\varepsilon}, x \right) \right],$$

car pour lui ce mot est insupportable en mathématique ; il manque de rigueur et ne définit rien. Pour Feynman ce mot doit revêtir une notion de proportionnalité que n'a pas vu Dirac. Et sa formation très poussée en mathématique lui fait immédiatement, à l'instar d'une fonction de Green, égaliser ses deux expressions afin de voir ce qui se passe.

Pour cela, fidèle à son pragmatisme en physique, il prend l'exemple le plus simple qui consiste à étudier le mouvement d'une particule de masse m , non relativiste, dans un potentiel électrique $V(x)$; et pour simplifier, il considère l'espace à une seule dimension selon l'axe des x . Dans un tel cas, le Lagrangien s'écrit :

$$L(x, \dot{x}) = E_c - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

L'action pour la particule classique entre les points de coordonnées x au temps t et x' au temps t' , c'est-à-dire dans un intervalle de temps égal $\varepsilon = t' - t$ s'écrit :

$$S = \int_t^{t'} L(x, \dot{x}) dt = \int_t^{t'} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt - \int_t^{t'} V(x) dt = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 [t]_t^{t'} - V(x) [t]_t^{t'} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \varepsilon - V(x)$$

ε ,

c'est-à-dire :

$$S(x', x) = \varepsilon \left[\frac{m(x'-x)^2}{2\varepsilon^2} - V\left(\frac{x'+x}{2}\right) \right] = \varepsilon L$$

avec comme nous l'avons vu plus avant, pour ε infiniment petit :

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L dt \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^\varepsilon L dt \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \varepsilon L \right].$$

D'après la définition du noyau $K(x', x)$ (appelé aussi propagateur ou opérateur de Green) telle que mentionnée par Feynman, on peut écrire :

$$\Psi(x', t') = K(x', x) \Psi(x, t),$$

avec :

- * $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde connue au point x, t (associée à la présence de la particule au point x à l'instant t),
- * $\Psi(x', t')$ la fonction d'onde connue au point $x', t' = t + \varepsilon$ (associée à la présence de la particule au point x' à l'instant t').

Feynman va donc de manière hypothétique, effectuer strictement l'égalité entre :

$$\text{le noyau } K(x', x) \text{ et son analogue } \exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x'-x}{\varepsilon}, x\right) \right].$$

Pour être plus précis et retomber sur l'équation de la fonction d'onde $\Psi(x', t')$ à partir de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ tel que $t' > t$, donnée par Feynman dans sa conférence Nobel, nous devons considérer :

- * la condition initiale pour la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ à un instant initial t fixé,
- * la fonction d'onde $\Psi(x', t')$ solution de l'équation de Schrödinger à un instant ultérieur $t' > t$,
- * l'aspect mathématique relié à l'espace de Hilbert des fonctions d'onde concernant la relation de fermeture (expression donnant l'opérateur identité à partir d'une base orthonormée) et plus spécialement la relation de fermeture avec les notations $|ket\rangle$ et $\langle bra|$ de Dirac,

on montre facilement que :

$$\Psi(x', t') = \int K(x', t' | x, t) \Psi(x, t) dx.$$

Feynman a donc utilisé l'expression précédente en ajustant correctement une constante de normalisation C et en remplaçant tout simplement $K(x', t' | x, t)$ par $\exp [\frac{i\varepsilon}{\hbar} L(\frac{x'-x}{\varepsilon}, x)]$.

Il obtient ainsi l'équation intégrale suivante :^{191 six.1}

$$\Psi(x', t'=t+\varepsilon) = \int C \exp [\frac{i\varepsilon}{\hbar} L(\frac{x'-x}{\varepsilon}, x)] \Psi(x, t) dx. \quad (3)$$

dont l'expression $\int C \exp [\frac{i\varepsilon}{\hbar} L(\frac{x'-x}{\varepsilon}, x)] dx$ exprime en filigrane la future intégrale de chemins dont l'intégration sur la fonction $x(t)$ symbolisée par l'espace dx s'appelle une intégrale fonctionnelle.

Il est intéressant de relever la part d'intuition issue de la connaissance profonde des phénomènes physiques qui a permis très rapidement à Feynman d'égaliser le noyau $K(x_{i+1}, x_i)$ à l'entité $\exp [\frac{i}{\hbar} S]$ dans l'équation d'onde $\Psi(x_{i+1}, t_{i+1})$.

Pour cela nous pouvons supposer l'opérateur H indépendant du temps compte-tenu du principe que l'énergie du système considéré est conservative, et écrire la solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t)$$

aux instants ultérieurs à un instant initial t_0 , de la manière suivante :

$$\Psi(t) = \exp [-\frac{iH}{\hbar} t]. \exp [\frac{iH}{\hbar} t_0]. \Psi(t_0),$$

soit :

$$\Psi(t_0+\varepsilon) = \exp [-\frac{iH}{\hbar} (t_0+\varepsilon)]. \exp [\frac{iH}{\hbar} t_0]. \Psi(t_0),$$

$$\Psi(t_0+\varepsilon) = \exp [-\frac{iH}{\hbar} \varepsilon]. \Psi(t_0).$$

En comparant l'équation de la fonction d'onde précédente :

$$\Psi(t_0+\varepsilon) = \exp [-\frac{iH}{\hbar} \varepsilon]. \Psi(t_0),$$

à l'équation classique de la fonction d'onde connue en 1942 telle que :

$$\Psi(x', t') = \int K(x', t' | x, t) . \Psi(x, t) dx,$$

on peut imaginer Feynman en 1942 (dans son calcul rapide en compagnie de Jehle à la bibliothèque de Princeton), remplaçant carrément $K(x', t' | x, t)$ par $\exp [\frac{i\varepsilon}{\hbar} L]$, l'entité avancée

^{191 six.1} Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 256.

par Dirac (1933) pour assurer la quantification du lagrangien en mécanique quantique, par analogie entre les termes :

$$\exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L \right] \text{ et } \exp \left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar} H \right]$$

du fait que $L = -H + mv^2$ et que pour ε infinitésimal, on puisse ne pas tenir compte de la variation de v .

En effet, dans sa publication d'avril 1948, Feynman ne mentionne-t-il pas :

« Par conséquent

$$\Psi(x_1, t_1=t_0+\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x_1, x_0)\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0,$$

exprime l'opérateur $\exp \left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar} H \right]$ par un opérateur intégral approximatif pour de petits ε ». ^{191 sept}

3.2.3.f) Feynman retrouve l'équation de Schrödinger

Les développements qui suivent sont ceux de Feynman se trouvant page 78 à 80 de sa publication « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste.* » traduite en français par Emile Biémont.

Pour le chemin parcouru par la particule de t à $t+\varepsilon$, Feynman considère, comme suggéré par Dirac, ε infiniment petit et utilise donc l'expression :

$$\exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L(x, \dot{x}) \right],$$

au lieu de:

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(x, \dot{x}) dt \right],$$

car comme nous l'avons vu plus avant, le fait de considérer ε infiniment petit permet d'assimiler la vitesse de la particule et le potentiel électrique auquel elle est soumise à des constantes et de les sortir de l'intégrale d'action.

Avec l'expression obtenue plus haut :

191 sept. FEYNMAN Richard (Avril 1948). *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste.* Review of Modern Physics, volume 20, 367. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007). Page 83.

$$L = \left[\frac{m(x'-x)^2}{2\varepsilon^2} - V\left(\frac{x'+x}{2}\right) \right],$$

Feynman obtient l'entité suivante :

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[\frac{m(x'-x)^2}{2\varepsilon^2} - V\left(\frac{x'+x}{2}\right) \right] \right\},$$

qu'il va égaliser avec le noyau $K(x',x)$.

Dans l'équation de la fonction d'onde (3) définie plus haut, Feynman injecte l'expression de L ci-avant pour obtenir :

$$\Psi(x',t'=t+\varepsilon) = \int C \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[\frac{m(x'-x)^2}{2\varepsilon^2} - V\left(\frac{x'+x}{2}\right) \right] \right\} \Psi(x,t) dx,$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(x',t'=t+\varepsilon) = \int C \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m(x'-x)^2}{2\varepsilon} - \varepsilon V\left(\frac{x'+x}{2}\right) \right] \right\} \Psi(x,t) dx.$$

En posant :

$$(x'-x) = \zeta \quad \text{et} \quad \left(\frac{x'+x}{2}\right) \cong x'$$

Feynman obtient :

$$\Psi(x',t'=t+\varepsilon) = \int C \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar} \right] \exp \left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar} \right] \cdot \Psi(x'-\zeta, t) d\zeta.$$

Ne gardant dans l'intégrale sur $d\zeta$ que les fonctions de la variable ξ , Feynman écrit :

$$\Psi(x',t'=t+\varepsilon) = \exp \left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar} \right] \int C \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar} \right] \cdot \Psi(x'-\zeta, t) d\zeta.$$

Le développement en série de Taylor de $\Psi(x'-\zeta, t)$ sur $(x'-\zeta)$ donne :

$$\Psi(x'-\zeta, t) = \Psi(x',t) - \zeta \frac{\partial \Psi(x',t)}{\partial x'} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x',t)}{\partial x'^2} + \dots$$

En injectant ce résultat dans l'intégrale précédente, on peut écrire :

$$\Psi(x',t'=t+\varepsilon) = \exp \left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar} \right] \int \left\{ C \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar} \right] \cdot \left[\Psi(x',t) - \zeta \frac{\partial \Psi(x',t)}{\partial x'} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x',t)}{\partial x'^2} + \dots \right] \right\} d\zeta,$$

soit :

$$\begin{aligned} \Psi(x',t'=t+\varepsilon) &= C \Psi(x',t) \exp \left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar} \right] \int \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar} \right] \cdot d\zeta \\ &\quad - C \frac{\partial \Psi(x',t)}{\partial x'} \exp \left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar} \right] \int \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar} \right] \cdot \zeta \cdot d\zeta \\ &\quad + \frac{C}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x',t)}{\partial x'^2} \exp \left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar} \right] \int \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar} \right] \cdot \zeta^2 \cdot d\zeta \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Nous reconnaissons respectivement les trois intégrales gaussiennes suivantes :

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x^2). dx = \left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^{1/2}$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x^2). x . dx = 0$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x^2). x^2 . dx = \left(\frac{i}{2\lambda}\right) \left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^{1/2},$$

c'est-à-dire:

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\frac{m}{2\varepsilon\hbar}\xi^2\right) . d\xi = \left[\frac{\pi}{\left(\frac{m}{2\varepsilon\hbar}\right)}\right]^{1/2} = \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2},$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\frac{m}{2\varepsilon\hbar}\xi^2\right) . \xi . d\xi = 0,$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\frac{m}{2\varepsilon\hbar}\xi^2\right) . \xi^2 . d\xi = \left(\frac{i}{2m}\right) \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} = \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{m}\right) \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2}.$$

Feynman obtient donc :

$$\begin{aligned} \Psi(x', t' = t + \varepsilon) &= C \Psi(x', t) \exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar}\right] . \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \\ &+ \frac{C}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x', t)}{\partial x'^2} \exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x')}{\hbar}\right] . \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{m}\right) \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

En utilisant de la même façon que Feynman les notations :

$$x' = x_{k+1} = x \quad \text{et} \quad x_{k+1} - x_k = \zeta, \quad \text{de sorte que} \quad x_k = x_{k+1} - \zeta = x - \zeta,$$

et en posant $C = 1/A$ (à ne pas confondre avec l'action A que l'on trouve en Annexe 18 §3), l'équation de la fonction d'onde précédente devient :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t + \varepsilon) &= \frac{1}{A} \Psi(x, t) \exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] . \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \\ &+ \frac{1}{2A} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] . \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{m}\right) \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

En effectuant le développement limité au premier ordre en ε de $\exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right]$, Feynman obtient :

$$\exp\left[\frac{-i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] = \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x)\right].$$

En injectant ce développement limité dans l'équation de la fonction d'onde précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Psi(x, t+\varepsilon) &= \frac{1}{A} \Psi(x, t) \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \\ &+ \frac{1}{2A} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{m}\right) \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \\ &+ \dots\end{aligned}$$

soit :

$$\Psi(x, t+\varepsilon) = \frac{1}{A} \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \left\{ \Psi(x, t) + \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{2m}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right\}.$$

Puis Feynman développe en série de Taylor sur $(t+\varepsilon)$ le membre de gauche au premier ordre en ε :

$$\Psi(x, t+\varepsilon) = \Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t},$$

qu'il injecte dans l'équation de la fonction d'onde pour obtenir :

$$\Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{A} \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \left\{ \Psi(x, t) + \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{2m}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right\}.$$

Ensuite Feynman identifie les termes d'ordre 0 et 1 en ε . Remarquons que pour obtenir une expression de la fonction d'onde valable jusqu'au premier ordre en ε , il a fallu pour Feynman développer en série de Taylor la fonction $\Psi(x' - \xi, t)$ sur $(x' - \xi)$ jusqu'au deuxième ordre en ξ .

* Identification des termes d'ordre 0 en ε :

« Pour que les deux membres soient égaux à l'ordre zéro par rapport à ε , nous devons poser : »

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{A} \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \Psi(x, t),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{A} \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} = 1,$$

soit :

$$A = \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2}$$

* Identification des termes d'ordre 1 en ε :

Soit :

$$\Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{A} \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right]^{1/2} \left\{ \Psi(x, t) + \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{2m}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right\}.$$

Injectons dans cette expression la valeur de A trouvée précédemment, pour obtenir :

$$\Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right]^{1/2} \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{M}\right]^{1/2} \left\{ \Psi(x, t) + \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{2m}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \right\}.$$

D'où :

$$\Psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right] \left\{ \Psi(x, t) + \left(\frac{\hbar\varepsilon i}{2m}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \right\}.$$

Développons cette équation afin de comprendre le cheminement de Feynman dans sa façon concrète de manier les expressions algébriques pour arriver à ses fins :

Nous obtenons :

$$\Psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \Psi(x,t) + \left(\frac{\hbar \varepsilon i}{2m} \right) \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{i \varepsilon}{\hbar} V(x) \Psi(x,t) - i^2 \varepsilon^2 \hbar \frac{V(x)}{\hbar 2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Mais laissons Feynman s'exprimer à travers ses écrits :

« Si l'on supprime $\Psi(x,t)$ des deux membres de l'équation (précédente) et si l'on compare les termes du premier ordre en ε , on obtient en multipliant par $-\frac{\hbar}{i}$: »

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\hbar \varepsilon i}{2m} \right) \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{i \varepsilon}{\hbar} V(x) \Psi(x,t) \\ \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\hbar i}{2m} \right) \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x) \Psi(x,t) \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= -\left(\frac{\hbar^2 i}{i 2m} \right) \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{i \hbar}{\hbar i} V(x) \Psi(x,t) \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2m} (-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}) + V(x) \Psi(x,t) \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{i^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \right) + V(x) \Psi(x,t) \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi(x,t) + V(x) \Psi(x,t), \end{aligned}$$

qui est l'équation de Schrödinger temporelle obtenue par Feynman pour le problème qu'il se pose concernant le mouvement d'une particule de masse m non relativiste, placée dans un potentiel électrique $V(x)$.

Cette expression peut s'écrire aussi, en multipliant ses deux membres par $-i^2$ (qui est en fait égal à $+1$ puisque $i^2 = -1$), d'où :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t),$$

c'est-à-dire :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi(x,t),$$

qui est l'équation de Schrödinger.

Feynman pressent alors avoir fait une découverte importante en se demandant comment Dirac ait pu passer à côté :

« Ainsi, je croyais avoir trouvé ce que Dirac voulait dire, mais, en fait, j'avais découvert que ce qu'il pensait être une analogie était en réalité une égalité. J'avais, enfin, une relation entre le Lagrangien et la théorie quantique, mais toujours en termes de fonctions d'onde et d'intervalles de temps infinitésimaux. »²¹²

212. Feynman. « L'électrodynamique quantique et l'espace-temps ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 256.

En réfléchissant un peu plus, Feynman imagina ce qui se passerait s'il voulait calculer la fonction d'onde après un intervalle de temps fini, associé à un grand nombre d'intégrales, à la suite l'une de l'autre.²¹³

Ceci le conduisit plus tard, comme nous allons le voir au chapitre 4, à l'idée d'amplitudes associées à un chemin :

« ... pour chaque chemin possible que la particule pourrait suivre d'un point de l'espace-temps à un autre, il y a une amplitude donnée par l'exponentielle de l'action le long de ce chemin, multiplié par i / \hbar . Les amplitudes des divers chemins se superposent par addition. C'est donc là une autre façon encore, une troisième, de décrire la mécanique quantique, qui semble tout à fait différente de celles de Schrödinger ou Heisenberg, mais leur est équivalente. »²⁵⁷

Ainsi prend naissance chez Feynman l'idée du concept des intégrales de chemin qui constitue l'objet du chapitre 4 suivant.

3.3- Références

- 1- BLACKETT Patrick (1948). Cloud Chamber Researches in Nuclear Physics and Cosmic Radiation. Nobel Lecture.
- 2- BREIT Gregory & WHEELER John (15 Décembre 1934). Collision of two Light Quanta. Physical Review, Volume 46, page 1087.
- 3- DARRIGOL Olivier (1982). Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948). Thèse de doctorat (Université Paris I : Panthéon-Sorbonne).
- 4- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la Première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay.
- 5- DIRAC Paul (1933). Le lagrangien en mécanique quantique. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- 6- DIRAC Paul (1933). The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics (St John's College, Cambridge, paper 26, publication 1933, received November 19, 1932).
- 7- DIRAC Paul (1935). The Principles of Quantum Mechanics. Second Edition , Oxford University Press.
- 8- DIRAC Paul (1938). La Théorie de Dirac. Proceedings of the Royal Society of London. Volume 167, p. 148.
- 9- DIRAC Paul (1947). The Principles of Quantum Mechanics. Third Edition, Oxford University Press.
- 10- EINSTEIN Albert & RITZ Walter (1909). Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems; On the Current State of the radiation Problem. Physikalische Zeitschrift. Volume 10. Pages 323-324.
- 11- EINSTEIN Albert (1952). Conceptions scientifiques, morales et sociales. Traduction de Maurice Solovine. Flammarion.
- 12- FEYNMAN Richard (Début 1941). The Interaction Theory of Radiation . Feynman Papers, Caltech, folder 6.1. Page 462.

213. Ibid.

257. Ibid. Page 257.

- 13- FEYNMAN Richard (Thesis 1942). Principles of least action in quantum mechanics. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy.
- 14- FEYNMAN Richard (1942). Le principe de moindre action en mécanique quantique . Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education France. 2007.
- 15- FEYNMAN Richard (Lettres 1939-1987). Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ? Traduction : Christian Jeanmougin. Dunod (2006).
- 16- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste. Review of Modern Physics, volume 20, 367. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- 17- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. Review of Modern Physics, volume 20, 367.
- 18- FEYNMAN Richard (September 15, 1949). Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. Physical Review. Volume 76, 769.
- 19- FEYNMAN Richard (4 mai 1951). Lettre de Feynman à Wheeler. Feynman Papers. Caltech, folder 3.10.
- 20- FEYNMAN Richard (1963). Le cours de physique : électromagnétisme 1. Traduction A. Crémieux et M.-L. Duboin. Dunod (2009).
- 21- FEYNMAN Richard (December 11, 1965). The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics. Nobel Lecture.
- 22- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « The development of the space-time view of quantum electrodynamics » : Nobelprize.org.
- 23- FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1985). Vous voulez rire Monsieur Feynman! Odile Jacob (2000). Traduction F. Balibar, C. Guthmann de la publication originale « Surely You're Joking Mr Feynman ! Adventures of a Curious Character » publiée aux USA par W.W. Norton & Company, Inc., New York. Ce livre peut être considéré comme des mémoires autobiographiques.
- 24- LANDAU Lev & LIFCHITZ Evgueni (1964). Physique théorique. Théorie des champs. Traduction du russe : S. Medvédev. Editions MIR Moscou. Ellipses (novembre 2012 : 5^e édition en français).
- 25- MEHRA Jagdish (1994). The beat of a different drum. The life of science of Richard Feynman. Clarendon Press. Oxford.
- 26- RITZ Walter (1908). Recherches critiques sur l'Electrodynamique Générale. Annales de Physique 152 à 158, volume 13, page 145.
- 27- ROUGE André (2004). Introduction à la relativité. Les éditions de l'école polytechnique.
- 28- SCHWARZSCHILD Karl (1903). Zur Elektrodynamik. I. Zwei Formen des Prinzips kleinsten Action in der elektronen Theorie. Nachr. Göttingen.
- 29- SCHWEBER Silvan (1986). Feynman and the visualization of space-time processes. Reviews of Modern Physics : 58, 449-512.
- 30- TETRODE Hugo (1922). Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamic. Zeitschrift für Physic. Volume 10, pages 157-181.
- 31- WHEELER John (.1937) On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure. Physical Review, Volume 52, page 1107.
- 32- WHEELER John & FEYNMAN Richard (21 Février 1941). Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping . Physical Review, volume 59. Page 683.
- 33- WHEELER John & FEYNMAN Richard (1945). Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. Reviews of Modern Physics, volume 17, 426.

Chapitre 4

Les débuts de l'intégrale de chemins

Résumé

- 4.1- Introduction
- 4.2- Le nouveau formalisme de la théorie quantique basé sur l'intégrale de chemins (thèse de Feynman : 1942)
- 4.3- Les limites du nouveau formalisme
- 4.4- L'histoire de Feynman et du principe de moindre action
- 4.5- Feynman et Newton
- 4.6- Références

Résumé

Après son idée d'interpréter à sa façon le résultat des travaux de Dirac (la quantification de l'action) qui lui permet de retrouver l'équation de Schrödinger (voir chapitre 3), Feynman va construire l'action associée à la trajectoire d'une particule dans l'espace-temps.

Ce chapitre 4 contient donc les réflexions et le travail de Feynman concernant la construction de cette action qui sera l'objet de sa thèse de Doctorat présentée en juin 1942. Il montre comment le futur physicien théoricien relie la fonction d'onde au lagrangien afin de voir tout naturellement se dessiner la notion de chemins pour une particule dans l'espace-temps.

4.1- Introduction

Fidèle à sa volonté de revenir à une description plus classique en physique des particules par rapport à l'Ecole de Copenhague conduite par Bohr qui ne résolvait pas les problèmes rencontrés en mécanique quantique comme nous en avons parlé au chapitre 2, Feynman cherche une trajectoire associée à la fonction d'onde qui lui permettra d'exprimer directement la mécanique quantique à travers le principe de moindre action.

Rappelons qu'en 1942, l'interprétation de la fonction d'onde comme intégrale de chemin est

seulement implicite et le terme d'intégrale de chemins n'existe pas encore. Il faudra attendre les travaux de Feynman et Hibbs que l'on trouve dans leur publication de 1965 « *Quantum Mechanics and Path Integrals* » pour appréhender le sens physique que l'on peut attribuer aux intégrales de chemins.

Nous allons analyser les travaux de Feynman se rapportant à la construction de l'action en dégagant ce qu'elle exprime en mécanique quantique, tout en abordant son interprétation physique.

En prenant pour référence sa thèse de Doctorat, nous allons montrer au paragraphe 4.2 comment Feynman calcule la fonction d'onde d'une particule le long d'une trajectoire (un chemin) de l'espace-temps après un intervalle de temps fini.

Cependant nous allons voir dans cette démarche, malgré la puissance de son raisonnement, le manque de rigueur mathématique que l'on serait en droit d'attendre concernant la preuve formelle de convergence de l'équation d'onde associée à une division aussi fine soit elle de l'échelle temporelle.

Puis, au paragraphe 4.3, nous soulevons les limites que pose ce nouveau formalisme dans la « *réduction du paquet d'ondes* » associé à la théorie de la mesure (en mécanique quantique), sachant que l'idée de trajectoire va à l'encontre du principe d'indétermination de Heisenberg. En effet, sachant que pour une particule on ne peut connaître à chaque instant sa position et sa vitesse, quel sens peut-on donner à cette idée de trajectoire (chemin) poursuivie par Feynman ?

Au paragraphe 4.4, via l'Annexe 14, il m'a paru intéressant de rappeler le contexte historique dans lequel Feynman, adolescent, prend connaissance du principe de moindre action qui sera la pierre angulaire de son concept d'intégrale de chemins.

Pour terminer, le paragraphe 4.5 montre combien Feynman était profondément imprégné des travaux de Newton dans sa manière de relier la fonction d'onde à l'expression qu'il donne pour exprimer le lagrangien.

Les publications fondamentales que j'ai consultées pour mener à bien ce chapitre 4 sont les suivantes :

- FEYNMAN Richard (Thesis 1942). Principles of least action in quantum mechanics. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy,
- FEYNMAN Richard (1942). Le principe de moindre action en mécanique quantique . Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education France. 2007,
- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la mécanique quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay,
- DIRAC Paul (Second edition 1935). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford. At the Clarendon Press. Source en langue originale pour la seconde édition,
- DIRAC Paul (Third edition 1947). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, London. Source en langue originale pour la troisième édition,
- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « The development of the space-time view of quantum electrodynamics » : Nobelprize.org.

4.2- Le nouveau formalisme de la théorie quantique basé sur l'intégrale de chemins (thèse de Feynman : 1942)

Comme exprimé par Feynman dans sa conférence Nobel²⁵⁸, à l'issue de sa découverte de l'équation de Schrödinger, à partir de la fonction d'onde associée à l'action d'une particule en mouvement le long d'un chemin sous un potentiel électrique et pendant un intervalle de temps infiniment petit, il se mit à réfléchir sur le calcul de la fonction d'onde après un intervalle de temps fini.

Pour cela, il imagine une discrétisation du temps liée à la trajectoire suivie par une particule dans l'espace-temps. Feynman concrétise cette réflexion dans sa thèse présentée à Princeton en juin 1942²⁵⁹.

Cette thèse qui traduit une succession de mises au point théoriques associée à des réflexions et qui s'appuie sur un raisonnement plus qualitatif que quantitatif marque les débuts de l'intégrale de chemins. Elle précède la publication publiée en avril 1948²⁶⁰, que nous analyserons au chapitre 5, et qui conduira véritablement à l'intégrale de chemins car basée sur la notion de variable d'intégration se présentant sous la forme d'une fonction représentant tous les chemins d'une région de l'espace-temps pour une particule. En effet, la publication d'avril 1948 avait pour objectif de mettre en forme toutes ses réflexions et ses idées en vue de les rendre accessibles.

Dans la thèse de Feynman, nous analysons la partie fondamentale apportant des précisions sur le cheminement de sa pensée qui conduira au concept des intégrales de chemins.

En *Introduction*, Feynman mentionne les postulats établis avec Wheeler sur l'Absorbeur (voir Annexe 18 §1).

Puis il rappelle le principe de moindre action en mécanique classique en mentionnant les caractéristiques et les propriétés des fonctions de fonction (les fonctionnelles) en mathématique. Il précise à cet effet le rôle important que ces fonctions jouent dans le calcul variationnel associé au principe de moindre action.

Précisons que la thèse de 1942 ne concerne pas directement la théorie de l'Absorbeur dont la version quantique ne verra jamais le jour. Nous verrons d'ailleurs que dans sa publication du 15 septembre 1949^{260 bis}, Feynman remet en question le postulat de la non-interaction de l'électron, ce qui surprend quand on sait que sa publication de juillet 1949 avec Wheeler estime le contraire (voir Annexe 18 §3).

258. Ibid.

259. Feynman. « *Le principe de moindre action en mécanique quantique* ». Traduction Emile Biémond. La thèse de Feynman. PEARSON Education. 2007. Page 28; « *Principles of least action in quantum mechanics* ». Thesis –1942 – Feynman. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy. Page 35, equation 35.1.

260. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, 367. Traduction Emile Biémond ; « *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Review of Modern Physics, volume 20, 367.

260 bis. Feynman. « *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics* ». Physical Review. Volume 76, number 6. September 15. 1949. page 772.

Dans la partie concernant le principe de moindre action en mécanique quantique, Feynman reprend les explications de la publication de Dirac de 1933 ²⁶¹ pratiquement telles quelles.

La partie concernant l'intégration associée au chemin de la particule dans l'espace-temps correspond aux explications données par Feynman lors de sa conférence Nobel, plus d'une vingtaine d'années plus tard.

En effet, lors de sa conférence Nobel, il commente l'idée qu'il avait eu à l'époque de calculer la fonction d'onde après un intervalle de temps fini :

« Un jour ou deux plus tard, j'étais dans mon lit et réfléchissais à tout ça. C'est alors que je tâchais d'imaginer ce qui se passerait si je voulais calculer la fonction d'onde après un intervalle de temps fini.

En mettant l'un de ces facteurs $\exp(i\varepsilon L)$, j'obtiendrais la fonction d'onde à l'instant suivant $t+\varepsilon$. Puis je mettrais cette nouvelle fonction d'onde dans l'équation (3), pour avoir un nouveau facteur $\exp(i\varepsilon L)$, ce qui me donnerait la fonction d'onde à l'instant ultérieur $t+2\varepsilon$, et ainsi de suite. De cette façon, je me pris à imaginer un grand nombre d'intégrales l'une après l'autre. Sous l'intégrale était le produit des exponentielles qui, bien entendu, était l'exponentielle d'une somme de termes du type $i\varepsilon L$. Mais L est un lagrangien et ε est comme un intervalle de temps dt , de sorte que la somme de tels termes est exactement comme une intégrale : c'est la même chose que la formulation de Riemann pour l'intégrale $\int L dt$: vous prenez les valeurs en chaque point et les ajoutez. Il faut encore prendre la limite où ε tend vers zéro, bien sûr. Ainsi, le rapport entre la fonction d'onde à un certain instant et la fonction d'onde à un autre instant, un intervalle de temps fini plus tard, peut être obtenu par un nombre infini d'intégrales (puisque $\varepsilon \rightarrow 0$) d'exponentielles de iA/\hbar où A est l'action donnée par (2) [c'est-à-dire $\int L(\dot{x}, x)$]. Enfin, j'avais réussi à exprimer directement la mécanique quantique à l'aide de l'action A .

Ceci me conduisit ultérieurement à l'idée d'amplitude associée à un chemin : pour chaque chemin possible que la particule pourrait suivre d'un point de l'espace-temps à un autre, il y a une amplitude, donnée par l'exponentielle de l'action le long de ce chemin, multiplié par i/\hbar . Les amplitudes des divers chemins se superposent par addition. C'est donc là une autre façon, une troisième, de décrire la mécanique quantique, qui semble tout à fait différente de celles de Schrödinger ou Heisenberg, mais leur est équivalente. »²⁶²

Dans sa conférence Nobel, pour simplifier les choses, Feynman se place à une dimension d'espace.

L'équation (3) dont Feynman fait référence est la suivante^{262 bis} :

$$\Psi(x_1, t_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0, \quad (3)$$

avec :

* $x_1 - x_0 = dx_0$, le chemin parcouru par la particule allant de (x_0, t_0) à (x_1, t_1) avec $t_1 - t_0 = \varepsilon$ infiniment petit,

* $C = \left[\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m} \right]^{1/2}$

261. Dirac. « Le lagrangien en mécanique quantique ». 1933. Traduction Emile Biémont ; « *The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics* ». St John's College, Cambridge, paper 26, publication 1933, received November 19, 1932.

262. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 257.

262 bis. Ibid page 256.

* $\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0$ l'intégrale qui préfigure ce que sera plus tard l'« intégrale de

chemins » associée à tous les chemins d'une région de l'espace-temps d'un point M' à un point M'' symbolisant toutes les trajectoires que peut prendre une particule,

* $S = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ l'action S pour toute trajectoire envisageable $x(t)$.

En considérant une nouvelle fonction d'onde matérialisée par le chemin de la particule allant de (x_1, t_1) à (x_2, t_2) , on obtient la fonction d'onde à l'instant $(t_0 + \varepsilon) + \varepsilon = t_2$:

$$\Psi(x_2, t_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_1, t_1) dx_1,$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(x_2, t_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0 \right\} dx_1.$$

Puis en considérant une nouvelle fonction d'onde matérialisée par le chemin de la particule allant de (x_2, t_2) à (x_3, t_3) , on obtient la fonction d'onde à l'instant $(t_0 + \varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon = (t_1 + \varepsilon) + \varepsilon = t_2 + \varepsilon$:

$$\Psi(x_3, t_3) = \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_2, t_2) dx_2,$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(x_3, t_3) = \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0 \right\} dx_1 \right\} dx_2.$$

Enfin, Feynman écrit que par un raisonnement inductif ²⁶³, pour la particule allant de (x_0, t_0) à (X, T) , en divisant l'intervalle de temps en un très grand nombre de petits intervalles t_0 à t_1 , t_1 à t_2 , t_2 à t_3 , ..., t_n à T , et en désignant par x_i la coordonnée associée au temps t_i , il obtient l'équation 35.1 de la fonction d'onde à l'instant T :

$$\Psi(X, T) \equiv \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_1}^{x_2} \dots \int_{x_n}^X \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^n [L(x_{i+1}, x_i, t_{i+1}, t_i)] \right\} \cdot \Psi(x_0, t_0) \frac{dx_0}{C(t_1-t_0)} \frac{dx_1}{C(t_2-t_1)} \dots \frac{dx_n}{C(T-t_n)}$$

avec :

$$X = x_{n+1} \text{ et } T = t_{n+1}.$$

263. Feynman. 1942. « *Le principe de moindre action en mécanique quantique* ». Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education. 2007. Page 28; « *Principles of least action in quantum mechanics* ». Thesis –1942 – Feynman. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy. Page 35.

Compte - tenu de l'expression :

$$S(x' = x_{i+1}, x = x_i) = \varepsilon \left[\frac{m}{2} \frac{(x' - x)^2}{\varepsilon^2} - V\left(\frac{x' + x}{2}\right) \right] = \varepsilon L$$

dans laquelle nous savons que :

$$L = \left[\frac{m}{2} \frac{(x' - x)^2}{\varepsilon^2} - V\left(\frac{x' + x}{2}\right) \right]$$

Feynman obtient :

$$\Psi(X, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, (n+1)\varepsilon \rightarrow T} \int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_n}^X \exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{i=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_{i+1}) \right] \right\} \Psi(x_0, t_0) \frac{dx_0}{C(\varepsilon)} \dots \frac{dx_n}{C(\varepsilon)}$$

avec l'action S sur un intervalle de temps ε infinitésimale :

$$S(x_{i+1}, x_i) = \varepsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_{i+1}) \right].$$

L'action pour le chemin total de la particule soumise au potentiel électrique V s'écrit :

$$\sum_{i=0}^n S(x_{i+1} - x_i) = \varepsilon \sum_{i=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_{i+1}) \right].$$

Notons que dans sa thèse, Feynman considère les coordonnées d'espace en trois dimensions. Ainsi dans son équation 35.1 page 35²⁶⁴, nous avons $\Psi(Q, T)$ au lieu de $\Psi(X, T)$.

En fait, l'équation 35.1 de la fonction d'onde ($\Psi(X, T) \cong \dots$) donnée de manière approximative est censée se transformer en stricte égalité ($\Psi(X, T) = \dots$) pour $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, (n+1)\varepsilon \rightarrow T}$. Et pour établir cette égalité, Feynman transforme la somme dans l'exponentielle en une intégrale :

« En passant à la limite, lorsque nous considérons des subdivisions de plus en plus petites pour l'intervalle t_0 à T et que, en conséquence, nous réalisons un nombre toujours croissant d'intégrations successives, le terme de droite de 35.1 devient égal à $\Psi(Q, T)$. La somme dans

l'exponentielle ressemble à $\int_{t_0}^T L(\dot{q}, q) dt$ où l'intégrale est écrite comme une somme de

Riemann. »²⁶⁵

Mais Feynman n'est pas en mesure de définir selon une démarche précise et une justification rigoureuse, le remplacement de la somme par une intégrale.

Dans la conclusion de sa thèse, il avoue ne pas être en mesure de mentionner une règle pour déterminer le facteur de normalisation pour une expression donnée de l'action. Qui plus est, il relie le problème délicat que constitue l'établissement de la constante de normalisation à un

264. Feynman. « *Principles of least action in quantum mechanics* ». Thesis –1942 – Feynman. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy. Page 35.

265. Ibid.

problème mathématique difficile concernant la convergence de l'équation d'onde $\Psi(X,T)$ associée à la division aussi fine soit-elle de l'échelle temporelle .

Nous pouvons simplement acter que dans sa thèse, Feynman a généralisé intuitivement sur un intervalle de temps fini $(n+1)\varepsilon \rightarrow T$ le calcul qui l'a conduit à l'équation de Schrödinger.

Mais il faut bien reconnaître qu'à cette époque (1941-42), c'est en essayant, comme nous l'avons vu au chapitre 3 , d'égaliser le noyau $K(x_{i+1}, x_i)$ à l'entité $\exp[\frac{i}{\hbar} S]$ dans l'équation d'onde $\Psi(x_{i+1}, t_{i+1})$ considérée comme une intégrale associée à une amplitude de probabilité, qu'il va retrouver l'équation de Schrödinger.

En effet, fidèle à son imagination et à son intuition scientifique qui le conduit à adopter l'exemple concret d'une particule en mouvement dans un potentiel électrique , il ose intégrer à la fois sur les coordonnées d'espace et de temps liées au chemin infinitésimal parcouru par la particule.

Nul doute, à la stupéfaction de Jehle qui l'accompagnait dans sa démarche de prendre connaissance du rapport de Dirac de 1933²⁶⁶, qu'il possédait un talent hors du commun dans la maîtrise de l'outil mathématique qu'il sait parfaitement adapter aux problèmes pratiques de la physique. Et toute sa force et son originalité sont bien là : il effectue très rapidement sur place²⁶⁷, à la bibliothèque de Princeton, le calcul qui se trouve au chapitre 3 (sous-section 3.2.3.e), ce qui est remarquable.

Alors, en 1942, l'interprétation de l'équation de la fonction d'onde $\Psi(X,T)$ comme intégrale de chemins est seulement implicite. Il n'est pas encore question pour Feynman de prétendre avoir créé un nouveau formalisme quantique non relativiste, qui explique autrement que ceux de Heisenberg, Schrödinger et Dirac les interactions entre photons et électrons à l'intérieur de l'atome.

Il faudra plusieurs conférences avec ses pairs postérieures à 1942, pour que Feynman prenne conscience que ses idées et ses méthodes atypiques ne sont pas facilement acceptées. En effet, s'il souligne les aspects mathématiques de ses recherches associées aux intégrales de chemins, ces aspects ne sont pas formalisés avec toute la rigueur voulue. Les règles qu'il met en avant sont le plus souvent issues de recettes personnelles obtenues par approximations successives, voir par tâtonnement. Et cette manière de présenter ses travaux est loin de convaincre des Oppenheimer, des Bohr père et fils²⁶⁸, comparée à la clarté du formalisme mathématique mis en avant par Schwinger travaillant lui aussi sur des thèmes associés au calcul de la trajectoire complète d'une particule dans un champ électromagnétique²⁶⁹.

Ceci dit, c'est véritablement dans sa publication d'avril 1948²⁷⁰ que Feynman aborde de manière explicite l'intégrale de chemin, mentionnant le mot « chemin (path) » mais jamais en utilisant l'expression « intégrales de chemin (path integrals) » comme il le fera dans son livre écrit avec Hibbs en 1965 intitulé *Quantum Mechanics and Path Integrals*.

266. Dirac. « *Le lagrangien en mécanique quantique* ». 1933. Traduction Emile Biémont ; « *The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics* ». St John's College, Cambridge, paper 26, publication 1933, received November 19, 1932.

267. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 256.

268. Schweber. « *Feynman and the visualisation of space-time processes* », page 495.

269. Ibid.

270. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, 367. Traduction Emile Biémont.

Il prend alors la responsabilité de considérer l'utilisation des intégrales (de chemin) comme un nouveau formalisme expliquant d'une autre manière que celles de Heisenberg, Schrödinger et Dirac, les interactions électrons-photons à l'intérieur de l'atome :

« *Le présent article va décrire ce qui est essentiellement une troisième formulation de la théorie quantique non-relativiste. Cette formulation a été suggérée par certaines remarques de Dirac²⁷¹ concernant la relation entre l'action classique et la mécanique quantique²⁷². Une amplitude de probabilité est associée à la totalité du mouvement d'une particule en fonction du temps, plutôt que simplement à la position de la particule à un instant donné (ce qui distingue le formalisme de Feynman par rapport aux autres)* »²⁷³.

Aussi, dans sa publication d'Avril 1948, ose-il définir au §5 la fonction d'onde conformément à son nouveau point de vue et au §6 établir que cette fonction d'onde satisfait l'équation différentielle de Schrödinger :

« *We show in this section how the wave function may be defined from the new point of view. In this section we shall show that this function satisfies Schrödinger's differential wave equation.* »

Cet article d'avril 1948 va donc être analysé avec détail au chapitre 5.

4.3- Les limites du nouveau formalisme

Dans la conclusion de sa thèse, Feynman mentionne :

« *D'un point de vue physique, l'interprétation des formules est plutôt insatisfaisante. ... le critère établissant qu'une fonctionnelle représente une observable physique réelle fait défaut* ».²⁷⁶

Et :

271. Dirac. « *The Principles of Quantum Mechanics* ». (The Clarendon Press, Oxford, 1935), seconde édition , Sec. 33; aussi Physik. Zeits. Sowjetunion 3, 64 1933); Dirac, Rev. Mod. Phys. 17, 195 (1945).

272. Dans tout cet article, le terme « d'action » sera utilisé pour l'intégrale temporelle du lagrangien le long du chemin. Quand ce chemin est celui réellement suivi par la particule, se déplaçant classiquement , l'intégrale sera désignée de manière plus appropriée par la fonction du premier principe de Hamilton.

273. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, 367. Traduction Emile Biémont. Page 64.

276. Feynman. 1942. « *Le principe de moindre action en mécanique quantique* ». Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education. 2007. Pages 61 et 62; « *Principles of least action in quantum mechanics* ». Thesis –1942 – Feynman. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy. Page 73.

*« Il est possible qu'une analyse de la théorie des mesures soit requise ici. Un concept tel que la "réduction du paquet d'onde" n'est pas directement applicable car, en mathématiques, nous devons décrire le système à tout moment et si une mesure doit être faite dans un intervalle d'intérêt, ce fait doit être intégré dans les équations dès le départ. Pour synthétiser, il conviendrait de penser à une interprétation physique qui ne fait pas référence au comportement du système à des moments très éloignés du présent ».*²⁷⁷

En d'autres termes, Feynman avait conscience que la "réduction du paquet d'onde" posait un problème dans la formulation de sa théorie basée sur le temps car cela impliquait de considérer des états du système quantique parfois très éloignés du présent.

Feynman termine sa thèse en insistant sur le fait que le test final de toute théorie physique se trouve dans l'expérience et qu'aucune comparaison avec l'expérience n'a été réalisée. A seulement vingt trois ans, il entrevoit le thème de prédilection qui va devenir l'objet de ses recherches :

*« L'auteur espère appliquer ces méthodes [c'est-à-dire que tout chemin suivi par une particule puisse être segmenté en plusieurs intervalles ; et pour cela le principe de moindre action doit permettre de décrire un intervalle, suivi par la particule dans un temps non pas infinitésimal mais quelconque, associé à la transformation de la fonction d'onde $\Psi(x_{final}, t_{final}) = \Psi(x_{initial}, t_{initial})$] à l'électrodynamique quantique. C'est seulement dans le cadre d'une telle application directe qu'une comparaison avec l'expérience pourra être réalisée ».*²⁷⁸

Afin de comprendre les limites du nouveau formalisme telles qu'exprimées par Feynman par rapport à une théorie de la mesure en mécanique quantique dont les critères sont déjà parfaitement établis en 1942, il convient de préciser les notions « d'observables » et de "réduction du paquet d'onde ".

En physique classique, l'état d'un système est défini et déterminé par un ensemble de mesures. Et cet ensemble de mesure est indispensable pour connaître les valeurs de toutes les variables du système. Ces variables de base sont soit par exemple les positions et les vitesses dans le formalisme de Newton ou de Lagrange, soit par exemple les positions et les quantités de mouvement (les impulsions) dans le formalisme hamiltonien. Toutes les autres variables du système telles que les distances relatives et les énergies sont des fonctions bien définies de ces variables de base.

En mécanique quantique, il ne peut y avoir aucun état du système dans lequel les valeurs précédentes de la mécanique classique sont définies en même temps. En effet, comme nous en avons parlé en 1.2.1.e (principe d'indétermination de Heisenberg : 1927), la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être définies simultanément, et ceci indépendamment de l'habileté de l'expérimentateur ou de la précision et de la rapidité de prise en compte de l'information par le mesurant.

Selon Bohr, et ce qu'il est encore convenu d'appeler « l'école ou l'interprétation de Copenhague », le caractère probabiliste de la mécanique quantique est mis en avant, et les relations d'indétermination de Heisenberg sont issues de l'interaction entre les mesurants (les appareils de mesure) et les mesurés. En fait, au niveau atomique, c'est-à-dire microscopique,

277. Ibid.

278. Ibid.

l'effet de l'appareil de mesure sur son objet ne peut être négligé, à tel point que toute information obtenue par le mesurant est partie intégrante de la théorie quantique associée à l'expérimentation. La mesure en mécanique quantique est indissociable de la théorie.

En d'autres termes, selon l'école de Copenhague qui continue à faire autorité en mécanique quantique, le cadre conceptuel de la mécanique classique n'est pas adapté pour décrire l'infiniment petit, car d'après Bohr :

« *cela tient uniquement à la petitesse du quantum d'action* (voir 1.2.1.a, concernant Planck et 1.2.1.b, concernant Einstein) *vis-à-vis des actions qui interviennent dans nos perceptions sensorielles ordinaires* ». ²⁷⁹

Ainsi, mesurant et mesuré est une totalité inséparable, car toute information obtenue par l'appareil de mesure ne peut être attribué à un objet autonome et indépendant de la procédure expérimentale mise en œuvre.

C'est ainsi qu'à l'école de Copenhague les trajectoires des électrons ne sont pas représentées. En effet, dès lors que pour une particule telle qu'un électron on ne puisse connaître à chaque instant la position et la vitesse, cela a-t-il un sens de continuer à utiliser les concepts de la mécanique classique au sein de la mécanique quantique ?

Ainsi, les résultats obtenus dans le paradigme de la mécanique quantique, défini par l'Ecole de Copenhague, font appel à un concept associé au formalisme des fonctions d'onde. De fait, une onde pouvant se représenter dans le plan complexe par son module et sa phase, comme nous l'avons écrit en Annexe 13, le contexte en mécanique quantique sera celui des espaces vectoriels sur le corps des complexes.

Aussi toute mesure en mécanique quantique est associée aux quatre postulats suivants :

* Postulat 1 décrivant l'état d'un système quantique :

A un instant t_0 fixé, l'état d'un système quantique est décrit par un vecteur d'état $|\Psi(t_0)\rangle$ appartenant à l'espace vectoriel E des états quantiques.

Le ket $|\Psi(t_0)\rangle$ code l'état physique Ψ qui est réalisé au moyen d'un travail de préparation qui consiste à mesurer un ensemble maximal de n grandeurs physiques A, B, \dots etc. correspondant à un état physique parfaitement défini.

Ce vecteur ket $|\Psi(t_0)\rangle$ associé à l'état physique Ψ est donc lui-même caractérisé par les nombres réels :

$$|\Psi(t_0)\rangle = |a, b, \dots\rangle.$$

* Postulat 2 décrivant les grandeurs physiques du système quantique :

A toute grandeur physique mesurable A , on peut faire correspondre un opérateur A qui agit sur les vecteurs d'état de l'espace vectoriel E ; cet opérateur est une observable.

Cette règle généralise ce que nous avons vu en Annexe 19 §2, à savoir que par exemple à l'impulsion \mathbf{p} de la mécanique classique correspond l'opérateur $-i\hbar \vec{\nabla}$ et qu'à l'énergie E classique correspond l'opérateur hamiltonien H .

Il s'agit d'une règle de quantification dans la mesure où pour obtenir l'expression de l'opérateur $A(x, p)$ associé à l'observable $A(x, p)$, il suffit de remplacer l'opérateur x par x et l'opérateur p par $-i\hbar \vec{\nabla}$ dans l'expression de A .

Ceci permet de trouver mathématiquement l'expression des opérateurs.

279. Bohr. 1932. « *La théorie atomique et la description des phénomènes* ». Gauthier-Villars. Traduction Andrée Legros et Léon Rosenfeld pour l'édition Jacques Gabay, 1993.

*Postulat 3 décrivant la mesure des grandeurs physiques du système quantique :

Les valeurs propres de l'observable A, correspondant à une grandeur physique A, sont les seules mesurables.

De même que ce que nous avons vu en Annexe 19 §2, l'équation de Schrödinger $H\Psi=E\Psi$ est une équation dont les énergies E sont les valeurs propres de l'opérateur H relativement au vecteur propre $|\Psi\rangle$ qui est le vecteur d'état du système considéré à un temps t donné.

Dans le cas où le spectre de l'observable A est entièrement discret et où les valeurs propres a_n de l'observable A sont non-dégénérées (à chaque valeur propre est associé un vecteur propre $|\mu_n\rangle$ et un seul) on écrit : $A|\mu_n\rangle = a_n|\mu_n\rangle$ dans lequel a_n sont les valeurs propres de l'opérateur A relativement au vecteur propre $|\mu_n\rangle$.

L'ensemble des $|\mu_n\rangle$ constitue une base dans l'espace vectoriel E .

Notons qu'une mesure de la grandeur physique A donnera toujours une valeur réelle, puisque l'observable A (c'est-à-dire l'opérateur A) est par définition hermitique.

*Postulat 4 décrivant l'évolution des systèmes quantiques dans le temps :

L'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \mathbf{H} |\Psi(t)\rangle$$

où l'opérateur hamiltonien \mathbf{H} du système est l'observable associée à l'énergie totale de ce système.

Pour un système quantique quelconque, l'opérateur hamiltonien H est obtenu à partir de l'expression de la fonction classique de Hamilton $H(q_i, p_i)$ exprimant l'énergie totale du système mécanique considéré et satisfaisant à la loi de conservation.

Le dessin de l'annexe 19 §2 illustre bien ce qui vient d'être écrit.

Clarifions ce qui précède par l'exemple classique du chat de Schrödinger qui a marqué l'élaboration de la mécanique quantique, en comparant à l'expérience des fentes de Young afin de toucher du doigt la problématique de la mesure.

Si l'exemple du chat était pour Schrödinger une boutade destinée aux partisans de l'école de Copenhague, ces derniers l'utilisèrent à leur fin.

Un atome radioactif est placé dans une boîte fermée et opaque. Cet atome radioactif possède 50% de probabilité de se désintégrer dans l'heure qui suit et 50% de rester dans le même état.

En se désintégrant, cet atome commande un mécanisme qui brise une fiole de cyanure et tue un chat enfermé dans la boîte. Dans le cas où l'atome radioactif ne se désintègre pas, le chat reste vivant. Le problème est donc le suivant : au bout d'une heure, le chat sera-t-il mort ou vivant ? La réponse est que le chat est ni mort ni vivant car il se trouve dans une superposition de ces deux états.

On peut comparer la superposition de ces deux états pour le chat à une fonction d'ondes $|\text{chat}\rangle$ constituée d'un paquet d'ondes en l'occurrence dans notre analogie à un système constitué de deux fentes dans l'expérience de Young en sachant par expérience qu'un électron ne passe pas par une fente bien déterminée. La fonction d'onde est donc composée de deux ondes superposées associée chacune à deux vecteurs d'état $|\Psi_1(t_0)\rangle$ et $|\Psi_2(t_0)\rangle$ lié respectivement à la position de l'électron $q_{1i}(t_0)$ et $q_{2i}(t_0)$ ou bien respectivement à l'impulsion de cette particule (fonction de sa vitesse) $p_{1i}(t_0)$ et $p_{2i}(t_0)$.

Notons déjà que par cet exemple, on comprend l'insatisfaction de Feynman, car si les deux vecteurs d'état $|\Psi_1(t_0)\rangle$ et $|\Psi_2(t_0)\rangle$ sont décrits tel que mentionné dans le postulat 1 c'est-à-dire à l'instant t_0 fixé, il n'en est pas de même pour son nouveau formalisme faisant intervenir des vecteurs d'état éloignés dans le temps.

De plus, le paradigme actuel de la mécanique quantique nous permet d'écrire le vecteur d'état du système particulaire (électronique) c'est-à-dire sa fonction d'onde, pour une dimension spatiale égale à 1, de la manière suivante :

$$|particule\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |x_2\rangle,$$

avec le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tel que les kets $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$ soient normés à 1. En effet, si $\left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ x_2 \end{matrix} \right\| = 1$ alors

$$\left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ particule \end{matrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Ce qui donne dans l'exemple du chat de Schrödinger :

$$|chat\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |chatvivant\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |chatmort\rangle.$$

La probabilité au bout d'une heure pour que le chat soit vivant ou mort dans la boîte est égale au module carré de la fonction d'onde $|chat\rangle$ c'est-à-dire au produit scalaire :

$$P = \langle chat | chat \rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \langle chatvivant| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle chatmort| \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |chatvivant\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |chatmort\rangle \right],$$

soit :

$$P = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ chatvivant \end{matrix} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ chatmort \end{matrix} \right\|^2 + \frac{1}{2} \langle chatvivant | chatmort \rangle + \frac{1}{2} \langle chatmort | chatvivant \rangle,$$

les deux derniers termes représentant dans le cas d'une fonction d'onde, les interférences du système.

Si maintenant on décide d'ouvrir la boîte, le système interagit avec l'instrument de mesure, qui est nos yeux, et le vecteur d'état $|chat\rangle$ collapse sur l'un des deux états propres, soit sur l'état $|chatvivant\rangle$ avec une probabilité de 50% soit sur l'état $|chatmort\rangle$ avec une probabilité de 50%, ce qui correspond à ce que l'on appelle la réduction du paquet d'onde.

On obtient donc :

$$P(chat) = 0,5 \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ chatvivant \end{matrix} \right\|^2 + 0,5 \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ chatmort \end{matrix} \right\|^2,$$

c'est-à-dire comme nous le prouvons, une probabilité de 50% pour que le chat soit vivant et 50% pour que le chat soit mort, car :

$$\left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ chatvivant \end{matrix} \right\|^2 = \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ chatmort \end{matrix} \right\|^2 = 1 \text{ puisque les kets } |chatvivant\rangle \text{ et } |chatmort\rangle \text{ sont normés à 1.}$$

La théorie de la mesure correspondant aux postulats 2 et 3 montre dans l'exemple du chat de Schrödinger que :

* la grandeur physique mesurable A est la visualisation du chat à laquelle correspond l'opérateur "OVC" (Ouverture Visualisation Constataion), qui est une observable,

* les valeurs propres de l'observable "OVC", associées aux vecteurs propres \vec{cV} (Chat Vivant) et \vec{cM} (Chat Mort) sont les seules mesurables.

Ces valeurs propres sont égales à 1 et on peut écrire :

$$\text{"OVC"} \vec{cV} = 1 \vec{cV}$$

$$\text{"OVC"} \vec{cM} = 1 \vec{cM},$$

soit dans le formalisme des kets de Dirac :

$$\text{"OVC"} |chatvivant\rangle = 1 |chatvivant\rangle$$

$$\text{"OVC"} |chatmort\rangle = 1 |chatmort\rangle$$

avec 1 qui sont les valeurs propres de l'opérateur "OVC" relativement et respectivement aux vecteurs propres $|chatvivant\rangle$ et $|chatmort\rangle$.

Dans le cas du système particulière (électronique), la probabilité de trouver l'électron sur l'écran situé au-delà des deux fentes de Young est aussi égale au carré du module de la fonction d'onde, c'est-à-dire au produit scalaire :

$$P = \langle \Psi_1(t_0) | \Psi_2(t_0) \rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |\Psi_1(t_0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\Psi_2(t_0)\rangle \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Psi_1(t_0)| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Psi_2(t_0)| \right],$$

Soit :

$$P = \frac{1}{2} \left\| \vec{\Psi}_1(t_0) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \vec{\Psi}_2(t_0) \right\|^2 + \frac{1}{2} \langle \Psi_1(t_0) | \Psi_2(t_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi_2(t_0) | \Psi_1(t_0) \rangle,$$

les deux derniers termes représentant les interférences du système c'est-à-dire comme le montre l'expérience tout se passe comme si l'électron passait par les deux fentes en même temps, interférant avec lui-même, car les impacts sur l'écran ont une répartition en forme de cloche. Ainsi, l'électron se comporte comme une onde.

De la même manière que pour le chat de Schrödinger, si on décide de pratiquer une mesure pendant que l'électron passe dans les deux fentes, à l'aide d'une observable A (qui n'est rien d'autre qu'un mécanisme approprié) tel que mentionné en postulat 3, la grandeur physique mesurable A nous indique que l'électron se trouve dans l'état $|x_1\rangle$ ou $|x_2\rangle$ associé respectivement au passage de l'électron dans la fente 1 ou la fente 2 après l'observation c'est-à-dire la mesure. La fonction d'onde totale du système s'est donc réduit à $|\Psi_1(x_0, t_0)\rangle$ ou $|\Psi_2(x_0, t_0)\rangle$, ce que nous appelons le phénomène de réduction du paquet d'onde.

Ainsi, après la réduction du paquet d'onde, le vecteur d'état du système quantique tel que décrit en postulat 1 est réduit à sa projection sur le sous-espace propre de Hilbert associé à la valeur propre mesurée, tel que :

$$A |\Psi_1(x_0, t_0)\rangle = I |\Psi_1(x_0, t_0)\rangle$$

$$A |\Psi_2(x_0, t_0)\rangle = I |\Psi_2(x_0, t_0)\rangle$$

avec I qui sont les valeurs propres de l'opérateur A relativement et respectivement aux vecteurs propres $|\Psi_1(x_0, t_0)\rangle$ et $|\Psi_2(x_0, t_0)\rangle$.

On confirme bien le résultat expérimental pour lequel l'électron à une probabilité de 1/2 c'est-à-dire 50% de passer dans l'une des deux fentes car :

$$P(x) = 0,5 \left\| \vec{\Psi}_1 \right\|^2 + 0,5 \left\| \vec{\Psi}_2 \right\|^2,$$

et conformément à l'expérience il n'y a plus d'interférence visible sur l'écran. En d'autres termes, le fait d'avoir détecté pour l'électron le chemin parcouru, ce dernier semble adopter un comportement de particule et non plus un comportement ondulatoire. Tant que l'objet quantique "électron" n'est pas observé, il se comporte comme une onde. Ainsi la mesure sur l'objet "électron" modifie son comportement. Là se trouve être toute la problématique de la mesure en mécanique quantique.

L'équation de Schrödinger étant purement déterministe, pourquoi le fait de pratiquer une mesure rend-il la nature probabiliste ? Pour le moment personne n'a de réponse rigoureuse à donner. La problématique de la mesure reste irrésolue et incompréhensible. Lors d'une conférence à Toulouse il y a quelques années, Claude Cohen-Tannoudji, prix Nobel de Physique 1997, a écarté toute frustration en mentionnant que les choses étaient ainsi et qu'il fallait s'y faire.

Sans que la problématique précédente de la mesure soit résolue, nous savons que les intégrales de chemin de Feynman faisant appel à la notion de trajectoire, l'électron est toujours considéré comme une particule.

La dynamique de Schrödinger basée sur le formalisme hamiltonien considère l'électron comme une onde, d'où le rôle prépondérant de la fonction d'onde dont la réduction, comme nous l'avons vu précédemment, fait apparaître son aspect particulaire.

Aussi, si le formalisme hamiltonien n'intervient pas dans l'action S , le principe de moindre action en mécanique quantique n'est pas pour autant dans une impasse, pour ce concernant une analyse expérimentale, comme semble penser Feynman en 1942.

En fait, dans ses publications d'avril 1948²⁸⁰, de septembre 1949²⁸¹ et de Novembre 1950²⁸², que nous allons voir respectivement en chapitres 5, 6 et 7, Feynman repose complètement le problème de l'électrodynamique quantique en essayant de le solutionner. S'affranchissant de la problématique liée à la mesure par la réduction du paquet d'onde, il développe via les intégrales de chemin, un outil graphique, les diagrammes de Feynman, pour à la fois visualiser les événements se déroulant au niveau de l'atome lors des interactions entre électrons-photons et obtenir une plus grande facilité dans l'exécution des différents calculs.

4.4- L'histoire de Feynman et du principe de moindre action

Il me paraît très intéressant de mentionner que le principe de moindre action qui est la pierre angulaire du concept de l'intégrale de chemins entre très tôt dans la vie de Feynman c'est-à-dire dès son adolescence au lycée pour le captiver une fois pour toute.

Mais laissons le futur prix Nobel s'exprimer :

« Quand j'étais au lycée, mon professeur de physique – qui s'appelait M. Bader – m'appela un jour après le cours de physique et me dit : « vous avez l'air de vous ennuyer, je vais vous

280. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, 367. Traduction Emile Biémont.

281. Feynman. Septembre 1949. « *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics* ». Volume 76, Number 6. Physical Review.

282. Feynman. Novembre 1950. « *Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction* ». Volume 80, Number 3. Physical Review.

raconter quelque chose d'intéressant ». Puis il me raconta quelque chose que je trouvais absolument captivant, et qui depuis n'a jamais cessé de me captiver. Chaque fois que le sujet surgit, je travaille dessus . A vrai dire, quand j'ai commencé à préparer ce cours, je me suis trouvé en train d'analyser encore la question. Au lieu de me préoccuper de mon cours, je me suis laissé entraîner par un nouveau problème. »⁷⁵

Il pourrait donc sembler que toutes les hypothèses formulées par Feynman encore doctorant, ne l'auraient été que pour conduire tout naturellement à ce principe de moindre action en mécanique quantique, qui lui permettra de trouver, après Heisenberg (1925) et Schrödinger (1926, c'est-à-dire presque vingt ans plus tard, une troisième formulation équivalente de la mécanique quantique non relativiste.

Afin de peut-être mieux comprendre, ultérieurement, le cheminement de la pensée de Feynman quant à l'élaboration de l'intégrale de chemin, il serait utile pour le lecteur de se reporter à l'Annexe 14 dans laquelle je me réfère à un aperçu de sa part, tout à fait original, du principe de moindre action en mécanique classique, en consultant directement ses écrits⁷⁶, sans rentrer dans la genèse du principe de moindre action qui n'est pas l'objet de cette thèse.

4.5- Feynman et Newton

Nous avons vu précédemment qu'en Annexe 14, Feynman dans sa manière originale de traiter le principe de moindre action en mécanique classique, mentionne que le trajet suivant lequel l'action est minimum est celui qui satisfait à la deuxième loi de Newton concernant le principe de la dynamique.

En effet, dans toutes les recherches que nous avons effectuées, nous avons constaté que Feynman s'était beaucoup imprégné des travaux de Newton.

Pour preuve, la publication « *Le mouvement des planètes autour du soleil* » édité par David et Judith Goodstein en 1996, reprenant son cours inaugural de physique pour les étudiants de première année de Caltech en 1963, et traduit en français par Marie Treyer qui reprend les démonstrations géométriques de Newton concernant les lois du mouvement.

Aussi, une remarque mérite d'être mentionnée quant à la façon pour Feynman de présenter le principe de moindre action en mécanique quantique au chapitre III de sa thèse de doctorat.

En effet, au §1 de ce chapitre III « *Le lagrangien en mécanique quantique* » tout au long de ses explications, il choisit d'exprimer le Lagrangien de la manière suivante :

$$L\left(\frac{q_{i+1}-q_i}{t_{i+1}-t_i}, q_{i+1}\right),$$

alors que le choix naturel, à priori, serait de l'exprimer de la façon suivante :

$$L\left(\frac{q_{i+1}-q_i}{t_{i+1}-t_i}, q_i\right).$$

75. Feynman. « *Le cours de Physique de Feynman. Electromagnétisme 1* ». Traduction A. Crémieu et M.-L. Duboin. Page 326.

76. Ibid.

En fait, Feynman qui a très bien compris le sens exact des écrits de Newton avec toute la finesse que cela demande, considère pour le Lagrangien à la coordonnée d'espace :

$$q_{i+1}$$

la vitesse du passé suivante :

$$\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{t_{i+1} - t_i} \right),$$

c'est-à-dire celle correspondant à la coordonnée d'espace q_i , répondant à la première loi de Newton concernant le principe d'inertie, qui n'est rien d'autre que le reflet du principe de moindre action entre les deux points q_i et q_{i+1} .

En effet, dans l'ouvrage les *Principia* (1686), traduit par la Marquise du Châtelet en 1759 (Edition Dunod 2006), en la section II « *De la recherche des forces centripètes* » sur le mouvement des corps (livre Premier), Newton, en figure 12, base sa démonstration géométrique sur la coordonnée d'espace au point B associé à une vitesse passée prise au point A .

Mais laissons Newton lui-même s'exprimer :

« Supposé que le temps soit divisé en parties égales, et que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchait, la droite $BC = AB$ Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B , la force centripète agisse sur lui par un seul coup, mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc et à suivre la droite BC . »

De plus, au §3 du même chapitre III de sa thèse de doctorat « *Les équations de mouvement dans la formulation lagrangienne* », Feynman mentionne l'analogie quantique de la loi de mouvement de Newton :

« Dans les notations habituelles de la mécanique quantique, cette égalité est équivalente à l'équation satisfaite par les opérateurs, qui est l'analogie quantique de la loi de mouvement de Newton, c'est-à-dire $m\ddot{x} + V'(x) = 0$. »

Il en sera de même dans sa publication d'Avril 1948 « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* » que nous verrons au chapitre 5, dans laquelle il réitère (§9) que ses travaux en mécanique quantique, sous certaines conditions et cette fois par une affirmation, conduisent à l'équation de Newton du mouvement :

« Cette affirmation traduit l'expression matricielle de la loi de Newton qui est valable en mécanique quantique. »

4.6- Références

- 1- BOHR Niels (1932). La théorie atomique et la description des phénomènes . Gauthier-Villars. Traduction Andrée Legros et Léon Rosenfeld pour l'édition Jacques Gabay, 1993.
- 2- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la Première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay.
- 3- DIRAC Paul (1933). Le lagrangien en mécanique quantique. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- 4- DIRAC Paul (1933). The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics (St John's College, Cambridge, paper 26, publication 1933, received November 19, 1932).
- 5- DIRAC Paul (1935). The Principles of Quantum Mechanics. Second Edition , Oxford University Press.
- 6- DIRAC Paul (1947). The Principles of Quantum Mechanics.Third Edition, Oxford University Press.
- 7- FEYNMAN Richard (Thesis 1942). Principles of least action in quantum mechanics. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy.
- 8- FEYNMAN Richard (1942). Le principe de moindre action en mécanique quantique . Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education France. 2007.
- 9- FEYNMAN Richard (Lettres 1939-1987). Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ? Traduction : Christian Jeanmougin. Dunod (2006).
- 10- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste. Review of Modern Physics, volume 20, 367. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- 11- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. Review of Modern Physics, volume 20, 367.
- 12- FEYNMAN Richard (1948). A relativistic cut-off for classical electrodynamics. Physical review, volume 74. Pages 939-946.
- 13- FEYNMAN Richard (September 15, 1949). Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. Physical Review. Volume 76, 769.
- 14- FEYNMAN Richard (November 1, 1950). Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. Physical Review. Volume 80, Number 3, 440.
- 15- FEYNMAN Richard & HIBBS Albert (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014.
- 16- FEYNMAN Richard (December 11, 1965). The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics. Nobel Lecture.
- 17- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « The development of the space-time view of quantum electrodynamics » : Nobelprize.org.
- 18-FEYNMAN Richard (1964). Le cours de Physique de Feynman. Electromagnétisme 1. Traduction A. Crémieu et M.-L. Duboin. Dunod, Paris, 1999 pour la version française.
- 19- SCHWEBER Silvan (1986). Feynman and the visualization of space-time processes. Reviews of Modern Physics : 58, 449-512.
- 20- WIKIPEDIA (19.06.2017). Propagateur de l'équation de Schrödinger.

Chapitre 5

L'intégrale de chemins

Résumé

5.1- Introduction

5.2- La première mise en forme des idées de Feynman sur un nouveau formalisme en mécanique quantique basé sur l'intégrale de chemins

5.2.1- Les principes de Fermat et d'Huygens

Principe de Fermat concernant la réfraction

b) Principe d'Huygens en optique ondulatoire 7

5.2.2- Idée de base de la formulation lagrangienne de la mécanique quantique : le principe de Feynman

5.2.3- Les avantages du nouveau point de vue de Feynman : le paradigme de la trajectoire (le chemin)

5.2.4- Les deux postulats de quantification de Feynman

a) Postulat 1

a.1) Amplitude de probabilité dans la théorie quantique de Schrödinger

a.2) Amplitude de probabilité dans la théorie quantique de Feynman

b) Postulat 2 : la relation fondamentale $\langle x''t'' | x't' \rangle$

c) Application des deux postulats au calcul du propagateur de Feynman (le noyau ou kernel) pour une particule libre

d) Interprétation physique du propagateur de Feynman pour la particule libre

d.1) Energie et Impulsion

d.2) Optique et mécanique analytique

d.3) Réflexion sur l'essence même de la phase du propagateur

5.2.5- Conclusion

5.3 Références

Résumé

Dans les chapitres 3 et 4 nous avons vu comment, à partir du besoin de quantifier le principe de moindre action, Feynman se met à construire l'action associée au mouvement d'une particule qui fera l'objet de sa thèse de doctorat présentée en 1942.

Entre 1942 et 1948, le jeune physicien américain n'a de cesse de réfléchir sur une idée de trajectoires multiples d'une particule dans l'espace-temps, c'est-à-dire sur la construction d'une intégrale comprenant comme variable d'intégration une fonction représentant tous les chemins d'une région de l'espace-temps, afin de bâtir un nouveau formalisme en mécanique quantique. Dans ce chapitre 5, je vais montrer comment, à partir des travaux antérieurs, principalement de Huygens et de De Broglie, Feynman va concrétiser la notion d'intégrale de chemins.

5.1- Introduction

Si dans le chapitre 4 Feynman réussit à construire l'action associée au mouvement d'une particule dans l'espace-temps, il est encore loin d'une formulation de la mécanique quantique basée sur les intégrales de chemins.

Il lui faut pour cela trouver le moyen lui permettant de prédire comme le font les théories existantes, la présence de la particule subatomique dans telle ou telle région de l'espace considéré.

Ce sont en partie les travaux de Huygens et de De Broglie qui lui donnent l'idée qui va le conduire à découvrir l'ensemble des chemins (les trajectoires) que peut prendre une particule quelque part dans une région de l'espace-temps.

Et de là, il postule la probabilité de trouver la particule dans la région considérée par le carré de la somme des contributions de cette particule, une pour chaque chemin de la région.

Ainsi ce concept de toutes les trajectoires possibles pour une particule, lui fait entrevoir une nouvelle façon d'aborder la mécanique quantique.

Et cette contribution totale, due à tous les chemins atteignant un point (x,t) à partir du passé, est la fonction d'onde $\psi(x,t)$ qui satisfait l'équation de Schrödinger, fonction d'onde basée sur les travaux de De Broglie concernant la notion de particule portée par une onde.

Afin d'expliquer la mise en forme des idées de Feynman concernant son nouveau formalisme en mécanique quantique associé à la notion de trajectoires dans l'espace-temps, je vais tout d'abord rappeler en section 5.2.1 le principe de Fermat concernant la réfraction en optique géométrique et le principe d'Huygens en optique ondulatoire.

Puis je vais extrapoler le principe de Fermat associé au grain de lumière (le photon) au principe d'Huygens afin de mieux comprendre la signification de ces deux principes et ce que Feynman va en tirer.

En section 5.2.2, j'ai trouvé intéressant de porter une réflexion sur la pensée de Feynman lorsqu'il entrevoit toutes les conséquences qu'il peut tirer de la fonction d'onde^{104 bis} considérée sur un intervalle de temps fini, suite aux travaux de Fermat (1607 – 1665), Huygens (1629 – 1695), Hamilton (1805 – 1865), De Broglie (1892 – 1987).

Après avoir exprimé en section 5.2.3 les avantages du nouveau point de vue de Feynman concernant le paradigme de la trajectoire basée sur l'intégrale de chemins en mécanique quantique, j'aborde en section 5.2.4 les deux postulats de Feynman qui constituent le fondement de sa nouvelle théorie.

104 bis. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 256.

Puis, appliquant ces deux postulats au calcul du propagateur de Feynman pour une particule libre, je montre que ce propagateur obéit à l'équation aux dérivées partielles de Schrödinger, prouvant ainsi le lien existant entre le noyau (kernel) de Feynman et la fonction d'onde du physicien autrichien.

Enfin, pour bien prendre conscience de la réalité physique apportée par l'intégrale de chemins, j'interprète concrètement la notion de propagateur associé à la particule libre dans le point de vue énergie / phase de la fonction d'onde.

Les publications fondamentales que j'ai consultées sont les suivantes :

- la version originale de la publication de Feynman datant d'avril 1948 que nous trouvons sur internet : « *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics* », ²⁸⁵

- la version française de cette version de 1948 : « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* », ²⁸⁶

- les travaux effectués par Feynman et Hibbs contenus dans leur ouvrage de 1965 : « *Quantum Mechanics and Path Integrals* » afin de nous aider à clarifier les choses, ²⁸⁷

- les travaux de Serge Haroche (prix Nobel de physique 2012) dont se trouve issu son excellent cours professé à l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, afin d'approfondir certains items. ²⁸⁸

5.2- La première mise en forme des idées de Feynman sur un nouveau formalisme en mécanique quantique basé sur l'intégrale de chemins

Diverses conférences sur le développement de la physique fondamentale dont fait partie l'électrodynamique quantique eurent lieu principalement en juin 1947 (Shelter Island), en avril 1948 (Pocono) et en avril 1949 (Oldstone-on-the-Hudson).

Ces réunions rassemblaient des scientifiques de haut niveau, triés parmi les plus compétents de la planète pour leurs connaissances sur les questions les plus pointues de l'époque. Des physiciens théoriciens tels que Oppenheimer, Bohr, Dirac, Lamb, Bethe, von Neumann, Schwinger, Uhlenbeck, Wheeler, Pais, y participaient.

285. Feynman. Avril 1948. « *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Review of Modern Physics. Volume 20, pages 367 à 402.

286. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, pages 63 à 101. Traduction Emile Biémont.

287. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014.

288. Haroche. 1966. « *Forme lagrangienne de la mécanique quantique* ». ENS Ulm. Cours de deuxième année du DEA de physique atomique et statistique.

Déjà bien avant la première conférence de Shelter Island, Feynman prend conscience du fait que ses interventions sont loin d'être unanimement acceptées et comprises par ses pairs. En effet, ses idées sont exprimées au moyen d'une forte intuition physique et manquent par conséquent de consistance. Aussi les arguments de Feynman destinés à convaincre son auditoire, basés sur des raisonnements plutôt atypiques, ne répondent pas au cadre rigoureux exigé par la théorie quantique de l'époque.

Les intervenants sont la plupart du temps déboutés par son concept de trajectoire que l'on sait loin d'être légitime en mécanique quantique, par le fait qu'il puisse prôner des probabilités qui varient au cours du temps et aussi parce qu'il ne se pose aucune question sur les états quantiques des particules interagissant entre elles, en vertu du principe d'exclusion de Pauli.

Chez Feynman, les aspects mathématiques sont bâtis sur des recettes personnelles faisant place aux tâtonnements. Et c'est par approximations successives qu'il arrive aux mêmes résultats que son rival Julian Schwinger, pour lequel entre en ligne de compte une rigueur mathématique indéniable, appréciée de tous, même si les travaux de Schwinger en électrodynamique quantique sont difficiles à suivre, longs, fastidieux et souvent incompréhensibles.

Retrouvant Herbert Corben, un physicien qu'il a côtoyé pendant ses années à Princeton, lors d'une conférence de l'American Physical Society en janvier 1947, Feynman confie ses difficultés à concrétiser ses idées pour les rendre accessibles.

Alors, encouragé par des amis tels que les Corben et Bethe, il entreprend de réviser son travail de thèse afin de clarifier et d'ordonner ses idées :

« *The author sincerely appreciates the helpful advice of Professor and Mrs. H.C. Corben and of professor H.A. Bethe.* »²⁸³

Mais si dans la publication d'avril 1948 Feynman interprète physiquement et avec clarté sa propre conception de la mécanique quantique, il faut bien convenir qu'il ne justifie pas de façon rigoureuse telle qu'exigé par les mathématiques, l'ensemble des résultats auquel le conduit les équations qu'il manipule.

Feynman a fortement conscience de l'inconvénient qui réside dans sa manière de procéder, puisqu'il mentionne :

« *However, one feels as Cavalieri must have felt calculating the volume of a pyramid before the invention of calculus.* »²⁸⁴

5.2.1- Les principes de Fermat et d'Huygens

En paragraphe 7 de sa publication de 1948 (*Discussion de la fonction d'onde : la limite classique*), Feynman rappelle l'importance de l'expression :

$$\Psi(x_1, t_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0,$$

qui est l'intégrale de chemins telle que nous l'avons vu en chapitre 4 §4.2 [équation (3)] équivalente à :

283. Feynman. Avril 1948. « *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Page 402.

284. Ibid. Page 397, note 22.

$$\Psi(x_1, t_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x_1, x_0)\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0,$$

pour ε infinitésimal.

A propos de cette équation, Feynman mentionne :

« Cette équation exprime l'évolution de la fonction d'onde pendant un petit intervalle de temps. Physiquement, elle est facilement interprétée comme l'expression du principe d'Huygens pour des ondes matérielles. »²⁸⁹.

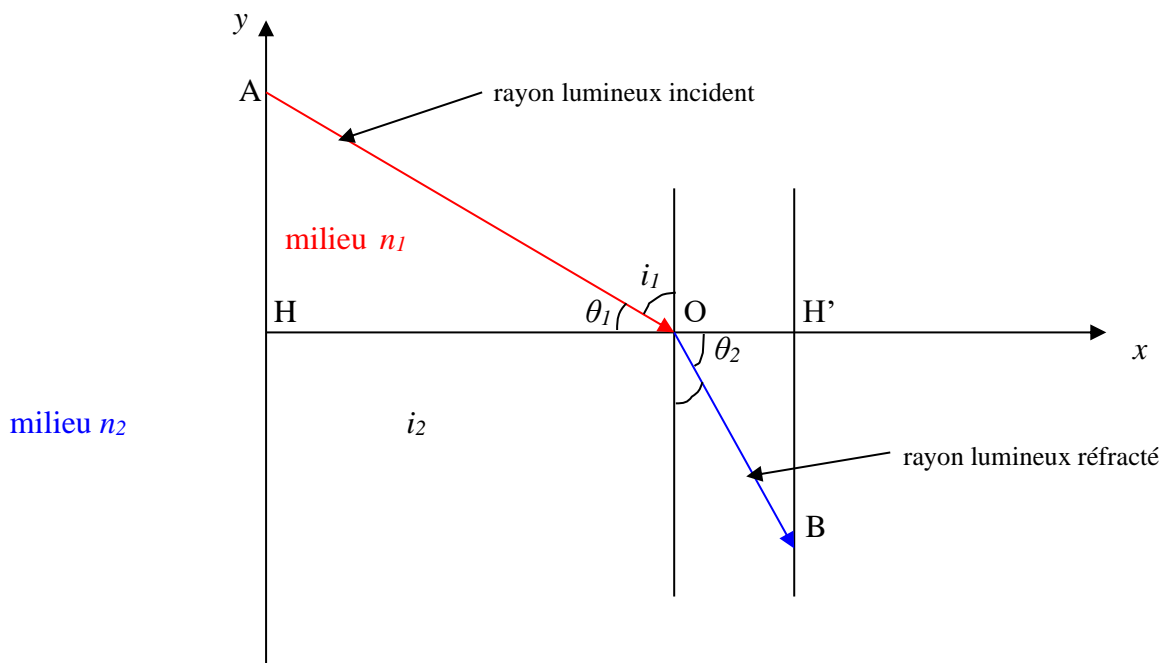
En effet, le principe d'Huygens (1629-1695) concerne la propagation de la lumière sous forme d'ondelettes transmises et retransmises successivement.

Et il ajoute :

« En optique géométrique, les rayons, dans un milieu inhomogène, satisfont le principe de Fermat du moindre temps. »²⁹⁰

Dans ce qui suit, afin de saisir ce que Feynman veut dire, évoquons le principe de Fermat du moindre temps dans l'exemple de la réfraction.

5.2.1.a) Principe de Fermat concernant la réfraction



289. Feynman. Avril 1948. « Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste ». Review of Modern Physics, Volume 20, page 82. Traduction Emile Biémont.

290. Ibid. Page 82.

Mécontent du manque de rigueur dans la démonstration de Descartes (1596-1650), Fermat (1607-1665) s'appliqua à rechercher un autre moyen pour justifier la loi de Snell-Descartes pour ce qui concerne la réfraction.

Ignorant en 1661 les indices de réfraction n_1 et n_2 des deux milieux séparés par le plan HH', Fermat parlait de résistance d'un milieu au passage de la lumière.

La démonstration que nous donnons est plus simple que celle de Fermat basée sur un argument purement géométrique d'une grande finesse, car ce dernier ne connaissait ni la vitesse de la lumière, ni le calcul différentiel (les dérivées) développé vers 1684 par Newton et Leibniz.

Soit :

$$HO = x ; HH' = l ; AH = h ; BH' = h' ; H'O = l - x$$

Le temps T mis par la lumière pour parcourir le chemin AOB est :

$$T = (n_1 AO + n_2 OB) / c,$$

soit:

$$T = (n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + n_2 \sqrt{h'^2 + (l-x)^2}) / c = T(x).$$

Le problème revient à trouver pour x une relation telle que l'expression précédente soit minimale.

Entre $x=0$ et $x \rightarrow +\infty$, la fonction $T(x)$ admet un minimum que l'on peut calculer en dérivant la fonction $T(x)$ par rapport à x et en écrivant que la dérivée dT/dx est nulle.

Calculons donc dT/dx en écrivant :

$$T = \frac{n_1 (h^2 + x^2)^{1/2}}{c} + \frac{n_2 (h'^2 + l^2 - 2xl + x^2)^{1/2}}{c}.$$

Nous savons que : $(u^n)' = nu^{n-1}u'$,

d'où :

$$[(h^2 + x^2)^{1/2}]' = [(h^2 + x^2)^{-1/2}] x$$

et :

$$[(h'^2 + l^2 - 2xl + x^2)^{1/2}]' = [h'^2 + (l-x)^2]^{-1/2} (x-l).$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n_1}{c} [(h^2 + x^2)^{-1/2}] x + \frac{n_2}{c} [h'^2 + (l-x)^2]^{-1/2} (x-l).$$

$\frac{dT}{dx} = 0$ si:

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{n_2 (l-x)}{\sqrt{h'^2 + (l-x)^2}}.$$

Sachant que :

$$\cos \theta_1 = \sin i_1 = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

et que :

$$\cos \theta_2 = \sin i_2 = \frac{(l-x)}{\sqrt{h'^2 + (l-x)^2}},$$

on obtient la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Ce résultat trouvé différemment par Fermat, le fascina. Et à la fin de 1661, il écrivit son principe de moindre temps qu'il appela « *principe d'économie naturelle* » en mentionnant que « *la nature agit toujours par les voies les plus courtes* ».

Ce principe qui constitue la base de la genèse des intégrales de chemin va déclencher le concept de mécanique analytique fondé sur le calcul des variations. En effet, comme nous l'avons vu en début de sous-section 1.2.1.f (Schrödinger et sa fonction d'onde), ce principe sera repris en mécanique par Maupertuis (1744) pour alimenter les travaux d'Euler-Lagrange (1755) sur le formalisme mathématique associé au principe de moindre action.

Le chemin parcouru par la lumière de A à B correspond au temps de parcours minimum et il s'applique à un temps stationnaire associé à une variation au premier ordre du chemin suivi, entraînant une variation du temps au second ordre (en effet pour un photon de lumière en mouvement on peut construire un lagrangien associé au principe de moindre temps, fonction de x et de la dérivée de x par rapport au temps, satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$).

Dans notre exemple précédent de la réfraction, le chemin est un chemin d'espace ordinaire décrit dans un espace en x, y et non un chemin d'espace-temps décrit en x, t comme dans le principe de Hamilton (c'est-à-dire le principe de moindre action).

Mais si la démonstration de Fermat est incontestable, comment donc le rayon lumineux trouve-t-il l'initiative de parcourir le chemin AOB correspondant au moindre temps ?

La réponse, comme nous allons le suggérer en sous-section 5.2.2, pourrait naïvement être la suivante : la connaissance du caractère ondulatoire de la lumière, suite aux travaux d'Huygens (1678), ***permet à la lumière de « sentir » instantanément tous les chemins possibles, pour prendre instantanément le chemin associé au moindre temps.***

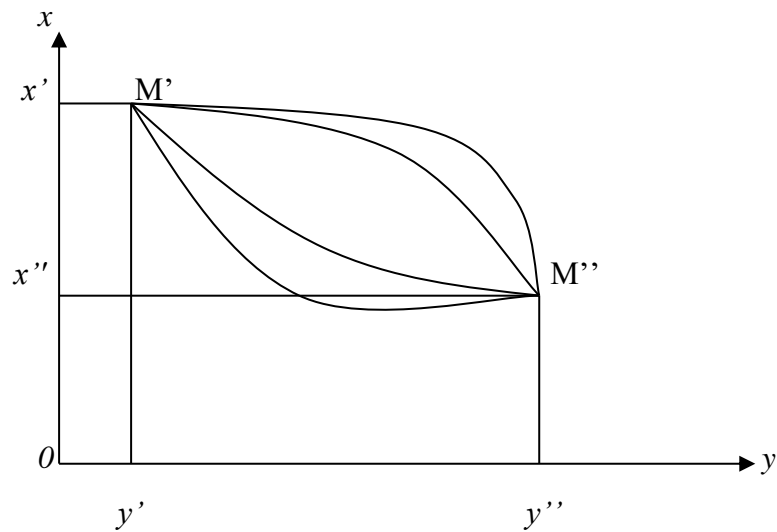
Aussi allons-nous à présent extrapoler le principe de Fermat (1607-1665) de l'optique géométrique associée au grain de lumière (ou photon) au principe d'Huygens (1629-1695) de l'optique ondulatoire, afin de saisir la pensée de Feynman lorsqu'il entrevoit toutes les conséquences qu'il peut tirer de l'équation (3) vue au chapitre 4 (§4.2) et obtenue grâce à Dirac.

5.2.1.b) Principe d'Huygens en optique ondulatoire

Feynman formule le principe d'Huygens en optique ondulatoire de la manière suivante :

« Si l'amplitude de l'onde est connue sur une surface donnée, l'amplitude en un point voisin peut être considérée comme la somme des contributions issues de tous les points de la surface. La phase de chaque contribution est différée par une quantité proportionnelle au temps que prendrait la lumière pour aller de la surface jusqu'au point sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale, conformément à l'optique géométrique. Nous pouvons considérer (23) [l'intégrale d'action S] de manière analogue en partant du premier principe de

Hamilton, *principe traduisant la moindre action pour la mécanique classique ou géométrique.* »²⁹¹



En d'autres termes, l'optique ondulatoire peut se résumer dans le principe d'Huygens qui dit que pour l'amplitude de l'onde lumineuse Ψ allant de M' à M'' , cette amplitude est une somme de contributions, une pour chaque chemin partant de M' et arrivant en M'' .

Cette contribution pour chaque chemin, dans un espace à trois dimensions, est un nombre complexe représenté par :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{-i2\pi\nu t}$$

dont nous avons parlé en 1.2.1.f concernant Schrödinger, avec :

- * $\nu = 1/T$ la fréquence de l'onde lumineuse,
- * $T = \lambda/c$ la période de vibration de l'onde lumineuse,
- * λ la longueur d'onde de l'onde lumineuse (c est la vitesse de la lumière).

En première approximation, le module $\Phi(x, y, z)$ peut être considéré comme constant et la phase est égale à :

$$2 \pi t_{chemin}/T$$

avec :

- * t_{chemin} le temps mis par une particule pour parcourir un des chemins entre M' et M'' .

En considérant, pour simplifier, un espace à une dimension de coordonnée x , nous pouvons écrire :

$$\Psi(x, t) = \Phi(x) \exp(i 2 \pi t_{chemin}/T).$$

Pour un $chemin_1$ de M' à M'' , la phase de l'onde de lumière $\Psi(x, t)$ est égale à :

$$2 \pi t_{chemin1}/T.$$

Pour un $chemin_2$ de M' à M'' , la phase de l'onde de lumière $\Psi(x, t)$ est égale à :

291. Feynman. Avril 1948. «*Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, pages 82 et 83. Traduction Emile Biéumont.

$$2 \pi t_{chemin2}/T.$$

En posant $chemin_2 - chemin_1 = d\ chemin$, la variation infinitésimale de la phase est :

$$d\ phase = (2 \pi t_{chemin2}/T) - (2 \pi t_{chemin1}/T) = \frac{2\pi dt_{chemin}}{T}$$

Pour une période de vibration de l'onde lumineuse tendant vers zéro, c'est-à-dire une longueur d'onde tendant vers zéro associée à une fréquence tendant vers l'infini, nous avons :

$$d\ phase \rightarrow \infty$$

qui montre que la phase varie extrêmement vite d'un chemin à l'autre. Aussi, les seuls chemins dont les contributions ne se détruisent pas par interférence sont ceux pour lesquels la phase est stationnaire, c'est-à-dire ceux dont une variation de chemin du premier ordre a pour conséquence une variation de phase du second ordre par rapport au temps. En fait, tout se passe comme si on pouvait ignorer tous les chemins dont la phase n'est pas stationnaire et qui ne répondent pas aux équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, c'est-à-dire comme si la lumière suivait le chemin associé au principe de Fermat. Nous pouvons donc dire que le principe d'Huygens contient le principe de Fermat dans la limite où la longueur λ de l'onde de matière (encore appelée onde pilote en section 1.2.1.d associée à la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie) tend vers zéro.

Ainsi, dans le cas où la longueur d'onde est significative, l'optique géométrique telle qu'abordée par Fermat ne s'applique plus et les phénomènes doivent être décrits au moyen du principe d'Huygens, comme c'est le cas pour les expériences de diffraction telles que l'expérience de Young.

De tout ce qui précède, la réflexion qui s'impose est que le passage de la mécanique classique à la formulation lagrangienne de la mécanique quantique repose sur la même idée de base dans laquelle il faut comparer les phases $2 \pi t_{chemin}/T$ et $2 \pi S/h$, que nous allons développer dans la section suivante.

Mais en attendant, laissons Feynman s'exprimer sur ce qui précède par rapport à l'équation (3) dont nous avons parlé au chapitre 4 :

$$\Psi(x_1, t_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x_1, x_0)\right] \Psi(x_0, t_0) dx_0$$

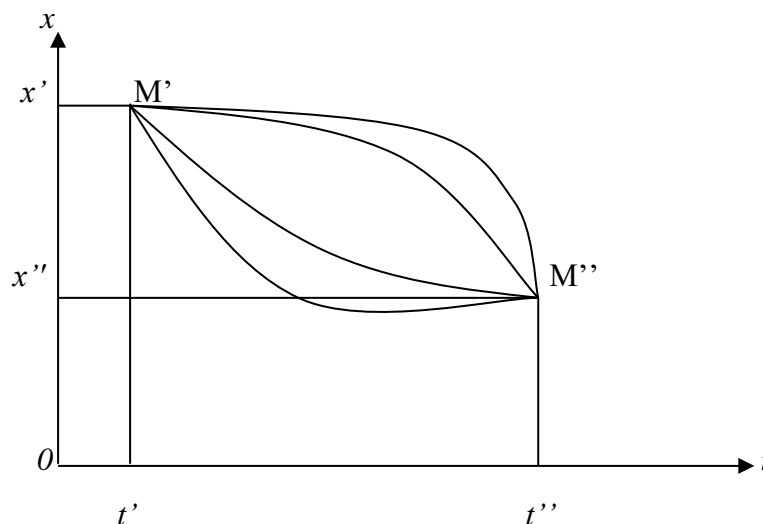
« Si l'amplitude de l'onde Ψ est connue sur une « surface » donnée, en particulier la « surface » constituée de tous les x à l'instant t , sa valeur en un point proche au temps $t+\varepsilon$, est la somme des contributions issues de tous les points de la surface à l'instant t .

Chaque contribution voit sa phase différée par une quantité proportionnelle à l'action requise pour aller de la surface au point de moindre action situé sur la trajectoire définie par la mécanique classique.

En fait, le principe d'Huygens n'est pas correct en optique. Il est remplacé par la version modifiée due à Kirchhoff, qui exige que l'amplitude et sa dérivée soient connues sur la surface adjacente à la surface considérée.

C'est une conséquence du fait que la fonction d'onde en optique est du second ordre par rapport au temps [en effet, l'équation différentielle des cordes vibrantes de d'Alembert associée aux ondes lumineuses est : $\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$: voir 1.2.1.f] . La fonction d'onde en mécanique quantique est du premier ordre par rapport au temps [en effet, l'équation de la fonction d'onde de Schrödinger en mécanique quantique est : $\Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \Psi + \frac{4\pi m i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$: voir 1.2.1.f] ; par conséquent, le principe d'Huygens est correct pour les ondes matérielles, l'action remplaçant le temps. »²⁹²

5.2.2- Idée de base de la formulation lagrangienne de la mécanique quantique : le principe de Feynman



La mécanique analytique (classique) est basée sur le **principe de Hamilton (le principe de moindre action)**, à ne pas confondre avec le formalisme du même nom. Le chemin $x(t)$ suivi par la particule correspond à l'action stationnaire. En effet, dans ce cas, le formalisme lagrangien associé au principe de moindre action (moindre temps) stipule une variation du chemin du premier ordre en x entraînant une variation du second ordre par rapport au temps, du fait que l'on puisse construire un lagrangien fonction de x et de la dérivée de x par rapport au temps, satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.

Notre réflexion s'effectue dans le contexte de l'espace-temps (x,t) et non dans celui de l'espace classique (x,y) que nous avons considéré dans ce qui précède.

292. Ibid. Page 83.

A la question-réponse se trouvant en « 5.2.1.a » concernant la nature ondulatoire de la lumière permettant au rayon lumineux (le grain de lumière) de suivre le chemin de moindre temps, vient tout naturellement l'idée suivante : ***l'aspect ondulatoire de la théorie quantique permet à la particule de « sentir » tous les chemins possibles, pour prendre le chemin associé au principe de moindre action.***

Mais comme nous en avons parlé en 5.2.1.b, la longueur d'onde de matière n'est pas forcément très faibles et donc tous les chemins possibles entre M' et M'' doivent être pris en compte. Aussi, le principe de quantification de Feynman associe une somme de contributions, une pour chaque chemin d'espace-temps allant de $M'(x',t')$ à $M''(x'',t'')$. Et nous avons vu que la contribution d'un chemin considéré s'écrit :

$$\frac{1}{C} \exp[2\pi \frac{i}{h} S],$$

avec :

* $1/C$ un coefficient de normalisation indépendant du chemin suivi,

* S l'action classique $\int_{t'}^{t''} L(x, \dot{x}, t) dt$ associée au chemin considéré,

* $\int_{x'}^{x''} \frac{1}{C} \exp[2\pi \frac{i}{h} S] dx$ l'intégrale de chemins dont l'intégration sur la fonction $x(t)$

symbolisée par dx s'appelle une intégrale fonctionnelle,

* La fonction $x(t)$ représente tous les chemins allant de M' à M'' ,

* h la constante de Planck,

* $L(x, \dot{x}, t) = E_c - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$ [voir chapitre 3]

* E_c l'énergie cinétique de la particule de masse m ,

* V l'énergie potentielle de la particule.

En comparant le raisonnement vu en 5.2.1.b, effectué en optique ondulatoire avec la longueur d'onde λ , nous pouvons écrire à juste raison que pour h tendant vers zéro, telle que peut se présenter la physique macroscopique pour laquelle S est très grand devant h , l'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de M' à M'' tend à devenir une certitude.

En d'autres termes, à la limite où $h \rightarrow 0$, les seuls chemins qui contribuent à ce que la particule soit en x'' à l'instant t'' après avoir été en x' à l'instant t' sans se détruire par interférence, correspond à une phase stationnaire, c'est-à-dire à une action stationnaire.

Ainsi, le principe de Feynman contient le principe de Hamilton à la limite où $h \rightarrow 0$.

Nous dirons donc que l'optique géométrique et la mécanique analytique classique (le monde macroscopique) présente la même analogie que l'optique ondulatoire et la mécanique quantique (le monde microscopique). En effet, l'action S de la mécanique classique est à comparer à l'écoulement du temps t de l'optique géométrique, tout comme la constante de Planck h de la mécanique quantique est à rapprocher de la période T de vibration de l'onde lumineuse.

Aussi, une expérience de mécanique quantique sera-t-elle une expérience de diffraction dans l'espace-temps, et toutes les propriétés ondulatoires de la matière vont donc apparaître dans cette nouvelle formulation de la mécanique quantique par Feynman.

Sans jamais le mentionner, Feynman utilise à bon escient le résultat des travaux de De Broglie à savoir l'unification du point de vue ondulatoire et du point de vue corpusculaire. Et ce sont bien, pour ma part, ces travaux de De Broglie qui donnent à Feynman l'idée de penser au chemin d'une particule assimilée à une fonction d'onde.

De Broglie, en conservant vis-à-vis de la mécanique quantique (contrairement à la position prise par l'Ecole de Copenhague) une vision particulière avec l'idée de la particule portée par une onde, crée un nouveau paradigme et généralise l'approche de Hamilton concernant le principe de moindre action, en mettant en correspondance la mécanique ondulatoire et l'optique.

Dans le chapitre II de sa thèse de doctorat intitulée « *Recherches sur la théorie des quanta* » et présentée le 25 novembre 1924 à Paris, De Broglie ne proposait-il pas déjà d'appliquer, plus d'une vingtaine d'années avant Feynman :

« le principe Hamiltonien à toutes les trajectoires « variées » qui conduisent d'un état initial donné à un état final donné et qui correspond à une valeur déterminée de l'énergie W . »

Nous pouvons donc désormais présenter clairement les avantages du nouveau point de vue de Feynman dans ce qui suit.

5.2.3- Les avantages du nouveau point de vue de Feynman : le paradigme de la trajectoire (le chemin)

L'approche de Feynman décrit la mécanique quantique sous une forme permettant de ressusciter la notion de trajectoire nous autorisant à prendre en compte un paradigme bien plus habituel qui est celui de la physique macroscopique.

Cette démarche donne la possibilité d'explorer des pistes intéressantes en considérant qu'une particule dotée d'une certaine énergie cinétique E_c et potentielle V , va choisir parmi tous les chemins possibles entre deux points de l'espace-temps $M'(x',t')$ et $M''(x'',t'')$, celui qui minimise l'intégrale d'action définie de la façon suivante :

$$S = \int_{t'}^{t''} L(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

avec $L = E_c - V$ une fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction de fonction, appelée fonction de Lagrange ou Lagrangien, dépendant de la position $x(t)$ et de vitesse $\dot{x}(t)$ de la particule quantique, telle que :

$$\delta S(x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

Comme nous l'avons vu en Annexe 17, en physique macroscopique lorsque S est grand devant h , l'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de M' à M'' tend à devenir une certitude.

Mais la situation devient intéressante pour Feynman lorsqu'il a à faire au monde microscopique de l'électron pour lequel l'action S devient du même ordre de grandeur que la constante de Planck h . En effet, dans ce cas, la longueur d'onde de matière se trouvant loin d'être infinitésimale, la particule n'est pas indifférente aux petites fluctuations par rapport à celle qui minimise l'action S classique ; il existe une sorte de tube de chemins autour du chemin classique associé au principe de moindre action obéissant à l'équation $\delta S = 0$ ci-avant, et tous ces chemins dans cette sorte de tube, jouxtant le chemin classique, ont une contribution non nulle dans l'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de M' à M'' .

Pour Feynman, comme exprimé dans le paragraphe 2 (*La superposition des amplitudes de probabilité*) de sa publication de 1948²⁹³, le calcul associé à l'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de M' à M'' peut se voir comme la somme sur tous les chemins possibles en attribuant à chacun d'eux un poids bien défini :

« ... un chemin est seulement défini par les positions x_i par lesquelles il passe lors d'une séquence de moments également séparés dans le temps, $t_i = t_{i-1} + \varepsilon$. Ensuite, toutes les valeurs des coordonnées à l'intérieur de R [c'est-à-dire du chemin considéré] ont un même poids égal. La grandeur du poids dépend de ε et peut être choisie de manière telle que la probabilité d'un événement, qui est certain, soit normalisée à l'unité. Ce n'est peut être pas la meilleure manière de procéder mais nous avons incorporé ce facteur de poids dans une constante de proportionnalité apparaissant dans un second postulat. »²⁹⁴

Feynman s'exprime ainsi à propos de son premier postulat que nous allons analyser en 5.2.4.a.

Notons qu'il introduit ce qu'il va nommer son deuxième postulat à propos d'une constante de proportionnalité incorporant son facteur de poids.

Le poids C en question, pour un chemin donné, a été déterminé au chapitre 3.

Ainsi le principe de Feynman associe à la transition de la particule du point M' au point M'' une amplitude de probabilité sous la forme d'un nombre complexe $K(x'',x')$ lu de droite à gauche.

Dans sa publication de 1965, Feynman donne le nom de noyau (kernel) à ce nombre complexe $K(x'',x')$ ²⁹⁵.

Le noyau $K(x'',x')$ contenant par définition la somme de toutes les amplitudes partielles associées à chaque chemin allant du point M' au point M'' , a pour expression²⁹⁶ :

$$K(x'',x') = \sum \Phi[x(t)]$$

tous les chemins de x' à x''

dans laquelle $x(t)$ définit un chemin entre x' et x'' .

293. Ibid. Pages 65 à 69.

294. Ibid. Page 71.

295. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Pages 35 à 38.

296. Ibid. page 29.

De plus, le principe de Feynman consiste à postuler, pour un dispositif quelconque, que la phase de l'amplitude complexe $\Phi(x,t)$ correspondant à un chemin donné, soit égale à l'action classique le long de ce chemin calculée par la formule :

$$S = \int_{t'}^{t''} L(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

et divisée par la constante de Planck réduite $\hbar = h/2\pi$ telle que :

$$\Phi[x(t)] = \frac{1}{C} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x(t))\right].$$

Nous avons montré au chapitre 3 comment Feynman fixe la constante de normalisation C . Notons bien évidemment que la valeur de l'action n'est pas nécessairement égale à l'extrémum correspondant à une trajectoire classique.

Tout le problème pour Feynman était de trouver une forme mathématique pour l'amplitude $\Phi[x(t)]$ qui tienne compte du fait que seules les actions proches de \hbar provoquent des comportements purement quantiques.

Et pour le physicien américain, l'idée la plus ingénieuse était, comme nous l'avons vu au chapitre 4, de se référer à la solution de l'équation de Schrödinger, fonction du terme $\exp[-\frac{i\varepsilon}{\hbar} H]$, pour l'extrapoler à l'action classique de la particule le long du chemin $M'M''$, afin de considérer le facteur de proportionnalité :

$$\exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\right]$$

avec :

$$\varepsilon L = S = \int_{t'}^{t''} L(x, \dot{x}, t) dt \quad \text{pour } \varepsilon \text{ infinitésimal.}$$

Mais laissons, à ce propos, Feynman s'exprimer :

Feynman s'exprime ainsi à propos de son deuxième postulat que nous allons analyser en 5.2.4.b.

En généralisant le principe de moindre action à la mécanique quantique (voir 5.2.2), Feynman suggère donc que la dynamique aux échelles microscopiques obéit à la loi du moindre temps de la nature.

Et cette nouvelle formulation de la mécanique quantique (le principe de Feynman) conduit à une réduction toute naturelle, pour ainsi dire de fait, du paquet d'onde, offrant un cadre conceptuel nouveau qui nous rapproche du paradigme de la mécanique classique par cette notion de trajectoire c'est-à-dire de chemin suivi par une particule.

En effet, dans la théorie quantique associée à l'École de Copenhague, la fonction d'onde au moment de la mesure passe par un état propre de l'opérateur correspondant à la grandeur mesurée, qui constitue ce que l'on appelle la réduction du paquet d'ondes. Et c'est justement lors de cette réduction du paquet d'ondes que se manifeste la nature probabiliste de la physique quantique ; alors que chez Feynman la nature probabiliste se manifeste par la notion de chemins de la particule d'un point à un autre de l'espace-temps.

Ainsi, l'approche de Feynman a été accueillie dès 1950 avec un profond apaisement de la part de la communauté scientifique car elle contribuait à atténuer le flou des théories quantiques de

Heisenberg et de Schrödinger, qui souffrent encore d'un problème épistémologique certain. Nous dirons que l'apport de Feynman a permis de penser la mécanique quantique autrement et même de la comprendre.

Pour résumer, les avantages évidents du nouveau point de vue de Feynman sont :

- * qu'il donne un sens physique plus clair à la correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique,
- * qu'il associe une amplitude de probabilité à une histoire entière, ou chemin, du système au lieu de considérer des amplitudes de probabilité pour un état quantique à un instant donné. Ceci, comme nous le verrons dans le chapitre 8, va se révéler souvent très fructueux. En effet, le principe de Feynman est applicable à des systèmes autres que mécanique, à la condition sinéquanum que les équations découlent du principe variationnel. Ce sera le cas pour le champ électromagnétique dont les équations de Maxwell se déduisent d'un lagrangien associé à l'action stationnaire que constitue le principe de moindre action. En théorie quantique des champs, la quantification se fera en associant à chaque histoire du champ une amplitude de probabilité proportionnelle à $\exp[2\pi\frac{i}{h}S]$,
- * qu'il est associé au contexte de l'espace-temps permettant très facilement un passage à la relativité restreinte. En effet, il suffit de prendre pour l'écoulement du temps associé à la particule en mouvement, son temps propre τ . Ainsi, en considérant l'intégrale d'action $S = \int L dt$, avec pour L une fonction scalaire d'espace-temps, le nouveau formalisme de la mécanique quantique de Feynman conduit à une action S sous forme d'un scalaire traduisant les propriétés de l'invariance relativiste.

5.2.4- Les deux postulats de quantification de Feynman

Dans les deux sections suivantes, nous allons analyser de manière précise et en détail comment Feynman concrétise ses idées à travers les deux postulats qui constituent le fondement de sa théorie. Pour cela, nous étudions respectivement les pages 70 et 72 de sa publication de 1948.²⁹⁸ Puis, en 5.2.4.c, nous nous intéressons à l'application de ces deux postulats à propos du système le plus simple constitué d'une particule libre, pour retrouver le noyau (kernel) mentionné par Feynman dans ses travaux avec Albert Hibbs^{298 bis} ; il s'en suivra l'interprétation physique du propagateur libre obtenu.

5.2.4.a) Postulat 1 de Feynman

298. Ibid. Pages 70 et 72.

298 bis. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Page 42.

Le premier postulat de Feynman est relatif à la quantité $\langle x''t''|x't' \rangle$ représentant l'amplitude de probabilité que la particule, au point x' à l'instant t' , se trouve au point x'' à l'instant t'' . Il est intéressant de rappeler comment cette amplitude de probabilité se présente dans la théorie quantique de Schrödinger.

5.2.4.a.1) Amplitude de probabilité dans la théorie quantique de Schrödinger

Dans la théorie quantique de Schrödinger, interprétée par Max Born, telle que définie à la fin de la sous-section 1.2.1.f, la densité de probabilité de présence $P(x'')$ de la particule quantique est :

$$P(x'') = |\Psi(x'')|^2.$$

Si l'observable X'' représente la position x'' de la particule, nous avons vu au chapitre 4 que l'équation aux valeurs propres indépendante du temps est :

$$X''|x''\rangle = x''|x''\rangle$$

avec :

- * x'' la valeur propre de l'observable X'' ,
- * $|x''\rangle$ le vecteur propre relatif à la valeur propre x'' , associé à la réduction du paquet d'onde matérialisé par la fonction d'onde $\Psi(x'',t'')$.

Compte-tenu de ce nous avons vu en Annexe 13, nous pouvons écrire :

$$P(x'') = |x''\rangle \cdot |x''\rangle = |x''\rangle |x''\rangle \cos \theta = |x''\rangle|^2 = |\Psi(x'')|^2.$$

En effet, dans la représentation X'' , le vecteur d'état quantique $|\Psi(t)\rangle$ est représenté par sa fonction d'onde :

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \Psi(x,t).$$

Aussi, dans le point de vue de Schrödinger, l'évolution du vecteur d'état quantique $|\Psi(t)\rangle$ est décrite à l'aide de l'opérateur d'évolution $U(t'',t')$ tel que :

$$|\Psi(t'')\rangle = U(t'',t') |\Psi(t')\rangle$$

c'est-à-dire:

$$|x''\rangle = U(t'',t') |x'\rangle.$$

Ainsi, comme exprimé en Annexe 13 §3, nous pouvons écrire:

$$|x''\rangle \cdot |x''\rangle = \langle x''|x''\rangle = \langle x''| U(t'',t') |x'\rangle.$$

D'où l'écriture :

$$\langle x''t''|x't' \rangle = \langle x''| U(t'',t') |x'\rangle,$$

représentant la fonction de Green de l'équation de Schrödinger, avec :

- * $U(t'',t')$ le propagateur ou opérateur de Green,
- * $\langle x''t''|x't' \rangle$ l'amplitude de probabilité $|\Psi(x'')|^2$ pour que la particule, au point x' à l'instant t' , se trouve au point x'' à l'instant t'' .

Notons que $\langle x''t''|x't' \rangle = |K(x'',x')|^2$, avec :

* $K(x'',x')$ exprimant le noyau (kernel) défini par Feynman dans sa publication de 1965 comme nous l'avons vu en section 5.2.3 ci-avant et dans sa conférence Nobel ³⁰².

5.2.4.a.2) Amplitude de probabilité dans la théorie quantique de Feynman

Dans le résumé de sa publication de 1948, Feynman exprime le premier postulat de sa théorie quantique de manière suivante :

« *La probabilité de trouver une particule avec un chemin $x(t)$ quelque part dans une région de l'espace-temps est le carré d'une somme de contributions, une pour chaque chemin de la région.* »³⁰³

Ainsi, l'expression $\langle x''t''|x't' \rangle$ vue précédemment en « 5.2.4.a.1 » est maintenant constituée par une somme de contributions, une pour chaque chemin d'espace-temps reliant le point $M'(x't')$ au point $M''(x''t'')$.

Mais si nous sommes capable d'énoncer de façon précise les idées de Feynman en nous attachant au cheminement de sa pensée, il n'en demeure pas moins que la notion de sommation sur chaque chemin reste ambiguë et pose des problèmes délicats d'analyse fonctionnelle ; en effet, comme nous en avons parlé au chapitre 4, il n'est pas prouvé que la série associée à un chemin quelconque de la région R de l'espace-temps, pour une division de l'échelle des temps aussi fine soit-elle, soit convergente. De même que pour l'ensemble des séries associées à ce premier postulat qui conduit Feynman à autoriser, sans préalable mathématique étayé rigoureusement, la sommation sur tous les chemins de l'espace-temps entre M' et M'' .

On peut aussi se poser, chez Feynman, la question du bien fondé de l'application du principe de moindre action classique, c'est-à-dire continu, relativement à un laps de temps ε infinitésimale (une découpe) pour ensuite recoller les morceaux. En effet, aussi petit que soit ε les morceaux recollés bout à bout ne déterminent pas un chemin continu.

En définitive, tout ce à quoi on peut se raccrocher est bien la publication de Dirac ³⁰⁴, suggérant « *qu'il existe un analogue quantique de $\exp(iS/\hbar)$, le terme S désignant l'intégrale sur une région particulière de l'espace-temps de la densité lagrangienne classique, correspondant à l'expression $\langle x''t''|x't' \rangle = K(x'',x')$ de la théorie des particules [notation $\langle x''t''|x't' \rangle$ chez Dirac]. Cette expression $\langle x''t''|x't' \rangle$ est une fonction des valeurs des coordonnées, aux extrémités de l'intervalle temporel auquel elle se rapporte, et c'est pourquoi nous nous attendons à ce qu'il existe un analogue quantique (plus précisément une fonctionnelle) des valeurs des coordonnées aux frontières de la région de l'espace-temps. Cet analogue quantique sera, en quelque sorte, une "fonction de transformation généralisée" ».*

L'intégrale d'action S , définie pour la durée t' à t'' égale à ε , et divisée par la constante de Planck \hbar , joue le rôle de phase dans le plan complexe associé à une représentation dans laquelle le module serait égal à l'unité. Par là même, la conception de la nature fondée sur la notion discontinue de quantum d'énergie cher à Max Planck est respectée.

302. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 255.

303. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, page 63. Traduction Emile Biémont.

304. . Dirac. « *Le lagrangien en mécanique quantique* ». 1933. Traduction Emile Biémont. Page 110.

Ces problèmes d'analyse fonctionnelle feront l'objet du chapitre 7.

En attendant, explicitons le premier postulat de façon plus synthétique que nous ne l'avons fait au chapitre 4.

Comme nous l'avons vu dans un premier temps au chapitre 4, Feynman va plus loin que Dirac. Aussi, à la place d'une intégrale sur une valeur de ε infinitésimale, il imagine « un grand nombre d'intégrales, à la suite l'une après l'autre »³⁰⁵, afin de considérer un intervalle de temps fini. En effet, sans encore donner le nom de chemin à ce nouveau concept quantique de trajectoire d'une particule, il adopte l'hypothèse de Dirac en considérant la fonction $x(t)$ discontinue entre $M'(x',t')$ et $M''(x'',t'')$. Il n'a pas, en effet, été question pour Feynman de définir une trajectoire par la donnée d'une fonction continue $x(t)$ entre (x',t') et (x'',t'') du fait, comme nous l'avons vu en 5.2.1, de son interprétation de l'évolution de la fonction d'onde comme l'expression du principe d'Huygens.³⁰⁶

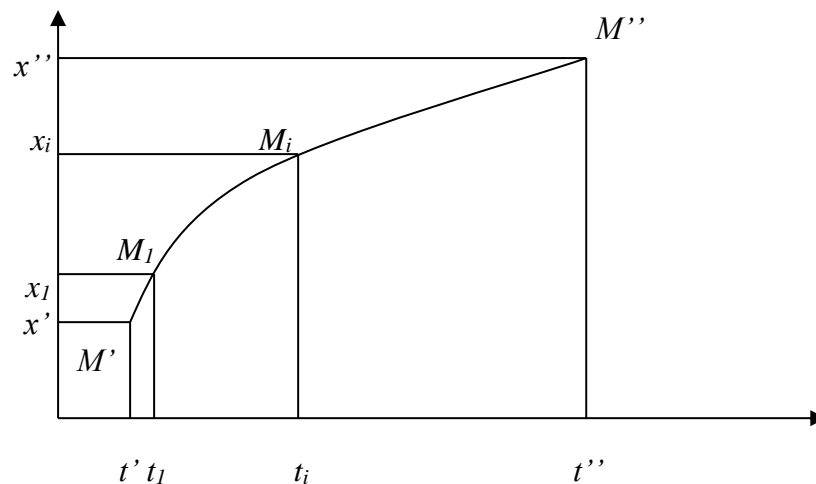
Alors, il divise l'intervalle $t't''$ en n intervalles égaux ε par $(n-1)$ temps intermédiaires t_i, t_{i+1}, \dots conformément à la suite double suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc} t' & t_1 & t_2 & \dots & t_i & t_{i+1} & \dots & t_{n-1} & t'' \\ x' & x_1 & x_2 & \dots & x_i & x_{i+1} & \dots & x_{n-1} & x'' \end{array}$$

correspondant aux points d'espace-temps :

$$M' \quad M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_i \quad M_{i+1} \quad \dots \quad M_{n-1} \quad M''$$

Puis il fait tendre ε vers zéro, ce qui revient à ce que $n = \frac{(t''-t')}{\varepsilon}$ tende vers l'infini, mais sans cependant obtenir une suite des points M d'espace-temps correspondant à un chemin continu $x(t)$.



L'idée de Feynman était de concevoir le chemin de manière complète en postulant la jonction de deux points consécutifs M_i et M_{i+1} d'espace-temps et de considérer que cette jonction défini le chemin classique par le lagrangien $L(x(t), \dot{x}(t))$.

305. Feynman. 1965. « L'électrodynamique quantique et l'espace-temps ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 257.

306. Feynman. Avril 1948. « Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste ». Review of Modern Physics, Volume 20, chapitre 7, page 82. Traduction Emile Biéumont.

Ainsi, par cette définition complète du chemin d'une particule entre M' et M'' , Feynman peut paramétrer, grâce à x_i , l'ensemble des chemins et envisager la somme sur tous ces chemins, ce qui revient à intégrer $(n-1)$ fois sur les paramètres x_i , tel que montré par l'équation (9) suivant se trouvant dans sa publication ³⁰⁷ :

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) dx_i dx_{i+1} \dots$$

Feynman exprime les $(n-1)$ intégrales $\int \dots \int$ par le symbole \int_R en s'exprimant de la manière suivante :

« ... le symbole \int_R signifiant que l'intégration doit être considérée sur les domaines des variables (x_1, x_2, \dots) qui se trouvent à l'intérieur de la région R

En mécanique quantique, ce cas correspond à la formule correcte pour la situation où $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ sont tous mesurés et où seulement les chemins se trouvant à l'intérieur de R sont retenus. ...

Nous nous attendons à ce que la probabilité pour que la particule soit trouvée, par notre "mesure idéale" dans la région R soit donnée par la carré d'un nombre complexe $|\Phi(R)|^2$. »³⁰⁸

Notons attentivement que Feynman intègre toujours sur les $(n-1)$ intégrales associées à des différentielles allant de dx_1 à dx_{n-1} malgré des coordonnées spatiales allant de x_0 à x_n pour la raison suivante :

« We do not integrate over x_0 or x_n because these are the fixed end points x' and x'' . »³⁰⁹

Feynman donne à $\Phi(R)$ le nom d'amplitude de probabilité, en poursuivant :

« Le nombre complexe $\Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots)$ est une fonction des variables x_i définissant le chemin. Nous imaginons en fait que le petit intervalle de temps ε tend vers zéro de manière telle que Φ dépende essentiellement du chemin entier plutôt que des seules valeurs x_i à des moments particuliers $t_i, x_i = x(t_i)$.

Nous pouvons appeler Φ la fonctionnelle de l'amplitude de probabilité du chemin $x(t)$.

Nous pouvons synthétiser ces idées dans le premier postulat suivant :

I. Si une mesure idéale est réalisée pour déterminer si une particule possède un chemin se trouvant dans une région précise de l'espace-temps, alors la probabilité que le résultat soit affirmatif est donnée par le module carré d'une somme de contributions complexes, une pour chaque chemin situé dans la région. »³¹⁰

Le second postulat que nous définissons ci-après va nous donner la valeur de Φ .

5.2.4.b) Postulat 2 de Feynman : la relation fondamentale $\langle x''t'' | x't' \rangle$

« Les chemins contribuent également en grandeur mais la phase de leur contribution est l'action classique (en unité de \hbar), c'est-à-dire l'intégrale temporelle du lagrangien considéré le long du chemin.

307. Ibid. Page 70.

308. Ibid.

309. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Page 33.

310. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, chapitre 3, page 70. Traduction Emile Biémont.

Cela revient à dire que la contribution $\Phi[x(t)]$ pour un chemin donné $x(t)$ est proportionnelle à $\exp(\frac{i}{\hbar} S[x(t)])$, où l'action

$$S[x(t)] = \int L(\dot{x}(t), x(t)) dt$$

est l'intégrale temporelle du lagrangien classique $L(\dot{x}(t), x(t))$ considéré le long du chemin en question. Le lagrangien, qui peut dépendre explicitement du temps, est une fonction de la position et de la vitesse. ... Nous allons supposer que la fonction $x(t)$, dans l'intervalle compris entre t_i et t_{i+1} , est le chemin suivi par une particule classique, caractérisée par le lagrangien L , qui démarre en x_i au temps t_i pour arriver au point x_{i+1} au temps t_{i+1} . Cette hypothèse est requise pour interpréter le second postulat dans le cas de chemins discontinus. »³¹¹

En d'autres termes, la contribution de chacun des chemins est définie au facteur C de normalisation près dont nous avons déjà parlé et qui est le même pour tous les chemins (fixé par ϵ , dépendant de π , de \hbar et de la masse de la particule.

Cette contribution est égale à :

$$\text{Exp } \frac{i}{\hbar} S$$

avec :

- * S l'action classique calculée le long du chemin,
- * $\frac{S}{\hbar}$ sans dimension du fait que l'unité d'action \hbar est en $J.s$.

« Puisque le chemin classique est celui qui rend l'action minimale, nous pouvons écrire »³¹² :

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S(x_{i+1}, x_i),$$

avec :

- * $x_0 = x'$ au point d'espace-temps M' ,
- * $S(x_i, x_{i+1})$ l'action prise le long du chemin suivi par une particule classique entre M_i et M_{i+1} , soit³¹³ :

$$S(x_i, x_{i+1}) = \text{Min} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L[x(t), \dot{x}(t)] dt .$$

Feynman combine donc les postulats 1 et 2 et écrit **la relation fondamentale** suivante³¹⁴ :

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int \dots \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i, x_{i+1}) \right] \cdot \frac{dx_1}{C} \dots \frac{dx_i}{C} \frac{dx_{i+1}}{C} \dots \frac{dx_{n-1}}{C} ,$$

avec les $(n-1)$ intégrales $\int \dots \int$ représentées par le symbole \int_R .

311. Ibid. Page 72.

312. Ibid.

313. Ibid.

314. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, chapitre 3. Traduction Emile Biémont. Page 73.

Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Page 33.

Pour ce qui concerne cette relation, Feynman mentionne la constante de normalisation $1/C$ qu'il va déterminer plus tard comme nous l'avons montré au chapitre 4 dans l'exemple d'une particule soumise à un potentiel électrique.

Pour une particule libre, c'est-à-dire exempte de tout champ environnemental, le calcul de $1/C$ s'effectue dans la sous-section suivante.

Rappelons encore comme nous l'avons vu en section 5.2.2 afin de bien fixer les esprits, que, pour la limite classique \hbar tendant vers zéro équivalente au monde macroscopique pour lequel l'action n'a pas le même ordre de grandeur que la constante de Planck, les seuls chemins dont les contributions ne se détruisent pas par interférence sont ceux qui correspondent à l'action stationnaire par rapport à la variation des x_i , c'est-à-dire les chemins classiques du principe de Hamilton de la moindre action. Ces chemins donnent la trajectoire résultante associée au principe de moindre temps de l'optique géométrique de Fermat basée sur la notion corpusculaire des ondes lumineuses (les photons).

5.2.4.c) Application des deux postulats au calcul du propagateur de Feynman (le noyau ou kernel) pour une particule libre

Il est intéressant dans le cadre épistémologique de notre travail, de calculer le propagateur de Feynman pour le système le plus simple constitué d'une particule qui n'est soumise à aucun champ.

Pour cette analyse, nous nous inspirons des travaux à la fois originaux et d'une grande finesse effectués par Serge Haroche (prix Nobel de physique 2012) ³¹⁵.

Une particule libre classique se propage selon un mouvement rectiligne uniforme entre les points d'espace-temps M_i et M_{i+1} à la vitesse constante $v = (x_{i+1} - x_i)/\varepsilon$.

Le lagrangien étant égal à $E_c = \frac{1}{2} m v^2$, l'action correspondante est :

$$S(x_i, x_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} m \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} \right)^2 dt = \frac{1}{2} m \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} \right)^2 [t]_{t_i}^{t_{i+1}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} \right)^2 \varepsilon = \frac{m}{2\varepsilon} (x_{i+1} - x_i)^2$$

On peut donc écrire la relation fondamentale trouvée par Feynman en 5.2.4.b :

$$\langle x^n | x'^n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int \dots \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i, x_{i+1}) \right] \cdot \frac{dx_1}{C} \dots \frac{dx_i}{C} \frac{dx_{i+1}}{C} \dots \frac{dx_{n-1}}{C},$$

de la façon suivante :

$$\langle x^n | x'^n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^{-n} \int \dots \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m}{2\varepsilon} (x_{i+1} - x_i)^2 \right] \cdot \frac{dx_1}{C} \dots \frac{dx_i}{C} \frac{dx_{i+1}}{C} \dots \frac{dx_{n-1}}{C},$$

(n-1) fois

315. Haroche. 1966. « *Forme lagrangienne de la mécanique quantique* ». ENS Ulm. Cours de deuxième année du DEA de physique atomique et statistique.

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^{-n} \int \dots \int \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} [(x_1 - x')^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (x'' - x_{n-1})^2] \cdot dx_1 \dots dx_{n-1} .$$

(n-1) fois

Notons que dans l'exposant de l'exponentielle, nous trouvons n termes au carré, c'est-à-dire autant qu'intervalles entre les points d'espace-temps M' et M'' .

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} (x_1 - x') &= u_1 \\ (x_2 - x_1) &= u_2 \\ &\vdots \\ (x'' - x_{n-1}) &= u_n \end{aligned}$$

La relation $u_1 + u_2 + \dots + u_n = x'' - x'$ relie les n variables u_1, u_2, \dots, u_n entre elles.

Pour intégrer sur les n variables, Haroche fait intervenir la relation de distribution $\delta(x'' - x' - u_1 - u_2 - \dots - u_n)$ qu'il concrétise de la manière suivante :

$$\delta(X) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{KX}{\hbar} \right] dK ,$$

avec $X = x'' - x' - u_1 - u_2 - \dots - u_n = \zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n$ par le fait de poser $\zeta = x'' - x'$.

On a alors :

$$\int \dots \int_{(n-1) \text{ fois}} dx_1 \dots dx_{n-1} \rightarrow \int \dots \int_{n \text{ fois}} du_1 \dots du_n \delta(X) .$$

En posant $t'' - t' = n\varepsilon = \theta$, on obtient :

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = C^{-n} \int \dots \int_{n \text{ fois}} du_1 \dots du_n \delta(X) \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} [u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2] .$$

Compte-tenu du choix effectué sur l'écriture des variables, on peut écrire ;

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = C^{-n} \int \dots \int_{n \text{ fois}} du_1 \dots du_n dK \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{K}{\hbar} (\zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n) \right] \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} [u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2]$$

puis en intégrant dans un premier temps sur u_1, u_2, \dots, u_n et dans un deuxième temps sur K , comme montré en Annexe 22, on obtient :

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = \left[\frac{m}{2\pi\hbar i(t'' - t')} \right]^{1/2} \cdot \exp \left(\frac{im(x'' - x')^2}{2\hbar(t'' - t')} \right) ,$$

qui est l'expression définitive du propagateur, trouvée par Feynman, pour la particule libre (free-particle kernel³¹⁶) que l'on nomme « *propagateur libre* ».

Il est intéressant de montrer que le propagateur libre de Feynman obéit à l'équation aux dérivées partielles de Schrödinger pour la particule libre :

L'équation temporelle de Schrödinger associée au propagateur libre de Feynman s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \langle x''t''|x't' \rangle}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \langle x''t''|x't' \rangle}{\partial x^2}$$

Posons :

$$* M'(x't') = M'(00)$$

$$* M''(x't'') = M''(xt),$$

le propagateur s'écrit alors :

$$\langle xt|00 \rangle = \left[\frac{m}{2\pi\hbar it} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right).$$

Calculons le membre de gauche de l'équation de Schrödinger associé au propagateur :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\langle xt|00 \rangle \right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\left[\frac{m}{2\pi\hbar it} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \right],$$

nous obtenons:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\left[\frac{m}{2\pi\hbar it} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \right] = \left[\frac{-i^{1/2}\hbar^{1/2}m^{1/2}t^{-3/2} - i^{3/2}\hbar^{-1/2}m^{3/2}t^{-5/2}x^2}{\pi^{1/2}2^{3/2}} \right] \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right).$$

Calculons le membre de droite de l'équation de Schrödinger associé au propagateur :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \langle xt|00 \rangle}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left[\frac{m}{2\pi\hbar it} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \right],$$

nous obtenons:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left[\frac{m}{2\pi\hbar it} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \right] = \left[\frac{-i^{1/2}\hbar^{1/2}m^{1/2}t^{-3/2} - i^{3/2}\hbar^{-1/2}m^{3/2}t^{-5/2}x^2}{\pi^{1/2}2^{3/2}} \right] \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right),$$

prouvant le lien entre le noyau (kernel) $\langle x''t''|x't' \rangle$ de Feynman avec la fonction d'onde de Schrödinger.

5.2.4.d) Interprétation physique du propagateur de Feynman pour la particule libre

316. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Pages 42 et 43, équation 3.3.

Pour traiter à bien cette partie, en plus de la publication de 1948^{316bis}, nous analysons les travaux contenus dans la publication de Feynman datant de 1965³¹⁷, ainsi que ceux de Jean-Louis Basdevant contenus dans sa publication de 2005³¹⁸ et dans les deux fascicules de son cours enseigné à l'Ecole Polytechnique³¹⁹.

Après avoir présenté ses deux postulats, étayé le fait que sa théorie présente une équivalence avec celle de Schrödinger, discuté de la limite classique pour la fonction d'onde, c'est-à-dire tout ce dont nous avons parlé précédemment, Feynman dans les chapitres 9 à 14 de sa publication de 1948³²⁰, s'attache à raccrocher les principes de sa théorie à des questions pragmatiques telles que l'équation de Newton du mouvement, l'énergie cinétique et l'impulsion (la quantité de mouvement : momentum).

Cependant, son analyse reste très théorique car principalement axée sur sa volonté de prouver essentiellement toute l'efficacité que sa théorie peut présenter par rapport aux théories de Heisenberg et de Schrödinger. Contrairement à son habitude, il ne réussit pas à prendre tout le recul nécessaire pour véritablement convaincre ses lecteurs et collègues de toute la nature physique se cachant derrière les équations qu'il manipule. Peut-être n'a-t-il pas lui-même, à l'époque, saisi toute la portée de sa théorie en pleine gestation. Toujours est-il qu'il faudra attendre sa publication de 1965³²¹ avec Albert Hibbs pour appréhender le sens physique que l'on peut attribuer aux intégrales de chemins. Aussi, ne faut-il pas nous étonner de la reconnaissance tardive de ses travaux lors de la réunion de l'American Physical Society en janvier 1949, et ceci d'une manière plus ou moins fortuite. En effet, suite à une objection de Oppenheimer sur les travaux présentés par Slotnik en contradiction avec ceux de Kenneth Case, jeune physicien en post-doctorat à l'*institute for Advanced Study* de Princeton, il compare ses calculs d'une nuit avec ceux de Slotnik dont il a fallu plus de six mois pour parvenir aux mêmes résultats que les siens et encore beaucoup moins détaillés³²².

Déconcertant Oppenheimer³²³, présent à la réunion, par la mise en évidence des erreurs associées au "théorème de Case" sur l'interaction d'un électron avec un neutron, Feynman confie dans sa conférence Nobel :

« Il était facile de calculer ce que devenaient mes expressions pour Q nul (Q est la quantité de mouvement transférée par l'électron, qui dépend de son angle de déflexion), et je retrouvais exactement ses résultats (les résultats de Slotnick). Mais il lui avait fallu six mois pour ne traiter que le cas du transfert de quantité de mouvement nul, alors qu'en une soirée, j'avais obtenu la réponse pour toutes les valeurs de ce transfert. Ce fut pour moi un moment de triomphe – comme celui où j'ai reçu le prix Nobel – car j'en tirais la conviction, enfin, que je possédais une méthode et une technique pour faire ce que personne ne savait faire. En ce moment de triomphe, je compris que j'avais vraiment réussi à construire quelque chose de sérieux.

316 bis. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20. Traduction Emile Biéumont.

317. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014.

318. Basdevant. 2005. « *Principes variationnels et dynamique* ». Vuibert.

319. Basdevant. 1994. « *Mécanique quantique : Tome I et II* ». Cours du Département de Physique de l'Ecole Polytechnique.

320. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, chapitres 9 à 14. Traduction Emile Biéumont.

321. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014.

322. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 270.

323. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* ». Pages 266 à 269.

A ce stade on me pressa de publier. Le bruit circulait que j'avais une façon commode de faire les calculs et tout le monde voulait l'apprendre. Je fis donc cette publication³²⁴ (que nous allons analyser en section 2.4 suivante) ... Néanmoins, on ne peut connaître bien plus de vrai qu'on ne peut en prouver. »³²⁵

Le véritable succès de Feynman a lieu lors de la conférence d'Oldstone-on-the-Hudson du 11 au 14 avril 1949 lorsque sa théorie et ses méthodes commencent à être connues et lorsque Dyson présente ses travaux sur l'équivalence des théories de Schwinger, de Tomonaga et de Feynman sur la théorie de l'électrodynamique quantique. Ces trois physiciens théoriciens se partageront le prix Nobel de physique de 1965 pour l'ensemble de leurs travaux.

En travaillant sur les publications présentées en début de cette sous-section 5.2.4.d, essayons d'élucider maintenant dans les sous-sections suivantes 5.2.4.d.1 à 5.2.4.d.3, la nature physique de l'amplitude $\langle x''t''|x't' \rangle$ et son lien avec une amplitude de probabilité physique.

5.2.4.d.1) Energie et Impulsion

Rappelons l'expression du propagateur libre de Feynman vu précédemment :

$$\langle xt|00 \rangle = \left[\frac{m}{2\pi\hbar it} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right).$$

Il semble que l'onde associée à une particule soit localisée au voisinage de ce corpuscule dans un domaine fini de l'espace et soit représentée par un paquet d'ondes sous la forme d'un train d'ondes.

La fonction d'onde du paquet d'ondes s'écrit sous la forme spatiotemporelle générale de la manière suivante :

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \cdot \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$$

Avec:

* $f(\omega)$ le spectre de ce paquet d'ondes,

* ω les pulsations du spectre du paquet d'ondes telle que pour une onde nous ayons ω

$$= -\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

* \vec{k} les vecteurs d'onde dont la direction indique la normale aux surfaces d'onde, ce qui pour un milieu homogène correspond à la direction de propagation de chacune des ondes planes monochromatiques composant le paquet d'ondes.

La dépendance spatiale de la phase de l'onde est donnée par $\Phi = \vec{k} \cdot \vec{x}$, que l'on peut formuler

$$\text{par } \vec{k} = \text{grad } \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

324. Feynman. « *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics* ». Physical Review. Volume 76, number 6. September 15. 1949. page 769 to 789.

325. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Pages 271 et 272.

* \vec{x} la position dans l'espace de la particule de masse m en considérant une seule dimension d'espace par mesure de facilité.

Le propagateur $\langle xt|00\rangle = \left[\frac{m}{2\pi\hbar t}\right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} \exp(i\Phi(x,t))$ oscille en x et en t avec une longueur d'onde λ et une pulsation ω variant en fonction de x dans le chemin défini par $\langle xt|00\rangle$. Dans une région infinitésimale telle que $\delta x \ll x$ et $\Delta t \ll t$ on peut comparer cette onde à une onde plane monochromatique assimilable à $\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$.

Ainsi la valeur de la phase du propagateur est :

$$\Phi(x,t) = \left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right),$$

et nous obtenons :

$$k = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) = \frac{m2x}{2\hbar t} = \frac{mx}{\hbar t}.$$

Sachant que la norme du vecteur d'onde \vec{k} est reliée à la longueur d'onde λ par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, nous avons :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar t}{mx} = \frac{\hbar t}{mx},$$

et :

$$\omega = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{mx^2}{2\hbar t}\right) = \left(\frac{mx^2}{2\hbar t^2}\right).$$

Pour x suffisamment grand devant λ et t donnés dans l'équation du propagateur $\langle xt|00\rangle$, ce dernier oscille avec une longueur d'onde λ et une pulsation ω pratiquement constantes. Si la particule libre, partie de l'origine $x=0$ à $t=0$, est détectée au point x à l'instant t , sa vitesse est $v=x/t$ et son impulsion, encore appelée quantité de mouvement, est égale à $p=mv=m(x/t)$.

L'énergie cinétique E_c de la particule au point de coordonnée spatiale x est :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{mx^2}{2t^2}.$$

Ainsi entre la longueur d'onde λ du propagateur $\langle xt|00\rangle$ et l'impulsion $p=mv=m(x/t)$ on obtient la relation :

$$\lambda = \frac{\hbar t}{mx} = \frac{\hbar t}{pt} = \frac{\hbar}{p},$$

qui est la longueur d'onde de Louis de Broglie que nous avons vu en section 1.2.1.d (*Louis de Broglie et sa mécanique ondulatoire*).

On relie l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{mx^2}{2t^2}$ de la particule au point de coordonnée spatiale x à la pulsation ω de l'onde de matière par la relation :

$$\omega = \left(\frac{mx^2}{2\hbar t^2}\right) = \frac{E_c}{\hbar},$$

soit :

$$E_c = \hbar\omega,$$

qui est la relation Einstein-De Broglie connue sous la forme :

$$E_c = \hbar\omega = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = hf.$$

En conclusion, la notion de propagateur chez Feynman offre un nouveau cadre conceptuel permettant la prise en compte de phénomènes physiques tels que l'énergie cinétique et dans lequel apparaît une nouvelle formulation implicite de la réduction du paquet d'ondes, beaucoup plus concrète et compréhensible qu'en mécanique classique.

5.2.4.d.2) Optique et mécanique analytique

Précisons que la mécanique qualifiée d'analytique est associée aux lois du mouvement déduites d'un principe variationnel qui, appliqué à la grandeur appelée "action", donne le principe de moindre action. Il s'agit d'un formalisme différent de celui associé à ce que l'on appelle "la mécanique de Newton" et qui s'appuie sur le concept de point matériel.

Nous avons eu en 5.2.2 une réflexion sur le fait que l'optique géométrique et l'optique ondulatoire puisse présenter un point de vue comparable à celui qui peut exister entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

« Fasciné par les principes variationnels et en particulier par la similitude entre le principe de Maupertuis en mécanique et le principe de Fermat en optique géométrique, Hamilton fit, en 1830, la remarque étonnante que les formalismes de l'optique et de la mécanique analytique pouvaient être unifiés. »³²⁶

Rappelons donc encore, en d'autres termes, que l'optique géométrique se présente comme la limite aux petites longueurs d'onde (c'est-à-dire aux grandes pulsations ondulatoires ω) de l'optique ondulatoire. De manière comparable, la mécanique classique n'est que la limite aux petites valeurs de la constante de Planck h (c'est-à-dire une "action" grande devant h associée au monde macroscopique) vis-à-vis du monde microscopique que constitue la mécanique quantique.

Aussi, ne pouvons-nous être que séduit par la similitude parfaite et étonnante entre le principe de Feynman en mécanique quantique (la fonction d'onde sommée sur tous les chemins entre deux points d'espace-temps considérés) et le principe d'Huygens en optique ondulatoire vis-à-vis respectivement de la mécanique classique et de l'optique géométrique. En effet, ceci peut permettre de concevoir physiquement et intuitivement le fait qu'une particule aussi bien corpusculaire que lumineuse puisse "sentir" tous les chemins possibles pour trouver le chemin d'action minimum que la nature opère de façon quasi-instantanée.

5.2.4.d.3) Réflexion sur l'essence même de la phase du propagateur

326. Kopper. 2012. « *Principes variationnels et Mécanique analytique* ». Cours de Physique PHY431. Ecole Polytechnique. Année 2.

Comme mentionné dans sa conférence Nobel³²⁷, ainsi que dans sa publication de 1965 avec Hibbs³²⁸, le propagateur ou noyau (kernel) est annoté de la manière suivante :

$$\langle xt|00\rangle = k(x,0).$$

De plus, pour une question de facilité d'écriture, Feynman adopte **la notation suivante, sous-entendant la sommation sur tous les chemins** :

$$\mathbf{K}(x,0) = \int_0^x \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x,0) \right] \cdot D\mathbf{x}(t)$$

avec :

$$* \int_0^x \equiv \int \dots \int_{x_{i-1}}^{x_i} \dots \int$$

n-1 fois

* $D\mathbf{x}(t) \equiv \frac{1}{c^n} (\dots dx_{i+1} dx_i \dots dx_{n-1})$ caractérisant la nature mathématique du propagateur.

L'intégration globale s'effectue sur la variable de coordonnée x , elle-même fonction de t , et la forme $k(x,0)$ s'appelle une *intégrale de chemin*. Dans cette expression l'action $S(x,0)$ est un nombre dont la valeur dépend de la fonction $x(t)$. L'intégration sur cette fonction $x(t)$, symbolisée par $D_x(t)$ s'appelle une intégrale fonctionnelle.

En fait, l'intégrale d'action sur le temps, jouant le rôle de phase dans la représentation $\exp [\frac{i}{\hbar} S]$ dans laquelle $S = \int_0^t \mathcal{L} dt$, est primordiale dans le principe variationnel associé au

concept de l'intégrale de chemin matérialisée par son propagateur.

Ainsi tout porte sur la phase car si on considère des variables de coordonnées telles que :

$$x_i \rightarrow x_i(t + \delta t),$$

menant à une variation δS de l'action, il s'ensuit la variation suivante du propagateur :

$$\delta K = \delta \int_0^x \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x,0) \right] \cdot D\mathbf{x}(t) = \int_0^x \delta \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x,0) \right] \cdot D\mathbf{x}(t),$$

c'est-à-dire:

$$\delta K = \int_0^x \delta \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot D\mathbf{x}(t). \quad (1)$$

Sachant que $\delta e^u = \delta u \cdot e^u$, on a :

327. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 255.

328. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Page 33.

$$\delta \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] = \delta \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right]$$

c'est-à-dire :

$$\delta \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] = \frac{i}{\hbar} \left[\delta \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \quad (2)$$

Injectons (2) dans (1) :

$$\delta K = \int_0^x \frac{i}{\hbar} \left[\delta \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot Dx(t) = \frac{i}{\hbar} \int_0^x \left[\delta \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L} dt \right] \cdot Dx(t).$$

Nous avons vu que le formalisme lagrangien associé au principe de moindre action stipule une variation de chemin du premier ordre en x entraînant une variation du second ordre par rapport au temps. Ceci à condition que l'on puisse constituer un lagrangien fonction de x et de la dérivée de x par rapport au temps, satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange :

$$\partial \mathcal{L} / \partial x = \frac{d}{dt} (\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}).$$

D'après ce qui précède, nous constatons que le propagateur K est stationnaire au premier ordre dans la variation de $x_i(t)$ si :

$$\delta K(x, 0) = \delta \int_0^t \mathcal{L} dt = 0,$$

qui est la définition classique de la trajectoire et qui montre justement, comme nous l'avons écrit plus haut, que tout porte sur la phase du propagateur.

Or nous avons vu que le principe de Feynman consiste à tenir compte du plus grand nombre de chemins possibles (postulat 1) entre les deux points d'espace-temps $(0, 0)$ et (x, t) .

Aussi on peut relier l'intuition physique de Feynman concernant la mise en place de ce postulat par le fait que l'amplitude de probabilité pour que la particule soit en x à l'instant t après avoir été initialement à l'origine des coordonnées d'espace et de temps, soit d'autant plus précise que la contribution de la phase soit d'autant plus grande.

Mais cette réflexion reste intuitive sans être démontrée :

« *Le principe variationnel de Schwinger est peut être un peu moins élégant que celui de Feynman, mais il était indiscutablement mieux défini au plan mathématique lors de sa parution.* »³²⁹

En effet, dans sa publication de 1965 avec Hibbs^{329 bis}, le constat de Feynman pour l'importance de la phase conduisant à son postulat 1 reste intuitif.

Et la réflexion de Basdevant relative à cette sous-section 5.2.4.d.3 si elle appuie l'argumentation de Feynman, reste avant tout heuristique comme il l'écrit lui-même.

329. Basdevant. 2005. « *Principes variationnels et dynamique* ». Vuibert. Page 183.

329 bis. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Page 30.

Rappelons encore le génie de Feynman dans sa façon intuitive de vulgariser l'importance de la phase dans le contexte du postulat 1 par des petites flèches de phases différentes.^{329 ter}

5.2.6- Conclusion

Si de nos jours la publication de 1948 est une des plus connues et largement citée, elle ne suscita à l'époque que peu d'intérêt parmi les collègues de Feynman. La nouvelle approche du physicien théoricien américain en mécanique quantique ne séduisait guère du fait du bond conceptuel représenté allant à l'encontre des théories quantiques connues et reconnues.

Il faudra attendre la conférence de Oldstone-on-the-Hudson du 11 au 14 avril 1949 postérieure aux interventions de Slotnik et de Feynman lors de la réunion de l'American Physical Society de janvier 1949 pour que la communauté scientifique commence à s'intéresser sérieusement aux idées de Feynman.

Alors, enfin, le futur prix Nobel publiera en septembre 1949 l'article fondamental³⁵³ qui permettra de maîtriser ses techniques de calcul et l'utilisation des diagrammes, ouvrant ainsi la physique quantique au plus grand nombre.

Cet article fondamental de septembre 1949 va être analysé au paragraphe 6 suivant.

Mais, en attendant, recueillons les impressions de Feynman sur ses frustrations issues du sentiment d'incompréhension de ses pairs vis-à-vis de ses idées :

« At the Shelter Island Conference [Juin 1947], a lot of exciting things were discussed and talked about. But in spite of all this, the physicists ran out of ideas. They asked me if I would explain my path-integral method for doing quantum mechanics, so I did. I must have been preparing the manuscript of my paper³⁵⁴, so that everything was organised and I explained it. It's hard to pay attention to some new idea, and they didn't pay much attention to it. »³⁵⁵.

5.3- Références

- 1- BASDEVANT Jean-Louis (2005). Principes variationnels et dynamique. Vuibert.
- 2- DIRAC Paul (1933). The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics (St John's College, Cambridge, paper 26, publication 1933, received November 19, 1932).
- 3- FEYNMAN Richard (Thesis 1942). Principles of least action in quantum mechanics. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy.

329 ter. Feynman. 1985. QED, The Strange Theory of Light and Matter. Traduction Françoise Balibar et Alain Laverne: *Lumière et matière. Une étrange histoire*. Points Sciences. InterEditions. Version imprimée de novembre 1992.

353. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 769.

354. Feynman. Avril 1948. « *Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste* ». Review of Modern Physics, Volume 20, 367.

355. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* ». Pages 200. Interviews and conversations with Feynman, in Austin.

- 4- FEYNMAN Richard (1942). Le principe de moindre action en mécanique quantique . Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education France. 2007.
- 5- FEYNMAN Richard (Lettres 1939-1987). Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ? Traduction : Christian Jeanmougin. Dunod (2006).
- 6- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste. Review of Modern Physics, volume 20, 367. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- 7- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. Review of Modern Physics, volume 20, 367.
- 8- FEYNMAN Richard (1948). A relativistic cut-off for classical electrodynamics. Physical review, volume 74. Pages 939-946.
- 9- FEYNMAN Richard (September 15, 1949). Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. Physical Review. Volume 76, 769.
- 10- FEYNMAN Richard (November 1, 1950). Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. Physical Review. Volume 80, Number 3, 440.
- 11- FEYNMAN Richard & HIBBS Albert (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014.
- 12- FEYNMAN Richard (December 11, 1965). The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics. Nobel Lecture.
- 13- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication originale « The development of the space-time view of quantum electrodynamics » : Nobelprize.org.
- 14- HAROCHE Serge (1966). Forme lagrangienne de la mécanique quantique. ENS Ulm. Cours de deuxième année du DEA de physique atomique et statistique.
- 15- KOPPER (2012). Principes variationnels et Mécanique analytique. Cours de Physique PHY431. Ecole Polytechnique. Année 2.
- 16- MEHRA Jagdish (1994). The beat of a different drum. The life of science of Richard Feynman. Clarendon Press. Oxford.

Chapitre 6

Les aspects calculatoires de l'intégrale de chemins

Résumé

6.1- Introduction

6.2- Les idées fondatrices, les règles et les méthodes de calcul en Electrodynamique Quantique

6.2.1- Le concept symbolique des diagrammes de Feynman

6.2.2- Introduction des diagrammes par Feynman

6.2.3- Formalisme des diagrammes

6.2.4- Statut des diagrammes

6.3- Illustrations des calculs de Feynman par les diagrammes

6.3.1- L'analyse quantitative de l'interaction fondamentale entre deux électrons (diffusion Möller)

6.3.2- L'analyse qualitative de l'interaction d'un électron avec lui-même

6.3.3- L'analyse qualitative de la diffusion Compton

6.3.4- L'analyse qualitative de la polarisation du vide associée à la diffusion d'un électron incident par un photon : le problème de la renormalisation

6.4- Comment Feynman justifie ses procédés de calcul

6.4.1- La seconde quantification

6.4.2- Le critère d'invariance de jauge

6.5- Conclusion

6.6- Références

Résumé

Dans les chapitres 3, 4 et 5, on a vu comment Feynman est arrivé progressivement à la notion d'intégrale de chemins associée à une nouvelle vision de la mécanique quantique.

Mais ces objets mathématiques sont assez difficiles à calculer dans les cas concrets, c'est-à-dire dans les processus d'interaction entre les électrons, les positrons, via l'échange de photons virtuels.

Aussi, se pose pour Feynman la problématique consistant à imaginer les outils et les règles permettant la mise en pratique de sa théorie quantique du champ électromagnétique : la théorie de l'Electrodynamique Quantique.

Dans ce chapitre 6, je vais montrer la solution mise en place par Feynman qui consiste à visualiser l'intégrale de chemins en termes de dessins, ainsi que la méthode de calcul qui leur sont allouée.

6.1- Introduction

Nous avons exposé au chapitre 5 la manière pour Feynman en mécanique quantique, d'exprimer différemment l'amplitude de probabilité de présence d'une particule subatomique, via un propagateur (encore appelé noyau ou kernel) obtenu grâce aux intégrales de chemins. Ce chapitre 5, via l'Annexe 22, nous montre aussi que pour une simple particule libre, c'est-à-dire non soumise à un champ électromagnétique, le calcul du propagateur est déjà très compliqué.

Alors, on peut se poser la question de ce qu'il en sera du calcul des propagateurs pour un processus décrivant plusieurs particules en interaction, soumises au champ électromagnétique généré par chacune d'entre elles.

Et c'est justement parce que pour un tel processus les quantités à manipuler deviennent vite compliquées, à la limite de l'inexplicable et de l'incompréhensible, que Feynman va trouver un moyen visuel de résoudre les difficultés qui se présentent à lui.

Pour expliquer la façon dont Feynman va procéder, je vais tout d'abord montrer dans le paragraphe 6.2 comment a pu naître dans l'imagination du physicien américain cette idée de diagrammes symbolisant la trajectoire des particules dans l'espace-temps.

Toujours dans ce paragraphe 6.2, afin d'illustrer mes propos, je vais dessiner quelques diagrammes assez simples de manière informelle.

Puis, pour mieux comprendre l'outil ainsi matérialisé par des dessins, je vais commenter dans le paragraphe 6.3, les processus choisis par Feynman dans sa publication de Septembre 1949. En effet, dans cette publication, Feynman a pour objectif d'illustrer ses calculs relativement à certains diagrammes qu'il juge intéressants.

Afin de connaître la manière dont Feynman justifie ses calculs inhérents à sa théorie quantique du champ électromagnétique, l'Electrodynamique Quantique, il m'a paru nécessaire, au paragraphe 6.4, de décrire en quoi consiste :

- la seconde quantification dans la vérification de ses calculs,
- le critère d'invariance de jauge pour ce qui concerne la véracité des résultats obtenus.

Enfin, il m'a semblé pertinent en conclusion (§6.5) de mentionner, comment déjà en 1949, Feynman pressent l'ouverture que représente l'outil apporté par les diagrammes dans la manière d'aborder d'autres théories quantiques des champs.

Les publications fondamentales que j'ai consultées afin d'exprimer mes intentions sont les suivantes :

- les deux publications originales de Feynman datant de Septembre 1949 :

* *The Theory of Positrons*. Physical Review. Volume 76. Number 6,

* *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique*. Physical Review. Volume 76. Number 6,

- les travaux effectués par Feynman et Hibbs contenus dans leur ouvrage de 1965 : *Quantum Mechanics and Path Integrals*,

- l'ouvrage de Feynman publié en 1985 : *Lumière et matière. Une étrange histoire*. Points Sciences. InterEditions. Version imprimée de novembre 1992. Traduction Françoise Balibar et Alain Laverne,
- La publication originale de Feynman datant d'Octobre 1948 : *A relativistic cut-off for classical electrodynamics*. Physical review. Volume 74,
- La publication de Feynman de Novembre 1948 : *Relativistic cut-off for quantum electrodynamics*. Physical review. Volume 74,
- La publication de Gilles Cohen-Tannoudji. 2013. *Diagrammes et amplitudes de Feynman, la partition du modèle standard*. Publications de la Sorbonne. OpenEdition books,
 - L'ouvrage de Roger Penrose. 2004. *A la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique*. Traduction Céline Laroche. Editions Odile Jacob. 2007,
- La publication de Feynman et Gell-Mann (1958). *Theory of the Fermi interaction*. Physical Review. Volume 109.

6.2- Les idées fondatrices, les règles et les méthodes de calcul en Electrodynamique Quantique

6.2.1- Le concept symbolique des diagrammes de Feynman

Dans l'article de septembre 1949³⁶², Feynman va se servir des résultats mentionnés dans sa publication *The Theory of Positrons* qu'il appelle "publication numéro I"³⁶³.

Aussi, dans cette "publication numéro I", Feynman réinterprète les solutions à énergie négative de l'équation de Dirac en considérant les positrons comme des électrons qui remontent le temps, puis il analyse le mouvement des positrons et des électrons en présence de potentiels extérieurs dans l'espace-temps minkowskien de la relativité restreinte.

Feynman pose donc les règles de calcul des processus d'interaction entre les électrons, les positrons, via l'échange de photons virtuels en visualisant l'intégrale de chemins en termes de diagrammes. Pour cela, il invente une théorie en adoptant une approche spatio-temporelle globale des intégrales de chemins. Et cette approche globale s'effectue par la mise en œuvre de diagrammes permettant la prise en compte d'évènements associés à divers processus sous la forme d'un graphique référencé dans l'espace temps de la relativité d'Einstein.³⁶⁴

Rappelons qu'en physique, une particule virtuelle est une particule transitoire, dont les caractéristiques sont proches de celles d'une particule ordinaire, mais qui existe pendant un temps limité.

6.2.2- Introduction des diagrammes par Feynman

362. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6.

363. Feynman. Septembre 1949. « *The Theory of Positrons* ». Physical Review. Volume 76. Number 6.

364. Feynman. 1985. « *QED, The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction F. Balibar et A. Laverne. « *Lumière et matière. Une étrange histoire* ». Edition Points Sciences, novembre 1992. Note 2, page 123.

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 4 (§4.4), Feynman a toujours été fasciné par le principe de moindre action associé à la notion de trajectoire.

De là notre hypothèse de l'idée chez Feynman de dessiner symboliquement, selon un processus arbitraire de particules en interaction, la trajectoire de ces particules dans l'espace-temps, en mentionnant pour chacune d'elle leur interaction via l'échange de photons virtuels, dont il sait par les progrès de la physique, qu'ils sont les vecteurs de transmission du champ électromagnétique.

Aussi, peut-on l'imaginer extrapoler son concept d'intégrales de chemins associées aux trajectoires multiples que peut prendre une particule dans l'espace-temps pour aller d'un point $M(x,t)$ à un point $M'(x',t')$; et tout naturellement mettre en pratique son premier postulat, vu au chapitre 5, en envisageant tous les dessins possibles associés aux interactions des particules entre les points d'espace-temps $M(x,t)$ et $M'(x',t')$.

Ainsi, en appliquant à la lettre ce premier postulat, il va considérer que l'amplitude de probabilité du processus est la somme des amplitudes de probabilité associées à tous les dessins possibles pour décrire ce processus.

Dès lors, pour tout dessin représentant la suite des trajectoires symboliques de telle ou telle particule, un propagateur va être calculé pour chaque trajectoire ; l'ensemble des trajectoires associé à un dessin constituant une suite d'événements composés, l'amplitude de probabilité résultera du produit des propagateurs.

Ensuite, l'amplitude de probabilité finale du processus sera, comme mentionné dans le premier postulat, le carré de la somme des amplitudes associées à tous les dessins possibles, décrivant le dit processus.

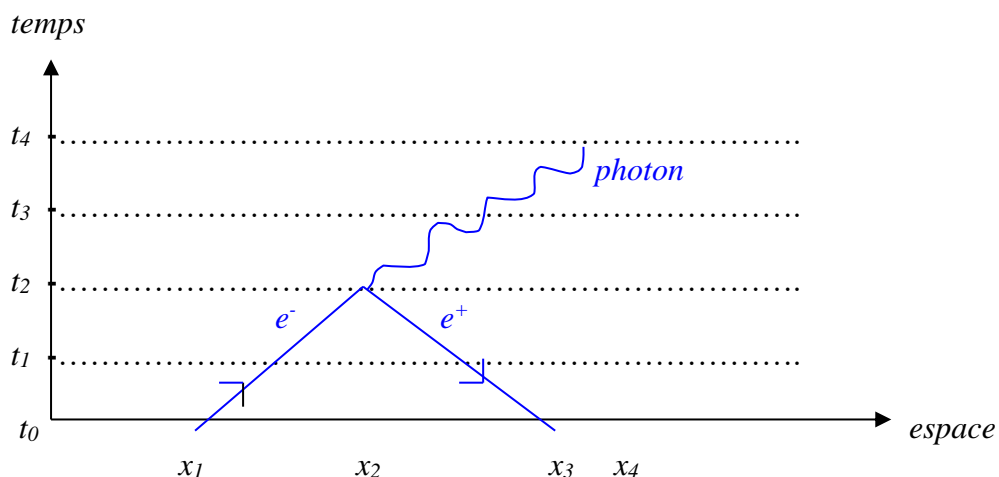
Ainsi, des deux postulats de quantification de Feynman vus au chapitre 5, vont émerger les fameux diagrammes dits « de Feynman ».

Dans un premier temps, pour mieux comprendre en quoi consiste les diagrammes de Feynman, il est intéressant de considérer deux processus assez simples mais néanmoins fondamentaux qui reviennent pratiquement toujours dans les processus plus compliqués.

Aussi, va-t-on décrire sommairement à l'aide des diagrammes les deux processus suivants :

- l'annihilation électron-positron en un photon virtuel,
- la création d'un couple électron-positron à partir d'un photon.

6.2.2.a) Annihilation électron-positron en un photon virtuel



De t_0 à t_2 , nous voyons un électron e^- et un positron e^+ (qui est un électron évoluant en sens inverse du temps) attirés l'un vers l'autre du fait de leur charge électrique de signe opposé.

Le positron s'annihile avec l'électron au temps t_2 , pour produire un photon qui se propage vers l'avenir dans l'espace-temps. Cet événement est observable en laboratoire.

Dans sa théorie de la mécanique quantique, Feynman attribue à l'électron une certaine amplitude de probabilité $P(x_1 \text{ à } x_2)$ pour passer du point (x_1, t_0) au point (x_2, t_2) de l'espace-temps associé à l'intervalle d'espace-temps $d\alpha^2$ tel que défini en Annexe 16 (§1).

De même, nous dirons que le positron a une certaine amplitude de probabilité $P(x_3 \text{ à } x_2)$ pour passer du point (x_3, t_0) au point (x_2, t_2) de l'espace-temps.

Nous dirons aussi que le *photon* a une certaine amplitude de probabilité $P(x_2 \text{ à } x_4)$ pour passer du point (x_2, t_2) au point (x_4, t_4) de l'espace-temps.

Ainsi, selon les règles définies par Feynman que nous verrons en section 6.2.4 :

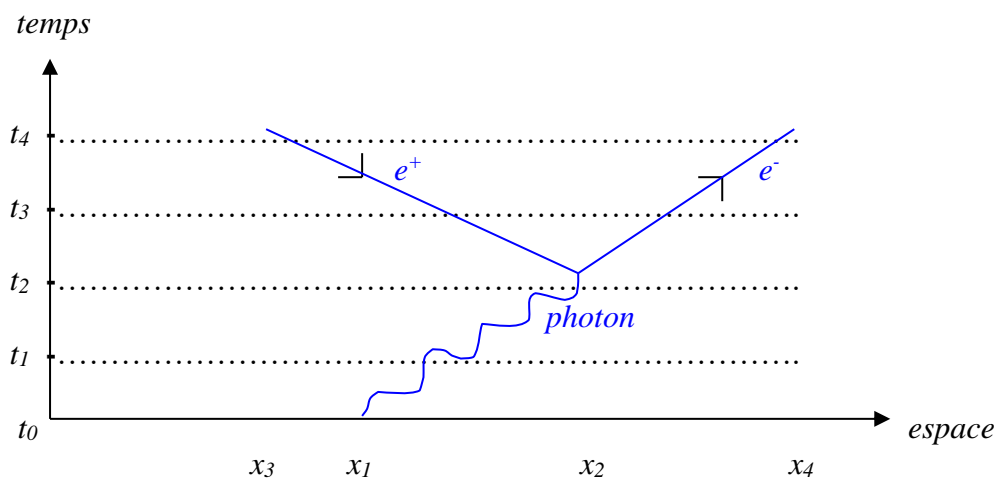
- l'amplitude de probabilité pour que le processus ait lieu est :

$$P(x_1 \text{ à } x_2) \cdot P(x_3 \text{ à } x_2) \cdot P(x_2 \text{ à } x_4)$$

associée aux trois sous-événements représentés par les trajectoires de l'électron, du positron et du photon.

- pour plusieurs diagrammes associés au même processus, il aurait fallu additionner l'amplitude de probabilité correspondant à chaque diagramme.

6.2.2.b) Création d'un couple électron-positron à partir d'un photon



De t_0 à t_2 , le chemin (ou trajectoire) parcouru par le photon va du point (x_1, t_0) au point (x_2, t_2) de l'espace-temps selon l'intervalle d'espace-temps $d\alpha^2$.

Au temps t_2 , le photon se désintègre et deux particules apparaissent : un électron e^- et un positron e^+ que nous assimilons à un électron allant en sens inverse du temps et semblant ainsi se diriger vers l'électron puisque sa charge électrique est de signe opposé à celui de ce dernier. Nous dirons que l'amplitude de probabilité pour le photon d'aller du point (x_1, t_0) au point (x_2, t_2) de l'espace-temps est $P(x_1 \text{ à } x_2)$.

De même, l'amplitude de probabilité pour l'électron de passer du point (x_2, t_2) au point (x_4, t_4) est $P(x_2 \text{ à } x_4)$.

L'amplitude de probabilité pour le positron de passer du point (x_2, t_2) au point (x_3, t_4) est $P(x_2 \text{ à } x_3)$.

l'amplitude de probabilité pour que le processus ait lieu est :

$$P(x_1 \text{ à } x_2) \cdot P(x_2 \text{ à } x_3) \cdot P(x_2 \text{ à } x_4)$$

associée aux trois sous-événements représentés par les trajectoires du photon, du positron et de l'électron.

6.2.3- Formalisme des diagrammes

En théorie, un processus est décrit par une infinité de diagrammes représentant les façons de réaliser ce processus.

Aussi, l'interaction entre deux particules réelles (par exemple deux électrons) comprend deux chemins (deux points d'entrée, deux points de sortie) auxquels sont associés les propagateurs de Feynman tels que nous les avons définis en sous-section 5.2.4.d. Et l'interaction entre ces deux particules réelles est concrétisée par un propagateur du boson virtuel spécifique de la nature de l'interaction (par exemple le boson photon vecteur de l'interaction électromagnétique entre les électrons dans la théorie de l'électrodynamique quantique, par exemple le boson gluon vecteur de l'interaction forte entre les quarks dans la théorie de la chromodynamique quantique, par exemple le boson W vecteur de l'interaction faible dans le phénomène de la désintégration *bêta moins* dans laquelle un neutron se transforme en proton, etc.).

L'amplitude de probabilité du processus est la somme des amplitudes de probabilité associées à chaque diagramme.

En pratique, les diagrammes contenant de nombreux photons donnent des contributions négligeables, ce qui permet de s'en affranchir vis-à-vis de ceux contenant au maximum trois photons intermédiaires virtuels. La prise en compte ou non de tel ou tel diagramme s'effectue selon la précision recherchée dans la probabilité que puisse se réaliser le processus quantique étudié.

Le champ qui intervient dans la théorie de l'électrodynamique quantique est le champ électromagnétique, qui est un champ relativiste défini en chaque point de l'espace-temps et non pas en chaque point de l'espace et à chaque instant. Aussi, ce champ possède les propriétés de covariance par rapport aux transformations de Lorentz. On dit aussi que les propriétés du champ électromagnétique sont invariantes à travers la transformation de Lorentz.

De plus, ce champ étant quantique, il n'existe pas sous la forme d'une fonction définie en chacun des points de l'espace-temps. Il faut plutôt l'imaginer sous la forme d'opérateurs définis en chaque point de l'espace-temps, agissant dans l'espace de Hilbert que nous avons caractérisé en Annexe 13 comme un espace de représentation des phénomènes quantiques. En d'autres

termes, la théorie quantique du champ électromagnétique (l'électrodynamique quantique) permet de calculer le déplacement et l'interaction de plusieurs particules entre elles. En effet, les opérateurs associés au champ provoquent des événements directement liés à l'émission ou à l'absorption d'une particule ou d'une antiparticule c'est-à-dire d'un quantum de champ. En fait, tout se passe comme si l'électron était une source pour l'interaction électromagnétique, et qu'il matérialisait le champ quantique dans un espace infinitésimal donné, devenant ainsi un quantum de champ.

La physique moderne extrapolera plus tard ce concept à tout champ quantique exprimé sous la forme d'une énergie en "tension" sur son volume d'univers d'espace-temps, devenant ainsi une source pour certaines interactions. Ceci donnera naissance à la théorie quantique des champs relative aux interactions nucléaires faibles et fortes que nous verrons au chapitre 8 et dont la méthode des diagrammes de Feynman issue de ses travaux sur l'intégrale de chemin a été et est toujours indispensable.

Feynman a, pour ainsi dire, reformulé la mécanique quantique en termes d'intégrales de chemins. Et il a imaginé dès 1949 une théorie quantique des champs en interaction, qu'il a appliquée avec le succès que l'on sait à la théorie quantique et relativiste de l'interaction électromagnétique. Partant, comme nous l'avons vu, d'une réflexion sur le principe d'Huygens (voir sections 5.2.1 et 5.2.2), et sachant que les phénomènes ondulatoires comme la lumière, c'est-à-dire le champ «électromagnétique lui-même, ont aussi une interprétation corpusculaire (voir Einstein en 1.2.1.b), Feynman se sert de la vision de De Broglie, qui est d'associer à l'électron un champ qui est pour l'électron ce que le champ électromagnétique quantifié est au photon (voir Louis de Broglie en 1.2.1.d) :

« Et si l'on applique la technique de la sommation sur tous les chemins au mouvement des particules, mais considérées comme des quanta de champs, on obtient, à la limite classique le principe de moindre action, un principe qui est au mouvement des particules à la limite classique, c'est-à-dire lorsque h tend vers 0, ce que le principe de Fermat est à la propagation de la lumière, à la limite de l'optique géométrique, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde tend vers 0. »³⁶⁶

Aussi, tout naturellement, l'information associée à la propagation d'un quantum de champ électromagnétique, ainsi que l'invariance et les lois de conservation auxquelles elle est assujettie, est contenue dans son lagrangien :

« Quand le lagrangien contient un terme d'interaction sous la forme d'un produit de champ multiplié par une constante de couplage qui détermine l'intensité de l'interaction au niveau élémentaire, l'intégrale de chemins se réduit, pour toute réaction relevant de l'interaction considérée, à un développement, appelé "développement perturbatif", en puissance de la constante de couplage, dont les coefficients n'impliquent que des intégrales ordinaires (c'est-à-dire à un nombre fini de variables d'intégration). Si la constante de couplage est suffisamment petite, on peut espérer obtenir une bonne approximation de l'amplitude de transition de la réaction, en se limitant aux premiers termes du développement. Les diagrammes de Feynman permettent de calculer les coefficients de ce développement : c'est en ce sens qu'ils permettent d'écrire la partition de l'interaction. »³⁶⁷

Ainsi donc, Feynman utilise à bon escient le résultat des travaux de De Broglie à savoir l'unification du point de vue ondulatoire et du point de vue corpusculaire. Et les travaux de

366. Gilles Cohen-Tannoudji. 2013. « *Diagrammes et amplitudes de Feynman, la partition du modèle standard* ». Publications de la Sorbonne. OpenEdition books.

367. Ibid.

Feynman s'inspirant de ce qu'avait compris De Broglie, lui permettent en quelque sorte de résoudre le problème du dualisme sur lequel Einstein a buté sans jamais parvenir à s'en sortir depuis 1910, lorsqu'il écrivait " *Peut-on concilier les quanta d'énergie, d'un côté, et le principe de Huygens, de l'autre ?* ".

En fin de compte, Gilles Cohen-Tannoudji poursuit (pour ce qui concerne les travaux de Feynman suite à ceux effectués chronologiquement par Fermat, Huygens, Hamilton, et De Broglie), en citant Einstein sur la possibilité d'une théorie pouvant un jour englober les quanta d'énergie, d'un côté, et le principe de Huygens, de l'autre :

« " *Les apparences sont contre, mais Dieu semble avoir trouvé un truc*", et jusqu'à la fin de sa vie, Einstein affirmait "je dois faire d'abord remarquer que je ne conteste absolument pas que la mécanique quantique représente un progrès significatif, et même en un certain sens, définitif, de la connaissance en physique. J'imagine que cette théorie sera englobée un jour dans une autre, un peu comme l'est l'optique des rayons dans l'optique ondulatoire." Le "truc" que, d'après Einstein, Dieu semble avoir trouvé, c'est Feynman qui l'a découvert ! »

Cependant, si les diagrammes de Feynman semblent représenter les particules (aussi bien les électrons, les quarks, que les photons et les gluons), la théorie quantique des champs que ces diagrammes incarnent donne le rôle principal au champ lui-même. Et les chemins représentés dans les diagrammes sont ceux du champ.

Aussi, Roger Penrose nous met en garde sur la façon dont nous devons interpréter les diagrammes, car au niveau quantique il faut garder à l'esprit que pour une seule particule il y a de nombreux processus simultanés dont chacun pris individuellement est à voir comme participant à une superposition quantique faisant intervenir un nombre considérable de transformations.

En fait, dans le processus complet représenté par un diagramme mettant en action le chemin parcouru par une particule réelle, le taux moyen d'occurrence de ces transformations est essentiellement la longueur d'onde de Louis de Broglie $\lambda = h/p$ (voir Louis de Broglie en paragraphe 1.2.1.d), et est lié à un paramètre de couplage que nous verrons ultérieurement.

Le propagateur de Feynman représenté par une simple ligne pour l'électron, désigne en fait la somme infinie des transformations telles que définies dans le modèle « zigzag » de l'électron.³⁶⁸

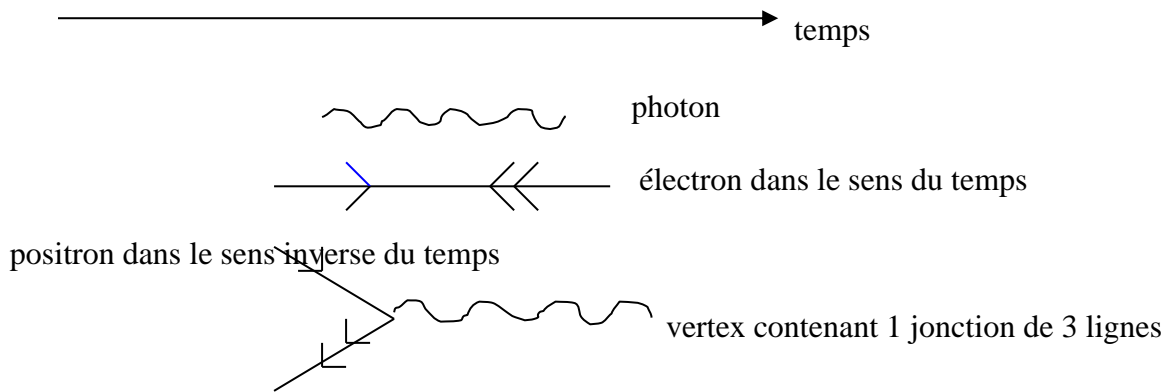
6.2.4- Statut des diagrammes

Parvenu à ce niveau de compréhension des travaux de Feynman, il faut être particulièrement attentif au fait qu'un diagramme de Feynman :

368. Penrose. 2004. « *A la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique* ». Traduction Céline Laroche. Editions Odile Jacob. 2007. Page 610.

→ ne possède pas une valeur figurative, c'est-à-dire qu'il ne représente pas la trajectoire réelle d'une particule ; il représente seulement la trajectoire des particules sous une forme symbolique,
 → possède un statut pictural puisqu'il est associé à un dessin,
 → possède un statut narratif puisqu'il évoque une série d'événements,
 → est une représentation graphique d'équations mathématiques particulières :
 * les arêtes (les lignes) représentent les propagateurs associés aux intégrales de chemins décrivant le mouvement des particules par leur quantité de mouvement (leur impulsion),
 * les sommets (les vertex) sont associés aux interactions des particules subatomiques de la Théorie quantique des champs.

Pratiquement, pour ce qui concerne l'électrodynamique quantique, les diagrammes de Feynman sont représentés graphiquement par les trois éléments de base suivants :



avec :

* une ligne orientée en fonction du type de particule désigné (électron, positron) représentant la trajectoire de la particule associée à son propagateur,

* la ligne ondulée indiquant le boson photon en train de se propager,

* la simple flèche représentant la propagation de l'électron dans le sens du temps,

* la double flèche représentant la propagation du positron dans le sens inverse du temps,

* les vertex représentant les interactions entre particules,

* à chacun des trois éléments de base (vertex, ligne ondulée, ligne orientée), Feynman associe une quantité physique qu'il détermine à partir de la théorie du champ électromagnétique,

* un processus physique associé à l'électrodynamique quantique est représenté par un assemblage des trois éléments de base correctement orienté dans l'espace-temps,

* pour un diagramme donné, l'amplitude de probabilité est fonction du produit des « kernel » définis en section 5.2.3 ; chaque « kernel » (propagateur ou noyau) est associé à un chemin de la particule dans un contexte donné :

« *The amplitude to go from a to c and then to b is the kernel to go from a to c times the kernel to go from c to b.* »³⁶⁹

* pour un processus de l'électrodynamique quantique étudié, l'amplitude de probabilité est la somme des amplitudes de probabilité associée à chaque diagramme concerné par ce processus :

« *The kernel to go from a to b is the sum, over all possible values of x_c , of amplitude for the particle to go from a to c and then to b.* »³⁷⁰

* l'amplitude de probabilité définitive du processus étudié est égale au carré du « kernel » issu de la somme précédente (voir 5.2.4.a.2).

* le positron de Dirac est interprété par Feynman comme un antiélectron d'énergie négative ($E < 0$) se déplaçant vers le passé ($t < 0$) tel que le produit $E t = (-E)(-t)$ soit positif par comparaison à un électron d'énergie positive ($E > 0$) se déplaçant vers l'avenir ($t > 0$) avec un produit $E t$ évidemment également positif.

Après ces diverses règles définies par Feynman, il nous est plus facile d'analyser les différents processus contenus dans la publication de septembre 1949.³⁷¹

6.3- Illustrations des calculs de Feynman par les diagrammes

Il me paraît intéressant dans cette section de détailler les choix de Feynman dans le développement des intégrales de chemin codées par un dessin (les diagrammes) au moyen des règles assez strictes qui leur sont associées.

369. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Page 38.

370. Ibid. Page 37.

371. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 769.

Aussi, allons-nous constater que la méthode symbolique inventée par Feynman facilite la compréhension des choses tout en permettant d'obtenir des résultats de manière relativement aisée.

En effet, nous allons voir que les diagrammes vont permettre d'imaginer concrètement comment se traduit le comportement des particules vis-à-vis des interactions auxquelles elles sont soumises.

Cependant, si on retrouve bien sûr toujours les problèmes inhérents à la mécanique quantique tels que mis en évidence par Dirac en section 1.2.2, travailler sur des dessins comme les diagrammes, permet de les appréhender beaucoup plus facilement.

Afin de prouver la puissance de sa méthode, Feynman choisit, dans sa publication de Septembre 1949, parmi les processus traduisant la quantification du champ électromagnétique, ceux qu'il juge les plus pertinents.

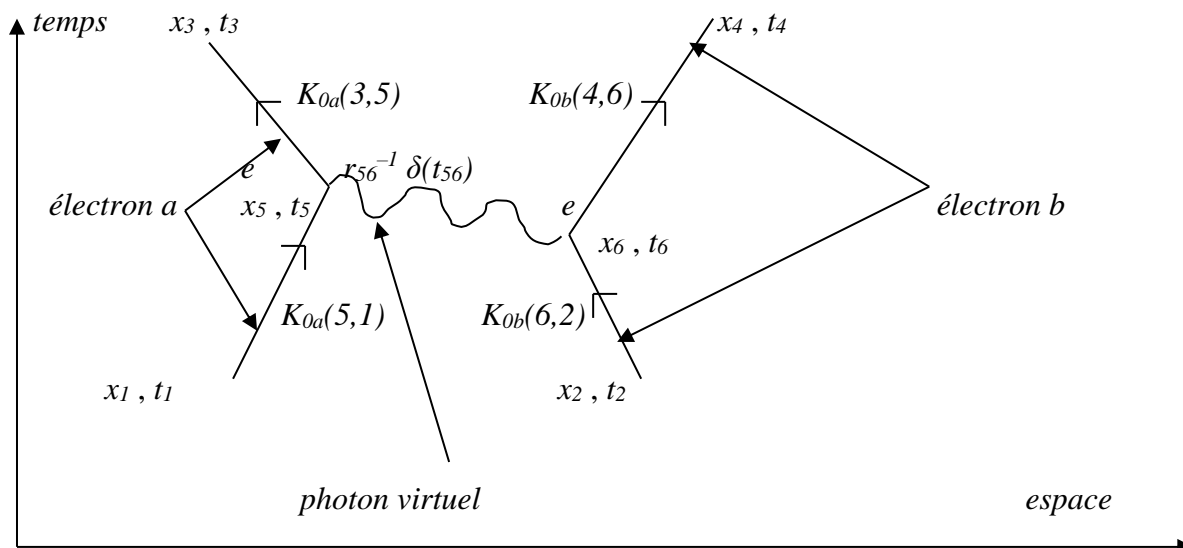
Ainsi, le physicien américain va-t-il détailler :

- le processus exprimant la manifestation quantique la plus rudimentaire (la diffusion Möller), c'est-à-dire celle mettant en œuvre l'interaction (dans ce cas la répulsion) entre deux électrons via l'échange d'un photon virtuel, vecteur de transmission du champ électromagnétique, pour obtenir ce qu'il va appeler une des plus importantes équations de l'Electrodynamique Quantique,
- le processus mettant en jeu la notion d'interaction de l'électron avec lui-même, qui est son thème de prédilection depuis ses études au MIT, dans sa volonté de résoudre les problèmes d'infinis en Electrodynamique quantique,
- le processus conduisant à la diffusion Compton, reposant sur la conservation de l'énergie cinétique, qui a été l'ultime expérience qui convainquit la plupart des scientifiques sur le fait que la lumière puisse se comporter comme un faisceau de particules dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence,
- la polarisation du vide associée à la diffusion d'un électron incident par un photon afin de montrer par sa méthode de calcul comment aborder, beaucoup plus facilement, le thème de la renormalisation consistant à résoudre les problèmes de divergence qui apparaissent en Electrodynamique Quantique.

6.3.1- L'analyse quantitative de l'interaction fondamentale entre deux électrons (diffusion Möller)

Soit le diagramme de Feynman suivant³⁷² exprimant le chemin de deux électrons et d'un photon virtuel (voir définition ci-avant) dans l'espace-temps de la relativité restreinte :

372. Ibid. Figure 1 page 772.



Feynman considère la fonction d'onde $\Psi(x_a, x_b, t)$ au temps t dont les coordonnées x_a, x_b sont respectivement associées à la particule « a » et à la particule « b ».

Dans le cas où les particules sont dites libres c'est-à-dire en non-interaction l'une avec l'autre, il définit le propagateur suivant :

$$K(x_a, x_b, t; x'_a, x'_b, t') = K_{0a}(x_a, t; x'_a, t') K_{0b}(x_b, t; x'_b, t'),$$

pour lequel :

* K_{0a} est le propagateur de la particule libre « a », c'est-à-dire l'amplitude de probabilité pour que la particule « a » se trouvant en x_a au temps t , se trouve en x'_a au temps t' . Et comme nous l'avons vu en section 5.2.3, le noyau K_{0a} contient par définition la somme de toutes les amplitudes partielles associées à chaque chemin allant de la coordonnée x_a à la coordonnée x'_a .

* K_{0b} est le propagateur de la particule libre « b », c'est-à-dire l'amplitude de probabilité pour que la particule « b » se trouvant en x_b au temps t , se trouve en x'_b au temps t' . Et comme nous l'avons vu en section 5.2.3, le noyau K_{0b} contient par définition la somme de toutes les amplitudes partielles associées à chaque chemin allant de la coordonnée x_b à la coordonnée x'_b .

Relativement aux propagateurs mentionnés sur le dessin ci-avant, Feynman écrit pour les deux particules libres :

$$K_0(3, 4; 1, 2) = K_{0a}(3, 1) K_{0b}(4, 2),$$

avec:

- * la particule « a » allant de $x_1(t_1)$ à $x_3(t_3)$,
- * la particule « b » allant de $x_2(t_2)$ à $x_4(t_4)$.

Remarquons le respect que Feynman apporte à sa convention d'écriture de droite à gauche représentant respectivement l'état initial et l'état final des coordonnées de chacune des particules (voir section 5.2.3).

→ Pour la particule « a » suivant le chemin x_1 à x_3 avec un temps intermédiaire t_5 au point de coordonnée d'espace x_5 tel que $t_1 < t_5 < t_3$, l'action $S(x_3, x_1)$ se décompose en la somme :

$$S(x_3, x_1) = S(x_3, x_5) + S(x_5, x_1),$$

puisque nous savons que l'action est une intégrale de temps.

Feynman divise l'intégration sur le chemin allant de x_1 à x_3 en trois parties. Chacune des parties peut s'écrire telle que nous l'avons mentionné en sous-section 5.2.4.d.3, c'est-à-dire :

$$\int_{x_1}^{x_5} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x_5, x_1)\right] D_x(t) \cdot \int dx_5 \cdot \int_{x_5}^{x_3} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x_3, x_5)\right] D_x(t).$$

On obtient alors :

$$K_{0a}(3, 1) = \int K_{0a}(3, 5) K_{0a}(5, 1) dx_5 .$$

En considérant une intégrale étendue sur le volume d'espace infinitésimal centré sur x_5 , Feynman obtient :

$$K_{0a}(3, 1) = \int K_{0a}(3, 5) K_{0a}(5, 1) d^3x_5 .$$

→ Le même raisonnement conduit avec la particule « b », suivant le chemin x_2 à x_4 avec un temps intermédiaire t_6 au point de coordonnée d'espace x_6 tel que $t_2 < t_6 < t_4$, donne :

$$K_{0b}(4, 2) = \int K_{0b}(4, 6) K_{0b}(6, 2) d^3x_6 .$$

→ Conformément à ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$K_0(3,4;1,2) = K_{0a}(3, 1) K_{0b}(4, 2),$$

c'est-à-dire:

$$K_0(3,4;1,2) = \iint K_{0a}(3, 5) K_{0b}(4, 6) K_{0a}(5, 1) K_{0b}(6, 2) d^3x_5 d^3x_6 .$$

Dans un premier temps, Feynman suppose une interaction simplement due à la force électrostatique de Coulomb (un cas particulier de la force électromagnétique associée au champ du même nom) s'exerçant entre les deux particules réelles que sont les deux électrons « a » et « b » .

L'hamiltonien classique du système d'interaction des deux électrons entre eux, associé à l'énergie potentielle électrostatique (appelée encore énergie potentielle d'attraction coulombienne) est le suivant :

$$H = E_p = \frac{e^2}{r}$$

avec :

$$* e^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e_0^2,$$

* e_0 : la charge électrique élémentaire de l'électron ($1,602 \times 10^{-19}$ c),

* r : la distance entre les deux électrons telle que $r = r_{56}$.

Toujours dans un premier temps, Feynman considère que l'interaction entre les deux électrons est instantanée, c'est-à-dire qu'elle s'effectue en un temps infinitésimal Δt_0 caractérisée par la fonction de distribution de Dirac (appelée « delta-fonction » dans le texte³⁷³) :

$$\delta(t_5 - t_6) = \delta(t_{56}),$$

assurant sa pleine contribution seulement lorsque $t_5 = t_6$.

Ainsi, Feynman propose dans un premier temps l'équation suivante pour le diagramme du système considéré :

$$K^{(1)}(3,4;1,2) = -i e^2 \int \int K_{0a}(3,5) K_{0b}(4,6) r_{56}^{-1} \delta(t_{56}) K_{0a}(5,1) K_{0b}(6,2) d\tau_5 d\tau_6,$$

avec:

* les deux intégrales étendues sur le volume d'espace et de temps : $d\tau_5 = d^3x_5 dt_5$ et $d\tau_6 = d^3x_6 dt_6$,

* le paramètre de couplage $e^2 r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ tel que nous en avons parlé dans les explications précédentes,

* en fait, l'expression de e^2 donnée par Feynman est strictement égale à $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}$,

* α appelée *constante de structure fine* est définie comme la constante de couplage de l'interaction électromagnétique³⁷⁴,

* le diagramme de Feynman associé à la diffusion Möller analysé dans le cas présent (interaction fondamentale entre deux électrons) contient deux vertex (voir définition précédemment). Ces derniers contribuent à la probabilité du processus avec le facteur α , nous pouvons considérer ce diagramme comme assez précis.

Dans un deuxième temps, Feynman considère de manière réaliste que l'énergie potentielle d'attraction coulombienne ne peut pas agir de manière instantanée. Aussi, il suggère tout simplement de remplacer dans l'équation $K^{(1)}(3,4;1,2)$ précédente, le facteur $r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ par quelque chose comme (« something like »³⁷⁵) :

$$r_{56}^{-1} \delta(t_{56} - r_{56}),$$

représentant le retard de l'effet sur la particule « a » du vecteur d'interaction matérialisé par le photon virtuel émis par la particule « b » (cas où $t_5 > t_6$).

373. Ibid. Page 772.

374. Feynman. 1985. « *QED, The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction F. Balibar et A. Laverne. « *Lumière et matière. Une étrange histoire* ». Edition Points Sciences, novembre 1992. Page 171.

375. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 772.

La notation ($t_{56} - r_{56}$) par Feynman est tout-à-fait justifiée dans le sens où il considère les chemins parcourus dans l'espace-temps de la relativité restreinte par les deux électrons et le photon associé à l'interaction électromagnétique.

Rappelons que la notion d'espace-temps vue en Annexe 18 §2 fait appel à l'intervalle d'espace-temps exprimé selon l'équation :

$$(d\alpha)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2.$$

En effet, le carré de l'intervalle d'espace-temps invariant, comme nous l'avons exprimé, à travers la transformation de Lorentz donne dans ce cas :

$$s_{56}^2 = c^2 t_{56}^2 - r_{56}^2,$$

pour c posé égal à 1 par mesure de simplification et r_{56}^2 égal aux coordonnées d'espace-temps $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$.

Mais laissons Feynman s'exprimer à ce sujet :

« $r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ is replaced by $\delta_+(s_{56}^2)$ where $s_{56}^2 = t_{56}^2 - r_{56}^2$ is the square of the relativistically invariant interval between points 5 and 6. »³⁷⁶

Feynman introduit aussi la notion de transformation de Fourier associée à l'interaction matérialisée par le photon, c'est-à-dire à la quantification du champ électromagnétique.

Dans deux publications datant respectivement d'octobre 1948³⁷⁷ et de novembre 1948³⁷⁸, il rappelle que d'un point de vue formel, le champ électromagnétique est équivalent à un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants et que le traitement de ces oscillateurs en mécanique quantique fait apparaître des niveaux d'énergie quantifiés pour chaque oscillateur.

Un oscillateur harmonique est un oscillateur idéal dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale, dont la fréquence ne dépend que des caractéristiques du système (en l'occurrence dans notre cas le champ électromagnétique caractérisé par les équations de Maxwell) et dont l'amplitude est constante.

Ainsi, le photon associé à chaque oscillateur possède un quantum d'énergie hf égal à l'écart d'énergie entre deux niveaux successifs de chaque oscillateur.

Ainsi, Feynman exprime-t-il, dans la région d'espace-temps r_{56} infinitésimale correspondant à un intervalle d'espace-temps entre deux événements x_5, t_5 et x_6, t_6 , la fonction delta de Dirac relative au champ électromagnétique. D'après l'explication qui précède, cette fonction delta est donc associée à une somme continue de fonctions harmoniques qui n'est autre que la transformation de Fourier inverse suivante :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} d\omega.$$

Afin de ne tenir compte que de quanta d'énergie de pulsation positive, Feynman considère seulement les cas suivants :

376. Ibid. Page 772.

377. Feynman. 1948. « *A relativistic cut-off for classical electrodynamics* ». Physical review, volume 74. Pages 939-946.

378. Feynman. 1948. « *Relativistic cut-off for quantum electrodynamics* ». Physical review, volume 74. Pages 1430-1438.

$$\delta_+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega x} d\omega ,$$

associé à la prise en compte du retard de l'effet d'interaction électromagnétique entre la particule « a » et la particule « b ».

De cette façon, le facteur $r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ devient maintenant $\delta_+(s_{56}^2)$, car l'intervalle d'espace-temps s_{56}^2 de la mécanique relativiste vient remplacer l'instantanéité du temps t_{56} de la mécanique classique associée à la distance r_{56} que nous trouvons dans la loi de Coulomb.

Notons ainsi la généralisation de ce diagramme de Feynman, pour le cas où le photon virtuel est émis par la particule « b » lorsque $t_5 > t_6$ et pour le cas où le photon est cette fois émis par la particule « a » lorsque $t_6 > t_5$.

Enfin, Feynman doit tenir compte dans l'équation précédente $K^{(1)}(3,4 ; 1,2)$, de l'équation relativiste de Dirac régissant le mouvement de l'électron plongé dans le champ coulombien créé par l'autre électron ainsi que sa rotation sur lui-même munie de deux degrés de liberté correspondant à ce que nous appelons le *spin*.

Il introduit donc les expressions $\gamma_{a\mu}$ et $\gamma_{b\mu}$ représentant respectivement pour la particule « a » et la particule « b » les matrices de Dirac associées aux états relativistes décrits par des spineurs à quatre composantes (deux degrés de liberté pour l'électron correspondant au spin et deux autres associées au positron assimilable à un électron remontant le temps).

Exprimons, comme mentionné en sous-section 1.2.1.g §a, les matrices de Dirac pour chacun des électrons « a » et « b ».

Les matrices de Dirac γ_μ (pour $\mu = 1, 2, 3, 4$) associées à chaque électron sont les suivantes :

$$\rightarrow \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \text{ avec } I \text{ la matrice Identité } 2 \times 2, \text{ soit : } \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\rightarrow \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_1 \text{ la matrice de Pauli, soit : } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\rightarrow \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_2 \text{ la matrice de Pauli, soit : } \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\rightarrow \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_3 \text{ la matrice de Pauli, soit : } \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour ce qui concerne l'expression de K_+ par rapport à celle de K_0 précédente, Feynman renvoie à l'équation (17) page 752 de sa publication *Theory of Positrons*³⁷⁹.

Dans cette équation (17) il envisage d'une part le cas d'un électron associé à une énergie positive cheminant dans le sens croissant du temps par exemple de x_1 à x_5 lorsque $t_5 > t_1$ et d'autre part implicitement le cas d'un positron associé à une énergie négative remontant le temps de x_5 à x_1 toujours lorsque $t_5 > t_1$ (voir sous-section 1.2.1.g §a).

379. Feynman. Septembre 1949. « *The Theory of Positrons* ». Physical Review. Volume 76. Number 6.

Dans cette publication *Theory of Positrons*, Feynman considère page 750 l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t)$$

pour une particule dans un état quelconque d'énergie.

Puis il mentionne l'équation suivante :

$$\Psi(x_5, t_5) = \int K(x_5, t_5; x_1, t_1) \Psi(x_1, t_1) d^3x_1$$

en précisant qu'il se limite à une seule particule et que cette équation est de la plus grande généralité.

Notons cependant que par rapport à l'exemple pris dans la publication *The Theory of Positron* page 750, nous avons adapté les coordonnées d'espace-temps à notre diagramme associé à la diffusion Möller pour la particule « a » cheminant des coordonnées d'espace-temps (x_1, t_1) à (x_5, t_5) . Nous procédons de la même manière pour ce qui suit.

Dans l'élaboration de l'équation (17) page 752 de *Theory of Positron*, dont nous avons parlé ci-avant, Feynman écrit :

« We shall choose the solution defining $K_+(5,1)$ so that $K_+(5,1)$ for $t_5 > t_1$ is the sum of (3) over positive energy states only. »

En cela, se voulant plus précis que ce qui précède, il exprime l'équation (3) suivante³⁸⁰ :

$$K(5,1) = \sum_n \Phi_n(x_5) \Phi_n^*(x_1) \exp[-iE_n(t_5-t_1)], \quad (3)$$

En précisant :

* $H|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle$ que l'on peut expliquer en nous référant à l'Annexe 19 §2 : les valeurs de E forment un ensemble discret noté E_n appelé spectre de l'énergie. Ces valeurs E_n sont les valeurs propres de l'opérateur H (constant dans le temps) relativement à l'ensemble des vecteurs propres Φ_n de l'espace de Hilbert (« H is a constant operator having eigenvalues E_n , eigenfunctions Φ_n »³⁸¹).

* $t_5 > t_1$

* Φ_n^* est le complexe conjugué de Φ_n

Soit pour $n=1$ nous avons : $\Phi_1 = \alpha_5 + i\beta_5$ et $\Phi_1^* = \alpha_1 - i\beta_1$.

D'où : $\Phi_1\Phi_1^* = (\alpha_5 + i\beta_5)(\alpha_1 - i\beta_1) = \alpha_5\alpha_1 + \beta_5\beta_1 + i(\beta_5\alpha_1 + \beta_1\alpha_5)$.

* pour des mesures de simplification \hbar est posé par Feynman comme égal à 1, d'où :

$$\exp[-\frac{i}{\hbar} E_n(t_5-t_1)] = \exp[-iE_n(t_5-t_1)].$$

* nous savons que : $H = E_c + E_p = E$ et que $L = -H + mv^2$ (voir Annexe 19 §1).

Dans la mesure où $L = f(x, \dot{x}, t)$ est indépendant de \dot{x} (voir sous-section 3.2.3.e), alors : $\exp[-\frac{i}{\hbar} E_n(t_5-t_1)] = \exp[\frac{i}{\hbar} L_n(t_5-t_1)]$.

Cette expression contient implicitement l'expression de l'action car (voir sous-section 3.2.3.d) :

$$\exp[\frac{i}{\hbar} S] = \exp[\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_5} L dt] = \exp[\frac{i}{\hbar} L_n(t_5-t_1)].$$

Finalement, l'équation $K^{(1)}(3,4;1,2)$ devient :

$$K^{(1)}(3,4;1,2) = -i e^2 \iint K_{+a}(3,5) K_{+b}(4,6) \gamma_{a\mu} \gamma_{b\mu} \delta_+(s_{56}^2) K_{+a}(5,1) K_{+b}(6,2) d\tau_5 d\tau_6. \quad (4)$$

380. Ibid. Equation (3) page 750.

381. Ibid.

Considérant cette équation comme une des plus importante de l'électrodynamique quantique, Feynman écrit :

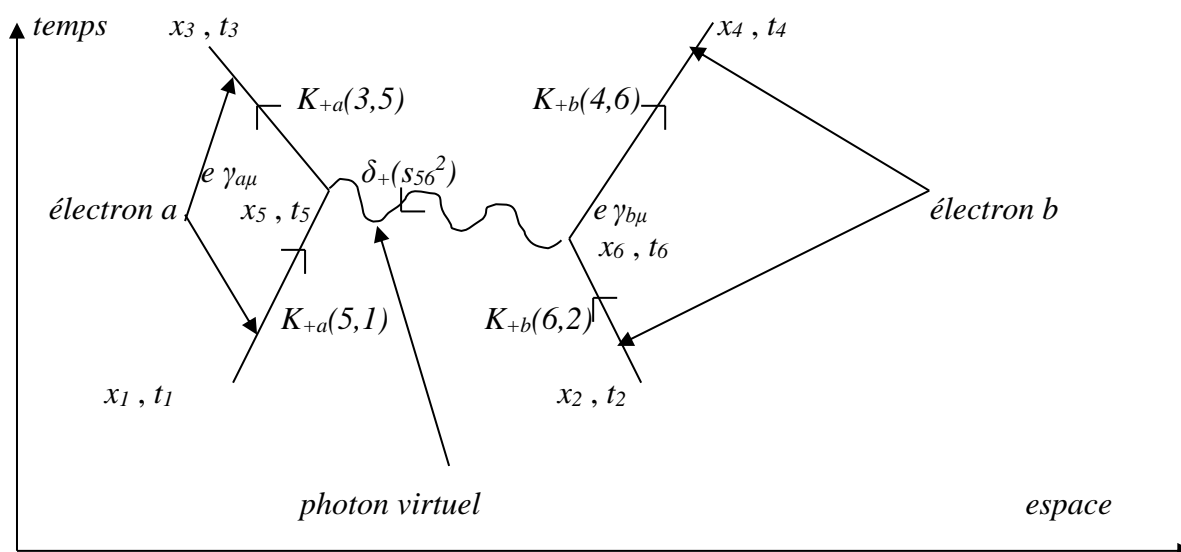
« This is our fundamental equation for electrodynamics. It describes the effect of exchange of one quantum (therefore first order in e^2) between two electrons. It will serve as a prototype enabling us to write down the corresponding quantities involving the exchange of two or more quanta between two electrons or the interaction of an electron with itself. It is a consequence of conventional electrodynamics. Relativistic invariance is clear. Since one sums over μ it contains the effects of both longitudinal and transverse waves in a relativistically symmetrical way. We shall now interpret Eq. (4) in a manner which will permit us to write down the higher order terms. It can be understood (voir diagramme ci-après) as saying that the amplitude for "a" to go from 1 to 3 and "b" to go from 2 to 4 is altered to first order because they can exchange a quantum. Thus, "a" can go to 5 (amplitude $K_+(5,1)$) emit a quantum (longitudinal, transverse, or scalar $\gamma_{a\mu}$) and then proceed to 3 ($K_+(3,5)$). Meantime "b" goes to 6 ($K_+(6,2)$), absorbs the quantum ($\gamma_{b\mu}$) and proceeds to 4 ($K_+(4,6)$). The quantum meanwhile proceeds from 5 to 6, which it does with amplitude $\delta_+(s_{56}^2)$. We must sum over all the possible quantum polarizations μ and positions and times of emission 5, and of absorption 6. Actually if $t_5 > t_6$ it would be better to say that "a" absorbs and "b" emits but no attention need be paid to these matters, as all such alternatives are automatically contained in (4).

The correct terms of higher order in e^2 or involving larger numbers of electrons (interacting with themselves or in pairs) can be written down by the same kind of reasoning.

Calculation, from (4), out of the transition element between positive energy free electron state gives the Möller scattering of two electrons, when account is taken of the Pauli principle.

The exclusion principle for interacting charges is handled in exactly the same way as for non-interacting charges (voir la publication « The Theory of Positrons »). For example, for two charges it requires only that one calculate $K(3,4;1,2) - K(4,3;1,2)$ to get the net amplitude for arrival of charges at 3 and 4. It is disregarded in intermediate states. »³⁸²

Le diagramme de Feynman correspondant à l'équation (4) ci-avant est le suivant :



382. Feynman. Septembre 1949. « Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Pages 772 et 773.

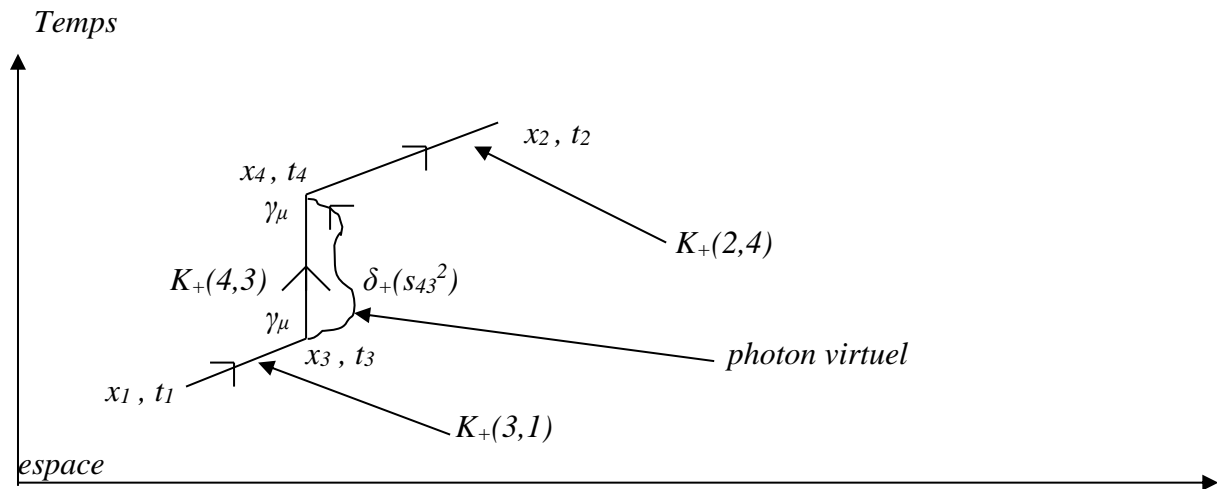
En Annexe 1, nous calculons dans le détail les propagateurs de l'électron et du photon représentés sur ce diagramme fondamental pour l'électrodynamique quantique, ainsi que les coefficients d'interaction matérialisés par les vertex. La déduction du calcul de l'amplitude de probabilité du processus relatif à la diffusion Möller sera donc immédiate.

6.3.2- L'analyse qualitative de l'interaction d'un électron avec lui-même

Dans sa publication^{382 bis} Feynman montre que ses diagrammes d'espace-temps peuvent se généraliser à tout processus physique faisant intervenir les particules subatomiques. Il considère à cet effet l'interaction de l'électron avec lui-même.

Rappelons toujours et encore comme nous l'avons vu au chapitre 3, que c'est en cherchant, entre autres, à résoudre les problèmes d'infinis en électrodynamique classique inhérents à l'auto-interaction de l'électron, que Feynman a inventé la théorie des intégrales de chemins.

L'interaction d'un électron avec lui-même peut être matérialisée, comme nous l'avons vu au chapitre 3 par le diagramme ci-après³⁸³ :



Comme l'écrit Feynman, l'amplitude de probabilité pour qu'une seule particule soit en coordonnée d'espace-temps (x_2, t_2) en partant de (x_1, t_1) est donnée par :

$$K^{(1)}(2,1) = -i e^2 \iint K_+(2,4) \gamma_\mu K_+(4,3) \gamma_\mu K_+(3,1) d\tau_3 d\tau_4 \delta_+(s_{43}^2).$$

382 bis. . Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 773.

383. Ibid.

L'élaboration de cette équation s'effectue de la même manière que ce que nous avons vu en section 6.3.1, mais dans le cas qui nous préoccupe ici, l'électron émet et absorbe son propre photon virtuel :

« ... the electron instead of going from 1 directly to 2, may go first to 3, ($K_+(3,1)$), emit a quantum (γ_μ), proceed to 4, ($K_+(4,3)$), absorb it (γ_μ), and finally arrive at 2 ($K_+(2,4)$). The quantum must go from 3 to 4 ($\delta_+(s_{43}^2)$). »³⁸⁴

Le calcul des propagateurs de l'électron et du photon se trouve en Annexe 2.

Une petite remarque mérite d'être mentionnée à propos du traitement de l'interaction d'un électron avec lui-même dans cette publication de Septembre 1949.

En effet, en Annexe 18 relative au chapitre 3, nous avons vu que la publication de Juillet 1949 avec Wheeler, concernant l'équation classique de l'action associée aux interactions entre particules, est bâtie sur l'hypothèse de la non auto-interaction de l'électron.

Dans ces deux publications émises à deux mois d'intervalle, Feynman se contredit.

En fait, en Septembre 1949, si Feynman à l'aide des diagrammes n'exclue pas le fait qu'un électron puisse au niveau interaction, se comporter comme une paire, rien n'est encore vraiment prouvé quant au fait qu'un électron puisse interagir avec lui-même.

Et même si fin 1940, Feynman, Schwinger et Tomonaga semblent avoir résolu le problème des infinis en Electrodynamique Quantique par la découverte de la renormalisation, il faut attendre les années 1950 pour prouver que les calculs d'Electrodynamique Quantique avec la renormalisation convenable aient fournis des résultats en accord étroit avec l'expérimentation. A ce propos, il prend Wheeler à témoin en 1951 pour avouer qu'ils se sont trompés sur l'idée de la non-interaction de l'électron sur lui-même.^{384 bis}

Il mentionnera d'ailleurs à ce sujet sous la forme d'une boutade, en clôture de sa conférence Nobel, ce qu'il retient de sa « théorie » de jeunesse imaginée lorsqu'il était étudiant au MIT (voir sous-section 2.2.1.b) :

« *Qu'est-il donc devenu de la théorie dont j'étais tombé amoureux dans ma jeunesse ? Eh bien, je dirai qu'elle est devenue une vieille dame, peut-être plus très attirante, et les jeunes gens aujourd'hui ne sentiront plus battre leur cœur en la regardant. Mais je peux en faire le plus bel éloge que mérite une vieille dame : elle a été une très bonne mère, et a donné naissance à quelques très beaux enfants. Et je remercie l'Académie suédoise des sciences pour avoir récompensé l'un deux.* »^{384 ter}

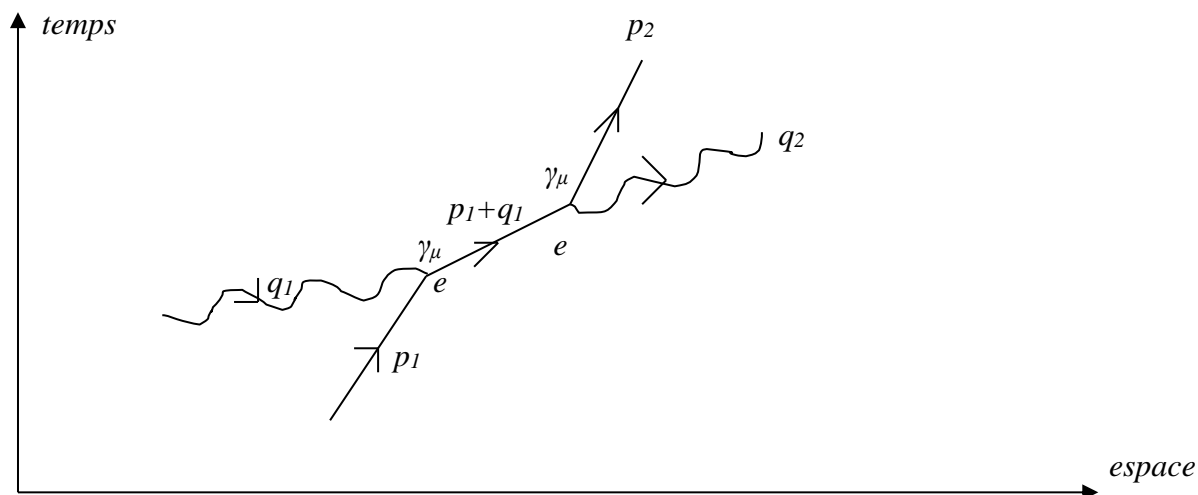
384. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 773.

384 bis. Feynman. Mai 1951. « *Feynman to Wheeler* ». Feynman papers. Caltech, folder 3.10, page 462.

384 ter. Feynman. 1965. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 277.

6.3.3- L'analyse qualitative de la diffusion Compton

Feynman considère l'effet Compton matérialisé par le diagramme suivant³⁸⁵ :



Une particule électron munie d'une quantité de mouvement p_1 absorbe la quantité de mouvement q_1 d'un photon incident, associée à une interaction $e \gamma_\mu$ avec ce photon. La particule munie d'une quantité de mouvement $p_1 + q_1$ transmet ensuite une quantité de mouvement q_2 à un photon associée à une interaction $e \gamma_\mu$ avec ce photon pour finalement obtenir un état final de l'électron initial muni d'une quantité de mouvement p_2 .

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 .$$

Le calcul des propagateurs de l'électron et du photon se trouve en Annexe 3.

6.3.4- L'analyse qualitative de la polarisation du vide associée à la diffusion d'un électron incident par un photon : le problème de la renormalisation

Au chapitre 4, nous avons carrément abordé le problème de la mesure en mécanique quantique. En effet, même si la théorie des intégrales de chemin permet de ressusciter la notion de trajectoire pour une particule dans le but d'adapter la notion d'amplitude de probabilité (voir section 5.2.3), il n'en demeure pas moins que le problème de la mesure reste irrésolu. En effet, on ne peut pas en même temps préciser la position et la vitesse d'un électron. Et ce ne sont pas

385. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 773.

nos appareils de mesure qui sont en défaut, car il semblerait qu'il s'agisse d'une propriété fondamentale de la structure microscopique de la matière en elle-même.

Les particules subatomiques, comme les électrons, ne sont pas comparables à des objets comme le sont par exemple les pierres. Il semblerait qu'elles fassent partie intégrante, comme nous en avons parlé en début de ce chapitre, d'un processus dynamique directement lié aux interactions fondamentales que nous rencontrons dans la nature.

Pour en revenir à l'électron, il pourrait bien être un objet étendu, dynamique, matérialisé intellectuellement par le nuage dont il fait partie et possédant une énergie sous la forme d'une tension sur son volume d'espace-temps. Cette tension pourrait s'apparenter à une source pour l'interaction électromagnétique. Il en serait d'ailleurs de même pour les autres particules subatomiques telles que les quarks associés à l'interaction forte que nous verrons plus tard.

Dans le parcours positif du temps, la désintégration d'un photon produit un positron et un électron, mais le positron de charge électrique positive va immédiatement être attiré très fortement par l'électron. Il y a alors immédiatement annihilation et production d'un nouveau photon. On pourrait presque penser que l'antimatière représentée ici par le positron serait implicitement contenue dans le photon potentiellement désintégrable, c'est-à-dire dans la lumière.

Et pour aller encore plus loin, on peut imaginer à l'origine du monde, un univers de lumière dont le hasard ou autre aurait favorisé un déséquilibre entre matière et antimatière, cette dernière restant emprisonné dans la lumière. Et toute cette lumière autour de nous contiendrait en germe toute l'antimatière présente lors des débuts de l'Univers.

Ceci dit, il semble inéluctable que matière, lumière et leur contenant que l'on appelle « vide » s'interpénètrent. La matière, en l'occurrence l'électron, serait un pur produit du vide. Et ce « vide », dans lequel baigne des photons de lumière qui ne sont que des couples particule-antiparticule, est tout sauf le vide parfait.

En fait, la notion même d'existence de la matière ne peut s'imaginer sans interaction et celle d'interaction sans notion de champ. Alors toute excitation du vide par un champ produit nécessairement des photons, sources de matière et d'antimatière.

En d'autres termes, le « vide » est en réalité rempli d'énergie (l'énergie du « vide ») qui engendre entre autre l'effet, comme nous venons d'en parler, de produire des couples particule-antiparticule virtuelles. L'équation $E = m c^2$ traduisant l'équivalence entre masse et énergie, il est donc possible, en empruntant de l'énergie au vide, de créer des particules massiques qui seraient à l'origine de l'apparition des paires de particules virtuelles.

En mécanique quantique, le vide est donc rempli de particules virtuelles apparaissant pendant un laps de temps très court avant de disparaître : on parle ainsi de fluctuation du vide.

Ces particules virtuelles sont associées à la théorie quantique des champs et leurs effets impliquent des corrections sur les calculs que l'on appelle la « renormalisation ».

En physique des particules, la « renormalisation » est une procédure introduite pour faire disparaître les infinis apparaissant dans le calcul d'une grandeur physique observable telle que nous avons pu le voir en sous-section 3.2.1.a.

En d'autres termes, en Electrodynamique Quantique (QED) la renormalisation a pour but d'interpréter des intégrales divergentes de la théorie des perturbations.

Rappelons que la "théorie des perturbations", en mathématique, ainsi que nous la présentons en Annexe 8 sur un exemple simple, consiste à chercher une solution approchée à une Equation E_λ dépendante d'un paramètre λ , sachant que la solution de l'Equation E_0 associée à la valeur $\lambda = 0$ est connue exactement. Pour cela, il faut chercher une solution approchée de l'Equation E_λ sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre λ .

Il s'agit donc de redéfinir les paramètres intervenant dans le lagrangien de la théorie de façon à tenir compte des interactions entre les particules et les fluctuations du vide.

Ainsi, L'électron qui interagit avec un photon, interagit donc avec les paires virtuelles électron-positron contenues dans le rayon lumineux, qui polarisent le vide. Aussi, comme nous en avons parlé, l'électron n'existant pas en lui-même sans l'interaction électromagnétique, le problème de « renormalisation » va consister à scinder dans les calculs la charge e de l'électron en ³⁸⁶ :

* une charge e_0 nue, c'est-à-dire la charge de l'électron en prenant pour hypothèse qu'il n'y a pas d'interaction,

* une charge E_R de l'électron en tenant compte des interactions électromagnétiques.

Pages 779 et 780 de sa publication³⁸⁷, Feynman utilise la procédure de renormalisation associée à l'effet de la polarisation du vide sur la diffusion d'un électron incident par un photon virtuel issu de la fluctuation du « vide quantique ».

Cette manière de procéder se comprend parfaitement. En effet la nature ne nous montre pas dans notre vie de tous les jours des énergies potentielles électriques E_p infinies et encore moins des masses infinies pour les électrons au voisinage $r = 0$ (voir section 3.2.1).

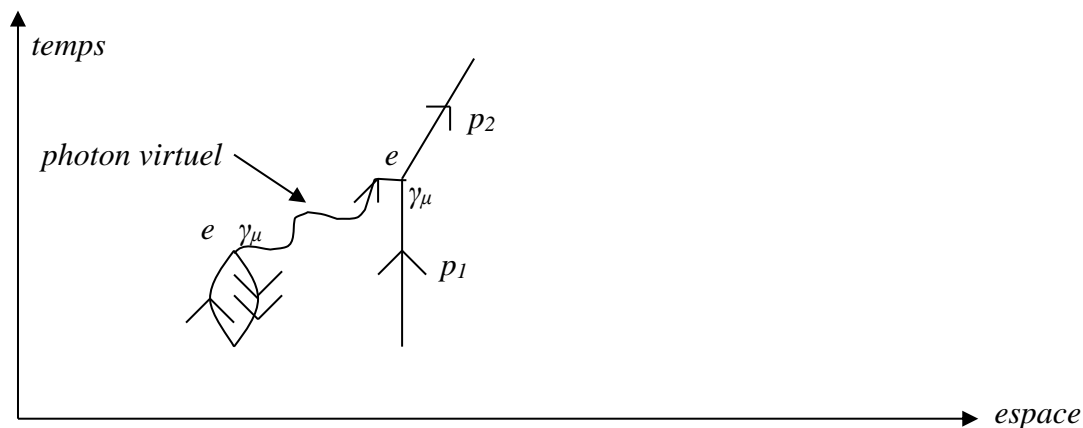
Aussi, les physiciens ont compris que les infinis ne sont présents que s'ils s'acharnent à exprimer l'électron en fonction uniquement de sa charge nue qui n'est pas physique. En parvenant à travailler sur des processus faisant appel à la charge E_R , il n'y a évidemment plus d'infini puisque cette charge est issue d'une mesure expérimentale. Nous dirons que la théorie de l'électrodynamique quantique est une théorie « renormalisable » par le fait que les physiciens savent comparer des prédictions théoriquement calculables avec leurs résultats obtenus expérimentalement.

L'effet de la polarisation du vide sur la diffusion d'un électron incident par un photon virtuel issu de la fluctuation du « vide quantique » est représenté par le diagramme suivant³⁸⁸ :

386. Gilles Cohen-Tannoudji. 2013. « Diagrammes et amplitudes de Feynman, la partition du modèle standard ». Publications de la Sorbonne. OpenEdition books. Page 17.

387. Feynman. Septembre 1949. « Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Pages 779 et 780.

388. Ibid. Page 779.



La paire virtuelle électron-positron dans le vide quantique s'annihile en émettant un photon virtuel produisant un quantum c'est-à-dire un photon d'énergie $h\nu$ (facteur γ_μ) qui se propage. Ce photon virtuel interagit avec un électron incident qui passe de l'état physique p_1 à l'état physique p_2 : il y a polarisation du vide. Le photon virtuel est absorbé par l'électron se trouvant dans l'état physique initial p_1 et qui, de ce fait, passe à l'état physique p_2 .

La paire virtuelle électron-positron est représentée sur le diagramme précédent par une boucle fermée dénommée "closed loop" dans le jargon technique.

Le calcul des propagateurs de l'électron et du photon se trouve en Annexe 4.

6.4- Comment Feynman justifie ses procédés de calcul

6.4.1- La seconde quantification

Pour convaincre ses pairs, Feynman a les soucis constants de montrer que les résultats obtenus au moyen de sa théorie sont en adéquation avec les méthodes employées par ses précurseurs pour traiter tel ou tel problème de mécanique quantique.

Ainsi, pour tout mouvement de particules, que ce soit dans le champ électromagnétique ou dans le champ mésonique, Feynman vérifie que ses résultats concordent avec la méthode de quantification des champs introduite par Dirac en 1927 (voir section 1.2.2) et appelée seconde quantification :

« In this way we have written the solution to the general problem of the motion of electrons in given potentials. The factor C_v is obtained by normalisation. However for photon fields it is desirable to have an explicit form for C_v in terms of the potential. This is given by (30) and (29) and it is readily demonstrated that this also is correct according to second quantization. »³⁸⁹

« This shows one of the advantages of the method of second quantization of meson fields over the present formulation. »^{389 bis}

389. Feynman. Septembre 1949. « *The Theory of Positrons* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 759.
 389 bis Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 784.

«According to the theory of second quantization of the electron field in a given potential, the state of this field at any time is represented by a wave function χ satisfying »^{389 ter}

«A proof of the equivalence of the method to the theory of holes in second quantization is given in the Appendix.»^{389 quad}

Aussi, juge-t-on utile d'expliquer ce que signifie la seconde quantification. Mais avant de parler « *seconde quantification* » il serait bien d'expliquer ce que la première quantification a apporté dans l'élaboration de la mécanique quantique.

6.4.1.a) Rappel concernant la première quantification

En fait, nous avons déjà, dans ce qui précède, appliqué la méthode associée à la première quantification pour décrire les phénomènes quantiques qui nous intéressaient. En effet, pour une particule ponctuelle, la première quantification de la mécanique quantique non relativiste consiste à remplacer la position x de la particule et son impulsion p respectivement par des opérateurs \mathbf{X} et \mathbf{P} agissant sur la fonction d'onde via l'espace de Hilbert. Les vecteurs de l'espace de Hilbert décrivent les configurations possibles, c'est-à-dire les états quantiques du système à une particule. L'état quantique est associé à la fonction d'onde qui est une amplitude de probabilité ; il s'agit d'une fonction complexe $\Psi(x,t)$ de la position x et du temps t , dont le carré du module est la probabilité de trouver la particule au point x et à l'instant t . Cette fonction d'onde est solution de l'équation aux dérivées partielles que constitue l'équation de Schrödinger.

Il ne faut jamais perdre de vue que la première quantification est associée à la constante de Planck \hbar , elle-même liée au fait que l'énergie ne prend que des valeurs discrètes multiples d'un quantum d'énergie élémentaire indivisible, comme nous avons pu le voir en 1.2.1.a. Aussi, toutes les quantités physiques intervenant dans un système quantique sont des grandeurs quantifiées qui ne prennent que des valeurs discrètes.

En Annexe 20 §1, nous apportons une certaine réflexion sur la première quantification via le théorème d'Ehrenfest qui spécifie que les valeurs moyennes des opérateurs quantiques de position et de quantité de mouvement obéissent à des équations identiques à celles de la physique classique ; ce qui n'est pas évident a priori.

Passons maintenant à la seconde quantification que nous trouvons en sous-section suivante.

6.4.1.b) La seconde quantification

Les travaux sur la quantification du champ électromagnétique par Dirac en 1927 ont consisté à considérer, sur tout l'espace-temps, la fonction d'onde ordinaire de la théorie de la première quantification comme un champ classique. Et ce champ classique est devenu un champ quantique par l'intermédiaire de la seconde quantification.

Dans la théorie quantique relativiste du champ électromagnétique, les opérateurs décrivant le champ quantique sont des opérateurs de création ou d'annihilation. L'espace de Hilbert (voir sa définition en Annexe 13 §2) sur lequel agissent ces opérateurs est

^{389 ter} Feynman. Septembre 1949. « *The Theory of Positrons* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 758.

^{389 quad} Feynman. Septembre 1949. « *The Theory of Positrons* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 750.

un espace appelé « *espace de Fock* ». Un « *espace de Fock* » n'est rien d'autre qu'un empilement infini d'espaces de Hilbert qui communiquent par l'intermédiaire des "opérateurs champ électromagnétique" et les objets créés ou détruits sont des photons ou des paires électron-positron .

Il est important de souligner que les champs ne sont pas liés à la dualité onde-corpuscule, mais qu'ils sont issus d'un concept autorisant la création ou l'annihilation de particules subatomiques en tout point de l'espace-temps, comme les développements mathématiques nous le montrent. Et ces développements mathématiques, purement abstraits, peuvent être considérés comme *vrais*, lorsqu'une mesure prédictive vient confirmer la théorie qu'ils soutiennent.

En Annexe 20 §2, nous définissons en quoi consiste la seconde quantification pour l'Electrodynamique Quantique, à travers laquelle Feynman s'appuie pour vérifier les calculs conduisant à sa théorie.

6.4.2- Le critère d'invariance de jauge

Appliquant le principe de *renormalisation* dans ses calculs sur le problème de la polarisation du vide que l'on trouve en paragraphe 7 de sa publication³⁹³, Feynman insiste sur une méthode trouvée par Bethe et Pauli assurant la convergence de l'expression (32)³⁹⁴ donnant le courant électrique associé à une paire positron-électron, en mentionnant que cette manière de procéder ne spolie pas l'invariance de jauge :

« *A method of making (32) convergent without spoiling the gauge invariance has been found by Bethe and Pauli.* »³⁹⁵

«*The gauge invariance is clear since ...* »

Notons d'ailleurs que tout au long de ses calculs, le critère d'invariance de jauge sera décisif sur la véracité de ses résultats.

«*By altering the kernel from K to another, K' , which does not satisfy the Dirac equation we have lost the gauge invariance, ...* »^{395 bis}

«*A separate convergence factor is not provided for each meson propagation between electromagnetic interaction, otherwise gauge invariance is not insured.* »^{395 ter}

En Annexe 21, il nous a paru nécessaire de préciser ce que l'on entend par l'*invariance de jauge* dont fait usage Feynman afin de vérifier la véracité de ses résultats.

393. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Pages 778 à 780.

394. Ibid. Page 779.

395. Ibid. Page 780.

365. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 783, chapitre 10.

^{395 bis} Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 779.

^{395 ter} Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 784.

6.5- Conclusion

Feynman imagine déjà dans sa publication de Septembre 1949³⁶⁵ tout ce que sa méthode de travail à l'aide des diagrammes qu'il vient d'inventer, peut apporter à l'ensemble de la physique théorique :

« The theories which have been developed to describe mesons and the interaction of nucleons can be easily expressed in the language used here ».

En effet, en précurseur visionnaire, il consacre un paragraphe entier aux théories de l'époque qui assimilaient à tort les mésons comme associés à l'interaction des nucléons (les protons et les neutrons).

Rappelons qu'en 1949, avant la découverte des quarks (dans la théorie de Gell-Mann sur les nouvelles particules [1954 à 1961] et confirmée expérimentalement en 1963 par un groupe de chercheur du *Brookhaven National Laboratory*) , les mésons étaient considéré comme des bosons vecteurs de l'interaction forte.

Alors dans sa publication, Feynman extrapole les règles et les calculs qu'il a inventé pour quantifier le champ électromagnétique, c'est-à-dire les interactions entre photons, électrons et positrons, pour quantifier cette fois le champ mésonique c'est-à-dire les éventuels interactions entre mésons et nucléons.

On voit ainsi apparaître des équations particulièrement ressemblantes, aux coefficients de couplage près qu'il identifie.

Il n'oublie pas cependant de préciser que cette théorie du champ mésonique n'est pas encore validée expérimentalement.

Feynman termine sa publication de Septembre 1949, en énumérant les possibilités que peut avoir sa méthode dans la recherche en physique théorique :

« Calculations are very easily carried out in this way to lowest order in g^2 for the various theories for nucleon interaction, scattering of mesons by nucleons, meson production by nuclear collisions and by gamma-rays, nuclear magnetic moments, neutron electron scattering, etc. ... »

Dans le prolongement de ce qui vient d'être écrit, il me paraît intéressant de mentionner qu'une dizaine d'année plus tard, à la fin des années cinquante, Feynman et Gell-Mann conduisirent des travaux de recherche sur la théorie des interactions faibles.

Et que ces travaux⁴⁰¹ sur la théorie des interactions faibles contenaient en germe l'hypothèse des bosons vectoriels Z_0 , W_- et W_+ qui furent identifiés comme responsables des interactions faibles, en grande partie au CERN en 1983.

Mais laissons s'exprimer Feynman et Gell-Mann à propos de leurs travaux⁴⁰² :

« But what would we do if we were trying to describe β decay, in which an electron is created? Would we use a field operator Ψ directly in the Hamiltonian to represent the annihilation of an electron, or would we use φ ? Now everything we can do one way, we can represent the other way. Thus if φ were used it could be replaced by (a) while an expression in which φ was used could be rewritten by substituting (b) .

401. Feynman et Gell-Mann (1958). « *Theory of the Fermi interaction* ». Physical Review, volume 109, 193-198.

402. Ibid. Pages 194 et 195.

If φ were really fundamental, however, we might be prejudiced against (a) on the grounds that gradients are involved. That is, an expression for β coupling which does not involve gradients from the point of view of Ψ , does from the point of view of φ . So we are led to suggest φ as the field annihilation operator to be used in β decay without gradients. If φ is written as in (b), we see this does not conserve parity, but now we know that that is consistent with experiment. For this reason one of us suggested the rule that the electron in β decay is coupled directly through φ , or, what amounts to the same thing, in the usual four-particle coupling

... and we should like to discuss the consequences of this hypothesis.

We have assumed that the neutron and proton are either both “particles” or both “antiparticles”. We have defined the electron to be a “particle” and the neutrino must then be a particle too.

We shall further assume the interaction “universal”, so for example it is

Since the neutrino function always appears in the form $a\Psi$, only neutrinos with left-hand spin can exist. That is, the two-component neutrino theory with conservation of leptons is valid. Our neutrinos spin oppositely to those of Lee and Yang. For example, a β particle is a lepton and spins to the left; emitted with it is an antineutrino which is an antilepton and spins to the right.

»

6.6- Références

- ARGELIES Henri (1972). Relativistic Point Dynamics. Traduction anglaise de la Dynamique relativiste et ses applications (Fascicule I et II de 1958) sur un texte mis à jour et profondément remanié. Gauthier-Villars.
- BASDEVANT Jean-Louis (1994). Mécanique quantique : Tome I et II. Cours du Département de Physique de l'Ecole Polytechnique.
- BASDEVANT Jean-Louis (2005). Principes variationnels et dynamique. Vuibert.
- BLACKETT Patrick (1948). Cloud Chamber Researches in Nuclear Physics and Cosmic Radiation. Nobel Lecture.
- BOHR Niels (1932). La théorie atomique et la description des phénomènes . Gauthier-Villars. Traduction Andrée Legros et Léon Rosenfeld pour l'édition Jacques Gabay, 1993.
- BREIT Gregory & WHEELER John (15 Décembre 1934). Collision of two Light Quanta. Physical Review, Volume 46, page 1087.
- COHEN-TANNOUJDI Claude, DIU Bernard, LALOË Franck (1973). Mécanique quantique : volumes I et II . Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts. Edition revue et corrigée (nouveau tirage 1998).
- COHEN-TANNOUJDI Gilles (2013). Diagrammes et amplitudes de Feynman, la partition du modèle standard. Publications de la Sorbonne. OpenEdition books.
- DARRIGOL Olivier (1982). Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948). Thèse de doctorat (Université Paris I : Panthéon-Sorbonne).
- DIRAC Paul (Première édition 1931). Les Principes de la Mécanique Quantique. Traduction Al. Proca et J. Ullmo de la Première édition en anglais de 1930. Les Presses Universitaires de France, Paris. Editions Jacques Gabay.
- DIRAC Paul (1933). Le lagrangien en mécanique quantique. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- DIRAC Paul (1933). The Lagrangian in Quantum Quantum Mechanics (St John's College, Cambridge, paper 26, publication 1933, received November 19, 1932).

- DIRAC Paul (1935). The Principles of Quantum Mechanics. Second Edition , Oxford University Press.
- DIRAC Paul (1938). La Théorie de Dirac. Proceedings of the Royal Society of London. Volume 167, p. 148.
- DIRAC Paul (1947). The Principles of Quantum Mechanics. Third Edition, Oxford University Press.
- EINSTEIN Albert & RITZ Walter (1909). Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems; On the Current State of the radiation Problem. Physikalische Zeitschrift. Volume 10. Pages 323-324.
- EINSTEIN Albert (1952). Conceptions scientifiques, morales et sociales. Traduction de Maurice Solovine. Flammarion.
- FAURE Frédéric (11 octobre 2003). Notes de cours sur la Mécanique quantique. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- FEYNMAN Richard (Début 1941). The Interaction Theory of Radiation . Feynman Papers, Caltech, folder 6.1. Page 462.
- FEYNMAN Richard (Thesis 1942). Principles of least action in quantum mechanics. Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy.
- FEYNMAN Richard (1942). Le principe de moindre action en mécanique quantique . Traduction Emile Biémont. La thèse de Feynman. PEARSON Education France. 2007.
- FEYNMAN Richard (Lettres 1939-1987). Qu'en pensez-vous Monsieur Feynman ? Traduction : Christian Jeanmougin. Dunod (2006).
- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Approche espace-temps de la mécanique quantique non-relativiste. Review of Modern Physics, volume 20, 367. Traduction Emile Biémont contenue dans « La thèse de Feynman » publiée par Pearson Education France (2007).
- FEYNMAN Richard (Avril 1948). Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. Review of Modern Physics, volume 20, 367.
- FEYNMAN Richard (1948). A relativistic cut-off for classical electrodynamics. Physical review, volume 74. Pages 939-946.
- FEYNMAN Richard (1948). Relativistic cut-off for quantum electrodynamics. Physical review, volume 74. Pages 1430-1438.
- FEYNMAN Richard (September 15, 1949). Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. Physical Review. Volume 76, 769.
- FEYNMAN Richard (September 15, 1949). The Theory of Positrons. Physical Review. Volume 76. Number 6, 749.
- FEYNMAN Richard (November 1, 1950). Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. Physical Review. Volume 80, Number 3, 440.
- FEYNMAN Richard (4 mai 1951). Lettre de Feynman à Wheeler. Feynman Papers. Caltech, folder 3.10.
- FEYNMAN Richard & GELL-MANN Murray (January 1, 1958). Theory of the Fermi interaction. California Institute of Technologie, Pasadena, California. Physical Review, volume 109, 193-198.
- FEYNMAN Richard (1963). Le cours de physique : électromagnétisme 1. Traduction A. Crémieux et M.-L. Duboin. Dunod (2009).
- FEYNMAN Richard & HIBBS Albert (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014.
- FEYNMAN Richard (December 11, 1965). The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics. Nobel Lecture.
- FEYNMAN Richard (Décembre 1965). L'électrodynamique quantique et l'espace-temps. Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar de la publication

- originale « The development of the space-time view of quantum electrodynamics » : Nobelprize.org.
- FEYNMAN Richard, KISLINGER M., RAVNDAL F. (1971). « Current matrix elements from a relativistic quark model ». Physical Review. Volume 3, 2706-2732.
 - FEYNMAN Richard & LEIGHTON Ralph (1985). Vous voulez rire Monsieur Feynman! Odile Jacob (2000). Traduction F. Balibar, C. Guthmann de la publication originale « Surely You're Joking Mr Feynman ! Adventures of a Curious Character » publiée aux USA par W.W. Norton & Company, Inc., New York. Ce livre peut être considéré comme des mémoires autobiographiques.
 - FEYNMAN Richard (1985). QED, The Strange Theory of Light and Matter. Traduction Françoise Balibar et Alain Laverne : *Lumière et matière. Une étrange histoire*. Points Sciences. InterEditions. Version imprimée de novembre 1992.
 - HAROCHE Serge (1966). Forme lagrangienne de la mécanique quantique. ENS Ulm. Cours de deuxième année du DEA de physique atomique et statistique.
 - HLADIK Jean (2009). Mécanique Quantique. Atomes et noyaux. Applications technologiques. Dunod.
 - IHEP. Institut Interuniversitaire des Hautes Energies. « *Bases de la chromodynamique quantique* ». Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB).
 - KLASSEN Michael (2009). Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge. Dunod.
 - KOPPER Christoph (2012). Principes variationnels et Mécanique analytique. Cours de Physique PHY431. Ecole Polytechnique. Année 2.
 - LANDAU Lev & LIFCHITZ Evgueni (1964). Physique théorique. Théorie des champs. Traduction du russe : S. Medvédev. Editions MIR Moscou. Ellipses (novembre 2012 : 5^e édition en français).
 - MEHRA Jagdish (1994). The beat of a different drum. The life of science of Richard Feynman. Clarendon Press. Oxford.
 - PENROSE Roger (2004). A la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique. Traduction Céline Laroche. Editions Odile Jacob. 2007.
 - RITZ Walter (1908). Recherches critiques sur l'Electrodynamique Générale. Annales de Physique 152 à 158, volume 13, page 145.
 - ROUGE André (2004). Introduction à la relativité. Les éditions de l'école polytechnique.
 - SCHWARZSCHILD Karl (1903). Zur Elektrodynamik. I. Zwei Formen des Prinzips kleinsten Action in der elektronen Theorie. Nachr. Göttingen.
 - SCHWEBER Silvan (1986). Feynman and the visualization of space-time processes. Reviews of Modern Physics : 58, 449-512.
 - TETRODE Hugo (1922). Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamic. Zeitschrift für Physic. Volume 10, pages 157-181.
 - WHEELER John (.1937) On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure. Physical Review, Volume 52, page 1107.
 - WHEELER John & FEYNMAN Richard (21 Février 1941). Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping . Physical Review, volume 59. Page 683.
 - WHEELER John & FEYNMAN Richard (1945). Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. Reviews of Modern Physics, volume 17, 426.
 - WHEELER John & FEYNMAN Richard (1949). Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action ». Reviews of Modern Physics. Volume 21. Page 425.
 - WIKIPEDIA (19.06.2017). Propagateur de l'équation de Schrödinger.
 - WIKIPEDIA (18.12.2018). Symétrie (physique).
 - WIKIPEDIA (18.12.2018). Invariance. Physique théorique.

Chapitre 7

Vers un cadre rigoureux pour les intégrales de chemins

Résumé

7.1- Introduction

7.2- Présentation de la base de données MathSciNet

7.3- Méthode de travail

7.4- Période de recherche allant de 1951 à 1975 : Cécile DeWitt-Morette

7.5- L'année charnière 1976 : Sergio Albeverio et Raphael Hoegh-Krohn

7.6- Période de recherche allant de 1977 à 2020

7.6.1- Années 1983, 1993, 2002 : travaux de Ludwig Streit , Takeyudi Hida et José L. Silva

7.6.2- Années 1993, 1995 : Les travaux de Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette

a) Les réflexions de Pierre Cartier en 1993

b) Une nouvelle perspective concernant l'intégration fonctionnelle (1995)

7.6.3- Années 1999, 2008, 2012 : Les travaux de Erik G.F. Thomas , Mathieu Beau et Tony Dorlas, Sonia Mazzucchi

7.7- Conclusion

7.8- Références

Résumé

Dans les années 1960 et 1970, avant que ne se fasse ressentir la forte influence de l'intégrale de chemins dans les activités quotidiennes de la plupart des physiciens théoriciens, aucun travail pertinent n'existe réellement en histoire des sciences sur l'intégrale de chemins.

L'intérêt des historiens et des épistémologues se mit à augmenter progressivement vers la fin des années 1970 jusqu'à nos jours, suite aux travaux des mathématiciens qui s'emparent du sujet dès 1951, afin d'apporter plus de crédibilité à cette intégrale et parallèlement à certaines avancées en Théorie Quantique des Champs comme nous le verrons au chapitre 8.

Dans ce chapitre 7, nous montrons de manière chronologique comment les mathématiciens tentent d'apporter un cadre rigoureux aux intégrales de chemins selon différentes approches.

7.1- Introduction

En novembre 1950, Feynman publie l'article *Formulation mathématique de la théorie quantique de l'interaction électromagnétique*⁴⁰³ dans lequel il invente de nouvelles approches résolvant divers problèmes mathématiques associés à la mécanique quantique et à la théorie quantique du champ électromagnétique (l'électrodynamique quantique), toutes deux résultant du concept de l'intégrale de chemins.

Formulant à la manière de Fermi le champ électromagnétique en tant qu'ensemble d'oscillateurs harmoniques, il intègre l'effet des oscillateurs sous la forme lagrangienne de la mécanique quantique. Il obtient ainsi une expression associée à l'effet de tous les photons virtuels traduisant l'amplitude de probabilité d'un processus physique de l'électrodynamique quantique en une série de puissances croissantes du paramètre physique $\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}$ que nous avons vu en section 6.2.2.

Il établit aussi une relation entre l'amplitude de probabilité d'un électron se déplaçant dans un champ électromagnétique défini par les potentiels scalaire et vecteur non quantifiés du champ électromagnétique où se trouve l'électron (voir sous-section 1.2.1.g partie a : équation de Klein-Gordon obtenue par Dirac) et l'amplitude de probabilité relative à ce même électron tel que présenté par les diagrammes associés à la théorie de l'électrodynamique quantique de Feynman (le champ électromagnétique quantifié : voir section 6.2.2).

Cette relation s'ouvre sur une clarification générale des lois de l'électrodynamique quantique validant les règles données dans l'article fondamental *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* (septembre 1949) analysé au chapitre 6.

En fait, le travail effectué par Feynman dans la validation des règles de l'électrodynamique quantique n'apporte pas véritablement de preuves formelles suivies de théorèmes étant rigoureusement ce que l'on serait en droit d'attendre d'une démonstration mathématique précise concernant la non-divergence des expressions obtenues.

Ainsi, si les travaux de Feynman s'appuient sur des principes mathématiques reconnus, ils restent néanmoins essentiellement soumis à son intuition de physicien-théoricien. Alors tout le travail de ce septième chapitre consiste à examiner les travaux des mathématiciens qui tentent de trouver un fondement rigoureux au concept de trajectoire contenu dans la théorie quantique de Feynman.

Afin d'illustrer ce qui précède, citons Henri Poincaré :

« C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. »⁴⁰⁴

Rappelons ce que nous avons évoqués au chapitre 4 (§4.2) et au chapitre 5 (sous-section 5.2.4.a.2) concernant la position ambiguë liée à l'intuition de Feynman par rapport à ce que l'on serait en droit d'attendre en physique mathématique :

- Feynman n'est pas en mesure de définir selon une démarche précise et une justification rigoureuse, le remplacement de la somme $\sum_{i=0}^n S(x_{i+1}-x_i)$ par une intégrale.

403. Feynman. November 1, 1950. « *Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction* ». Physical Review. Volume 80, Number 3, Page 440.

404. Henri Poincaré. 1908. « *Science et méthode* ». Flammarion – Bibliothèque de Philosophie Scientifique. Page 137.

Dans la conclusion de sa thèse, il avoue ne pas être en mesure de mentionner une règle pour déterminer le facteur de normalisation pour une expression donnée de l'action. Qui plus est, il relie le problème délicat que constitue l'établissement de la constante de normalisation à un problème mathématique difficile concernant la convergence de l'équation d'onde $\Psi(X,T)$ associée à la division aussi fine soit-elle de l'échelle temporelle .

- Si nous sommes capable d'énoncer de façon précise les idées de Feynman en nous attachant au cheminement de sa pensée, il n'en demeure pas moins que la notion de sommation sur chaque chemin reste ambiguë et pose des problèmes délicats d'analyse fonctionnelle ; en effet, comme nous en avons parlé au chapitre 4, il n'est pas prouvé que la série associée à un chemin quelconque de la région R de l'espace-temps, pour une division de l'échelle des temps aussi fine soit-elle, soit convergente. De même que pour l'ensemble des séries associées à ce premier postulat qui conduit Feynman à autoriser, sans préalable mathématique étayé rigoureusement, la sommation sur tous les chemins de l'espace-temps entre M' et M'' .

On peut aussi se poser, chez Feynman, la question du bien fondé de l'application du principe de moindre action classique, c'est-à-dire continu, relativement à un laps de temps ε infinitésimale (une découpe) pour ensuite recoller les morceaux. En effet, aussi petit que soit ε les morceaux recollés bout à bout ne déterminent pas un chemin continu.

Afin de passer d'une vue intuitive à un cadre formel et précis pour l'intégrale de chemins, je vais examiner de manière chronologique les travaux de divers mathématiciens qui tentent d'apporter plus de rigueur dans le développement de ces intégrales. Et pour cela, dans le but d'embrasser une vision assez large de ce qui se fait, il m'a paru judicieux de consulter, en plus de ce que l'on trouve sur *internet*, la base de données *MathSciNet* très exhaustive.

Je commence donc par présenter au paragraphe 7.2 la base de données *MathScinet*, suivi au paragraphe 7.3 de la méthode de travail que j'ai utilisée. Ainsi, j'ai pu me rendre compte des étapes historiques fondamentales concernant ce sujet.

J'ai donc distingué trois périodes associées à des approches mathématiques différentes :

- Une période allant de 1951 à 1975 (§7.4) marquée par les travaux de Cécile DeWitt-Morette dont sa première publication de 1951 basée sur un apport plus précis, grâce à l'utilisation des séries de Taylor, dans la manière de définir le propagateur de Feynman issu du mode calculatoire de l'intégrale de chemins conduisant aux fameux diagrammes dit de Feynman,
- Une période charnière qui a pour date 1976 (§7.5) basée sur les travaux de Sergio Albeverio associés à ceux de Raphael Hoegh-Krohn selon une approche mettant en œuvre les théories de l'intégration,
- Une période allant de 1977 à 2020 (§7.6) scindée en trois sections :
 - * Les années 1983, 1993, 2002 (section 7.6.1) marquées par les travaux de Ludwig Streit associés à ceux de Takeyuki Hida et de José L. Silva selon une approche stochastique,
 - * Les années 1993, 1995 (section 7.6.2) concernant les travaux de Pierre Cartier associés à ceux de Cécile DeWitt-Morette basés sur une approche axiomatique,
 - * Les années 2008, 2012 (section 7.6.3) marquées par les travaux de Mathieu Beau associés à ceux de Tony Dorlas (2012) reprenant ceux de Erik G.F. Thomas (1999) basés sur la notion de distributions et les travaux de Sonia Mazzucchi (2008) en collaboration avec Albeverio afin d'enrichir par une deuxième édition la publication de 1976 concernant les théorie de l'intégration.

Les publications fondamentales que j'ai consultées sont les suivantes :

- C. Morette « *On the definition and approximation of Feynman's path integral* ». *Physical Review*, volume 81, pages 848-852, 1951.

- Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. «*Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics*». Springer (first edition),
- Albeverio, Hoegh-Krohn, Mazzucchi. 2008. «*Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics*». Springer (second edition),
- Cartier. 1993. «*L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux* ». Leçons de mathématiques d'aujourd'hui. Volume 1 présenté par Eric Charpentier et Nicolas Nikolski, éditions Cassini, Paris, deuxième édition corrigée (2003),
- Cartier et DeWitt-Morette. 1995. «*A new perspective on functional integration* ». Journal of Mathematical Physics. Volume 36,
- Streit - Silva. 2002. «*Feynman Integrals and White Noise Analysis* ». CCM-Centro de Cincias Matemticas, Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Portugal,
- Streit - Hida. 1983. «*Generalized Brownian functionals and the Feynman integral* ». Stochastic Processes and their Applications. Volume 16,
- Streit - Hida. 1993. «*White noise. An Infinite Dimensional Calculus* ». Kluwer Academic Publishers,
- Beau – Dorlas. 2012. «*Discrete-Time path Distributions on Hilbert Space* ». HAL,

7.2- Présentation de la base de données MathSciNet

Notre recherche bibliographique s'effectue en partie via le site de L'UPPA (Université de Pau et des Pays de l'Adour) grâce à la base de données MathSciNet : *Mathematical reviews on the web* à laquelle l'Université de Pau est abonnée et dont j'ai accès de part mon statut d'étudiant à l'Ecole Doctorale.

MathSciNet est une base de données bibliographiques que l'on peut consulter en ligne. Elle a été créée par l'American Mathematical Society en 1996. Son contenu est très exhaustif et on peut y trouver entre autres, l'ensemble des articles des mathématiciens de tous les pays, qui ont publiés dans la prestigieuse revue américaine *Mathematical reviews (MR)* depuis 1940.

On y trouve aussi une base de données complète des auteurs. Signalons à cet effet que la base de données contient de multiples références croisées effectuant tous les liens imaginables avec d'autres auteurs, en mentionnant par exemple les citations de tous les auteurs qui s'inspirent ou bien mettent en valeur le ou les points forts de toute publication présente dans la base. Ceci permet bien évidemment de connaître l'impact, c'est-à-dire la valeur et l'importance, de toute publication au sein de la communauté des mathématiciens et des physiciens spécialistes de la physique mathématique.

La base de données permet de connaître pour un item sous forme de mots clefs, associés à notre recherche, que nous écrivons dans le menu initial :

- le nombre total de publications associées à cet item : *onglet « Matches »*,
- le nom des auteurs qui ont travaillé sur le sujet et le nombre d'articles publiés par chaque auteur : *onglet « Authors »*,
- le laboratoire de rattachement de cet auteur, d'où l'Université ou le centre de recherche auquel l'auteur appartient : *onglet « Institutions »*,
- Le domaine mathématique ou physique dont cet item relève, par exemple : mécanique quantique, équations différentielles partielles, processus stochastiques et théorie des probabilités, etc. : *onglet « Primary Classification »*,
- le nombre d'articles publiés sur le sujet année par année : *onglet « Year »*,
- le journal de mathématique, de physique ou de physique mathématique dans lequel se trouvent les publications concernées par cet item, par exemple : Journal of Mathematical Physics, Journal of Physics A . Mathematical and Theoretical, Physical Review, Physics Letters, communications in Mathematical Physics, etc.: *onglet « Journal »*,
- le type de publication, par exemple s'il s'agit d'une thèse de doctorat, d'un article de recherche, ou d'autres choses : *onglet « Item Type »*,
- le résumé de l'article avec le nom du scientifique ayant examiné cette publication avec son point de vue et la référence exacte de la publication pour achat : *onglet « MR ... »*.

La base de données MathSciNet contient près de 3,6 millions d'articles et quelques 2,3 millions de liens vers des articles originaux.

En effet, en sélectionnant dans le menu « *termes de recherche* » en rubrique « *Titre* » ou bien en rubrique « *N'importe où* », par exemple l'item « *Path integral* », j'ai pu localiser beaucoup plus d'informations sur le sujet, que j'ai recoupé avec ce que j'ai consulté de manière indépendante sur *Internet*.

J'ai ainsi constaté que pratiquement toutes les publications intéressantes se trouvant sur Internet sont accessibles sur la base.

7.3- Méthode de travail

- Je mentionne dans le menu « *Titre* » un ou plusieurs mots clefs associés à ma recherche.
- J'ai accès aux domaines des mathématiques concernés grâce à l'*onglet « Primary Classification »*.
- Je sélectionne un domaine particulier pour obtenir le nom des auteurs associé à ce domaine ainsi que le nombre d'articles qu'ils ont publiés grâce à l'*onglet « Authors »*.
- L'*onglet « Year »* me donne année par année le nombre de publications émises.
- L'*onglet « MR ... »* me donne accès à la publication qui m'intéresse.
- Et je trie parmi tous les résultats que j'obtiens ceux qui correspondent à ma recherche, en procédant préalablement à ce que j'indique ci-après.

En effet, dans un premier temps, afin de solliciter le plus largement possible le moteur de recherche de la base de données par les mots clefs adéquat, j'ai recherché, sur *Internet* indépendamment de MathSciNet et aussi en questionnant des mathématiciens, quelles étaient

les différentes approches qui permettaient d'apporter plus de rigueur dans le développement des intégrales de chemins.

Parmi les principales approches, j'ai retenu celles mettant en œuvre :

- les théories de l'intégration,
- les théories stochastiques dans l'analyse du bruit blanc et du mouvement brownien,
- les théories des distributions.

Ainsi, en plus du mot clef « *path integral* » concernant le moteur de recherche associé à la base, « *les mots clefs* » liés aux approches retenues ci-avant m'ont permis de croiser toutes les références relevant des diverses combinaisons entre ces mots clefs afin d'une part d'être le plus exhaustif possible et d'autre part d'affiner mes recherches.

Et devant la quantité de publications mises à ma disposition (plus de 2349), il m'a fallu trouver certains critères à l'aide des menus associés au moteur de recherche de la base afin d'avancer et de présenter un travail de synthèse le plus crédible possible.

Les critères que j'ai utilisés ont été les suivants :

a) Le premier critère a été de vérifier dans le temps quand a véritablement eu lieu l'intérêt pour les mathématiciens de rechercher un fondement rigoureux au concept de trajectoire contenu dans la théorie quantique de Feynman.

Puis, en remontant jusqu'à nos jours, j'ai pu savoir comment a évolué dans le temps l'intérêt des mathématiciens concernant ce besoin de rigueur. J'ai pu aussi me rendre compte de l'intérêt des physiciens théoriciens spécialistes de physique mathématique (domaine s'intéressant au développement des méthodes mathématiques aux problèmes de physique) pour apporter plus de précision dans les outils développés par Feynman à travers l'intégrale de chemins.

b) Le deuxième critère a été de rechercher parmi tous les articles des auteurs référencés, ceux qui ont présenté le plus d'intérêt parmi la communauté scientifique, gage d'importance et de sérieux des résultats obtenus pour le sujet traité.

Pour cela, il m'a suffi de sélectionner pour chaque publication l'onglet « *citations* » afin de connaître le nombre de mathématiciens qui se sont servis de la publication en question dans leur travail de recherche.

c) Le troisième critère a été de me renseigner sur le nom du mathématicien, ou du physicien spécialiste en physique mathématique, mandaté par la Société Américaine de Mathématique pour vérifier la publication.

Car bien évidemment un nom connu et reconnu dans le domaine, parfois prestigieux, est une garantie du sérieux dans le résumé et la synthèse de l'article et aussi dans l'importance qu'il peut revêtir au niveau de la communauté scientifique.

J'ai pu ainsi me rendre compte des étapes historiques fondamentales concernant mon sujet.

Ces trois critères posés *a priori*, m'ont permis de déceler trois périodes bien distinctes dans le temps, qui sont les suivantes :

a) Une première période qui commence en 1951 par trois publications dont la plus pertinente est celle de Cécile DeWitt-Morette concernant plutôt un besoin de précision et de rigueur dans la définition du propagateur de Feynman issu du concept de l'intégrale de chemin. Nous dirions qu'il s'agit beaucoup plus d'un travail de physicienne théoricienne spécialiste en physique mathématique que d'un travail de mathématique pur motivé par la recherche d'un cadre rigoureux à apporter à l'intégrale en question.

Jusqu'en 1975, peu de publications voyent le jour, et celles que nous pouvons analyser ne semblent pas très intéressantes du fait du peu d'intérêts qu'elle suscitent dans la communauté scientifique.

b) Une deuxième période que nous pourrions qualifier de singulière car elle attire l'attention par un nombre étonnant de publications (26), est matérialisée par l'année 1976. Nous pouvons constater qu'à partir de 1976 les mathématiciens commencent à s'intéresser à l'intégrale de chemins.

Notons qu'entre 1974 et 1975 le nombre de publications sur le sujet passe de 7 à 12 pour parvenir à 26 en 1976.

Cela peut s'expliquer par le prix Nobel de Physique attribué à Feynman en 1965 et par le fait que bon nombre de physiciens théoriciens tels que Gross, Politzen, Wilczek, Weinberg, Salam et Higgs se mirent à regarder de plus près, autour de 1965 et dans les années 1970, l'influence des idées de Feynman (concernant la partie calculatoire de l'intégrale de chemins) sur l'étude des interactions fortes, des interactions faibles et des interactions d'une hypothétique particule avec toutes les particules pour leur conférer une masse inertielle (le boson de Higgs).

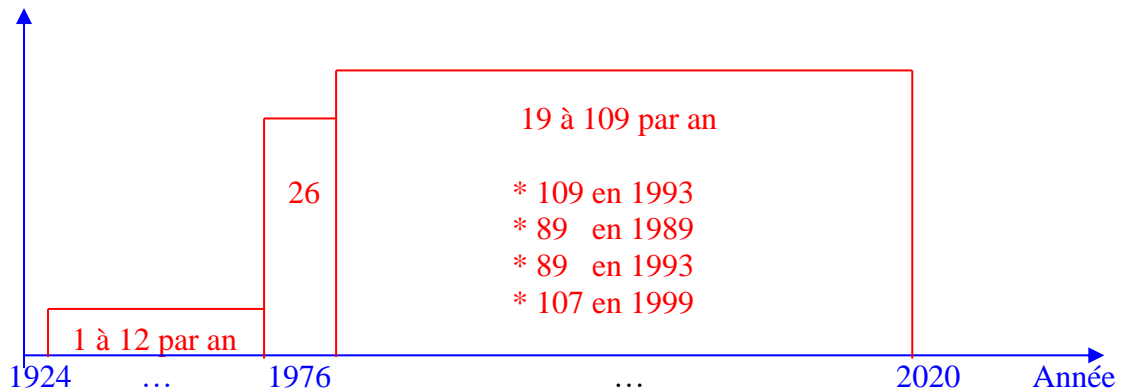
c) Une troisième période qui s'étend de 1977 à 2020, dans laquelle le nombre de publications se met à croître assez rapidement jusqu'à en compter plus d'une soixantaine par an.

Parmi ces trois périodes, nous allons rechercher les publications les plus intéressantes et parmi celles-ci un second tri sera effectué pour trouver les plus pertinentes que nous analyserons en détail afin de déceler et de comprendre l'importance des travaux obtenus qui permettent d'apporter plus de rigueur et de clarté dans la construction de cet objet mathématique que constitue l'intégrale de chemins.

7.4- Période de recherche allant de 1951 à 1975 : Cécile DeWitt-Morette

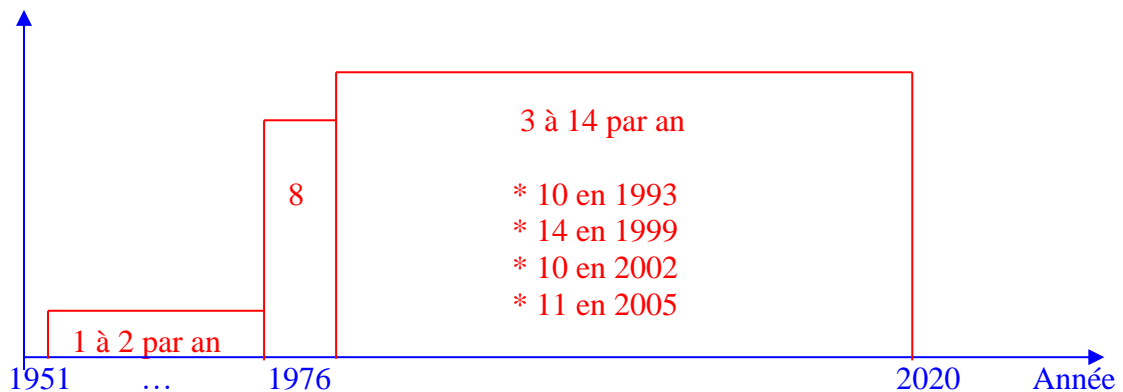
En actionnant le moteur de recherche de la base de données MathSciNet sur l'objet mathématique « *Path integral* », on obtient 2349 publications qui s'étendent de 1924 à 2020 tel que le montre le graphe suivant :

Publications « Path integral » (donnée brute) : Total = 2349



Le moteur de recherche ne fait aucune différence entre l'intégrale de chemins découverte par Feynman et les mots « *path* » et « *integral* » pouvant se retrouver dans une phrase qui n'a rien à voir avec notre sujet (ou à voir de très loin). Aussi, nous sommes obligé de restreindre notre recherche sur « *Feynman path integral* » qui nous permet de ne plus trouver que 266 articles allant de 1951 à 2020 tel que :

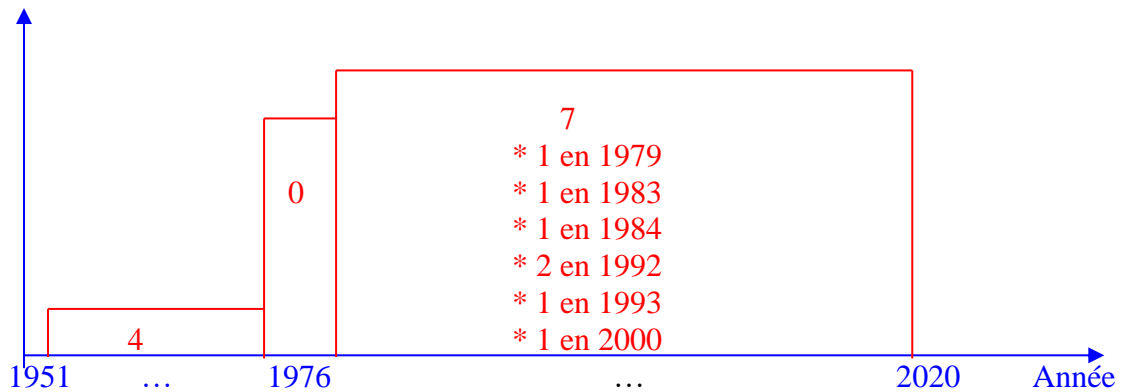
Publications « Feynman Path integral » (donnée brute) : Total = 266



Cependant, ces 266 publications ne sont pas exhaustives et il nous faut quand même vérifier parmi les 2349 publications précédentes, celles qui ont une relation avec la découverte de Feynman, en d'autres termes celles qui ont été introduite par Feynman en physique et dont les travaux des mathématiciens ou des physiciens théoriciens se rapportent à notre sujet. Il nous a aussi fallu croiser les résultats obtenus avec les approches telles que mentionnées au début du paragraphe 7.3.

Ainsi, les premiers travaux sur l'intégrale de chemins de Feynman sont ceux effectués par Cécile DeWitt-Morette en 1951 et qui se poursuivront tels que représentés par le graphe suivant :

Publications de Cécile DeWitt – Morette : Total = 11



Cécile Morette (1922 – 2017) qui deviendra Cécile DeWitt-Morette par son mariage avec le physicien américain Bryce DeWitt en 1951, est une physicienne et mathématicienne française, connue pour avoir fondé l'Ecole des Houches, une école d'été qui offre des cours avancés de physique théorique, et dont plusieurs élèves ont obtenu le prix Nobel de physique.

Les travaux de Cécile DeWitt-Morette se situent à la frontière des mathématiques et de la physique, dans le domaine de ce qu'on appelle la physique mathématique, le mot mathématique qualifiant ainsi cette physique basée sur le développement des méthodes mathématiques appliquées à la physique dite théorique telle que Dirac a pu les introduire dans les années 1930. Elle a ainsi expliqué les phénomènes de diffusion des ondes dans les événements optiques tels que les gloires, les arcs-en-ciel et autour des trous noirs.

Ses travaux dans le domaine de la physique mathématique ont aussi portés sur l'intégrale de chemins, découverte par Feynman, et utilisée comme nous le savons en physique quantique.

Apportant ses talents de physicienne théoricienne à un mathématicien tel que Pierre Cartier, nous analyserons au paragraphe 7.6 (section 7.6.2) leur travail de mathématique pur concernant le sujet qui nous occupe.

Dans l'immédiat nous nous intéressons à sa publication de 1951, issues de travaux plus proche de la physique mathématique que des mathématiques pures. Cette publication s'intitule « *On the definition and approximation of Feynman's path integrals* ».

Dans cet article, Cécile DeWitt-Morette travaille sur le propagateur de Feynman :

$$K(x^B, x^A) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x) d(\text{paths})\right]$$

avec:

$$S(x) = \int_{\tau^A}^{\tau^B} L[x, (dx/d\tau)] d\tau$$

définissant l'action le long du chemin $x(\tau)$.

L'article montre que l'approximation W.K.B. est bien obtenue pour certains cas assez simples de propagateurs. Rappelons qu'en physique, l'approximation W.K.B. en l'honneur des trois physiciens théoriciens Gregor Wentzel (1898-1978), Hendrik Kramers (1894-1952), Léon Brillouin (1889-1969), est une méthode développée en 1926 qui permet d'étudier le régime classique d'un système quantique. La fonction d'onde est développée asymptotiquement au premier ordre de la puissance du quantum d'action \hbar . On doit donc retrouver la mécanique classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ (voir Annexe 17) comme on retrouve l'optique géométrique lorsque la longueur d'onde $\lambda \rightarrow 0$ dans la théorie de l'optique ondulatoire (voir section 5.2.2).

L'examen et le résumé de cette publication a été effectué par Freeman Dyson à la fois mathématicien et physicien théoricien qui n'est autre que celui qui a dévoilé aux physiciens comment Feynman a reformulé l'Electrodynamique Quantique en démontrant l'équivalence des résultats de Feynman avec ceux de Schwinger et de Tomonaga, dans sa publication de février 1949 : « *Les théories du rayonnement de Tomonaga, Schwinger et Feynman* » (Physical Review).

Dans son résumé critique que l'on trouve dans la base, Dyson explique sur quelles variables joue Cécile DeWitt-Morette pour apporter, par le biais des séries de Taylor, plus de précision dans la définition du propagateur.

Mais pour Dyson, comme nous l'avons brièvement mentionné au paragraphe 7.3, si l'article peut convenir à des physiciens, il ne satisfait pas un mathématicien, car il ne résout pas ce que nous avons écrit en *Introduction* (§7.1), à savoir la convergence de la série associée à un chemin quelconque d'une région R de l'espace-temps, pour une division de l'échelle des temps aussi fine soit-elle :

« *The results of this paper will satisfy the needs of a physicist who wishes to use the Feynman formalism in practical physical situations. They will not satisfy a mathematician who looks for a rigorous theoretical basis for Feynman's methods. In particular, there is no discussion of the mathematically crucial question, whether the multiple integrals in fact tend to a limit as $n \rightarrow \infty$. Certainly this will not be true without some strong restrictions on the form of the Lagrangian* ».

Notons cependant que cette publication de 1951 est citée 11 fois par des mathématiciens et des physiciens théoriciens entre 1999 et 2019.

Les publications qui sortent en 1954, 55, 58, 70, 72, 73, 74, 75 sur le sujet, sont sans grand intérêt et très peu voire même jamais citées pour la plupart d'entre elles.

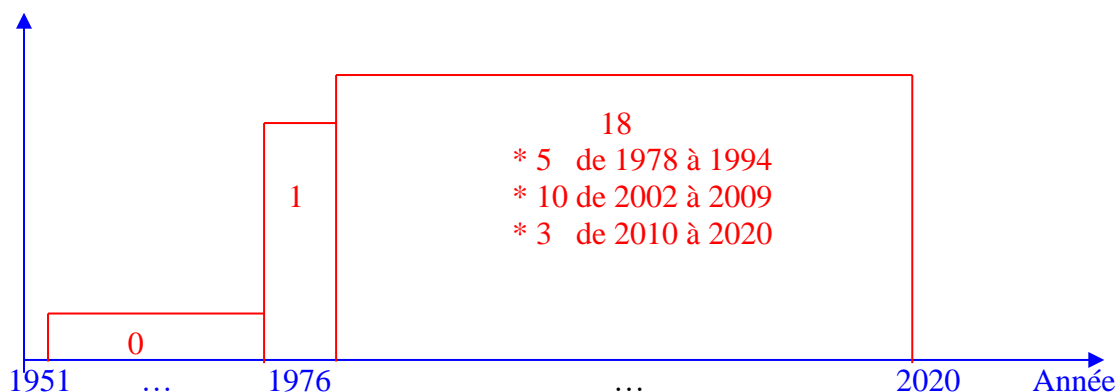
Il faut attendre l'année 1976, pour les raisons indiquées au paragraphe 7.3, pour voir les mathématiciens s'emparer du sujet, avec déjà quelques uns des leurs qui commencent à s'y intéresser en 1975.

7.5- L'année charnière 1976 : Sergio Albeverio et Raphael Hoegh-Krohn

En 1976 se détache très nettement des 26 publications mentionnées dans MathScinet, celle de Sergio Albeverio en collaboration avec Raphael Hoegh-Krohn qui est citée 66 fois entre l'année 1987 et l'année 2019, les autres articles n'étant que rarement cités.

Et nous pouvons constatés dans le graphe suivant la prise en main du sujet par Albeverio jusqu'à aujourd'hui :

Publications de Sergio Albeverio : Total = 19



L'année 1976 correspond à la première publication d'Albeverio sur le sujet et il ne cite d'ailleurs jamais l'article de Cécile DeWitt-Morette datant de 1951. En effet, pour Albeverio, mathématicien et non physicien théoricien, le problème à traiter devient un vrai travail de mathématique pure et il va chercher à interpréter l'intégrale de chemins de Feynman en tant que solution de l'équation de Schrödinger de la manière la plus rigoureuse possible en s'appuyant sur une théorie de l'intégration que nous allons détailler.

Aussi, par rapport aux travaux de Cécile DeWitt-Morette, ce travail de mathématique pure entrepris par un mathématicien de renom va se détacher de l'aspect purement physique que l'on rencontre chez la physicienne, pour s'élargir vers un contexte beaucoup plus abstrait où règne toute une rigueur mathématique dans la définition des concepts conduisant à la construction d'une intégrale de chemin découverte par Feynman de manière plus ou moins intuitive.

Il est assez cocasse de voir que le résumé et l'examen critique de cette publication a été effectuée par Cécile DeWitt-Morette elle-même. Cela montre d'une part l'intérêt portée par la physicienne française sur ce sujet et d'autre part qu'entre 1951 et 1976, Cécile DeWitt-Morette et Albeverio se plaçaient comme pionniers dans la volonté d'apporter plus de rigueur dans les travaux de Feynman concernant l'intégrale de chemins.

Et comme nous l'avons entrevu au paragraphe 7.4, Cécile DeWitt-Morette ne s'arrêtera pas là, mais entraînera Pierre Cartier, véritable mathématicien, dans des travaux de mathématiques pures, auxquels elle apportera ses compétences de physicienne théoricienne ; nous analyserons au paragraphe 7.6 (sous-section 7.6.2.b) leurs travaux en mentionnant de l'aveu de Pierre Cartier lui-même que ce sont les travaux d'Albeverio qui les ont motivés dans l'envie de bâtir un programme d'étude généralisant ceux d'Albeverio et Hoegh-Krohn (voir sous-section 7.6.2.b).

Le point de vue de la physicienne française rend bien compte de la valeur des travaux du mathématicien suisse :

« One of the most interesting features of the authors' definition of infinite-dimensional oscillatory integrals as developed in this book, is that it allows for an extension of the method of stationary phase and corresponding asymptotic expansions to the infinite-dimensional case, justifying in particular Feynman's conception of the classical limit of quantum mechanics, as the stationary phase contribution in a Feynman path integral evaluated in the limit $\hbar=0$ ».

Sergio Albeverio, né le 17 janvier 1939, est un mathématicien suisse ayant obtenu son doctorat à l'École polytechnique fédérale de Zürich en 1966. Il a travaillé dans de nombreux domaines des mathématiques aussi variés que la théorie des probabilités, l'analyse stochastique, la géométrie différentielle, la topologie et les systèmes dynamiques.

Il s'est aussi intéressé aux applications des mathématiques en mécanique quantique et en théorie quantique des champs.

C'est donc tout naturellement que parmi ses objectifs principaux on peut trouver le développement de nouvelles méthodes pour l'analyse dimensionnelle infinie et en particulier le développement d'une théorie mathématique des intégrales de chemins de Feynman.

Rappelons que l'intégrale de chemin a pour intégrant une fonctionnelle c'est-à-dire une fonction de fonction dont la somme est prise sur des fonctions et non sur des nombres réels ou complexes comme pour les intégrales ordinaires.

On a donc affaire à une intégrale en dimension infinie $\int f(x(t)) dx(t)$ que l'on distingue de l'intégrale ordinaire $\int f(t) dt$ calculée sur un chemin $f(t)$ de l'espace physique évoluant en fonction du temps t , la somme étant prise sur la variable temps.

Du fait de l'importance des travaux de Sergio Albeverio, nous jugeons intéressant de les analyser en détail.

Pour ce faire, cette analyse s'effectue au moyen des deux publications éditées respectivement en 1976 et en 2008.

Nous avons vu au chapitre 3 que Feynman a découvert une nouvelle méthode, objet de sa théorie quantique, pour résoudre l'équation de Schrödinger. Il s'agissait en fait d'une méthode heuristique qui n'avait pas de fondement rigoureux à l'époque, c'est-à-dire à la fin des années 1940.

D'après Pierre Cartier ^{404 bis}, ce n'est qu'après les travaux d'Albeverio mentionnés dans son livre de 1976 que la méthode de Feynman a pu véritablement être étayée par un fondement rigoureux que l'on est en droit d'obtenir grâce à la puissance des mathématiques.

La première édition de ce livre publiée chez Springer *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics* fait suite à des travaux de recherche effectués avec le mathématicien norvégien Raphael Hoegh-Krohn (1938-1988) particulièrement connu pour la découverte d'une dualité fondamentale en mécanique statistique quantique relativiste.

La deuxième édition également publiée chez Springer en 2008 est une reprise de la première édition. Elle est l'œuvre de Sergio Albeverio et de Sonia Mazzucchi, et se trouve enrichie par de nouveaux développements. Sonia Mazzucchi est une mathématicienne italienne de l'Université de Trente, effectuant des travaux concernant les processus stochastiques, l'analyse fonctionnelle, les théories de l'intégration et de la mesure.

Albeverio développe une théorie générale associée aux intégrales oscillantes sur les espaces de Hilbert réels et applique cette théorie au fondement mathématique des intégrales de chemins de Feynman associées à la mécanique quantique non relativiste.

L'invariance des intégrales par translation telle que définie par Albeverio, contribuent à extrapoler naturellement la théorie des intégrales oscillantes d'un contexte de dimensions finies à celui associé à des dimensions infinies.

404 bis. Cartier. 2003. « *Leçon de mathématique d'aujourd'hui – L'intégrale de chemin de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux* ». Page 43.

Le travail d'Albeverio contenu dans sa publication élargit donc le principe de base de l'analyse asymptotique appliqué aux intégrales oscillantes selon un contexte associé à des dimensions infinies, couvrant ainsi les limites rencontrées en mécanique quantique.

Un cas particulier d'intégrales oscillantes étudiées dans le travail de recherche d'Albeverio concerne les intégrales de chemin de Feynman.

Pour Albeverio le besoin d'un fondement mathématique de la théorie quantique de Feynman associée à l'intégrale de chemins est nécessaire car il en mentionne que sa découverte résulte d'une solide intuition de la part du physicien théoricien américain :

« Since their inception (Feynman path integrals) they have occupied a somewhat ambiguous position in theoretical physics. On one hand they have been widely and profitably used in quantum mechanics, statistical mechanics and quantum field theory, because of their strong intuitive, heuristic and formal appeal. On the other hand most of their uses have not been supported by an adequate mathematical justification. Especially in view of the potentialities of Feynman's approach as an alternative formulation of quantum dynamics, the need for a mathematical foundation has been broadly felt ... »⁴⁰⁵

Albeverio résume l'idée de l'intégrale de chemin de Feynman en considérant le cas le plus simple qui est celui d'une particule non relativiste de masse m en mouvement dans l'espace Euclidien \mathbf{R}^n sous l'influence d'une force conservative (telle que définie en Annexe 14 : la force contenue dans l'équation de la dynamique de Newton, et en Annexe 15 §2 : la force associée au champ électromagnétique) donnée par le potentiel électrique $V(x)$.

Il retrouve ainsi l'expression de l'intégral de chemin de Feynman pour la solution de l'équation de Schrödinger associée à la trajectoire suivie par la particule dans l'espace-temps. Il utilise pour cela la même méthode que Feynman que nous avons décrite au chapitre 3 :

« The expression (1.10) gives the solution of Schrödinger's equation as a limit of integrals. »⁴⁰⁶

Ensuite, il considère la fonction d'onde associée à la trajectoire de la particule en mouvement successivement le long de divers chemins de la façon dont Feynman le fit (voir chapitre 4):

« Feynman's idea can now be formulated as the attempt to rewrite (1.10) in such a way it appears, formally at least, as an integral over a space of continuous functions, called paths. »⁴⁰⁷

Il en déduit à la manière de Feynman que l'on trouve au chapitre 4:

« Feynman looks upon $S_t(x_k, \dots, x_0)$ as a Riemann approximation for the classical action $S_t(\gamma)$ along the path γ . »⁴⁰⁸

Albeverio rappelle que la théorie de l'intégration relative aux espaces associés aux fonctions continues était disponible bien avant l'avènement des intégrales de chemins de Feynman. En particulier, l'idée de l'intégrale de chemin se retrouve dans les travaux de Norbert Wiener⁴⁰⁹

405. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. «*Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics*». Springer. Page 3.

406. Ibid. Page 5.

407. Ibid.

408. Ibid. Page 6.

409. Wiener. 1923. «*Differentiel Space*». MIT Press, Cambridge, 1964. Selected papers of Norbert Wiener. Page 55.

(1894-1964) dont l'objectif est de procéder à une description des propriétés statistiques du mouvement brownien, suite aux travaux d'Einstein qu'il étudie lors de sa visite à Cambridge en 1913.

Le mouvement brownien ou processus de Wiener est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une particule immergée dans un fluide et qui est soumise à des interactions sous forme de chocs avec les molécules du fluide.

Wiener donne donc une définition mathématique du mouvement brownien (1923) en construisant une mesure de probabilité (*la mesure de Wiener*) sur l'espace des fonctions continues réelles et en étudiant rigoureusement la continuité du mouvement brownien. Il définit ainsi l'intégrale par rapport au mouvement brownien appelée *intégrale de Wiener*.

Pour Wiener, le mouvement brownien est vu comme la limite continue d'une marche au hasard markovienne associée à la variable temps discrétisée. Le mouvement est défini par la probabilité $P(x' - x)$ d'aller d'un point de coordonnée x à un point de coordonnée x' . Ainsi, à partir du point x_0 la probabilité $P_n(x_n, x_0)$ d'arriver au point x_n au temps n est :

$$P_n(x_n, x_0) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} P(x_n - x_{n-1}) \dots P(x_2 - x_1) P(x_1 - x_0).$$

Wiener interprète l'ensemble des intégrales sur les variables x_i comme une somme pondérée sur tous les chemins $\{x_i\}$ allant de x_0 à x_n dans un temps prenant les valeurs entières $0, 1, \dots, n$. Notons que pour n tendant vers l'infini, la discrétisation du temps ne signifie plus grand-chose et la distribution $P(x' - x)$ prédit par le théorème de la limite centrale de la théorie des probabilités est remplacée par une distribution gaussienne donnée par la formule

$$\exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{2D} \right\}$$

avec:

* x' la moyenne telle que l'on puisse calculer une valeur approchée de la probabilité qu'une variable associée à des événements aléatoires (loi dite normale) soit dans un intervalle $[x' - D^{1/2}, x' + D^{1/2}]$,

* D la variance correspondant au carré de l'écart-type noté $D^{1/2}$.

Cette limite de n tendant vers l'infini conduit à une intégrale de chemin car les propriétés statistiques du mouvement brownien se retrouvent sous la forme de termes d'une somme sur tous les chemins possibles en fonction d'un temps t continu conforme à une loi de probabilité gaussienne.

Albeverio souligne aussi le travail du mathématicien Mark Kac (1914-1984) relatif à l'équation de la chaleur de Joseph Fourier (1768-1830) dont le lien avec le mouvement brownien est bien connu grâce aux travaux d'Einstein.

Cette équation de la chaleur est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \sigma \Delta \Psi(x,t) - V(x) \Psi(x,t) \quad (1.14)^{410}$$

avec:

* σ la constante de diffusion thermique,

* $V(x)$ une fonction de la position de $x \in \mathbf{R}^n$,

* Δ le laplacien en dimension n ,

* $\Psi(x,t)$ la fonction température de la coordonnée x à l'instant t .

410. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. «*Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics*». Springer. Page 6.

Kac a indiqué que cette équation différentielle du premier ordre en temps et du second ordre

pour l'espace (le laplacien $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \dots$) est analogue à l'équation de

Schrödinger lorsque le temps t est remplacé par un temps imaginaire pur it .

En effet, en remplaçant t par it , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial it} \Psi = \sigma \Delta \Psi - V(x) \Psi$$

$$\frac{i\partial}{i^2 \partial t} \Psi = \sigma \Delta \Psi - V(x) \Psi$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-\sigma \Delta + V) \Psi$$

qui a la même forme que l'équation de Schrödinger temporelle, pour une particule dans un potentiel scalaire écrite de manière moderne, que nous avons vu en fin de section 1.2.1.f.

Kac a montré mathématiquement que la solution de l'équation de la chaleur s'exprime de la manière suivante :

$$\Psi(x,t) = \int \exp \left[- \int_0^t V(\gamma(\tau)+x) d\tau \right] \varphi(\gamma(0)+x) dW(\gamma) \quad (1.15)^{411}$$

avec :

- * $dW(\gamma)$ la *mesure de Wiener* dans le contexte du mouvement brownien,
- * $\sigma^2 d\tau$ la variance associée au développement de la solution de l'équation de la chaleur,
- * $\gamma(\tau)$ les fonctions absolument continues dans l'espace de Hilbert réel associées à tous les chemins possibles définis de manière continue, tels qu'interprétés par Wiener,
- * $\|\gamma\|^2 = \int \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 d\tau$ la norme relative aux fonctions $\gamma(\tau)$,
- * $0 \leq \tau \leq t$.

La solution précédente de l'équation de la chaleur (1.15) peut formellement être réécrite comme suit :

$$\int_{\gamma(t)=x} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_t(\gamma) \right] \varphi(\gamma(0)) d\gamma \quad (1.13)^{412}$$

dans laquelle l'expression $\frac{i}{\hbar} S_t(\gamma)$ est remplacée par :

$$- \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 d\tau - \int_0^t V(\gamma(\tau)) d\tau$$

411. Ibid. Page 7.

412. Ibid. Page 6.

comme l'indique Albeverio⁴¹³.

Ainsi, l'expression (1.13) est l'équation intégrale de Feynman, identique à celle obtenue au paragraphe 4.2 (équation 3), et constituée d'un ensemble approprié de chemins se terminant au point de coordonnée x à l'instant t .

En travaillant sur l'équation de la chaleur de Fourier avec ce qu'il savait du mouvement brownien, suite aux travaux de Wiener, Kac a montré qu'il était possible de rendre la méthode de Feynman rigoureuse.

Rappelons qu'à partir de la fonction d'onde Ψ associée à l'intégrale de chemin, Feynman retrouve l'équation différentielle de Schrödinger. Autrement dit, l'équation de Schrödinger a pour solution la fonction d'onde Ψ associée à la théorie quantique de Feynman basée sur l'intégrale de chemin (voir chapitre 3).

Le mérite de Kac est d'avoir vu que l'équation de Schrödinger peut être considérée comme une équation de la chaleur de Fourier à condition de postuler pour un temps it appartenant à l'ensemble des Imaginaires purs.

Aussi, Kac a adapté avec une grande rigueur mathématique la méthode de Feynman associée à l'équation de Schrödinger, en considérant la variable temps appartenant à l'ensemble des Imaginaires purs au lieu d'appartenir à l'ensemble des Réels. Il a donc pour cela travaillé sur l'équation de la chaleur de Fourier.

En d'autres termes et plus précisément, Kac a démontré le lien de l'intégrale fonctionnelle de chemin avec la mesure de Wiener, c'est-à-dire la loi du mouvement brownien, en appliquant la rotation de Wick.

Cette rotation de Wick du nom du physicien italien Gian Carlo Wick (1909-1992) est une méthode mathématique permettant de remplacer dans les équations, le temps " t " par un temps imaginaire pur égal à " it ". Ce changement de variable peut être vu comme une rotation dans le plan complexe. Cette méthode permet de trouver une solution à un problème mathématique dans un espace associé à l'espace euclidien quadridimensionnel rapporté à des axes rectilignes orthonormés. Et ceci à partir d'un problème relatif à l'espace-temps de Minkowski.

Cette astuce mathématique que constitue la rotation de Wick est d'un usage très courant en théorie quantique des champs, où elle permet de simplifier de nombreux calculs par le fait d'attribuer une base à d'éventuelles tentatives de démonstrations rigoureuses. Nous y reviendrons au cours de cette thèse.

D'un point de vue épistémologique, soulignons les travaux antérieurs d'Adriaan Fokker (1887-1972) et de Max Planck (1858-1947) à l'origine de l'équation de Fokker-Planck. En effet, cette équation a la forme d'une équation de Schrödinger en temps imaginaire associée au mouvement brownien qui a motivé la construction de la première intégrale de chemin ou intégrale de Wiener.

Mais laissons Albeverio s'exprimer :

« Thus (1.15) is actually a rigorous version of the correspondent of the Feynman path integral for the heat equation. This fact has been used ⁴¹⁴ to provide a "definition by analytic continuation" of the Feynman path integral, in the sense that Feynman's path integral is then understood as the analytic continuation to purely imaginary t of the Wiener integral (1.15). The analogous of the Wiener integral solution of the equation (1.14), with V replaced by iV , which

413. Ibid. Page 7

414. Voir les travaux de : R.H. Cameron (1960-62-63-66-68-70), Yu L. Daletskii (1962), J. Feldman (1963), D.G. Babbitt (1963- 65-66-67), E. Nelson (1964), J.A. Beekman (1965-67-69-70-71), D.L. Skoug (1968-74), G.W. Johnson (1970-71-73-74), G.N. Gestrin (1970).

corresponds to Schrödinger's equation with purely imaginary mass m , has been studied by Nelson and allows to cover the case of some singular potentials. These definitions by analytic continuation, as well as the definition by the "sequential limit" (voir l'équation 1.10 c'est-à-dire :

$$\exp \left[-\frac{i}{\hbar} tH \right] \varphi(x) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} (2\pi i \frac{\hbar}{m} \frac{t}{k})^{-kn/2} \int_{R^{nk}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} S_t(x_k, \dots, x_0) \right] \varphi(x_0) dx_0 \dots dx_{k-1}$$

obtenue grâce à la formule de Lie-Kato-Trotter , avec par définition $x_k = x$ et :

$$S_t(x_k, \dots, x_0) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\frac{t}{k}} \right)^2 - V(x_j) \right] \frac{t}{k} \quad (1.11) : \text{voir chapitre 4),}$$

have the disadvantage of being indirect in as much as they do not exhibit Feynman's solution (1.13) as an integral of the exponential of the action over a space of paths in physical space-time. In particular they are unsuitable for the mathematical realization of the original Dirac's and Feynman's ideas (voir les chapitres 3 et 4) about the approach to the classical limit $\hbar \rightarrow 0$, perhaps one of the most beautiful features of the Feynman path integral formalism.

Namely (1.13) suggests that a suitable definition of the **oscillatory integral** should allow for the application of an infinite dimensional version of the method of stationary phase, to obtain, for $\hbar \rightarrow 0$, an asymptotic expansion in powers of \hbar , with leading term given by the path which makes $S_t(\gamma)$ stationary i.e. , according to Hamilton's principle, the trajectory of classical motion. The definition of Feynman path integrals and more general **oscillatory integral** in infinitely many dimensions which we give in this work is precisely well suited for this discussion, as shown in [41]⁴¹⁵ and [42]⁴¹⁶.

Puis Albeverio définit de manière fondamentale les intégrales oscillantes dans l'espace de Hilbert réel séparable c'est-à-dire dans l'espace possédant un sous-ensemble dénombrable dense. Il s'agit des intégrales convergentes de Fresnel .

Dans cette section, Albeverio établit aussi les propriétés des intégrales de Fresnel.

Rappelons le théorème suivant :

« Tout espace de Hilbert séparable possède une base Hilbertienne. »

Rappelons aussi que si une base est Hilbertienne, alors on a la décomposition suivante en série convergente (mais pas absolument convergente) :

$$x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_n \| \langle x, e_n \rangle \|^2 = \sum_n | \langle x, e_n \rangle |^2 \quad (\text{Formule de Parseval}).$$

Après avoir posé le contexte mathématique dans lequel il travaille, associé aux espaces de Hilbert réels séparables, et effectué quelques rappels sur l'espace de Schwartz et l'algèbre de

415. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1975. «Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics I». Oslo University Preprint, Institute of mathematics.

416. Albeverio. 1976. «Lectures on mathematical theory of Feynman path integrals». Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, Acta Universitatis Wratislaviensis.

Banach, Albeverio arrive à la fonctionnelle bornée et continue sur $F(\mathbb{R}^n)$ qu'il écrit $F(f)$ et que l'on appelle *l'intégrale de Fresnel* de f .

Il précise aussi que f est une fonction intégrable de Fresnel si $f \in F(\mathbb{R}^n)$.

Soit donc :

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x|^2/2} f(x) dx \quad (2.6)$$

qui est comme le mentionne Albeverio l'intégrale normée de la fonction $e^{i|x|^2/2} f(x)$.

Après avoir justifié l'utilisation de l'intégrale de Fresnel, Albeverio résume les propriétés de cette intégrale selon ce qu'il qualifie de propositions. L'auteur emploie le mot "proposition" par rapport à celui de "théorème" qu'il va utiliser dans les sections ultérieures. Il juge, en effet, que le mot "proposition" possède une portée suffisante pour ne pas être un simple "lemme", mais qu'il a moins d'importance qu'un "théorème".

Les quatre propositions de l'auteur sont les suivantes :

* Proposition 2.1 :

L'espace $F(\mathbb{R}^n)$ des fonctions intégrables de Fresnel est une algèbre de fonction de Banach de norme $\|f\|_0$. En d'autres termes, $F(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach pour laquelle $F(f_1, \dots, f_k)$ est une forme k-linéaire continue sur $F(\mathbb{R}^n) \times \dots \times F(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$|F(f_1, \dots, f_k)| \leq \|f_1\|_0 \dots \|f_k\|_0.$$

De plus, les sommes et les produits obtenus à partir des fonctions intégrables de Fresnel sont à nouveau des fonctions intégrables de Fresnel. En outre, la composition avec des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions holomorphes définies sur tout le plan complexe, donne aussi une fonction intégrable de Fresnel. Rappelons qu'en mathématique, la composition de fonctions est un procédé qui consiste à construire une nouvelle fonction à partir de deux fonctions.

Albeverio définit pour H un espace de Hilbert réel séparable répondant au produit (x,y) ayant pour norme $|x|$. Il propose alors pour H la définition suivante :

« H is then a separable metric group under addition. Let $M(H)$ be the Banach space of bounded complex Borel-measures on H We define $F(H)$ as the space of bounded continuous functions on H of the form

$$f(x) = \int \exp [i(x,y)] d\mu(y),$$

for some $\mu \in M(H)$. »

Définissant l'intégrale normée sur l'espace H par :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x|^2/2} f(x) dx = \int e^{-i|x|^2/2} d\mu(x) \quad (2.9),$$

Albeverio introduit l'intégrale de Fresnel de $f \in F(H)$ comme suit :

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x|^2/2} f(x) dx \quad (2.10)$$

en appelant $F(H)$ l'espace des fonctions intégrables de Fresnel sur H .

→ Pour résumer : dans l'espace de Hilbert H muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) , Albeverio définit $F(H)$ comme l'espace des fonctions bornées continues sur H de la forme :

$$f(x) = \int_H \exp [i(x,y)] d\mu(y),$$

pour $\mu \in M(H)$ où $M(H)$ est l'espace de Banach des mesures de Borel bornées complexes sur H .

Albeverio définit alors l'intégrale normée de type Fresnel sur H par :

$$\int_H \tilde{\int} e^{i|x|^2/2} f(x) dx = \int_H e^{-i|x|^2/2} d\mu(x).$$

* Proposition 2.2 :

Si $f \in F(H)$ est une fonction intégrable c'est-à-dire une fonction finie, il existe une limite, projection orthogonale P dans l'espace H tel que :

$$f(x) = f(Px) \text{ pour tout } x \in H.$$

Alors, Albeverio écrit :

$$\int_H \tilde{\int} e^{i|x|^2/2} f(x) dx = \int_{PH} \tilde{\int} e^{i|x|^2/2} f(x) dx.$$

Soit:

$$F_H(f) = F_{PH}(f).$$

Et de poursuivre:

« It follows from its definition that $F(H)$ is invariant under translations and orthogonal transformations of H , and in fact the induced transformations in $F(H)$ are isometries of $F(H)$. It follows from the definition (2.9) of the normalized integral that it is invariant under orthogonal transformations of H . »⁴¹⁷

* Proposition 2.3:

Soit le groupe des transformations Euclidiennes $E(H)$ suivant :

$$x \rightarrow 0x + a,$$

pour lequel $a \in H$ et pour lequel 0 est une transformation orthogonale de H dans H .

Alors l'espace des fonctions $F(H)$ intégrables de Fresnel est invariant sous $E(H)$, avec $E(H)$ défini comme un groupe des isométries de $F(H)$.

De plus l'intégrale normée telle que définie en (2.9) est invariante à travers toute transformations dans $E(H)$.

* Proposition 2.4 :

Dans cette proposition, Albeverio définit ce qu'il appelle le théorème de Fubini pour ce qui concerne l'intégrale normée dont nous venons de parlé précédemment.

Soit $H = H_1 \oplus H_2$ la somme orthogonale de deux sous-espaces H_1 et H_2 .

Pour $f(x) \in F(H)$, Albeverio pose :

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 \oplus x_2)$$

avec $x_1 \in H_1$

$x_2 \in H_2$.

Il poursuit en indiquant que pour x_2 donné, $f(x_1, x_2)$ appartient à l'espace des fonctions intégrables $F(H_1)$ de Fresnel et que :

$$g(x_2) = \int_{H_1} \tilde{\int} e^{i|x_1|^2/2} f(x_1, x_2) dx_1$$

appartient à l'espace des fonctions intégrables $F(H_2)$ de Fresnel.

Albeverio continue en rappelant les relations importantes suivantes concernant l'intégrale normée dans l'espace de Hilbert séparable :

417. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. «Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics». Springer. Page 19.

$$\int_{H_2} \tilde{\int} e^{i|x_2|^2/2} g(x_2) dx_2 = \int_{H_2} \tilde{\int} e^{i|x_2|^2/2} \left(\int_{H_1} \tilde{\int} e^{i|x_1|^2/2} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_H \tilde{\int} e^{i|x|^2/2} f(x) dx.$$

Albeverio veut prouver que la formule de l'intégrale de chemin (relative à la mécanique quantique non relativiste) telle qu'établit par Feynman (voir équation 1.13 définie antérieurement) en tant que solution de l'équation de Schrödinger, peut être interprétée rigoureusement comme une intégrale de Fresnel sur un espace de Hilbert associé à des chemins continus.

Pour cela, il commence par rappeler l'équation de Schrödinger relative à la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ telle qu'elle se trouve écrite de manière moderne en fin de section 1.2.1.f :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi. \quad (3.1)$$

Il s'agit de l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m dans un champ électromagnétique c'est-à-dire soumise à un potentiel électrique V .

En posant $\hbar = 1$, il obtient:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{1}{2m} \Delta \Psi + V \Psi. \quad (3.2)$$

Puis Albeverio mentionne la solution de l'équation de Schrödinger donnée par l'expression suivante :

$$\Psi(x, t) = e^{-itH} \varphi(x) \quad (3.3)$$

avec $\varphi(x)$ la fonction d'onde considérée à un instant antérieur par exemple $t = 0$.

Il s'agit de l'expression que nous avons vu au chapitre 5 §5.2.4.

A cette expression $\Psi(x, t)$, Albeverio va associer l'intégrale normée de e^{iS} , dont S représente l'action classique relative à une particule parcourant un chemin compris entre $(0,0)$ et (x, t) .

En fait, nous avons vu au chapitre 3 que l'analogie entre les termes e^{iS} et e^{-itH} a été suggérée par Feynman.

Albeverio rappelle pour la formule 3.3 :

« In fact (3.3) will be given by the normalised integral of e^{iS} , where S is the classical action, over all path's for the particle ending at x at time t . This expression was suggested by Feynman and proved by Ito⁴¹⁸, and we shall therefore call it the Feynman-Ito formula. It is the correspondent for the Schrödinger equation of the Feynman-Ito formula for the heat equation. »⁴¹⁹

Par des astuces de calcul, Albeverio parvient à montrer la convergence de l'expression suivante quel que soit t :

418. K. Ito. 1967. « Generalized uniform complex measure in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman path integral ». Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University California Press, Berkeley. Volume II, part 1, pages 145-161.

419. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. « Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics ». Springer. Page 26.

$$e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \underbrace{\int \dots \int}_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t} e^{-i(t-t_n)H_0} V e^{-i(t-t_{n-1})H_0} \dots e^{-i(t_2-t_1)H_0} V e^{-it_1 H_0} dt_1 \dots dt_n. \quad (3.7)$$

avec $H = H_0 + V$ l'hamiltonien total du système associé à la particule m soumise au potentiel électrique V .

Rappelons que H_0 représente l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ de la particule de masse m en mouvement à la vitesse v dans le champ électromagnétique.

En posant :

$$V(x) = \int_{R^n} e^{i\alpha x} d\mu(x) \quad (3.8)$$

et :

$$\varphi(x) = \int_{R^n} e^{i\alpha x} d\nu(x) \quad (3.9),$$

puis en substituant (3.8), (3.9) et (3.7) dans (3.3), Albeverio obtient après quelques lignes simplificatrices l'expression (3.13) suivante :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \underbrace{\int \dots \int}_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t} \exp\left[\frac{-i}{2m} \sum_{j,k=0}^n (t-t_j \vee t_k) \alpha_j \alpha_k\right] \exp\left[i\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j\right)x\right] \cdot d\nu(\alpha_0) \prod_{j=1}^n (d\mu(\alpha_j) dt_j)$$

dans laquelle $t_j \vee t_k = \max\{t_j, t_k\}$.

Albeverio introduit ensuite l'espace de Hilbert réel H des fonctions continues réelles $\gamma(\tau)$ qu'il associe à des chemins continus γ , allant de $[0, t]$ sur R^n soit :

$$\gamma(\tau) : [0, t] \rightarrow R^n$$

tels que:

$$\gamma(\tau) = x$$

et :

$$\frac{d\gamma}{d\tau} \in L^2([0, t]; R^n).$$

Rappelons que L^2 représente l'espace des fonctions de carré intégrable dans R^n .

Albeverio définit alors le produit scalaire suivant :

$$(\gamma_1, \gamma_2) = m \int_0^t \frac{d\gamma_1}{d\tau} \cdot \frac{d\gamma_2}{d\tau} d\tau,$$

et en introduisant la notion de fonction de Green (ou kernel) dont nous avons parlé en sous-section 5.2.4.a.1, il montre que les fonctions sur l'espace de Hilbert réel H données par :

$$\varphi(\gamma(0)+x) = \int_{R^n} \exp[i\gamma(0) \cdot \alpha] \exp[i\alpha x] d\nu(\alpha)$$

et :

$$\int_0^t V(\gamma(\tau)+x) d\tau = \int_0^t \int_{R^n} \exp[i\gamma(\tau) \cdot \alpha] \cdot \exp[i\alpha x] d\mu(\alpha) d\tau$$

sont l'une et l'autre des transformées de Fourier de mesures bornées sur H de sorte qu'elles appartiennent toutes les deux, comme nous l'avons vu, à l'espace $F(H)$ des fonctions intégrables de Fresnel sur H .

De plus, de la proposition 2.2 de la section 2 précédente, Albeverio déduit l'appartenance à l'espace $F(H)$ pour les fonctions continues $f(t)$ sur H suivantes :

$$f(\gamma) = \exp \left[-i \int_0^t V(\gamma(\tau)+x) d\tau \right] \varphi(\gamma(0)+x) \quad (3.15).$$

Par conséquent, l'intégrale normée $\int_H e^{i|\gamma|^2/2} f(\gamma) d\gamma$ se trouve parfaitement définie.

Dès lors que l'exposant associé à l'exponentielle précédente est invariant à travers la transformation $\gamma \rightarrow \gamma - x$, Albeverio introduit tout naturellement les deux notations suivantes pour ce qui concerne l'intégrale précédente :

$$\int_H e^{i|\gamma|^2/2} f(\gamma) d\gamma \quad \equiv \quad \int_{\gamma(t)=0} e^{\left[\frac{i}{2} m \int_0^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 d\tau \right]} f(\gamma) d\gamma \quad (3.16)$$

$$\equiv \int_{\gamma(t)=x} e^{\left[\frac{i}{2} m \int_0^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 d\tau \right]} f(\gamma - x) d\gamma \quad (3.17)$$

Après plusieurs lignes de calcul, Albeverio arrive à prouver que la formule (3.3) qu'il nomme formule de Feynman-Ito, peut se mettre, via la notation (3.17), sous la forme suivante :

$$\Psi(x,t) = \int_{\gamma(t)=x} e^{\left[\frac{i}{2} m \int_0^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 d\tau \right]} \cdot \exp \left[-i \int_0^t V(\gamma(\tau)) d\tau \right] \varphi(\gamma(0)) d\gamma \quad (3.20).$$

Puis, introduisant le principe de l'action classique le long du chemin γ dans l'intervalle de temps $[0,t]$, c'est-à-dire :

$$S_t(\gamma) = \int_0^t \frac{m}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 d\tau - \int_0^t V(\gamma(\tau)) d\tau,$$

Albeverio réécrit la formule (3.20) de la manière qui suit :

$$\Psi(x,t) = \int_{\gamma(t)=x} e^{i S_t(\gamma)} \varphi(\gamma(0)) d\gamma \quad (3.22)$$

qui est solution de l'équation (3.1) de Schrödinger.

Albeverio a donc montré que la formule de l'intégrale de chemin en tant que solution de l'équation de Schrödinger, peut être interprétée de manière rigoureuse comme une intégrale de Fresnel sur un espace de Hilbert associé à des chemins continus.

De plus, en rappelant qu'il s'est inspiré des travaux du mathématicien japonais Kiyoshi Ito (1915-2008), Albeverio formule le résultat précédent par le théorème suivant qui synthétise la démonstration précédente.

* Théorème 3.1 :

Soit V et φ des transformées de Fourier de mesures complexes bornées sur R^n .

Soit H l'espace de Hilbert réel des chemins continus γ compris dans l'intervalle de temps $[0, t]$ sur R^n , tel que :

$$\gamma(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{dt} \in L^2[0, t] ; R^n$$

avec le produit scalaire :

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{m}{\hbar} \int_0^t \left(\frac{d\gamma_1}{d\tau} \cdot \frac{d\gamma_2}{d\tau} \right) d\tau .$$

Alors :

$$f(\gamma) = \exp \left[- \frac{i}{\hbar} \int_0^t V(\gamma(\tau)+x) d\tau \right] \varphi(\gamma(0)+x)$$

appartient à $F(H)$ qui est l'espace des fonctions intégrables de Fresnel sur H et est la solution de l'équation de Schrödinger :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

avec comme condition aux limites:

$$\Psi(x, 0) = \varphi(x)$$

qui est donné par l'intégrale normée telle que définie au cours de cette analyse :

$$\Psi(x, t) = \int_H e^{i|\gamma|^2/2} f(\gamma) d\gamma ,$$

C'est-à-dire :

$$\Psi(x, t) = \int_{\gamma(t)=x} e^{i \frac{m}{2\hbar} \int_0^t \left| \frac{d\gamma}{d\tau} \right|^2 d\tau} \cdot \exp \left[- \frac{i}{\hbar} \int_0^t V(\gamma(\tau)) d\tau \right] \varphi(\gamma(0)) d\gamma .$$

7.6- Période de recherche allant de 1977 à 2020

En alimentant le moteur de recherche de la base de données MathSciNet avec les mots clefs relatifs à notre recherche, en recoupant les informations trouvées avec celles se trouvant sur *Internet* et en disposant des références croisées que la base met à disposition, nous constatons que les années 1983, 1993, 1995, 2002, 2008, 2012 offrent un regain d'intérêt sur le sujet avec des résultats que je trouve intéressants.

7.6.1- Années 1983, 1993, 2002 : Les travaux de Ludwig Streit , Takeyudi Hida et José L. Silva

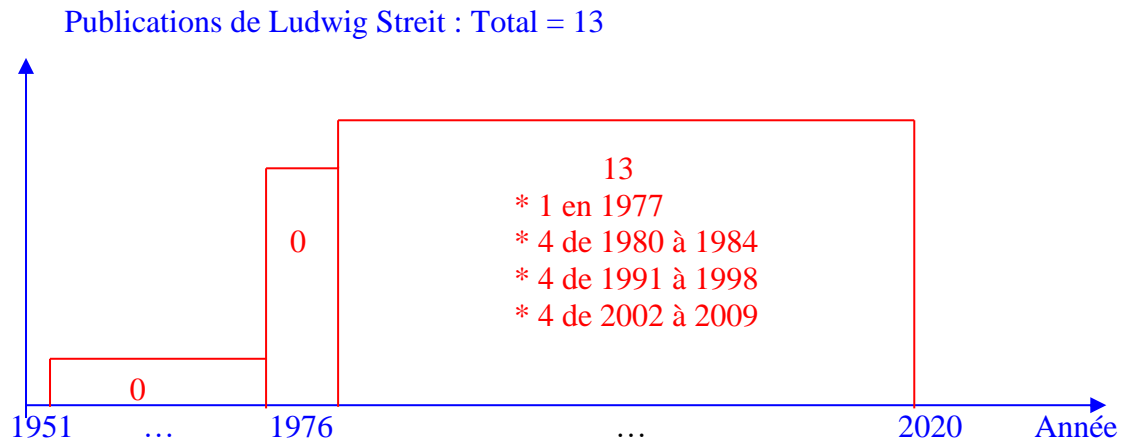
Ces années sont marquées par l'importance des travaux de Ludwig Streit en collaboration avec Takeyudi Hida , José L. Silva et par ceux de Pierre Cartier associé à Cécile DeWitt-Morette.

En effet, en nous focalisant sur les recherches concernant ce qui a trait aux théories stochastiques dans l'analyse du bruit blanc, nous trouvons un article des plus pertinents (*White noise. An infinite – dimensional calculus*) dont les auteurs sont Ludwig Streit et Takeyudi Hida, datant de 1993 et cité 344 fois.

Cette publication qui met en jeu les fonctionnelles de bruit blanc, constitue, avec celle de 1983 (des mêmes auteurs mais reformulant l'intégrale de chemins en terme de fonctionnelles browniennes), les fondements d'une publication de 2002 (enregistré sur MathSciNet en 2004) issue des travaux de Ludwig Streit en collaboration avec José L. Silva dont l'objet est la construction de l'intégrande de Feynman généralisant la fonctionnelle de bruit blanc pour

différentes classes d'interactions.

Aussi, il m'a paru intéressant d'analyser en détail (sous-section 7.6.1.a) les travaux de 2002 en les confrontant avec ceux de 1983 et de 1993 qui sont inclus dans le graphe suivant :



Ludwig Streit, né le 26 juin 1938 à Leipzig, est à la fois physicien théoricien et mathématicien. Il est de nationalité allemande et autrichienne.

Docteur en physique théorique de l'Université de Graz en 1963, il a commencé ses études de mathématiques et de physique à Göttingen en 1957.

En physique théorique, il a travaillé entre autres sur la théorie quantique des champs et la mécanique quantique.

En mathématiques, il s'est intéressé à l'analyse des dimensions infinies. Ses travaux sur le développement de la théorie des processus stochastiques ayant la même densité spectrale de puissance à toutes les fréquences, c'est-à-dire ce que l'on nomme communément « bruit blanc », en font un des fondateurs de l'analyse « White Noise ».

Aussi, tout naturellement, il a développé et utilisé des méthodes d'analyse du bruit blanc pour formuler rigoureusement, au sens mathématique du terme, la théorie des intégrales de chemins avec Takeyudi Hida.⁴³⁴

Takeyudi Hida, né le 12 novembre 1927, est un mathématicien japonais ayant obtenu son doctorat à l'Université de Nagoya en 1961.

En 1967/68, il a été professeur invité à l'Université de Princeton.

Il s'est beaucoup investi sur l'étude des processus gaussiens et des équations variationnelles stochastiques dans l'analyse du bruit blanc.⁴³⁵

IL est l'un des auteurs, avec Ludwig Streit, de la publication *White Noise - An Infinite Dimensional calculus*, publiée par Kluwer Academic Publishers en 1993.

José L. Silva est un mathématicien portugais de l'université de Madère.

Les travaux de Streit et de Hida que nous allons examiner s'effectuent au moyen :

434. Wikipedia. 3.03.2018. Ludwig Streit.

435. Takeyuki Hida's home. 2005.

- de leur publication de 1983^{435 bis},
- de leur publication de 1993⁴³⁶,
- de la publication en 2002 de Ludwig Streit et de José L. Silva⁴³⁷

Streit et Hida développent et utilisent des méthodes d'analyse du bruit blanc pour justifier mathématiquement la théorie des intégrales de chemins de Feynman.

Mon travail va consister à analyser la publication de Streit et Silva (2002), ainsi que celles de Streit et Hida datant respectivement de 1983 et de 1993.

La publication de 2002 est complémentaire de celle de 1993.

La publication de 1983 reformule l'intégrale de chemin en termes de fonctionnelles browniennes tandis que celle de 1993 met en jeu les fonctionnelles de bruit blanc.

Ainsi la publication de 1993 par rapport à celle de 1983 permet d'aller plus loin dans la construction de l'intégrande associée à l'intégrale de chemins. En effet la fonctionnelle de bruit blanc généralisée permet d'étendre de manière rigoureuse l'intégrale de chemin pour différentes classes d'interaction entre particules.

Soulignons que la collaboration Streit – Hida est enrichie des travaux de Hida concernant ses études du bruit blanc associées à une soixantaine de publications allant de 1967 à 2018 correspondant à pratiquement une publication par an et parfois plus.

Quant à Streit, il est présent dans une trentaine d'articles sur le bruit blanc parfois en collaboration avec Hida et Albeverio.

Dans sa publication de 2002 avec José Silva, Streit passe en revue quelques intégrales de chemins obtenues par une approche basée sur l'analyse du bruit blanc. Cette analyse est associée à différentes classes (catégories) d'interaction concernant les particules classiques de la mécanique quantique.

Il mentionne que l'analyse du bruit blanc s'effectue selon un cadre mathématique qui ouvre la voie à différents concepts fondés sur l'analyse dimensionnelle finie, en relation avec la transformée de Fourier et la notion d'opérateurs différentiels.

Streit souligne que son idée d'étudier les intégrales de chemins dans le cadre de la théorie du bruit blanc lui est venue lors de ses travaux de 1983 avec Hida.^{437 bis}

En effet, pour Streit (et Hida), la trajectoire de la particule telle qu'admise dans la théorie quantique de Feynman, fluctue. Et on peut imaginer que cette fluctuation autour du chemin classique puisse être générée selon la théorie admise pour le mouvement brownien.

Ce terme de « mouvement brownien » est employé par les mathématiciens par analogie avec le mouvement désordonné des particules microscopiques en suspension dans un liquide observé en 1827 par Robert Brown (1773-1858).

En effet, dans des situations physiques faisant intervenir le hasard, les mathématiciens parlent de processus de Wiener du nom du mathématicien américain Norbert Wiener (1894-1964) qui formalisa dans les années 1920 les notions mathématiques reliées aux processus stochastiques.

435 bis. Streit - Hida. 1983. « *Generalized Brownian functionals and the Feynman integral* ». Stochastic Processes and their Applications. Volume 16 (1983, pages 55-69.

436. Streit - Hida. 1993. « *White noise. An Infinite Dimensional Calculus* ». Kluwer Academic Publishers.

437. Streit - Silva. 2002. « *Feynman Integrals and White Noise Analysis* ». CCM-Centro de Ciências Matemáticas, Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Portugal.

437 bis. Streit - Hida. 1993. « *Generalized Brownian functionals and the Feynman integral* ». Stochastic Processes and their Applications. Volume 16 (1983, pages 55-69.

Aussi, déjà en 1983, pour obtenir le propagateur $K(x, \theta)$ tel que nous l'avons vu en sous-section 5.2.4.d.3, Streit reformule l'intégrale de chemin en termes de fonctionnelles browniennes comme nous l'avons dit ci-avant.

En 1993 comme en 2002, Streit imagine que l'intégrande sous l'intégrale de chemins puisse s'apparenter à une distribution dans un espace dépendant de la classe ou catégorie des potentiels dans lesquels évolue la particule quantique considérée. Cela va alors lui permettre de calculer le propagateur de la particule en fonction du temps en utilisant une intégrale de bruit blanc pour laquelle l'intégrande implique des fonctions de bruit blanc généralisées. Et cette méthode sera étendue aux intégrales de chemins.

Cette façon de procéder se comprend assez bien quand on sait que beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires. Et le contexte de l'intégrale de chemin est tout à fait favorable à cette manière de procéder.

Notons encore que la théorie des distributions utilise des notions d'algèbre linéaire et de topologie centrées autour de l'idée de dualité. Comme indiqué par Richard Taillet^{437 sec} : de manière formelle, les distributions sont des fonctionnelles linéaires et continues agissant sur un espace de fonctions régulières s'annulant suffisamment vite à l'infini, appelées fonctions tests. Mais laissons Streit s'exprimer à ce sujet :

« *The "integral" is understood as the dual pairing of a distribution with a test function, so that the Feynman integrand itself has meaning as a distribution in a suitable space depending on the class of potentials we deal with* ». ^{437 ter}

Rappelons pour mémoire que le bruit blanc est un signal provenant d'un processus stochastique dont le spectre est une fonction constante et dont toutes les composantes sont décorrélées car leurs phases relatives sont aléatoires.

En d'autres termes, dans un signal correspondant au bruit blanc, la densité spectrale de puissance, représentant la répartition fréquentielle de la puissance du signal conformément aux fréquences qui le composent, est la même pour toutes les fréquences de la bande passante.

Notons qu'en pratique, la réponse spectrale d'un système soumis à un bruit blanc reflète directement la sensibilité du système à chaque fréquence.

Rappelons aussi que la transformée de Fourier $TF[X(t)]$ d'une fonction $X(t)$ est l'opération qui transforme la fonction intégrable $X(t)$ en une autre fonction qui est la suivante :

$$TF[X(t)] = \hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-i2\pi ft} dt \text{ pour une définition en fréquence}$$

$$TF[X(t)] = \hat{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \text{ pour une définition en pulsation}$$

avec :

* t en seconde

437 sec. Taillet. 2008. « *Dictionnaire de physique* ». De Boeck. Page 151.

437 ter. Streit - Silva. 2002. « *Feynman Integrals and White Noise Analysis* ». CCM-Centro de Ciências Matemáticas, Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Portugal. Page 2.

- * f en Hz
- * ω en rd/s

Autrement dit, la transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques $X(t)$, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier $TF[X(t)]$ associée à une fonction intégrable $X(t)$, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier $TF[X(t)] = \hat{X}(f)$ dont la variable indépendante f peut s'interpréter en physique comme la fréquence f en Hz.

La transformée de Fourier $\hat{X}(f)$ s'exprime donc comme une « somme infinie » des fonctions trigonométriques (développement sur une base d'exponentielles) de toutes les fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale.⁴³⁸

Il s'agit donc d'une opération qui permet de représenter en fréquence des signaux qui ne sont pas périodiques, sur une base d'exponentielles. Cette transformée est l'analogue des séries de Fourier pour les fonctions périodiques dont le développement s'effectue sur une base de fonctions sinusoïdales.

En effet, une fonction non périodique peut être considérée comme une fonction dont la période est infinie et ce passage à la limite fait passer des séries aux intégrales.

Soulignons que la caractérisation d'un signal par son spectre de fréquence grâce à la transformation de Fourier, peut servir à déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour transmettre la quasi-totalité de l'énergie de ce signal par l'intermédiaire d'un filtre associé à la bande passante adéquate.

Soulignons enfin que la formule de transformation de Fourier inverse, notée $TF^{-1}[X(t)]$, permet de retrouver $X(t)$ à partir des données respectivement fréquentielles ou pulsationnelles :

$$X(t) = TF^{-1}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f) e^{-i2\pi ft} dt \text{ pour une définition en fréquence}$$

$$X(t) = TF^{-1}[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ pour une définition en pulsation.}$$

Dans la publication de 2002, Streit donne une explication mathématique de ce qu'il entend par "analyse du bruit blanc" en mentionnant que cette explication va servir aux applications qui suivront.

Il commence par présenter le triplet fondamental sur les espaces réels R que l'on doit au mathématicien russe Israel Gelfand (1913-2009) :

$$S(R) \subset L^2(R) \subset S'(R)$$

dans lequel:

- * $S(R)$ est l'espace de Laurent Schwartz (1915-2002) et $S'(R)$ son dual,
- * $L^2(R)$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable.

438. Wikipedia. 3.03.2018. Transformation de Fourier.

L'idée de Streit est de considérer une mesure gaussienne μ sur un espace mesurable $(S'(R), B)$. Aussi, il construit via le théorème du mathématicien russe Robert Minlos (1931-2018) un espace mesuré défini par le triplet $(S'(R), B, \mu)$.

Pour mémoire, rappelons que dans le couple $(S'(R), B)$, l'espace $S'(R)$ est un ensemble (dual de $S(R)$) et B est une tribu borélienne de l'ensemble $S'(R)$ qui constitue un espace topologique. L'espace topologique fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter les notions de limite, de continuité et de voisinage.

Cet espace mesuré $(S'(R), B, \mu)$ est appelé "espace de bruit blanc" et sa fonctionnelle est caractérisée par l'expression suivante :

$$C_\mu(f) = \int_{S'(R)} e^{i\langle \omega, \varphi \rangle} d\mu(\omega) = \exp \left[-\frac{1}{2} \|\varphi\|^2 \right]$$

avec :

$$* \varphi \in S(R).$$

Streit précise que le système dual $\langle ., . \rangle$ associé à $S'(R)$ et à $S(R)$ est en fait une extension du produit scalaire dans $L^2(R)$.

Ainsi, il peut se permettre d'écrire :

$$\langle f, \varphi \rangle := (f, \varphi), f \in L^2(R), \varphi \in S(R),$$

signifiant que l'expression de gauche est définie par l'expression de l'autre côté et il indique que l'écriture $\|\cdot\|$, c'est-à-dire $\sqrt{\langle f, \varphi \rangle}$, représente la norme dans $L^2(R)$, qui est en fait une norme euclidienne.

Tout naturellement il signale que dans le formalisme qu'il utilise, une version du mouvement brownien de Wiener est donné par ;

$$B(t, \omega) := \langle \omega, \mathbf{1}_{[0, t]} \rangle = \int_0^t \omega(s) ds$$

avec:

* s la coordonnée d'espace que nous pouvons imaginer définir le chemin parcouru par une particule quantique,

* $\mathbf{1}_{[0, t]}$ la fonction indicatrice définie par : 1 si $s \in [0, t]$, sinon 0.

Rappelons qu'en Annexe 13 nous avons défini les notations $\langle f, \varphi \rangle$ et $\sqrt{\langle f, \varphi \rangle}$ pour respectivement le produit scalaire et sa norme dans l'espace de Hilbert.

Puis Streit considère l'espace $L^2(\mu)$ défini comme l'espace complexe de Hilbert suivant :

$$L^2(S'(R), B, \mu).$$

Rappelons que $L^2(\mu)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable dans R sur un espace mesurable $(S'(R), B)$ associé à l'espace mesuré $(S'(R), B, \mu)$ que nous avons nommé "espace de bruit blanc".

Pour les applications qu'il prévoit, Streit considère l'espace $L^2(\mu)$ trop petit. Aussi, pour résoudre cet inconvénient, il introduit l'espace des fonctions tests sur $L^2(\mu)$ dans R , indéfiniment dérivable, qui permet la prise en compte d'un espace dual plus grand.

Il prend donc dans l'espace de Hilbert, le système de normes suivant :

$$\{ \|\cdot\|_p \}$$

qu'il justifie par la croissance rapide de la topologie associée à $S(R)$.

Ainsi, $S(R)$ apparaît en fait comme une limite projective de l'espace $S_p(R)$ de Hilbert où $S_p(R)$ désigne la complétude de l'espace $S(R)$ en respectant la norme $|\cdot|_p$.

En d'autres termes, $S_p(R)$ est un espace préhilbertien complet dans lequel toute suite de Cauchy converge, ce qui est fortement intéressant dans le cas d'une construction de l'intégrale de chemin.

Alors Streit peut affirmer que l'espace $S'(R)$ des distributions tempérées est la limite inductive des espaces $S_{-p}(R)$ de Hilbert, dans lesquels la norme duale $|\cdot|_{-p}$ assure la topologisation de l'espace $S_{-p}(R)$.

Une distribution de "bruit blanc" sur $S'(R)$ se trouve donc définie comme un élément de l'espace de Hilbert complété $S_{-p}(R)$ de (L^2) à l'égard de la norme $|\cdot|_{-p}$.

On pourra noter que $(L^2) = L^2(S'(R), \mu)$ est l'espace de Hilbert avec la produit scalaire :

$$(\Phi, \varphi) \in (L^2), (\Phi, \varphi) = \int_{S'(R)} \Phi(X) \varphi(X) d\mu(X)$$

pour lequel X définit le chemin parcouru par une particule quantique.

Rappelons qu'une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur l'espace S de Schwartz et donc que l'espace S' des distributions tempérées est le dual topologique de S .

Rappelons aussi que l'idée de limite inductive et de sa duale, la limite projective, permet de généraliser à l'algèbre ce qui fonctionne bien en analyse, autorisant ainsi la recherche des propriétés de passage aux limites qu'il s'agit de prendre en compte dans la construction de l'intégrale de chemin.

En fin de compte, Streit est parvenu à construire la chaîne suivante :

$$(S) \subset L^2(\mu) \subset (S)'$$

à propos de laquelle il précise que les éléments de l'ensemble constituant l'espace $(S)'$ sont les fonctionnelles browniennes généralisées issues des travaux de Hida sur les distributions.

De plus, il indique qu'il est capable de caractériser les espaces (S) et $(S)'$ par leur *T-transformée de Fourier* et leur *S-transformée de Fourier*.

Aussi, pour $\Phi \in (S)'$, $\varphi \in S(R)$, il introduit les *T-transformée de Fourier* et *S-transformée de Fourier* qu'il définit de la façon suivante :

$$(T\Phi)(\varphi) := \langle\langle \Phi, e^{i\langle \cdot, \varphi \rangle} \rangle\rangle = \int_{S'(R)} e^{i(\omega, \varphi)} \Phi(\omega) d\mu(\omega)$$

et :

$$(S\Phi)(\varphi) := \langle\langle \Phi, e_\mu(\varphi, \cdot) \rangle\rangle ,$$

avec :

* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ désignant le système dual bilinéaire entre $(S)'$ et (S) ,

* $e_\mu(\varphi, \cdot) := \exp[\langle \cdot, \varphi \rangle - \frac{1}{2}|\varphi|^2]$

* $\varphi \in S(R)$.

Enfin, Streit indique que les *T-transformée de Fourier* et *S-transformée de Fourier* ont des extensions dans l'espace complexe $S_C(R)$ de Schwartz et qu'elles répondent à l'équation suivante :

$$(T\Phi)(\varphi) = C_\mu(\varphi) (S\Phi)(\varphi) \quad \forall \quad \varphi \in S_C(R).$$

Dans la publication de 2002, comme dans celle de 1993, Streit construit le propagateur d'une particule libre en utilisant une intégrale de "bruit blanc" où l'intégrande implique des fonctions de "bruit blanc" généralisées.

Rappelons que nous nommons "particule libre" une particule qui n'est soumise à aucun champ. La construction de ce propagateur par Feynman est montrée en sous-section 5.2.4.c et utilise pour se faire les deux postulats de quantification de Feynman que nous avons vu en sous-section 5.2.4.a et 5.2.4.b.

Streit commence par considérer l'intégrale de Feynman comme une moyenne pondérée sur les chemins browniens. Ainsi il modélise les trajectoires par des chemins browniens partant de x_0 en s'inspirant de ce qui est indiqué plus haut. Il obtient donc l'expression suivante :

$$x(t) := x_0 + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \langle \omega, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle = x_0 + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \int_0^t x(\tau) d\tau$$

avec:

$$* \omega \in S'(R).$$

Dans la suite des calculs, pour des raisons de clarté, Streit pose : $\hbar = m = 1$.

Après quelques démonstrations et quelques hypothèses associées à la théorie du "bruit blanc", Streit arrive à l'équation suivante :

$$I_0 = N \exp \left[\frac{i+1}{2} \int_0^t \omega^2(\tau) d\tau \right] \delta(x(t) - x_0)$$

dans laquelle :

* N est un facteur de normalisation introduit dans l'exemple 2.7⁴³⁹,

* $\delta(x(t) - x_0)$ est la distribution delta encore appelée delta de Dirac utilisée pour fixer le point de départ. Le delta de Dirac joue le rôle d'une distribution initiale.

Streit calcule la *T-transformée de Fourier* de I_0 :

$$(TI_0)(\varphi) = (2\pi i |\Delta|)^{-1/2} \exp \left[-\frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 - \frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 + \frac{i}{2|\Delta|} \left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + x - x_0 \right)^2 \right]$$

avec :

* $\Delta := [t_0, t]$ c'est-à-dire $(t - t_0)$,

* $\varphi\Delta$ la restriction de φ à Δ .

Dans l'équation ci-avant, en posant $\varphi = 0$, Streit obtient :

$$(TI_0)(0) = (2\pi i |\Delta|)^{-1/2} \exp \left[\frac{i}{2|\Delta|} (x - x_0)^2 \right]$$

c'est-à-dire :

$$(TI_0)(0) = \left[\frac{1}{2\pi i(t-t_0)} \right]^{1/2} \cdot \exp \left(\frac{i(x-x_0)^2}{2(t-t_0)} \right).$$

439. Streit - Silva. 2002. « *Feynman Integrals and White Noise Analysis* ». CCM-Centro de Cincias Matemticas, Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Portugal. Page 6.

En réintroduisant \hbar et m différent de I , on peut écrire :

$$(TI_0)(0) = \left[\frac{m}{2\pi\hbar i(t-t_0)} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{im(x-x_0)^2}{2\hbar(t-t_0)} \right)$$

qui est exactement l'expression du propagateur construit par Feynman pour la particule libre et qui correspond bien à l'équation trouvée en fin de sous-section 5.2.4.c.

Sachant que $\varphi \in S(R)$, il existe un unique élément $I_0 \in S'(R)$ tel que :

$$(TI_0)(\varphi) = (TI_0)(0)$$

Et pour aller plus loin, Streit montre que non seulement le résultat obtenu est conforme à son attente, mais aussi que la *T-transformée de Fourier* a une interprétation physique intéressante même pour φ différent de zéro.

Cette démonstration se trouve dans les publications de 1993⁴⁴⁰ et de 2002⁴⁴¹.

Dans sa démonstration, Streit intègre l'équation :

$$(TI_0)(\varphi) = (2\pi i |\Delta|)^{-1/2} \exp\left[-\frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 - \frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 + \frac{i}{2|\Delta|} \left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + x - x_0 \right)^2\right]$$

par parties et obtient :

$$(TI_0)(\varphi) = \exp\left[-\frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 + i x \varphi(t) - i x_0 \varphi(t_0)\right] E(I_0 \exp\left[(-i \int_{t_0}^t x(\tau) \dot{\varphi}(\tau) d\tau)\right])$$

avec:

$$* E(I_0) = (TI_0)(0) = \left[\frac{1}{2\pi i(t-t_0)} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{i(x-x_0)^2}{2(t-t_0)} \right),$$

$$* E(I_0 \exp\left[(-i \int_{t_0}^t x(\tau) \dot{\varphi}(\tau) d\tau)\right]) = (TI_0 \exp\left[(-i \int_{t_0}^t x(\tau) \dot{\varphi}(\tau) d\tau)\right]) (\varphi),$$

$$* I_0 = N \exp\left[\frac{i+1}{2} \int_0^t \omega^2(\tau) d\tau \right] \delta(x(t) - x_0).$$

Le terme :

$$\exp\left[(-i \int_{t_0}^t x(\tau) \dot{\varphi}(\tau) d\tau)\right]$$

est interprété par Streit comme provenant d'un potentiel dépendant du temps qui aurait pour expression :

$$W(x,t) = \dot{\varphi}(t) x.$$

440. Steit - Hida. 1993. « *White noise. An Infinite Dimensional Calculus* ». Kluwer Academic Publishers. Pages 439 et 440.

441. Streit - Silva. 2002. « *Feynman Integrals and White Noise Analysis* ». CCM-Centro de Ciências Matemáticas, Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Portugal. Pages 8 et 9.

En effet, l'intégrale de Feynman pour un Lagrangien tel que :

$$L_0(x) \rightarrow L_0, \varphi(x,t) := L_0(x) - \dot{\varphi}(t)x$$

évolue de la même manière que la *T-transformée de Fourier* suivante :

$$(T I_0)(\varphi) = \exp \left[-\frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 + i x \varphi(t) - i x_0 \varphi(t_0) \right] E(I_0 \exp \left[(-i \int_{t_0}^t x(\tau) \dot{\varphi}(\tau) d\tau \right]).$$

Aussi, Streit écrit qu'il est facile de vérifier que :

$$(T I_0)(\varphi) = \exp \left[-\frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 + i x \varphi(t) - i x_0 \varphi(t_0) \right] K_0^{(\dot{\varphi})} \langle x_0, t_0 | x, t \rangle$$

avec:

$$\begin{aligned} * \quad K_0^{(\dot{\varphi})} \langle x_0, t_0 | x, t \rangle &= (2\pi i |\Delta|)^{-1/2} \exp [i x_0 \varphi(t_0) - i x \varphi(t)] \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} |\varphi\Delta|^2 + \frac{i}{2|\Delta|} \left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + x - x_0 \right)^2 \right] \end{aligned}$$

dans laquelle $K_0^{(\dot{\varphi})} \langle x_0, t_0 | x, t \rangle$ peut être interprété comme le propagateur associé à une particule quantique dont le temps dépend du potentiel $W(x,t) = \dot{\varphi}(t)x$.

En d'autres termes, comme nous l'avons vu en sous-section 5.2.4.a.1 :

$$K_0^{(\dot{\varphi})} \langle x_0, t_0 | x, t \rangle$$

est l'opérateur de Green et dans le cas qui nous préoccupe ici, il correspond au potentiel :

$$W(x,t) = \dot{\varphi}(t)x.$$

Cet opérateur obéit à l'équation de Schrödinger :

$$\left(i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \dot{\varphi}(t)x \right) K_0^{(\dot{\varphi})} \langle x_0, t_0 | x, t \rangle = i \delta(t-t_0) \delta(x-x_0).$$

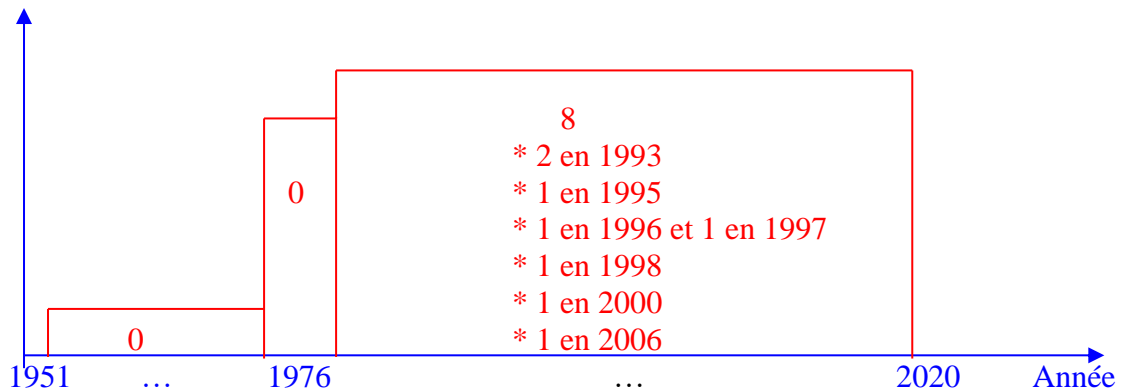
7.6.2- Années 1993, 1995 : Les travaux de Pierre Cartier et de Cécile DeWitt-Morette

Ces années sont aussi marquées par les travaux de Pierre Cartier, notamment par sa conférence donnée à Bordeaux le 4 mars 1993 concernant ses idées sur la manière de construire un cadre rigoureux pour l'intégrale de chemins.

En focalisant nos recherches sur ce qui a trait aux intégrales fonctionnelles, nous voyons que la conférence précédente de Pierre cartier va de pair avec une série d'articles en collaboration avec Cécile DeWitt-Morette tels que mentionnés dans le grave suivant.

Les idées de Pierre Cartier et les connaissances de Cécile DeWitt-Morette sur le sujet vont apporter tous les ingrédients qui conduiront à une publication conjointement produite par Pierre cartier et Cécile DeWitt-Morette en 1995, largement citée et que nous avons trouvé pertinent d'analyser.

Publications de Cécile DeWitt – Morette et de Pierre Cartier conjointement : Total = 8



7.6.2.a) Les réflexions de Pierre de Pierre Cartier en 1993

Pierre Cartier, né le 10 juin 1932, est un mathématicien français diplômé de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm à Paris. Docteur en mathématique, il a soutenu sa thèse en 1958 sous la direction de Henri Cartan. Il a été membre du groupe Bourbaki de 1955 à 1983.⁴²⁰

Il s'est beaucoup intéressé à formaliser rigoureusement l'intégrale de chemins de Feynman. Il a publié avec Cécile DeWitt-Morette un certain nombre d'ouvrages constituant, autant les uns que les autres, une référence dans le domaine de la recherche des fondements rigoureux de la vision intuitive de Feynman sur les intégrales de chemin.

Les publications de Pierre Cartier avec Cécile DeWitt-Morette sont les suivantes :

- 1993 : *Intégration fonctionnelle ; éléments d'axiomatique*. Compte-rendu de l'Académie des Sciences de Paris. Série II, pages 733-738,
- 1993 : *Status report on an axiomatic basis for functional integration*. Cambridge University Press. Pages 78-82,
- 1995 : *A new perspective on functional integration*. Journal of Mathematical Physics. Volume 36, 101 pages,
- 1996 : *A new perspective on functional integration. Poisson processes in probability and quantum physics*. Institute Nuclear, Dubna, pages 13-21,
- 1997 : *A rigorous mathematical foundation of functional integration*. Plenum Publishing Corporation New York, pages 1-50,
- 1998 : *Geometry and functional integration*. PWN, Warsaw, pages 187-192,
- 2000 : *Functional integration*. Journal of Mathematical Physics. Volume 41, pages 4154-4187.

Rappelons que Pierre Cartier a également participé aux « *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui* » données à Bordeaux le 4 mars 1993. Sa conférence « *L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux* » a été publiée dans le volume 1 présenté par Eric Charpentier et Nicolas Nikolski, aux éditions Cassini, Paris, 2003, pages 27-59.

⁴²⁰. Wikipedia. 17-12-2017. Pierre Cartier.

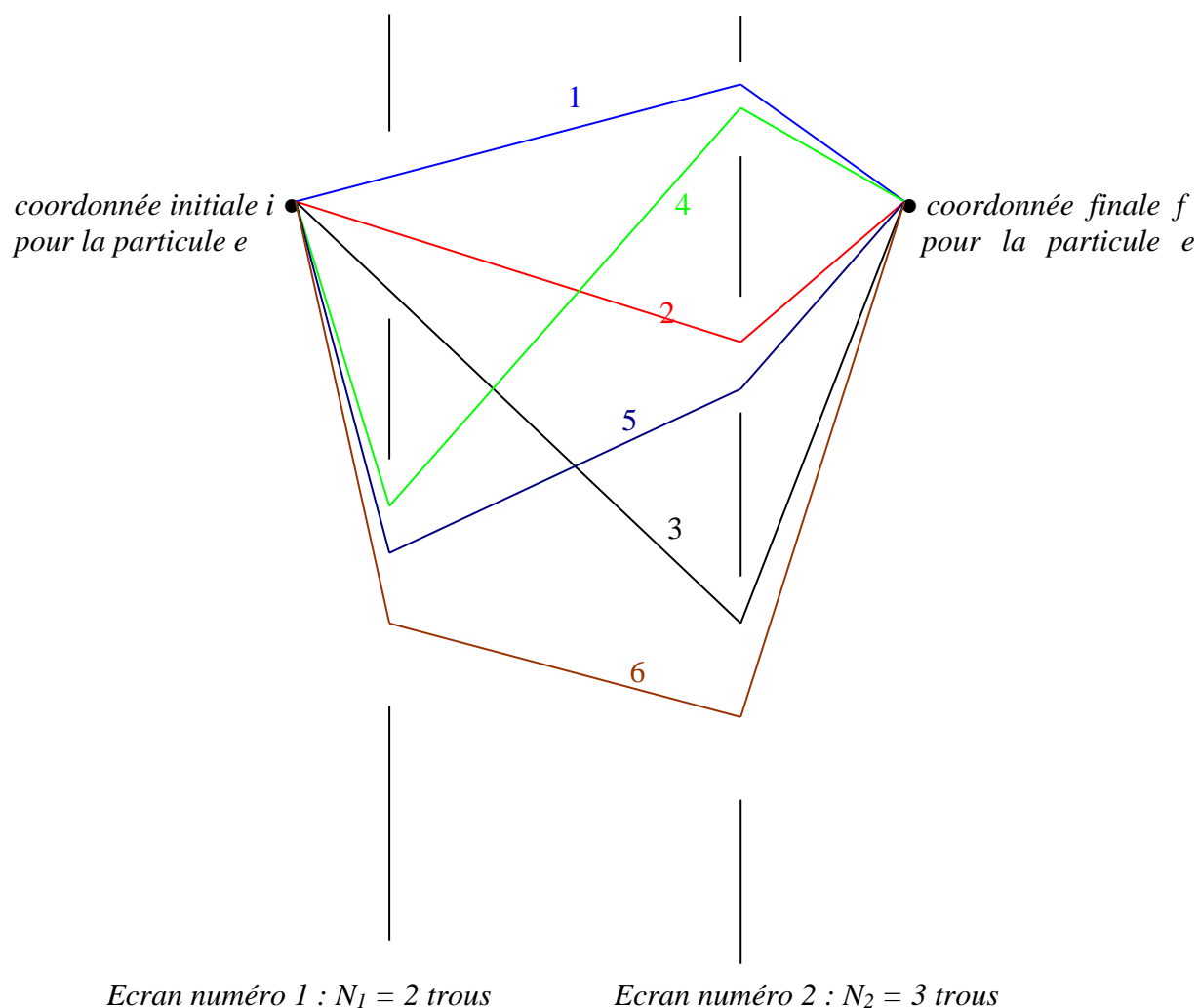
Nous avons trouvé intéressant d'analyser les réflexions livrées par Pierre Cartier contenues dans sa conférence donnée à Bordeaux le 4 mars 1993 et qui se trouve dans l'ouvrage de 2003 cité ci-avant. En effet, Cartier ne se contente pas de se limiter à une classe d'intégrale en se focalisant sur leur élément d'intégration $d(path)$. Il élargit le débat en définissant son élément d'intégration à priori par une axiomatique servant de base à un système de déduction qui doit le conduire rigoureusement à des théorèmes d'existence et d'unicité dans un cadre purement logique.

Rappelons l'idée de Feynman en reprenant l'exemple des trous de Young, c'est-à-dire en considérant une multitude d'écrans numérotés de 1 à n avec N_1 trous pour le premier écran, N_2 trous pour le deuxième, et ainsi de suite.

Ainsi, le nombre de chemins possibles pour une particule allant de l'écran 1 à l'écran n est :

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n .$$

En effet, pour deux écrans 1 et 2 avec respectivement $N_1 = 2$ trous et $N_2 = 3$ trous, nous avons le dessin suivant :



Ce dessin montre que la particule e possède le choix de $N_1 \times N_2 = 2 \times 3 = 6$ chemins possibles pour aller de i à f .

Feynman postule, comme nous l'avons abordé en section 5.2.2, que la particule ne sait pas quelle est la trajectoire classique c'est-à-dire celle qui correspond au principe de moindre action. Aussi, d'après lui, la particule va essayer toutes les possibilités de chemins entre i et f . Feynman associe donc une amplitude de probabilité pour un chemin possible que nous nommons X .

Cette amplitude de probabilité est donnée par la relation suivante :

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S(X)\right]$$

qui correspond à ce que nous avons vu en section 5.2.2 avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Nous savons que :

$$S(X) = \int_{t_a}^{t_b} L(X, \dot{X}, t) dt = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{1}{2} m \dot{X}^2(t) - V(X(t)) \right) dt$$

est l'action du chemin X , que nous pouvons retrouver en section 5.2.2, avec L désignant le Lagrangien de la particule considérée, de masse m dans le potentiel $V(x,t)$.

Rappelons pour Feynman la notion « *d'histoire* » associée à tout chemin, et le fait qu'il faut effectuer la somme des amplitudes de probabilité de toutes les histoires, c'est-à-dire de tous les chemins, pour évaluer la probabilité de présence de la particule e au point de coordonnée f lorsque la particule se trouve préalablement au point de coordonnée i .

Aussi, pour Cartier la vue intuitive de Feynman dans sa notion d'intégrale de chemins, ne peut satisfaire le mathématicien qu'il est, et il écrit à propos du manque de rigueur dont fait preuve le physicien américain :

« C'est là que ça devient hasardeux, parce que, tant qu'on n'a qu'un nombre fini (ou même une infinité mais dénombrable) d'états intermédiaires, on a affaire à des sommes finies (ou éventuellement à des séries) et ça marche, mais là nous devons intégrer sur l'espace de tous les chemins : c'est la manière dont Feynman visualise les choses. L'avantage, dit Feynman, est que cela fournit une règle non ambiguë de passage de la mécanique classique à la mécanique quantique. Parce que $S(X)$ est fourni par la mécanique classique, \hbar est le seul élément nouveau en mécanique quantique, et le DX est l'élément d'intégration à une infinité de variables : si j'approxime mon espace fonctionnel à une infinité de dimensions par un espace à un nombre fini de dimensions, remplaçant X par une donnée finie (x_1, \dots, x_N) , je remplace le DX par $\text{const.} dx_1 \dots dx_N$, j'intègre et je passe à la limite.

Et Feynman dit en substance : « Cette procédure est univoque ; il faut peut-être se fatiguer pour justifier le passage à la limite, mais ça c'est le travail des mathématiciens, et non le mien.

Donc j'ai un procédé univoque de passage d'un système décrit par la mécanique classique au moyen d'une action $S(X)$, à un système quantique. »⁴²¹

Rappelons aussi en les résumant, les notions que nous avons vu au chapitre 5. Pour une question de facilité d'écriture, Feynman adopte la **notation suivante, sous-entendant la sommation sur tous les chemins** (c'est-à-dire la somme des amplitudes de probabilité associées à chaque chemin allant du point 0 au point x qui définit en fait la probabilité pour qu'une particule se trouvant en coordonnée 0 se trouve en coordonnée x) :

$$K(x,0) = \int_0^x \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x,0) \right] Dx(t)$$

avec :

$$* \int_0^x \equiv \int \dots \int_{x_{i-1}}^{x_i} \dots \int$$

n-1 fois

* $Dx(t) \equiv \frac{1}{c^n} (\dots dx_{i+1} dx_i \dots dx_{n-1})$ caractérisant la nature mathématique de l'intégrale de chemin matérialisée par son propagateur $K(x,0)$ associé à la particule considérée. La quantité $\frac{1}{c^n}$ étant égale à ce que Feynman nomme « *const.* » ci-avant.

* L'intégration globale s'effectue sur la variable de coordonnée x , elle-même fonction de t , et la forme $K(x,0)$ s'appelle une intégrale de chemin. Et l'intégration sur cette fonction $x(t)$, symbolisée par $Dx(t)$ s'appelle une intégrale fonctionnelle.

* $S = \int_0^t (E_c - V) dt$ est l'intégrale d'action associée à la particule cheminant le long de la trajectoire $(0,x)$ avec E_c et V respectivement l'énergie cinétique et potentielle de la particule.

Il mérite d'être signalé que même si Cartier insiste sur le manque de rigueur de Feynman, il rend hommage à son initiative d'appliquer la théorie de l'intégrale de chemin à la théorie des champs et spécifiquement à l'électrodynamique quantique qu'il appelle être dans un état « épouvantable » au début des années 1940.

Pour Cartier la théorie quantique du champ électromagnétique a pu être formulée grâce à l'intégrale de chemin. Et ceci d'une manière invariante par le groupe de Poincaré, en précisant que pour le géomètre qu'il est, le simple fait de voir un groupe quelque part lui donne envie que la théorie quantique de Feynman soit invariante du début jusqu'à la fin.

421. Cartier. 1993. « L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux ». *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui. Volume 1 présenté par Eric Charpentier et Nicolas Nikolski, éditions Cassini, Paris, deuxième édition corrigée, 2003, page 52.*

Cartier insiste également sur l'intuition de Feynman dans la découverte du procédé que constitue l'intégrale de chemin pour passer de la mécanique classique à la mécanique quantique. Et il souligne qu'inversement, on peut repasser aussi de la théorie quantique à la théorie classique en observant comme nous pouvons le constater en Annexe 17, que dans les systèmes classiques, l'action $S(x)$ est très grande devant \hbar , c'est-à-dire que tout se passe dans l'équation du propagateur de Feynman

$$K(X) = \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(X) \right] DX = K(x,0) = \int_0^x \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x,0) \right] Dx(t)$$

comme si \hbar était infiniment petit. Ainsi, dans un système classique, l'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de (00) à (x,t) est très grande devant 1 et la notion de probabilité tend à disparaître du fait que la probabilité d'évolution de la particule de (00) à (x,t) tend à devenir une certitude.

Mais soyons profondément conscient que dans l'état actuel des connaissances en physique, la nature au niveau macroscopique, c'est-à-dire telle que nous l'appréhendons dans notre vie de tous les jours, reste assujettie à des interactions mettant en jeu des phénomènes discrets (discontinus) que nous ne ressentons pas, du fait de la petitesse de la constante de Planck.

Ceci explique, comme nous l'avons vu en Annexe 17, le pseudo-déterminisme que nous constatons à l'échelle humaine qui explique un pseudo-principe de causalité que nous ne remettons pas en cause.

La notion de probabilité est intrinsèquement contenue dans l'infiniment petit, à l'origine même du monde dans lequel nous vivons. Aussi les ingrédients microscopiques formant tout ce qui nous entoure sont soumis à un indéterminisme ne répondant pas au principe de causalité.

Que pouvons-nous donc déduire philosophiquement du déterminisme auquel nous sommes soumis dans notre vie quotidienne ? Pas grand-chose à moins de se contenter de la célèbre citation d'Einstein :

« *Ce qui reste éternellement incompréhensible dans la nature, c'est qu'on puisse la comprendre* ».

Et Pierre Cartier de conclure :

« *Voilà le programme de Feynman, qu'il présente comme un procédé univoque de description de la mécanique quantique.* »⁴²²

Et d'ajouter :

« *Dernier acte (c'est là que j'entre en scène). Je me porte en témoin à charge contre ces vénérables maîtres, je dis : non. Ce n'est pas un procédé univoque. Et c'est à cause de cette constante de normalisation, quand on approxime DX par $const.dx_1 \dots dx_N$.* »⁴²³

Afin d'étayer sa réflexion, Cartier rappelle quelques notions et particularités liées au calcul des probabilités.

422. *Ibid.* page 53.

423. *Ibid.* Page 53.

Il prend l'exemple du jeu de pile ou face avec une infinité de coups c'est-à-dire l'ensemble des suites infinies de $+1$ et -1 qu'il associe à l'espace $\Omega = \{-1, +1\}^\infty$.

Puis il fixe un nombre p compris entre 0 et 1 en indiquant que dans ce cas le jeu est « biaisé » car la probabilité de gagner un franc est p et celle de perdre ce franc est $1-p$.

Prenant pour hypothèse l'indépendance des coups, Cartier indique qu'il possède pour chaque choix de p , c'est-à-dire la probabilité de gagner 1 franc, une mesure de probabilité μ_p sur l'espace Ω et souligne que paradoxalement cette mesure μ_p varie de manière continue avec p ; il précise que cela signifie que s'il projette la mesure de probabilité μ_p sur les N premiers facteurs dans l'espace $\Omega = \{-1, +1\}^\infty$, les 2^N coefficients vont varier de manière continue avec p , ce qui est évident puisque ces 2^N coefficients sont tous de la forme $p^a(1-p)^b$.

Et pourtant il annonce que la variation des 2^N coefficients doit être discontinue car la loi des grands nombres prouve que l'espace Ω peut être fractionné en sous-ensembles boréliens Ω_p disjoints deux à deux tels que $\Omega = \bigcup_p \Omega_p$ de façon à ce que la mesure de probabilité μ_p soit portée par l'espace Ω_p .

Aussi, Cartier précise que dans le cas où $p \neq p'$, les mesures de probabilité μ_p et $\mu_{p'}$ respectivement associées à chaque choix de p et p' sont portées par deux parties boréliennes disjointes.

Cartier exprime une certaine analogie entre le raisonnement associé au calcul des probabilités conduit précédemment concernant la propriété des théorèmes limites relatif à la loi des grands nombres et une réflexion qu'il nous livre afin de prouver la non-unicité de l'élément d'intégration DX composé d'une infinité de variables, tel qu'il apparaît dans l'intégrale de chemins.

Ainsi, le fait de montrer que DX n'est pas unique permet à Cartier de remettre en question le critère d'unicité posé par hypothèse par Feynman pour cet élément d'intégration à variables infinies.

En d'autres termes, cela permet à Cartier de remettre en question la convergence systématiquement assurée de la suite associée à un chemin quelconque de la région R^N de l'espace-temps pour une division de l'échelle des temps aussi fine qu'elle puisse être.

Aussi, Cartier considère-t-il dans l'espace R^N de dimension finie, l'élément de volume suivant :

$$d^N x = dx_1 \dots dx_N$$

sur lequel il effectue une homothétie de rapport c telle que l'unité de volume soit multipliée par c^N c'est-à-dire :

$$d^N(cx) = c^N d^N x.$$

Il précise l'importance des valeurs suivantes obtenues pour c^N en fonction de c lorsqu'il considère la dimension R^N infinie obtenue dans le cas où N est infini :

$$* c^N = 0 \quad \text{si } c < 1$$

$$* c^N = 1 \quad \text{si } c = 1$$

$$* c^N = +\infty \quad \text{si } c > 1.$$

Il montre ainsi le phénomène de discontinuité lorsque N est infini, en insistant sur le fait que ce phénomène de discontinuité est analogue à ce qu'il a exprimé précédemment pour la loi des grands nombres dans le jeu de pile ou face infini.

Il en revient donc tout naturellement à affirmer qu'en terme de calcul de probabilité, s'il arrive à construire dans l'espace infini R^∞ une mesure qui se trouve être $d^\infty x$, cette mesure aura la propriété suivante :

« Chaque fois que je ferais une homothétie sur x avec $c \neq 1$, je l'enverrais ailleurs : le fait que le coefficient de proportionnalité c^∞ est infini (ou nul), veut tout simplement dire que la densité de la mesure par rapport à l'autre est infinie, et c'est exactement ce qui se passe dans la décomposition $\Omega = \cup_p \Omega_p$ pour le pile ou face infini : si je voulais à tout prix calculer la densité de μ_p par rapport à $\mu_{p'}$, je trouverais l'infini (ou zéro). Parce que, pour $p \neq p'$, $\frac{p^a (1-p)^b}{p'^a (1-p')^b}$ ne peut tendre (pour a ou b tendant vers l'infini) que vers 0 ou l'infini. Ce genre de situation est typique dans les théorèmes limites en calcul des probabilités. Ici c'est la même chose ! Et cela veut dire que quand je fais un changement d'échelle, c'est-à-dire si je fais une homothétie, je change totalement, comme dirait le physicien, de secteur : je me retrouve dans une théorie qui est sans rapport avec la théorie précédente. Autrement dit, Dx n'est pas du tout unique. »⁴²⁴

Cartier propose donc de définir rigoureusement l'intégrale de chemins de Feynman dans un cadre axiomatique.

Son but consiste à axiomatiser la théorie de l'intégrale de chemin c'est-à-dire à l'organiser en la fondant sur des axiomes, et à en déduire rigoureusement des théorèmes (théorèmes d'existence, théorème d'unicité) dans un cadre purement logique.

Tout naturellement, il propose de travailler dans un espace de Hilbert H et tente de définir un élément d'intégration Dx dans H qui soit invariant par translation.

Pour cela, il essaye de normaliser :

$$\int_H e^{-\pi x^2} Dx = 1,$$

en partant du fait que pour obtenir des intégrales égales à 1, il peut utiliser la formule classique de l'intégrale gaussienne en calcul des probabilités :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

soit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} = 1.$$

Puis, d'après l'invariance par translation $D(x_0+x) = Dx$ on peut écrire :

$$\int_H e^{-\pi(x_0+x)^2} D(x_0+x) = \int_H e^{-\pi(x_0^2+2x_0x+x^2)} D(x_0+x) = \int_H e^{-\pi x^2-2\pi x x_0} e^{-\pi x_0^2} D(x_0+x) = I.$$

Sachant que x_0 est une constante, on peut écrire $D(x_0+x) = Dx$ et l'expression $e^{-\pi x_0^2}$ peut sortir de l'intégrale.

424. Ibid. Pages 53 et 54.

Alors Cartier écrit :

$$e^{-\pi x_0^2} \int_H e^{-\pi x^2 - 2\pi x x_0} D(x) = 1$$

soit :

$$\int_H e^{-\pi x^2 - 2\pi x x_0} D(x) = e^{\pi x_0^2}. \quad (14)$$

Notons que ces résultats datent de 1993 (Conférence donnée à Bordeaux le jeudi 4 mars 1993 : *L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux*). Cartier généralisera son raisonnement dans le document qu'il publiera avec Cécile DeWitt-Morette en 1995.⁴²⁵

Selon Cartier, s'il arrive à trouver un élément d'intégration raisonnable Dx , cet élément d'intégration doit alors satisfaire à l'équation de l'intégrale sur H ci-avant.

Et pour des raisons qu'il qualifie de technique, il écrit avoir intérêt à prendre x_0 complexe, c'est-à-dire à prendre x_0 dans le complexifié de l'espace de Hilbert réel H , ce qui lui permet de passer de la transformée de Laplace à la transformée de Fourier.

Alors Cartier écrit que la formulation abstraite de la condition donnée par l'équation ci-avant est :

$$\int_H \Theta(x|J) D(x) = Z(J) \quad (15)$$

dans laquelle:

- * Θ est un coefficient introduit par Cartier,
- * J est le x_0 complexe relatif à l'équation (14),
- * $Z(J) = e^{\pi x_0^2}$.

Cartier rappelle que son élément d'intégration doit satisfaire à certaines conditions aux limites, c'est-à-dire :

« que certaines fonctions ont une intégrale qui doit être quelque chose qui est donné d'avance. De la même manière que l'intégrale à une dimension (ou le dx ordinaire) est entièrement

caractérisée par la condition $\int_R \exp[-\pi(x+a)^2] dx = 1$ pour tout a (il y a une seule intégrale

à une dimension qui satisfasse à cela, c'est l'intégrale ordinaire), eh bien, si je fixe $\Theta(x|\cdot)$ et $Z(\cdot)$, il y a au plus une intégrale qui vérifie (15) quelque soit J . »⁴²⁶

425. Cartier / DeWitt-Morette. 1995. «A new perspective on functional integration». *Journal of Mathematical Physics*. Volume 36, Appendix A: Functional integration, pages 61- 87.

426. Cartier. 1993. « L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux ». *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui. Volume 1 présenté par Eric Charpentier et Nicolas Nikolski, éditions Cassini, Paris, deuxième édition corrigée, 2003, pages 54 et 55.*

427. Ibid. Page 55.

428. Cartier / DeWitt-Morette. 1993 : « Intégration fonctionnelle ; éléments d'axiomatique ». *Compte-rendu de l'Académie des Sciences de Paris. Série II, pages 733-738 ; 1993*: « Status report on an axiomatic basis for functional integration ». *Cambridge University Press. Pages 78-82 ; 1995* : « A new perspective on functional integration ». *Journal of Mathematical Physics. Volume 36, 101 pages.*

429. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. «*Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics*». Springer.

430. Cartier / DeWitt-Morette. 1995. «A new perspective on functional integration». *Journal of Mathematical Physics. Volume 36.*

431. Ibid. Page1.

Consécutivement aux hypothèses qu'il présente ci-avant, Cartier se pose la question de savoir quelles sont les fonctions qu'il peut intégrer.

Pour répondre à sa propre question, Cartier suppose qu'il a une fonction $F(x)$ qui s'écrit sous la forme :

$$F(x) = \int_K \Theta(x|J) d\mu(J) \quad (16)$$

dans laquelle x appartient à un certain espace de Hilbert H alors que J appartient à un espace de paramètres qu'il note K .

Puis il imagine posséder une vraie mesure μ qui soit complexe de masse finie du fait que la notion de mesure sur K est bien définie. Cartier précise ainsi que l'égalité (16) correspond à une généralisation de la transformation de Fourier :

« parce que $\Theta(x|J)$ pourrait être, en particulier, égale à $e^{ix \cdot J}$, donc les fonctions $F(x)$ considérées sont des généralisations des fonctions qui sont des transformées de Fourier-Stieltjes (transformées de Fourier de mesure) : ce cas particulier (des transformées de Fourier-Stieltjes) était le point de départ d'Albeverio et Hoegh-Krohn. »⁴²⁷

Cartier mentionne donc le programme axiomatique qu'il a proposé avec Cécile DeWitt-Morette, et qui se trouve contenu dans leurs trois publications de 1993 et 1995.⁴²⁸

Il précise dans sa conférence du 4 mars 1993 que ce programme généralise les travaux d'Albeverio et Hoegh-Krohn (voir la publication de ces derniers⁴²⁹).

En outre, dans la publication de 1995⁴³⁰, en commun avec Cécile DeWitt-Morette, que nous allons analyser ci-après, il n'oublie pas de mentionner ce qu'il doit à Albeverio, Hoegh-Krohn (les intégrales oscillantes) et Elworthy (paramétrisation des chemins dans un espace courbe) en les citant :

« The methods of proof are rigorous and combine Albeverio Hoegh-Krohn oscillatory integrals with Elworthy's parametrization of paths in a curved space. Unlike other approaches we solve Schrödinger type equations directly, rather than solving first diffusion equations and then using analytic continuation. »⁴³¹

Cartier explique son programme axiomatique de la manière suivante :

432. Cartier. 1993. « L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux ». Leçons de mathématiques d'aujourd'hui. Volume 1 présenté par Eric Charpentier et Nicolas Nikolski, éditions Cassini, Paris, deuxième édition corrigée, 2003, page 55.

« On se donne deux espaces de Banach séparables H et K (le plus souvent des espaces de Hilbert), une fonction $\Theta(x|J)$ à valeurs complexes, continue, une autre fonction $Z(J)$ complexe, et on cherche un « intégrateur » Dx pour lequel les propriétés exigées plus haut soient vérifiées. Plus précisément, ce sera la donnée d'une classe de fonctions test, et d'une intégrale pour celles-ci ; les fonctions test seront les $F(x)$ de la forme (16) avec une mesure μ , complexe, borélienne, bornée sur K . La norme de F sera la variation totale de μ , ou plutôt, $\|F\| = \inf \text{var } \mu$ où l'infimum est pris sur toutes les μ concernées, c'est-à-dire sur toutes les représentations de F comme transformée de Fourier-Stieltjes (je n'exclus pas qu'il y ait plusieurs représentations possibles). »⁴³²

Alors il conclut qu'il est facile de se rendre compte que l'ensemble des fonctions F , muni de la norme $\|F\| = \inf \text{var } \mu$, est un espace de Banach c'est-à-dire un espace vectoriel normé tel que dans cet espace, toute série absolument convergente est convergente.

Cartier définit alors tout naturellement l'intégrale de F de la manière suivante :

$$\int_H F(x) Dx \equiv \int_K Z(J) d\mu(J) . \quad (17)$$

Il conclut qu'il parvient à un théorème d'unicité c'est-à-dire sur un théorème indiquant que le problème de formalisation de l'intégrale de chemins tel qu'il l'a posé ne possède qu'une seule solution.

Il ajoute aussi que les théorèmes d'existence qu'il obtient, c'est-à-dire les théorèmes qui sont formalisés par un énoncé existentiel tel « qu'il existe un voisinage dans lequel » ou bien « il existe un rang à partir duquel » ou bien encore qui concluent à la convergence d'une fonction, d'une série ou d'une suite, se démontrent en montrant qu'on peut passer à des intégrales à nombre fini de variables et faire des passages à la limite.

Enfin, Cartier insiste sur le fait que tous les travaux tentant de donner un cadre rigoureux à la vue intuitive de l'intégrale de chemins de Feynman, exception faite pour les travaux d'Albeverio et Hoegh-Krohn, sont basés sur la définition de l'intégrale de chemins de Feynman par un procédé de passage à la limite à partir de la dimension finie. Ce qui paraît a priori paradoxale lorsque l'on sait que la série associée à un chemin quelconque de l'espace-temps, pour un échantillonnage du temps aussi fin soit-il car tendant asymptotiquement vers zéro.

Ceci dit, Cartier insiste sur l'originalité de ses travaux en expliquant qu'il part d'un cadre axiomatique assurant l'unicité et qu'ensuite tous les procédés d'approximation qu'il peut imaginer sont autorisés :

« par exemple le passage à la limite à partir de la dimension finie, ou mettre un facteur du type $\exp[-\epsilon x^2]$ pour rendre les intégrales absolument convergentes, etc. Si par un quelconque moyen j'arrive à trouver un procédé d'intégration qui vérifie les propriétés voulues, j'ai gagné : le théorème d'unicité me dit que c'est le bon. »⁴³³

7.6.2.b) Une nouvelle perspective concernant l'intégration fonctionnelle (1995)

Les travaux développés par Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette en 1995 résultent des réflexions de Pierre Cartier que nous avons vu ci-avant.

Aussi est-il très intéressant d'analyser leur publication datant de 1995 : *A new perspective on functional integration*^{433/1} car le cœur de cet article concerne l'obtention d'un théorème général offrant de multiples spécificités et notamment celle d'apporter une preuve rigoureuse dans la formulation de l'intégrale de chemin de Feynman.

Avant de rentrer dans le détail de cette analyse, il me paraît indispensable de mentionner les quelques points suivants.

A partir d'une variété différentielle N et d'un nombre fini de groupes à un paramètre, associés à des transformations sur N via une intégration fonctionnelle sur des espaces de chemins, les auteurs cherchent à obtenir un groupe à un paramètre, d'opérateurs fonctionnels agissant en tant que champs tensoriel ou spinoriel sur la variété N .

L'intégrale fonctionnelle de base sera définie sur l'espace des fonctions de carré intégrable dont la dérivée doit elle-même être intégrable, c'est-à-dire sur l'espace $L^{2,1}$.

Bien que l'intégrateur \int reste invariant par rapport à une translation dans le temps, les auteurs mentionnent que l'intégrale qu'ils construisent reste assez puissante pour une utilisation concernant des systèmes qui ne sont pas invariants par rapport à ce type de translation.

En résumé de leurs travaux, les auteurs confirment que les méthodes de preuve qu'ils ont mises en place sont rigoureuses. Ceci dit, ils reconnaissent avoir effectué une combinaison des résultats obtenus par Albeverio et Hoegh-Krohn sur les intégrales oscillatoires avec la paramétrisation des chemins dans un espace courbe effectuée par le mathématicien britannique David Elworthy.

Les auteurs vont commencer par indiquer qu'au fur et à mesure de leur étude sur différentes applications des intégrales fonctionnelles, leurs idées ont évolué pour ce concernant les objets mathématiques que sont les intégrateurs formalisés par le symbole $\int dx$ (en d'autres termes ce que l'on nomme *calcul intégral*) et les intégrandes se trouvant sous le symbole précédent.

Rappelons que dans l'expression usuelle :

$$\int_0^a f(x) dx$$

que l'on nomme *intégrale* de $f(x)$ sur la variable x , pour x allant de 0 à a :

* $[0, a]$ est le domaine d'intégration de la fonction $f(x)$ définie par ailleurs pour un domaine arbitraire,

* $f(x)$ est l'intégrande de l'*intégrale* précédente relative à la variable x ,

* $\int dx$ est le symbole nommé *intégrateur*.

Les auteurs définissent ce que sera leur domaine d'intégration en traitant le thème suivant : *The domain of integration is a function space.*

433/1. Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « A new perspective on functional integration ». *Journal of Mathematical Physics*. Volume 36, 101pages.

Ils rappellent qu'un espace des chemins ponctuels (chemins auxquels on peut faire correspondre un point fixe) peut être contracté.

En mathématique, un chemin dans un espace topologique X est une application continue f de l'intervalle unité $[0, 1]$ dans X tel que :

$$f: I \rightarrow X.$$

Le point initial du chemin est $f(0)$ et le point final est $f(1)$.

Les auteurs précisent qu'il est avantageux en mathématique, voire même souvent nécessaire, de travailler sur des espaces topologiques associés à la notion de chemin. En effet, les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir les notions de limite, de continuité et de voisinage qui seront particulièrement utiles pour ce qu'ils veulent démontrer.

Il sera ainsi possible de faire appel à la notion de déterminants fonctionnels utilisant les propriétés de transformations linéaires sur des espaces de Banach, c'est-à-dire sur des espaces vectoriels topologiques normés ; et sachant que si un espace vectoriel normé est un espace de Banach, alors toute série absolument convergente sera convergente.

Au sujet de ces avantages à travailler sur des espaces topologiques associés à la notion de chemin, les auteurs citent les travaux suivants :

* C. Morette « *On the definition and approximation of Feynman's path integral* ». Physical Review, volume 81, pages 848-852, 1951.

* C. DeWitt-Morette, B.L. Nelson, T.R. Zhang « *Caustic problems in quantum mechanics with applications to scattering theory* ». Physical Review, volume D28, pages 2526-2546, 1983.

* M.G.G. Laidlaw, C. DeWitt-Morette « *Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles* ». Physical Review, volume D3, pages 1375-1378, 1971.

* R.H. Cameron, W.T. Martin « *Transformation of Wiener integrals under a general class of linear transformations* ». Transactions of the American Mathematical Society, volume 58, pages 184-219, 1945.

* C. DeWitt-Morette, B.L. Nelson, A. Maheshwari « *Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Physics Reports, volume 50, pages 266-372, 1979.

* B.L. Nelson, B. Sheeks « *Fredholm determinants associated with Wiener integrals* ». Journal of Mathematical Physics, volume 22, pages 2132-2136, 1981.

* K.D. Elworthy « *Stochastic Differential Equations on Manifolds* ». Cambridge University Press, Cambridge U.K. 1982.

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette concluent qu'en général, pour définir tout domaine d'intégration associé aux intégrales de chemins, il est nécessaire de spécifier les points suivants :

* la nature analytique des chemins (continue, L^2 , $L^{2,1}$, ...),

* les domaines de définition des chemins et leurs variétés,

* le comportement des chemins et les limites de leurs domaines de définition.

Pour les auteurs, une approche naïve pour définir une intégrale associée à une quantité infini de variables, serait de considérer une limite $d = \infty$ liée à une intégrale de dimension égale à d . En effet, ne serait-ce que pour un problème d'échelle, cette manière de procéder est bien connue pour être vouée à l'échec.

Une façon d'éviter cette difficulté est d'introduire pour chaque valeur du paramètre d'échelle $a > 0$, un intégrateur $d_a x$ dans l'espace R^d des réels en dimension d , c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_a x = a^{-d/2} dx^1 \dots dx^d \quad (\text{I.4})$$

et de remarquer que l'expression (I.4) caractérise l'intégrale suivante :

$$\int_{R^d} \mathcal{D}_a x \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{a} |x|^2 - 2\pi i \langle x', x \rangle \right] = \exp \left[-\pi a |x|^2 \right]. \quad (\text{I.5})$$

avec:

- * x' associé à l'espace R_d dual de l'espace R^d ,
- * $\langle x', x \rangle$ le produit scalaire égal à $x'_a \cdot x^a$, en utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés.

Les auteurs stipulent que l'intégrale (I.5) est alors adaptée en vue d'être généralisée, à partir de l'espace R^d , dans l'espace réel de Banach X .

Puis, posant comme condition X' dual de X , les auteurs considèrent deux formes quadratiques continues Q sur l'espace X et W sur l'espace X' , en supposant Q et W inverse l'un de l'autre dans le sens suivant :

$$D : X \rightarrow X' \quad , \quad G : X' \rightarrow X$$

tel que :

$$\left. \begin{array}{l} * DG = GD = I \\ * \langle Dx, y \rangle = \langle Dy, x \rangle \\ * Q(x) = \langle Dx, x \rangle \\ * W(x') = \langle x', Gx' \rangle \end{array} \right\} \quad (\text{I.6})$$

* pour des applications standards, D est un opérateur différentiel et G correspond à l'opérateur de Green prenant en compte les conditions aux limites correspondant au domaine de définition de D

* $\langle x', x \rangle$ indique la dualité entre les éléments x de X et son dual X' formé des éléments x' .

Alors les auteurs définissent l'intégrateur « $\mathcal{D}_{s,Q} x$ » (noté souvent $\mathcal{D}x$ pour des raisons de simplicité) par l'intégrale suivante :

$$\int_X \mathcal{D}_{s,Q} x \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q(x) - 2\pi i \langle x', x \rangle \right] = \exp \left[-\pi s W(x') \right]. \quad (\text{I.7})$$

avec:

- * $s = I$ pour Q défini positivement, c'est-à-dire $Q(x) > 0$ et $x \neq 0$

ou bien

- * $s = i$ pour aucune restriction sur Q à l'exception d'être réel.

Ensuite, les auteurs introduisent un espace adapté qu'ils définissent de la manière suivante :

* soit $F(X)$ les fonctionnelles de X intégrables au moyen de $\mathcal{D}_{s,Q}$ et d'une norme sur $F(X)$, afin de pouvoir traiter l'intégrale du type :

$$I = \int_X \mathcal{D}_{s,Q} x \cdot F(x) \quad (\text{I.8})$$

pour F appartenant à $F(X)$.

Pour ce qui concerne les deux cas précédent, c'est-à-dire $s = I$ et $s = i$, les auteurs considèrent $D_{s,Q} x$ comme associé aux intégrales gaussiennes.

Ils rappellent donc les propriétés relatives à ce type d'intégrales :

$$* \mathcal{D}_{(x+x_0)} = \mathcal{D}x, \text{ avec pour } x_0 \text{ un élément appartenant à } X \quad (\text{I.9})$$

$$* \mathcal{D}(Lx) = | \text{Det } L | \cdot \mathcal{D}x \text{ dont } L : X \rightarrow X \quad (\text{I.10})$$

et pour lequel L est adapté à la méthode dite des changements linéaires de variables d'intégration, incluant le cas évident où les deux égalités suivantes sont respectées :

- $Q(Lx) = Q(x)$
- $| \text{Det } L | = 1.$

Mais les auteurs tiennent à souligner que les intégrales gaussiennes ne sont pas les seules intégrales que l'on peut utiliser dans le traitement des fonctionnelles (les fonctions de fonction) en indiquant qu'ils ont publié en 1993 l'article *Intégration fonctionnelle ; éléments d'axiomatique*^{433/2} dans lequel ils ont traité des intégrales fonctionnelles dans l'espace Φ de Banach exprimé en termes d'intégrateurs $D_{\Theta, Z}$ défini de la manière suivante :

$$\int_{\Phi} \mathcal{D}_{\Theta, Z} \cdot \Theta(\varphi, J) = Z(J) \quad (\text{I.11})$$

avec :

- * $\varphi \in \Phi$
- * $J \in \text{dual } \Phi' \text{ de } \Phi$
- * Θ et Z deux fonctionnelles bornées continuellement c'est-à-dire :
 $\Theta : \Phi \times \Phi' \rightarrow C$, $Z : \Phi' \rightarrow C$.

Ils précisent aussi qu'en théorie quantique des champs, ils interprètent φ comme un champ et J comme une source, sachant que $Z(J)$ est alors identifié aux théories sur les fonctionnelles issues des travaux du physicien américain Julian Schwinger (1918-1994).

Les auteurs donnent aussi quelques règles d'usage à respecter pour ce qui concerne "*The art of integration*", lorsqu'il est nécessaire de diviser en échantillons de temps ou autres variables, intégrateurs et intégrandes que nous avons définis plus haut. Ils précisent cependant que ces règles restent empiriques.

Ils conseillent donc :

- * de ne pas hésiter à intégrer par le procédé qui consiste à changer de variables d'intégrations, ce qui conduit inévitablement à redéfinir l'intégrande,
- * d'utiliser la pratique des intégrales gaussiennes qui sont à la fois pleine de richesses dans leur simplicité et dans leur puissance de résolution des problèmes que l'on a à résoudre.

Puis, les auteurs rappellent que le cœur de leur article concerne un théorème qui permet d'étayer mathématiquement une grande diversité d'intégrales fonctionnelles.

Ils posent donc le décor de ce qui constitue l'objet principal de leur recherche, à savoir :

- * la définition d'une intégrale fonctionnelle,
- * la définition de l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la valeur de l'intégrale fonctionnelle précédente.

433/2. Cartier / DeWitt-Morette. 1993. « *Intégration fonctionnelle ; éléments d'axiomatique* ». Compte-rendu de l'Académie des Sciences, tome 316, série II, pages 733-738.

Pour une variété N donnée, les auteurs considèrent un espace de chemins sur $L^{2,1}$ selon un intervalle de temps fini T prenant valeurs dans N , tel que :

$$x : T \rightarrow N$$

avec un point fixe $x_0 \in N$; par exemple, si $T = [t_a, t_b]$, le point fixe peut être soit $x(t_a)$, soit $x(t_b)$.

Pour $d+1$ champs de vecteur Y et $X_{(\alpha)}$ pris sur la variété N , les auteurs définissent un tracé P d'un espace \mathcal{P}_0R^d de chemins $L^{2,1}$, dans un espace $\mathcal{P}_{x_0}N$ de chemins $L^{2,1}$, tel que :

$$P : \mathcal{P}_0R^d \rightarrow \mathcal{P}_{x_0}N,$$

avec $P(z) = x$, où :

$$\left. \begin{aligned} dx(t,z) &= X_{(\alpha)}(x(t,z)) dz^\alpha + Y(x(t,z)) dt \\ x(t_0,z) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.12})$$

et:

- * t_0 fixé
- * x_0 fixé
- * $t_0 \in T$
- * $x_0 \in N$
- * les chemins $z : T \rightarrow R^d$ satisfaisant $z(t_0)=0$
- * les champs de vecteurs ne commutant généralement pas, c'est-à-dire

$$[X_{(\alpha)}, X_{(\beta)}] \neq 0 \quad \text{et} \quad [Y, X_{(\alpha)}] \neq 0$$
- * la solution de (I.12) de la forme $x(t,z) = x_0 \cdot \Sigma(t,z)$ (I.13)
- * x une fonction de x_0 et de t
- * x une fonctionnelle de z
- * $\Sigma(t,z)$ une transformation dans la variété N , dépendant de t et de z
- * l'expression $\Sigma(t,z) = f(t,z(t))$ seulement lorsque $[X_{(\alpha)}, X_{(\beta)}] = [Y, X_{(\alpha)}] = 0$.

Les auteurs précisent aussi que pour (I.12) donné, on peut exprimer une intégrale sur $\mathcal{P}_{x_0}N$ comme étant une intégrale sur \mathcal{P}_0R^d , qui peut être traitée et calculée.

L'équation aux dérivées partielles satisfaite par l'intégrale sur $\mathcal{P}_{x_0}N$ est alors exprimée en termes de dérivées de Lie le long des chemins de vecteur Y et de $X_{(\alpha)}$.

Ils mentionnent également que pour une équation aux dérivées partielles paraboliques donnée, on peut construire dans la plupart des cas une intégrale de chemin représentative des solutions de cette équation différentielle.

En Annexe 23, nous détaillons les travaux de Pierre Cartier et de Cécile DeWitt-Morette associés à leur méthode de construction d'une intégrale fonctionnelle de base dans le contexte mathématique qui est le leur, en considérant plusieurs configurations généralisant leur point de vue. Ces travaux sont contenus dans la publication :

Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « *A new perspective on functional integration* ». Journal of Mathematical Physics. Volume 36, 101pages.

Ainsi Pierre Cartier et de Cécile deWitt-Morette :

- En prouvant que la fonction d'onde la plus simple $(U_T \Phi)(x_0)$ notée $\Psi(T, x_0)$ construite à partir du modèle général (II.1) est solution de l'équation de Schrödinger, donnent un cadre rigoureux à l'intégrale de chemin, là où Feynman se contentait d'une vue intuitive.

- En prouvant que leurs travaux convergent avec les résultats obtenus en physique quantique, confirment le bien fondé de leurs hypothèses dans la construction d'un cadre rigoureux pour l'intégrale de chemins.

- A partir d'un cadre mathématique rigoureux qu'ils construisent méthodiquement, retrouvent le principe de l'Action mis en avant plus ou moins intuitivement par Feynman, en calculant l'évolution de la fonction d'onde dans un espace plat. Et en montrant que l'évolution de cette fonction d'onde correspond à l'approximation W.K.B. dans son développement au premier ordre sur \hbar , ils prouvent la véracité de leur calcul.

- Apportent un cadre rigoureux aux intégrales de chemins même lorsque ces dernières sont parties prenantes de variétés différentielles associées aux espaces de Riemann.

Mais laissons Pierre Cartier et de Cécile DeWitt-Morette s'exprimer comme ils le font en résumant leurs travaux avec la satisfaction, comme ils l'écrivent, d'avoir construit avec rigueur l'intégrale fonctionnelle associée au concept de trajectoire d'une particule :

« *The core of this article is a general theorem with a large number of specializations. Given a manifold N and a finite number of one-parameter groups of point transformations on N with generators $Y, X_{(1)}, \dots, X_{(d)}$, we obtain, via functional integration over spaces of pointed paths on N (paths with one fixed point), a one-parameter group of functional operators acting on tensor or spinor fields on N . The generator of this group is a quadratic form in the Lie derivatives $L_{x(a)}$ in the $X_{(a)}$ -direction plus a term linear in L_y . The basic functional integral is over $L^{2,1}$ paths $x: T \rightarrow N$ (continuous paths with square integrable first derivative). Although the integrator is invariant under time translation, the integral is powerful enough to be used for systems which are not time translation invariant. Seven nontrivial applications of the basic formula are given, and the semiclassical expansion is computed. The methods of proof are rigorous and combine Albeverio - Hoegh-Krohn oscillatory integrals with Elworthy's parametrization of paths in a curved space. Unlike other approaches, Schrödinger type equations are solved directly, rather than solving first diffusion equations and then using analytic continuation.* »

7.6.3- Années 1999, 2008, 2012 : Les travaux de Erik G.F. Thomas , de Mathieu Beau et Tony Dorlas, de Sonia Mazzucchi

Aborder le sujet en associant l'intégrale de chemin à la théorie des distributions m'a paru intéressant.

Aussi, j'ai retenu les travaux de Erik G. F. Thomas publiés en 1999 dans un article intitulé : *Path Distribution on Sequence Spaces* » se trouvant dans la base de données MathSciNet.

Erik G.F. Thomas (1939-2011) est un mathématicien néerlandais ayant obtenu son doctorat de mathématique à Paris sous la direction de Laurent Schwartz (1915-2002) titulaire de la médaille Fields 1950.

Professeur de mathématique à l'Université de Groningen, ses travaux sont d'une grande valeur pour ce qui concerne l'application des mathématiques à la physique théorique, c'est-à-dire pour ce que l'on qualifie de physique mathématique.

L'approche de Thomas est de définir l'intégrale de chemins comme un objet lié à la théorie des distributions, c'est-à-dire à un objet généralisant la notion de fonction et de mesure. Aussi, construit-il ce qu'il appelle une distribution de chemins associée à la discrétisation de temps que l'on rencontre dans l'élaboration de l'intégrale de chemins par Feynman.

Les chemins sont alors considérés comme des suites appartenant à un espace nucléaire, c'est-à-dire à un espace vectoriel topologique possédant certaines propriétés analogues à celles des espaces de dimension finie, en particulier celles d'espaces vectoriels normés. En effet, les suites sont liées à la mathématique de la mesure et à l'analyse.

Rappelons qu'un espace vectoriel normé est une structure mathématique munie d'une norme. Ceci permet de développer des propriétés de distance compatibles avec les opérations de l'algèbre linéaire qui nous intéresse, afin de tenter de formaliser rigoureusement l'intégrale de chemins à travers certains critères de convergence.

Mais laissons s'exprimer Thomas lui-même à propos de son article en le résumant de la manière suivante :

« We define the rank of summable distribution and show that finite dimensional Fresnel distribution e^{iS} are summable distributions of rank 2, independently of the dimension of the space. This motivates the introduction of path distributions, which we discuss in the case of spaces of sequences (discrete time paths). For a continuous quadratic form $(K\xi, \xi)$ on a nuclear sequence space E there exists a unique path distribution F_K on the dual sequence space E' such that

$$\int_{E'} e^{-(x,t)} F_K(dx) = e^{i(K\xi, \xi)/2}, \quad \xi \in E$$

If $K(i,j) = \min(i,j)$ this gives a discrete-time analogue of a Feynman integral. »

Le mathématicien A.V. Uglanov qui a examiné la publication l'a évaluée comme suit :

« This paper relates to the theory of generalized measures on topological vector spaces. The main result is the construction of an important class of generalized measures on nuclear spaces of sequences; this class contains, in particular, the Feynman integral (with discrete time). The author also obtains some other interesting results. »

Via l'onglet « citation » associé à la publication de Thomas, nous avons recherché les auteurs susceptibles de clarifier l'intégrale de chemins de Feynman à travers la théorie des distributions. C'est ainsi que nous trouvons l'article de Mathieu Beau datant de 2013, en collaboration avec le professeur Tony Dorlas de l'Institut d'Etudes Avancées de Dublin intitulé : « *Discrete-time path distributions on a Hilbert space* » examiné et résumé par la mathématicienne Sonia

Mazzucchi, qui a publié en 2008 avec Albeverio, la deuxième édition de la publication vue au §7.5 sur la théorie de l'intégration associée au fondement mathématique des intégrales de chemins de Feynman.

De même que Cécile DeWitt-Morette, Pierre Cartier et Sergio Albeverio, Sonia Mazzucchi est une spécialiste reconnue dans la volonté de trouver un cadre rigoureux aux intégrales de chemins de Feynman.

Son résumé est le suivant :

« The paper is based on an approach to the rigorous mathematical definition of path integrals introduced by E. Thomas in 2000. The kinetic part of the Feynman path integrals constructed as a path distribution obtained in terms of the derivative of measure on a Hilbert space of paths. »

Nous remarquons au passage l'impressionnante liste des ouvrages de référence de mathématiciens reconnus mentionnée par Mathieu Beau.

Mathieu Beau simplifie l'approche qu'a eu Erik Thomas précédemment en définissant la distribution sur un espace de chemins appartenant à l'espace de Hilbert plutôt qu'à l'espace nucléaire et en utilisant des conditions aux limites différentes de celle de Thomas afin de gagner en clarté et en simplicité :

« We construct a path distribution representing the kinetic part of the Feynman path integral at discrete times similar to that defined by Thomas, but on a Hilbert space of paths rather than a nuclear sequence space. We also consider different boundary conditions and show that the discrete-time Feynman path integral is well-defined for suitably smooth potentials. »⁴⁵¹

Mathieu Beau est un jeune physicien théoricien français d'une trentaine d'années. Docteur en physique mathématique et en physique théorique de l'Université d'Aix-Marseille en 2010, il est post doctorant de 2010 à 2015 à l'Institut d'études avancées de Dublin puis de 2015 à 2017 à l'Université du Massachusetts à Boston.

A Dublin, ses recherches sont assez variées et portent sur des domaines allant de l'étude des molécules dans un champ magnétique intense à l'étude des états quantiques des neutrons placés dans un champ de gravitation.

Il s'est aussi intéressé à la condensation Bose-Einstein, à la diffraction quantique de l'onde de matière ainsi qu'aux neutrons ultra-froids et à l'analyse fonctionnelle.

A Boston il travaille en physique mathématique sur des domaines tels que la thermodynamique quantique, l'étude du temps en mécanique quantique, la décohérence et quelques problèmes associés à la résolution de certaines intégrales.

Pendant ses recherches postdoctorales à Dublin, il réfléchit à une formulation rigoureuse de l'intégrale de chemin de Feynman en collaboration avec le professeur Tony Dorlas.

Le résultat de cette étude fait l'objet d'une publication soumise le 9 février 2012 ⁴⁴² aux archives-ouvertes (HAL) destinées au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

451. Beau – Dorlas. 2012. « *Discrete-Time path Distributions on Hilbert Space* ». HAL. Page 1.

442. Beau – Dorlas. 2012. « *Discrete-Time path Distributions on Hilbert Space* ». HAL.

Mon étude sur la formulation rigoureuse de l'intégrale de chemin de Feynman associée aux travaux de Mathieu Beau s'effectue essentiellement sur l'analyse de la publication datant de 2013 et répertoriée sur mathSciNet « *Discrete-time path distributions on a Hilbert space* », dont nous avons parlé ci-avant.

Mathieu Beau rappelle que pour toute trajectoire envisageable $x(t)$ on définit l'action S par l'intégrale suivante :

$$S(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x(t), \dot{x}(t), t),$$

qui est l'expression que nous avons vu au chapitre 4.

Il rappelle aussi que le Lagrangien $L(x(t), \dot{x}(t), t)$ dépend directement du temps t , de la position $x(t)$ et de la vitesse $\dot{x}(t)$ de la particule.

Considérant une trajectoire unidirectionnelle, Mathieu Beau donne pour le Lagrangien l'équation suivante :

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - V(x(t), t),$$

qui est l'expression que nous avons vu au chapitre 3.

Il précise que le premier terme de droite $\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$ est l'énergie cinétique de la particule parcourant la trajectoire $x(t)$ et que le second terme $V(x(t), t)$ est l'énergie potentielle de la particule comme nous pouvons le voir en Annexe 14.

Puis Mathieu Beau mentionne l'équation de l'évolution de la fonction d'onde :

$$\Psi(x_f, t_f) = \int K(x_f, t_f; x_i, t_i) \Psi(x_i, t_i) dx_i \quad (1.1)$$

telle que nous l'avons vu au chapitre 3, avec :

- * la condition initiale pour la fonction d'onde $\Psi(x_i, t_i)$ à un instant initial t_i fixé,
- * la fonction d'onde $\Psi(x_f, t_f)$ à un instant ultérieur $t_f > t_i$.

Enfin, il mentionne l'équation du propagateur de Feynman $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ qu'il qualifie d'intégrale de chemin :

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x_f, t_f; x_i, t_i)\right] Dx(t)$$

qui est ni plus ni moins que l'expression que nous avons vu en section 7.2.2.

Mathieu Beau insiste sur le fait que la valeur de l'action S dépend de la fonction $x(t)$ et que l'intégration sur cette fonction $x(t)$, symbolisée par :

$$Dx(t) = \prod_{t \in (t_i, t_f)} dx(t)$$

s'appelle une intégrale fonctionnelle.

Il indique aussi que $Dx(t)$ est supposé être un produit continu associé aux mesures de Lebesgue, interprété de manière approximative par Feynman comme une limite d'intégrales multidimensionnelles.

Citant la publication *Path Distributions on Sequence Spaces*⁴⁴³ du mathématicien néerlandais Erik G.F. Thomas, Mathieu Beau précise la divergence de la série associée aux nombres d'intégrales de chemin tendant vers l'infini. Aussi, dans l'approche pragmatique et intuitive de Feynman, la série associée à un chemin quelconque de la région \mathbb{R}^n de l'espace-temps, pour une division de l'échelle des temps aussi fine soit-elle, est loin d'être convergente.

Il énonce donc :

« *It is a formidable mathematical challenge to make sense of this path-integral concept. Feynman himself interpreted it loosely as a limit of multidimensional integrals. However, as Thomas⁴⁴⁴ remarks, even the finite-dimensional integrals are not proper integrals though they can be defined as improper integrals. ... In fact, as Thomas and Bijma⁴⁴⁵ show, it cannot even be interpreted as a summable distribution because the summability order diverges as the number of integrals tends to infinity. Various alternative approaches have been proposed to interpret the Feynman path integral as a limit of regularised integrals⁴⁴⁶. The "Euclidean approach" of "Wick rotating" the time in the complex plane has led to the development of Euclidean quantum field theory, which has been the most successful way of constructing examples of quantum field theories. However, this still leaves open the question as to how the path integral object should be interpreted mathematically.* »⁴⁴⁷

Mathieu Beau cite la publication de Cécile De Witt-Morette sur le sujet⁴⁴⁸ et celle de Albeverio / Hoegh-Krohn⁴⁴⁹, en insistant sur l'approche beaucoup plus constructive de ces derniers dans la formulation rigoureuse de l'intégrale de chemin.

Afin de faciliter l'écriture des résultats obtenus, il pose :

$$m = \hbar = 1.$$

Pour un potentiel V donné, l'idée de base est donc de définir le propagateur comme un produit

de dualité entre une "distribution de chemin" F et un terme $\exp[-i \int_0^t V(x(t)) dt]$ tel que :

$$K_t(x, x_0) \equiv \langle \exp[-i \int_0^t V(x(t)) dt], F \rangle = \langle D \exp[-i \int_0^t V(x(t)) dt], \mu \rangle.$$

Les problèmes seront alors de quatre ordres;

443. E. Thomas. 1999. « Path Distributions on Sequence Spaces ». Mathematics Institute, University of Groningen.

444. Ibid.

445. F. Bijma. 1999. « Generalised Fresnel distributions ». Thesis, University of Groningen.

446. R.H. Cameron - F.Storvick. 1983. « A simple definition of the Feynman integral, with applications ». *Memoirs of the American mathematical Society*, N° 288 / A.Truman. 1979. « A polynomial path formulation of the Feynman path integral ». *Lecture Notes in Physics*, vol. 106, pages 73-102 / E. Nelson. 1964. « Feynman integrals and the Schrödinger equation ». *Journal of Mathematical Physics*, vol 5, pages 332-343.

447. Beau – Dorlas. 2012. « Discrete-Time path Distributions on Hilbert Space ». HAL. Pages 2 et 3.

448. De Witt-Morette. 1972. « Feynman's path integrals: Definition without limiting procedure ». *Communications in Mathematical Physics*, vol. 28, pages 47-67.

449. Albeverio, Hoegh-Krohn. 1976. « Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics ». Springer.

- * définir μ et D pour une limite n tendant ou non vers l'infinie ; n est associée à la discrétisation du temps concernant chacun des chemins possibles pour la particule ; D est un opérateur ; d 'une manière générale comme dans toute distribution, μ est une mesure,
- * si F est une distribution, alors il faut définir sur quel espace de chemin cette distribution a un sens,
- * Définir le sens de $\langle . , . \rangle$,
- * si V appartient à un espace de fonction, il faut savoir lequel est convenable.

Dans un premier temps, Mathieu Beau, s'inspirant des travaux d'Erik Thomas, pose les conditions pour lesquelles doivent se faire le parallèle entre la discrétisation du temps dans l'approche de Feynman de l'intégrale de chemin (liée à l'énergie cinétique de la particule) et la construction de l'espace ζ de suites en dimension infinie, associée à la construction de la distribution de chemin.

Soit la discrétisation du temps (c'est-à-dire de l'action S) en nombre de subdivisions limité c'est-à-dire fini :

$$\sigma = \{t_1, \dots, t_n\}$$

avec :

- * $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$
- * $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit les deux conditions aux limites suivantes en considérant une particule libre :

→ Premièrement les conditions aux limites de Dirichlet (*Dirichlet Boundary Conditions : DBC*) pour lesquelles il écrit :

$$x(t=0) = 0 \quad ; \quad x(t=T) = X_T$$

donnant l'action suivante

$$S(X_T, T; 0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(DBC)}(X_T, T; 0, 0)$$

avec :

$$S_n^{(DBC)}(x_{n+1}=X_T, t_{n+1}=T; x_0=0, t_0=0) = \frac{1}{2} \left(\frac{(X_T - x_n)^2}{T - t_n} + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} + \dots + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{x_1^2}{t_1} \right) \quad (1.3)$$

En effet, pour $V = 0$ (particule libre), nous avons vu précédemment que :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

et donc l'expression de l'action S devient :

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} L dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right)^2 [t]_{t_{n-1}}^{t_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right)^2 (t_n - t_{n-1}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}$$

→ Deuxièmement les conditions aux limites imposées (*Mixed Boundary Conditions : MBC*) pour lesquelles il pose :

$$x(t=0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(t=T) = v_T.$$

Dans ce cas, l'action $S = S(v_T, T; x_i, t_i)$ dépend de la position initiale et de la vitesse finale de la particule :

$$S(v_T, T; 0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(MBC)} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = v_T, t_{n+1} = T; x_0 = 0, t_0 = 0 \right)$$

c'est-à-dire:

$$S_n^{(MBC)} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = v_T, t_{n+1} = T; x_0 = 0, t_0 = 0 \right) = \frac{1}{2} \left(v_T^2 (T - t_n) + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} + \dots + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{x_1^2}{t_1} \right) \quad (1.4).$$

Les distributions de Feynman correspondantes aux deux conditions aux limites précédentes sont:

$$F_\sigma^{(DBC)} = \frac{1}{\sqrt{2i\pi(T-t_n)}} \exp[i S_n^{(DBC)}] \times \prod_{i=1}^n [dx_i \left(\frac{1}{\sqrt{2i\pi(t_i - t_{i-1})}} \right)] \quad (1.6)$$

avec:

$$* \prod_{i=1}^n [dx_i \left(\frac{1}{\sqrt{2i\pi(t_i - t_{i-1})}} \right)] = \frac{dx_n \dots dx_1}{\sqrt{2i\pi(t_n - t_{n-1})} \dots 2i\pi t_1},$$

* $F_\sigma^{(DBC)}$ l'expression que nous avons vu sous les $(n-1)$ intégrales imbriquées en début de sous-section 2.3.4.c concernant le calcul du propagateur de Feynman pour une particule libre,

* $\frac{1}{\sqrt{2i\pi(T-t_n)}}$ et $\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2i\pi(t_i - t_{i-1})}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi(t_n - t_{n-1})} \dots 2i\pi t_1}$ représentant la valeur du coefficient de normalisation $C(\varepsilon)$ dont nous avons parlé en sous-section 5.2.4.c.

Et pour $v_T = 0$ correspondant à une vitesse nulle de la particule au temps T :

$$F_\sigma^{(MBC)} = \exp\left[\frac{i}{2} \left(\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} + \dots + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{x_1^2}{t_1} \right) \right] \times \prod_{i=1}^n [dx_i \left(\frac{1}{\sqrt{2i\pi(t_i - t_{i-1})}} \right)]. \quad (1.7)$$

Comme définie en section 3.3.1, la transformée de Fourier de $F_\sigma^{(MBC)}$ est la suivante :

$$TF [F_\sigma^{(MBC)}(x_1, \dots, x_n)] = \hat{F}_\sigma^{(MBC)}(x_1, \dots, x_n) = \int_{R^n} F_\sigma^{(MBC)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left[i \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right] dx_1 \dots dx_n$$

Tout calculs faits, en s'inspirant de la publication de Thomas⁴⁵², Mathieu Beau écrit :

$$\hat{F}_\sigma^{(MBC)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n k(t_i, t_j) \xi_i \xi_j \right] \quad (1.8)$$

avec :

$$* k(t_i, t_j) = \min(t_i, t_j). \quad (1.9)$$

De même, la transformée de Fourier de $F_\sigma^{(DBC)}$ est la suivante :

$$TF [F_\sigma^{(DBC)}(x_1, \dots, x_n)] = \hat{F}_\sigma^{(DBC)}(x_1, \dots, x_n) = \int_{R^n} F_\sigma^{(DBC)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left[i \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right] dx_1 \dots dx_n$$

Soit :

$$\hat{F}_\sigma^{(DBC)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi T}} \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n k^{(T)}(t_i, t_j) \xi_i \xi_j \right] \quad (1.10)$$

452. E. Thomas. 1999. « Path Distributions on Sequence Spaces⁴⁴³ ». Mathematics Institute, University of Groningen.

453. Ibid.

avec :

$$* k^{(T)}(t_i, t_j) = \min(t_i, t_j) \left(1 - \frac{1}{T} \max(t_i, t_j)\right). \quad (1.11)$$

Mathieu Beau rappelle l'idée se trouvant dans la publication de Thomas⁴⁵³ selon laquelle la définition de l'intégrale de chemin en tant que distribution de chemin fait appel à la notion de dérivée d'une mesure associée à un espace mesuré sur R^n .

Et du fait d'une distribution de rang 2 pour chaque variable, il mentionne qu'il faut considérer une dérivée seconde associée à chaque variable.

Il précise alors les opérateurs différentiels suivants :

$$D^{(n)} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \alpha_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) \quad (1.12)$$

correspondant à la fonction de Green M_α donnée par :

$$M_\alpha^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\alpha_i} e^{-|x_i|/\alpha_i} \quad (1.13)$$

c'est-à-dire :

$$D^{(n)} M_\alpha^{(n)} = \delta(x_1) \dots \delta(x_n). \quad (1.14)$$

Notons que la mesure à valeurs complexes finie (ou bornée) $\mu^{(n)}$ de Feynman-Thomas sur l'espace mesurable associé à R^n est définie par le produit de convolution suivant :

$$\mu^{(n)}(dx_1 \dots dx_n) = M_\alpha^{(n)} * F^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Mathieu Beau définit, à l'instar de Thomas, la distribution de chemin $F^{(n)}$ donnée par l'expression (1.7) comme la dérivée :

$$F^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = D^{(n)} \mu^{(n)}(dx_1 \dots dx_n) \quad (1.15)$$

de la mesure à valeurs complexes $\mu^{(n)}$ strictement délimitée sur l'espace mesurable dans R^n dont nous venons de parler juste ci-avant.

Il précise que par rapport à Eric Thomas, ses travaux (selon ses propres hypothèses d'un espace de référence différent) doivent passer par la preuve qu'il existe bien également une mesure μ sur un espace de chemins de Hilbert de dimension infinie (chemins qui sont en fait des suites du fait de la discrétisation du temps). Et que cette mesure sera donnée par la limite projective des mesures de dimension finie $\mu^{(n)}$, c'est-à-dire :

$$\mu = \varprojlim \mu^{(n)}.$$

C'est ce que nous allons voir ci-après en considérant un espace de chemins de Hilbert en lieu et place d'un espace de chemins nucléaire comme le fait Thomas.

Mathieu Beau introduit donc une famille d'espaces de Hilbert labellisée par un paramètre réel γ :

$$l_\gamma^2 = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^\infty \in R^\infty \text{ tel que } \sum_{j=0}^\infty j^\gamma \xi_j^2 < +\infty \right\}$$

Il s'agit d'espaces de Hilbert avec le produit scalaire donné par :

$$(\xi, \zeta)_\gamma = \sum_{j=1}^\infty \xi_j \zeta_j j^\gamma$$

Rappelons que l'espace l^p est un espace vectoriel constitué de suites à valeurs réelles ou complexes et qui possède pour $1 \leq p \leq \infty$, une structure d'espace de Banach. Rappelons aussi que l'espace l^2 est l'espace des fonctions de carré intégrable mais fait aussi référence à l'ensemble des processus du second ordre.

Mathieu Beau introduit aussi le dual topologique $l^{-\gamma}$ de l'espace de Hilbert l^2_γ tel que :

$$\langle \xi_j, \zeta_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \zeta'_j$$

où :

$$* \xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in l^2_\gamma$$

$$* \zeta' = (\zeta'_j)_{j=1}^{\infty} \in l^{-\gamma}$$

L'approche de Mathieu Beau passe par la construction de la mesure de Feynman-Thomas. Et pour cela, il doit construire cette mesure μ sur un espace $l^{-\gamma}$ pour un $\gamma > 0$ assez large. L'avantage de son approche basée sur l'espace de Hilbert en lieu et place de l'espace nucléaire, est qu'il peut utiliser le théorème du mathématicien russe Vyacheslav Vasilievich Sazonov (1935-2002) pour montrer l'existence de la limite projective dont il est question en fin de section 1.

Il utilise donc le théorème de Sazonov afin de montrer l'existence d'une limite projective :

$$\mu = \varprojlim \mu^{(n)} \text{ sur } l^2_\gamma$$

par rapport à une topologie faible, c'est-à-dire par rapport à un espace vectoriel topologique défini au moyen de son dual topologique.

Le théorème de Sazonov est le suivant :

« Soit $(\mu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^1}$ un système projectif de mesures bornées (c'est-à-dire délimitées) sur le dual H' d'un espace de Hilbert séparable H . Supposons qu'il existe des mesures positives ν_n de sorte que $|\mu^{(n)}| \leq \nu_n$, bornées uniformément :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^1} \|\nu_n\| < +\infty$$

et de telle sorte que les transformées de Fourier données par l'application $\Phi_n : H \rightarrow \mathbb{C}^1$ c'est-à-dire :

$$\Phi_n(\xi) = \int e^{\langle \xi, x \rangle} \nu_n(dx),$$

soient équi continues en $\xi = 0$ pour la topologie de Sazonov.

Alors il existe unique mesure de Radon (mathématicien autrichien : 1887- 1956) bornée μ sur H'_σ où l'indice σ désigne la topologie faible telle que :

$$\pi'_n(\mu) = \mu^{(n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^1. \text{ »}^{454}$$

Mathieu Beau n'oublie pas de préciser que pour ce qui concerne l'équicontinuité en $\xi = 0$ dans la topologie de Sazonov, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, une application de Hilbert-Schmidt $\mu \in B(H)$ telle que :

$$\|\mu\xi\| \leq 1 \Rightarrow |\Phi_n(\xi) - \Phi_n(0)| \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour déterminer la limite projective de la mesure à valeurs complexes $\mu^{(n)}$, il applique le théorème de Sazonov aux mesures auxiliaires positives qui dominent $|\mu^{(n)}|$.

454. Beau – Dorlas. 2012. « Discrete-Time path Distributions on Hilbert Space ». HAL. Page 7.

Les différentes étapes de la preuve qu'il existe bien une mesure μ sur un espace de Hilbert sont données par Mathieu Beau comme suit :

- (1) : Construire des mesures auxiliaires ν_n sur R^n telle que $|\mu^{(n)}| \leq \nu_n$, qu'il traite au paragraphe 2.2 de sa publication⁴⁵⁵,
- (2) : Déterminer les conditions sur γ afin d'assurer le caractère borné de la mesure ($\sup_{n \in N^J} \|\nu_n\| < +\infty$) qu'il traite au paragraphe 2.3 de sa publication⁴⁵⁶,
- (3) : Déterminer les conditions sur γ afin d'assurer l'équicontinuité de ν_n , qu'il traite au paragraphe 2.4 de sa publication⁴⁵⁷,
- (4) : Et pour terminer, via le théorème de Sazonov, prouver l'existence de la mesure de Feynman-Thomas μ dans l'hypothèse des espaces de Hilbert qu'il traite en section 3 de sa publication⁴⁵⁸.

Nous allons analyser ce qui se rapporte à l'étape (4) précédente qui apporte la preuve de l'existence de la mesure de Feynman-Thomas sur le dual topologique $l^2_{-\gamma}$ de l'espace de Hilbert l^2_{γ} ainsi que la distribution telle qu'imaginée par Mathieu Beau.

La preuve de l'existence de la mesure de Feynman-Thomas sur le dual topologique $l^2_{-\gamma}$ ainsi que celle de l'existence d'une unique distribution de chemin F_K sur $l^2_{-\gamma}$ est donnée par le théorème suivant :

« Considérons une application $K : l^2_{\gamma} \rightarrow l^2_{-\gamma}$ avec $K_{jm} = j \wedge m$ et supposons que $\gamma > \frac{7}{2}$.

Alors il existe une unique distribution de chemin F_K sur $l^2_{-\gamma}$ telle que :

$$K(\xi) = e^{-\langle K\xi, \xi \rangle / 2}$$

donnée par $F_K = D\mu$ où $D = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_j}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)$ et où μ est une mesure de Radon bornée, fortement concentrée sur $l^2_{-\gamma}$ par rapport à la topologie faible. »⁴⁵⁹

Mathieu Beau énonce la proposition suivante sous la forme d'un corollaire qui découle de tout ce qui précède :

« Supposons que le potentiel V associé à l'application $V : R^1 \rightarrow R^1$ appartienne à $\varepsilon^2(R)$, c'est-à-dire deux fois continûment différentiables avec ses dérivées première et seconde bornées. De plus, soit $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de constantes positives de sorte que $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \lambda_j < +\infty$, où les constantes β_j satisfont la condition $\beta_j = c m^{\delta}$ avec $\delta > \frac{5}{2}$. Alors l' "intégrale de chemin de Feynman" :

$$\langle \exp \left[-i \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j V(x_j) \right], F \rangle$$

existe. »⁴⁶⁰

455. Ibid. Page 8 et 9.

456. Ibid. Pages 9 à 11.

457. Ibid. Pages 12 et 13.

458. Ibid. Pages 14 et 15.

459. Ibid. Page 14.

460. Ibid.

Ce résultat vient directement du théorème précédent. En effet, nous avons vu en début de section 1 :

$$\langle \exp [-i \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j V(x_j)], F \rangle = \langle D \exp [-i \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j V(x_j)], \mu \rangle$$

où μ est la mesure de Feynman-Thomas.

Il suffit donc que $D \exp [-i \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j V(x_j)]$ soit borné. Prendre $\lambda_j = e^{-\varepsilon j}$ pour $\varepsilon > 0$ petit est une procédure communément utilisée en théorie de la diffusion.

Mathieu Beau rappelle aussi qu'il a défini l'intégrale de chemin de Feynman avec la condition initiale suivante :

$$x_0 = 0 \quad \text{à} \quad t = 0$$

comme nous l'avons vu.

Modifiant tout simplement cette condition initiale telle que :

$$x(t) = x_k \quad \text{à} \quad t = k$$

pour k symbolisant un entier arbitraire, Mathieu Beau peut alors écrire :

$$F_n^{(MBC)} = \exp \left[\frac{i}{2} \sum_{n=k+1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})^2 \prod_{i=k+1}^{\infty} [dx_i \left(\frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \right)] \right]. \quad (4.38)$$

indiquant:

$$\Psi_k(x_k) = \langle \exp [-i \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j V(x_j)], F_n^{(MBC)} \rangle \quad (4.39)$$

avec:

* Ψ_k jouant le rôle d'une fonction d'onde au temps k .

Alors, il y a une évidente relation de récurrence entre $\Psi_k(x_k)$ et $\Psi_{k+1}(x_{k+1})$ que l'on peut percevoir dans l'expression suivante :

$$\Psi_k(x_k) = \int \exp \left[\frac{i}{2} (x_n - x_{n-1})^2 - iV(x_k) \lambda_k \right] \Psi_{k+1}(x_{k+1}) \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} dx_{k+1} . \quad (4.40)$$

Cette dernière équation est analogue à l'intégration de l'équation de Schrödinger pour un temps discret, dans la direction des temps négatifs, donnant pour solution :

$$\Psi(t) = \exp [i(t-t')H] \Psi(t') = \exp [-i(t-t')H] \Psi(t')$$

avec :

* $t' > t$.

Nous retrouvons la solution de l'équation de Schrödinger vue en section 2.2.4, conformément à un temps discret, considérant la direction des temps positifs :

$$\Psi(t_0 + \varepsilon) = \exp \left[-\frac{iH}{\hbar} \varepsilon \right] \Psi(t_0)$$

avec:

* $(t_0 + \varepsilon) > t_0$

$$* (t_0 + \varepsilon) - (t_0) = \varepsilon.$$

En conclusion :

Mathieu Beau mentionne avec raison que pour trouver une solution de l'équation de Schrödinger dans la direction des temps positifs, il aurait fallu définir l'intégrale de Feynman de $-\infty$ à k au lieu de k à $+\infty$ comme cela a été fait.

Mais cela reste un détail de calcul qui n'a aucune influence sur les résultats et les réflexions qui en découlent.

Il indique aussi que le noyau présent dans l'intégrale (4.40) sous la forme de l'expression suivante :

$$\exp \left[\frac{i}{2} (x_n - x_{n-1})^2 - iV(x_k) \lambda_k \right]$$

définit un opérateur dans l'espace ε^∞ sur R , associé à des fonctions infiniment différentiables dont les dérivées première et seconde sont bornées, spécialement pour V .

Nous pouvons reconnaître dans le noyau identifié par Mathieu Beau un noyau semblable au noyau $K(x', x)$ égalisé par Feynman avec :

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[\frac{m(x'-x)^2}{2\varepsilon^2} - V\left(\frac{x'+x}{2}\right) \right] \right\},$$

comme nous l'avons vu en au chapitre 3.

7.7- Conclusion

De 1951 à nos jours, le travail des mathématiciens dans la recherche d'une méthode rigoureuse pour l'intégrale de chemins s'est focalisé sur des approches variées allant de la théorie de l'intégration à la théorie des graphes en passant par les théories stochastiques et les théories des distributions.

L'année 1976 a été une année charnière avec les travaux de Sergio Albeverio, remarqués par l'ensemble de la communauté des mathématiciens et des physiciens théoriciens.

A partir de ce moment, prend naissance une période de démocratisation allant de 1977 à nos jours, avec une forte activité que l'on voit jaillir dans les années 1980, 1990 et 2000.

Nous remarquons que pratiquement chaque année, 2020 comprise, des articles de Sergio Albeverio et de Sonia Mazzucchi montrent l'élargissement de leur point de vue et l'approfondissement de leur sujet, en associant les intégrales de chemins de Feynman à des théories mathématiques diverses tels que nous pouvons le voir dans les publications suivantes :

- Equation via phase Space Feynman path integrals (2004),
- Feynman path integrals for polynomially growing potentials (2005),

- Feynman path integrals for the time - dependent quartic oscillator (2005),
- Feynman path integrals for time-dependent potentials (2006),
- A survey on mathematical Feynman integrals: construction, asymptotics, applications,
- A unified approach to infinite dimensional integrals of probabilistic and oscillatory type with applications to Feynman path integrals (2018),
- Generalised Feynman path integrals and applications to higher - order heat - type equations (2018),
- A rigorous mathematical construction of Feynman path integrals for the Schrödinger equation with magnetic field (2020).

A propos de l'intégrale de chemins de Feynman, de nos jours, les mathématiciens orientent leurs recherches vers de nouveaux concepts non explorés. En effet, les intégrales de chemins de Feynman irriguent un certain nombre de domaines en mathématiques pures par l'extrapolation de nouveaux points de vue associés à leur contexte.

C'est ce que nous allons voir, entre autre, dans le chapitre 9.

7.8- Références

- ALBAR Borris (2011). Polynôme de Tutte Coloré et Applications. M₂ Mathématiques-Informatique. Université Montpellier 2.
- ALBEVERIO Sergio & HOEGH-KROHN Raphael (1975). Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics I. Oslo University Preprint, Institute of mathematics.
- ALBEVERIO Sergio (1976). Lectures on mathematical theory of Feynman path integrals. Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, Acta Universitatis Wratislaviensis.
- ALBEVERIO Sergio & HOEGH-KROHN Raphael (1976). Mathematical Theory of Feynman Path Integrals – Lecture Notes in Mathematics. Springer.
- BEAU Mathieu & DORIAS Tony (2012). Discrete-Time path Distributions on Hilbert Space. HAL.
- BIJMA Fetsje (1999). Generalised Fresnel distributions. Thesis, University of Groningen.
- BLOCH Spencer & KREIMER Dirk (2010). Feynman amplitudes and Landau singularities for 1-loop graphs. Institut des Hautes Etudes Scientifiques.
- CAMERON R.H. & MARTIN W.T. (1945). Transformation of Wiener integrals under a general class of linear transformations. Transactions of the American Mathematical Society, volume 58, pages 184-219.
- CAMERON R.H. & STORVICK D.A. (1983). A simple definition of the Feynman integral, with applications. Memoirs of the American mathematical Society, N° 288.
- CARTAN Henri (1935). Résumé du mémoire de F. Riesz sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert. Le séminaire de mathématiques 1933-1939. Edition réalisée et annotée par Michèle Audin.
- CARTIER Pierre (1993). L'intégrale de chemins de Feynman : d'une vue intuitive à un cadre rigoureux . Leçons de mathématiques d'aujourd'hui. Volume 1 présenté par Eric Charpentier et Nicolas Nikolski, éditions Cassini, Paris, deuxième édition corrigée, 2003.
- CARTIER Pierre & DEWITT-MORETTE Cécile (1993). Intégration fonctionnelle ; éléments d'axiomatique . Compte-rendu de l'Académie des Sciences de Paris. Série II, pages 733-738.

- CARTIER Pierre & DEWITT-MORETTE Cécile (1993). Status report on an axiomatic basis for functional integration. Cambridge University Press. Pages 78-82.
- CARTIER Pierre & DEWITT-MORETTE Cécile (1995). A new perspective on functional integration. Journal of Mathematical Physics. Volume 36, Appendix A: Functional integration, pages 61- 87.
- CARTIER Pierre & DEWITT-MORETTE Cécile (1995). A new perspective on functional integration. Journal of Mathematical Physics. Volume 36, 101 pages.
- CHATELAIN Vanessa (2011). Contributions à la théorie des matroïdes. Polytope des bases, Orientations et Algorithmes. Thèse de Doctorat en mathématiques, Université Pierre et Marie Curie.
- DEWITT-MORETTE Cécile (1951). On the definition and approximation of Feynman's path integral. Physical Review, volume 81, pages 848-852.
- DEWITT-MORETTE Cécile & LAIDLAW M.G.G. (1971). Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles. Physical Review, volume D3, pages 1375-1378.
- DEWITT-MORETTE Cécile (1972). Feynman's path integrals: Definition without limiting procedure . Communications in Mathematical Physics, vol. 28, pages 47-67.
- DEWITT-MORETTE Cécile & NELSON B.L. & MAHESHWARI A. (1979). Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics. Physics Reports, volume 50, pages 266-372.
- DEWITT-MORETTE Cécile & ELWORTHY K.D. & NELSON B.L. & SAMMELMAN G.S. (1980). A stochastic scheme for constructing solutions of the Schrödinger equation. Institut Henri Poincaré, A32, pages 327-341.
- DEWITT-MORETTE Cécile & NELSON B.L. & ZHANG T.R.(1983). Caustic problems in quantum mechanics with applications to scattering theory. Physical Review, volume D28, pages 2526-2546.
- DEWITT-MORETTE Cécile & CHOQUET-BRUHAT Yvonne (1989). Supplement to Analysis, Manifolds and Physics. Armadillo preprint, Center for relativity, University of Texas, Austin TX 78712.
- DEWITT-MORETTE Cécile (1990). Quantum mechanics in curved spacetimes ; stochastic processes on frame bundles. Pages 49-87 in *Quantum Mechanics in Curved Space-Time*. Editions J. Audretsch and V. de Sabbata. Plenum Press, New York.
- ELWORTHY K.D. (1982). Stochastic Differential Equations on Manifolds. Cambridge University Press, Cambridge U.K.
- FEYNMAN Richard (November 1, 1950). Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. Physical Review. Volume 80, Number 3, Page 440.
- HENRI PAUL de SAINT GERVAIS : Collectif de mathématiciens. Homologie ; analysis-situs.math.cnrs.fr.
- HIDA Takeyuki (2005). Takeyuki Hida's home. Internet.
- ITO Kiyoshi Ito (1967). Generalized uniform complex measure in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman path integral. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University California Press, Berkeley. Volume II, part 1, pages 145-161.
- KREIMER Dirk & YEATS Karen (2011). Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids. Physics Letters B, volume 698, pages 443 à 450.
- LAPORTA S. (2000). High-precision calculation of multi-loop Feynman integrals by difference equations. International Journal of Modern Physics A, volume 15, pages 5087-5159.
- LEE R.N. (2010). Space-time dimensionality D as complex variable: calculating multiloop integrals using dimensional recurrence relation and analytical properties with respect to D. Nuclear Physics B, volume 830, pages 474-492.
- NELSON E. (1964). Feynman integrals and the Schrödinger equation. Journal of

Mathematical Physics, vol 5, pages 332-343.

- NELSON B.L. & SHEEKS B. (1981). Fredholm determinants associated with Wiener integrals. *Journal of Mathematical Physics*, volume 22, pages 2132-2136.
- OXLEY J.G. (1992). *Matroid Theory*. Oxford.
- PATTERSON Eric (2010). On the singular structure of graph hypersurfaces. *Communications in Number Theory and Physics*. Volume 4, Number 4, pages 459-708.
- POINCARÉ Henri (1908). *Science et méthode*. Flammarion – Bibliothèque de Philosophie Scientifique. Page 137.
- SMIRNOV A.V. (2007). On the reduction of Feynman integrals to master integrals. *Proceedings of ACAT*.
- STREIT L. & HIDA T. (1993). Generalized Brownian functionals and the Feynman integral. *Stochastic Processes and their Applications*. Volume 16. Pages 55-69.
- STREIT L. & HIDA T. (1993). *White noise. An Infinite Dimensional Calculus*. Kluwer Academic Publishers.
- STREIT L. & SILVA José L. (2002). *Feynman Integrals and White Noise Analysis*. CCM-Centro de Ciências Matemáticas, Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Portugal.
- TAILLET R. (2008). *Dictionnaire de physique*. De Boeck.
- TARASOV O.V. (1996). Connexion between Feynman integrals having different values of the space-time dimension. *Physical Review D*, volume 54, pages 6479-6490.
- THOMAS Erik G.F. (1999). *Path Distributions on Sequence Spaces*. Mathematics Institute, University of Groningen.
- TRUMAN A. (1979). A polynomial path formulation of the Feynman path integral. *Lecture Notes in Physics*, vol. 106, pages 73-102.
- WIENER Norbert (1923). *Differential Space*. MIT Press, Cambridge, 1964. Selected papers of Norbert Wiener. Page 55.
- WIKIPEDIA (17-12-2017). Pierre Cartier.
- WIKIPEDIA (3.03.2018). Ludwig Streit.
- WIKIPEDIA (3.03.2018). Transformation de Fourier.

Chapitre 8

Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs

Résumé

8.1- Introduction

8.2- L'intégrale de chemins et la recherche fondamentale en Théorie Quantique des Champs

8.2.1- Une nouvelle façon plus efficace de faire de la physique

8.2.2- Le paradigme de l'Electrodynamique Quantique

a) La critique des concepts d'espace absolu et de simultanéité du temps

b) De l'Electrodynamique Quantique à la théorie quantique des champs

c) La puissance de la pensée chez Feynman

8.2.3- La chromodynamique quantique

a) Le modèle standard des particules élémentaires en chromodynamique quantique

b) Condition d'invariance de jauge locale en chromodynamique quantique

c) La chromodynamique quantique étudiée à partir des diagrammes de Feynman : Travaux des physiciens

8.2.4- La théorie des interactions faibles

a) Le modèle standard des particules élémentaires en Radioactivité

b) Le groupe de symétrisation $SU(2)$ et l'interaction faible

c) L'interaction faible étudiée à partir des diagrammes de Feynman : Travaux des physiciens

8.2.5- Le boson de Higgs

a) Brisure spontanée de symétrie : La courbe $V(\Phi)=f(|\Phi|)$ en "chapeau mexicain"

b) Recherche théorique du boson de Higgs dans un contexte de brisure spontanée de symétrie associé à une symétrie de jauge globale

c) Recherche théorique du boson de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie relative au modèle standard des interactions faibles associé à une symétrie de jauge locale (mécanisme de Higgs)

d) Principe de recherche expérimentale du boson de Higgs au LHC : les diagrammes de Feynman

e) Publications sur le boson de Higgs se couplant aux particules massives du modèle standard et portant sur l'utilisation des diagrammes de Feynman, à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon

8.3- Références

Résumé

Au chapitre 6 nous avons largement commenté les aspects calculatoires de l'intégrale de chemins conduisant à la quantification du champ électromagnétique. Nous avons aussi mentionné combien Feynman, en précurseur visionnaire, avait trouvé intéressant d'extrapoler les règles et les calculs qu'il a inventés pour les appliquer à d'autres champs.

Ce chapitre 8 est donc dédié à la recherche et à l'étude de la pérennité de l'intégrale de chemins à travers la théorie quantique des champs.

Aussi nous allons montrer comment l'intégrale de chemins, à travers les diagrammes de Feynman, va être capitale dans la compréhension du rôle joué par les particules subatomiques intervenant dans les interactions fortes, les interactions faibles et celle associée au mécanisme de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie.

8.1- Introduction

Dans ce chapitre 8, via les Annexes 25 à 30, nous allons montrer l'apport de Feynman dans la recherche en physique des particules subatomiques à partir de ses diagrammes provenant du concept de l'intégrale de chemins.

Nous verrons que la recherche contemporaine dans ce domaine conduisant à ce que l'on appelle la théorie quantique des champs, généralise le paradigme relevant des travaux de Feynman en Electrodynamique Quantique ; et ce sont bien ces travaux du physicien américain qui ont unifié la physique quantique et la relativité restreinte par la notion de trajectoire associée à l'espace-temps.

De fait, nous soulignerons que si les avancées dans la connaissance de la quantification du champ électromagnétique ont conduit au prix Nobel de physique (1965) que ce sont partagés Julian Schwinger (1918-1994), Sin-Itiro Tomonaga (1906-1979) et Richard Feynman (1918-1988), seuls les méthodes de travail de Feynman dans l'accomplissement de ses travaux sont actuellement largement utilisées en physique théorique et dans les laboratoires.

En effet, la plupart des recherches en physique fondamentale concernant les interactions entre les particules subatomiques s'effectue « à *grands coups* » de diagrammes de Feynman, ainsi que nous allons le constater en analysant diverses publications associées aux interactions fortes, faibles, électrofaibles, et celles inhérentes au boson de Higgs.

Aussi, en section 8.2.1, afin de montrer l'impact des idées de Feynman dans la communauté scientifique, je vais dans un premier temps lister le nom des « *prix Nobel* » de physique à partir de la moitié du vingtième siècle ; ceci permettra de vérifier l'influence qu'a pu avoir le physicien américain sur ces derniers.

En section 8.2.2, je vais mettre en exergue ce que le paradigme de l'Electrodynamique Quantique apporte de nouveau dans la façon d'entreprendre des recherches en physique fondamentale.

Puis, afin de comprendre le mieux possible la pérennité de l'intégrale de chemins à travers la théorie quantique des champs, je vais bâtir selon un même canevas de travail mon argumentaire (sections 8.2.3 à 8.2.5) concernant les interactions que je vais traiter, en détaillant avec précision au début, le rôle joué par les particules subatomiques intervenant dans ces interactions (respectivement fortes, faibles et celle associée au mécanisme de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie).

Cette approche m'a paru indispensable pour appréhender avec clarté l'ensemble des documents d'archives que j'ai consulté. Ces documents d'archives sont constitués de publications, de thèses de doctorat, de travaux de « prix Nobel » et de cours contemporains prouvant que l'ensemble des physiciens théoriciens jeunes et moins jeunes ont étudié et étudient toujours la physique subatomique en se référant aux méthodes de Richard Feynman.

Ainsi, en section 8.2.3, via l'Annexe 25 dédiée aux principes et aux détails de calcul, je commence par présenter et décrire le modèle standard des particules élémentaires liées aux interactions fortes. Ceci avant de me pencher sur la partie calculatoire de l'intégrale de chemins associée aux diagrammes dits de Feynman dans ce domaine de la physique que l'on nomme *chromodynamique quantique*.

Dans ma recherche, la condition d'invariance de jauge locale en chromodynamique quantique est largement abordée afin de montrer, entre autres, que la quantification du champ électromagnétique à travers la partie calculatoire de l'intégrale de chemin, fondée sur le groupe de jauge $U(1)$, reste valable pour la quantification du champ de gluons fondé sur le groupe de jauge $SU(3)$.

L'ensemble des documents d'archives consulté et analysé montrent à quel point l'influence de Feynman reste forte parmi la communauté des physiciens.

En section 8.2.4, via les Annexes 26 et 27, toujours selon le même canevas de travail que précédemment, je commence par décrire les particules élémentaires associées aux interactions faibles et électrofaibles.

J'aborde aussi la notion d'invariance de jauge en vigueur pour ce type d'interaction, afin de montrer dans le modèle standard actuel de la physique des particules, que ce choix de jauge permet la notion d'invariance à travers tout référentiel. Il est en effet assez intéressant de constater qu'à travers les méthodes de Feynman, la partie calculatoire de l'intégrale de chemins est en adéquation avec cette fixation de jauge.

De même que dans la section précédente, qui pourtant concerne un domaine d'interaction totalement différent, je montre à travers les documents examinés combien l'influence des idées de Feynman reste très forte.

En section 8.2.5, via les Annexes 28, 29 et 30, avant de montrer l'influence de Feynman, j'ai trouvé judicieux de commencer par décrire le « *mécanisme de Higgs* ». En effet, cette construction intellectuelle abstraite prédit une brisure de symétrie conduisant à l'existence de la particule scalaire appelée « *boson de Higgs* », qui interagirait, selon les physiciens théoriciens Peter Higgs, François Englert et Robert Brout (1928 – 2011), avec toutes les particules en vue de leur communiquer la masse inertielle.

J'ai aussi détaillé les calculs concernant la recherche théorique de ce boson dans le cadre d'une brisure spontanée de symétrie (relative au modèle standard des interactions faibles) évoquée ci-

avant. En associant la brisure de symétrie dans le contexte d'une symétrie de jauge locale nous verrons apparaître, dans les équations théoriques, le champ scalaire dit de Higgs d'où va émerger la particule scalaire recherchée, médiatrice de l'interaction avec toutes les particules. Puis à travers les travaux de Peter Higgs, de François Englert (prix Nobel de physique pour la découverte du boson dit de Higgs), et les publications relevant des recherches expérimentales sur l'existence de ce boson au LHC (Large Hadron Collider), je montre que les idées de Feynman concernant la partie calculatoire de l'intégrale de chemins associée aux diagrammes, ont été fondamentales.

Enfin, je n'oublie pas d'indiquer à travers les cours sur la recherche théorique de l'existence du boson de Higgs, que j'ai suivi à l'Université Claude Bernard Lyon1 (UCBL) durant l'année scolaire 2012/2013, combien il m'a été profitable d'utiliser l'intégrale de chemins à travers les diagrammes de Feynman.

Qui plus est, ces cours m'ont permis d'être en contact avec les physiciens de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon (IPNL) et de constater que l'observation du mécanisme de production du boson de Higgs, résultant en partie des hypothèses théoriques effectuées sur ses possibilités de couplage avec différents fermions proportionnellement à leur masse, est grandement facilité par la clarté des raisonnements que peuvent effectuer les théoriciens et les expérimentateurs en utilisant les diagrammes de Feynman.

Rappelons que l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon est une unité de recherche spécialisée dans la recherche sur la physique des particules et travaille sous plusieurs tutelles :

- l'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules (IN2P3),
- l'Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL).

Je citerai aussi un ensemble assez complet de publications et de thèses assez récentes de l'IPNL, se rapportant aux interactions entre le boson de Higgs et les particules massives du modèle standard, reposant sur l'utilisation des diagrammes de Feynman issus du concept de l'intégrale de chemins.

Les publications fondamentales que j'ai consultées sont les suivantes :

- FEYNMAN Richard (1985). *The Strange Theory of Light and Matter*. Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : *Lumière et matière. Une étrange histoire*. Points-Sciences. Edition novembre 1992.

- BARON Rémi (2009). *Chromodynamique quantique sur réseau et propriétés du nucléon*. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud XI.

- MARQUET Cyrille (2006). *Chromodynamique Quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de Hadrons*. Thèse de doctorat. Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie et Service de physique théorique – CEA / Saclay.

- ANDRIEUX Vincent (2014). *Polarisation des quarks et des gluons dans le nucléon*. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud.

- KLASSEN Michael (2009). *Mécanique Quantique relativiste. Théories de jauge*. DUNOD.

- GROSS David (2005). *The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD*. Nobel Lecture. *Reviews of Modern Physics*. Volume 77.

- IIHE : Institut Interuniversitaire des Hautes Energies (Années 2000). *Bases de la chromodynamique quantique*. Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB).

- FLORENT Alice (2014). *Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS*. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud. Laboratoire Leprince – Ringuet.

- MILLET Thomas (2007). *Recherche de gluinos dans la topologie à jets de quarks b et énergie transverse manquante avec le détecteur D0 au TeVatron*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon-I.

- CHAPON Arnaud (2011). Mesure des processus de double désintégration bêta du ^{100}Mo vers l'état excité 0_1^+ du ^{100}Ru dans l'expérience NEMO3. Thèse de doctorat. Université de Caen Basse-Normandie.
 - RUBBIA Carlo (1984). Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0 . Nobel Lecture.
 - HIGGS Peter (1964). Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Physics Letters*. 12: 132-133
 - HIGGS Peter (1964). Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*. 13: 508-509
 - HIGGS Peter (1966). Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Physical Review*. 145: 1156- 1163.
 - HIGGS Peter (2013). Evading the goldstone theorem. Nobel Lecture.
 - LAMBERT Michel (2012-2013). Théorie Quantique des Champs. Cours suivi à Université Claude Bernard Lyon I (UCBL) dans le cadre de l'Université Ouvert.
 - LAMBERT Michel (2012). Symétries, Champs de jauge, Interactions électrofaibles. Université Claude Bernard Lyon1 (UCBL). Institut de Physique Nucléaire de Lyon.
 - ENGLERT François (2013). The BEH Mechanism and its Scalar Boson. Nobel Lecture.
 - GRENIER Gérald (2010). Search for events with leptonic jets and missing transverse energy in $p\bar{p}$ collisions and $\sqrt{s} = 1,96$ TeV. *Physical Review Letters*.
 - CHANON Nicolas (2018). Le couplage du boson de Higgs au quark top est observé. Institut de Physique Nucléaire de Lyon.
- Article de CMS : Observation of $t\bar{t}H$ Production. *Physical Review Letter* 120, 231801 – Published 4 June 2018
- Communiqué de Presse du CERN: *Le boson de Higgs révèle son affinité pour le quark top*. CERN.
- Di CIACCIO Lucia, HAMEL de MONCHEAULT Gautier (2012). Découverte du boson de Higgs au LHC. Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 31, octobre 2012.
 - Di CIACCIO Lucia, HAMEL de MONCHEAULT Gautier (2015). Derniers résultats sur le boson de Higgs au LHC. Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 46, octobre-novembre 2015.

8.2- L'intégrale de chemins et la recherche fondamentale en Théorie Quantique des Champs

Souvenons nous de ce que nous avons écrit en sous-section 5.2.4.d du chapitre 5, à savoir la prise de conscience par Feynman qu'il possédait une méthode révolutionnaire dans la manière d'exprimer les interactions entre les particules associées à un contexte de particules

subatomiques différent de celui de l'Electrodynamique Quantique. De là, il n'y a qu'un pas qu'il franchit allègrement et dont nous avons parlé au paragraphe 6.5 du chapitre 6.

Rappelons que la théorie de l'Electrodynamique Quantique s'intéresse à l'évolution couplée des champs électromagnétiques et des charges électriques, d'un point de vue quantique. Et cette théorie, telle que l'a définie Feynman à partir de l'intégrale de chemins conduisant à ses diagrammes, s'est avérée d'une grande efficacité pour ce qui concerne la théorie quantique des champs.

Cette théorie quantique des champs décrit de manière quantique l'évolution couplée des champs tels que ceux associés au boson de Higgs, aux interactions fortes, aux interactions faibles et des fermions correspondants.

Aussi, le concept d'intégrale de chemins conduit indirectement à de nouveaux paradigmes, c'est-à-dire à une nouvelle vision du monde qui nous entoure, en interprétant de manière différente les phénomènes qui s'offrent à nous. En outre, ces nouveaux paradigmes vont radicalement modifier notre façon de faire de la physique car les diagrammes de Feynman issus de la partie calculatoire de l'intégrale de chemins vont être cohérents avec le principe de relativité qui interdit que puisse s'effectuer des actions instantanées à distance.

Ce sont ces nouveaux paradigmes, entre autres, que nous allons traiter dans les sections qui suivent.

8.2.1- Une nouvelle façon plus efficace de faire de la physique

Quelques réflexions s'imposent si l'on veut bien comprendre la valeur et la portée objectives des intégrales de chemins à travers l'histoire de la physique.

Rappelons-nous que jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, la physique de Newton (1642 – 1727) insérait le monde dans l'espace et le temps conduisant ainsi Kant (1724 – 1804) à une vision philosophiques qui considérait la physique comme impossible si à la fois l'espace et le temps, comme formes *a priori*, n'en étaient pas les fondements transcendants, c'est-à-dire une condition *a priori* de l'expérience (E. Kant, 1781, Critique de la raison pure).

De fait, cette physique, celle de Newton, comme celle d'Ampères (1775 – 1836), comme celle de Faraday (1791 – 1867), imposait un réalisme très proche du naturel suggéré par l'expérience naïve de l'homme face aux phénomènes de la nature.

L'approche empiriste du réel consistait à privilégier l'observation des faits, du concret, comme période de départ de la connaissance.

Aussi, commençait - on par observer attentivement la monde pour le connaître, plutôt que d'élaborer des constructions intellectuelles abstraites comme ce sera le cas plus tard.

Ainsi, de l'observation va naître l'hypothèse qui va guider l'expérimentation qui va avoir pour but de répondre à un problème posé par le scientifique. Et de ces expériences validant les hypothèses de départ, vont naître les équations théoriques modélisant les phénomènes observés devenant ainsi prédictibles dans tel ou tel contexte arbitraire.

Au début du 20^{ème} siècle, avec les théories de la relativité et des quanta, Einstein (1879 – 1955) donnait un bel exemple du caractère fondamental du développement moderne d'une théorie . Les confins d'un Univers tellement grand et ceux de l'infiniment petit ne nous étant pas

accessibles, les hypothèses de départ vont devenir de plus en plus abstraites et de plus en plus éloignées de l'expérience.

Et comme disait Einstein en 1952 dans son livre « *Conceptions scientifiques, morales et sociales* » :

« *Mais, en revanche, on se rapproche davantage du but scientifique par excellence, qui est d'embrasser par déduction logique, au moyen d'un minimum d'hypothèses ou d'axiomes, un maximum d'expériences.* »

Nous verrons plus loin, à travers la recherche du boson de Higgs associée aux diagrammes de Feynman via le mode calculatoire de l'intégrale de chemins, combien cette citation d'Einstein va se réaliser non seulement au niveau des théoriciens mais aussi dans l'esprit des expérimentateurs eux-mêmes.

Déjà en 1930 en préface de sa publication « *The Principles of Quantum Mechanics* », Dirac (1902 – 1984) émet une assertion équivalente à celle d'Einstein en insistant sur le fait que l'analyse mathématique va désormais constituer l'instrument idéal pour étudier les concepts abstraits de la nature. En effet, ce sont bien les mathématiques qui vont dorénavant guider le théoricien de par les raisonnements abstraits, logiques et déductifs qu'elles permettent ; l'expérience ne conduisant jamais aux régions de la plus haute abstraction.

Déterminer la probabilité d'interactions entre les particules subatomiques à l'aide des diagrammes de Feynman issus du mode calculatoire de l'intégrale de chemins, illustre parfaitement les assertions précédentes des deux grands physiciens théoriciens que sont Einstein et Dirac.

Et pour évaluer l'importance de l'outil théorique de Feynman parmi les physiciens théoriciens qui ont rendu de grands services à l'humanité par leurs travaux considérés comme exceptionnels, il m'a paru pertinent de rechercher exhaustivement le nombre de « *Prix Nobel* » qui l'ont utilisé. J'ai donc listé sur *internet* le nom des physiciens lauréats du prix Nobel de physique à partir de la moitié du 20^{ème} siècle, période associée à la diffusion des idées de Richard Feynman dans sa nouvelle manière de faire de la physique.

Puis, sur le site de la fondation Nobel, j'ai cherché à examiner l'influence qu'a pu avoir Feynman dans leur manière de travailler, c'est-à-dire dans l'utilisation qu'ils ont pu faire de l'intégrale de chemins à travers les diagrammes et leurs propagateurs.

Une lecture approfondie de leur Conférence Nobel (Nobel Lecture) résumant l'ensemble de leurs travaux m'a été bénéfique ; cette Conférence Nobel a lieu lors de la remise de leur prix le 10 décembre à Stockholm devant le roi et la reine de Suède.

Parmi ces travaux, j'ai retenu et détaillé dans les sections 8.2.3 à 8.2.5 ceux qui concernent les interactions ayant trait :

- à la chromodynamique quantique (les interactions fortes),
- à la théorie des interactions faibles,
- aux interactions du boson de Higgs avec toutes les particules en vue de leur communiquer leur masse inertielle.

Mon choix a été guidé d'une part parce qu'ils sont d'une extrême importance dans la compréhension de l'ensemble des phénomènes physiques qui nous entourent et d'autre part parce qu'ils témoignent largement de l'importance des idées de Feynman quant aux découvertes fondamentales qu'ils ont engendré.

La liste exhaustive des « *Prix Nobel* » de physique et leur date d'obtention, ayant d'une manière ou d'une autre été influencés par les idées de Feynman sont les suivants :

- Rudolf Mössbauer (1961), pour ses recherches sur l'absorption résonnante de rayons gamma et sa découverte corrélative de l'effet qui porte son nom,
- Murray Gell-Mann (1969), pour ses contributions et découvertes sur la classification des particules élémentaires et leurs interactions,
- Burton Richter (1976) et Samuel Chao Chung Ting (1976), pour leurs travaux d'avant-garde dans la découverte d'une particule élémentaire lourde d'une nouvelle espèce,
- Sheldon Lee Glashow (1979), Abdus Salam (1979), Steven Weinberg (1979) pour leurs contributions à la théorie unifiée des interactions faibles et électromagnétiques entre particules élémentaires, comprenant, entre autres, la prédiction du courant neutre faible,
- James Watson Cronin (1980), Val Logsdon Fitch (1980), pour leur découverte de violations de principes fondamentaux de symétrie dans la désintégration de mésons K neutres,
- Kenneth G. Wilson (1982), pour sa théorie des phénomènes critiques en liaison avec les transitions de phase,
- Carlo Rubbia (1984), pour sa contribution décisive au grand projet qui a conduit à la découverte des particules de champ W et Z , vecteurs de l'interaction faible,
- Melvin Schwartz (1988), Jack Steinberger (1988) pour la méthode du faisceau de neutrinos et la démonstration de la structure des leptons par la découverte du neutrino muon,
- Jerome I. Friedman (1990), Henry W. Kendall (1990) pour leurs recherches novatrices sur la diffusion profondément inélastique des électrons sur les protons et les neutrons liés, qui ont été d'importance essentielle pour le développement du modèle des quarks en physique des particules,
- Martin lewis Perl (1995), pour la découverte du lepton tau,
- Gérard 't Hooft (1999), Martinus Veltman (1999) pour l'élucidation de la structure quantique des interactions électrofaibles en physique,
- David J. Gross (2004), H. David Politzer (2004), Frank Wilczek (2004) pour leur découverte de la liberté asymptotique en théorie des interactions fortes,
- François Englert (2013), Peter Higgs (2013) pour la découverte théorique d'un mécanisme contribuant à notre compréhension de l'origine de la masse des particules subatomiques, et qui a été confirmée en juillet 2012 grâce à la découverte de la particule fondamentale prédite (le boson de Higgs) par les expériences ATLAS et CMS menées au LHC (Large Hadron Collider) du CERN.

Parmi ces travaux récompensés par un prix Nobel et dont les lauréats ont été influencés par les idées de Feynman concernant la partie calculatoire de l'intégrale de chemins conduisant aux fameux diagrammes, je vais particulièrement examiner ceux des physiciens théoriciens associés aux interactions fortes, faibles et celles concernant le boson de Higgs (pour les raisons indiquées plus haut), c'est-à-dire :

- David J. Gross (2004), H. David Politzer (2004), Frank Wilczek (2004) concernant les interactions fortes (section 8.2.4),
- Sheldon Lee Glashow (1979), Abdus Salam (1979), Steven Weinberg (1979) et Carlo Rubbia (1984) relativement aux interactions faibles (section 8.2.5),
- François Englert (2013), Peter Higgs (2013) dont les travaux sont à l'origine du boson dit de Higgs (section 8.2.6).

Je tiens particulièrement à insister sur le fait que si l'idée du boson de Higgs provient d'une construction intellectuelle abstraite, cette réflexion a donné lieu à de multiples échanges entre théoriciens et expérimentateurs en vue de les repérer et d'affirmer, une fois détectés, que les bosons en question sont bien ceux recherchés.

Et ces échanges multiples entre physiciens théoriciens et physiciens expérimentateurs ont pu avoir lieu grâce aux nombreuses possibilités de combinaisons théoriques d'interactions pouvant concrètement s'effectuer entre particules, par l'agencement à souhait des trois éléments de base des diagrammes de Feynman associés aux trajectoires des fermions et des bosons liés par leur vertex.

Ainsi, en manipulant l'outil inventé par Feynman, théoriciens et expérimentateurs ont pu travailler ensemble pour parvenir au succès que l'on connaît et dont nous parlerons en section 8.2.6.

8.2.2- Le paradigme de l'Electrodynamique Quantique

8.2.2.a) La critique des concepts d'espace absolu et de simultanéité du temps

Les travaux de Feynman en Electrodynamique quantique ont pour fondement l'unification de la physique quantique et de la théorie de la relativité restreinte d'Einstein. Nous trouvons donc intéressant de rappeler les principes de relativité du temps et de l'espace qui s'y rapporte.

Les concepts d'espace absolu et de simultanéité des événements ont été érigés en dogme jusqu'aux années 1900, date à laquelle Albert Einstein (1879-1955) publia sa théorie de la relativité restreinte (1905). En effet, par une analyse subtile des mesures de distance et de durée, la relativité restreinte établit entre les notions d'espace et de temps une liaison inattendue, dont les célèbres formules de la transformation de Lorentz sont l'expression mathématique.

Einstein ayant donc remis en question les concepts d'espace absolu et de simultanéité des événements, interrogeons-nous sur la manière d'appréhender le temps.

Dans notre vie de tous les jours, le temps et la durée sont des notions bien définies. Ils dépendent de notre mémoire lorsqu'ils évoquent un passé fortement influencé par le souvenir de perceptions sensorielles d'événements. Cette conscience d'une suite linéaire dans les événements de notre vécu constitue la notion subjective du temps.

Pourtant, le temps est une notion scientifique, et sans conteste, le temps scientifique est bien le temps que donnent les horloges qui rendent objectives les concepts de temps et de durée, permettant ainsi de synchroniser les individus vivant en collectivité.

Un phénomène physique quelconque peut servir d'horloge pourvu qu'il soit répétitif. Par exemple le sablier fournit une unité de temps courte, constante par hypothèse, constituant ainsi un accord tacite d'observateurs prêtant attention à ce phénomène. Nos horloges perfectionnées, donnent l'heure selon le même principe. Elles enregistrent les répétitions d'un phénomène fondamental, périodique, considéré constant par hypothèse : battement d'un pendule, d'un ressort, vibrations d'un cristal piézoélectrique de quartz.

Ainsi, la création de ce temps objectif et scientifique rectifie les impressions trompeuses d'un temps affectif et subjectif.

Dans l'idée de l'hypothèse du temps absolu, l'origine des temps est identique et tous les observateurs occupant n'importe quelle position peuvent affirmer simultanément que leur horloge marque le même instant t .

On peut donc qualifier ce temps d'absolu puisqu'il est indépendant du système de référence spatial dans lequel on le mesure. Et ce temps absolu est le temps donné par toutes les horloges présentes sur une photographie prise à un instant donné et pour laquelle la lumière émise par chaque horloge se propage à une vitesse infinie.

De fait, en mécanique classique, on parle d'un temps commun unifié qui s'écoule de la même manière pour tous les observateurs, et le problème de la synchronisation des horloges ne se pose même pas : le signal lumineux, qui permet de l'obtenir, parvient partout dans l'univers dès l'instant même où il a été émis.

Ainsi un événement A , au point de coordonnées x_1, y_1, z_1 de l'univers, qui se produit au même instant qu'un événement B , en un autre point de coordonnées x_2, y_2, z_2 de l'univers, possède un sens physique. En effet, la notion d'instantanéité de perception de n'importe quel événement se produisant dans n'importe quelle partie de l'univers est assimilée à un concept de temps absolu.

Mais à quelles conditions peut-on parler de temps scientifique absolu, de simultanéité absolue de deux événements se produisant dans l'univers observable ? On aimerait le temps absolu, mais cette éventualité consisterait à fermer les yeux, à pratiquer la politique de l'autruche, tant est déplaisante pour le philosophe comme pour le savant ses exigences.

En effet, le temps mesurable et mesuré ne saurait être absolu que dans un univers où tous les observateurs seraient instantanément informés des événements. Or, comme nous venons de le voir, cela impose la possibilité de propagation instantanée, donc de vitesse infinie : synchroniser des horloges à partir d'une horloge-maître mesurant le temps sidéral, suppose l'émission d'un signal lumineux se propageant instantanément.

Entre 1676, qui est le moment où l'astronome Römer (1644-1710) parvient à comprendre que la lumière a une vitesse finie (en observant la chronologie des mouvements des satellites de Jupiter) et 1905, qui représente la fin de l'espace absolu (associée à la théorie de la relativité restreinte), bons nombres d'astronomes, de mathématiciens, de physiciens et de philosophes, ont pu se sentir frustrés.

Comment imaginer rationnellement un espace absolu associé à des événements non synchronisables en tout point de l'univers, du fait de la finitude de la vitesse de la lumière. En effet, cela signifie une « relativité » du temps dans un concept d'espace absolu associé à un temps absolu !?

Il fallut donc se mettre à réfléchir, « faire feu de tout bois » c'est-à-dire, prendre, analyser, décortiquer, toute l'actualité scientifique et philosophique du moment dans un contexte, dans un autre contexte, en usant d'audace, d'imagination, de connaissance, de passion. C'est ce que fit Einstein, à l'âge de vingt ans, vers 1900.

Et dans un monde où tout est en mouvement par rapport à la sphère des fixes, l'explication classique du train en mouvement uniforme par rapport au quai a pour mérite d'être simple, de faire comprendre la notion de simultanéité relative et il ne faudrait pas conclure naïvement que la relativité au sens restreint concerne surtout les chemins de fer ! Pour deux astres quelconques O et O' de l'univers, deux événements simultanés pour O ne le seront pas pour O' .

Montrons que dans un monde où tout est en mouvement par rapport à la sphère des fixes, la notion de simultanéité n'est pas absolue et qu'elle dépend de l'observateur. Pour cela, on

suppose de manière réaliste un univers dans lequel une transmission instantanée ne saurait exister et dans lequel la lumière serait l'agent d'information le plus rapide.

Soit un événement A associé à l'émission par une lampe A d'un bref signal lumineux. Soit un événement B associé également à l'émission par une lampe B d'un bref signal lumineux.

Les lampes A et B , au bord d'une ligne de chemin de fer, sont allumées par le passage d'un train : A s'allume quand la tête du train arrive en A , tandis que B s'allume quand la queue du train passe en B .

Un observateur O se place au milieu de AB et regarde à la fois les deux lampes, l'une située en A , l'autre située en B . S'il aperçoit ensemble les éclairs A et B , il les déclare simultanés.

Ainsi, l'observateur O situé au bord de la voie, aperçoit simultanément les deux éclairs. Il en déduit naturellement que la longueur du train mobile est égale à la distance séparant les deux lampes, c'est-à-dire à la distance AB .

Considérons maintenant un observateur O' situé au milieu du train regardant, lui aussi, les deux lampes A et B . Le train emporte O' à la rencontre du rayon issu de A tandis qu'il s'éloigne de la lumière issue de B . L'observateur O' voit d'abord l'éclair A puis l'éclair B . Pour lui, A précède B et donc les deux événements qui sont simultanés pour O ne le sont pas pour O' ⁴⁸³.

Ainsi, dans un univers privé de vitesses infinies, la simultanéité n'est pas absolue, donc le temps n'est pas absolu. Des observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres attribueront des durées différentes à un même phénomène. Le temps dans cet univers a un caractère relatif.

Terminons cette notion d'interdiction d'actions instantanées à distance en mentionnant les écrits d'Isaac Newton (1642-1727)⁴⁸⁴.

Ces écrits montrent que Newton lui-même se posait déjà la question de comprendre comment un corps de masse M à l'origine pouvait savoir qu'un autre corps de masse m se trouvait en un point P afin d'exercer sur lui la fameuse force F issue de sa théorie de la gravitation.

La réponse est donnée aujourd'hui par l'émission et la réception des particules élémentaires que sont les bosons, véritables vecteurs de transmission des forces ou interactions entre deux corps situés à une certaine distance l'un de l'autre.

Dans le cas des corps massiques, il s'agirait des gravitons, véritable quantum de la force gravitationnelle, faisant office de messagers de la gravité ou de support de la force s'exerçant entre les masses.

Dans le cas de l'électrodynamique quantique, où il est question d'interaction entre des particules dotées de charges électrique, il s'agit d'un échange de photons, responsables des forces électriques et magnétiques.

Dans le cas de la liaison entre quarks permettant l'existence des protons et des neutrons à l'intérieur du noyau de l'atome, les gluons sont les bosons qui sont responsables de l'interaction forte, c'est-à-dire de la force qui unit les quarks les uns aux autres dans les protons et les neutrons.

Dans le cas de la désintégration radioactive de particules subatomiques, les bosons W^+ , W^- , Z^0 sont responsables de l'interaction faible c'est-à-dire de la force nucléaire faible affectant toutes les catégories de fermions connus.

En effet, une interaction entre deux corpuscules, que ce soit deux masses, deux électrons, deux quarks, etc... ne peut se faire de manière instantanée. L'interaction elle-même doit se propager

483. A. Einstein (1905). « *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement. De la relativité des longueurs et des temps* ». Annalen der Physik. Traduction de Maurice Solovine. Page 7.

484. I. Newton (troisième édition 1726). « *Principia* ». Traduction par la Marquise du Châtelet. Dunod. Avant-propos de Monsieur Newton, page XX.

d'un corpuscule à l'autre avec une vitesse finie inférieure ou égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Et le caractère quantique de l'interaction entend que des particules, que nous appelons "*bosons*", vont se propager entre les deux corpuscules, émis par l'un et absorbé par l'autre.

Et ce sont bien ces interactions qui font toute la richesse du monde qui nous entoure.

8.2.2.b) De l'Electrodynamique Quantique à la Théorie Quantique des Champs

Dans le monde réel, tout est assimilable à un "*champ*", et nous baignons au plus profond de nous même dans des champs aux multiples caractéristiques, portant l'énergie de tout ce qui est présent dans l'univers.

Les champs quantiques remplissent donc tout l'espace et sont quantifiés par des fonctions d'onde telles que nous avons pu les définir au chapitre 5, c'est-à-dire qu'elles représentent la probabilité de trouver une particule au voisinage d'une position r à l'instant t , proportionnelle au carré de leur module, c'est-à-dire $|\Psi(r,t)|^2$.

Ces fonctions d'onde représentent l'état quantique du champ et donnent à toute particule associée au champ considéré les propriétés d'interférence typique d'une onde en évitant d'évoquer la délicate dualité onde-particule.

Le fait de conjuguer de manière subtile des raisonnements probabilistes, des expériences réelles et des expériences de pensée, favorise une conception philosophique de la nature permettant de poser l'hypothèse d'une nature intelligible éloignée de toute intuition.

La réalité de la nature qui impose peu à peu une vue globale de la science, favorise une argumentation philosophique combinée à une analyse scientifique.

Aussi, par rapport à la mécanique quantique classique définie sur un espace de Hilbert tel que nous l'avons entrevu en sous-section 1.2.7.c, la Théorie Quantique des Champs introduit sur un espace de Fock (espace de Hilbert décrivant l'évolution des états quantiques en considérant un nombre variable de particules associé au système du champ dont le nombre de degré de liberté est infini) des opérateurs de création et d'annihilation de particules-antiparticules.

Ainsi, pour ce qui se rapporte au concept du "*vide quantique*" ,vide de matière, tel que nous en avons parlé en section 6.3.4, nous comprenons qu'il puisse être potentiellement porteur d'énergie (*l'énergie du vide*), et cette hypothèse concrétisée par l'effet Casimir nous interpelle sur l'origine du monde.

Mais pour satisfaire notre soif de comprendre l'énigme du commencement du monde, encore faut-il nous poser la question sur l'origine du "*vide quantique*" intemporel, puisque le temps n'existait pas.

Cependant dans l'hypothèse réaliste d'un "*vide quantique*" et de ses effet sur une énergie potentiellement infinie, qui puisse s'exprimer en engendrant simultanément le temps et la matière (dans justement le contenant "*vide quantique*" devenu "*espace-temps*"), via les photons de lumière [si le "*hasard*" ou "*autre*" veuille bien rompre l'équilibre entre particules (les électrons) et antiparticules (positrons)], alors convenons quand même qu'à force de persévérance et de volonté dans la connaissance du monde physique qui nous entoure, nous repoussons toujours plus avant notre questionnement sur les origines de l'univers. Peut-être finirons-nous un jour par comprendre qui nous sommes.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la formulation de Feynman en physique quantique, associée aux intégrales de chemins, repose sur une description lagrangienne qui

possède l'avantage d'être invariante de Lorentz. Elle permet en Théorie Quantique des Champs de mettre en œuvre un procédé spécial pour parer aux divergences généralisées exprimées par les infinis apparaissant dans le calcul des grandeurs physiques (voir l'explication que nous donnons pour l'exemple exprimé en sous-section 3.2.1.a).

Ce procédé spécial dont nous avons parlé en section 6.3.4 porte le nom de "*renormalisation*" et permet de redéfinir les paramètres intervenant dans le lagrangien de la Théorie Quantique des Champs en éliminant les infinis dus aux interactions entre les particules et les fluctuations quantiques des champs.

Le diagramme de Feynman en section 6.3.4 exprime l'interaction entre une particule "*électron*" et un photon virtuel issu de la fluctuation du "*vide quantique*".

La fluctuation du vide quantique correspond à l'apparition spontanée de paires particule-antiparticule virtuelles qui disparaissent quasiment instantanément. Le vide quantique est donc animé de paires de particules-antiparticules qui apparaissent et disparaissent continuellement.

Dans le cas du champ électromagnétique, le vide quantique (puisqu'il n'y a pas d'éther : voir expérience de Michelson) est matérialisé par des fluctuations correspondant à des photons virtuels (virtuel car transitoire : voir chapitre 6 caractérisés par leur longueur d'onde et ceci pour toutes les longueurs d'onde possibles.

Ce vide contient donc une certaine quantité d'énergie due à ces photons virtuels (puisque ces photons virtuels peuvent créer des paires de particules-antiparticules massives : $E = m c^2$) et ceci à une échelle atomique appelée "*énergie du point zéro*".

Ainsi peut-on considérer les photons (bosons) médiateurs de l'interaction électromagnétique entre deux particules chargées, comme partie intégrante du champ électromagnétique, formant ce champ en tout point et ceci dans une configuration quantique.

Les photons, de par leur fréquence ν , pourrait en fait représenter concrètement, de proche en proche, la vibration ondulatoire de l'énergie $E = h \nu$ d'une particule chargée à l'autre, assurant ainsi l'interaction entre ces deux particules. Evidemment, la position des photons dans le champ électromagnétique est caractérisé par leur fonction d'onde représentant la probabilité de les trouver au voisinage d'une position r à l'instant t , proportionnellement au carré du module de leur fonction d'onde, c'est-à-dire $|\Psi(r,t)|^2$.

8.2.2.c) La puissance de la pensée chez Feynman

La puissance de pensée chez Feynman a marqué, comme celle d'Einstein, toute la physique du 20^{ème} siècle ; il en fut de même pour celle de Newton pendant les 17^{ème} et 18^{ème} siècles.

Premièrement son idée d'extrapoler le principe d'Huygens, tel que nous l'avons vu en sous-section 5.2.1.b, c'est-à-dire de sommer toutes les amplitudes de probabilités en fonction de tous les chemins que peut emprunter une particule est fort judicieux. Ceci se traduit par la règle de Feynman consistant à dessiner tous les diagrammes associés au processus considéré impliquant la propagation de particules de matière, la propagation de particules représentant l'interaction électromagnétique matérialisée par les photons pour en final obtenir le couplage des particules de matière avec les particules d'interaction.

Mentionnons toutefois, et rien n'indique que Feynman en avait pris connaissance, que l'idée assez obscure de l'intégrale de chemin se retrouve dans les travaux de Norbert Wiener (1894-1964) dont l'objectif était de procéder à une description des propriétés statistiques du mouvement brownien, suite aux travaux d'Einstein (voir §7.5).

Cette idée poussée à l'extrême, permet d'obtenir avec exactitude l'amplitude de probabilité d'un événement associé au parcours d'un point à un autre d'une particule dans l'espace-temps de la relativité restreinte.

Comme nous l'avons indiqué en section 6.3.1, la constante de couplage de l'interaction électromagnétique, appelé aussi constante de structure fine, associée aux vertex assurant l'interaction entre deux particules (voir sous-sections 6.3.1 à 6.3.4) est très petite. Ainsi, plus il y a de vertex, plus la puissance de la constante de couplage est grande et plus le nombre de diagramme à prendre en compte n'est pas important. Pour s'assurer d'une valeur raisonnable (correcte, acceptable) de l'amplitude de probabilité, on pourra se contenter d'un petit nombre de diagrammes.

Le génie de Feynman a été de discerner dans toutes les mathématiques à disposition des physiciens et des ingénieurs, celles qui devaient permettre de concrétiser son idée afin d'aboutir à la réussite que l'on connaît.

En effet, il a magnifiquement introduit le principe de l'intégrale fonctionnelle pour quantifier toutes les voies que peut suivre une particule. Et c'est bien grâce à cette manière d'aborder la mécanique quantique que Feynman a pu construire sa théorie quantique de l'interaction électromagnétique.

Ainsi, l'intégrale fonctionnelle concrétisant le principe d'intégrale de chemins a conduit tout naturellement aux intégrales dites de Feynman associées à ses fameux diagrammes.

Insistons sur le fait que l'on constate au bout de plus de cinquante ans que ses diagrammes sont toujours indispensables, sans concurrence aucune, dans la façon de conduire avec succès les raisonnements les plus abstraits de la mécanique quantique. En effet, avec une grande clarté ils mettent en œuvre des concepts d'une grande puissance tels que : la conservation de l'énergie, la conservation de la quantité de mouvement, la non simultanéité des événements quantiques, le principe de la relativité restreinte appliqué obligatoirement à tout corpuscule se mouvant à la vitesse de la lumière (le photon) ou proche de cette vitesse (certaines particules subatomiques), etc... .

Les diagrammes de Feynman sont utilisés en permanence par les physiciens théoriciens et les expérimentateurs, comme nous avons pu nous en rendre compte à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, au détriment des méthodes mises en œuvre par ses deux co-lauréats du prix Nobel de physique 1965 que sont Julian Schwinger et Sin-Itiro Tomonaga.

Deuxièmement comme nous l'avons exprimé en début de section 6.4.2, tout au long de l'avancement de ses travaux, Feynman vérifie qu'il ne spolie en rien l'invariance de jauge. Et ceci lui assure un gage de bien-fondé et de cohérence dans la conception de sa théorie de l'Electrodynamique Quantique.

Au §4 de l'Annexe 21, à propos de l'invariance de jauge globale non relativiste pour une particule libre, nous avons montré que le champ électromagnétique possède une propriété d'invariance, une invariance horizontale, qui est l'invariance par changement de phase à module constant.

Nous avons aussi montré au §5 de l'Annexe 21 que l'exigence d'invariance de jauge locale est impossible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas imposer l'invariance de phase comme une invariance locale. En d'autres termes, il est impossible de changer la phase du champ d'électrons (dans le cas où nous considérerions un "champ" constitué par une répartition d'électrons dans l'espace-

temps, telle que nous le mentionnons dans l'hypothèse au §5 de l'Annexe 21, pour $\Psi(x,t)$ en tout point de l'espace-temps.

Ceci devient possible que s'il existe un champ d'interaction invariant de jauge au sens où l'interaction électromagnétique (c'est-à-dire le champ électromagnétique) est invariante de jauge, et en plus qu'il soit couplé au champ de matière comme exprimé par les équations (1).

Ainsi :

« partant d'une distribution de matière, imposer sur cette distribution de matière une invariance de phase locale, implique l'existence d'une interaction entre les particules qui forment cette matière ; et cette interaction, c'est l'interaction électromagnétique.

Autrement dit, au niveau quantique, l'interaction électromagnétique résulte de l'adéquation de deux invariances horizontales, l'invariance locale de phase du champ de matière et l'invariance de jauge du champ électromagnétique. Ce qui est tout à fait spectaculaire avec cette théorie (la théorie de l'Electrodynamique Quantique telle que l'a conçu Feynman), c'est qu'on peut lui appliquer la méthode de l'intégrale fonctionnelle de Feynman qui consiste à sommer toutes les amplitudes de probabilités possibles. »⁴⁸⁵

Troisièmement Feynman a maîtrisé l'ensemble des problèmes affectant l'Electrodynamique Quantique. Citons notamment la technique de la *renormalisation* dont il fut un des principaux acteurs et qui a permis de s'affranchir du problème de développement des intégrales qui tendent vers l'infini, c'est-à-dire qui contiennent une partie divergente empêchant leur résolution.

Nous avons esquissé la technique de *renormalisation* en section 6.3.4 et nous allons être un peu plus explicite dans cette sous-section, sans toutefois rentrer dans le détail des calculs qui ne font pas l'objet de cette thèse.

Il est bon de souligner qualitativement comment Feynman a pu concrétiser sa théorie en venant à bout des divergences apparaissant dans les intégrales dites de Feynman associées aux diagrammes de Feynman issus de l'intégrale de chemin.

En effet, c'est en vue de calculer les amplitudes de probabilité concernant un processus mettant en œuvre la théorie de l'Electrodynamique Quantique que Feynman doit résoudre les problèmes de divergence apparaissant dans les calculs impliquant des diagrammes comprenant des boucles fermées de particules virtuelles.

Pour calculer les termes intervenant dans les intégrales, c'est-à-dire l'amplitude du couplage d'un électron avec un photon, il est indispensable de prendre en compte tous les points de couplage possibles jusqu'à une distance nulle.

Comme nous l'avons vu en section 6.3.4 et de la même manière que pour la prise en compte de l'interaction de l'électron avec lui-même (voir section 3.2.1), les calculs des couplages de l'électron avec les interactions électromagnétiques (les photons) à une distance nulle donne des résultats infinis qui sont dénués de sens. En effet la nature ne nous a jamais montré des masses et des charges électriques infinies.

La technique de *renormalisation* qui permet de déterminer la charge électrique e et la masse m de l'électron compte-tenu des interactions électromagnétiques agissant sur ce dernier s'effectue de la manière que nous décrivons ci-après.

485. Gilles Cohen-Tannoudji. 3^{ème} trimestre 1991. « *L'unification des interactions fondamentales* ». Les cahiers du M.U.R.S. (Mouvement Universel de la Responsabilité Scientifique) n° 25.

Elle consiste dans les calculs à séparer en deux la charge électrique et la masse de l'électron en distinguant d'un côté la charge e_0 nue et la masse m_0 nue en prenant pour hypothèse qu'il n'y a pas d'interaction et de l'autre côté la charge e et la masse m renormalisée par l'interaction. En effet, les couplages entre champ électrique et champ électromagnétique modifient la charge et la masse de l'électron supposées idéales. Ces paramètres idéaux que sont e_0 et m_0 ne peuvent être considérés que dans un contexte idéal dénué de tout champ électromagnétique. Mais les électrons idéaux n'existent pas car dans la pratique, l'électron réel absorbe de temps en temps ses propres photons, c'est-à-dire qu'il interagit de temps en temps avec lui-même comme étudié en section 6.3.2).

La méthode de *renormalisation* come l'indique Gilles Cohen-Tannoudji est la suivante :
« On calcule le développement en perturbation de e et m en fonction de e_0 , m_0 et aussi d'un paramètre de coupure arbitraire λ . »⁴⁸⁶

Notons que λ appelé *cut-off* par les physiciens, fixe la borne inférieure ou supérieure de l'intégrale divergente. On interprète physiquement λ comme une échelle minimale ou maximale d'énergie ou de distance caractéristique du processus au-delà de laquelle ce dernier n'est plus valable.

Soit par exemple F l'amplitude de probabilité d'un processus physique quelconque en Electrodynamique Quantique. Si dans le développement en perturbation de F on élimine e_0 et m_0 en gardant e et m , alors la limite de F est finie au lieu de tendre vers l'infinie. On dit alors que l'Electrodynamique Quantique est *renormalisable* et ceci permet de prendre en compte tout ce qui concerne l'intégrale de chemin en mécanique quantique sans qu'il y ait besoin de considérer un paramètre de coupure λ arbitraire.

Si Feynman, Schwinger et Tomonaga ont inventé cette méthode de *renormalisation* pour faire effectivement les calculs et confirmer les valeurs réelles de e et m dans le contexte réel de l'électron soumis aux interactions électromagnétiques, la plupart des physiciens ne s'en contente pas. Ils restent en effet frustrés par ce miracle apporté par la *normalisation*, même si les valeurs de e et m trouvées coïncident avec l'expérience.

Et paradoxalement, le plus critique d'entre eux était Richard Feynman qui écrit encore en 1985, c'est-à-dire vingt ans après l'obtention du prix Nobel de physique :

« Ce tour de passe-passe pour déterminer e et m s'appelle techniquement la "renormalisation". Mais, quelle que soit l'ingéniosité du mot, c'est quand même un truc dingue !

L'obligation de recourir à ce genre de supercherie a empêché de démontrer la cohérence mathématique de la théorie de l'électrodynamique quantique. Il est étonnant que l'on ne soit pas encore parvenu aujourd'hui à prouver d'une façon ou d'une autre la cohérence de la théorie ; pour ma part, j'ai des doutes quant à la légitimité mathématique de la renormalisation. Ce qui est sûr, c'est que nous n'avons pas de bonne façon mathématique de décrire la théorie de l'électrodynamique quantique : qu'il faille tant de mots pour parler de la relation entre m et m_0 d'une part, et e et e_0 d'autre part, prouve bien que ce n'est pas de la bonne mathématique.

La constante de couplage (électromagnétique) observée (l'amplitude d'émission ou d'absorption d'un photon réel par un électron réel) pose un problème aussi fondamental que passionnant. C'est un simple nombre dont la valeur expérimentale tourne autour de $-0,085\ 424$

486. Gilles Cohen-Tannoudji. « Histoire, Actualité et Horizons du Modèle Standard ». Licence et Magistère de physique. Université Paris-Sud. Page 76.

55. (*Mes collègues physiciens ne reconnaîtront pas ce nombre, car ils préfèrent retenir par cœur l'inverse de son carré : environ 137,035 97 avec une incertitude de l'ordre de 2 sur le dernier chiffre. Ce nombre reste une énigme depuis sa découverte il y a cinquante ans, et tout bon physicien théoricien en est obsédé .*) »⁴⁸⁷

Quatrièmement comme nous l'avons exprimé en début de section 6.4.1, Feynman vérifie toujours que ses résultats concordent avec la méthode de quantification du champ électromagnétique introduite par Dirac en 1927 appelée "*seconde quantification*".

Au §2 de l'Annexe 20, à propos de la seconde quantification, nous avons montré brièvement comment avait lieu le passage des paramètres d'une physique quantique pour laquelle l'objet ponctuel, c'est-à-dire la particule subatomique, se trouve décrite par une fonction d'onde, à une physique quantique où l'objet ponctuel devient un champ continu.

Nous nous proposons maintenant d'apporter quelques précisions concernant la seconde quantification, afin de comprendre au mieux les concepts de la Théorie Quantique des Champs qui fera l'objet des sections 8.2.4, 8.2.5 et 8.2.6.

Aussi, rappelons que dans le cas de la Théorie Quantique des Champs relativistes, la méthode de seconde quantification revient à traiter la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ comme un ensemble discret de particules dans tout l'espace-temps ; les opérateurs qui décrivent le champ quantique sont des opérateurs de création ou d'annihilation de particules.

Et ces opérateurs interviennent sur l'espace dit de Fock (1898-1974) du nom du physicien théoricien russe qui fut un des piliers de l'Ecole de Physique de Léninegrad pour ses cours consacrés en 1931 à la mécanique quantique.⁴⁸⁸

L'espace de Fock est un empilement infini d'espaces de Hilbert contenant le vide, l'espace à une particule, l'espace à deux particules, etc.

En effet, si l'espace H de Hilbert décrit les états quantiques pour une seule particule, l'espace F de Fock est un espace de Hilbert plus large contenant des états quantiques avec un nombre non limité et variable de particules.

En d'autres termes, la Théorie Quantique des Champs calcule le déplacement simultané de plusieurs particules dans un champ quelconque matérialisé par le boson vecteur associé à l'interaction entre ces particules. Le problème est donc de traiter sur le même pied d'égalité la quantification de la matière et celle du rayonnement pour l'Electrodynamique Quantique, c'est-à-dire plus généralement la quantification entre les particules de matière et les bosons médiateurs d'interaction entre ces particules de matière.

Rappelons que la mécanique quantique développée par Heisenberg, Schrödinger et Dirac ne pouvait décrire le comportement que d'une seule particule, l'électron, dans le champ électromagnétique sans introduire le médiateur d'interaction de ce champ, c'est-à-dire le photon, avec l'électron.

487. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Pages 170 et 171.

488. Vladimir Fock. Wikipédia. 29 novembre 2018.

En fait, nous dirons que la Théorie Quantique des Champs est l'application de la mécanique quantique aux champs, notamment son extension au domaine relativiste.

Et les calculs que cette théorie requiert sont bâtis sur le tracé et l'interprétation des diagrammes de Feynman. Nous extrapolerons donc dans les sections suivantes le calcul des propagateurs pour les particules et les bosons associés aux interactions fortes et faibles à partir de ceux que nous avons calculés pour la théorie de l'Electrodynamique Quantique.

Nous obtiendrons ainsi l'amplitude de probabilité concernant tel ou tel processus associé à la Théorie Quantique des Champs, que ce soit pour les interactions fortes à l'intérieur du noyau atomique que pour les interactions nucléaires faibles responsables de la désintégration nucléaire et les interactions du boson de Higgs avec toutes les particules en vue de leur conférer la masse inertielle clef de voûte du monde qui nous entoure.

Et tout naturellement nous verrons apparaître sous nos yeux tout ce que la compréhension de ces phénomènes doit au concept de l'intégrale de chemins.

Terminons par la citation suivante d'Olivier Darrigol :

« Introduite par Dirac dans un problème particulier, qu'est celui de l'émission et de l'absorption de rayonnement par un atome, la seconde quantification a une portée bien plus vaste.

- elle permet par une substitution de langage de ne plus parler de la présence de telle particule à tel endroit, mais de nombres d'occupation d'états quantiques, éliminant ainsi les reliquats du langage classique des particules discernables, et elle justifie cet abandon de la discernabilité,

- elle constitue une méthode puissante de calcul en mécanique statistique,

- son utilisation en physique des particules s'impose en raison du changement d'identité et de nombre des particules au cours d'une réaction inélastique. »⁴⁸⁹

8.2.3- La chromodynamique quantique

Dans un premier temps, nous allons introduire les particules intervenant en Chromodynamique Quantique (en anglais : Quantum Chromodynamics : QCD), c'est-à-dire les quarks et les gluons dans le contexte du modèle standard.

Nous présentons ensuite la symétrie $SU(3)$ décrivant les interactions fortes entre les quarks et les gluons.

Puis, nous montrerons l'influence actuelle de l'Electrodynamique Quantique sur l'étude et la recherche en Chromodynamique Quantique.

Pour cela nous consulterons d'une part quelques thèses de doctorat⁴⁹⁰ portant sur la chromodynamique quantique utilisant les concepts de l'intégrale de chemins et d'autre part les

489. Darrigol. 1982. « *Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948)* ». Thèse de doctorat. Université Paris I (Panthéon-Sorbonne).

490. Rémi Baron. 2009. « *Chromodynamique quantique sur réseau et propriétés du nucléon* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud XI.

Cyrille Marquet. 2006. « *Chromodynamique Quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de Hadrons* ». Thèse de doctorat. Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie et Service de physique théorique – CEA / Saclay.

Vincent Andrieux. 2014. « *Polarisation des quarks et des gluons dans le nucléon* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud.

écrits⁴⁹¹ du professeur et docteur Michael Klasen de l'Institut de Physique Théorique de l'Université de Münster (Allemagne) réputée internationalement, et qui enseigne aussi à l'Université Joseph-Fourier de Grenoble connue pour ses grands établissements de recherche en physique fondamentale.

Le professeur Klasen enseigne, selon les règles de Feynman, le formalisme théorique de la mécanique quantique relativiste et les théories de jauge abéliennes et non-abéliennes. Et c'est sur ce formalisme que repose la description des composants élémentaires de la matière et les forces régissant leurs interactions.

Aussi, c'est toute une génération de jeunes physiciens théoriciens qui ont étudié et étudient toujours la physique subatomique professée par le docteur Klasen selon les méthodes de Richard Feynman.

Ainsi, c'est à travers leurs travaux de recherche, via le Large Hadron Collider (LHC) au CERN, que ces jeunes physiciens approfondissent toujours un peu plus leur savoir sur les particules élémentaires ; *ceci dans le but de comprendre un peu mieux la structure de la matière et sa création à l'origine de l'Univers.*⁴⁹²

Nous examinerons donc les liens existant entre les propagateurs de Feynman associés à la théorie de l'Electrodynamique Quantique (les propagateurs de l'électron et du photon) et ceux concernant la théorie de la Chromodynamique Quantique (les propagateurs des quarks et des gluons).

Nous mentionnerons aussi les réflexions de Feynman, vingt ans après l'obtention du prix Nobel, c'est-à-dire en 1985, sur l'opportunité d'utiliser ses diagrammes dans les domaines de la physique fondamentale relevant de l'interaction forte.⁴⁹³

Enfin, nous montrerons l'influence de Feynman à travers les travaux de David Gross (né en 1941), de David Politzer (né en 1949) et Frank Wilczek (né en 1951), qui ont tous les trois reçu le prix Nobel de physique 2004 pour la compréhension des interactions fortes entre les quarks et les gluons.

Pour cela nous analyserons la conférence Nobel de David Gross.⁴⁹⁴

8.2.3.a) Le modèle standard des particules élémentaires en Chromodynamique Quantique

La Chromodynamique Quantique est une théorie quantique des champs qui décrit l'interaction forte entre les particules élémentaires de matière (encore appelées fermions) que sont les quarks et les bosons médiateurs de la force forte que sont les gluons.

Les quarks sont les constituants de matière élémentaire formant les baryons c'est-à-dire les protons et les neutrons situés à l'intérieur du noyau atomique.

Ils sont au nombre de six, dénommés selon ce que l'on appelle leur "saveur" :

* Quark up u : de charge électrique $+2/3 e$ relativement à l'électron de charge $-1 e$

491. Michael Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique relativiste. Théories de jauge* ». DUNOD.

492. Robert Aymar. 2009. Directeur Général du CERN (2004-2008). Préface du livre de Michael Klasen : « *Mécanique Quantique relativiste. Théories de jauge* ».

493. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Pages 173 à 182.

494. David Gross. 2005. « *The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD* ». Nobel Lecture. Reviews of Modern Physics. Volume 77. Pages 837-849.

- * Quark down d : de charge électrique $-1/3 e$
- * Quark charm c : de charge électrique $+2/3 e$
- * Quark strange s : de charge électrique $-1/3 e$
- * Quark top t : de charge électrique $+2/3 e$
- * Quark bottom b : de charge électrique $-1/3 e$

Nous vérifions que pour un proton contenant deux quarks u et un quark d nous avons une charge électrique :

$$+2/3 e + 2/3 e - 1/3 e = +1e$$

opposée à celle de l'électron qui est égale à $-1 e$ (e est la valeur absolue de la charge électrique élémentaire de l'électron).

Nous vérifions aussi que pour un neutron contenant deux quarks d et un quark u nous avons une charge électrique nulle :

$$-1/3 e - 1/3 e + 2/3 e = 0.$$

En plus de la charge électrique précédente, chaque quark possède un autre type de charge nommée *charge de couleur*, qui n'a rien à voir avec la couleur au sens classique du terme ; cette *charge de couleur* est responsable de l'interaction forte, c'est-à-dire de la force qui les relie à l'intérieur du proton et du neutron.

La charge de couleur d'un quark peut être modifiée par l'émission ou l'absorption d'un boson gluon médiateur de l'interaction forte à l'intérieur du proton et du neutron.

Chaque quark, à un instant donné, peut être dans l'un des trois états (ou "couleur") suivant :

- * Rouge : r (*red* en anglais)
- * Vert : g (*green* en anglais)
- * Bleu : b (*blue* en anglais)

Mentionnons aussi que les quarks, comme les électrons, sont des particules de matière élémentaire dites de "*spin 1/2*" c'est-à-dire : $s = 1/2$. Il s'agit toujours d'un nombre entier ou demi-entier que l'on appelle *nombre quantique de spin*.

Rappelons qu'en mécanique quantique, le spin s est le moment cinétique intrinsèque (appelé aussi moment angulaire intrinsèque) d'une particule, intervenant dans le calcul du moment cinétique orbital S de la particule, matérialisant sa rotation autour d'elle-même.

La relation entre le moment cinétique orbital S de la particule et son moment cinétique intrinsèque est le suivant :

$$S = \hbar \sqrt{s(s+1)} .$$

Aux effets couplant la rotation de la particule et son magnétisme est associé un moment magnétique. L'effet couplant la rotation d'un corps et son magnétisme porte le nom de gyromagnétisme.

A la famille des six quarks correspond six antiquarks de même masse mais de charge électrique opposée ($-2/3 e$ ou $+1/3 e$) et de charge de couleur complémentaire, appelée anti-couleur c'est-à-dire "anti-rouge", "anti-vert" ou "anti-bleu".

La charge de "couleur" est la source de l'interaction nucléaire forte.

L'interaction nucléaire forte maintient les quarks ensemble dans les protons et les neutrons et prend le nom de gluon qui est un boson de spin 1 au même titre que le photon, responsable de l'interaction électromagnétique.

Les gluons sont les messagers transportant la charge de couleur entre les quarks. Leur charge électrique est nulle.

Nous verrons ultérieurement que les diagrammes de Feynman associés aux quarks échangeant des gluons sont parfaitement semblables à ceux des électrons échangeant des photons, à une différence près : la constante de couplage g de l'interaction forte est beaucoup plus grande que celle de l'interaction électromagnétique que nous appelons encore *constante de structure fine* α .

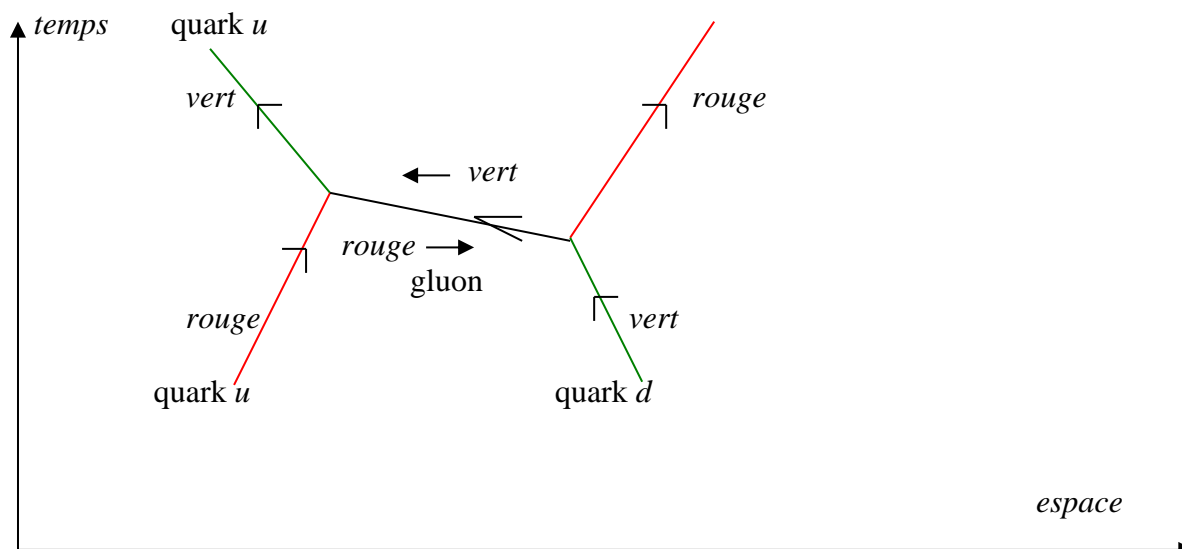
Mentionnons encore que dans la pratique, les trois quarks du proton et du neutron sont inséparables et représentent un état global lié portant le nom de "confinement". En effet, l'interaction forte est semblable à un élastique car plus on tire sur un quark pour le séparer de son proton ou de son neutron, plus l'intensité de l'interaction forte augmente, jusqu'à ce que l'énergie de liaison mise en œuvre entraîne la création d'une paire *quark-antiquark*.

Au contraire, lorsque les quarks sont très proches les uns des autres dans le proton ou dans le neutron, il n'y a plus d'interaction forte, à tel point que l'on peut les dire "libres" : ce phénomène prend le nom de "liberté asymptotique".

Il faut savoir que la charge de couleur d'un quark peut être modifiée par l'émission ou l'absorption d'un gluon. Il existe ainsi huit types de gluons différents selon les charges de couleur avec lesquelles ils se couplent.

Le diagramme de Feynman ci-après⁴⁹⁵ montre l'interaction entre un quark d de charge *verte* et un quark u de charge *rouge*. Le quark d initialement *vert* vire au *rouge* en émettant un gluon *vert-antirouge*. En effet, le gluon emporte la charge *verte* du quark d en cédant à ce quark d la charge *rouge* du quark u ; et le quark u vire au *vert* car il reçoit du gluon la charge *verte* du quark d .

495. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Figure 83 page 179.



Le diagramme permet de visualiser l'anticouleur remontant le temps de la même manière que le fait le positron (antiélectron) dans un diagramme de Feynman associé à l'Electrodynamique Quantique (voir sous-section 2.4.4).

Il devrait donc y avoir en toute rigueur neuf gluons différents selon les combinaisons suivantes possibles :

- * Le gluon *rouge-antirouge* $r\bar{r}$
- * Le gluon *rouge-antivert* $r\bar{v}$
- * Le gluon *rouge-antibleu* $r\bar{b}$
- * Le gluon *vert-antivert* $v\bar{v}$
- * Le gluon *vert-antirouge* $v\bar{r}$
- * Le gluon *vert-antibleu* $v\bar{b}$
- * Le gluon *bleu-antibleu* $b\bar{b}$
- * Le gluon *bleu-antirouge* $b\bar{r}$
- * Le gluon *bleu-antivert* $b\bar{v}$

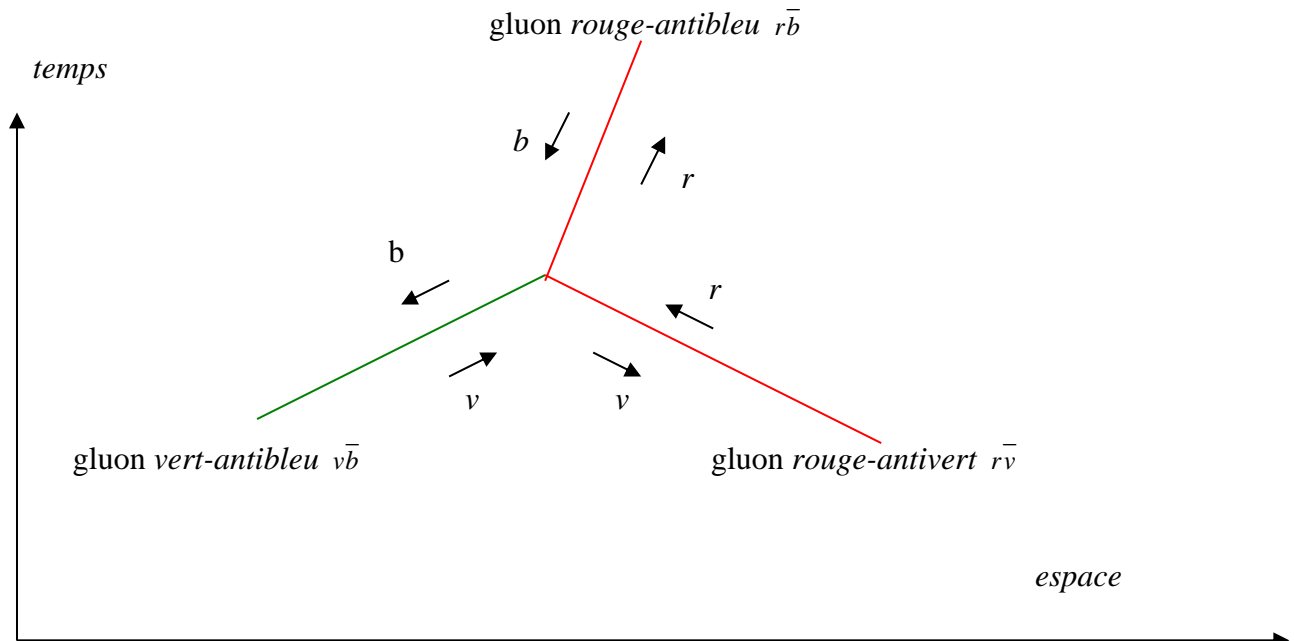
Cependant, la théorie de la Chromodynamique Quantique enseigne que pour les états neutres, c'est-à-dire inchargés ($r\bar{r}$, $v\bar{v}$, $b\bar{b}$), nous avons la relation $r\bar{r} + v\bar{v} + b\bar{b} = 0$.

Alors les neufs états des gluons ci-avant ne sont plus indépendants. Ainsi la relation précédente réduisant de un le nombre de degrés de liberté, il reste huit degrés de liberté possibles correspondant à huit gluons.⁴⁹⁶

496. Ibid. Page 180 ; Wikipédia (15 décembre 2018): gluon.

Les gluons portant eux-mêmes des charges de couleur, ils peuvent alors se coupler entre eux. En d'autres termes, la particularité de l'interaction forte est qu'elle agit sur ses propres particules vecteurs, les gluons, c'est-à-dire sur les propres médiateurs de la force forte.

Le diagramme de Feynman ci-après⁴⁹⁷ montre ainsi un gluon $v\bar{b}$ se couplant avec un gluon $r\bar{v}$ pour donner un gluon $r\bar{b}$ et ceci avec la même constante g de couplage fort assurant le maintien des quarks dans le proton ou le neutron.



8.2.3.b) Condition d'invariance de jauge locale en chromodynamique quantique

Rappelons que l'Electrodynamique Quantique est fondée sur le groupe abélien (qualifié de groupe de jauge) $U(1)$ associé au nombre complexe $\exp[-i e \alpha(x)]$ tel que nous avons pu le voir au §7 de l'Annexe 21 et tel que mentionné dans les écrits de l'Institut Interuniversitaire des Hautes Energies de Bruxelles⁴⁹⁸.

Pour ce qui concerne la Chromodynamique Quantique, elle est fondée sur le groupe non-abélien (groupe de jauge) $SU(3)$. Ce groupe est un groupe Spécial (de Lie), Unitaire de dimension 3, tel que mentionné dans les écrits de l'Institut Interuniversitaire des Hautes Energies de Bruxelles⁴⁹⁹.

Il décrit une matrice 3 lignes, 3 colonnes de nombres complexes. Cette matrice est Unitaire car multiplié par son adjointe elle donne la matrice identité encore appelée matrice unité avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

La matrice décrit une rotation dans un espace à trois dimensions car elle agit sur un objet à 3 composantes que sont les 3 charges de couleur r, g, b d'un quark.

497. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Figure 84 page 180.

498. IHE. Institut Interuniversitaire des Hautes Energies. « *Bases de la chromodynamique quantique* ». Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB). Chapitre 2. Page 18.

499. Ibid. Page 20.

En Annexe 25, nous transposons ce que nous avons vu mécanique quantique non relativiste concernant l'invariance de jauge locale pour une particule libre (§5 de l'Annexe 21) à la chromodynamique quantique, comme nous l'avons fait au §7 de l'Annexe 21 relativement à l'Electrodynamique Quantique.

Solidifions dans les tableaux qui suivent, les connaissances acquises en Théories de jauge :

Chromodynamique Quantique



On peut facilement démontrer que le Lagrangien de Dirac :

$$L_{Dirac} = \bar{\Psi}_q(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi_q(x)$$

est covariant sous les transformations locales de jauge :

$$A'^a{}_\mu(x) = A^a{}_\mu(x) - \partial_\mu \alpha^a(x) - g f_{abc} \alpha^b(x) A^c{}_\mu(x)$$

si la fonction "d'onde de couleur" transformée est :

$$\Psi'_q(x) = \exp [i g \frac{\lambda}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)] \Psi_q(x)$$

Mécanique Quantique non –relativiste



on a démontré au §5 de l'Annexe 21 que l'équation de Schrödinger :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$$

est covariante sous les transformations locales de jauge :

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

si la fonction d'onde transformée est :

$$\Psi'(r,t) = \exp [\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \Psi(r,t).$$

Electrodynamique Quantique



on a démontré au §7 de l'Annexe 21 que le Lagrangien de Dirac :

$$L_{Dirac} = \bar{\Psi}(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x)$$

est covariant sous les transformations locales de jauge :

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

si la fonction d'onde transformée est :

$$\Psi'(x) = \exp[-i e \alpha(x)] \Psi(x),$$

8.2.3.c) La chromodynamique quantique étudiée à partir des diagrammes de Feynman :
Travaux des physiciens

Comme mentionné en début de section 8.2.3, nous commençons par analyser quelques thèses de doctorat portant sur la chromodynamique quantique utilisant les concepts de l'intégrale de chemins, puis nous examinons les écrits de Richard Feynman et de Michael Klasen avant de terminer sur la conférence Nobel de David Gross.

Thèse de Rémi BARON : *Chromodynamique Quantique sur réseau et propriétés du nucléon*⁵⁰⁷

Dans cette thèse, l'auteur calcule les propriétés des nucléons (protons, neutrons) en partant de la théorie microscopique de l'interaction forte.

Il rappelle que la théorie de la chromodynamique quantique est testée de manière fiable particulièrement en ce qui concerne les expérimentations s'effectuant aux grandes énergies, permettant, entre autre, de valider le phénomène portant le nom de "*liberté asymptotique*" dont nous avons parlé en section 8.2.3.a.

L'auteur précise qu'il lui faut effectuer un traitement exact de la théorie en vue de prédire des propriétés des nucléons faisant intervenir les distributions de courant et la masse des particules. Et le fait d'une interaction forte tendant vers une valeur nulle lors des expériences à hautes énergie, va lui permettre d'utiliser, pour arriver à ses fins, la théorie des perturbations.

Il mentionne donc une discrétisation de la théorie de la chromodynamique quantique, impliquant la discrétisation des fermions (les quarks) sur un réseau quadridimensionnel avec des observables quantiques calculées par la méthode de *l'intégrale de chemin*.

Le calcul numérique de *l'intégrale de chemin* s'effectue par la méthode Monte Carlo avec échantillonnage préférentiel.

Dans le chapitre I, c'est-à-dire en Introduction, Rémi Baron indique qu'il discrétise les champs de quarks afin de permettre de simuler la théorie QCD avec des masses de quarks proches de

507. Rémi Baron. 2009. « *Chromodynamique quantique sur réseau et propriétés du nucléon* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud XI.

leur valeur physique, en dynamique, c'est-à-dire lorsque les quarks peuvent être créés sous forme de paires virtuelles quark-antiquark.

Dans le chapitre II, l'auteur introduit *l'intégrale de chemin* de manière classique.⁵⁰⁸ Il discrétise donc un champ scalaire réel Φ obéissant à l'équation de Klein-Gordon (voir cette équation en section 1.2.1.g), via l'intégrale de chemin associée aux variables dynamiques $\Phi(\vec{x}, t)$ pour chaque \vec{x} appartenant à un réseau défini par $a\mathbf{Z}^3$ où a est le pas du réseau (la maille), en discrétisant aussi le temps.

La discrétisation de ce champ scalaire généralise celle des champs associés aux gluons et aux quarks que l'auteur traite ultérieurement, c'est-à-dire les interactions gluon-gluon et quark-gluon dont nous parlons en sous-section 8.2.3.a.

En fin de chapitre II, l'auteur arrive au calcul du propagateur dans le cas d'une théorie QCD associée au champ scalaire libre, qu'il compare à :

« *l'expression familière du propagateur des règles de Feynman dans un espace Euclidien.* »⁵⁰⁹.

Le chapitre III nous montre d'ailleurs l'utilisation d'un diagramme de Feynman en triangle.⁵¹⁰

Thèse de Cyrille MARQUET : *Chromodynamique Quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de hadrons*⁵¹¹

Dans cette thèse, l'auteur étudie les collisions hadroniques, c'est-à-dire les collisions entre particules non élémentaires composées de quarks, d'antiquarks et de gluons (les partons), à l'exemple des protons et des neutrons (les hadrons) contenus dans le noyau atomique.

Les données prises en compte pour l'analyse théorique des collisions sont fonction de l'énergie de collision et ce, jusqu'à la limite de haute énergie en QCD et la transition de cette limite vers le régime de saturation.

En effet, le régime de saturation offre un contexte de diffusion profondément inélastique, c'est-à-dire un processus dans lequel le choc entre hadrons est tel que la densité de gluon devient tellement large que des effets collectifs entre quarks, antiquarks et gluons se font importants.

Il faut savoir que dans une collision d'énergie modérée, un hadron (un proton ou un neutron) apparaît dilué et les partons (les quarks, les antiquarks et les gluons) interagissent de manière incohérente.

Tout au long de sa thèse, l'auteur calcule les interactions entre quarks, antiquarks et gluons en utilisant les règles de Feynman⁵¹² associées à ses diagrammes issus de l'intégrale de chemin.

Et les nombreux diagrammes⁵¹³ permettent une compréhension assez claire des phénomènes apparaissant lors d'événements diffractifs en diffusion profondément inélastique.

508. Ibid. Page 19.

509. Ibid. Page 24.

510. Ibid. Page 38.

511. Cyrille MARQUET. 2006. « *Chromodynamique Quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de Hadrons* ». Thèse de doctorat. Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie et Service de physique théorique – CEA / Saclay.

512. Ibid. Page 22.

513. Ibid. Pages 74, 75, 94.

Thèse de Vincent ANDRIEUX : *Polarisation des quarks et des gluons dans le nucléon*⁵¹⁴

Dans cette thèse, l'auteur étudie la structure en spin longitudinal du nucléon (le proton). Son objectif est de déterminer la contribution des quarks et des gluons à la formation du spin $\frac{1}{2}$ du proton (en sous-section 8.2.4.a nous introduisons brièvement la notion de spin).

Si la particule élémentaire qu'est l'électron, en interaction avec le proton à l'intérieur du noyau atomique, possède un moment cinétique intrinsèque (le spin) égal à $\frac{1}{2}$ mis en évidence par l'expérience de Stern-Gerlach en 1922, il est intéressant de chercher à comprendre, pour les particules non-élémentaires comme le proton, l'origine du spin par rapport aux particules élémentaires (les quarks et les gluons) qui constituent justement le proton.

Tout au long de sa thèse, l'auteur utilise les diagrammes de Feynman pour ses calculs.

Publication de Richard FEYNMAN : *Lumière et matière. Une étrange histoire*⁵¹⁵

Dans cette publication Feynman s'intéresse, entre autre, aux interactions entre les particules élémentaires composant le noyau atomique^{515 bis}.

De fait, il généralise à la Chromodynamique Quantique le principe de l'intégrale de chemin, qui, quarante ans avant, lui avait permis de fonder sa théorie de l'Electrodynamique Quantique basée sur les fameux diagrammes concernant l'interaction électromagnétique entre deux électrons que nous avons pu voir en section 6.3.1.

Il considère donc le diagramme suivant :⁵¹⁶

électron en EDQ

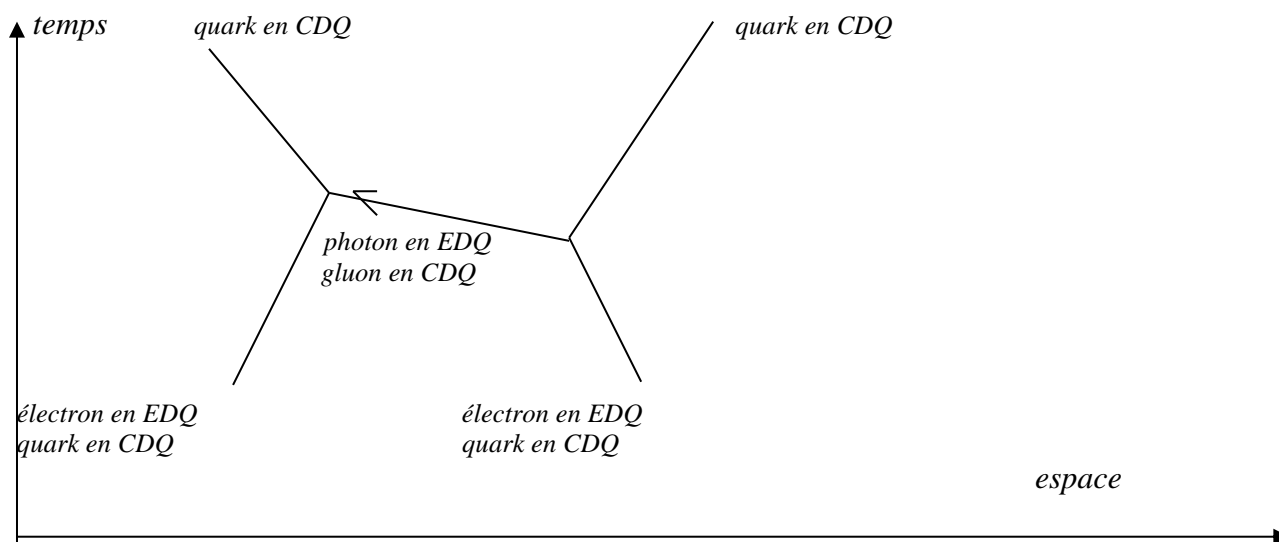
électron en EDQ

514. Vincent Andrieux. 2014. « *Polarisation des quarks et des gluons dans le nucléon* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud.

515. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992.

515 bis. Ibid. Pages 173 à 182.

516. Ibid. Figure 82, page 178.



Et Feynman de s'exprimer ainsi, posant lui-même toute la pérennité de ses diagrammes issus de l'intégrale de chemin quarante ans avant :

« Les diagrammes de quarks échangeant des gluons sont tout à fait semblables à ceux que nous avons déjà tracés pour des électrons qui échangent des photons (voir la figure 82). Si semblable en fait, que vous pourriez taxer les physiciens de manque d'imagination – pour faire la théorie des interactions fortes, ils se sont contentés de copier l'électrodynamique quantique ! Et vous avez raison, c'est ce que l'on a fait, mais on a quand même introduit un petit changement.

Les quarks ont une sorte de polarisation supplémentaire qui n'est pas de nature géométrique. Les physiciens analphabètes, qui avaient épuisé tous les délicieux mots grecs de leur connaissance, ont malheureusement baptisé "couleur" ce genre de polarisation, qui n'a rien à voir avec la couleur au sens ordinaire.⁵¹⁷

Pour aller plus loin, Feynman propose deux diagrammes traduisant respectivement ce que nous avons exprimé en sous-section 8.2.3.a, c'est-à-dire l'interaction entre deux quarks de charge de couleur différente et les couplages entre gluons portant des charges de couleur toute aussi différentes que celles des quarks.

Publication de Michael KLASSEN : *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de Jauge*⁵¹⁸

Nous avons vu au chapitre 5 que le concept d'intégrale de chemin a conduit à la notion de propagateur, outil principal de la théorie de l'Electrodynamique Quantique telle qu'exprimé par Feynman et qui lui a valu l'obtention du prix Nobel de physique en 1965.

Pour ce qui concerne la théorie de la Chromodynamique Quantique, elle suit de très près la théorie de l'Electrodynamique Quantique issue du concept d'intégrale de chemins.

517. Ibid. Pages 177 et 179.

518. Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge ». Dunod.

En effet, pour le propagateur de quarks de masse m , de charge de couleur i, j (i et j allant de 1 à 3 correspondant aux 3 couleurs possibles pour chaque quark) répondant au principe de la conservation de la charge de couleur et au principe de la quantité de mouvement p (l'impulsion), Klasen suit les règles dites de Feynman mentionnées en Annexe 1 relative à l'Electrodynamique Quantique.

Ces règles s'appliquent en Chromodynamique Quantique au facteur de couleur δ_{ij} près.

Il obtient donc ⁵¹⁹ :

$$G(p) = \frac{i(\cancel{p}+m)}{p^2-m^2} \delta_{ij}$$

que nous pouvons comparer à ce que nous obtenons pour le propagateur relativiste de l'électron en Annexe 1.

Pour ce qui est du propagateur de gluons de couleur a, b (a et b allant de 1 à 8 correspondant aux 8 états de couleurs pour les gluons) répondant aussi au principe de la conservation de la charge de couleur, Klasen obtient dans la jauge de Feynman ⁵²⁰ :

$$G(p) = -\frac{1}{p^2} \delta_{ab}$$

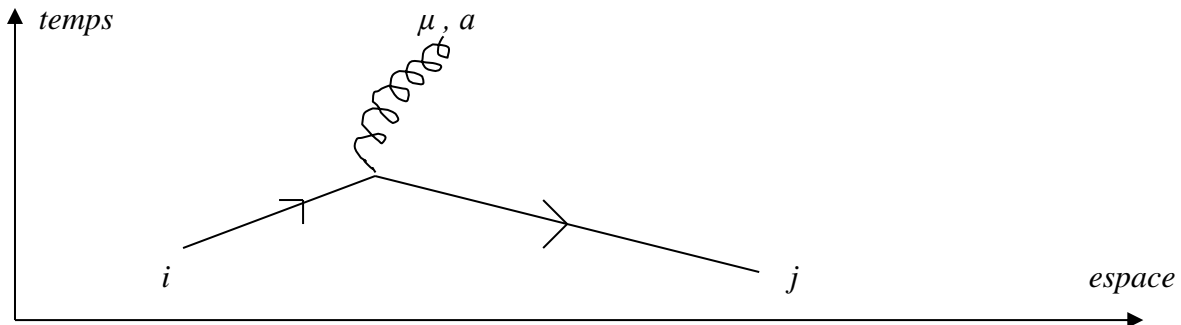
que nous comparons à ce que nous obtenons pour le propagateur du photon en Annexe 1.

Le vertex ci-après contient une jonction de 3 lignes, associé à une trajectoire symbolique de 2 quarks et d'un gluon.

Ce vertex, comme nous en avons discuté au chapitre 6, représente graphiquement l'un des trois éléments de base des diagrammes de Feynman.

Il matérialise dans notre cas l'interaction d'un gluon de polarisation μ et de charge de couleur a avec deux quarks de couleur i, j .

Sa représentation graphique dans l'espace-temps est la suivante ⁵²¹ :



519. Ibid. Page 88.

520. Ibid. Page 89.

521. Ibid. Page 90, figure 5.4.

Il s'agit d'une partie du diagramme de Feynman traduisant le couplage quarks-gluon que nous avons introduit en sous-section 8.2.3.a.

Les flèches indiquent la direction du courant fermionique c'est-à-dire la trajectoire des quarks sous une forme symbolique, comme nous l'avons indiqué au chapitre 6.

La polarisation du gluon décrit une direction vers laquelle pointe la direction moyenne de son moment angulaire (le moment cinétique orbital) sur trois axes orthogonaux.

L'interaction est la suivante :

$$i g \gamma^\mu T_{ij}^a$$

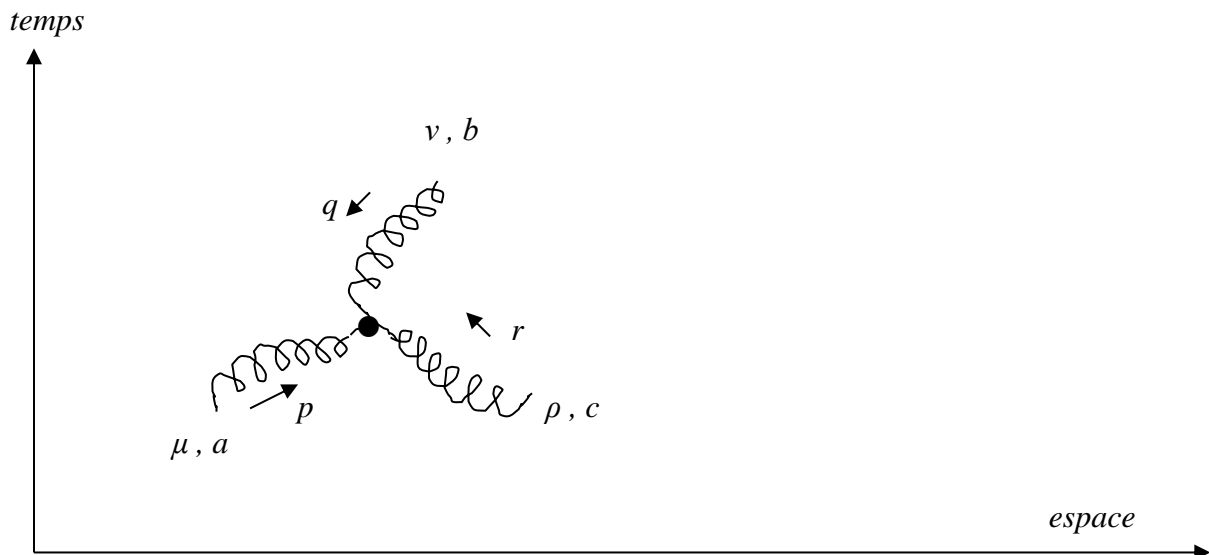
avec:

* γ^μ les matrices de Dirac telles que nous les avons vues en section 6.3.1,

* T_{ij}^a est le tenseur de force associé à l'interaction de couleur⁵²² (voir en fin de l'Annexe 25) dénommé tenseur chromodynamique, analogue au rôle joué par le tenseur électromagnétique en Electrodynamique Quantique,

* g est le couplage fort associé à la Chromodynamique Quantique.

Le vertex 3 gluons représentant l'interaction de trois gluons de polarisation μ, ν, ρ , de charge de couleur a, b, c , et d'impulsion entrante p, q, r , est donné par le diagramme de Feynman ci-après :



Il s'agit du diagramme de Feynman traduisant le couplage possible entre gluons dont nous avons parlé en sous-section 8.2.3.a.

522. IIHE. Institut Interuniversitaire des Hautes Energies. « Bases de la chromodynamique quantique ». Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB). Chapitre 2. Page 23, équation 2.38.

L'interaction est la suivante :

$$g f_{abc} [g_{\mu\nu} (p - q)_\rho + g_{\nu\rho} (q - r)_\mu + g_{\rho\mu} (r - p)_\nu]$$

avec :

- * f_{abc} la constante de structure des champs de couleur a, b, c , sur le groupe $SU(3)$,
- * $(p - q)_\rho$ la somme algébrique des impulsions p et q associée à la polarisation ρ du gluon de charge de couleur égale à c .

Notons encore que pour les calculs sur les diffusions profondément inélastiques et les processus Drell-Yan (diffusion proton-proton), Klasen utilise largement les règles de Feynman qu'il concrétise par l'obtention des fameux diagrammes.

Travaux de D. GROSS, D. POLITZEN, F. WILCZEK : *The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD*⁵²³ : Prix Nobel de Physique 2004

Les travaux de David Gross, David Politzen et Frank Wilczek sur les quarks aboutissant à « *la découverte de la liberté asymptotique* » en théorie de l'interaction forte ont valu à ces trois chercheurs américains le prix Nobel de Physique 2004.

Nous analysons leurs travaux afin de montrer les apports de Feynman sur leur découverte. Et pour cela, nous travaillons sur la conférence Nobel donnée par David Gross en 2004, qui retrace avec précision les différentes étapes de leurs questionnements.

Rappelons, comme nous l'avons vu en sous-section 8.2.3.a, que lorsque les quarks sont de plus en plus proches dans le proton ou le neutron, l'interaction forte (matérialisée par la charge de couleur) tend asymptotiquement vers une valeur nulle, à tel point que l'on peut les dire de plus en plus "libres" d'où le nom de "liberté asymptotique".

Dans son allocution, David Gross commence par préciser que le jeune étudiant qu'il était dans les années 1960 tenait pour challenge le fait de comprendre le comportement de la force nucléaire forte, celle qui agit dans les protons et les neutrons composant le noyau atomique : « *The prevalent feeling was that it would take a very long time to understand the nuclear force and that it would require revolutionary concepts. Freeman Dyson had asserted that "the correct theory will not be found in the next hundred years." For a young graduate student, such as myself, this was clearly the biggest challenge.* »⁵²⁴

Puis il précise que ses premiers cours en Théorie Quantique des Champs donnés à Berkeley en 1965, étaient basés sur les règles de Feynman issues du concept de l'intégrale de chemins conduisant à l'élaboration des fameux diagrammes dits de Feynman.

523. David Gross. 2005. « *The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD* ». Nobel Lecture. Reviews of Modern Physics. Volume 77. Pages 837-849.

524. Ibid. Page 837.

Il détaille ensuite avec précision ses recherches théoriques portant sur la modélisation *quark-gluon*. En effet, suite aux expériences de diffusions profondément inélastiques qu'il effectue au Centre de l'Accélérateur Linéaire de Standford (SLAC) et à son passage au CERN en 1969 où il réalise un travail d'analyse sur la diffusion profondément inélastique neutrino-nucléon, il avoue se passionner dans l'apport de la preuve de l'existence réelle des quarks et de l'interaction forte qui les relie les uns aux autres :

« *I was then totally convinced of the reality of quarks. They had to be more than just mnemonic devices for summarizing hadronic symmetries, as they were then universally regarded. They had to be physical poin like constituents of the nucleon. But how could that be? Surely strong interactions must exist between the quarks that would smear out their pointlike behavior.* » ^{524 bis}

Rappelons que la théorie des quarks a été formulée par Murray Gell-mann (né en 1929) sans apporter la preuve formelle de leur existence réelle. C'est par la théorie du groupe de symétrie SU(3) que Gell-Mann a proposé l'existence éventuelle de ces particules élémentaires constituant les protons et les neutrons. Aussi, on peut comprendre les motivations de l'auteur quant à son ambition d'étudier profondément ce qui se passe à l'intérieur des nucléons.

L'auteur mentionne sa rencontre avec Feynman concernant la description technique d'une diffusion profondément inélastique, selon les règles éditées par celui-ci dans la représentation symbolique de la trajectoire des particules élémentaires toujours issue du concept d'intégrale de chemins :

« *After the experiments at SLAC, Feynman came up with the parton picture of deep-inelastic scattering in term of assumed pointlike constituents partons. It complemented the approach to deep – inelastic scattering based on the operator product of currents, and had the advantage of being extendible to other processes.* » ⁵²⁵

Rappelons que le modèle des *partons* a été proposé par Feynman en 1969 pour modéliser des sous-particules ponctuelles indépendantes avant que ces *partons* ne soient identifiés aux quarks et aux gluons.

Dans le cadre de ses calculs sur la renormalisation associée aux processus de diffusion profondément inélastique, Gross, via l'équation de Callan – Symanzik, se mit à vouloir comprendre pourquoi des boucles de particules virtuelles situées dans le proton (ou le neutron) modifiaient le couplage fort associé aux grandes énergies mises en œuvre lors des diffusions profondément inélastiques.

Mentionnons d'ailleurs au passage que l'équation de Callan – Symanzik est obtenue à partir de fonctions renormalisées calculées à partir des diagrammes de Feynman⁵²⁶.

Après des hésitations et beaucoup de travail, Gross précise que le concept de l'intégrale de chemin abandonné pendant quelques années au profit d'autres théories et méthodes, refit

524 bis. Ibid. Page 841.

525. Ibid. Page 841.

526. Wikipédia. 9.12.2018. « Equation de Callan - Symanzik ».

surface et permit la réalisation de nouveaux outils théoriques utiles à l'analyse de la diffusion profondément inélastique :

« *Field theory became popular again, at least in application to the weak interactions. The path integral reemerged from obscurity. Kenneth Wilson's development of the operator-product expansion (Wilson, 1971) provided a new tool that could be applied to the analysis of deep-inelastic scattering*⁵²⁷. »

Tout au long de sa conférence Nobel, Gross mentionne les travaux de son ancien élève Frank Wilczek ainsi que ceux de David Politzer⁵²⁸, tous deux co-lauréats du prix Nobel de Physique 2004.

Enfin, la découverte de la liberté asymptotique vint confirmer, parmi d'autres preuves, la réalité physique des quarks et des gluons :

« *We now believe in the physical reality of quarks and gluons ; we now believe in the asymptotic simplicity of their interactions at high energies, so we can see quarks and gluons. The way in which we see quarks and gluons, indirectly through the effects they have on our measuring instruments, is not much different from the way we see electrons.* »⁵²⁹

Terminons en concluant ce qu'implique la découverte de la *liberté asymptotique* :

* La cohérence de la Théorie Quantique des Champs dans le contexte des hautes énergies :

« *Before asymptotic freedom it was expected that any quantum field theory would fail at sufficiently high energy, where the flaws of the renormalization procedure would appear. To deal with this, one would have to invoke some kind of fundamental length. In an asymptotically free theory this is not necessarily the case; the decrease of the effective coupling for large energy means that no new physics need arise at short distances. There are no infinities at all, the bare coupling is finite, and in fact it vanishes.* »⁵³⁰

* L'histoire de l'Univers à son plus proche début:

« *The universe has been expanding since the big bang ; thus early on it was hot and dense. To trace the history of the universe we must understand the dynamics that operated when the universe was hot and particles were very energetic. Before the standard Model we could not go back further than 200 000 years after the big bang. Today, especially since QCD simplifies at high energy, we can extrapolate to very early times when nucleons melted and quarks and gluons were liberated to form a quark-gluon plasma.* »⁵³¹

Le plasma de quarks et de gluons est un état de la chromodynamique quantique qui existe à des températures extrêmement élevées. Cet état consiste en une "soupe" de quarks et gluons presque libres, différent des autres états dans lesquels quarks et gluons sont confinés dans les protons et les neutrons sous l'influence de l'interaction forte.

Ce plasma de quarks et de gluons étaient éventuellement présents dans l'univers quelques dizaines de microsecondes après le big bang.

527. David Gross. 2005. « *The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD* ». Nobel Lecture. Reviews of Modern Physics. Volume 77. Page 842.

528. Ibid. Page 843.

529. Ibid. Page 847.

530. Ibid. Page 847.

531. Ibid. Page 848.

* L'idée d'unifier toutes les forces (les interactions) de la nature :

« Furthermore, the apparently insurmountable barrier to unification-namely, the large difference in the strengths of the strong interactions and the electroweak interactions - was seen to be a low - energy phenomenon. Since the strong interactions decrease in strength with increasing energy, these forces could have a common origin at very high energy. Georgi, Quinn, and Weinberg (1974) showed that the couplings run in such a way as to merge somewhere around $10^{14} - 10^{16}$ GeV. This is our most direct clue as to where the next threshold of fundamental physics lies, and it hints that at this immense energy all the forces of nature, including gravity, are unified. »⁵³²

8.2.4- La théorie des interactions faibles

Dans un premier temps conformément au modèle standard, nous allons introduire les particules élémentaires intervenant dans le contexte des interactions faibles, c'est-à-dire les bosons W^+ , W^- , Z_0 et expliquer leur rôle dans les phénomènes de désintégrations radioactives.

Rappelons que la désintégration radioactive, c'est-à-dire la radioactivité, concerne toute transformation du noyau d'un atome accompagnée d'émissions de corpuscules.

Nous présentons ensuite le groupe de symétrie $SU(2)$ à laquelle sont liés les bosons de jauge W^+ , W^- , Z_0 de l'interaction faible.

Rappelons que les bosons sont dits de *jauge*, tout comme les photons et les gluons, car ils sont associés à des interactions dites également de *jauge*.

En effet, comme nous l'avons vu en électromagnétisme, en Physique Quantique non-relativiste, en Electrodynamique Quantique et en Chromodynamique Quantique, les théories mathématiques mises en place dans le Modèle Standard de toute la physique des particules font intervenir des groupes de symétrie (les groupes de Lie) abéliens ou non-abéliens. Et l'utilisation de ces groupes de symétrie permet aussi bien à l'équation de Schrödinger qu'au Lagrangien du processus considéré d'être invariant à travers une transformation de jauge locale quel que soit la position d'un observateur en différents points de l'espace-temps. Cette façon de procéder est à rapprocher du raisonnement d'Einstein pour ce qui concerne l'invariance de l'intervalle d'espace-temps (de la relativité restreinte) à travers la transformation de Lorentz. En effet, les équations de la physique doivent être les mêmes pour tout observateur c'est-à-dire pour tout référentiel inertiel. C'est ainsi que tout phénomène de la nature pourra être considéré comme vrai, dans notre perception humaine des choses.

Notons aussi que les bosons W^+ , W^- , Z_0 , tout comme les photons et les gluons, sont qualifiés de *bosons vecteurs* ; le qualificatif *vecteur* vient du fait qu'ils "véhiculent" l'interaction.

Rappelons-nous aussi que l'introduction du Lagrangien est associé au principe de moindre action tel que Feynman l'a introduit (voir Annexe 14) dans son concept de l'intégrale de chemin.

532. Ibid. Page 848.

Nous pouvons dire d'une façon générale que le principe de moindre action associé au Lagrangien dévoile les mécanismes profonds d'une nature s'exerçant aussi bien à travers l'infiniment petit (domaine réservé au monde subatomique de la physique quantique), qu'à travers l'infiniment grand (domaine réservé à l'Univers dans son ensemble répondant aux lois de la relativité générale).

Souvenons-nous en effet que le principe de moindre action a conduit à l'obtention des équations relativistes de la gravitation d'Einstein.

Puis nous montrerons que l'étude et la recherche sur les interactions faibles s'effectuent encore de nos jours à travers les diagrammes de Feynman issus du concept d'intégrale de chemin. Pour cela, nous consulterons d'une part quelques thèses de doctorat⁵³³ portant sur la désintégration radioactive utilisant les diagrammes de Feynman et d'autre part les écrits⁵³⁴ du professeur Michael Klasen comme nous l'avons fait pour la Chromodynamique Quantique. Nous mentionnerons aussi les réflexions de Feynman sur l'opportunité d'utiliser ses diagrammes dans les domaines de la physique fondamentale relevant de l'interaction faible.⁵³⁵

Enfin, nous montrerons l'influence de Feynman à travers les travaux de Steven Weinberg (né en 1933, prix Nobel de Physique 1979) sur l'interaction électrofaible et ceux de Carlo Rubbia (né en 1934, prix Nobel de Physique 1984) sur la découverte expérimentale des particules W^+ , W^- et Z^0 .

Pour cela nous analyserons la Conférence Nobel de Weinberg⁵³⁶ et celle de Rubbia⁵³⁷.

8.2.4.a) Le modèle standard des particules élémentaires en Radioactivité

L'interaction faible, responsable de la désintégration radioactive des particules subatomiques, est due à l'échange des bosons W^+ , W^- et Z^0 .

Les bosons W^+ et W^- ont la particularité pour les quarks d'échanger de l'énergie, de la masse et de la charge électrique.

Ainsi, par l'intermédiaire de l'interaction faible, nous dirons que les quarks ont la possibilité de changer de famille et de saveur.

533. Alice Florent. 2014. « *Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud. Laboratoire Leprince – Ringuet.

Thomas Millet. 2007. « *Recherche de gluinos dans la topologie à jets de quarks b et énergie transverse manquante avec le détecteur D0 au TeVatron* ». Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon-I.

Arnaud Chapon. 2011. « *Mesure des processus de double désintégration bêta du ^{100}Mo vers l'état excité 0_1^+ du ^{100}Ru dans l'expérience NEMO3* ». Thèse de doctorat. Université de Caen Basse-Normandie.

534. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge* ». Dunod.

535. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992.

536. Steven Weinberg. 1979. « *Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions* ». Nobel Lecture.

537. Carlo Rubbia. 1984. « *Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0* ». Nobel Lecture.

Les bosons W^+ , W^- et Z^0 ont un moment cinétique intrinsèque s égal à 1 , appelé aussi moment angulaire intrinsèque (le spin ou nombre quantique de spin), tel que nous en avons parlé en sous-section 8.2.3.a.

Si l'électron possède une masse égale à $0,511 \text{ MeV}$, les quarks d et u ont une masse d'environ 10 MeV , les photons et les gluons une masse strictement égale à zéro, et les bosons W^+ , W^- , Z^0 une masse sensiblement égale à $80\,000 \text{ MeV}$.

Cette masse très élevée pour les bosons associés à l'interaction faible, explique la très courte portée de l'interaction faible par rapport aux autres interactions.

Quant à la charge électrique, elle est égale à :

- * $+1e$ pour le boson W^+ ,
- * $-1e$ pour le boson W^- ,
- * 0 pour le boson Z^0 .

Afin de bien comprendre la théorie de l'interaction faible, il m'a paru intéressant en Annexe 26 de développer les diagrammes de Feynman associés aux processus de désintégration β^- , β^+ et celle faisant intervenir le boson Z^0 .

Ainsi, en nous reportant à l'Annexe 26, nous constatons que la désintégration β^- se manifeste lorsqu'un neutron se désintègre en proton en émettant un électron et un antineutrino.

Il s'agit d'un des cas où par exemple l'Uranium 239 obtenu artificiellement se désintègre naturellement de lui-même en Neptunium 239.

Dans ce cas précis, nous avons montré grâce à la symbolique apportée par le diagramme de Feynman correspondant, comment a pu s'effectuer la transformation d'un quark d en quark u sous l'influence de la particule intermédiaire que nous nommons *boson* W^- ; cette particule W^- ayant eu l'opportunité de substituer une charge électrique $-1e$ à un quark incident d de charge électrique $-\frac{1}{3}e$ tel que :

$$\left(-\frac{1}{3}e\right) - (-1e) = +\frac{2}{3}e,$$

donnant ainsi un quark u de charge électrique égale à $+\frac{2}{3}e$.

Toujours en nous reportant à l'Annexe 26, nous constatons que la désintégration β^+ se manifeste lorsqu'un proton se désintègre en neutron en émettant un positron et un neutrino.

Il s'agit d'un des cas où par exemple le Fluor 18 se désintègre naturellement en Oxygène 18 en émettant entre autre des positrons utilisés dans certaines tomographies nommées PET-Scan, permettant en cancérologie de diagnostiquer assez finement certaines tumeurs malignes.

Dans ce cas, nous avons montré comment la transformation d'un quark u en quark d sous l'influence de la particule intermédiaire que nous nommons *boson* W^+ ; cette particule W^+ ayant eu l'opportunité de substituer une charge électrique $+1e$ à un quark incident u de charge électrique $+\frac{2}{3}e$ tel que :

$$\left(+\frac{2}{3}e\right) - (+1e) = -\frac{1}{3}e,$$

donnant ainsi un quark d de charge électrique égale à $-\frac{1}{3}e$.

Nous avons aussi montré en Annexe 26 que la formation d'un courant neutre faible exige la présence de la particule Z^0 comme vecteur de la force faible. En d'autres termes, le courant neutre correspond à l'échange d'un boson neutre Z^0 entre deux quarks de saveur différente.

Le diagramme de Feynman représente donc le couplage du boson Z^0 avec un quark u et un quark d qui interagissent entre eux. Le courant neutre faible de charge électrique nulle résulte ainsi de l'échange du boson Z^0 entre ces deux quarks.

Un courant neutre faible peut aussi se former lors du couplage du boson Z^0 avec un neutrino et un électron qui interagissent entre eux en échangeant un boson neutre Z^0 .⁵³⁸

Mentionnons que les bosons de jauge de l'interaction faible (W^+ , W^- et Z^0), de masse non nulle, sont liés à la symétrie⁵³⁹ (ou invariance⁵⁴⁰) du groupe de Lie $SU(2)$, que nous allons approfondir ci-après.

8.2.4.b) Le groupe de symétrisation $SU(2)$ et l'interaction faible

Il est intéressant de commencer par rentrer dans la définition du groupe $SU(2)$ car :

* d'une part ceci permet d'avoir une idée de la notion d'invariance de jauge associée à l'interaction faible,

et

* d'autre part nous allons tout naturellement aborder la notion de *spin* de l'espace tridimensionnel qui est très utile pour la compréhension de la section 8.2.5 traitant d'une particule indispensable au modèle standard : le boson de Higgs.

Nous pourrions ainsi prendre réellement conscience, si ce n'est déjà fait, de la puissance des mathématiques dans un contexte des plus théoriques. En effet, dans ce domaine de l'infiniment petit de la physique, l'intuition guidée par nos sens n'a plus cours et laisse la place à une intuition abstraite sollicitée par le langage de la nature que sont les mathématiques.

Nous traitons le sujet en Annexe 27 à travers les écrits de Jean Hladik (né en 1935) relatifs à son cours de Mécanique Quantique.⁵⁴¹

Ce groupe de symétrie $SU(2)$ s'appliquant à tout doublet associé à l'interaction faible, nous dirons que le groupe $SU(2)$ a toutes les caractéristiques voulues pour qu'on lui applique la procédure de symétrisation de jauge.

La théorie de Yang-Mills procure donc le formalisme adéquat dans la résolution de la problématique posée par l'interaction faible en conduisant à l'identification d'un champ de potentiel spinoriel. La quantification de ce champ amène à distinguer trois bosons de jauge : les bosons W^+ , W^- et Z^0 , ce qui est logique puisque le groupe $SU(2)$ est de dimension 3.

Ainsi, la théorie de Yang-Mills permet de rendre compte de la désintégration β grâce aux bosons W^+ et W^- respectivement chargés électriquement $+1e$ et $-1e$.

538. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Figure 87, page 185.

539. Wikipédia. 18 Décembre 2018. « *Invariance. Physique théorique* ».

540. Wikipédia. 18 Décembre 2018. « *Symétrie (physique)* ».

541. Hladik. Octobre 2010. « *Mécanique Quantique. Atomes et noyaux. Applications technologiques* ». Troisième édition. Dunod. Page 203 à 209.

8.2.4.c) L'interaction faible étudiée à partir des diagrammes de Feynman : Travaux des physiciens

Comme mentionné en début de section 8.2.4, nous commençons par analyser quelques thèses de doctorat portant sur l'interaction faible utilisant les concepts de l'intégrale de chemins conduisant aux fameux diagrammes, puis nous examinons les écrits de Richard Feynman et de Michael Klasen avant de terminer sur les conférences Nobel de Steven Weinberg et de Carlo Rubbia.

Thèse d'Alice FLORENT : *Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS*⁵⁴³

Rappelons que les partons sont les constituants des hadrons (nom générique donné aux protons et aux neutrons situés à l'intérieur du noyau atomique).

Les partons sont donc représentés par les quarks u , les quarks d , leurs antiquarks correspondants et les gluons.

Une des particularités des partons est que leur caractérisation est fonction de l'échelle de l'interaction mise en œuvre, définie par l'inverse du module de la quantité de mouvement transférée au hadron lors de l'interaction.

Il faut en effet savoir qu'un simple quark à une échelle d'interaction donnée (échelle liée en fait à l'énergie de collision entre deux hadrons) peut se révéler être une superposition d'un quark et d'un gluon.

Si à basse énergie, un hadron (proton ou neutron) ne contient que les trois quarks connus, à des énergies plus élevées, il est possible d'observer une mer de partons composée de gluons et d'autres quarks que les quarks u et d .

Les fonctions de distribution de partons (PDF : Parton Distribution Functions) sont les densités de probabilité de trouver un parton portant une fraction x de la quantité de mouvement longitudinale du hadron, avec une certaine impulsion d'énergie Q^2 transférée au hadron.⁵⁴⁴

Mentionnons que le détecteur CMS (Compact Muon Solenoid : Solénoïde Compact à Muons) fait partie de l'environnement du LHC (Large Hadron Collider : Grand Collisionneur de Hadrons) situé au CERN à Genève.

Le LHC, plus puissant accélérateur de particules jamais construit, a commencé à fonctionner le 10 septembre 2008. Son but est de fracasser des protons les uns contre les autres et de prédire la probabilité des différentes interactions qui surviennent.

A travers la thèse d'Alice Florent, nous constatons une forte propension à utiliser les diagrammes de Feynman pour tout ce qui touche aux explications théoriques.

543. Alice Florent, 2014. « *Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud. Laboratoire Leprince – Ringuet.

544. Ibid. Page 38

Wikipédia, 27.12.2018. « *Partons* ».

En effet, l'auteur montre bien à quel point les diagrammes de Feynman fournissent une manière évocatrice de souligner tout ce qui peut arriver lorsque des particules se rencontrent et interagissent. Et ceci particulièrement dans son cas où il lui faut enquêter les concepts liés à l'étude du boson W en collision proton-plomb.

Un diagramme de Feynman particulièrement intéressant fait intervenir tous les bosons électrofaibles⁵⁴⁵.

Il s'agit d'une Diffusion Profondément Inélastique (DIS : Deep Inelastic Scattering) entre un électron et un quark par l'échange d'un photon sur le dessin de gauche. Le dessin de droite fait intervenir tous les bosons électrofaibles, sachant que l'intérieur du proton est décrit par la fonction de distribution de partons (PDF : Parton Distribution Functions).

Thèse de Thomas MILLET : *Recherche de gluinos dans la topologie à jets de quarks b et énergie transverse manquante avec le détecteur D0 au TeVatron*⁵⁴⁶

La supersymétrie, souvent appelée *Susy*, associe à chaque particule du modèle standard une nouvelle particule appelée son *partenaire supersymétrique*. Dans un tel cas, chaque fermion devrait avoir un boson *super-partenaire* et, réciproquement, à chaque boson devrait correspondre un fermion lui aussi dénommé *super-partenaire*.

Le nom de ces *super-partenaires* est formé en ajoutant un préfixe *s-* si la particule du modèle standard est un fermion, ou un suffixe *-ino* si c'est un boson.

Le TeVatron, accélérateur de particules circulaire du Fermilab de Batavia dans l'Illinois aux Etats-Unis, était le deuxième plus puissant collisionneur au monde, après le LHC du CERN. Le LHC ayant été mis en service en 2008 (voir la thèse d'Alice Florent ci-avant), le TeVatron a fermé le 30 septembre 2011 du fait de sa forte concurrence avec le LHC

Le travail de l'auteur consiste à rechercher un signal supersymétrique sachant que dans un collisionneur hadronique comme le TeVatron (le LHC n'était pas encore opérationnel en 2006) les particules supersymétriques seraient toujours produites par deux voies différentes :

- * Les partons issus des protons et antiprotons interagissant par interaction faible et qui donneraient des sleptons tels que des sélectrons, des smuons et des sneutrinos,
- * Les partons interagissant par interaction forte et qui engendreraient des squarks et des gluinos.

Dans ce collisionneur hadronique, la section efficace de production de squarks et de gluinos serait toujours supérieure à celle qui produirait des sleptons.

Ceci dit, les signatures des états finaux restent toujours assez difficiles à isoler.

Dans cette thèse, l'auteur recherche le *partenaire supersymétrique* du gluon qui a pour nom *gluino* et qui est classé en tant que fermion de spin 1/2 dit de Majorana (1906-1938), ce fermion ayant la particularité d'être sa propre antiparticule.

545. Alice Florent. 2014. « *Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{S_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS* ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud. Laboratoire Leprince – Ringuet. Figure 1.10, page 39.

546. Thomas Millet. 2007. « *Recherche de gluinos dans la topologie à jets de quarks b et énergie transverse manquante avec le détecteur D0 au TeVatron* ». Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon-I.

Dans les théories supersymétriques, les gluinos interagissent via la force forte comme un octet de couleur. Toujours dans les théories supersymétriques, les particules qui interagissent par interactions fortes, comme les squarks et les gluinos, sont systématiquement plus lourdes que celle qui interagissent par interactions faibles, comme les sleptons et les higgsinos. Rappelons que toutes ces particules supersymétriques ne sont encore que des particules hypothétiques et n'ont pas encore été découvertes au LHC.

Les gluinos sont associés à l'interaction forte mais nous avons examiné cette thèse dans le cadre de l'interaction faible et électrofaible, car dans la partie théorique de son travail, l'auteur associe les diagrammes de Feynman :

* d'une part dans son explication théorique du développement perturbatif ⁵⁴⁷ :

« L'interprétation proposée par Feynman pour chacun de ces termes est la propagation d'une particule chargée, la propagation d'un photon et l'absorption ou l'émission d'un photon par une particule chargée. Ces différents phénomènes physiques sont résumés dans les **diagrammes de Feynman** (1947), qui sont bien plus que de simples schémas. En fait, ils correspondent au développement mathématique d'un processus physique donné et sont des aides visuelles pour le calcul des termes du développement perturbatif. Un exemple d'un tel calcul est représenté sur la Figure 1.2. Les lignes externes sont les particules initiales et finales du processus étudié, alors que les intersections entre les lignes sont les vertex de l'interaction. » ⁵⁴⁸

* d'autre part dans son explication théorique concernant les interactions faible ⁵⁴⁹ et ses recherches proprement dites ^{549 bis}.

En effet, ses explications théoriques sur les interactions faibles précèdent ses commentaires sur le mécanisme de brisure spontanée de symétrie. Et ces commentaires complètent la description de l'interaction électrofaible qui sera le prélude aux hypothèses de Higgs (né en 1929) que nous verrons en section 8.2.5 :

* « Le modèle standard électrofaible et le mécanisme de Higgs prédisent l'existence de courant neutre, l'existence de bosons de jauge massifs et l'existence d'une particule scalaire massive : le boson de Higgs. » ⁵⁵⁰

Il est important de savoir d'où est venue cette théorie de la supersymétrie. En fait, cet élargissement des propriétés de symétrie des Théories Quantiques des Champs a été proposé dans les années 1970, afin de solutionner certains problèmes conceptuels du modèle standard de la physique des particules. Ceci a conduit à l'élaboration d'une nouvelle théorie des interactions fondamentales.

Et cette nouvelle théorie, la supersymétrie, permet de corriger le problème des divergences quantiques introduites par les corrections radioactives à la masse des scalaires, c'est-à-dire à la masse du boson de Higgs dans le cas du modèle standard.

La conclusion de l'auteur, pour ce qui concerne le cadre théorique de sa thèse, est la suivante :

547. Ibid. Figure 1.2, page 20.

548. Ibid. Page 19.

549. Ibid. Figure 1.3, page 23.

549 bis. Ibid. Figure 1.12, page 45.

550. Ibid. Page 24.

« La supersymétrie est actuellement un modèle théorique hypothétique qui n'a pas encore été observé expérimentalement. De nombreuses analyses au LEP puis au TeVatron ont permis de repousser les limites du spectre de masse sans jamais observer de preuves de l'existence de particules supersymétriques. »⁵⁵¹.

Mentionnons que certaines particules supersymétriques pourraient être très abondantes dans l'Univers et constituer la matière noire. Il faut espérer pouvoir les mettre en évidence de façon indirecte dans un collisionneur de particules comme le LHC.

Thèse d'Arnaud CHAPPON : *Mesure des processus de double désintégration bêta du ^{100}Mo vers l'état excité 0_1^+ du ^{100}Ru dans l'expérience N_{EMO3}* ⁵⁵²

L'isotope radioactif ^{100}Mo de l'élément chimique Molybdène (numéro atomique 42) est un radionucléide primordial de demi-vie 1×10^{19} années. Ce radionucléide est présent sur terre depuis la formation de cette dernière.

Le Ruthénium, élément chimique de numéro atomique 44, a pour isotope stable le ^{100}Ru .

L'expérience N_{EMO3} s'est déroulée dans le laboratoire souterrain de Modane (LSM) dans le tunnel routier du Fréjus de 2003 à 2011.

Cette expérience consiste à rechercher des désintégrations doubles bêta sans émission de neutrinos. Cela prouverait alors que le neutrino serait en fait une particule dite de Majorana, c'est-à-dire que le neutrino et l'antineutrino seraient des particules identiques.

Rappelons-nous en effet (voir Annexe 26) que la désintégration β^- donne, entre autre, un antineutrino. Aussi, si dans le cas d'une double désintégration β^- , on ne trouve aucune émission d'antineutrinos, cela veut tout simplement dire que les deux antineutrinos se sont annihilés prouvant que l'antineutrino est en même temps neutrino.

Dans la première partie de sa thèse⁵⁵³, l'auteur présente le neutrino dans et au-delà du Modèle standard de la physique des particules. L'auteur effectue une caractérisation complète du neutrino en mentionnant l'intérêt d'une double désintégration bêta sans émission de neutrino.

Une telle physique du neutrino est abordée en utilisant largement les diagrammes de Feynman :

- * Figure 1.1 page 6 : Illustration de l'interaction universelle de Fermi,
- * Figure 1.2 page 7 : Illustration de la théorie de l'interaction faible vue par Fermi (à gauche) et par Glashow, Weinberg, Salam (à droite),
- * Figure 1.6 page 17 : Représentation de l'interaction des neutrinos dans la matière ; seul le ν_e peut interagir par courant chargé : c'est l'effet *MSW*,
- * Figure 1.9 page 21 : Désintégration β^- ,
- * Figure 2.3 page 24 : Double désintégration β^- avec émission de deux antineutrinos,
- * Figure 2.4 page 25 : Double désintégration β^- sans émission d'antineutrinos ; échange de neutrinos de Majorana par courant purement gauche (V-A),

551. Ibid. Page 48.

552. Arnaud Chapon. 2011. « *Mesure des processus de double désintégration bêta du ^{100}Mo vers l'état excité 0_1^+ du ^{100}Ru dans l'expérience N_{EMO3}* ». Thèse de doctorat. Université de Caen Basse-Normandie.

553. Ibid. Pages 3 à 34.

* Figure 2.7 page 27: Illustration d'une transition $\bar{\nu} \rightarrow \nu$, induite par double désintégration bêta sans émission de neutrino, justifiant l'apparition d'un terme de masse de Majorana.

Publication de Richard FEYNMAN : *Lumière et matière. Une étrange histoire*⁵⁵⁴

Dans cette publication déjà citée, Feynman s'intéresse, entre autre, aux phénomènes physiques mettant en jeu l'interaction faible⁵⁵⁵, montrant ainsi la généralisation et la pérennité de son concept d'intégrale de chemins.

Il traduit les processus suivants :

* Figure 85 page 183 : Désintégration β^- mettant en œuvre le boson W^- (voir sous-section 2.4.7.b),

* Figure 87 page 185 : Les interactions appelées "courants neutres" mettant en jeu le boson Z^0 (voir sous-section 2.4.7.b),

* Figure 88 page 185 : Couplage entre un boson W^- , un boson W^+ et un boson Z^0 .

Et pour ce qui se rapporte à la figure 88, Feynman revient sur l'idée de compléter la théorie de l'interaction faible ; aussi, il cite Weinberg et Salam pour les travaux qui leur ont permis de recevoir le prix Nobel de Physique 1979, avec toutefois un esprit critique à leur rencontre :

« On complète la théorie des W de façon particulièrement élégante en ménageant la possibilité de couplage à trois branches entre les trois types de W (Fig.88). La constante de couplage observée pour les W est tout à fait similaire à celle du photon – de l'ordre de j . Les trois W et le photon pourraient donc bien n'être que divers aspects du même objet. Steven Weinberg et Abdus Salam ont entrepris de combiner l'électrodynamique quantique avec ce que l'on nomme les "interactions faibles", ("weak interactions" en anglais, les interactions avec les W) pour faire une seule théorie quantique, et ils y sont parvenus, mais on peut dire que leur théorie laisse encore voir des traces de raccords ! Le photon et les trois W sont certainement apparentés, d'une façon ou d'une autre, mais la connexion est encore difficile à distinguer clairement à l'heure actuelle – on voit les "coutures", il manque les finitions qui rehausseraient l'élégance de cette unification et la rendrait donc probablement plus correcte. »⁵⁵⁶

554. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992.

555. Ibid. Pages 182 à 186.

556. Ibid. Pages 184 et 185.

Dans sa publication qui est le contenu de son enseignement à l'Université Joseph-Fourier de Grenoble, Klasen utilise les diagrammes de Feynman dans le traitement des interactions dites électrofaibles.

Les règles de Feynman se déduisent du Lagrangien L_{GSW} (du nom de ceux qui l'ont construit c'est-à-dire : Glashow, Salam et Weinberg) fondé :

* sur la notion de Dérivée covariante sous les transformations locales de jauge $SU(2) \times U(1)$,

* sur les tenseurs des champs associés aux bosons W^+ , W^- et Z^0 .

Klasen utilise la notion symbolique apportée par les diagrammes de Feynman dans les processus suivants :

* Figure 5.12 page 99 : Désintégration d'un neutron en proton, électron et antineutrino dans la théorie de Fermi,

* Figure 5.13 page 101 : Désintégration d'un muon en neutrino, électron et antineutrino par un échange de boson faible W^- chargé,

(voir section * Figure 5.14 page 103 : Diffusion d'un antineutrino $\bar{\nu}$ et d'un électron par échange d'un boson neutre Z^0 ou d'un boson W^- chargé,

Klasen se sert aussi des règles de Feynman dans les cas suivants :

* Figure 5.15 page 107 : Règles de Feynman pour l'interaction d'un boson W^- avec deux membres d'un doublet gauche (côté gauche) et d'un boson Z^0 avec deux fermions f (côté droit). Les flèches indiquent la direction du courant fermionique.

Rappelons que le courant faible chargé (courant leptonique dû aux électrons et aux neutrinos) associe un neutrino ν à un électron e de chiralité gauche. Ainsi on peut regrouper le couple (ν, e) formant deux états quantiques en un *doublet* tel que vu en Annexe 27 (partie : *Les spineurs de l'espace tridimensionnel*) :

$$\Psi_{\text{Left}} = \begin{pmatrix} \Psi_{\nu} \\ \Psi_e \end{pmatrix}_{\text{Left}},$$

Et ce doublet transformé conformément à une symétrie $SU(2)_{\text{Left}}$, isomorphe à celle du moment cinétique orbital S associé au nombre quantique de spin s (voir ces notions en sous-section 8.2.4.a) est appelé *isospin faible*.

Rappelons aussi que l'électron de chiralité droite $\Psi_{e,\text{Right}}$ n'a pas de partenaire et sera donc représenté en *singulet*.

Pour simplifier nous pouvons dire que la chiralité pour l'électron, liée à son moment cinétique orbital S (voir sous-section 8.2.3.a), est associée à son mouvement de rotation autour de son axe dirigé en haut (sens de rotation à gauche conformément au sens trigonométrique) ou à son

557. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge* ». Dunod.

mouvement de rotation autour de son axe dirigé en bas (sens de rotation à droite conformément au sens des aiguilles d'une montre).

Travaux de Steven WEINBERG : *Conceptual foundation of the unified theory of weak and Electromagnetic interactions*⁵⁵⁸ : Prix Nobel de Physique 1979

Steven Weinberg est un physicien américain né le 3 mai 1933. Il est le principal investigateur avec Abdus Salam (1926-1996) et Sheldon Glashow (né le 5 décembre 1932) de la théorie électrofaible, qui leur a valu le prix Nobel de Physique 1979.

La théorie électrofaible est une théorie quantique des champs qui est fondée, comme nous l'avons dit précédemment, sur le groupes de jauge $SU(2) \times U(1)$ avec, rappelons-le, pour plus de précision :

- * $SU(2)$ le groupe de jauge associé à l'interaction faible dont les bosons de jauge sont les bosons W^+ , W^- et Z^0 ,
- * $U(1)$ le groupe de jauge associé à l'Electrodynamique Quantique dont le boson est le photon.

La théorie a prédit les masses suivantes :

- * 80 GeV pour les bosons W^+ et W^- ,
- * 90 GeV pour le boson Z^0 ,
- * 0 GeV pour le boson photon, ce qui confirme la théorie de l'électromagnétisme.

Et cette prédiction s'est avérée conforme à ce qu'a trouvé expérimentalement Carlo Rubbia comme nous allons le voir ultérieurement⁵⁵⁹.

Le mérite de Steven Weinberg a été d'entrevoir qu'à partir d'une certaine énergie croissante, vers 100 GeV , la force associée à l'interaction électromagnétique et la force associée à l'interaction faible, devenant du même ordre de grandeur, il est permis de les considérer comme faisant partie d'une même et unique théorie qui va s'appeler la théorie électrofaible. En d'autre terme, l'interaction électrofaible, appelée également force électrofaible, est la description unifiée de deux des quatre interactions fondamentales de l'univers, à savoir l'interaction électromagnétique et l'interaction faible. Et ces deux interactions formaient au début du monde une seule et même force. La température de l'univers se refroidissant après le Big Bang,

558. Steven Weinberg. 1979. « *Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions* ». Nobel Lecture.

559. Carlo Rubbia. 1984. « *Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0* ». Nobel Lecture. Page 282.

l'énergie décroissante a favorisé la séparation de cette force électrofaible en deux forces distinctes que l'on appréhende de nos jours :

* la force électromagnétique rattachant les protons et les électrons à l'intérieur de l'atome et qui sera cruciale dans l'apparition des éléments naturels puis des molécules,

* la force faible responsable de la transformation des protons en neutrons et réciproquement, base du fondement même de la radioactivité.

Mentionnons que peu après les premiers instants de l'univers, lorsque la température de l'univers diminue, l'interaction faible apparaît donnant naissance à un phénomène d'asymétrie entre l'interaction électromagnétique et l'interaction faible, brisant ainsi spontanément la symétrie de jauge $SU(2)_{Left}$ définie précédemment dans cette sous-section 8.2.4.c^{559 bis}

La cause, due au mécanisme dit de Higgs (que nous verrons en section 8.2.5) sous-entend le processus suivant :

« Un champ scalaire sous-jacent, appelé champ de Higgs, initialement invariant à travers le groupe de jauge $SU(2) \times U(1)$, acquiert une valeur moyenne non nulle dans le vide. Et cette valeur moyenne non nulle devenant comparable à un "gel" du champ de Higgs [ne répondant plus au groupe de symétrie de jauge $SU(2) \times U(1)$] explique les masses inertielles des bosons de jauge W^+ , W^- et Z^0 . »⁵⁶⁰

Ainsi après la brisure de symétrie dont nous venons de parler :

« tout l'espace qui nous entoure est rempli d'un champ quantique, appelé "champ de Higgs" qui permet à chaque particule baignant dans ce champ d'acquiescer une masse lorsqu'elle interagit avec lui. Et comme dans la théorie quantique des champs, il devait émaner de ce champ une particule (le boson de Higgs). Mais selon mes calculs, celle-ci devait être massive

Une image que je n'aime pas consiste à dire que la masse des particules est d'autant plus grande que celles-ci sont freinées dans le champ de Higgs à la manière d'une cuillère plus ou moins grosse qu'on traîne dans un pot de mélasse. Car cette description-là implique une distance d'énergie, ce qui n'est pas le cas dans le mécanisme BEH (Brout-Englert-Higgs). Pour moi, l'explication la plus acceptable est celle d'une célébrité (symbolisant une particule) entrant dans une pièce remplie d'invités (imageant le champ de Higgs) qui l'accostent : même si sa vitesse de marche n'est pas réduite, la star zigzague, si bien qu'elle ne traverse pas la pièce aussi vite que si celle-ci était vide. Ainsi, sa progression est d'autant plus freinée qu'elle interagit avec l'assistance. Tout comme une particule devient plus massive (au sens de masse inertielle) qu'elle interagit avec le champ de Higgs. »⁵⁶¹

Le photon, associé à l'interaction électromagnétique qui à priori ne s'est trouvé ni responsable, ni concerné par la brisure spontanée de symétrie précédente, reste donc sans masse, permettant une détection facile des ondes électromagnétiques à grande distance.

559 bis. Voir dans cette sous-section 4.2.3.c la partie intitulée : « Publication de Michael KLASSEN : *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de Jauge* ».

560. Wikipédia. 15 janvier 2019. « *Interaction électrofaible* ».

561. La Recherche. Février 2014. Numéro 484. « *Interview de Peter Higgs* ». Page 38 à 41.

Signalons que lorsque Weinberg, Salam et Glashow ont indépendamment proposé la théorie unifiée de l'interaction faible, il n'était pas possible de prouver l'existence réelle des bosons W^+ , W^- et Z^0 .

En effet, le CERN était en train de construire le *Super Proton Synchrotron* (SPS) d'une puissance de 400 GeV .

C'est sur les conseils de Carlo Rubbia dont nous avons parlé précédemment, que cet accélérateur de protons à très vite été transformé en collisionneur à protons et antiprotons de 500 GeV .⁵⁶²

Et c'est justement cette transformation qui a permis à Rubbia de découvrir l'existence réelle des bosons W^+ , W^- et Z^0 ainsi que la mesure expérimentale de leur masse, comme nous le verrons ultérieurement.

Dans sa conférence Nobel, Weinberg résume assez bien ce qui précède. De plus, il décrit avec force de détails tous les problèmes qu'il a rencontré, et surtout comment il les a résolu.

Il mentionne aussi ses hésitations et ses doutes quant aux théories mises en œuvre par ses collègues physiciens théoriciens :

« *I have to admit that when I first saw 't Hooft's paper in 1971, I was **not convinced** that he had found the way to prove renormalizability.* »⁵⁶³

Tout au long de sa conférence, l'auteur cite abondamment les travaux de Richard Feynman. Il va même jusqu'à citer la puissance du formalisme de l'intégrale de chemin qu'il avoue ne pas maîtriser assez et qui, sans cela, lui aurait permis de comprendre plus vite le bien-fondé de la renormalisation associée à la théorie unifiée des interactions faible et électromagnétique :

« *The trouble [se rapportant à la renormalisation] was not with 't Hooft, but with me. I was simply not familiar enough with the **path integral formalism** on which 't Hooft's work was based, and I wanted to see a derivation of the Feynman rules in 't Hooft's gauge from canonical quantization. That was soon supplied (for a lited class of gauge theories) by a paper of Ben Lee, and after Lee's paper I was ready to regard the renormalizability of the unified theory as essentially proved.* »⁵⁶⁴

L'auteur mentionne aussi qu'il doit aux travaux de Feynman, Schwinger, Tomonaga et Dyson, concernant la renormalisation associée aux problèmes des infinis, le fait d'avoir réussi à unifier l'interaction faible et l'interaction électromagnétique :

« *The other is the old stuggle to come to terms with the infinities in quantum field theories. To a remarkable degree, our present detailed theories of elementary particle interactions can be understood deductively, as consequences of symmetry principles and of a principle of **renormalizability** which is invoked to deal with the infinities. I will also briefly describe how the convergence of these lines of thought led to my own work on the unification of weak and electromagnetic interactions.* »⁵⁶⁵

562. Carlo Rubbia. 1984. « *Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0* ». Nobel Lecture. Page 245.

563. Steven Weinberg. 1979. « *Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions* ». Nobel Lecture. Page 549.

564. Ibid. Pages 549 et 550.

565. Ibid. Page 543.

566. Ibid. Page 557, note 17.

Toujours pour ce qui se rapporte à la renormalisation dont nous avons parlé en section 6.3.4, Weinberg cite les trois plus importantes publications de Feynman qui lui ont permis de concrétiser ses recherches.

Dans ces trois publications, que nous avons largement analysées au chapitre 2 de cette thèse, Feynman explique en détail sa théorie de l'Electrodynamique Quantique à partir de son concept d'intégrale de chemins via la renormalisation.

Ainsi, ces trois articles de Feynman mentionnés par Weinberg sont les suivant⁵⁶⁶ :

* *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Avril 1948, Review of Modern Physics, Volume 20, 367 (voir chapitre 5 de ma thèse),

* *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, Septembre 1949, Physical Review, Volume 76, Number 6 (voir chapitre 6 de ma thèse),

* *Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction*, Novembre 1950, Physical Review, Volume 80, Number 3 (voir chapitre 7 de ma thèse).

Mais laissons Weinberg s'exprimer :

*« It must have seemed that these infinities would be a disaster for the quantum field theory that had just been developed by Heisenberg and Pauli in 1929-30. And indeed, these infinities did lead to a sense of discouragement about quantum field theory, and many attempts were made in the 1930's and early 1940's to find alternatives. The problem was solved (at least for quantum electrodynamics) after the war, by **Feynman**, Schwinger, and Tomonaga and Dyson. It was found that all infinities disappear if one identifies the observed finite values of the electron mass and charge, not with the parameter m and e appearing in the Lagrangian, but with the electron mass and charge that are calculated from m and e , when one takes into account the fact that the electron and photon are always surrounded with clouds of virtual photons and electron-positron pairs. Suddenly all sorts of calculations became possible, and gave results in spectacular agreement with experiment. »⁵⁶⁷*

L'auteur mentionne aussi le rôle qu'ont joué les règles de Feynman dans la réussite de ses travaux :

*« The **Feynman** rules for Yang-Mills theories with unbroken gauge symmetries had been worked out by deWitt, Faddeev and Popov and others, and it was known that such theories are renormalizable. »⁵⁶⁸*

*« Finally, in 1971 't Hooft showed in a beautiful paper how the problem could be solved. He invented a gauge, like the "Feynman gauge" in QED, in which the **Feynman** rules manifestly lead to only a finite number of types of ultraviolet divergence. It was also necessary to show that these infinities satisfied essentially the same constraints as the Lagrangian itself, so that they could be absorbed into redefinition of the parameters of the theory. »⁵⁶⁹*

567. Ibid. Page 546.

568. Ibid. Page 549.

569. Ibid. Page 549.

Travaux de Carlo RUBBIA : *Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0* ⁵⁷⁰: Prix Nobel de Physique 1984

Carlo Rubbia, né le 31 mars 1934, est un physicien italien, colauréat avec Simon Van der Meer du prix Nobel de Physique 1984, pour la découverte des bosons W^+ , W^- et Z^0 .

Les bosons W^+ , W^- et Z^0 sont les seuls bosons capable de changer la saveur des quarks, comme nous l'avons vu en Annexe 26 ; et le mécanisme de Higgs comme nous en avons parlé ci-avant, a pour conséquence de doter ces bosons d'une masse importante.

Soulignons aussi que l'interaction faible permet à tous les leptons (les électrons, les muons, les tauons, les neutrinos, toutes les antiparticules de ces dernières) et à tous les quarks, d'échanger de l'énergie, de la masse et de la charge électrique.

De par leur portée d'environ $10^{-17}m$, les bosons W^+ , W^- et Z^0 sont limités au noyau atomique, et leur masse respectivement égale à environ $80 GeV$ et $90GeV$ (pour Z^0) leur donne une durée d'existence inférieure à $10^{-24}s$.

Cette portée d'action de l'interaction faible est d'environ cent fois plus petite que celle de l'interaction forte, alors que l'interaction électromagnétique et l'interaction gravitationnelle ont une portée quasiment infinie.

Dans sa conférence, Rubbia commence par présenter l'interaction faible en utilisant les diagrammes de Feynman :

* Figure 2a page 242 : *Feynman diagram of virtual W exchange mediating the weak process,*

* Figure 2b page 242 : *Feynman diagram for the direct production of a W particle. Note that the quark transformation has been replaced by a quark-antiquark annihilation.*

Il convient d'insister encore que c'est sous la proposition de Carlo Rubbia, en 1976, que la puissance du Super Synchrotron à Protons (SPS) du CERN a été revue à la hausse afin d'engendrer des collisions entre protons et antiprotons.

C'est ainsi qu'a été construit la première fabrique d'antiprotons au monde qui a permis l'observation en réel des bosons W^+ , W^- et Z^0 , ainsi que la mesure expérimentale de leur masse.⁵⁷¹

8.2.5- Le boson de Higgs

570. Carlo Rubbia. 1984. « *Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0* ». Nobel Lecture.

571. Ibid. Page 282.

Pour les travaux d'analyse théorique concernant cette section, que nous jugeons indispensables dans la compréhension des apports de Feynman, nous nous sommes inspirés :

- * De la conférence Nobel de Peter Higgs⁵⁷²,
- * Des trois publications citées dans la Conférence Nobel de Peter Higgs⁵⁷³,
- * De la conférence Nobel de François Englert citant largement Feynman et ses diagrammes,
 - * Des cours que j'ai suivis à l'Université Claude Bernard Lyon I (UCBL) dans le cadre de l'Université Ouverte, professés par le professeur Michel Lambert durant l'année 2012/2013. Le professeur Lambert a été professeur à l'Université Claude Bernard Lyon I et chercheur à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon pendant plus d'un quart de siècle avant de devenir professeur Emérite.
- * Du document sur Internet de Marie-Eve Naud *Mécanisme de Higgs*. Marie-Eve Naud travaille au Département de Physique de l'Université de Montréal.
- * Du rapport de stage de Timothée Thevenaux-Pelzer pour l'obtention de son Master 1 de Physique et Applications à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris) en 2007 : *Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs dans le modèle standard des interactions électrofaibles*.

8.2.5.a) Brisure spontanée de symétrie : La courbe $V(\Phi)=f(|\Phi|)$ en "chapeau mexicain"

Nous avons vu en sous-section 8.2.4.c (partie : *Travaux de Carlo Rubbia*) que les bosons W^+ , W^- et Z^0 sont massifs.

L'idée de Peter Higgs a été d'introduire un mécanisme, appelé *Mécanisme de Higgs*, qui permet de générer une masse aux trois bosons précédents. En d'autres termes, le *Mécanisme de Higgs* prédit une brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_{Left}$ dont on a parlé en sous-section 8.2.4.c⁵⁷⁴, en introduisant l'existence d'une particule scalaire appelée *boson de Higgs*.

En effet, confronté à l'incompatibilité pour les bosons W^+ , W^- et Z^0 d'être massifs dans le contexte de l'invariance de jauge associée à l'interaction électrofaible, Higgs propose en 1964 de briser la symétrie $SU(2)_{Left} \times U(1)_\gamma$.⁵⁷⁵

Pour cela, Peter Higgs échafaude une construction intellectuelle abstraite. Il postule l'existence du spinneur Φ ci-après, traduisant l'existence de ce qu'il va appeler le champ de Higgs, formé d'un champ scalaire iso-doublet (objet mathématique constitué pour ce champ de deux composantes possédant une même structure mathématique) décrivant théoriquement une particule de spin 0 (le présumé *boson de Higgs*) :

572. Peter Higgs. 2013. « *Evading the goldstone theorem* ». Nobel Lecture.

573. Peter Higgs. 1964. « *Broken symmetries, massless particles and gauge fields* ». Physics Letters. 12: 132-133
Peter Higgs. 1964. « *Broken symmetries and the masses of gauge bosons* ». Physical Review Letters. 13: 508-509

Peter Higgs. 1966. « *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons* ». Physical Review. 145: 1156- 1163.

574. Voir dans cette sous-section 4.2.3.c la partie intitulée : « Travaux de Steven WEINBERG : *Conceptual foundation of the unified theory of weak and Electromagnetic interactions*⁵⁵⁸ : Prix Nobel de Physique 1979 ».

575. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge* ». Dunod. Page 108.

$$\Phi_{Left} = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}_{Left} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}_{Left}$$

que nous écrivons par la suite pour simplifier l'écriture :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

avec :

- * φ^+ et φ^0 désignant deux champs scalaires complexes et relativistes,
- * φ^+ : champ chargé électriquement, à ne pas considérer mathématiquement comme le conjugué hermitique de φ ,
- * φ^0 : champ électriquement neutre,
- * $(\varphi_1 + i\varphi_2)$ et $(\varphi_3 + i\varphi_4)$ deux composantes complexes pour le champ Φ de Higgs.
- * $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, quatre champs scalaires réels.

L'expression précédente du champ Φ est aussi appelée *doublet de Higgs* et ce champ Φ est donc postulé pour être ni un champ de matière, ni un champ de jauge au sens défini dans les sections 8.2.3, 8.2.4 et en Annexe 21.

Soulignons que le choix du *doublet* ainsi mentionné, pour Higgs, était naturel car Higgs voulait que son champ interagisse avec les particules qui ont des interactions électrofaibles. Ainsi, son hypothétique champ Φ avait la particularité d'être associé à un isospin faible (et à une hypercharge non nulle) matérialisé par le *doublet* défini en sous-section 8.2.4.c (partie : Publication de Michael KLASSEN : *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de Jauge*) sachant qu'un singulet ne l'est pas.

Soulignons encore que l'idée de Peter Higgs basée sur la masse probable des bosons W^+ , W^- et Z^0 a été émise en 1964, bien avant la découverte, par Carlo Rubbia, de la masse de ces bosons dans les années 1980.

Mentionnons aussi les travaux parallèles de François Englert sur le boson dit de Higgs, récompensés par le prix Nobel de physique 2013, et dont la conférence Nobel est remplie de diagrammes de Feynman qui, n'oublions pas, représente la partie calculatoire de l'intégrale de chemins.

L'idée de masse pour les bosons W^+ , W^- et Z^0 associés à l'interaction faible est sous-jacente dans les travaux théoriques de Hideki Yukawa effectués dans les années 1930, qui montrent que la portée très petite de la force faible est nécessairement liée à la notion de particule massive.

Ainsi, dans l'interaction électrofaible considérée par Peter Higgs, avant séparation de cette interaction en interactions faible et électromagnétique, l'idée de générer une masse pour les trois bosons de jauge W^+ , W^- et Z^0 de l'interaction faible a très courte portée est tout à fait plausible alors que le boson photon γ associé à la portée infinie de l'interaction électromagnétique devra être nécessairement de masse nulle.

Rappelons que dans l'interaction électrofaible décrite par le groupe de jauge $SU(2)_{Left} \times U(1)_\gamma$, le groupe $SU(2)_{Left}$ est associé aux trois bosons de jauge W^+ , W^- , Z^0 et le groupe $U(1)_\gamma$ au boson photon γ non massif. Aussi, faut-il au moins trois degrés de liberté pour le champ scalaire imaginé par Peter Higgs correspondant à l'hypothèse de brisure spontanée de symétrie conduisant à la notion de masse inertielle pour les trois bosons de jauge W^+ , W^- et Z^0 . Le choix le plus simple pour Peter Higgs était bien de considérer le champ Φ comme un doublet complexe de $SU(2)_{Left}$ tel que nous avons défini ce type de doublet en sous-section 8.2.5.c dans la partie relative à la publication de Michael KLASSEN : *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de Jauge.*

Nous détaillons en Annexe 28 ce qui vient d'être écrit afin de montrer la brisure spontanée de symétrie associée à un vide quantique qui n'est plus invariant et qui conduira au champ de Higgs c'est-à-dire au mécanisme de Higgs.

8.2.5.b) Recherche théorique du boson de Higgs dans un contexte de brisure spontanée de symétrie associé à une symétrie de jauge globale

Revenons au phénomène *d'excitation du vide* en considérant que toute perturbation du vide sera décrite par un champ $\varphi(x)$.

En d'autres termes, toute perturbation du vide pourra, par hypothèse, s'exprimer en fonction d'un champ de référence (dit de jauge) suivant :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} = \exp [i \theta_k \tau_k] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

avec :

* $\exp [i \theta_k \tau_k] = 1 + i \theta_k \tau_k$ le développement limité au 1^{er} ordre de l'exponentielle,

* $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$ le champ associé au vide quantique.

Nous pouvons donc écrire :

$$\varphi(x) = (1 + i \theta_k \tau_k) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

dont la structure par l'intermédiaire des générateurs brisés τ_k va permettre de ne pas laisser le vide invariant, c'est-à-dire de briser spontanément sa symétrie.

En appliquant la convention de sommation d'Einstein sur les indices k répétés, on obtient :

$$\varphi(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \theta_1 \tau_1 + i \theta_2 \tau_2 + i \theta_3 \tau_3 \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\theta_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + i\theta_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\theta_1 \\ i\theta_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i^2\theta_2 \\ i^2\theta_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\theta_3 & 0 \\ 0 & -i\theta_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1+i\theta_3 & i\theta_1+\theta_2 \\ i\theta_1-\theta_2 & 1-i\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \eta\theta_2+i\eta\theta_1 \\ \eta-i\eta\theta_3 \end{pmatrix}.$$

Appliquons maintenant la perturbation $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ au champ $\varphi(x)$ de référence (champ de jauge), au voisinage du champ Φ_0 associé au vide.

On obtient le champ de jauge $\Phi(x)$ suivant :

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta\theta_2(x)+i\eta\theta_1(x) \\ \eta-i\eta\theta_3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta\theta_2(x)+i\eta\theta_1(x) \\ \eta+\frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}}-i\eta\theta_3(x) \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant exprimer le Lagrangien L_1 du champ $\Phi(x)$ en fonction des champs $\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \sigma(x)$. Ce Lagrangien L_1 est appelé *Lagrangien de perturbation* du fait de son association aux perturbations induites.

Considérons une symétrie de jauge globale, c'est-à-dire un système invariant partout en même temps et non une symétrie de jauge locale (faisant intervenir la notion de dérivée covariante : voir Annexe 21 §4 et §5) pour lequel le système serait invariant localement en fonction des coordonnées de l'espace-temps.

Construisons ainsi en Annexe 29 le Lagrangien de perturbation en partant de l'expression déjà vu initialement :

$$L_1(\Phi) = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - V(\Phi)$$

avec :

$$* V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2.$$

On obtient :

$$L_1 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \underline{\theta}_k \partial^\mu \underline{\theta}_k) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - (-2\mu^2) \sigma^2).$$

L'interprétation de ce Lagrangien L_I via le Lagrangien :

$$L_{KG} = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^+ \Phi$$

duquel peut être dérivé l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi(x)$$

relativement à une particule de spin 0 nous montre que :

* Les champs $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ et $\theta_3(x)$ sont associés à trois particules bosons de masse nulle. Et justement ces trois champs ont été construits à l'aide des trois générateurs brisés τ_1 , τ_2 et τ_3 de telle manière qu'ils ne laissent pas le vide invariant c'est-à-dire qu'ils brisent la symétrie du vide.

Nous retrouvons là le *théorème de Goldstone* qui stipule qu'en Théorie Quantique des Champs, toute brisure spontanée d'une symétrie continue donne lieu à l'apparition de particules scalaires (spin 0) de masse nulle. Le nombre de ces bosons, vecteurs du champ considéré et nommés *bosons de Goldstone*, est égal à celui des générateurs brisés, c'est-à-dire des générateurs qui ne laissent pas le vide invariant, en l'occurrence trois bosons de Goldstone dans ce cas précis.

* Le champ σ perturbatif, au voisinage du champ Φ_0 associé au vide, conduit à une particule boson de spin nul du fait de la structure du Lagrangien L_I conforme à celle du Lagrangien L_{KG} .

Ce boson serait de masse égale à :

$$\sqrt{-2\mu^2} > 0$$

avec $\mu^2 < 0$ si nous voulons d'une part rester fidèle à l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi(x),$$

et d'autre part que le système soit physiquement viable.

Et cette masse $\sqrt{-2\mu^2}$, sous-jacente à celle du boson de Higgs de spin nul, exprime justement pour le critère $\mu^2 < 0$ dont il est question en 2^{ème} cas de la "sous-section 8.2.5.a" précédente une position d'équilibre stable non symétrique du vide associé à un champ Φ_0 fixé à $\begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$.

Cette brisure spontanée de symétrie du vide, tel que nous l'avons appréhendée lors de la construction du graphe $V(\Phi)=f(|\Phi|)$ à l'allure de "chapeau mexicain", constitue ce que nous appelons le *mécanisme de Higgs*. Il s'agit donc d'un mécanisme par lequel la brisure spontanée de symétrie de jauge $SU(2) \times U(1)$ ne donne pas seulement lieu à l'apparition des trois

particules bosons scalaires de masse nulle (les trois bosons de Goldstone) mais rend massif le champ de jauge σ véritable précurseur du champ de Higgs et construit comme tel dans ce contexte de symétrie de jauge globale.

Pour résumer, nous venons de montrer que la lecture du Lagrangien L_I associé à une symétrie de jauge globale, indique que les termes quadratiques révèlent la présence de deux types de particules :

* Un boson massif associé au champ $\sigma(x)$ et de masse :

$$m = \sqrt{-2\mu^2} > 0 \text{ avec } \mu^2 < 0,$$

* Trois bosons de masse nulle, appelés *bosons de Goldstone* et associés aux trois champs :

$$\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x).$$

Ainsi, avec la condition $\mu^2 < 0$, la nouvelle paramétrisation du Lagrangien L_I conduit à un état fondamental qui est le vide pour lequel le champ de jauge Φ_0 n'est pas nul et ce vide est dégénéré comme nous l'avons vu précédemment.

Le groupe d'invariance (de symétrie) du champ Φ_0 est seulement un sous-groupe avec un seul générateur de symétrie $\frac{1+\tau_3}{2}$ conservé.

Les trois autres générateurs τ_1, τ_2, τ_3 , ne laissent pas le vide invariant. On a dit qu'ils sont brisés et nous avons vu qu'à chacun de ces trois générateurs correspond un boson de Goldstone de masse nulle (*Théorème de Goldstone*).

En d'autres termes, tout se passe, lors d'une symétrie de jauge globale, comme si les quatre champs $\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x)$ et $\sigma(x)$ étaient des champs libres, sans interaction les uns avec les autres, ou plus exactement que les champs $\theta_1(x), \theta_2(x)$ et $\theta_3(x)$ n'avaient aucune interaction avec le champ $\sigma(x)$, précurseur du champ de Higgs.

8.2.5.c) Recherche théorique du boson de Higgs dans le contexte de brisure spontanée de symétrie relative au modèle standard des interactions faibles associé à une symétrie de jauge locale (mécanisme de Higgs)

Il revient maintenant à faire en sorte que la symétrie de jauge globale précédente, non abélienne, devienne locale, et de montrer l'interaction entre le champ $\sigma(x)$ et les champs $\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x)$.

Pour se faire, les développements précédents peuvent être conservés en considérant cette fois les paramètres $\theta_k(x)$ comme des fonctions des coordonnées de l'espace-temps et non plus des fonctions globales indépendantes de ces coordonnées.

Rappelons en effet que les champs $\theta_k(x)$ relatifs à la symétrie de jauge globale, sont invariants par transformation globale partout en même temps dans l'espace-temps (voir §4 de l'Annexe 21).

Ainsi, les champs $\theta_k(x)$ vont dorénavant constituer eux-mêmes des nouveaux champs dans le contexte de la symétrie de jauge locale. Et devenue locale, l'invariance postulée exige que les substitutions à effectuer correspondent au principe d'interaction minimale assurée par la transformation de jauge associée à la notion de dérivée covariante telle que vue en au §5 de l'Annexe 21.

A cet effet, il faut remplacer partout la dérivée simple (classique) ∂_μ par la Dérivée covariante D_μ , tel que mentionné ci-après dans le même principe que ce que nous avons vu au §7 de l'Annexe 21.

En d'autres termes, D_μ représente la Dérivée covariante permettant d'imposer l'invariance de jauge locale et elle s'exprime comme suit :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig W_\mu^k \frac{\tau_k}{2} + ig' B_\mu \frac{\tau_0}{2},$$

de manière à faire apparaître les générateurs brisés τ_k (avec k de 1 à 3) associés à la brisure spontanée de symétrie provoquée par l'apparition du boson de Higgs.

Il faut donc introduire quatre champs de jauge :

* Trois champs de jauge W associés aux trois bosons de jauge W^+ , W^- , Z_0 de l'interaction faible formant un isotriplet (objet mathématique constitué de trois composantes ayant une même structure mathématique) :

$$W_{\mu\nu}^k \text{ avec } k = 1, 2, 3$$

associés au triplet τ_k des générateurs de $SU(2)$; ces trois champs $W_\mu^k(x)$ agissent en lieu et place des trois champs $\theta_k(x)$ qui n'étaient pas des champs de jauge intervenant dans une dérivée covariante.

* Un champ de jauge B formant un isosinglet (état quantique à spin nul et de même structure mathématique que l'isotriplet précédent) :

$$B_{\mu\nu}$$

associé au générateur $\tau_0 = I$ du sous-groupe abélien $U(1)$.

Il faut aussi introduire deux constantes arbitraires g et g' dépendantes, qui sont respectivement connues comme mesure de la force associée aux couplages de l'interaction faible et de l'interaction électromagnétique.

La dynamique interne aux quatre champs de jauge est portée par les tenseurs de courbure suivants, à l'image du tenseur de Faraday bien connu :

$$W_{\mu\nu}^k = \partial_\mu W_\nu^k - \partial_\nu W_\mu^k$$

et :

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Le Lagrangien qui régit la dynamique du champ scalaire isodoublet que nous avons introduit en tout début via les quatre champs scalaires réels $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, s'écrit dorénavant, compte-tenu des termes quadratiques relatifs aux quatre tenseurs de courbure associés aux quatre champs de jauge :

$$L_2 = (L_1)_{\text{avec Dérivée covariante}} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W_k^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

avec :

$$* (L_1)_{\text{avec Dérivée covariante}} = D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi - V(\Phi)$$

$$* V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2.$$

Calculons le Lagrangien L_2 associé à la symétrie de jauge locale, soit :

$$L_2 = D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^+ \Phi - \lambda (\Phi^+ \Phi)^2 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W_k^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$L_2 = (1) - (2) - (3) - (4) - (5)$$

avec :

$$* (1) = D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi$$

$$* (2) = \mu^2 \Phi^+ \Phi$$

$$* (3) = \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$$

$$* (4) = \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W_k^{\mu\nu}$$

$$* (5) = \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

Ici encore, c'est-à-dire dans cette sous-section 8.2.5.c, de la même façon que dans la sous-section 8.2.5.b précédente, la symétrie du vide est spontanément brisée et le potentiel $V(\Phi)$ atteint une valeur minimum stable, qui est l'énergie du vide, pour :

$$|\Phi| = \eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$$

c'est-à-dire :

$$|\mu^2| = 2 \lambda \eta^2$$

avec :

$$\mu^2 < 0.$$

Et ici encore, on peut arbitrairement choisir pour champ associé au vide quantique, un champ polarisé « en bas » tel que :

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

avec :

* η réel et supérieur à zéro.

Ainsi, toute perturbation du vide quantique est décrite par un isospineur $\Phi(x)$, quelconque, mais voisin de Φ_0 , et de la même manière qu'en sous-section 8.2.5.b, on peut toujours écrire :

$$\Phi(x) = \exp [i \theta_k \tau_k] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix},$$

puis appliquer la perturbation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

au champ $\Phi(x)$ au voisinage du champ Φ_0 représentant le vide quantique.

On obtient alors le champ de jauge $\Phi(x)$ suivant :

$$\Phi(x) = \exp [i \theta_k \tau_k] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Il apparaît qu'en un point x quelconque, $\Phi(x)$ peut être considéré comme résultant d'une rotation $R(x)$, appliquée à un isospineur polarisé « en bas ». Cette construction mathématique a déjà été utilisée en sous-section 8.2.5.b dans le cas d'une symétrie de jauge globale spontanément brisée.

Cependant, la situation diffère maintenant de la précédente, c'est-à-dire de ce qui a été vu en sous-section 8.2.5.b, et du tout au tout en ce qui concerne le Lagrangien. En effet, le Lagrangien, par hypothèse, est dorénavant invariant pour tout changement de jauge locale.

On doit donc appliquer en chaque point x bien spécifique en x et localement, le changement de jauge suivant :

$$U(x) = \exp [- i \theta_k \tau_k] = R^{-1}(x).$$

Ainsi, le champ d'excitation $\Phi(x)$ prend partout la forme :

$$\Phi(x) = U(x) \Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \hat{\Phi}(x)$$

avec:

* $\hat{\Phi}(x)$ la grandeur physique mesurable codée dans le formalisme de la mécanique quantique par l'observable $\Phi(x)$,

* Localement pour chaque x bien spécifique, la grandeur physique mesurable $\hat{\Phi}(x)$ associée à l'observable $\Phi(x)$, devient strictement un vecteur champ de module identique au doublet :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

par rotation $R^{-1}(x)$ dans l'espace-temps, faisant disparaître de fait les champs $\theta_k(x)$ associés à la symétrie de jauge globale.

Les excitations du vide quantique sont alors décrites par un seul champ scalaire réel $H(x)$ (le champ de Higgs introduit par $\sigma(x)$ en sous-section 8.2.5.b) dont le quantum s'appelle *le boson de Higgs*, qui a pour valeur (voir sous-section 8.2.5.b) :

$$m = \sqrt{-2\mu^2} > 0 \text{ avec } \mu^2 < 0.$$

Dans le développement du Lagrangien L_2 qui suit, le changement de jauge *locale* ayant pour effet de faire complètement disparaître les trois champs scalaires de Goldstone $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$, associés à la symétrie de jauge globale, les degrés de liberté correspondants sont transférés aux bosons de jauge $W^1(x)$, $W^2(x)$ et $W^3(x)$ (mécanisme de Higgs).

Ainsi, dans le cas où la symétrie spontanément brisée est une symétrie de jauge locale, le théorème de Goldstone vu en sous-section 8.2.5.b ne s'applique pas et les degrés de liberté associés se trouvent entièrement inclus dans les bosons de jauge qui deviennent massifs tel que le prévoit le *mécanisme de Higgs*.

En d'autres termes, le principe du *mécanisme de Higgs* est de faire avaler par les bosons de jauge, les degrés de liberté qui devraient être associés à des bosons de Goldstone en raison de la brisure spontanée de symétrie.

Procédons maintenant au développement du Lagrangien L_2 et pour cela passons au calcul des parties (1) à (5) définies précédemment que nous trouvons en Annexe 30.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
L_2 = & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{2} (2 \mu^2) H^2 + \dots \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W^{\mu\nu}_1 + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^1 W_1^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W^{\mu\nu}_2 + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^2 W_2^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\eta^2 g^2}{2 \cos^2 \theta} Z_\mu Z^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 \sin^2 \theta A_\mu A^\mu + \dots
\end{aligned}$$

→ **Conclusion :**

La symétrie de jauge locale a eu pour effet de faire complètement disparaître les trois champs scalaires de Goldstone $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$, associés à la symétrie de jauge globale, et les degrés de liberté correspondants ont été transférés aux bosons de jauge $W^1(x)$, $W^2(x)$ et $Z(x)$ (mécanisme de Higgs).

Chacune des cinq lignes de l'expression du Lagrangien L_2 ci-avant exprime l'énergie cinétique et l'énergie de masse de chacun des cinq champs H , W^1 , W^2 , Z et A .

Le groupe $SU(2)$ donne trois bosons de jauge W^1 , W^2 , Z (massifs) et le groupe $U(1)$ donne un boson non massif associé au champ A .

Ainsi, des quatre champs scalaires $\varphi_i(x)$, subsistent :

* Le champ scalaire dit de Higgs, associé au boson scalaire de Higgs $H(x)$ de masse $m_H = \sqrt{-2\mu^2}$ (dont $\mu^2 < 0$) et de spin égale à zéro,

* Le champ associé à l'interaction faible vectorisé par les les trois bosons de jauge qui ont acquis au cours de ce *mécanisme* une masse inertielle, c'est-à-dire :

- Les deux bosons vecteurs W^+ , W^- , chargés, de même masse :

$$m_W = \frac{g\eta}{\sqrt{2}},$$

de spin égal à 1, qui sont identifiés comme porteur des courants chargés relatifs aux interactions faibles,

- Le boson vecteur neutre Z^0 de masse :

$$m_Z = \frac{g\eta}{\sqrt{2} \cos\theta} = \frac{m_W}{\cos\theta},$$

de spin égal à 1, qui est identifiés comme porteur du courant neutre observé dans l'interaction faible,

* Le champ électromagnétique A vectorisé par le boson de jauge non massif, de spin égale à 1, qui est ni plus ni moins que le photon γ .

Comme nous l'avons exprimé de manière qualitative en sous-section 8.2.4.c (partie *Travaux de Steven Weinberg*), il est possible d'imaginer qu'au début du monde, la température de l'univers dépassant une centaine de GeV, la symétrie électrofaible n'était pas encore brisée et donc que les bosons $W^1(x)$, $W^2(x)$ et $Z(x)$ étaient de masse nulle. Ce n'est que lorsque la température est descendue en dessous d'un certain seuil critique que le boson de Higgs apparaît et qu'il communique aux bosons de jauge $W^1(x)$, $W^2(x)$ et $Z(x)$ leur masse inertielle, de telle sorte que l'interaction faible qui leur est associée devienne une interaction de courte portée.

8.2.5.d) Principe de recherche expérimentale du boson de Higgs au LHC : les diagrammes de Feynman

Comme nous l'avons montré théoriquement en sous-section 8.2.5.e, le boson de Higgs est une excitation du champ de Higgs (de la même manière que l'électron est une excitation du champ électromagnétique) qui confère une masse aux autres particules.

Avant de rechercher des bosons de Higgs, il faut les fabriquer. Puis lorsqu'on est certain de pouvoir les fabriquer, il faut d'une part pouvoir les détecter et d'autre part être convaincu qu'il s'agit bien des bosons recherchés.

L'idée de base pour fabriquer des bosons de Higgs est d'accélérer des protons à haute énergie dans le LHC (Large Hadron Collider : Grand collisionneur de Hadrons) situé au CERN à Genève dont nous avons parlé en sous-section 8.2.4.c (partie : Thèse d'Alice FLORENT), et de les fracasser dans les détecteurs ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) et CMS (Compact Muon Solenoid).

Et pour se faire, il faut que les physiciens aient une idée assez précise de la manière dont interagit le boson de Higgs avec les autres particules ; c'est là justement qu'intervient l'utilisation des diagrammes de Feynman issus du concept d'intégrale de chemins :

« Les physiciens des particules ont développés un formalisme très détaillé et rigoureusement éprouvé pour comprendre quelles particules interagissent avec quelles autres. **Richard Feynman**, le pittoresque physicien lauréat du prix Nobel, a inventé une méthode extraordinairement utile pour garder une trace de ces arrivées et de ces départs : les diagrammes de Feynman. Ces images sont des petits dessins représentant des particules en interaction, au cours de leur transformation en d'autres particules, selon l'axe du temps. Les bosons porteurs de force sont représentés par des lignes ondulées, les fermions par des lignes pleines, et le Higgs est une ligne traitillée (constituée de traits). En commençant par un ensemble défini d'interactions fondamentales, puis en mélangeant et en mettant en relation les diagrammes correspondants, nous pouvons déterminer les différentes manières dont les particules sont susceptibles d'être produites ou bien converties en d'autres particules. »⁵⁷⁸

« Les diagrammes de **Feynman** fournissent une manière amusante et évocatrice de noter tout ce qui peut arriver lorsque des particules se rencontrent et interagissent. Les physiciens, toutefois, **les utilisent pour la tâche très terre à terre de calculer la probabilité quantique que l'interaction décrite ait lieu.** Chaque diagramme correspond à un nombre, que l'on peut calculer en suivant une série de règles simples. Ces règles peuvent prêter à confusion au premier abord ; par exemple, une particule remontant le temps est considérée comme une antiparticule, et vice-versa. Quand deux particules se joignent pour en former une troisième (ou qu'une particule se désintègre en deux particules), l'énergie totale ainsi que toutes les autres quantités conservées doivent s'équilibrer. »⁵⁷⁹

Ainsi, une fois connus les modes prometteurs de désintégration de certaines particules nécessaires à la découverte d'un boson de Higgs à 125 GeV (masse supposée du boson de Higgs), les accélérateurs de particules reproduisent les conditions initiales de température (donc d'énergie) autour de 125 GeV qui existaient après le Big Bang. Ceci, afin de créer artificiellement le *mécanisme de Higgs* c'est-à-dire la brisure spontanée de symétrie associée à l'apparition d'un boson de Higgs issu de l'excitation d'un champ, le champ de Higgs, acquérant une valeur moyenne non nulle dans le vide.

On s'attend à ce que le boson de Higgs puisse facilement se coupler aux particules lourdes, afin de leur conférer tout naturellement une masse. Aussi, peut-on imaginer qu'il puisse se coupler ou se désintégrer avec des particules telles que les bosons Z^0 ou les bosons W^+ , W^- .

En fait, le boson de Higgs se couple avec toutes les particules auxquelles il confère une masse, en particulier avec le quark top qui est le quark le plus massif parmi les quarks découverts actuellement.

Exprimons ce que les physiciens appartenant à la Société Française de Physique (SFP) mentionnent au sujet de la découverte du boson de Higgs au LHC en date du 4 juillet 2012 :

« Le mode principal de **production** du boson de Higgs au LHC résulte, dans la collision proton-proton, de l'interaction entre deux gluons de haute énergie, que l'on désigne par l'expression « fusion de gluons ». Le signal est observé avec divers degrés de significations statistiques dans différents canaux de désintégration du boson de Higgs. Les deux principaux modes de **désintégration** sont ceux qui conduisent à la mesure la plus précise de la masse du boson. Il s'agit de la désintégration en deux photons et de la désintégration en quatre leptons (électrons et muons) par l'intermédiaire de deux bosons Z.

578. Sean Carroll. 2013. « Higgs Le boson manquant ». Belin : Pour la science.

579. Ibid. Pages 211 et 212.

ATLAS et CMS ont étudiés également d'autres modes de production et de désintégration. Ces modes additionnels sont plus complexes à analyser, en raison de la présence de neutrinos dans l'état final ou de bruits de fond importants.

Pour cette raison, les résultats 2012 présentés par ATLAS dans le séminaire du 4 juillet concernent uniquement les deux modes de désintégration principaux. »⁵⁸⁰

Il faut savoir que le 2 juillet 2012, la dernière analyse des données du Tevatron, dont nous avons parlé en sous-section 8.2.5.b (partie : Thèse de Thomas MILLET), resserrait la gamme des valeurs de masses du boson de Higgs entre 115 et 135 GeV. Et deux jours plus tard, c'est-à-dire le 4 juillet 2012, CMS et ATLAS révélaient la découverte du boson de Higgs avec une masse de 125,3 GeV pour CMS et 126,5 GeV pour ATLAS.⁵⁸¹

Une explication encore plus précise de **production** et de **désintégration** du boson de Higgs au LHC est donnée, un peu plus tard, par la physicienne Lucia di Ciaccio du Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des particules (CNRS et Université de Savoie) et par le physicien Gautier Hamel de Moncheault du Service de Physique des particules de l'Institut de Recherche sur les lois fondamentales de l'Univers (CEA/Saclay) :

*« **Le mode principal de production** du boson de Higgs au LHC, responsable de 88% des bosons de Higgs produits, fait intervenir son couplage au quark top. C'est la production par fusion de gluon, notée ggF, ainsi appelée parce que le boson de Higgs émerge d'une boucle de quarks top virtuels, c'est-à-dire de masse très inférieure à leur masse nominale, issue de la collision de deux gluons provenant des protons incidents. **Les deux autres modes de production** considérés ici font intervenir le couplage du boson de Higgs aux bosons vecteurs W et Z : Ce sont la fusion de bosons vecteurs (7%), notée VBF et la production associée avec un boson vecteur (4%), notée VH. Ces derniers modes de production sont essentiels pour extraire le signal de boson de Higgs pour les désintégrations où les bruits de fond sont abondants.*

*Malgré sa masse relativement faible, le boson de Higgs peut se **désintégrer** par l'intermédiaire d'une paire de bosons vecteurs W ou Z, à condition que l'un au moins des deux bosons soit virtuel. Les bosons W et Z sont détectés dans leurs désintégrations en leptons, où lepton désigne ici soit un électron soit un muon. Le W se désintègre en un lepton et un neutrino, lequel n'est pas détectable, et le Z en deux leptons de charges électriques opposées. En tenant compte de toutes les probabilités, la désintégration du boson de Higgs en deux leptons et deux neutrinos (WW) représente 1,1% des cas, et en quatre leptons (ZZ), 0,028% des cas. Le mode ZZ, bien que très rare, est important car les quatre leptons dans l'état final sont détectés et leurs énergies mesurées précisément. Par conséquent, l'utilisation de ce mode permet une discrimination plus aisée du signal par rapport aux bruits de fond et une mesure précise de la masse du boson de Higgs.*

*Le boson de Higgs peut aussi se **désintégrer** en une paire de photons par le truchement de boucles de quarks top et de bosons W virtuels. Cette désintégration, notée $\gamma\gamma$, est également très rare (0,23%), mais c'est l'une des plus importantes expérimentalement car les deux photons issus de la désintégration sont détectés et leurs énergies mesurées précisément.*

*La **désintégration** en une paire de quarks b (57,7%) est délicate à étudier expérimentalement, car la production abondante de quarks b par paires au LHC constitue un bruit de fond colossal. Une façon d'extraire un signal consiste à s'intéresser à la production VH, où l'on détecte le boson vecteur dans sa désintégration en leptons.*

580. Lucia di Ciaccio, Gautier Hamel de Moncheault. « découverte du boson de Higgs au LHC ? ». Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 31, octobre 2012. Pages 17 et 18.

581. LA Recherche (L'actualité des sciences). Septembre 2012. Numéro 467. Sophia Publications. Page 11.

Enfin, le boson de Higgs se **désintègre** en une paire de leptons τ avec une probabilité de 6,3%. Cette désintégration est également difficile à détecter car les leptons τ qui se désintègrent aussitôt en plusieurs particules dont au moins un neutrino, sont difficiles à identifier et à extraire des bruits de fond. Pour détecter un signal dans ce mode de désintégration, on exploite en particulier la production VBF.⁵⁸²

Les diagrammes de Feynman concernant la recherche du boson de Higgs, élaborés tant par les physiciens de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon que par ceux des établissements français contribuant aux expériences LHC (Unités mixtes entre les Universités et l'IN2P3 (l'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules du CNRS)), sont représentés ci-après.⁵⁸³

Production du boson de Higgs par collision proton-proton

582. Lucia di Ciaccio, Gautier Hamel de Moncheault. « *Derniers résultats sur le boson de Higgs au LHC* ». Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 46, octobre-novembre 2015. Page 6.

583. Nicolas Chanon. 4 juin 2018. « *Le couplage du boson de Higgs au quark top est observé* ». Institut de Physique Nucléaire de Lyon.

Michel Lambert. 2012. « *Symétries, Champs de jauge, Interactions électrofaibles* ». Professeur à Université Claude Bernard Lyon1 (UCBL). Institut de Physique Nucléaire de Lyon.

Eloi Le Quilleuc. 2017. « *Etude de la production du boson de Higgs en association avec une paire de quarks top-antitop dans l'expérience ATLAS* ». Thèse de Doctorat. Université Paris-Saclay.

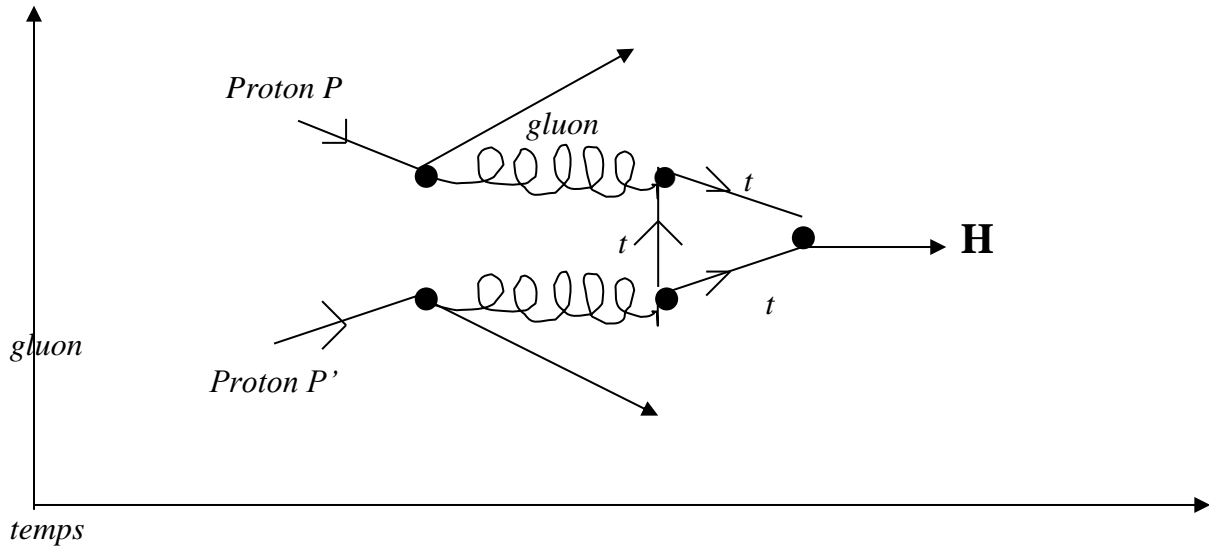
Estelle Scifo. 2014. « *Mesure des couplages du boson de Higgs dans son mode de désintégration en deux photons avec le détecteur ATLAS au LHC* ». Thèse de Doctorat. Université Paris-Saclay.

Lucia di Ciaccio, Gautier Hamel de Moncheault. « *découverte du boson de Higgs au LHC ?* ». Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 31, octobre 2012. Pages 17 et 18.

Lucia di Ciaccio, Gautier Hamel de Moncheault. « *Derniers résultats sur le boson de Higgs au LHC* ». Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 46, octobre-novembre 2015. Page 6.

I) Fusion de deux gluons : Production ggF (88% des bosons de Higgs produits au LHC)

espace



Avec :

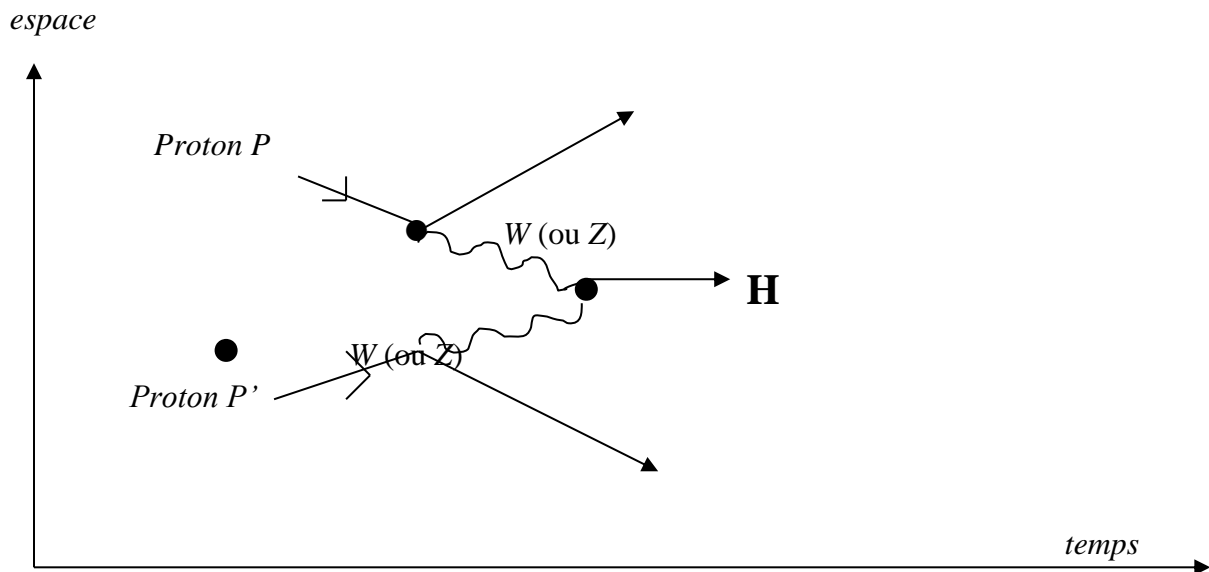
- * $P = (q_1 \ q_2 \ q_3)$: 3 quarks indivisibles
- * $q_1 =$ quark up , $q_2 =$ quark up , $q_3 =$ quark down
- * $P' = (q_1' \ q_2' \ q_3')$: 3 quarks indivisibles
- * $q_1' =$ quark up , $q_2' =$ quark up , $q_3' =$ quark down
- * $t =$ quark top
- * $\bar{t} =$ quark antitop.

Le boson de Higgs émerge d'une boucle de quarks top virtuels suite à un processus de fusion de deux gluons issus de la collision entre des protons P et P' .

Notons que l'interaction entre deux gluons, ceux-ci matérialisant l'interaction forte, donne naissance au quark top. Et c'est l'annihilation de la paire de quark top-antitop produite par la collision des deux protons P et P' qui produit un boson de Higgs.

Mentionnons que les collisions de protons produisant une paire de quark top-antitop en association avec un boson de Higgs sont appelées *événements $t\bar{t}H$* , car ces collisions font intervenir une interaction entre le quark top et le boson de Higgs.

II) Fusion de bosons vecteurs W^+W^+ ou W^-W^- ou Z^0Z^0 : Production WWF ou ZZF (7% des bosons de Higgs produits au LHC) :



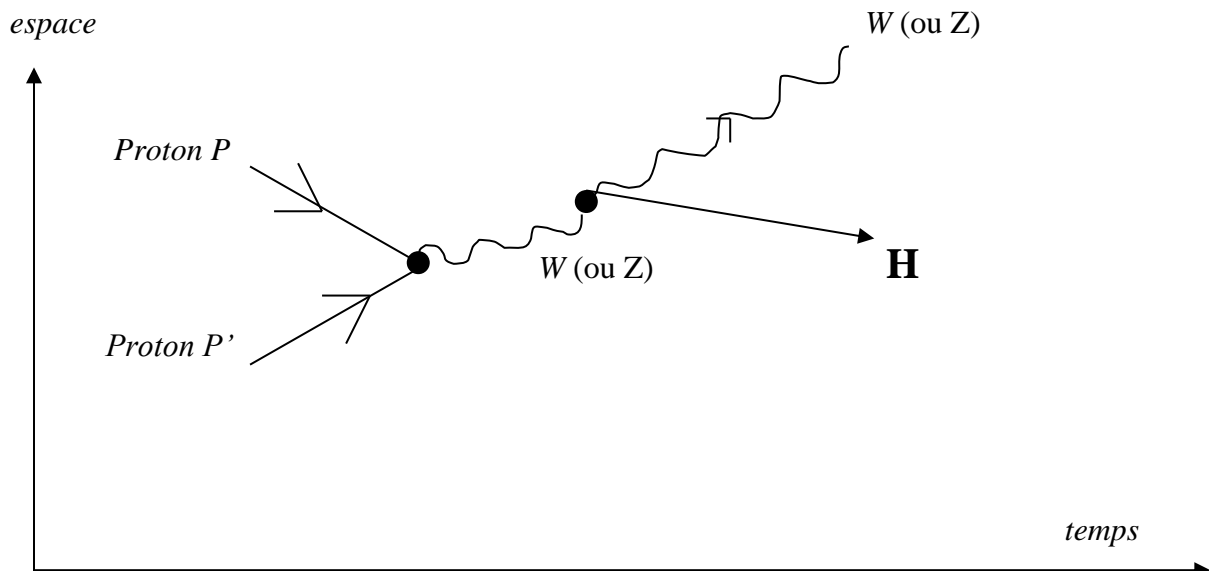
Avec :

* $W = W^+$ ou W^-

* $Z = Z^0$.

Le boson de Higgs émerge d'une fusion de bosons W ou Z , lors de la collision entre les protons P et P' via les quarks qui constituent ces derniers.

III) Production associée à un boson vecteur W^+ ou W^- ou Z^0 : Production VH (4% des bosons de Higgs produits au LHC) :

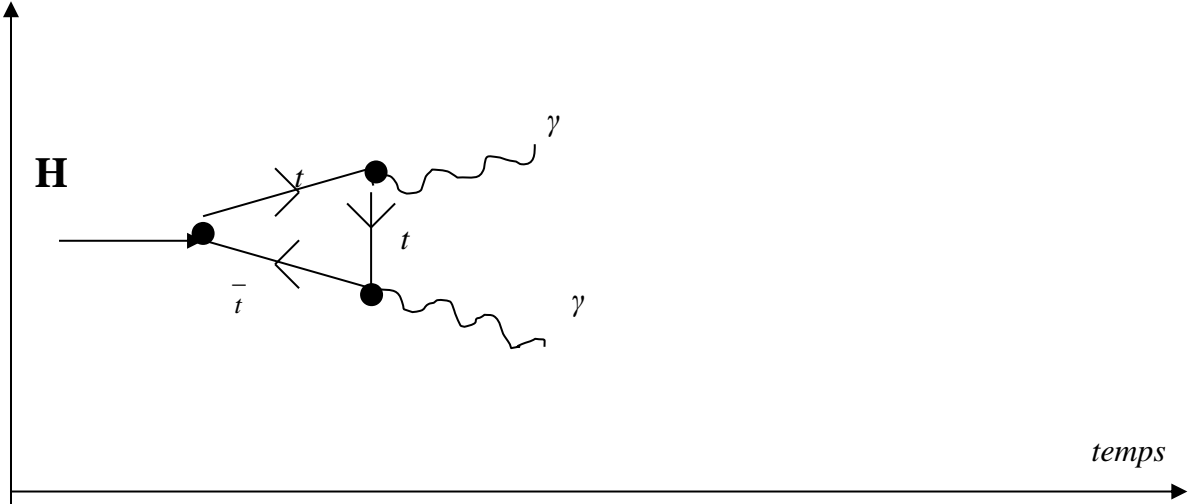


Le boson de Higgs émerge par radiation à partir d'un boson vecteur W^+ ou W^- ou Z^0 .

Désintégration du boson de Higgs

I) Désintégration en deux photons γ (0,23% de probabilité) :

espace

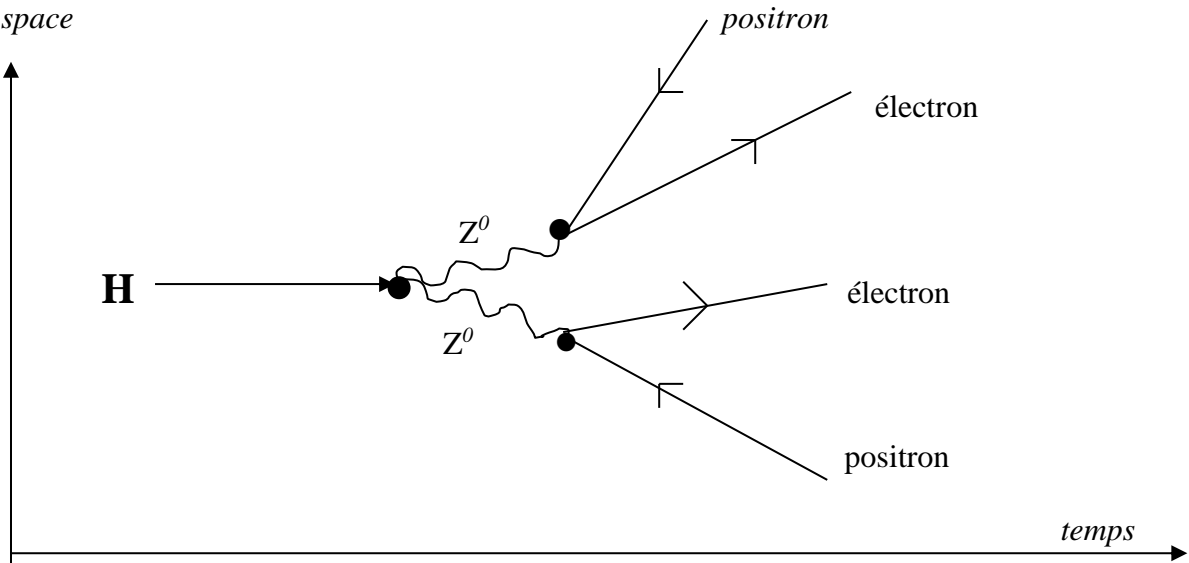


Le boson de Higgs se désintègre en deux photons ($H \rightarrow \gamma\gamma$) par l'intermédiaire d'une boucle de quarks top.

Si la probabilité pour ce type de désintégration est seulement de 0,23%, elle constitue un mode intéressant expérimentalement de part la grande réjection du bruit de fond permise par le détecteur, conduisant ainsi à une mesure précise de la masse du boson de Higgs (autour de 125 GeV).

II) Désintégration ZZ en quatre leptons (0,028% de probabilité) :

espace



Le boson de Higgs se désintègre en quatre leptons dans 0,028% des cas.

Ce mode ZZ bien que très rare, est important car les quatre leptons (deux électrons et deux positrons) sont facilement détectés en final et donc leurs énergies sont mesurées avec une grande précision. L'utilisation de ce mode permet une discrimination encore plus aisée du signal par rapport aux bruits de fond et ainsi une mesure extrêmement précise.

Conclusion

Quel que soit le cycle de *production-désintégration* lors de la collision proton-proton au LHC, la durée de vie du boson de Higgs excitant le champ de Higgs est de 10^{-24} s.

Aussi du fait de son existence trop brève, on observe le boson de Higgs par le produit de sa désintégration suite à sa production.

Mentionnons qu'en physique fondamentale, la masse n'est plus une caractéristique intrinsèque des particules, mais une mesure de leurs interactions avec le champ de Higgs.

Dans la nature, autour de nous, existe le champ de Higgs mais certainement pas les bosons de Higgs car ils sont trop lourds. En fait, la preuve de l'existence d'un champ de Higgs baignant l'espace dans lequel nous sommes, a consisté à provoquer une collision au LHC entre deux protons. Cette collision effectuée à une énergie égale à 125 GeV, nous a mis dans le contexte proche de celui existant peu après le Big bang, afin d'exciter le champ de Higgs. Et c'est bien l'excitation de ce champ de Higgs qui permet d'obtenir des bosons de Higgs qui sont les quanta d'énergie des ondes de ce champ.

Ainsi, avoir la preuve de l'existence du boson de Higgs permet de déduire celle de l'existence du champ de Higgs. Aussi, la stratégie de *production* et de *désintégration* de la particule validée comme étant le boson de Higgs, n'a pu se faire qu'à l'aide des diagrammes de Feynman précédents issus du concept d'intégrales de chemin. En effet, les calculs théoriques associés au choix des particules nécessaires à la *production* et à la *désintégration* du boson de Higgs ont été effectués relativement aux règles de Feynman concernant les diagrammes. Et ces règles sont basées sur les principes mis en œuvre par Feynman telle par exemple la conservation de la quantité de mouvement (l'impulsion) au niveau de chaque vertex (voir Annexe 1).

Ces diagrammes, validés par l'expérience au LHC, ont donc permis d'apporter la preuve que selon la production-désintégration obtenue, se trouvait de manière sous-jacente l'existence du boson de Higgs.

Pour revenir à la juste nature des choses, c'est lorsque la température de l'univers a diminué autour d'une centaine de GeV, peu après ses premiers instants d'existence, que le champ de Higgs acquérant une valeur moyenne non nulle dans le vide quantique (l'interaction électrofaible ne répondant plus à la symétrie de jauge $SU(2) \times U(1)$ suite à une brisure spontanée de symétrie) a interagi avec toutes les particules présentes (les électrons, les quarks, etc.) pour leur conférer la masse inertielle qui est celle qu'elles possèdent actuellement.

Et selon la théorie quantique des champs, Peter Higgs a émis l'idée qu'il devait émaner de ce champ (le champ de Higgs) un boson vecteur (le boson de Higgs) qui, selon ses calculs (Voir analyse effectuée en sous-section 8.2.6.c), devait être massif.

Bien évidemment ce champ (le champ de Higgs) est toujours présent autour de nous, au même titre que le champ électromagnétique et le champ de gravitation. La preuve, la découverte du boson de Higgs de masse inertielle 125 GeV, médiateur de ce champ, le 4 juillet 2012 au LHC à Genève.

8.2.5.e) Publications sur le boson de Higgs se couplant aux particules massives du modèle standard et portant sur l'utilisation des diagrammes de Feynman, à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon

Comme nous l'avons écrit en Introduction, l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon fait partie des intervenants associés aux recherches actuellement effectuées au LHC sur le boson de Higgs et autres.

Si le 4 juillet 2012, la découverte du boson de Higgs a fait grand bruit, il ne s'agit que d'une étape sur la compréhension intime de la matière.

En effet, beaucoup de questions restent encore en suspens pour ce qui concerne les interactions du champ de Higgs avec toutes les particules virtuelles.

Dans cette sous-section, nous donnons un aperçu assez complet des publications de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon associé à divers établissements de recherche. Ces publications mettent en jeu les diagrammes de Feynman issus du concept d'intégrale de chemins.

La liste des publications concernées se trouve ci-après.

- A. Deandrea. 2002. *The hadronic τ decay of a heavy charged Higgs in models with singlet neutrino in large extra dimensions*. Physical Review D, American Physical Society, 2002, pp. 75006.
- A. Deandrea. 2004. *Little Higgs Models and Precision Electroweak Data*. Journal of High Energy Physics, Springer, 2004, 402, pp. 32.
- A. Deandrea. 2007. *Quantum corrections to the effective neutrino mass operator in 5 D MSSM*. Physical Review D, American Physical Society, 2007, 75, pp. 113005.
- S. Davidson, G. Grenier. 2010. *Lepton flavour violating Higgs and tau to mu gamma*. Physical Review D81 (2010) 095016. Journal of High Energy Physics, May 2017, 2017: 117.
- G. Grenier. 2010. *Search for events with leptonic jets and missing transverse energy in $p\bar{p}$ collisions and $\sqrt{s} = 1,96$ TeV*. Physical Review Letters.
- G. Cacciapaglia, A. Deandrea. 2014. *Higgsphobic and fermiophobic Z' as a single dark matter candidate*. Journal of High Energy Physics, Springer, 2014, 05, pp. 088.
- S. Brochet. 2014. *Recherche de physique au-delà du Modèle Standard dans le secteur du quark top et calibration de l'échelle en énergie des jets avec l'expérience CMS du LHC*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- J. Chasserat. 2014. *Recherche de leptoquarks de troisième génération dans l'expérience CMS au LHC*. Thèse de Doctorat. INPL.

- E. Bouvier. 2016. *Mesure de la masse du quark top à partir d'événements $t\bar{t}b\bar{b}$ présentant un J/ψ dans l'état final avec l'expérience CMS du LHC*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- A. L. Pequenot. 2016. *Recherche de nouvelles particules de spin 0 se désintégrant en paires de quarks top – antitop et calibration en énergie des jets au-delà du TeV avec l'expérience CMS du LHC*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- J.D. Ruiz-Alvarez. 2016. *Search for vector – like quark T' decaying into top + Higgs in single production mode in full hadronic final state using CMS data collected at 8 TeV*. Thèse de Doctorat. INPL.
- G. Cacciapaglia, A. Deandrea. 2017. *Probing vector - like quark models with Higgs – boson production*. Archives Cornell University.
- S. Davidson. 2017. *Renormalisation – group improved analysis of $\mu \rightarrow e$ processes in a systematic effective – field – theory approach*. Institut de Physique Nucléaire de Lyon. Journal of High Energy Physics.
- B. Courbon. 2017. *Reconstruction des photons et recherche d'un second boson de Higgs dans le canal di-photon au sein de l'exercice CMS au LHC*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1,
- Université Claude Bernard Lyon 1 (CMS collaboration). 2017. *Search for dark matter and unparticles in events with a Z boson and missing transverse momentum in proton – proton collisions at $\sqrt{S}=13$ TeV*. European organisation for Nuclear Research (CERN).
- G. Cacciapaglia, A. Deandrea. 2018. *Next-to-leading-order predictions for single vector – like quark production at LHC*. Archives Cornell University.
- A. Deandrea. 2018. *Characterising Dark Matter Interacting with Extra Charged Leptons*. Archives Cornell University.
- N. Chanon. 2018. *Le couplage du boson de Higgs au quark top est observé*.
- Article de CMS : Observation of $t\bar{t}H$ Production. Physical Review Letter 120, 231801 – Published 4 June 2018
- Communiqué de Presse du CERN: *Le boson de Higgs révèle son affinité pour le quark top*. CERN.
- S. Le Corre. 2019. *Higgs boson phenomenology beyond the standard Model*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

8.3- Références

8.3.1- Références associées aux sections 8.2.1 à 8.2.4 et aux sous-sections 8.2.5.a à 8.2.5.d (par ordre alphabétique) :

- ANRIEUX Vincent (2014). Polarisation des quarks et des gluons dans le nucléon. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud.
- AYMAR Robert (2009). Directeur Général du CERN (2004-2008). Préface du livre de Michael Klasen : Mécanique Quantique relativiste. Théories de jauge.

- BARON Rémi (2009). Chromodynamique quantique sur réseau et propriétés du nucléon. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud XI.
- CARROLL Sean (2013). Higgs Le boson manquant. Belin : Pour la science.
- CHANON Nicolas (4 juin 2018). Le couplage du boson de Higgs au quark top est observé. Institut de Physique Nucléaire de Lyon.
- CHAPON Arnaud (2011). Mesure des processus de double désintégration bêta du ^{100}Mo vers l'état excité 0_1^+ du ^{100}Ru dans l'expérience NEMO3. Thèse de doctorat. Université de Caen Basse-Normandie.
- di CIACCIO Lucia, Gautier, de MONCHEAULT Hamel. Découverte du boson de Higgs au LHC. Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 31, octobre 2012.
- di CIACCIO Lucia, Gautier, de MONCHEAULT Hamel. Derniers résultats sur le boson de Higgs au LHC. Reflets de la Physique (revue de la Société Française de Physique : SFP). Numéro 46, octobre-novembre 2015.
- COHEN-TANNOUJJI Gilles (Années 1990). Histoire, Actualité et Horizons du Modèle Standard. Licence et Magistère de physique. Université Paris-Sud.
- COHEN-TANNOUJJI Gilles (3^{ème} trimestre 1991). L'unification des interactions fondamentales. Les cahiers du M.U.R.S. (Mouvement Universel de la Responsabilité Scientifique) n° 25.
- DARRIGOL Olivier (1982). Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948). Thèse de doctorat. Université Paris I (Panthéon-Sorbonne).
- EINSTEIN Albert (1905). Sur l'électrodynamique des corps en mouvement. De la relativité des longueurs et des temps. Annalen der Physik. Traduction de Maurice Solovine, Gauthier-Villars, PARIS, 1925.
- FEYNMAN Richard (1985). The Strange Theory of Light and Matter. Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992.
- FLORENT Alice (2014). Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud. Laboratoire Leprince – Ringuet.
- HIGGS Peter (1964). Broken symmetries, massless particles and gauge fields. Physics Letters. 12: 132-133
- HIGGS Peter (1964). Broken symmetries and the masses of gauge bosons. Physical Review Letters. 13: 508-509
- HIGGS Peter (1966). Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. Physical Review. 145: 1156- 1163.
- HIGGS Peter (2013). Evading the goldstone theorem. Nobel Lecture.
- FLORENT Alice (2014). Contraindre les distributions de partons dans les noyaux grâce au boson W produit dans les collisions pPb à $\sqrt{s_{NN}} = 5,02$ TeV avec le détecteur CMS. Thèse de doctorat. Université Paris-Sud. Laboratoire Leprince – Ringuet.
- GROSS David (2005). The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD. Nobel Lecture. Reviews of Modern Physics. Volume 77.
- HLADIK Jean (Octobre 2010). Mécanique Quantique. Atomes et noyaux. Applications technologiques. Troisième édition. Dunod.
- IHE : Institut Interuniversitaire des Hautes Energies (Années 2000). Bases de la chromodynamique quantique. Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB).
- INTERNET (5 janvier 2019). Un peu de physique / Plan du site / Symétrie de jauge et interaction .
- INTERNET (NAUD Marie-Eve : Mécanisme de Higgs). Département de Physique de l'Université de Montréal.

- KLASSEN Michael (2009). Mécanique Quantique relativiste. Théories de jauge. DUNOD.
- LAMBERT Michel (2012-2013). Théorie Quantique des Champs. Cours suivi à Université Claude Bernard Lyon I (UCBL) dans le cadre de l'Université Ouvert.
- LAMBERT Michel (2012). Symétries, Champs de jauge, Interactions électrofaibles. Université Claude Bernard Lyon1 (UCBL). Institut de Physique Nucléaire de Lyon.
- LA RECHERCHE (Septembre 2012. Numéro 467). Informations sur le boson de Higgs.
- LA RECHERCHE (Février 2014. Numéro 484). Interview de Peter Higgs.
- Le QUILLEUC Eloi (2017). Etude de la production du boson de Higgs en association avec une paire de quarks top-antitop dans l'expérience ATLAS . Thèse de Doctorat. Université Paris-Saclay.
- MILLET Thomas (2007). Recherche de gluinos dans la topologie à jets de quarks b et énergie transverse manquante avec le détecteur D0 au TeVatron. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon-I.
- MARLEAU Luc (2018). *Introduction à la physique des particules*. Université Laval. Québec.
- MARQUET Cyrille (2006). Chromodynamique Quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de Hadrons. Thèse de doctorat. Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie et Service de physique théorique – CEA / Saclay.
- NEWTON Isaac (troisième édition 1726). «*Principia* ». Traduction par la Marquise du Châtelet. Dunod.
- RUBBIA Carlo (1984). Experimental observation of the intermediate vector bosons W^+ , W^- and Z^0 . Nobel Lecture.
- SCIFO Estelle (2014). Mesure des couplages du boson de Higgs dans son mode de désintégration en deux photons avec le détecteur ATLAS au LHC. Thèse de Doctorat. Université Paris-Saclay.
- SENECHAL Jean-François (Novembre 1997). Introduction à la théorie des groupes de Lie. Université de Sherbrooke. Québec.
- THEVENEAUX-PELZER (2007). Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs dans le modèle standard des interactions électrofaibles. Master 1 de Physique et Applications. Université Pierre et Marie Curie (Paris).
- WEINBERG Steven (1979). Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions. Nobel Lecture.
- WIKIPEDIA (29 novembre 2018). Vladimir Fock.
- WIKIPEDIA (15 décembre 2018). Gluon.
- WIKIPEDIA.(18 décembre 2018). Invariance. Physique théorique.
- WIKIPEDIA (18 décembre 2018). Symétrie (physique).
- WIKIPEDIA (15 janvier 2019). Interaction électrofaible.
- WIKIPEDIA (4 mars 2019). Equation de Klein-Gordon.
- WIKIPEDIA (5 mars 2019). Spin.

8.3.2- Publications associées à la sous-section 8.2.5.e (par ordre alphabétique) :

- BOUVIER E. (2016). Mesure de la masse du quark top à partir d'événements ttbar présentant un J/ψ dans l'état final avec l'expérience CMS du LHC. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- BROCHET S. (2014). Recherche de physique au-delà du Modèle Standard dans le secteur du quark top et calibration de l'échelle en énergie des jets avec l'expérience CMS du LHC. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

- CACCIAPAGLIA G. , DEANDREA A. (2014). Higgsphobic and fermiophobic Z' as a single dark matter candidate. *Journal of High Energy Physics*, Springer, 2014, 05, pp. 088.
- CACCIAPAGLIA G. , DEANDREA A. (2017). Probing vector - like quark models with Higgs – boson production. *Archives Cornell University*.
- CACCIAPAGLIA G. , DEANDREA A. (2018). Next-to-leading-order predictions for single vector – like quark production at LHC. *Archives Cornell University*.
- CHASSERAT J. (2014). Recherche de leptoquarks de troisième génération dans l'expérience CMS au LHC. Thèse de Doctorat. INPL.
- COURBON B. (2017). Reconstruction des photons et recherche d'un second boson de Higgs dans le canal di-photon au sein de l'expérience CMS au LHC. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- DAVIDSON S. , GRENIER G. (2010). Lepton flavour violating Higgs and tau to mu gamma. *Physical Review D* 81 (2010) 095016. *Journal of High Energy Physics*, May 2017, 2017: 117.
- DAVIDSON S. (2017). Renormalisation – group improved analysis of $\mu \rightarrow e$ processes in a systematic effective – field – theory approach. Institut de Physique Nucléaire de Lyon. *Journal of High Energy Physics*.
- DEANDREA A. (2002). The hadronic τ decay of a heavy charged Higgs in models with singlet neutrino in large extra dimensions. *Physical Review D*, American Physical Society, 2002, pp. 75006.
- DEANDREA A. (2004). Little Higgs Models and Precision Electroweak Data. *Journal of High Energy Physics*, Springer, 2004, 402, pp. 32.
- DEANDREA A. (2007). Quantum corrections to the effective neutrino mass operator in 5 D MSSM. *Physical Review D*, American Physical Society, 2007, 75, pp. 113005.
- DEANDREA A. (2018).. Characterising Dark Matter Interacting with Extra Charged Leptons. *Archives Cornell University*.
- GRENIER G. (2010). Search for events with leptonic jets and missing transverse energy in $p\bar{p}$ collisions and $\sqrt{s} = 1,96$ TeV. *Physical Review Letters*.
- Le CORRE S. (2019). Higgs boson phenomenology beyond the standard Model. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- PEQUENOT A. L. (2016). Recherche de nouvelles particules de spin 0 se désintégrant en paires de quarks top – antitop et calibration en énergie des jets au-delà du TeV avec l'expérience CMS du LHC. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- RUIZ-ALVAREZ J. D. (2016). Search for vector – like quark T' decaying into top + Higgs in single production mode in full hadronic final state using CMS data collected at 8 TeV. Thèse de Doctorat. INPL.
- UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1 (CMS collaboration 2017). Search for dark matter and unparticles in events with a Z boson and missing transverse momentum in proton – proton collisions at $\sqrt{s}=13$ TeV. European organisation for Nuclear Research (CERN).

Chapitre 9

Une autre pérennité du concept d'intégrale de chemins : La recherche en mathématique pure

Résumé

9.1- Introduction

9.2- Méthode de travail et résultats obtenus

9.3- Les domaines concernés en mathématique pure (non exhaustif)

- 9.3.1- Les matroïdes
- 9.3.2- Les fonctions zêtas
- 9.3.3- Les fonctions polylogarithmes
- 9.3.4- Les fonctions polyzêtas
- 9.3.5- les multiple-polylogarithmes et hyperlogarithmes
- 9.3.6- L'algèbre de Hopf
- 9.3.7- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur
- 9.3.8- Les fonctions hypergéométriques
- 9.3.9- Les fonctions méromorphes
- 9.3.10- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau
- 9.3.11- L'objet mathématique « *Diagramme de Feynman* » à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs

9.4- Les recherches dans le monde

- 9.4.1- La recherche en Allemagne
- 9.4.2- La recherche au Vietnam
- 9.4.3- La recherche en Italie
- 9.4.4- La recherche au Danemark
- 9.4.5- La recherche en France
- 9.4.6- La recherche en Suisse
- 9.4.7- La recherche aux USA
- 9.4.8- La recherche en Chine
- 9.4.9- La recherche au Japon

- 9.4.10- La recherche en Inde
- 9.4.11- La recherche en Corée du Sud
- 9.4.12- La recherche en Angleterre
- 9.4.13- La recherche en Belgique
- 9.4.14- La recherche en Russie

9.5- Détail des travaux effectués

- 9.5.1- Les matroïdes
- 9.5.2- Les séries hypergéométriques multiples et polyzêta
- 9.5.3- Les hyperlogarithmes
- 9.5.4- Les multiple-polylogarithmes
- 9.5.5- Les algèbres de Hopf
- 9.5.6- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur
- 9.5.7- Les fonctions hypergéométriques
- 9.5.8- Les fonctions méromorphes
- 9.5.9- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau
- 9.5.10- Compléments

9.6- Références

Résumé

Au chapitre 8 nous avons largement analysé l'apport de Feynman dans la recherche en physique des particules subatomiques à partir de ses diagrammes provenant du concept des intégrales de chemins.

En fait, l'intégrale de chemins associées aux intégrales dites de Feynman nécessaires à l'élaboration des diagrammes du même nom, irriguent un certain nombre de domaines en mathématiques par les nombreuses interconnexions que les mathématiciens peuvent discerner en passant des intégrales de Feynman aux mathématiques pures et réciproquement ; les intégrales de Feynman encourageant la recherche en mathématiques pures et ces dernières permettent du même coup une meilleure compréhension de ces intégrales à travers leur codage dans la construction des diagrammes.

Les diagrammes de Feynman issus des intégrales du même nom sont ainsi devenus des objets mathématiques à part entière. Et la manière pour Feynman d'encoder ses calculs par les diagrammes a été extirpée, comme nous le verrons, par les mathématiciens qui s'en inspirent sans aucune référence à la physique.

Ce chapitre 9 est donc dédié à l'étude de la pérennité de l'intégrale de chemins à travers les recherches menées en mathématiques pures.

9.1- Introduction

Dans ce chapitre 9 nous allons montrer l'incidence des idées de Feynman dans le domaine de la recherche en mathématiques pures et comment ces dernières influent sur une compréhension toujours plus grande des travaux de Feynman.

En effet les intégrales de chemins, associées aux intégrales dites de Feynman nécessaires à l'élaboration des fameux diagrammes, ont une certaine influence sur la recherche en mathématique en s'interconnectant, entre autres, avec des domaines tels que les matroïdes, les intégrales et séries particulières associées aux fonctions zêtas et polylogarithmes, les algèbres de Hopf, les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur, les fonctions hypergéométriques, les fonctions méromorphes, la géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau, la théorie des perturbations non linéaire à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateur, la mécanique statistique des transitions de phase. Et cette énumération est loin d'être exhaustive, comme nous le verrons par le nombre d'articles publiés entre 1960 et 2020.

Mon travail porte sur la recherche des publications qui montrent que le concept de l'intégrale de chemins (via les intégrales dites de Feynman constituant la partie calculatoire de ces dernières et conduisant aux diagrammes considérés comme objet mathématique à part entière), va encourager la recherche en mathématiques pures dans une certaine direction, et de manière réciproque, sur la mise en évidence que du même coup ces recherches en mathématiques vont permettre une meilleure compréhension des intégrales de Feynman à travers leur codage dans la construction des diagrammes.

De la même façon qu'au chapitre 7, afin d'être le plus précis possible dans mes recherches, j'ai consulté la base de données *MathSciNet* en parallèle avec *Internet* en procédant à une méthode de travail quasiment identique que je mentionne au paragraphe 9.2.

Puis au paragraphe 9.3, afin de comprendre le sens des travaux effectués par les mathématiciens, j'ai trouvé intéressant de définir ce que sont :

- les matroïdes,
 - les fonctions zêtas,
 - les fonctions polylogarithmes,
 - les nombres polyzêtas,
 - les multiple – polylogarithmes et les hyperlogarithmes,
 - l'algèbre de Hopf,
 - les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur,
 - les fonctions hypergéométriques,
 - les fonctions méromorphes,
 - la géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau,
 - les avantages de l'objet mathématique « *Diagramme de Feynman* » à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs,
- en mentionnant pour la plupart des définitions les interrogations que ces fonctions soulèvent à l'heure actuelle, qui sont loin d'être résolues et que les intégrales de Feynman peuvent permettre d'aborder sous un angle nouveau.

Au paragraphe 9.4, je fais état des recherches effectuées dans le monde en sélectionnant, parmi les 791 articles associé aux mots clefs appropriés (introduits dans le menu initial de la base de données *MathScinet*), les publications qui relèvent du sujet abordé en les décortiquant.

Puis au paragraphe 9.5, je détaille et répertorie les travaux effectués dans le domaine des matroïdes, des séries hypergéométriques multiples et polyzêtas, des hyperlogarithmes, des multiple-polylogarithmes, des algèbres de Hopf, des équations aux dérivées partielles (EDP)

telles que l'équation de diffusion de la chaleur, des fonctions hypergéométriques et des fonctions méromorphes.

Année par année, je vais m'intéresser à leur écho grâce aux citations qui leur sont dédiées. Ceci va alors me conduire à la synthèse des travaux qui ont suscité le plus d'intérêt dans le monde des mathématiciens gage de sérieux et d'intérêt.

Les publications et les articles que j'ai consultés afin de prendre connaissance des fonctions mathématiques dont il est question sont les suivants :

- Fonction zêta de Riemann⁵⁸⁴,
- La fonction zêta⁵⁸⁵,
- Fonction polylogarithme⁵⁸⁶,
- Polylogarithmes⁵⁸⁷,
- Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents⁵⁸⁸,
- Feynman integrals via hyperlogarithms⁵⁸⁹,
- Feynman integrals and hyperlogarithms⁵⁹⁰,
- Intégrales singulières⁵⁹¹,
- Algèbres de Hopf combinatoires⁵⁹²,
- Algèbre de Hopf⁵⁹³,
- Renormalisation et Ambiguïté Galoisienne⁵⁹⁴.
- Chatelain Vanessa (2011). Contributions à la théorie des matroïdes. Polytope des bases, Orientations et Algorithmes. Thèse de Doctorat en mathématiques, Université Pierre et Marie Curie.
- Wikipedia (5.10.2020). Les fonctions hypergéométriques.
- Wikipedia (5.10.2020). Les fonctions méromorphiques.
- Wikipedia (5.10.2020). La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau.
- Wikipedia (5.10.2020). La mécanique statistique des transitions de phase.
- Berglund Nils (2016). Les diagrammes de Feynman 1, 2, 3 – Images des Mathématiques. Professeur à l'Université d'Orléans.
- Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698.

584. Wikipédia. 10 mars 2019. « *Fonction zêta de Riemann* ».

585. P. Biane, J.B. Bost, P. Colmez. 2002. « *La fonction zêta* ». Les Editions de l'Ecole Polytechnique.

586. Wikipédia. 12 mars 2019. « *Fonction polylogarithme* ».

587. M. Paugam. 17 avril 2014. « *Polylogarithmes* ». Internet.

588. P. Cartier. Mars 2001. « *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents* ». Séminaire BOURBAKI, 53^e années, 2000-2001, n^o 885, p. 137 à 173.

589. E. Panzer. 2014. « *Feynman integrals via hyperlogarithms* ». Proceedings of Science Journal (PoS). LL2014 (2014) 049.

590. E. Panzer. 2014. « *Feynman integrals and hyperlogarithms* ». PhD Thesis.

591. F. Pham. 2005. « *Intégrales singulières* ». CNRS Editions. EDP Sciences.

592. P. Cartier. Année 2010-2011. « *Algèbres de Hopf combinatoires* ». Séminaire de Combinatoire Enumérative et Analytique. Institut Henri Poincaré.

593. Wikipédia. 14 mars 2019. « *Algèbre de Hopf* ».

594. A. Connes. 2000. « *Renormalisation et Ambiguïté Galoisienne* ». Internet.

9.2- Méthode de travail et résultats obtenus

La méthode de travail, de la même manière qu'au chapitre 7, consiste à utiliser conjointement les avantages apportés par la base de donnée MathSciNet et Internet.

Mais bien évidemment, il m'a été indispensable de questionner les mathématiciens de mon entourage afin d'avoir une première idée des domaines relevant du sujet traité mais aussi pour discerner ce phénomène de va et vient concernant les interconnexions entre les intégrales de Feynman et les domaines concernés, car, comme nous l'avons écrit plus haut :

« Les intégrales de Feynman encouragent la recherche en mathématiques pures et ces dernières permettent du même coup une meilleure compréhension de ces intégrales à travers leur codage dans la construction des diagrammes ».

Ainsi après avoir cherché sur *Internet* les laboratoires de mathématiques particulièrement compétant en la matière, j'ai utilisé la base de données MathSciNet afin de recouper et d'approfondir mes informations.

J'ai donc procédé de la manière qui suit :

- Je commence par mentionner dans *le menu* « *Titre* » les mots clefs associés à ma recherche.
- J'ai alors accès aux domaines des mathématiques concernés grâce à *l'onglet* « *Primary Classification* ».
- Puis je sélectionne un domaine particulier pour obtenir le nom des auteurs associé à ce domaine ainsi que le nombre d'articles qu'ils ont publiés grâce à *l'onglet* « *Authors* ».
- *L'onglet* « *Year* » me donne année par année le nombre de publications émises.
- *L'onglet* « *MR ...* » me donne accès à la publication qui m'intéresse.
- Et je trie parmi tous les résultats que j'obtiens ceux qui correspondent à ma recherche, en appliquant les trois critères de sélections que j'ai mentionné au paragraphe 7.3 du chapitre 7.

J'obtiens donc un premier résultat brut en mentionnant les mots clefs *Feynman integrals* dans *le menu* « *Titre* » d'entrée de la base. Je constate un nombre de 791 publications publiées sur le sujet à partir de 1951, date que nous connaissons déjà et qui correspond au rapport de Cécile DeWitt-Morette dont nous avons parlé dans le chapitre 7.

En fait, sur les 791 publications, il faut enlever les 266 publications relatives au paragraphe 7.4 du chapitre 7 qui ne font pas directement partie de ce chapitre 9.

En effet, ces 266 publications concernent, comme nous l'avons vu, la construction de l'intégrale de chemins selon des méthodes purement mathématiques afin d'apporter rigueur et précision en lieu et place des raisonnements intuitifs de Feynman.

Ainsi, le nombre de publications brutes concernant ce chapitre 9 devient égal à :

$$791 - 266 = 525 \text{ publications}$$

la première étant l'œuvre du mathématicien américain Robert Horton Cameron (1908 – 1989) : *A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals* (1960) qui a travaillé sur l'analyse et la théorie des probabilités et qui fut engagé dans un programme

ambitieux d'extension des travaux de Norbert Wiener (1894 – 1964) à des modèles mathématiques associés au mouvement Brownien.

9.3- Les domaines concernés en mathématique pure (non exhaustif)

9.3.1- Les matroïdes

Introduisons le concept de matroïde en mathématique en commençant par donner les deux définitions suivantes concernant *l'analyse combinatoire* et *l'algèbre linéaire*.

L'analyse combinatoire étudie entre autres les combinaisons d'ensembles finis, c'est-à-dire les ensembles qui possèdent un nombre fini d'éléments.

Si nous considérons une famille d'un même espace vectoriel, *l'algèbre linéaire* est associée aux vecteurs de cette famille qui sont linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Ainsi, en *analyse combinatoire*, un matroïde est associé au concept d'indépendance linéaire c'est-à-dire à *l'algèbre linéaire*. La structure du matroïde est aussi liée à la *théorie des graphes* (modèles abstraits de dessins de réseaux reliant des objets), aux *algorithmes* (suite finie et non ambiguë d'opérations ou d'instructions), et à la *géométrie* dans leur manière de représentation dans l'espace. De manière générale, un matroïde est une structure combinatoire définie sur un ensemble fini par la donnée d'un ensemble de sous-ensembles qui peut être les bases, les circuits ou les cocircuits du matroïde.

Il me paraît judicieux de citer une partie de l'introduction de Vanessa Chatelain sur les matroïdes orientés concernant sa thèse de doctorat en mathématiques présentée à l'Université Pierre et Marie Curie en 2011: *Contributions à la théorie des matroïdes. Polytope des bases, Orientations et Algorithmes* :

« *Les matroïdes orientés sont des objets à la fois combinatoires, géométriques et algébriques. Leur structure peut être considérée comme une abstraction combinatoire des positions relatives dans les configurations de points ou d'hyperplans des espaces réels, ou bien des directions dans les cycles et cocycles d'un graphe orienté. La vingtaine d'axiomatiques issues de directions diverses qui existent aujourd'hui, ainsi qu'une omniprésente de dualité, confirment le caractère très naturel de cette structure. Les applications de plus en plus nombreuses, viennent de domaines très divers.*

Pour l'historique, en bref, les matroïdes orientés ont été introduits indépendamment et à peu près simultanément d'une part par Las Vergnas à partir de la théorie des graphes en tant que généralisation aux matroïdes de la notion d'orientation, d'autre part par Bland à partir de la programmation linéaire en tant que modèle combinatoire adapté à ce type de problèmes, et enfin par Folkman et Lawrence, qui partant de l'étude des polytopes ont abouti à la représentation topologique des matroïdes orientés par les arrangements de pseudosphères.

Antérieurement, la structure de matroïde (1935) avait été obtenue en retenant les principales propriétés de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels, et en particulier dans l'espace des cycles d'un graphe, mais sans tenir compte des signes. Ils constituent du point de vue géométrique une généralisation des géométries projectives. De nombreux autres exemples

naturels peuvent être construits à partir des graphes, des corps (dépendance algébrique), des ensembles ordonnés ».

9.3.2- Les fonctions zêtas

La fonction zêta d'Euler (1707-1783) est définie par la série suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

avec :

* s des puissances en nombres entiers naturels sauf zéro, soit $s \in \mathbb{N}^*$.

Euler avait compris la relation des séries de ce type avec les nombres premiers (les nombres qui ne peuvent être divisés que par eux-mêmes et par 1) et trouvé un certain nombre de théorèmes très importants en théorie des nombres.

La fonction zêta de Riemann (1826-1866) est une fonction analytique complexe apparue dans la théorie des nombres premiers. Cette fonction est définie par la série du même nom, c'est-à-dire :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

avec :

* s des puissances en nombres complexes tels que $s = a + ib$ pour lequel $\text{Réel}(s) = a$ est supérieur à 1.

La position des zéros complexes de la fonction zêta de Riemann est liée à la répartition des nombres premiers et cette fonction $\zeta(s)$ se trouve au carrefour d'un grand nombre d'autres théories. Les interrogations qu'elle soulève sont loin d'être résolues et les intégrales de Feynman permettent un autre point de vue dans la manière d'aborder les questions en suspend. Ainsi, la théorie de la fonction zêta de Riemann est-elle dominée par la question de la distribution de ses zéros, et l'hypothèse de Riemann quant à l'étude des zéros de sa fonction $\zeta(s)$ dans le plan complexe est unanimement admise par la communauté des mathématiciens. Pour nous faire une idée de la difficulté du problème, il faut savoir qu'en cherchant à analyser les conséquences de l'hypothèse de Riemann en vue de comprendre la démonstration du mathématicien allemand pour ce qui concerne la position des zéros complexes de sa fonction $\zeta(s)$, les chercheurs butent sur des critères infirmant justement cette hypothèse.

9.3.3- Les fonctions polylogarithmes

Soit $k \geq 1$ un entier naturel fixé (c'est-à-dire $k \in \mathbb{N}^*$), on pose pour z complexe tel que $|z| < 1$ et $n \geq 1$:

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}.$$

Ces fonctions Li_k appelées polylogarithmes, sont associées à des domaines variés de la recherche en mathématiques, allant de la théorie des nombres à la théorie de l'intégration.

Pour différentes valeurs de k appartenant à l'ensemble N^* , on obtient diverses fonctions toutes particulières, aux propriétés bien spécifiques, et le paramétrage de la variable z conduit à des interrogations sans fin sur les séries obtenues.

En effet :

→ Pour $k = 1$:

La fonction $Li_1(z)$ est la fonction logarithme $-\ln(1-z)$, c'est-à-dire :

$$Li_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).$$

→ Pour $k = 2$:

La fonction $Li_2(z)$ est la fonction dilogarithme :

$$Li_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = -\int_0^z \ln(1-t) \frac{dt}{t} = \int_0^z \left(\int_0^t \frac{du}{1-u} \right) \frac{dt}{t}.$$

Notons que pour z Réel, on a la série étudiée par Euler en 1768.

Les propriétés du dilogarithme sont nombreuses et des mathématiciens comme Abel (1802-1829), Rogers (1862-1933), Jacques Bernoulli (1654-1705) ont travaillé sur leurs caractéristiques en paramétrant la variable z de différentes façons.

Mentionnons que la valeur spéciale du dilogarithme :

$$Li_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = Li_2(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n^2}$$

est le terme correctif du troisième ordre dans le rapport entre le moment magnétique et le courant cinétique d'une particule, rapport encore appelé *rapport gyrométrique*.

Signalons aussi que le dilogarithme se retrouve dans l'équation de Bose-Einstein introduite par le physicien indien Bose (1894-1974) en 1920 pour ce qui concerne les statistiques quantiques associées aux photons et généralisée ensuite par Einstein (1879-1955) aux atomes en 1924.

9.3.4- Les nombres polyzêtas

La définition des nombres polyzêtas peut être exprimée de la manière qui suit.

Pour une suite :

$$K = (k_1, \dots, k_r)$$

d'entiers naturels appartenant à l'ensemble N^* , c'est-à-dire à l'ensemble des valeurs de k supérieures ou égales à 1, on définit le nombre polyzêta $\zeta(K)$ en posant pour la série suivante la condition :

$$\zeta(K) = \zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k_1} \dots n^{k_r}}$$

avec :

- * La sommation \sum étendue aux systèmes (n) d'entiers satisfaisant $n_1 > \dots > n_r \geq 1$.
- * Les entiers k_1, \dots, k_r satisfaisant à $k_1 \geq 2, k_2 \geq 1, \dots, k_r \geq 1$.
La restriction sur k_1 est nécessaire pour la convergence de la série.
- * Le nombre $r \geq 1$ représentant la longueur (encore appelé profondeur) de la série.
- * La formule $|K| = k_1 + \dots + k_r$ correspondant au poids de la série.

L'interpolation des nombres polyzêtas au moyen d'une fonction polyzêta telle que :

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s_1} \dots n^{-s_r}$$

fait l'objet de recherches approfondies en mathématiques pour ce qui concerne les critères de convergence associés à tel ou tel ensemble auquel appartiennent les nombres (s_1, \dots, s_r) .

En effet, si la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est une vieille connaissance, ce n'est que depuis le début des années 2000 que les mathématiciens se sont intéressés à sa généralisation à r variables :

$$\zeta(s_1, \dots, s_r).$$

De même, c'est très récemment que la recherche en mathématiques se préoccupe des fonctions polylogarithmes $Li_k(z)$ à plusieurs indices telles que :

$$Li_{k_1, \dots, k_r}(z).$$

Nous verrons d'ailleurs dans la sous-section suivante 9.3.5, que les intégrales de Feynman (associées aux diagrammes du même nom) issues du concept d'intégrale de chemins ont permis d'améliorer la compréhension :

- * de la théorie des multiples-polylogarithmes :

$$Li_{k_1, \dots, k_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}$$

- * de la théorie des hyperlogarithmes :

$$L_{\sigma_1, \dots, \sigma_l}(z) = \int \dots \int \frac{dz_r}{z_r^{\sigma_r}} \dots \frac{dz_1}{z_1^{\sigma_1}}$$

$$0 < z_1 < \dots < z_r < z$$

c'est-à-dire:

$$L_{\sigma_1, \dots, \sigma_l}(z) = \int_{z_1}^z \frac{dz_1}{z_1^{-\sigma_1}} \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{z_2^{-\sigma_2}} \int \dots \int_0^{z_{r-1}} \frac{dz_r}{z_r^{-\sigma_r}}$$

avec :

$$* \sigma_1, \dots, \sigma_l \in \mathbb{C}$$

$$* \sigma_l \neq 0.$$

9.3.5- Les multiple – polylogarithmes et les hyperlogarithmes

Cette sous-section est inspirée des travaux du mathématicien allemand Erik Panzer actuellement en Post-Doctorat à l'Université d'Oxford (All Souls College) en Angleterre.

Erik Panzer a obtenu son Doctorat de Mathématique à l'Université Humboldt de Berlin sous la direction de Dirk Kreimer.

Ses principaux centres d'intérêts sont :

- * Les intégrales de Feynman,
- * Les hyperlogarithmes,
- * Les problèmes de renormalisation,
- * L'algèbre de Hopf.

Nous analysons particulièrement les publications d'Erik Panzer suivantes :

- * Feynman integrals via hyperlogarithms⁵⁹⁵
- * Feynman integrals and hyperlogarithms⁵⁹⁶

Erik Panzer mentionne que les progrès dans l'évaluation rigoureuse des intégrales de Feynman passent par une compréhension plus grande de ce qu'il appelle les multiples-polylogarithmes :

*« Many talks at this conference demonstrate the remarkable progress in the exact evaluation of Feynman integrals that was achieved during the past few years. A key element shared by many of these advances is an improved understanding of multiple polylogarithms ... ».*⁵⁹⁷

Les multiples-polylogarithmes, qui permettent d'exprimer largement les intégrales de Feynman, sont formulés comme ci-après⁵⁹⁸ :

595. E. Panzer. 2014. « Feynman integrals via hyperlogarithms ». Proceedings of Science Journal (PoS). LL2014 (2014) 049.

596. E. Panzer. 2014. « Feynman integrals and hyperlogarithms ». PhD Thesis.

597. E. Panzer. 2014. « Feynman integrals via hyperlogarithms ». Proceedings of Science Journal (PoS). LL2014 (2014) 049. Page 2.

598. Ibid. Page 2.

599. Ibid. Page 2.

$$Li_{k_1, \dots, k_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}},$$

avec:

$$* n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}.$$

Erik Panzer ajoute aussi que les multiple-polylogarithmes peuvent être représentés sous la forme d'intégrales intriquées ayant l'allure suivante⁵⁹⁹ :

$$L_{\sigma_1, \dots, \sigma_l}(z) = \int_{z_1}^z \frac{dz_1}{z_1^{1-\sigma_1}} \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{z_2^{1-\sigma_2}} \int \dots \int_0^{z_r^{-1}} \frac{dz_r}{z_r^{-\sigma_r}}$$

avec :

$$* \sigma_1, \dots, \sigma_l \in \mathbb{C},$$

qu'il appelle hyperlogarithmes.

Il précise que les hyperlogarithmes sous la forme précédente peuvent être calculés par une méthode itérative qu'il tient pour une nouvelle méthode d'intégration requérant une propriété spéciale de l'intégrande appelée *linear reducibility*.⁶⁰⁰

Les problèmes relatifs à l'intégration paramétrique à l'aide des hyperlogarithmes sont résolus au moyen d'algèbres spécifiques et sont largement mis en exergue dans sa thèse de doctorat⁶⁰¹ par un nombre assez exhaustif de diagrammes de Feynman.

En conclusion, le fait de comprendre mieux les multiples-polylogarithmes permet de connaître mieux les intégrales de Feynman et d'approfondir la partie calculatoire conduisant aux diagrammes.

On constate donc que la connexion entre les intégrales de Feynman (issues de l'intégrale de chemins) et les multiple-polylogarithmes encourage la recherche sur les hyperlogarithmes qui sont des intégrales intriquées représentant les multi-polylogarithmes comme montré ci-avant.

Réciproquement, les intégrales de Feynman qui deviennent donc liées aux multi-polylogarithmes s'écrivant en fait comme des combinaisons linéaires de polylogarithmes stimulent aussi la recherche sur ces derniers (voir §9.3.3). En effet, cette recherche qui interagit sur une évaluation plus rigoureuse des intégrales de Feynman, débouche in fine sur la résolution de problèmes associés à la physique fondamentale.

Ainsi, les mathématiques pures fécondent la physique fondamentale et réciproquement.

600. E. Panzer. 2014. « *Feynman integrals and hyperlogarithms* ». PhD Thesis. Page 4.
 601. Ibid.

9.3.6- L'algèbre de Hopf

Heinz Hopf (1894-1971) est un mathématicien allemand, précurseur en mathématique, appliquant les outils de l'algèbre dans des espaces topologiques, c'est-à-dire dans le traitement des notions de limite, de continuité et de voisinage.

Rappelons que les espaces topologiques constituent la base conceptuelle qui permet de définir en mathématique les notions de limite, de continuité et de voisinage, en englobant un nombre important de situations telles que :

- * Les ensembles finis,
- * les ensembles discrets,
- * Les espaces associés aux géométries euclidienne et algébrique,
- * Les espaces numériques à n dimensions,
- * Les espaces fonctionnels qui concernent un ensemble d'applications d'une certaine forme d'un ensemble X vers un ensemble Y . Le nom d'espace signifie ici qu'un espace fonctionnel puisse être topologique, vectoriel ou les deux à la fois comme l'espace localement convexe qui est un espace vectoriel topologique sur R .

La notion d'algèbre de Hopf apparaît pour la première fois dans les travaux de Charles Ehresmann (1905-1979) en topologie, c'est-à-dire pour être encore plus précis : *dans l'étude des mathématiques portant sur des ensembles munis d'une notion de voisinage autour de chaque point que l'on appelle « espace topologique »*.⁶⁰²

Les travaux d' Ehresmann consistaient à étudier la cohomologie (l'obstruction de certaines suites d'une application entre deux structures algébriques comme deux groupes, à être exactes au sens mathématique du terme) des groupes unitaires. En d'autres termes, il s'agissait d'étudier la particularité qu'ont les ensembles munis d'une certaine loi de composition interne ou externe à former une suite finie ou infinie.

Ainsi, l'espace sous-jacent à deux espaces vectoriels étant défini comme un groupe, le fait de disposer d'une application :

$$G \times G \mapsto G$$

c'est-à dire la multiplication, permet d'obtenir par dualité un coproduit sur la cohomologie, ce qui définit l'algèbre de Hopf, car :

$$H \mapsto H \otimes H$$

et :

$$H \otimes H \mapsto H.$$

Mentionnons aussi que les opérations de contraction et d'insertion dans les graphes selon la prédiction de Gian-Carlo Rota (1932-1999) conduisent à des algèbres de Hopf.

Il n'est donc pas fortuit d'imaginer une structure d'algèbre de Hopf pour ce qui concerne les diagrammes de Feynman, car leur description en un ensemble de sommets avec pour chaque

602. Wikipédia. 16 mars 2019. « Topologie ».

sommet des demi-arêtes, conduit à une algèbre de diagrammes qui n'est autre qu'une algèbre de polynômes dont les générateurs sont indexés par des graphes connexes.

Aussi, pour décrire les graphes que constituent les diagrammes de Feynman, il est commode de considérer chacune des arêtes comme étant composée de deux demi-arêtes et ainsi de suite.

De là un pas que franchit Dirk Kreimer de l'Institut de Mathématique de l'Université Humboldt de Berlin, afin de comprendre conceptuellement les calculs de renormalisation en Théorie Quantique des Champs, en introduisant une algèbre de Hopf construite sur des arbres plans enracinés. Il s'agit bien d'une algèbre de polynômes associée à une infinité de variables indexées par des arbres planaires enracinés finis.

Dirk Kreimer a donc découvert pour ainsi dire la structure d'algèbre de Hopf secrètement présente dans les formules récursives des mathématiciens comme Bogoliubov (1909-1992) dans leurs travaux de renormalisation en Théorie Quantique des Champs.

Les travaux issus de la collaboration entre Dirk Kreimer et Alain Connes (Médaille Fields 1982) ont montré la similitude entre l'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Dirk Kreimer et une algèbre de Hopf introduite par Alain Connes afin d'organiser des calculs très complexes de géométrie noncommutative.

Tout ceci a conduit ces deux mathématiciens à définir une algèbre de Hopf directement en termes de graphes de Feynman et à appliquer à cette algèbre de Hopf le théorème de John Milnor (Médaille Fields 1962) et de Robert Moore (1882-1974) pour en déduire une algèbre de Lie associée à un groupe de Lie pronilpotent G , analogue du groupe des difféomorphismes formels.

Précisons que le théorème de Milnor - Moore donne une équivalence entre la catégorie des bialgèbres cocommutatives connexes et la catégorie des algèbres de Lie.

Précisons également qu'un groupe pronilpotent est un groupe topologique qui peut être réalisé comme la limite inverse de groupes topologiques qui sont tous nilpotents c'est-à-dire qui répondent tous à un certain nombre de critères bien particuliers.

Ainsi, les problèmes de renormalisation qui ont pour but d'éliminer les cas de singularités (divergence) rencontrés en Théorie quantique des Champs, ont trouvé des solutions grâce notamment aux travaux de Dirk Kreimer et d'Alain Connes.

En effet, la renormalisation interprète des intégrales divergentes de la théorie des perturbations c'est-à-dire de la théorie consistant à étudier des contextes où il devient possible de trouver une solution approchée à une équation en partant d'une solution plus simple.

Et pour cela, la redéfinition des intégrales de Feynman primitivement divergentes, a été abordée d'une nouvelle façon par Kreimer et Connes, grâce à la mise en lumière d'une structure d'algèbre de Hopf.

En Annexe 8, nous donnons deux exemples simples pour lesquels la théorie des perturbations permet de résoudre des équations différentielles assez complexes.

En Théorie Quantique des Champs la théorie des perturbations, au lieu d'être appliquée à des équations différentielles comme montrée dans nos deux exemples de l'Annexe 8, est appliquée aux intégrales de Feynman primitivement divergente, ce qui constitue ce que l'on appelle la *renormalisation*.

9.3.7- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur

Pour mémoire, l'équation de Fourier appelée équation de la chaleur s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Il s'agit d'une équation différentielle partielle (EDP) d'ordre 2 encore appelée équation aux dérivées partielles.

Les équations aux dérivées partielles font l'objet d'importantes recherches en mathématique dues en partie à leur large implication dans de nombreux domaines de la physique.

Rappelons à ce sujet la formule de Feynman-Kac qui établit un lien entre certaines équations aux dérivées partielles et les processus stochastiques.

En mathématique pure, la recherche concerne un large éventail de ces équations : les équations différentielles partielles linéaires et homogènes du second ordre dites elliptiques, hyperbolique ou paraboliques, les équations différentielles partielles non-linéaires et celles d'ordre supérieur.

9.3.8- Les fonctions hypergéométriques

Une fonction hypergéométrique dépendant de trois paramètres a, b, c s'écrit :

$${}_2F_1(a, b, c; z).$$

Elle s'exprime sous la forme d'une série hypergéométrique convergente, composée d'une suite de termes tels que le quotient du terme d'indice $(k+1)$ divisé par le terme d'indice k est fonction rationnelle de k .

Le mathématicien anglais John Wallis (1616 - 1703) , précurseur de Newton (1642 – 1727), a été celui qui a donné leur nom à ces fonctions en considérant des séries du type :

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \dots = 0! - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \dots$$

dans lesquelles chaque terme est multiplié par une valeur qui varie avec le terme considéré de la série.

Rappelons que pour une série géométrique chaque terme est multiplié par ce que l'on nomme « *raison* », se présentant sous la forme d'une constante arbitraire.

Aussi, qualifie-t-on « *hyper* » ces fonctions géométriques du fait qu'en grec le préfixe « *hyper* » signifie « *au-delà* ».

Mentionnons que le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) a poursuivi les travaux de Wallis en travaillant sur ce type de série, mais que c'est bien le mathématicien allemand Carl Gauss (1777 – 1855) qui a systématiquement traité ce type de série appelé aujourd'hui « *série hypergéométrique* » et qui a formalisé la notation que l'on connaît pour la fonction

hypergéométrique associée à cette série.

Au cours du 19^{ème} siècle, Bernhard Riemann (1826 – 1866) a effectué des travaux qui ont élargi le domaine de compréhension sur la fonction hypergéométrique en introduisant et en étudiant l'équation différentielle qu'elle satisfait.

Le fait pour les diagrammes de Feynman de devenir des objets mathématiques à part entière, voit le 20^{ème} siècle apporter de nouvelles dimensions à ce domaine des mathématiques pures.

9.3.9- Les fonctions méromorphes

Introduisons les fonctions méromorphes en commençant par donner les quelques définitions suivantes :

- L'analyse complexe traite des fonctions à valeurs complexes c'est-à-dire des valeurs appartenant au corps des nombres complexes noté \mathbb{C} , et qui sont dérivables sur \mathbb{C} ,
- En analyse complexe, une transformation conforme est une bijection qui conserve localement les angles, se comportant alors au voisinage de chaque point où elle est définie pratiquement comme si cette transformation multipliait toutes les distances par une constante fixe,
- En analyse complexe toujours, une fonction holomorphe est une transformation conforme. Elle est à valeurs complexes, définie et dérivable en tout point d'un sous-ensemble ouvert du plan complexe \mathbb{C} .

Ainsi, en analyse complexe, une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe.

Et d'après le théorème de factorisation du mathématicien Jacques Hadamar (1865 – 1963), l'ensemble des fonctions méromorphes est le corps des fractions de l'anneau des fonctions holomorphes.

Par exemple toutes les fractions rationnelles comme :

$$\frac{z^3 - 2z + 1}{z^5 + 3z - 1}$$

sont des fonctions méromorphes.

De même que les fonctions :

$$\frac{e^z}{z}, \quad \operatorname{tg} z, \quad \frac{\sin z}{(z-1)^2},$$

et la fonction zêta de Riemann.

9.3.10- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau

Commençons par donner quelques définitions utiles afin de sentir plus tard comment les intégrales de Feynman peuvent être associées aux espaces de Calabi-Yau.

- De manière classique, la géométrie algébrique s'intéresse à des objets géométriques composés de points dont les coordonnées vérifient des équations algébriques, comme par exemple le cercle, qui dans un plan rapporté à un repaire orthonormé admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

De nos jours, cette branche des mathématiques embrasse un grand nombre d'objets plus généraux permettant de développer des théories de plus en plus riches, associées à des besoins formulés par la physique fondamentale.

- Aussi, une variété (ou espace) de Calabi-Yau est un type de variété intervenant en physique théorique comme par exemple la théorie des supercordes. Dans cette théorie, la variété de Calabi-Yau joue le rôle d'espace de compactification, c'est-à-dire qu'à partir d'une théorie formulée à l'origine sur un espace-temps de dimension n , elle permet de construire une autre théorie formulée sur un sous-espace de dimension inférieure et inclu dans l'espace d'origine précédent.

Ainsi, une variété de Calabi-Yau est un type particulier de variété (espace de dimension $1, 2, \dots, n$) qui peut être associée aux intégrales de Feynman conduisant aux diagrammes devenus des objets mathématiques à part entière liés à la notion d'hypersurfaces de dimension n .

9.3.11- L'objet mathématique « *Diagramme de Feynman* » à travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs

L'article dont il est question dans cette section édité par le CNRS en 2016 par Nils Berglund sous le titre « *Les diagrammes de Feynman 1, 2, 3 – Images des Mathématiques* », montre bien la manière dont les mathématiciens se sont emparés des objets mathématiques que sont devenus les diagrammes de Feynman.

A travers l'étude statistique des chaînes d'oscillateurs, Nils Berglund, en prenant trois exemples pertinents, encode des calculs algébriques assez compliqués sous la forme représentative de diagrammes de Feynman permettant de visualiser les formules par des dessins qui allègent les notations, évitent les erreurs de calcul et synthétise de manière concrète les notions les plus abstraites qui deviennent ainsi un problème mathématique de combinatoire.

Nils Berglund est enseignant chercheur et professeur de mathématique à l'Institut Denis Poisson à l'Université d'Orléans.

Les trois exemples pris par Nils Berglund sont les suivants :

- L'étude des chaînes d'oscillateurs à travers le théorème d'Isserliss – Wick qui constitue un outil particulièrement important de la physique statistique dans le cas des distributions Gaussiennes,
- L'étude des chaînes d'oscillateurs associée à des distributions non-Gaussiennes dans le cadre

du modèle Φ^4 conçu à cet effet, à travers la notion de développement perturbatif,
 - L'étude des chaînes d'oscillateurs associée à la théorie des perturbations non linéaires exactes à travers les travaux d'analyse combinatoire et de physique statistique des physiciens mathématiciens américains James Glimm (né en 1934), Arthur Jaffe (né en 1932), Alan Sokal (né en 1955), Joel lebowitz (né en 1930) et du physicien mathématicien jürg Fröhlich (né en 1946).

Dans cette étude, Nils Berglund traite du problème de la renormalisation concernée par les chaînes d'oscillateurs contenant un nombre infini de billes, en extrapolant les résultats obtenus au cas de l'Electrodynamique Quantique.

9.4- Les recherches dans le monde (non exhaustives)

Les Universités du monde entier sont concernées par le thème contenu dans ce chapitre 9. Nous nous sommes volontairement limités aux pays suivants en appliquant les trois critères mentionnés au paragraphe 7.3 du chapitre 7.

La liste des mathématiciens par pays est évidemment très loin d'être exhaustive. Les pays sont aussi sélectionnés par l'importance de leurs universités en tant que centre de recherche en mathématiques.

9.4.1- La recherche en Allemagne

Les publications des chercheurs appartenant au groupe du professeur docteur Dirk Kreimer de l'Institut de Mathématique de l'Université Humboldt à Berlin et à d'autres centres de recherches sont les suivantes :

- Erik Panzer. 2011. *Hopf – algebraic renormalisation of Kreimer's toy model*. Master Thesis.
- F. Brown, O. Schnetz, K. Yeats. 2012. *Properties of c_2 Invariants of Feynman graphs*. *Advancer in Theoretical and Mathematical Physics Journal*, volume 18, number 2 (2014), page 323-362.
- F. Brown, D. Kreimer. 2012. *Decomposing Feynman rules*. *Proceedings of Science Journal (PoS)*. LL 2012 (2012) 049.
- E. Panzer. 2013. *Renormalisation. Hopf algebras and Mellin transforms*. *Communications in Contemporary Mathematics*, 648 (2016), pages 169-202.
- C. Bogner, M. Lueders. 2013. *Multiple polylogarithms and linearly reducible Feynman graphs*. *Communications in Contemporary Mathematics*, 648 (2015), pages 11-28.
- M. Goltz. 2013. *Evaluation techniques for Feynman diagrams*. Bachelorarbeit.
- M. Borinsky. 2013. *Algorithmisation of the Hopf algebra of Feynman graphs*. Masterarbeit.
- F. Brown. 2013. *Single-valued periods and multiple zeta values*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- M. Lueders. 2013. *Linear polynomial reduction for Feynman integrals*. Master Thesis.
- S. Black, L. Grump, M. DeVos, K. Yeats. 2013. *Forbidden minors for graphe with no first obstruction to parametric Feynman integration*. *Discrete Mathematics Journal*. Volume 338, Issue 3, March 2015, pages 9-35.
- R.M. Kaufmann, B.C. Ward. 2013. *Feynman Categories*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Erik Panzer. 2014. *On hyperlogarithms and Feynman Integrals with divergences and many scales*. *Journal of High Energy Physics*, 1403 (2014) 071.
- M. Borinsky. 2014. *Feynman graph generation and calculations in the Hopf algebra of Feynman graphs*. *Computer physics Communications Journal*. Volume 185, Issue 12, December 2014, pages 3317-3330.

- Erik Panzer. 2014. *Algorithms for symbolic integration of hyperlogarithms with applications to Feynman integrals*. Computer physics Communications Journal. Volume 188, March 2015, pages 148-166
- Erik Panzer. 2014. *Feynman Integrals via hyperlogarithms*. Proceedings of Science Journal (PoS). LL 2014 (2014) 049.
- S. Black, M. Kerr, P. Vanhove. 2014. *A Feynman Integral with higher normal functions*. Compositio Mathematica. Volume 151, Issue 12, December 2015, pages 2329-2375. Cambridge University Press Editor, in collaboration with London Mathematical Society.
- C. Bogner, F. Brown. *Feynman Integrals on Moduli Spaces of Curves of genus zero*. Communications in Number Theory and Physics Journal. 09 (2015), pages 189-238. International Press of Boston.
- L. Laudan. 2014. *Beispiele fuer die Algebran der Feynman Graphen*. Bachelorarbeit.
- M. Borinsky. 2014. *Computations and generation of elements on the Hopf algebra of Feynman graphs*. International workshop on Advanced Computing and Analysis Techniques in physics research 2014 proceedings.
- Erik Panzer. 2014. *Feynman integrals and hyperlogarithms*. PhD Thesis.
- A. von Manteuffel, E. Panzer, R.M. Schabinger. *A quasi-finite basis for multi-loop Feynman integrals*. Journal of High Energy Physics, 1502 (2015) 120.
- Lucia Rotheray. 2014. *Hopf subalgebras from Green's functions*. Master Thesis.
- M. Sars. 2015. *Parametric Representation of Feynman Amplitudes in Gauge Theories*. PhD Thesis.
- F. Brown. 2015. *zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of a punctured elliptic curve*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Spencer Bloch. 2015. *Feynman Amplitudes in Mathematics and Physics*. International Conference on Materials for Advanced Technologies (ICMAT) Proceeding.
- Julian Purkart. 2015. *The signed permutation group on Feynman graphs*. Master Thesis.
- Michael Borinsky. 2015. *Feynman diagrams and their algebraic lattices*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Erik Panzer. 2015. *The parity theorem for multiple polylogarithms*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Anny bley. 2016. *Cutkosky Cuts at Core Hopf Algebra*. Master Thesis.
- Henry Kissler. 2016. *Hopf-algebraic Renormalisation of QED in the linear covariant Gauge*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Christian Bogner. 2016. *Generalisations of polylogarithms for Feynman integrals*. . Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- David Broadhurst. 2016. *Feynman integrals L-series and Kloosterman moments*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Rene Klausen. 2016. *Reduction relations for Feynman integrals via parametric annihilators*. . Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- L. Laudan. 2016. *Algebren von Feynman-Graphen für verschiedene*. Master Thesis.
- Michael Borinsky. 2017. *Renormalized asymptotic enumeration of Feynman diagrams*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Marcel Golz. 2017. *New graph polynomials in parametric QED Feynman integrals*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Christian Bogner. 2017. *Verallgemeinerungen von Polylogarithmen in der Berechnung von Feynman-Integralen*. Habil Thesis.
- Marko Berghoff. 2017. *Feynman amplitudes on moduli spaces of graphs*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Armin Schweitzer. 2017. *The Application of Elliptic Polylogarithms in All order Solutions of Massive Two-Loop Integrals*. Master Thesis.

- Thomas Britoun, Christian Bogner, Rene Klausen, Erik Panzer. 2017. *Feynman integral relations from parametric annihilators*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Henry Kissler. 2017. *Computational and Diagrammatic Techniques for Perturbative Quantum Electrodynamics*. PhD Thesis.
- Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698.
- Johannes Broedel. 2019. *Elliptic multiple polylogarithms and Feynman parameter integrals*.
- René Klausen. 2020. *Hypergeometric series representations of Feynman integrals by GKZ hypergeometric systems*.

- Stefan Weinzierl. 2009. *Feynman integrals and multiple polylogarithms*. Institut de physique mathématique Johannes Gutenberg, Mainz.
- Walter D. Van Suijlekom. 2006. *The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I. Representing Feynman graphs on BV-algebras*. Institut de Mathématique Max Planck, Bonn.

9.4.2- La recherche au Vietnam

- Khiem Hong PHAN. 2019. *One-loop three-point Feynman integrals with Appell F_1 hypergeometric functions*. Université des Sciences de Ho Chi Minh.
- Khiem Hong PHAN. 2019. *Scalar 1-loop Feynman integrals as meromorphic functions in space-time dimension d* . Université des Sciences de Ho Chi Minh.

9.4.3- La recherche en Italie

- Sonia Mazzucchi. 2018. *Generalized Feynman path integrals and applications to higher-order heat-type equations*. Université de Trente.
- Amedeo Primo. *On the maximal cut of Feynman integrals and the solution of their differential equations*. 2017. Université de Padoue.

9.4.4- La recherche au Danemark

- Jacob Bourjally. 2020. *Embedding Feynman integral (Calabi-Yau) geometries in weighted projective space*. Institut Niels Bohr, Université de Copenhague.

9.4.5- La recherche en France

- Jacky Cresson. *Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzêtas*. (2008). Laboratoire de Mathématique et leurs Applications de l'Université de Pau.
- Jacky Cresson, Stephane Fischler, Tanguy Rivoal. 2006. *Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas*. Archives-Ouvertes (HAL). Laboratoire de Mathématiques de Besançon.
- Jacky Cresson. *Polyzêta stricts, larges et pondérés*. 2006. Laboratoire de Mathématiques de Besançon.
- Ivan Todorov. *Hyperlogarithms and periods in Feynman amplitudes*. 2016. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES).
- T. Krajewski. *On Kreimer's Hopf algebra structure of Feynman graphs*. 1999. Centre de Physique Théorique (CPT), Luminy.
- Louis Boutet de Monvel. 2003. *Algèbre de Hopf des diagrammes de Feynman, renormalisation et factorisation de Wiener-Hopf*. Université Pierre et Marie Curie, Paris.

9.4.6- La recherche en Suisse

- Claude Dhur. *Scattering amplitudes, Feynman integrals and multiple polylogarithms*. 2015. Institut de physique mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale de Zürich.

9.4.7- La recherche aux USA

→ Julio Parra-Martinez. *Logarithmic forms and differential equations for Feynman integrals*. 2020. Université de Californie (UCLA)

→ M. Van Hoeij. *Iterated elliptic and hypergeometric integrals for Feynman diagrams*. 2018. Université de Floride, Département de mathématiques.

→ Johannes Henn. *Lectures on differential equations for Feynman integrals*. 2015. Institut d'Etude Avancée, Princeton.

→ Paolo Aluffi. *Parametric Feynman integrals and determinant hypersurfaces*. 2010. Université de Floride. Département de mathématiques.

9.4.8- La recherche en Chine

→ Tai-Fu Feng. *GKZ – hypergeometric systems for Feynman integrals*. 2020. Université du Hebei.

→ Tai-Fu Feng. *Evaluating Feynman integrals by the hypergeometry*. 2018. Université du hebei.

9.4.9- La recherche au Japon

→ Y. Sumino. *Singularities and MZVs in Feynman loop integrals. Values of multiple polylogarithms evaluated at certain arguments*. 2017. Université du Tohoku, Sendai.

9.4.10- La recherche en Inde

→ Mridula Garg. *On product of hypergeometric functions, general class of multivariable polynomials and a generalized hypergeometric series associated with Feynman integrals*. 2003. Université du Rajasthan, Jaipur. Département de Mathématiques.

→ K. C. Gupta. *New properties of a generalization of hypergeometric series associated with Feynman integrals*. 2001. Institut de Technologie Malaviya, Jaipur. Département de Mathématiques.

9.4.11- La recherche en Corée du Sud

→ Hyun Soo Chung. *Analytic feynman integrals of functionals in a Banach algebra involving the first variation*. 2016. Université Dankook, Cheonan. Département de Mathématiques.

9.4.12- La recherche au Royaume - Uni

→ Leonardo de la Cruz. *Feynman integrals as A – hypergeometric functions*. 2019. Université d'Edimbourg. Ecosse.

9.4.13- La recherche en Belgique

→ Manoj Mandal. *Evaluating multi-loop Feynman integrals numerically through differential equations*. 2019. Université Catholique de Louvain.

9.4.14- La recherche en Russie

→ Oleg Tarasov. *Finding new relationships between hypergeometric functions by evaluating Feynman integrals*. 2012. Institut de recherche nucléaire, Doubna.

9.5- Détail des travaux effectués

Ma méthode de travail sur la base de données MathSciNet en parallèle avec Internet est quasiment la même que celle que j'ai utilisé au chapitre 7.3, en faisant appel aux menus contenus dans la base, ainsi qu'aux trois critères que j'ai énoncé.

9.5.1- Les matroïdes

Dirk Kreimer s'est préoccupé ces dernières années de considérer les intégrales dites de Feynman (issues du mode calculatoire des intégrales de chemins de Feynman dont celui-ci se sert dans la construction de ses diagrammes), comme l'interprétation d'une structure mathématique basée sur la théorie des matroïdes associant l'algèbre linéaire, l'analyse combinatoire et la théorie des graphes.

L'idée de Kreimer est assez logique dans le sens où les diagrammes de Feynman font partie d'une symbolique associée à la partie calculatoire des intégrales de chemins, et ne représentent pas une trajectoire réelle des particules dans l'espace-temps.

En effet, si comme nous l'avons vu en section 5.2.3, les diagrammes s'accordent parfaitement avec une représentation assez intuitive permettant de penser la théorie quantique d'une manière assez pragmatique, il ne faut pas oublier qu'ils présentent une vision de ce que des équations abstraites laissent réellement entrevoir.

En d'autres termes, les diagrammes dans leur représentation graphique à travers l'intégrale de chemin, peuvent être étudiés d'un point de vue mathématique en remplaçant la notion de graphes par une construction mathématique basée sur le concept de matroïde.

Les intégrales de Feynman référencées par Kreimer vont donc être associées aux propagateurs définissant la pseudo-trajectoire des particules dans l'espace des quantités de mouvement, et ceci pour chaque arête interne ou externe du diagramme.

Ces intégrales issues du principe même de l'intégrale de chemin, contribuent directement à la construction des diagrammes dits de Feynman.

Alors s'il est prouvé que les matroïdes issus des diagrammes, à travers l'utilisation de certains polynômes, s'appuient sur la formulation rigoureuse que confère la théorie des graphes, il est permis d'une part d'approfondir de manière rigoureuse la construction de l'intégrale de chemin de Feynman à l'origine du tout et d'autre part d'encourager la recherche sur les matroïdes qui sont des objets mathématiques relevant à la fois de la combinatoire, de la géométrie et de l'algèbre.

Dirk Kreimer est un physicien théoricien allemand né le 12 juillet 1960. En 1992, il obtient un doctorat en physique mathématique de l'Université de Johannes Gutenberg de Mayence.

Il a été professeur invité au prestigieux *Institute for particle physics phenomenology* de l'Université de Durham en Angleterre.

Actuellement détenteur de la chaire de physique mathématique à l'Université Alexander von Humboldt de Berlin, il conduit des recherches sur la structure des champs quantiques qui interagissent localement dans l'espace-temps à quatre dimensions.

Il s'intéresse aussi, comme nous avons pu le voir en section 9.3.6, à la structure mathématique de tout ce qui concerne les problèmes de renormalisation et aux développements mathématiques relatifs à la théorie quantique des champs. La renormalisation, comme nous l'avons souligné en section 6.3.4, est associée à l'approche appelée "Théorie des perturbations" de la théorie quantique des champs. Sachant que des particules de masse nulle participent aux collisions entre particules massives, des problèmes d'une grande complexité restent encore en partie ouverts de nos jours, quant à la renormalisation basée sur la théorie des perturbations. En effet, dans l'approche de cette dernière associée à la théorie quantique des champs, des structures holomorphes génératrices de singularités de Landau apparaissent sous leurs formes élémentaires et ces fonctions holomorphes sont définies par des intégrales de fonctions rationnelles associées aux diagrammes de Feynman. Ces problèmes ont été, en partie, examinés sous un éclairage nouveau par le célèbre mathématicien Alain Connes détenteur de la médaille Fields 1982 et Dirk Kreimer dans les années 2000, en introduisant une structure d'algèbre de Hopf. En effet, à ces fonctions holomorphes définies par des intégrales de fonctions rationnelles associées aux diagrammes de Feynman et génératrice de singularités, les travaux d'Alain Connes et de Dirk Kreimer ont permis au niveau de la "Théorie des perturbations" une redéfinition des intégrales de Feynman primitivement divergentes, en mettant en avant une structure d'algèbre de Hopf.

Mon analyse des travaux de Kreimer se trouve en Annexe 24 et s'effectuent via une de ses publications parue dans la revue scientifique Physics Letters B⁴⁶¹. Cette revue publie des articles de recherche concernant divers domaines de la physique, notamment ceux touchant à la physique mathématique et à la physique théorique.

De plus cette revue se trouve dans la base de données MathSciNet, sous le titre « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* », examinée par le physicien théoricien Christian Borgner qui en donne le résumé suivant :

« When considering Feynman integrals with a tensor structure or reducing scalar Feynman integrals by the integration-by-parts method, it is necessary to deal with integrands where, in addition to the propagators, further scalar products of momenta are involved. In the corresponding Feynman graphs each propagator is depicted by an edge, but the additional scalar products have no graphic equivalent. In this sense the graph only gives an incomplete description of such integrands.

The present article shows that such extended Feynman integrals can be given a meaningful combinatorial representation as well, if one passes from the graphic picture to the language of matroids.

Matroids are objects in abstract combinatorics, originally introduced to study linear dependences in the context of linear algebra and graph theory. For example, to a graph one can associate a matroid $M = \{E, \mathcal{C}\}$, where E is the set of edges of the graph and \mathcal{C} is the set of all subsets of E which form a cycle in the graph.

Such a matroid can be directly constructed from the incidence matrix of a given Feynman graph. In the incidence matrix, each column correspond to an edge in the graph, i.e. to a propagator in the integrand. Starting from such a matrix the authors introduce an additional

461. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698, pages 443 à 450.

column and row for each of the scalar products in the integrand. This procedure amounts to a co-extension of the corresponding graphic matroid. The resulting class of non-graphic matroids has nice properties. As a main result of the article, the authors prove that all matroids obtained in this way can be represented by a particular class of matrices, where the graphic and the non-graphic content, corresponding to the propagators and the scalar-products in the integrand, are encoded in separated sub-matrices. The matroids appear as a natural extension to Feynman graphs and capture the information given by the scalar products in a nice way.

The authors point out that the use of matroid theory suggests itself as well in subjects beyond this article, particularly when considering Symanzik polynomials or duality on Feynman graphs. »

Et pour terminer :

Kreimer applique la théorie des matroïdes aux diagrammes de Feynman considérés comme des objets mathématiques à part entière et prouve en même temps et de manière rigoureuse la pertinence des diagrammes issus de l'intégrale de chemin. En d'autres termes, son but est d'associer les intégrales de Feynman à certaines classes de matroïdes, ce qui favorise du même coup pour l'intégrales de chemins le passage d'une vue intuitive à un cadre rigoureux.

Kreimer généralise la construction des diagrammes de Feynman (issus des intégrales de chemin), aux matroïdes, prouvant ainsi réciproquement qu'un diagramme peut être issu d'une construction mathématique rigoureuse.

Pour cela, il montre que les matroïdes permettent d'interpréter les structures tensorielles se manifestant dans des expressions via des produits scalaires de quantités de mouvement et il décompose ces structures tensorielles en plusieurs intégrales de Feynman.

Mais laissons Kreimer s'exprimer à ce sujet :

« ... the topic of this paper, we can use matroids to give an easy and natural way to represent Feynman integrals with arbitrary numerator structure as scalar matroid integrals with appropriate powers of the propagators appearing. »⁴⁷⁸

9.5.2 Les séries hypergéométriques multiples et polyzêta

Un article concernant ce domaine de recherche « *séries hypergéométriques multiples et polyzêta* » a été publié par Jacky Cresson (2008), appartenant au laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de l'Université de Pau, dans le Bulletin de la Société mathématique de France.

Cette publication est répertoriée dans la base de données MathScinet.

Sans aucun lien apparent avec les intégrales de Feynman, l'article de Jacky Cresson est cité 11 fois par des mathématiciens dont Christian Bogner et Francis Brown de l'Institut de Mathématique de l'Université Humboldt à Berlin, qui actuellement conduisent des recherches sur la connexion des intégrales de Feynman avec ce domaine des mathématiques.

478. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698, page 6.

Par exemple, Bogner dans sa publication de 2015 « *Feynman Integrals and iterated on Moduli Spaces of Curves of genus zero* » que nous avons mentionnée en section 9.4.1, cite Jacky Cresson dans ses travaux de recherche.

L'examen et le résumé de cet article de Jacky Cresson par la mathématicien Wadim Zudilin est le suivant :

« *The authors develop a new algorithmic technique for expanding the multiple hypergeometric series for given polynomial P with rational coefficients and positive integers, into linear forms in generalized polylogarithms.*

The work is motivated by recent contributions to the arithmetic study of the values of Riemann's zeta function, as well as by some conjectures in the theory of multiple zeta values. Besides a description of the algorithm, there are many explicit examples of its application, including general property of classical (single) hypergeometric series to many variables. »

9.5.3 Les hyperlogarithmes

Un article concernant ce domaine de recherche « *Hyperlogarithms and periods in Feynman amplitudes* » a été publié par Ivan Todorov (2016), appartenant à l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), et se trouve répertorié dans la base de données MathScinet.

L'examen et le résumé de cet article est le suivant :

« *The role of hyperlogarithms and multiple zeta values (and their generalisations) in Feynman amplitudes is being gradually recognized since the mid 1990s. The present lecture provides a concise introduction to a fast developing subject that attracts the interests of a wide range of specialists - from number theorists to particle physicists. »*

9.5.4 Les multiple-polylogarithmes

La connexion entre les intégrales de Feynman et les multiple – polylogarithmes donne lieu à un premier article que l'on trouve dans la base mathScinet datant de 2009 « *Feynman integrals and multiple polylogarithms* ». Cette publication est de Stefan Weinzierl de l'Institut de physique mathématique Johannes Gutenberg à Mainz en Allemagne.

Il sera suivi en 2015 par deux autres articles, celui de Christian Bogner « *Multiple polylogarithms and linearly reducible Feynman graphs* » appartenant à l'Institut de Mathématique de l'Université Humboldt à Berlin et celui de Claude Dhur « *Scattering amplitudes, Feynman integrals and multiple polylogarithms* » appartenant à l'Institut de physique mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale de Zürich.

En 2017, Y. Sumino (Université du Tohoku, Sendai, Japon) publie *Singularities and MZVs in Feynman loop integrals. Values of multiple polylogarithms evaluated at certain arguments.*

En 2019, Johannes Broedel (Institut de Mathématique de l'Université Humboldt à Berlin) publie l'article intitulé « *Elliptic multiple polylogarithms and Feynman parameter integrals* ».

L'examen et le résumé de l'article de Stefan Weinzierl par la mathématicienne Mathilde Lalin est le suivant :

« *The author reviews connections between Feynman integrals and multiple polylogarithms. After reviewing some basic facts about Feynman integrals, the author discusses the Mellin-Barnes transformation and how it can be used to obtain multiple sums from loop integrals by closing the integration contours and summing up the residues. The residues have iterated structures that can be interpreted in the context of Hopf algebras with shuffle products, and*

more specifically, they can be related to multiple polylogarithms. All of this can be combined to obtain algorithms that evaluate Feynman integrals in terms of multiple polylogarithms. »

L'examen et le résumé de l'article de Christian Bogner par le mathématicien Domenico Fiorenza est le suivant :

« A possible approach to the computation of higher-order corrections in perturbative quantum field theory consists in iteratively integrating out Feynman parameters.

The authors review this approach with an emphasis on the related criterion of linear reducibility of a Feynman graph. More precisely, they review the criterion of linear reducibility of Symanzik polynomials, which can be used to decide whether a corresponding Feynman integral can be computed by iteratively introducing hyperlogarithms or multiple polylogarithms. Francis Brown has shown in "On the periods of some Feynman integrals" that, with respect to the first Symanzik polynomials, the set of linearly reducible graphs is closed under taking minors and that therefore a characterization of this set by forbidden critical minors is possible. The authors extend this line of argument by considering linear reducibility with respect to both the first and the second Symanzik polynomials, and show that also in this case the set of linearly reducible graphs is closed under taking minors. The authors investigate the notion of critical minor in this setting and exhibit an example at the level of massless three-loop graphs with four on-shell legs. »

L'examen et le résumé de l'article de Claude Duhr par le mathématicien Yasuhiro Abe est le suivant :

« Recent developments in the computation of scattering amplitudes in gauge theories at loop level show an intriguing relation to (ordinary) polylogarithms and multiple polylogarithms. Mathematically, it is known that such polylogarithms can be expressed in terms of iterated integrals which enable us to relate various polylogarithms to one another. These relations are, in turn, potentially useful for simplifying loop calculations of gluons amplitudes.

In this article, which was prepared by one of the expert on this particular subject, we find a fruitful interplay between modern mathematics and physics. The author introduces algebraic tools for the analysis of multiple polylogarithms, such as 'symbols' and 'extended Hopf algebra', in part reviewing the result of Francis Brown, in Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry (Article MR3051238 'On the decomposition of motivic multiple zeta values' associé à 26 citations). The author then applies the results to a specific one-loop calculation, the so-called one-mass one-loop box function, which arises in typical one-loop Feynman integrals. For two-loop calculations and other examples, the author also provides recent references.

This article pays attention to recent progress in number theory and its applicability to amplitude calculations in quantum field theory. In this regard, one may be interested in a very recent study on a possible correspondance between Yang-Mills theory and the ABC conjecture (publication arXiv : 1602.01780). As far as the reviewer knows, no research exists on scattering amplitudes in connection with modern number theoretic concepts, such as class field theory, Iwasawa theory, or correspondence between primes and knots (publication MR2605747). »

L'examen et le résumé de l'article de Johannes Broedel par le mathématicien Ali Shojaei-Fard est le suivant :

« The theory of polylogarithms has provided important progress in formulating advanced computational algorithms in dealing with Feynman integrals in perturbative quantum gauge

field theories. The paper under review explains some new applications of elliptic multiple polylogarithms in dealing with multiloop Feynman integrals which encode interactions of elementary particles in gauge field theories such as QED (l'Electrodynamique Quantique) and QCD (la Chromodynamique Quantique). This class of polylogarithms enables the authors to study multiloop Feynman integrals via elliptic curves. Some computational advantages of this class of polylogarithms for the computation of two-loop (non-planar three-point) Feynman integrals are also shown. »

9.5.5 Les algèbres de Hopf associés aux diagrammes de Feynman

La connexion entre les diagrammes de Feynman représentant la partie calculatoire des intégrales de chemins et l'algèbre de Hopf donne lieu à un premier article que l'on trouve dans la base mathScinet datant de 1998 « *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories* ». Cette publication, associée à 129 citations de la part de mathématiciens référencés dans MathSciNet, est de Dirk Kreimer de l'Institut de Mathématique de l'Université Humboldt à Berlin, à l'époque en poste à l'Institut de physique mathématique Johannes Gutenberg à Mainz en Allemagne.

Ces 129 citations montrent bien l'impact des idées de Dirk Kreimer sur le sujet.

Elle sera suivie jusqu'en 2017 seulement par une petite dizaine de publications qui sont les suivantes mais qui essaieront, comme on peut le constater par leurs citations, sur un grand nombre de domaines associés aux mathématiques pures :

- 1999 : *On Kreimer's Hopf algebra structure of Feynman graphs* (T. Krajewski, R. Wulkenhaar), 7 citations,
- 2001: *From local perturbation theory to hopf and lie algebras of Feynman graphs* (Alain Connes, Dirk Kreimer), 117 citations pour l'article complet de ces auteurs,
- 2003: *Algèbre de Hopf des diagrammes de Feynman, renormalisation et factorisation de Wiener-Hopf* (Louis Boutet de Monvel), 6 citations,
- 2005 : *Structures in Feynman graphs : Hopf algebras and symmetries* (Dirk Kreimer), 11 citations,
- 2005: *The Hopf algebra approach to Feynman diagram calculations* (Kurusch Ebrahimi-Fard, Dirk Kreimer), 15 citations,
- 2006: *The Hopf algebra of Feynman graphs in quantum electrodynamics* (Walter D. Van Suijlekom), 8 citations,
- 2006: *The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I. Representing Feynman graphs on BV-algebras* (Walter D. Van Suijlekom), 8 citations,
- 2017: *Diagrammatic Hopf algebra of cut Feynman integrals: the one-loop case* (Claude Duhr, Samuel Abreu, Ruth Britto, Einan Gardi), 2 citations.

L'examen et le résumé de l'article de Dirk Kreimer, datant de 1998, par le mathématicien Raimar Wulkenhaar est le suivant :

« Labelling primitively divergent Feynman graphs (with no subdivergences) by letters of some alphabet, Kreimer combines these letters into parenthesized words (PW) which symbolize the relative position (disjoint or nested) of non-overlapping divergencies in Feynman graphs. Overlapping divergencies are resolved in terms of nesting and disjoint ones. Such PW form an algebra, where the product builds a word standing for disjoint divergencies. The crucial discovery is that this algebra also carries the structure of a Hopf algebra. The coproduct is

given by the sum over all possibilities of pulling subwords out of a PW, where the subwords are treated by a renormalization map R . The antipode is a recursive procedure which splits the subwords into smaller pieces and recombines everything with appropriate signs. The Hopf algebra is commutative but not cocommutative. It is coassociative only under a certain condition on R .

Remarkably, the procedure given by the antipode provides precisely the forest formula for the renormalization of Feynman graphs with subdivergencies! That is nicely illustrated by some toy models. Moreover, it turns out that this Hopf algebra of renormalization is miraculously related to a Hopf algebra found in the study of an index problem in noncommutative geometry.

»

Nous choisissons de mentionner ci-après les résumés des publications précédentes les plus pertinentes qui ont historiquement comptées dans l'expression des algèbres de Hopf en termes de graphes de Feynman, ainsi :

→ L'examen et le résumé de l'article de T. Krajewski et R. Wulkenhaar, datant de 1999, par le mathématicien José M. Gracia-Bondia est le suivant :

« *The paper by Krajewski and Wulkenhaar is among the first reactions to the discovery by D. Kreimer of the fact that a Hopf algebra structure underlies the renormalization procedures in perturbative (quantum) field theory. The point out that a treatment of overlapping divergencies – the truly interesting one – is missing in the original paper by Kreimer, and they supply a Hopf algebra structure able to deal with them; the main element of their construction is the “primitivator”, which maps overlapping divergencies to primitive elements in the Hopf algebra sense.*

Later, other methods were developed, particularly by Kreimer himself, and, more to the point, Hopf algebras expressed directly in terms of Feynman graphs (without passing through “parenthesized words” or “rooted trees”) where devised with the same purpose of systematizing renormalization theory, the final aim remaining to understand the “renormalization group” by Hopf algebraic means. Nevertheless, the paper under review is still one of the more lucid introductions to the general subject. »

→ L'examen et le résumé de l'article de Alain Connes et Dirk Kreimer, datant de 2001, par le mathématicien R. Delbourgo est le suivant :

« *Much of this paper is a review of a previous one (MR1810779) by the same authors. The focus in this article is on Lie groups associated with the Hopf algebras of rooted trees and their homomorphism to the diffeomorphic group of physical parameters. This gives deeper meaning to the renormalization group and its β -function. »*

→ L'examen et le résumé du second article de Alain Connes et Dirk Kreimer, datant de 2001, par le mathématicien R. Delbourgo est le suivant :

« *We review the algebraic structures imposed on the renormalization procedure in terms of Hopf and Lie algebras of Feynman graphs, and exhibit the connection to diffeomorphisms of physical observables. »*

→ L'examen et le résumé du second article de Walter D. Van Suijlekom, datant de 2006, par la mathématicienne canadienne Karen Amanda Yeats (qui s'est elle-même emparé du sujet pour le généraliser à d'autres domaines des mathématiques pures) est le suivant :

« *Papers discussing the renormalization Hopf algebras typically work in a single theory (often massless) and graph by graph.*

This paper first generalizes the usual constructions to a large class of renormalizable quantum field theories, including gauge theories with a single fundamental coupling, and works at the level of Green function. These results are not surprising and do not require new techniques; rather, the value of this paper is in its unified formulation which remains sufficiently concrete to be usefully specialized, for instance to Yang-Mills theory in the final section.

Specifically, the author proves at this level of generality that the ideal generated by equating the ratios of each vertex to its incident edges defines a Hopf ideal and the quotient by this ideal is isomorphic to the Hopf algebra of the group of odd formal diffeomorphisms of C tangent to the identity.

Secondly, the author gives an interpretation of this result using a coaction of the Hopf algebra on a Batalin – Vilkovisky algebra. He then uses this interpretation to prove a structure theorem and construct the Connes – style beta function, which becomes the usual beta function when it acts on coupling constants. »

→ L'examen et le résumé de l'article de Claude Duhr, Samuel Abreu, Ruth Britto, Einan Gardi, datant de 2017 est le suivant :

« We construct a diagrammatic coaction acting on one-loop Feynman graphs and their cuts. The graphs are naturally identified with the corresponding (cut) Feynman integrals in dimensional regularization, whose coefficients of the Laurent expansion in the dimensional regulator are multiple polylogarithms (MPLs).

Our main result is the conjecture that this diagrammatic coaction reproduces the combinatorics of the coaction on MPLs order by order in the Laurent expansion. We show that our conjecture holds in a broad range of nontrivial one-loop integrals.

We then explore its consequences for the study of discontinuities of Feynman integrals, and the differential equations that they satisfy. In particular, using the diagrammatic coaction along with information from cuts, we explicitly derive differential equations for any one-loop Feynman integral. We also explain how to construct the symbol of any one-loop Feynman integral recursively. Finally, we show that our diagrammatic coaction follows, in the special case of one-loop integrals, from a more general coaction proposed recently, which is constructed by pairing master integrands corresponding master contours. »

9.5.6- Les équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de diffusion de la chaleur

Un article concernant ce domaine de recherche a été publié en 2018 par Sonia Mazzucchi de l'Université de Trente en Italie en collaboration avec Sergio Albeverio *Generalized Feynman path integrals and applications to higher-order heat-type equations*, et se trouve répertorié dans la base de données MathScinet.

L'examen et le résumé de cet article par Victor B. Mal'yunin est le suivant :

« Techniques of the infinite-dimensional Fresnel integrals with polynomial phase function are applied to the construction of a phase-space Feynman path integral representation for the solution of higher-order heat-type equations. »

Nous trouvons aussi sur la base de données d'autres articles connectant plus généralement les équations différentielles aux intégrales de Feynman :

- Julio Parra-Martinez. *Logarithmic forms and differential equations for Feynman integrals*. 2020. Université de Californie (UCLA),
- Manoj Mandal. *Evaluating multi-loop Feynman integrals numerically through differential equations*. 2019. Université Catholique de Louvain,
- Amedeo Primo. *On the maximal cut of Feynman integrals and the solution of their differential equations*. 2017. Université de Padoue,
- Johannes Henn. *Lectures on differential equations for Feynman integrals*. 2015. Institut d'Etude Avancée, Princeton.

9.5.7- Les fonctions hypergéométriques

Un article concernant ce domaine de recherche a été publié en 2019 par Kiem Hong PHAN de l'Université des Sciences de Ho Chi Minh au Vietnam *One-loop three-point Feynman integrals with Appell F_1 hypergeometric functions* et se trouve répertorié dans la base de données MathScinet.

L'examen et le résumé de cet article est le suivant :

« *New analytic formulas for one-loop three-point Feynman integrals in the general space-time dimension (d) are presented in this paper. The calculations are performed in general configurations for internal masses and external momenta. The analytic results are expressed in terms of hypergeometric series ${}_2F_1$, ${}_3F_2$ for special cases and Appell F_1 for general cases. Furthermore, we cross-check our analytic results with other references that have carried out the integrals in several special cases.* »

Nous trouvons aussi sur la base de données d'autres articles interconnectant les fonctions hypergéométriques aux intégrales de Feynman :

- René Klausen. *Hypergeometric series representations of Feynman integrals by GKZ hypergeometric systems*. 2020. Institut de Mathématique de l'Université Humbolt à Berlin,
- Tai-Fu Feng. *GKZ – hypergeometric systems for Feynman integrals*. 2020. Université du Hebei,
- Tai-Fu Feng. *Evaluating Feynman integrals by the hypergeometry*. 2018. Université du hebei,
- Leonardo de la Cruz. *Feynman integrals as A – hypergeometric functions*. 2019. Université d'Edimbourg. Ecosse,
- M. Van Hoesj. *Iterated elliptic and hypergeometric integrals for Feynman diagrams*. 2018. Université de Floride, Département de mathématiques,
- Oleg Tarasov. *Finding new relationships between hypergeometric functions by evaluating Feynman integrals*. 2012. Institut de recherche nucléaire, Droubna,
- Mridula Garg. *On product of hypergeometric functions, general class of multivariable polynomials and a generalized hypergeometric series associated with Feynman integrals*. 2003. Université du Rajasthan, Jaipur. Département de Mathématiques,
- K. C. Gupta. *New properties of a generalization of hypergeometric series associated with Feynman integrals*. 2001. Institut de Technologie Malaviya, Jaipur. Département de Mathématiques.

9.5.8- Les fonctions méromorphes

Un article concernant ce domaine de recherche a été publié en 2019 par Khiem Hong PHAN

de l'Université des Sciences de Ho Chi Minh au Vietnam *Scalar 1-loop Feynman integrals as meromorphic functions in space-time dimension d* et se trouve répertorié dans la base de données MathScinet.

L'examen et le résumé de cet article est le suivant :

« *The long-standing problem of representing the general massive one-loop Feynman integral as a meromorphic function of the space-time dimension d has been solved for the basis of scalar one-to four-point functions with indices one. In 2003 the solution of difference equations in the space-time dimension allowed to determine the necessary classes of special functions: self-energies need ordinary logarithms and Gauss hypergeometric functions ${}_2F_1$, vertices need additionally Kampé de Fériet-Appell function F_1 , and box integrals also Lauricella-Saran functions F_S . In this study, alternative recursive Mellin-Barnes representations are used for the representation of n -point functions in term of $(n - 1)$ -point functions. The approach enabled the first derivation of explicit solutions for the Feynman integrals at arbitrary kinematics. In this article, we sketch our new representations for the general massive vertex and box Feynman integrals and derive a numerical approach for the necessary Appell functions F_1 and Saran function F_S at arbitrary kinematical arguments.* »

9.5.9- La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau

Un article concernant ce domaine de recherche a été publié en 2020 par Jacob Bourjally *Embedding Feynman integral (Calabi-Yau) geometries in weighted projective space* de l'Institut Niels Bohr dépendant de l'Université de Copenhague, et se trouve répertorié dans la base de données MathScinet.

L'examen et le résumé de cet article est le suivant :

« *It has recently been demonstrated that Feynman integrals relevant to a wide range of perturbative quantum field theories involve periods of Calabi-Yau manifolds of arbitrarily large dimension. While the number of Calabi-Yau manifolds of dimension three or higher is considerable (if not infinite), those relevant to most known examples come from a very simple class: degree- $2k$ hypersurfaces in k -dimensional weighted projective space $\mathbf{WP}^{l_1, \dots, l_k}$. In this work, we describe some of the basic properties of these spaces and identify additional examples of Feynman integrals that give rise to hypersurfaces of this type. Details of these examples at three loops and of illustrations of open questions at four loops are included as supplementary material to this work.* »

9.5.10- Compléments

- En 1996, Jean-Claude Zambrini (Université de Lisbonne. Département de mathématiques) publie *Feynman et les mathématiques* dans laquelle l'auteur décrit une version probabiliste, inspirée de Schrödinger, de la méthode de quantification de systèmes dynamiques classiques élémentaires par les intégrales de Feynman, suggérant de nouvelles orientations dans l'étude de l'équation d'Hamilton – Jacobi – Bellman.

- En 2002, Rolando Rebolledo (Université Catholique du Chili), Jorge Rezende et Jean-Claude Zambrini (Université de Lisbonne) publient *Stochastic Analysis and Mathematical physics* sous la forme d'une série d'articles centrées sur deux sujets principaux : l'approche de l'intégrale de chemins de Feynman à la mécanique quantique et à la mécanique statistique des systèmes ouverts quantiques (les systèmes quantiques qui interagissent en permanence avec leur environnement). Les auteurs mettent en évidence les recherches émergentes dans les domaines de l'analyse stochastique et de la physique mathématique, en se concentrant particulièrement sur l'intégrale fonctionnelle de Feynman et la notion de probabilité quantique.

- En 2010, Paolo Aluffi (Université de Floride. Département de mathématiques) publie *Parametric Feynman integrals and determinant hypersurfaces* qui sera dix fois cité et qui introduit la notion de déterminant d'une hypersurface dans l'interrelation entre les intégrales de Feynman et les motifs de Tate associés à la recherche mathématique qui tente d'unifier les aspects combinatoires, topologiques et arithmétiques de la géométrie algébrique.
- En 2016, Hyun Soo Chung (Université Dankook, Cheonan, Corée du Sud. Département de Mathématiques) publie *Analytic feynman integrals of functionals in a Banach algebra involving the first variation qui sera cité 3 fois* introduisant une des structures fondamentales de l'analyse fonctionnelle qui est l'algèbre de Banach en l'associant avec les intégrales de Feynman.

9.6- Références

9.6.1- Références associées aux paragraphes 9.1 à 9.3 (par ordre alphabétique) :

- BERGLUND N. (2016). Les diagrammes de Feynman 1, 2, 3 – Images des Mathématiques. Professeur à l'Université d'Orléans.
- BIANE P. , BOST J.B. , COLMEZ P. (2002). La fonction zêta. Les Editions de l'Ecole Polytechnique.
- CARTIER P. (mars 2001). Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents. Séminaire BOURBAKI, 53^e années, 2000-2001, n^o 885.
- CARTIER P. (Année 2010-2011). Algèbres de Hopf combinatoires. Séminaire de Combinatoire Enumérative et Analytique. Institut Henri Poincaré.
- CHATELAIN V. (2011). Contributions à la théorie des matroïdes. Polytope des bases, Orientations et Algorithmes. Thèse de Doctorat en mathématiques, Université Pierre et Marie Curie.
- CONNES A. (2000). Renormalisation et Ambiguïté Galoisienne. Internet.
- KREIMER D. – YEATS K. (2011). Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids. Physics Letters B, volume 698.
- PANZER E. (2014). Feynman integrals via hyperlogarithms. Proceedings of Science Journal (PoS). LL2014 (2014) 049.
- PANZER E. (2014). Feynman integrals and hyperlogarithms. PhD Thesis.
- PAUGAM M. (17 avril 2014). Polylogarithmes. Internet.
- PHAM F. (2005). Intégrales singulières. CNRS Editions. EDP Sciences.
- WIKIPEDIA (10 mars 2019). Fonction zêta de Riemann.
- WIKIPEDIA (12 mars 2019). Fonction polylogarithme.
- WIKIPEDIA (14 mars 2019). Algèbre de Hopf.
- WIKIPEDIA (16 mars 2019). Topologie.
- WIKIPEDIA (5 octobre 2020). Les fonctions hypergéométriques.
- WIKIPEDIA (5 octobre 2020). Les fonctions méromorphiques.
- WIKIPEDIA (5 octobre 2020). La géométrie algébrique via les espaces de Calabi – Yau.
- WIKIPEDIA (5 octobre 2020). La mécanique statistique des transitions de phase.

9.6.2- Publications associées aux recherches dans le monde (par pays) :

Allemagne

- Erik Panzer. 2011. *Hopf – algebraic renormalisation of Kreimer's toy model*. Master Thesis.

- F. Brown, O. Schnetz, K. Yeats. 2012. *Properties of c_2 Invariants of Feynman graphs*. *Advancer in Theoretical and Mathematical Physics Journal*, volume 18, number 2 (2014), page 323-362.
- F. Brown, D. Kreimer. 2012. *Decomposing Feynman rules*. *Proceedings of Science Journal (PoS)*. LL 2012 (2012) 049.
- E. Panzer. 2013. *Renormalisation. Hopf algebras and Mellin transforms*. *Communications in Contemporary Mathematics*, 648 (2016), pages 169-202.
- C. Bogner, M. Lueders. 2013. *Multiple polylogarithms and linearly reducible Feynman graphs*. *Communications in Contemporary Mathematics*, 648 (2015), pages 11-28.
- M. Goltz. 2013. *Evaluation techniques for Feynman diagrams*. Bachelorarbeit.
- M. Borinsky. 2013. *Algorithmisation of the Hopf algebra of Feynman graphs*. Masterarbeit.
- F. Brown. 2013. *Single-valued periods and multiple zeta values*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- M. Lueders. 2013. *Linear polynomial reduction for Feynman integrals*. Master Thesis.
- S. Black, L. Grump, M. DeVos, K. Yeats. 2013. *Forbidden minors for graphe with no first obstruction to parametric Feynman integration*. *Discrete Mathematics Journal*. Volume 338, Issue 3, March 2015, pages 9-35.
- R.M. Kaufmann, B.C. Ward. 2013. *Feynman Categories*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Erik Panzer. 2014. *On hyperlogarithms and Feynman Integrals with divergences and many scales*. *Journal of High Energy Physics*, 1403 (2014) 071.
- M. Borinsky. 2014. *Feynman graph generation and calculations in the Hopf algebra of Feynman graphs*. *Computer physics Communications Journal*. Volume 185, Issue 12, December 2014, pages 3317-3330.
- Erik Panzer. 2014. *Algorithms for symbolic integration of hyperlogarithms with applications to Feynman integrals*. *Computer physics Communications Journal*. Volume 188, March 2015, pages 148-166
- Erik Panzer. 2014. *Feynman Integrals via hyperlogarithms*. *Proceedings of Science Journal (PoS)*. LL 2014 (2014) 049.
- S. Black, M. Kerr, P. Vanhove. 2014. *A Feynman Integral with higher normal functions*. *Comptio Mathematica*. Volume 151, Issue 12, December 2015, pages 2329-2375. Cambridge University Press Editor, in collaboration with London Mathematical Society.
- C. Bogner, F. Brown. *Feynman Integrals on Moduli Spaces of Curves of genus zero*. *Communications in Number Theory and Physics Journal*. 09 (2015), pages 189-238. International Press of Boston.
- L. Laudan. 2014. *Beispiele fuer die Algebran der Feynman Graphen*. Bachelorarbeit.
- M. Borinsky. 2014. *Computations and generation of elements on the Hopf algebra of Feynman graphs*. *International workshop on Advanced Computing and Analysis Techniques in physics research 2014 proceedings*.
- Erik Panzer. 2014. *Feynman integrals and hyperlogarithms*. PhD Thesis.
- A. von Manteuffel, E. Panzer, R.M. Schabinger. *A quasi-finite basis for multi-loop Feynman integrals*. *Journal of High Energy Physics*, 1502 (2015) 120.
- Lucia Rotheray. 2014. *Hopf subalgebras from Green's functions*. Master Thesis.
- M. Sars. 2015. *Parametric Representation of Feynman Amplitudes in Gauge Theories*. PhD Thesis.
- F. Brown. 2015. *zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of a punctured elliptic curve*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Spencer Bloch. 2015. *Feynman Amplitudes in Mathematics and Physics*. *International Conference on Materials for Advanced Technologies (ICMAT) Proceeding*.
- Julian Purkart. 2015. *The signed permutation group on Feynman graphs*. Master Thesis.

- Michael Borinsky. 2015. *Feynman diagrams and their algebraic lattices*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Erik Panzer. 2015. *The parity theorem for multiple polylogarithms*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Anny bley. 2016. *Cutkosky Cuts at Core Hopf Algebra*. Master Thesis.
- Henry Kissler. 2016. *Hopf-algebraic Renormalisation of QED in the linear covariant Gauge*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Christian Bogner. 2016. *Generalisations of polylogarithms for Feynman integrals*. . Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- David Broadhurst. 2016. *Feynman integrals L-series and Kloosterman moments*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Rene Klausen. 2016. *Reduction relations for Feynman integrals via parametric annihilators*. . Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- L. Laudan. 2016. *Algebren von Feynman-Graphen für verschiedene*. Master Thesis.
- Michael Borinsky. 2017. *Renormalized asymptotic enumeration of Feynman diagrams*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Marcel Golz. 2017. *New graph polynomials in parametric QED Feynman integrals*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Christian Bogner. 2017. *Verallgemeinerungen von Polylogarithmen in der Berechnung von Feynman-Integralen*. Habil Thesis.
- Marko Berghoff. 2017. *Feynman amplitudes on moduli spaces of graphs*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Armin Schweitzer. 2017. *The Application of Elliptic Polylogarithms in All order Solutions of Massive Two-Loop Integrals*. Master Thesis.
- Thomas Britoun, Christian Bogner, Rene Klausen, Erik Panzer. 2017. *Feynman integral relations from parametric annihilators*. Report Humboldt-Universität zu Berlin.
- Henry Kissler. 2017. *Computational and Diagrammatic Techniques for Perturbative Quantum Electrodynamics*. PhD Thesis.
- Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698.
- Johannes Broedel. 2019. *Elliptic multiple polylogarithms and Feynman parameter integrals*.
- René Klausen. 2020. *Hypergeometric series representations of Feynman integrals by GKZ hypergeometric systems*.

- Stefan Weinzierl. 2009. *Feynman integrals and multiple polylogarithms*. Institut de physique mathématique Johannes Gutenberg, Mainz.
- Walter D. Van Suijlekom. 2006. *The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I . Representing Feynman graphs on BV-algebras*. Institut de Mathématique Max Planck, Bonn.

Vietnam

- Khiem Hong PHAN. 2019. *One-loop three-point Feynman integrals with Appell F_1 hypergeometric functions*. Université des Sciences de Ho Chi Minh.
- Khiem Hong PHAN. 2019. *Scalar 1-loop Feynman integrals as meromorphic functions in space-time dimension d* . Université des Sciences de Ho Chi Minh.

Italie

- Sonia Mazzucchi. 2018. *Generalized Feynman path integrals and applications to higher-order heat-type equations*. Université de Trente.
- Amedeo Primo. *On the maximal cut of Feynman integrals and the solution of their differential equations*. 2017. Université de Padoue.

Danemark

- Jacob Bourjally. 2020. *Embedding Feynman integral (Calabi-Yau) geometries in weighted projective space*. Institut Niels Bohr, Université de Copenhague.

France

- Jacky Cresson. *Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzêtas*. (2008). Laboratoire de Mathématique et leurs Applications de l'Université de Pau.
- Jacky Cresson, Stephane Fischler, Tanguy Rivoal. 2006. *Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas*. Archives-Ouvertes (HAL). Laboratoire de Mathématiques de Besançon.
- Jacky Cresson. *Polyzêta stricts, larges et pondérés*. 2006. Laboratoire de Mathématiques de Besançon.
- Ivan Todorov. *Hyperlogarithms and periods in Feynman amplitudes*. 2016. Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES).
- T. Krajewski. *On Kreimer's Hopf algebra structure of Feynman graphs*. 1999. Centre de Physique Théorique (CPT), Luminy.
- Louis Boutet de Monvel. 2003. *Algèbre de Hopf des diagrammes de Feynman, renormalisation et factorisation de Wiener-Hopf*. Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Suisse

- Claude Dhur. *Scattering amplitudes, Feynman integrals and multiple polylogarithms*. 2015. Institut de physique mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale de Zürich.

USA

- Julio Parra-Martinez. *Logarithmic forms and differential equations for Feynman integrals*. 2020. Université de Californie (UCLA)
- M. Van Hoeij. *Iterated elliptic and hypergeometric integrals for Feynman diagrams*. 2018. Université de Floride, Département de mathématiques.
- Johannes Henn. *Lectures on differential equations for Feynman integrals*. 2015. Institut d'Etude Avancée, Princeton.
- Paolo Aluffi. *Parametric Feynman integrals and determinant hypersurfaces*. 2010. Université de Floride. Département de mathématiques.

Chine

- Tai-Fu Feng. *GKZ – hypergeometric systems for Feynman integrals*. 2020. Université du Hebei.
- Tai-Fu Feng. *Evaluating Feynman integrals by the hypergeometry*. 2018. Université du hebei.

Japon

→ Y. Sumino. *Singularities and MZVs in Feynman loop integrals. Values of multiple polylogarithms evaluated at certain arguments.* 2017. Université du Tohoku, Sendai.

Inde

→ Mridula Garg. *On product of hypergeometric functions, general class of multivariable polynomials and a generalized hypergeometric series associated with Feynman integrals.* 2003. Université du Rajasthan, Jaipur. Département de Mathématiques.

→ K. C. Gupta. *New properties of a generalization of hypergeometric series associated with Feynman integrals.* 2001. Institut de Technologie Malaviya, Jaipur. Département de Mathématiques.

Corée du Sud

→ Hyun Soo Chung. *Analytic feynman integrals of functionals in a Banach algebra involving the first variation.* 2016. Université Dankook, Cheonan. Département de Mathématiques.

Royaume uni

→ Leonardo de la Cruz. *Feynman integrals as A – hypergeometric functions.* 2019. Université d'Edimbourg. Ecosse.

Belgique

→ Manoj Mandal. *Evaluating multi-loop Feynman integrals numerically through differential equations.* 2019. Université Catholique de Louvain.

Russie

→ Oleg Tarasov. *Finding new relationships between hypergeometric functions by evaluating Feynman integrals.* 2012. Institut de recherche nucléaire, Doubna.

Conclusion générale

Mélange d'étonnement, d'admiration et d'attachement envers Richard Feynman que me laisse ce travail de thèse.

- Etonnement car le nom de Richard Feynman couvre un incroyable panel de travaux scientifiques effectués à l'heure actuel, plus de trente ans après sa disparition.

Qu'il s'agisse de mathématiques pures, de physique fondamentale, de méthode de travail telle que la technique Feynman pour l'enseignement et la communication, de livres de cours traitant à la fois de mécanique, d'électromagnétisme, de mécanique quantique, de livres de vulgarisation en physique, de corrigés d'exercices si utiles aux étudiants, Feynman est partout et dans toutes les pensées que l'on soit très jeune, jeune, âgé ou très âgé.

Il suffit d'écrire « *Feynman* » sur Internet pour s'en rendre compte.

- Admiration pour ses travaux en Electrodynamique Quantique qui le verront partager son prix Nobel de physique avec Schwinger et Tomonaga, mais pas seulement.

Admiration, comme l'écrit le mathématicien Mark Kac en début de cette thèse, qui a travaillé avec lui, pour son côté magique, plus que génial, que l'on aurait tous voulu posséder, pour cette puissance de pensée qui était la sienne, pour sa manière bien à lui de pouvoir s'ouvrir à toute forme de raisonnement et pour sa vision la plus large possible dans la prise en compte des problèmes qu'il rencontrait.

- Attachement car en l'ayant pour ainsi dire côtoyé de près pendant quelques années, m'évertuant à essayer de percevoir la manière dont il s'est construit, à comprendre la nature de l'homme, son mode de pensée et son originalité, j'ai pu deviner, mesurer la qualité d'âme qui était la sienne.

Et je pense ne pas me tromper en écrivant que c'est *in fine* son côté profondément humain, à la fois généreux et désintéressé qui l'a conduit à inventer des méthodes facilitant le travail des scientifiques et à écrire des livres pour une meilleure compréhension de la physique.

Richard Feynman était un homme simple, qui ne se prenait pas au sérieux, qui avait parfaitement compris le sens qu'il devait donner à sa vie au prix d'une grande souffrance qu'il a su garder pour lui en perdant Arline lorsqu'il était encore étudiant.

Maintenant il est temps de savoir si toutes les questions que je me posais en *Introduction générale* ont fini par trouver des réponses, mais aussi de faire ressortir l'impression que je ressens après plusieurs années passées sur ce travail de recherche.

Pour ce qui concerne les réponses aux questions que je me posais, la réponse est « *oui et non* ».

- *Oui*, car je pense avoir plutôt bien su traduire le cheminement de la pensée de Feynman, ses motivations, ses engagements et le sens de ses choix, tout au long de sa vie scientifique.
- Oui* encore, car je pense avoir bien montré la genèse, le développement de l'intégrale de chemins et sa pérennité dans un sens assez large, ce qui est finalement le sujet de cette thèse.
- Cependant, ce travail d'épistémologie et d'histoire des sciences, la seconde apportant tous les éclairages utiles à la première, n'est pas tout à fait complet. Je n'ai pas eu assez de temps pour détailler des cas d'interactions liés à la recherche actuelle concernant la théorie quantique des champs. J'aurais aimé particulariser l'obtention de certaines intégrales de Feynman (issues du concept d'intégrale de chemins) pour les analyser à travers leur codage dans la construction de diagrammes assez complexes conduisant à cerner la probabilité de trouver la présence de telle ou telle particule d'interaction quelque part dans telle ou telle région de l'espace-temps. Mais il s'agit d'un gros travail qui dépasse certainement le cadre de cette thèse et que je compte entreprendre plus tard.

ANNEXES

Annexe 1

Détail des propagateurs de l'électron et du photon associés à l'interaction fondamentale entre deux électrons

(Voir Chapitre 6, Section 6.2.2 : diffusion Möller)

A1.1 Propagateur relativiste de l'électron libre

A1.2 Propagateur du photon

Pour effectuer cette étude nous avons consulté les publications suivantes :

- * The Theory of Positrons (R. Feynman : avril 1949),
- * Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics (R. Feynman : mai 1949),
- * Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction (R. Feynman : 1950),
- * Lumière et matière (R. Feynman : 1985),
- * Des phénomènes critiques aux champs de jauge (M. Le Bellac : 1990),
- * The Beat of a Different Drum (J. Mehra : 1994),
- * Sources et évolutions de la physique quantique : Textes fondateurs (J. Lopes : 2005),
- * Drawing Theories Apart (D. Kaiser : 2005),
- * A la découverte des lois de l'univers (R. Penrose : 2007),
- * Mécanique Quantique Relativiste (M. Klasen : 2009),
- * Quantum Field Theory in a Nutshell (A. Zee : 2010),
- * Champs Quantiques Relativistes (M. Shaposhnikov : Ecole Polytechnique de Lausanne 2005).

Rappelons ce que nous avons expliqué au chapitre 6 :

« *Considérant un diagramme de Feynman donné, l'amplitude de probabilité telle qu'une particule initialement en x_i t_i se trouve finalement en x_f t_f , est fonction du produit des propagateurs associés à chacune des arêtes (ou lignes) du diagramme.* »

En d'autres termes, Feynman associe au diagramme considéré représentant la probabilité pour que le processus ait lieu selon le diagramme en question, une quantité physique calculée à l'aide de règles précises que l'on nomme "règles de Feynman".

En fait, dans son livre *Lumière et matière*, Feynman vulgarise ce qui précède en parlant de probabilité d'un évènement :

« On entend par là un évènement qui peut être décomposé en séquences, ou qui comporte plusieurs "sous-évènements" indépendants. »¹

Le processus associé à l'interaction fondamentale entre deux électrons (diffusion Möller) est traité par Feynman par la règle des probabilités ordinaires obéissant à la multiplication des probabilités de chaque "sous-évènement".²

Ainsi Feynman obtient pour "Amplitude de probabilité" une quantité physique résultant du produit des six propagateurs associés aux six arêtes du diagramme considéré. Et il mentionne que pour les deux vertex considérés, il faut multiplier deux fois l'amplitude de probabilité obtenue par un coefficient j afin d'obtenir j au carré³ qui n'est rien d'autre que

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} = \alpha,$$

c'est-à-dire la constante de structure fine définie comme la constante de couplage de l'interaction électromagnétique dont nous avons parlé en section 6.3.1 du chapitre 6.

En fait, cette constante de couplage est l'amplitude de probabilité d'émission ou d'absorption d'un photon réel par un électron réel.⁴

Dans son ouvrage *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Anthony Zee montre comment on obtient les relations entre les propagateurs, les vertex et les intégrales de chemins à l'origine du tout.⁵

Il mentionne aussi les célèbres règles de Feynman associées aux espaces des quantités de mouvement que l'on utilise dans les diagrammes de Feynman⁶ dans lesquelles il nomme λ le coefficient α vu précédemment, que Feynman écrit d'ailleurs e^2 dans ses publications de 1949 pour simplifier l'écriture et qui, en toute rigueur est égal à :

$$\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$$

avec e_0 la charge électrique élémentaire de l'électron égale à $1,602 \times 10^{-19}$ C.

Notons bien que les règles de Feynman sont basées sur la conservation de la quantité de mouvement au niveau de chaque vertex. En d'autres termes, l'énergie associée à chaque particule en interaction est conservative.

Dans la publication de Michel Le Bellac *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, nous trouvons aussi pages 336 à 340, 480 et 494, comment on arrive aux propagateurs de l'électron et du photon à partir de l'intégrale de chemin. Et ces résultats ainsi que les raisonnements intermédiaires ont été comparés à ceux donnés par :

- * Michael Klasen pages 49 à 60 de son livre *Mécanique Quantique Relativiste*,
- * Roger Penrose pages 644 à 663 de son ouvrage *A la découverte des lois de l'univers*,

1. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : *Lumière et matière. Une étrange histoire*. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Page 86.

2. Ibid. Page 110.

3. Ibid. Page 126.

4. Ibid. Page 171.

5. Zee. 2010. « *Quantum Field Theory in a Nutshell* ». Princeton University Press. Pages 43 à 60.

6. Ibid. Pages 54 et 55.

* José Lopes pages 209 à 218 de son livre *Sources et évolutions de la physique quantique : Textes fondateurs*,

* Richard Feynman dans ses ouvrages d'avril 1949, mai 1949, 1950 cités plus haut,

* Mikhaïl Shaposhnikov pages 91 à 106 de son cours *Champs Quantiques Relativistes* professé à Ecole Polytechnique de Lausanne.

Remarquons que dans sa publication *Lumière et matière*, Feynman nous indique qu'un même évènement peut se produire de façon différente selon l'agencement du diagramme considéré.⁷ Ainsi, mentionne-t-il la règle des probabilités classiques obéissant à l'addition des probabilités selon les diverses modalités du diagramme⁸ qu'il vulgarise pages 129 à 132.

En effet, cette remarque est à rapprocher de ce que nous avons écrit au chapitre 6 :

« Pour un processus de l'électrodynamique quantique étudié, l'amplitude de probabilité est la somme des amplitudes de probabilité associées à chaque diagramme concerné par ce processus. L'amplitude de probabilité définitive du processus étudié est égale au carré de la somme précédente. »

En fait, l'expérience montre que l'on peut se limiter à des diagrammes contenant un seul photon (deux vertex). En effet, comme nous l'avons vu, les diagrammes contenant plusieurs photons (c'est-à-dire plus de deux vertex) donnent des contributions qui peuvent être négligées puisque deux vertex associés à l'interaction électromagnétique contribuent à une amplitude de probabilité du processus avec un facteur $\alpha = \frac{1}{137}$.

A1.1 Propagateur relativiste de l'électron libre

Le propagateur $K(x'-x)$ s'écrit comme une transformation de Fourier de la fonction de Green $G(p)$ ⁹ c'est-à-dire :

$$K(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} G(p) \exp[-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x'-x)]. \quad (1)$$

Or en tenant compte de la représentation de la fonction delta de Dirac^{9 bis} :

$$\delta^{(4)}(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} \exp[-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x'-x)],$$

l'expression $K(x'-x)$ devient :

$$K(x'-x) = \delta^{(4)}(x'-x) G(p)$$

soit :

$$G(p) = \frac{K(x'-x)}{\delta^{(4)}(x'-x)}. \quad (2)$$

7. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : *Lumière et matière. Une étrange histoire*. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Page 129.

8. Ibid. Page 110.

9. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste* ». Dunod. Page 49 ; Lopes. 2005. « *Sources et évolutions de la physique quantique : Textes fondateurs* ». EDP Sciences. Page 213.

9bis. Lopes. 2005. « *Sources et évolutions de la physique quantique : Textes fondateurs* ». EDP Sciences. Page 213.

9ter. Ibid. Page 212.

Le formalisme intégral de Feynman en Electrodynamique Quantique ayant conduit au concept de propagateur d'un électron relativiste libre, nous sommes ramenés à la notion de propagateur associée à la fonction de Green de l'équation de Dirac correspondante.

Nous pouvons donc écrire en prenant pour m la masse de l'électron au repos^{9 ter} :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) K(x' - x) = i \delta^{(4)}(x' - x). \quad (3)$$

Puis en posant:

$$\hbar = c = 1,$$

l'équation (3) s'écrit :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) K(x' - x) = i \delta^{(4)}(x' - x). \quad (4)$$

Comme nous l'avons vu en sous-section 1.2.1.g partie « a », nous pouvons écrire :

$$p_\mu \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{c'est-à-dire} \quad p_\mu \rightarrow -i \partial_\mu.$$

Alors l'équation (4) devient :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) K(x' - x) = i \delta^{(4)}(x' - x) \quad (5)$$

avec:

* p_μ le vecteur quadri-impulsion associé à la particule relativiste représentée par l'électron a ou b sur le dessin en fin de section 6.3.1,

* γ^μ la matrice de Dirac (matrice 4×4 complexe de trace nulle),

* $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ que l'on appelle le "slash de Feynman".

L'équation (5) peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$K(x' - x) = \frac{i \delta^{(4)}(x' - x)}{(\gamma^\mu p_\mu - m)}. \quad (6)$$

Injectons (6) dans (2) pour obtenir comme fonction de Green :

$$G(p) = \frac{i \delta^{(4)}(x' - x)}{(\gamma^\mu p_\mu - m)} \Big/ \delta^{(4)}(x' - x) = \frac{i}{(\gamma^\mu p_\mu - m)}$$

c'est-à-dire :

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \quad (7)$$

avec^{9 quater}:

$$* \not{p} = \gamma^\mu p_\mu.$$

On démontre facilement¹⁰ que :

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

En injectant (7) dans (1) et en nous référant au diagramme associé à l'effet Möller, nous obtenons, pour l'arête $x_1 t_1$ à $x_5 t_5$, le propagateur de Feynman suivant relativement à l'électron a :

$$K_{+a}(5,1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p-m)^{-1} \exp[-ip.(x_5 - x_1)] d^4p \quad (8)$$

⁹quater. Ibid. Page 213.

¹⁰. Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste ». Dunod. Page 57.

qui correspond, dans l'espace de Minkowski, exactement à l'expression (31) de Feynman contenue dans sa publication *The Theory of Positrons*¹¹.

Feynman représente ce propagateur¹² comme un segment de droite (une arête) entre les points 1 et 5 de coordonnées d'espace-temps dans un plan où l'axe des temps est dirigé vers le haut (le futur en haut, le passé en bas).

A1.2 Propagateur du photon

Rappelons quelques notions fondamentales d'électrodynamique classique associées aux équations de Maxwell.

Les équations de Maxwell (1831-1879) décrivant les phénomènes de l'électrodynamique s'écrivent dans le vide et dans les unités de Heaviside-Lorentz de la manière suivante^{12 bis} :

$$* \nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (9)$$

$$* \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (10)$$

$$* \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (11)$$

$$* \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

En considérant la divergence de (10) associée à (9), la densité de charge $\rho(t, \vec{x})$ et la densité de courant $\vec{j}(t, \vec{x})$ satisfont à l'équation de continuité^{12 ter} :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (13)$$

Maxwell a montré que ses équations constituent un système de deux équations différentielles du premier ordre couplé pour le champ électrique et le champ magnétique, se déduisant du potentiel scalaire $V(t, \vec{x})$ et du potentiel vectoriel $\vec{A}(t, \vec{x})$.

Ces deux équations différentielles se présentent de la façon qui suit :

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\nabla V(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t} \quad (14)$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x}). \quad (15)$$

Nous avons montré en Annexe 21 §2 et §3 que les champs électromagnétiques sont covariants sous les transformations locales de jauge des potentiels scalaires V et vectoriel \vec{A} :

11. Feynman. Septembre 1949. « *The Theory of Positrons* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 757.

12. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 772.

12bis. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste* ». Dunod. Page 19.

12ter. Ibid. Page 19.

$$V'(t, \vec{x}) = V(t, \vec{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{x})$$

$$\vec{A}' = \vec{A}(t, \vec{x}) + \nabla f(t, \vec{x}) .$$

Dans la jauge de Feynman ou de Lorenz (1829-1891), définie par :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (16)$$

les équations de Maxwell (9) et (10) se découpent et les potentiels scalaire et vectoriel sont solutions des équations d'onde suivantes^{12 quater} :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 0 \quad (17)$$

et

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (18)$$

avec :

* \square l'opérateur d'Alembertien :

$$\square A^\mu = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] A^\mu$$

c'est-à-dire :

$$\square A^\mu = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] A^\mu.$$

Nous savons que la fonction de Green $G(x', x)$ de l'équation :

$$\square A^\mu = j^\mu$$

vérifie l'équation^{12 quinq} :

$$\square G(x', x) = \delta^{(4)}(x' - x) .$$

Or dans l'espace-temps infini, la fonction de Green $G(x', x)$ dépend de la distance $(x' - x)$, et donc après une transformation de Fourier de la fonction de Green, on peut écrire¹³, en posant $\hbar = 1$:

$$G(x', x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \exp[-ip \cdot (x' - x)]. \quad (19)$$

En utilisant la représentation spectrale de la fonction de distribution de Dirac, on obtient¹⁴ :

$$\square \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \exp[-ip \cdot (x' - x)] = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip \cdot (x' - x)]$$

dont la solution dans la jauge de Feynman est¹⁵ :

$$G(p) = -\frac{1}{p^2} .$$

12quater. Lopes. 2005. « Sources et évolutions de la physique quantique : Textes fondateurs ». EDP Sciences. Page 214 ; Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste ». Dunod. Page 19.

12quinq. Lopes. 2005. « Sources et évolutions de la physique quantique : Textes fondateurs ». EDP Sciences. Page 215 ; Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste ». Dunod. Page 49.

13. Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste ». Dunod. Page 49.

14. Ibid. Page 49.

15. Ibid. Pages 50 et 54.

Nous pouvons donc écrire le propagateur du photon $\delta_+(s_{56}^2)$ associé à l'équation (19) de la manière suivante :

$$\delta_+(s_{56}^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp[-ip \cdot x_{56}] p^{-2} d^4p \quad (20)$$

qui correspond, pour l'espace de Minkowski, exactement à l'expression (10) de Feynman contenue dans sa publication *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*.¹⁶

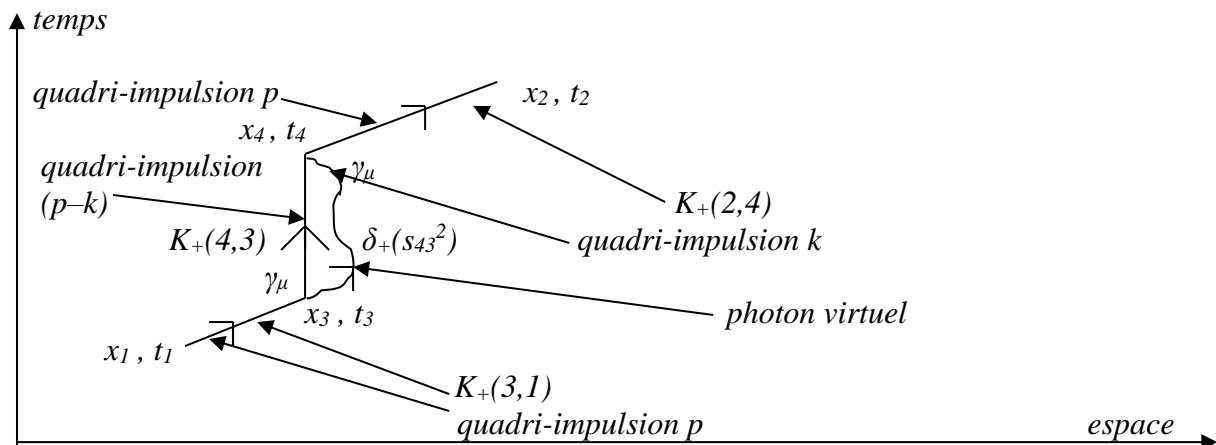
16. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 77

Annexe 2

Calcul des propagateurs de l'électron et du photon associés à l'interaction d'un électron avec lui-même

(Voir Chapitre 6, Section 6.2.3)

Le détail de calcul des propagateurs a été montré en Annexe 1 ; en appliquant la règle sur la conservation de l'impulsion (la quantité de mouvement) au niveau de chaque vertex, le diagramme de Feynman est le suivant :



Ainsi, en procédant de la même façon qu'en Annexe 1, pour le calcul des propagateurs, nous obtenons :

$$K_+(4,3) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p-k-m)^{-1} \exp[-i(p-k) \cdot x_{43}] d^4(p-k)$$

correspondant à la fonction de Green suivante :

$$G(p-k) = \frac{i}{p-k-m}$$

///

$$K_+(3,1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p-m)^{-1} \exp[-ip \cdot (x_{31})] d^4p$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p) = \frac{i}{p-m}$$

$$K_+(2,4) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p-m)^{-1} \exp[-ip \cdot (x_{24})] d^4p$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p) = \frac{i}{p-m}$$

$$\delta_+(s_{43}^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp[-ik \cdot x_{43}] k^{-2} d^4k$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(k) = -\frac{i}{k^2}$$

Mais laissons Feynman s'exprimer :

« *The quantum propagates from emission to absorption (k⁻²) and we integrate over all quanta (d⁴k) ...* »¹

|

1. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 775.

Annexe 3

Calcul des propagateurs de l'électron et du photon associés à la diffusion Compton

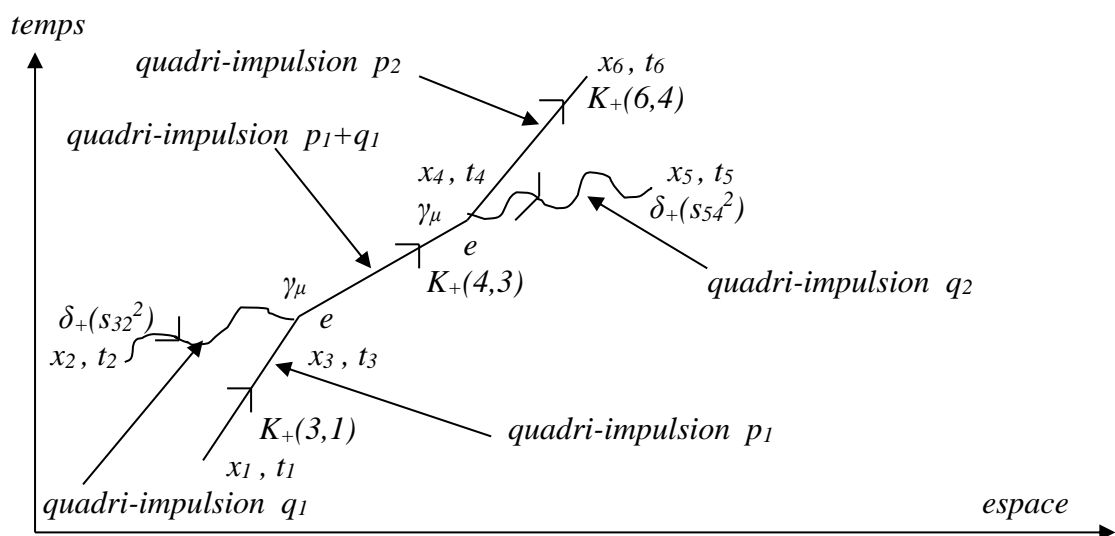
(Voir Chapitre 6, Section 6.2.4)

A3.1 Calcul des propagateurs

A3.2 Analyse détaillée de la diffusion Compton

A3.1 Calcul des propagateurs

Le détail de calcul des propagateurs a été montré en Annexe 1 ; en appliquant la règle sur la conservation de l'impulsion (la quantité de mouvement) au niveau de chaque vertex, le diagramme de Feynman est le suivant :



En procédant de la même façon qu'en Annexe 1 et qu'en Annexe 2, nous obtenons :

$$K_+(3,1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_1 - m)^{-1} \exp[-ip_1 \cdot (x_{31})] d^4 p_1$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p_1) = \frac{i}{p_1 - m}$$

$$\delta_+(s_{32}^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp[-iq_1 \cdot x_{32}] q_1^{-2} d^4 q_1$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(q_1) = -\frac{i}{q_1^2}$$

$$K_+(4,3) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_1 + q_1 - m)^{-1} \exp[-i(p_1 + q_1) \cdot x_{43}] d^4 (p_1 + q_1)$$

correspondant à la fonction de Green suivante :

$$G(p_1 + q_1) = \frac{i}{p_1 + q_1 - m}$$

$$K_+(6,4) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_2 - m)^{-1} \exp[-ip_2 \cdot (x_{64})] d^4 p_2$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p_2) = \frac{i}{p_2 - m}$$

$$\delta_+(s_{54}^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp[-iq_2 \cdot x_{54}] q_2^{-2} d^4 q_2$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(q_2) = -\frac{i}{q_2^2}$$

A3.2 Analyse détaillée de la diffusion Compton

La diffusion Compton (encore appelée effet Compton) est une expérience de physique idéale permettant de mettre en application la conservation de l'énergie globale du système étudié et de la quantité de mouvement, chère à Feynman dans l'élaboration de ses diagrammes.

Aussi, nous-a-t-il paru pertinent de traiter de manière quantitative cette propriété de la nature.

Rappelons que la diffusion Compton a lieu lorsqu'un photon incident entre en collision avec un électron libre d'un atome. Ainsi, l'électron est éjecté de l'atome (atome qui se trouve donc ionisé) donnant lieu à la diffusion du photon qui voit sa fréquence incidente f diminuée c'est-à-dire sa longueur d'onde λ augmentée ($\lambda = c/f = cT$). Le photon diffusé a donc perdu de l'énergie en vertu de la relation bien connue de Planck-Einstein $E = hf$.

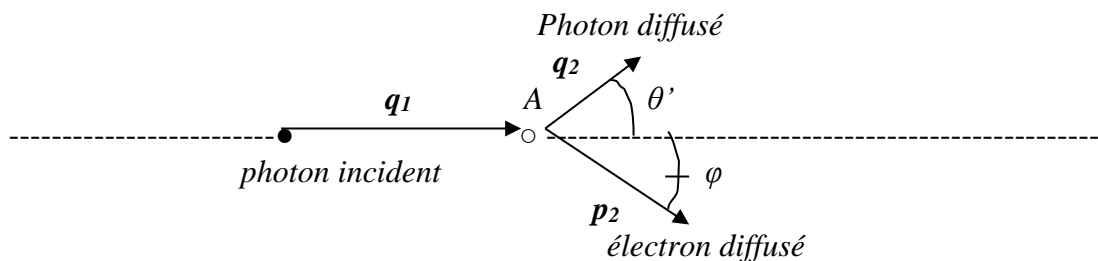
Cette expérience montre une fois de plus que la lumière se comporte non seulement comme une onde mais aussi comme un faisceau de particules.

Comme l'exprime Feynman dans sa publication *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique*¹, ses diagrammes et les règles qui leur sont affectés, permettent d'obtenir la formule de Klein-Nishina, c'est-à-dire la probabilité pour un photon d'énergie cinétique initiale E_0 , avant la collision, d'être diffusé avec un angle θ' associé à une énergie cinétique finale égale à E' , après la collision.

Nous donnerons la formule de Klein-Nishina obtenue de manière classique et nous expliquerons que cette formule est identique à celle qui s'obtient par un calcul utilisant les diagrammes de Feynman.

A3.2.1 Etude quantitative de la diffusion Compton par la physique classique

Soit le dessin ci-après dans lequel la symbolique en caractère gras signifie une notation vectorielle telle que $\mathbf{q}_1 = \vec{q}_1$:



L'atome A au repos possède un électron libre considéré au repos. Lors de la collision, le photon incident diffuse de l'énergie cinétique sur cet électron libre.

Précisons que le photon incident se meut avec une impulsion (c'est-à-dire une quantité de mouvement) \mathbf{q}_1 et une énergie cinétique $E_0 = q_1 c$.

Précisons également que l'électron considéré au repos possède une énergie de masse égale à $m_e c^2$.

Lors de la collision, le photon est diffusé dans une direction faisant un angle θ' avec la direction du photon incident alors que l'électron libre prend une direction φ par rapport à cette dernière. L'impulsion du photon après diffusion est notée \mathbf{q}_2 et celle de l'électron \mathbf{p}_2 .

1. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Page 776.

A_{3.2.1.a}) Variation de la longueur d'onde du photon incident après être entré en collision avec l'électron libre de l'atome A au repos

→ La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire :

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 - 2 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_2 \\ p_2^2 &= q_1^2 \cos^2 \theta + q_2^2 \cos^2 \theta - 2 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \end{aligned}$$

$$p_2^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = q_1^2 + q_2^2 - 2 q_1 q_2 \cos \theta' \quad (1)$$

→ La conservation de l'énergie s'écrit en mécanique relativiste :

$$q_1 c + m_e c^2 = q_2 c + \sqrt{p_2^2 + m_e^2 c^4} \quad (2)$$

avec :

* m_e la masse de l'électron au repos.

L'équation (2) peut s'écrire de la façon suivante :

$$p_2^2 = (q_1 - q_2)^2 + 2 m_e c (q_1 - q_2) \quad (3)$$

En identifiant (1) et (3) on obtient :

$$q_1 q_2 (1 - \cos \theta') = m_e c (q_1 - q_2) \quad (4)$$

Sachant que la longueur d'onde de Louis de Broglie associée à une particule est définie par :

$$\lambda = \frac{h}{q} \quad \text{c'est-à-dire} \quad q = \frac{h}{\lambda},$$

l'expression (4) devient :

$$\frac{h}{\lambda_1} \frac{h}{\lambda_2} (1 - \cos \theta') = m_e c \left(\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} \right)$$

$$\frac{h^2}{\lambda_1 \lambda_2} (1 - \cos \theta') = \frac{m_e c \lambda_2 h - \lambda_1 h}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$h^2 (1 - \cos \theta') = m_e c h (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h^2}{m_e c h} (1 - \cos \theta') = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta')$$

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta') \quad (5)$$

avec:

* $\Delta \lambda$ le décalage entre les longueurs d'onde du photon incident et du photon diffusé,

* $\lambda_c = h / m_e c$ la longueur d'onde de Compton,

* θ' l'angle de diffusion du photon incident après sa collision avec l'électron libre de l'atome A.

A_{3.2.1.b}) Variation d'énergie entre l'énergie E_0 du photon incident et l'énergie E' du photon diffusé

La relation (5) exprimant la variation de longueur d'onde entre le photon incident et le photon diffusé, est associée à la relation de Planck-Einstein suivante :

$$\Delta E = h \Delta \nu$$

avec:

* E l'énergie du photon,

* h la constante de Planck,

* ν la fréquence de l'onde électromagnétique associée au photon.

Sachant que $\nu = \frac{c}{\lambda}$, nous pouvons écrire :

$$\Delta\nu = c \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = c \left(\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) = c \left(\frac{\lambda - (\lambda+\Delta\lambda)}{(\lambda+\Delta\lambda)\lambda}\right) = -\frac{c \Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)}$$

c'est-à-dire :

$$\Delta E = -h \frac{c \Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)} \quad (6)$$

La quantité ΔE est la variation d'énergie entre l'énergie E_0 du photon incident et l'énergie E' du photon diffusé. Cette énergie perdue par le photon incident après diffusion sur l'électron, est entièrement distribuée à l'électron *sous forme d'énergie cinétique*.

A3.2.1.c) Energie cinétique acquise par l'électron

Calculons l'énergie cinétique acquise par l'électron (en fonction de sa masse m_e au repos, de l'énergie E_0 du photon incident, de l'angle θ' de diffusion du photon incident après sa collision avec l'électron libre de l'atome A) à partir de l'expression (6).

Nous savons que :

$$E_0 = q_1 c \quad ; \quad q_1 = \frac{h}{\lambda} \quad ;$$

d'où:

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda = \frac{hc}{E_0} \quad (7)$$

Injectons (5) dans (6) :

$$\Delta E = \frac{hc[\lambda_c(1-\cos\theta')]}{\lambda[\lambda+\lambda_c(1-\cos\theta')]} \quad (8)$$

Injectons (7) dans (8) :

$$\Delta E = \frac{hc[\lambda_c(1-\cos\theta')]}{\frac{hc}{E_0}[\frac{hc}{E_0} + \lambda_c(1-\cos\theta')]} = \frac{hc[\frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta')]}{\frac{hc}{E_0}[\frac{hc}{E_0} + \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta')]}$$

$$\Delta E = \frac{E_0 \gamma (1-\cos\theta')}{1 + \gamma (1-\cos\theta')}$$

avec :

$$* \gamma = \frac{E_0}{m_e c^2}.$$

A3.2.1.d) Distribution angulaire (θ') de la diffusion Compton

La probabilité pour qu'un photon d'énergie E_0 soit diffusé avec un angle θ' quelconque est donnée par la formule de Klein – Nishina suivante² obtenue de manière classique :

2. Wikipédia. 21 juillet 2018. « Diffusion Compton ». Page 4/11.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2}{2} \frac{E'^2}{E0^2} \left[\frac{E'}{E0} + \frac{E0}{E'} - \sin^2\theta' \right] \quad (9)$$

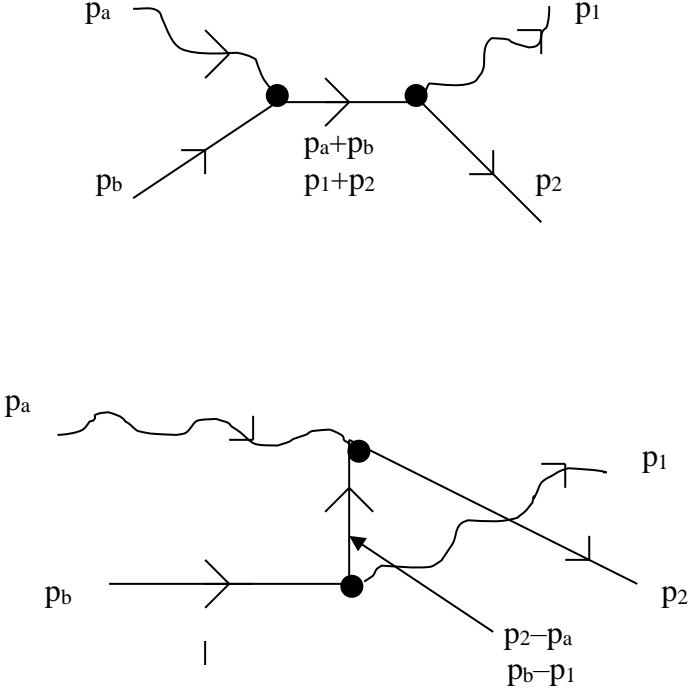
avec :

- * r le rayon classique d'un électron égal à $\frac{\alpha}{me}$,
- * α la constante de structure fine,
- * E' l'énergie du photon diffusé.

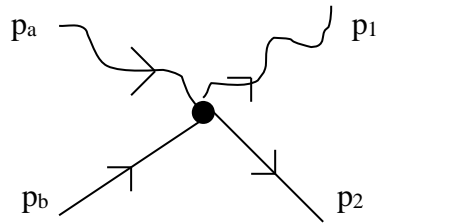
En travaillant à partir des diagrammes de Feynman comme l'a fait Michael Klasen³, nous obtenons la formule de Klein – Nishina ci-avant en (9).

Avant de parvenir au résultat donné par l'expression (9) mettant en œuvre la diffusion d'un photon par une particule de spin 1/2 comme l'électron, Klasen dans un premier temps⁴ étudie la diffusion d'un photon par une particule scalaire de masse m , c'est-à-dire une particule de spin zéro semblable par exemple au boson de Higgs que nous verrons au chapitre 4.

Pour cela, il considère les trois diagrammes de Feynman suivants⁵ :



3. Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste ». Dunod. Pages 69, 77, et 133 à 135.
 4. Ibid. Page 69.
 5. Ibid. Page 69.
 6. Ibid. Page 70.



Tout calcul fait, Klasesn obtient⁶ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2}{2} \frac{E_1^2}{E_a^2} (1 + \cos^2 \theta_1)$$

avec :

- * θ_1 l'angle entre la direction du photon incident et celle du photon diffusé après la collision du photon incident avec l'électron associé à la quantité de mouvement p_b ,
- * E_a l'énergie du photon incident avant la collision c'est-à-dire avant sa diffusion par l'électron,
- * E_1 l'énergie du photon diffusé,
- * r le rayon classique de la particule scalaire égal à $\frac{\alpha}{m}$,
- * α la constante de structure fine.

Puis dans un deuxième temps⁷, Klasesn travaillant toujours à partir des trois diagrammes précédents, considère un électron non-polarisé par la lumière, de spin demi-entier c'est-à-dire égal à 1/2. Et il parvient à la formule (9) obtenue de manière classique par Klein et Nishina.

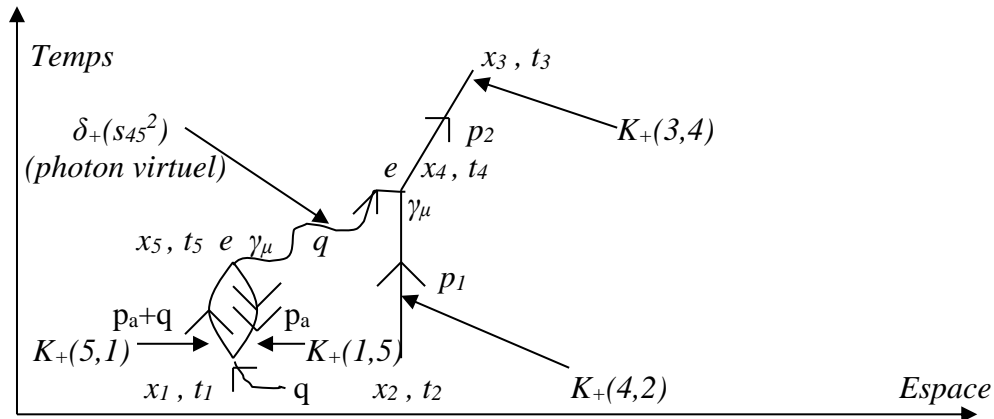
7. Ibid. Pages 133 à 135.

Annexe 4

Calcul des propagateurs associés à l'effet de la polarisation du vide sur la diffusion d'un électron incident par un photon virtuel issu de la fluctuation du "vide quantique"

(Voir Chapitre 6, Section 6.2.5)

Le détail de calcul des propagateurs a été montré en Annexe 1 ; en appliquant la règle sur la conservation de l'impulsion (la quantité de mouvement) au niveau de chaque vertex, le diagramme de Feynman correspondant au dessin représenté dans sa publication « *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics* »¹ est le suivant :



En procédant de la même façon qu'en Annexe 1 et qu'en Annexe 2, nous obtenons :

1. Feynman. Septembre 1949. « *Approche spatio-temporelle de l'Electrodynamique quantique* ». Physical Review. Volume 76. Number 6. Figure 6 page 779.

$$K_+(5,1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_a+q-m)^{-1} \exp[-i(p_a+q) \cdot x_{51}] d^4(p_a+q)$$

correspondant à la fonction de Green suivante :

$$G(p_a+q) = \frac{i}{p_a+q-m}$$

$$K_+(1,5) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_a-m)^{-1} \exp[-ip_a \cdot (x_{15})] d^4 p_a$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p_a) = \frac{i}{p_a-m}$$

$$\delta_+(s_{45}^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp[-iq \cdot x_{45}] q^{-2} d^4 q$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(q) = -\frac{i}{q^2}$$

$$K_+(3,4) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_2-m)^{-1} \exp[-ip_2 \cdot (x_{34})] d^4 p_2$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p_2) = \frac{i}{p_2-m} \quad /$$

$$K_+(4,2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int (p_1-m)^{-1} \exp[-ip_1 \cdot (x_{42})] d^4 p_1$$

correspondant à la fonction de Green :

$$G(p_1) = \frac{i}{p_1-m} .$$

Annexe 5

Biographie du professeur John Archibald Wheeler

(Voir Chapitre 3 ; Section 3.1.2)

John Wheeler (1911 – 2008) est un physicien théoricien américain ayant abordé des domaines assez variés allant de la relativité générale à la fission nucléaire.¹

Pour ce qui est de la relativité générale d'Einstein, Wheeler a pour ainsi dire été l'un des derniers collaborateurs du père de la théorie relativiste de la gravitation (1915). En effet, il a tenté d'extrapoler cette dernière en travaillant à l'achèvement du projet de la théorie unifiée chère à Einstein.

Ainsi, il a cherché à vérifier si tous les phénomènes physiques connus à l'époque, dont l'électromagnétisme, pouvaient comme la relativité générale, se réduire aux propriétés de courbure de l'espace-temps associée à la géométrie de Riemann.

Mais n'ayant pas réussi à expliquer les phénomènes liés au modèle standard de la toute nouvelle physique des particules, Wheeler abandonna dans les années 1970 la poursuite des travaux d'Einstein sur la théorie unifiée.

Wheeler a aussi travaillé avec le physicien théoricien américain Bryce DeWitt (1923 – 2004) sur une tentative d'unification de la mécanique quantique et de la relativité générale qui permet de comprendre les phénomènes mettant en jeu des grandes quantités de matière (ou d'énergie) en considérant des espaces assez petits comme les trous noirs. Ce domaine de la physique théorique porte le nom de « *gravité quantique* » et pourrait, entre autre, nous renseigner un peu plus sur l'origine de l'univers.

Notons d'ailleurs la difficulté d'une telle unification du fait d'hypothèses complètement différentes régissant ces deux théories. En effet, la mécanique quantique, comme nous l'avons vu, postule que les bosons d'interaction entre les diverses particules situées à l'intérieur de l'atome et du noyau atomique (correspondant à chacune des forces de l'univers : électromagnétique, nucléaire forte, nucléaire faible) soient associés à *l'espace-temps euclidien*

1. Wikipédia. 28.08.2018. « *John Wheeler* ».

de la relativité restreinte. A contrario, la relativité générale associée à la force de gravitation (matérialisée par son vecteur boson [le graviton] de médiation ou d'interaction) interprète celle-ci comme une courbure d'un *espace-temps riemannien* proportionnelle à la densité d'énergie (de masse) présente dans l'univers.

Ceci dit, on doit à Wheeler et à DeWitt l'équation de champ appelée équation de Wheeler – DeWitt datant de 1967, faisant partie d'une théorie de la gravité quantique combinant mathématiquement la mécanique quantique et la relativité générale.

Et dans cette théorie de Wheeler – DeWitt, le temps n'ayant pas la même signification qu'en mécanique quantique, l'équation de Wheeler – DeWitt pourrait régir la « fonction d'onde de l'univers ».²

Très pertinent au niveau de ses idées sur tout ce qui peut toucher à la physique théorique et reconnu très tôt par ses pairs, il fut nommé professeur à la prestigieuse Université de Princeton qui correspond à la période à laquelle il dirigea la thèse de doctorat de Richard Feynman tout juste moins âgé que son professeur.

Enseignant à l'Université de Princeton pendant près de quarante ans, il participa de 1941 à 1945 au projet militaire Manhattan, ayant conduit à la production de la première bombe atomique américaine (bombe A) basée sur la fission nucléaire dont il était avec Niels Bohr (1885 – 1962) l'un des précurseurs dès 1939.

Le résultat de ces travaux fut l'obtention durant la seconde guerre mondiale de deux bombes A, baptisées *Little Bay* (bombe A à uranium) et *Fat Man* (bombe A au plutonium) qui furent lancées par l'armée américaine sur Hiroshima et Nagasaki respectivement les 6 et 7 août 1945 faisant 250 000 morts dans lesquels on compte bon nombre d'enfants, de femmes et de vieillards parfaitement innocents.

Wheeler participa également au comité JASON créé en 1960, en tant que conseiller du gouvernement fédéral américain sur la notion de « *champ de bataille électronique* » désignant un système de mines, bombes, ..., assisté par informatique.

Fortement critiqué par la communauté scientifique qui ne peut tolérer cette caution scientifique apportée à la guerre, Wheeler fut littéralement chassé avec plusieurs de ses condisciples dont Wigner, Townes et Weinberg (tout trois prix Nobel ou futur prix Nobel de physique) d'une conférence de physique théorique à Trieste dans les années 1970.³

2. Wikipédia. 28.08.2018. « *Bryce DeWitt* ».

3. Wikipédia. 29.08.2018. « *Comité JASON* ».

Annexe 6

Aperçu de la signification d'une dérivée covariante

(voir Annexe 21 §5 : Changement et invariance
de jauge locale pour une particule libre)

(voir Chapitre 7, Sous-section 7.2.2.b : Analyse des
travaux de Pierre Cartier - Cécile DeWitt-Morette
en Section IV, Paragraphe 3 de leur publication)

A6.1 Principe de la géométrie riemannienne

A6.2 Caractérisation des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatio-temporel de Riemann
par rapport aux éléments $\eta_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatio-temporel de Minkowski

A6.3 Equation des géodésiques

A6.4 La connexion affine

A6.5 Différentielle absolue et dérivée covariante

A6.1 Principe de la géométrie riemannienne

Soit une hypersurface S à trois dimensions de coordonnées curvilignes u^1, u^2 et u^3 , plongée dans un espace à 4 dimensions de coordonnées cartésiennes x, y, z, w dans un repère orthogonal (o, x, y, z, w) . En passant de la dimension 3 à la dimension 4, nous avons rajouté fictivement un axe de coordonnée supplémentaire ow qui est orthogonal aux 3 axes du sous-espace à 3 dimensions.

Traitons de manière analytique la variation infinitésimale d'un élément linéaire dl de cette hypersurface afin de retrouver les composantes covariantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique g de Riemann .

Nous pouvons écrire :

$$x = x(u^1, u^2, u^3) ; y = y(u^1, u^2, u^3) ; z = z(u^1, u^2, u^3) ; w = w(u^1, u^2, u^3) ;$$

soit:

$$\begin{aligned} dx &= (\partial x / \partial u^1) du^1 + (\partial x / \partial u^2) du^2 + (\partial x / \partial u^3) du^3 \\ dy &= (\partial y / \partial u^1) du^1 + (\partial y / \partial u^2) du^2 + (\partial y / \partial u^3) du^3 \\ dz &= (\partial z / \partial u^1) du^1 + (\partial z / \partial u^2) du^2 + (\partial z / \partial u^3) du^3 \\ dw &= (\partial w / \partial u^1) du^1 + (\partial w / \partial u^2) du^2 + (\partial w / \partial u^3) du^3. \end{aligned}$$

Dans l'espace fibré constitué par le plan tangent euclidien attaché au point M de la variété riemannienne, nous relierons sur une distance infinitésimale l'espace pseudo-riemannien à l'espace euclidien de la manière suivante :

$$|\mathbf{dOM}|^2 = (\mathbf{dOM})^2 = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2.$$

Tout calcul fait on obtient :

$$\begin{aligned} dl^2 = & [(\partial x/\partial u^1)^2 + (\partial y/\partial u^1)^2 + (\partial z/\partial u^1)^2 + (\partial w/\partial u^1)^2] du^1 du^1 \\ & + [\partial x/\partial u^1 \partial x/\partial u^2 + \partial y/\partial u^1 \partial x/\partial u^2 + \partial z/\partial u^1 \partial z/\partial u^2 + \partial w/\partial u^1 \partial w/\partial u^2] du^1 du^2 \\ & + [\partial x/\partial u^1 \partial x/\partial u^3 + \partial y/\partial u^1 \partial y/\partial u^3 + \partial z/\partial u^1 \partial z/\partial u^3 + \partial w/\partial u^1 \partial w/\partial u^3] du^1 du^3 \\ & + [\partial x/\partial u^2 \partial x/\partial u^1 + \partial y/\partial u^2 \partial y/\partial u^1 + \partial z/\partial u^2 \partial z/\partial u^1 + \partial w/\partial u^2 \partial w/\partial u^1] du^2 du^1 \\ & + [(\partial x/\partial u^2)^2 + (\partial y/\partial u^2)^2 + (\partial z/\partial u^2)^2 + (\partial w/\partial u^2)^2] du^2 du^2 \\ & + [\partial x/\partial u^2 \partial x/\partial u^3 + \partial y/\partial u^2 \partial y/\partial u^3 + \partial z/\partial u^2 \partial z/\partial u^3 + \partial w/\partial u^2 \partial w/\partial u^3] du^2 du^3 \\ & + [\partial x/\partial u^3 \partial x/\partial u^1 + \partial y/\partial u^3 \partial y/\partial u^1 + \partial z/\partial u^3 \partial z/\partial u^1 + \partial w/\partial u^3 \partial w/\partial u^1] du^3 du^1 \\ & + [\partial x/\partial u^3 \partial x/\partial u^2 + \partial y/\partial u^3 \partial y/\partial u^2 + \partial z/\partial u^3 \partial z/\partial u^2 + \partial w/\partial u^3 \partial w/\partial u^2] du^3 du^2 \\ & + [(\partial x/\partial u^3)^2 + (\partial y/\partial u^3)^2 + (\partial z/\partial u^3)^2 + (\partial w/\partial u^3)^2] du^3 du^3 \quad (1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $dl^2 = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{13} du^1 du^3 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2 + g_{23} du^2 du^3 + g_{31} du^3 du^1 + g_{32} du^3 du^2 + g_{33} du^3 du^3$,

soit :

$$dl^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu \text{ avec } \mu \text{ et } \nu \text{ variant de } 1 \text{ à } 3.$$

Sur la base naturelle \mathbf{e}_k nous avons :

$$\mathbf{OM} = u^k \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{dOM} = \mathbf{e}_k du^k \quad (2).$$

La différentielle totale du vecteur $\mathbf{OM} = f(u^k)$ s'écrit :

$$\mathbf{dOM} = (\partial \mathbf{OM} / \partial u^k) du^k \quad (3).$$

En égalisant (2) et (3), on obtient : $\mathbf{e}_k = (\partial \mathbf{OM} / \partial u^k)$ avec $k = 1, 2, 3$.

Les vecteurs de base du repère cartésien sont respectivement $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$, sur les 4 axes ox, oy, oz et ow .

On peut donc écrire :

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w\mathbf{l},$$

soit :

$$(\partial \mathbf{OM} / \partial u^k) = (\partial x\mathbf{i} + \partial y\mathbf{j} + \partial z\mathbf{k} + \partial w\mathbf{l}) / \partial u^k = \mathbf{e}_k$$

que l'on peut encore mentionner de la manière suivante :

$$(\partial \mathbf{OM} / \partial u^1) = (\partial x\mathbf{i} + \partial y\mathbf{j} + \partial z\mathbf{k} + \partial w\mathbf{l}) / \partial u^1 = \mathbf{e}_1,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (|\partial \mathbf{OM} / \partial u^1|^2) &= (\partial x/\partial u^1)^2 + (\partial y/\partial u^1)^2 + (\partial z/\partial u^1)^2 + (\partial w/\partial u^1)^2 = \mathbf{e}_1. \mathbf{e}_1 = g_{11} \\ (|\partial \mathbf{OM} / \partial u^2|^2) &= (\partial x/\partial u^2)^2 + (\partial y/\partial u^2)^2 + (\partial z/\partial u^2)^2 + (\partial w/\partial u^2)^2 = \mathbf{e}_2. \mathbf{e}_2 = g_{22} \\ (|\partial \mathbf{OM} / \partial u^3|^2) &= (\partial x/\partial u^3)^2 + (\partial y/\partial u^3)^2 + (\partial z/\partial u^3)^2 + (\partial w/\partial u^3)^2 = \mathbf{e}_3. \mathbf{e}_3 = g_{33} \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré l'expression $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ pour $\mu = \nu$ d'après la correspondance avec la relation (1). La démonstration avec $\mu \neq \nu$ ne pose pas de problème.

En appliquant toutes les relations qui précèdent tel que :

$$x = x(u^1, u^2, u^3) = x(\chi, \theta, \varphi) = a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = y(u^1, u^2, u^3) = y(\chi, \theta, \varphi) = a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = z(u^1, u^2) = z(\chi, \theta) = a \sin \chi \cos \theta$$

$$w = w(u^1) = z_w \chi = a \cos \chi ,$$

on retrouve la métrique spatiale riemannienne de l'hypersphère en coordonnées sphériques standard (χ, θ, φ) sur S^3 telle :

$$dl^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

c'est-à-dire :

$$dl^2 = a^2 d\chi^2 + a^2 \sin^2 \chi d\theta^2 + a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2$$

avec :

$$g_{11} = a^2 ; g_{22} = a^2 \sin^2 \chi ; g_{33} = a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta ; g_{12} = g_{13} = \dots = g_{32} = 0$$

et :

$$du^1 du^1 = d\chi^2 ; du^2 du^2 = d\theta^2 ; du^3 du^3 = d\varphi^2 .$$

A.6.2 Caractérisation des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatio-temporel de Riemann par rapport aux éléments $\eta_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatio-temporel de Minkowski

On peut imaginer se servir du tenseur métrique de Riemann et caractériser ses éléments $g_{\mu\nu}$ par rapport aux éléments $\eta_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique de Minkowski afin de considérer le temps propre de la relativité restreinte en tout point de l'espace-temps riemannien. La puissance du calcul différentiel associé à la notion de dérivées partielles permet de relier sur une distance infinitésimale l'espace pseudo-riemannien à l'espace euclidien.

La méthode la plus simple consiste à utiliser le critère de tensorialité résultant de directement de la définition d'un tenseur et qui permet d'écrire :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

avec :

* x^μ et x^ν les coordonnées curvilignes associées au tenseur métrique riemannien $g_{\mu\nu}$ de la géométrie riemannienne,

* y^α et y^β les coordonnées cartésiennes associées au tenseur métrique minkowskien de la géométrie euclidienne.

Nous avons $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ et $y^\beta = y^\beta(x^\nu)$ et par exemple en dimension 3 :

$$\begin{aligned} dy^1 &= (\partial y^1 / \partial x^1) dx^1 + (\partial y^1 / \partial x^2) dx^2 + (\partial y^1 / \partial x^3) dx^3 \\ dy^2 &= (\partial y^2 / \partial x^1) dx^1 + (\partial y^2 / \partial x^2) dx^2 + (\partial y^2 / \partial x^3) dx^3 \\ dy^3 &= (\partial y^3 / \partial x^1) dx^1 + (\partial y^3 / \partial x^2) dx^2 + (\partial y^3 / \partial x^3) dx^3 \end{aligned}$$

La dérivée partielle des fonctions y^1, y^2, y^3 , au point M, à l'instant t, sont rangés dans une matrice m à 3 lignes et 3 colonnes, que l'on appelle matrice jacobienne.

A.6.3 Equation des géodésiques

Pour une particule libre de masse m au point M à l'instant t, nous sommes ramené à un référentiel inertiel.

Ainsi, l'accélération au point M et à l'instant $t = \tau$ est nulle et nous pouvons écrire : $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy^\alpha}{d\tau} \right) = 0$.

Sachant que $y^\alpha = f(x^\mu)$, la différentielle partielle dy^α s'écrit :

$$dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \text{ d'où } \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0$$

La relation $(uv)' = vu' + uv'$ donne :

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) + \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right) = 0 \quad (4).$$

Sachant que :

$$d \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) dx^\nu$$

alors :

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}.$$

L'expression (4) devient donc :

$$\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right) = 0.$$

En multipliant les 2 termes de l'équation précédente par $\partial x^i / \partial y^\alpha$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \right) \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right) = 0 \quad (5).$$

Or :

$$(\partial x^i / \partial y^\alpha) (\partial y^\alpha / \partial x^\mu) = 1 \text{ si } \mu = i \text{ (égale 0 si } \mu \neq i \text{ car } x^i \neq f(x^\mu))$$

alors :

$$(\partial x^i / \partial y^\alpha) (\partial y^\alpha / \partial x^\mu) = \delta_\mu^i.$$

Le terme de droite de l'équation (5) n'est valide que pour $\mu = i$.

Ainsi, l'équation (5) devient :

$$\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right) + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

Nous obtenons donc l'équation des géodésiques qui traduisent la ligne d'Univers d'une particule libre de masse m au point M et à l'instant t.

A6.4 La connexion affine

Dans l'équation des géodésiques vue en A6.3, le facteur $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$ doit retenir notre attention.

En effet, ce facteur nous renseigne sur le passage du référentiel minkowskien associé aux coordonnées cartésiennes y^α au référentiel riemannien associé aux coordonnées curvilignes x^μ , x^ν et x^i dont nous avons parlé en A6.2 .

Aussi le facteur :

$$\Gamma_{\mu}^i{}_{\nu} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$$

est appelé connexion affine, dite aussi connexion de Levi-Civita, et les coefficients correspondants à cette connexion portent le nom de symboles de Christoffel de deuxième espèce.

Afin de pouvoir calculer de manière pratique les symboles de Christoffel de deuxième espèce, exprimons ces symboles en fonction des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique \mathbf{g} .

- Soit $g_{\sigma i} \Gamma_{\mu}^i{}_{\nu} = \Gamma_{\mu \sigma \nu}$ appelé symboles de Christoffel de 1^{ère} espèce.
- Soit $g_{\sigma i} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}$ comme nous l'avons vu en A6.2 ,

nous pouvons écrire :

$$\Gamma_{\mu \sigma \nu} = \left(\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) = \Gamma_{\nu \sigma \mu}.$$

Dans le 2^{ème} facteur de $\Gamma_{\mu}^i{}_{\nu}$ l'indice α étant répété, on peut le changer par γ ; on obtient alors : d'où :

$$\Gamma_{\mu \sigma \nu} = \left(\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\gamma}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right).$$

Or :

$$\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = \delta_\gamma^\beta$$

car :

$$\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = 0 \text{ si } \beta \neq \gamma \text{ et } \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = 1 \text{ si } \beta = \gamma.$$

D'où :

$$\Gamma_{\mu \sigma \nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) \quad (6).$$

Sachant que :

$$\mathbf{g}_{\sigma\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu},$$

nous avons :

$$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \right) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right).$$

En injectons (6) dans ce qui précède, nous obtenons :

$$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \right) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu}.$$

Sachant que $\eta_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = \eta_{\beta\alpha}$, on peut écrire :

$$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\beta\alpha} \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \right) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} \quad (7).$$

D'après (6), les indices de (7) donnent:

$$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\sigma\nu\mu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} \quad (\text{A}).$$

En changeant les indices (μ en σ , σ en ν , ν en μ), on a :

$$\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} = \Gamma_{\nu\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\nu\sigma} \quad (\text{B}).$$

En changeant les indices (μ en ν , σ en μ , ν en σ), on a :

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu\nu} \quad (\text{C}).$$

Nous pouvons écrire :

$$\text{A} - \text{B} + \text{C} = \Gamma_{\sigma\nu\mu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu\nu}.$$

Sachant que :

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \Gamma_{\sigma\nu\mu} ; \quad \Gamma_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu\sigma} ; \quad \Gamma_{\nu\sigma\mu} = \Gamma_{\mu\sigma\nu}$$

alors :

$$\text{A} - \text{B} + \text{C} = 2 \Gamma_{\mu\sigma\nu},$$

d'où :

$$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = 2 \Gamma_{\mu\sigma\nu}$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right).$$

Sachant que $\mathbf{g}^{i\sigma} \Gamma_{\mu\sigma\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^i$,

on a :

$$g^{i\sigma} \Gamma_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right),$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{\mu}^i{}_{\nu} = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)$$

qui est l'expression nécessaire au calcul des symboles de Christoffel de deuxième espèce.

A_{6.5} Différentielle absolue et dérivée covariante

Afin d'obtenir les opérateurs de différentiation qui possèdent les mêmes propriétés que les différentielles partielles dans l'espace de Minkowski, il faut établir au point M une connexion entre la variation des coordonnées curvilignes x^μ associées à l'espace-temps associé à la géométrie riemannienne ou pseudo-riemannienne et la variation des coordonnées cartésiennes associées à l'espace-temps de la relativité restreinte (géométrie euclidienne).

En d'autres termes, il faut décrire comment sont raccordés les petits morceaux d'espaces de Minkowski concrétisés par des plans tangents infiniment voisins.

On définit donc la différentielle absolue D appliquée au vecteur $\mathbf{V} = v^i \mathbf{e}_i$ telle que

$$Dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} dx^\mu + v^\nu \Gamma_{\mu}^i{}_{\nu} dx^\mu,$$

et cette *différentielle absolue* est associée à la *dérivée covariante* :

$$\frac{Dv^i}{dx^\mu} = \frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} + v^\nu \Gamma_{\mu}^i{}_{\nu}.$$

Le facteur $\Gamma_{\mu}^i{}_{\nu}$ réalise la connexion entre la différentielle absolue du vecteur \mathbf{V} (associée aux coordonnées curvilignes et à leur changement de base dans la variété différentielle : géométrie riemannienne) et la différentielle classique $dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} dx^\mu$ (associée à la base constante au point M : géométrie euclidienne).

Ce facteur $\Gamma_{\mu}^i{}_{\nu}$ est la connexion de Levi-Civita que nous avons exprimé en A_{6.4} et dont les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont fonction du tenseur métrique et de ses dérivées partielles.

Nous montrerons en Annexe 7 que la courbure de l'espace-temps est définie mathématiquement comme une fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées (tenseur de courbure de Riemann-Christoffel), via les symboles de Christoffel de deuxième espèce.

En effet, en géométrie différentielle, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel est la façon la plus courante pour caractériser la courbure des variétés pseudo-riemanniennes, c'est-à-dire des variétés disposant de connexions affines (les symboles de christoffel).

Annexe 7

Transport parallèle et courbure de l'espace-temps

(voir Chapitre 3, Sous-section 3.2.2.b : Analyse des travaux de Pierre Cartier - Cécile DeWitt-Morette en Section IV, Paragraphe 3 de leur publication)

A7.1 Déplacement le long d'un triangle sphérique

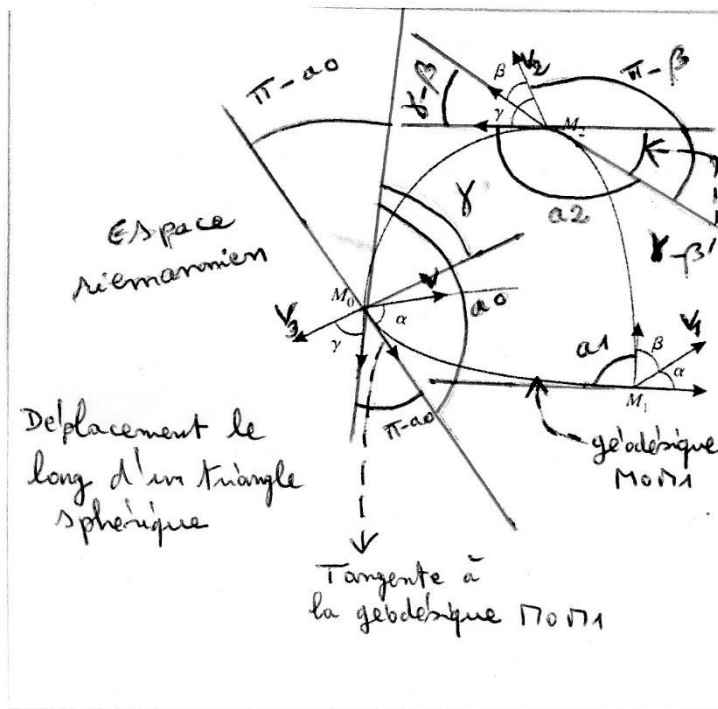
A7.2 Déplacement le long d'un triangle plan

A7.3 Quantités Ω^j_v définissant une rotation faisant passer d'une base à l'autre suite au déplacement associé à un cycle: méthode d'Elie Cartan

A7.4 Les quantités Ω^j_v sont les composantes d'un tenseur : démonstration

A7.5 Tenseur de courbure (Riemann-Christoffel) issu du tenseur de rotation d'Elie Cartan

A7.1 Déplacement le long d'un triangle sphérique



La figure ci-avant représente un triangle sphérique $M_0 M_1 M_2$ formé par les intersections de trois géodésiques. Nous nommons a_0, a_1, a_2 , les valeurs des angles respectifs des tangentes aux

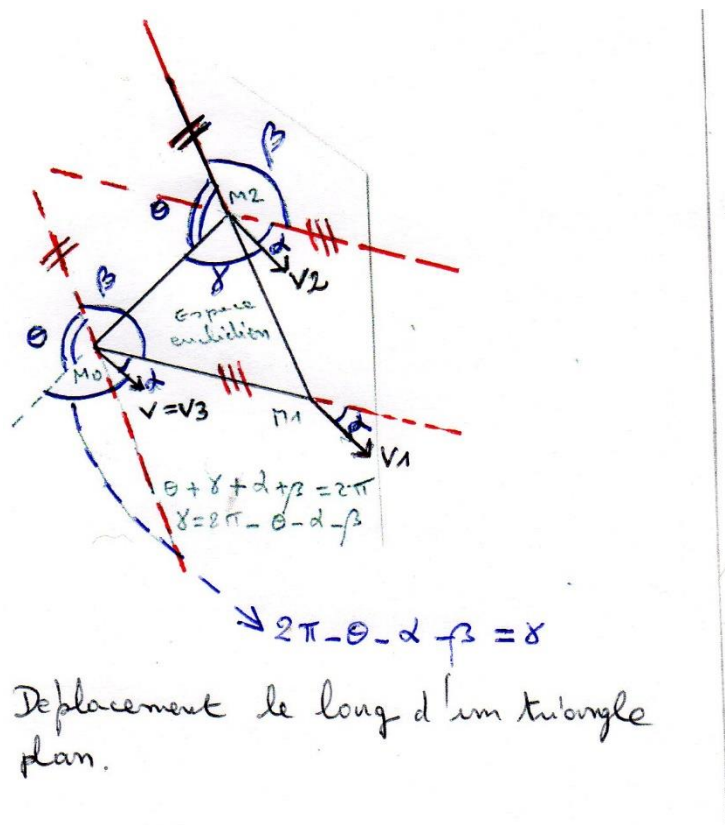
géodésiques aux points M_0, M_1, M_2 . Considérons un vecteur \mathbf{V} qui fait au point M_0 un angle α avec la tangente en ce point à la géodésique allant de M_0 à M_1 .

Effectuons un transport parallèle de \mathbf{V} le long de $M_0 M_1$ (\mathbf{V} forme le même angle α avec la tangente tout au long de son parcours sur la géodésique $M_0 M_1$). Appelons \mathbf{V}_1 le vecteur \mathbf{V} lorsqu'il est transporté parallèlement de M_1 à M_2 . Les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{V}_1 équipollents, c'est-à-dire qu'ils ont même module. En M_1 , \mathbf{V}_1 fait avec la tangente à la géodésique $M_1 M_2$ un angle $\beta = (\pi - \alpha_1 - \alpha)$.

En transportant parallèlement \mathbf{V}_1 le long de la géodésique $M_1 M_2$, on obtient le vecteur \mathbf{V}_2 équipollant à \mathbf{V}_1 en M_2 . En M_2 , \mathbf{V}_2 fait avec la tangente à la géodésique $M_2 M_0$ un angle γ . Ensuite, en effectuant un transport parallèle de \mathbf{V}_2 le long de la géodésique $M_2 M_0$, on obtient \mathbf{V}_3 en M_0 .

Ainsi, après ce transport parallèle selon le circuit fermé $M_0 M_1 M_2 M_0$, le vecteur initial \mathbf{V} a tourné d'un angle $\Omega = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \pi)$.

A7.2 Déplacement le long d'un triangle plan



La figure ci-avant représente un triangle plan $M_0 M_1 M_2$ formé par les intersections de trois géodésiques qui sont des droites dans l'espace euclidien. Considérons un vecteur \mathbf{V} qui fait au point M_0 un angle α avec le segment de droite $M_0 M_1$. Après un transport parallèle selon le circuit fermé $M_0 M_1 M_2 M_0$, le vecteur \mathbf{V}_3 vient se confondre avec la vecteur initial \mathbf{V} montrant que dans ce cas, l'angle de rotation Ω est nul.

A7.3 Quantités Ω^j , définissant une rotation faisant passer d'une base à l'autre suite au déplacement associé à un cycle: méthode d'Elie Cartan

Le calcul du déplacement associé à un cycle élémentaire nous permet d'exprimer la rotation subie par un vecteur après un transport par équipollence le long d'un cycle.

Nous allons suivre la méthode imaginée par Elie Cartan (1869-1951)¹, brillant mathématicien français, issue de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, dont les principaux travaux portent sur les applications géométriques des groupes de Lie, l'affinage de certains outils mathématiques de la relativité générale et la théorie des spineurs.

Natif de Dolomieu dans l'Isère, fils d'un maréchal-ferrant, le jeune Elie est remarqué très tôt par l'instituteur de son école communale et, dès l'âge de 10 ans, il obtient une bourse complète au concours des bourses des lycées.

Il est le père du mathématicien Henri Cartan, du physicien et résistant Louis Cartan mort en déportation, et de la mathématicienne Hélène Cartan. Sa plus jeune sœur, Anna Cartan, a été élève de Marie Curie à l'ENS de Sèvres, puis a enseigné en Lycée après avoir obtenu l'agrégation de mathématique.²

Dans le livre d'Elie Cartan, nous trouvons très peu de figures géométriques. En effet, que peut signifier pour des espaces à n dimensions une approche mentale analogue à celle que nous percevons dans notre espace euclidien et familier à trois dimensions ?

Il en est d'ailleurs de même pour ce qui relève de l'espace-temps dans lequel se trouvent les quadrivecteurs à 4 dimensions (trois d'espace et une de temps).

En fait, en ayant assimilé les tenants et les aboutissants de ce que représentent les transformations de Lorentz, le principe d'équivalence et des invariants, la relativité du temps, le calcul tensoriel, la géométrie de Riemann, etc..., les postulats et les règles logiques de la mathématique, nous amènent tout naturellement aux déductions qui nous font admettre les équations abstraites traitées par Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette. Et la confirmation de la théorie aux observations nous rassurera toujours un peu plus sur la véritable réalité des choses.

Considérons donc, comme le fait Elie Cartan, deux systèmes distincts de différentiation désignés respectivement par les symboles d et δ , associés à un cycle infiniment petit.

Soit un point M de coordonnées curvilignes x^i appartenant à un espace de Riemann. A partir des coordonnées curvilignes x^i , considérons des variations dx^i associées au vecteur \mathbf{MM}_1 tel que le point M_1 soit infiniment proche du point M . Les coordonnées du point M_1 s'écrivent donc $x^i + dx^i$.

Puis, à partir des coordonnées curvilignes $x^i + dx^i$, considérons des variations δx^i associées au vecteur $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ tel que le point M_3 soit infiniment proche du point M_1 .

Les coordonnées du point M_3 s'écrivent :

$$x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i \quad (1).$$

Effectuons maintenant à partir des coordonnées curvilignes x^i , des variations δx^i associées au vecteur \mathbf{MM}_2 tel que le point M_2 soit infiniment proche du point M .

1. Elie Cartan. 1928. « *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* ». Gauthier-Villars. Pages 178 à 203.

2. Wikipedia. 1 septembre 2018. « *Elie Cartan* ».

Les coordonnées du point M_2 s'écrivent donc $x^i + \delta x^i$. Puis, à partir des coordonnées curvilignes $x^i + \delta x^i$, considérons des variations dx^i associées au vecteur $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ tel que le point M_4 soit infiniment proche du point M_2 .

Les coordonnées du point M_4 s'écrivent :

$$x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i) = x^i + \delta x^i + dx^i + d\delta x^i \quad (2).$$

Les points M_3 et M_4 coïncident si les équations (1) et (2) sont égales, c'est-à-dire si :

$$x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i = x^i + \delta x^i + dx^i + d\delta x^i \quad \text{soit} \quad \delta dx^i = d\delta x^i \quad (3),$$

c'est-à-dire si les deux différentiations sont interchangeables.

Dans ce cas, si $f(x^i)$ est une fonction deux fois continûment dérivables des variables x^i , on a :

→ premièrement :

$$\frac{\delta f}{\delta x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

c'est-à-dire :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x^i.$$

La relation sur les dérivées $(uv)' = vu' + uv'$ permet d'écrire :

$$\frac{d\delta f}{dx^j} = \delta x^j \frac{d}{dx^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d\delta x^j}{dx^j}$$

soit :

$$d\delta f = d \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \delta x^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} d\delta x^i$$

$$d\delta f = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^j \delta x^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} d\delta x^i$$

$$d\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^j dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} d\delta x^i \quad (4)$$

→ deuxièmement :

$$\frac{df}{dx^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

c'est-à-dire :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

La relation $(uv)' = vu' + uv'$ donne :

$$\frac{\delta df}{\delta x^j} = dx^j \frac{\delta}{\delta x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\delta dx^j}{\delta x^j}$$

soit :

$$\delta df = \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta dx^i$$

$$\delta df = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \delta x^j dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta dx^i$$

$$\delta df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta dx^i \quad (5) .$$

En injectant (3) dans (5), on obtient :

$$\delta df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^i} d\delta x^i \quad (6) .$$

Ainsi les expression (6) et (4) étant identiques, on peut écrire :

$$d\delta f = \delta df \quad (7) .$$

Aussi, si f est une fonction quelconque des coordonnées, on a $d\delta f = \delta df$. Elie Cartan considère donc dans sa démonstration que les deux différentiations sur le vecteur effectuant le déplacement associé à un cycle élémentaire sont interchangeable entre elles. Ceci à condition que la construction des deux systèmes distincts de différentiation désignés par les symboles d et δ , associé au cycle élémentaire MM_3 via M_1 et MM_4 via M_2 , soit telle que M_3 et M_4 coïncident.

Analysons de manière approfondie le passage des vecteurs de base du point M à M_3 en développant les deux trajets MM_1M_3 et MM_2M_3 (M_4 devenant M_3), tels que défini précédemment en début de cette annexe.

Plus simplement qu'Elie Cartan, nous allons travailler uniquement sur la variation des vecteurs de base le long du cycle.

Considérons donc un espace vectoriel E_n associé à un espace ponctuel ε_n de la géométrie ordinaire euclidienne.

Quand on développe sur l'espace euclidien le trajet MM_1 du cycle, en partant d'une position déterminée, les vecteurs de base du repère attaché au point M subissent des variations géométriques élémentaires données par $d\mathbf{e}_v = \omega^i_v \mathbf{e}_i$ (8), dont :

- l'indice libre v repère dans la dimension n de l'Espace Vectoriel E_n les différentielles $d\mathbf{e}_v$ associées aux variations des vecteurs de la base naturelle \mathbf{e}_i sur cette même base \mathbf{e}_i .
- l'indice répété i défini les composantes contravariantes des vecteurs $d\mathbf{e}_v$ sur la base naturelle \mathbf{e}_i .

En d'autres termes :

- $\mathbf{M} = y^m \mathbf{e}_m^0$: vecteur \mathbf{M} dans un repère cartésien \mathbf{e}_m^0 avec m de 1 à n .
 - $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{M} / \partial x^i = (\partial y^m / \partial x^i) \mathbf{e}_m^0$ (voir §B.1.2) avec x^i les coordonnées curvilignes pour i de 1 à n .
 - $d\mathbf{e}_i = (\partial \mathbf{e}_i / \partial x^\mu) dx^\mu$ avec x^μ les coordonnées curvilignes pour μ de 1 à n (les mêmes que x^i).
- $d\mathbf{e}_v = \omega^i_v \mathbf{e}_i = \sum_{v=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \omega^i_v \mathbf{e}_i \right)$ avec $\omega^i_v = \Gamma_{\mu v}^i dx^\mu$ qui se démontre très facilement.

Afin de ne pas mélanger les deux systèmes distincts de différentiation désignés respectivement par les symboles d et δ , nous écrivons :

$$d\mathbf{e}_v = \omega^i_v \mathbf{e}_i = (\omega^i_v)_d \mathbf{e}_i \quad (9) .$$

De même, le développement du trajet MM_2 du cycle donne :

$$\delta \mathbf{e}_v = \omega^i_v \mathbf{e}_i = (\omega^i_v)_\delta \mathbf{e}_i \quad (10).$$

Le développement du trajet MM_1M_3 tels que défini en début de ce §B.2.1.3, donne un point d'arrivée M_3 et une nouvelle base naturelle $(\mathbf{e}_v)_3$ telle que :

$$(\mathbf{e}_v)_3 = \mathbf{e}_v + d\mathbf{e}_v + \delta(\mathbf{e}_v + d\mathbf{e}_v).$$

De même, le développement du trajet MM_2M_3 donne un point d'arrivée M_3 et une nouvelle base naturelle $(\mathbf{e}'_v)_3$ telle que :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 = \mathbf{e}_v + \delta \mathbf{e}_v + d(\mathbf{e}_v + \delta \mathbf{e}_v).$$

Le passage de la base naturelle $(\mathbf{e}_v)_3$ à la base naturelle $(\mathbf{e}'_v)_3$ est donné par l'équation suivante :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 - (\mathbf{e}_v)_3 = d\delta \mathbf{e}_v - \delta d\mathbf{e}_v \quad (11).$$

En injectant dans le second membre de (11) les expressions connues pour $d\mathbf{e}_v$ et $\delta \mathbf{e}_v$ données respectivement par les équations (9) et (10), on obtient :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 - (\mathbf{e}_v)_3 = d[(\omega^i_v)_\delta \mathbf{e}_i] - \delta[(\omega^i_v)_d \mathbf{e}_i] \quad (12).$$

La relation $(uv)' = vu' + uv'$ permet d'écrire :

$$d[(\omega^i_v)_\delta \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_i d(\omega^i_v)_\delta + (\omega^i_v)_\delta d\mathbf{e}_i.$$

Dans le terme de droite, en remplaçant l'indice répété i par j , on a :

$$d[(\omega^i_v)_\delta \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_j d(\omega^j_v)_\delta + (\omega^i_v)_\delta d\mathbf{e}_i.$$

De même :

$$\delta[(\omega^i_v)_d \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_j \delta(\omega^j_v)_d + (\omega^i_v)_d \delta \mathbf{e}_i.$$

L'équation (12) s'écrit donc :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 - (\mathbf{e}_v)_3 = \mathbf{e}_j d(\omega^j_v)_\delta + (\omega^i_v)_\delta d\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \delta(\omega^j_v)_d - (\omega^i_v)_d \delta \mathbf{e}_i$$

soit :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 - (\mathbf{e}_v)_3 = [d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d] \mathbf{e}_j + (\omega^i_v)_\delta d\mathbf{e}_i - (\omega^i_v)_d \delta \mathbf{e}_i \quad (13).$$

Remplaçons l'indice répété i de l'équation (9) par j , on a donc: $d\mathbf{e}_v = (\omega^j_v)_d \mathbf{e}_j$, puis l'indice libre v par i , pour obtenir : $d\mathbf{e}_i = (\omega^j_i)_d \mathbf{e}_j$.

Effectuons de même pour l'équation (10), d'où :

$$\delta \mathbf{e}_i = (\omega^j_i)_\delta \mathbf{e}_j.$$

L'équation (13) s'écrit donc :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 - (\mathbf{e}_v)_3 = [d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d + (\omega^i_v)_\delta (\omega^j_i)_d - (\omega^i_v)_d (\omega^j_i)_\delta] \mathbf{e}_j,$$

c'est-à-dire :

$$(\mathbf{e}'_v)_3 - (\mathbf{e}_v)_3 = \Omega^j_v \mathbf{e}_j \quad (14)$$

c'est-à-dire :

$$d\delta \mathbf{e}_v - \delta d\mathbf{e}_v = \Omega^j_v \mathbf{e}_j$$

du fait de l'équation (11), avec:

$$\Omega^j_v = d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d + (\omega^i_v)_\delta (\omega^j_i)_d - (\omega^i_v)_d (\omega^j_i)_\delta \quad (15).$$

Le résultat de l'équation (15) confirme celui d'Elie Cartan que nous trouvons au §157 en bas de la page 181 de son livre.³

Les bases $(\mathbf{e}_v)_3$ et $(\mathbf{e}'_v)_3$ associées aux deux développements ont des orientations différentes mais des origines qui coïncident ($\delta dx^i = d\delta x^i$). Par suite, les quantités Ω^j_v définissent une rotation qui fait passer d'une base à l'autre.

A7.4 Les quantités Ω^j_v sont les composantes d'un tenseur : démonstration

On peut toujours considérer des vecteurs d'une base naturelle associée à des coordonnées curvilignes contravariantes, à savoir :

$$\mathbf{e}_v = (\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1.$$

→ Effectuons alors :

$$d\mathbf{e}_v = d[(\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1],$$

c'est-à-dire :

$$d\mathbf{e}_v = d(\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1 + (\partial x'^1 / \partial x^v) d\mathbf{e}'_1.$$

Puis faisons :

$$\delta d\mathbf{e}_v = \delta[d(\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1 + (\partial x'^1 / \partial x^v) d\mathbf{e}'_1]$$

pour obtenir :

$$\delta d\mathbf{e}_v = \delta d(\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1 + d(\partial x'^1 / \partial x^v) \delta \mathbf{e}'_1 + \delta(\partial x'^1 / \partial x^v) d\mathbf{e}'_1 + (\partial x'^1 / \partial x^v) \delta d\mathbf{e}'_1 \quad (16).$$

→ En effectuant aussi :

$$\delta \mathbf{e}_v = \delta[(\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1],$$

le raisonnement qui précède donne :

$$d\delta \mathbf{e}_v = d\delta(\partial x'^1 / \partial x^v) \mathbf{e}'_1 + \delta(\partial x'^1 / \partial x^v) d\mathbf{e}'_1 + d(\partial x'^1 / \partial x^v) \delta \mathbf{e}'_1 + (\partial x'^1 / \partial x^v) d\delta \mathbf{e}'_1 \quad (17).$$

→ En réalisant (16) – (17), nous obtenons :

$$d\delta \mathbf{e}_v - \delta d\mathbf{e}_v = (\partial x'^1 / \partial x^v) (d\delta \mathbf{e}'_1 - \delta d\mathbf{e}'_1) \quad (18).$$

→ Les équations (11) et (14) permettent d'écrire :

$$d\delta \mathbf{e}'_1 - \delta d\mathbf{e}'_1 = \Omega^{k_1} \mathbf{e}'_k \quad (19).$$

Ainsi les quantités $(d\delta \mathbf{e}'_1 - \delta d\mathbf{e}'_1)$ se trouvent être les déplacements géométriques des nouveaux vecteurs de la base naturelle \mathbf{e}'_1 .

→ Les expressions (11),(14),(18) donnent :

3. Elie Cartan. 1928. « *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* ». Gauthier-Villars. Pages 178 à 203.

$$d\delta e_v - \delta d e_v = \Omega_v^j e_j = (\partial x^j / \partial x^v) (d\delta e_1 - \delta d e_1) \quad (20).$$

En injectant (19) dans (20), on a :

$$\Omega_v^j e_j = (\partial x^j / \partial x^v) \Omega^{k_1} e_{k_1} \quad (21).$$

Or nous savons que :

$$e_{k_1} = (\partial x^j / \partial x^{k_1}) e_j ,$$

ainsi l'équation (21) devient :

$$\Omega_v^j e_j = (\partial x^j / \partial x^v) \Omega^{k_1} (\partial x^j / \partial x^{k_1}) e_j \quad (22).$$

On obtient donc :

$$\Omega_v^j = (\partial x^j / \partial x^{k_1}) (\partial x^j / \partial x^v) \Omega^{k_1} \quad (23).$$

En conclusion, les quantités Ω_v^j respectant les critères classiques de tensorialité, nous pouvons affirmer que ces quantités sont les composantes mixtes d'un tenseur du second ordre.

A7.5 Tenseur de courbure (Riemann-Christoffel) issu du tenseur de rotation d'Elie Cartan

Evaluons les composantes mixtes Ω_v^j du tenseur de rotation infinitésimal.

Soit l'équation (15) :

$$\Omega_v^j = d(\omega_v^j)_\delta - \delta(\omega_v^j)_d + (\omega_v^i)_\delta (\omega_i^j)_d - (\omega_v^i)_d (\omega_i^j)_\delta .$$

Travaillons sur chacun des termes du membre de droite de l'équation (15) :

→ Nous avons vu en A7.3 :

$$(\omega_v^j)_\delta = \Gamma_{s^j}^j \delta x^s ,$$

soit :

$$d(\omega_v^j)_\delta = d(\Gamma_{s^j}^j \delta x^s) .$$

Nous pouvons écrire :

$$d(\Gamma_{s^j}^j \delta x^s) = (d\Gamma_{s^j}^j) \delta x^s + \Gamma_{s^j}^j d\delta x^s ,$$

car :

$$(uv)' = vu' + uv' .$$

Nous pouvons donc écrire :

$$d(\omega_v^j)_\delta = [(\partial \Gamma_{s^j}^j / \partial x^r) dx^r] \delta x^s + \Gamma_{s^j}^j d\delta x^s .$$

→ De même, $(\omega_v^j)_d = \Gamma_{r^j}^j dx^r$ donne :

$$\delta(\omega_v^j)_d = [(\partial \Gamma_{r^j}^j / \partial x^s) \delta x^s] dx^r + \Gamma_{r^j}^j \delta dx^r ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d = [(\partial\Gamma_{s'v}^j/\partial x^r)dx^r] \delta x^s + \Gamma_{s'v}^j d\delta x^s - [(\partial\Gamma_{r'v}^j/\partial x^s)\delta x^s] dx^r + \Gamma_{r'v}^j \delta dx^r .$$

L'indice répété r du dernier terme de droite pouvant être remplacé par s, alors le fait d'obtenir $\delta dx^s = d\delta x^s$ donne :

$$d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d = (\partial\Gamma_{s'v}^j/\partial x^r)dx^r \delta x^s - (\partial\Gamma_{r'v}^j/\partial x^s)\delta x^s dx^r \quad (24).$$

→ Sachant que les deux derniers termes de droite de (15) peuvent s'écrire :

$$(\omega^i_v)_\delta (\omega^j_d)_i = \Gamma_{s'v}^i \delta x^s \Gamma_{r'i}^j dx^r \quad \text{et} \quad (\omega^i_v)_d (\omega^j_d)_i = \Gamma_{r'v}^i dx^r \Gamma_{s'i}^j \delta x^s ,$$

on obtient :

$$(\omega^i_v)_\delta (\omega^j_d)_i - (\omega^i_v)_d (\omega^j_d)_i = \Gamma_{s'v}^i \delta x^s \Gamma_{r'i}^j dx^r - \Gamma_{r'v}^i dx^r \Gamma_{s'i}^j \delta x^s$$

c'est-à-dire :

$$(\omega^i_v)_\delta (\omega^j_d)_i - (\omega^i_v)_d (\omega^j_d)_i = (\Gamma_{s'v}^i \Gamma_{r'i}^j - \Gamma_{r'v}^i \Gamma_{s'i}^j) dx^r \delta x^s \quad (25).$$

L'équation (15) peut donc s'écrire :

$$\Omega^j_v = (24) + (25) ,$$

c'est-à-dire :

$$\Omega^j_v = (\partial\Gamma_{s'v}^j/\partial x^r) - \partial\Gamma_{r'v}^j/\partial x^s + \Gamma_{s'v}^i \Gamma_{r'i}^j - \Gamma_{r'v}^i \Gamma_{s'i}^j) dx^r \delta x^s \quad (26).$$

Sachant que :

$$\Gamma_{s'v}^j = \Gamma_{v's}^j ; \quad \Gamma_{r'v}^j = \Gamma_{v'r}^j ; \quad \Gamma_{s'v}^i = \Gamma_{v's}^i ; \quad \Gamma_{r'v}^i = \Gamma_{v'r}^i ;$$

l'équation (26) devient :

$$\Omega^j_v = (\partial\Gamma_{v's}^j/\partial x^r) - \partial\Gamma_{v'r}^j/\partial x^s + \Gamma_{v's}^i \Gamma_{r'i}^j - \Gamma_{v'r}^i \Gamma_{s'i}^j) dx^r \delta x^s .$$

→ Le tenseur de Riemann-Christoffel apparaît dans la relation précédente comme suit :

$$R_{v^j r s} = \frac{\partial\Gamma_{v's}^j}{\partial x^r} - \frac{\partial\Gamma_{v'r}^j}{\partial x^s} + \Gamma_{v's}^i \Gamma_{r'i}^j - \Gamma_{v'r}^i \Gamma_{s'i}^j \quad (27)$$

et correspond à l'expression trouvée par Elie Cartan.⁴

→ D'où l'expression du tenseur de rotation infinitésimal :

$$\Omega^j_v = R_{v^j r s} dx^r \delta x^s .$$

→ Montrons que les quantités $R_{v^j r s}$ sont les composantes d'un tenseur ; Appliquons pour cela le critère général de tensorialité :

« les quantités dx^r et δx^s étant les composantes contravariantes de deux vecteurs arbitraires, leur contraction avec $R_{v^j r s}$ donnent le tenseur mixte Ω^j_v , alors \mathbf{R} de composantes $R_{v^j r s}$ est aussi un tenseur ».

4. Ibid. Page 184.

Annexe 8

Théorie des perturbations : cas général sur deux exemples simples (A_{8.2} et A_{8.3})

(Voir Chapitre 6, Section 6.3.4 : L'analyse qualitative de la polarisation du vide associée à la diffusion d'un électron incident par un photon : le problème de la renormalisation

(Voir Chapitre 4, Sous-Section 4.3.1.e : L'algèbre de Hopf)

A_{8.1}) Le contexte : La solution statique de l'équation tensorielle de la relativité générale dans le vide pour un champ à symétrie sphérique : métrique de Schwarzschild

A_{8.2}) Premier exemple de théorie des perturbations : La déviation des rayons lumineux : une solution statique dans le vide pour un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil

A_{8.3}) Deuxième exemple de théorie des perturbations : L'avance du périhélie de Mercure : une autre solution statique dans le vide pour un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil

Pour effectuer cette étude nous avons consulté la publication suivante :

* Relativité générale (Hobson, Efstathiou, Laseby : 2010).

Les deux exemples simples montrant le bien-fondé de la théorie des perturbations permettant la résolution d'équations différentielles assez complexes sont traités en sections A_{8.2} et A_{8.3}. Afin d'introduire ces deux sections A_{8.2} et A_{8.3}, nous abordons en section A_{8.1} la construction de la métrique de Schwarzschild.

A8.1) Le contexte : La solution statique de l'équation tensorielle de la relativité générale dans le vide pour un champ à symétrie sphérique : métrique de Schwarzschild

C'est l'astronome allemand Schwarzschild qui, en pleine guerre, un mois après la publication d'Einstein en 1915, trouva la première solution exacte de l'équation d'Einstein pour un champ de gravitation central symétrique. Il devait trouver la mort en 1916, en première ligne.

Ce champ est engendré par une distribution de matière à symétrie centrale. Il s'agit de l'expression du champ de gravitation de n'importe quelle étoile comme le soleil, ou de n'importe quelle planète comme la terre.

La première idée qui vient à l'esprit quand on parle de champ à symétrie sphérique est de considérer un repère orthonormé $0, X^1, X^2, X^3$ dont le point 0 est le centre d'une sphère de rayon R dans un espace à 3 dimensions. Les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques (curvilignes) sont :

$$\begin{cases} X^1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ X^2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ X^3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire :

$$dl^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2$$

qui peut aussi s'exprimer selon les coordonnées curvilignes :

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

L'intervalle d'espace-temps le plus simple s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Ainsi, la métrique la plus générale, statique et isotrope est la suivante :

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

c'est-à-dire :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

avec :

$$0 \leq \mu, \nu \leq 3$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu$$

$g_{\mu\nu} \notin f(t)$ car la métrique se veut statique

$$dx^0 = dt \Rightarrow (dx^0)^2 = dt^2$$

$$dx^1 = dr \Rightarrow (dx^1)^2 = dr^2$$

$$dx^2 = d\theta \Rightarrow (dx^2)^2 = d\theta^2$$

$$dx^3 = d\varphi \Rightarrow (dx^3)^2 = d\varphi^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dx^0 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1 + g_{02} dx^0 dx^2 + g_{03} dx^0 dx^3 \\ &+ g_{10} dx^1 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{13} dx^1 dx^3 \\ &+ g_{20} dx^2 dx^0 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{23} dx^2 dx^3 \\ &+ g_{30} dx^3 dx^0 + g_{31} dx^3 dx^1 + g_{32} dx^3 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 \end{aligned}$$

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2$$

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

On vérifie que ds^2 est directement invariant sous l'échange $t \rightarrow -t$ ce qui implique qu'il s'agit là de la forme recherchée qui décrit la métrique d'un espace-temps statique.

La métrique est spatialement isotrope car ds^2 est invariant sous l'échange : $\theta \rightarrow -\theta$; $\varphi \rightarrow -\varphi$; $r \rightarrow -r$; $dr \rightarrow -dr$

La solution statique de l'équation tensorielle de la relativité générale dans le vide pour un champ à symétrie sphérique passe par le calcul des connexions affines (les symboles de Christoffel de deuxième espèce). Cette solution fait intervenir la métrique statique et isotrope la plus générale que nous venons d'obtenir.

Ainsi, à partir des $g_{\mu\nu}$ suivants :

$$g_{00} = A(r)$$

$$g_{11} = -B(r)$$

$$g_{22} = -r^2$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta ,$$

nous calculons les symboles de Christoffel de deuxième espèce qui sont les connexions affines associées à la métrique statique et isotrope la plus générale que nous venons de définir.

Ces symboles sont fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leur dérivée première.

Pour aboutir aux composantes du tenseur de Ricci, nous injectons les coefficients de la connexion affine dans l'expression $R_{\mu\nu}$. Ainsi, le tenseur $R_{\mu\nu}$ se présente sous la forme d'une matrice diagonale de composantes :

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{B} + 1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

dans lesquelles :

$$A'' = \frac{d^2 A}{dr^2} \text{ et } A' = \frac{dA}{dr}.$$

Les équations du champ dans le vide s'obtiennent en posant que chacune des expressions précédentes est égale à zéro, c'est-à-dire en effectuant $R_{\mu\nu} = 0$.

Sachant qu'en coordonnées sphériques et de surcroît en symétrie sphérique l'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \frac{\rho_m}{c^2} ,$$

on obtient le potentiel gravitationnel newtonien suivant :

$$\Phi = -\frac{GM}{r}.$$

En considérant la limite des champs faibles et en identifiant les fonctions $A(r), B(r)$ avec le résultat donné par l'équation $R_{\mu\nu} = 0$, tout calcul fait, la métrique générale statique et isotrope devient :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Il s'agit de la métrique de Schwarzschild qui décrit la déformation de l'espace-temps, à l'extérieur d'un corps sphérique de masse M c'est-à-dire dans le vide, et dont le force de gravitation n'est qu'une apparence due à cette courbure inhérente aux espaces riemanniens. C'est ce phénomène d'apparence qui fait que la théorie de la relativité générale basée sur la notion de courbure d'espace-temps est une nouvelle théorie de la gravitation dont celle de Newton peut être considérée comme une première approximation.

Les coefficients du tenseur fondamental associé à cette métrique sont :

$$g_{00} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

$$g_{11} = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

$$g_{22} = - r^2$$

$$g_{33} = - r^2 \sin^2 \theta .$$

On voit que cette métrique présente une singularité première pour $r = 0$, car le coefficient g_{00} devient infini, par contre, le coefficient g_{11} s'annule.

Une seconde singularité est celle pour laquelle la coordonnée r devient :

$$r = r_s = \frac{2GM}{c^2},$$

car dans ce cas g_{00} s'annule et g_{11} devient infini.

La quantité r_s est appelée le rayon de Schwarzschild.

On peut dès lors définir une région singulière pour $0 < r < r_s$.

Une troisième particularité est celle pour laquelle une étoile à neutron de masse M est comprimée au point de tenir dans le rayon r_s : rien ne peut plus arrêter son effondrement et le champ de gravitation au voisinage est tel que la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière. Aucun rayonnement ne peut plus s'échapper et nous avons alors affaire à un trou noir stellaire.

Lorsque $r = r_s$, et pour ce concernant plus spécialement la composante temporelle g_{00} du tenseur fondamental, le fait que le temps ne puisse plus s'exprimer signifie qu'il est bloqué, c'est-à-dire qu'il ne s'écoule plus.

En d'autres termes, pour un observateur lointain situé à l'extérieur du trou noir, toute particule prend un temps infini pour parvenir à l'horizon $r = r_s$ du trou noir puisque le temps s'écoule de moins en moins jusqu'à se bloquer lorsque $r = r_s$.

La métrique de Schwarzschild va nous servir à calculer la déviation des rayons lumineux dans le champ gravitationnel du soleil et le périhélie de Mercure respectivement en sections A_{8.2} et A_{8.3} afin de comprendre le rôle de la théorie des perturbations.

A_{8.2}) Premier exemple de théorie des perturbations : La déviation des rayons lumineux : une solution statique dans le vide pour un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil

Nous allons calculer les équations des géodésiques de l'espace-temps de Schwarzschild en considérant la trajectoire suivie par un photon, qui n'est autre qu'une géodésique du genre lumière.

L'espace-temps de Schwarzschild trouvée en section A_{8.2} et pour lequel :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2},$$

est le suivant :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Cette métrique a été trouvée par Karl Schwarzschild (1873 – 1916) un mois après la publication des équations tensorielles d'Einstein et elle se trouve être la solution statique

décrivant la courbure de l'espace-temps s'apparentant à un champ gravitationnel situé en dehors de la masse à symétrie sphérique qui l'aurait engendré.

Pour aboutir aux équations des géodésiques, nous allons employer la procédure « Lagrangienne ».

Rappelons une fois de plus que les lois de la nature doivent être conservées quel que soit l'observateur c'est-à-dire quelles que soient les coordonnées spatio-temporelles considérées (l'espace et le temps sont indissociables). Ainsi le Lagrangien envisagé doit être une quantité invariante.

Nous savons que :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

Considérons une courbe S repérée par un paramètre p . Sachant qu'un vecteur est l'invariant le plus simple à imaginer, nous pouvons définir le long de cette courbe un vecteur \vec{T} tel que $\vec{T} = \frac{d\vec{s}}{dp}$.

L'invariance du produit scalaire $\vec{T} \cdot \vec{T} = \|\vec{T}\| \|\vec{T}\| \cos 0 = \frac{ds}{dp} \frac{ds}{dp}$ nous permet de construire la fonction de Lagrange (encore appelée « Lagrangien ») telle que :

$$L = f(q_i, \dot{q}_i) = L(q_i, \dot{q}_i) ,$$

c'est-à-dire :

$$L = \left(\frac{ds}{dp} \right)^2 = \frac{ds^2}{dp^2} = g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu .$$

Ainsi, à l'aide de l'équation de l'espace-temps de Schwarzschild, nous obtenons le Lagrangien L suivant :

$$L = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2$$

$$L = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2.$$

Les géodésiques constituent pour les espaces de Riemann associés à l'espace-temps de Schwarzschild, la généralisation des droites de l'espace euclidien. Ainsi, de la même manière qu'un vecteur \vec{T} se déplaçant le long d'une droite reste parallèle à lui-même, nous dirons que pour tout vecteur \vec{T} transporté de manière parallèle à lui-même le long de la trajectoire courbe S paramétrée par la variable P, tel que $\vec{T} = \frac{ds}{dp}$, la trajectoire S est une géodésique. Notons que si P s'apparente à l'écoulement d'un temps, alors \vec{T} est une vitesse.

Puisque par définition les géodésiques constituent les minimales de la longueur des arcs de courbes joignant deux points déterminés, les équations des géodésiques s'obtiennent en injectant l'expression précédente de L dans les équations d'Euler-Lagrange.

Les équations d'Euler-Lagrange déduites du principe de moindre action s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}.$$

Comme nous l'avons écrit en section A_{8.1}, pour μ variant de 0 à 3 nous avons les 4 coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} x^0 &= t \\ x^1 &= r \\ x^2 &= \theta \\ x^3 &= \varphi. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc 4 équations des géodésiques en considérant respectivement les équations d'Euler-Lagrange pour $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ et $x^3 = \varphi$.

En raison de la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild, on peut se contenter des particules en mouvement dans le plan équatorial paramétré par $\theta = \frac{\pi}{2}$. Avec cette hypothèse,

l'ensemble des 4 équations des géodésiques se réduit à 3 équations puisque la coordonnée θ passe de l'état de variable à l'état de paramètre considéré comme une constante.

Avec cette hypothèse, l'ensemble des 3 équations se réduit à :

$$\text{- coordonnée } x^0 \rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = k$$

$$\text{- coordonnée } x^1 \rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_s c^2}{2r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{2r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\text{- coordonnée } x^3 \rightarrow r^2 \dot{\varphi} = H.$$

Ces équations sont valables pour des géodésiques paramétrées affinement, c'est-à-dire par des variables réelles, qu'elles soient du genre lumière ou pas.

Sachant que :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2$$

soit :

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$$

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2,$$

nous pouvons remplacer l'équation des géodésiques associée à la coordonnée x^1 par :

$$g_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + g_{11} \dot{x}^1 \dot{x}^1 + g_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 + g_{33} \dot{x}^3 \dot{x}^3 = c^2$$

$$c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (0) - r^2 (1^2) \dot{\varphi}^2 = c^2$$

$$c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = c^2.$$

La trajectoire d'un photon étant une géodésique du genre lumière pour laquelle le temps propre n'existe pas, on emploiera le paramètre affine p de la géodésique, et nous pouvons écrire :

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,$$

c'est-à-dire :

$$c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des 3 équations vues précédemment s'écrit :

- coordonnée $x^0 \rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = K$

- coordonnée $x^1 \rightarrow c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 0$

- coordonnée $x^3 \rightarrow r^2 \dot{\varphi} = H.$

L'ensemble de ces 3 équations sont les équations des géodésiques du genre lumière associées respectivement aux coordonnées spatiotemporelles indissociables $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^3 = \varphi$ (une coordonnée de temps et deux coordonnées curvilignes d'espace, sachant que la

coordonnée curviligne d'espace θ est paramétrée à $\frac{\pi}{2}$).

Ainsi, ces trois coordonnées traduisent la trajectoire d'un photon de lumière dans le plan équatorial de l'espace-temps de Schwarzschild.

En injectant la première et la troisième équation dans la seconde, nous obtenons :

$$\dot{r}^2 + \frac{H^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = c^2 K^2.$$

En effectuant ensuite le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ et en dérivant par rapport à φ , on trouve l'équation différentielle de la relativité générale suivante :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2.$$

Il s'agit de l'équation différentielle relativiste du mouvement associé à la trajectoire des rayons lumineux (photons) passant à proximité du soleil de masse M et de rayon R , considéré comme source d'un champ gravitationnel à symétrie sphérique.

En l'absence de champ, le membre de droite s'annule et l'on peut écrire la solution sous la forme :

$$u_0 = \frac{\sin \varphi}{R}.$$

→ Avec $u_0 = \frac{1}{r_0}$ et R une constante d'intégration posée à priori comme étant égale au rayon du Soleil.

→ Ainsi on peut écrire $r_0 = \frac{R}{\sin \varphi}$. De fait, pour R fixé, nous avons une relation bi-

univoque de l'ensembles des éléments que sont les coordonnées sphériques φ avec l'ensemble des éléments que sont les coordonnées sphériques r , autrement dit une bijection entre les coordonnées φ et les coordonnées r obéissant à la loi de composition interne $r_0 = \frac{R}{\sin \varphi}$.

La figure 1 à la fin de cette Annexe nous montre que la courbure constituant la trajectoire des rayons lumineux tangente le Soleil. En l'absence de celui-ci, cette trajectoire $r_0 = \frac{R}{\sin \varphi}$

est une droite (D) rectiligne et horizontale. En effet, aucune matière-énergie ne vient incurver la géodésique associée au mouvement des photons. La droite (D) peut donc être considérée comme la trajectoire des rayons lumineux issus d'une étoile lointaine dans l'espace-temps Minkowskien c'est-à-dire euclidien.

Nous allons appliquer **la théorie des perturbations** en considérant u_0 comme une solution à l'ordre 0 de l'équation différentielle relativiste du mouvement trouvée ci-avant.

Ainsi, la solution en relativité générale s'écrira :

$$u = u_0 + \Delta u$$

où Δu est considérée comme **une perturbation** vis-à-vis de u_0 , due à l'espace-temps de Schwarzschild associé à la présence de la matière-énergie « Soleil » et dont la force de gravitation n'est qu'une apparence due à la courbure de cet espace-temps à l'extérieur du corps sphérique de masse M que représente le Soleil.

L'espace riemannien ainsi considéré s'apparente à l'idée que l'on peut se faire d'un champ gravitationnel à symétrie sphérique baignant le pourtour d'un espace indissociable à l'écoulement d'un temps spécifique lié à ce dernier.

La présence de r dans la métrique de Schwarzschild montre bien que les éléments de la matrice constituant le tenseur fondamental, sont fonction de leur éloignement par rapport au centre du Soleil et que l'effet de gravitation, en accord avec Newton, est beaucoup plus important dans l'espace environnant du fait d'une courbure d'espace-temps plus accentuée.

En injectant l'expression précédente dans l'équation différentielle relativiste du mouvement associée à la trajectoire des rayons lumineux passant à proximité du Soleil, on obtient l'équation différentielle relativiste au premier ordre en Δu suivante :

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2 R^2} \sin^2 \varphi.$$

Une solution particulière est :

$$\Delta u = \frac{3GM}{2c^2 R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right).$$

Comme nous l'avons écrit précédemment, la solution u en relativité générale est égale à la solution u_0 à l'ordre 0 corrigée par la solution Δu de l'équation différentielle relativiste au premier ordre en Δu , c'est-à-dire :

$$u = u_0 + \Delta u.$$

Nous obtenons donc :

$$u = \frac{\sin \varphi}{R} + \frac{3GM}{2c^2 R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right).$$

Pour $u = \frac{1}{r} \approx 0 \Rightarrow r = \infty \Rightarrow \varphi \approx 0 \Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi \Rightarrow \cos 2\varphi \approx 1$,

l'expression précédente devient :

$$\frac{\varphi}{R} + \frac{3GM}{2c^2 R^2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\varphi = -\frac{2GM}{c^2 R}$$

$$|\varphi| = \frac{2GM}{c^2 R}$$

$$\Delta\varphi = 2|\varphi| = \frac{4GM}{c^2 R}$$

$$\Delta\varphi = \frac{4(6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(2 \times 10^{30} \text{ kg})}{(3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 (7 \times 10^8 \text{ m})}$$

$$\Delta\varphi = 1,75 \text{ secondes d'arc.}$$

Point de vue historique :

L'équation $\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R}$ est la célèbre formule qui donne la déviation de la lumière.

Einstein prédisait ainsi le double de la valeur obtenue par le passé avec une approche newtonienne. Comme nous l'avons calculé, pour un rayon lumineux frôlant le soleil, on a $\Delta\varphi = 1,75$ secondes d'arc.

Page 147 de son livre « Espace, temps et gravitation » de 1921 traduit en français par J. Rossignol, Eddington parle de ses mesures effectuées le 29 mai 1919 à Sobral (1,98 " \pm 0,12") et à l'île du Prince (1,61" \pm 0,30") à l'occasion d'une éclipse de Soleil.

Ces deux mesures sont en parfait accord avec la théorie de la relativité générale exprimée dans cette section. Il s'agissait pour Eddington d'effectuer les premières vérifications de la théorie d'Einstein.

Certains historiens des sciences ont prétendu que le physicien anglais avait « falsifié » les résultats de mesure afin de les rendre conformes avec la théorie. Pour ma part, supposer un tel acte de la part d'Eddington montre une méconnaissance totale de sa personnalité.

Des mesures de hautes précisions plus récentes utilisant des sources radio, que l'on peut observer à proximité du Soleil sans devoir attendre une éclipse, ont en effet montré que la relativité générale prédit le bon résultat avec une précision bien meilleure que un pour cent.

Page 137 de son livre, Eddington parle de lumière pesante, puisque la courbure induite par la masse solaire est la trajectoire suivie par les rayons lumineux sous l'effet du champ gravitationnel induit par le Soleil. Là encore, l'intuition d'Einstein sur le concept de dualité onde-particule concernant les photons, permit de réaliser les fondements de la mécanique quantique.

Rendons aussi hommage au grand Newton pour ses travaux sur la diffraction de la lumière blanche, qui introduit le concept de lumière pesante dans ses écrits.

A_{8.3}) Deuxième exemple de théorie des perturbations : L'avance du périhélie de Mercure : une autre solution statique dans le vide pour un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil

Rappelons que le périhélie d'une planète dans sa trajectoire autour du Soleil est le point où cette planète se trouve au plus près du Soleil.

L'observation montre que le périhélie d'une planète se déplace lentement au cours des siècles ; son orbite autour du Soleil n'est pas fixe mais tourne lentement dans son plan. Cette perturbation du mouvement elliptique de chaque planète a pour cause principale l'attraction des autres planètes du système solaire.

En calculant la valeur de l'avance du périhélie par la mécanique newtonienne classique, on constate une imprécision,. Et cette imprécision est d'autant plus grande pour Mercure qui se trouve être la planète la plus proche du Soleil, subissant donc une attraction gravitationnelle plus importante de la part de celui-ci.

Cette différence dans le calcul du périhélie de Mercure et l'observation, a été à l'origine des questionnements d'Einstein sur le bien-fondé de la thorie de la gravitation proposée par Newton.

Nous allons calculer les équations des géodésiques de l'espace-temps de Schwarzschild en considérant la trajectoire suivie par une particule massive qui n'est autre qu'une géodésique du genre temps.

En section A_{8.2} , nous avons vu que l'ensemble des équations des géodésiques des particules massives en mouvement du genre temps dans le plan équatorial paramétré par $\theta = \frac{\pi}{2}$ est :

- coordonnée $x^0 \rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = K$

- coordonnée $x^1 \rightarrow c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = c^2$

- coordonnée $x^3 \rightarrow r^2 \dot{\varphi} = H$.

En injectant la première et la troisième équation dans la seconde, nous obtenons :

$$\dot{r}^2 + \frac{H^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{2GM}{r} = c^2 (K^2 - 1).$$

En effectuant ensuite le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ et en dérivant par rapport à φ , on trouve l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{H^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2.$$

Il s'agit de l'équation différentielle du mouvement en relativité générale dite équation relativiste du mouvement. Elle traduit la trajectoire d'un objet massif, par exemple la terre, en orbite autour d'une étoile de masse M, par exemple le Soleil, considérée comme source d'un champ gravitationnel à symétrie sphérique.

D'autre part, dans la théorie newtonienne, l'équation différentielle non relativiste décrivant le mouvement orbital des planètes autour d'une étoile de masse M dans le plan de l'écliptique est :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{H^2}$$

Il s'agit de l'équation dite de Binet dans laquelle $u = \frac{1}{r}$.

La variable r mesure la distance entre la planète et le centre de l'étoile.

Cette équation différentielle non relativiste admet pour solution :

$$u_0 = \frac{GM}{H^2} (1 + e \cos \varphi)$$

soit :

$$r_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{H^2}{GM (1 + e \cos \varphi)}.$$

Elle décrit une ellipse dont l'excentricité est mesurée par le paramètre e . Il s'agit de l'équation définissant l'orbite d'une planète autour du Soleil situé sur le foyer droit de l'ellipse. La distance de moindre approche, le périhélie, s'écrit $r_{\min} = a(1 - e)$. Le facteur « a » étant le demi-

grand axe de l'ellipse. Le point le plus distant, l'aphélie, est donné par $r_{\max} = a(1+e)$ avec $r_{\min} + r_{\max} = 2a$.

On en déduit :

$$a = \frac{H^2}{GM(1-e^2)}.$$

Notons avec une profonde admiration la similitude des deux équations différentielles précédentes, l'une relativiste obtenue par métrique de Schwarzschild associée à la notion de distorsion d'espace-temps dans l'espace riemannien, l'autre newtonienne faisant appel à la loi universelle de la gravitation basée sur la notion de force gravitationnelle.

Une fois encore, nous allons utiliser **la théorie des perturbation** en considérant u_0 comme une solution à l'ordre 0 de l'équation différentielle relativiste du mouvement trouvée ci-avant.

Ainsi, la solution en relativité générale va s'écrire :

$$u = u_0 + \Delta u,$$

où Δu est considérée comme **une perturbation** vis-à-vis de u_0 , perturbation due à l'espace-temps de Schwarzschild.

En injectant l'expression précédente dans l'équation différentielle relativiste du mouvement traduisant la trajectoire d'une planète autour du soleil, on obtient l'équation différentielle relativiste au premier ordre en Δu suivante :

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{3G^3 M^3}{c^2 H^4} (1 + e^2 \cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi),$$

dont une solution particulière est :

$$\Delta u = \frac{3G^3 M^3}{c^2 H^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right) + e \varphi \sin \varphi \right].$$

Comme nous l'avons écrit précédemment, la solution u en relativité générale est égale à la solution u_0 à l'ordre 0 corrigée par la solution Δu de l'équation différentielle relativiste au premier ordre en Δu , c'est-à-dire :

$$u = u_0 + \Delta u.$$

Nous obtenons ainsi :

$$u = \frac{GM}{H^2} \left[1 + e (\cos \varphi + \alpha \varphi \sin \varphi) \right],$$

avec :

$$\alpha = \frac{3GM^2}{H^2 c^2}.$$

Le fait que $\alpha \ll 1$ permet d'écrire la relation précédente de la manière suivante :

$$u \approx \frac{GM}{H^2} \left[1 + e \cos(\varphi(1-\alpha)) \right].$$

Sachant que $u = \frac{1}{r}$, on obtient :

$$r = \frac{H^2}{GM(1+e \cos[\varphi(1-\alpha)])}.$$

Il s'agit de l'équation du mouvement relativiste traduisant la trajectoire orbitale elliptique d'une planète autour du Soleil.

Rappelons l'équation du mouvement en théorie newtonienne (voir plus haut) traduisant la trajectoire orbitale elliptique d'une planète autour du Soleil :

$$r = \frac{H^2}{GM(1+e \cos \varphi)},$$

dans laquelle $\varphi \in [0, 2\pi]$ signifie que r se répète selon une période 2π .

En comparant les deux équations $r = f(\varphi)$ précédentes, on obtient la correspondance suivante :

$$\varphi_{rg}(1-\alpha) \equiv \varphi_n \Rightarrow \varphi_{rg}(1-\alpha) \in [0, 2\pi]$$

avec $\varphi_{rg} = \varphi$ en relativité générale et $\varphi_n = \varphi$ en théorie de Newton.

D'où :

$$\varphi_{rg}(1-\alpha) = 2\pi_{\max},$$

soit :

$$\varphi_{rg} = \frac{2\pi}{(1-\alpha)},$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_{rg} > 2\pi.$$

Cette inéquation montre qu'en relativité générale, les valeurs prises par \mathcal{I} se répètent au cours de cycles plus long que 2π . L'orbite ne peut donc pas être fermée, ce qui a pour conséquence que l'ellipse précesse comme montré sur la figure 2 en fin de cette Annexe.

Ainsi, en une révolution, l'ellipse tourne autour de son foyer d'un angle :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{(1-\alpha)} - 2\pi = \frac{2\pi\alpha}{(1-\alpha)}.$$

Le fait que α soit infiniment petit, nous permet d'écrire :

$$\Delta\varphi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi G^2 M^2}{H^2 c^2}.$$

Or nous avons écrit plus haut

$$a = \frac{H^2}{GM(1-e^2)}.$$

D'où

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2}.$$

Cette équation exprime l'avance du périhélie de Mercure dû essentiellement à la déformation de l'espace-temps sous l'influence de la masse solaire M . Cette distorsion a l'apparence d'une force de gravitation créée par un champ à symétrie sphérique engendré par le Soleil.

Les paramètres associés à l'orbite elliptique de Mercure autour du Soleil étant :

- Période de révolution : 88 jours
- Demi grand axe de l'ellipse : $a = 5,8 \times 10^{10}$ m
- Excentricité : $e = 0,2$
- Masse du soleil : $M = 2 \times 10^{30}$ kg

On obtient

$$\Delta\varphi = \frac{6 \times 3,14 \times (6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) (2 \times 10^{30} \text{ kg})}{(5,8 \times 10^{10} \text{ m}) [1 - (0,2)^2] (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2}$$

$\Delta\varphi = 0,1035$ secondes d'arc pour 88 jours

$\Delta\varphi = 43$ secondes d'arc par siècle.

Point de vue historique :

L'avance du périhélie de Mercure constitue l'un des tests expérimentaux de la théorie de la relativité générale.

En 1859, Urbain Le Verrier avait décelé une anomalie dans le mouvement de Mercure autour du Soleil. Les calculs de l'avance de son périhélie effectués sur la base de la théorie de Newton, en tenant compte des perturbations apportées par les autres planètes du système solaire, ne concordaient pas avec ses observations.

Selon un compte-rendu à l'Académie des Sciences de 1861, Le Verrier calcula qu'il aurait fallu que la masse de Vénus fut dix pour cent plus grande qu'elle n'était censée l'être, pour réconcilier l'observation avec ses calculs sur le périhélie de Mercure.

Continuant à s'interroger, il compulsait un nombre impressionnant de documents issus des observations effectuées par d'autres astronomes dont celle du docteur Lescaubault. C'est ainsi qu'il fut mis en présence de taches rondes passant devant le soleil. Le Verrier en déduisit la présence d'une autre planète Vulcain, dont il prédisait, à tort, le passage devant le Soleil en 1877. Il s'avéra que cette planète n'a aucune existence.

Pendant plusieurs décennies, le problème d'une telle avance du périhélie de Mercure resta sans solution.

Certains supposèrent d'hypothétiques satellites de Mercure, qu'on ne trouva évidemment jamais. D'autres, dont Newcomb (1835 – 1909), préférèrent imaginer que la loi en $1/r^2$ de Newton était en défaut.

Pour sa part, Einstein avait commencé à réfléchir, dès la fin de l'année 1907, à une éventuelle explication de cette avance anormale sur la base du principe d'équivalence.

Ainsi, de fil en aiguille, il se mit à construire sa théorie de la relativité générale qui vit le jour en Novembre 1915.

Sa lettre à Paul Ehrenfest du 17 janvier 1916, concernant sa nouvelle théorie de la gravitation fondée sur la notion d'invariance relativement à toute transformation des coordonnées, c'est-à-dire sur la covariance générale, montre toute l'émotion qu'il ressentit lorsqu'il s'aperçut qu'il avait calculé, avec une précision plus que satisfaisante, la valeur observée du périhélie de Mercure : « ***Imaginez ma joie quand j'ai compris que la covariance générale était réalisable, en voyant le résultat, à savoir que les équations donnaient exactement le périhélie de Mercure. Pendant plusieurs jours, la joie et l'excitation m'ont fait sortir de mes gonds.*** »

Mais l'importance dans la théorie de relativité générale, comme l'écrit Einstein à Hilbert le 18 Novembre 1915, tient au fait qu'il arrive à établir le passage, à la limite des champs faibles, de sa théorie relativiste à la théorie newtonienne de la gravitation. Ce principe fut décisif en ce sens qu'il démontrait que, contrairement à ce que lui-même et Marcel Grossmann avaient pensé initialement, les équations tensorielles covariantes du champ de gravitation n'empêchent aucunement de retrouver la limite newtonienne de la théorie de la relativité générale.

En effet, la lettre d'Einstein à Hilbert mentionne l'écrit suivant :

« *La difficulté n'a pas été de trouver des équations généralement covariantes pour les $g_{\mu\nu}$; on y arrive facilement grâce au tenseur de Riemann. La difficulté a été de comprendre que ces équations sont une généralisation, et même une généralisation simple et naturelle de la loi de Newton. Je soumetts aujourd'hui à l'académie un article dans lequel je déduis quantitativement le périhélie de Mercure. Aucune théorie de la gravitation n'en avait été capable jusqu'à présent* ».

Figure 1 : Déviation des rayons lumineux

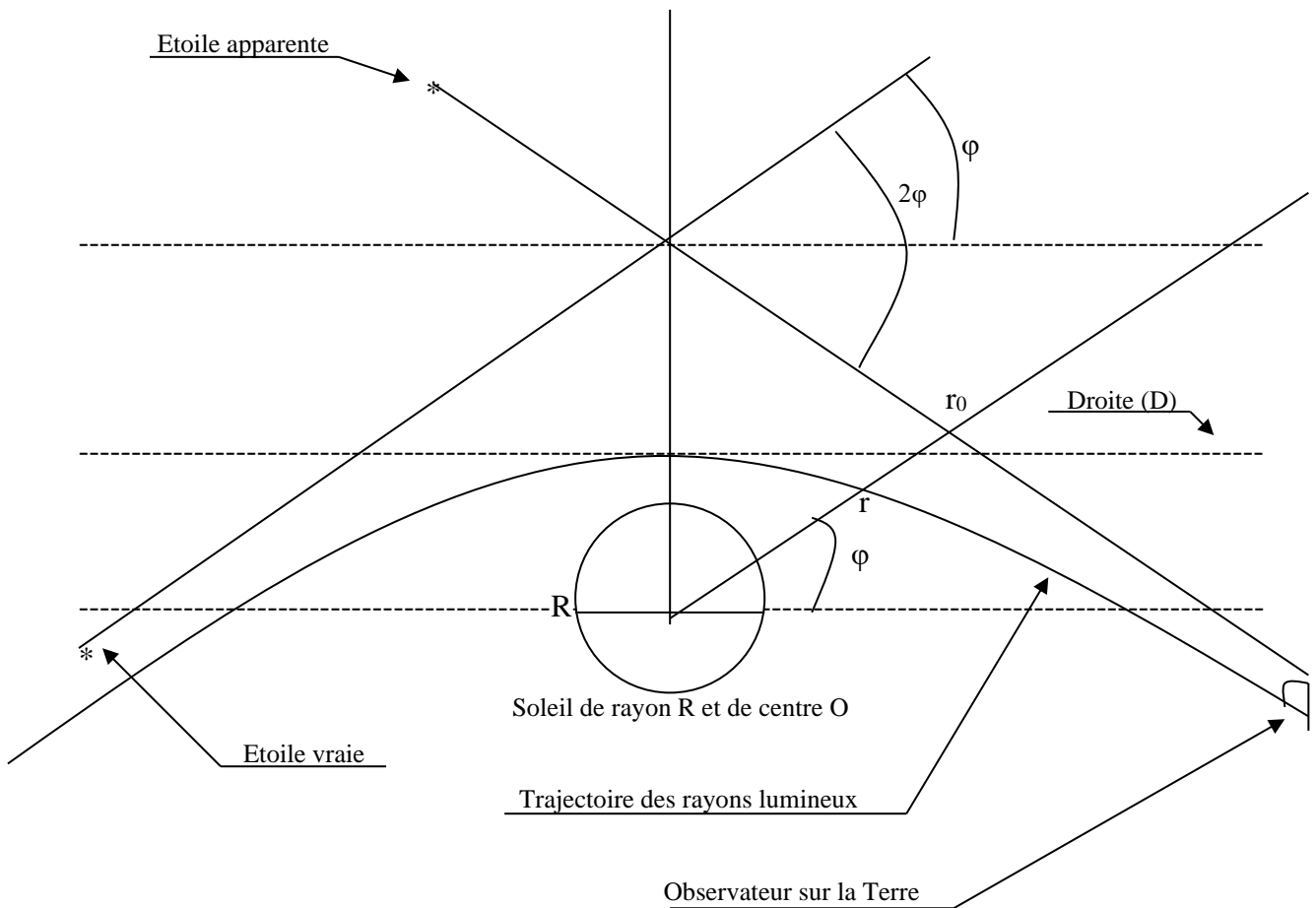
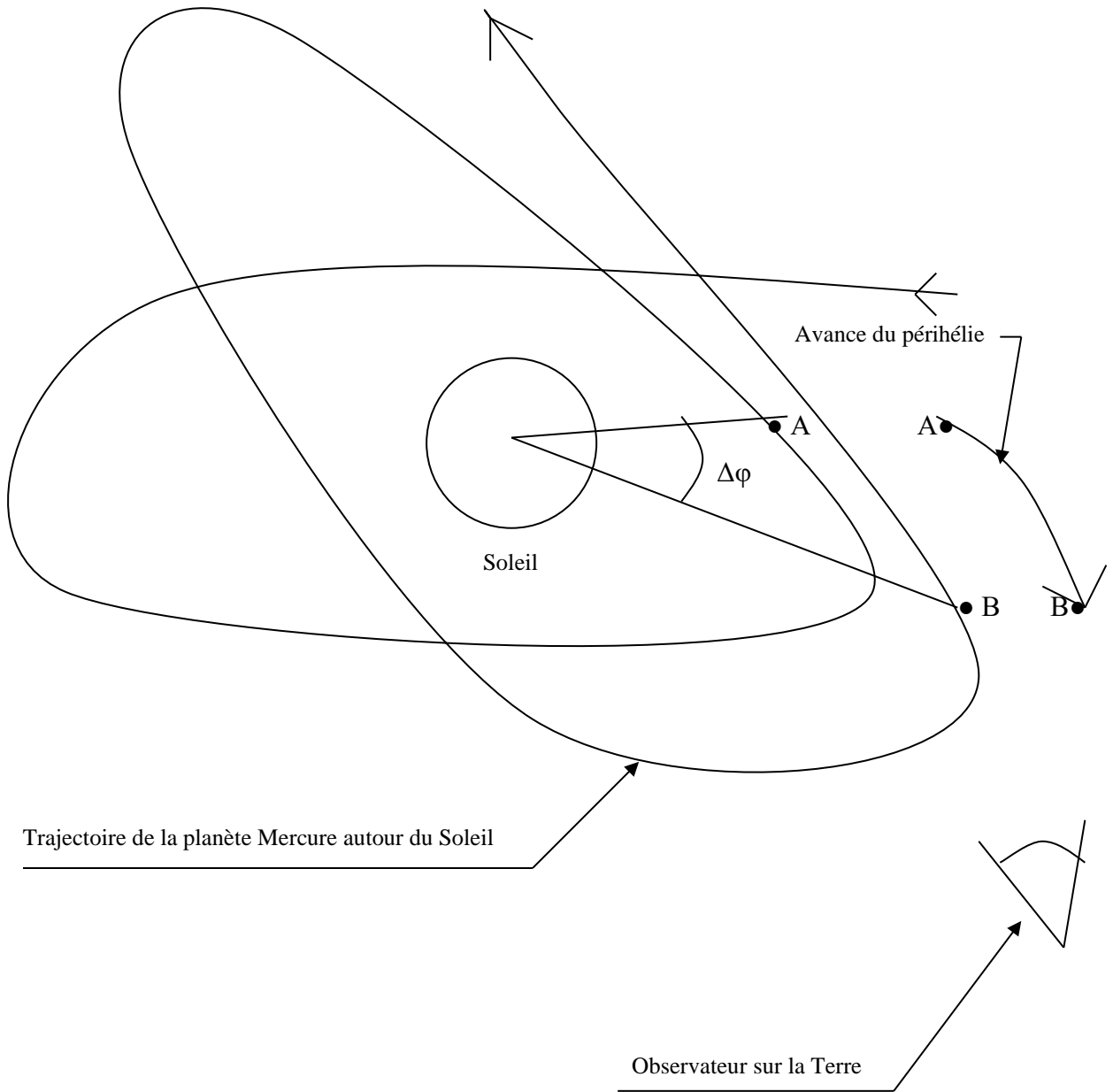


Figure 2 : Avance du périhélie de Mercure



Annexe 9

Analyse de l'article d'Einstein de 1905 sur les particules de rayonnement

(Voir Chapitre 1, sous-section 1.2.1.b : *Einstein : l'explication de l'effet photoélectrique (1905) et la dualité onde-corpuscule (1909)*)

Nous analysons dans cette *Annexe 9* le contenu de l'article de 1905, en nous référant directement à la source primaire de 1905 (voir note 28 en sous-section 1.2.1.b) et en consultant l'excellente traduction de Françoise Balibar, Olivier Darrigol et Bruno Jech (voir note 29 dans cette *Annexe 9*) ; pour une meilleure compréhension du lecteur, nous complétons les explications physiques par des notes personnelles.

a) En introduction, Einstein commence par rappeler que dans la théorie de Maxwell relevant des phénomènes électromagnétiques, tels que la lumière, l'énergie est conçue comme une fonction continue de l'espace . Aussi, cette énergie se trouve être distribuée d'une manière continue sur un volume croissant.

Il mentionne également le fait que pour la matière pondérable (matière dont on peut déterminer le poids), l'énergie est décrite comme une somme associée aux atomes et aux électrons. Aussi, cette énergie trouve une limite dans sa divisibilité.

Einstein précise ensuite que si la théorie ondulatoire de la lumière s'avère parfaite dans la description et l'observation des phénomènes purement optiques, elle s'appuie cependant sur des valeurs moyennes dans le temps et non sur des valeurs instantanées.

En cela, il prépare ses lecteurs à l'idée qu'il se peut que la production ou la transformation de la lumière, associée au rayonnement du corps noir, apparaisse plus intelligible :

«si l'on admet que l'énergie de la lumière est distribuée de façon discontinue dans l'espace. Selon l'hypothèse envisagée ici, lors de la propagation d'un rayon lumineux émis par une source ponctuelle, l'énergie n'est pas distribuée de façon continue sur des espaces de plus en plus grands, mais est constituée d'un nombre fini de quanta d'énergie localisés en des points de l'espace, chacun se déplaçant sans se diviser et ne pouvant être absorbé ou produit que tout d'un bloc. »²⁹

b) Dans un premier temps, Einstein se réfère aux théories de Maxwell et des électrons, en considérant un espace fermé, aux parois réfléchissantes (un corps noir), dans lequel se déplacent des molécules de gaz et des électrons oscillants pouvant entrer en collision, et ceci de manière identique aux molécules d'un gaz en théorie cinétique des gaz.

Il souligne qu'à l'équilibre dynamique, la théorie de Maxwell doit forcément être identique au rayonnement du corps noir à l'équilibre thermique. Puis il poursuit en mentionnant que la valeur moyenne \bar{E} de l'énergie associée au mouvement oscillatoire d'un électron est :

$$\bar{E} = \frac{R}{N}T$$

avec :

- * R la constante des gaz parfaits,
- * N le nombre d'Avogadro,
- * T la température absolue.

Par ses travaux sur les fondements de la thermodynamique statistique, effectués en 1903 et 1904, Einstein est convaincu de la véracité de l'équipartition de l'énergie. Aussi, il indique que l'équilibre dynamique du corps noir peut être atteint seulement lorsque les électrons, en mode oscillatoire, possèdent chacun une énergie moyenne égale à \bar{E} .

Puis il considère une certaine analogie entre ses travaux sur les fondements de la thermodynamique statistique et ceux de Planck sur l'interaction entre les résonateurs (associés aux parois de la cavité du four) et le rayonnement remplissant l'espace. En rappelant que le rayonnement peut être considéré comme un processus désordonné (hypothèse de Planck), il donne l'équation fondamentale trouvée par Planck à l'équilibre dynamique :

$$\bar{E}_\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho_\nu$$

avec :

- * \bar{E}_ν l'énergie moyenne d'un résonateur de fréquence propre ν ,
- * c la vitesse de la lumière,
- * ρ_ν la densité d'énergie de la fraction du rayonnement comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

De fait, il matérialise son raisonnement en posant :

$$\frac{R}{N}T = \bar{E} = \bar{E}_\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho_\nu$$

c'est-à-dire :

29. Einstein. « *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

$$\rho_v = \frac{R}{N} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} T.$$

c) Afin de prouver le bien fondé de son raisonnement, Einstein se base sur la formule de Planck associée au rayonnement du corps noir, largement confirmée par l'expérience sur toute la gamme des longueurs d'onde du spectre électromagnétique :

$$\rho_v = \frac{\alpha \nu^3}{e^{\beta\nu/T} - 1}$$

dans laquelle :

$$* \alpha = 6,10 \times 10^{-56}$$

$$* \beta = h/k = 4,866 \times 10^{-11}$$

En remarquant que le développement limité à l'ordre 1 de $e^{(\beta\nu/T)}$ (pour les grandes ondes correspondant aux densités d'énergie les plus importantes) s'écrit :

$$e^{(h\nu/kT)} = 1 + \beta\nu/T,$$

Einstein obtient :

$$\rho_v = \frac{\alpha}{\beta} \nu^2 T$$

qui est conforme à la formule obtenue en bas du § b ci-avant, obtenue à partir des théories de Maxwell et des électrons. Aussi, en identifiant ces deux formules, Einstein peut écrire :

$$\frac{R}{N} \frac{8\pi}{c^3} = \frac{\alpha}{\beta},$$

et retrouver le nombre d'Avogadro :

$$N = \frac{\beta}{\alpha} \frac{8\pi R}{c^3} = 6,17 \times 10^{23},$$

confirmant ainsi ses hypothèses. Et il écrit :

« Nous arrivons donc à la conclusion suivante : les fondements théoriques dont nous sommes partis sont d'autant plus appropriés que la densité d'énergie et la longueur d'onde du rayonnement sont plus grandes ; ils sont complètement inopérants pour de petites longueurs d'onde et de faibles valeurs d'énergie. Dans la suite, le « rayonnement noir » sera considéré sous le rapport expérimental et sans prendre pour base tel ou tel modèle de la production et de la propagation du rayonnement. »³⁰

d) Poursuivant son analyse, Einstein, par soucis de complétude, reproduit les travaux de Wien datant de 1894 sur l'entropie du rayonnement.³¹ Il considère un rayonnement occupant un volume v , parfaitement défini pour toutes les fréquences ν de la densité spectrale $\rho(\nu)$. Il mentionne que du fait des rayonnements de fréquences différentes, ne produisant aucun travail, et ne recevant aucune calorie du milieu extérieur, l'entropie du rayonnement s'écrit :

$$S = v \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi(\rho, \nu) d\nu$$

30. Einstein. « Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

31. Wien. « Temperatur und Entropie der Strahlung ».

Rappelons que pour le corps noir en équilibre thermique (température T constante), l'entropie est maximale et la fluctuation en énergie égale à zéro.

Pour un accroissement dT (déplacement de Wien) de la température du rayonnement associée au corps noir, Einstein écrit :

$$dS = d\left(v \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi(\rho, \nu) d\nu\right) = v d\left(\int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi(\rho, \nu) d\nu\right) = v \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} d\varphi(\rho, \nu) d\nu$$

$$dS = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} d\varphi(\rho, \nu) d\nu \text{ pour } v = 1.$$

La différentielle totale

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\nu$$

est limitée à la différentielle partielle :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho$$

du fait qu'un accroissement dT de température est lié à un accroissement $d\rho$ de densité de rayonnement, indépendamment de ν (loi du déplacement de Wien).

En injectant la différentielle partielle :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho$$

dans la formule dS précédente, on obtient :

$$dS = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho d\nu$$

Indépendant de ν , les termes $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$ et $d\rho$ peuvent être sortis de l'intégrale, d'où l'expression :

$$dS = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} (d\rho \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} d\nu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} dE.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, la quantité dE est égale à la quantité de chaleur fournie au système « corps noir ». L'augmentation de l'entropie par l'ajout d'une certaine quantité de chaleur dE au système « corps noir », à la température T , peut être exprimée par la formule de Clausius :

$$dS = \frac{dE}{T},$$

indiquant que l'augmentation de l'entropie est proportionnelle à l'augmentation de la chaleur.

En identifiant les deux formules qui précèdent, Einstein obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{T}.$$

e) Ensuite, de la même manière que fit Planck à l'origine de ses travaux (voir § 1.2.1), Einstein repart de la loi du rayonnement du corps noir proposé par Wien en 1896 :

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\beta \nu / T},$$

en mentionnant que cette loi n'est confirmée par l'expérimentation, seulement pour les petites ondes. Aussi, il précise que les résultats de son étude ne seront valables que dans cette limite des petites ondes (associées à des densités de rayonnement suffisamment faibles du fait de la courbe expérimentale $\rho = f(\nu)$).

La formule précédente peut s'écrire :

$$\ln \rho = \ln (\alpha \nu^3 e^{-\beta \nu / T}),$$

c'est-à-dire:

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta \nu} \ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} .$$

En identifiant la formule précédente et celle obtenue à la fin du §d, Einstein obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\beta \nu} \ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} ,$$

c'est-à-dire :

$$\varphi (\rho, \nu) = -\frac{1}{\beta \nu} \int_0^\rho (\ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3}) d\rho = -\frac{\rho}{\beta \nu} \left(\ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} - 1 \right) .$$

Puis d'Einstein calcule l'entropie S d'un rayonnement monochromatique, occupant un volume V , d'énergie E et de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$. Il considère pour cela, la formule de l'entropie du rayonnement donnée au début du §d, soit :

$$S = V \int_0^{d\nu} \varphi (\rho, \nu) d\nu = V \cdot \varphi (\rho, \nu) \cdot d\nu .$$

En injectant l'expression trouvée plus avant dans la formule S précédente, Einstein obtient :

$$S = V \left\{ -\frac{\rho}{\beta \nu} \left(\ln \frac{\rho}{\alpha \nu^3} - 1 \right) \right\} d\nu .$$

Or d'après les hypothèses qui précèdent, l'énergie E s'écrit :

$$E = \rho V d\nu .$$

En substituant respectivement $V = E / \rho d\nu$ et $\rho = E / V d\nu$ dans l'équation de S précédente, Einstein obtient :

$$S = -\frac{E}{\beta \nu} \left(\ln \frac{E}{V \alpha \nu^3 d\nu} - 1 \right) .$$

En travaillant sur la variation d'entropie associée à la variation de volume du rayonnement passant de V_0 à V , nous avons :

$$S - S_0 = -\frac{E}{\beta \nu} \left(\ln \frac{E}{V \alpha \nu^3 d\nu} - 1 \right) - \left\{ -\frac{E}{\beta \nu} \left(\ln \frac{E}{V_0 \alpha \nu^3 d\nu} - 1 \right) \right\} ,$$

soit :

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta \nu} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) .$$

qui montre que l'entropie d'un rayonnement monochromatique, de densité suffisamment faible (l'hypothèse de départ), varie en fonction du volume selon la même loi que l'entropie d'un gaz parfait.

En trouvant la formule précédente strictement semblable à celle décrivant comment l'entropie d'un gaz composé d'atomes est fonction du volume qu'il occupe, Einstein montre que le rayonnement thermique du corps noir se comporte comme s'il était constitué de particules de rayonnement.

Il reste maintenant, pour Einstein, à développer l'idée d'un gaz de quanta lumineux en interprétant l'équation précédente par rapport au principe de Boltzmann « *selon lequel l'entropie d'un système est une fonction de la probabilité de son état.* »³²

f) Einstein commence par rappeler que le calcul de l'entropie dans le cadre de la théorie moléculaire actuellement en vigueur chez les physiciens, ne correspond pas à la définition précise que l'on doit en attendre lorsque l'on considère le calcul des probabilités. En fait, il fait référence à ses travaux antérieurs, sans les nommer, à savoir qu'il convient de ne pas se laisser abuser par la notion de probabilité telle que Boltzmann la comprend dans sa théorie. Pour Einstein, la notion de probabilité, en thermodynamique statistique, doit correspondre à sa stricte définition (telle que définie en calcul des probabilités) et de plus, il est nécessaire de lui attribuer une signification physique certaine.

Pour cela, il part de la formule associée au principe de Boltzmann :

$$S - S_0 = k \ln W = \frac{R}{N} \ln W$$

Avec :

- * k la constante de Boltzmann,
- * R la constante des gaz parfait,
- * N le nombre d'Avogadro,
- * W la probabilité relative d'un état d'entropie S .

Puis, il considère un volume V_0 contenant n molécules formant un gaz parfait ayant une entropie S_0 . Il imagine ensuite un volume V , situé dans le volume V_0 , dans lequel les n molécules seraient transportées du volume V_0 dans le volume V . L'entropie du nouveau système a donc une nouvelle valeur S différente de S_0 .

La probabilité pour que les n molécules situées initialement dans le volume V_0 se trouvent par hasard toutes comprises dans le volume V est :

$$W = \left(\frac{V}{V_0} \right)^n .$$

g) Einstein rappelle ensuite la formule obtenue à la fin du §e :

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta v} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) .$$

Cette formule peut s'écrire :

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \cdot \frac{N}{R} \cdot \frac{E}{\beta v} \cdot \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) ,$$

soit :

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{NE}{R\beta v}} .$$

En identifiant cette formule avec celle exprimant le principe de Boltzmann vue en début du §f, Einstein obtient la formule :

32. Einstein. « *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

$$S - S_0 = k \ln W = \frac{R}{N} \ln W = \frac{R}{N} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{NE}{R\beta\nu}},$$

ayant pour signification que pour un rayonnement monochromatique de fréquence propre ν , d'énergie E et enfermé dans un volume V_0 correspondant à l'intérieur d'un four aux parois réfléchissantes (atteignant ainsi l'état du rayonnement du corps noir à l'équilibre thermique), la probabilité pour que toute l'énergie du rayonnement se retrouve dans une partie V du volume V_0 est donnée par la formule :

$$W = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{NE}{R\beta\nu}} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\nu \left(\frac{E}{R\beta/N} \right)},$$

avec en unité SI :

$$\frac{R\beta}{N} = \frac{8,314 \cdot (4,866 \cdot 10^{-11})}{6,17 \cdot 10^{23}} \cong 6,626 \cdot 10^{-34} = h,$$

avec h la constante de Planck dont Einstein ne fait pas usage.

La valeur $\frac{E}{h\nu}$ est à rapprocher du nombre n (le nombre de molécules composant le gaz parfait) associé à la formule se trouvant à la fin du §f.

Rappelons que l'entropie S du rayonnement monochromatique d'énergie E , de fréquence propre comprise entre ν et $\nu+d\nu$, occupant un volume V (voir §e), est associé, par le principe de Boltzmann, à la probabilité W (voir §f).

Ainsi, par analogie, $\frac{E}{h\nu}$ représente le nombre de particules de rayonnement monochromatique.

Mais laissons Einstein s'exprimer :

« Un rayonnement monochromatique de faible densité (dans les limites du domaine de validité de la loi du rayonnement de Wien) se comporte, par rapport à la théorie de la chaleur, comme s'il était constitué de quanta d'énergie, indépendants les uns des autres, de grandeur $R\beta\nu/N$. »³³

Assimilant le rayonnement du corps noir à un gaz parfait de quanta lumineux, il reste à Einstein de le prouver. Aussi, il exploite son hypothèse corpusculaire pour expliquer deux phénomènes expérimentaux bien connus concernant l'émission et l'absorption de la lumière : la loi de Stokes et l'effet photoélectrique que nous allons développer respectivement dans les paragraphes h et i suivants.

h) La loi de Stokes : il s'agit d'une loi selon laquelle la fréquence de la lumière émise par fluorescence est toujours inférieure à celle de la lumière monochromatique excitatrice (c'est-à-dire incidente).

Einstein considère que la lumière incidente et la lumière qui est produite sont constituées de quanta d'énergie de grandeur $\left(\frac{R\beta}{N} \right) \nu$ avec ν la fréquence de la lumière incidente ou celle de la lumière produite. En fait, chaque quantum incident, de fréquence ν_1 est absorbé et produit un quantum de lumière de fluorescence de fréquence ν_2 .

33. Einstein. « Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

Mais sous l'effet de la lumière incidente, c'est-à-dire lorsqu'il y a absorption du quantum de cette lumière excitatrice, Einstein explique que des quanta de lumière de fréquence ν_3, ν_4, \dots , peuvent apparaître, ainsi qu'une autre forme d'énergie telle que l'énergie calorifique. Or, en vertu du premier principe de la thermodynamique (la conservation de l'énergie), un quantum d'énergie de lumière de fluorescence produite ne peut pas être plus grand que le quantum d'énergie associé à la lumière incidente.

Aussi, Einstein écrit :

$$\left(\frac{R\beta}{N}\right) \nu_2 \leq \left(\frac{R\beta}{N}\right) \nu_1,$$

c'est-à-dire :

$$\nu_2 \leq \nu_1,$$

qui traduit la loi de Stokes.

i) L'effet photoélectrique : Il fut découvert par Hertz en 1887. Une surface métallique soumise à un rayonnement électromagnétique fait l'objet d'une éjection d'électrons. Puis Lénard observe en 1902 que l'énergie cinétique de ces électrons émis est indépendante de l'intensité lumineuse, et qu'il existe, pour cette lumière incidente, un seuil en fréquence sous lequel l'effet disparaît.

L'explication simple et pertinente proposée par Einstein, est basée sur l'hypothèse que la lumière serait constituée de paquets d'énergie, les quanta, contenant plusieurs quantum, contenant chacun une énergie $E = \left(\frac{R\beta}{N}\right) \nu$.

Pour Einstein, les quanta pénètrent dans la surface métallique et perdent une partie de leur énergie au profit des électrons du métal qui se trouvent ainsi éjectés. Mais l'extraction d'un électron est possible seulement si l'énergie cinétique absorbée par l'électron est supérieure au travail P (fourni par cet électron et caractéristique du métal considéré) nécessaire pour l'extraire du métal, c'est-à-dire si :

$$\left(\frac{R\beta}{N}\right) \nu \geq P,$$

c'est-à-dire :

$$\nu_{\text{seuil}} \geq P,$$

avec :

$$* \nu_{\text{seuil}} = \left(\frac{N}{R\beta}\right) P \text{ soit } P = \left(\frac{R\beta}{N}\right) \nu_{\text{seuil}}.$$

L'énergie cinétique maximale d'un électron émis est donc :

$$E_c \text{ max} = \left(\frac{1}{2} m v^2\right) \text{ max} = \left(\frac{R\beta}{N}\right) \nu - P = \Pi$$

Mais laissons Einstein s'exprimer :

« Si la formule obtenue est exacte, Π en fonction de la fréquence (ν) de la lumière excitatrice doit être, en coordonnées cartésiennes, une droite dont la pente ne dépend pas de la substance étudiée. Autant que je puisse en juger, notre conception n'est pas en contradiction avec les propriétés de l'effet photoélectrique telles qu'elles ont été observées par M. Lenard. Si chaque quantum d'énergie de la lumière excitatrice cède son énergie à un électron indépendamment de tous les autres, la distribution des vitesses des électrons, c'est-à-dire la qualité du rayonnement cathodique produit, est indépendante de l'intensité de la lumière excitatrice (puisque l'énergie cinétique de l'électron croît linéairement avec la fréquence ν du rayonnement) ; en revanche, le nombre des électrons qui quittent le corps doit, lui, être, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à l'intensité de la lumière excitatrice (car l'intensité de la lumière excitatrice est associée à des particules lumineuses appelées quanta, qui sont des paquets d'énergie contenant plusieurs quantum d'énergie élémentaire $E = \left(\frac{R\beta}{N}\right)\nu$ qui procèdent chacun à extraire un électron du métal). »³⁴

34. Einstein. « Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt ». Traduction F. Balibar, O. Darrigol, B. Jech (A. Einstein, Oeuvres choisies, Tome 1, Quanta).

Annexe 10

Cheminement de la pensée de Heisenberg dans la conception de sa mécanique matricielle

(Voir Chapitre 1, sous-section 1.2.1.e : *La mécanique matricielle (novembre 1925) et le principe d'indétermination de Heisenberg (1927)*)

Nous expliquons le cheminement de la pensée de Heisenberg dans la conception de sa mécanique matricielle en exploitant la source primaire que constitue sa publication de 1932.⁴⁵ Nous nous aidons pour cela du cours de Mécanique quantique de Jean-Louis Basdevant enseigné à l'Ecole Polytechnique.⁴⁶

Dans la partie de la publication de Heisenberg intitulée « *L'appareil mathématique de la théorie des quanta* », Heisenberg s'en remet au principe de correspondance de Bohr : « *L'expression la plus générale du principe de correspondance de Bohr consiste en ceci : <il existe, entre la théorie des quanta et la théorie classique appropriée à la représentation employée, une analogie qualitative qui subsiste dans les détails. Cette analogie ne sert pas seulement de guide pour trouver les lois formelles, sa valeur particulière réside bien plus en ce qu'elle fournit également l'interprétation physique des lois trouvées. >* »

Le principe de correspondance formulé par Bohr en 1916, stipule en effet qu'il existe une analogie complète entre la mécanique classique et la mécanique quantique si l'on se place d'un point de vue corpusculaire.

Aussi, Heisenberg commence par présenter les relations empiriques de Rydberg – Ritz, existant entre les fréquences caractéristiques du rayonnement émis par un atome :

$$v_{il} + v_{lk} = v_{ik} . \quad (0)$$

De même, sachant que l'énergie d'un atome ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies W_i , Heisenberg rappelle que ces valeurs de l'énergie et les fréquences propres des atomes sont liées par la relation (postulat fondamental de la théorie des quanta dû à Bohr) :

45. Heisenberg. « *Les principes physiques de théorie des quanta* ». Traduction Champion et Hochard.

46. Basdevant. « *Mécanique quantique II* ». Ecole Polytechnique.

$$v_{ik} = \frac{1}{h} (W_i - W_k). \quad (1)$$

Le raisonnement de Heisenberg s'appuie sur le fait que la trajectoire classique d'une particule autour du noyau dans le modèle atomique de Bohr (l'orbite électronique), est périodique. Or un mouvement périodique s'écrit mathématiquement comme une série de Fourier.

Ainsi, comme en physique classique la position $q(t)$ d'une particule en mouvement périodique peut être exprimée en série de Fourier telle que :

$$q(t) = \sum q_n e^{in\omega t} = \sum q_n e^{in2\pi vt},$$

l'expression d'un terme de la série est :

$$q(t) = q_n e^{in2\pi vt}.$$

Heisenberg postule alors que puisque les deux indices (ik) de l'expression (1) sont nécessaires pour caractériser les fréquences de rayonnement, alors l'ensemble des quantités physiques de base qui généralisent les termes de Fourier est un ensemble à deux indices $q_{ik}(t)$ dont la variation dans le temps (constituant les éléments d'un tableau carré), est donnée par :

$$q_{ik}(t) = q_{ik} e^{i2\pi t v_{ik}} \quad (2)$$

Puis, pour trouver les règles algébriques relatives aux quantités (2), Heisenberg s'appuie sur l'expression (0) car en associant à la quantité :

$$q(t) q(t) = q^2(t), \quad (3)$$

(définissant la multiplication de deux séries de Fourier dans la mécanique classique), les termes de Fourier généralisés $q_{ik} q_{ik} = (q^2)_{ik}$, il faut pour que l'expression (2) soit satisfaite, supposer la règle de multiplication suivante :

$$(q^2)_{ik} = \sum_l q_{il} q_{lk} \quad (4)$$

puisque :

$$(q^2)_{ik}(t) = \left(\sum_l q_{il} q_{lk} \right)(t) = \sum q_{il} e^{i2\pi t v_{il}} q_{lk} e^{i2\pi t v_{lk}} = \sum e^{i2\pi t (v_{il} + v_{lk})} q_{il} q_{lk}$$

c'est-à-dire :

$$(q^2)_{ik}(t) = (q^2)_{ik} e^{i2\pi t v_{ik}}$$

montre que les éléments du tableau carré issu de la multiplication de deux tableaux carrés contenant chacun les éléments exprimés en (2) respecte (4).

« L'équation (4) définit la multiplication des matrices et au point de vue physique, elle est imposée par la formule empirique (0). »⁴⁷

47. Heisenberg. « Les principes physiques de théorie des quanta ». Traduction Champion et Hochard.

En effet, pour écrire le tableau des éléments résultant du produit de deux tableaux carrés à quatre éléments, Heisenberg procède de la manière indiquée ci-avant :

soit :

$$q_{ik} q_{ik} = (q^2)_{ik} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

en effet, Heisenberg applique l'équation (4) :

$$(q^2)_{ik} = \sum_l q_{il} q_{lk},$$

pour obtenir le tableau résultant de la multiplication :

* première ligne, première colonne : $i=1, k=1, l=1,2$

$$\sum_l q_{il} q_{lk} = q_{11} q_{1k} + q_{12} q_{2k} = q_{11} q_{11} + q_{12} q_{21},$$

* première ligne, deuxième colonne : $i=1, k=2, l=1,2$

$$\sum_l q_{il} q_{lk} = q_{11} q_{1k} + q_{12} q_{2k} = q_{11} q_{12} + q_{12} q_{22},$$

* deuxième ligne, première colonne : $i=2, k=1, l=1,2$

$$\sum_l q_{il} q_{lk} = q_{21} q_{1k} + q_{22} q_{2k} = q_{21} q_{11} + q_{22} q_{21},$$

* deuxième ligne, deuxième colonne : $i=2, k=2, l=1,2$

$$\sum_l q_{il} q_{lk} = q_{21} q_{1k} + q_{22} q_{2k} = q_{21} q_{12} + q_{22} q_{22},$$

soit :

$$(q^2)_{ik} = \begin{pmatrix} q_{11} q_{11} + q_{12} q_{21} & q_{11} q_{12} + q_{12} q_{22} \\ q_{21} q_{11} + q_{22} q_{21} & q_{21} q_{12} + q_{22} q_{22} \end{pmatrix}.$$

En conclusion :

* les q_{ik} sont les éléments de matrices,

* la règle de commutation fondamentale est :

$$p_{ik} q_{ik} - q_{ik} p_{ik} = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{ik}$$

avec :

- p_{ik} les éléments de la matrice « quantité de mouvement » P ,
- q_{ik} les éléments de la matrice « position de la particule » Q ,
- $\delta_{ik} = 1$ pour $k = l$,
- $\delta_{ik} = 0$ pour $k \neq l$.

Annexe 11

Solution de l'équation de Schrödinger des états stationnaires sans champ extérieur pour l'atome d'hydrogène associé au modèle de Bohr

(Voir Chapitre 1, sous-section 1.2.1.f : *Schrödinger et sa fonction d'onde (1926)*)

Nous montrons dans cette Annexe 11 comment en résolvant l'équation de Schrödinger des états stationnaires sans champ extérieur, pour l'atome d'hydrogène associé au modèle de Bohr, nous obtenons l'expression de :

$$E = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 l^2},$$

représentant les niveaux d'énergie mécanique totale de l'électron de l'atome d'hydrogène en fonction du nombre quantique principal l (la position de l'orbite, c'est-à-dire la couche électronique l).

→ L'équation de Schrödinger des états stationnaires de l'électron en coordonnées quelconques dans un potentiel scalaire, est :

$$\left(\frac{-\hbar}{2m} \Delta + V \right) \Phi = E \Phi .$$

Pour l'électron de l'atome d'hydrogène se mouvant selon une trajectoire circulaire plane de rayon constant R par rapport au noyau, nous avons en coordonnées polaires (R, α) :

$$\Delta \Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} \quad \text{car } R \text{ est constant ,}$$

d'où l'équation de Schrödinger des états stationnaires de l'électron en coordonnées polaire :

$$\left(\frac{-\hbar}{2m} \frac{1}{R^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} + V \right) \Phi(\alpha) = E \Phi(\alpha).$$

→ La relation d'équilibre de l'électron de masse m en mouvement à la vitesse linéaire v autour du noyau est telle que la force centrifuge mv^2/R et la force d'attraction électrostatique $-e^2/R^2$ (la force de Coulomb dans laquelle e^2 est égal à $e_0^2/4\pi\epsilon_0$ avec e_0 la charge de l'électron égale en valeur absolue à celle du proton) se compensent de la manière suivante :

$$mv^2/R - e^2/R^2 = 0.$$

→ L'énergie cinétique E_c de l'électron en mouvement autour du noyau $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ et son énergie potentielle $V = -e^2/R$ sont les deux termes dont la somme est égale à l'énergie mécanique totale de l'électron ($E = E_c + V$).

→ Or le fait d'avoir $mv^2/R = e^2/R^2$ c'est-à-dire $mv^2 = e^2/R$, soit $\frac{1}{2} m v^2 = e^2/2R = -V/2$, permet d'écrire :

$$E = -V/2 + V = V/2 = -e^2/2R \text{ c'est-à-dire } V = 2E.$$

→ L'équation de Schrödinger des états stationnaires de l'électron s'écrit donc :

$$\left(\frac{-\hbar}{2m} \frac{1}{R^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} + 2E \right) \Phi(\alpha) = E \Phi(\alpha),$$

soit:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R^2} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} - E\Phi = 0.$$

En intégrant cette équation différentielle du second ordre à coefficients constant et sans second membre de manière classique, on obtient :

$$\Phi = \Phi_0 e^{\pm i\theta} \left[(2mR^2|E|/\hbar^2) \right]^{1/2}.$$

Pour que l'on puisse avoir pour Φ une véritable fonction d'onde, il faut que l'on puisse écrire :

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta+2\pi),$$

c'est-à-dire que l'exposant $\left[(2mR^2|E|/\hbar^2) \right]^{1/2}$ soit entier.

D'où :

$$\left[(2mR^2|E|/\hbar^2) \right] = -l^2 \text{ car } E \text{ est négatif,}$$

avec :

$$* E = -e^2/2R \text{ soit } R = -e^2/2E.$$

En injectant la valeur obtenue pour R dans l'expression précédente, on obtient:

$$\frac{2m\left(\frac{-e^2}{2E}\right)E}{\hbar^2} = -l^2,$$

c'est-à-dire:

$$E = \frac{-me^4}{2\hbar^2 l^2} = \frac{-2\pi^2 me^4}{h^2 l^2},$$

qui est justement l'expression trouvée par Bohr.

Annexe 12

Obtention de l'équation temporelle de Schrödinger pour une particule située dans un potentiel scalaire

(Voir Chapitre 1, sous-section 1.2.1.f : *Schrödinger et sa fonction d'onde (1926)*)

Nous montrons dans cette Annexe 12 comment Schrödinger obtient son équation temporelle pour une particule située dans un potentiel scalaire.

Dans un premier temps, Schrödinger rappelle l'expression de l'évolution temporelle de la fonction d'onde :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{-i2\pi\nu t},$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{-i2\pi E t/h},$$

avec :

$$* \nu = E/h.$$

Puis d'après Schrödinger : « Pour que l'équation des états stationnaires soit valable, Ψ devrait dépendre du temps selon la loi qu'on peut écrire tout aussi bien, si l'on veut, sous la forme »⁵⁴ (il s'agit de la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction d'onde) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x, y, z) e^{-i2\pi E t/h}) = \frac{-i2\pi E}{h} \Phi e^{-i2\pi E t/h} = \frac{-i2\pi E}{h} \Psi$$

soit :

$$\frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i E \Psi,$$

c'est-à-dire :

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi,$$

en postulant de représenter l'énergie E par l'opérateur $i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}$, auquel cas :

54. Schrödinger. « *Quantification et valeurs propres (quatrième communication)* ». Traduction Al. Proca.

$$\bullet = \Psi : \quad \frac{\partial}{\partial t} \bullet = \frac{2\pi E}{ih} \bullet \quad \Leftrightarrow \quad E \bullet = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \bullet .$$

Or l'équation de Schrödinger des états stationnaires que nous avons vu en Sous-section 1.2.1.f :

$$\Delta \Phi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E-V) \Phi = 0 ,$$

peut s'écrire:

$$E \Phi = \frac{-h^2}{8\pi^2 m} \Delta \Phi + V \Phi = \left(\frac{-h^2 \Delta}{8\pi^2 m} + V \right) \Phi ,$$

soit:

$$E \Phi e^{-i2\pi t E/h} = \left(\frac{-h^2 \Delta}{8\pi^2 m} + V \right) \Phi e^{-i2\pi t E/h} ,$$

c'est-à-dire:

$$E \Psi = \left(\frac{-h^2 \Delta}{8\pi^2 m} + V \right) \Psi .$$

Ce qui conduit Schrödinger à effectuer :

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi = \left(\frac{-h^2 \Delta}{8\pi^2 m} + V \right) \Psi ,$$

soit:

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{-h^2 \Delta}{8\pi^2 m} + V \right) \Psi ,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-h^2 \Delta \Psi + 8\pi^2 m V \Psi}{8\pi^2 m} ,$$

qui peut s'écrire :

$$\Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \Psi + \frac{4\pi m i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 ,$$

qui est l'équation temporelle, pour une particule dans un potentiel scalaire (l'électron soumis au champ électrique du proton situé dans le noyau de l'atome d'hydrogène) telle que mentionnée par Schrödinger dans sa quatrième communication.⁵⁵

55. Schrödinger. « *Quantification et valeurs propres (quatrième communication)* ». Traduction Al. Proca.

Annexe 13

Dirac et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule

(Voir Chapitre 1, Sous-section 1.2.1.g : *La mécanique quantique relativiste de Dirac (1928) et son formalisme de représentation des états quantiques d'une particule (1939)*)

Nous expliquons dans cette Annexe 13 comment Dirac a formalisé sa représentation des états quantiques d'une particule.

1- Le contexte

La mécanique quantique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes fondamentaux de la physique à l'échelle atomique et subatomique. Les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire positif, sur le corps des complexes, constituent le contexte associé à cette étude. Ces espaces vectoriels sont appelés espaces préhilbertiens ou encore espaces hermitiens. Et lorsque ces espaces vectoriels complexes, munis du produit scalaire, sont aussi munis d'une norme, ils sont appelés espaces vectoriels normés.

On dit qu'un espace vectoriel normé est complet lorsqu'une suite de vecteurs de cet espace vectoriel est une suite de Cauchy qui converge en norme vers un vecteur limite f de cet espace vectoriel.

Une suite $\{f_n\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel normé est une suite de Cauchy si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que :

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \text{ si } n > m > N(\varepsilon).$$

Tous les espaces préhilbertiens de dimension finie sont nécessairement complets et sont appelés espaces de Hilbert.

Les vecteurs de l'espace de Hilbert sont notés sous la forme $|\Psi\rangle$. On les appelle kets de l'espace de Hilbert.

2- ket

Cette notation a été introduite par Dirac en 1939. Il a utilisé l'algèbre des opérateurs linéaires comme une généralisation des théories de Heisenberg et de Schrödinger. Il a aussi introduit la notion de $\langle bra|ket\rangle$, pour laquelle $|ket\rangle$ est un vecteur d'état dans l'espace des états du système, et $\langle bra|$ un vecteur de l'espace dual correspondant.

Un état quantique est donc représenté sous la forme $|ket\rangle$ où ket désigne les propriétés de l'état quantique en question, permettant de le caractériser de manière univoque. L'ensemble des états possibles pour un système quantique forme un espace de Hilbert, et les kets se manipulent comme des vecteurs. En d'autres termes, l'état d'un système physique en mécanique quantique, lorsqu'on s'y intéresse à un instant fixé, est défini par la donnée d'un vecteur d'état, ou $|ket\rangle$, appartenant à l'espace des états E de ce système. Par exemple, dans ce contexte, la fonction d'onde $\psi(\vec{x},t)$ de Schrödinger n'est qu'une description de ce vecteur $|ket\rangle$ par ses composantes sur une base particulière.

Ainsi, on nomme « état » l'ensemble des informations qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'en découlent, par le raisonnement et le calcul, toutes les propriétés du système. A chaque système concret est associé un espace E des états et un seul, et cet espace E des états est un espace de Hilbert. Rappelons que l'espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet dont la norme $\| \cdot \|$ découle d'un produit scalaire par la formule :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} .$$

Rappelons encore qu'un espace préhilbertien est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire.

Nous définissons donc pour ce qui concerne la mécanique quantique ce qui suit : un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur le corps des complexes muni d'un produit scalaire défini positif. Et tout état quantique d'une particule est considéré par le symbole $|ket\rangle$ que nous appelons vecteur d'état de la particule appartenant à l'espace de Hilbert noté E .

3- Bra

Cette notation a été introduite par Dirac et consiste à écrire l'élément dual d'un $|ket\rangle$ sous la forme $\langle bra|$. Cette notation permet d'écrire le produit scalaire de deux kets $|ket1\rangle$ et $|ket2\rangle$ sous la forme d'un $\langle bra|ket\rangle$.

En effet, à tout vecteur $|ket\rangle$ de l'espace de Hilbert, on peut faire correspondre un vecteur $\langle bra|$ du corps des complexes et appartenant à l'espace dual (topologique) E^* de E . L'espace E^* est également un espace vectoriel.

Ainsi, à tout vecteur ket $|\Psi\rangle$ on fait correspondre linéairement le nombre complexe égal au produit scalaire $\langle \Phi|, |\Psi\rangle$, pris dans cet ordre. Dirac utilise la notation⁶⁴ :

$$\langle \Phi|, |\Psi\rangle = \langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi|\Psi\rangle$$

pour désigner le nombre complexe égal au produit scalaire.

64. Dirac. "The principles of quantum mechanics". Edition 1947.

En d'autres termes, à tout couple de vecteur d'état $|\Psi\rangle$ et $|\Phi\rangle$, pris dans cet ordre, on peut associer un produit scalaire.

Ainsi, dans l'espace E , le produit scalaire de deux vecteurs d'état est, par définition égal à :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle.$$

L'espace E muni du produit scalaire est, rappelons le, un espace abstrait de Hilbert de dimension infinie, et pour un système quantique quelconque, on notera simplement E l'espace de Hilbert de ses vecteurs d'état.

4- Produit scalaire

4.1- Détaillons le produit scalaire $\langle \Phi | \Psi \rangle$:

En mécanique quantique, il est habituel de noter les éléments de l'espace de Hilbert par des symboles $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$, ... , le produit scalaire de $|\Psi\rangle$ avec $|\Phi\rangle$ étant noté $\langle \Phi | \Psi \rangle$.

L'exemple le plus naturel d'espace de Hilbert de dimension n est donné par des vecteurs colonnes à n composantes complexes :

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 + i\beta_1 & b_1 &= \gamma_1 + i\delta_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_n &= \alpha_n + i\beta_n & b_n &= \gamma_n + i\delta_n \end{aligned}$$

Le produit scalaire bra-ket $\langle \Phi | \Psi \rangle$ dont le bra $\langle \Phi |$ appartient à l'espace dual E^* de l'espace E associé au ket $|\Psi\rangle$ est défini tel que :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + \dots + b_n^* a_n ,$$

c'est-à-dire :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = (b_1^* \dots b_n^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

avec $b_1^* = \gamma_1 - i\delta_1$ le complexe conjugué de b_1 ; ... ; $b_n^* = \gamma_n - i\delta_n$ le complexe conjugué de b_n .

Ainsi, au couple de vecteurs d'état $|\Psi\rangle$ et $|\Phi\rangle$, on associe un nombre complexe que l'on nomme bra-ket $\langle \Phi | \Psi \rangle$.

On peut donc écrire d'après ce qui précède en réduisant, à titre d'exemple, n à 2 :

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = [(\gamma_1 - i\delta_1)(\gamma_2 - i\delta_2)] \begin{bmatrix} (\alpha_1 + i\beta_1) \\ (\alpha_2 + i\beta_2) \end{bmatrix}$$

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = (\gamma_1 \alpha_1 + \delta_1 \beta_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \delta_2 \beta_2) + i (\gamma_1 \beta_1 - \delta_1 \alpha_1 + \gamma_2 \beta_2 - \delta_2 \alpha_2),$$

qui est le nombre complexe associé au produit scalaire $\langle \Phi | \Psi \rangle$.

4.2- Détaillons maintenant le produit scalaire $\langle \Psi | \Phi \rangle$:

Le produit scalaire braket $\langle \Psi | \Phi \rangle$ dont le bra $\langle \Psi |$ appartient à l'espace dual E^* de l'espace E associé au ket $|\Phi\rangle$ est défini tel que :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_n^* b_n ,$$

c'est-à-dire :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = (a_1^* \dots a_n^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

avec $a_i^* = \alpha_i - i\beta_i$ le complexe conjugué de a_i ; ... ; $a_n^* = \alpha_n - i\beta_n$ le complexe conjugué de a_n .

Ainsi, au couple de vecteurs d'état $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$, on associe un nombre complexe que l'on nomme braket $\langle \Psi | \Phi \rangle$.

On peut donc écrire d'après ce qui précède en réduisant, à titre d'exemple, n à 2 :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = [(\alpha_1 - i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2)] \begin{bmatrix} \gamma_1 + i\delta_1 \\ \gamma_2 + i\delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = (\gamma_1 \alpha_1 + \delta_1 \beta_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \delta_2 \beta_2) - i (\gamma_1 \beta_1 - \delta_1 \alpha_1 + \gamma_2 \beta_2 - \delta_2 \alpha_2),$$

En conclusion, les paragraphes c.4.1 et c.4.2 démontrent la propriété : $\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$.

4.3- Détaillons le produit scalaire $\langle \lambda \Phi | \Psi \rangle$:

Soit :

$$\lambda = a + ib.$$

En conservant les expressions précédentes pour Ψ et Φ mais en limitant n à 2, on peut écrire :

$$|\lambda \Phi\rangle = (a + ib) \begin{bmatrix} \gamma_1 + i\delta_1 \\ \gamma_2 + i\delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\gamma_1 - b\delta_1) + i(a\delta_1 + b\gamma_1) \\ (a\gamma_2 - b\delta_2) + i(a\delta_2 + b\gamma_2) \end{bmatrix}.$$

D'où :

$$\langle \lambda \Phi | \Psi \rangle = [(\gamma_1 - i\delta_1)(\gamma_2 - i\delta_2)] \begin{bmatrix} (a\gamma_1 - b\delta_1) + i(a\delta_1 + b\gamma_1) \\ (a\gamma_2 - b\delta_2) + i(a\delta_2 + b\gamma_2) \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\langle \lambda \Phi | \Psi \rangle = (a\gamma_1\alpha_1 - b\delta_1\alpha_1 + a\delta_1\beta_1 + b\gamma_1\beta_1) + i(a\gamma_1\beta_1 - b\delta_1\beta_1 - a\delta_1\alpha_1 - b\gamma_1\alpha_1) + \dots$$

Or :

$$\lambda^* \langle \Phi | \Psi \rangle = (a-ib) [(\gamma_1\alpha_1 + \delta_1\beta_1 + \gamma_2\alpha_2 + \delta_2\beta_2) - i(\gamma_1\beta_1 - \delta_1\alpha_1 + \gamma_2\beta_2 - \delta_2\alpha_2)],$$

soit:

$$\lambda^* \langle \Phi | \Psi \rangle = (a\gamma_1\alpha_1 - b\delta_1\alpha_1 + a\delta_1\beta_1 + b\gamma_1\beta_1) + i(a\gamma_1\beta_1 - b\delta_1\beta_1 - a\delta_1\alpha_1 - b\gamma_1\alpha_1) + \dots,$$

démontrant la propriété: $\langle \lambda \Phi | \Psi \rangle = \lambda^* \langle \Phi | \Psi \rangle$.

4.4- Détaillons le produit scalaire $\langle \Phi | \lambda \Psi \rangle$:

Soit :

$$\lambda = a+ib.$$

En conservant les expressions précédentes pour Ψ et Φ et en limitant n à 2, on peut écrire :

$$|\lambda \Psi\rangle = (a+ib) \begin{bmatrix} (\alpha_1+i\beta_1) \\ (\alpha_2+i\beta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\alpha_1-b\beta_1)+i(a\beta_1+b\alpha_1) \\ (a\alpha_2-b\beta_2)+i(a\beta_2+b\alpha_2) \end{bmatrix}.$$

D'où :

$$\langle \Phi | \lambda \Psi \rangle = (\gamma_1 - i\delta_1) \begin{bmatrix} (a\alpha_1-b\beta_1)+i(a\beta_1+b\alpha_1) \\ (a\alpha_2-b\beta_2)+i(a\beta_2+b\alpha_2) \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\langle \Phi | \lambda \Psi \rangle = (a\gamma_1\alpha_1 - b\delta_1\alpha_1 + a\delta_1\beta_1 + b\gamma_1\beta_1) + i(a\gamma_1\beta_1 - b\delta_1\beta_1 - a\delta_1\alpha_1 - b\gamma_1\alpha_1) + \dots$$

Or :

$$\lambda \langle \Phi | \Psi \rangle = (a+ib) [(\gamma_1\alpha_1 + \delta_1\beta_1 + \gamma_2\alpha_2 + \delta_2\beta_2) + i(\gamma_1\beta_1 - \delta_1\alpha_1 + \gamma_2\beta_2 - \delta_2\alpha_2)],$$

soit:

$$\lambda \langle \Phi | \Psi \rangle = (a\gamma_1\alpha_1 - b\delta_1\alpha_1 + a\delta_1\beta_1 + b\gamma_1\beta_1) + i(a\gamma_1\beta_1 - b\delta_1\beta_1 - a\delta_1\alpha_1 - b\gamma_1\alpha_1) + \dots$$

démontrant la propriété: $\langle \Phi | \lambda \Psi \rangle = \lambda \langle \Phi | \Psi \rangle$.

Annexe 14

Le principe de moindre action en mécanique classique vu par Feynman

(Voir Chapitre 4, §4.4 : *Les débuts de l'intégrale de chemins*)

Feynman propose de trouver le chemin réel d'une particule massique lancée dans un champ de gravitation, parmi tous les chemins possibles, sans utiliser la loi de la gravitation de Newton. Pour cela il considère, dans le système conservatif « particule – champ », les échanges d'énergie tout au long du trajet parcouru par la particule dans une seule dimension spatiale $x(t)$ c'est-à-dire de $x_1(t_1)$ à $x_2(t_2)$.

Il rappelle ainsi l'expression de l'action en mécanique analytique :

$$\text{Action} = S = \int_{t_1}^{t_2} (E_c - V) dt$$

Avec:

- * E_c l'énergie cinétique de la particule en mouvement : $\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$
- * $V(x,t)$ l'énergie potentielle de la particule soumise au champ de gravitation,
- * $(E_c - V)$ le lagrangien L de la particule dans le potentiel gravitationnel $V(x,t)$.

La nature, par principe, minimise les échanges d'énergie tout au long du chemin $x(t)$. Ainsi, le trajet vrai et naturel de la particule est celui qui minimise l'action. Pour trouver le vrai trajet, Feynman mentionne qu'il faudrait calculer « l'action suivant des millions et des millions de trajets et regarder suivant lequel le résultat est le plus faible. Quand vous avez trouvé le plus faible, voilà le vrai trajet. »⁷⁹

Puis il ajoute : « C'est une façon possible. Mais nous pouvons faire mieux. Quand nous avons une grandeur, qui possède un minimum – par exemple dans le cas d'une fonction ordinaire comme la température – une des propriétés du minimum est que si nous nous en écartons, d'une quantité du premier ordre, l'écart de la fonction par rapport à sa valeur minimum sera du

79. Feynman. « *Le cours de Physique de Feynman. Electromagnétisme I* ». Traduction A. Crémieu et M.-L. Duboin.

second ordre. En tout point de la courbe, si nous nous écartons d'une petite distance, la variation de la fonction est aussi du premier ordre. Mais au minimum, un tout petit écart ne produit, en première approximation, aucune différence. C'est ce que nous allons appliquer pour calculer le vrai trajet. Si nous connaissons le vrai trajet, une courbe qui s'en écartera un tout petit peu, n'entraînera en première approximation aucune différence sur l'action. La différence aura lieu en seconde approximation, si nous partons vraiment du minimum.

Il est facile de le montrer. Si la différence est du premier ordre quand je m'écarte de la courbe d'une certaine façon, la variation de l'action est proportionnelle à l'écart. Cette variation, a priori, entraîne une augmentation de l'action, sinon nous ne partirions pas du minimum. Mais alors, si la variation est proportionnelle à l'écart, en inversant le signe de cet écart, la variation entraînera une diminution de l'action. L'action augmenterait ou diminuerait suivant le sens de l'écart. La seule possibilité, pour que l'action soit vraiment minimum, est qu'elle ne varie pas en première approximation, que les variations soient proportionnelles au carré de l'écart par rapport au vrai trajet. »

Ainsi, Feynman appelle $\underline{x}(t)$ le vrai trajet, c'est-à-dire celui recherché, et $x(t)$ un trajet d'essai tel que :

$$x_i(t_i) = \underline{x}_i(t_i) + \eta(t_i)$$

L'idée de Feynman est de considérer, pour chaque valeur t_i , des fonctions $x_i(t_i)$, $\underline{x}_i(t_i)$ et $\eta(t_i)$ associées au trajet considéré de t_1 à t_2 .

Le lagrangien, sous l'intégrale d'action, est noté L et n'est rien d'autre qu'une fonction classique de t associée à la variation de la variable t le long du chemin de $x_1(t_1)$ à $x_2(t_2)$. Ainsi, sur cette fonction classique, les opérations de dérivation, de développement limité, etc., peuvent s'effectuer sans autres précautions particulières que celles concernant les règles des mathématiques de base. Il n'en serait pas de même pour un lagrangien noté \mathcal{L} représentant une fonctionnelle associée à l'ensemble des chemins et dont la variation serait fonction du chemin.

La méthode considère des trajets qui partent tous du point $x_1(t_1)$ et qui finissent tous au point $x_2(t_2)$.

Feynman porte $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$ dans la formule de l'action et obtient :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

Puis en développant le carré précédent et en se limitant au premier ordre concernant la fonction η , il écrit :

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{second ordre}).$$

Ainsi, l'énergie cinétique sous l'intégrale d'action est :

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{second ordre}).$$

L'énergie potentielle s'obtient en considérant η suffisamment petit pour autoriser le développement en série de Taylor suivant (en se limitant toujours au premier ordre pour la fonction η) :

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + (\text{second ordre et au delà}),$$

Avec :

* $V'(\underline{x})$ la dérivée première de V par rapport à \underline{x} par économie d'écriture.

Feynman obtient donc pour l'expression de S mentionnée plus haut :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (\text{second ordre et au delà}) \right] dt.$$

Sachant que :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) \right] dt,$$

la variation δS de l'intégrale d'action de $x_1(t_1)$ à $x_2(t_2)$ s'écrit (en laissant de côté ce que Feynman nomme « *second ordre et au-delà* ») :

$$\delta S = S - \underline{S}$$

soit :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt.$$

En considérant les deux effets de bord $x_1(t_1)$ et $x_2(t_2)$ tels que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, Feynman intègre l'expression précédente par partie et obtient :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2x}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt$$

qui peut encore s'écrire :

$$\frac{\delta S}{\delta \eta} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2x}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt$$

signifiant que l'action $S(t)$ est minimum pour :

$$\frac{\delta S}{\delta \eta} = 0,$$

soit :

$$- V'(\underline{x}) = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de la dynamique $F = ma$ dont la force F est conservative, et Feynman de conclure :

« Donc, au moins pour un système conservatif, nous venons de montrer que le principe de moindre action donne la réponse exacte ; il indique que le trajet suivant lequel l'action est minimum est celui qui satisfait la loi de Newton. »⁸⁰

80. Ibid

Annexe 15

Année 1940 : Résultats connus et idées en cours sur l'Electrodynamique classique

(Voir Chapitre 3 : *Vers l'intégrales de chemins*)

Afin d'étayer les réflexions de Wheeler suite aux idées de Feynman, nous traçons les premiers travaux sur l'Electrodynamique classique en détaillant :

- * les potentiels de Liénard-Wiechert¹²⁵ (1898),
- * les travaux de Schwarzschild¹²⁶ sur l'action mutuelle de deux électrons en mouvement, interagissant l'un sur l'autre à distance (1903),
- * l'idée de Hugo Tétrode¹²⁷ rappelant le principe de Mach (1922),
- * les travaux de Fokker¹²⁸ conduisant à une dynamique rigoureuse invariante et relativiste associée à un système isolé d'électrons ponctuels (1929),
- * les travaux de Dirac¹²⁹ (1938) associés à une interprétation différente de celle de Lorentz pour ce qui concerne le rayonnement d'une particule accélérée (voir la résistance de rayonnement que nous avons vu en sous-section 3.2.1.b et en section 1.2.2.

1- Les potentiels de Liénard-Wiechert

Ce sont, dans un contexte classique et non-relativiste, les potentiels vecteur A (le vecteur est représenté en caractère gras) et scalaire V du champ électromagnétique (encore appelés

125. Feynman. « *Le cours de physique : électromagnétisme 1* ». Traduction A. Crémioux et M.-L. Duboin.

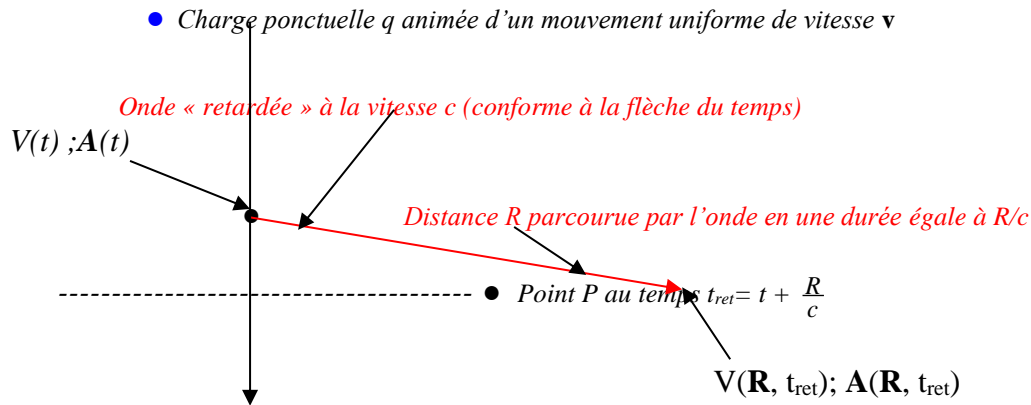
126. Schwarzschild. « *Zur Elektrodynamik. I. Zwei Formen des Prinzips kleinstein Action in der elektronen Theorie* ». Nachr. Göttingen». 1903 ; Henri Arzelès. « *Relativistic Point Dynamics* ». 1972 ; Walter Ritz. « *Recherches critiques sur l'Electrodynamique Générale* ». Annales de Physique 152 à 158, volume 13, page 145. 1908.

127. Tétrode. « *Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamic* ». Zeitschrift für Physik. Volume 10, pages 157-181. 1922 ; Wheeler-Feynman. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». 1945.

128. Fokker. « *Ein invariantar Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen* ». Zeitschrift für Physik, vol. 58, page 386. 1929 ; Darrigol. « *Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948)* ». 1982.

129. Dirac. « *La Théorie de Dirac. Proceedings of the Royal Society of London* ». Vol. 167, p. 148, 1938 ; Darrigol. « *Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948)* ». 1982.

potentiels retardés) créés en tout point P de l'espace par une charge ponctuelle q animé d'un mouvement uniforme de vitesse v , tels que représentés par le dessin suivant :



La charge q induit un champ électromagnétique au point P situé à une distance R tel que ce point reçoive au temps $t_{ret} = t + \frac{R}{c}$, les ondes émises au temps t par la charge q . En d'autres termes, le point P reçoit les ondes électromagnétiques de vitesse c émises par la charge q avec un retard $\frac{R}{c}$.

En utilisant les équations de Maxwell, Liénard et Wiechert obtiennent au point P :

$$V(\mathbf{R}, t_{ret}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - vR/c)} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}, t_{ret}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{(R - vR/c)},$$

avec :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}\left(t_{ret} - \frac{R}{c}\right).$$

Les intensités des champs électrique et magnétique se font à l'aide des formules ci-avant donnant les potentiels vecteur et scalaire de Liénard-Wiechert, soit :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

2- Les travaux de Schwarzschild sur l'action mutuelle de deux électrons

En 1903 Schwarzschild exprime le Lagrangien c'est-à-dire la fonction de Lagrange (qu'il nomme « potentiel électrocinétique ») d'un électron en mouvement dans un champ électromagnétique, sous la forme de deux termes :

$$-mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{e\vec{A}\cdot\vec{v}}{c} - eV\right).$$

Le premier terme $-mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ représente l'énergie cinétique de l'électron libre.

Le second terme $\left(\frac{e\vec{A}\cdot\vec{v}}{c} - eV\right)$ exprime l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique.

L'équation du Lagrangien s'écrit donc :

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} + \left(\frac{e\vec{A}\cdot\vec{v}}{c} - eV\right)$$

avec :

- * m la masse propre de l'électron,
- * e la charge électrique de l'électron,
- * \vec{v} la vitesse de l'électron,
- * \vec{A} le potentiel vecteur du champ électromagnétique,
- * V le potentiel scalaire du champ électromagnétique,
- * c la constante exprimant la vitesse de la lumière dans le vide.

Schwarzschild introduit les potentiels retardés de Liénard et Wiechert dans ce qu'il nomme son « potentiel électrocinétique » c'est-à-dire dans l'équation de L précédente.

Et pour cela, il injecte dans L les expressions de $V(\mathbf{R}, t_{ret})$ et de $\vec{A}(\mathbf{R}, t_{ret})$ que nous avons vu ci-avant.

Puis il exprime l'action mutuelle exercée par deux électrons en mouvement sans faire intervenir la notion de champ rayonné occupant tout l'espace. La force s'exerce donc sans l'intermédiaire du champ et prend la forme d'une action à distance entre les charges. La distance entre les deux charges étant égale à R , cette force est ressentie par l'autre charge après le même laps de temps $\frac{R}{c}$ que la propagation des ondes électromagnétiques (voir en d.1 ci-avant).

Cette force trouvée par Schwarzschild a la forme remarquable :

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} ; \quad F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_y} - \frac{\partial L}{\partial y} ; \quad F_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_z} - \frac{\partial L}{\partial z} ;$$

et cette forme est celle des équations de Lagrange.

Rappelons que la force conservative associée au champ est explicitement contenue dans les équations de Lagrange suivantes, déduites du principe de moindre action :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{dont} \quad \partial v_i = \partial \dot{x}^i \quad \text{avec} \quad i=1 \text{ à } 3 \quad \text{tel que} \quad x^1=x, x^2=y, x^3=z.$$

La force F_i précédente ($F_1 = F_x, F_2 = F_y, F_3 = F_z$) est non conservative du fait de la non prise en compte par Schwarzschild de la notion de champ. Ainsi, dans l'hypothèse de celui-ci, l'instantanéité de l'action disparaît au profit d'une action à distance munie d'un décalage dans le temps égal à $\frac{R}{c}$.

Il est intéressant de noter que Rudolf Clausius (1822-1888), cherchant à rendre compte des effets électromagnétiques à l'aide d'actions à distances, a obtenu la même forme pour l'expression des trois forces précédentes avec la seule différence que les actions étaient instantanées.

3- L'idée de Tétrode sur l'interaction des particules élémentaires entre elles

En 1922, Tétrode publie un article dans lequel il associe tout rayonnement à une interaction entre une source et un absorbeur. S'il n'y a pas d'absorbeur, alors il n'y a pas de rayonnement : « *The sun would not radiate if it were alone in space and no other bodies could absorb its radiation.* »¹³⁰

Pour Tétrode la conservation de l'énergie est fonction de la contribution des champs électromagnétiques associés à toutes les particules élémentaires interagissant entre elles.

En d'autres termes, les particules élémentaires agissent sur d'autres particules élémentaires et jamais sur elles-mêmes, ce qui a pour conséquence de ne pas tenir compte du problème de *self énergie* de chacune des particules. Ainsi, tous les rayonnements émis par les électrons sont complètement absorbés dans le système total des charges.

Cette idée n'est pas sans rappeler le principe de Mach (toujours à l'état de conjecture) formulé en 1893 par Ernst Mach (1838-1916). Il s'agit plutôt d'une conviction selon laquelle le caractère inertiel d'un référentiel est déterminé par la distribution de l'ensemble des masses de l'Univers. De manière analogue avec ce qui se passe pour les charges électriques, toutes les masses dans l'Univers interagiraient entre elles. Et l'inertie des objets matériels serait induite par l'ensemble de toutes les autres masses présentes dans l'Univers, sans tenir compte de leur masse propre.

4- les travaux de Fokker concernant un système isolé d'électrons ponctuels

Fokker cherche un principe variationnel pour décrire le système isolé d'électrons ponctuels. Pour ce faire, il utilise non pas les potentiels retardés de Liénard et Wiechert, mais la demi-somme des potentiels avancés et retardés.¹³¹

Nous pouvons expliquer le point de vue de Fokker de la manière qui suit. Soient deux électrons S (Source) et A (Absorbeur) à une distance R l'un de l'autre. Au temps t l'électron S induit des ondes électromagnétiques qui sont reçues au temps $t_{ret} = t + R/c$ par l'électron A. Cette action à distance exploitée par Liénard et Wiechert est décrite par les équations de Maxwell. Or les équations de Maxwell étant symétriques par rapport au temps, rien n'empêche de considérer un temps t_{av} associé à des ondes dites « avancées » qui seraient reçues par l'électron Absorbeur avant d'être parti de l'électron Source. Tout se passe donc comme si au temps t_{ret} l'électron Absorbeur recevait aussi les ondes avancées qui seront émises par l'électron Source au temps t_{av} .

Pour ces ondes « avancées », l'effet précède la cause. Elles correspondent pour l'électron Source à des ondes émises dans le futur au temps t_{av} . Ainsi au temps t_{ret} la flèche du temps t_{av} à t_{ret} est négative, comme si l'onde « avancée » remontait le temps à la vitesse c de la lumière, de l'Absorbeur vers la Source.

Nous verrons en section 3.2.2 comment Wheeler va interpréter la solution « avancée » pour expliquer la résistance de rayonnement en écartant l'interaction de l'électron sur lui-même afin de résoudre le problème des infinis.

En considérant la demi-somme des potentiels avancés et retardés, Fokker a l'intuition de s'affranchir des interactions non instantanées entre les charges. Et ceci lui permet d'utiliser le calcul variationnel appliqué au principe de moindre action classique.

L'« action » de Fokker est fonction de l'action relativiste des particules libres et de l'action résultant de l'interaction à distance des charges prises deux à deux, tout le long de la trajectoire. Cette dernière est basée sur une interaction entre deux charges communiquant par l'intermédiaire de rayons lumineux.

130. Tétrode. « *Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamic* ». Zeitschrift für Physik. Volume 10, pages 157-181. 1922.

131. Darrigol. « *Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948)* ». Thèse de doctorat (Université Paris I : Panthéon-Sorbonne). 1982.

5- La théorie de Dirac de 1938 pour remédier aux difficultés persistantes de l'électrodynamique quantique (le problème des infinis)

Nous avons vu au chapitre 1, section 1.2.2, la motivation de Dirac quant à l'obtention d'une construction plus élaborée de la théorie classique, en particulier la nécessité de trouver une explication beaucoup plus rationnelle du processus de rayonnement électromagnétique. Dirac voulait pouvoir expliquer la compensation de la perte d'énergie d'une particule animée d'un mouvement non uniforme autrement qu'en faisant appel à l'auto-interaction de cette particule (sa self énergie) qui engendre des problèmes d'infinis insurmontables.

Lorentz avait proposé une première solution basée sur l'auto-interaction de la particule et nous savons que cela conduisait à des divergences suggérant un raisonnement incorrect, la nature ne pouvant tolérer des énergies infinies.

Dirac a donc repris le problème en reprenant le travail de Fokker sur l'idée des champs avancés et retardés et il le relie à un rayonnement amorti associé à un champ d'amortissement pour expliquer la perte d'énergie. Parallèlement il construit une équation tensorielle traduisant la conservation de l'énergie-impulsion du champ électromagnétique associé au mouvement de l'électron.

Malgré l'absence de divergence pour l'équation obtenue, la formulation de Dirac a pour défaut de ne pas justifier physiquement la présence d'un tel champ d'amortissement.

Annexe 16

L'espace-temps et sa représentation dans le cône de lumière

(Voir Annexe 18 §2)

Montrons comment est obtenue l'expression $(d\alpha)^2$ ainsi que sa représentation dans le cône de lumière.

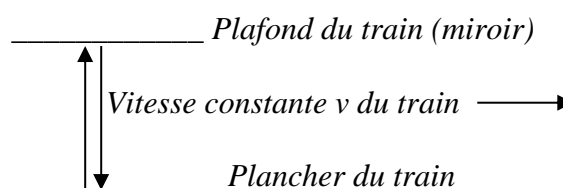
1- Description de l'espace-temps

L'expression $(d\alpha)^2$ est issue de la théorie de la relativité restreinte d'Einstein publiée en 1905. Par une analyse subtile des mesures de distance et de durée, la relativité restreinte établit entre les notions d'espace et de temps une liaison inattendue, dont les célèbres formules de la transformation de Lorentz sont l'expression mathématique.

Exprimons le ralentissement du temps t' d'un système S' (t') en translation rectiligne de vitesse constante v non négligeable par rapport à la vitesse de la lumière, par rapport à un système S (t). En effet, des observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres attribuant des durées différentes à un même phénomène, cherchons à comparer ces durées en postulant l'invariance de la vitesse de la lumière « c » quel que soit le repère considéré.

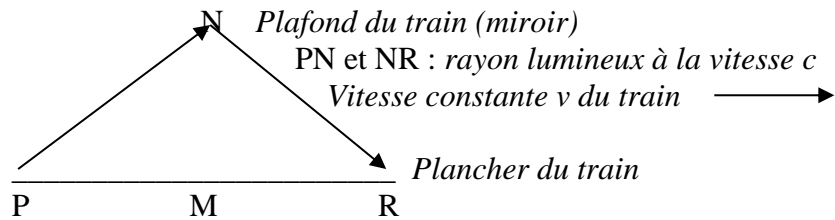
Prenons l'exemple d'un train en réalisant l'expérience de pensée suivante :

- Dans le train en mouvement, nous envoyons du plancher un rayon lumineux vers le plafond, où il est réfléchi par un miroir vers son point de départ. Si « d » est la hauteur du train, pour l'observateur O' dans le train, le temps t' mis par le rayon lumineux pour faire l'aller-retour est :



$$t' = 2d/c \quad (1)$$

- Considérons maintenant le même événement vu par l'observateur O sur le quai de la gare :



Pendant l'expérience, le train se déplace par rapport au quai : pour l'observateur O sur le quai, le rayon lumineux part de P et arrive sur le miroir en N et il revient sur le plancher en R. Pour l'observateur O, le rayon lumineux a donc parcouru une distance plus longue (les deux côtés du triangle isocèle PNR au lieu de deux fois la hauteur d), mais avec la même vitesse c , ce qui lui a pris plus de temps.

Cette constatation s'exprime quantitativement à l'aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle PNR de la manière suivante :

$$NM^2 = PN^2 - (PR/2)^2 \quad (2)$$

Si « t » désigne la durée de l'événement pour l'observateur O au repos sur le quai, la distance parcourue par le rayon lumineux à l'aller est, pour cet observateur :

$$PN = (ct)/2 \quad (3)$$

et la distance parcourue par le train pendant ce temps t est :

$$PR = vt \quad \text{soit} \quad (PR/2) = (vt)/2 \quad (4)$$

Sachant que $NM = d$, injectons (3) et (4) dans (2) pour obtenir :

$$d^2 = [(ct)/2]^2 - [(vt)/2]^2 \quad \text{soit} \quad t^2 = 4 \frac{d^2}{c^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (5)$$

Injectons (1) dans (5) pour obtenir le temps propre suivant :

$$t' = t \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

c'est-à-dire en petites variations selon l'axe des x caractérisant un espace-temps à une dimension spatiale (v et c étant des constantes) :

$$c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2$$

ou bien :

$$d\alpha^2 = c^2 dt^2 - dx^2,$$

que l'on peut encore écrire:

$$d\alpha = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} dt.$$

Dans l'espace-temps tridimensionnel on obtient :

$$d\alpha^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

qui est le quadrivecteur de l'espace-temps de Minkowski encore appelé métrique de Minkowski.

L'invariance du carré de l'intervalle d'espace-temps $d\alpha$, est une propriété centrale de la relativité restreinte. En effet, le paramètre $d\alpha$ est le produit de la constante de la vitesse de la lumière c par l'écoulement du temps local dt' (temps propre)¹⁵⁵ et ce dernier qui est une grandeur physique mesurant l'écoulement du temps à bord du système S' , doit évidemment avoir la même valeur pour tout référentiel inertiel. Et c'est à travers la transformation de Lorentz qu'a lieu l'invariance de l'intervalle d'espace-temps relativement à tout système inertiel pris pour référence.

Ainsi, les différences de coordonnées dans un autre système d'inertie, donnent la même expression à travers la transformation de Lorentz¹⁵⁶.

En d'autres termes, le groupe que composent les transformations de Lorentz est isomorphe à celui que forment les opérations laissant invariante la forme quadratique

$$d\alpha^2 = c^2 dt'^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Le groupe d'isométrie laissant invariant l'intervalle ds^2 est appelé groupe de Poincaré ayant comme sous-groupe le groupe de Lorentz.

Nous pouvons aussi exprimer que la distance entre deux points de l'espace-temps est l'intervalle entre deux événements associés à la ligne d'univers subissant le temps propre t' de la relativité restreinte. Ce temps propre t' est donc le paramètre naturel, invariant, repérant un point c'est-à-dire un événement sur la trajectoire d'espace-temps¹⁵⁷.

2- Le cône de lumière

Le cône de lumière est centré en un événement A . Il constitue une hypersurface définie dans l'espace-temps à quatre dimensions (trois d'espace et une de temps), tel que pour l'ensemble des points P (situés sur le cône) l'intervalle, au sens relativiste, entre A et P soit nul.

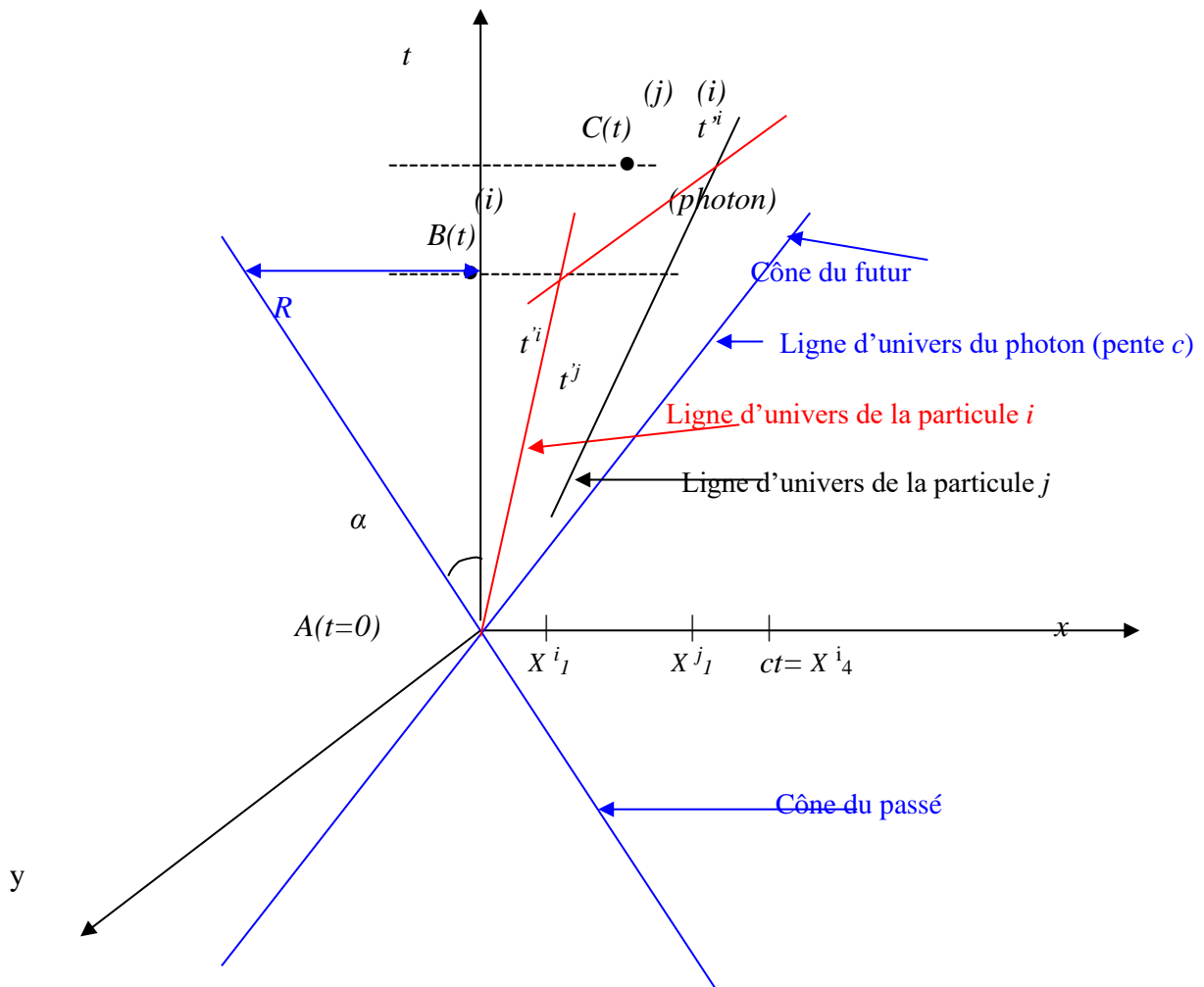
Ainsi, pour un intervalle d'espace-temps égal à zéro, la ligne d'univers qui est celle du photon, se situe le long du cône (les points P). Pour un intervalle d'espace-temps situé à l'intérieur du cône, la particule en mouvement possède une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière.

Soit le dessin ci-après :

155. Ibid.

156. A. Einstein (1952). « *Conceptions scientifiques, morales et sociales*. Flammarion ». Pages 50 et 51.

157. Rougé (2004). « *Introduction à la relativité*. Les éditions de l'école polytechnique ». §4.3.1.



Pour simplifier, nous avons pris le cas où $y = 0$ pour un cône de lumière associé à un espace plan à deux dimensions (x et y) et considéré une charge i en mouvement à vitesse constante inférieure à la vitesse de la lumière sur sa ligne d'univers à l'intérieur du cône.

Le passage de la charge i au point A ($x=y=t=0$) constitue l'événement A , celui au point B l'événement B ($x = X^{i_1}$; $y=0$; t). La métrique ds est l'intervalle d'espace-temps entre les événements A et B .

On peut écrire :

$$* dX^i_{\mu} = dX^{i_1} = dx = x - 0,$$

$$* dX^i_{\mu} = dX^{i_4} = dt = t - 0.$$

La métrique ds est telle que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2,$$

et traduit intrinsèquement la liaison entre l'espace et le temps de la relativité restreinte dont la transformation de Lorentz est l'expression mathématique (voir sous-section 3.2.2.c.2). L'expression ds^2 est égale au carré de l'intervalle d'espace-temps entre les événements A et B .

Cet intervalle est caractérisé par le produit de la constante que représente la vitesse de la lumière c dans le vide par le temps propre t^i de la charge i en mouvement sur sa ligne d'univers.

Montrons que pour $ds^2 = 0$, c'est-à-dire $c^2 dt^2 = dx^2$, la ligne d'univers devient celle du photon de lumière matérialisée par le cône de lumière :

Sur le dessin l'équation de cône est la suivante :

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = R^2 \quad \text{dans laquelle } R^2 = (tga)^2 (\Delta t)^2,$$

or :

$$tga = R / \Delta t = (c \Delta t) / \Delta t = c.$$

d'où:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = c^2 (\Delta t)^2,$$

c'est-à-dire:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = c^2 (dt)^2.$$

Et pour $dy = 0$ on a :

$$(dx)^2 = c^2 (dt)^2$$

traduisant le mouvement du photon sur le cône de lumière.

Pour un cône de lumière centré sur un événement B lié à la particule i sur sa ligne d'univers, un événement C vérifiant la relation :

$$(X^{i_1} - X^{j_1})^2 + (X^{i_2} - X^{j_2})^2 + (X^{i_3} - X^{j_3})^2 - (X^{i_4} - X^{j_4})^2 = 0,$$

soit pour notre dessin:

$$(X^{i_1} - X^{j_1})^2 - (X^{i_4} - X^{j_4})^2 = 0,$$

associe le cône de lumière de la charge i , à la présence de photons issus de l'interaction entre la particule chargée i et la particule chargée j . L'interaction est matérialisée par le point C et peut s'interpréter sur notre dessin par la désintégration électron i – positron j , donnant naissance aux photons. En ce qui concerne deux particules chargées dont l'interaction à distance se propage à la vitesse c de la lumière, citons Ericourgoulhon dans son livre "relativité restreinte, des particules à l'astrophysique" (CNRS EDITIONS 2010) page 374 : « ... la propagation de l'interaction s'effectue à la vitesse de la lumière et est assurée par le terme $\delta(I_{ij}^2)$. En effet, si on fixe un événement $B(t^i)$ appartenant à la ligne d'univers de la particule n^i , ce terme ne va retenir dans l'intégrale sur t^j que les événements qui vérifient $(X^{i_\mu} - X^{j_\mu}) \cdot (X^{i_\mu} - X^{j_\mu}) = g_{\mu\mu} (X^{i_\mu} - X^{j_\mu})(X^{i_\mu} - X^{j_\mu}) = 0$, autrement dit les événements qui appartiennent au cône de lumière de $B(t^i)$. »

Annexe 17

Point de vue épistémologique associé au concept $exp [iS/\hbar]$

(Voir Chapitre 3, sous-section 3.2.3.d : *Vers l'intégrales de chemins*)

L'aspect purement indéterministe de la mécanique quantique constitue le contexte même dans lequel le concept d'intégrale de chemins prend toute sa dimension. Aussi, cette perception apparaît dès la première section 1.2.1.a dans laquelle nous analysons de manière assez détaillée les travaux de Max Planck.

Nous tenons ainsi à montrer que tout événement associé au monde de l'infiniment petit (les particules subatomiques) est régi selon une théorie physique faisant usage du calcul des probabilités ne répondant pas au principe de causalité.

Cette notion de probabilité, intrinsèquement contenue dans les interactions entre particules, ne doit pas être confondue avec des événements de l'environnement macroscopique qui nous entoure. En effet, le résultat d'une épreuve particulière d'un jeu dit « de hasard », s'il provient d'un calcul de probabilité, reste déterministe. Prenons l'exemple du jet d'une pièce de monnaie. Si l'on pouvait mesurer la force et la vitesse initiale imparties à la pièce lors de sa lancée, si l'on pouvait définir avec précision l'angle de départ de la pièce par rapport au sol, si l'on pouvait connaître de manière permanente l'état de l'air au fur et à mesure du mouvement de cette pièce, nous pourrions déterminer si la pièce arrive au sol côté pile ou face. Dans ce cas, le calcul des probabilités traite de familles de phénomènes dont les déroulements individuels sont trop complexes pour qu'on puisse les calculer.

Soulignons que d'un point de vue épistémologique, à priori et sauf preuve du contraire, les phénomènes macroscopiques qui nous entourent (par exemple l'action associée à l'intégrale de chemin, par exemple la notion d'énergie assurant notre quotidien) relèvent, tout comme les phénomènes microscopiques, du même calcul des probabilités. Mais dans le monde macroscopique que nous appréhendons, les ordres de grandeur, vis-à-vis de ce que nous nommerons la constante de Planck, sont tels que cette probabilité devient une certitude. Aussi, dans notre vie de tous les jours, les phénomènes macroscopiques revêtent un caractère déterministe, qui semble répondre au principe de causalité.

Expliquons un peu plus en détail ce qui est écrit ci-avant.

Rappelons que Schrödinger a établi son équation temporelle (voir section 1.2.1.f) à partir de la théorie classique des ondes et vibrations, dont la représentation est la suivante :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{i\varphi} = \Phi(x, y, z) e^{i\omega t} = \Phi(x, y, z) e^{i2\pi\nu t}.$$

En utilisant la relation d'Einstein $\nu = E / h$, Schrödinger obtient :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{i2\pi\nu E/h} = \Phi(x, y, z) e^{(i/\hbar)Et},$$

soit :

$$\Psi(x, t) = \Phi(x) e^{(i/\hbar)Et},$$

dans le cas où l'on considère, pour simplifier, l'espace à une seule dimension selon l'axe des x .

Cette équation exprime les fonctions d'onde $\Psi(x,t)$ des états stationnaires en fonction du temps, et sont solutions de l'équation de Schrödinger du système quantique considéré. En d'autres termes, elles constituent la description de tout système physique en mécanique quantique (postulat).

Max Born a montré que la probabilité de trouver une particule au point de coordonnée x à l'instant t est égale à $|\Psi(x,t)|^2$ (voir section 1.2.1.f).

Dans l'expression des fonctions d'onde :

$$\Psi(x, t) = \Phi(x) e^{(i/\hbar)Et},$$

le terme « E multiplié par t » définissant une énergie par un temps, est une grandeur physique caractérisant globalement l'état de la fonction d'onde et de son évolution dans le temps. Et c'est justement cette évolution de la fonction d'onde qui est associée au mouvement de la particule en fonction du temps. Aussi, ce mouvement de la particule obéit au principe de moindre action formalisé par l'intégrale par rapport au temps (entre un temps initial t et un temps final t') de la quantité L appelé Lagrangien du système, c'est-à-dire :

$$S = \int_t^{t'} L(x, \dot{x}) dt.$$

De fait, Dirac dans sa publication de 1933, a montré que le noyau K dont parle Feynman ci-avant dans sa conférence Nobel, est analogue à $\exp [\frac{i}{\hbar} S]$ avec S l'action classique évaluée le long du chemin classique de la particule. Et il a suggéré que ce noyau K (appelé propagateur) définit l'amplitude de la probabilité d'évolution de la particule d'un point de coordonnée initiale x à un instant t à un point de coordonnée finale x' à un instant t' , et de plus qu'il est formulé comme étant le chemin qui relie le point (x,t) au point (x',t') . Remettant en question cette notion « d'analogie », Feynman, comme nous le verrons plus bas, a montré en retrouvant l'équation de Schrödinger, que ce noyau $K(x',x)$ [noté $(q_{t+dt}|q_t)$ par Dirac dans son article de 1933] est en vérité proportionnel à $\exp [\frac{i}{\hbar} S]$ via une constante de proportionnalité qu'il va calculer. Ce noyau, véritable processus quantique, est associé au chemin suivi par la particule [la probabilité pour la particule d'aller du point (x,t) au point (x',t')]. Nous reviendrons plus en détail (au chapitre 4) sur la notion de phase S/\hbar liée à la constante de normalisation, car cette notion est directement liée à la genèse des intégrales de chemins par le *principe* dit de Feynman.

Ce qui vient d'être écrit et la réflexion suivante nous permet de comprendre la notion de probabilité intrinsèque contenue dans le noyau $K(x',x)$ analogue à $\exp [\frac{i}{\hbar} S]$, c'est-à-dire en fait proportionnelle à $\exp [\frac{i}{\hbar} S]$ via une certaine constante de normalisation :

* Considérons la physique microscopique pour laquelle S est de l'ordre de grandeur de \hbar :

L'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de (x,t) à (x',t') [que nous écrivons $K(x',x)$ ou $(q_{t+dt}|q_t)$] en utilisant respectivement les notations de Feynman ou de Dirac] est :

$$\left| \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right] \right|^2 \text{ avec } S/\hbar \cong 1.$$

* Considérons la physique macroscopique pour laquelle S est très grand devant \hbar :

L'amplitude de probabilité d'évolution de la particule de (x,t) à (x',t') est :

$$\left| \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right] \right|^2 \text{ avec } S/\hbar \text{ très grand devant } 1$$

* .Dans le cas de la physique macroscopique, la nature reste discontinue, mais elle tend vers une notion déterministe car l'incertitude tend à disparaître du fait que la probabilité d'évolution de la particule de (x,t) à (x',t') tend à devenir une certitude.

Annexe 18

Mécanisme du rayonnement d'une particule accélérée et principe de moindre action pour les charges ponctuelles évoluant sur leur ligne d'univers (Wheeler-Feynman :1941, 1945, 1949)

(Voir Chapitre 3, sous-section 3.2.2.c : *Vers l'intégrales de chemins*)

Analysons les trois publications de Wheeler-Feynman de 1941, 1945 et 1940.

1- Réaction de l'Absorbeur comme Mécanisme d'Amortissement Radiatif (21 février 1941)¹⁴⁶

Les postulats énoncés dans la publication du 21 février 1941 sont les suivants :

- * une charge ponctuelle accélérée ne rayonne aucune énergie,
- * les champs électromagnétiques qui agissent sur une particule donnée proviennent seulement des autres particules,
- * ces champs sont représentés par des solutions pour moitié avancées et pour moitiées retardées des équations de Maxwell associées aux particules de Liénard-Wiechert.

De plus, les auteurs rappellent les idées de Tétrode concernant l'interaction entre une source rayonnante et des détecteurs de radiation répartis à sa périphérie qu'il appelle des « absorbeurs ». En effet, Wheeler et Feynman postulent qu'aucune source située dans un univers donné ne saurait rayonner sans matière absorbante située dans sa périphérie. C'est justement la matière absorbante, excitée, qui communique en retour le champ électromagnétique à la « charge source » accélérée et ceci indépendamment des propriétés de la matière.

La non-causalité (l'effet précède la cause) associée aux ondes « avancées » telle qu'il en est question en Annexe 15 §4, est dépassée par Wheeler et Feynman de la façon suivante :

146. WHEELER John & FEYNMAN Richard (21 Février 1941). Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping . Physical Review , volume 59. Page 683.

* le champ résultant (le champ total) présent en un point x à l'instant t , associé à n particules en interaction dans l'univers décrit précédemment, est :

$$\mathbf{E}_{total}(x,t) = \sum_n \frac{\vec{E}n_{ret}(x,t) + \vec{E}n_{av}(x,t)}{2},$$

* en postulant dans l'article en question : « *This part is equivalent to one-half the retarded field minus one-half the advanced field generated by the charge.* », signifiant en d'autres termes que les équations de Maxwell sont symétriques par rapport au temps, Wheeler et Feynman peuvent écrire:

$$\mathbf{E}(x,t) = \sum_n \frac{\vec{E}n_{ret}(x,t) - \vec{E}n_{av}(x,t)}{2} = 0,$$

* alors tout naturellement:

$$\mathbf{E}_{total}(x,t) = \sum_n \frac{\vec{E}n_{ret}(x,t) + \vec{E}n_{av}(x,t)}{2} + \sum_n \frac{\vec{E}n_{ret}(x,t) - \vec{E}n_{av}(x,t)}{2} = \sum_n \vec{E}n_{ret}(x,t),$$

et donc le modèle considéré par Wheeler et Feynman ne voit que l'effet du champ retardé, solutionnant ainsi le paradoxe de la non-causalité.

Le titre de la publication est assez explicite quant à l'objectif poursuivi par Wheeler et Feynman. En effet, les deux auteurs veulent trouver une parade à l'équivalent de la force engendrée par la source (l'électron accéléré) suite à sa perte d'énergie par rayonnement, telle que le prévoit Lorentz (voir sous-section 2.2.1.a). Aussi, se réfèrent-ils aux hypothèses de Dirac de 1938¹⁴⁷ en insistant sur le fait que dans leur théorie le problème de causalité est, du coup, tout naturellement résolu : « *It produces radiative damping (Dirac's expression) and combines with the field of the source to give retarded effects alone.* »

Car pour Wheeler et Feynman, les théories de l'absorbeur et des potentiels mi-avancés, mi-retardés, permettent non seulement de postuler la présence d'un champ d'amortissement généré par l'absorbeur (l'ensemble des charges autre que la particule source) mais aussi de justifier de sa présence. Et ce champ électromagnétique d'amortissement se substitue à la force interne de la source associée à la résistance de radiation (hypothèse de Lorentz), en agissant en lieu et place de celle-ci : il n'y a pas d'onde rayonnée par l'électron accéléré mais seulement un ensemble d'ondes composées dû aux autres charges situées à sa périphérie (l'absorbeur), n'entraînant ainsi aucune perte d'énergie par rayonnement de la part de la « particule source ».

Laissons Feynman s'exprimer sur ce qui précède: « *Il devint ainsi clair qu'en supposant toutes les sources entourées par un milieu absorbant l'intégralité de la lumière émise, alors nous pouvions rendre compte de la résistance radiative comme due à une action directe des charges de l'absorbeur réagissant sur la source par des ondes avancées.* »¹⁴⁸

Wheeler et Feynman vont plus loin que Dirac car ils calculent le champ agissant sur la « particule source » référencée arbitrairement par « I » (considérant évidemment toujours aucune auto-interaction pour chaque particule) à sa propre position x_I à l'instant t . L'originalité de ce calcul par rapport aux travaux de Dirac, est d'être reliée au contexte d'un univers associé à la théorie de l'absorbeur de tétrode, expliquant ainsi l'origine du champ d'amortissement. La théorie de Dirac de 1938 ne justifiait pas la présence d'un tel champ d'amortissement. Non

147. Dirac. « *La Théorie de Dirac. Proceedings of the Royal Society of London* ». Vol. 167, p. 148, 1938.

148. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 244.

seulement Wheeler et Feynman justifient de sa présence mais ils montrent que celle-ci permet de résoudre le paradoxe de la non-causalité des ondes avancées, qui n'avait pas été abordé par le physicien-mathématicien anglais.

Ainsi, Wheeler et Feynman considèrent l'expression de Dirac suivante :

$$\mathbf{E}_{\text{amortissement}}(x_1, t) = \frac{\vec{E1}_{ret}(x_1, t) - \vec{E1}_{av}(x_1, t)}{2},$$

dans laquelle le champ d'amortissement associé à l'absorbeur agit sur la particule source référencée « 1 » en x_1 à l'instant t .

Le champ total agissant sur la particule source « 1 » au point d'espace x_1 à l'instant t est donné par :

$$\mathbf{E}_{\text{total}}(x_1, t) = \sum_{n \neq 1} \frac{\vec{E}n_{ret}(x_1, t) + \vec{E}n_{av}(x_1, t)}{2}$$

Les équations de Maxwell étant symétriques par rapport au temps, Wheeler et Feynman écrivent :

$$\mathbf{E}(x_1, t) = \sum_n \frac{\vec{E}n_{ret}(x_1, t) - \vec{E}n_{av}(x_1, t)}{2} = 0,$$

et obtiennent tout naturellement:

$$\mathbf{E}_{\text{total}}(x_1, t) = \sum_{n \neq 1} \frac{\vec{E}n_{ret}(x_1, t) + \vec{E}n_{av}(x_1, t)}{2} + \sum_n \frac{\vec{E}n_{ret}(x_1, t) - \vec{E}n_{av}(x_1, t)}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{E}_{\text{total}}(x_1, t) = \left[\sum_{n \neq 1} \vec{E}n_{ret}(x_1, t) \right] + \left[\frac{\vec{E1}_{ret}(x_1, t) - \vec{E1}_{av}(x_1, t)}{2} \right],$$

$n \neq 1$

soit :

$$\mathbf{E}_{\text{total}}(x_1, t) = \left[\sum_{n \neq 1} \vec{E}n_{ret}(x_1, t) \right] + \left[\mathbf{E}_{\text{amortissement}}(x_1, t) \right].$$

Par cette interprétation du champ électromagnétique total sur « la particule source » en x_1 à l'instant t , Wheeler et Feynman se dispensent du problème de la divergence de la « self-énergie » de l'électron. L'expression du champ d'amortissement de Dirac pour laquelle on reprochait toute justification physique devient dès lors réaliste grâce à la théorie de l'absorbeur.

2- Interaction avec l'Absorbeur comme Mécanisme de Rayonnement (avril 1945)¹⁴⁹

Cette publication donne une explication très détaillée de la théorie présentée le 21 février 1941¹⁵⁰ à l'American Physical Society à Cambridge dans le Massachusetts, que nous avons vu précédemment au §1.

Dans la note en bas de page 157 de l'article présentement analysé, les auteurs expliquent qu'il s'agit d'un troisième « jet » parmi deux déjà existants. En effet, en plus de la publication associée à la présentation du 21 février 1941¹⁵¹, un résumé très succinct avait été rédigé par Feynman¹⁵².

Dans cet article, le champ électromagnétique est représenté par le tenseur F_{mn} , tel que :

$$F_{mn} = (\partial A_n / \partial x^m) - (\partial A_m / \partial x^n).^{153}$$

Il s'agit d'un tenseur d'ordre 2, de dimension 4, c'est-à-dire contenant 16 composantes, représenté sous la forme matricielle suivante :

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x/c \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y/c \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z/c \\ iE_x/c & iE_y/c & iE_z/c & 0 \end{pmatrix}$$

avec :

* \mathbf{H} le champ magnétique ayant pour composantes spatiales H_x, H_y, H_z ,

* \mathbf{E} le champ électrique ayant pour composantes spatiales E_x, E_y, E_z ,

* \mathbf{A} le quadri-vecteur caractérisant les propriétés du champ électromagnétique dont les composantes sont des fonctions de coordonnées et du temps. Les trois composantes spatiales de ce 4-vecteur sont constituées par les composantes du potentiel-vecteur du champ électromagnétique ($A_1=A_x, A_2=A_y, A_3=A_z$). La composante temporelle de ce 4-vecteur est imaginaire et s'exprime à l'aide du potentiel scalaire V du champ électromagnétique sous la forme $A_4=iV$.

Les composantes du champ magnétique \mathbf{H} sont liées à celles du potentiel-vecteur \mathbf{A} par :

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

A partir des expressions du Lagrangien exprimé par Schwarzschild (voir Annexe 15 §2) et du tenseur électromagnétique, on retrouve l'ensemble des quatre équations de Maxwell, décrivant la structure et l'évolution du champ électromagnétique dans le vide en fonction des charges électriques présentes. Ces équations de Maxwell sont valables pour tout système de

149. Wheeler et Feynman. 1945. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». Reviews of Modern Physics. Volume 17.

150. Wheeler et Feynman. 21 Février 1941. « *Reaction of the Absorber as the Mechanism of Radiative Damping* ». Physical Review, volume 59.

151. Ibid.

152. Feynman. Début 1941. « *The Interaction Theory of Radiation* ». Feynman Papers, Caltech, folder 6.1.

153. Wheeler et Feynman. 1945. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». Reviews of Modern Physics. Volume 17. Note 12 page 166.

coordonnées décrivant l'espace-temps de Minkowski déterminé par le quadrivecteur ou métrique :

$$(d\alpha)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \text{ }^{154}$$

Cette métrique est une façon de mesurer la distance infinitésimale entre deux points voisins. De proche en proche, elle permet d'évaluer l'intervalle infinitésimal entre deux points quelconques de l'espace-temps, c'est-à-dire entre deux « événements » infiniment proches, repérés chacun par trois coordonnées de position (x, y, z) et une coordonnée de temps (t).

Afin de nous familiariser avec la notion d'espace-temps dont il est question ici et aussi dans les travaux de Feynman que nous verrons ultérieurement, nous montrons en Annexe 16 comment est obtenue l'expression $(d\alpha)^2$ ainsi que sa représentation dans le cône de lumière . Cette expression caractérise l'espace-temps dans lequel sont représentés les diagrammes de Feynman issus des intégrales de chemins.

Considérant la particule « a » positionnée en coordonnées a de sa ligne d'univers, Wheeler et Feynman introduisent pour la métrique de Minkowski (associée au tenseur $g_{\mu\nu}$ de Minkowski) le système de notation d'Einstein suivant :

$$g_{\mu\nu} da^\mu da^\nu \quad \text{avec} \quad \mu, \nu = 1 \text{ à } 4$$

pour obtenir :

$$g_{11}(da^1)^2 + g_{22}(da^2)^2 + g_{33}(da^3)^2 + g_{44}(da^4)^2$$

avec :

$$g_{44} = -1 ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1 ; \quad g_{21} = \dots = g_{31} = \dots = g_{43} = 0$$

et :

$$(da^4)^2 = (c dt)^2 ; \quad (da^1)^2 = dx^2 ; \quad (da^2)^2 = dy^2 ; \quad (da^3)^2 = dz^2 ,$$

d'où l'obtention:

$$d\alpha^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -(g_{\mu\nu} da^\nu) da^\mu = -da_\mu da^\mu, \text{ }^{158}$$

qui peut aussi s'écrire:

$$d\alpha^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\mu\nu} da^\nu da^\mu = da_\mu da^\mu .$$

Pour $d\alpha^2 = 0$ l'intervalle d'espace-temps est dit du genre lumière (la trajectoire de type photon se situe le long du cône de lumière).

Pour $d\alpha^2 > 0$ l'intervalle d'espace-temps est dit du genre temps (la trajectoire c'est-à-dire la ligne d'univers de la particule se situe à l'intérieur du cône de lumière).

Dans la publication d'avril 1945, les trois postulats du 21 février 1941 sont rappelés tels quels avec en plus : « *Sufficiently many particles are presents to absorb completely the radiation given off by the source.* »¹⁵⁹

154. Ibid.

158. Wheeler et Feynman. 1945. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». Reviews of Modern Physics. Volume 17. Note 12 page 166.

159. Ibid. Page 160.

De plus, les auteurs insistent sur le fait que l'absorbeur est physiquement à l'origine du champ électromagnétique d'amortissement donné par l'expression de Dirac que nous avons vu au §1¹⁶⁰.

Dans un premier temps, Wheeler et Feynman montrent que la force de rayonnement¹⁶¹ associée à la résistance de radiation pour une « particule source » de charge électrique « e » en mouvement à la vitesse $\frac{d^2a}{dt^2} = \ddot{a}$:

$$f \text{ amortissement} = \frac{2e^2 \ddot{a}}{3c^2},$$

provient non pas de la « particule source » en question mais des potentiels avancés liés à cette charge via l'absorbeur : « *We conclude that the force of radiative reaction arises, not from the direct action of a particle upon itself, but from the advanced action upon this charge caused by the future motion of the particles of the absorber.* »¹⁶²

La démonstration est élégante. L'expression de la force d'amortissement est donnée sans être démontrée. Nous trouvons une excellente démonstration de cette force dans le livre de Lev Landau (1908-1968) sur la Théorie des Champs.¹⁶³

Dans un deuxième temps, Wheeler et Feynman expliquent l'obtention des expressions situées à la fin du §1, en utilisant le calcul tensoriel appliqué à la « particule source a » en mouvement « accéléré » sur sa ligne d'univers.¹⁶⁴

Ainsi, la réaction de l'absorbeur sur la « particule source » est décrite par un champ F_{mn} qui est directement associé au champ retardé R_{mn} issu de cette source à une distance r par l'équation¹⁶⁵ :

$$F_{mn} = -r \int (\partial R_{mn} / \partial x^4) (d\Omega / 4\pi),$$

Avec :

* Ω l'angle solide sous-tendu par une portion de surface S de rayon r tel que :

$$d\Omega / 4\pi = dS / r^2,$$

$$* R_{mn} = (\partial A_n / \partial x^m) - (\partial A_m / \partial x^n),$$

$$* A_m \text{ les potentiels vecteurs retardés : } A_m = 2e \int \dot{a}^m(\alpha) \delta(x a_\mu x a^\mu) d\alpha,$$

$$* x a_\mu = x_\mu - a_\mu = da_\mu,$$

$$* x a^\mu = x^\mu - a^\mu = da^\mu,$$

* μ varie de 1 à 4,

* a^1, a^2, a^3 , les trois coordonnées spatiales,

$$* a^4 = ct, \text{ c'est-à-dire } da^4 = c dt,$$

* δ la fonction de distribution « delta » de Dirac du carré de l'intervalle spatio-temporel invariant $(x_\mu - a_\mu) \cdot (x^\mu - a^\mu)$ entre deux points de la trajectoire associés à la ligne d'univers de la « particule source a » ;

160. Ibid.

161. Ibid. Page 158.

162. Ibid. Page 162.

163. Landau et Lifchitz. 1994. « *Théorie des Champs* ». Page 270.

164. Wheeler et Feynman. 1945. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». Reviews of Modern Physics. Volume 17. Note 12 page 166.

165. Ibid. Page 167.

soit : $d\alpha^2 = MM'.MM' = (x_\mu - a_\mu).(x^\mu - a^\mu) = da_\mu da^\mu$ (voir plus avant), alors, $\delta(x a_\mu x a^\mu) = \delta(d\alpha^2)$; le long des cônes de lumière l'intervalle d'espace-temps s'annule, c'est-à-dire $d\alpha^2 = x a_\mu x a^\mu = 0$.¹⁶⁶

3- Electrodynamique Classique en Termes d'Action Interparticulaire Directe (juillet 1949)¹⁶⁷

Nous avons vu plus haut que tout le travail de Wheeler et Feynman effectué courant 1940 et 1941 a été consigné dans les publications de 1941, 1945, 1949, la dernière guerre étant passé par là. Si la publication de 1941 constitue un résumé assez succinct de leurs travaux, celle de 1945 que nous venons de voir veut prouver que la résistance de rayonnement est établie par l'action à distance dans le cas d'un système complètement absorbant : « *A complete correspondance is established between action at a distance and the usual formulation of field theory in the case of a completely absorbing system.* »¹⁶⁸

Pour ce qui concerne la publication de 1949, elle est capitale dans le sens où elle rend compte de l'équation classique de l'action associée aux interactions entre particules que Feynman cherchera à discrétiser. Et c'est justement ce travail d'échantillonnage propre à la mécanique quantique qui va constituer la genèse des intégrales de chemins lors des travaux de Feynman pendant les années 1940 et 1941.

Dans cet article est décrit avec précision, dans le cas de l'électrodynamique classique, le mouvement des particules conformément au principe de moindre action : « *Each particle moves in compliance with the principle of stationary action.* »¹⁶⁹

Les travaux de Schwarzschild, Tétrode et Fokker (voir Annexe 15) dont s'inspirent Wheeler et Feynman, sont analysés afin de vérifier leur consistance : « *To investigate the consistency of the Schwarzschild-Tetrode-Fokker theory of direct interparticle and its relation to field theory, we have first to examine in the next section the paradox of advanced interactions.* »¹⁷⁰

L'originalité des travaux de Wheeler et Feynman réside dans le fait que la théorie de l'absorbant et des actions données par les solutions pour moitié avancées et pour moitié retardées des équations de Maxwell, sont exprimables dans les termes du principe de moindre action pour les charges ponctuelles évoluant sur leur ligne d'univers : « *In the evaluation of the action, J, from (1), the world lines of the several particles are considered to be known for all time.* »¹⁷¹

Dans cet article de 1949, les auteurs rappellent les postulats mis en avant¹⁷² :

* *the motion of a given particle is determined by the sum of the fields produced by – or adjunct to – every particle other the given particle,*

* *the field adjunct to a given particle is uniquely determined by the motion of that particle, and is given by half the retarded plus half the advanced solution of the field equations of Maxwell for the point charge in question,*

166. Ibid.

167. Wheeler et Feynman. 1949. « *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action* ». Reviews of Modern Physics. Volume 21.

168. Wheeler et Feynman. 1945. « *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation* ». Reviews of Modern Physics. Volume 17. Note 12 page 181.

169. Wheeler et Feynman. 1949. « *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action* ». Reviews of Modern Physics. Volume 21. Page 425.

170. Ibid. Page 426-427.

171. Ibid. Note 8, page 425.

172. Ibid. Page 426.

et la distinction qu'il convient d'observer par rapport à la théorie classique du champ électromagnétique :¹⁷³

* *there is no such concept as « the » field, an independent entity with degrees of freedom of its own,*

* *there is no action of an elementary charge upon itself and consequently no problem of an infinity in the energy of the electromagnetic field,*

* *the symmetry between past and future in the prescription for the fields is not a mere logical possibility, as in the usual theory, but a postulational requirement.*

De même que dans l'article de 1945, les auteurs utilisent le calcul tensoriel associé au quadrivecteur de l'espace-temps de Minkowski¹⁷⁴ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (da^1)^2 - (da^2)^2 - (da^3)^2 = (da^4)^2 - (da^1)^2 - (da^2)^2 - (da^3)^2 = - da_\mu da^\mu ,$$

avec:

- * μ variant de 1 à 4,
- * a^1, a^2, a^3 , les trois coordonnées spatiales,
- * $a^4 = c t$, c'est-à-dire $da^4 = c dt$.

Dans le contexte que nous venons de décrire, Wheeler et Feynman, sans jamais mentionner la notion de champs ou d'ondes, trouvèrent une forme pour l'action qui ne dépend que du mouvement de N particules chargées soumises au calcul variationnel.

L'expression de cette action dans la publication de 1949 est la suivante :

$$J = - \sum_a m_a c \int (-da_\mu da^\mu)^{1/2} + \sum_{a < b} (e_a e_b / c) \iint \delta(ab_\mu ab^\mu) da_\nu db^\nu = \text{extremum}$$

avec :

- * m_a la masse d'une particule, en l'occurrence la particule a ; etc. ...
- * e_a la charge d'une particule a ; e_b la charge d'une particule b ; etc. ...
- * $a b_\mu = a_\mu - b_\mu$ tel que défini par la convention de sommation d'Einstein,
- * $a b^\mu = a^\mu - b^\mu$.

Pour toutes les trajectoires des N particules chargées a, b, \dots , en mouvement sur leur ligne d'univers, les deux auteurs définissent l'action J par la somme des intégrales mentionnées. Le principe de moindre action dit que la trajectoire physique effectivement suivie, de coordonnées spatio-temporelle $a^\mu(t)$ pour chaque particule, est celle qui rend J minimale (extrémale).

De manière plus explicite, l'action J s'écrit :

$$J = \sum_{a=1}^N m_a c \int (da_\mu da^\mu)^{1/2} + \sum_a^N \sum_{b=a+1}^N (e_a e_b / c) \iint \delta(ab_\mu ab^\mu) da_\nu db^\nu$$

Avec :

173. Ibid. Page 426.

174. Ibid. Note 8, page 425.

* $(da_\mu da^\mu)^{1/2} = ds$, l'intervalle d'espace-temps associé à la ligne d'univers de la particule considérée c'est-à-dire à sa trajectoire,

* $\delta(ab_\mu ab^\mu) = \delta[(\mathbf{a}_\mu - \mathbf{b}_\mu) \cdot (\mathbf{a}^\mu - \mathbf{b}^\mu)]$ la fonction de distribution « delta » de Dirac du carré de l'intervalle spatio-temporel invariant $(\mathbf{a}_\mu - \mathbf{b}_\mu) \cdot (\mathbf{a}^\mu - \mathbf{b}^\mu)$ entre deux points des lignes d'univers correspondant aux charges prises deux à deux, tout le long de leur trajectoire¹⁷⁵.

Le premier terme de J est la somme des actions relativistes individuelles des particules libres. Ce terme est strictement équivalent au premier terme du Lagrangien issu des travaux de Schwarzschild exprimés en Annexe 15 §2. En fait, comme suggéré au §2, ce premier terme est la somme des intégrales du temps propre associé à chaque particule.

Le deuxième terme de J , au moyen de l'intégrale double, décrit l'interaction électrique entre les particules. Il s'agit de l'action résultant de l'interaction à distance des charges deux à deux, tout le long de leur trajectoire c'est-à-dire de leur ligne d'univers. C'est une somme sur toute les paires de charge. Ainsi, il n'y a d'interaction que lorsque l'intervalle spatio-temporel invariant $(\mathbf{a}_\mu - \mathbf{b}_\mu) \cdot (\mathbf{a}^\mu - \mathbf{b}^\mu)$ s'annule, c'est-à-dire le long des cônes de lumière¹⁷⁶. En d'autres termes, la fonction-delta est telle que l'interaction se produit seulement lorsque les deux particules chargées considérées sont reliées par un rayonnement lumineux, signifiant que ces deux particules sont situées de telle manière que si l'une envoie une information sous forme d'un signal lumineux, l'autre la reçoit.

Ainsi : «*The argument $ab_\mu ab^\mu$ of the delta-function thus vanishes when and only when the location of the two particles in space-time can be connected by a light ray. Here the delta-function $\delta(x)$ is the usual symbolic operator defined by the conditions $\delta(x)=0$ when $x \neq 0$ and $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx=1$.*»¹⁷⁷

Des informations complémentaires de ce qui précède, sont données par Feynman lui-même lors de sa conférence Nobel¹⁷⁸, par Schweber¹⁷⁹ et par Mehra¹⁸⁰.

Dans sa conférence Nobel, Feynman retrace comment Wheeler et lui-même ont interprété, dans les années 1940, l'expression de l'action en grande partie inspirée par les travaux de Schwarzschild, Tétrode et Fokker (voir Annexe 15).

Aussi, dans cet article l'équation de l'action devient :

$$A = \sum_i m_i \int (\dot{x}^i_\mu \dot{x}^i_\mu)^{1/2} da_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} e_i e_j \iint \delta(I_{ij}^2) \dot{x}^i_\mu(\alpha_i) \dot{x}^j_\mu(\alpha_j) da_i da_j,$$

* pour le premier terme :

→ il s'agit (comme précédemment) de la somme des actions relativistes individuelles des particules considérées comme libres, sur leur ligne d'univers,

175. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 246.

176. Ibid. Page 246.

177. Wheeler et Feynman. 1949. « *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action* ». Reviews of Modern Physics. Volume 21. Note 8, page 425.

178. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Pages 245-252 ; « *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics* ». Nobel Lecture, December 11, 1965.

179. Schweber « *Feynman and the visualisation of space-time processes* ». Pages 459, 460, 477, 478.

180. Mehra. « *The Beat of a Different Drum. The Life and Science of Richard Feynman* ». Pages 111, 115.

→ par rapport aux deux expressions de J précédentes, $c = 1$ par mesure de simplification d'écriture,

→ m_i est la masse propre de la $i^{\text{ème}}$ particule appartenant à l'ensemble des charges électriques en interaction,

→ X^i_μ est le quadri-vecteur associé à la coordonnée spatio-temporelle de la $i^{\text{ème}}$ particule se mouvant sur sa ligne d'univers (son chemin propre associé à son temps propre invariant).

Ces coordonnées sont fonction d'un certain paramètre α_i qui est souvent exprimé par le temps définissant successivement la pente de la ligne d'univers (à l'intérieur du cône de lumière) sur laquelle se meut la particule i . La ligne d'univers est le chemin, encore appelé trajectoire, de la particule i soumise à son temps propre t' .

→ $\dot{X}^i_\mu = dX^i_\mu / d\alpha_i$ pour la $i^{\text{ème}}$ particule,

→ l'expression sous l'intégrale peut être mise sous la forme suivante :

$$(\dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu)^{1/2} d\alpha_i = [(dX^i_\mu / d\alpha_i)(dX^i_\mu / d\alpha_i)]^{1/2} d\alpha_i = [(dX^i_\mu)^2]^{1/2}$$

soit :

$(\dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu)^{1/2} d\alpha_i = [(dX^i_1)^2 + (dX^i_2)^2 + (dX^i_3)^2 - (dX^i_4)^2]^{1/2}$; sous-entendant le tenseur de Minkowski $g_{\mu\nu} = g_{\mu\mu}$ (dans lequel $\mu = \nu$) en facteur avec $\dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu$,

d'où :

$$(\dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu)^{1/2} d\alpha_i = [ds^2]^{1/2} = [c^2 dt'^2]^{1/2} = [c^2 dt'^2]^{1/2} = dt' \text{ (car on pose } c=1\text{),}$$

« Le premier terme dans l'expression de A est l'intégrale du temps propre, l'action ordinaire de la mécanique relativiste pour des particules de masse m_i (suivant la convention, nous sommes sur l'indice répété μ). »¹⁸¹

* pour le deuxième terme :

→ $c = 1$ par mesure de simplification d'écriture,

→ le facteur $1/2$ permet d'éviter les auto-interactions en excluant les termes $i=j$ afin de ne compter qu'une fois chaque paire de particules ; de plus en supprimant les termes de la somme où $i = j$, Wheeler et Feynman éliminent l'auto-interaction. De fait, les deux auteurs solutionnent le problème des infinis associé à l'auto-énergie infinie dans l'électrodynamique classique,

→ e_i est la charge de la particule i ,

→ e_j est la charge de la particule j ,

→ X^i_μ est le quadri-vecteur associé à la coordonnée spatio-temporelle de la $i^{\text{ème}}$ particule se mouvant sur sa ligne d'univers (son chemin propre associé à son temps propre invariant),

→ X^j_μ est le quadri-vecteur associé à la coordonnée spatio-temporelle de la $j^{\text{ème}}$ particule se mouvant sur sa ligne d'univers (son chemin propre associé à son temps propre invariant),

→ $\dot{X}^i_\mu = dX^i_\mu / d\alpha_i$ pour la $i^{\text{ème}}$ particule,

→ $\dot{X}^j_\mu = dX^j_\mu / d\alpha_j$ pour la $j^{\text{ème}}$ particule,

→ $I_{ij} = (X^i_\mu - X^j_\mu)$,

→ $I_{ij}^2 = (X^i_\mu - X^j_\mu) \cdot (X^i_\mu - X^j_\mu)$, c'est-à-dire:

181. Feynman. « L'électrodynamique quantique et l'espace-temps ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 246.

$I_{ij}^2 = (X^i_1 - X^j_1)^2 + (X^i_2 - X^j_2)^2 + (X^i_3 - X^j_3)^2 - (X^i_4 - X^j_4)^2$; sous-entendant le tenseur de Minkowski $g_{\mu\nu} = g_{\mu\mu}$ (dans lequel $\mu = \nu$) en facteur avec I_{ij}^2 ,

→ « L'interaction est une intégrale double sur une fonction « delta » de Dirac du carré de l'intervalle spatio-temporel invariant I^2 entre deux points des trajectoires. Ainsi, il n'y a d'interaction que lorsque cet intervalle s'annule, c'est-à-dire le long des cônes de lumière. »¹⁸²

De manière plus précise, l'intervalle spatio-temporel est associé à deux points des trajectoires (les lignes d'univers) des particules i et j prises deux à deux.

L'annulation de I_{ij}^2 liée à $\delta(I_{ij}^2)$ tel que $\delta(I_{ij}^2)=I$ ¹⁸³, correspond à un espace-temps du genre lumière. Aussi, à cet espace-temps du genre lumière est associé l'apparition d'un photon en mouvement le long du cône de lumière (en fait la ligne d'univers du photon). Ainsi, la propagation de l'interaction entre la particule i et la particule j s'effectue à la vitesse de la lumière : le boson photon constituant le vecteur de propagation de l'interaction électromagnétique. Et cette propagation est assurée par le terme δ .

En effet, si on considère un événement sur la ligne d'univers de la particule i , celui-ci ne va conserver dans l'intégrale sur $d\alpha_j$ que les événements qui vérifient

$$(X^i_1 - X^j_1)^2 + (X^i_2 - X^j_2)^2 + (X^i_3 - X^j_3)^2 - (X^i_4 - X^j_4)^2 = 0,$$

c'est-à-dire les événements qui appartiennent au cône de lumière associé à la particule i (les deux nappes passée et futur du cône de lumière sont concernées).

→ dans un objectif épistémologique, remanions l'expression :

$$[\dot{X}^i_\mu(\alpha_i) \dot{X}^j_\mu(\alpha_j) d\alpha_i d\alpha_j]$$

en tenant compte du tenseur de Minkowski implicitement sous-entendu :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \dot{X}^i_\mu(\alpha_i) \dot{X}^j_\mu(\alpha_j) d\alpha_i d\alpha_j &= [g_{\mu\nu} \dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu]^{1/2} d\alpha_i [g_{\mu\nu} \dot{X}^j_\mu \dot{X}^j_\mu]^{1/2} d\alpha_j \\ &= [g_{\mu\nu} (dX^i_\mu / d\alpha_i) (dX^i_\mu / d\alpha_i)]^{1/2} d\alpha_i [g_{\mu\nu} (dX^j_\mu / d\alpha_j) (dX^j_\mu / d\alpha_j)]^{1/2} d\alpha_j \\ &= [(dX^i_1)^2 + (dX^i_2)^2 + (dX^i_3)^2 - (dX^i_4)^2]^{1/2} [(dX^j_1)^2 + (dX^j_2)^2 + (dX^j_3)^2 - (dX^j_4)^2]^{1/2} \\ &= [(ds^i)^2]^{1/2} [(ds^j)^2]^{1/2} = [c^2 (dt^i)^2]^{1/2} [c^2 (dt^j)^2]^{1/2} = dt^i dt^j \text{ si on pose } c = 1. \end{aligned}$$

Ainsi $[g_{\mu\nu} \dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu]^{1/2} d\alpha_i$ est l'élément du temps propre le long de la ligne d'univers de la particule i et $[g_{\mu\nu} \dot{X}^j_\mu \dot{X}^j_\mu]^{1/2} d\alpha_j$ celui de la particule j le long de sa ligne d'univers.

Le deuxième terme peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} e_i e_j \int_{t^i} \int_{t^j} \delta(I_{ij}^2) dt^i dt^j.$$

En définitive :

- Pour $\delta(I_{ij}^2)=0$, il n'y a aucune interaction et les particules chargées sont libres sur leur ligne d'univers (leur chemin),
- Pour $\delta(I_{ij}^2)=1$, il y a interaction à distance des particules chargées deux à deux, tout le long de leur chemin, c'est-à-dire de leur ligne d'univers. Cette interaction est conforme à l'action en mécanique relativiste puisqu'elle s'accompagne d'une intégration des temps propres des particules associées

182. Ibid.

183. Wheeler et Feynman. 1949. « *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action* ». Reviews of Modern Physics. Volume 21. Note 8, page 425.

à l'événement régi par la propagation d'un photon, vecteur de l'interaction électromagnétique. En effet, la condition pour que $\delta(I_{ij}^2) = 1$ est donnée par la validation des événements se situant le long du cône de lumière (c'est-à-dire appartenant au cône de lumière, ne se situant ni à l'intérieur, ni à l'extérieur de ce cône) conformément à un espace-temps de type lumière (la trajectoire ou ligne d'univers des photons).

Annexe 19

Formalisme Hamiltonien de la mécanique classique, opérateur Hamiltonien et formulation de l'action en mécanique quantique

(Voir Chapitre 3 §3.2.3.b : *Vers l'intégrales de chemins*)

1- Le formalisme Hamiltonien de la Mécanique Classique

Pour une particule soumise à un potentiel électrique V en mouvement à une vitesse v , la fonction « Hamiltonien H » constitue l'énergie totale classique associée à la particule en mouvement. Cette énergie totale est reliée à l'énergie cinétique E_c et à l'énergie potentielle E_p par :

$$H = E_c + E_p ,$$

et possède ainsi la dimension d'une énergie.

Le Lagrangien étant égal à (voir Annexe 14) :

$$L = E_c - V,$$

nous pouvons écrire :

$$H = 2E_c - L = 2(1/2)mv^2 - L = mv^2 - L = pv - L$$

avec:

* $p = mv$ la quantité de mouvement ou impulsion de la particule à un instant donné.

Remarquons ainsi que l'Hamiltonien H est indépendant de la vitesse de la particule conformément à la conservation de l'énergie au fur et à mesure du mouvement de cette particule :

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial pv}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial pv}{\partial v} - \frac{\partial \left[\left(\frac{1}{2}mv^2 \right) - V \right]}{\partial v} = p - mv = p - p = 0.$$

2- L'opérateur Hamiltonien de la Mécanique Quantique :

Nous avons vu en sous-section 1.2.1.f que l'équation de Schrödinger temporelle, pour une particule dans un potentiel scalaire (donc soumise à un champ électromagnétique) s'écrit de manière moderne :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi .$$

Nous savons par postulat (voir sous-section 1.2.1.f) que l'énergie totale associée à la particule est représentée par l'opérateur :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} .$$

Ainsi, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$E\Psi = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi .$$

Nous avons vu précédemment :

→ d'une part que l'énergie totale classique de la particule soumise au champ électromagnétique s'écrit :

$$H = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + V = \frac{(mv)^2}{2m} + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

→ et d'autre part (voir sous-section 1.2.1.g) la règle de correspondance suivante :

$$p \rightarrow -i \hbar \nabla \quad \text{c'est-à-dire} \quad p^2 \rightarrow -\hbar^2 \Delta$$

avec :

* ∇ l'opérateur nabla tel que $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

* Δ l'opérateur delta tel que $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

aussi, à la formulation $\frac{p^2}{2m} + V$ de la mécanique classique qui s'appelle l'Hamiltonien du système, il correspond l'opérateur suivant en mécanique quantique :

$$H = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) ,$$

qui est appelé « *opérateur Hamiltonien* » ou « *Hamiltonien* » du système quantique.

L'équation de Schrödinger peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$E\Psi = H\Psi \quad \text{ou bien encore} \quad H\Psi = E\Psi ,$$

avec :

* Ψ la fonction d'onde décrivant un état stationnaire d'énergie E ; Ψ étant l'état quantique du système « *particule en mouvement soumise au potentiel scalaire V* ». Dans un tel état, l'expression $|\Psi|^2$, comme nous l'avons vu en sous-section 1.2.1.f, détermine la densité de probabilité de présence de la particule dans un élément de volume donné associé à la valeur discrète de l'énergie E de la particule.

Notons que dans l'expression :

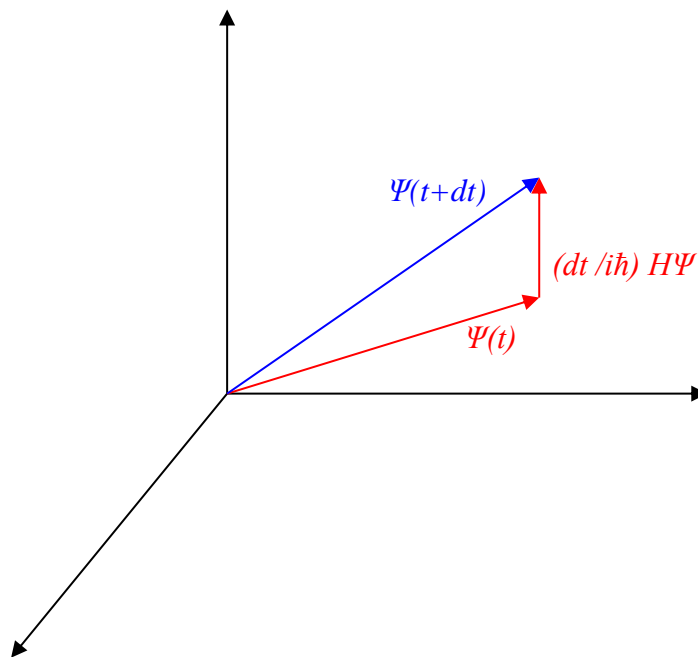
$$H\Psi = E\Psi ,$$

E est la valeur propre de l'opérateur H relative au vecteur propre Ψ . En effet, l'état quantique Ψ du système est représenté par un vecteur dans l'espace de Hilbert (voir Annexe 13). Et dans cet espace, les applications qui transforment un vecteur en un autre vecteur sont les entités que nous avons appelés ci-avant « *opérateurs* ». Aussi, pour quantifier une théorie classique, il faut faire correspondre aux quantités classiques des opérateurs de l'espace vectoriel. L'équation de Schrödinger devient donc justement dans l'espace de Hilbert l'équation $H\Psi = E\Psi$.

Mais laissons s'exprimer Feynman à propos de l'opérateur H de la mécanique quantique :

« ... le style de la mécanique quantique à l'époque était d'écrire la théorie sous la fameuse forme hamiltonienne – comme une équation différentielle, décrivant comment la fonction d'onde change d'instant en instant, à l'aide d'un certain opérateur H . Si la théorie classique pouvait s'écrire sous forme hamiltonienne, tout allait bien. »¹⁸⁷

Illustrons ce qui vient d'être écrit à l'aide du petit dessin suivant :



L'évolution du vecteur d'état Ψ dans le temps est décrite par l'équation de Schrödinger. En effet, en utilisant l'opérateur H , le calcul de l'état du système au moment suivant est :

$$\Psi(t+dt) = \Psi(t) + (dt/i\hbar) H\Psi$$

c'est-à-dire:

$$\Psi(t+dt) - \Psi(t) = \frac{dt}{i\hbar} H\Psi$$

soit :

187. Ibid. Page 253.

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H(t)\Psi(t),$$

qui est justement l'équation de Schrödinger.

3- La formulation de l'action en Mécanique Quantique

D'après ce qui précède, et pour revenir à la formulation de l'action en mécanique quantique, Feynman, dans sa conférence Nobel, ajoute :

« Quand l'action s'écrit comme l'intégrale d'une fonction (ordinairement appelée le Lagrangien) des positions et des vitesses à un certain instant :

$$A = \int L(\dot{x}, x) dt$$

alors vous pouvez partir du Lagrangien, former un Hamiltonien et puis passer à la théorie quantique, de façon plus ou moins unique. »

En fait, Feynman sous-entend de partir des équations d'Euler-Lagrange qui se déduisent du principe de moindre action, en procédant de la manière suivante :
soit les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} (\partial L / \partial \dot{q}^i)$$

avec :

$$* q^i \text{ tel que } q^1 = x, q^2 = y, q^3 = z$$

$$* \dot{q}^i = dq^i / dt = v^i \text{ tel que } v^1 = v_x, v^2 = v_y, v^3 = v_z$$

on peut donc écrire :

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

dans laquelle :

$$* L = p v - H \text{ comme défini en sous-section 3.2.3.a.}$$

d'où :

$$\frac{\partial(p^i v^i - H)}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(p^i v^i - H)}{\partial v^i} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial p^i v^i}{\partial v^i} - \frac{\partial H}{\partial v^i} \right] = \frac{d p^i}{dt}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial(p^i v^i)}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{d p^i}{dt}$$

$$\frac{m \partial (v^i(t))^2}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{d p^i}{dt}$$

$$\frac{dp^i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^i},$$

qui est la première équation canonique de Hamilton.

De plus, nous savons que :

$$H = E_c + E_p = \frac{1}{2} m(v_i)^2 + V = \frac{(p^i)^2}{2m} + V$$

ainsi :

$$\frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{2p^i}{2m} = \frac{p^i}{m} = \frac{mv^i}{m} = v^i = \frac{dq^i}{dt}$$

soit :

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i},$$

qui est la deuxième équation canonique de Hamilton.

Dans le formalisme Hamiltonien, les équations du mouvement deviennent $2i$ équations canoniques de Hamilton, permettant de calculer l'évolution du système « *particule en mouvement soumise au potentiel scalaire V* », c'est-à-dire :

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \quad \text{et} \quad \frac{dp^i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^i},$$

équivalentes aux i équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} (\partial L / \partial \dot{q}^i).$$

Et dans le formalisme Hamiltonien ainsi obtenu, le passage à la théorie quantique se fait d'une part en tenant compte de l'opérateur H comme montré plus haut et d'autre part en remplaçant les variables du moment (momentum variables : les p^i) par l'opérateur impulsion $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ (soit $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ mentionné dans la version originale de Feynman en anglais¹⁸⁸) dans la direction de x et ceci instant par instant :

« ... il n'existe pas de recette unique pour fabriquer une théorie quantique à partir d'une théorie classique, bien que tous les manuels vous laissent croire le contraire. Ils vous indiquent de chercher les variables de moment et de les remplacer par $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. »¹⁸⁹

188. Feynman. « *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics* ». Nobel Lecture, December 11, 1965.

189. Feynman. « *L'électrodynamique quantique et l'espace-temps* ». Conférence Nobel. Traduction H. Isaac, J.M. Lévy-Leblond, F. Balibar. Page 253.

Annexe 20

Première et seconde quantification

(Voir Chapitre 6 §6.3.1 : *Les aspects calculatoires de l'intégrale de chemins*)

1- Réflexion sur la première quantification via le théorème d'Ehrenfest

Rappelons que le théorème d'Ehrenfest se réfère au passage de la mécanique quantique à la mécanique classique en permettant de faire le rapprochement entre les mécaniques quantique et classique.

* Soit \mathbf{R} l'opérateur (ou l'observable) associée à la position \mathbf{r} d'une particule de masse m plongée dans un potentiel scalaire $V(\mathbf{R})$,

* Soit \mathbf{P} l'opérateur associé à l'impulsion \mathbf{p} de la particule considérée.

A partir de l'équation vue au paragraphe 2 de l'Annexe 19 :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) ,$$

On peut écrire :

$$H = \mathbf{P}^2/2m + V(\mathbf{R}) .$$

Dans ses travaux, Ehrenfest parvient aux deux relations suivantes :

* $m d\langle \mathbf{R} \rangle / dt = \langle \mathbf{P} \rangle$,

* $d\langle \mathbf{P} \rangle / dt = -\langle \Delta V(\mathbf{r}) \rangle = -\langle \mathbf{grad} V(\mathbf{r}) \rangle = -\langle \partial V(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r} \rangle$,

d'où :

$$m d^2 \langle \mathbf{R} \rangle / dt^2 = -\langle \Delta V(\mathbf{r}) \rangle .$$

Cette relation constitue le théorème d'Ehrenfest que nous illustrons de la manière suivante, en considérant, comme le fait le le physicien Jean Hladik dans sa publication de 2010 ³⁹⁰, l'équation de Newton ci-après :

$$\mathbf{F} = m d^2 \mathbf{r} / dt^2 = -\Delta V(\mathbf{r}) .$$

390. Hladik. 2010. « *Mécanique Quantique. Atomes et Noyaux. Applications technologiques* ». Dunod. Page 73.

Et comme l'écrit Jean Hladik :

Le théorème d' Ehrenfest va permettre de faire le rapprochement entre les mécaniques classique et quantique. Pour cela, considérons un paquet d'ondes représentant l'onde associée au corpuscule. Appelons centre du paquet d'ondes, à l'instant t , le point de coordonnée $\mathbf{R}(t)$. L'ensemble de ces points, au cours du temps, constitue la trajectoire suivie par le centre du paquet d'ondes, analogue à la trajectoire de la particule.

Le mouvement de ce centre vérifie-t-il les équations de la mécanique classique ?

En fait, pas tout à fait, car l'expression de la mécanique quantique :

$$m d^2 \langle \mathbf{R} \rangle / dt^2 = -\langle \Delta V(\mathbf{r}) \rangle.$$

assez diffuse dans le cas d'un paquet d'ondes, n'est pas rigoureusement égale à l'équation de Newton de la mécanique classique :

$$\mathbf{F} = m d^2 \mathbf{r} / dt^2 = -\Delta V(\mathbf{r}).$$

Cependant, si le paquet d'ondes est très localisé au voisinage de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, la fonction d'ondes $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ne prend de valeurs notables que dans un domaine très petit où $\Delta V(\mathbf{r})$ varie très peu. On peut donc considérer le paquet d'ondes comme constant dans ce domaine et écrire:

$$\langle \Delta V(\mathbf{r}) \rangle \approx [\Delta V(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \langle \Psi | \Psi \rangle = [\Delta V(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} .$$

Et Jean Hladik de conclure:

« La valeur moyenne est alors égale au gradient de $V(\mathbf{r})$, donc à la force \mathbf{F} classique.

On peut donc dire que la mécanique quantique rejoint la mécanique classique lorsque l'on considère certaines conditions limites³⁹¹.

2- La seconde quantification en Electrodynamique Quantique

Pour l'électrodynamique quantique en particulier, la seconde quantification consiste à considérer le champ électromagnétique comme un système physique et à remplacer les grandeurs \vec{E} et \vec{B} décrivant l'état du champ, par :

* d'une part un état quantique : la fonction d'onde après réduction du paquet d'ondes par analogie avec la première quantification,

* d'autre part des observables (des opérateurs) telles que nous en avons parlé en théorie quantique associée à une particule (voir section 2.2.5 : postulat 2).

En fait, « la "seconde quantification" permet par une substitution de langage de ne plus parler de la présence de telle particule à tel endroit, mais de nombres d'occupations d'états quantiques, éliminant ainsi les reliquats du langage classique des particules discernables, et elle justifie cet abandon de la discernabilité. »³⁹²

Nous démontrons facilement qu'en mécanique quantique associée à la particule, nous avons les relations suivantes :

$$\rightarrow \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^\mu} \quad \text{et} \quad \dot{p}^\mu = \frac{dp^\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (\text{voir première et deuxième équation canonique$$

de Hamilton au §3 de l'Annexe 19)

391. Ibid.

392. Darrigol. « Les débuts de la théorie quantique des champs (1925-1948) ». Thèse de doctorat.

$$\rightarrow H = pv - L = p \frac{dx^\mu}{dt} - L \quad (\text{voir §1 de l'Annexe 19})$$

$$\rightarrow p = \partial L / \partial \dot{x}^\mu \quad \text{car} : p = \partial pv / \partial v = \partial L / \partial v = = \partial L / \partial \dot{x}^\mu \quad (\text{voir §1 de l'Annexe 19})$$

$$\rightarrow \frac{dx^\mu}{dt} = \dot{x}^\mu = -\frac{i}{\hbar} [x^\mu, H]$$

$$\rightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = \dot{p}^\mu = -\frac{i}{\hbar} [p^\mu, H]$$

$$\rightarrow [x^\mu, x^\nu] = x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = 0 \Rightarrow x^\mu x^\nu = x^\nu x^\mu \quad (\text{commutation : structure de groupe abélien})$$

$$\rightarrow [p^\mu, p^\nu] = p^\mu p^\nu - p^\nu p^\mu = 0 \Rightarrow p^\mu p^\nu = p^\nu p^\mu$$

$$\rightarrow [x^\mu, p^\nu] = [x^\mu, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu}] = [x^\mu, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\nu}] = x^\mu \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^\mu = 0 - \frac{\hbar}{i} \delta_{\mu\nu} = i\hbar \delta_{\mu\nu} \quad (\text{voir}$$

sous-section 1.2.1.g partie a)

avec :

$$* \delta_{\mu\nu} \text{ le symbole de Kronecker tel que } \delta_{\mu\nu} = 1 \text{ si } \mu = \nu ; \text{ sinon } \delta_{\mu\nu} = 0.$$

Pour aborder la théorie quantique de l'électromagnétisme, il faut se représenter la fonction d'onde Φ par ses valeurs $\Psi(x^\mu, t)$, après réduction du paquet d'ondes, formant ainsi un ensemble discret de particules dans tout l'espace-temps. La théorie quantique des champs décrit donc de manière quantique l'évolution de ce système de particules dont le nombre de degrés de liberté est infini (exprimant ainsi le concept de champ), ce qui se traduit au niveau quantique par un nombre variable de particules de coordonnées d'espace-temps x^μ, t .

Ainsi, tout naturellement, Dirac a trouvé une analogie entre la position (x^μ, t) de la particule quantique dans l'espace-temps associé à la première quantification et la valeur $\Psi(x^\mu, t)$ qui, associée à l'ensemble discret de points x^μ , appartient à la fonction d'onde Φ représentant la notion de champ.

Rappelons l'ensemble du chapitre 5 dans lequel nous avons effectué un comparatif pour ce qui concerne l'étude de la mécanique quantique classique associée à une particule subatomique dans un contexte donné. Si les théories de Heisenberg, Schrödinger et Feynman (les intégrales de chemin) issues de concepts différents se rejoignent dans la notion d'observables et d'opérateurs liés aux grandeurs physique qu'il convient d'analyser, il faut bien avoir à l'esprit que dans le cas des diagrammes de Feynman élaborés à partir des intégrales de chemin associés à la théorie quantique des champ (et plus particulièrement à l'électrodynamique quantique : théorie quantique du champ électromagnétique), le concept d'opérateur est complètement différent.

En effet, dans les théories classiques de la mécanique quantique, la particule est décrite par la fonction d'onde, alors que dans les théories quantiques des champs la fonction d'onde fait office, par l'intermédiaire de $\Psi(x^\mu, t)$, d'opérateur de création et d'annihilation. Et c'est dans le contexte de la théorie quantique du champ électromagnétique associé à un nombre variable de particules subatomiques que Dirac, Feynman, Schwinger et Tomonaga on pu introduire de manière aisée les solutions d'énergie négative.

Rappelons aussi que la théorie quantique du champ électromagnétique (l'électrodynamique quantique associée au concept de champ vectorisé par le boson "photon") peut être généralisée par exemple à la théorie quantique des interactions fortes (la chromodynamique quantique associée au concept de champ vectorisé par le boson "gluon").

L'équivalent en théorie quantique des champs des équations précédentes de la mécanique quantique ondulatoire classique est donné respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{\Psi} &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Pi} \quad \text{et} \quad \dot{\Pi} = \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \Psi} \\ \rightarrow H &= \left(\int \Pi \frac{d\Psi}{dt} d^3x dt \right) - L = \left(\int \Pi \dot{\Psi} d\tau \right) - L \quad \text{avec l'intégrale étendue sur tout l'espace-temps } d\tau = d^3x dt = d^4x \\ \rightarrow \Pi &= \partial L / \partial \dot{\Psi} \\ \rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = \dot{\Psi} &= -\frac{i}{\hbar} [\Psi, H] \\ \rightarrow \frac{d\Pi}{dt} = \dot{\Pi} &= -\frac{i}{\hbar} [\Pi, H] \\ \rightarrow [\Psi_A, \Psi_B] &= \Psi_A \Psi_B - \Psi_B \Psi_A = 0 \Rightarrow \Psi_A \Psi_B = \Psi_B \Psi_A \quad (\text{commutation : structure de groupe abélien}) \\ \rightarrow [\Pi_A, \Pi_B] &= \Pi_A \Pi_B - \Pi_B \Pi_A = 0 \Rightarrow \Pi_A \Pi_B = \Pi_B \Pi_A \\ \rightarrow [\Psi_A, \Pi_B] &= i\hbar \delta^4_{AB} \quad \text{avec } \delta^4_{AB} \text{ la fonction delta de Dirac étendue sur tout l'espace-temps.} \end{aligned}$$

Ainsi a lieu le passage des paramètres d'une physique quantique pour laquelle l'objet ponctuel (la particule subatomique) est décrit par une fonction d'onde, à une physique quantique où l'objet ponctuel devient un champ continu.

Annexe 21

Changement et invariance de jauge

(Voir Chapitre 6 §6.4 : *Le critère d'invariance de jauge sur la véracité des résultats obtenus*)

1- Définition

La notion de jauge est associée à celle de mesure dans des domaines variés de la vie courante. En physique, le mot *jauge* peut s'identifier à la variation de longueur (une jauge) invariante à travers la transformation de Lorentz en dynamique relativiste (l'intervalle d'espace-temps da^2 vu au §1 de l'Annexe 16).

La fixation d'une jauge offre donc en physique la possibilité de rendre un système déterminé admettant une solution unique voire invariant à travers tout référentiel. Pour cela, il convient de choisir une jauge en se donnant une ou plusieurs équations supplémentaires.

Rappelons qu'en physique³⁹⁵⁻¹ la notion de symétrie est intimement liée à la notion d'invariance³⁹⁵⁻² renvoyant à la possibilité de considérer un même système physique selon plusieurs points de vue distincts en termes de description mais équivalents quant aux prédictions effectuées sur son évolution.

2- Choix de jauge en électromagnétisme classique garantissant la symétrie c'est-à-dire l'invariance du champ électromagnétique

Pour ce qui concerne l'électromagnétisme, les redéfinitions du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \vec{A} en fixant une fonction arbitraire $f = f(x, y, z, t)$ quelconque mais dérivable et en imposant à V et \vec{A} une relation telle que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f \quad \text{et} \quad V' = V - \frac{1}{\eta} \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \eta^2 = \epsilon_0 \mu_0 c^2 \quad (1)$$

395-1. Wikipedia. 18 Decembre 2018. « *Symétrie (physique)* ».

395-2. Wikipedia. 18 Decembre 2018. « *Invariance. Physique théorique* ».

permettent de décrire le champ électromagnétique. On dit qu'on effectue un choix de jauge, sinon aux mêmes champs \vec{E} et \vec{B} correspondent une infinité de potentiels \vec{A} et V puisque \vec{E} et \vec{B} dérivent respectivement des potentiels V et \vec{A} .

En d'autres termes, en théorie de l'électromagnétisme, le choix de jauge défini par les équations (1) garantit l'invariance du champ.

En effet :

* Les composantes classiques du champ magnétique \vec{B} dans le vide sont liées à celles du potentiel vecteur \vec{A} par :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

* Le vecteur champ électrique est lié au potentiel scalaire par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

* Primitive et dérivée s'expriment de la manière suivante :

$$f(x) = ax + k$$

soit :

alors :

$$\frac{df}{dx} = a \Rightarrow df = a dx \Rightarrow f(x) = \int df = \int a dx = ax + k \Rightarrow k \text{ est arbitraire.}$$

* Le fait que « a » dérive de la fonction f sur la variable x a pour conséquence que l'intégration de « a » sur cette variable x donne une multitude de fonctions f liées à la valeur arbitraire de k . En d'autres termes, à une même valeur de « a » correspond une infinité de fonctions f .

Ainsi, \vec{E} dérivant de V , à un même champ électrique \vec{E} correspond une infinité de potentiels scalaires V .

De même, \vec{B} dérivant de \vec{A} , à un même champ magnétique \vec{B} correspond une infinité de potentiels vecteurs \vec{A} .

Etant donné l'arbitraire du choix des potentiels scalaire et vecteur, il est raisonnable de vérifier que les résultats obtenus pour les champs électriques et magnétiques soient indépendants de la fixation de V et \vec{A} de part le choix de jauge associé à la prise en compte des équations (1).

Sachant que $\vec{E} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V$ et que $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$, on peut écrire :

$$\vec{E}' = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V' = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \overrightarrow{grad} f) - \overrightarrow{grad} (V - \frac{1}{\eta} \frac{\partial f}{\partial t})$$

c'est-à-dire:

$$\vec{E}' = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V = \vec{E}.$$

De même :

$$\begin{aligned} & \vec{B}' \\ &= \overrightarrow{rot} \vec{A}' = \overrightarrow{rot} (\vec{A} + \overrightarrow{grad} f) = \overrightarrow{rot} \vec{A} + \overrightarrow{rot} \overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{B}. \end{aligned}$$

Nous déduisons l'existence d'une invariance de jauge aussi nommée symétrie de jauge. On dira donc que dans le cas de l'électromagnétisme, il y a invariance du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} après redéfinition des potentiels électromagnétiques V et \vec{A} .

3- Changement et invariance de jauge locale en Mécanique Quantique non relativiste pour une particule soumise à un champ électromagnétique extérieur

Compte-tenu de l'arbitraire dans le choix des potentiels scalaire et vecteur, on peut aussi se demander si les résultats obtenus en mécanique quantique suivent la notion d'invariance (de symétrie) du champ électromagnétique pour un choix de jauge associé aux équations (1) vues précédemment.

Précisons encore que l'on appelle transformation ou changement de jauge une transformation d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire en un autre pour donner respectivement le même champ magnétique et le même champ électrique, c'est-à-dire le même champ électromagnétique (voir §2 ci-avant).

L'interaction électromagnétique, qui concrétise la notion même de champ électromagnétique est dite ***invariance de jauge***, car elle demeure invariante sous l'effet des transformations de jauge.

Montrons donc que les résultats physiques ne sont pas modifiés lorsqu'on effectue le changement de jauge en mécanique quantique tel qu'exprimé par la transformation des potentiels vecteur et scalaire associés à l'équation (1).

Pour cela, considérons l'équation de Schrödinger pour une particule placée dans un champ électromagnétique extérieur et soumise à l'action simultanée d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur.

Si \vec{A} est le potentiel vecteur du champ électromagnétique au point où se trouve la particule et $U = qV$ son énergie potentielle d'interaction électrique, son hamiltonien classique s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q \vec{A}(r,t)]^2 + q V(r,t).$$

Et si la particule est non relativiste et dépourvue de spin, alors le passage à la mécanique quantique s'effectue en suivant les règles de la première quantification, c'est-à-dire en remplaçant l'impulsion p par l'opérateur P et le vecteur \vec{A} par l'opérateur A .

L'opérateur hamiltonien s'écrit alors :

$$H = \frac{1}{2m} [P - qA(R,t)]^2 + q V(R,t).$$

Considérons l'équation de Schrödinger :

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

dans laquelle :

* H est l'hamiltonien correspondant aux potentiels \vec{A} et V .

* En considérant un « champ » d'électrons $\Psi(x)$ réparti dans l'espace (t est le temps et x la position d'un électron dans le « champ »), le module au carré de $\Psi(t,x)$ c'est-à-dire

$|\Psi(t,x)|^2$ est la probabilité de trouver un électron.

Effectuons un changement de jauge tel que les potentiels \vec{A}' et V' soient les suivants (voir équations (1) exprimée au §2 ci-avant) :

$$V' = V - \frac{1}{\eta} \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}f}.$$

Dans ce qui suit nous posons $\eta = 1$ pour simplifier les calculs et nous montrerons au §5 comment on obtient les équations (1).

Les potentiels \vec{A}' et V' conduisent naturellement à une autre équation de Schrödinger :

$$H' \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}.$$

En nous référant au résultat vu au chapitre 3, on peut poser en respectant l'homogénéité des unités :

$$\Psi' = \Psi \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right].$$

Ecrivons l'expression de H' compte-tenu du changement de jauge :

$$H' = \frac{1}{2m} [P - q A'(R,t)]^2 + q V'(R,t).$$

Soit :

$$\left\{ \frac{1}{2m} [P - q A'(R,t)]^2 + q V'(R,t) \right\} \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}. \quad (2)$$

En injectant (1) dans (2) tout en remplaçant l'impulsion p par l'opérateur P et le vecteur \vec{A} par l'opérateur A , on obtient :

$$\left\{ \frac{1}{2m} [P - q A - q \text{grad} f]^2 + q V - q \frac{\partial f}{\partial t} \right\} \Psi \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right]).$$

Tout calcul fait, on arrive à :

$$\left\{ \frac{1}{2m} [P - q A]^2 + q V \right\} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Ainsi, en partant de $H' \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}$, on arrive à $H \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ en introduisant une nouvelle interaction de la particule avec son environnement caractérisé par deux nouveaux champs de jauge V et \vec{A} obéissant chacun, comme nous l'avons vu, à la loi de transformation particulière contenue dans les équations (1).

Les fonctions d'onde Ψ et Ψ' ne diffèrent donc que par le facteur de phase $\exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right]$, ce qui n'affecte pas les résultats physiques. On comprend dès lors que pour palier au fait que la phase de la fonction d'onde Ψ ne soit pas observable, il a été nécessaire d'introduire deux nouveaux champs, un champ vectoriel de jauge \vec{A} et un champ scalaire de jauge V , afin de définir une probabilité de présence par la certitude d'une invariance lors d'un changement de jauge. Le courant de probabilité est d'ailleurs lui aussi invariant par changement de jauge.

Les lois de la nature, dans l'essence même de ce qu'elles expriment intrinsèquement, sont respectées par cette notion d'invariance de jauge que l'on nomme également *symétrie* en physique fondamentale. Il est également question de *symétrie* ou *d'invariance* (à travers la transformation de Lorentz) lorsqu'on considère l'intervalle d'espace-temps que nous avons vu au §1 de l'Annexe 16.

Ainsi la mécanique quantique et par extrapolation, grâce à la seconde quantification, la théorie quantique des champs dont fait partie l'électrodynamique quantique, possèdent cette propriété de symétrie indispensable de la nature apportée par l'invariance de jauge.

En d'autres termes, les deux champs de jauge possèdent toutes les propriétés de couplage, c'est-à-dire d'interaction, entre une fonction d'onde et le champ électromagnétique. Et l'invariance de jauge implique que lors d'une transformations de jauge (ou changement de jauge), le champ électromagnétique se transforme d'une façon identique aux potentiels électromagnétiques

scalaire V et vecteur \vec{A} . Le principe d'invariance de jauge va constituer toute la base de l'électrodynamique quantique.

En fait, dans l'étude que nous venons d'effectuer, nous considérons ce que l'on appelle *l'invariance de jauge locale* par rapport à ce que l'on appelle *l'invariance de jauge globale*. Dans les deux sous-sections suivantes, afin de saisir la différence entre invariance de jauge *locale* et *globale*, nous traitons respectivement les cas de l'invariance de jauge *globale* et *locale* associées à la particule libre.

4- Invariance de jauge globale en Mécanique Quantique non relativiste pour une particule libre

Pour ce qui concerne l'invariance de jauge *globale*, afin de faciliter la compréhension de ce qui est important, considérons l'état d'une particule libre de masse m de charge q , décrite par une fonction d'onde $\Psi(r,t)$ qui obéit à l'équation de Schrödinger (voir section 1.2.1.f pour la particule libre dont l'énergie potentielle V est égale à zéro) :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi . \quad (3)$$

Montrons que la mécanique quantique possède la propriété d'invariance de jauge *globale*, en considérant comme une constante l'expression f dans le facteur de phase $\exp[\frac{iq}{\hbar}f]$ vu en sous-section précédente.

Soit les transformations de jauge *globales* suivante :

$$\Psi(r,t) \rightarrow \Psi'(r,t) = \exp[\frac{iq}{\hbar}f] \Psi(r,t) \quad \text{avec } f \text{ constante.} \quad (4)$$

En injectant (4) dans (3) nous obtenons :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi' ,$$

c'est-à-dire :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} (\exp[\frac{iq}{\hbar}f] \Psi) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\exp[\frac{iq}{\hbar}f] \Psi) .$$

En considérant une seule dimension d'espace de coordonnée x pour simplifier, on peut écrire :

$$i \hbar \exp[\frac{iq}{\hbar}f] \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \exp[\frac{iq}{\hbar}f] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} ,$$

soit:

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi .$$

Ainsi le système constitué par une particule libre en mécanique quantique non relativiste, via l'équation de Schrödinger, est invariant naturellement par rapport aux changements de phase lorsque f ne dépend pas des coordonnées d'espace-temps.

Mathématiquement, on voit que l'ensemble des transformations de jauge *globale* :

$$\Psi(r,t) \rightarrow \Psi'(r,t) = \exp[\frac{iq}{\hbar}f] \Psi(r,t) \quad \text{avec } f \text{ constante,}$$

possède la structure de groupe $U(1)$ de dimension 1 (car dépendant du seul paramètre f) appelé généralement *groupe de jauge* (isomorphe du groupe Spécial (de Lie) des rotations dans un plan (2 dimensions) autour d'un axe Orthogonal (perpendiculaire) à ce plan, c'est-à-dire **SO2**).

La composition de deux transformations de jauge *globale* conduit à une nouvelle transformation de jauge *globale*. Plus précisément, $\exp[\frac{iq}{\hbar}f]$ définit une transformation de jauge par la rotation au sens des groupes de Lie et il y a bien sûr une infinité de représentations. Et comme f ne dépend pas des coordonnées d'espace et de temps, nous pouvons dire que le système est invariant par transformation *globale*, **c'est-à-dire partout en même temps**, ou est invariant de U(1) dans l'espace et le temps.

Notons aussi que U(1) possède une structure de groupe abélien car ses éléments commutent. En effet :

$$\exp[\frac{iq}{\hbar}f_1] \exp[\frac{iq}{\hbar}f_2] = \exp[\frac{iq}{\hbar}f_2] \exp[\frac{iq}{\hbar}f_1].$$

En conclusion, nous avons constaté l'invariance de l'équation de Schrödinger sous la symétrie U(1) *globale* (f est une constante ne dépendant pas des coordonnées d'espace et de temps). Aussi, peut-on se poser la question de savoir si cette propriété d'invariance est préservée dans le cas moins restrictif d'une symétrie U(1) *locale* considérée pour le cas où f n'est plus constante. Nous effectuons cette étude dans la sous-section suivante.

5- Changement et invariance de jauge locale en Mécanique Quantique non relativiste pour une particule libre

Dans l'invariance de jauge *locale*, le facteur de phase devient $\exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)]$. L'entité f n'est plus une constante.

L'ensemble de transformation de jauge devient donc :

$$\Psi(r,t) \rightarrow \Psi'(r,t) = \exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \Psi(r,t).$$

Considérons toujours, dans un but purement didactique, une particule libre de masse m , de charge q et retrouvons l'origine des champs de jauge V et \vec{A} exprimés par les équations (1).

Les deux membres de l'équation de Schrödinger (voir équation (3)) de la particule libre s'écrivent alors :

• Membre de gauche :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\exp[-\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \Psi'(r,t)) = i\hbar \{ \exp[-\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \frac{\partial \Psi'}{\partial t} - \Psi'(-\frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t})(\exp[-\frac{iq}{\hbar}f(r,t)]) \}$$

c'est-à-dire :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \exp[-\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \{ i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} + q\Psi' \frac{\partial f}{\partial t} \} \quad (5)$$

• Membre de droite :

Nous avons vu au §2 de l'Annexe 19 que nous pouvons écrire l'opérateur (l'observable) impulsion de la manière suivante :

$$p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad \text{c'est-à-dire} \quad p^2 \rightarrow -\hbar^2 \Delta.$$

Le membre de droite de l'équation de Schrödinger devient donc :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = \frac{1}{2m} p^2 \Psi.$$

Sachant que :

$$\Psi'(r,t) = \exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \Psi(r,t) \quad \text{alors} \quad \Psi(r,t) = \exp[-\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \Psi'(r,t).$$

Ainsi :

$$p\Psi = p \left(\exp\left[-\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] \Psi'(r,t) \right) = -i\hbar \nabla \left(\exp\left[-\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] \Psi'(r,t) \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp\left[-\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] \Psi'(r,t) \right)$$

Tout calcul fait, on arrive à :

$$p^2\Psi = \exp\left[-\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] (p-q\nabla f(r,t))^2 \Psi'(r,t)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2m} p^2\Psi = \frac{1}{2m} \exp\left[-\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] (p-q\nabla f(r,t))^2 \Psi'(r,t) . \quad (6)$$

• Compte-tenu des résultats (5) et (6), l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial\Psi'(r,t)}{\partial t} + q\Psi'(r,t) \frac{\partial f(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \exp\left[-\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] (p-q\nabla f(r,t))^2 \Psi'(r,t) .$$

c'est-à-dire :

$$i\hbar \frac{\partial\Psi'(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left\{ (p-q\nabla f(r,t))^2 - 2mq \frac{\partial f(r,t)}{\partial t} \right\} \Psi'(r,t) .$$

Nous voyons donc que l'équation de Schrödinger immédiatement ci-avant, pour la particule libre, ne possède pas la propriété d'invariance de jauge *locale* du fait des dérivées premières de la fonction de jauge $f(r,t)$.

• Cherchons donc une interaction pour laquelle une équation "de type Schrödinger" serait invariante. Nous avons vu au §4 ci-avant que l'équation des Schrödinger est invariante pour la transformation de jauge *locale* suivante :

$$\Psi(r,t) \rightarrow \Psi'(r,t) = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] \Psi(r,t) .$$

Remarquons, dans le cas d'une jauge *globale*, la covariance des dérivées de la fonction d'onde, aussi bien pour ce qui concerne les dérivées spatiales que temporelles.

En effet, pour :

$$\Psi(r,t) \rightarrow \Psi'(r,t) = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f\right] \Psi(r,t) ,$$

on a :

$$\frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial\Psi'(r,t)}{\partial t} = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f\right] \frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial t}$$

et :

$$\frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial\Psi'(r,t)}{\partial x} = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f\right] \frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial x} \quad (\text{avec } r \text{ fonction de } x) .$$

Comme nous l'avons vu au §3 ci-avant, en mécanique quantique, pour la particule placée dans un champ électromagnétique extérieur, c'est en introduisant des termes nouveaux dans l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire en introduisant un couplage de la particule avec un ou plusieurs champs externes, que la transformation de jauge *locale* va posséder la propriété d'invariance c'est-à-dire de symétrie.

Montrons comment s'effectue la recherche de l'expression de ces champs externes.

Posons donc :

$$\Psi'(r,t) = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] \Psi(r,t) ,$$

d'où :

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \Psi].$$

On montre facilement que :

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t}) \Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (7)$$

En ajoutant dans les deux membres de l'équation (7) le terme $(\frac{iq}{\hbar} V) \Psi'$ on obtient :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} V - \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t}) \Psi' = (\frac{iq}{\hbar} V) \Psi' + \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (8)$$

Sachant que:

$$\Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \Psi,$$

on peut écrire :

$$(\frac{iq}{\hbar} V) \Psi' = (\frac{iq}{\hbar} V) \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \Psi. \quad (9)$$

En injectant (9) dans le membre de droite de l'équation (8), on obtient :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} V - \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t}) \Psi' = \frac{iq}{\hbar} V \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \Psi + \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

c'est-à-dire :

$$[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} (V - \frac{\partial f}{\partial t})] \Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} V \} \Psi.$$

En posant : $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$, qui est l'équation du champ de jauge scalaire tel qu'exprimé dans l'équation (1) relative à la notion de jauge *locale* vue en sous-section 2.4.6.c, l'équation précédente devient :

$$[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} (V')] \Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} V \} \Psi.$$

En posant :

$$D'_t = \frac{D'}{\partial t} = \{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} V' \}$$

et :

$$D_t = \frac{D}{\partial t} = \{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} V \}, \quad (9 \text{ bis})$$

on obtient pour la jauge *locale* :

$$D'_t \Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] D_t \Psi$$

c'est-à-dire :

$$\frac{D \Psi'}{\partial t} = \exp[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)] \frac{D \Psi}{\partial t} \quad (9 \text{ ter})$$

qui est de même nature que ce que nous avons vu pour la jauge *globale* ci-avant, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \Psi'(r,t)}{\partial t} = \exp[\frac{iq}{\hbar} f] \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t}.$$

Les dérivées $\frac{\partial \Psi'(r,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t}$ sont dites « classiques » ; tandis que les dérivées $\frac{D \Psi'}{\partial t}$ et $\frac{D \Psi}{\partial t}$ sont appelées « dérivées covariantes ».

En Annexe 6 nous donnons un aperçu de la signification d'une dérivée covariante.

Effectuons le même raisonnement pour les dérivées spatiales. Pour simplifier les choses nous considérons un espace à une seule dimension.

Posons de la même manière que précédemment :

$$\Psi'(r,t) = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \Psi(r,t),$$

d'où :

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \Psi \right],$$

ce qui revient à écrire en changeant de notation :

$$\vec{\nabla} \Psi' = \vec{\nabla} \left[\exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \Psi \right].$$

On montre facilement que :

$$\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{\nabla} f \right) \Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \vec{\nabla} \Psi. \quad (10)$$

En soustrayant dans les deux membres de l'équation (10) le terme vectoriel $\frac{iq}{\hbar} \vec{A} \Psi'$ on obtient :

$$\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{\nabla} f - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \vec{\nabla} \Psi - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \Psi'. \quad (11)$$

Sachant que :

$$\Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \Psi,$$

on peut écrire :

$$\frac{iq}{\hbar} \vec{A} \Psi' = \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \Psi. \quad (12)$$

En injectant (12) dans le membre de droite de l'équation (11), on obtient :

$$\left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{\nabla} f - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \vec{\nabla} \Psi - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \Psi$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} (\vec{A} + \vec{\nabla} f) \right\} \Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \left\{ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right\} \Psi$$

En posant : $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f = \vec{A} + \overrightarrow{grad}f$, qui est l'équation du champ de jauge vectoriel tel qu'exprimé dans l'équation (1) relative à la notion de jauge *locale* vue au §3, l'équation précédente devient :

$$\left\{ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} (\vec{A}') \right\} \Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \left\{ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right\} \Psi$$

En posant :

$$D'_x = \frac{D'}{\partial x} = \left\{ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{A}' \right\}$$

et :

$$D_x = \frac{D}{\partial x} = \left\{ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right\}, \quad (12 \text{ bis})$$

on obtient pour la jauge *locale* :

$$D'_x \Psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] D_x \Psi$$

c'est-à-dire :

$$\frac{D\Psi'}{\partial x} = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)\right] \frac{D\Psi}{\partial x} \quad (12 \text{ ter})$$

qui est de même nature que ce que nous avons vu pour la jauge *globale* ci-avant, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \exp\left[\frac{iq}{\hbar}f\right] \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Les dérivées $\frac{\partial \Psi'(r,t)}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial x}$ sont dites « classiques » ; tandis que les dérivées $\frac{D\Psi'}{\partial x}$ et $\frac{D\Psi}{\partial x}$ sont appelées « dérivées covariantes ».

• Les équations (9 bis) et (12 ter) montrent que pour la jauge locale, à condition de poser :

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f ,$$

nous garantissons pour l'équation de Schrödinger la propriété d'invariance de jauge locale. Ainsi, la description physique et les résultats physiques obtenus ne sont pas affectés par le changement de phase locale contenu dans l'expression $\exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)]$.

6- Conclusion

Pour conclure, l'exigence d'invariance de jauge locale pour l'équation de Schrödinger conduit à l'introduction d'une nouvelle interaction de la particule avec son environnement, caractérisée par deux nouveaux champs de jauge V et \vec{A} obéissant chacun à une loi de transformation particulière que nous avons mis en valeur.

En fait, l'étude d'une particule impose l'invariance locale qui se traduit par l'introduction d'un champ de force associé au potentiel vecteur \vec{A} et au potentiel scalaire V .

Nous dirons que le principe d'invariance de jauge locale sous une transformation de symétrie du groupe U(1) impose que la loi de transformation de la fonction d'onde :

$$\Psi(r,t) \rightarrow \Psi'(r,t) = \exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] \Psi(r,t)$$

soit invariante à travers l'équation de Schrödinger.

Ainsi les dérivées covariantes introduites en (9 bis) et en (12 bis) satisfont aux conditions d'invariance de jauge locale :

$$D'_t \Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] D_t \Psi$$

et

$$D'_x \Psi' = \exp[\frac{iq}{\hbar}f(r,t)] D_x \Psi$$

qui impose pour le champ électromagnétique la loi de transformation représentée par les équations (1).

En théorie quantique non relativiste, il n'existe donc pas de contexte associé à une particule chargée libre, car dans ce cas la symétrie (l'invariance) exigée par la nature est violée du fait d'une équation de Schrödinger ne répondant pas à la notion d'invariance.

7- Invariance de jauge locale en Electrodynamique Quantique (mécanique quantique relativiste)

Transposons à l'Electrodynamique Quantique ce que nous avons vu en Mécanique Quantique non relativiste concernant l'invariance de jauge locale associée à une particule libre.

Pour cette analyse, nous nous inspirons :

* des écrits contenus dans le cours de physique *Bases de la chromodynamique quantique* professé à l'Institut Interuniversitaire des Hautes Energies (IIHE) de Bruxelles^{395 bis},
 * de la publication du professeur Michael Klasen pour son enseignement à l'Université Joseph Fourier de Grenoble entre 2003 et 2008^{395 ter}.

Nous pouvons envisager un raisonnement similaire à celui que nous avons effectué en Mécanique Quantique non relativiste (voir §6 précédent).

Mais l'équation de Schrödinger valable uniquement en mécanique quantique non relativiste laisse maintenant la place au Lagrangien construit à partir de la forme covariante de l'équation de Dirac. Il faut en effet que le principe d'invariance de jauge locale sous une transformation de symétrie du groupe $U(n)$ impose au Lagrangien associé au mouvement d'une particule chargée de spin $\frac{1}{2}$ (l'électron) d'être invariant sous la loi de transformation de la fonction d'onde $\Psi(x)$ liée au champ de matière associé à la conservation de la charge électrique.

Ce principe de jauge correspond dans le détail à un changement de phase local du quadri-spineur ou spineur de Dirac décrivant la particule (l'électron) tel que :

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \exp[-i e \alpha(x)] \Psi(x)$$

avec:

- * $\hbar = c = 1$,
- * $\alpha(x)$ une fonction réelle.

On peut imaginer deux transformations successives de la fonction d'onde telles que :

$$\Psi''(x) = \exp[-i e \alpha'] \Psi'(x) = \exp[-i e \alpha'] \exp[-i e \alpha] \Psi(x).$$

Et comme $\exp[\alpha'] \exp[\alpha] = \exp[\alpha' + \alpha]$, ces deux transformations équivalent à une seule rotation de phase d'un angle égal à $\alpha'' = \alpha' + \alpha$.

On dit alors que ces deux transformations commutent en satisfaisant aux propriétés d'un groupe abélien. Ce groupe des transformations possède un seul paramètre α représentant l'angle de rotation. Il est complexe car les rotations s'appliquent aux composantes réelles et imaginaires de la fonction d'onde Ψ .

De plus, ce groupe est unitaire car $U^*U = I$, sachant que U^* égal à $\exp[i e \alpha]$ est le nombre complexe conjugué de U .

Pour toutes ces raisons, nous dirons que les interactions électromagnétiques sont décrites par le groupe de jauge :

$$U(n) = U(1).$$

L'invariance de jauge est un critère important et la mise en forme qu'elle requière caractérise la forme des interactions entre la matière (les électrons) et les champs (les photons).

Rappelons que le Lagrangien associé au mouvement de l'électron libre de spin $\frac{1}{2}$, résultant de la forme covariante de l'équation de Dirac, est le suivant :

$$L_0 = L_{Dirac} = \bar{\Psi}(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x)$$

avec:

395 bis. IIHE. Institut Interuniversitaire des Hautes Energies. « *Bases de la chromodynamique quantique* ». Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB). Chapitre 2. Pages 17 à 19.
 395 ter. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge* ». Dunod. Page 45.

- * γ^μ les matrices de Dirac associées à l'électron telles que nous les avons introduites en section 2.4.1,
- * $c = \hbar = 1$.

En supposant que la phase complexe d'une fonction d'onde $\Psi(x)$ puisse être choisie de manière arbitraire en chaque point de l'espace-temps, la transformation du quadripotential A_μ et la forme covariante de l'équation de Dirac conduisant tout naturellement à l'invariance du Lagrangien considéré, imposent que le couplage entre la particule « *électron* » chargée et le quadripotential soit minimal ; d'où le rôle de la dérivée covariante suivante :

$$D_\mu = \partial_\mu + i e A_\mu(x) \quad (13)$$

comparable aux équations (9 bis) et (12 bis) du §5.

En d'autres termes, le principe d'invariance de jauge locale sous le groupe de symétrie $U(1)$ impose le remplacement de la dérivée partielle ∂_μ se trouvant dans le Lagrangien L_{Dirac} , par la dérivée covariante :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i e A_\mu(x).$$

Cette dérivée covariante satisfait à la condition d'invariance sous le changement de phase locale ci-après (rappelant l'équation (12 ter) vue au §5) :

$$D'_\mu \Psi'(x) = \exp[-i e \alpha(x)] D_\mu \Psi(x).$$

Cette expression définit les lois de transformation du champ $A_\mu(x)$, liées à celles du quadripotential $\Psi(x)$; ces lois de transformation sont les suivantes :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x).$$

Cette relation correspond à une transformation de jauge du champ électromagnétique pour lequel on identifie le champ $A_\mu(x)$ se trouvant dans la dérivée covariante.

Electrodynamique Quantique

On peut facilement démontrer que le Lagrangien de Dirac :

$$L_{Dirac} = \bar{\Psi}(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x)$$

est covariant sous les transformations locales de jauge :

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

si la fonction d'onde transformée est :

$$\Psi'(x) = \exp[-i e \alpha(x)] \Psi(x),$$

Mécanique Quantique non-relativiste

comme :

on a démontré en sous-section 2.4.6.e que l'équation de Schrödinger :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$$

est covariante sous les transformations locales de jauge :

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

si la fonction d'onde transformée est :

$$\Psi'(r,t) = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} f(r,t)\right] \Psi(r,t).$$

Annexe 22

Détail du calcul associé au propagateur de Feynman pour la particule libre

(Voir Chapitre 5 §5.2.4.c : L'intégrale de chemins)

Soit la résolution de l'intégrale suivante telle que proposé par Serge Haroche :

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = C^{-n} \int \dots \int du_1 \dots du_n dK \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{K}{\hbar} (\zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n)\right] \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon} [u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2]\right]$$

n fois

c'est-à-dire :

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \int \dots \int du_1 \dots du_n dK \cdot \exp\left[(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) \frac{im}{2\hbar\varepsilon} + \frac{K}{\hbar} (\zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n)\right]$$

n fois

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \int \dots \int du_1 \dots du_n dK \cdot \exp\left[(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) \frac{im}{2\hbar\varepsilon} + \frac{Ki}{\hbar i} (\zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n)\right]$$

n fois

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \int \dots \int du_1 \dots du_n dK \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} [(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) \frac{m}{2\varepsilon} + \frac{K}{i} (\zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n)]\right]$$

n fois

En posant $k = K/i$, on peut écrire:

$$\langle x^n t^n | x' t' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \int \dots \int du_1 \dots du_n dK \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} [(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) \frac{m}{2\varepsilon} + k (\zeta - u_1 - u_2 - \dots - u_n)]\right]$$

n fois

→ **Commençons par intégrer sur u_1, u_2, \dots, u_n :**

Nous pouvons très facilement montrer qu'une expression :

$$\exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2\varepsilon} u_1^2 - k u_1 \right)$$

fait apparaître un carré parfait tel que:

$$\exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2\varepsilon} u_1^2 - k u_1 \right) = \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u_1 - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 \cdot \exp \left(-\frac{i\varepsilon k^2}{2m\hbar} \right)$$

Ainsi nous obtenons:

$$\langle x^n | x' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 du \right]^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{i\varepsilon k^2}{2m\hbar} \right) \cdot \exp \left(\frac{ik}{\hbar} \xi \right) dK$$

$$\langle x^n | x' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 du \right]^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{i\varepsilon k^2}{2m\hbar} \right) \cdot \exp \left(\frac{ik}{\hbar} \xi \right) dK$$

En posant $\theta = n\varepsilon$, on obtient :

$$\langle x^n | x' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 du \right]^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{ik}{\hbar} \xi - \frac{i\theta k^2}{2m\hbar} \right) dK$$

$$\langle x^n | x' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 du \right]^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{i}{\hbar} \left(k\xi - \frac{k^2\theta}{2m} \right) dK$$

Nous savons (intégrales gaussiennes) que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iu^2) du = \sqrt{i\pi}.$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 &= \exp i \left(\frac{m}{2\varepsilon\hbar} \right) \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right) \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right) = \exp i \left(\frac{m}{2\varepsilon\hbar} \right)^{1/2} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right) \left(\frac{m}{2\varepsilon\hbar} \right)^{1/2} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right) \\ &= \exp \left[i \left(\frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} u - \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} \frac{\varepsilon k}{m} \right) \left(\frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} u - \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} \frac{\varepsilon k}{m} \right) \right] = \exp \left[i \left(\frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} u - \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Soit:

$$U = \left(\frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} u - \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} \frac{\varepsilon k}{m} \right),$$

on peut écrire :

$$dU = \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} du \quad \text{c'est-à-dire : } du = \frac{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}}{m^{1/2}} dU.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{im}{2\varepsilon\hbar} \left(u - \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 du &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left(\frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} u - \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left(\frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} u - \frac{m^{1/2}}{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}} \frac{\varepsilon k}{m} \right)^2 \frac{(2\varepsilon\hbar)^{1/2}}{m^{1/2}} dU \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iU^2) \cdot \sqrt{\frac{2\epsilon\hbar}{m}} dU = \sqrt{\frac{2\epsilon\hbar}{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iU^2) dU \\
&= \sqrt{\frac{2\epsilon\hbar}{m}} \sqrt{i\pi} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon i}{m}}
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\langle x^n | x' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon i}{m}} \right)^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{i}{\hbar} \left(k\xi - \frac{k^2\theta}{2m} \right) dK$$

→ **Intégrons maintenant sur K :**

Nous pouvons facilement montrer que l'expression :

$$\exp \frac{i}{\hbar} \left(k\xi - \frac{k^2\theta}{2m} \right) dk$$

fait apparaître un carré parfait tel que :

$$\exp \frac{i}{\hbar} \left(k\xi - \frac{k^2\theta}{2m} \right) = \exp -\frac{i}{\hbar} \left[k\sqrt{\frac{\theta}{2m}} - \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} \right]^2 \cdot \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta} \right)$$

Ainsi :

$$\langle x^n | x' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon i}{m}} \right)^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{i}{\hbar} \left[k\sqrt{\frac{\theta}{2m}} - \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} \right]^2 \cdot \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta} \right) dK$$

Le facteur $\exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta} \right)$ est à sortir de l'intégrale puisqu'il ne dépend pas de la variable K.

Soit donc à résoudre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{i}{\hbar} \left[k\sqrt{\frac{\theta}{2m}} - \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} \right]^2 \cdot dK$$

Nous savons comme nous l'avons montré plus haut que :

$$\exp -\frac{i}{\hbar} \left[k\sqrt{\frac{\theta}{2m}} - \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} \right]^2 = \exp i \left[\frac{\xi}{2\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} - \frac{k}{\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{\theta}{2m}} \right]^2$$

Soit:

$$U = \frac{\xi}{2\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} - \frac{k}{\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{\theta}{2m}},$$

on peut écrire :

$$dU = -\frac{1}{\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{\theta}{2m}} dk$$

Sachant que $k = K/i$ comme nous l'avons posé plus haut, on a :

$$dU = -\frac{1}{\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{\theta}{2m}} \frac{dK}{i} \text{ c'est-à-dire : } dK = -i\hbar^{1/2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} dU,$$

d'où :

$$U = \frac{\xi}{2\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} - \frac{K}{i\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{\theta}{2m}}$$

L'intégrale précédente devient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left[\frac{\xi}{2\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} - \frac{K}{i\hbar^{1/2}} \sqrt{\frac{\theta}{2m}} \right]^2 \cdot (-i)\hbar^{1/2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} dU = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i[U]^2 \cdot (-i)\hbar^{1/2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} dU,$$

soit en sachant que (intégrale gaussienne) $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iu^2) du = \sqrt{i\pi}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i[U]^2 \cdot (-i)\hbar^{1/2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} dU &= -i\hbar^{1/2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iU^2) dU \\ &= -i\hbar^{1/2} \sqrt{\frac{2m}{\theta}} \sqrt{i\pi} \\ &= -i\sqrt{\hbar} \sqrt{\frac{2mi\pi}{\theta}} \\ &= -i\sqrt{\frac{2\pi i\hbar m}{\theta}}. \end{aligned}$$

→ **Nous obtenons donc finalement :**

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = \frac{C^{-n}}{2\pi\hbar} \left(\sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}} \right)^n \cdot \left(-i\sqrt{\frac{2\pi i\hbar m}{\theta}} \right) \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = \frac{-i}{2\pi\hbar} \cdot \left(\frac{1}{C} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}} \right)^n \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi i\hbar m}{\theta}} \right) \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right).$$

Pour que le résultat à la limite où ε tend vers zéro (ou bien n tend vers l'infini) soit indépendant de ε (ou de n), il faut s'affranchir du terme :

$$\frac{1}{C} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}},$$

ce qui ne peut se faire que si :

$$\frac{1}{C} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}} = 1,$$

c'est-à-dire :

$$C = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}},$$

afin d'obtenir :

$$I^n = 1.$$

L'amplitude de probabilité précédente s'écrit donc :

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = \frac{-i}{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{\frac{2\pi i\hbar m}{\theta}} \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right) = -i (2\pi\hbar)^{-1} \cdot \frac{i^{1/2} m^{1/2}}{\theta^{1/2}} \cdot (2\pi\hbar)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right)$$

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = -i (2\pi\hbar)^{-1/2} \cdot \frac{i^{1/2} m^{1/2}}{\theta^{1/2}} \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right) = -i \sqrt{\frac{im}{2\pi\hbar\theta}} \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right)$$

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = -i \sqrt{\frac{i^2 m}{2\pi\hbar\theta i}} \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right) = -i (i) \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\theta i}} \cdot \exp\left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\theta}\right)$$

$$\langle x''t'' | x't' \rangle = \left[\frac{m}{2\pi\hbar i(t''-t')} \right]^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{im(x''-x')^2}{2\hbar(t''-t')}\right),$$

qui est l'expression définitive du propagateur, trouvée par Feynman, pour la particule libre (free-particle kernel³¹⁶) que l'on nomme « *propagateur libre* ».

316. Feynman et Hibbs. 1965. « *Quantum Mechanics and Path Integrals* ». Emended by Daniel F. Styer. Dover Publication, Inc. Mineola, New York. 2014. Pages 42 et 43, équation 3.3.

Annexe 23

Les travaux de Pierre Cartier en collaboration avec Cécile DeWitt-Morette : *Une nouvelle perspective concernant l'intégration fonctionnelle (1995)*

(Voir Chapitre 7 section 7.6.2.b : *Vers un cadre rigoureux pour les intégrales de chemins*)

Après avoir posé les hypothèses et le contexte mathématique dans lequel ils vont travailler [Section I, §1 à §4 de leur publication « *A new perspective on functional integration* » (1995)], Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette, au paragraphe 5 de la section I, intitulé « *Exemples* », donnent un aperçu des travaux qui vont suivre.

C'est ainsi qu'ils vont évaluer en Section III certains développements de l'intégrale fonctionnelle de base exprimée par l'équation (II.1) que l'on trouve en section II et qu'ils ont construit dans le contexte mathématique qui est le leur. En effet, si en section II, paragraphe 2, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette prouvent rigoureusement que leur intégrale de chemin sous la forme de l'intégrale fonctionnelle de base (II.1) est bien solution de l'équation différentielle de Schrödinger, en section III, paragraphe 1, ils vont montrer que leur intégrale de chemin est physiquement conforme à la théorie quantique de Feynman basée sur la notion de propagateur. Puis en section IV, ils spécialisent l'intégrale de base en faisant des choix particuliers concernant la variété différentielle N .

Dans cette section IV, les auteurs traitent en détail sept paragraphes (1 à 7 ci-après) dans lesquels en particulier :

- 1) la variété $N = R^d$ est exprimée en coordonnées cartésiennes,
- 2) l'intégrale de base est formulée en termes de transformation $\Sigma(t,z)$ sur une variété N , dans un système de coordonnées polaires dans R^2 de manière quasiment similaire à des coordonnées cylindriques dans R^3 ,
- 3) la variété N est un fibré associée à une variété pseudo-riemannienne M de dimension d , de métrique g , relative à un repère orthonormé tel que $N = O(M)$ sur M avec une projection

$$\pi : O(M) \rightarrow M.$$

Les auteurs donnent l'intégrale fonctionnelle explicite représentant la solution Ψ de l'équation de Schrödinger sur M en tenant compte de l'état initial de la fonction d'onde Ψ ,

4) la variété N est un espace multi-connexe,

5) la variété N est un groupe unitaire compact isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1 et muni de la multiplication : le groupe $U(1)$; l'intégrale de base résout l'équation de Schrödinger pour une particule dans un champ électromagnétique,

6) N est une variété symplectique, c'est-à-dire une variété différentielle de degré 2, fermée et non dégénérée pouvant être obtenue à partir de l'intégrale de base

7) l'effet Bohm-Aharonov est analysé, en guise de conclusion, en partie grâce aux techniques mises en œuvre précédemment.

Au paragraphe 6 de la section I, intitulé *Techniques* les auteurs mentionnent les techniques qu'ils ont utilisé pour calculer leur intégrale fonctionnelle de base selon différentes situations, à savoir celles associées aux changements linéaires de variables d'intégration ainsi que les propriétés des déterminants fonctionnels.

Rappelons qu'un déterminant fonctionnel est aussi nommé déterminant jacobien car son calcul s'applique à la matrice jacobienne qui est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle en un point donné.

Les auteurs indiquent aussi que la transformation Σ relative à la formule (I.13) est associée aux travaux d'Elie Cartan (1859-1951) sur les connexions affines définies sur une variété différentielle qui connecte des espaces tangents voisins ; ceci permet à des champs de vecteurs tangents d'être dérivés comme s'ils étaient des fonctions définies sur la variété en prenant leurs valeurs dans un unique espace vectoriel.

En section II, les auteurs établissent un théorème général qui doit leur permettre de formuler rigoureusement l'intégrale de chemin.

Ils commencent par préciser que le but de cette section II est de définir (comme exprimé en section I, paragraphe 4) les intégrales fonctionnelles sur l'espace $L^{2,1}$ des chemins ponctuels (ceux auxquels on peut faire correspondre un point fixe), associés à une variété différentielle N . En d'autres termes : de préciser les intégrales fonctionnelles sur l'espace des chemins prenant leurs valeurs dans cette variété.

Pour se faire, les auteurs mentionnent qu'ils leur faut procéder, dans un premier temps, à la réduction des intégrales fonctionnelles sur des chemins prenant leurs valeurs dans un espace plat sur R^d .

Se servant des résultats obtenus en section I, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette donnent l'expression de l'intégrale fonctionnelle correspondant à leurs hypothèses :

$$(U_T \Phi)(x_0) := \int_{Z_0} \mathcal{D}_{s, Q_0} z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) \right] \Phi(x_0, \Sigma(T, z)), \quad (II.1)$$

en indiquant que cette intégrale (II.1) peut aussi être exprimée par $\Psi(T, x_0)$ du fait qu'elle doit être solution de l'équation générale de Schrödinger suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{s}{4\pi} h^{\alpha\beta} \mathcal{L}_{X(\alpha)} \mathcal{L}_{X(\beta)} \Psi + \mathcal{L}_Y \Psi \quad (II.2)$$

avec pour condition initiale :

$$\Psi(0, x_0) = \Phi(x_0).$$

Les auteurs donnent aussi l'expression de l'intégrale fonctionnelle suivante, généralisant l'équation (II.1) selon une évolution temporelle telle qu'imaginée par Feynman au chapitre 4 (§4.2) ; cette manière de procéder montre bien tout le lien existant entre les deux approches, celle de Feynman faisant appel à l'intuition et celle des auteurs formalisant un cadre mathématique rigoureux :

« We give also a general construction of "time-ordered products" in the form of a functional integral generalizing equation (II.1), namely:

$$(U_T^F \Phi)(x_0) = \int_{Z_{0,T}} \mathcal{D}_{s, Q_0} z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) \right] F(\mathbf{T}, z) \Phi(x_0 \cdot \Sigma(T, z)) \quad (\text{II.3}). \text{ »}^{433/3}$$

Puis Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette mentionnent relativement à cette section II :

* qu'au paragraphe 1 ils définissent toutes les notations utilisées (comme ce qui avait été convenu en fin du paragraphe 4 de la section I),

* qu'au paragraphe 2 ils vont construire l'intégrale fonctionnelle de type (II.1) la plus simple et prouver qu'elle va satisfaire à l'équation (II.2).

Ainsi, prenant en considération le cas le plus simple, dans un premier temps, pour démontrer que leur intégrale fonctionnelle est solution de l'équation de Schrödinger, ils se placent d'emblée dans les conditions de Feynman vues en sous-section 3.2.3.f.

En d'autres termes, en prouvant que la fonction d'onde la plus simple $(U_T \Phi)(x_0)$ notée $\Psi(T, x_0)$ construite à partir du modèle général (II.1) est solution de l'équation de Schrödinger, les auteurs donnent un cadre rigoureux à l'intégrale de chemin, là où Feynman se contentait d'une vue intuitive.

Au paragraphe 1 de la section II, intitulé *The setup and a summary of notations*, les auteurs commencent donc par spécifier les points suivants :

* La configuration mathématique a pour cadre une variété différentielle associée à un champ de vecteurs tel que :

• N est une variété différentielle qui est localement de dimension finie : chaque point du chemin considéré admet un voisinage qui est la variété différentielle de dimension finie N

• Les groupes à un paramètre (connus en mathématiques pour être des groupes de Lie formels permettant l'analyse rigoureuse des fonctionnelle^{433/4}) notés $\sigma_{(\alpha)}(r)$ avec :

→ $\alpha = 0, 1, 2, \dots, d$

→ r un paramètre réel

→ la transformation d'un point x dans N sous $\sigma_{(\alpha)}(r)$ noté $x \cdot \sigma_{(\alpha)}(r)$ telle que :

$$\sigma_{(\alpha)}(r) \circ \sigma_{(\alpha)}(s) = \sigma_{(\alpha)}(r+s) \quad (\text{II.4})$$

• Les générateurs (au sens mathématique du terme c'est-à-dire les objets mathématiques qui engendrent un ensemble) de $\{\sigma_{(\alpha)}(r)\}$ sont les champs de vecteurs $X_{(\alpha)}$ dans N tel que :

433/3. Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « A new perspective on functional integration ». Journal of Mathematical Physics. Volume 36, page 9.

433/4. Henri Cartan. 1935. « Résumé du mémoire de F. Riesz sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert ». Le séminaire de mathématiques 1933-1939. Edition réalisée et annotée par Michèle Audin.

$$\frac{d}{dr} (x \cdot \sigma_{(a)}(r)) = X_{(a)} (x \cdot \sigma_{(a)}(r)) \quad (\text{II.5})$$

et en particulier :

$$X_{(a)} (x) = \left. \frac{d}{dr} (x \cdot \sigma_{(a)}(r)) \right|_{r=0} \quad (\text{II.6})$$

pour tout point x dans la variété N

- La dérivée de Lie est notée L_X sur le champ de vecteur X .

* Les chemins ponctuels sur l'espace plat R^d font appel aux notations suivantes :

- T est un intervalle de temps de longueur T , et par conséquent :

$$T = [t_a, t_b] \quad , \quad T = t_b - t_a \quad (\text{II.7})$$

- t_0 est un élément de T ; soit $t_0 = t_a$ ou $t_0 = t_b$
- Z_0 est composé des fonctions vectorielles $z = (z^1, \dots, z^d)$ dont les composantes :

$$t \mapsto z^\alpha(t)$$

sont des fonctions continues associées aux dérivées définies sur un espace mesuré dites de carré sommable ou intégrable \dot{z}^α .

Les auteurs admettent la normalisation $z^\alpha(t_0) = 0$

- Z_0' est l'espace dual de Z_0

Les fonctions vectorielles de Z_0' sont $z' = (z_1', \dots, z_d')$

$$\text{La dualité entre } Z_0' \text{ et } Z_0 \text{ est donnée par } \langle z', z \rangle = \int_{T_J} dt z_{\alpha'}(t) z^\alpha(t) \quad (\text{II.8})$$

- s est un paramètre égal à 1 ou i dont \sqrt{s} est normalisée comme suit :

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= 1 & \text{si } s &= 1 \\ \sqrt{s} &= e^{\pi i/4} & \text{si } s &= i \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

- $h = (h_{\alpha\beta})$ est une matrice symétrique réelle inversible (c'est-à-dire régulière ou non singulière) de dimension $d \times d$

→ $h^{\alpha\beta}$ est la matrice inverse de $h_{\alpha\beta}$

→ pour $s = 1 \Rightarrow h$ est défini positive

→ pour un changement de coordonnées linéaires approprié, h devient la matrice diagonale suivante :

$$h = \text{diag} (1, \dots, 1, -1, \dots, -1) \quad (\text{II.10})$$

avec :

p éléments $+1$

q éléments -1

$p+q = d$

$s=1 \Rightarrow p=d, q=0$

- Une forme quadratique Q_0 sur Z_0 est définie arbitrairement comme suit :

$$Q_0(z) = \int_{T_J} dt h_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha(t) \dot{z}^\beta(t) \quad (\text{II.11})$$

et il lui correspond le noyau suivant :

$$D_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 Q_0(z)}{\delta z^\alpha(u) \delta z^\beta(r)} \quad (\text{II.12})$$

ce qui par conséquent donne pour $Q_0(z)$ la représentation :

$$Q_0(z) = \int_T du \int_{T_J} dr D_{\alpha\beta}(u, r) z^\alpha(u) z^\beta(r) \quad (\text{II.13})$$

• De même, sur \mathbf{Z}_0' les auteurs considèrent une forme quadratique W_0 avec pour noyau $G^{\alpha\beta}(u,r)$ qui donnent les relations ci-après :

$$G^{\alpha\beta}(u,r) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 W_0(z')}{\delta z'_\alpha(u) \delta z'_\beta(r)} \quad (\text{II.14})$$

et

$$W_0(z') = \int_T du \int_{T_J} dr G^{\alpha\beta}(u,r) z'_\alpha(u) z'_\beta(r) \quad (\text{II.15})$$

• Les auteurs posent les conditions suivantes :

→ Q_0 sur \mathbf{Z}_0 est inverse de W_0 sur \mathbf{Z}_0' et réciproquement, dans le sens de la relation (I.6)

→ En terme de noyau ceci s'exprime comme suit :

$$\int_{T_J} dt D_{\alpha\beta}(s_1,t) G^{\beta\gamma}(t,s_2) = \delta_{\alpha'}^{\gamma'} \delta(s_1 - s_2) \quad (\text{II.16})$$

avec $\delta_{\alpha'}^{\gamma'}$ le symbole dit de Kronecker en utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés

→ les expressions pour les noyaux deviennent donc :

$$D_{\alpha\beta}(u,r) = \int_{T_J} dt h_{\alpha\beta} \delta'(t-u) \delta'(t-r) = -h_{\alpha\beta} \delta''(u-r) \quad (\text{II.17})$$

ce qui a pour signification la remarque suivante :

$$D : \mathbf{Z}_0 \rightarrow \mathbf{Z}_0'$$

est l'opérateur différentiel associé à la matrice : $\left(-h_{\alpha\beta} \frac{d^2}{dt^2} \right)$

→ de ce qui précède nous pouvons déduire que le noyau $G^{\alpha\beta}(u,r)$ correspond à la fonction de Green pour la prise en compte des conditions aux limites $z^\alpha(t_0)=0$, c'est-à-dire :

$$G^{\alpha\beta}(u,r) = \begin{cases} h^{\alpha\beta} \inf(u-t_0, r-t_0) & \text{pour } u \geq t_0, r \geq t_0, \\ h^{\alpha\beta} \inf(t_0-u, t_0-r) & \text{pour } u \leq t_0, r \leq t_0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

* Les intégrales fonctionnelles sur $\mathcal{P}_0 R^d$ font appel aux notations suivantes :

• L'espace des chemins \mathbf{Z}_0 sera aussi désigné par $\mathcal{P}_0 R^d$ afin de rappeler que l'espace plat R^d est aussi associé à l'ensemble des chemins z ayant pour origine le point fixe 0 dans R^d

• Les auteurs considèrent une variété associée à toute paire (Q,W) comportant une forme quadratique Q sur un espace \mathbf{Z} et une forme quadratique W sur son dual \mathbf{Z}' répondant de manière analogue à ce qui est exprimé par les relations (II.12), (II.14) et (II.16)

• Pour une telle paire (Q,W) les auteurs obtiennent un intégrateur symétrique par translation ou invariant par translation (la symétrie de translation ou invariance de translation est le nom donné au fait que l'intégrale obtenue s'écrit de la même façon en tout point de l'espace).

Cet intégrateur $\mathcal{D}_{s,Q} z$ sur \mathbf{Z} est caractérisé par :

$$\int_{\mathbf{Z}_J} \mathcal{D}_{s,Q} z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q(z) - 2\pi i \langle z', z \rangle \right] = \exp \left[-\pi s W(z') \right] \quad (\text{II.19})$$

pour z' dans \mathbf{Z}' .

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette posent :

$$\mathcal{D}\omega_{s,Q}(z) = \mathcal{D}_{s,Q} z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q(z) \right] \quad (\text{II.20})$$

faisant référence pour $\mathcal{D}_{s,Q}$ et $\mathcal{D}\omega_{s,Q}$ aux intégrateurs relatifs aux "intégrales gaussiennes".

* Les intégrales fonctionnelles sur $\mathcal{P}_{x_0}N$ font appel aux notations suivantes :

• Les auteurs fixent un point x_0 dans la variété N et considèrent les chemins continus suivants

$$x : \mathbf{T} \rightarrow N$$

pour lesquels :

→ le point fixe $x(t_0) = x_0$

→ la vitesse de la particule est dite de carré sommable ou de carré intégrable. Il s'agit d'une fonction définie sur un espace mesuré Ω (qui a déjà été mentionné) à valeur dans R appartenant à l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions dont l'intégrale du carré converge sur Ω

→ l'ensemble de tous les chemins est exprimé par $\mathcal{P}_{x_0}N$.

• L'intervalle de temps \mathbf{T} est associé à un élément z de \mathbf{Z}_0 et l'équation différentielle :

$$\left. \begin{aligned} dx(t) &= X_{(\omega)}(x(t))dz^\alpha(t) + Y(x(t))dt \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.21})$$

admet une solution unique $x(\cdot)$ dans $\mathcal{P}_{x_0}N$.

• La construction mathématique ci-avant caractérise une paramétrisation P de l'espace $\mathcal{P}_{x_0}N$ des chemins ponctuels sur N par l'espace \mathcal{P}_0R^d des chemins ponctuels dans R^d , c'est-à-dire :

$$P : \mathcal{P}_0R^d \rightarrow \mathcal{P}_{x_0}N$$

en prenant z dans x .

Si nécessaire nous désignerons par $x(t,z)$ la solution de l'équation différentielle (II.21) pour z donné dans l'espace \mathcal{P}_0R^d , ce qui fera de $x(t,z)$ une fonction de t et une fonctionnelle de z .

• En posant maintenant :

$$\mathbf{T} = [0, T] \text{ et } t_0 = 0,$$

les auteurs précisent qu'au moyen des définitions précédentes, ils peuvent définir $\Sigma(T,z)$ (voir équations II.1 et II.3) comme la transformation d'un point x_0 dans N en un point $x(T,z)$.

• Pour une fonction adéquate, à savoir toute fonction C^∞ infiniment dérivable dont le support est compact, c'est-à-dire une fonction Φ sur N , alors une fonctionnelle $\tilde{\Phi}$ sur \mathbf{Z}_0 est définie de la manière suivante :

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(x_0 \cdot \Sigma(T,z)). \quad (\text{II.22})$$

Cette fonctionnelle est intégrable relativement à l'intégrateur $\mathcal{D}\omega_s$ sur \mathbf{Z}_0 et en intégrant, les auteurs obtiennent :

$$I(\Phi, T, x_0) = \int_{\mathbf{Z}_0} \mathcal{D}\omega_s(z) \tilde{\Phi}(z) = \int_{\mathbf{Z}_0} \mathcal{D}_s z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) \right] \cdot \Phi(x_0 \cdot \Sigma(T,z)) \quad (\text{II.23})$$

qui correspond bien à l'équation (II.1).

• L'opérateur fonctionnel U_T associé à la fonction Φ sur la variété N la fonction :

$$x_0 \mapsto I(\Phi, T, x_0) \text{ sur cette variété } N.$$

Au paragraphe 2 de la section II, intitulé *The one-dimensional case*, les auteurs vont construire l'intégrale fonctionnelle de type (II.1) la plus simple et prouver qu'elle satisfait à l'équation (II.2) de Schrödinger. Et si tel est, alors ils auront formalisé un cadre rigoureux pour l'intégrale de chemin.

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette commence donc par indiquer qu'ils se placent en dimension 1 , c'est-à-dire le cas le plus simple pour lequel $d = 1$.

Ils mentionnent alors que dans ce cas de figure $X = X_{(1)}$ est un champ de vecteurs sur la variété N générant, dans le sens mathématique du terme comme nous l'avons vu ci-avant au paragraphe 1 (section II), l'ensemble constitué par le groupe à un paramètre de transformation $\sigma(r)$ sur N , défini précédemment (paragraphe 1, section II), tel que $\sigma(r)$ obéisse à l'équation différentielle suivante :

$$d(x_0. \sigma(r)) = X(x_0. \sigma(r))dr \quad (\text{II.24})$$

pour x_0 fixé arbitrairement dans N .

En posant $Y = 0$ et en considérant l'intervalle de temps $[0, T]$ dans lequel $t_0 = 0$, l'équation différentielle (II.21) s'écrit pour $\alpha = 1$:

$$\left. \begin{aligned} dx(t) &= X(x(t)) . dz(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} (\text{II.25})$$

Injectant $r = z(t)$ dans (II.24) les auteurs obtiennent :

$$d(x_0. \sigma(z(t))) = X(x_0. \sigma(z(t)))dz(t)$$

ce qui leur permet de déduire que la solution de l'équation (II.25) est donnée par :

$$x(t) = x_0. \sigma(z(t)),$$

et que par conséquent la transformation $\Sigma(T, z)$ définie en section I, paragraphe 4, est tout simplement $\sigma(z(t))$.

Puis les auteurs indiquent que l'espace de chemin Z_0 est concerné par les fonctions sur $L^{2,1}$ suivantes :

$$z : [0, T] \rightarrow R$$

telles que $z(0) = 0$, gratifiées par la forme quadratique vue en section II, paragraphe 1 :

$$Q_0(z) = \int_0^T dt \dot{z}(t)^2. \quad (\text{II.26})$$

Injectant (II.26) dans (II.23) et remplaçant $\Sigma(T, z)$ par $\sigma(z(t))$, les auteurs obtiennent :

$$\Psi(T, x) = \int_{Z_0} \mathcal{D}_s z . \exp \left[- \frac{\pi}{s} \int_0^T dt \dot{z}(t)^2 \right] \Phi(x. \sigma(z(t))). \quad (\text{II.27})$$

Puis rappelant que l'équation (II.2) de Schrödinger se trouvant dans un contexte à une dimension, c'est-à-dire s'écrivant :

$$\frac{\partial \Psi(T, x)}{\partial T} = \frac{s}{4\pi} \mathcal{L}_X^2 \Psi(T, x) \quad (\text{II.28})$$

ils leur faut montrer que (II.27) est solution de (II.28).

Pour cela, ils fixent un point x dans N et ils définissent une fonction de variable réelle :

$$h(r) = \Phi(x, \sigma(r)).$$

A partir de la structure de groupe exprimée en (II.4), c'est-à-dire :

$$\sigma(r_1) \circ \sigma(r_2) = \sigma(r_1 + r_2),$$

les auteurs écrivent :

$$\Phi[x, \sigma(r) \cdot \sigma(z(T))] = h(r+z(T)). \quad (\text{II.29})$$

Ainsi, connaissant comme le stipule l'équation (II.26) :

$$Q_0(z) = \int_0^T dt \dot{z}(t)^2,$$

à partir de l'équation (II.27) et de ce qui précède, les auteurs définissent la relation d'équivalence suivante :

$$H(T, r) := \int_{Z_0} \mathcal{D}_s z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) \right] h(r+z(T)). \quad (\text{II.30})$$

sollicitant le commentaire suivant des auteurs:

« Since the integrand $h(r+z(T))$ depends on the path z through $z(T)$, a linear change of variable $z \mapsto z(T)$ transforms immediately this functional integral over Z_0 into an ordinary integral over R (see formula (A.38) in Appendix A). It is easier to use directly the properties of Fourier transforms of Gaussian integrators underpinning (A.38). Denoting by \hat{h} the Fourier transform of h , we obtain

$$h(r+z(T)) = \int_R d\rho \hat{h}(\rho) \exp [2\pi i \rho (r+z(T))]. \quad (\text{II.31}) \gg^{433/5}$$

Alors en modifiant l'ordre d'intégration, les auteurs obtiennent :

$$H(T, r) = \int_R d\rho \hat{h}(\rho) \exp [2\pi i \rho r] \int_{Z_0} \mathcal{D}_s z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) + 2\pi i \rho z(T) \right]. \quad (\text{II.32})$$

A partir de (II.29) et de la dualité $\rho z(t) = \langle \rho \delta T, z \rangle$, les auteurs écrivent :

$$\int_{Z_0} \mathcal{D}_s z \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) + 2\pi i \rho z(T) \right] = \exp [-\pi s W_0(\rho \delta T)]. \quad (\text{II.33})$$

En se référant à (II.15) et à (II.18) ils déduisent :

$$W_0(\rho \delta T) = \rho^2 G(T, T) = \rho^2 T \quad (\text{II.34})$$

Puis à l'aide des résultats obtenus en (II.32) et en (II.34), Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette concluent :

$$H(T, r) = \int_R d\rho \hat{h}(\rho) \exp [2\pi i \rho r - \pi s \rho^2 T] \quad (\text{II.35})$$

et en dérivant sous le symbole mathématique \int appelé aussi signe intégral ou intégrateur introduit par Leibniz, ils concluent à nouveau :

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{s}{4\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \quad (\text{II.36})$$

Le champ de vecteurs étant le générateur du groupe à un paramètre de la transformation $\sigma(r)$ alors pour chaque entier $m \geq 0$ les auteurs écrivent :

433/5. Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « A new perspective on functional integration ». Journal of Mathematical Physics. Volume 36, page 15.

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m h(r+z(T)) = (\mathcal{L}^m_x \Phi)(x.\sigma(r+z(T))). \quad (\text{II.37})$$

En différentiant dans l'équation (II.30) sous le symbole intégral \int les auteurs déduisent :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m H(T,r) = \int_{Z_0} \mathcal{D}_s z . \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) \right] (\mathcal{L}^m_x \Phi)(x.\sigma(r+z(T))). \quad (\text{II.38})$$

Puis utilisant la définition (II.27) et appliquant m fois l'opérateur différentiel L_x agissant sur les fonctions de x , les auteurs obtiennent :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m H(T,r) \Big|_{r=0} = \mathcal{L}^m_x \Psi(T,x). \quad (\text{II.39})$$

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette signalent qu'en particulier pour $m = 0$, ils arrivent à l'égalité suivante :

$$H(T,r) \Big|_{r=0} = \Psi(T,x). \quad (\text{II.40})$$

et que rien ne les empêche de dériver le membre de gauche et le membre de droite de l'expression précédente par rapport à T , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial T} H(T,r) \Big|_{r=0} = \frac{\partial}{\partial T} \Psi(T,x). \quad (\text{II.41})$$

Posant $r=0$ dans l'équation (II.36) et utilisant l'équation (II.39) pour $m=2$, ainsi que le résultat obtenu par l'équation (II.41), les auteurs arrivent à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial T} \Psi(T,x) = \frac{s}{4\pi} \mathcal{L}^2_x \Psi(T,x)$$

prouvant ainsi que (II.27) est solution de (II.28) c'est-à-dire que les intégrales fonctionnelles (c'est-à-dire les intégrales de chemin) sur l'espace $L^{2,1}$ des chemins ponctuels sont solution de l'équation générale de Schrödinger.

En d'autres termes, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette ont montré que $\Psi(T,x)$ tel qu'exprimé par l'équation (II.1) pour $d = 1$ (espace à une dimension) est solution de l'équation différentielle (II.2) de Schrödinger justement considérée dans un espace à une dimension.

Ainsi la théorie quantique plus ou moins intuitive de Feynman basée sur l'intégrale de chemin est pour ainsi dire prouvée de manière formelle et rigoureuse en considérant le cas le plus simple, c'est-à-dire en associant une variété différentielle dans un espace à une dimension pour une particule libre, c'est-à-dire non soumise au champ électromagnétique, se propageant selon un mouvement rectiligne uniforme.

Au paragraphe 4 de la section II, intitulé *Some generalizations*, les auteurs considèrent maintenant le cas d'une particule soumise à un champ électromagnétique c'est-à-dire placée dans un potentiel V . Pour cela, ils considèrent l'équation de Schrödinger relative à ce cas de figure :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{s}{4\pi} h^{\alpha\beta} \mathcal{L}_{X(\alpha)} \mathcal{L}_{X(\beta)} \Psi + V \Psi \quad (\text{II.70})$$

pour laquelle une solution associée au contexte de l'intégrale fonctionnelle de chemin considéré par les auteurs est donnée ci-après :

$$\Psi(T,x_0) = \int_{Z_0,T} \mathcal{D}_s z . \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_0(z) + \int_T dt V(x_0 . \Sigma(t,z)) \right] \Phi(x_0 . \Sigma(T,z)). \quad (\text{II.71})$$

Une démonstration rigoureuse de la solution considérée ci-avant par les auteurs peut être réalisée en procédant astucieusement de la manière suivante :

« We can also use the following trick: we add one variable Θ , considering the manifold $N \times R$. The vector fields $X_{(a)}$ in N give vector fields, also denoted by $X_{(a)}$, in $N \times R$, which have a zero component on the factor R . Moreover $Y = V(x) \partial / \partial \Theta$. The function $\Psi(T,x)$ satisfies the equation (II.70) if, and only if, the function $\Psi(T,x) \exp \Theta$ satisfies the equation (II.2) on $N \times R$. The differential system (II.21) is now written as

$$\begin{cases} dx = X_{(a)}(x) dz^a \\ d\Theta = V(x) dt \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

Hence the transformation $\Sigma(T,z)$ takes (x_0, Θ_0) into

$$[x_0 \cdot \Sigma(T,z) , \Theta_0 + \int_T dt V(x_0 \cdot \Sigma(t,z))] ,$$

Hence

$$\Phi((x_0,0) \cdot \Sigma(T,z)) = \Phi(x_0 \cdot \Sigma(T,z)) \exp \left[\int_T dt V(x_0 \cdot \Sigma(t,z)) \right]. \quad (\text{II.73})$$

Equation (II.71) follows easily from these remarks. » ^{433/6}

En section III, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette montrent que non seulement la construction de leur fonctionnelle (II.1) [l'intégrale de chemin] qu'ils ont élaborée de manière rigoureuse est solution de l'équation de Schrödinger, mais aussi qu'elle est physiquement conforme à ce que la théorie quantique de Feynman en attend.

Pour cela, ils développent la relation (II.1), en fait l'équation (II.71) car ils considèrent une particule en mouvement dans un champ électromagnétique (utilisation du potentiel V).

En effet, ils veulent aussi prouver qu'il peuvent obtenir un propagateur associé à la fonction d'onde, à l'image de ce que nous avons exprimé en sous-section 5.2.4.c en considérant les travaux de Feynman pour une particule libre.

Les auteurs commencent donc par préciser qu'ils vont travailler sur l'équation (II.71) de la fonction d'onde associée à une particule en mouvement dans un champ électromagnétique (voir section II, paragraphe 4), qui est, comme nous l'avons indiqué ci-avant, le "pendant" de l'équation (II.1) de la fonction d'onde associée à une particule libre (voir début de section II). Cette équation (II.1) est d'ailleurs tenue par les auteurs comme référence tout au long de leurs travaux.

En introduisant cette fois la constante de Planck \hbar , ils obtiennent la fonction d'onde suivante liée à la construction de leur intégrale de chemin :

$$\Psi(t_b, x_b) = \int_Z \mathcal{D}_{s, Q_0} z \cdot \exp \left[- \frac{\pi}{s} Q_0(z) \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{s\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt V(x_b \cdot \Sigma(t,z)) \right] \cdot \Phi(x_b \cdot \Sigma(t_a, z)). \quad (\text{III.1})$$

Les auteurs vont donc calculer $\Psi(t_b, x_b)$ dans le cadre et les hypothèses mathématiques définies dans les sections précédentes.

^{433/6}. Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « A new perspective on functional integration ». Journal of Mathematical Physics. Volume 36, page 21.

Aussi, ils posent d'emblée :

$$t_0 = t_b \quad \text{et} \quad x_0 = x_b$$

ce qui a pour conséquence d'avoir pour \mathcal{Z} l'espace \mathcal{Z}_b des chemins finissant à t_b et de pouvoir écrire :

$$x(t_b, z) = x_b.$$

Pour cela, les auteurs choisissent une fonction d'onde initiale dont l'équation s'écrit :

$$\Phi(x) = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \mathcal{S}_0(x) \right] \cdot \mathcal{T}(x) \quad (\text{III.2})$$

où \mathcal{T} est une fonction à support compact dans l'intervalle de chemin donné sur une variété N .

Rappelons qu'une fonction à support compact est une fonction infiniment dérivable (existence d'une dérivée n -ième pour $n \rightarrow \infty$) dans l'intervalle considéré pour la fonction pour lequel cette dernière ne s'annule pas.

Les auteurs mentionnent que si \mathcal{S}_0 est une fonction arbitraire, elle doit néanmoins être appropriée c'est-à-dire définie d'une façon raisonnable sur l'espace topologique que constitue la variété différentielle N .

Rappelons que les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir un vocabulaire et un cadre général pour traiter les notions de limite, de continuité et de voisinage. Les auteurs insistent sur le fait que l'équation (III.2) de la fonction d'onde initiale généralise ce que l'on entend par ondes planes sur R^d , mais qu'il ne faut en rien l'assimiler à l'état propre d'une quelconque quantité de mouvement.

Les auteurs mentionnent aussi qu'ils adoptent un calcul basé sur l'approximation mathématique qualifiée de semi-classique en mécanique quantique pour le calcul de la fonction d'onde. Rappelons à cet effet que le régime semi-classique d'un système physique en mécanique quantique est le régime pour lequel les actions du système physique étudié sont grandes devant le quantum d'action \hbar . Mathématiquement, cela revient à effectuer un développement asymptotique des grandeurs quantiques au voisinage de $\hbar = 0$ (voir en Annexe 17 le contexte associé à une constante de Planck tendant vers zéro).

Ils précisent que la fonction d'onde initiale exprimée par l'équation (III.2) généralisant la notion d'ondes planes dans l'ensemble des réels R^d n'est pas pour autant un état propre de la quantité de mouvement, encore dénommée impulsion, associée à la propagation du paquet d'ondes (après réduction) dans l'espace de la particule de masse m . Néanmoins, les auteurs mentionnent qu'ils peuvent qualifier d'expansion semi-classique la propagation associée à la fonction d'onde $\Psi(t_b, x_b)$ dont l'équation est donnée par (III.1) entre autres parce que dans la limite $\hbar = 0$, en supposant $s = i$ comme défini par la mécanique quantique :

« the current density corresponding to the initial wave function Φ is:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2i} (\Phi^* \nabla \Phi - (\nabla \Phi)^* \Phi) = | \mathcal{T} |^2 p, \text{ where } p(x) = \nabla \mathcal{S}_0(x). \quad (\text{III.3})$$

Et ils ajoutent:

« Consequently, $\Psi(t_b, x_b)$ is the amplitude corresponding to the transition from momentum $\nabla \mathcal{S}_0(x)$ to position x_b . »^{433/6 bis}

Au paragraphe 1 de la section III, intitulé *General strategy*, les auteurs considèrent le Lagrangien suivant, correspondant au cadre mathématique défini dans les sections précédentes :

$$L(t, z) = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha(t) \dot{z}^\beta(t) - V(x(t, z)) \quad (\text{III.5})$$

433/6 bis. Ibid page 22.

avec:

- * $x(t, z)$ la solution de l'équation différentielle (II.21) vue en section II, paragraphe 1,
- * la solution $x(t, z)$ ayant pour condition aux limites $x(t_b, z) = x_b$, la limite x_b étant une contrainte sur la valeur que prend cette solution de l'équation différentielle (II.21),
- * $x(t, z)$ est une fonction de $\dot{z}(t)$ et une fonctionnelle de z .

Et de ce Lagrangien, associé à l'intégrale de chemin telle que Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette l'ont construite, ceux-ci déduisent l'action suivante :

$$S(z) = \int_{TJ} dt L(t, z) + \mathcal{S}_0(x(t_a), z) \quad (\text{III.6})$$

sur l'espace $\mathbf{Z}_b = P_0 R^d$ vu en section I, paragraphes 1 et 4, espace des chemins z obéissant à la condition aux limites $z(t_b) = 0$.

Puis les auteurs posent comme point critique de l'action S le point z_{cl} dans \mathbf{Z}_b .

Il procèdent alors au calcul variationnel classique en considérant une variation relative à un paramètre λ telle que :

$$z(\lambda) = z_{cl} + \lambda \zeta \quad (\text{III.7})$$

avec :

- * ζ appartenant à l'espace des chemins \mathbf{Z}_b ,
- * l'équation $\left. \frac{d}{d\lambda} S(z(\lambda)) \right|_{\lambda, 0} = 0 \quad (\text{III.8})$

devant être satisfaite quelle que soit la variable ζ et conduisant après intégration par parties à une équation différentielle fonctionnelle associée à $z_{cl}(t_a)$.

De fait, sous la transformation affine de la variable z vers la variable ζ telle que donnée par l'équation (III.7), les auteurs obtiennent :

$$Q_0(z) = Q_0(z_{cl} + \lambda \zeta) = Q_0(z_{cl}) + 2\lambda Q_0(z_{cl}, \zeta) + \lambda^2 Q_0(\zeta) \quad (\text{III.9})$$

et :

$$\mathcal{D}_{s, Q_0} z = \mathcal{D}_{s, \lambda^2 Q_0} \zeta. \quad (\text{III.10})$$

Ainsi le développement de $x(\cdot, z(\lambda))$ autour de $x(\cdot, z_{cl})$ donne :

$$P(z_{cl} + \lambda \zeta) = P(z_{cl}) + \lambda P'(z_{cl}). \zeta + \frac{1}{2} \lambda^2 P''(z_{cl}). \zeta \zeta + O(\lambda^3) \quad (\text{III.11})$$

avec :

- * $P'(z_{cl})$ et $P''(z_{cl})$ respectivement les dérivées première et seconde des tracés $P(z)$ pour $z = z_{cl}$, c'est-à-dire des trajectoires associées au mouvement d'une particule en $z = z_{cl}$,
- * $P(z)$ définis en section I, paragraphe 4, lié à l'équation différentielle (I.12) et pour lesquels :

$$P : \mathbf{Z}_b \rightarrow \mathcal{P}_{xb} N \text{ associe } z \text{ à } x(\cdot, z).$$

Abbrégeant par mesure de simplicité l'écriture $x(t, z_{cl})$ en $x_{cl}(t)$, les auteurs obtiennent la nouvelle formulation suivante :

$$(P'(z_{cl}). \zeta)^\alpha(t) = - \int_t^{t_b} ds \frac{\delta x_{cl}^\alpha(t)}{\delta z_{cl}^\beta(t)} \zeta^\beta(s) = - \int_t^{t_b} ds k^\alpha \beta(t, s) \zeta^\beta(s) =: \zeta^\beta(t) \quad (\text{III.12})$$

$$(P''(z_{cl}). \zeta \zeta)^\alpha(t) = - \int_t^{t_b} ds \left(- \int_t^{t_b} du \right) \frac{\delta^2 x_{cl}^\alpha(t)}{\delta z_{cl}^\beta(s) \delta z_{cl}^\gamma(u)} \zeta^\beta(s) \zeta^\gamma(u) = \int_t^{t_b} ds \int_t^{t_b} du k^\alpha \beta_\gamma(t, s, u) \zeta^\beta(s) \zeta^\gamma(u) \quad (\text{III.13})$$

Pour une particule soumise au champ électromagnétique, les auteurs déduisent qu'ils peuvent alors obtenir sur un court instant le propagateur dont fait référence Feynman dans sa théorie, que nous avons vu dans le contexte de la particule libre en sous-section 5.2.4.c.

Pour obtenir ce propagateur de la particule soumise au champ électromagnétique, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette indiquent qu'il faut développer la quantité :

$$\Phi(x_b, \Sigma(t, z))$$

se trouvant dans l'équation (III.1), autour de $\Phi(x_b)$ avec $x_b \in N$.

Cependant dans le contexte mathématique qui est le leur, les auteurs écrivent qu'il faut développer cette quantité $\Phi(x_b, \Sigma(t, z))$ non pas autour de $\Phi(x_b)$ mais autour de $\Phi(x_b, \Sigma(t, z_{cl}))$ avec $z_{cl} \in Z_b$, en précisant :

« *When we choose for z_{cl} a critical point of the action, we obtain the WKB approximation.* »^{433/7}

Le fait de retrouver l'approximation W.K.B. montre bien la pertinence à la fois des hypothèses et de la méthode des auteurs (Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette) dans leur approche rigoureuse de l'intégrale de chemins.

Rappelons qu'en physique, l'approximation W.K.B. en l'honneur des trois physiciens théoriciens Gregor Wentzel (1898-1978), Hendrik Kramers (1894-1952), Léon Brillouin (1889-1969), est une méthode développée en 1926 qui permet d'étudier le régime classique d'un système quantique. La fonction d'onde est développée asymptotiquement au premier ordre de la puissance du quantum d'action \hbar . On doit donc retrouver la mécanique classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ (voir Annexe 17) comme on retrouve l'optique géométrique lorsque la longueur d'onde $\lambda \rightarrow 0$ dans la théorie de l'optique ondulatoire (voir section 5.2.2).

Les auteurs précisent les travaux antérieurs de Cécile DeWitt-Morette, K.D. Elworthy, B.L. Nelson, G.S. Sammelman, en indiquant néanmoins qu'en choisissant pour z_{cl} un point critique de l'action, il y a deux développements différents avec en général la définition d'un propagateur agissant sur un court instant qui peut être différent de l'approximation W.K.B.^{433/8}

Cependant les travaux personnels de Cécile DeWitt-Morette^{433/9} montrent que l'approximation W.K.B. est bien obtenue pour certains cas assez simples.

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette prouvant que leurs travaux convergent avec les résultats obtenus en physique quantique, confirment ainsi le bien fondé de leurs hypothèses dans la construction d'un cadre rigoureux pour l'intégrale de chemins.

Pour aller plus loin, c'est-à-dire approfondir et clarifier les développements qui précèdent, les auteurs citent les travaux du mathématicien américain Stephen Fulling.

Fulling écrit pour l'opérateur de Schrödinger $\exp[-\frac{iH}{\hbar} t]$ (que nous avons vu au chapitre 3), le terme tH/\hbar sous la forme suivante :

$$\frac{iH}{\hbar} = -\frac{1}{2}AA + BV$$

433/7. Ibid page 25.

433/8. DeWitt-Morette, Elworthy, Nelson, Sammelman. 1980. « *A stochastic scheme for constructing solutions of the Schrödinger equation* ». Institut Henri Poincaré, A32, pages 327-341.

433/9. DeWitt-Morette. 1951. « *On the definition and approximation of Feynman's path integral* ». Physical Review, volume 81, pages 848-852.

dans laquelle:

$$* A = \frac{\hbar t}{m}$$

$$* B = \frac{\lambda t}{\hbar}$$

* λ est une certaine constante de couplage.

Ainsi, Fulling obtient quatre développements différents possible selon le contexte physique dans lequel il se place :

- « - expansion in B , equivalently expansion in λ ;
- expansion in A , equivalently expansion in m^{-1} ;
- expansion in $A.B$, equivalently expansion in t ;
- expansion in A/B , equivalently expansion in \hbar . »^{433/10}

En section IV, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette (comme nous l'indiquons au paragraphe 5 de la section I) prennent divers exemples associés à des choix particuliers concernant la variété différentielle N liée à la construction de leur intégrale fonctionnelle, c'est-à-dire l'intégrale de chemin.

Les auteurs précisent que leur étude est centrée sur les fonctionnalités de l'équation de Schrödinger. Aussi, leur analyse va consister à évaluer la valeur de la fonction d'onde Ψ en position finale correspondant à un temps final t_b en choisissant l'espace Z_b des chemins déterminé par $z(t_b) = 0$.

Ils montrent alors que toute la rigueur mathématique dont ils ont fait preuve jusqu'à présent reste fondée. Ils écartent ainsi toute vue intuitive, même lorsque l'espace associé au chemin parcouru par une particule n'est pas euclidien.

Aussi, pour un environnement physique dans lequel s'exercerait les effets de champs électromagnétiques ou autres, et pour lequel la géométrie de l'espace serait riemannienne ou pseudo-riemannienne, multi-connexe ou encore associé à une variété symplectique, ils vont montrer que l'intégrale de chemin reste conforme au cadre mathématique rigoureux qu'ils ont construit.

Cette manière de généraliser l'espace est fondamentale lorsqu'on se remémore la façon dont Einstein a construit la théorie de la relativité générale basée sur l'espace-temps décrit comme un espace riemannien dont la courbure est contenue dans les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. En effet, le paradigme de la matière-énergie courbant l'espace lui-même permet le calcul du périhélie de planètes telluriques telle que Mercure située la plus près du Soleil. Et ce calcul ne peut pas être fait avec la théorie de la gravitation de Newton fondée sur une géométrie euclidienne d'un espace assujetti au temps absolu et non relatif.

Dans le contexte d'un espace euclidien pour les chemins dans lesquelles la particule est supposée parcourir une trajectoire donnée, l'espace et le temps font partie du décor dans lequel la théorie de l'intégrale de chemin s'exerce. L'un comme l'autre (c'est-à-dire respectivement l'espace et le temps) sont donnés à l'avance, une fois pour toute, et ne participent pas à la théorie en tant que telle.

Bien au contraire, du point de vue de la conception de l'infinit petit basé entre autres sur un espace riemannien (ou pseudo-riemannien), la mécanique quantique demande de définir le

433/10. Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « *A new perspective on functional integration* ». Journal of Mathematical Physics. Volume 36, page 25.

cadre dans la limite de sa propre structure formelle. Ainsi se dessine le choix d'une infinité de modèles de variétés N , associées à des équations aux dérivées partielles directement issues de telle ou telle métrique correspondant à telle ou telle hypothèse d'espace-temps. Et c'est ce que Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette n'ont pas hésités à entreprendre dans leur publication.^{433/11}

Dans le cadre de notre thèse, nous devons analyser les travaux de Pierre Cartier et de Cécile DeWitt-Morette relativement à un R -espace plat euclidien défini selon des coordonnées cartésiennes et à un R -espace riemannien (ou pseudo-riemannien). C'est ce que nous allons faire maintenant.

Les auteurs abordent donc d'une part une étude basée sur le concept de relativité restreinte pour lequel l'espace est euclidien et d'autre part une réflexion fondée sur le concept de relativité générale pour lequel l'espace est riemannien. Ainsi, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette examinent le problème des intégrales de chemins sous toutes les facettes, même lorsque ces intégrales sont parties prenantes de variétés différentielles associées aux espaces de Riemann.

Au paragraphe 1 de la section IV, intitulé *Point-to-point transitions in a flat space*, les auteurs considèrent un espace de chemins associé à une variété différentielle $N = R^d$ exprimée en coordonnées cartésiennes.

Dans cette variété, qui représente un objet de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle, il est possible d'affecter les opérations du calcul différentiel et intégral. Dans ce contexte, pour un vecteur x de coordonnées :

$$x^1, \dots, x^d$$

les auteurs définissent, de manière classique, la longueur :

$$|x| = \left(\sum_{\alpha=1}^d (x^\alpha)^2 \right)^{1/2}.$$

Ils rappellent les quelques notions de mécanique utilisées par Feynman dans l'élaboration de sa théorie, à savoir :

1) Une particule de masse m en mouvement dans un champ électromagnétique lié à un potentiel électrique V , répond au Lagrangien et à l'Action donnés par les équations suivantes :

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m |\dot{x}|^2 - V(x) \quad (\text{IV.1})$$

$$S(x(\cdot)) = \int_T dt L(x(t), \dot{x}(t)) \quad (\text{IV.2})$$

avec lesquelles nous sommes dorénavant familier.

2) En mécanique classique, les équations du mouvement sont régies par les conditions aux limites suivantes :

$$m \ddot{x}_{cl} = -grad V(x_{cl}) = -\nabla V(x_{cl}) \quad (\text{IV.3})$$

$$x_{cl}(t_a) = x_a, \quad x_{cl}(t_b) = x_b \quad (\text{IV.4})$$

avec :

* x_a, x_b la valeur des positions de la fonction d'onde dans R^d .

3) En mécanique quantique, la résolution de l'équation de Schrödinger (que nous avons vu en fin de section 1.2.1.f) :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi \quad (\text{IV.5})$$

s'effectue en considérant la condition initiale;

$$\Psi(t_a, x) = \Phi(x). \quad (\text{IV.6})$$

Alors la transition point par point de l'amplitude de la fonction d'onde est donnée par le propagateur :

$$\langle t_b, x_b | t_a, x_a \rangle = \Psi(t_b, x_b) \quad (\text{IV.7})$$

avec :

* $\Phi(x)$ la delta-fonction de Dirac qui s'écrit : $\delta(x - x_a)$.

4) Les travaux originaux de Feynman ont permis de résoudre l'équation de Schrödinger par la solution apportée par l'intégrale de chemin :

$$\Psi(t_b, x_b) = \int_{P_b} \mathcal{D}x \cdot \exp[iS(x)/\hbar] \cdot \Phi(x(t_a)) \quad (\text{IV.8})$$

que nous avons largement vu au chapitre 3,

avec :

* \mathcal{P}_b le domaine d'intégration concerné par l'intégrale précédente c'est-à-dire l'espace de tous les chemins tel que :

$$x : T \rightarrow R^d$$

* $x(t_b) = x_b$ la valeur de la position d'arrivée (position finale) de la fonction d'onde associée à la particule en mouvement,

* $\mathcal{D}x$ le symbole de la variable fonctionnelle d'intégration. L'intégration sur la fonction x symbolisée par $\mathcal{D}x$ s'appelle une intégrale fonctionnelle.

Et c'est justement au sujet de ce symbole $\mathcal{D}x$ d'intégration que les auteurs mettent en doute la rigueur mathématique de Feynman vis-à-vis d'une certaine intuition :

« *The questionable part was the rigorous definition of the integrator $\mathcal{D}x$* ». ^{433/12}

Afin d'être conforme au cadre mathématique général qu'ils ont mis en place dans leur volonté de parvenir à un cadre rigoureux pour l'intégrale de chemin, les auteurs considèrent les translations (encore appelées invariances en physique) sur l'ensemble des réels R^d , à savoir :

$$x \cdot \sigma_{(a)}(r) = (x^1, \dots, x^{a-1}, x^a + \lambda r, x^{a+1}, \dots, x^d). \quad (\text{IV.9})$$

La dérivée de Lie correspondante, c'est-à-dire la différentiation sur la variété différentielle considérée, est donnée par :

$$\mathcal{L}_{X(a)} f = \lambda \frac{\partial f}{\partial x^a} \quad (\text{IV.10})$$

avec :

* le choix pour le paramètre λ égal à $\left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2}$.

Ainsi, l'équation différentielle générale (II.72), c'est-à-dire :

$$dx = X_{(\alpha)}(x) dz^\alpha$$

se réduit à :

$$dx^\alpha = \lambda dz^\alpha$$

avec :

* α prenant les valeurs $\{1, \dots, d\}$.

Par conséquent, la solution :

$$x(t, z) = x_b + \lambda z(t) \quad (\text{IV.11})$$

décrit la paramétrisation de l'espace \mathcal{P}_b des chemins x avec $x(t_b)=x_b$ selon l'espace \mathbf{Z}_b des chemins z avec $z(t_b)=0$.

En conséquence de quoi, les auteurs obtiennent l'expression suivante pour l'Action :

$$-\frac{1}{s\hbar} S(x(.,z)) = -\frac{\pi}{s} \int_T dt \left| \dot{z} \right|^2 + \frac{1}{s\hbar} \int_T dt V(x(t,z)). \quad (\text{IV.12})$$

Puis, en substituant z à la variable d'intégration x dans l'équation (IV.8), les auteurs obtiennent l'intégrale de chemin suivante :

$$\Psi(t_b, x_b) = \int_{\mathbf{Z}_b} \mathcal{D}x \cdot \exp\left[-\frac{1}{s\hbar} S(x(.,z))\right] \cdot \Phi(x(t_a, z)) \quad (\text{IV.13})$$

avec :

* i dans l'équation (IV.8) devenant s comme imposé par la mécanique quantique.

En fait, l'équation (IV.13) obtenue dans le contexte mathématique associé à cette section IV, paragraphe 1, correspond à l'équation générale (II.71).

Alors comme expliqué en section II, paragraphe 4, l'équation (II.71) étant solution de l'équation de Schrödinger (II.70), les auteurs déduisent tout naturellement que la fonction d'onde $\Psi(t_b, x_b)$ exprimée par l'équation (IV.13) est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{s}{4\pi} \sum_{\alpha} \mathcal{L}^2_{X(\alpha)} \Psi + \frac{1}{s\hbar} V \Psi \quad (\text{IV.14})$$

qui n'est autre que :

$$s\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{s^2 \hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi. \quad (\text{IV.15})$$

En respectant le critère fondamental de la mécanique quantique, c'est-à-dire en injectant $s=i$ dans l'équation (IV.15), les auteurs obtiennent :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i^2 \hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

c'est-à-dire :

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} + V \right) \Psi$$

qui n'est autre que l'équation de Schrödinger que nous avons vu en fin de section 1.2.1.f.

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette précisent que le symbole d'intégration $\mathcal{D}z$, dans l'espace des chemins \mathbf{Z}_b (voir l'intégrale fonctionnelle IV.13), est un invariant par translations et qu'il est normalisé par :

$$\int_{Z_b} \mathcal{D}x \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} \int_T dt \left| \dot{z}(t) \right|^2 \right] = 1. \quad (\text{IV.16})$$

Puis ils mentionnent qu'ils utilisent la fonction d'onde initiale définie précédemment en (IV.6) :

$$\Phi(x) = \delta(x - x_a)$$

et ils procèdent au reparamétrage des chemins autour du chemin classique x_{cl} en suivant la méthode du calcul variationnel habituel qu'ils ont indiquée en construisant l'expression (III.7). Ils obtiennent alors :

$$x(t, \zeta) = x_{cl}(t) + \lambda \zeta(t) \quad (\text{IV.17})$$

avec :

* ζ appartenant à l'espace des chemins Z_b .

Enfin, parce que d'une part le symbole d'intégration $\mathcal{D}z$ dans Z_b est un invariant par translations et que d'autre part $x_{cl}(t_a) = x_a$, les auteurs transforment l'équation (IV.13) de la manière qui suit :

$$\Psi(t_b, x_b) = \int_{Z_b} \mathcal{D}\zeta \cdot \exp \left[-\frac{1}{s\hbar} S(x_{cl} + \lambda\zeta) \right] \delta(\lambda\zeta(t_a)). \quad (\text{IV.18})$$

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette mentionnent qu'en développant $S(x_{cl} + \lambda\zeta)$ en puissance de λ , il n'y a aucun terme linéaire en λ car x_{cl} est un point critique de l'Action S et parce que :

$$\zeta(t_a) = \zeta(t_b) = 0.$$

Par conséquent, ils obtiennent :

$$-\frac{1}{s\hbar} S(x_{cl} + \lambda\zeta) = -\frac{1}{s\hbar} S(x_{cl}) - \frac{\pi}{s} \int_T dt \left| \dot{\zeta}(t) \right|^2 + \frac{\pi}{ms} \int_T dt \nabla_\alpha \nabla_\beta V(x_{cl}(t)) \zeta^\alpha(t) \zeta^\beta(t) + O(\hbar^{1/2}). \quad (\text{IV.19})$$

Les auteurs précisent que l'Action $S(x_{cl})$ correspondant au chemin classique x_{cl} muni des deux extrémités :

$$x_{cl}(t_a) = x_a \quad \text{et} \quad x_{cl}(t_b) = x_b$$

n'est rien d'autre que la fonction de l'Action classique $S(t_b, x_b; t_a, x_a)$.

Ne tenant pas compte des termes d'ordre $1/2$ pour \hbar c'est-à-dire de $\hbar^{1/2}$, les auteurs indiquent qu'ils obtiennent l'approximation W.K.B. (voir section III, paragraphe 1) dans le développement de la fonction d'onde $\Psi(t_b, x_b)$ qu'ils écrivent de la manière suivante via les expressions (IV.18) et (IV.19) :

$$\Psi_{WKB}(t_b, x_b) = \exp \left[-\frac{1}{s\hbar} S(t_b, x_b; t_a, x_a) \right] \cdot I \quad (\text{IV.20})$$

avec:

$$* \text{ l'intégrale } I = \int_{Z_b} \mathcal{D}\zeta \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{s} Q_1(\zeta) \right] \delta(\lambda\zeta(t_a)) \quad (\text{IV.21})$$

qu'ils calculent comme indiqué dans l'annexe A (Functional integration) et dans l'annexe B (Functional determinants of Jacobi operators).

Ainsi, à partir d'un cadre mathématique rigoureux qu'ils construisent méthodiquement, les auteurs retrouvent le principe de l'Action mis en avant plus ou moins intuitivement par Feynman, en calculant l'évolution de la fonction d'onde dans un espace plat. Et en montrant que l'évolution de cette fonction d'onde correspond à l'approximation W.K.B. dans son développement au premier ordre sur \hbar , ils prouvent la véracité de leur calcul.

Au paragraphe 3 de la section IV, intitulé *Frame bundles over Riemannian manifolds*, les auteurs considèrent une variété différentielle riemannienne (ou pseudo-riemannienne) M de dimension d , de métrique g , relative à un faisceau de trames orthonormées tel que $N = O(M)$ sur M avec une projection

$$\pi : O(M) \rightarrow M.$$

Rappelons qu'en mathématique, un faisceau de trames (frame bundle) est un fibré principal $F(E)$ associé à tout faisceau vectoriel E . La fibre de $F(E)$ sur un point x est l'ensemble de toutes les bases directes (les trames) pour E_x .

Rappelons aussi que si un faisceau vectoriel E appartient à l'espace de Riemann doté d'une métrique riemannienne, alors chaque fibre E_x n'est pas seulement un espace vectoriel, mais aussi un espace vectoriel muni du produit scalaire usuel. Il est alors possible de parler de l'ensemble de toutes les trames orthonormées pour E_x .

Une trame orthonormée pour E_x est une base orthonormée directe (encore appelée base orthonormée ordonnée) pour E_x .

Précisons ce qu'est une base orthonormée directe ou base orthonormée ordonnée :

* premièrement, une base orthonormée est une base orthogonale normée. Les vecteurs de base sont tous perpendiculaires les uns avec les autres. De plus, ils sont normés c'est-à-dire qu'ils ont la même norme (la même longueur),

* deuxièmement, en supposant la dimension trois, les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tous perpendiculaires les uns avec les autres et normés, sont ordonnés (base orthonormée directe). Précisons qu'une base directe peut être matérialisée par les trois doigts de la main droite tels que le pouce, l'index, le majeur, correspondant respectivement aux vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

* On obtient ainsi une base avec trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ perpendiculaires les uns avec les autres, de même norme et dans un ordre précis, ordonné, c'est-à-dire direct.

Mentionnons que les auteurs signalent les travaux de Cécile DeWitt-Morette^{433/13} pour une analyse des intégrales fonctionnelles lorsque les chemins prennent leurs valeurs dans un espace riemannien.

433/13. DeWitt-Morette, Maheshwari, Nelson. 1979. « *Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Physics Reports, volume 50, pages 266-372.

DeWitt-Morette, Elworthy, Nelson, Sammelman. 1980. « *A stochastic scheme for constructing solutions of the Schrödinger equation* ». Institut Henri Poincaré, A32, pages 327-341.

DeWitt-Morette. 1990. « *Quantum mechanics in curved spacetimes ; stochastic processes on frame bundles* » pages 49-87 in « *Quantum Mechanics in Curved Space-Time* ». Editions J. Audretsch and V. de Sabbata. Plenum Press, New York.

En section II, paragraphe 1, les auteurs ont définis des champs de vecteurs $X_{(\alpha)}$ avec α prenant les valeurs $0, 1, 2, \dots, d$. Et ces champs de vecteurs sont associés aux équations (II.5) et (II.6).

Dans le contexte d'une variété riemannienne, les auteurs choisissent des champs de vecteurs :

$$X_{(1)}, \dots, X_{(d)}$$

sur $O(M)$ tels que sur le faisceau $O(M)$ l'équation suivante soit vérifiée :

$$\frac{\partial}{\partial t_b} \Psi(t_b, \rho_b) = \frac{s}{4\pi} h^{\alpha\beta} X_{(\alpha)} X_{(\beta)} \Psi(t_b, \rho_b) \quad (\text{IV.48})$$

avec :

* ρ_b appartenant à $O(M)$,

et

* les opérateurs différentiels du premier ordre donnés par $X_{(\alpha)} = X^{\lambda}_{(\alpha)}(\rho_b) \frac{\partial}{\partial \rho^{\lambda}_b}$

donnant par projection sur l'espace de base M , une équation :

$$\frac{\partial}{\partial t_b} \psi(t_b, x_b) = \frac{s}{4\pi} g^{\lambda\mu} D_{\lambda} D_{\mu} \psi(t_b, x_b) = \frac{s}{4\pi} \Delta \psi(t_b, x_b). \quad (\text{IV.49})$$

L'expression D_{λ} est la dérivée covariante définie par la connexion de Levi-Civita (appelée aussi connexion affine matérialisée par ce que l'on appelle "les symboles de Christoffel" ; nous donnons un aperçu de ce qu'est une dérivée covariante en Annexe 6) et $\Psi = \psi \circ \pi$.

Le symbole Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami qui est une généralisation de l'opérateur laplacien aux variétés riemanniennes.

Les auteurs font référence aux travaux de Y. Choquet-Bruhat et C. DeWitt-Morette^{433/14} dans lesquels il a été montré que le Laplacien Δ covariant au point x_b de la variété M peut être :

« lifted to a sum of products of Lie derivatives $h^{\alpha\beta} X_{(\alpha)} X_{(\beta)}$ at the frame ρ_b in $O(M)$; the integral curves of the set of vector fields $\{X_{(\alpha)}\}$ starting from ρ_b at time t_b are the horizontal lifts of a set of geodesics at x_b , tangent to the basis $\{e_{\alpha}\}$ of $T_{x_b} M$ corresponding to the frame ρ_b . The constant matrix $\{h_{\alpha\beta}\}$ has been chosen with the same signature as the metric g on M , and $g(e_{\alpha}, e_{\beta}) = h_{\alpha\beta}$ ».^{433/15}

L'équation (IV.49) pour une particule libre associée à une variété différentielle riemannienne est à rapprocher de l'équation générale de Schrödinger (II.2).

Aussi, de la même manière que (II.27) est solution de (II.28), en d'autres termes que les intégrales de chemins sont solution de l'équation générale de Schrödinger, comme démontré dans le contexte relatif à la section II, paragraphe 2, les auteurs doivent trouver une intégrale de chemins cette fois-ci dans un contexte d'espace riemannien, qui soit solution de (IV.49).

Pour cela, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette imaginent la construction mathématique suivante :

« An explicit construction of $\{X_{(\alpha)}\}$ goes as follows. Let $\rho(t)$ be the horizontal lift of a path $x(t)$ in M defined by the Riemannian connection map

433/14. Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette. 1989. « Supplement to *Analysis, Manifolds and Physics* ». Armadillo preprint, Center for relativity, University of Texas, Austin TX 78712.

433/15. Cartier et DeWitt-Morette. 1995. « A new perspective on functional integration ». *Journal of Mathematical Physics*. Volume 36, page 40.

$$\sigma : O(M) \rightarrow L(TM, TO(M)). \text{ » }^{433/16}$$

Cette construction mathématique correspond à l'équation différentielle suivante:

$$\dot{\rho}(t) = \sigma(\rho(t)) \cdot \dot{x}(t) \quad , \quad \rho(t_b) = \rho_b. \quad (\text{IV.50})$$

Puis les auteurs indiquent *qu'en posant* :

$$\rho(t) = (x(t), u(t)) \quad \text{et} \quad \rho_b = (x_b, u_b)$$

une solution $\rho(t)$ de l'équation (IV.50) correspond à la trame $u(t)$ obtenue par le transport parallèle de u_b le long du chemin x de x_b à $x(t)$.

En Annexe 7, nous développons la notion de transport parallèle dans le contexte associé à une variété riemannienne, qui, rappelons le, est une variété différentielle ayant une structure supplémentaire (une métrique riemannienne ou pseudo-riemannienne) permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

Les auteurs précisent aussi que la trame $u(t)$ est conforme au tracé :

$$u(t) : R^d \rightarrow T_{x(t)} M$$

à savoir que $u(t)$ trace un *d-uple* (une collection ordonnée de d objets, d étant un entier naturel, appelés "composants" ou "éléments" ou "termes" du *d-uple* ou *d-uplet*) associé à un vecteur dont les composantes en $u(t)$ sont les *d-uple* considérés.

Les auteurs indiquent aussi que de manière équivalente, $(u(t)^{-1} \dot{x}(t))^{\alpha}$ est la *α -coordonnée* du vecteur $\dot{x}(t)$ dans la trame $u(t)$. Et ils posent :

$$\dot{z}(t) := u(t)^{-1} \dot{x}(t) = \dot{z}^{\alpha}(t) \bar{e}_{\alpha} \quad (\text{IV.51})$$

où $\{\bar{e}_{\alpha}\}$ désigne la base canonique de l'espace à d dimensions associé à l'ensemble des nombres réels c'est-à-dire R^d .

Notons à titre indicatif qu'en mathématique, et plus précisément en algèbre linéaire, une base canonique se présente de manière naturelle d'après la façon dont l'espace vectoriel est présenté. C'est ainsi que l'on parle de la base canonique de R^d .

La propriété spécifique de ces bases canoniques est que pour tout vecteur de l'espace, les coordonnées de ce vecteur dans la base canonique sont données par les composantes mêmes, c'est-à-dire les coefficients, qui constituent le vecteur en question.

Aussi, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette expriment l'équation (IV.50) sous la forme canonique donnée par l'équation (II.21), c'est-à-dire :

$$\dot{\rho}(t) = X_{(\alpha)}(\rho(t)) \dot{z}^{\alpha}(t) \quad , \quad \rho(t_b) = \rho_b \quad (\text{IV.52})$$

où $X_{(\alpha)}$ est défini par :

$$X_{(\alpha)}(\rho) = \sigma(\rho) \cdot e_{\alpha} = (\sigma(\rho) \circ u) \cdot \bar{e}_{\alpha} \quad (\text{IV.53})$$

avec :

* x un point de la variété M ,

* $\rho = (x, u)$ une trame pour laquelle :

$$u : R^d \rightarrow T_x M$$

est un tracé envisageable.

Les auteurs précisent que si $\dot{z}(t) = \bar{e}_\alpha$ c'est-à-dire $\dot{z}^\beta(t) = \delta_\alpha^\beta$ (δ matérialisant le symbole de Kronecker), les coordonnées de $\dot{x}(t)$ sont constantes dans la trame $u(t)$ transportée de manière parallèle le long de $x(t)$.

Alors dans ce cas, les auteurs indiquent que $x(t)$ est la géodésique définie par :

$$x(t_b) = x_b \quad , \quad \dot{x}(t_b) = e_\alpha. \quad (\text{IV.54})$$

Et avec $\dot{z}(t) = \bar{e}_\alpha$, l'équation (IV.52) devient :

$$\dot{\rho}_{(\alpha)}(t) = X_{(\alpha)}(\rho_{(\beta)}(t)) \delta_\alpha^\beta = X_{(\alpha)}(\rho_{(\alpha)}(t)).$$

En exprimant :

« The horizontal lift $\rho_{(\alpha)}(t)$ of the geodesic (IV.54) is, as desired, the integral curve of $X_{(\alpha)}$ going through ρ_b at time t_b . With $X_{(\alpha)}$ defined by (IV.53), ρ can be expressed in terms of the Cartan development map

$$(\pi \circ \rho)(t) = x(t) = (\text{Dev } z)(t). \quad (\text{IV.55}) \text{ » }^{433/17}$$

les auteurs définissent le développement de Cartan comme une bijection d'un espace ponctuel (chemins contenant un point final fixe) sur $T_{x_b} M$ identifié pour R^d via la trame ρ_b dans un espace de chemins ponctuels sur la variété M , ou vice versa, telle que :

$$\text{Dev} : \mathcal{P}_0 T_{x_b} M \rightarrow \mathcal{P}_{x_b} M \text{ by } z \mapsto x. \quad (\text{IV.56})$$

On dit alors, d'après les auteurs, que le chemin x est le développement de z , dans le cas où $\dot{x}(t)$ transportée de manière parallèle le long de x de $x(t)$ à x_b est égal à $\dot{z}(t)$ transporté de manière triviale à l'origine de $T_{x_b} M$, pour chaque valeur de t appartenant à T .

Le transport de $\dot{z}(t)$ est dit "trivial" dans le sens qu'il est évident, c'est-à-dire qu'il répond à ce que la mécanique classique dans un environnement euclidien en attend ; ce qui est loin d'être le cas pour un transport parallèle exprimant une relation entre les géométries autour de points définis sur une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne.

Ainsi, Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette définissent-ils l'intégrale de chemins suivante comme solution de l'équation (IV.48) :

$$\Psi(t_b, \rho_b) = \int_{Z_b^J} \mathcal{D}z \cdot \exp[-\frac{\pi}{s} Q_0(z)] \Phi(\rho(t_a, z)) \quad (\text{IV.57})$$

dans laquelle $\rho(t, z)$ est solution de l'équation (IV.52).

L'intégrale de chemins solution de l'équation (IV.49) est alors :

$$\Psi(t_b, x_b) = \int_{Z_b^J} \mathcal{D}z \cdot \exp[-\frac{\pi}{s} Q_0(z)] \Phi((\text{Dev } z)(t_a)) \quad (\text{IV.58})$$

Ainsi, fidèle à leur objectif, les auteurs apportent un cadre rigoureux aux intégrales de chemins même lorsque ces dernières sont parties prenantes de variétés différentielles associées aux espaces de Riemann.

Pour ce qui concerne une particule soumise à un potentiel scalaire, c'est-à-dire plongée par exemple dans un champ électromagnétique, les équations (IV.48) et (IV.49) doivent être revues. Aussi, les auteurs mentionnent-ils qu'il faut alors procéder selon la méthode soulignée en section II, paragraphe 4, que nous trouvons plus haut.

Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette précisent aussi que dans le cas de l'approximation semi-classique de l'équation de la fonction d'onde telle que nous en avons parlé en section III, avec ou sans potentiel scalaire, le problème devient considérablement plus compliqué dans le contexte de la variété différentielle riemannienne (ou pseudo-riemannienne) qui est le notre dans cette section IV, paragraphe 3.

Ils indiquent à cet effet que pour un calcul point par point du propagateur dans un espace de Riemann, dans la même optique que le calcul effectué pour l'espace plat euclidien (section IV, paragraphe 1), il faut choisir la fonction d'onde initiale associée à la variété M de la manière suivante :

$$\Phi(x) = \delta_{x_0}(x). \quad (\text{IV.59})$$

Les auteurs terminent ce paragraphe en mentionnant que les détails de calcul concernant l'intégrale de chemin associée à une particule soumise à un potentiel scalaire, sous certaines restrictions concernant les domaines d'intégration, sont abordés pages 309 à 311 des travaux de Cécile DeWitt-Morette, A. Maheshwari, B. Nelson, publiés en 1979.^{433/18}

433/18. DeWitt-Morette, Maheshwari, B.L. Nelson. 1979. « *Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics* ». Physics Reports, volume 50, pages 266-372.

Annexe 24

Les travaux de Dirk Kreimer sur les matroïdes
(Voir Chapitre 9 section 9.5.1 : *Une autre des pérennités du concept
d'intégrale de chemins : La recherche en mathématique pure*)

En section 1 (Introduction), Kreimer rappelle qu'à partir de ses intégrales (issues des intégrales de chemins), Feynman élabore des diagrammes selon des règles assez précises dont nous avons fait références ci-avant.

Il mentionne la relation associant les *intégrales tensorielles* (relatives à la structure mathématique que constitue les tenseurs) et les *intégrales scalaires* (les intégrales classiques telles que celles de Feynman), en citant l'article du mathématicien et physicien théoricien russe Oleg Tarasov⁴⁶².

Il indique aussi comment obtenir ce qu'il nomme les *master integrals* à partir des intégrales de Feynman en mentionnant l'article du mathématicien russe A.V. Smirnov⁴⁶³.

Kreimer relate également la publication du physicien théoricien italien Stefano Laporta⁴⁶⁴, concernant le calcul des boucles multiples associées aux diagrammes de Feynman via les intégrales du même nom. A titre d'indication, l'exemple d'un diagramme de Feynman à une seule boucle est donné en section 6.3.4.

Puis il considère arbitrairement, selon un diagramme de Feynman donné, un propagateur ayant pour expression :

$$P_{ke} = \frac{1}{(k_e^2 + m_e^2)}$$

avec :

462. Tarasov. 1996. « *connexion between Feynman integrals having different values of the space-time dimension* ». Physical Review D, volume 54, pages 6479-6490.

463. Smirnov. 2007. « *On the reduction of Feynman integrals to master integrals* ». Proceedings of ACAT, page 85.

464. Laporta. 2000. « *High-precision calculation of multi-loop Feynman integrals by difference equations* ». International Journal of Modern Physics A, volume 15, pages 5087-5159.

* k_e la quantité de mouvement associée à une *ligne* considérée en interne, cette *ligne* représentant la trajectoire d'une particule par rapport à un *vertex* donné, telle que nous l'avons vu au chapitre 6.

* m_e la masse de la particule en mouvement,

* P_{ke} le propagateur de Feynman assigné à chaque *ligne* interne.

Précisons que le mot *ligne* se nomme *line* ou *edge* "e" dans la langue anglaise en théorie des graphes et *segment* ou *bord* ou *arête* pour cette même théorie en langue française.

De même, le mot *vertex* s'appelle aussi *vertice* en théorie des graphes dans la langue anglaise et *sommet* ou *nœud* pour la même théorie dans la langue française.

Mais laissons Kreimer s'exprimer :

« *The study of such master integrals, typically with arbitrary complex powers of propagators, are the bread and butter of computational particle physics. Such master integrals are not straightforwardly related to graphs though.*

Indeed, consider a Feynman integral arising from some graph, with a denominator given by a product of scalar propagators $P_{ke} = \frac{1}{(k_e^2 + m_e^2)}$ for each edge e . With tensor structure, we will

have scalar products $k_e \cdot k_j$ in the numerator. Assuming that propagators $P_{ke}, P_{kj}, P_{kf}, k_f = k_e - k_j$, appear in the denominator, we could resolve

$$2 k_e \cdot k_j = P_{ke} + P_{kj} - P_{kf} - m_e^2 - m_j^2 + m_f^2, \quad (1)$$

eliminating the scalar product in favor of scalar integrals with possibly fewer propagators.

The latter then correspond to graphs where an edge is contracted to a point.

But those propagators might not be present in the denominator. Then, the combinatorial interpretation in terms of graphs is missing. »⁴⁶⁵.

Pour pallier au manquement de ce qu'il exprime précédemment, il cite la publication du physicien théoricien américain R.N. Lee⁴⁶⁶, pour ce qui concerne le calcul des intégrales à boucles multiples au moyen de relations de récurrences associées à des programmes automatiques adéquats, en observant :

« *Nevertheless, general products of propagators, in the denominator or numerator, even more generally with arbitrary complex powers, have proven useful in practical computations [voir note de bas de page numéro 466]. Indeed, any tensor integral can be reduced to a scalar integral on the expense of having a sufficiently general product of propagators at hand. But the combinatorial interpretation alluded to above in terms of graphs is not available when the product under consideration does not configure a graph.*

If it does, we have the important tools of parametric representations via Kirchhoff polynomials available. Being compatible with the raising of propagators to non-integer powers, these polynomials allow for systematic insights into the algebraic geometric properties of Feynman amplitudes and a satisfying mathematical understanding of these periods and functions. »⁴⁶⁷

465. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698, page 1.

466. R.N. Lee. 2010. « *Space-time dimensionality D as complex variable: calculating multiloop integrals using dimensional recurrence relation and analytical properties with respect to D* ». Nuclear Physics B, volume 830, pages 474-492.

467. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698, pages 1-2.

468. Ibid. Page 2.

Enfin, Kreimer exprime ce en quoi ses travaux vont consister :

« Here, we answer the question what replaces such graph polynomials in the general case, when the product of propagators to start with does not configure a graph. We will see that the notion of a graph is replaced by more general notion of matroid, with the notion of one-particle irreducibility most crucially still being intact. Hence, a systematic way to cope with tensor structure of Feynman graphs is to switch to what we might dub scalar Feynman matroids. »⁴⁶⁸

En section 2, Kreimer commence par définir la notion de matroïde, en mentionnant la publication du mathématicien australien James Oxley *Matroid Theory*⁴⁶⁹.

Dans un premier temps j'ai travaillé sur les travaux de Vanessa Chatelain⁴⁷⁰ afin de me familiariser avec la théorie des matroïdes.

De manière générale, un matroïde est une structure combinatoire définie sur un ensemble fini par la donnée d'un ensemble de sous-ensembles qui peut être les bases, les circuits ou les cocircuits du matroïde.

En ce qui me concerne, je me contenterai de définir le matroïde associé à ses *circuits* puisque les travaux de Kreimer sont relatifs aux diagrammes de Feynman via la théorie des graphes.

Ainsi, dans un tel cas, un matroïde M constitué par un couple (E, C) est un ensemble fini $E = \{1, \dots, n\}$ associé à un ensemble non vide $C = C(M)$ de sous-ensembles de E (appelés *circuits* de M pour l'ensemble C) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées par les trois axiomes suivants :

- (1) $0 \notin C$
- (2) Pour tout $C_1, C_2 \in C$ si $C_1 \subset C_2$ alors $C_1 = C_2$
- (3) Pour tout $C_1, C_2 \in C$ si $C_1 \neq C_2$ et $e \in C_1 \cap C_2$ alors il existe $C_3 \in C$ tel que $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) - e$ avec $(C_1 \cup C_2) - e$ signifiait $(C_1 \cup C_2)$ privé de e que l'on peut aussi écrire $(C_1 \cup C_2) - e$

Tel que l'écrit Kreimer, l'ensemble E correspond à l'ensemble des lignes (edges e) que nous avons défini ci-avant pour ce qui concerne la symbolique associée aux diagrammes de Feynman via la théorie des graphes.

Les éléments de l'ensemble non vide C sont appelés *circuits* du matroïde et correspondent à des cycles excluant une répétition de vertices (c'est-à-dire de vertex).

Ainsi, les deux premiers axiomes (1) et (2) précédents énoncent que d'une part l'ensemble vide $\{0\}$ n'est pas un cycle et que d'autre part aucun C_n appartenant à l'ensemble C ne contient un cycle plus petit qu'un autre cycle appartenant à l'ensemble C des cycles.

Le troisième axiome (3) exprime que si deux *cycles* partagent une *ligne* (edge e), alors ensemble mais sans la *ligne* en question, ils forment ou contiennent un *cycle*.

Et Kreimer de conclure :

469. Oxley. 1992. « *Matroid Theory* ». Oxford.

470. Chatelain. 2011. « *Contributions à la théorie des matroïdes. Polytope des bases, Orientations et Algorithmes* ». Thèse de Doctorat en mathématiques, Université Pierre et Marie Curie.

471. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698, page 2.

« Consequently, a graph defines a matroid, called "cycle matroid" of the graph, and any matroid which is the cycle matroid of some graph is called a "graphic matroid".⁴⁷¹

Une autre manière d'introduire la notion de matroïde graphique est pour Kreimer de considérer la matrice issue d'un graphe donné. Pour cela, Kreimer envisage un graphe G muni d'un nombre e de lignes (edge ou segment ou bord) et d'un nombre v de vertices (vertex ou sommet).

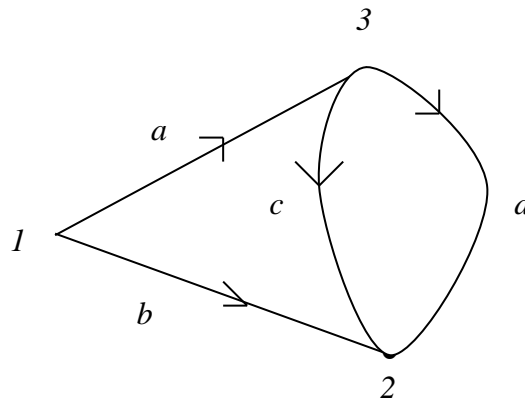
La matrice issue du graphe G est une matrice :

$$B = (b_{ij}) \text{ de dimension } v \times e$$

avec b_{ij} égale à :

- -1 pour un bord j commençant au sommet i
- 1 pour un bord j se terminant au sommet i
- 0 sinon.

Et pour illustrer ce qui précède, Kreimer considère le graphe G suivant :



pour lequel :

- $e \in \{ a, b, c, d \}$
- $v \in \{ 1, 2, 3 \}$.

A partir de ce graphe et d'après la règle émise ci-avant, Kreimer déduit la matrice ci-après :

$$B_{\text{ligne colonne}} = B_{ve} = (b_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

En effet pour :

$$(b_{ij})_{i=1 \text{ à } 3; j=a \text{ à } d}$$

nous avons :

- * $b_{1a} = -1$
- * $b_{2a} = 0$
- * $b_{3a} = 1$
- * $b_{1b} = -1$
- * $b_{2b} = 1$

$$\begin{aligned}
& * b_{3b} = 0 \\
& * b_{1c} = 0 \\
& * b_{2c} = 1 \\
& * b_{3c} = -1 \\
& * b_{1d} = 0 \\
& * b_{2d} = 1 \\
& * b_{3d} = -1
\end{aligned}$$

Kreimer considère donc la matrice (b_{ij}) comme un matroïde pour lequel E est un ensemble de colonnes a, b, c, d , linéairement dépendants dont chaque sous-ensemble est linéairement indépendant.

Il précise alors que dans un tel cas, toute matrice peut être vue comme un matroïde, et que ce type de matroïde est appelé matroïde *représentable* sur l'ensemble R des nombres réels.

Il indique aussi que tous les matroïdes issus d'un graphe sont de type *représentable*.

Kreimer mentionne aussi qu'un matroïde est dit *régulier* s'il peut être représenté par une matrice pour laquelle chaque sous-matrice possède un déterminant égal à $-1, 0$ ou 1 . De plus, il spécifie que tout matroïde graphique est *régulier*.

Rappelons qu'une sous-matrice est une matrice obtenue à partir d'une matrice en ne gardant que certaines lignes ou colonnes.

Par exemple pour la matrice précédente :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
& a & b & c & d \\
B_{ij} & = & \frac{1}{2} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},
\end{array}
\end{array}$$

la matrice

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
& a & b \\
B_{\{1,2\}\{a,b\}} & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\end{array}$$

est une sous-matrice de B_{ij} constituée des lignes 1 et 2, et des colonnes a et b .

Montrons par cette sous-matrice $B_{\{1,2\}\{a,b\}}$ de la matrice B_{ij} associée au matroïde graphique pris pour exemple ci-avant, que ce matroïde est bien *régulier*.

Il suffit de calculer le déterminant de $B_{\{1,2\}\{a,b\}}$ et de montrer qu'il est égal à $-1, 0$ ou 1 , condition fondamentale d'un matroïde *régulier* comme écrit plus haut.

Et calculant ce déterminant, nous obtenons bien :

$$\det \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-1)(1)] - [(0)(-1)] = -1.$$

Kreimer aborde aussi la notion d'arbre couvrant. Rappelons que dans le domaine mathématique de la théorie des arbres, un arbre couvrant d'un graphe non orienté, convexe, dont les arrêtes sont pondérées, est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe. Souvenons-nous qu'en théorie des graphes, une arrête est encore appelée ligne ou bord ou edge et qu'un sommet se nomme aussi vertice ou vertex.

Kreimer rappelle que l'analogue d'un arbre couvrant pour un matroïde est appelé *base*. Il définit donc pour un matroïde la notion de *base*.

Une *base* d'un matroïde $M = (E, C)$ est un sous-ensemble de E ne contenant aucun cycle. Et en terme de matrice associée à un matroïde, une base constitue l'espace *colonne* de la matrice. L'ensemble des bases sera donc associé à l'ensemble des colonnes de la matrice.

Aussi, Kreimer mentionne que le matroïde peut aussi bien être caractérisé en termes d'ensemble de bases qu'en termes d'ensembles de circuits. Ainsi, les bases portent-elles l'information complète du matroïde.

Kreimer en déduit pouvoir utiliser le premier polynôme Ψ_G de Symanzik (physicien théoricien allemand : 1923-1983) relatif aux graphes convexes dont les bords sont pondérés et dont la variable de bord a_e est associée au bord e .

Des explications sur le premier polynôme de Symanzik associé aux diagrammes de Feynman sont contenues dans la publication de Boris Albar sous la direction de Jorge Luis Ramirez Alfonsin⁴⁷². Cette publication fait justement référence aux travaux de Dirk Kreimer et de Karen Yeats⁴⁷³ sur le fait que les matroïdes permettent d'interpréter les structures tensorielles associées à certaines théories quantiques des champs, notamment l'électrodynamique quantique issues des diagrammes de Feynman via l'intégrale de chemin. La publication de Boris Albar mentionne les travaux de Kreimer et Yeats dans sa bibliographie.

Kreimer donne donc pour le premier polynôme de Symanzik l'expression suivante :

$$\Psi_G = \sum_T \prod_{e \notin T} a_e = \det \begin{vmatrix} \Lambda & \tilde{B}^T \\ -\tilde{B} & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$

avec:

* T l'ensemble des bases du matroïde graphique G pondéré par e pour les arrêtes a du graphe G (a est encore appelée ligne, bord ou edge en théorie des graphes).

* Λ la matrice diagonale associée aux termes a_e .

* B la matrice issue du graphe G .

* \tilde{B} la matrice "tilde" dite des "cofacteurs" dont les coefficients sont obtenus à partir de la matrice B . En retirant la ligne i et la colonne j associées à un coefficient a_{ij} de la matrice B , on calcule pour la matrice "tilde" un nouveau coefficient a_{ij} en lieu et place du précédent. Ce calcul consiste à exprimer le déterminant de la matrice B privé de sa ligne i et de sa colonne j . Tous les coefficients de la matrice "tilde" sont donc obtenus en considérant chaque coefficient a_{ij} , intersection de chacune des lignes et colonnes de la matrice B .

* \tilde{B}^T la transposée de la matrice "tilde" \tilde{B} .

* $-\tilde{B}$ obtenue en multipliant la matrice "tilde" \tilde{B} par le scalaire -1 .

Rappelons que le but de Kreimer est d'appliquer la théorie des matroïdes aux diagrammes de Feynman afin de prouver rigoureusement le bon sens de ces diagrammes via l'intégrale de chemin. En d'autres termes, le but est d'essayer d'associer à certaines classes de matroïdes des intégrales de Feynman.

Et pour cela, il écrit :

472. Albar. 2011. « *Polynôme de Tutte Coloré et Applications* ». M₂ Mathématiques-Informatique. Université Montpellier 2.

473. Ibid. Page 26.

« Let us pause here and compare incidence matrices with configuration polynomials, see [15⁴⁷⁴, 2⁴⁷⁵] where the two common graph polynomials are treated as special cases of configuration polynomials. ... »

Let us actually be very explicit and start with the Duncce's cap graph, where we label oriented edges $e \in \{a,b,c,d\}$ and vertices $v \in \{1,2,3\}$ as follows, »⁴⁷⁶

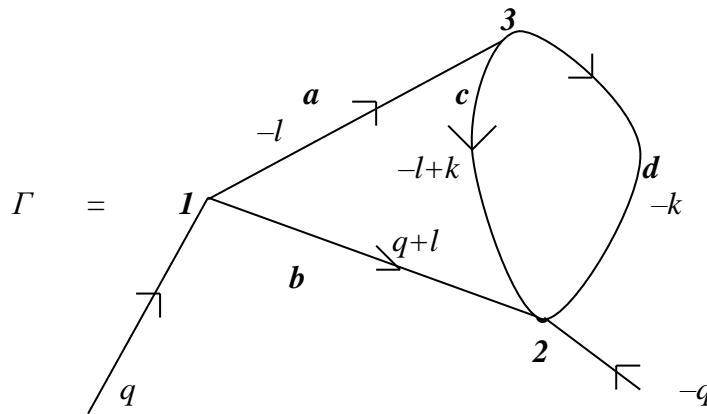


Diagramme 1

Il s'agit du graphe dont nous avons déjà parlé précédemment composé des *arêtes (lignes) internes orientées* :

$$e \in \{a,b,c,d\}$$

et des *vertices (vertexs)* :

$$v \in \{1,2,3\}.$$

Pour le graphe Γ ci-avant, Kreimer se rapproche des diagrammes de Feynman en prenant pour hypothèse une quantité de mouvement q entrant (*via une arête externe*) par le vertex 1, une quantité de mouvement nulle en vertex 3 et une quantité de mouvement $-q$ entrant (*via une autre arête externe*) par le vertex 2 (ou bien q pour cette même quantité de mouvement considérée comme sortant du vertex 2).

Ainsi, nous pouvons écrire pour ce qui concerne les lignes ou arêtes du diagramme Γ , qui représentent pour Feynman la trajectoire d'une particule dans l'espace des quantités de mouvement :

- *arête interne a* : quantité de mouvement $-l$
- *arête interne b* : quantité de mouvement $q - (-l) = q + l$
- *arête interne d* : quantité de mouvement $-k$
- *arête interne c* : quantité de mouvement $-l - (-k) = -l + k$

Donc :

- *vertex 3* : $-l = (-l + k) + (-k) \Rightarrow -l + l - k + k = 0$

474. Patterson. 2010. « On the singular structure of graph hypersurfaces ». Communications in Number Theory and Physics. Volume 4, Number 4, pages 459-708.

475. Bloch-Kreimer. 2010. « Feynman amplitudes and Landau singularities for 1-loop graphs ». Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

476. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids ». Physics Letters B, volume 698, page 5.

- *vertex 2* : $(q+l)+(-l+k)+(-k) = q$ pour la quantité de mouvement sortant par le *vertex 2* ; ou bien $-q$ pour la quantité de mouvement $-q$ entrant par le *vertex 2*.

Le graphe Γ montre un exemple de diagramme de Feynman. Aussi rappelons pour mémoire les informations abordées au paragraphe 2.4 concernant un diagramme composé de *vertices* (*vertexs*) et d'*arêtes* (*lignes*) aussi bien internes qu'externes.

On associe au diagramme l'intégrale à partir des règles de Feynman :

- à chaque *arête externe* e_i on assigne le propagateur :

$$\frac{1}{(p_i^2+m^2)}$$

avec p_i la quantité de mouvement associée à l'*arête externe* pour une particule de masse m ,

- à chaque *arête interne* e_i on assigne le propagateur :

$$\frac{1}{(k_i^2+m^2)}$$

avec k_i la quantité de mouvement associée à l'*arête interne* pour une particule de masse m .

Comme nous l'avons montré précédemment, la matrice issue du graphe Γ est la suivante :

$$B_\Gamma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & q+l & -l+k & -k \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Soit l'écriture comme suit des colonnes a, b, c, d par Kreimer :

- $a \Leftrightarrow C_a$
- $b \Leftrightarrow C_b$
- $c \Leftrightarrow C_c$
- $d \Leftrightarrow C_d$

Pour le graphe Γ , Kreimer dénombre trois circuits dont deux d'entre eux quelconques forment une base satisfaisant à ce que Kreimer appelle « la première homologie de Betti ».

La théorie homologique est l'une des grandes idées qui ont traversé le vingtième siècle mathématique grâce à l'idée qui a germé dans la seconde moitié du XIX^{ème} siècle par notamment le mathématicien italien Enrico Betti (1823-1892).

Cette idée est la suivante :

« On devrait pouvoir mesurer la complexité d'une variété V de dimension n en déterminant pour chaque $p < n$ le nombre maximal de sous-variétés de dimension p que l'on peut « mettre » dans V sans qu'elles ne forment le bord d'une sous-variété de dimension $p+1$ ». ⁴⁷⁷

Kreimer donne pour exemple la relation suivante :

$$-C_a + C_b - C_c = 0 = -C_a + C_b - C_d$$

telle que :

- * pour $i = 1$ on obtient : $-(-1) + (-1) - 0 = 0 = -(-1) + (-1) - 0$
- * pour $i = 2$ on obtient : $-(0) + (1) - (1) = 0 = -(0) + (1) - (1)$
- * pour $i = 3$ on obtient : $-(1) + (0) - (-1) = 0 = -(1) + (0) - (-1)$

477. Collectif de mathématiciens : Henri Paul de Saint Gervais. « Homologie »; analysis-situs.math.cnrs.fr.

La relation précédente associe les deux circuits $[-C_a+C_b-C_c]$ et $[-C_a+C_b-C_d]$ comme étant solution de :

$$\sum_{e \in (a,b,c,d)} w_e C_e = 0$$

avec :

- pour coefficients $\{-1,0,1\}$ de la matrice, ceux issus d'un graphe approprié.

Observant ce qui est exprimé par l'équation (2), Kreimer obtient, en considérant l'exemple précédent, le premier polynôme graphique associé au déterminant d'une matrice à deux dimensions :

$$\det \begin{vmatrix} a+b+c & a+b \\ a+b & a+b+d \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+b+d) - (a+b)(a+b) = (a+b)(c+d) + cd$$

avec :

- a,b,c,d , les variables associées aux arrêtes (edges) du graphe Γ , formant une base constituée par l'espace colonne de la matrice issue de ce graphe.

En section 3, Kreimer généralise la construction des diagrammes de Feynman, via les intégrales de chemin, aux matroïdes, prouvant ainsi réciproquement qu'un diagramme peut être issu d'une construction mathématique rigoureuse. Pour cela, il montre que les matroïdes permettent d'interpréter les structures tensorielles se manifestant dans des expressions via des produits scalaires de quantités de mouvement et il décompose ces structures tensorielles en plusieurs intégrales de Feynman. Mais laissons Kreimer s'exprimer à ce sujet :
 « ... the topic of this paper, we can use matroids to give an easy and natural way to represent Feynman integrals with arbitrary numerator structure as scalar matroid integrals with appropriate powers of the propagators appearing. »⁴⁷⁸

Kreimer suppose donc une intégrale de Feynman de la forme :

$$\int \frac{d^4l \, d^4s \, d^4r}{l^2(l-s)^2 s^2(s-r)^2 r^2(q_1-l)^2(q_1+q_2-l)^2(q_1+q_2-s)^2(q_1+q_2-r)^2(r-q_3)^2} \quad (5')$$

dont le dénominateur correspond au graphe de Feynman suivant :

478. Dirk Kreimer – Karen Yeats. 2011. « *Tensor Structure from Scalar Feynman Matroids* ». Physics Letters B, volume 698, page 6.

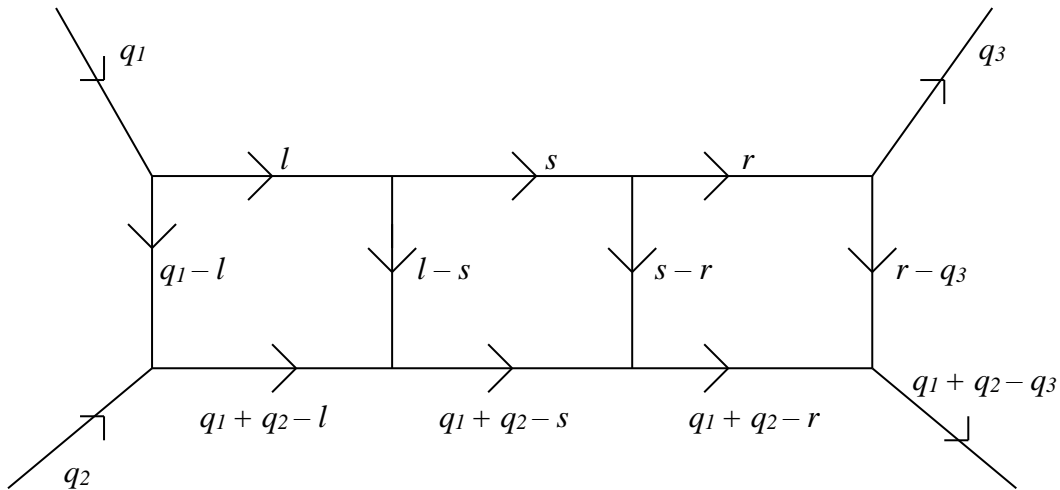


Diagramme 2

En supposant qu'il y ait un produit de la forme $l.r$ au numérateur, Kreimer se pose la question de savoir s'il existe un diagramme de Feynman qui serait associé à l'intégrale de la fonction rationnelle suivante :

$$\int \frac{d^4l d^4s d^4r}{l^2(l-s)^2 s^2(s-r)^2 r^2(q_1-l)^2(q_1+q_2-l)^2(q_1+q_2-s)^2(q_1+q_2-r)^2(r-q_3)^2(l-r)^2} \quad (6)$$

En mentionnant qu'il est impossible de trouver un diagramme de Feynman qui correspond à ce dénominateur, Kreimer indique qu'il existe en fait un matroïde donné par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

dans laquelle $q = q_1 + q_2$.

Notons que le matroïde donné par la matrice (7) ne correspond à aucun graphe et que les colonnes de cette matrice sont les éléments du matroïde, c'est-à-dire :

$$E = \{C_1, \dots, C_n\}.$$

Ces colonnes représentent les arêtes internes et externes d'un pseudo-diagramme de Feynman. Et si les lignes de la matrice (rows en anglais) ne correspondent pas rigoureusement aux vertexs, elles restent cependant des ensembles dans lesquels les quantités de mouvement sont conservés.

L'analogie des propagateurs est donc donnée par les colonnes de la matrice (7) et les coefficients associés aux vertexs proviennent des lignes de cette matrice.

Ainsi, Kreimer associe les propagateurs :

$$\frac{1}{(p_i^2 + m_i^2)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(k_i^2 + m_i^2)}$$

à chaque colonne représentant l'élément e_i , sachant qu'à chaque ligne est associée les coefficients calculés par Feynman pour chaque vertex.

Le matroïde (7) montre que l'on peut distinguer les éléments e_i aussi bien internes qu'externes.

Après quelques explications détaillées concernant le fonctionnement des matroïdes, Kreimer arrive au fait de ce qu'il veut montrer, c'est-à-dire comment passer du matroïde à l'intégrale de chemin de Feynman.

Aussi, commence-t-il par citer la matrice (7) pour laquelle il précise qu'elle est aussi bien associée aux arêtes (edges) internes qu'aux arêtes externes.

De plus, il rappelle qu'à chacune des arêtes internes est assignée une quantité de mouvement, encore appelée impulsion, associée au facteur $1/k^2$ correspondant à la nature de la particule en mouvement le long de la trajectoire formant une arête interne. En effet, dans les diagrammes de Feynman, une arête représente la trajectoire d'une particule dans l'espace des quantités de mouvement.

Il rappelle aussi que pour chacune des lignes correspondant à chaque vertex, se trouve associée une "delta-fonction" c'est-à-dire une fonction de distribution de Dirac, telle que nous vu en section 6.2.2, sachant que chaque sommet (vertex) représente une interaction entre les particules.

De tout ce qui précède, nous constatons que les lignes de la matrice (7) sont associées à l'ensemble des quantités de mouvement en adéquation avec les sous-ensembles représentés par les arêtes du diagramme.

Ainsi, comme l'écrit Kreimer :

« *The rows generate the set of momentum preserving subsets of edges, and so the counting works exactly as in the graph case even though we have no notion of vertices. Alternately, we can build parametric Feynman integrals from the first and second Symanzik polynomials in the usual way.* »⁴⁷⁹

Kreimer précise aussi que pour convertir un matroïde en une intégrale de chemin, il faut remarquer que les opérations liées aux lignes de la matrice (7) ne modifient pas l'intégrale de chemin. En effet, par principe même des calculs intégral et matriciel, les coefficients associés à l'intégrale de chemin ne sont pas modifiés par un ordre différent des facteurs composant le produit se trouvant sous l'intégrale consécutivement à l'ordre de prise en compte des lignes de la matrice.

479. Ibid. Page 10.

Il fait remarquer en plus que les éléments zéro de la matrice (7) sont sans effets et que l'ordre de prise en compte d'une colonne dans le traitement de la matrice ne change rien sur l'intégrale de chemin obtenue.

Puis Kreimer cite le théorème (3) suivant qu'il prouve dans cette même publication :

« Let G be a graph and P a set of pairs of edges of the graph (these are the pairs whose momenta appear dotted together in the numerator). Applying the above construction with appropriate choices, we obtain a matrix row equivalent to

$$(10) \quad \begin{pmatrix} I_{rkG} & 0 & C \\ 0 & I_r & D \end{pmatrix}$$

where $(I_{rkG} \mid C)$ represents the matroid of G , $r \leq |P|$, and all entries of C and D are 0 or ± 1 .
»⁴⁸⁰

Aussi, mentionne-t-il que les matroïdes qui l'intéressent sont toujours représentés selon l'expression $(I \mid D)$, dans laquelle :

- * $D = C_1 \cup C_2 \setminus \{a_{11}\}$,
- * C_1 et C_2 sont des circuits du matroïde M ,
- * $C_1 \cap C_2 = \{a_{11}\}$,
- * a_{11} est l'arête associée au terme $(l-r)^2$ du dénominateur de l'intégrale (6) issue de l'intégrale de Feynman (5') correspondant au diagramme 2,
- * D a les entrées 0 ou ± 1 .

Kreimer indique que le matroïde représenté en (7) est cographique et donc *régulier* et donc uniquement *représentable*.

Rappelons que l'ensemble des coupes d'un graphe constitue l'ensemble des cycles d'un matroïde que l'on appelle matroïde cographique, sachant qu'en théorie des graphes, une coupe d'un graphe est une partition des sommets en deux sous-ensembles.

En section 4, Kreimer ouvre une discussion sur ses travaux. Il mentionne que la généralisation des diagrammes de Feynman aux matroïdes donne des interprétations combinatoires pour les "master-integrals" (les intégrales scalaires classiques tels que les intégrales de chemin), sans minimiser, voir même sacrifier tout ce qu'apporte l'outil de base que constitue le diagramme de Feynman.

Il déduit donc que le matroïde associé au diagramme de Feynman confère à ce dernier un formalisme rigoureux par la théorie des graphes venant s'associer aux intégrales de chemin via l'utilisation de polynômes tels que le premier polynôme de Symanzik.

Néanmoins, il signale que l'utilisation des matroïdes apportent certaines difficultés qu'il convient de hiérarchiser.

Il constate que les graphes *planaires*, c'est-à-dire les graphes qui ont la particularité de pouvoir se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre, sont les plus abordables pour l'utilisation des matroïdes, car ils sont de loin les plus simples.

Ensuite, d'une difficulté plus grande, viennent selon Kreimer, ce que l'on appelle les matroïdes *cographiques*, c'est-à-dire ceux dont font partie le matroïde (7). Mais il précise que si les matroïdes *cographiques réguliers* et uniquement *représentables* comme le matroïde (7) (associé aux diagrammes de Feynman) sont les plus subtils, c'est-à-dire les plus délicats à

480. Ibid. Page 8.

mettre en œuvre, il n'en reste pas moins vrai qu'ils ont une représentation agréable sous la forme $(I | D)$ avec D ayant pour entrée $0, 1, -1$.

Détaillons un peu plus ce qui précède en nous référant à la publication de Boris Albar⁴⁸¹.

Nous avons vu que l'analogie des propagateurs est donnée par les colonnes de la matrice (7), c'est-à-dire les éléments du matroïde. Nous savons aussi que les delta-fonctions de Dirac proviennent des lignes de cette matrice.

La généralisation des diagrammes de Feynman aux matroïdes *représentables* comme par exemple la matrice (7), s'effectue en respectant les règles de Feynman suivantes⁴⁸² :

→ A chaque colonne de la matrice (7) représentant l'élément e_i , on associe le propagateur :

$$\frac{1}{(k_i^2 + m^2)}$$

→ A chaque ligne de la matrice (7) est associé le facteur :

$$-\lambda (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_i k_i \right)$$

avec

* λ la constante de couplage de l'interaction électromagnétique nous avons appelé α en section 2.4.1,

* δ la fonction delta de Dirac

→ On intègre sur les quantités de mouvement interne :

$$\prod_i \int \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d}$$

→ On multiplie par un facteur de symétrie :

$$\frac{1}{|Aut(M)|}$$

avec:

- $Aut(M)$ le groupe des automorphismes du matroïde M .

481. Albar. 2011. « *Polynôme de Tutte Coloré et Applications* ». M₂ Mathématiques-Informatique. Université Montpellier 2.

482. Ibid. Page 28.

Annexe 25

Condition d'invariance de jauge locale en Chromodynamique Quantique
(Voir Chapitre 8 sous-section 8.2.3.b : *Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs*)

Transposons ce que nous avons vu mécanique quantique non relativiste concernant l'invariance de jauge locale pour une particule libre (§5 de l'Annexe 21) à la chromodynamique quantique, comme nous l'avons fait au §7 de l'Annexe 21 relativement à l'Electrodynamique Quantique.

Pour ce travail d'analyse, nous nous inspirons :

* des écrits contenus dans le cours de physique *Bases de la chromodynamique quantique* professé à l'Institut Interuniversitaire des Hautes Energies (IIHE) de Bruxelles⁵⁰⁰,

* de la publication du professeur Michael Klasen pour son enseignement à l'Université Joseph Fourier de Grenoble entre 2003 et 2008⁵⁰¹.

* du document de David Sénéchal, professeur de physique théorique à l'Université de Sherbrooke, Québec^{501 bis},

* du cours de Luc Marleau, professeur de physique théorique à l'Université Laval, Québec^{501 ter}.

Nous savons que l'équation de Schrödinger valable uniquement en mécanique quantique non relativiste laisse maintenant la place au Lagrangien construit à partir de la forme covariante de l'équation de Dirac. Il faut en effet que le principe d'invariance de jauge locale sous une transformation de symétrie du groupe $SU(3)$ impose au Lagrangien de Dirac d'être invariant sous la loi de transformation de la fonction d'onde de couleur $\Psi_q(x)$ d'un quark de saveur q donné :

500. Ibid. Pages 19 à 23.

501. Klasen. 2009. « *Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge* ». Dunod. Pages 80 à 85.

501 bis. Sénéchal. Novembre 1997. « *Introduction à la théorie des groupes de Lie* ». Université de Sherbrooke. Québec.

501 ter. Marleau. 2018. . « *Introduction à la physique des particules* ». Université Laval. Québec.

$$\Psi_q(x) \rightarrow \Psi'_q(x) = \exp \left[i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right] \Psi_q(x)$$

avec:

* $\hbar = c = 1$,

* $\vec{\alpha}(x)$ le vecteur des paramètres caractérisant une transformation de valeur finie.

De la même manière qu'aux §5 et §7 de l'Annexe 21, il nous faut considérer une connexion définissant le champ porteur de l'interaction, en l'occurrence l'interaction forte, et cette connexion peut s'effectuer à travers la dérivée covariante suivante :

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A^a_\mu(x)$$

c'est-à-dire:

$$D_\mu = \left\{ \nabla + i g \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A^a_\mu(x) \right\}$$

comparable aux équations (9bis) et (12bis) vues au §5 de l'Annexe 21, ainsi qu'à l'équation (13) vue au §7 de l'Annexe 21, et satisfaisant à l'invariance de jauge locale suivante :

$$D'_\mu \Psi'_q(x) = \exp \left[i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right] D_\mu \Psi_q(x)$$

qui impose la loi de transformation pour les champs de gluons $A^a_\mu(x)$.

Précisons maintenant le sens exact des différentes expressions intervenant dans les relations précédentes en rappelant que la charge de couleur gouverne la dynamique des quarks.

Soit la loi de transformation des trois états de couleur r, g, b , associées à une saveur q donnée, telle que représentée par le diagramme de Feynman assurant l'interaction quark-quark vu en sous-section 8.2.3.a :

$$\begin{pmatrix} \Psi_q^r \\ \Psi_q^g \\ \Psi_q^b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Psi'_q{}^r \\ \Psi'_q{}^g \\ \Psi'_q{}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rg} & U_{rb} \\ U_{gr} & U_{gg} & U_{gb} \\ U_{br} & U_{bg} & U_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_q^r \\ \Psi_q^g \\ \Psi_q^b \end{pmatrix}$$

Cette loi de transformation repose sur une opération d'invariance⁵⁰² (intimement associée à la notion de symétrie en physique⁵⁰³) du Lagrangien dont sont issues les équations du mouvement associées à la dynamique de l'interaction forte.

La fonction d'onde de la charge de couleur relative à un quark de saveur q , c'est-à-dire u, d, c, s, t, b , est donc représentée par le triplet suivant :

502. Wikipédia. 18 Décembre 2018. « *Invariance. Physique théorique* ».

503. Wikipédia. 18 Décembre 2018. « *Symétrie (physique)* ».

$$\Psi_q = \begin{pmatrix} \Psi_q^r \\ \Psi_q^g \\ \Psi_q^b \end{pmatrix}$$

La loi de transformation précédente peut donc s'écrire sous la forme matricielle ci-après :

$$\Psi_q^c \rightarrow \Psi'^c_q = U \Psi_q^c$$

avec :

$$* c = r \text{ ou } g \text{ ou } b.$$

La matrice carrée U de dimension **3** est **Unitaire**, c'est-à-dire qu'elle possède un déterminant égal à 1. Cette matrice est une matrice dite **Spéciale** au sens défini par les groupes de Lie. Elle appartient au groupe de symétrie $SU(3)$.

L'indice c montre qu'il s'agit d'une symétrie relative à la conservation de la charge de couleur telle qu'on peut le voir dans le dessin de l'interaction quark-quark en sous-section 8.2.3.a.

Mentionnons que la fonction d'onde de la charge de couleur associée à un anti-quark est représentée par la fonction d'onde de couleur suivante, qui se trouve être strictement l'adjointe de la fonction d'onde du quark de couleur et de saveur correspondante :

$$\Psi_{-q}^c = \Psi_q^{c+}$$

Ainsi la loi de transformation de la fonction d'onde de couleur associée à un anti-quark s'écrit :

$$\Psi_{-q}^c \rightarrow \Psi'_{-q}^c = U^+ \Psi_q^{c+}$$

La construction mathématique abstraite qui précède conduit le groupe $SU(3)$ à être celui qui décrit la symétrie du Lagrangien de la Chromodynamique Quantique.

Si on considère maintenant une transformation infinitésimale sur le groupe de symétrie $SU(3)$, l'expression :

$$\Psi_q^c \rightarrow \Psi'^c_q = U \Psi_q^c$$

peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Psi_q^c \rightarrow \Psi'^c_q = (I + i\xi) \Psi_q^c$$

avec :

* I la matrice identité ou matrice unité qui est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

* ξ une matrice carrée de dimension 3 dont les éléments au second ordre peuvent être négligés,

* $\xi = \xi^+$ car la matrice ξ est hermitienne du fait d'une matrice U unitaire,

* $tr(\xi) = 0$ car $det U = 1$.

Le fait d'avoir les deux contraintes :

$$* \xi = \xi^+$$

$$* tr(\xi) = 0$$

réduit le nombre de paramètres distincts qui sont strictement indispensables pour définir la matrice ξ .

Alors le choix est fait d'écrire la matrice ζ de la façon conventionnelle suivante⁵⁰⁴ :

$$\zeta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\xi_8}{\sqrt{3}} + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 & \xi_4 - i\xi_5 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \frac{\xi_8}{\sqrt{3}} - \xi_3 & \xi_6 - i\xi_7 \\ \xi_4 + i\xi_5 & \xi_6 + i\xi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\xi_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \xi_a \lambda_a = \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}$$

avec :

* Le vecteur $\vec{\xi}$ de composantes ξ_a ,

* Le vecteur $\vec{\lambda}$ de composantes issues de la matrice carrée de dimension 3 : λ_a ;

Cette matrice carrée est hermitienne c'est-à-dire que : $(\lambda_a) = (\lambda_a)^+$; pour cette matrice carrée λ_a nous avons une trace nulle c'est-à-dire : $tr(\lambda_a) = 0$.

Ainsi, la matrice (λ_a) telle que définie, avec "a" allant de 1 à 8, consiste en une représentation à trois dimensions des générateurs du groupe $SU(3)$. Et ces générateurs sont liés aux 8 matrices de Gell-Mann correspondant aux (3^2-1) gluons⁵⁰⁵ dont nous avons parlé en sous-section 8.2.3.a :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les 8 matrices de Gell-Mann satisfont aux relations de commutation des générateurs infinitésimaux (constituant l'algèbre de Lie du groupe $SU(3)$) ci-après :

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$$

avec :

* f_{abc} les constantes de structure des champs de couleur sur le groupe $SU(3)$ ⁵⁰⁶,

* "a" et "b" et "c" allant de 0 à 8,

* Pour $f_{abc} = 1$, le groupe $SU(3)$ dont les générateurs ne commutent pas entre eux est dit non-abélien.

Le choix de la décomposition vu un peu plus haut :

$$\zeta = \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}$$

504. IIHE. Institut Interuniversitaire des Hautes Energies. « Bases de la chromodynamique quantique ». Cours de physique. Université Libre de Bruxelles (ULB). Chapitre 2. Page 21.

505. Klasen. 2009. « Mécanique Quantique Relativiste. Théories de jauge ». Dunod. Page 83.

506. Ibid. Page 83.

de la matrice ξ sur la base $\{\lambda_a\}$ des générateurs de $SU(3)$ permet d'écrire la transformation infinitésimale considérée, de la façon suivante :

$$U(\vec{\xi}) = I + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}.$$

Le fait qu'une algèbre de Lie soit associée aux transformations de symétrie du Lagrangien de l'interaction forte autorise une rotation $\vec{\alpha}$ dans l'espace du degré de liberté de couleur.

On peut alors écrire :

$$U(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[U\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{n} \right)^n = \exp \left[i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha} \right].$$

En tenant compte de la constante de couplage g relative à l'interaction forte, on obtient :

$$U(\vec{\alpha}) = \exp \left[i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha} \right].$$

Revenons maintenant à ce que nous avons écrit au début de cette section 8.2.3.b, à savoir que le principe de l'invariance de jauge locale sous une transformation de symétrie du groupe $SU(3)$ impose que le Lagrangien de la chromodynamique quantique soit invariant sous la loi de transformation de la fonction d'onde de couleur, soit :

$$\Psi_q(x) \rightarrow \Psi'_q(x) = \exp \left[i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right] \Psi_q(x).$$

Les raisonnements conduits aux §5 et §7 de l'Annexe 21, relativement à des transformations de symétrie du groupe $U(1)$ associées à la théorie de la Mécanique Quantique non-relativiste et à la théorie de l'Electrodynamique Quantique, peuvent être transposés à une transformation de symétrie du groupe $SU(3)$ se rapportant comme nous l'avons souligné à la théorie quantique du champ d'interaction forte.

Pour cela, nous n'utilisons plus l'équation de Schrödinger qui concerne la physique quantique non-relativiste, mais bien évidemment l'expression du Lagrangien de la théorie libre (L_0 ou L_{Dirac}) apportée par les travaux de Dirac, que nous avons de même considéré en Electrodynamique Quantique.

Ce Lagrangien est le suivant :

$$L_0 = L_{Dirac} = \bar{\Psi}_q(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi_q(x)$$

De fait pour obtenir l'invariance de jauge locale, la dérivée partielle ∂_μ se trouvant dans l'équation du Lagrangien est remplacée par la dérivée covariante (dont la connexion définit le champ porteur de l'interaction forte) ci-après :

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{A}_\mu(x) = \partial_\mu + i g \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x).$$

Puis on identifie les 8 potentiels-vecteurs $A_\mu^a(x)$ aux 8 gluons vecteurs de l'interaction forte, dont chacun de ces 8 gluons est associé à l'un des 8 générateurs de symétrie $SU(3)$ que nous avons créé précédemment.

Les champs de gluon déterminent par voie de conséquence, l'amplitude des 8 rotations indépendantes qu'il est possible d'obtenir dans l'espace du degré de liberté de couleur.

Ainsi, par construction, la dérivée covariante précédente satisfait à la condition d'invariance de jauge locale suivante :

$$D'_\mu \Psi'_q(x) = \exp \left[i g \frac{\lambda}{2} \cdot \vec{\alpha}(x) \right] D_\mu \Psi_q(x)$$

qui impose de fait la loi de transformation pour les champs de gluon $A^a_\mu(x)$ sous le changement de jauge infinitésimal $\vec{\xi}(x)$.

Ce changement de jauge infinitésimal est le suivant :

$$A^a_\mu(x) \rightarrow A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) - \partial_\mu \alpha^a(x) - g f_{abc} \alpha^b(x) A^c_\mu(x),$$

indiquant que les champs de jauge se transforment suivant la représentation régulière du groupe de symétrie $SU(3)$.

En appliquant le commutateur des dérivées covariantes au champ de gluon $A^v(x)$ on obtient :

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{A}^v(x) = i g \frac{\lambda^a}{2} [\partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - g f_{abc} A^b_\mu(x) A^c_\nu(x)] \vec{A}^v(x)$$

faisant apparaître le tenseur de force associé à l'interaction de couleur :

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - g f_{abc} A^b_\mu(x) A^c_\nu(x).$$

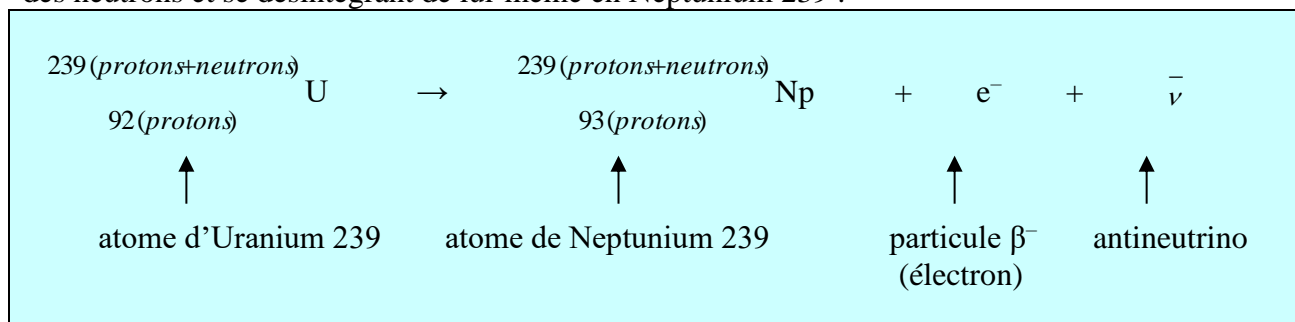
Ce tenseur $T^a_{\mu\nu}$ montre que le champ de jauge possède la particularité d'interagir avec lui-même car les gluons vecteurs de l'interaction forte sont les porteurs d'une charge de couleur. En effet, la conservation de la charge de couleur implique que chaque gluon, parmi les 8, est porteur de deux états colorés respectivement attaché à une couleur et à une anti-couleur comme nous avons pu le voir en sous-section 8.2.4.a.

Annexe 26

Application des diagrammes de Feynman à l'interaction faible
(Voir Chapitre 8 sous-section 8.2.4.a : *Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs*)

A la fin des années cinquante, Feynman et Gell-Mann conduisent des travaux de recherche sur la théorie des interaction faibles.³⁹⁸

→ La théorie des interactions faibles se manifeste par exemple dans la désintégration d'un neutron en proton (radioactivité bêta moins) en émettant un électron et un antineutrino. C'est le cas de l'Uranium 239 obtenu artificiellement en bombardant de l'Uranium 238 avec des neutrons et se désintégrant de lui-même en Neptunium 239 :



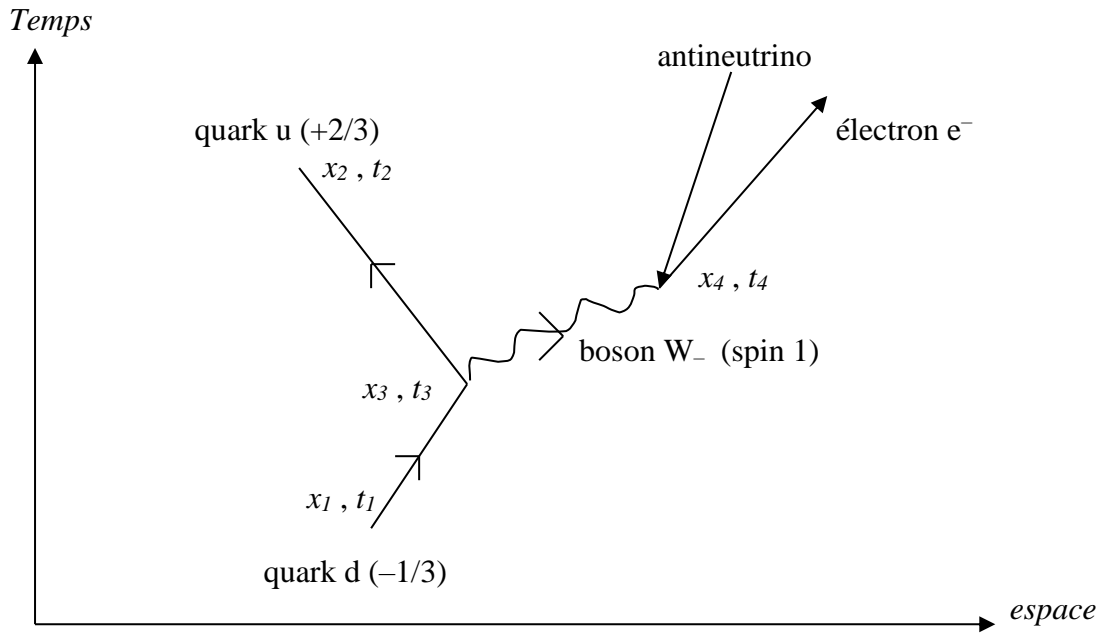
L'issue de la désintégration donne :

- * un atome de Neptunium 239 chargé positivement car ce nouvel atome contient un proton de plus que le nombre d'électrons qui le constitue,
- * un rayonnement radioactif formé d'une particule β^{-} constituée d'un électron associé à un spectre d'énergie continu selon une certaine loi de probabilité et émis en dehors de l'atome d'Uranium 239,
- * un antineutrino non radioactif.

398. Feynman et Gell-Mann (1958). « *Theory of the Fermi interaction* ». Physical Review, volume 109, 193-198.

Ce type de radioactivité affecte les noyaux riches en neutrons. Elle met en jeu l'interaction nucléaire faible à laquelle sont sujet, entre autres, les quarks de type « d » (charge $-1/3$) et de type « u » (charge $+2/3$) constituant les briques élémentaires avec lesquelles sont construits les neutrons et les protons. Cette interaction se manifeste par la mutation d'un quark « d » en quark « u », ce qui a pour conséquence de transformer un neutron contenant 2 quarks « d » et 1 quark « u » en un proton contenant 1 quark « d » et 2 quarks « u ».

Le diagramme de Feynman associé à cette désintégration bêta moins est le suivant ³⁹⁹ :



La transformation d'un quark d en quark u est associée à l'émission d'un boson W_- de spin 1 de la part du quark d. (Rappelons qu'un spin de valeur 1 est une des caractéristique des bosons tels que les photons et les gluons).

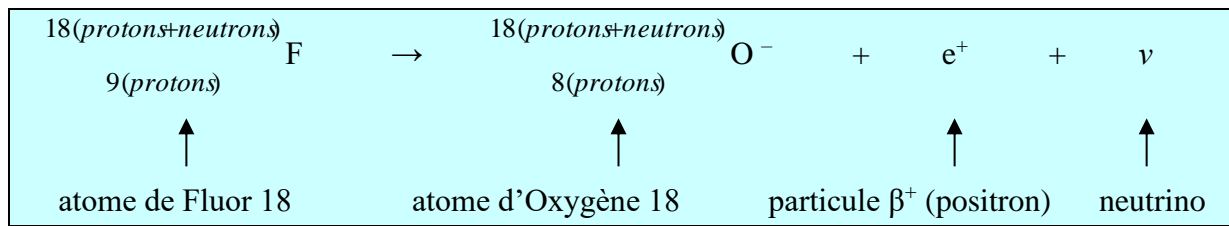
Ainsi, le boson W_- emporte-t-il une charge de :

$$(-1/3) - (+2/3) = -1.$$

→ Dans le cas de la désintégration d'un proton en neutron (radioactivité bêta plus), il y a émission d'un positron et d'un neutrino.

C'est le cas du Fluor 18 qui se désintégrant naturellement en Oxygène 18 :

399. Feynman. 1985. « *The Strange Theory of Light and Matter* ». Traduction: Françoise Balibar et Alain Laverne : Lumière et matière. Une étrange histoire. Points-Sciences. Edition novembre 1992. Figure 85, page 183.

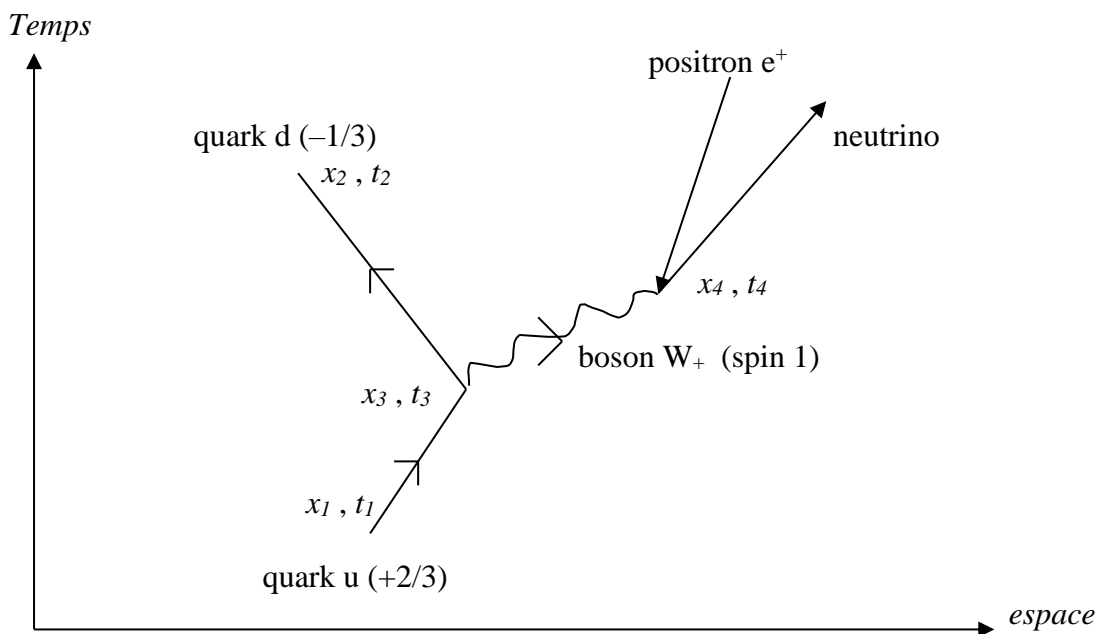


(positron)

L'issue de la désintégration donne :

- * un atome d'Oxygène 18 chargé négativement car ce nouvel atome contient un proton de moins que le nombre d'électrons qui le constitue,
- * un rayonnement radioactif sous la forme d'une particule β^+ constituée d'un positron émis en dehors de l'atome de Fluor 18,
- * un neutrino non radioactif.

Le diagramme de Feynman associé à cette désintégration bêta plus est le suivant :

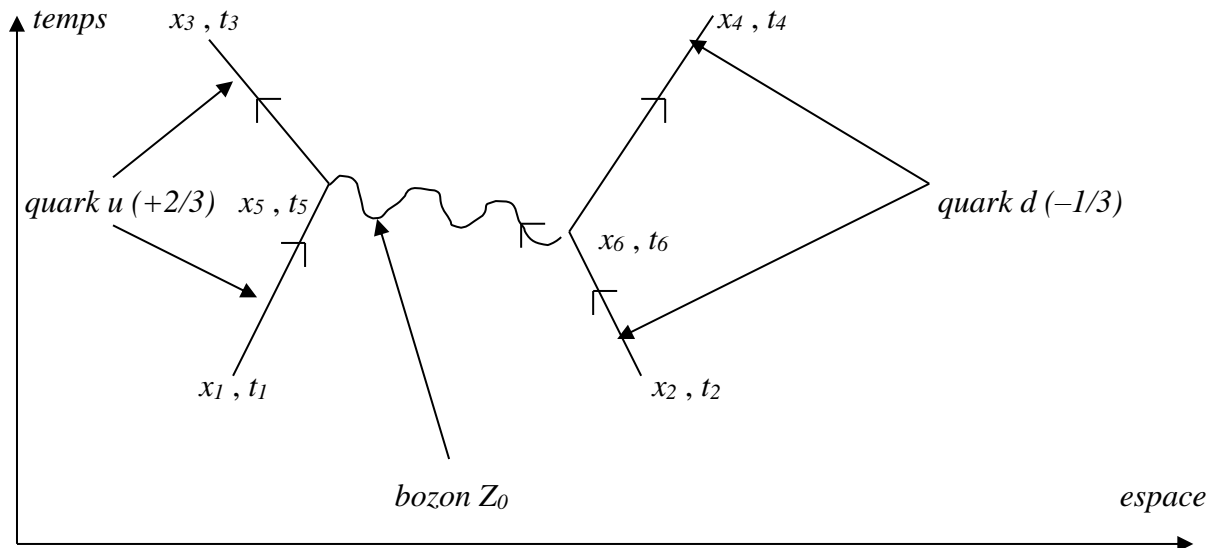


Cette transformation est associée à l'émission d'un boson W_+ de spin 1 de la part du quark u . Le boson W_+ emporte donc une charge de :

$$(+2/3) - (-1/3) = +1.$$

→ Il existe aussi un autre bozon Z_0 que l'on peut imaginer comme un boson W neutre. Il s'agit du cas où un quark u interagit avec un quark d (on dit alors que le quark u se couple avec le quark d) sans changement de charge. Cette interaction porte le nom de « courant neutre » et fait penser à l'interaction fondamentale entre deux électrons (effet Möller) que nous avons analysé en détail en section 6.3.1.

Le diagramme de Feynman associé à cette interaction est le suivant ⁴⁰⁰ :



Le bozon Z_0 n'emporte aucune charge car :

$$(-1/3) - (-1/3) = 0.$$

400. Ibid. Figure 87 page 185.

Annexe 27

Le groupe de symétrisation $SU(2)$ et l'interaction faible

(Voir Chapitre 8 sous-section 8.2.4.b : Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs)

1- Définition du groupe $SU(2)$

a) Groupe unitaire $U(2)$:

Rappelons qu'en algèbre linéaire, une matrice A à coefficients complexes est dite unitaire si elle vérifie les égalités suivantes :

$$A^+A = AA^+ = I,$$

avec :

* A^+ la matrice adjointe de la matrice A ,

* I la matrice unité, encore appelée matrice identité

L'ensemble des matrices unitaires forme le groupe unitaire sachant que les matrices unitaires à coefficients réels sont les matrices orthogonales.

Considérons la transformation linéaire G qui, au couple de variables complexes (Ψ, Φ) , fait correspondre le couple (Ψ', Φ') tel que :

$$\Psi' = a\Psi + b\Phi \quad ; \quad \Phi' = c\Psi + d\Phi \quad (1)$$

avec :

* a, b, c, d des nombres complexes.

On peut considérer les couples (Ψ, Φ) comme formant un espace vectoriel E_2 servant d'espace de représentation pour le Groupe de Lie $GL(2)$.

En prenant pour base canonique :

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = (0, 1),$$

la matrice G de la représentation matricielle du groupe $GL(2)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \Psi' \\ \Phi' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}.$$

Nous savons que la matrice G est unitaire si :

$$G G^+ = G^+ G = I,$$

soit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec :

$$* G^+ = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \text{ la transposée de la conjuguée de } G,$$

c'est-à-dire :

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad ; \quad |c|^2 + |d|^2 = 1 \quad ; \quad d = -\frac{ca^*}{b^*}.$$

Des relations précédentes, on déduit :

$$|c| = |b| \quad ; \quad |d| = |a| \quad ,$$

vérifiant :

$$a = e^{iu} \cos \lambda \quad ; \quad b = e^{iv} \sin \lambda \quad ; \quad c = e^{iw} \sin \lambda \quad (2).$$

On obtient donc :

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iu} \cos \lambda & e^{iv} \sin \lambda \\ e^{-iw} \sin \lambda & e^{i(w+v-u)} \cos \lambda \end{pmatrix},$$

avec :

$$* \Delta = \text{déterminant} = e^{i(v+w)}$$

b) Groupe SU(2) :

Si on impose :

$$\Delta = 1,$$

on a :

$$v = -w \text{ à } 2k\pi \text{ près.}$$

On obtient alors un sous-groupe de U(2).

Alors si :

$$v = -w \quad ,$$

les trois paramètres (2) s'écrivent :

$$b = -c^* \quad \text{et} \quad d = a^*.$$

Les transformations (1) deviennent par conséquent :

$$\Psi' = a\Psi + b\Phi \quad ; \quad \Phi' = -b^*\Psi + a^*\Phi. \quad (3)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} \Psi' \\ \Phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}$$

avec :

$$A = a a^* + b b^* = 1.$$

Cette transformation est appelée *transformation unitaire unimodulaire* et on l'a noté : U .

L'ensemble des *transformations unitaires unimodulaires* U forme un sous-groupe de $U(2)$ que l'on appelle le *groupe unitaire unimodulaire* $SU(2)$ qui ne dépend plus que des trois paramètres u, v, λ .

Ainsi pour l'espace de représentation E_2 , nous avons la représentation matricielle de $SU(2)$ donnée par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \Psi' \\ \Phi' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

2- Rotation dans l'espace tridimensionnel sur la sphère de rayon unité et matrice de rotation correspondante

Démontrons qu'à toute transformation U du groupe $SU(2)$, on peut associer une rotation R dans l'espace à trois dimensions.

La transformation (3) fait correspondre au couple de variables complexes (Ψ, Φ) les valeurs :

$$\Psi' = a\Psi + b\Phi \quad \text{et} \quad \Phi' = -b^*\Psi + a^*\Phi.$$

La transformation U étant unitaire, elle conserve le produit scalaire tel que :

$$\Psi' \Psi'^* + \Phi' \Phi'^* = 1.$$

En associant aux nombres complexes Ψ, Φ et aux nombres complexes Ψ', Φ' , respectivement trois nombres réels x, y, z représentant les coordonnées d'un point $M(x,y,z)$ sur une sphère de rayon 1 et trois nombres réels x', y', z' représentant les coordonnées d'un point $M'(x',y',z')$ sur cette même sphère de rayon 1 , on peut écrire :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\Psi\Psi^* + \Phi\Phi^*)^2 = 1 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (\Psi'\Psi'^* + \Phi'\Phi'^*)^2 = 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$x = \Psi\Phi^* + \Psi^*\Phi \quad ; \quad y = i(\Psi\Phi^* - \Psi^*\Phi) \quad ; \quad z = \Psi\Psi^* - \Phi\Phi^*$$

$$x' = \Psi' \Phi'^* + \Psi'^* \Phi' \quad ; \quad y' = i(\Psi' \Phi'^* - \Psi'^* \Phi') \quad ; \quad z' = \Psi' \Psi'^* - \Phi' \Phi'^* \quad (5).$$

Le passage du point M au point M' est donc une rotation autour d'un axe passant par le centre O de la sphère, et perpendiculaire au plan défini par les points O , M et M' .

On montre facilement que la matrice U de $SU(2)$ correspond à une rotation donnée, en fonction d'un angle θ de rotation et d'un vecteur \vec{u} porté par l'axe de rotation.

Une telle matrice est la suivante :

$$U(\vec{u}, \frac{\theta}{2}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i u_z \sin\frac{\theta}{2} & -(i u_x + u_y) \sin\frac{\theta}{2} \\ (-i u_x + u_y) \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} + i u_z \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (6).$$

La matrice (6) représente le groupe $SU(2)$. Aussi à toute transformation unimodulaire U correspond une rotation \mathbf{R} dans l'espace tridimensionnel.

Selon les relations (5), on voit que x' , y' , z' , restent invariants quand Ψ' et Φ' changent de signe. Par conséquent à toute rotation \mathbf{R} du groupe $SO(3)$ correspondent deux transformations du groupe $SU(2)$: U et $-U$.

Et comme les transformations de $SU(2)$ sont linéaires, au produit $U_2 U_1$ de deux transformations correspond le produit $\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$ de deux rotations successives. En effet, à chaque matrice (4) du groupe $SU(2)$ peut être associé une rotation \mathbf{R} de $SO(3)$, les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ étant des groupes homomorphes.

Les matrices du groupe $SU(2)$ forment donc une représentation matricielle à deux dimensions du groupe $SO(3)$. C'est une représentation un peu particulière puisqu'à tout élément \mathbf{R} de $SO(3)$ correspond deux matrices U et $-U$ de $SU(2)$. Aussi on dira que ces deux matrices U et $-U$ forment une représentation binaire du groupe $SO(3)$.

3- Les spineurs de l'espace tridimensionnel

Un spineur est un vecteur complexe intervenant en particulier dans la caractérisation des rotations de l'espace et se distinguant d'un vecteur classique par la phase qu'il peut acquérir au cours d'une rotation. Les spineurs sont intimement liés à la notion de mouvement cinétique orbital via le nombre quantique de spin s (voir sous-section 8.2.3.a).

On a vu précédemment qu'à tout couple (Ψ, Φ) on peut lier un système de coordonnées (x, y, z) et on a aussi mentionné que les rotations dans l'espace tridimensionnel correspondent à des transformations du groupe $SU(2)$.

Définissons maintenant les spineurs par cette propriété de transformation lors d'une rotation dans l'espace géométrique.

On appelle spineur d'ordre 1 de l'espace tridimensionnel tout couple (Ψ, Φ) de nombres complexes qui, lors d'une rotation des coordonnées d'un angle θ autour d'un axe portant le vecteur \vec{u} , dans l'espace à trois dimensions, est transformé en un couple (Ψ', Φ') par la matrice $U(\vec{u}, \frac{\theta}{2})$ donnée en expression (6).

Ainsi la transformation du spineur (Ψ, Φ) en un spineur (Ψ', Φ') est une rotation dans l'espace des spineurs. Et cette rotation est définie par la matrice $U(\vec{u}, \frac{\theta}{2})$.

L'espace vectoriel des spineurs à deux composantes (Ψ, Φ) constitue un espace de représentation à deux dimensions du groupe $SU(2)$.

Rappelons que les physiciens théoriciens Yang (né en 1922) et Mills (1927-1999) sont les premiers à avoir formaliser un cadre théorique à la démarche de symétrisation de jauge dans le cas d'un groupe de Lie de dimension supérieure ou égale à celle du groupe $U(1)$. La théorie de Yang-Mills est un outil extrêmement efficace pour décrire l'ensemble des interactions de la physique quantique.

Dans le cas de l'interaction faible, la formulation en doublets est assez facile. Rappelons à cet effet qu'en algèbre, le terme *doublet*, également nommé *couple*, désigne un ensemble ordonné de deux éléments se notant (Ψ, Φ) ou (Ψ', Φ') comme nous l'avons vu précédemment.

Aussi, dans toutes les réactions mettant en jeu un mécanisme d'interaction faible, les particules d'un même doublet jouent un rôle parfaitement symétrique.

Pour ce qui concerne l'interaction faible, et plus particulièrement au cours d'une désintégration β , de probabilité β^- ou β^+ , l'électron et le neutrino se transforment mutuellement et nous pouvons considérer ces derniers comme deux états propres d'un même objet quantique.

Il s'agit du même type de phénomène qui conduit à modifier la phase de la fonction d'onde d'un électron lorsque ce dernier interagit avec un photon.

Dans le cas de l'interaction faible, la fonction d'onde ζ d'un tel objet quantique s'écrit sous la forme d'un vecteur à deux dimensions dont chaque composante est un spineur.

La fonction d'onde ζ est un bispineur⁵⁴² qui s'écrit de la manière suivante :

$$\zeta = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix},$$

où Ψ et Φ sont eux-même des spineurs.

Dans le cas d'une désintégration β , les composantes Ψ_e et Φ_ν sont les amplitudes de probabilité pour que la particule considérée soit un électron ou un neutrino (cas d'un doublet électron-neutrino).

542. Internet. 5 janvier 2019. « Un peu de physique / Plan du site / Symétrie de jauge et interaction ».

Les matrices du groupe $SU(2)$ laissent invariant le carré du module $|\xi|^2$ de la même manière que les rotations du groupe $U(1)$ laissent invariant le carré du module de la fonction d'onde dont nous avons parlé au §7 de l'Annexe 21 et qui était associée à l'invariance de jauge locale en Electrodynamique Quantique.

Ce groupe de symétrie $SU(2)$ s'appliquant à tout doublet associé à l'interaction faible, nous dirons que le groupe $SU(2)$ a toutes les caractéristiques voulues pour qu'on lui applique la procédure de symétrisation de jauge.

La théorie de Yang-Mills procure donc le formalisme adéquat dans la résolution de la problématique posée par l'interaction faible en conduisant à l'identification d'un champ de potentiel spinoriel. La quantification de ce champ amène à distinguer trois bosons de jauge : les bosons W^+ , W^- et Z^0 , ce qui est logique puisque le groupe $SU(2)$ est de dimension 3.

Ainsi, la théorie de Yang-Mills permet de rendre compte de la désintégration β grâce aux bosons W^+ et W^- respectivement chargés électriquement $+1e$ et $-1e$.

Annexe 28

La brisure spontanée de symétrie : La courbe en "chapeau mexicain"

(Voir Chapitre 8 sous-section 8.2.5.a : *Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs*)

Détaillons le phénomène de brisure spontanée de symétrie associée à un vide quantique qui n'est plus invariant et qui conduira au champ de Higgs c'est-à-dire au mécanisme de Higgs.

La dynamique du doublet de Higgs :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$

est régie par la densité de Lagrangien suivante⁵⁷⁶ :

$$L = E_c - E_p$$

comme exprimé en Annexe 14,

c'est-à-dire :

$$L(\Phi) = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - V(\Phi)$$

avec :

$$* \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \text{ et } x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3,$$

$$* \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ et } x_\mu = x_0, x_1, x_2, x_3,$$

576. Ibid. Page 108.

* $E_p = V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$, le potentiel scalaire associé au Lagrangien issu du postulat initial concernant la construction du champ Φ imaginé par Peter Higgs. Nous verrons ultérieurement que ce potentiel scalaire $V(\Phi)$ implique une masse pour le boson de Higgs et des interactions du champ Φ de Higgs avec lui-même.

* Φ^+ le conjugué hermitique de Φ ,

* μ (à ne pas confondre avec les indices tensoriels " μ "), associé au potentiel scalaire $V(\Phi)$, et qui désigne une masse inertielle pour les quatre champs scalaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$,

* $\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi$ le terme d'énergie cinétique,

* $V(\Phi)$ le terme d'énergie potentielle.

Le bien fondé de l'idée de Peter Higgs repose sur le fait que l'équation d'Euler-Lagrange dont nous avons parlé en sous-section 5.2.1.a, associée au Lagrangien $L(\Phi)$, c'est-à-dire :

$$\partial_\mu \frac{\partial L(\Phi)}{\partial (\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial L(\Phi)}{\partial \Phi} = 0,$$

conduit à l'équation de Klein-Gordon que nous avons vu en sous-section 1.2.1.g, partie a.

Ceci montre que le champ Φ de Higgs satisfait pleinement l'équation de Klein-Gordon suivante :

$$(\square + \mu^2) \Phi = 0$$

et justement cette équation de Klein-Gordon décrit la propagation de particules scalaires de spin 0 (comme le pré-supposé boson de Higgs) et de masse $m = \sqrt{\mu^2}$;

avec :

* $\hbar = c = 1$

* \square le Dalemberdien exprimé de la manière suivante :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

* Montrons que cette forme d'équation de Klein-Gordon est la même que celle obtenue par Dirac en sous-section 1.2.1.g, partie a (l'équation 4) lors de la recherche de son équation dite "Equation de Dirac".

L'équation de Klein-Gordon mentionnée en sous-section 1.2.1.g, partie a (l'équation 4) :

$$(P^2 - P_0^2 + m^2 c^2) \Phi = 0$$

ainsi que les relations :

$$\frac{1}{c} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = P_0, \quad p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z},$$

permettent d'écrire:

$$\left(-\hbar^2 \Delta - \frac{1}{c^2} i^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2 c^2 \right) \Phi = 0$$

$$\frac{1}{\hbar^2} \left(-\hbar^2 \Delta - \frac{1}{c^2} i^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2 c^2 \right) \Phi = \frac{1}{\hbar^2} 0$$

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \Phi = 0$$

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \Phi = 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{(\square + m^2) \Phi = 0 \text{ pour } \hbar=c=1.}$$

L'équation de Klein-Gordon^{576 bis} est une version relativiste de l'équation de Schrödinger. Elle décrit des particules massives de spin nul, avec ou sans charge électrique. Elle a été établie de manière indépendante en 1926 par les physiciens théoriciens Oskar Klein (1894-1977) et Walter Gordon (1893-1939).

En 1928, à partir de l'équation de Klein-Gordon, Dirac démontra qu'une particule ayant un spin non nul vérifie une équation relativiste, appelée aujourd'hui *Equation de Dirac*⁵⁷⁷.

De même qu'au §4 de l'Annexe 21, l'ensemble des transformations de jauge *globale*, traduisant un changement de jauge partout dans tout l'espace-temps de la même façon et en même temps, s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \exp \left[i \frac{\theta^k}{2} \tau^k \right] \Phi(x)}$$

avec:

- * $\frac{\theta^k}{2}$ des constantes, indicées k , à ne pas confondre avec la notion de *puissance de θ* ,
- * τ^k pour k indicé de 1 à 3, les trois matrices (2×2) de Pauli, génératrices du groupe de symétrie $SU(2)_{Left} \times U(1)_\gamma$.

L'hamiltonien, tel que nous avons pu l'introduire au §1 de l'Annexe 19, constituant l'énergie totale associée au système considéré, s'écrit de la manière suivante :

$$\boxed{H = E_c + E_p = \hat{\partial}_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + V(\Phi).}$$

Le vide quantique tel que l'avons appréhendé en section 6.3.4, se traduit par un champ Φ_0 minimisant la densité d'énergie de Hamilton, c'est-à-dire, pour être plus précis, minimisant l'énergie potentielle $V(\Phi)$.

Aussi, on peut écrire :

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \Psi(x)$$

traduisant pour des particules associées au champ scalaire $\Phi(x)$, une forme d'excitation au voisinage de Φ_0 .

576 bis. Wikipédia (4 mars 2019). « *Equation de Klein-Gordon* ».

577. Wikipédia (5 mars 2019). « *Spin* ».

Recherchons donc les équations associées au vide quantique correspondant au système imaginé par Peter Higgs.

Pour cela, il faut calculer la dérivée $\frac{\partial V(\Phi)}{\partial |\Phi|}$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial |\Phi|} = \frac{\partial}{\partial |\Phi|} [\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2] = \frac{\partial}{\partial |\Phi|} [\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4] = 2\mu^2 |\Phi| + 4\lambda |\Phi|^3$$

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial |\Phi|} = 2|\Phi|(\mu^2 + 2\lambda |\Phi|^2).$$

Pour la dérivée $\frac{\partial V(\Phi)}{\partial |\Phi|}$ égale à zéro, nous avons un extrémum (minimum ou maximum) pour le graphe $V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$, soit :

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial |\Phi|} = 2|\Phi|(\mu^2 + 2\lambda |\Phi|^2) = 0$$

si :

$$* |\Phi| = 0 \Rightarrow V(\Phi) = 0 \Rightarrow 1^{\text{er}} \text{ cas que nous traitons ci-après et qui correspond à } \mu^2 \geq 0$$

ou bien

$$* |\Phi|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = \eta^2 \Rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ cas que nous traitons ensuite et qui correspond à } \mu^2 < 0.$$

L'allure asymptotique de $V(\Phi)$ est la suivante :

$$* \text{ Si } |\Phi| \rightarrow +\infty \Rightarrow V(\Phi) \rightarrow +\infty$$

$$* \text{ Si } |\Phi| \rightarrow -\infty \Rightarrow V(\Phi) \rightarrow +\infty.$$

Il y a lieu de distinguer 2 cas :

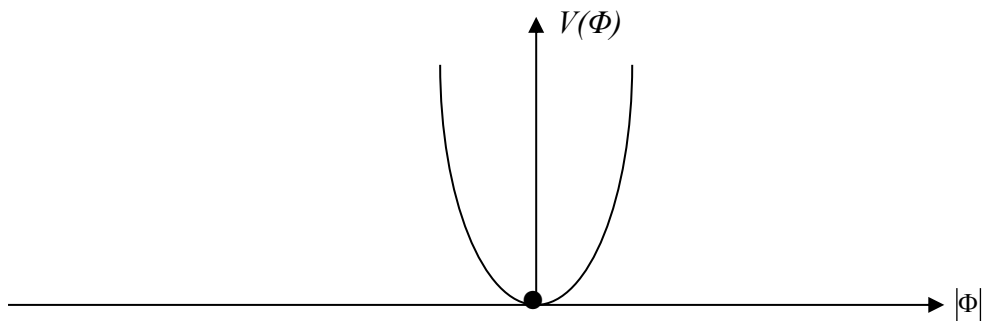
*1^{er} cas

Le Lagrangien $L(\Phi)$ conduisant à l'équation de Klein-Gordon est celui d'une particule libre de masse :

$$m = \sqrt{\mu^2} \text{ avec } \mu^2 \geq 0.$$

Ce Lagrangien $L(\Phi)$ donne un vide stable, invariant symétrique, et pour lequel $\Phi_0 = 0$ est associé à deux masses μ correspondant aux deux champs scalaires composant le doublet considéré initialement comme hypothèse.

Le potentiel $V(\Phi)$ du champ scalaire Φ , dit à position d'équilibre symétrique, a l'allure suivante :



Ce cas n'est pas intéressant car il ne permet aucune brisure de symétrie puisque le potentiel $V(\Phi)$ n'a qu'un minimum stable pour $|\Phi|=0$.

L'équilibre obtenu pour l'énergie du vide lorsque $V(\Phi)$ est minimum ne permet pas de briser la symétrie comme le montre le graphe ci-avant.

Nous dirons que la position d'équilibre de $V(\Phi)$ a une symétrie de révolution.

*2^{ème} cas :

Ce cas correspond à :

$$|\Phi|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = \eta^2 \quad \text{avec } \mu^2 < 0 \text{ excluant le 1^{er} cas pour lequel } \mu^2 \geq 0.$$

Le critère retenu pour la constante λ , dite de couplage, est contenu implicitement dans l'expression précédente, à savoir que si :

$$\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mu^2 + 2\lambda |\Phi|^2 = 0$$

on a :

$$|\Phi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \eta$$

qui n'autorise que la condition $\lambda > 0$ pour que le système soit physiquement viable.

Ainsi, pour $\mu^2 < 0$, le potentiel $V(\Phi)$ n'atteint une valeur minimum stable, qui est l'énergie du vide, que si :

$$\eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}},$$

c'est-à-dire :

$$|\mu^2| = 2 \lambda \eta^2.$$

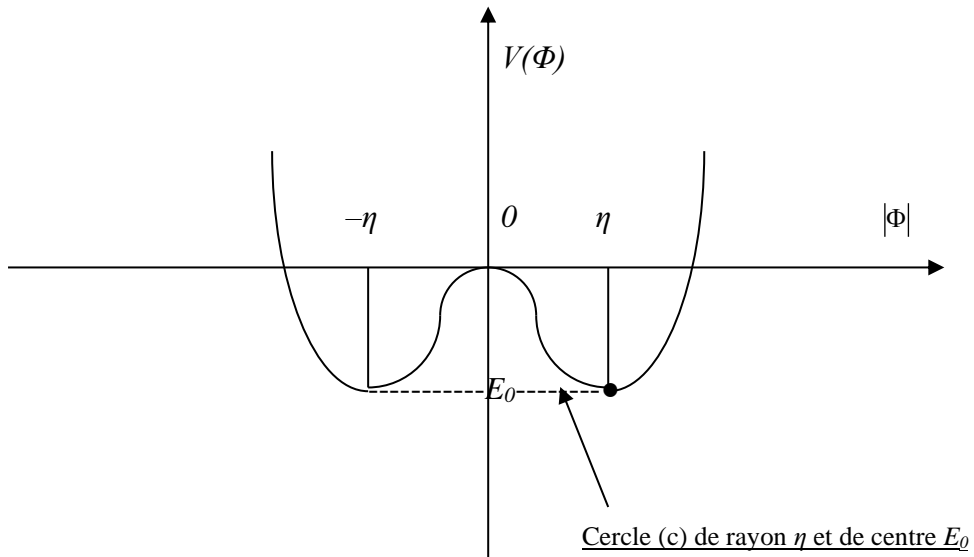
L'idée de Peter Higgs a donc été de considérer ce 2^{ème} cas dans lequel μ^2 est strictement inférieur à zéro, afin d'obtenir un potentiel $V(\Phi)$ minimum ayant le même type de symétrie que dans le 1^{er} cas mais dont l'état d'équilibre n'est pas symétrique.

Et un tel potentiel est toujours donné par :

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$$

comme postulé initialement.

Ainsi, le potentiel $V(\Phi)$ du champ scalaire Φ de Higgs, dit cette fois-ci à position d'équilibre non symétrique, a la forme d'un "chapeau mexicain" comme le montre le graphe suivant :



Le vide correspond au potentiel $V(\Phi)$ minimum égal à E_0 , dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$(E_0, -\eta) \text{ et } (E_0, \eta).$$

Ainsi :

$$E_0 = \mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4 = \mu^2 (\eta)^2 + \lambda (\eta)^4 = \eta^2 \mu^2 + \lambda \eta^4.$$

Sachant que :

$$\eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{-\mu^2}{2\eta^2},$$

on peut écrire :

$$E_0 = \eta^2 \mu^2 + \lambda \eta^4 = \eta^2 \mu^2 - \frac{\mu^2}{2\eta^2} \eta^4 = \frac{2\eta^2(\eta^2 \mu^2) - \mu^2 \eta^4}{2\eta^2} = \frac{2\eta^4 \mu^2 - \mu^2 \eta^4}{2\eta^2} = \frac{\eta^4 \mu^2}{2\eta^2} \quad E_0 = \frac{1}{2} \eta^2 \mu^2$$

avec:

* La valeur de E_0 est négative sur le graphe $V(\Phi) = f(|\Phi|)$ du fait de $\mu^2 < 0$.

Notons que la fonction $V(\Phi) = f(|\Phi|)$ passe par l'origine des coordonnées selon un extrémum car d'une part $V(\Phi) = \mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4$ s'annule pour $|\Phi| = 0$ et que d'autre part sa dérivée $\frac{\partial V(\Phi)}{\partial |\Phi|}$ s'annule pour $|\Phi| = 0$.

Dans l'espace à trois dimensions on a donc une allure de $V(\Phi) = f(|\Phi|)$ en "chapeau mexicain" car on peut se figurer un ensemble de cercles (c) centré sur l'axe des ordonnées du graphe $V(\Phi) = f(|\Phi|)$. Et un de ces cercles (c) de centre E_0 , qui est le lieu géométrique des potentiels $V(\Phi)$ minimum correspondant au *vide quantique*, montre qu'il y a une infinité de minimum possibles. On dit ainsi que l'énergie E_0 du vide est dégénérée.

Dire que l'énergie E_0 du vide est dégénérée signifie que tous les états propres associés à cette valeur propre E_0 se déduisent les uns des autres par les rotations du groupe de symétrie $SU(2) \times U(1)$ lui-même, en introduisant l'opérateur *exponentiel* de rotation suivant, que nous avons vu d'ailleurs ci-avant (transformations de jauge *globale*) :

$$\Phi_0 \rightarrow \Phi'_0 = \exp \left[i \frac{\theta^k}{2} \tau^k \right] \Phi_0.$$

En effectuant un développement limité du premier ordre sur la fonction exponentielle précédente, on obtient:

$$\Phi'_0 = \left(1 + \frac{i\theta^k}{2} \tau_k \right) \Phi_0.$$

Ainsi, le champ Φ_0 associé au vide quantique, que nous appelons plus simplement *le vide*, est invariant si des petites perturbations le laissent inchangé, c'est-à-dire si :

$$\Phi'_0 = \left(1 + \frac{i\theta^k}{2} \tau_k \right) \Phi_0 = \Phi_0,$$

soit :

$$\left(\Phi_0 + \frac{i\theta^k}{2} \tau_k \Phi_0 \right) = \Phi_0$$

$$\left(\frac{i\theta^k}{2} \tau_k \Phi_0 \right) = 0 \quad \text{avec } \theta_k = \text{constantes}$$

$$\left(\tau_k \Phi_0 \right) = 0 \quad \text{avec } k = 1, 2, 3.$$

Rappelons que les 3 matrices (2×2) de Pauli (τ_1, τ_2, τ_3) que nous avons introduit en sous-section 1.2.7.a, sont génératrices du groupe de symétrie $SU(2) \times U(1)$, soit :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons aussi que le doublet associé au champ Φ_0 représentant le vide peut s'écrire comme nous l'avons postulé initialement pour tout champ Φ :

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

avec :

- * "0" une composante du doublet traduisant l'absence totale de champ chargé électriquement,
- * η l'autre composante du doublet associée au champ électriquement neutre représentant l'énergie du vide.

Pour satisfaire à la condition :

$$(\tau_k \Phi_0) = 0,$$

il faut disposer d'un générateur τ ayant la structure suivante :

$$\tau = \frac{1+\tau_3}{2}.$$

En effet :

$$\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right) \Phi_0 = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

Ce générateur $\tau = \frac{1+\tau_3}{2}$ laissant le vide $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$ invariant, ne brise donc pas la symétrie globale $SU(2) \times U(1)$ associée au vide.

Remarquons que ce n'est pas le cas pour les trois autres générateurs τ_1, τ_2 et τ_3 représentés par les matrices de Pauli, qui, ne laissant pas le vide $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$ invariant, brisent spontanément la symétrie globale $SU(2) \times U(1)$ associée au vide.

En effet :

$$* \tau_1 \Phi_0 = \tau_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$* \tau_2 \Phi_0 = \tau_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$* \tau_3 \Phi_0 = \tau_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta \end{pmatrix} \neq 0$$

En ne tenant compte dorénavant que du 2^{ème} cas pour les raisons que nous avons mentionnées, résumons ce que nous venons de voir :

→ Nous avons montré qu'un minimum stable de $V(\Phi)$ est atteint pour une énergie du vide égale à :

$$E_0 = \frac{1}{2} \eta^2 \mu^2,$$

correspondant à un champ quantique Φ_0 ayant l'expression suivante :

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

avec :

* η réel et supérieur à zéro.

→ Nous avons également montré que l'énergie du vide E_0 est dégénérée et que tous les états propres associés à cette valeur E_0 se déduisent les uns des autres par les transformations de groupe de symétrie $SU(2) \times U(1)$ lui-même :

$$\Phi_0 \rightarrow \Phi'_0 = \exp \left[i \frac{\theta^k}{2} \tau^k \right] \Phi_0.$$

→ Il est important d'avoir compris que le choix physique d'un état du vide tel que :

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix},$$

comme nous pouvons le constater sur le graphe ci-avant ayant la forme d'un "chapeau mexicain", a pour conséquence de briser spontanément la symétrie présente sur le graphe ; et que la seule transformation qui laisse le champ quantique Φ_0 invariant, conformément à un ensemble de transformations de jauge globale possédant la structure de groupe $U(1)$ (voir §4 de l'Annexe 21), est donnée par :

$$\Phi'_0 = \left(1 + \frac{i\theta}{2} \tau \right) \Phi_0 = \Phi_0,$$

c'est-à-dire :

$$\tau \Phi_0 = 0,$$

admettant pour générateur :

$$\tau = \frac{1+\tau_3}{2},$$

car :

$$\tau \Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

Cette dernière expression nous fait dire que le générateur τ est non brisé car il conserve l'existence du vide, alors que les trois générateurs τ_1, τ_2, τ_3 , du groupe :

$$SU(2) \times U(1)$$

ne laissant pas Φ_0 invariant, brisent spontanément la symétrie globale $SU(2) \times U(1)$ associée au vide qui prend alors la valeur physique :

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Les physiciens disent alors que les trois générateurs τ_1, τ_2 et τ_3 sont brisés par l'existence d'un vide qui n'est plus invariant c'est-à-dire qui n'est plus symétrique.

Annexe 29

Calcul du Lagrangien L_1 de perturbation

(Voir Chapitre 8 sous-section 8.2.5.b : *Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs*)

Construisons le lagrangien L_1 de perturbation tel que défini en sous-section 8.2.5.b du chapitre 8.

Soit :

$$L_1(\Phi) = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - V(\Phi)$$

avec :

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^+ \Phi - \lambda (\Phi^+ \Phi)^2 \\ L_1 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi^+ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi - \mu^2 \Phi^+ \Phi - \lambda (\Phi^+ \Phi)^2 \end{aligned}$$

avec :

* $-\mu^2 = 2 \lambda \eta^2$ (voir 2^{ème} cas en sous-section 4.2.4.a). Ne pas confondre μ avec l'indice tensoriel μ ,

$$* \Phi = \begin{pmatrix} \eta \theta_2 + i \eta \theta_1 \\ \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i \eta \theta_3 \end{pmatrix},$$

$$* \partial^\mu \Phi = \begin{pmatrix} \eta \partial^\mu \theta_2 + i \eta \partial^\mu \theta_1 \\ \partial^\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i \eta \partial^\mu \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Pour plus de clarté nous posons $\theta_- = \theta_1 - i \theta_2$ afin de pouvoir simplifier l'écriture et écrire :

$$\Phi = \begin{pmatrix} i \eta \theta_- \\ \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i \eta \theta_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\partial^\mu \Phi = \begin{pmatrix} i \eta \partial^\mu \theta_- \\ \partial^\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i \eta \partial^\mu \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$* \Phi_{\text{conjugué}} = \begin{pmatrix} \eta \theta_2 - i \eta \theta_1 \\ \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i \eta \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$* \Phi^+ = (\Phi_{\text{conjugué}})^{\text{transposé}} = (\eta \theta_2 - i \eta \theta_1 \quad \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i \eta \theta_3)$$

Pour plus de clarté nous posons aussi $\theta_+ = \theta_1 + i \theta_2$ afin de pouvoir simplifier l'écriture et écrire :

$$\Phi^+ = (-i \eta \theta_+ \quad \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i \eta \theta_3)$$

et

$$\partial_\mu \Phi^+ = (-i \eta \partial_\mu \theta_+ \quad \partial_\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i \eta \partial_\mu \theta_3)$$

Remarquons que : $\partial_\mu \Phi^+ = \partial_\mu (\Phi^+) = (\partial^\mu \Phi)^+$.

Le calcul de L_I étant assez fastidieux, nous le scindons selon les parties suivantes :

$$L_I = (1) - (2) - (3)$$

avec :

$$* (1) = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi$$

$$* (2) = \mu^2 \Phi^+ \Phi$$

$$* (3) = \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$$

→ **Calcul de (1)** = $\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi$:

$$(1) = (-i\eta \partial_\mu \theta_+ \quad \partial_\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i\eta \partial_\mu \theta_3) \begin{pmatrix} i\eta \partial^\mu \theta_- \\ \partial^\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i\eta \partial^\mu \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$(1) = (-i\eta \partial_\mu \theta_+) (i\eta \partial^\mu \theta_-) + (\partial_\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i\eta \partial_\mu \theta_3) (\partial^\mu \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i\eta \partial^\mu \theta_3)$$

$$(1) = \frac{1}{2} (2\eta^2 \partial_\mu \theta_k \partial^\mu \theta_k + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma)$$

avec :

* $k=1$ à 3 conformément à la convention de la sommation d'Einstein sur les indices k .

Posons :

$$\theta_k = \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \underline{\theta}_k$$

afin de synthétiser au mieux et physiquement l'interaction des champs $\theta_k(x)$ et $\sigma(x)$ dans les résultats obtenus, afin de ne pas nous laisser poluer par des constantes qui ne sont pas de prime importance dans la compréhension du phénomène analysé.

On obtient alors :

$$(1) = \frac{1}{2} (2\eta^2 \partial_\mu \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \underline{\theta}_k \partial^\mu \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \underline{\theta}_k + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma)$$

$$(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta\sqrt{2}} 2\eta^2 \partial_\mu \underline{\theta}_k \partial^\mu \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \underline{\theta}_k + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right)$$

$$(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\eta^2} 2\eta^2 \partial_\mu \underline{\theta}_k \partial^\mu \underline{\theta}_k + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right)$$

$$(1) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \underline{\theta}_k \partial^\mu \underline{\theta}_k + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma).$$

→ **Calcul de (2)** = $\mu^2 \Phi^+ \Phi$:

Mentionnons que μ désigne une masse inertielle et que cette masse ne doit évidemment pas être confondue avec les indices tensoriels μ qui apparaissent dans le calcul précédent de l'expression (1).

$$(2) = \mu^2 \left(-i\eta \theta_+ \quad \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i\eta \theta_3 \right) \begin{pmatrix} i\eta \theta_- \\ \eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i\eta \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^+ \Phi = (-i\eta\theta_+) (i\eta\theta_-) + \left(\eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + i\eta\theta_3\right) \left(\eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - i\eta\theta_3\right)$$

$$\Phi^+ \Phi = \eta^2 \theta_k^2 + \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{2} \eta \sigma + \eta^2$$

$$(2) = \mu^2 \Phi^+ \Phi = \mu^2 \left(\eta^2 \theta_k^2 + \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{2} \eta \sigma + \eta^2\right)$$

$$(2) = \mu^2 \eta^2 \theta_k^2 + \mu^2 \frac{\sigma^2}{2} + \mu^2 \sqrt{2} \eta \sigma + \mu^2 \eta^2$$

En posant pour la même raison que précédemment :

$$\theta_k = \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \underline{\theta}_k ,$$

on obtient :

$$(2) = \frac{\mu^2}{2} (\underline{\theta}_k^2 + \sigma^2) + \mu^2 \sqrt{2} \eta \sigma + \mu^2 \eta^2$$

→ **Calcul de (3)** = $\lambda (\Phi^+ \Phi)^2$:

$$(3) = \lambda \left[\frac{1}{2} (\underline{\theta}_k^2 + \sigma^2) + (\sqrt{2} \eta \sigma + \eta^2) \right]^2$$

$$(3) = \lambda \left[\frac{1}{4} (\underline{\theta}_k^2 + \sigma^2)^2 + \sqrt{2} \eta \sigma (\underline{\theta}_k^2 + \sigma^2) + \eta^2 (\underline{\theta}_k^2 + 3\sigma^2) + 2\sqrt{2} \eta^3 \sigma + \eta^4 \right]$$

Finalement, en gardant les termes d'ordre le plus bas, on obtient :

$$L_I = (1) - (2) - (3)$$

$$L_I = \frac{1}{2} (\partial_\mu \underline{\theta}_k \partial^\mu \underline{\theta}_k) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - (-2\mu^2) \sigma^2).$$

Annexe 30

Calcul du Lagrangien L_2 associé à la symétrie de jauge locale

(Voir Chapitre 8 sous-section 8.2.5.c : *Une des pérennités du concept d'intégrale de chemins : La théorie quantique des champs*)

Construisons le lagrangien L_2 associé à la jauge locale afin de montrer l'interaction entre le champ $\sigma(x)$ et les champs $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$.

Soit les égalités (1), (2) et (3) telles que définies en sous-section 8.2.5.c du chapitre 8.

→ **Calcul de (1)** $= D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi$:

Nous avons vu que :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig W_\mu^k \frac{\tau_k}{2} + ig' B_\mu \frac{\tau_0}{2}.$$

Exprimons D_μ en appliquant la convention de sommation d'Estein sur les indices k répétés :

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + \frac{ig}{2} W_\mu^1 \tau_1 + \frac{ig}{2} W_\mu^2 \tau_2 + \frac{ig}{2} W_\mu^3 \tau_3 + \frac{ig'}{2} B_\mu \tau_0 \\ D_\mu &= \partial_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} W_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} W_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} W_\mu^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{ig'}{2} B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_\mu &= \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{ig}{2} W_\mu^3 + \frac{ig'}{2} B_\mu & \frac{ig}{2} W_\mu^1 + \frac{g}{2} W_\mu^2 \\ \frac{ig}{2} W_\mu^1 - \frac{g}{2} W_\mu^2 & \partial_\mu - \frac{ig}{2} W_\mu^3 + \frac{ig'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons :

$$* W_\mu^+ = W_\mu^1 + i W_\mu^2 \quad ; \quad W_\mu^- = W_\mu^1 - i W_\mu^2$$

$$* W_+^\mu = W_1^\mu + iW_2^\mu \quad ; \quad W_-^\mu = W_1^\mu - iW_2^\mu$$

On obtient:

$$D_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{ig}{2}W_\mu^3 + \frac{ig'}{2}B_\mu & \frac{ig}{2}W_\mu^- \\ \frac{ig}{2}W_\mu^+ & \partial_\mu - \frac{ig}{2}W_\mu^3 + \frac{ig'}{2}B_\mu \end{pmatrix}$$

D'où :

$$D_\mu \Phi = D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{ig}{2}W_\mu^3 + \frac{ig'}{2}B_\mu & \frac{ig}{2}W_\mu^- \\ \frac{ig}{2}W_\mu^+ & \partial_\mu - \frac{ig}{2}W_\mu^3 + \frac{ig'}{2}B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} \frac{ig}{2}W_\mu^- \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \\ \left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}W_\mu^3 + \frac{ig'}{2}B_\mu \right) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} \frac{ig}{2}W_\mu^- \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \\ \partial_\mu \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) - \frac{i}{2}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

Or $\partial_\mu \eta = 0$ car η est une constante.

D'où :

$$D_\mu \Phi = \begin{pmatrix} \frac{ig}{2}W_\mu^- \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \\ \partial_\mu \left(\frac{H}{\sqrt{2}} \right) - \frac{i}{2}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

et :

$$D^\mu \Phi = \begin{pmatrix} \frac{ig}{2} W_-^\mu \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \\ \partial^\mu \left(\frac{H}{\sqrt{2}} \right) - \frac{i}{2} (g W_3^\mu - g' B^\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

Sachant que mathématiquement :

$$D_\mu \Phi^+ = D_\mu (\Phi^+) = (D_\mu \Phi)^+$$

on a :

$$(D_\mu \Phi)_{\text{conjugué}} = \begin{pmatrix} -\frac{ig}{2} W_\mu^+ \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \\ \partial_\mu \left(\frac{H}{\sqrt{2}} \right) + \frac{i}{2} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

$$D_\mu \Phi^+ = [(D_\mu \Phi)_{\text{conjugué}}]^{\text{transposé}} = \begin{pmatrix} -\frac{ig}{2} W_\mu^+ \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) & \partial_\mu \frac{H}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$(I) = \begin{pmatrix} -\frac{ig}{2} W_\mu^+ \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) & \partial_\mu \frac{H}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ig}{2} W_-^\mu \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \\ \partial^\mu \left(\frac{H}{\sqrt{2}} \right) - \frac{i}{2} (g W_3^\mu - g' B^\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} =$$

$$\left(-\frac{ig}{2} W_\mu^+ \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(\frac{ig}{2} W_-^\mu \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \right) + \left(\partial_\mu \frac{H}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(\partial^\mu \frac{H}{\sqrt{2}} - \frac{i}{2} (g W_3^\mu - g' B^\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$(I) = \frac{1}{4} g^2 \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right)^2 W_\mu^+ W_-^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{4} \left((g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \dots$$

$$(I) = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{4} g^2 \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right)^2 W_\mu^+ W_-^\mu + \frac{1}{4} \left((g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \dots$$

Rappelons-nous qu'un Lagrangien est formé des termes suivants :

$$L = E_c - E_p .$$

Ainsi, le terme :

$$(I) = D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi$$

est le terme de l'énergie cinétique du Lagrangien L_2 .

→ **Calcul de (2)** = $\mu^2 \Phi^+ \Phi$:

Nous savons que :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

alors:

$$\Phi_{\text{conjugué}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

et :

$$\Phi^+ = (\Phi_{\text{conjugué}})^{\text{transposé}} = (0 \quad \eta + \frac{H}{\sqrt{2}})$$

$$\Phi^+ \Phi = (0 \quad \eta + \frac{H}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Phi^+ \Phi = (\eta + \frac{H}{\sqrt{2}})^2.$$

D'où :

$$(2) = \mu^2 (\eta + \frac{H}{\sqrt{2}})^2.$$

→ **Calcul de (3)** = $\lambda (\Phi^+ \Phi)^2$:

D'après ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$(3) = \lambda (\eta + \frac{H}{\sqrt{2}})^4.$$

→ **Calcul de (2) + (3)** = $V(\Phi)$:

Nous sommes donc en mesure maintenant d'écrire le terme de l'énergie potentielle du Lagrangien L_2 :

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$$

de la manière suivante :

$$V(\Phi) = \mu^2 (\eta + \frac{H}{\sqrt{2}})^2 + \lambda (\eta + \frac{H}{\sqrt{2}})^4.$$

Nous avons vu en sous-section 4.2.4.a que :

$$\eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{-\mu^2}{2\eta^2}.$$

Le terme de l'énergie potentielle $V(\Phi)$ du Lagrangien L_2 est donc le suivant :

$$V(\Phi) = \mu^2 \left(\eta^2 + \frac{2\eta H}{\sqrt{2}} + \frac{H^2}{2} \right) - \frac{\mu^2}{2\eta^2} \left(\eta^2 + \frac{2\eta H}{\sqrt{2}} + \frac{H^2}{2} \right) \left(\eta^2 + \frac{2\eta H}{\sqrt{2}} + \frac{H^2}{2} \right)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 H^2 - \frac{\mu^2 H^3}{\eta\sqrt{2}} - \frac{\mu^2 H^4}{8\eta^2} + \frac{\mu^2 \eta^2}{2}.$$

→ **Réflexion sur le terme $D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi$ de l'énergie cinétique du Lagrangien L_2 :**

Rappelons-nous qu'en sous-section 4.2.4.b, dans la recherche du boson de Higgs massif et de spin nul, nous nous sommes référés à juste raison au Lagrangien :

$$L_{KG} = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^+ \Phi$$

conduisant à l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi(x) = 0$$

associée à une particule massive (masse m) de spin égale à zéro.

Il vient donc tout naturellement à l'esprit d'imaginer que dans le développement futur du Lagrangien L_2 , des termes quadratiques tels que :

$$\partial_\mu H \partial^\mu H \quad \text{et} \quad W_\mu^1 W_1^\mu, \quad W_\mu^2 W_2^\mu, \quad W_\mu^3 W_3^\mu$$

puissent apparaître dans le terme de l'énergie cinétique $D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi$.

Et si tel était le cas, nous serions en présence d'éléments de preuve théorique concernant l'existence de masses associées aux bosons W^+ , W^- , Z^0 de l'interaction faible engendrées par un champ quantique (le champ de Higgs) vectorisé par un boson particulier (le boson H dit de Higgs) lui-même massif mais de spin égale à zéro tel que préconisée par la construction théorique échafaudée. Construction théorique fondée, rappelons-le encore, sur les travaux de Weinberg et de Higgs (voir sous-section 4.2.3.c, partie *Travaux de Steven Weinberg*) et basés sur les premiers instants de l'univers. En effet, aux premiers instants de l'univers, la température diminuant, l'interaction faible s'est séparée de l'interaction électromagnétique donnant naissance à un phénomène d'asymétrie entre ces deux interactions, brisant ainsi spontanément la symétrie de jauge $SU(2) \times U(1)$ tel que mentionné par l'hypothèse associée au *mécanisme de Higgs*.

Afin de parvenir à réaliser ce qui vient d'être écrit, il faut agencer différemment dans le terme de l'énergie cinétique $D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi$, l'expression :

$$\left((gW_\mu^3 - g'B_\mu) (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \right) = g^2 W_\mu^3 W_\mu^3 - gg' W_\mu^3 B^\mu - gg' B_\mu W_\mu^3 + g'^2 B_\mu B^\mu$$

contenue dans (I), car il y a mélange des champs de jauge :

$$W_{\mu\nu}^3, \quad B^{\mu\nu}, \quad W_3^{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}.$$

Pour se faire, on pose:

$$\begin{pmatrix} Z_{\mu\nu} \\ A_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{\mu\nu}^3 \\ B_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} W_{\mu\nu}^3 \\ B_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mu\nu} \\ A_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

de même que :

$$\begin{pmatrix} W^{\mu\nu}_3 \\ B^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{\mu\nu} \\ A^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

avec :

* θ l'angle de mélange des bosons W^3 et B appelé *angle de Weinberg* θ_w dont de fait :

$$W_{\mu\nu}^3 W^{\mu\nu}_3 = (\cos \theta Z_{\mu\nu} + \sin \theta A_{\mu\nu}) (\cos \theta Z^{\mu\nu} + \sin \theta A^{\mu\nu})$$

$$W_{\mu\nu}^3 W^{\mu\nu}_3 = \cos^2 \theta Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \sin^2 \theta A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \sin \theta \cos \theta Z_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \sin \theta \cos \theta Z^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

et :

$$W_{\mu}^3 W^{\mu}_3 = \cos^2 \theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \sin^2 \theta A_{\mu} A^{\mu} + \sin \theta \cos \theta Z_{\mu} A^{\mu} + \sin \theta \cos \theta Z^{\mu} A_{\mu}$$

De même :

$$B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = (-\sin \theta Z_{\mu\nu} + \cos \theta A_{\mu\nu}) (-\sin \theta Z^{\mu\nu} + \cos \theta A^{\mu\nu})$$

$$B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \sin^2 \theta Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \cos^2 \theta A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \sin \theta \cos \theta Z_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \sin \theta \cos \theta Z^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

et :

$$B_{\mu} B^{\mu} = \sin^2 \theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \cos^2 \theta A_{\mu} A^{\mu} - \sin \theta \cos \theta Z_{\mu} A^{\mu} - \sin \theta \cos \theta Z^{\mu} A_{\mu}$$

→ **Développement du Lagrangien L_2 :**

Nous savons que :

$$L_2 = (1) - (2) - (3) - (4) - (5)$$

$$L_2 = D_{\mu} \Phi^{\dagger} D^{\mu} \Phi - V(\Phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W^{\mu\nu}_k - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$L_2 = D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi - \left(-\mu^2 H^2 - \frac{\mu^2 H^3}{\eta\sqrt{2}} - \frac{\mu^2 H^4}{8\eta^2} + \frac{\mu^2 \eta^2}{2} \right) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W_k^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$L_2 = D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi + \mu^2 H^2 + \frac{\mu^2 H^3}{\eta\sqrt{2}} + \frac{\mu^2 H^4}{8\eta^2} - \frac{\mu^2 \eta^2}{2} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W_k^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Et d'après ce qui précède :

$$L_2 = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{4} g^2 \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right)^2 W_\mu^+ W_-^\mu + \frac{1}{4} \left((g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) \left(\eta + \frac{H}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) + \dots$$

$$+ \mu^2 H^2 + \frac{\mu^2 H^3}{\eta\sqrt{2}} + \frac{\mu^2 H^4}{8\eta^2} - \frac{\mu^2 \eta^2}{2}$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W_k^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{g^2 \eta^2}{4} W_\mu^+ W_-^\mu + \frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) + \dots$$

$$+ \mu^2 H^2 + \frac{\mu^2 H^3}{\eta\sqrt{2}} + \frac{\mu^2 H^4}{8\eta^2} - \frac{\mu^2 \eta^2}{2}$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W_1^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W_2^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu H \partial^\mu H + 2 \mu^2 H^2) + \frac{g^2 \eta^2}{4} W_\mu^+ W_-^\mu + \frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) + \dots$$

$$+ \frac{\mu^2 H^3}{\eta\sqrt{2}} + \frac{\mu^2 H^4}{8\eta^2} - \frac{\mu^2 \eta^2}{2}$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W_1^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W_2^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

Or :

$$\frac{g^2 \eta^2}{4} W_\mu^+ W_-^\mu = \frac{g^2 \eta^2}{4} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) (W_1^\mu - i W_2^\mu)$$

$$\frac{g^2 \eta^2}{4} W_\mu^+ W_-^\mu = \frac{g^2 \eta^2}{4} (W_\mu^1 W_1^\mu - i W_\mu^1 W_2^\mu + i W_\mu^2 W_1^\mu + W_\mu^2 W_2^\mu)$$

$$\frac{g^2 \eta^2}{4} W_\mu^+ W_-^\mu = \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^1 W_1^\mu + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^2 W_2^\mu + \dots$$

Par conséquent :

$$L_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu H \partial^\mu H + 2 \mu^2 H^2) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W_1^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^1 W_1^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W_2^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^2 W_2^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) + \dots
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \\
& \quad - \frac{1}{4} (\cos^2 \theta Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \sin^2 \theta A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \sin \theta \cos \theta Z_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \sin \theta \cos \theta Z^{\mu\nu} A_{\mu\nu}) \\
& \quad - \frac{1}{4} (\sin^2 \theta Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \cos^2 \theta A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \sin \theta \cos \theta Z_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \sin \theta \cos \theta Z^{\mu\nu} A_{\mu\nu}) \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \\
& \quad - \frac{1}{4} (\cos^2 \theta Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \sin^2 \theta Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\sin^2 \theta A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \cos^2 \theta A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}) \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
& \quad - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} .
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu H \partial^\mu H + 2 \mu^2 H^2) + \dots \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W_1^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^1 W_1^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W_2^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^2 W_2^\mu + \dots \\
& - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\
& + \frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) + \dots
\end{aligned}$$

Il nous reste à travailler sur le terme $\frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu)$:

L'angle θ (il s'agit de l'angle θ_W de Weinberg introduit antérieurement) associé au mélange des champs de jauge $W_{\mu\nu}^3$ et $B_{\mu\nu}$:

$$\cos\theta = \frac{g}{\sqrt{g'^2+g^2}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{g'}{\sqrt{g'^2+g^2}} .$$

Cet angle θ procède à une rotation des axes du repère $(W_{\mu\nu}^3, B_{\mu\nu})$ vers $(Z_{\mu\nu}, A_{\mu\nu})$ des interactions physiquement observables, comme le montre la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

De l'expression de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, nous déduisons :

$$g'^2 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} g^2 .$$

Sachant que :

$$W_{\mu}^3 W_{\mu}^3 = \cos^2\theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \sin^2\theta A_{\mu} A^{\mu} + \sin\theta \cos\theta Z_{\mu} A^{\mu} + \sin\theta \cos\theta Z^{\mu} A_{\mu}$$

et que :

$$B_{\mu} B^{\mu} = \sin^2\theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \cos^2\theta A_{\mu} A^{\mu} - \sin\theta \cos\theta Z_{\mu} A^{\mu} - \sin\theta \cos\theta Z^{\mu} A_{\mu} ,$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{\eta^2}{4} (g W_{\mu}^3 - g' B_{\mu}) (g W_{\mu}^3 - g' B^{\mu}) = \frac{\eta^2}{4} [g^2 W_{\mu}^3 W_{\mu}^3 + g'^2 B_{\mu} B^{\mu} - g'g W_{\mu}^3 B^{\mu} - g'g B_{\mu} W_{\mu}^3]$$

$$\frac{\eta^2}{4} (g W_{\mu}^3 - g' B_{\mu}) (g W_{\mu}^3 - g' B^{\mu}) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^2}{4} [g^2(\cos^2\theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \sin^2\theta A_{\mu} A^{\mu} + \sin\theta \cos\theta Z_{\mu} A^{\mu} + \sin\theta \cos\theta Z^{\mu} A_{\mu}) \\ & + g'^2(\sin^2\theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \cos^2\theta A_{\mu} A^{\mu} - \sin\theta \cos\theta Z_{\mu} A^{\mu} - \sin\theta \cos\theta Z^{\mu} A_{\mu}) \\ & + \dots] . \end{aligned}$$

En injectant :

$$g'^2 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} g^2$$

dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{\eta^2}{4} (g W_{\mu}^3 - g' B_{\mu}) (g W_{\mu}^3 - g' B^{\mu}) = \frac{\eta^2 g^2}{4} [\cos^2\theta Z_{\mu} Z^{\mu} + \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta} Z_{\mu} Z^{\mu} + 2 \sin^2\theta A_{\mu} A^{\mu}] + \dots$$

$$\frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) = \frac{\eta^2 g^2}{4} \left[\frac{\cos^4 \theta Z_\mu Z^\mu + \sin^4 \theta Z_\mu z^\mu}{\cos^2 \theta} + 2 \sin^2 \theta A_\mu A^\mu \right] + \dots$$

$$\frac{\eta^2}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W_3^\mu - g' B^\mu) = \frac{\eta^2 g^2}{4 \cos^2 \theta} Z_\mu Z^\mu + \frac{\eta^2 g^2}{2} \sin^2 \theta A_\mu A^\mu + \dots$$

D'où :

$$L_2 = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{2} (2 \mu^2) H^2 + \dots$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W^{\mu\nu}_1 + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^1 W^\mu_1 + \dots$$

$$- \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W^{\mu\nu}_2 + \frac{1}{2} \frac{g^2 \eta^2}{2} W_\mu^2 W^\mu_2 + \dots$$

$$- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\eta^2 g^2}{2 \cos^2 \theta} Z_\mu Z^\mu + \dots$$

$$- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 \sin^2 \theta A_\mu A^\mu + \dots$$