



**HAL**  
open science

# Prise en compte des hydrométéores dans un schéma d'assimilation variationnel ensembliste appliqué au modèle de prévision AROME

Mayeul Destouches

► **To cite this version:**

Mayeul Destouches. Prise en compte des hydrométéores dans un schéma d'assimilation variationnel ensembliste appliqué au modèle de prévision AROME. Météorologie. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2020. Français. NNT : 2020TOU30268 . tel-03256053

**HAL Id: tel-03256053**

**<https://theses.hal.science/tel-03256053v1>**

Submitted on 10 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Mayeul Destouches**

le jeudi 17 décembre 2020

**Titre :**

Prise en compte des hydrométéores dans un schéma d'assimilation  
variationnel ensembliste appliqué au modèle de prévision AROME

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED SDU2E : Océan, Atmosphère, Climat

**Unité de recherche :**

Centre National de Recherches Météorologiques – UMR 3589

**Directeur/trice(s) de Thèse :**

Thibaut Montmerle

Yann Michel

**Jury :**

Jean-Pierre Chaboureau (président du jury)

Mark Buehner (rapporteur)

Emmanuel Cosme (rapporteur)

Marc Bocquet (examineur)

Véronique Ducrocq (examinatrice)

Arthur Vidard (examineur)

Thibaut Montmerle (directeur de thèse)

Yann Michel (co-directeur de thèse)



---

# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Thibaut Montmerle et Yann Michel, mes directeurs de thèse. Je pense que je n'aurais pas pu espérer meilleur encadrement, tant sur les plans scientifiques et techniques que sur le plan humain. Merci en particulier à Yann pour son souci de clarté et de rigueur, et à Thibaut pour son pragmatisme.

Ce manuscrit a bénéficié de plusieurs relectures partielles ou totales. En particulier, je remercie les rapporteurs de cette thèse, Mark Buehner et Emmanuel Cosme.

Je remercie également les membres de mon comité de thèse, Jean-François Caron et Philippe Arbogast, pour leurs conseils quant à la conduite de mes travaux. J'ai aussi eu la chance de pouvoir échanger régulièrement au cours de ma thèse avec Benjamin Ménétrier, à propos de localisation de covariances ou de l'implémentation de son outil informatique BUMP. Je l'en remercie particulièrement, les occasions sont rares de pouvoir échanger librement sur des sujets aussi techniques.

Au-delà des aspects techniques et scientifiques, nombreux sont ceux qui ont permis que cette thèse se déroule sereinement. Mes pensées vont aux supports administratif et informatique du CNRM, ainsi qu'aux responsables de l'École Doctorale SDU2E. Merci à Nadia et à Claire qui ont su repérer ma lassitude de milieu de thèse, et insuffler un nouvel élan à mon travail de recherche. Merci aux doctorants, post-doctorants, stagiaires ou contractuels qui ont contribué à faire de cette thèse une belle expérience. Un grand merci à chacun des membres de l'équipe Recyf, pour les échanges autour d'un gâteau, d'un café ou d'une grille de mots croisés. Ce sont ces moments qui donnent leur saveur aux longues journées de travail, encore merci.

Enfin, je n'oublie pas ceux qui ont rendu cette thèse possible en amont de ces trois années de travail. Je pense à Adrien Deschamps, qui m'a fait découvrir le monde fascinant de l'assimilation de données et guidé dans la rédaction de mon premier rapport scientifique lors d'un stage au CNES, mais aussi à Claude Basdevant qui m'a aidé à obtenir une bourse ministérielle pour la thèse. Un immense merci aux nombreux professeurs qui m'ont transmis un peu de leur passion, de leur savoir et de leurs savoir-faire, depuis le CP jusqu'au Master 2, en sciences ou en humanités. Je vous suis extrêmement redevable et reconnaissant.

Plus personnellement, merci à ma famille, particulièrement à mon père pour m'avoir transmis le goût du calcul et des sciences. Merci à mes colocs de l'association Lazare, auprès de qui j'ai trouvé pendant mes deux premières années de thèse un espace de décompression et de joie. Merci enfin à ma femme Hermine pour son soutien constant, en particulier pendant ces derniers mois de rédaction.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 AROME et les hydrométéores</b>	<b>13</b>
1.1 Les hydrométéores, variables microphysiques du modèle AROME . . . . .	14
1.1.1 Représentation de l’atmosphère . . . . .	14
1.1.2 Les variables pronostiques . . . . .	15
1.1.3 Le schéma microphysique . . . . .	17
1.2 Les observations des hydrométéores . . . . .	23
1.2.1 Observations <i>in situ</i> . . . . .	23
1.2.2 Observations indirectes depuis le sol . . . . .	23
1.2.3 Observations indirectes depuis l’Espace . . . . .	25
1.3 L’assimilation de données . . . . .	27
1.3.1 Un problème important mais non-trivial . . . . .	28
1.3.2 Formalisme général de l’assimilation de données . . . . .	30
1.3.3 Techniques de résolution du problème bayésien . . . . .	36
1.3.4 L’assimilation opérationnelle dans AROME . . . . .	43
1.4 Assimiler les hydrométéores ? État de l’art . . . . .	46
1.4.1 Motivations . . . . .	46
1.4.2 Difficultés pour analyser les hydrométéores . . . . .	52
1.4.3 Les méthodes indirectes . . . . .	53
1.4.4 Les méthodes directes . . . . .	57
<b>2 Les schémas EnVar</b>	<b>65</b>
2.1 Estimation d’une matrice B ensembliste . . . . .	66
2.1.1 L’Ensemble D’Assimilations AROME . . . . .	66
2.1.2 Estimateur standard de la covariance . . . . .	68
2.2 La localisation . . . . .	69
2.2.1 Atténuer le bruit d’échantillonnage . . . . .	70
2.2.2 Augmenter le rang de la matrice de covariance . . . . .	75
2.2.3 Utiliser une matrice localisée dans la pratique . . . . .	78
2.2.4 Variantes, extensions et alternatives à la localisation . . . . .	80
2.2.5 Le revers de la médaille . . . . .	83
2.3 Le bon schéma pour les hydrométéores ? . . . . .	84
2.3.1 Modélisation des erreurs d’ébauche . . . . .	85

---

2.3.2	Non-gaussianité, non-linéarités, positivité . . . . .	85
2.3.3	Ajouter une variable de contrôle . . . . .	87
2.4	Ajout des hydrométéores dans l'EnVar AROME . . . . .	88
2.4.1	Covariances verticales moyennes . . . . .	89
2.4.2	Fonctions de structure . . . . .	93
2.4.3	Analyses et incréments . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Quelle localisation pour les hydrométéores ?</b>	<b>103</b>
3.1	Tenants et aboutissants de l'article . . . . .	103
3.1.1	Contexte et problématique . . . . .	103
3.1.2	Choix de la méthode d'estimation de la localisation optimale . . . . .	104
3.1.3	Adaptation de la méthode de Ménétrier <i>et al.</i> (2015) aux hydrométéores	106
3.1.4	Diagnostics de localisation . . . . .	108
3.1.5	Conséquences pour l'EnVar AROME avec hydrométéores . . . . .	108
3.2	Article . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Évaluation par expériences d'assimilation cyclées</b>	<b>143</b>
4.1	Introduction . . . . .	143
4.2	Configuration des expériences . . . . .	144
4.2.1	Période d'étude . . . . .	144
4.2.2	Cyclage . . . . .	145
4.2.3	Analyses et prévisions . . . . .	146
4.2.4	Schémas de localisation . . . . .	147
4.3	Choix des observations de référence et des scores . . . . .	153
4.3.1	Vapeur d'eau et nuages . . . . .	153
4.3.2	Cumuls de pluie . . . . .	157
4.3.3	Variables classiques . . . . .	159
4.4	Résultats . . . . .	160
4.4.1	Impact de l'initialisation des hydrométéores . . . . .	160
4.4.2	Avec d'autres schémas de localisation . . . . .	168
4.5	Conclusion . . . . .	172
	<b>Conclusion</b>	<b>179</b>
	<b>A Rang de l'estimateur de la covariance</b>	<b>185</b>
	<b>B Factorisation du produit de Schur</b>	<b>187</b>
	<b>C Appliquer une matrice B localisée</b>	<b>190</b>
	<b>D Localisation inter-variables avec le VDL</b>	<b>191</b>
	<b>E Suppléments de scores</b>	<b>196</b>
	<b>Table des sigles et acronymes</b>	<b>204</b>

Bibliographie

206

# Introduction

Pleuvra-t-il demain ? Que ce soit pour planifier des activités de plein air ou pour choisir un moyen de transport pour se rendre au travail, nombreux sont ceux que la question intéresse. Au-delà des simples choix du quotidien, la prévision des précipitations est d'une importance cruciale pour nombre d'événements météorologiques extrêmes. En France métropolitaine, il peut s'agir d'orages et des chutes de grêle associées, ou plus particulièrement, sur le pourtour méditerranéen, d'épisodes de précipitations intenses entraînant crues et inondations. Les dommages qui en résultent sont souvent conséquents, d'autant plus si l'événement n'a pas pu être anticipé correctement. On pense évidemment aux pertes humaines, parfois vitales, mais également aux dégâts matériels et économiques : récoltes perdues, bâtiments endommagés, infrastructures de transports dégradées etc. Météo-France, opérateur de l'État en charge de la sécurité météorologique des personnes et des biens, investit un effort de recherche conséquent dans la prévision de ces épisodes dits méditerranéens, comme en témoigne par exemple la campagne de mesure HyMeX<sup>1</sup> sur le cycle de l'eau en Méditerranée et le programme de recherche associé (Ducrocq *et al.*, 2013).

Sans même évoquer de tels extrêmes, prévoir correctement les précipitations est une nécessité pour nombre d'activités économiques. C'est le cas également des prévisions de couverture nuageuse ou de visibilité. La gestion du trafic aérien dans les aéroports est très sensible à la présence de brouillard, tandis que la prévision de production d'énergie photovoltaïque dépend de l'ensoleillement et donc des nuages.

En météorologie, pluie, neige, grêle, nuages et de manière générale tous les condensats d'eau atmosphérique sont regroupés sous la dénomination d'*hydrométéores*. Leur prévision est un problème aussi difficile que l'enjeu est important.

« Le temps qu'il fait » peut être défini comme un ensemble de paramètres météorologiques définis à chaque instant et en tout point du globe : la température bien entendu, mais aussi la pression, le vent, l'humidité, la présence ou non de pluie, nuages, brouillard, neige etc. L'évolution spatio-temporelle de ces variables est régie par les lois de la physique et de la mécanique des fluides. Puisqu'il n'existe pas de solutions analytiques connues aux équations associées, celles-ci sont résolues numériquement par des modèles de prévision numérique du temps (PNT).

Depuis la première prévision numérique du temps par Charney *et al.* en 1950, la précision des modèles de PNT n'a cessé de croître (Bauer *et al.*, 2015). Une partie de ces améliorations provient de la réduction des erreurs de modélisation, inhérentes (entre autres) à la nécessaire discrétisation spatiale et temporelle des champs météorologiques. Ainsi,

---

1. *Hydrological cycle in the Mediterranean Experiment*

les premières générations de modèles de PNT utilisaient des résolutions de l'ordre de la centaine de kilomètres, et ne pouvaient pas représenter explicitement les phénomènes de fine échelle, tels que les processus à l'origine des nuages convectifs. Seul l'effet intégré de ces processus dits sous-maille était donc estimé par des *paramétrisations physiques* : fraction de couverture nuageuse dans la maille, libération globale de chaleur latente etc. L'augmentation des puissances de calcul, allant de pair avec des discrétisations spatiales et temporelles de plus en plus fines, a permis de représenter explicitement toujours plus de phénomènes de fine échelle (Dudhia, 2014).

Ainsi, à Météo-France, une avancée majeure a été la mise en service en 2008 du modèle à échelle convective AROME-France<sup>1</sup> pour la prévision en France métropolitaine. Sa résolution horizontale (2,5 km à l'époque de son lancement) le classe parmi les modèles résolvant la convection, c'est-à-dire capables de représenter explicitement les mouvements internes horizontaux et verticaux à l'intérieur des nuages de plus grandes tailles, tels les cumulonimbus. Les résolutions quasi-kilométriques de tels modèles ne les dispensent pas de l'utilisation de paramétrisations physiques. Cela explique par exemple l'utilisation dans AROME de variables sous-maille comme les contenus spécifiques en hydrométéores. L'utilisation de ces modèles à haute résolution sur des domaines géographiques limités est actuellement l'approche la plus performante pour les prévisions de précipitations et des hydrométéores en général (Clark *et al.*, 2016).

Ces avancées en modélisation n'expliquent qu'une partie des progrès observés depuis quelques décennies. Aux réductions des erreurs de modélisation s'ajoutent en effet un meilleur contrôle des incertitudes liées à l'état initial du modèle. Les premiers modèles à aire limitée se contentaient d'interpoler les champs de modèles globaux à résolution plus grossière. Il est rapidement apparu qu'une initialisation plus précise était requise. Par exemple, Ducrocq *et al.* montrent dès 2002 que l'initialisation à fine échelle des champs d'humidité spécifique est cruciale pour la prévision des événements convectifs. Les méthodes d'initialisation utilisées à l'échelle globale ont ainsi été adaptées à des échelles spatiales et temporelles plus courtes, et à des réseaux d'observation plus denses. Le domaine ainsi ouvert à la recherche est celui de l'*assimilation de données à échelle convective*.

Le processus d'assimilation de données vise à obtenir une estimation la plus précise possible de l'état de l'atmosphère. Pour cela, une *ébauche*, généralement la prévision météorologique la plus récente, est combinée aux dernières observations atmosphériques disponibles. L'estimation en résultant, appelée *analyse*, peut ainsi servir d'état initial à une prévision. Cette combinaison du modèle et des observations n'est optimale que si leurs erreurs respectives sont correctement estimées et modélisées au cours du processus.

Les centres de prévision européens ont été pionniers au tournant du XX<sup>e</sup> siècle pour

---

1. Application de la Recherche à l'Opérationnel à Mésos-Échelle

l'assimilation de données à l'échelle globale, notamment avec l'utilisation de systèmes variationnels 4D (4DVar). Ces systèmes ont été implémentés en premier lieu au CEPMMT<sup>1</sup> (Rabier *et al.*, 2000), puis à Météo-France (Gauthier et Thépaut, 2001). Ils définissent l'analyse comme minimisant l'écart entre la trajectoire du modèle et les observations. Leur coût numérique est abordable, tout en permettant de traiter des faibles non-linéarités liées aux modèles de prévision ou à l'observation non directe des variables du modèle. Ces méthodes variationnelles ont été adaptées dans les années 2000 aux modèles à aire limitée (Fischer *et al.*, 2005, par exemple), et leur usage est maintenant répandu dans de nombreux centres opérationnels (Gustafsson *et al.*, 2018). L'utilisation d'une approche 4D est cependant complexifiée par la non-linéarité accrue des modèles de prévision à ces échelles spatiales, de sorte que la plupart des centres utilisent une version 3D de l'approche variationnelle (3DVar).

Le modèle AROME bénéficie ainsi d'une étape d'assimilation de données de type 3DVar, à fréquence horaire depuis 2015 (Brousseau *et al.*, 2016). Contrairement aux autres variables du modèle, les variables d'hydrométéores ne font pas partie des *variables de contrôle* de l'assimilation, c'est-à-dire que les hydrométéores de l'ébauche ne sont pas ajustés lors de ce processus. Plusieurs difficultés scientifiques ou techniques expliquent pourquoi cela n'est pas encore le cas pour la prévision opérationnelle, alors que cette perspective était déjà discutée par Fischer *et al.* en 2005.

Une première difficulté est liée au fait que les observations et la modélisation des hydrométéores impliquent de nombreux phénomènes fortement non-linéaires, alors que l'assimilation de données s'est historiquement développée dans un cadre linéaire (ou quasi-linéaire) et gaussien. Par ailleurs, les erreurs d'observation et de prévision impliquées sont fortement non-gaussiennes, du fait de la positivité des contenus spécifiques par exemple, mais aussi du fait des erreurs de déplacement, combinées au caractère discontinu des champs d'hydrométéores. Enfin, les erreurs de prévisions (ou erreurs d'ébauche) des hydrométéores dépendent fortement de la position géographique et de la situation météorologique au moment de l'assimilation (dépendance à l'écoulement). La tâche d'estimer et de modéliser de telles erreurs pour un système de si grande dimension s'avère complexe.

Plusieurs éléments laissent cependant penser qu'il est temps d'envisager l'ajout des hydrométéores dans la variable de contrôle de l'analyse pour AROME.

D'une part, le nombre d'observations sensibles aux hydrométéores ne cesse d'augmenter : observations de radars, observations satellitaires dans le domaine micro-onde par exemple. Or, l'absence de variables de contrôle d'hydrométéores est une des raisons qui complique, voire empêche, l'assimilation directe de ces observations dans AROME.

Par ailleurs, l'augmentation des capacités de calcul rend désormais abordables des schémas d'assimilation variationnels avec estimation ensembliste des covariances d'erreurs

---

1. Centre Européen de Prévision Météorologique à Moyen Terme

d'ébauche, les schémas EnVar. Apparue dans d'autres communautés sous le nom de filtres de Kalman d'ensemble (Evensen, 1994, 2003), les méthodes ensemblistes utilisent un ensemble de prévision pour estimer une covariance empirique des erreurs d'ébauche. L'utilisation de ces méthodes dans un cadre variationnel, donc sans modification majeure des systèmes opérationnels existants, qui sont basés pour la plupart sur ce même cadre variationnel, a donné lieu aux méthodes EnVar (Hamill et Snyder, 2000 ; Lorenc, 2003 ; Buehner, 2005). Ces méthodes permettent aujourd'hui d'envisager une estimation et modélisation aisées de covariances d'erreurs d'ébauche dépendantes de l'écoulement pour les hydrométéores.

Le premier chapitre de cette thèse présente les bases de l'assimilation de données, et son utilisation pour le modèle AROME. Une revue des techniques d'initialisation des hydrométéores pour la prévision à échelle convective est également proposée.

Le deuxième chapitre clôt la partie introductive de la thèse, en présentant plus en détail les méthodes EnVar, qui permettent d'envisager une description dépendante de l'écoulement pour les covariances d'erreurs d'ébauche avec hydrométéores. Le nombre de prévisions utilisées pour échantillonner l'erreur d'ébauche est nécessairement réduit, contraint par le coût numérique conséquent d'un tel processus. Dans la pratique, seuls des ensembles de quelques dizaines de prévisions peuvent être actuellement envisagés. Les estimations des covariances d'erreurs sont donc bruitées, en particulier pour les corrélations à longue distance. Pour améliorer l'estimation sans augmenter la taille de l'ensemble, des techniques de filtrage du bruit d'échantillonnage sont nécessaires. L'approche couramment utilisée est la localisation des covariances (Houtekamer et Mitchell, 2001), qui consiste à multiplier les covariances par un facteur décroissant de 1 pour les faibles séparations, à 0 pour les corrélations à longue distance. La décroissance de ce facteur de localisation est généralement déterminée par une fonction de localisation, dépendant par exemple de la distance entre les points du modèle considérés.

La qualité de l'analyse obtenue dans un schéma EnVar dépend grandement d'une estimation correcte de la fonction de localisation. Le chapitre 3 s'attelle à la question de la localisation optimale pour les variables hydrométéores. Pour cela, la méthode de Ménétrier *et al.* (2015a) est adaptée et des diagnostics sont fournis sur plusieurs cas d'étude avec hydrométéores. Plusieurs schémas de localisation adaptés aux hydrométéores sont ainsi recommandés, reposant sur des applications de localisation dépendante de la variable ou de l'échelle spatiale. Ce travail a fait l'objet d'une publication récente acceptée au *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* (Destouches *et al.*, 2020).

Le chapitre 4 qui conclut cette thèse est dédié à des expériences d'assimilation et de prévision sur une période estivale de trois mois. Seules les observations opérationnellement assimilées dans AROME-France sont utilisées. En particulier aucune observation directe d'hydrométéores n'est utilisée. Un ajustement des variables d'hydrométéores de l'ébauche reste possible pendant l'assimilation, puisque les erreurs d'ébauche sont corrélées entre

les hydrométéores et les variables classiques, elles-mêmes contraintes par les observations. L'impact de l'ajout des hydrométéores sur les prévisions est ainsi quantifié. Divers schémas de localisation proposés au chapitre 3 sont également évalués, et leurs performances respectives sont discutées.

Différentes perspectives sont enfin données, à court terme dans un contexte de prévision immédiate, et à plus long terme dans un contexte plus général de prise en compte d'observations sensibles aux hydrométéores dans les systèmes d'assimilation de données utilisées en PNT.





# AROME et les hydrométéores

---

*Nous ouvrons ce chapitre introductif en présentant le modèle AROME, et en particulier ses variables d'hydrométéores. Les variables d'AROME doivent être initialisées, ce qui nous amène à définir le cadre général de l'assimilation de données. Le cas particulier de l'initialisation des hydrométéores est ensuite développé et un état de l'art des pratiques en la matière est proposé.*

## Sommaire

---

1.1	Les hydrométéores, variables microphysiques du modèle AROME . . . . .	<b>14</b>
1.1.1	Représentation de l'atmosphère . . . . .	14
1.1.2	Les variables pronostiques . . . . .	15
1.1.3	Le schéma microphysique . . . . .	17
1.2	Les observations des hydrométéores . . . . .	<b>23</b>
1.2.1	Observations <i>in situ</i> . . . . .	23
1.2.2	Observations indirectes depuis le sol . . . . .	23
1.2.3	Observations indirectes depuis l'Espace . . . . .	25
1.3	L'assimilation de données . . . . .	<b>27</b>
1.3.1	Un problème important mais non-trivial . . . . .	28
1.3.2	Formalisme général de l'assimilation de données . . . . .	30
1.3.3	Techniques de résolution du problème bayésien . . . . .	36
1.3.4	L'assimilation opérationnelle dans AROME . . . . .	43
1.4	Assimiler les hydrométéores ? État de l'art . . . . .	<b>46</b>
1.4.1	Motivations . . . . .	46
1.4.2	Difficultés pour analyser les hydrométéores . . . . .	52
1.4.3	Les méthodes indirectes . . . . .	53
1.4.4	Les méthodes directes . . . . .	57

---

## 1.1 Les hydrométéores, variables microphysiques du modèle AROME

### 1.1.1 Représentation de l'atmosphère

AROME (Application de la Recherche à l'Opérationnel à Méso-Echelle) est le modèle numérique utilisé depuis 2008 par Météo-France pour la prévision opérationnelle du temps en France métropolitaine (Seity *et al.*, 2011). Des prévisions à J+1 et J+2 sont fournies cinq fois par jour par le modèle (*réseaux* de 0 h, 3 h, 6 h, 12 h et 18 h TU), avec une échéance variable allant jusqu'à 48 h.

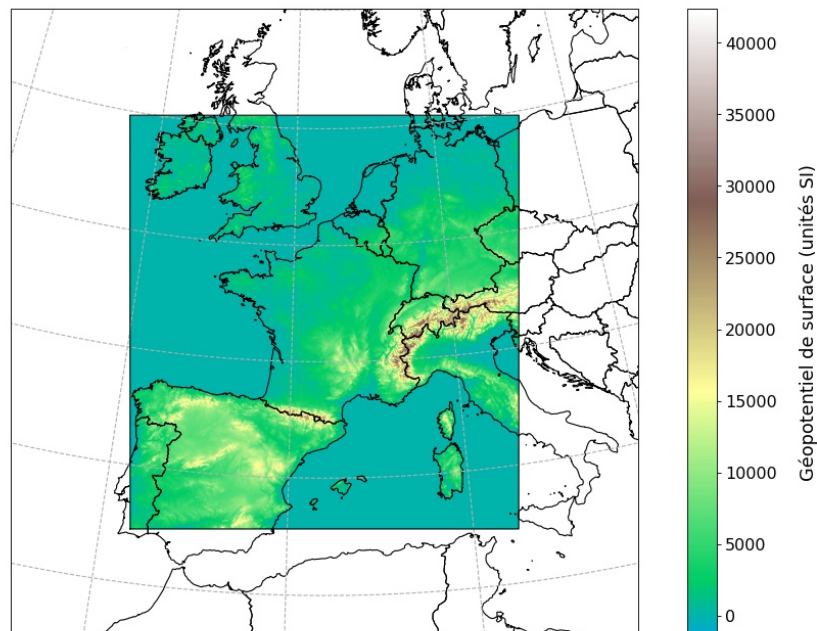


FIGURE 1.1 – Le domaine géographique du modèle AROME. Les couleurs correspondent au géopotential de surface utilisé par le modèle.

Le domaine géographique du modèle, centré sur la France, est montré en figure 1.1. Les conditions aux bords sont fournies par le modèle global ARPEGE (Action de Recherche Petite Echelle Grande Echelle), également maintenu par Météo-France. Une bande de 20 km de largeur est prévue sur les bords du domaine AROME pour le couplage (à sens unique) depuis ARPEGE, via la méthode de relaxation de Davies (Davies, 1976).

L’atmosphère est représentée dans AROME sous forme discrétisée, horizontalement, verticalement et temporellement. Le domaine réduit d’AROME lui permet d’envisager un maillage plus fin que celui d’ARPEGE, tout en gardant un coût numérique abordable. Sa résolution horizontale de 1,3 km depuis 2015 (Brousseau *et al.*, 2016) le classe ainsi dans la catégorie des modèles résolvant explicitement la convection profonde. AROME s’affranchit de l’hypothèse hydrostatique généralement appliquée à grande échelle.

Verticalement, l’atmosphère est discrétisée en 90 niveaux, plus resserrés vers la surface qu’en altitude, de manière à mieux représenter les phénomènes de basses couches. AROME utilise une coordonnée verticale hybride. Proche de la surface, les niveaux verticaux correspondent à une élévation au-dessus du relief, ils « suivent le terrain ». Au sommet du modèle, ils coïncident avec les isobares. Entre-deux, la coordonnée verticale est une combinaison linéaire de l’élévation et de la pression hydrostatique.

À titre indicatif, chacun des 90 niveaux du modèle comprend  $1440 \times 1536$  points de grille (Brousseau *et al.*, 2016). Cela implique qu’environ 1,32 Go de mémoire sont requis pour stocker en double précision une variable définie en tout point du maillage 3D.

La représentation de l’atmosphère dans AROME est aussi discrétisée temporellement, avec une résolution de 50 s. À chaque pas de temps, le modèle calcule l’évolution de treize variables, dynamiques, thermodynamiques ou liées au contenu en eau atmosphérique, appelées **variables pronostiques** du modèle.

### 1.1.2 Les variables pronostiques

On peut diviser ces variables pronostiques en deux catégories. Les variables du noyau dynamique décrivent les phénomènes se produisant à des échelles supérieures à celles de la grille, tandis que les variables de la physique décrivent les phénomènes d’échelles inférieures (phénomènes sous-maille).

#### Les variables du noyau dynamique

L’évolution de ces variables est décrite par le système des équations d’Euler, dans le cas non-hydrostatique et compressible (Bubnová *et al.*, 1995). Ces équations expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l’énergie. Les variables du noyau dynamique (ou variables de la dynamique) sont :

- la pression de surface  $P_s$ , la température  $T$  et les deux composantes  $u$  et  $v$  du vent horizontal<sup>1</sup> ;

---

1. Ou bien la divergence et la vorticité de l’écoulement — ce qui est équivalent, à un vent moyen près.

- deux variables non-hydrostatiques, liées à la pression et à la divergence verticale de l'écoulement.

Les variables du noyau dynamique peuvent aussi être représentées dans un espace spectral. Pour chaque niveau vertical, les variables sont artificiellement étendues au nord et à l'est du domaine de manière à rendre le champ bipériodique. L'écriture spectrale des champs est ensuite obtenue par une double décomposition de Fourier avec troncature elliptique.

L'intégration temporelle du noyau dynamique se base sur un schéma semi-implicite qui permet d'affaiblir la contrainte de stabilité numérique de Courant-Friedrichs-Lewy <sup>1</sup>, en traitant de façon implicite les ondes les plus rapides (ondes acoustiques et de gravité). L'utilisation d'un schéma semi-lagrangien pour traiter les termes d'advection permet d'affaiblir encore cette contrainte et ainsi d'utiliser un pas de temps de 50 s correspondant à un nombre CFL bien supérieur à l'unité (Bénard *et al.*, 2010).

Notons pour finir que la résolution « effective » d'AROME n'est pas celle de la grille  $\Delta x = 1,3$  km, mais plutôt de l'ordre de  $9\Delta x$  à  $10\Delta x$  (Ricard *et al.*, 2012). Une partie de cette différence peut être reliée à l'utilisation du schéma semi-implicite.

## Les variables de la physique

Ces variables représentent des quantités qui varient à des échelles inférieures à la maille du modèle. À chaque pas de temps, on ne peut donc qu'estimer l'évolution de quantités intégrées à l'échelle d'une maille :

- une variable d'énergie cinétique turbulente (TKE, *Turbulent Kinetic Energy*) ;
- les variables de la microphysique nuageuse (ou simplement microphysique s'il n'y a pas d'ambiguïté). Elles décrivent l'eau atmosphérique sous tous ses états. Au champ d'humidité spécifique  $q_v$  s'ajoutent 5 champs de contenu en eau condensée, appelés champs d'hydrométéores (ou simplement hydrométéores). Il s'agit des contenus en eau nuageuse liquide  $q_l$ , cristaux de glace  $q_i$ , pluie  $q_r$ , neige  $q_s$  et graupel  $q_g$ , présentés plus avant dans la section suivante.

Ces variables ne sont pas représentées spectralement, mais à chaque point du maillage (représentation « points de grille »). Elles sont soumises à chaque pas de temps à une étape d'advection et de diffusion, sauf pour l'humidité spécifique et la TKE (qui sont uniquement advectées). En ce sens, les variables de la physique sont influencées par la dynamique du modèle. Inversement, elles agissent aussi sur l'évolution des variables du

---

1. Contrainte liant vitesse  $c$  des ondes ou des vents les plus rapides à la discrétisation spatio-temporelle, en stipulant que le nombre CFL  $c\Delta t/\Delta x$  doit être inférieur à 1.

noyau dynamique via les processus sous-maille (rayonnement, turbulence, microphysique nuageuse, interactions avec la surface, convection). Ces processus sont modélisés colonne par colonne par la physique du modèle, dont les principales paramétrisations proviennent du modèle de recherche Més0-NH (Lafore *et al.*, 1998 ; Lac *et al.*, 2018). Ces processus peuvent modifier à chaque pas de temps les valeurs des treize variables pronostiques, y compris les variables dynamiques que sont le vent et la température.

### 1.1.3 Le schéma microphysique

#### 1.1.3.a Représentation des hydrométéores

Le schéma microphysique est la partie de la physique du modèle qui décrit à chaque pas de temps les processus liés à l’eau atmosphérique, tels que la condensation, l’évaporation ou la formation de la pluie dans un nuage par exemple. Dans AROME, le schéma utilisé est ICE3, décrit en détail par Lascaux *et al.* (2006). Ce schéma regroupe les hydrométéores en cinq catégories (ou classes), listées dans le tableau 1.1. Pour une catégorie donnée, la composition d’une maille est décrite par son contenu massique uniquement, ce qui classe ICE3 parmi les schémas microphysiques à un moment. Le contenu massique est adimensionnel, en kg d’eau condensée par kg d’air sec dans ICE3 ou par kg d’air total dans le reste du modèle.

Catégorie	Terme anglais	Variable représentative	
		ICE3	reste du modèle
eau nuageuse liquide	<i>cloud water</i>	$r_c$	$q_l$
cristaux de glace	<i>ice crystals</i>	$r_i$	$q_i$
pluie	<i>rain</i>	$r_r$	$q_r$
neige	<i>snow</i>	$r_s$	$q_s$
graupel	<i>graupel</i>	$r_g$	$q_g$

TABLE 1.1 – Les catégories d’hydrométéores dans ICE3 et AROME. Les hydrométéores sont représentés par leurs rapports de mélange dans ICE3 (masse d’hydrométéores par masse d’air sec) et par leurs contenus spécifiques dans le reste du modèle (masse d’hydrométéores par masse d’air total). Le graupel désigne toute particule glacée suffisamment dense.

Parmi les hydrométéores, les deux premières catégories du tableau correspondent à des particules nuageuses, tandis que les trois dernières correspondent à des particules précipitantes. La durée de vie de ces dernières est normalement plus courte, puisque leur sédimentation les appelle à disparaître peu à peu lors de leur chute vers le bas du modèle.

On note également que trois classes d'hydrométéores sont employées pour décrire les hydrométéores sous phase glacée, ce qui explique le nom d'ICE3. Une extension ICE4 existe également, qui ajoute une classe de grêle à ICE3.

La figure 1.2 montre la distribution du contenu en hydrométéores dans une prévision d'AROME, niveau par niveau. On note que chaque classe a une zone de résidence privilégiée dans l'atmosphère, les hydrométéores liquides étant généralement à des altitudes plus faibles que les hydrométéores solides.

Cette classification en 5 catégories a évidemment une part d'arbitraire, et reste relativement simpliste. Elle est limitante par exemple pour les calculs de transfert radiatif atmosphérique, la catégorie « cristaux de glace » regroupant en réalité des dizaines de types de cristaux aux propriétés optiques distinctes. Le choix de décrire chaque classe par son contenu massique est également une approximation. En effet, une description plus réaliste (mais plus coûteuse) décrirait le contenu en hydrométéores par classe mais aussi par taille d'hydrométéore (Khain *et al.*, 2015). ICE3 fait l'hypothèse simplificatrice que les particules sont réparties au sein de chaque classe selon une distribution Gamma généralisée : le nombre  $n(D)dD$  de particules de diamètre<sup>1</sup> compris entre  $D$  et  $D + dD$  est donné par :

$$n(D)dD = N \frac{\alpha \lambda^{\alpha \nu}}{\Gamma(\nu)} D^{\alpha \nu - 1} e^{-(\lambda D)^\alpha} dD \quad (1.1)$$

avec  $N$  la concentration en nombre de particules (en  $m^{-3}$ ),  $\alpha$  et  $\nu$  des paramètres de forme propres à chaque catégorie,  $\lambda$  un paramètre de pente et  $\Gamma$  la fonction Gamma. Pour les variables précipitantes, on choisit  $\alpha = \nu = 1$  ce qui donne une distribution exponentielle (ou de Marshall-Palmer) :

$$n_{\text{precip}}(D)dD = N \lambda e^{-\lambda D} dD. \quad (1.2)$$

Pour les 5 catégories, le paramètre de pente  $\lambda$  et la concentration en nombre de particules  $N$  sont diagnostiqués conjointement à partir du rapport de mélange  $r$ . Puisque deux paramètres ne peuvent pas être déterminés à partir d'une seule variable scalaire, on fait aussi appel à des relations empiriques entre  $\lambda$  et  $N$ , relations dépendant parfois de l'environnement thermodynamique (pour les cristaux de glace). Quelques exemples de distributions de taille sont données en figure 1.3.

Puisque la masse de chaque particule est proportionnelle au cube de son diamètre, le rapport de mélange  $r$  d'une maille est proportionnel<sup>2</sup> au moment d'ordre 3 de la distribution de taille :  $r \propto \int D^3 n(D)dD$ . Pour chaque catégorie, la distribution de taille est donc décrite par un unique paramètre qui se trouve être son moment d'ordre 3, d'où la dénomination

---

1. Le diamètre maximal pour les particules non-sphériques

2. Le facteur de proportionnalité inclue la masse volumique de l'air et un facteur empirique propre à chaque catégorie.

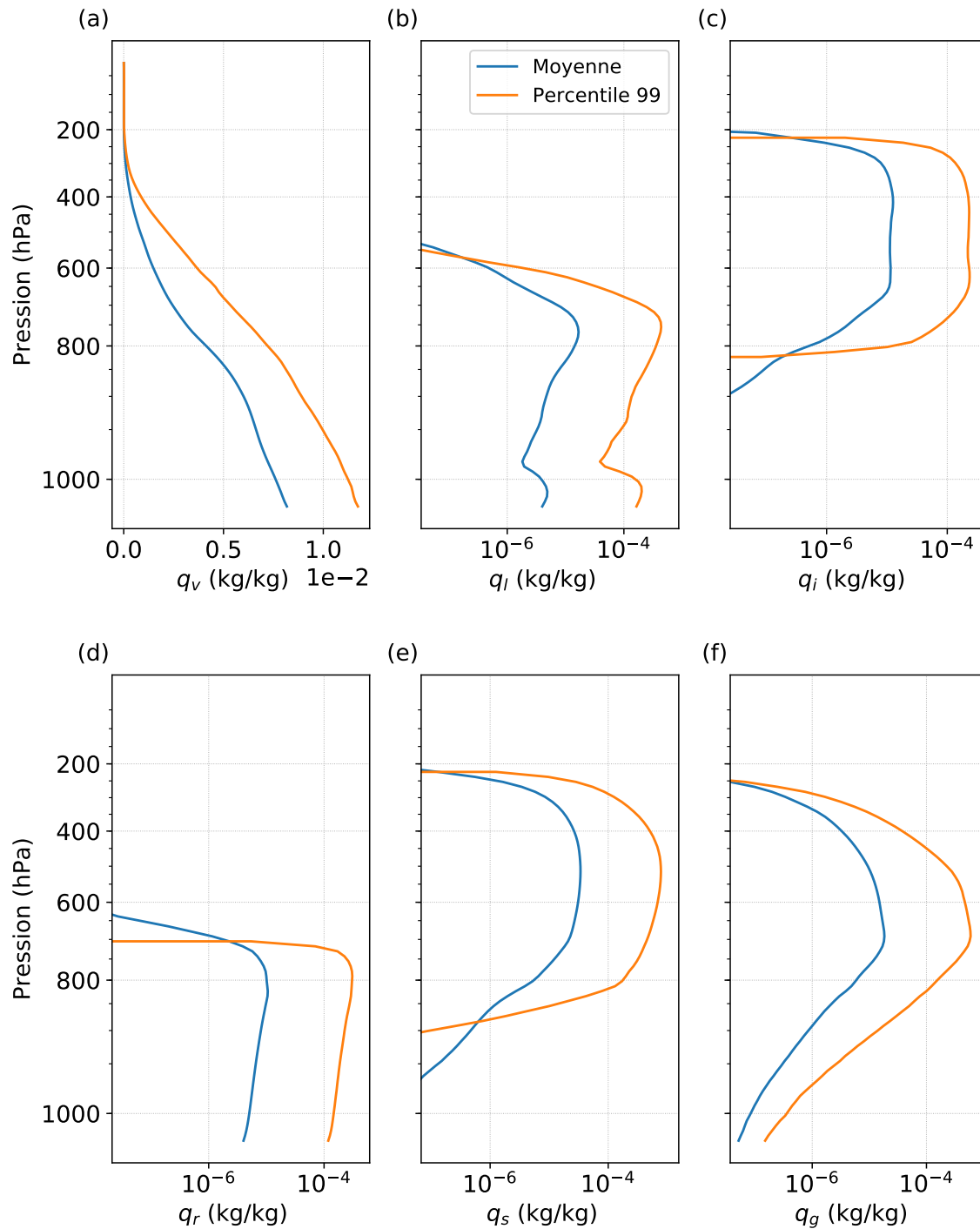


FIGURE 1.2 – Moyenne et 99<sup>e</sup> percentile du contenu spécifique par niveau pour l’humidité spécifique (a) et les hydrométéores (b-f). L’échelle est logarithmique pour les hydrométéores, afin de pouvoir montrer sur une même figure la moyenne et le 99<sup>e</sup> percentile du contenu. La prévision choisie est valide le 21 mai 2018 à 15 h TU, jour d’orages convectifs sur la France métropolitaine.



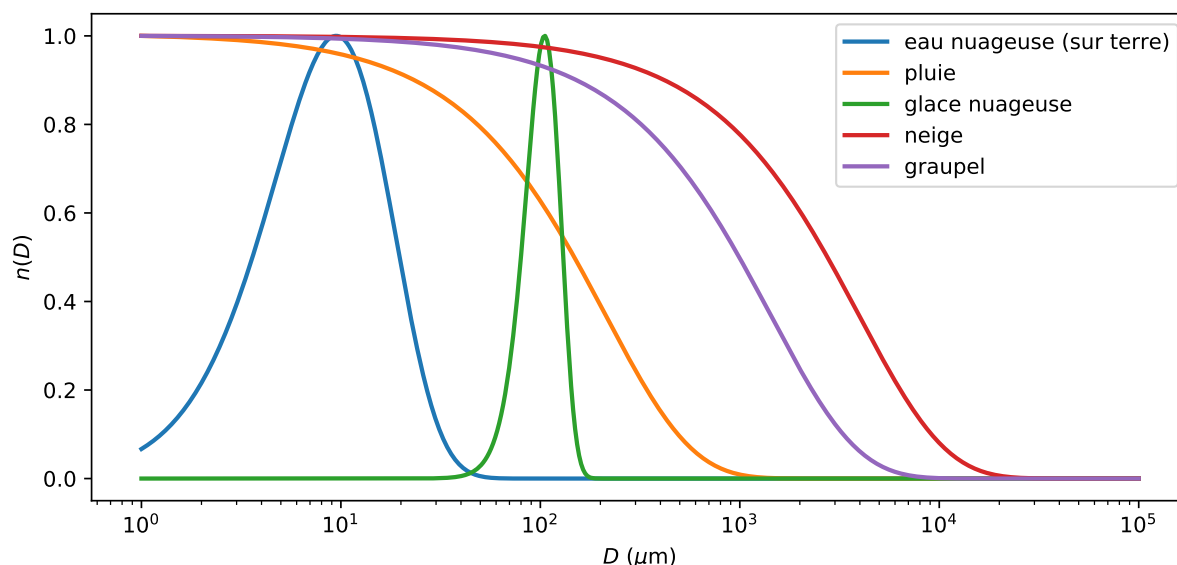


FIGURE 1.3 – Exemples de distributions de tailles typiques pour différentes catégories d’hydrométéores, calculées pour chaque catégorie avec les valeurs de  $\lambda$  et  $N$  utilisées dans AROME. La coordonnée verticale est normalisée à 1 et l’échelle horizontale est logarithmique. La forme des distributions varie avec le rapport de mélange, et peut donc différer de ce qui est montré ici. Les cinq distributions présentées ne correspondent pas à une même parcelle d’air.

de « schéma à un moment <sup>1</sup> ».

Le schéma à deux moments LIMA (*Liquid Ice Multiple Aerosols*, Vié *et al.* (2016)) prolonge le schéma microphysique ICE3 en rajoutant comme variables pronostiques la concentration  $N$  en nombre de particules, pour l’eau nuageuse, la glace nuageuse et la pluie <sup>2</sup>. Les deux moments utilisés sont ainsi le moment d’ordre 3 et le moment d’ordre 0 ( $N = \int n(D)dD$ ) de la distribution de taille. Le remplacement d’ICE3 par LIMA dans AROME est actuellement à l’étude. LIMA permet une meilleure représentation des distributions de taille et donc des processus microphysiques, et permet de prendre en compte des phénomènes tels que l’impact des aérosols en tant que noyaux de condensation (non modélisé par ICE3).

On peut relever deux raisons pour lesquelles LIMA n’est pas encore le schéma opérationnel pour la microphysique nuageuse dans AROME :

- Le coût numérique (nombre d’opérations, temps de calcul, mémoire requise) augmente avec la complexité du schéma (nombre de variables et nombre de processus décrits).
- La validation du schéma dans AROME n’est encore que partielle, et son apport n’est

1. Dans la pratique, l’ordre 3 est utilisé seulement pour obtenir  $r_c$  et  $r_r$ . Pour les autres variables, l’exposant varie de 1,9 (flocons de neige, quasi bidimensionnels) à 2,8 (graupel). Il n’en reste pas moins que chaque catégorie est décrite par un unique moment (non-nécessairement entier) de la distribution de taille.

2. LIMA ajoute aussi trois variables pronostiques liées aux aérosols.

pas encore véritablement démontré.

### 1.1.3.b Processus microphysiques

Une trentaine de processus physiques sont décrits par ICE3 et schématiquement représentés en figure 1.4. Outre la sédimentation des hydrométéores (SED en figure 1.4), le schéma microphysique modélise à chaque pas de temps les interactions possibles entre hydrométéores. Par exemple, deux particules identiques peuvent entrer en collision pour en former une troisième, possiblement différente. C'est le cas pour l'autoconversion des nuageuses en pluie (AUTO), qui se produit par collision puis coalescence des gouttelettes. Une particule peut aussi grossir par déposition de vapeur (DEP), ou interaction avec un autre hydrométéore (par exemple agrégation AGG de la glace sur la neige). Du graupel peut se former à partir de deux autres hydrométéores distincts (RIM :  $r_c + r_s \rightarrow r_g$ )... Les processus de changement d'état sont également décrits : condensation (CND), évaporation (EVAP), nucléation (HON et HEN), fonte (MLT) etc.

Ces processus sont traités dans un ordre précis, qui a son importance puisqu'un type d'hydrométéore peut apparaître ou disparaître complètement lors d'un processus. Tous ces processus dépendent évidemment de l'environnement thermodynamique. Inversement, la microphysique peut influencer sur les variables thermodynamiques, notamment via les processus de condensation liquide et d'évaporation, qui engendrent respectivement des libérations locales de chaleur latente et des refroidissements locaux. Elle a aussi un impact indirect via les autres paramétrisations physiques : la quantité de nuage est déterminante pour les schémas de rayonnement par exemple, qui influent à leur tour sur les champs de température.

On retiendra que le schéma microphysique est particulièrement non-linéaire par rapport aux variables du modèle, avec de nombreux effets de seuils. Par exemple, la vapeur d'eau peut se condenser dès que la pression partielle de vapeur atteint la pression de vapeur saturante (elle-même fonction non-linéaire de la pression et de la température). Plus généralement, tous les changements de phase des hydrométéores sont soumis à des seuils liés à l'environnement thermodynamique.

On notera pour finir quelques particularités des variables d'hydrométéores :

- elles sont positives ou nulles ;
- leurs statistiques sont non gaussiennes (du fait de leur positivité et des non-linéarités du modèle) ;
- on observe dans la pratique que ces variables ont des échelles spatiales et temporelles plus courtes que les variables thermodynamiques.

Comme nous le verrons plus loin (section 1.4.2), ces caractéristiques sont partagées par

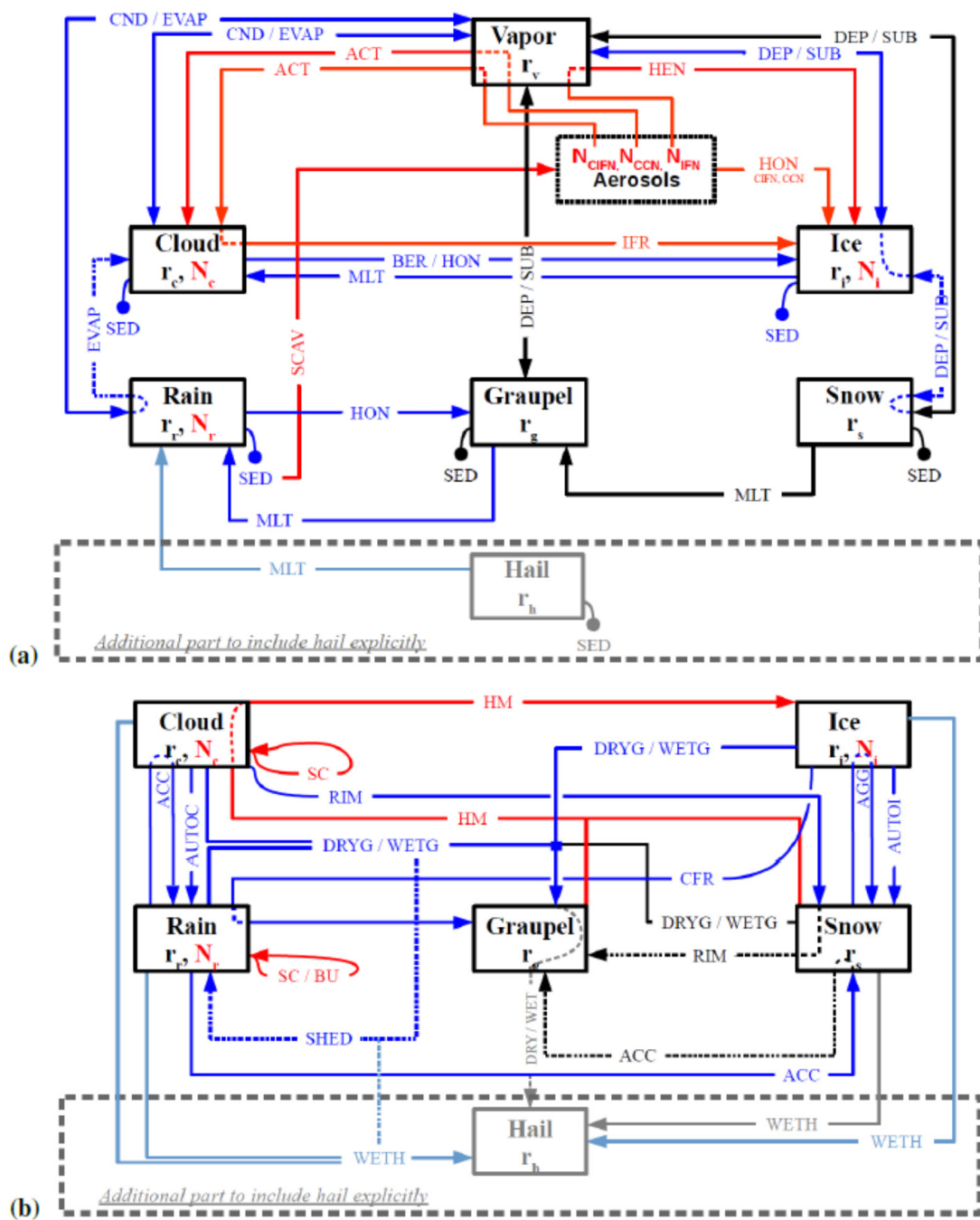


FIGURE 1.4 – Description schématique des schémas microphysiques ICE3, ICE4 et LIMA. (a) Tous les processus sauf processus de collection ; (b) Processus de collection (interactions entre hydrométéores).  $r_v$  désigne le rapport de mélange de l’humidité,  $r_h$  celui de la grêle dans ICE4, et les autres variables sont définies dans le tableau 1.1. Les encadrés en traits tiretés correspondent aux ajouts d’ICE4. Les ajouts de LIMA à ICE3 sont notés en rouge, les modifications de processus déjà existants en bleu, et ce qui est identique de ICE3 à LIMA en noir. Quelques uns des acronymes décrivant les processus présentés sont définis dans le texte ; on se rapportera à Lac *et al.* (2018) dont est extraite cette figure pour une description plus exhaustive.

les erreurs de prévision du modèle et ont des implications importantes dans un contexte d'assimilation de données.

## 1.2 Les observations des hydrométéores

De nombreuses observations sensibles à la présence d'hydrométéores dans l'atmosphère sont effectuées quotidiennement par divers instruments de mesure. Elles ne représentent qu'une partie des observations sensibles à l'eau atmosphérique, qui ne sont elles-mêmes qu'une sous-partie des observations météorologiques. Comme nous le verrons dans la section suivante, elles sont classiquement les observations les plus difficiles à assimiler car elles font intervenir de nombreux processus non-linéaires qui complexifient leur simulation à partir des variables du modèle. De fait, peu d'entre elles sont à ce jour prises en compte pour analyser les états initiaux des modèles. Certaines observations décrites dans cette section seront utilisées comme références dans la validation des développements effectués au cours de cette thèse.

Nous reprenons ici la classification de Bannister *et al.* (2019), qui distingue les observations *in situ* des observations indirectes, elles-mêmes séparées en observations depuis le sol ou depuis l'Espace.

### 1.2.1 Observations *in situ*

Parmi les instruments d'observation *in situ*, seuls les pluviomètres des stations météorologiques au sol sont vraiment sensibles aux hydrométéores, précipitants en l'occurrence. Actuellement, plus de 2000 pluviomètres sont opérés par Météo-France (550 stations du réseau RADOME<sup>1</sup>, 1550 du réseau RCE<sup>2</sup>). Ils sont répartis sur une large partie du territoire métropolitain<sup>3</sup> à une résolution temporelle de cinq minutes.

### 1.2.2 Observations indirectes depuis le sol

En France, ce sont les radars météorologiques qui occupent la place majeure dans cette catégorie. On se rapportera à Doviak et Zrníc (1993) pour une description complète

---

1. Réseau d'Acquisition de Données et d'Observations Météorologiques Etendu

2. Réseau Climatologique d'Etat

3. Bien que la surface effectivement couverte par les pluviomètres soit extrêmement faible, voir Kidd *et al.* (2017).

des différents aspects de la mesure radar non traités ici. Le réseau de radars ARAMIS<sup>1</sup> (Tabary *et al.*, 2013), qui couvre l'essentiel du territoire métropolitain est montré en figure 1.5. Le programme européen OPERA<sup>2</sup> (Saltikoff *et al.*, 2019) permet à Météo-France d'accéder également aux données radar des pays voisins. Chacun des radars du réseau scanne l'atmosphère environnante de manière volumique, par azimuth et par angle d'élévation (angle entre le faisceau radar et le sol). La fréquence varie de 5 à 15 minutes selon le nombre d'élévations considérés, avec une résolution au moins kilométrique.

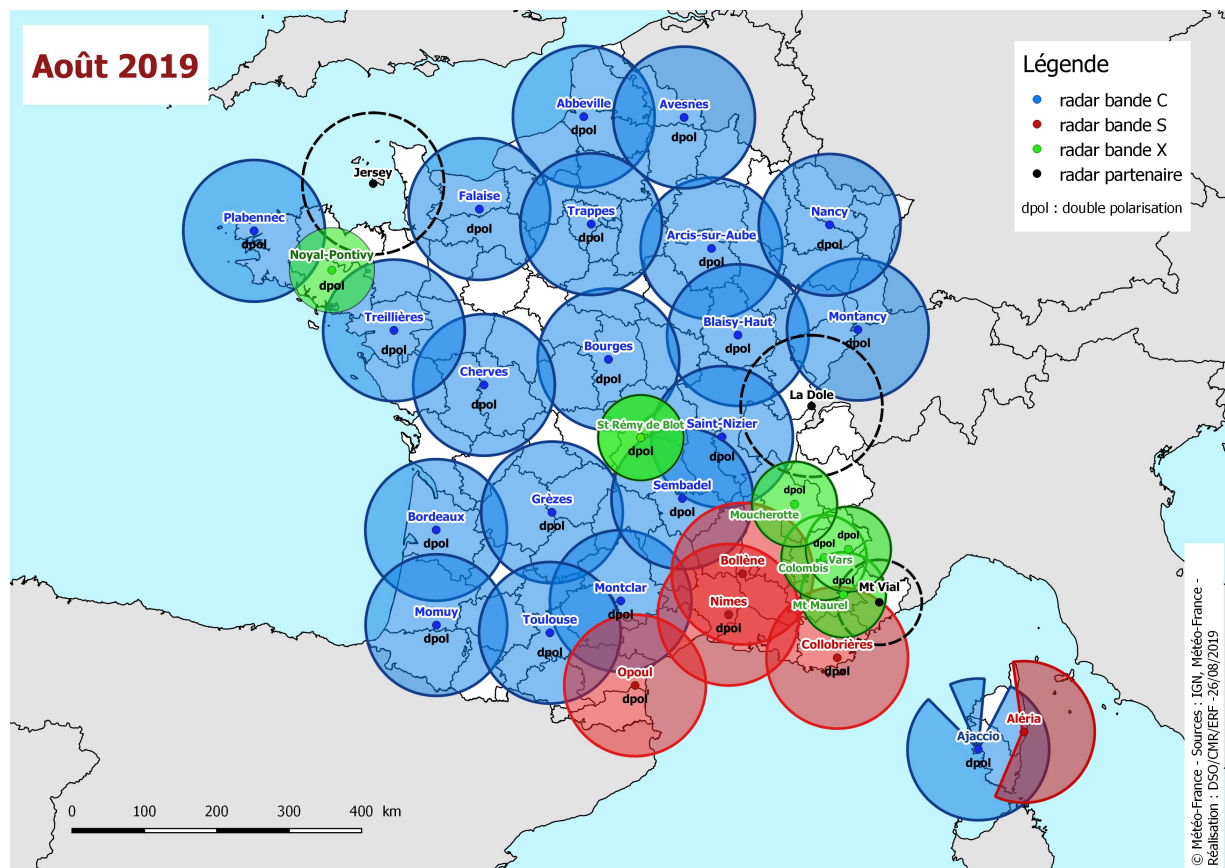


FIGURE 1.5 – Le réseau de radars météorologiques ARAMIS, en août 2019.

Les radars du réseaux ARAMIS sont sensibles aux cinq types d'hydrométéores, excepté les gouttelettes d'eau nuageuse (de diamètre trop réduit). Les réflectivités obtenues sont une mesure de la rétro-diffusion du rayonnement dans un volume contenant ces hydrométéores. Les réflectivités dépendent essentiellement de la taille et du nombre d'hydrométéores. La différence de fréquence entre onde émise et onde rétro-diffusée permet également de déduire une mesure de la vitesse radiale des particules, aussi appelée vitesse Doppler.

1. Application Radar A la Météorologie Infra-Synoptique
2. *Operational Programme for the Exchange of weather Radar Information*

Des radars de nouvelle génération, dits à double polarisation, émettent des ondes électromagnétiques polarisées verticalement, en plus de la direction horizontale classique. Les informations supplémentaires qui en découlent permettent de mieux décrire la géométrie des cibles (forme et orientation des hydrométéores), ainsi que de discriminer certains hydrométéores liquides ou solides. Cette technologie permet également de corriger l'atténuation que subit le signal lors de sa propagation, atténuation qui peut être sévère dans les zones de fortes précipitations.

En plus de fournir une description tri-dimensionnelle des contenus en hydrométéores d'un système précipitant, les radars météorologiques sont également utilisés pour restituer la pluie au sol (appelée « lame d'eau »). La réflectivité peut effectivement être reliée aux cumuls de pluie, via diverses hypothèses sur la distribution de taille des gouttes de pluie dans un volume et leurs interactions avec le signal. Cette information peut par la suite être combinée avec des mesures par pluviomètre, par exemple en utilisant des méthodes de spatialisation comme dans le produit ANTILOPE<sup>1</sup> (Champeaux *et al.*, 2009), opérationnellement produit à Météo-France. Les lames d'eau ANTILOPE ont été utilisées dans cette thèse comme référence pour valider les expériences du chapitre 4.

On peut noter aussi dans certaines stations du réseau RADOME la présence de célo mètres, qui visent à mesurer la hauteur de la base des nuages. Contrairement aux observations radars, les observations des célo mètres ne sont pas utilisées pour initialiser les prévisions d'AROME.

### 1.2.3 Observations indirectes depuis l'Espace

Nombre d'instruments satellitaires sont sensibles aux nuages et aux hydrométéores. On peut distinguer les satellites géostationnaires des satellites défilants, à orbite basse, qui peuvent passer jusqu'à plusieurs fois par jour au-dessus du même point à la surface du globe. Pour un modèle à aire limitée comme AROME, la haute résolution temporelle permise par les satellites géostationnaires est particulièrement intéressante. Les instruments embarqués à bord des satellites peuvent être distingués en deux catégories : les instruments actifs et les instruments passifs. Nous donnons un exemple d'instrument par type d'observations.

#### Instruments actifs

Parmi les instruments actifs, les radars embarqués sont sensibles aux hydrométéores, et en particulier aux précipitations. On peut citer par exemple le radar DPR<sup>2</sup>, embarqué

---

1. ANalyse par spaTiaLisation hOraire des PrEcipitations

2. *Dual-frequency Precipitation Radar*

sur le satellite défilant *GPM<sup>1</sup> Core Observatory*. Ses mesures permettent typiquement de retrouver le rayon effectif des gouttelettes nuageuses et de la glace nuageuse, le contenu en eau liquide nuageuse, l'altitude de changement de phase de l'eau, et les précipitations liquides et solides.

Il existe également des LIDAR<sup>2</sup> embarqués sur satellites. Leur principe de fonctionnement est sensiblement le même que celui des radars, si ce n'est que l'onde émise est un faisceau laser (donc cohérent et polarisé) dans le domaine du visible ou proche infrarouge. Le LIDAR CALIOP<sup>3</sup>, embarqué à bord du satellite CALIPSO<sup>4</sup> utilise ainsi les longueurs d'onde 532 nm et 1064 nm, ce qui lui permet de déterminer (entre autres) l'épaisseur optique des nuages, l'altitude du sommet des nuages, le contenu intégré et local en cristaux de glace.

### Instruments passifs

Les instruments passifs mesurent le rayonnement électromagnétique naturellement émis par la Terre et l'atmosphère, ou le rayonnement solaire réfléchi. Les radiances mesurées au sommet de l'atmosphère peuvent aussi s'exprimer en température de brillance<sup>5</sup>. Les instruments passifs peuvent être distingués selon leur résolution spectrale : les imageurs privilégient la résolution spatiale à la résolution spectrale, à l'inverse des sondeurs. Ils peuvent aussi être classés selon leur domaine spectral. Selon la longueur d'onde, les radiances seront sensibles à différents types et différentes tailles d'hydrométéores. On dispose ainsi d'observations :

- Dans le domaine visible (0,4  $\mu\text{m}$  à 0,8  $\mu\text{m}$ ), sensibles aux nuages. C'est le cas par exemple de l'imageur SEVIRI<sup>6</sup>, embarqué sur les satellites géostationnaires de la série MSG<sup>7</sup>. Cet instrument comporte 2 canaux dans les domaines visible (0,6  $\mu\text{m}$  et 0,81  $\mu\text{m}$ ) et 10 dans le proche-infrarouge (sensibles à la vapeur d'eau, de 1,64  $\mu\text{m}$  à 13,4  $\mu\text{m}$ ), pour un champ de vision instantané (IFOV<sup>8</sup>) de 4,8 km. Ces mesures permettent en particulier de retrouver une information sur la couverture nuageuse, le type de nuage, la pression et la température au sommet des nuages, et le contenu intégré (sur la verticale) en vapeur d'eau. Dans cette thèse, les températures de

---

1. *Global Precipitation Measurement*

2. *Light Detection And Ranging*

3. *Cloud-Aerosol Lidar with Orthogonal Polarisation*

4. *Cloud-Aerosol Lidar and Infrared Pathfinder Satellite Observations*

5. Pour une fréquence donnée, la température de brillance est la température du corps noir qui émettrait à cette intensité lumineuse à cette fréquence.

6. *Spinning Enhanced Visible Infra-Red Imager*

7. *Meteosat Second Generation*

8. *Instantaneous Field Of View*

brillance de SEVIRI ont été utilisées comme produit de référence pour évaluer les expériences du chapitre 4.

- Dans le domaine infrarouge (0,8  $\mu\text{m}$  à 100  $\mu\text{m}$ ). Le sondeur IASI<sup>1</sup> (embarqué sur satellites européens héliosynchrones, à orbites basses, de la série METOP<sup>2</sup>) en est un exemple, avec ses 8461 canaux et un IFOV de 4 km  $\times$  12 km. Outre le fait que sa très haute résolution spectrale permet de sonder verticalement l'atmosphère dans de nombreuses bandes d'absorption (telles celles de la vapeur d'eau, du CO, du CO<sub>2</sub> ou de l'ozone), cet instrument permet de retrouver la température et la pression aux sommets des nuages, et peut fournir une information sur la couverture nuageuse.
- Dans le domaine micro-ondes (0,1 mm à 100 mm). Un exemple est fourni par l'instrument GMI<sup>3</sup> (13 canaux, IFOV variable de 4,4 km  $\times$  7,2 km à 19 km  $\times$  32 km selon le canal). Les canaux de GMI sont montrés en figure 1.6, avec les variables observées. La figure 1.7 permet de visualiser ce que peut détecter un satellite tel que GMI, ainsi que la trace au sol d'un satellite défilant.

Pour plus de détails sur les instruments sensibles à l'eau atmosphérique, et sur les défis propres à l'assimilation de leurs observations, le lecteur intéressé peut se référer à l'article de revue de Bannister *et al.* (2019).

Plus généralement, rapporter l'information des observations météorologiques à la représentation discrétisée d'un modèle numérique est un problème délicat. C'est le rôle de l'assimilation de données, que nous allons maintenant présenter.

## 1.3 L'assimilation de données

Du fait de la nature chaotique de l'atmosphère, les prévisions numériques du temps finissent par diverger de la réalité si elles n'y sont pas rappelées régulièrement par des observations. L'assimilation de données permet ce « rappel », en combinant de manière optimale les observations et le modèle. Elle s'appuie pour cela sur la caractérisation des erreurs du modèle et des erreurs d'observation. Nous présentons dans cette section les bases théoriques de l'assimilation de données et proposons un aperçu des méthodes d'assimilation. La présentation n'est pas exhaustive et se focalise sur ce qui est nécessaire pour comprendre les schémas d'assimilations variationnels ensemblistes, qui seront présentés en détail au prochain chapitre.

---

1. *Infrared Atmospheric Sounding Interferometer*
2. *Meteorological OPERational satellites*
3. *GPM Microwave Imager*



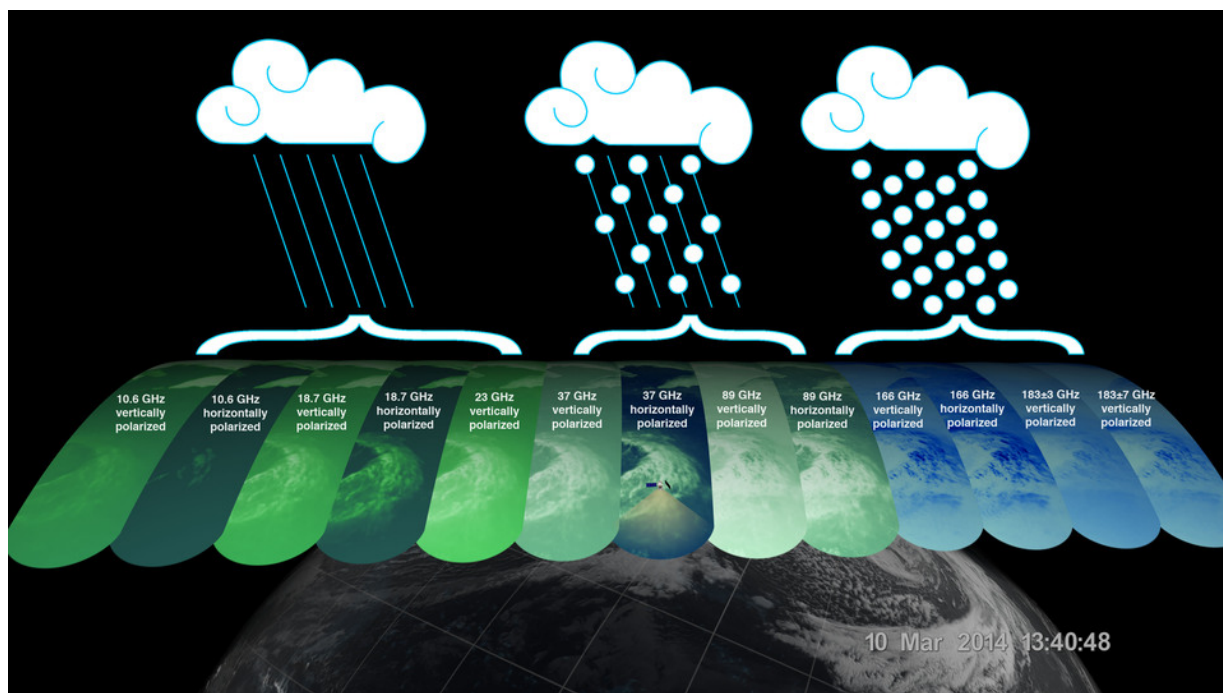


FIGURE 1.6 – Sensibilité des canaux de l’instrument GMI aux hydrométéores. GMI est sensible à la vapeur d’eau et à la neige (hautes fréquences, à droite), aux nuages liquides, aux précipitations de glace et de neige dans les nuages (fréquences moyennes, au centre) et aux pluies intenses et modérées (basses fréquences, à gauche). Source : <https://gpm.nasa.gov/resources/images/13-channels-gpm-microwave-imager-gmi> (consultée le 31/08/2020).

### 1.3.1 Un problème important mais non-trivial

Le modèle AROME décrit au début de ce chapitre peut être représenté par une fonction  $\mathcal{M}$  non-linéaire, agissant sur un vecteur  $\mathbf{x}_t$  contenant la représentation discrète des treize variables du modèle à l’instant  $t$  pour en donner la valeur à l’instant  $t + \Delta t$  (où  $\Delta t$  est le pas de temps du modèle). Un tel modèle doit avoir un point de départ, c’est le problème de l’*initialisation* temporelle du modèle :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+\Delta t} &= \mathcal{M}(\mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}_{t_0} &= ? \end{cases},$$

lequel problème est résolu par la méthode de l’assimilation de données.

Comme son nom l’indique, l’assimilation de données est le processus qui permet d’« assimiler », de fusionner de manière cohérente toutes les mesures météorologiques (observations)

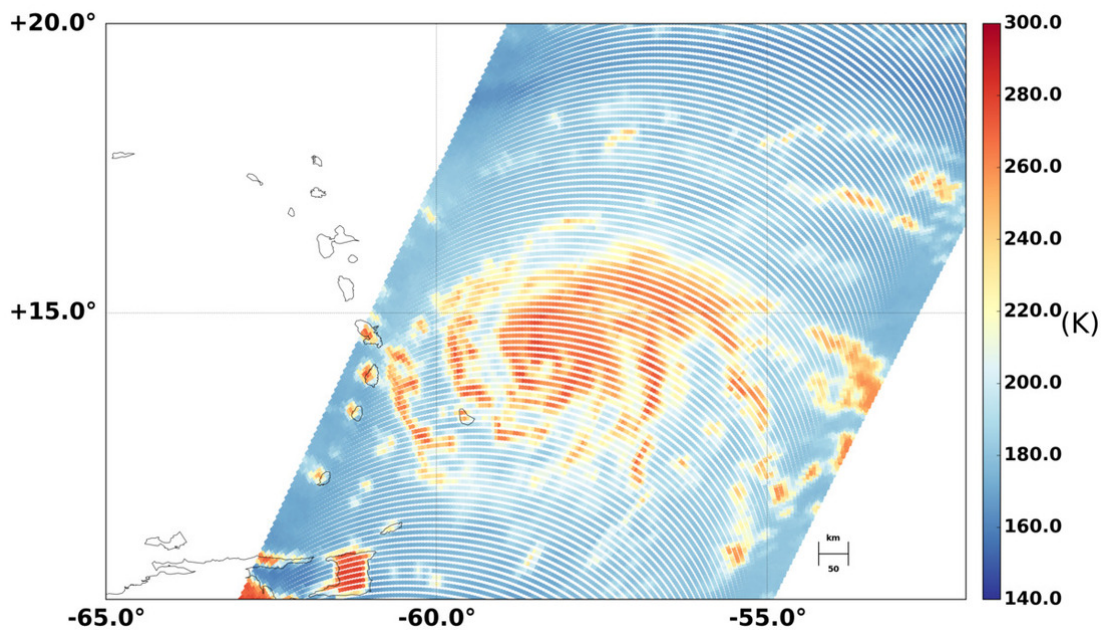


FIGURE 1.7 – Le cyclone tropical Maria vu par le canal 7 de GMI (36,64 GHz polarisé horizontalement) le 18 septembre 2017. La largeur de fauchée de GMI est de 885 km. Chaque point indique la position géographique du centre des pixels de l'instrument. Le canal 7 est particulièrement sensible aux hydrométéores sous phase liquide, à savoir les précipitations et l'eau liquide nuageuse. [Image fournie par Marylis Barreyat, CNRM].

pour obtenir une estimation de l'état de l'atmosphère qui puisse servir d'état initial  $\mathbf{x}_{t_0}$  à une prévision numérique. Cette étape n'est pas immédiate, et plus complexe qu'une simple interpolation des données. En effet :

- Le réseau d'observation ne couvre pas tout le domaine. Les observations sont plus éparpillées dans l'atmosphère qu'à la surface, plus rares au-dessus de l'océan que sur terre. La couverture spatiale peut aussi varier temporellement, c'est le cas pour les satellites défilants par exemple.
- Les mesures disponibles ont rarement un équivalent dans la représentation du modèle. Une mesure est souvent plus locale qu'une maille (cas d'une station météorologique), ou moins locale (cas d'une mesure satellitaire qui correspond généralement à plusieurs points de grilles horizontalement, et à toute l'épaisseur de l'atmosphère verticalement). Certains instruments, comme les radars ou les sondeurs hyperspectraux, mesurent une donnée autre que météorologique (réflectivité, radiance), bien que liée à des variables météorologiques.
- La précision des mesures peut varier d'une observation à l'autre, et les erreurs de mesure peuvent être corrélées entre elles.
- Il serait dommage de ne pas tirer parti de notre connaissance a priori de l'atmosphère : on ne cherche pas à interpoler une fonction mathématique quelconque, mais des

champs météorologiques multivariés, avec une signification physique.

- Les quantités manipulées sont extrêmement nombreuses, pour les observations, mais surtout pour les variables du modèle. Concrètement, cela implique que tous les calculs ne sont pas abordables, et le moindre produit scalaire a un coût numérique non-négligeable (nombre d’opérations, consommation de mémoire).
- À ces difficultés, s’ajoute une contrainte de temps de calcul, l’état de l’atmosphère doit être reconstitué rapidement pour que la prévision associée soit disponible à temps.

La section suivante rappelle quelques généralités sur l’assimilation de données. Pour une approche plus complète, le lecteur peut se référer à la revue de Carrassi *et al.* (2018) sur l’assimilation de données en géosciences.

### 1.3.2 Formalisme général de l’assimilation de données

On distingue dans un premier temps deux espaces mathématiques : l’espace du modèle et l’espace des observations.

#### 1.3.2.a L’espace du modèle

L’espace du modèle est assimilé à  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  est le nombre de variables scalaires qui décrivent un état du modèle. Dans la pratique,  $n$  est très grand, de l’ordre de  $10^8$  à  $10^9$ , puisque l’espace du modèle peut contenir des millions de points pour chaque niveau vertical et pour chaque variable. Notons  $\mathbf{x}^t \in \mathbb{R}^n$  ( $t$  pour *true*) l’état réel de l’atmosphère à un instant donné, projeté dans l’espace discret du modèle. Le processus d’assimilation vise à fournir la meilleure estimation possible de  $\mathbf{x}^t$ , tout en sachant qu’une estimation parfaite est impossible. Cette estimation  $\mathbf{x}^a \in \mathbb{R}^n$  sera appelée **analyse**<sup>1</sup>. La différence  $\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t = \boldsymbol{\epsilon}^a$  est l’erreur d’analyse.

Avant de procéder à l’étape d’assimilation de données, nous pouvons fournir une première estimation a priori de l’état du modèle, appelée **ébauche** et notée  $\mathbf{x}^b \in \mathbb{R}^n$  ( $b$  pour *background*). Dans la pratique, cette estimation est fournie par la dernière prévision disponible valide à l’heure d’intérêt. Cette ébauche diffère de notre vecteur cible  $\mathbf{x}^t$  par l’**erreur d’ébauche**  $\boldsymbol{\epsilon}^b$ , supposée additive et donc définie par :

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x}^t + \boldsymbol{\epsilon}^b. \quad (1.3)$$

---

1. Par extension, le terme analyse, ou étape d’analyse, est parfois employé pour désigner le processus d’assimilation de données.

Dans le formalisme de l'assimilation de données, les erreurs sont pensées comme des réalisations de processus aléatoires. L'erreur reste inconnue pour une réalisation donnée, mais on peut estimer certaines statistiques d'erreur. On suppose ainsi que l'erreur d'ébauche est non biaisée ( $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^b] = \mathbf{0}$ , où  $\mathbb{E}[\cdot]$  désigne l'espérance statistique), et qu'elle admet une matrice de variance-covariance notée  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}^b) \\ &= \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^b \boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}}].\end{aligned}\tag{1.4}$$

Les termes diagonaux de cette matrice donnent la variance de l'erreur d'ébauche, c'est-à-dire l'incertitude de notre ébauche, point de grille par point de grille :  $B_{ii} = \text{Var}(\epsilon_i^b)$  où  $i$  indexe un point de grille. Les termes extra-diagonaux donnent une idée des corrélations entre différents points de grille :  $B_{ij} = \text{Cov}(\epsilon_i^b, \epsilon_j^b)$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Ils ne sont pas nuls en général. En effet, la plupart des variables météorologiques varient relativement lentement dans l'espace, de sorte que les erreurs du modèle peuvent être corrélées (spatialement, mais aussi d'une variable à l'autre...).

Comme toute matrice de covariance,  $\mathbf{B}$  est symétrique positive. On montre la symétrie en remarquant que  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^b \boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}}]^{\text{T}} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}^b \boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}}]$ . La positivité vient du fait que pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbb{E}[\mathbf{x}^{\text{T}} \boldsymbol{\epsilon}^b \boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}} \mathbf{x}] = \mathbb{E}[(\boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}} \mathbf{x})^2] \geq 0$ . Nous supposons que  $\mathbf{B}$  est également définie positive<sup>1</sup>. Si ce n'était pas le cas, il existerait un vecteur  $\mathbf{x}$  non-nul de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbb{E}[(\boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}} \mathbf{x})^2] = 0$ . Autrement dit, toute réalisation  $\boldsymbol{\epsilon}^b$  vérifierait  $\boldsymbol{\epsilon}^{b\text{T}} \mathbf{x} = \sum x_i \epsilon_i^b = 0$ . Il existerait ainsi une composante du système pour laquelle l'erreur d'ébauche serait systématiquement nulle, et notre connaissance infiniment précise. Supposer le contraire paraît physiquement raisonnable.

Du caractère défini positif de la matrice de covariance des erreurs d'ébauche, il s'ensuit que :

- elle est aussi inversible, et son inverse  $\mathbf{B}^{-1}$  est également symétrique définie positive ;
- la forme bilinéaire associée  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto \mathbf{x}_1^{\text{T}} \mathbf{B} \mathbf{x}_2$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{B}}$  ;
- la forme quadratique associée  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{B} \mathbf{x}$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , notée  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{B}} = \sqrt{\mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{B} \mathbf{x}}$ .

Ces notations seront reprises désormais pour toute matrice symétrique définie positive (et uniquement pour ces matrices). Pour une revue généraliste à propos de l'estimation et de la modélisation de la matrice  $\mathbf{B}$  en prévision numérique du temps, nous recommandons vivement l'excellente revue en deux parties de Bannister (2008a,b).

---

1. Ce n'est pas le cas de toutes les matrices de covariance !

Au premier abord, un vecteur de l'espace du modèle devrait contenir les treize variables d'AROME. Pour des raisons qui seront expliquées plus loin, l'assimilation opérationnelle d'AROME se contente d'estimer les cinq variables  $P_s$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $v$  et  $q_v$ . La dénomination « espace du modèle » reste néanmoins communément employée en assimilation de données, bien que l'espace du modèle *en assimilation de données* ne soit qu'un sous-espace de l'espace du modèle *pour la prévision*. Nous emploierons parfois le terme **vecteur de contrôle de l'analyse** pour désigner sans ambiguïté un vecteur de l'espace modèle en assimilation de données.

### 1.3.2.b L'espace des observations

Les observations sont elles aussi représentées sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ . Dans la pratique,  $p$  est très petit devant  $n$ , avec au moins deux ordres de grandeur de différence.

L'espace des observations est lié à l'espace du modèle par un opérateur d'observation  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Le caractère discret du problème implique que l'opérateur  $\mathcal{H}$  est nécessairement imparfait, certaines observations pouvant être sensibles à des échelles spatiales trop petites pour être décrites dans l'espace du modèle. À cette erreur dite de représentativité (Janjić *et al.*, 2017) s'ajoute une possible erreur de modélisation, du fait d'un manque de connaissance des phénomènes physiques impliqués, de la difficulté à simuler l'observation à partir des seules variables du modèle, ou du fait d'approximations destinées à réduire le coût numérique de  $\mathcal{H}$  (cas des observations de radars ou de satellites par exemple). Enfin, chaque observation est entachée d'une erreur de mesure. Ces trois types d'erreurs sont regroupées sous le terme d'**erreurs d'observation**, et notées  $\boldsymbol{\epsilon}^o$ .

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{x}^t) + \boldsymbol{\epsilon}^o \quad (1.5)$$

On suppose que les erreurs d'observation sont indépendantes de l'erreur d'ébauche. Comme pour l'erreur d'ébauche, les erreurs d'observation sont supposées non-biaisées, et admettent une matrice de variance-covariance notée  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}^o) \\ &= \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^o \boldsymbol{\epsilon}^{oT}] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Comme la matrice  $\mathbf{B}$ , la matrice de covariance des erreurs d'observation  $\mathbf{R}$  est symétrique positive, et supposée définie positive. Elle est diagonale si les erreurs des observations sont décorréélées entre elles. On s'assure que ce soit le cas dans la pratique, bien que cette hypothèse soit difficile à vérifier. Un moyen de s'en assurer est de ne sélectionner pour l'assimilation qu'un sous-échantillon d'observations géographiquement éloignées les unes des autres. C'est la procédure d'« écrémage », typiquement appliquée pour les observations

radar. D'autres approches consistent à augmenter artificiellement les variances des erreurs pour compenser la non-prise en compte des corrélations, ou bien à moyennner spatialement les observations (Rabier, 2006).

Plusieurs études ont montré que s'affranchir d'une représentation diagonale de  $\mathbf{R}$  était bénéfique (Stewart *et al.*, 2013b ; Rainwater *et al.*, 2015). Un moyen d'assouplir l'hypothèse diagonale est de modéliser  $\mathbf{R}$  sous forme diagonale par blocs, chaque bloc correspondant à un type d'observations différent. Certains de ces blocs peuvent alors être non-diagonaux. Il est par exemple possible de prendre en compte les corrélations inter-canaux pour un sondeur atmosphérique satellitaire. C'est ce que rapportent Stewart *et al.* (2013a) et Bormann *et al.* (2016) par exemple, en s'appuyant sur les méthodes de Hollingsworth et Lönnberg (1986) et Desroziers *et al.* (2005) pour l'estimation des statistiques d'erreurs. En revanche, la prise en compte des corrélations spatiales des erreurs d'observation reste difficile, et en est encore à un stade de recherche (voir par exemple Brankart *et al.*, 2009 ; Michel, 2018 ; Guillet *et al.*, 2019 ; Chabot *et al.*, 2020).

### 1.3.2.c L'estimateur BLUE

Supposons que l'opérateur d'observation  $\mathcal{H}$  soit linéaire, ou admette une approximation linéaire, notée  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Dans ce contexte, le meilleur estimateur linéaire non biaisé de  $\mathbf{x}^t$ , au sens qu'il minimise  $\mathbb{E} [\|\boldsymbol{\epsilon}^a\|^2]$  est donné par le BLUE, *Best Linear Unbiased Estimator* :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{K}\mathbf{d} \quad (1.7)$$

$$\text{avec } \mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} \quad (1.8)$$

$$= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (1.9)$$

$$\text{et } \mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^b. \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

$\mathbf{K}$  est le *gain de Kalman*, et  $\mathbf{d}$  est l'*innovation*, qui mesure l'écart entre les observations et l'équivalent (linéaire) de l'ébauche dans l'espace des observations. La différence  $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$  est appelée *incrément d'analyse*.

Cette formulation, bien que reposant sur l'hypothèse d'un estimateur linéaire, permet de comprendre l'importance de la matrice  $\mathbf{B}$ . Plaçons-nous dans le cas de l'assimilation d'une observation locale, c'est-à-dire correspondant à une coordonnée  $i$  du vecteur de contrôle :

- une observation,  $p = 1$  ;
- une innovation  $\mathbf{d} = (d)$  ;

- une variance d’erreur d’observation  $\mathbf{R} = (\sigma_o^2)$  ;
- un opérateur d’observation linéaire  $\mathbf{H} = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0) = (\delta(j=i))_{1 \leq j \leq n}$  ;
- une variance d’erreur d’ébauche au point d’observation  $B_{ii} = \sigma_b^2$ .

Alors l’analyse obtenue par le BLUE est

$$\mathbf{x}^a = x^b + \frac{d}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \mathbf{B}_{:,i} \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{B}_{:,i}$  désigne la  $i^e$  colonne de  $\mathbf{B}$ . Au point d’observation en particulier :

$$x_i^a = x_i^b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} d \quad (1.13)$$

Relevons deux caractéristiques de l’analyse ainsi obtenue.

- Pour une erreur d’observation de variance donnée  $\sigma_o$ , la valeur de l’analyse au point d’observation tend vers la valeur de l’observation lorsque  $\sigma_b$  tend vers l’infini (peu de confiance dans l’ébauche), et tend vers la valeur de l’ébauche quand  $\sigma_b$  tend vers 0 (grande confiance dans l’ébauche). Le rôle de la matrice de covariance est donc de **peser** les apports relatifs de l’ébauche et des observations.
- L’incrément d’analyse n’est pas restreint au point de l’observation, mais est proportionnel à une colonne de la matrice  $\mathbf{B}$ , c’est-à-dire tous les points du vecteur de contrôle pour lesquels la covariance d’erreur d’ébauche avec le point  $i$  n’est pas nulle. L’information apportée par l’observation peut ainsi se **propager** aux points voisins, voire aux autres variables.

Enfin, dans le cas général où plusieurs observations sont assimilées, l’incrément du BLUE s’écrit sous la forme  $\mathbf{Kd} = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}$  avec  $\boldsymbol{\alpha}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . C’est donc une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$ . On comprend là l’intérêt d’avoir une matrice  $\mathbf{B}$  de rang plein, puisque l’incrément d’analyse est restreint à l’image de  $\mathbf{B}$ .

Lors de la mise au point d’un système d’assimilation de données, il est courant de réaliser des expériences d’assimilation avec une unique observation locale. L’intérêt de telles expériences (*single-observation experiments*) consiste à visualiser la structure de la matrice  $\mathbf{B}$ , colonne par colonne. Les incréments d’analyse ainsi obtenus sont appelés *fonctions de structure*. La figure 1.8 montre un extrait d’une fonction de structure de la matrice  $\mathbf{B}$  utilisée opérationnellement pour l’assimilation dans AROME. On notera en particulier le caractère isotrope des covariances d’erreurs pour la température. L’incrément de vent méridien associé à une observation de température est particulièrement parlant, reliant une hausse locale de température à un mouvement anticyclonique. On a ici une illustration du rôle de propagation spatiale et inter-variables des observations par la matrice  $\mathbf{B}$ .

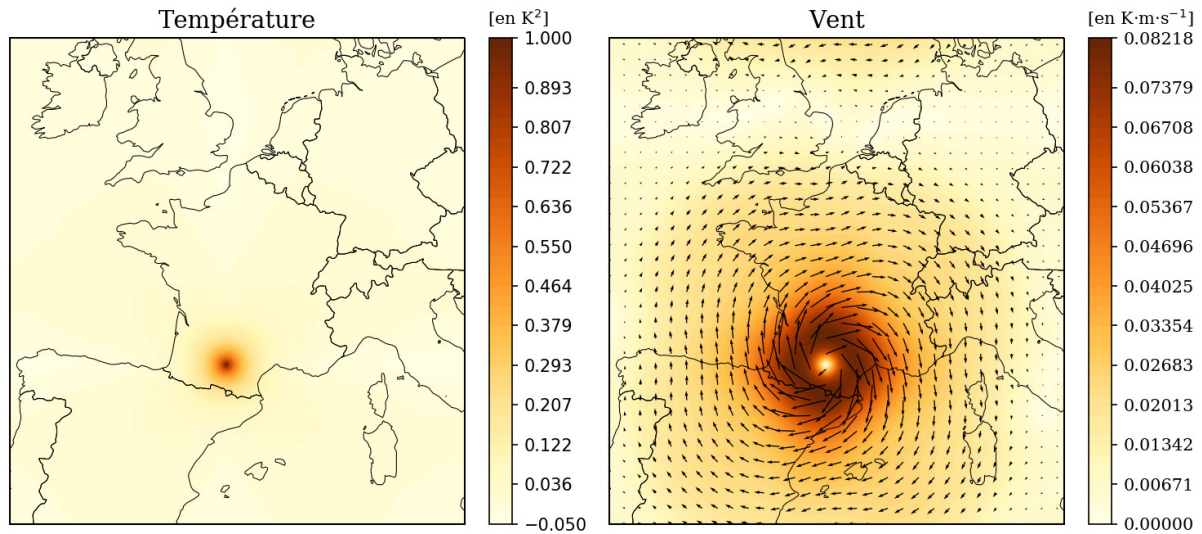


FIGURE 1.8 – Fonction de structure de la matrice  $\mathbf{B}$  opérationnelle, pour l'assimilation d'une observation de température à Toulouse au niveau modèle 70 (moyenne troposphère). L'image est obtenue en appliquant  $\mathbf{B}$  à un vecteur de la base canonique  $\mathbf{e}_i$ , ce qui permet d'obtenir facilement la colonne  $\mathbf{B}_{:,i}$  quand  $\mathbf{B}$  n'est disponible que sous forme d'opérateur matrice - vecteur.

### 1.3.2.d L'approche bayésienne

L'approche bayésienne de l'assimilation de données (Lorenç, 1986) permet de s'affranchir de l'hypothèse de linéarité de l'opérateur d'observation et de l'estimateur de l'analyse. L'idée consiste à estimer  $\mathbf{x}^t$  non pas par une analyse  $\mathbf{x}^a$ , mais par la distribution de probabilité  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ . Cette distribution est définie sur l'espace de contrôle ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ). En utilisant la formule de Bayes, il est possible d'exprimer cette probabilité en fonction de quantités connues :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}. \quad (1.14)$$

Le dénominateur ne dépendant pas de  $\mathbf{x}$  n'est qu'un facteur de normalisation. La probabilité  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  est la vraisemblance des observations  $\mathbf{y}$  au vu d'un état  $\mathbf{x}$  du modèle. On peut l'évaluer en comparant  $\mathbf{y}$  et  $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ . La probabilité  $p(\mathbf{x})$  est indépendante des observations, c'est donc la probabilité a priori de l'état de l'atmosphère. Elle peut être évaluée en comparant  $\mathbf{x}$  à l'ébauche  $\mathbf{x}^b$  par exemple.

La plupart des techniques d'assimilation de données (sinon toutes) peuvent s'interpréter à partir de cette relation. Les techniques de filtres particulières (voir la revue de Leeuwen *et al.*, 2019) sont peut-être celles qui nécessitent le moins d'hypothèses supplémentaires,



puisqu'elles se contentent d'échantillonner les distributions de probabilité par des méthodes Monte-Carlo. Leur coût numérique reste cependant prohibitif pour des applications en grande dimension comme c'est le cas en météorologie. Nous nous attardons donc plutôt sur d'autres méthodes de résolution du problème bayésien, qui ont fait leurs preuves dans un contexte opérationnel. C'est l'objet de la section suivante.

### 1.3.3 Techniques de résolution du problème bayésien

#### 1.3.3.a L'approche variationnelle

L'approche variationnelle résout le problème bayésien en cherchant le mode de la distribution a posteriori  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  (*Maximum A Posteriori* en anglais). Cela revient à minimiser la fonction de coût  $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = -\log(p(\mathbf{x}|\mathbf{y}))$ . Sous l'hypothèse que les erreurs d'observation et d'ébauche sont gaussiennes, on peut écrire :

$$p(\mathbf{x}|y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2\right) \quad (1.15)$$

$$p(x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2\right) \quad (1.16)$$

Le choix d'une distribution gaussienne est celui qui fait le moins d'hypothèses supplémentaires pour un processus multivarié dont on connaît déjà l'espérance et la matrice de covariance (Park *et al.*, 2013). Ce choix est aussi légitimé par le théorème central limite quand il s'applique. On obtient ainsi pour la distribution a posteriori  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  :

$$p(\mathbf{x}|y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2\right), \quad (1.17)$$

et pour la fonction de coût du problème variationnel :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2}_{\mathcal{J}_b(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2}_{\mathcal{J}_o(\mathbf{x})}. \quad (1.18)$$

Le premier terme  $\mathcal{J}_b$  est un terme de rappel à l'ébauche, le deuxième  $\mathcal{J}_o$  est un terme de distance aux observations. Cette approche fournit une extension naturelle du BLUE au cas non-linéaire. En effet, dans le cas où l'opérateur d'observation  $\mathcal{H}$  est linéaire, on peut montrer que le minimum de  $\mathcal{J}$  coïncide avec le BLUE. Outre cette prise en compte de la non-linéarité de  $\mathcal{H}$ , un avantage de la formulation variationnelle est qu'elle peut se révéler

plus abordable numériquement, comme nous le verrons plus loin.

Dans le cas d'un vecteur d'état 3D, l'approche variationnelle est communément appelée 3DVar. Le cas d'un vecteur uni-dimensionnel (1DVar) correspond généralement à l'estimation d'un profil vertical. Le cas d'un vecteur 4D incluant une dimension temporelle donne lieu au 4DVar « à contrainte faible » —la dénomination est due à Sasaki (1970)—, qui minimise les erreurs au cours d'une *trajectoire* du modèle, sur une durée donnée appelée *fenêtre d'assimilation*. Cette méthode a été réintroduite par Derber (1989) avec application à un modèle quasi-géostrophique à aire limitée, et appliquée par exemple par Vidard *et al.* (2004) pour un modèle océanique simplifié non-linéaire, de type équations en eaux peu profondes. Le coût numérique d'une telle approche reste conséquent, et les recherches sur le sujet sont encore en cours (voir par exemple le Tech Mémo du CEPMMT à ce sujet, Fisher *et al.*, 2011). Dans le cas où l'on suppose un modèle parfait, le 4DVar est dit « à contrainte forte », et le vecteur de contrôle est l'état initial de la trajectoire 4D analysée (Courtier *et al.*, 1994, Rabier *et al.*, 2000 pour l'implémentation au CEPMMT). On retiendra à propos des schémas 4D variationnels que l'utilisation du modèle de prévision  $\mathcal{M}$  dans les fonctions de coût rajoute des non-linéarités au problème, et que la minimisation de ces fonctions de coût requiert l'utilisation du tangent linéaire et de l'adjoint du modèle  $\mathcal{M}$ . Les aspects 4D ne seront pas traités plus avant dans cette thèse.

### 1.3.3.b L'approche incrémentale

Le problème variationnel du 3DVar est un problème aux moindres carrés non-linéaire (avec un terme de régularisation  $\mathcal{J}_b$ ). L'approche incrémentale, ou Gauss-Newton tronquée (Courtier *et al.*, 1994; Gratton *et al.*, 2007) a originellement été introduite pour traiter les non-linéarités dans le 4DVar. Elle consiste à résoudre le problème variationnel non-linéaire par une suite d'approximations linéaires. Chaque problème linéaire peut ensuite être résolu à l'aide d'un algorithme itératif adapté (algorithme de Lanczos ou du gradient conjugué par exemple, Saad, 2003; Nocedal et Wright, 2006). Chaque itération de ces algorithmes est appelée *boucle interne*, par opposition aux itérations sur les problèmes linéaires successifs, dénommés *boucles externes*.

La première approximation linéaire consiste à linéariser l'opérateur d'observation  $\mathcal{H}$  dans le voisinage de l'ébauche  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^b$ , où l'exposant entre parenthèses fait référence au numéro de la boucle externe en cours. En notant  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \delta\mathbf{x}^{(1)}$ , on peut écrire  $\mathcal{H}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{H}^{(0)}\delta\mathbf{x}^{(1)}$ , ce qui fournit la première fonction de coût quadratique :

$$J^{(1)}(\delta\mathbf{x}^{(1)}) = \frac{1}{2}\|\delta\mathbf{x}^{(1)}\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{H}^{(0)}\delta\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{d}^{(0)}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(0)})$  est maintenant l'innovation calculée avec l'opérateur non-linéaire. L'opérateur  $\mathbf{H}^{(0)}$  est la *tangent linéaire* de l'opérateur d'observation calculé en  $\mathbf{x}^{(0)}$ . La formulation incrémentale fait également intervenir son adjoint  $\mathbf{H}^{(0)\text{T}}$ .

Une fois le minimum  $\delta\mathbf{x}^{(1)}$  de  $J^{(1)}$  trouvé, on peut linéariser à nouveau le problème non-linéaire autour de  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \delta\mathbf{x}^{(1)}$ . On obtient ainsi  $\mathbf{H}^{(1)}$ ,  $\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(1)})$ , et  $J^{(2)}(\delta\mathbf{x}^{(2)})$ . Dans la pratique, le 3DVar opérationnel d'AROME se contente d'une seule linéarisation. Pour cette raison, et pour alléger les notations, nous poursuivons en enlevant les exposants indiquant le numéro de boucle externe :

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\delta\mathbf{x}\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\delta\mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \quad (1.20)$$

Le gradient de la fonction de coût est donné par :

$$\nabla J = \mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} + \mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\delta\mathbf{x} - \mathbf{d}). \quad (1.21)$$

On obtient le minimum  $\delta\mathbf{x}^*$  associé en annulant le gradient :

$$(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})\delta\mathbf{x}^* = \mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}. \quad (1.22)$$

Ce genre de problème linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{A}$  symétrique définie positive peut se résoudre par des algorithmes itératifs de type Lanczos ou gradient conjugué.

L'approche variationnelle est souvent mise en avant pour sa prise en compte des non-linéarités, contrairement au BLUE. Notons cependant que dans le cas du schéma 3DVar d'AROME, où une seule minimisation quadratique est effectuée, la seule gestion de la non-linéarité consiste à calculer l'innovation à l'aide de l'opérateur d'observation complet. Appliquer le BLUE avec le même calcul de l'innovation donnerait ainsi le même résultat final !

### 1.3.3.c Préconditionnement

L'objectif du preconditionnement est de faciliter la convergence de la minimisation et de limiter les erreurs numériques. Pour cela, le problème linéaire est converti en un problème équivalent mieux conditionné (c'est-à-dire où les valeurs propres de la matrice à inverser sont plus regroupées). Cette étape peut se penser comme une forme d'adimensionnalisation, de normalisation du problème.

Dans la pratique, on a recours pour AROME à un « préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$  », approche assez courante en assimilation de données variationnelle (Bannister, 2017). Le terme  $\mathbf{B}^{1/2}$  fait référence à une racine carrée<sup>1</sup> de  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire toute matrice  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  vérifiant  $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{\mathbf{B}} \mathbf{U}^{\mathbf{B}T}$ . Il existe au moins une racine de la sorte, puisque  $\mathbf{B}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  (car symétrique réelle) et de valeurs propres positives (car positive). De fait, il existe une infinité<sup>2</sup> de racines de  $\mathbf{B}$ , puisque c'est le cas de toute matrice  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}} \mathbf{P}$  si  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}}$  est une racine de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{P}$  une matrice orthogonale de  $\mathbb{R}^{q \times q}$ . Notons qu'une racine carrée de  $\mathbf{B}$  n'est pas nécessairement une matrice carrée.

L'idée du préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$  consiste à effectuer le changement de variable  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{U}^{\mathbf{B}} \chi$ . En injectant cette expression dans la fonction de coût 1.20, on peut reproduire les calculs pour obtenir à l'optimalité :

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{U}^{\mathbf{B}T} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{U}^{\mathbf{B}}) \chi^* = \mathbf{U}^{\mathbf{B}T} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}. \quad (1.23)$$

Comme remarqué par Hunt *et al.* (2007) et détaillé par Ménétrier et Auligné (2015), le calcul implique la simplification  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}T} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}^{\mathbf{B}} = \mathbf{I}_n$ , ce qui est erronée dans le cas général où la racine  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}}$  n'est pas carrée. Heureusement, cette approximation ne pose pas problème dans la pratique, la minimisation menant à la même solution finale (Ménétrier et Auligné, 2015 ; Duc et Saito, 2017). Une fois le système résolu, il ne reste plus qu'à appliquer  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}}$  au résultat pour avoir l'incrément d'analyse  $\delta \mathbf{x}^* = \mathbf{U}^{\mathbf{B}} \chi^*$ .

Outre un meilleur conditionnement du problème, cette formulation évite d'avoir à inverser la matrice  $\mathbf{B}$ . L'inverse de  $\mathbf{R}$  reste requis, mais ce n'est pas un problème puisque  $\mathbf{R}$  est de moindre dimension que  $\mathbf{B}$ . Elle est par ailleurs diagonale par blocs, ce qui facilite largement l'inversion. On se limite dans la pratique à une quarantaine d'itérations, ce qui rend l'approche variationnelle abordable par rapport à l'estimateur BLUE, qui nécessite d'inverser  $\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T$ .

Notons également la possibilité d'utiliser un préconditionnement en  $\mathbf{B}$  (Derber et Rosati, 1989 ; Gürol *et al.*, 2013), du type  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{u}$ , ce qui mène à la condition d'optimalité

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B}) \mathbf{u}^* &= \mathbf{B} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d} \\ \text{ou encore } (\mathbf{I}_n + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B}) \mathbf{u}^* &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le problème linéaire 1.24 n'est pas symétrique au premier abord, mais est bien auto-adjoint par rapport au produit scalaire associé à  $\mathbf{B}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{B}}$ . Des algorithmes classiques de

1. Notons que cette définition de la racine carrée n'est pas la définition mathématique, selon laquelle on aurait plutôt  $\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{U}$ . Nous conservons cependant cette dénomination de « racine carrée », qui est utilisée par la grande majorité des auteurs en assimilation de données.

2. Sauf dans le cas trivial où  $\mathbf{B}$  est de rang 1...

minimisation permettent de résoudre ce problème en ne demandant qu'une application de  $\mathbf{B}$  par boucle interne.

L'intérêt potentiel d'un préconditionnement en  $\mathbf{B}$  est de garantir un vecteur de contrôle de la minimisation  $\mathbf{u}$  de taille  $n$ . En effet, certaines modélisations de la matrice  $\mathbf{B}$  s'appuient sur des racines  $\mathbf{U}^{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  avec  $q > n$ , ce qui dans le cas d'un préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$  impliquerait une minimisation dans l'espace de plus grande dimension  $\mathbb{R}^q$ . Notons également que certaines approches proposent de reformuler le problème pour effectuer la minimisation dans l'espace des observations, de dimension bien inférieure à celle de l'espace du modèle (Akkraoui *et al.*, 2008; Gratton et Tshimanga, 2009).

### 1.3.3.d Illustration de l'approche variationnelle

Nous proposons ici une illustration de l'approche variationnelle dans le cas d'un opérateur d'observation linéaire. L'espace du modèle est réduit à deux variables scalaires  $x_1$  et  $x_2$ , dont seule la première est directement observée :  $\mathcal{H}(x_1, x_2) = x_1$ . On peut se représenter le problème comme celui d'un ODVar multivarié, où on chercherait par exemple à estimer la pression et la température en un point à partir d'une observation de pression uniquement. Dans notre cas, l'ébauche est fixée à  $\mathbf{x}^b = (0 \ 0)$ , avec une matrice de covariance d'erreur d'ébauche :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Le terme  $\mathcal{J}_b(\mathbf{x})$  de la fonction de coût est présenté en figure 1.9, volet (a). Ce terme étant quadratique, les lignes de niveaux forment des ellipses. Les axes des ellipses sont inclinés par rapport aux axes du repère du fait des covariances d'erreurs d'ébauche non-nulles. La fonction de coût n'a pas été préconditionnée, autrement les lignes de niveaux seraient des cercles parfaits.

L'observation assimilée est  $y = 2$ , avec une variance d'erreur d'observation  $\mathbf{R} = (\sigma_o^2) = (2)$ . Le terme d'observation de la fonction de coût,  $\mathcal{J}_o(\mathbf{x}) = 1/4 (x_1 - 2)^2$ , est présenté volet (b). Il admet une infinité de minima (trait plein), correspondant à l'ensemble des points du modèle les plus compatibles avec l'observation.

Le volet (c) présente la somme des deux fonctions de coût, qui permet d'obtenir la combinaison optimale entre ébauche et observation. On constate que le terme d'ébauche permet de régulariser le terme d'observation, assurant ici qu'il existe une unique solution  $\mathbf{x}^a$  au problème.

On remarquera une propriété importante de l'assimilation de données : bien que la variable  $x_2$  ne soit pas directement observée, elle est modifiée par le processus d'assimilation. Cet incrément de  $x_2$  provient des corrélations croisées entre  $x_1$  et  $x_2$  dans les erreurs

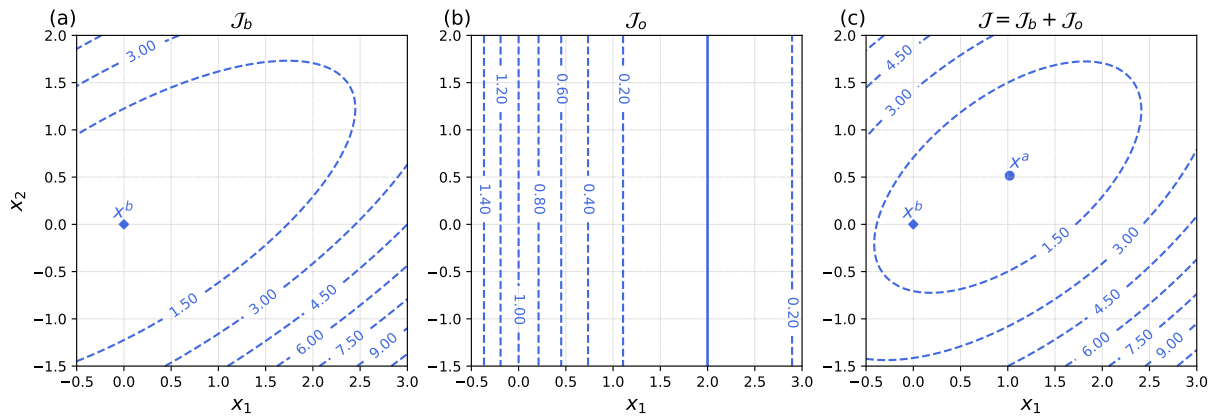


FIGURE 1.9 – Génération d'incrément sans observation, via les covariances croisées d'erreur d'ébauche. Seule la variable  $x_1$  est directement observée ( $\mathcal{H}(x_1, x_2) = x_1$ ), mais la composante de l'incrément selon  $x_2$  est non-nulle.

d'ébauche : l'incrément produit en  $x_1$  est projeté sur les autres variables via la matrice  $\mathbf{B}$ .

### 1.3.3.e Illustration de l'approche incrémentale

L'approche incrémentale est intéressante dans le cas d'un problème non-linéaire. Dans le même cadre 0D que précédemment, supposons que les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont observées via l'opérateur non-linéaire  $\mathcal{H}(x_1, x_2) = x_1 x_2$ . L'ébauche est maintenant fixée à  $\mathbf{x}^b = (x_1^b \ x_2^b) = (1 \ 0)$ , avec la même matrice de covariance d'erreur d'ébauche (équation 1.25). Le terme  $\mathcal{J}_b(\mathbf{x})$  de la fonction de coût (terme de rappel à l'ébauche) est présenté en figure 1.10, volet (a). Seule une translation de l'ébauche différencie ce volet et son équivalent en figure 1.9.

L'observation assimilée est  $y = 2$ , avec une variance d'erreur d'observation  $\mathbf{R} = (\sigma_o^2) = (2)$ . La fonction de coût associée est  $\mathcal{J}_o(\mathbf{x}) = 1/4(x_1 x_2 - 2)^2$ , représentée volet (b). La non-linéarité de l'opérateur d'observation  $\mathcal{H}$  se traduit par une fonction de coût non-quadratique (termes  $x_1^2 x_2^2$ ), dont les lignes de niveaux forment une vallée. Le minimum de la vallée correspond à l'ensemble des points vérifiant  $\mathcal{H}(x_1, x_2) = y$ , c'est-à-dire  $x_2 = 2/x_1$ .

La fonction de coût totale  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_b + \mathcal{J}_o$  est non-quadratique (volet (c), contours bleus tiretés). Son minimum  $\mathbf{x}^*$  est la combinaison optimale de l'ébauche et de l'observation. L'approche incrémentale consiste à linéariser l'opérateur d'observation en  $\mathbf{x}^b$  :

$$\mathbf{H} = \left( \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^b} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}^b} \right) = (1 \ 0),$$

de manière à obtenir une approximation quadratique  $J$  (traits rouges en figure 1.10c) de la fonction de coût. On remarque qu'au voisinage de l'ébauche, les lignes de niveaux de cette approximation coïncident avec celles de la fonction de coût non-linéaire. Dans le cas où

une seule boucle externe est utilisée, l'analyse est alors donnée par le minimum  $\mathbf{x}^a$  de cette approximation quadratique. Dans ce cas précis, une unique linéarisation suffit à obtenir une analyse relativement proche de la solution optimale  $\mathbf{x}^*$ . Une deuxième boucle externe impliquerait de linéariser à nouveau l'opérateur d'observation autour du minimum obtenu, pour se rapprocher encore davantage de la solution optimale.

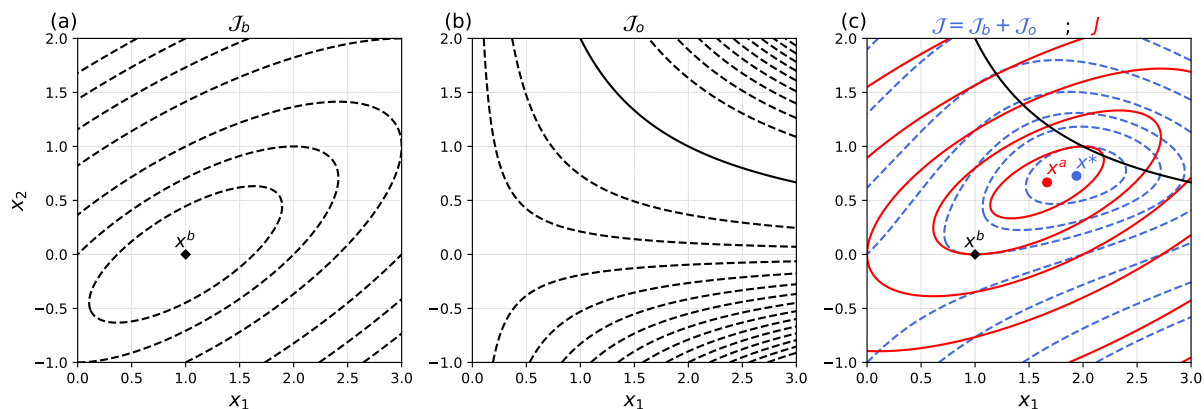


FIGURE 1.10 – Résolution d'un problème variationnel par approche incrémentale. Lignes de niveaux des fonctions de coût : terme d'ébauche et ébauche (a), terme d'observation en traits tiretés et ses minima en trait pleins (b), fonction de coût totale en traits tiretés bleu et linéarisée autour de l'ébauche en traits pleins rouges, avec minima respectifs (c). En (c), les lignes de niveaux sont tracées pour les mêmes valeurs pour les deux fonctions, et coïncident au point de linéarisation  $\mathbf{x}^b$ .

### 1.3.3.f Approches séquentielles

Il existe d'autres approches que l'approche variationnelle. Une des plus populaire est le filtre de Kalman (Kalman, 1960), qui connaît de nombreuses extensions et variantes. Pour une revue du domaine, on pourra consulter Houtekamer et Zhang (2016) et les articles cités dans leur introduction.

La particularité de ces méthodes est d'assimiler séquentiellement les observations ou paquets d'observations, et de mettre à jour les matrices de covariances d'erreurs d'ébauche et d'analyse au long des cycles assimilation-prévision successifs. Le principal avantage des méthodes de Kalman est de ne pas faire appel à l'adjoint  $\mathbf{H}^T$  du tangent linéaire de l'opérateur d'observations, dont la modélisation n'est pas toujours immédiate. Les extensions ensemblistes du filtre de Kalman (EnKF, ou filtres de Kalman d'ensemble; Evensen, 1994; Burgers *et al.*, 1998; Evensen, 2003) utilisent une méthode de type Monte-Carlo pour estimer les matrices de covariances d'erreur d'ébauche et d'analyse à partir d'un ensemble de prévisions valides au même instant. Elle rendent l'utilisation du filtre de Kalman abordable pour les systèmes de grande dimensions, même si elles ont d'autres

défauts (difficulté à assimiler des observations non-locales, besoin d'inflation pour ajuster la dispersion de l'ensemble, filtrage des erreurs d'échantillonnage par localisation, et autres difficultés relevées par Houtekamer et Zhang, 2016).

Notons que l'approche séquentielle connaît aussi des extensions au cas 4D, incluant une dimension temporelle. On parle généralement dans ce cas de lisseurs de Kalman (Jazwinski, 1970 ; Cosme *et al.*, 2012). Ces approches permettent typiquement d'estimer l'état d'un système à un instant donné en fonction des observations passées, présentes, mais également futures (postérieures à l'instant considéré).

Dans le cas linéaire, il existe toujours des équivalences entre les filtre ou lisseurs de Kalman et les méthodes variationnelles (Fisher *et al.*, 2005, par exemple). Les équivalences ne sont plus valides dès que l'on introduit de la non-linéarité dans le système.

Les tentatives pour combiner les avantages de l'approche variationnelle et des filtres de Kalman d'ensemble ont mené à l'approche variationnelle ensembliste.

### 1.3.3.g Schéma variationnels ensemblistes

Les schémas variationnels ensemblistes (EnVar, Hamill et Snyder, 2000 ; Lorenc, 2003 ; Buehner, 2005) sont avant tout des schémas variationnels. Leur description fait l'objet d'un chapitre à part (chapitre 2). On peut cependant relever dès maintenant deux caractéristiques majeures, qui les différencient des schémas variationnels non ensemblistes :

1. Leur description de la matrice  $\mathbf{B}$  est dépendante de l'écoulement météorologique : spatialement hétérogène, anisotrope, et temporellement variable. Cette souplesse est permise par l'approche ensembliste : la matrice  $\mathbf{B}$  est estimée à partir d'un ensemble de prévisions météorologiques.
2. En conséquence de ce premier point, les EnVars nécessitent de disposer en temps réel d'un ensemble de prévisions, généralement fourni par un ensemble d'assimilations (EDA, voir section 2.1.1).

## 1.3.4 L'assimilation opérationnelle dans AROME

Le schéma d'assimilation opérationnellement utilisé pour AROME est un 3DVar, avec approche incrémentale et préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$ . Nous en présentons les principales caractéristiques.



## 1.3.4.a Cyclage

Le fonctionnement de la chaîne de prévision opérationnelle d'AROME est illustré en figure 1.11. Depuis les modifications substantielles de Brousseau *et al.* (2016) le cyclage de

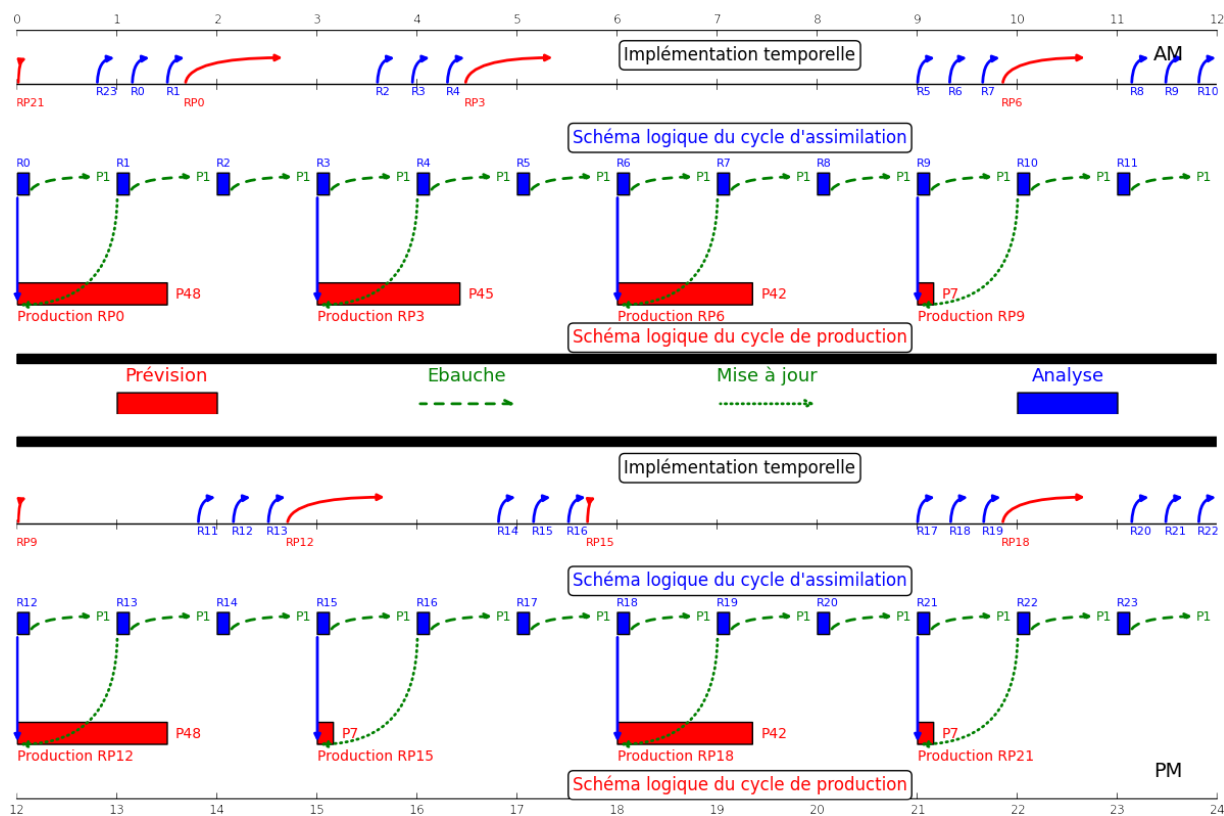


FIGURE 1.11 – Fonctionnement schématique de la chaîne de prévision opérationnelle d'AROME (heures en TU). Source : Météo-France/COMPAS, [http://contrôle.meteo.fr/modeles/config/index\\_config.php?modele=AROME](http://contrôle.meteo.fr/modeles/config/index_config.php?modele=AROME) (accès interne uniquement).

l'analyse est horaire. Un **cycle d'assimilation** se présente donc comme suit : à chaque heure, une nouvelle étape d'analyse permet d'assimiler les observations disponibles, puis une prévision à l'échéance 1 h est effectuée, ce qui permet de fournir l'ébauche de l'heure suivante. Les observations assimilées dans la fenêtre temporelle  $[T-30 \text{ min}; T+30 \text{ min}]$  sont considérées valides à l'heure  $T$ <sup>1</sup>. Toutes les trois heures, la prévision est étendue jusqu'à l'échéance 48 h (réseaux de 0 h et 12 h TU), 45 h (réseau de 3 h TU), 42 h (réseaux de 6 h et 18 h TU) ou 7 h (réseaux de 9 h, 15 h et 21 h TU). Ce sont ces prévisions qui sont utilisées pour la production opérationnelle par les prévisionnistes.

1. Approximation FGAT (*First Guess At initial Time* Fisher et Andersson, 2001).

### 1.3.4.b Modélisation de la matrice $\mathbf{B}$ pour AROME

Théoriquement, la matrice  $\mathbf{B}$  des erreurs d'ébauche correspond donc aux erreurs de prévisions à l'échéance 1 h. Cette matrice devrait donc dépendre :

- du jour de l'année ;
- de la situation météorologique ;
- de la localisation géographique ;
- du réseau d'observation (indirectement).

Dans la pratique, la matrice  $\mathbf{B}$  utilisée est *statique*, ou *climatologique*. La même matrice est utilisée quel que soit le jour de l'année et l'heure de la journée. Les fonctions de structures sont horizontalement homogènes (du moins pour les auto-covariances, ou covariance d'une variable par rapport à elle-même) et isotropes, comme illustré en figure 1.8. Cette approche limitée est liée à la difficulté et au coût numérique d'une estimation plus précise (spatialement ou temporellement) de la matrice  $\mathbf{B}$ .

Nous présentons grossièrement ici la modélisation de la matrice  $\mathbf{B}$  telle qu'utilisée dans AROME (Berre, 2000 ; Brousseau *et al.*, 2011), bien que cela ne soit pas fondamental pour la suite. Commençons par préciser qu'au vu de la taille de la matrice  $\mathbf{B}$ , il est utopique de vouloir estimer et stocker chacun de ses  $n \times n$  termes. C'est aussi inutile, puisqu'on n'a seulement besoin de  $\mathbf{B}$  en tant qu'opérateur matrice - vecteur dans la pratique.

L'idée consiste à décorréler les différentes composantes de l'erreur. Une première approche consiste à exploiter notre connaissance des relations physiques entre variables, en supposant que les erreurs du modèle vérifient l'équilibre hydrostatique par exemple. On pourrait donc appliquer à l'erreur un changement de variable qui permette de lui enlever sa composante hydrostatique. Dans la pratique, on applique ce changement de variable, en se basant non plus uniquement sur des lois physiques, mais également sur un apprentissage statistique (une simple régression multilinéaire) sur une période d'entraînement, pendant laquelle les erreurs sont connues via un ensemble de prévisions. On obtient ainsi pour chaque variable des résidus qui correspondent à la composante de l'erreur non-expliquée (au sens statistique) par les erreurs des autres variables. On se retrouve ainsi avec un changement de variable bijectif vers des composantes non corrélées de l'erreur. Autrement dit, on vient de diagonaliser la matrice des covariances d'erreur d'ébauche ! Il ne reste plus qu'à estimer les variances associées à chaque composante décorrélée de l'erreur pour obtenir une description complète de la matrice, sous la forme  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$  où  $\mathbf{P}$  est l'opérateur de « décorrélation » des erreurs.

Cette description reste sommaire, et ne dit rien de la modélisation des corrélations verticales ou de la non-séparabilité des covariances. On retiendra que ce travail d'estimation n'est pas immédiat, et relativement coûteux numériquement. On le réalise généralement

une unique fois, et la matrice  $\mathbf{B}$  ainsi obtenue est utilisée à chaque cycle d'assimilation.

Dans la pratique, il reste cependant possible d'utiliser un ensemble de prévisions pour estimer des covariances « du jour », dont les statistiques sont moyennées horizontalement et sur les 24 h de la journée. Les statistiques ainsi obtenues sont toujours homogènes et isotropes, mais varient d'un jour à l'autre (Brousseau *et al.*, 2012).

Des essais pour prendre en compte l'hétérogénéité spatiale des covariances ont également été effectués (Ménétrier, 2014). Des variances hétérogènes sont ainsi estimées à partir d'un ensemble de prévisions, spatialement filtrées puis utilisées pour normaliser la matrice  $\mathbf{B}$ . Les résultats obtenus en termes de scores de prévisions sont cependant mitigés, et cette approche n'a pas été retenue pour l'assimilation opérationnelle.

### 1.3.4.c Observations assimilées

Les observations opérationnellement assimilées dans AROME varient en fonction du réseau. La figure 1.12 montre un exemple d'observations disponibles pour le réseau de 12 h TU du 21 mai 2018. Le nombre d'observations assimilées est variable, selon le réseau mais aussi selon la météo du jour (pour les réflectivité radar par exemple). En moyenne, le nombre d'observation assimilées est de l'ordre de 50 000 par réseaux, dont un huitième d'observations satellites.

## 1.4 Assimiler les hydrométéores ? État de l'art

Nous proposons de clore ce chapitre introductif par une revue des enjeux et des difficultés liées à l'assimilation des hydrométéores dans les modèles de PNT à échelle convective. Nous présenterons également les principales méthodes actuellement employées à ces fins. Cette section s'appuie en partie sur les revues de Geer *et al.* (2018) et Bannister *et al.* (2019).

### 1.4.1 Motivations

Nous distinguons dorénavant l'*assimilation des hydrométéores*, qui consiste à assimiler des *observations* d'hydrométéores pour modifier d'une manière ou d'une autre la trajectoire d'une prévision météorologique, et le fait d'*analyser les hydrométéores*, qui consiste à estimer dans l'espace du modèle les *variables* d'hydrométéores valides à l'instant de l'analyse. Bien qu'elles soient très liées, ces deux réalités ne vont pas systématiquement de pair. Il est possible par exemple d'assimiler des réflectivités radar pour produire une analyse d'humidité

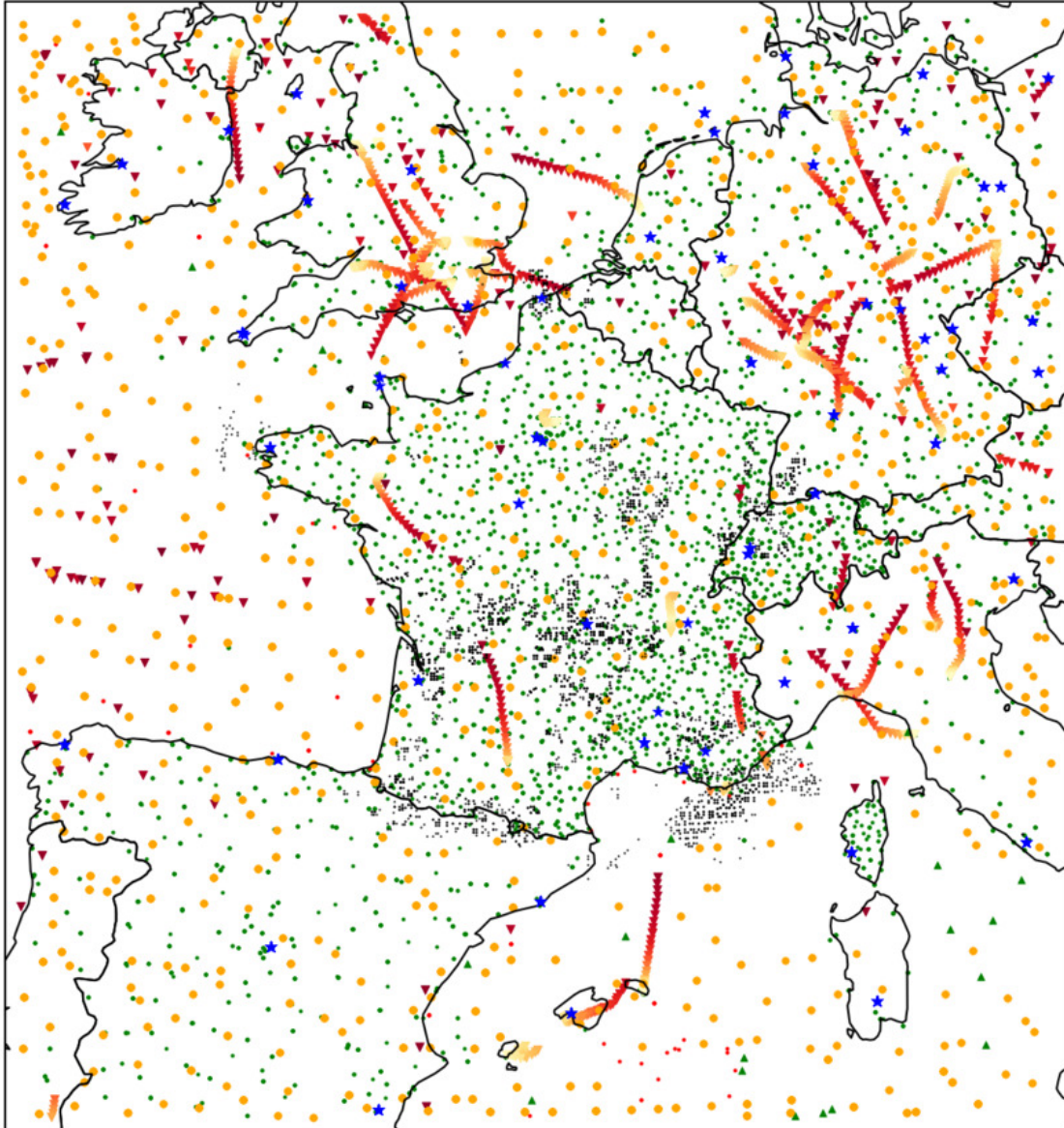


FIGURE 1.12 – Observations assimilées pour le réseau du 21 mai 2018 à 12 h TU. Points verts : stations au sol et bateaux. Triangles ▼ : mesures d'avions, couleur variable selon l'altitude (jaune au sol). Triangles ▲ : vents déduits d'images satellitaires. Points rouges : bouées dérivantes. Étoiles bleues : radiosondages, ballons, profileurs. Cercles orange : radiances satellitaires. Points noirs : réflectivités et vents Doppler fournies par les radars météorologiques (hors réflectivités nulles).

spécifique (assimilation d'hydrométéores sans analyse d'hydrométéores). Inversement, une observation d'humidité relative peut amener à corriger des variables hydrométéores (analyse d'hydrométéores sans assimilation d'hydrométéores).

La quasi-totalité des centres météorologiques nationaux assimilent opérationnellement les hydrométéores dans leurs modèles de prévision à échelle convective. Plusieurs arguments peuvent être avancés pour soutenir ce choix et motiver à poursuivre les efforts vers l'assimilation de nouvelles observations sensibles aux hydrométéores.

1. En moyenne, les deux tiers de la surface terrestre sont couverts par des nuages (King *et al.*, 2013). De nombreuses observations, en particulier satellitaires, sont ainsi inutilisées car affectées par des hydrométéores. L'assimilation de ces observations permettrait de récupérer de l'information non seulement sur les hydrométéores, mais sur d'autres variables thermodynamiques : température, vents, pression, humidité.
2. Cet argument est renforcé par le fait que les zones où il y a beaucoup d'hydrométéores sont aussi les zones de croissance rapide des erreurs de prévision (McNally, 2002) et des zones météorologiquement intéressantes (zones convectives par exemple, Errico *et al.*, 2007).
3. L'assimilation des hydrométéores peut avoir des effets de bords bénéfiques dans d'autres domaines, la confrontation entre modèles et observations pouvant amener par exemple à une meilleure compréhension (et modélisation) des processus physiques par la mise en évidence de biais systématiques (Geer *et al.*, 2018).

Bien que les observations d'hydrométéores soient couramment assimilées, il reste moins courant d'analyser les variables hydrométéores. Ainsi dans AROME, les variables d'hydrométéores ne sont pas modifiées par l'analyse : l'incrément en hydrométéores est nul, les champs de l'ébauche sont « recyclés » dans l'analyse et dans l'état initial de la prévision subséquente. Comme le font par exemple Geer *et al.* (2018, dans leur section 2.1), il peut sembler légitime de s'interroger sur la nécessité d'analyser ces variables. Les performances actuelles des systèmes de PNT peuvent laisser penser qu'une bonne analyse des champs de masse, de température, de vent et d'humidité suffit pour réguler les variables micro-physiques. Celles-ci seraient alors considérées comme des variables « esclaves », soumises à l'évolution des variables dynamiques de plus grandes échelles spatiales et temporelles. La tendance est cependant à la prise en compte des hydrométéores dans la variable de contrôle de l'analyse (Geer *et al.*, 2018 ; Bannister *et al.*, 2019). Plusieurs arguments permettent de plaider en faveur d'une analyse des variables hydrométéores :

1. Un cadre commun pour l'assimilation des variables pronostiques permettrait une approche plus rigoureuse de l'assimilation des hydrométéores, trop souvent traitée de manière ad hoc :
  - possibilité de prise en compte explicite des erreurs d'ébauche et d'observation ;

- possibilité de mieux contraindre les opérateurs d'observations sensibles aux hydrométéores, étape nécessaire vers l'assimilation *all-sky* des radiances satellitaires par exemple (Errico *et al.*, 2007) ;
- possibilité de prise en compte explicite ou implicite des corrélations inter-variables (via les erreurs d'ébauche) et possiblement inter-temporelles (4DVar, 4DEnVar, lisseurs de Kalman).

Analyser les hydrométéores semble naturel pour assimiler des observations d'hydrométéores et des observations affectées par les précipitations et les nuages.

2. Initialiser les hydrométéores permettrait potentiellement de moins s'écarter de l'état d'équilibre du modèle, et donc de moins détériorer les champs analysés par une phase de *spin-up* (décrit ci-après) en début de prévision.
3. Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, plusieurs études montrent qu'initialiser les hydrométéores permet d'améliorer la prévision immédiate (de 0 h à 6 h) des précipitations. Parmi ces études, la plupart s'intéresse à l'assimilation d'hydrométéores (réflectivités radar le plus souvent) plutôt qu'à l'initialisation des hydrométéores. Il est donc souvent difficile de distinguer d'une part le bénéfice dû à l'initialisation des hydrométéores, et d'autre part le bénéfice dû à l'initialisation des autres variables analysées (humidité spécifique par exemple).

Arrêtons-nous en particulier sur le point 2.

### Le problème du spin-up

Une analyse obtenue par minimisation d'une fonction de coût ou par un procédé uniquement mathématique n'a pas toujours un sens physique. L'estimateur BLUE par exemple est construit à partir de critères d'optimalité statistique, mais n'est pas nécessairement un état « possible » du modèle. Dans ce cas, on dit que l'analyse introduit des déséquilibres dans le modèle. En effet :

- Il existe un état d'équilibre du modèle, un sous-espace de l'état du modèle vers lequel il est « attiré » au cours de son intégration (voir le chapitre 6 de Kalnay, 2013 pour un aperçu clair des systèmes chaotiques et de la notion d'attracteur d'un système dynamique).
- Généralement, l'analyse tire le modèle hors de son état d'équilibre. L'incrément d'analyse peut en effet comporter une composante non-équilibrée, qui se dissipe généralement au cours des premiers pas de temps du modèle, en provoquant possiblement des ondes aphysiques par exemple. Cet effet est indésirable puisqu'il détériore la prévision et entame la confiance que l'on peut accorder au modèle dans les premières heures de prévision.

- On touche ici à une caractéristique importante de l’assimilation de données en PNT : une « bonne » analyse n’est pas l’analyse la plus proche de la réalité à l’instant d’analyse, mais celle qui mènera à la meilleure prévision. La définition de « meilleure prévision » variant d’une application à l’autre, le schéma d’assimilation de données « optimal » dépend de l’application visée.

Ces déséquilibres dus à l’analyse peuvent être d’origine physique ou dynamique.

Un exemple de déséquilibre physique est fourni par le recyclage des champs d’hydrométéores dans l’analyse d’AROME. Si l’ébauche est nuageuse dans une zone où les observations indiquent un ciel clair, il est possible que l’analyse retire de l’humidité là où se trouvait le nuage. Puisque les champs d’hydrométéores ne sont pas modifiés par l’analyse, l’état initial comportera donc des zones nuageuses où l’humidité n’est pas à saturation. L’évaporation du nuage est alors laissée à l’initiative du modèle de prévision, provoquant ainsi une hausse de l’humidité spécifique et une libération de chaleur latente. On provoque ainsi dans les premiers pas de temps du modèle une modification, à tort, de champs d’humidité et de température initialement optimaux !

De manière plus générale, les déséquilibres liés à la physique (via le schéma microphysique, mais aussi ceux de rayonnement, de surface etc.) se traduisent par des déficits ou des excès de précipitations en début de prévisions, appelés respectivement *spin-up* ou *spin-down* (Hólm *et al.*, 2002 ; Kalnay, 2013 ; Bannister *et al.*, 2019). Dans la pratique, le terme de *spin-up* est souvent utilisé pour désigner ces deux phénomènes, voire tout ajustement *physique* du modèle vers son état d’équilibre après une étape d’analyse.

Ce phénomène de *spin-up* est problématique, puisqu’il rend les premières heures de la prévision inutilisables. Pour des applications de prévision immédiate, des extrapolations d’observations donnent d’ailleurs généralement de meilleurs résultats dans la première heure de prévision, avant que la prévision numérique ne prenne le relais (Sun *et al.*, 2014). Dans la littérature, les tentatives d’étudier le spin-up se basent souvent sur des séries temporelles de précipitations ou sur le temps de stabilisation des scores de précipitations (Dixon *et al.*, 2009 ; Kalnay et Yang, 2010 ; Sun *et al.*, 2012 ; Ingleby *et al.*, 2012 ; Hwang *et al.*, 2019). On peut légitimement espérer que la prise en compte des hydrométéores dans l’analyse permette de réduire encore davantage le *spin-up* (Sun *et al.*, 2012 ; Brousseau *et al.*, 2016).

Un exemple typique de déséquilibre d’ordre dynamique est celui de rupture de l’équilibre géostrophique. Ce déséquilibre peut se traduire par un déferlement irréaliste d’ondes rapides dans les premières heures de prévision. Lorsque des cycles d’assimilations sont effectués, il est donc important de s’assurer que les ébauches utilisées sont équilibrées. Dans le cas contraire, les déséquilibres risquent de se multiplier, voire de s’amplifier au fur et à mesure des analyses successives. Dans la pratique, le déséquilibre dynamique du modèle peut être visualisé par différents indicateurs : composante agéostrophique du vent, dérivée seconde de la pression de surface (Greybush *et al.*, 2011), norme des tendances de la pression de

surface au cours de l'intégration du modèle. C'est ce dernier indicateur qu'utilisent par exemple Brousseau *et al.* (2016) pour étudier les déséquilibres dynamiques à l'initialisation d'AROME. On peut voir sur la figure 1.13, tirée de leur article, que différentes configurations du système assimilation-prévision correspondent à des temps d'ajustement (retour à une valeur constante) plus ou moins longs.

Certains auteurs désignent également par le terme *spin-up* la propagation rapide d'ondes générées par ces déséquilibres dynamiques. Nous éviterons cette dénomination, et préférons parler de déséquilibres ou d'ajustements dynamiques, réservant le terme *spin-up* aux déséquilibres d'ordre physique, en accord avec l'origine historique du terme.

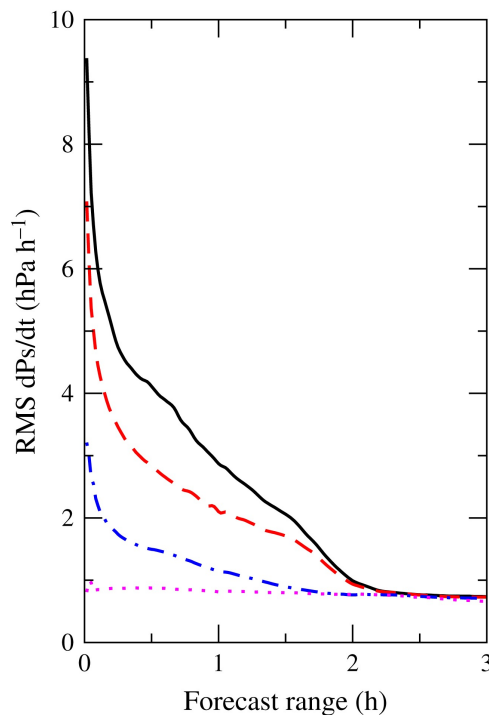


FIGURE 1.13 – Évolution temporelle de la norme de la tendance de la pression de surface calculée sur le domaine du modèle et sur 15 prévisions, en fonction de l'échéance de prévision. Parmi les différentes configurations, relevons l'ancienne configuration (traits pleins, —) et la nouvelle configuration (alternance point - tirets, — · —) avec changements dans la matrice  $\mathbf{B}$  et dans les conditions aux bords. Figure tirée de Brousseau *et al.* (2016).

Notons pour finir que plusieurs méthodes ont été proposées pour réduire ces déséquilibres dynamiques et le temps d'ajustement associé. Une première approche consiste à soigner la modélisation de la matrice  $\mathbf{B}$ . En effet, l'incrément étant une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$ , il suffirait que chacune de ces colonnes soit une perturbation « équilibrée » pour limiter le déséquilibre final (à supposer que le problème soit linéaire, au moins localement). C'est une des approches employées par Brousseau *et al.* (2016) : une calibration adaptée de la matrice  $\mathbf{B}$  lui permet de réduire le temps d'ajustement dynamique d'AROME à 45 minutes environ, ce qui a permis le passage à un cycle horaire



de l'assimilation opérationnelle. L'ajout d'un terme d'équilibre dans la fonction de coût de l'approche variationnelle est également une approche possible (Gauthier et Thépaut, 2001). Enfin<sup>1</sup>, des approches pragmatiques consistent à ajouter progressivement l'incrément d'analyse au cours des premiers pas de temps du modèle (IAU<sup>2</sup>, Bloom *et al.*, 1996), ou à filtrer la prévision pour supprimer les ondes indésirables (filtres digitaux Lynch et Huang, 1992; Peckham *et al.*, 2015).

### 1.4.2 Difficultés pour analyser les hydrométéores

L'assimilation des hydrométéores dans les modèles à échelle convective fait face à plusieurs problèmes plus ou moins fondamentaux (Errico *et al.*, 2007; Auligné *et al.*, 2011; Bannister *et al.*, 2019). Nous en retranscrivons ici quelques-uns. Nous ne présentons ici que les problèmes soulevés, les solutions possibles seront évoquées par la suite (sections 1.4.4, 2.3.2).

1. Les erreurs impliquées sont fortement non-gaussiennes, ce qui est contraire aux hypothèses de base de la plupart des techniques d'assimilation de données.
2. Les variables concernées sont bornées (positivité des contenus massiques), ce qui n'est pas prévu par les méthodes d'assimilation classiques, qui peuvent par exemple restituer des contenus spécifiques négatifs.
3. Les hydrométéores sont des champs presque discontinus, sujets à des erreurs de positionnement. Ces erreurs ne sont pas traitées en tant que telles dans les schémas classiques d'assimilation et se traduisent localement par des erreurs non-gaussiennes (Lawson et Hansen, 2005). Les erreurs de positionnement peuvent être horizontales, mais aussi verticales (Fowler *et al.*, 2010 par exemple).
4. Les échelles impliquées sont plus courtes que pour les variables classiques, les champs plus variables spatialement et temporellement. En conséquence, une modélisation climatologique des covariances d'erreurs d'ébauche n'est pas adaptée. C'est ce qu'expliquent en particulier Michel *et al.* (2011), en s'appuyant sur la méthode de Montmerle et Berre (2010) pour diagnostiquer des covariances d'erreurs d'ébauche pour les hydrométéores. Leurs résultats confortent ceux de Montmerle et Berre (2010), qui montraient entre autres que toutes les variables ont des longueurs horizontales de corrélation plus courtes dans les zones précipitantes. Ces résultats plaident pour l'utilisation d'une matrice  $\mathbf{B}$  hétérogène, anisotrope et dépendante de l'écoulement.
5. Les opérateurs d'observations sont sophistiqués et généralement non-linéaires. C'est le cas par exemple pour l'opérateur d'observation des réflectivités radar dans AROME,

---

1. On pourrait citer aussi la méthode *Running In Place* de Kalnay et Yang (2010), dans un contexte de filtre de Kalman d'ensemble.

2. *Incremental Analysis Update*

qui relie la composition atmosphérique en hydrométéore à la réflectivité (Caumont *et al.*, 2006) : disjonction de cas, relations logarithmiques, exponentielles, lois puissance etc. Les opérateurs d'observations satellites passives, appelés modèles de transfert radiatif, sont aussi fortement non-linéaires, avec des effets de seuils selon que la zone observée contient ou non des nuages par exemple (Errico *et al.*, 2007).

6. Il est plus facile d'enlever des hydrométéores que d'en rajouter là où il n'y en a pas. Dans l'approche variationnelle en particulier, cette asymétrie peut se décliner en deux points :
  - Problème du gradient nul. S'il n'y a pas d'hydrométéores dans l'ébauche, le tangent linéaire  $\mathbf{H}$  de l'opérateur d'observation est nul. En conséquence, la fonction de coût linéarisée est constante et aucun incrément n'est produit.
  - Problème de la variance nulle. Les schémas ensemblistes (voir section 1.3.3.g et chapitre 2) peuvent prédire une erreur d'ébauche de variance nulle là où aucun membre de l'ensemble ne contient d'hydrométéores. L'incrément, combinaison linéaire des colonnes de  $\mathbf{B}$ , restera nécessairement nul en ces points.
7. Ajouter les hydrométéores en variables de contrôle de l'analyse implique a priori une augmentation de la taille du vecteur de contrôle (selon le schéma utilisé), et donc une augmentation du coût numérique de l'assimilation.

De même qu'une grande partie des observations radar doit être rejetée pour vérifier l'hypothèse de diagonalité de la matrice  $\mathbf{R}$ , les observations d'hydrométéores font souvent l'objet d'un *screening* pour s'adapter aux hypothèses des schémas utilisés (linéarité des opérateurs d'observation, erreurs gaussiennes, etc.). Ce screening va parfois jusqu'à rejeter toute observation d'hydrométéore ou sensible aux hydrométéores.

Nous proposons maintenant un panorama des techniques utilisées opérationnellement pour assimiler les hydrométéores dans les modèles à échelle convective. On peut distinguer les méthodes indirectes (section 1.4.3), qui assimilent les observations d'hydrométéores sans analyser les variables d'hydrométéores, et les méthodes directes (section 1.4.4), qui analysent les variables d'hydrométéores à l'aide d'un formalisme plus classique tel que présenté en section 1.3.

### 1.4.3 Les méthodes indirectes

Nous commençons par présenter les méthodes indirectes, qui pour des raisons de simplicité ont été les premières employées pour assimiler les hydrométéores dans les modèles de PNT. Parmi les méthodes indirectes, on peut distinguer à la suite de Bannister *et al.* (2019) les méthodes pré-assimilation et les méthodes post-assimilation.

### 1.4.3.a Méthodes pré-assimilation

Les méthodes pré-assimilation proposent une assimilation en deux temps. Dans un premier temps, en amont du système d'assimilation, les observations sensibles aux hydrométéores sont converties en *pseudo-observations*, plus « proches » de l'espace du modèle. Par exemple, des radiances micro-ondes peuvent être « interprétées » en profils verticaux d'humidité spécifiques par une méthode 1DVar. Dans un deuxième temps, ces pseudo-observations sont assimilées de manière classique dans un système d'assimilation 3D ou 4D.

Historiquement, cette approche en deux temps a été utilisée dans les premières tentatives d'assimilation de radiances satellitaires. Dans ce cas, les pseudo-observations assimilées par les centres de prévision étaient des estimations de profils verticaux de température et d'humidité, fournies par les centres gérant les satellites météorologiques. Cette approche, sous-optimale, a été abandonnée au profit d'une assimilation directe des radiances satellitaire. Une rétrospective plus détaillée sur l'assimilation de données satellitaires depuis les années 1960 est proposée par Eyre *et al.* (2019).

Plusieurs raisons théoriques expliquent la sous-optimalité des approches avec pseudo-observations (Bannister *et al.*, 2019, section 5.5 , Eyre *et al.*, 2019, section 3.5) :

- l'ébauche est potentiellement utilisée deux fois (Lopez, 2011), lors de la première estimation (calcul des pseudo-observations), puis de la deuxième estimation (assimilation des pseudo-observations) ;
- estimer les statistiques d'erreurs des pseudo-observations est complexe : elles sont corrélées entre elles au sein d'un profil, possiblement corrélées entre les différents profils si l'ébauche de la première étape est la même pour tout les profils, possiblement de biais non-nul. Elles peuvent également être corrélées avec l'erreur d'ébauche de la deuxième étape, ce qui est contraire aux hypothèses de base de l'assimilation de données. Assimiler directement les observations d'origine permet d'utiliser leurs statistiques d'erreurs d'observation, généralement mieux connues.

Du fait de leur simplicité, ces approches indirectes restent cependant fréquemment utilisées dans un cadre expérimental, ou de manière transitoire pour des observations en attente d'une assimilation plus directe (Geer *et al.*, 2008 ; Lopez, 2011, par exemple).

Plusieurs observations sensibles aux hydrométéores ont été assimilées dans des modèles de PNT via des pseudo-observations.

1. Marécal et Mahfouf (2002) proposent d'assimiler des cumuls de pluie<sup>1</sup> par une approche 1DVar + 4DVar. Des profils de température et d'humidité spécifique sont

---

1. Cumuls de pluies qui sont eux-même des pseudo-observations ! Ils sont reconstitués à partir de données satellitaires dans le cas de cet article.

estimés par une méthode 1DVar, puis le contenu intégré (sommé sur la colonne) en vapeur d'eau est assimilé comme pseudo-observation dans un 4DVar. La même approche est utilisée par Lopez et Bauer (2007).

2. De manière similaire, Bauer *et al.* (2006) assimilent des radiances micro-ondes affectées par les précipitations, via le contenu intégré en vapeur d'eau (1DVar + 4DVar). On remarquera que la dénomination 1DVar + 4DVar peut être trompeuse pour ces deux premiers items, car elle laisse entendre que les pseudo-observations sont sous la forme de profils verticaux 1D, alors qu'une seule pseudo-observation scalaire est assimilée dans le système 4DVar (bien que cette pseudo-observation scalaire soit obtenue à partir d'un pseudo-profil 1D).
3. La méthode 1DVar + 4DVar est aussi reprise par Janisková (2015), pour assimiler des réflectivités de radar et lidar satellitaires via des profils de température et d'humidité spécifique. Ici, tout le pseudo-profil est assimilée dans le 4DVar.
4. Caumont *et al.* (2010) proposent d'assimiler des réflectivités radar avec une approche bayésienne non variationnelle pour la première étape. À la manière d'un filtre particulaire, chaque pseudo-profil d'humidité relative est construit à partir d'une base de profils a priori, pesés et moyennés en fonction de leur vraisemblance (compatibilité avec les observations radar). Dans la pratique, ces profils a priori sont fournis par les colonnes de l'ébauche au voisinage du point considéré. Le profil d'humidité ainsi obtenu est ensuite assimilé comme pseudo-observation dans le 3DVar d'AROME. Cette méthode, qui permet de prendre en compte une partie des erreurs de déplacements, est encore utilisée opérationnellement (Wattrelot *et al.*, 2014).
5. Pour l'assimilation de réflectivités radar, une méthode en deux temps a aussi été proposée par Wang *et al.* (2013a). Les réflectivités sont localement converties en contenu en pluie ou en vapeur d'eau à saturation (par relations analytiques directes), puis assimilées dans un 3DVar.
6. La méthode 1D-Bayésien de Caumont *et al.* (2010) a aussi été reprise par Duruisseau *et al.* (2019) pour assimiler des observations satellitaires micro-ondes affectées par les nuages (1D-Bayésien + 4DVar). L'assimilation des radiances micro-ondes de l'instrument MHS<sup>1</sup> dans ARPEGE à l'aide de cette méthode est prévu pour 2021 (Mahfouf, 2020, communication personnelle). La viabilité de la méthode bayésienne a également été testée pour les radiances infrarouges de IASI dans la thèse d'Imane Farouk (2018), sans réutilisation des pseudo-observations restituées.

#### 1.4.3.b Méthodes post-assimilation

Ces méthodes, parfois dénommées méthodes d'« initialisation diabatique » (Sun *et al.*, 2014) consistent à modifier des variables du modèles après analyse, voire au cours de

---

1. *Microwave Humidity Sounding*

l'intégration du modèle.

La méthode de LHN (*Latent Heat Nudging*) a été initialement utilisée dans des modèles à faible résolution spatiale (Jones et Macpherson, 1997), mais adaptée par la suite aux modèles à échelle convective (par exemple Leuenberger et Rossa, 2007 à MétéoSuisse, Stephan *et al.*, 2008 au DWD<sup>1</sup>, Dixon *et al.*, 2009 au MetOffice – UK). Le principe de la méthode est de forcer le modèle à correspondre aux cumuls de pluie observés dans les instants autour de l'analyse. Pour cela, on agit au cours de l'intégration du modèle pour injecter (ou retirer) artificiellement de la chaleur latente dans les colonnes du modèle où cela est nécessaire, ce qui est censé favoriser la convection et les précipitations. Cette méthode permet d'assimiler les réflectivité radar 3D via des estimations de cumuls de pluie (approche par colonne de Jones et Macpherson, 1997; Davolio et Buzzi, 2004; Stephan *et al.*, 2008), voire directement (approche 3D de Benjamin *et al.*, 2016). Un forçage du modèle par un terme d'humidité a également été testé par Davolio et Buzzi (2004). Presque par construction, ces méthodes permettent d'améliorer les scores de précipitation en début de prévision et de réduire le temps de *spin-up*.

Une autre classe de méthodes peut être désignée sous le nom de *cloud analysis schemes*. Ces méthodes utilisent des relations thermodynamiques pour ajuster les variables du modèle en fonction des observations, par exemple en supposant que l'humidité doit être à saturation dans les zones nuageuses (Albers *et al.*, 1996; Hu *et al.*, 2006). Une méthode similaire est utilisée par Benjamin *et al.* (2016), qui utilisent des observations satellitaires, de célomètres et de réflectivités radar pour déterminer la base et le sommet des nuages. Selon l'environnement thermodynamique correspondant dans le modèle, ils ajoutent ou enlèvent du contenu en hydrométéores. Température et humidité sont également modifiées en fonction pour garantir une certaine cohérence et pour limiter les ajustements intempestifs en début de prévision. Malgré la modification des champs d'hydrométéores, on peut parler de méthode « post-assimilation » dans la mesure où cette étape de *cloud analysis* intervient après une étape d'assimilation des observations plus classiques.

Résumons les avantages et limitations de ces méthodes post-assimilation :

- elles permettent l'assimilation d'observations sensibles aux hydrométéores ;
- le temps de *spin-up* ou de *spin-down* est effectivement réduit par ces approches ;
- elles sont numériquement moins coûteuses que les approches directes de type 4DVar ou filtres de Kalman (Stephan *et al.*, 2008; Dixon *et al.*, 2009; Wang *et al.*, 2013a), plus rapides pour des applications en prévision immédiate.

En revanche :

- les modifications qu'elles apportent ne permettent pas toujours de créer un environnement thermodynamique adapté au maintien des précipitations ou des nuages, de

---

1. *Deutscher Wetterdienst*, service météorologique allemand

- sorte que l'impact dure rarement au-delà de 6 h ;
- les hypothèses sur lesquelles elles se fondent sont parfois critiquables : problème de l'advection horizontale des précipitations pour le LHN, hypothèses sur les relations entre variables pronostiques et variables observées (Bannister *et al.*, 2019) ;
  - elles ne permettent pas une prise en compte rigoureuse des erreurs d'ébauche et d'observation ;
  - elles perturbent une analyse supposée optimale, qui a déjà bénéficié de l'information disponible dans la plupart des observations (Renshaw et Francis, 2011).

#### 1.4.4 Les méthodes directes

Plusieurs centres opérationnels ou de recherche utilisent ou développent des méthodes d'assimilation directe, avec hydrométéores en variables de contrôle de l'analyse. Comme nous le verrons, les premiers essais d'introduction des hydrométéores en variable de contrôle visaient plus à permettre l'assimilation des observations radar qu'à initialiser les variables hydrométéores. Aujourd'hui encore, de nombreux travaux sont motivés par l'assimilation de données radar ou de données satellitaires *all-sky* (en ciel clair *et* nuageux).

Nous proposons ici une revue de quelques méthodes d'assimilation, en nous concentrant sur l'assimilation à échelle convective.

##### 1.4.4.a Avec un EnKF

Une des premières tentatives est celle de Snyder et Zhang (2003), qui utilisent un EnKF avec une variable de contrôle de contenu en pluie pour assimiler des données radar simulées. La première expérience avec des observations réelles et un EnKF est celle Dowell *et al.* (2004), suivie par de nombreuses expériences similaires (Aksoy *et al.*, 2009 ; Dowell *et al.*, 2011, par exemple).

Pour une application opérationnelle, notons le cas du modèle COSMO<sup>1</sup> du DWD, dont le système d'assimilation utilise un filtre de Kalman d'ensemble (LETKF<sup>2</sup>, Hunt *et al.*, 2007 ; Schraff *et al.*, 2016) incluant eau nuageuse liquide et glace nuageuse en variables de l'ensemble (Schomburg *et al.*, 2015 ; Geer *et al.*, 2018).

Notons que des expériences d'assimilation dans des modèles avec schémas microphysique à deux moments ont aussi été tentées sur des cas d'études (avec les deux moments en variables de contrôle) par Xue *et al.* (2010), Jung *et al.* (2012) et Putnam *et al.* (2019).

---

1. *Consortium for Small-scale MOdelling model*

2. *Local Ensemble Transform Kalman Filter*

La plupart de ces approches ne répondent pas aux questions de non-linéarité, de non-gaussianité soulevées précédemment. Pour ce qui est de la positivité des champs d'hydrométéores analysés, les valeurs négatives sont généralement remises à zéro avant la prévision (par exemple Schomburg *et al.*, 2015).

#### 1.4.4.b Avec un 4DVar

Le 4DVar a été la première des méthodes variationnelles à inclure des hydrométéores en variables de contrôle (Sun et Crook, 1997). Cela s'explique par la capacité du 4DVar à modifier des variables à un instant donné pour s'adapter à des observations d'autres variables à un autre moment de la fenêtre d'assimilation (Bauer *et al.*, 2010 ; Geer *et al.*, 2014). Ainsi, lorsque Wang *et al.* (2013b) introduisent  $q_c$  et  $q_r$  en variable de contrôle d'un 4D-Var (avec WRF<sup>1</sup>), ils ne modélisent que les auto-corrélations dans  $\mathbf{B}$  pour ces variables. Cela n'empêche pas la génération d'incrément multivariés au début de la fenêtre d'assimilation pour l'assimilation d'une observation de réflectivité en fin de fenêtre.

Une application à l'échelle convective est opérationnelle au Met Office, qui utilise un 4DVar avec une variable d'eau totale normalisée (Ingleby *et al.*, 2012) regroupant humidité spécifique, contenus en eau liquide nuageuse et glace nuageuse. L'avantage de cette approche est de réduire les discontinuités des champs et les non-gaussianités ou asymétries des variables. La redistribution des incréments d'eau totale en incréments d'humidité et d'hydrométéores nuageux est contrôlée par un opérateur de partitionnement en fonction de l'environnement thermodynamique (Migliorini *et al.*, 2018 ; Migliorini et Candy, 2019).

Un problème majeur subsiste pour le 4DVar avec hydrométéores, à savoir celui des non-linéarités dues aux schémas microphysiques des modèles. La minimisation du 4DVar incrémental nécessitant de recourir au tangent linéaire et à l'adjoint du modèle, l'approche choisie consiste généralement à ne linéariser que la partie « chaude » de la microphysique, laissant de côté tous les processus non-linéaires de changements d'état vers la phase solide (Sun et Crook, 1997 ; Wang *et al.*, 2013b). L'ajout d'hydrométéores solides dans la variable de contrôle est alors impossible, ce qui limite fortement les possibilités d'assimilation directe des observations radar par exemple.

#### 1.4.4.c Avec un 3DVar

L'avantage essentiel du 3DVar par rapport au 4DVar réside dans son moindre coût numérique. La difficulté essentielle pour analyser des hydrométéores dans un 3DVar réside

---

1. *Weather Research and Forecasting Model*, modèle à échelle convective développé par le NCAR, *National Center for Atmospheric Research*

dans l'estimation et la modélisation des covariances d'erreurs d'ébauche. À titre d'illustration, nous reproduisons en figure 1.14 un des résultats de Kong *et al.* (2018). L'incrément de grêle obtenu avec le 3DVar (volet b) est isotrope, et s'étend à des altitudes basses où la présence de grêle est irréaliste. Ce genre d'incrément motive le passage à une description ensembliste des covariances d'erreurs d'ébauche, qui permet des incréments anisotropes et dépendants de l'écoulement (volet c).

La supériorité des approches ensemblistes (séquentielles ou variationnelles) sur le 3DVar pour l'assimilation des hydrométéores a été démontrée à plusieurs reprises (Johnson *et al.*, 2015 ; Kong *et al.*, 2018). Nous choisissons cependant de présenter quelques travaux d'analyse des hydrométéores dans un 3DVar. En effet, les schémas 3DEnVar étudiés dans cette thèse héritent de certaines problématiques soulevées par le 3DVar. Par ailleurs, certains schémas EnVars avancés, dits EnVars hybrides, ajoutent à la description ensembliste de  $\mathbf{B}$  une description statique de type 3DVar, ce qui rend pertinent les efforts de recherche sur le sujet. On notera en particulier la série d'articles de Kong *et al.* (2018) et Liu *et al.* (2019a,b). Bien qu'ils ne proposent pas d'application dans un contexte météorologique réel, leur approche par expériences jumelles (OSSE) est particulièrement intéressante pour saisir les avantages et inconvénients relativement fondamentaux du 3DVar, de ses variantes et des méthodes alternatives.

1. Xiao et Sun (2007) utilisent un 3DVar (avec WRF) avec une variable de contenu en eau totale (humidité et hydrométéores liquides) en variable de contrôle de l'analyse. Cette approche est à rapprocher de celle du Met Office (section 1.4.4.b). Les incréments d'hydrométéores obtenus après application d'un opérateur de partitionnement sont anisotropes et dépendants de l'environnement thermodynamique, comme illustré en figure 1.15.
2. En 2012, Gao et Stensrud proposent d'assimiler des réflectivités radar en utilisant un 3DVar avec  $q_r$ ,  $q_s$  et  $q_g$  en variables de contrôle. Ils utilisent pour cela une classification des hydrométéores dans l'opérateur d'observation : ainsi la sensibilité aux hydrométéores liquide est forcée à 0 en-deçà d'une certaine température, de manière à rendre l'inverse de l'opérateur d'observation « plus physique ». Comme remarqué par Liu *et al.* (2019a), cette approche n'empêche pas la génération d'incrément d'hydrométéores irréalistes par le biais des covariances croisées dans  $\mathbf{B}$ . De plus, ces modifications ad hoc de l'opérateur d'observation peuvent avoir d'autres effets néfastes, et peuvent devenir problématiques dans le cas d'une approche hybride. (Liu *et al.*, 2019a) proposent plutôt de résoudre le problème des incréments irréalistes en modélisant des variances d'erreurs d'ébauche dépendantes de la température.
3. On notera pour finir l'article de Liu *et al.* (2019b), qui défendent l'utilisation des hydrométéores en variables de contrôle avec transformée logarithmique (pour rendre la distribution des erreurs plus gaussienne), et qui proposent plusieurs techniques pour résoudre les problèmes liés à ces changements de variables.



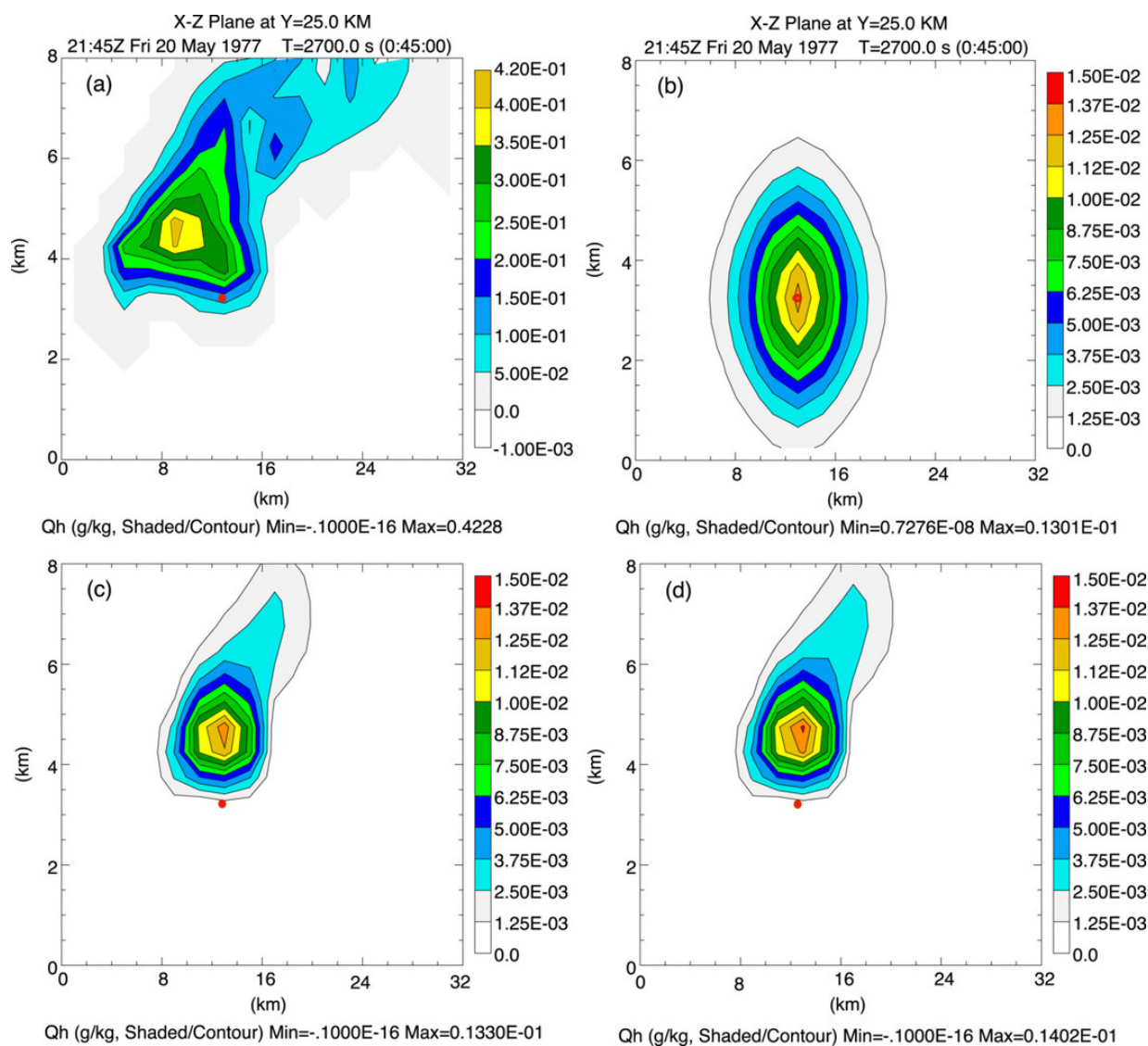


FIGURE 1.14 – Sections verticales d’incréments d’analyse pour la grêle (en  $\text{g kg}^{-1}$ ) pour l’assimilation d’une seule observation de réflectivité située au point rouge, dans le cadre d’expériences jumelles (OSSE<sup>1</sup>). L’incrément optimal (a) est à comparer aux incréments obtenus avec un 3DVar (b), un En3DVar (c) et un schéma EnKF déterministe (d). 60 membres sont utilisés pour (c) et (d). © American Meteorological Society. Tiré de Kong *et al.* (2018).

#### 1.4.4.d Avec un 3DEnVar pur ou hybride

Les tentatives d'assimilation des hydrométéores dans des schémas ensemblistes variationnels sont assez récentes. En 2017, Wang et Wang évaluent un 3DEnVar pur avec hydrométéores en variables de contrôle ( $q_r$ ,  $q_s$ ,  $q_g$ ) dans le cadre de l'assimilation de réflectivités radar. Leurs résultats indiquent qu'utiliser les rapports de mélange ou leur logarithmes en variables de contrôle amène à sous-estimer ou sur-estimer les incréments en hydrométéores. Ils proposent plutôt d'ajouter la réflectivité radar dans la variable de contrôle ! L'opérateur d'observation associé à ces variables est donc l'identité, et les incréments sont obtenus par le biais des covariances croisées dans la matrice  $\mathbf{B}$ . Les problèmes de non-linéarité de l'opérateur d'observation sont ainsi contournés.

Kong *et al.* (2018) comparent un 3DVar, un EnKF et un système 3DEnVar pur et hybride, tous avec 5 classes d'hydrométéores en variables de contrôle. Dans le cadre d'expériences jumelles (pas d'erreurs de modèle, observations simulées), leurs résultats penchent en faveur du filtre de Kalman d'ensemble au détriment de l'EnVar, pur ou hybride. Des expériences ultérieures ont cependant montré que les mérites comparés de ces méthodes s'inversaient lorsqu'on considérait un cas réel (Kong *et al.*, 2020). Dans ce cas, le 3DEnVar hybride avec transformée logarithmique des variables de contrôle d'hydrométéores donne de meilleurs résultats que l'EnKF en termes de réflectivité et vitesses radiales prévues à au plus une heure d'échéance.

Meng *et al.* (2019) testent l'utilisation d'un 3DEnVar hybride avec WRF, et montrent que l'ajout de quatre variables hydrométéores ( $q_l$ ,  $q_i$ ,  $q_r$ ,  $q_s$ ) en variables de contrôle améliore les scores de prévision des précipitations, avec un impact visible jusqu'à 12 h d'échéance. Une comparaison qualitative de leurs expériences est reportée en figure 1.16.

Notons pour finir que des algorithmes de type EnVar 4D avec hydrométéores ont déjà été testés (Zhang *et al.*, 2015 ; Wang *et al.*, 2020, avec  $q_r$  en variable de contrôle).

#### 1.4.4.e Avec le MLEF

En 2013, Zhang *et al.* ajoutent cinq espèces d'hydrométéores (les mêmes qu'AROME) dans la variable de contrôle du MLEF (*Maximum Likelihood Ensemble Filter*). Le MLEF est un algorithme variationnel ensembliste qui a pour particularité de minimiser la fonction de coût traditionnelle dans l'espace de l'ensemble et de ne pas nécessiter l'utilisation d'un tangent linéaire et d'un adjoint pour l'opérateur d'observation. En contrepartie, la problématique de la localisation (par domaine essentiellement) n'est pas directe. Leur travail fait suite à celui de Zupanski *et al.* (2011). L'utilisation d'un ensemble de 32 membres leur permet de décrire les covariances d'erreur d'ébauche. Deux expériences cyclées de 12 jours au total sont effectuées avec WRF, pour assimiler les données satellite affectées par les

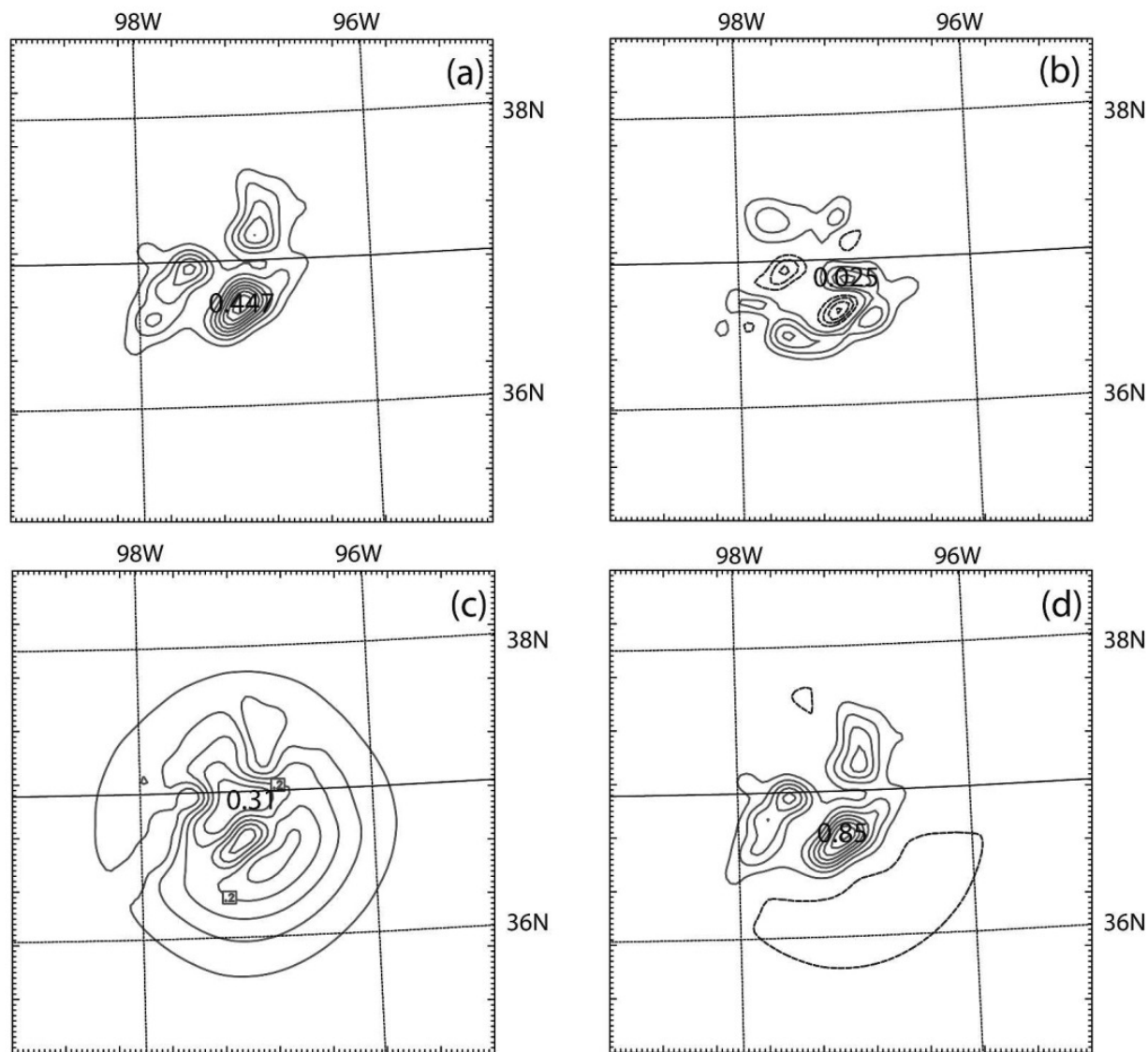


FIGURE 1.15 – Incrément d'analyse du 3DVar de WRF en réponse à l'assimilation d'une observation isolée de réflectivité correspondant à une innovation de 1 dBZ. L'observation est située à  $(36,790^{\circ}\text{N}, 97,093^{\circ}\text{W}; 3139,9\text{m})$  pour un radar Doppler situé à  $(36,741^{\circ}\text{N}, 98,128^{\circ}\text{W}; 378\text{m})$ . Les incréments présentés correspondent aux variables  $q_r$  (a),  $q_c$  (b),  $q_v$  (c) et  $T$  (d). Les lignes de niveaux sont espacées de  $0,05\text{ g kg}^{-1}$ ,  $0,005\text{ g kg}^{-1}$ ,  $0,05\text{ g kg}^{-1}$  et  $0,1\text{ K}$  respectivement ; les lignes de niveaux négatifs sont en pointillés et le niveau 0 est omis. © American Meteorological Society. Tiré de Xiao et Sun (2007).

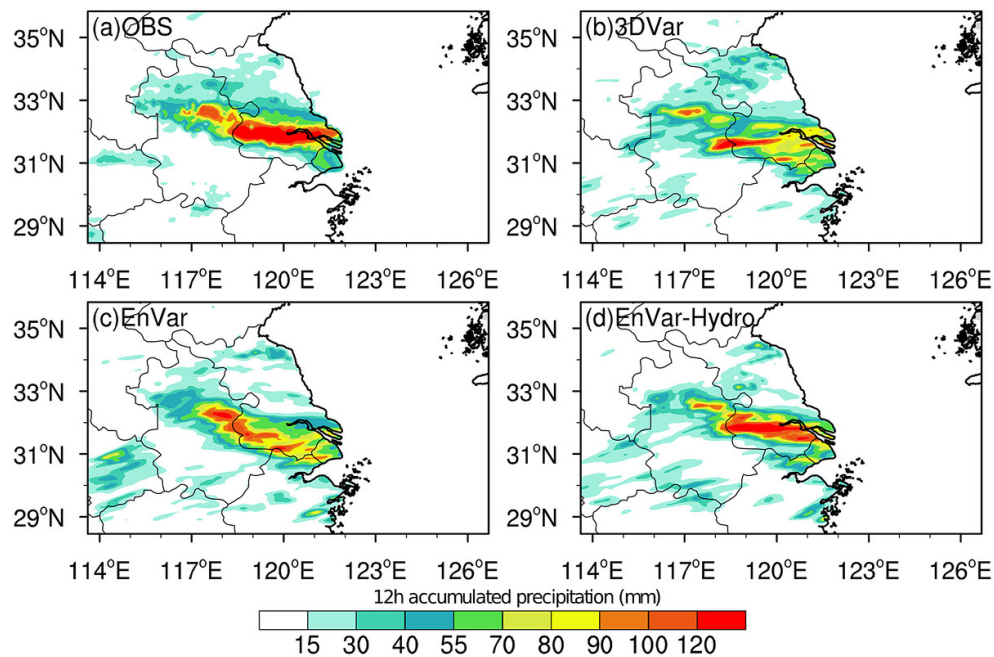


FIGURE 1.16 – Distribution des cumuls de précipitations sur 12 h à partir du 10 juin 2017 à 0 h TU pour des observations (produit indépendant) (a), une expérience 3DVar (b), EnVar hybride (c) et EnVar hybride avec hydrométéores (d). Figure tiré de Meng *et al.* (2019), reproduite avec la permission d'Elsevier.

précipitations. Par rapport à un contrôle 3DVar sans hydrométéores et avec une modélisation statique des covariances d'erreurs d'ébauche, un impact positif est noté sur la qualité des prévisions, en particulier pour la localisation et l'intensité des précipitations.

On retiendra de ce tour d'horizon que les approches basées sur des méthodes ensemblistes (EnVar, EnKF) se sont révélées plus performantes que les méthodes variationnelles avec modélisation statique des covariances d'erreur d'ébauche. Cette différence s'explique par la dépendance à l'écoulement des incréments obtenus. Le chapitre suivant présente en détail l'utilisation des schémas variationnels ensemblistes, et reprend les défis soulevés par leur adaptation pour l'analyse des hydrométéores.



# Les schémas EnVar

---

*Où l'on montre comment l'ajout des hydrométéores dans la variable de contrôle de l'assimilation est facilité par l'utilisation d'un schéma variationnel ensembliste.*

## Sommaire

---

2.1	Estimation d'une matrice B ensembliste . . . . .	<b>66</b>
2.1.1	L'Ensemble D'Assimilations AROME . . . . .	66
2.1.2	Estimateur standard de la covariance . . . . .	68
2.2	La localisation . . . . .	<b>69</b>
2.2.1	Atténuer le bruit d'échantillonnage . . . . .	70
2.2.2	Augmenter le rang de la matrice de covariance . . . . .	75
2.2.3	Utiliser une matrice localisée dans la pratique . . . . .	78
2.2.4	Variantes, extensions et alternatives à la localisation . . . . .	80
2.2.5	Le revers de la médaille . . . . .	83
2.3	Le bon schéma pour les hydrométéores ? . . . . .	<b>84</b>
2.3.1	Modélisation des erreurs d'ébauche . . . . .	85
2.3.2	Non-gaussianité, non-linéarités, positivité . . . . .	85
2.3.3	Ajouter une variable de contrôle . . . . .	87
2.4	Ajout des hydrométéores dans l'EnVar AROME . . . . .	<b>88</b>
2.4.1	Covariances verticales moyennes . . . . .	89
2.4.2	Fonctions de structure . . . . .	93
2.4.3	Analyses et incréments . . . . .	93

---

Ce chapitre reprend en partie la revue de Bannister (2017) sur les schémas ensemblistes variationnels (ou EnVar). Les aspects 4D ne seront pas traités ici ; le lecteur intéressé peut se référer sur ce sujet à Desroziers *et al.* (2014). Nous nous focalisons donc sur le schéma 3DEnVar, dont le prototype développé à Météo-France est décrit par Montmerle *et al.* (2018). Nous illustrons ensuite l'ajout des hydrométéores à la variable de contrôle dans le 3DEnVar AROME.

## 2.1 Estimation d'une matrice $\mathbf{B}$ ensembliste

Un 3D $\text{EnVar}$  (schéma variationnel ensembliste) n'est autre qu'un 3D $\text{Var}$  dans lequel la matrice de covariance des erreurs d'ébauche  $\mathbf{B}$  est déduite de la covariance empirique d'un ensemble. En particulier, la matrice  $\mathbf{B}$  d'un 3D $\text{EnVar}$  n'est pas une matrice climatologique calculée une fois pour toutes. Ce n'est pas non plus une matrice statique (variances homogènes, corrélations isotropes) calibrée à partir d'un ensemble de prévisions (« matrice du jour » de Brousseau *et al.*, 2012 par exemple). À chaque nouveau cycle d'assimilation d'un schéma EnVar correspond une nouvelle matrice  $\mathbf{B}$ , estimée en temps réel à partir des covariances empiriques d'un ensemble de prévisions.

Nous présentons dans un premier temps l'Ensemble D'Assimilations AROME, qui génère l'ensemble de prévisions (section 2.1.1), puis nous rappelons comment estimer une matrice de variance-covariance à partir d'un tel ensemble (2.1.2).

### 2.1.1 L'Ensemble D'Assimilations AROME

Un EDA<sup>1</sup> permet d'échantillonner selon une méthode de Monte-Carlo la distribution des erreurs d'un système d'assimilation et de prévision, tout au long des cycles d'assimilation successifs (voir par exemple Houtekamer *et al.*, 1996 ; Buehner, 2005 ; Pereira et Berre, 2006 ; Berre et Desroziers, 2010 ; Bonavita *et al.*, 2012). En particulier, il permet de construire un ensemble de prévisions indépendantes échantillonnant la distribution de probabilité *a priori*  $p(\mathbf{x})$ . Échantillonner la distribution de l'ébauche ou de l'erreur d'ébauche revient au même, puisque l'ébauche  $\mathbf{x}^b$  et l'erreur d'ébauche  $\boldsymbol{\epsilon}^b$  ne diffèrent que par un terme déterministe  $\mathbf{x}^t : \mathbf{x}^b = \mathbf{x}^t + \boldsymbol{\epsilon}^b$ . L'EDA échantillonne également la distribution de probabilité *a posteriori*  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ . Cet échantillonnage correspond à l'erreur d'analyse, et peut servir par exemple pour initialiser une prévision d'ensemble.

Une approche alternative pour échantillonner l'erreur d'ébauche est celle du filtre de Kalman d'ensemble. Il a cependant été montré qu'utiliser un EDA pour échantillonner une distribution de probabilité même non-gaussienne menait à des performances au moins aussi bonnes que l'EnKF (Jardak et Talagrand, 2018a,b). Des EDA ont été implémentés pour une utilisation opérationnelle à Météo-France (Berre *et al.*, 2015) et au CEPMMT (Bonavita *et al.*, 2015).

L'idée de l'EDA consiste à effectuer plusieurs cycles d'assimilation indépendants en parallèle, chacune des exécutions différant des autres par :

1. la perturbation des observations (de manière cohérente avec les statistiques des erreurs d'observations) ;

---

1. *Ensemble of Data Assimilations* ou Ensemble D'Assimilations

2. la perturbation de l'intégration temporelle du modèle (de manière cohérente avec les statistiques des erreurs du modèle).

Le chapitre 2 du Tech Memo de Isaksen *et al.* (2010) présente succinctement la théorie qui soutient cette approche. Il montre en particulier que dans le cas linéaire, l'ensemble de prévisions perturbées ainsi généré échantillonne bien la distribution de l'erreur d'ébauche  $p(\mathbf{x})$ . Ce résultat reste valide dans un cas faiblement non-linéaire uniquement, mais l'étude de Jarda et Talagrand (2018a,b) suggère que l'approche EDA reste une bonne approximation dans un cadre non-linéaire.

Dans la pratique, l'EDA AROME est opérationnel à Météo-France depuis l'été 2018. Sa version actuelle comprend 25 membres. Pour garder un coût numérique abordable, la résolution horizontale est dégradée de 1,3 km à 3,2 km par rapport à l'assimilation déterministe opérationnelle, le pas de temps prolongé de 50 s à 100 s, la durée des cycles d'assimilations étendue de 1 h à 3 h. La version hydrostatique du noyau dynamique est utilisée. Le nombre de niveaux verticaux reste à 90, et le schéma utilisé est toujours un 3DVar. Les erreurs d'observations sont prises en compte en les perturbant explicitement, de manière cohérente avec leurs covariances d'erreurs. Une inflation de la dispersion de l'ensemble permet de représenter les erreurs du modèle et les erreurs dans les approximations du schéma d'assimilation. Le calcul de l'inflation est basé sur le rapport entre l'erreur quadratique moyenne de la dernière analyse déterministe et la dispersion associée dans l'EDA (Raynaud et Bouttier, 2015). Puisqu'AROME est un modèle à aire limitée, des perturbations supplémentaires sont introduites via les conditions aux bords, fournies par l'EDA global d'ARPEGE (Berre *et al.*, 2015).

L'EDA AROME fournit des données utilisables par le système de prévision d'ensemble d'AROME et par le futur 3DEnVar d'AROME. Il reçoit un retour du schéma déterministe pour le calcul de l'inflation seulement. En particulier, on notera que les schémas 3DEnVar sont bien des schémas déterministes, qui à partir d'une unique ébauche déterministe produisent une unique analyse déterministe. Ces schémas font seulement appel à une information ensembliste à une étape essentielle du calcul de l'analyse, l'estimation de la matrice des covariances d'erreur d'ébauche.

### Version recherche de l'EDA AROME

Dans cette thèse, les illustrations et les expériences utilisant l'EDA AROME sont basées sur une version « recherche » de l'ensemble d'assimilation. La version recherche diffère de la version opérationnelle.

1. La taille d'ensemble est portée de 25 à 50 membres.
2. L'inflation est abandonnée au profit d'une approche SPPT (*Stochastically Perturbed Parametrization Tendencies*, Palmer *et al.*, 2009 ; Bouttier *et al.*, 2012) qui permet



d'estimer l'erreur du modèle. Cette approche consiste à perturber à chaque pas de temps les tendances de la physique du modèle, c'est-à-dire l'impact de la physique sur les variables pronostiques. Les perturbations sont spatialement cohérentes, avec une longueur de corrélation horizontale de 500 km.

### 2.1.2 Estimateur standard de la covariance

Supposons que nous avons un échantillon  $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$  de  $N$  réalisations indépendantes ( $N \geq 2$ ) d'un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$ . Dans notre cas, l'échantillon est un *ensemble* de prévisions météorologiques, dont les éléments sont appelés **membres** de l'ensemble. On peut estimer la covariance de la loi dont sont tirés les  $\mathbf{x}^k$  à l'aide de l'estimateur suivant :

$$\tilde{B}_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_i^k - \bar{x}_i)(x_j^k - \bar{x}_j) \quad (2.1)$$

où  $\bar{\mathbf{x}}$  est l'estimateur de la moyenne  $(1/N) \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^k$ . On peut aussi adopter une écriture matricielle, moins directe mais plus compacte. On définit les *perturbations* de notre ensemble comme les écarts de chaque membre à la moyenne d'ensemble :  $\delta \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}$  pour  $k = 1 \dots N$ . Regroupons les dans la *matrice des perturbations*, de taille  $n \times N$  :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (\delta \mathbf{x}^1 \quad \dots \quad \delta \mathbf{x}^N). \quad (2.2)$$

Alors on montre facilement que

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T. \quad (2.3)$$

Cet estimateur présente quelques propriétés intéressantes :

- La matrice des perturbations  $\mathbf{X}$  est une **racine** de l'estimateur  $\tilde{\mathbf{B}}$ , c'est-à-dire une matrice  $\mathbf{U}$  telle que  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$ .
- Tout comme la matrice de covariance de l'erreur d'ébauche, l'estimateur de la covariance est symétrique puisque  $(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ .
- On notera également son caractère positif, puisque pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $x^T \tilde{\mathbf{B}} x = x^T \mathbf{X}\mathbf{X}^T x = (\mathbf{X}^T x)^T (\mathbf{X}^T x) = \|\mathbf{X}^T x\|^2 \geq 0$ .
- On peut montrer que le facteur  $N - 1$  est nécessaire pour obtenir un estimateur non-biaisé :  $\mathbb{E} [\tilde{\mathbf{B}}] = \mathbf{B}$ , où  $\mathbf{B}$  est le moment d'ordre 2 du vecteur aléatoire étudié. Ce facteur est cohérent avec le fait que seules  $N - 1$  perturbations sont vraiment indépendantes, la dernière étant imposée par la contrainte de moyenne nulle des perturbations.

- On peut montrer (annexe A) que le rang de l'estimateur des covariances est celui de la matrice des perturbations. Le rang de l'estimateur est donc majoré par  $N - 1$  (rang de  $\mathbf{X}$  pour des membres linéairement indépendants). L'estimateur est donc non inversible (et non défini positif) si l'ensemble compte moins de  $n + 1$  membres, ce qui est toujours le cas pour les applications météorologiques.

La non-inversibilité de l'estimateur de la covariance est contraire aux hypothèses de l'assimilation de donnée. Cela dit, nous avons vu que les algorithmes ne faisaient jamais appel à l'inverse de la matrice  $\mathbf{B}$ . Nous pouvons donc, une fois ces algorithmes justifiés théoriquement dans le cadre d'une matrice  $\mathbf{B}$  inversible, les appliquer approximativement à l'aide d'une approximation non-inversible de la matrice  $\mathbf{B}$ . Ménétrier et Auligné (2015) montrent que l'analyse ainsi obtenue correspond bien à la solution du BLUE, mais avec une matrice  $\mathbf{B}$  seulement semi-définie positive.

Au-delà de cette question d'inversibilité, la taille nécessairement limitée des ensembles d'assimilations (quelques dizaines à quelques centaines de membres) pose plusieurs problèmes dans l'estimation ensembliste de la matrice  $\mathbf{B}$ . Nous allons maintenant présenter ces problèmes et voir comment la **localisation** permet de pallier cette taille trop faible de l'ensemble.

## 2.2 La localisation

La localisation des covariances échantillonnées est un outil essentiel de l'assimilation de données ensembliste. C'est l'ingrédient indispensable qui rend l'approche ensembliste envisageable en météorologie, et plus généralement, pour tous les problèmes de grande dimension.

Nous introduisons ici la localisation via deux justifications complémentaires : une approche plus statistique, visant à réduire le bruit d'échantillonnage (section 2.2.1), puis une approche plus algébrique, visant à augmenter le rang de la matrice  $\mathbf{B}$  (section 2.2.2). Nous montrerons ensuite comment la localisation est appliquée dans la pratique (section 2.2.3), et finirons par évoquer les alternatives possibles à la localisation telle qu'elle est appliquée pour le 3DEnVar AROME (section 2.2.4).

## 2.2.1 Atténuer le bruit d'échantillonnage

### 2.2.1.a Théorie

Du fait de la taille limitée de l'ensemble, l'estimateur de la covariance  $\tilde{\mathbf{B}}$  diffère significativement des covariances réelles  $\mathbf{B}$ . Cette différence se manifeste en particulier par du bruit d'échantillonnage dans l'estimation des corrélations à longue distance. Pour comprendre ce phénomène, on peut se pencher sur la variance de l'estimateur  $\tilde{B}_{ij}$ . D'après Ménétrier *et al.* (2015a, leur équation 11), on obtient :

$$\text{Var}(\tilde{B}_{ij}) = \frac{B_{ii}B_{jj} + B_{ij}^2}{N - 1}. \quad (2.4)$$

On note que la précision de l'estimateur augmente avec la taille  $N$  de l'ensemble, ce qui n'est pas surprenant. On peut ensuite définir de manière similaire à Ménétrier *et al.* (2015b, leurs équations 16 et 17) l'erreur relative de l'estimation :

$$\mathcal{E}(\tilde{B}_{ij}) = \frac{\sqrt{\text{Var}(\tilde{B}_{ij})}}{|B_{ij}|}, \quad (2.5)$$

ce qui donne :

$$\mathcal{E}(\tilde{B}_{ij}) = \sqrt{\frac{1 + 1/C_{ij}^2}{N - 1}} \quad \text{avec} \quad C_{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{B_{ii}B_{jj}}}. \quad (2.6)$$

Ainsi, l'erreur relative de l'estimation peut s'exprimer uniquement en fonction de  $N$  et de la corrélation asymptotique  $C_{ij}$  pour la paire de points  $(i, j)$  étudiée ! Cette erreur tend vers 0 quand les corrélations tendent vers 1, et diverge quand les corrélations tendent vers 0. Avec un ensemble de 50 membres par exemple, l'amplitude de l'erreur dépasse celle du signal ( $\mathcal{E}(\tilde{B}_{ij}) \geq 1$ ) dès que la corrélation asymptotique  $C_{ij}$  devient inférieure à 0,14 environ. On ne peut donc pas se fier aux covariances estimées aux points de faibles corrélations...

Le palliatif couramment utilisé, la localisation des covariances, consiste à atténuer artificiellement les covariances échantillonnées à longue distance (Hamill *et al.*, 2001), là où les erreurs d'ébauche sont supposées décorréliées. Mathématiquement, cela revient à multiplier chaque terme de la matrice  $B_{ij}$  de  $\tilde{\mathbf{B}}$  par une valeur scalaire, fonction de la distance entre les points  $i$  et  $j$  et décroissant de 1 à 0. Cette « distance » n'est pas nécessairement que géographique, les composantes  $i$  et  $j$  pouvant faire référence à deux variables différentes, ou deux altitudes différentes par exemple. La distance géographique entre deux points sera appelée distance de séparation, ou simplement *séparation*. L'expression des covariances

localisées est donnée par le produit :

$$\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \circ \widetilde{\mathbf{B}}, \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{L}$  est la matrice de localisation, et où  $\circ$  désigne un produit de Schur-Hadamard, c'est-à-dire le produit terme à terme des éléments de chaque matrice :  $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ . La matrice  $\mathbf{L}$  est une matrice de corrélation à valeurs positives. On verra plus loin que la matrice localisée  $\widehat{\mathbf{B}}$  ainsi obtenue est toujours symétrique positive, et généralement définie positive.

L'erreur relative de l'estimateur ainsi obtenu est donnée par :

$$\mathcal{E}(\widehat{B}_{ij}) = |L_{ij}| \mathcal{E}(\widetilde{B}_{ij}). \quad (2.8)$$

L'erreur relative est donc réduite si  $L_{ij} < 1$ . On remarquera cependant que plus  $L_{ij}$  est faible, plus l'estimateur  $L_{ij}\widetilde{B}_{ij}$  de la covariance est biaisé. On peut donc concevoir le choix d'une localisation optimale comme un compromis entre biais et variance de l'estimateur  $L_{ij}\widetilde{B}_{ij}$ .

En un point donné, plus la taille  $N$  de l'ensemble est élevée, plus la variance  $[\mathcal{E}(\widetilde{B}_{ij})]^2$  de l'estimateur empirique des covariances est réduite, et plus la localisation optimale est proche de 1. Inversement, un ensemble de petite taille est associé à un estimateur des covariances très bruité et donc un besoin plus marqué de localisation (proche de 0). En ce qui concerne la décroissance globale de la fonction de localisation, un petit ensemble aura besoin d'une fonction de localisation qui décroît rapidement avec la distance de séparation. À l'inverse, un grand ensemble est associé à une décroissance plus lente de la localisation (Houtekamer et Mitchell, 2001 ; Lorenc, 2003). Dans le cas limite d'un ensemble de taille infinie, la fonction de localisation optimale ne décroît pas avec la distance : la localisation vaut toujours 1, et les covariances empiriques sont inchangées.

### 2.2.1.b Un exemple simple

La figure 2.1 illustre le principe de la localisation dans un cas unidimensionnel avec un système jouet. On définit une matrice de covariances d'erreurs d'ébauche  $\mathbf{B}$ , supposée inconnue (premier volet). Nous supposons que nous disposons d'un système de génération des membres sans erreur (précisions, sans erreur dans l'approximation des erreurs...), et échantillons donc 50 membres dont les statistiques sont cohérentes avec  $\mathbf{B}$ . Nous ne sommes donc limités que par l'erreur d'échantillonnage. La matrice  $\widetilde{\mathbf{B}}$  des covariances échantillonnées (deuxième volet) présente des similitudes avec la matrice  $\mathbf{B}$ . On note cependant des covariances non-nulles à longue distance, c'est-à-dire dans les quartiers nord-est et sud-ouest de la matrice.

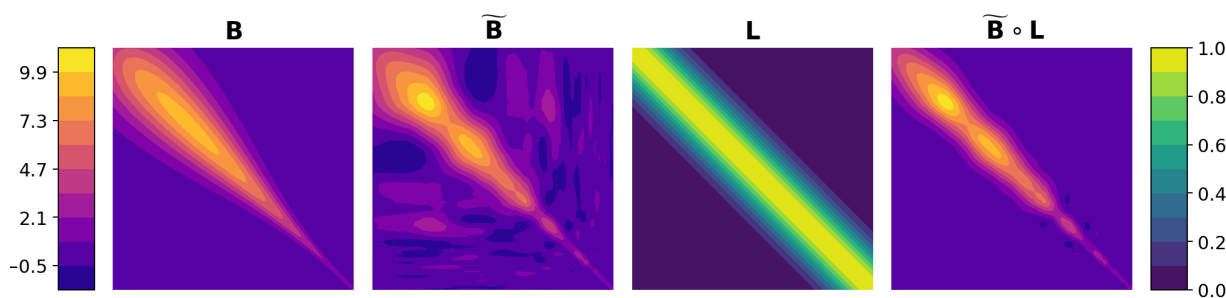


FIGURE 2.1 – Illustration schématique du principe de la localisation. Les échelles de couleurs croissent du foncé vers le clair.

La localisation  $\mathbf{L}$  (troisième volet) est homogène, c'est-à-dire que les colonnes sont toutes construites à partir d'un unique profil, fonction de la distance de séparation uniquement. On a choisi comme profil la fonction de Gaspari et Cohn (1999, voir figure 2.2), très utilisée en assimilation de données depuis Houtekamer et Mitchell (2001). Il s'agit d'une fonction de corrélation, polynomiale par morceaux, de support compact, et qui approxime une fonction gaussienne. Elle ne dépend que d'un paramètre  $c$ , correspondant au quart du support de la fonction. Le paramètre  $c$  est lié à l'écart-type  $\sigma$  de la gaussienne qu'il approxime par la relation  $\sigma = c(0,3)^{1/2}$ . Dans notre cas, la valeur de  $c$  retenue est celle qui minimise l'écart quadratique moyen entre la matrice  $\mathbf{B}$  et la matrice localisée  $\hat{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}} \circ \mathbf{L}$  (dernier volet).

Comme on peut le voir sur ce dernier volet, les covariances localisées ne présentent plus de corrélations à longue distance. On retrouve bien les deux caractéristiques principales des covariances d'origine : les variances décroissent de la gauche vers la droite (sur la diagonale), et des longueurs de portée des covariances diminuent de la gauche vers la droite (« épaisseur » de la diagonale). On note cependant un effet indésirable de la localisation, à savoir l'atténuation (à tort) des covariances dans le coin supérieur gauche.

### 2.2.1.c Un exemple tiré d'AROME

La figure 2.3 (volets a, b, c) est l'équivalent de la figure 2.1 dans le cas des covariances horizontales d'erreur d'ébauche pour AROME. Quelques différences méritent d'être relevées :

- Le volet correspondant aux covariances vraies n'est pas connu (autrement le problème de la localisation ne se poserait pas!);
- Il n'est pas possible de représenter une matrice  $\mathbf{B}$  intégrale : d'une part son estimation est numériquement inenvisageable, d'autre part la représentation d'un vecteur d'état 3D sous forme de vecteur colonne est graphiquement illisible, contrairement au cas unidimensionnel. Nous ne pouvons représenter clairement que des extraits de colonnes des matrices de covariance ou de localisation. Nous choisissons donc de nous placer

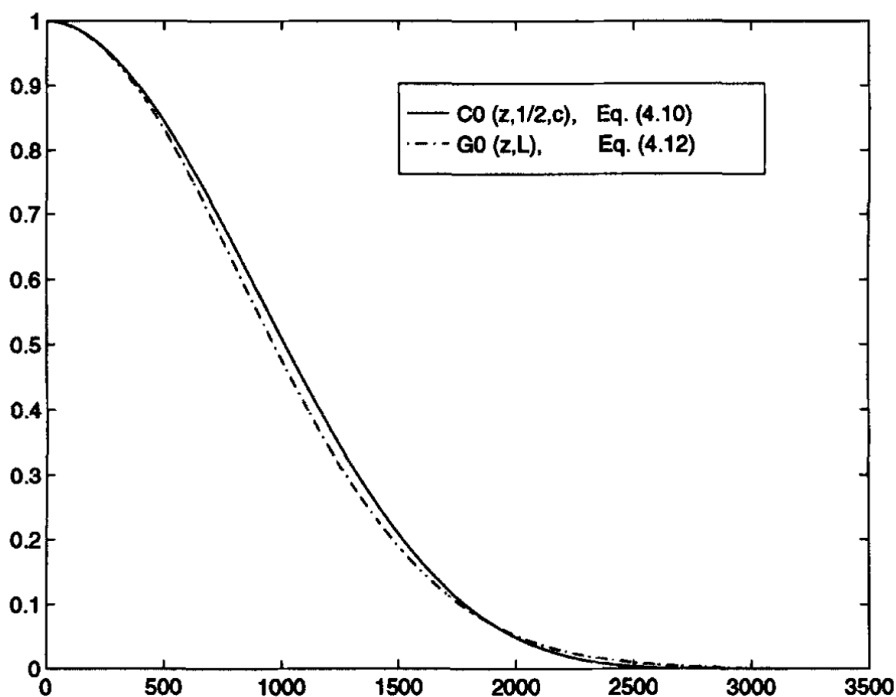


FIGURE 2.2 – Profil d’une fonction de Gaspari et Cohn (1999) (traits pleins) et de la gaussienne associée (pointillés). Le paramètre  $c$  de la fonction de corrélation vaut ici 1500 km, et l’écart-type de la gaussienne est  $\sigma = c(0,3)^{1/2}$  (voir texte). La figure est tirée de Gaspari et Cohn (1999).

dans un cas bidimensionnel, en nous focalisant sur le champ de température au niveau modèle 70 (moyenne troposphère). La colonne représentée correspond au point de grille à l’intersection des lignes pointillées.

- Pour la matrice  $\tilde{B}$  échantillonnée, on remarque que le maximum de la colonne se situe sur la diagonale de la matrice (intersection des lignes pointillées. Notons que cette propriété n’est pas nécessairement vérifiée si ce n’est dans le cas d’une matrice de covariance homogène.

Les remarques du modèle jouet restent valides : la localisation conserve la structure du signal pour les séparations faibles, et permet d’annuler le bruit à longue distance.

Pour illustrer la dépendance des covariances ensemblistes à l’écoulement, on a ajouté à cette figure une carte des covariances calculées à partir de plusieurs points centrés sur 25 sous-domaines géographiques (volet d). Chaque carré correspond ainsi à une colonne différente de la matrice localisée. Par rapport à une matrice climatologique, la matrice ensembliste localisée a quelques propriétés désirables :

- les variances sont hétérogènes, elles peuvent varier d’un point à l’autre ;
- les longueurs de portée des covariances sont également hétérogènes ;
- les fonctions de structure peuvent être anisotropes, en se déployant dans une direction

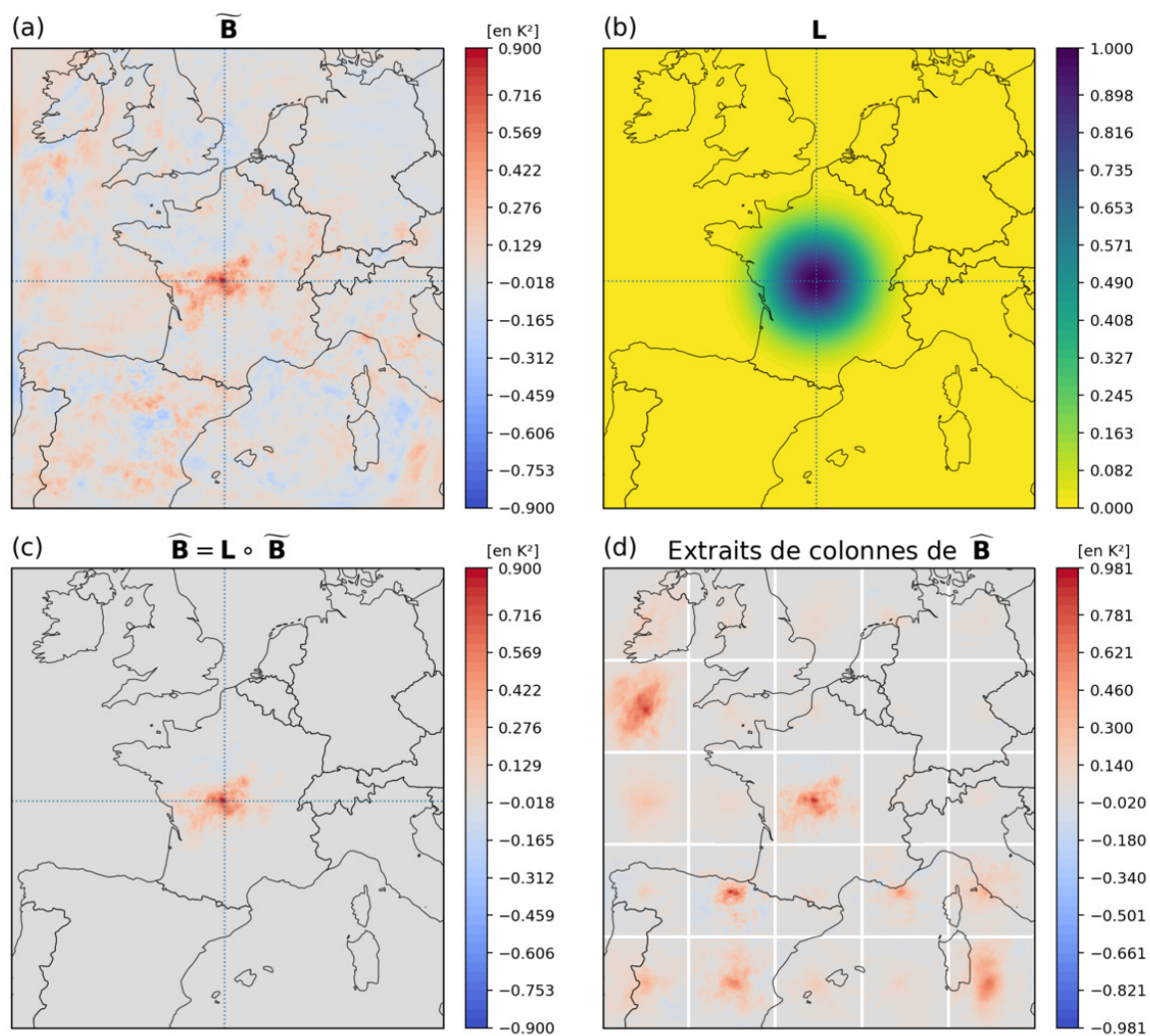


FIGURE 2.3 – Colonnes de matrices de localisation (a), et de matrice ensembliste localisée (c) ou non (b). Le volet (d) montre l'équivalent de (c) pour des points centrés dans 25 sous-domaines. La matrice ensembliste est estimée à partir des champs de température au niveau 70 (moyenne troposphère) d'un ensemble de 50 membres de l'EDA AROME, valides le 21 mai 2018 à 15 h TU. La localisation est un profil de Gaspari et Cohn, approximant une gaussienne d'écart-type 150 km.

privilégiée.

En ce qui concerne la localisation pour AROME telle qu'utilisée dans le prototype de Montmerle *et al.* (2018), le même profil est choisi pour toutes les variables, et pour toutes les covariances croisées inter-variables. Le terme profil ici n'est pas à entendre au sens de profil vertical seulement. Dans le cas  $L_{ij} = f(d_h(i,j)) \times g(d_z(i,j))$  où la localisation entre les points de grille  $i$  et  $j$  n'est fonction que des distances horizontale  $d_h(i,j)$  et verticale  $d_z(i,j)$  entre ces points, le profil vertical de localisation est donné par  $g$ , et le profil horizontal par  $f$ .

Nous détaillerons au chapitre suivant quelques approches qui permettent d'appliquer des localisations plus variables.

## 2.2.2 Augmenter le rang de la matrice de covariance

### 2.2.2.a Le problème du rang

La localisation peut aussi être pensée comme un moyen d'augmenter le rang de la matrice de covariance échantillonnée. Comme nous l'avons vu précédemment (section 2.1.2), le rang de  $\tilde{\mathbf{B}}$  est majoré par  $N - 1$ . Cela est problématique puisque par construction, l'incrément d'analyse est restreint à l'image de  $\mathbf{B}$ . C'est le cas pour le BLUE, mais aussi<sup>1</sup> pour la formulation incrémentale avec préconditionnement en  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{B}^{1/2}$  (section 1.3.3.b). Utiliser  $\tilde{\mathbf{B}}$  comme approximation de  $\mathbf{B}$  reviendrait donc à chercher l'incrément d'analyse dans  $\text{Im}(\tilde{\mathbf{B}}) \subset \text{Im}(\mathbf{X})$ , où  $\text{Im}(\mathbf{M})$  désigne l'image de  $\mathbf{M}$ . L'incrément serait alors une combinaison linéaire des perturbations de l'ensemble. On ne disposerait donc que de  $N - 1$  scalaires indépendants,  $N - 1$  degrés de liberté (Lorenc, 2003) pour résoudre ce problème de minimisation ! Or :

- $N \ll p$ . A priori, on ne pourra pas ajuster l'incrément à toutes les observations.
- $N \ll n$ . À prendre en compte puisque le problème ne consiste pas seulement à ajuster des observations, mais aussi à rester le plus proche possible de l'ébauche, et ce sur les  $n$  paramètres du vecteur de contrôle de l'analyse.

Pour nuancer le propos, on notera que la dimension « effective » du système météorologique est en réalité inférieure à la dimension du vecteur d'état. En ce sens, il n'est peut-être pas catastrophique d'avoir un ensemble de  $N < n$  membres. La dimension pertinente serait plutôt celle du sous-espace instable et neutre de la dynamique du modèle (Bocquet et Carrassi, 2017), c'est-à-dire (schématiquement), le sous-espace engendré par les

---

1. Ce résultat est immédiat pour le préconditionnement en  $\mathbf{B}$ . Il est aussi valide pour le préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$  puisque l'image d'une matrice et l'image d'une de ses racines sont les mêmes (annexe A, propriété A.2).



composantes de l'erreur qui ne décroissent pas naturellement au cours de l'intégration du modèle. Ce sont ces composantes de l'erreur qui ont besoin d'être contrôlées régulièrement par l'assimilation de données. Le problème demeure cependant puisque cette dimension effective du système dynamique n'en reste pas moins bien supérieure à la taille de nos ensembles. De plus, l'intérêt d'analyser les hydrométéores ne réside pas uniquement dans le contrôle du système dynamique. Leur prise en compte ne peut qu'augmenter l'écart entre la taille du problème à résoudre et le nombre de degrés de liberté disponibles.

### 2.2.2.b Localiser pour augmenter le rang

Nous allons maintenant voir en quoi la localisation est aussi une réponse à ce problème de rang faible. Pour cela, nous introduisons, à la suite de Bishop *et al.* (2017), le *produit de modulation* de deux matrices.

#### Définition 2.1

Soit  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ . Le produit de modulation de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  est la matrice  $\mathbf{C} \Delta \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times pq}$  dont les colonnes sont les produits de Schur croisés des colonnes de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ . Plus précisément,

$$(\mathbf{C} \Delta \mathbf{D})_{:,ip+j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_{:,i} \circ \mathbf{C}_{:,j}$$

où les indices  $0 \leq i \leq q - 1$  et  $0 \leq j \leq p - 1$  désignent les colonnes de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{C}$ .

On peut alors montrer (voir Buehner, 2005, ou la démonstration en annexe B) que si  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}$  est une racine carrée de  $\mathbf{L}$ , au sens  $\mathbf{L} = \mathbf{U}^{\mathbf{L}}\mathbf{U}^{\mathbf{L}T}$ , alors une racine carrée de  $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \circ \widetilde{\mathbf{B}}$  est donnée par  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{X}$  :

$$\mathbf{U}^{\mathbf{L}}\mathbf{U}^{\mathbf{L}T} \circ \mathbf{X}\mathbf{X}^T = (\mathbf{U}^{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{X})(\mathbf{U}^{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{X})^T \quad (2.9)$$

Puisque la matrice de localisation est symétrique positive, elle admet nécessairement une racine carrée  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}$ . Les conditions sont donc bien vérifiées, et la matrice localisée  $\widehat{\mathbf{B}}$  admet donc bien une racine. Cette expression sous forme factorisée est très utile, en particulier pour les schémas variationnels avec préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$ . On verra aussi qu'elle fournit un moyen d'appliquer l'opérateur  $\widehat{\mathbf{B}}$  sans avoir à calculer terme à terme le produit de Schur (section 2.2.3).

On notera au passage que cette formulation permet de montrer immédiatement le caractère positif de la matrice localisée ! Son caractère défini positif est moins évident. Une

matrice ensembliste qui comporte des colonnes nulles (classique dans le cas d'une matrice ensembliste avec hydrométéores) reste non-inversible après localisation. La localisation permet cependant d'« améliorer » le rang de la matrice de covariance. En effet, comme montré en annexe A, son rang est celui du produit de modulation  $\mathbf{U}^L \Delta \mathbf{X}$ . Il est donc fortement augmenté, puisque le produit de modulation comporte beaucoup plus de colonnes que  $\mathbf{X}$  ( $q$  fois plus si  $\mathbf{U}^L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ )! Le rang de la matrice localisée est discuté en annexe B dans le cas d'une matrice  $\mathbf{U}^L$  inversible.

### 2.2.2.c Interprétation : inflation de la taille d'ensemble

La factorisation de  $\widehat{\mathbf{B}}$  grâce au produit de modulation permet d'interpréter la localisation comme une *augmentation artificielle de la taille de l'ensemble*. En effet, la matrice  $\widehat{\mathbf{B}}$  est identique à une matrice de covariance qui serait obtenue à partir de la matrice de perturbations  $\mathbf{U} \Delta \mathbf{X}$  (il s'agit bien d'une matrice de perturbation, la somme de ses colonnes étant nulle).

Ces perturbations artificielles sont d'ailleurs très proches des perturbations d'origine. En effet, une matrice de localisation admet généralement une racine qui « ressemble » à une matrice de localisation. Dans le cas d'une localisation homogène avec un profil gaussien par exemple, une racine de  $\mathbf{L}$  serait fournie par la matrice de localisation homogène avec un profil d'écart-type divisé par  $\sqrt{2}$ . Les perturbations artificielles sont donc les produits terme à terme des perturbations d'origine avec les colonnes d'une matrice de localisation. Comme illustré en figure 2.4, chacune des  $N$  perturbations a été dupliquée en  $n$  exemplaires (si  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ), et chacun de ces exemplaires est filtré par une fonction de localisation centrée sur un point différent. Le résultat final est un ensemble de  $N \times n$  perturbations filtrées. L'incrément d'analyse n'est donc plus une combinaison linéaire des perturbations de l'ensemble, mais une combinaison linéaire des perturbations filtrées.

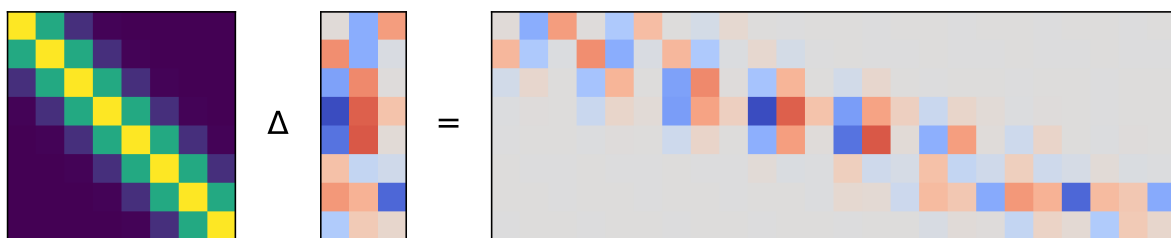


FIGURE 2.4 – Illustration de l'inflation artificielle de la taille de l'ensemble par produit de modulation, dans un cas jouet avec 3 membres ( $N = 3$ ) et un espace d'état de dimension  $n = 8$ . L'équation représentée est  $(\mathbf{U}) \Delta (\mathbf{X}) = (\mathbf{U} \Delta \mathbf{X})$ .

### 2.2.2.d Interprétation : coefficients lentement variables

Enfin, notons qu'il est possible d'interpréter ce produit de modulation sans recourir à la notion de perturbations filtrées. On peut montrer (annexe C) que l'incrément d'analyse obtenu est une combinaison linéaire des perturbations, comme dans le cas non-localisé, à ceci près que cette combinaison linéaire est lentement variable dans l'espace :

$$\left(\tilde{\mathbf{B}} \circ \mathbf{L}\right) \boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{L} \left[\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ \boldsymbol{\alpha}\right]\right) \circ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \quad (2.10)$$

$$\text{à comparer à } \tilde{\mathbf{B}} \boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^N \left(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)\text{T}} \boldsymbol{\alpha}\right) \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \quad (2.11)$$

Plus précisément, cette combinaison linéaire est obtenue en autorisant des combinaisons linéaires indépendantes (ou presque, voir équation 2.10) pour chacun des  $n$  points du vecteur d'état, puis en convoluant les  $N$  champs de coefficients ainsi obtenus par la matrice de localisation  $\mathbf{L}$ , ce qui assure le caractère lentement variable. Cette écriture avec coefficients lentement variables est due à Lorenc (2003), reprise dans une formulation plus directe par Wang *et al.* (2008) par exemple.

Plus les longueurs de localisation seront courtes, plus les combinaisons linéaires varieront rapidement dans l'espace. Inversement, une localisation peu sévère impliquera des combinaisons linéaires peu variables.

## 2.2.3 Utiliser une matrice localisée dans la pratique

### Appliquer une matrice localisée

La formule (2.7) nous donne les covariances  $\hat{\mathbf{B}}$  sous la forme d'une matrice. Dans l'approche variationnelle avec préconditionnement en  $\mathbf{B}$ , nous avons besoin de  $\hat{\mathbf{B}}$  en tant qu'opérateur matrice - vecteur.

L'annexe C montre qu'appliquer  $\hat{\mathbf{B}}$  à un vecteur  $\mathbf{x}$  s'opère simplement par :

$$\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ \left(\mathbf{L} \left(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ \mathbf{x}\right)\right). \quad (2.12)$$

L'opération la plus coûteuse est le produit matrice-vecteur qui consiste à appliquer la localisation  $\mathbf{L}$ . Cette opération doit être réalisée  $N$  fois pour chaque application de  $\hat{\mathbf{B}}$ ! Et  $\hat{\mathbf{B}}$  doit être appliquée une fois pour chaque itération d'un algorithme de minimisation. Heureusement les  $N$  applications de  $\mathbf{L}$  peuvent être réalisées en parallèle.

Nous ne détaillons pas le cas du préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$ , pour lequel  $N$  produits matrices vecteurs sont également requis (en appliquant  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}$  au lieu de  $\mathbf{L}$ ), également avec possibilité de parallélisation.

### Appliquer la localisation

Plusieurs méthodes existent pour appliquer la localisation sans calculer tous les termes de la matrice. Puisque la matrice de localisation est souvent choisie comme une matrice de corrélation homogène,  $\mathbf{L}\mathbf{x}$  est simplement le produit de convolution de  $\mathbf{x}$  par le profil de localisation choisi. Dans le cas où la localisation est identique pour toutes les variables 3D, une ré-écriture du problème permet d'obtenir le produit  $\mathbf{L}\mathbf{x}$  en n'appliquant la localisation qu'à un unique champ 3D (Bishop *et al.*, 2011, voir aussi la description des schémas de localisation du chapitre 4).

On sépare généralement le produit de convolution en convolution verticale et convolution horizontale. Pour être certain de travailler avec un opérateur symétrique positif, on peut l'appliquer sous la forme  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}\mathbf{U}^{\mathbf{L}T}$ , où  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}$  est une racine de  $\mathbf{L}$ . Le calcul sera d'autant plus simple si l'opérateur  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}$  est auto-adjoint.

Les deux approches communément pratiquées à Météo-France pour appliquer la localisation sont :

1. La localisation dans l'espace spectral. Dans cet espace, un produit de convolution n'est plus qu'une multiplication terme à terme. Le coût principal de l'algorithme vient alors des transformées spectrales.
2. Les filtres récurrents (Purser *et al.*, 2003; Michel et Auligné, 2010), qui permettent une convolution dans l'espace point-de-grille. Ils sont utilisés en particulier pour les convolutions verticales (Michel, 2012a), mais parfois aussi horizontalement.

Ces deux approches sont parallélisables. Cependant, les transpositions globales qu'elles utilisent pourraient se révéler limitantes pour des approches en plus grande dimension, du fait des communications entre CPU<sup>1</sup> qu'elles requièrent.

Mentionnons également la méthode NICAS (*Normalized Interpolated Convolution from an Adaptive Subgrid*) de Ménétrier (2020c), basée sur une approche locale (et donc parallélisable) et dont le coût varie en fonction de la complexité du profil de localisation et non en fonction de la résolution spatiale des champs considérés.

---

1. *Central Processing Unit*

## Variable de contrôle de la minimisation

Pour 3DEnVar avec préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$ , la taille de la variable de contrôle de la minimisation dépendra de la racine choisie pour la matrice de localisation. Si la racine  $\mathbf{U}^{\mathbf{L}}$  de  $\mathbf{L}$  est de taille  $n \times q$ , le vecteur de contrôle de la minimisation est de taille  $q \times N$  (avec possiblement  $q \times N > n$ ). Dans le cas d'une matrice  $\mathbf{B}$  hybride, que nous aborderons plus loin (section 2.2.4), la taille de la variable de contrôle augmente encore davantage. C'est une raison pour laquelle le préconditionnement en  $\mathbf{B}$ , qui limite à  $n$  la taille de la variable de contrôle de la minimisation, est parfois préféré dans l'approche EnVar (Gustafsson *et al.*, 2018, leur section 4.3.4) et en particulier dans l'EnVar AROME (Montmerle *et al.*, 2018).

Notons cependant que cet avantage est peut-être moins évident dans le cas d'un 4DEnVar, où la dimension de l'espace d'état est multipliée par le nombre d'instantanés considérés dans une fenêtre d'assimilation.

## 2.2.4 Variantes, extensions et alternatives à la localisation

### 2.2.4.a Localisation avec le filtre de Kalman d'ensemble

Historiquement, le concept de localisation est apparu dans la communauté des utilisateurs du filtre de Kalman d'ensemble (Houtekamer et Mitchell, 1998, 2001 ; Hamill *et al.*, 2001). L'approche historique de la localisation est légèrement différente de ce qui a été présenté jusqu'à maintenant, puisqu'elle est davantage tournée vers l'espace des observations. Cette approche est encore largement répandue. Nous la présentons brièvement pour lever toute possibilité de confusion avec la localisation des covariances dans l'espace du modèle.

On peut diviser cette approche en deux types de localisations :

1. La *localisation par domaine* (Houtekamer et Mitchell, 2001 ; Ott *et al.*, 2004). Elle consiste à séparer l'espace du modèle en domaines géographiques dans lesquels on n'assimile que les observations du domaine. Pour limiter les discontinuités à la jonction des domaines, on choisit généralement d'augmenter artificiellement l'erreur d'observation en fonction de la distance au point modèle analysé (Hunt *et al.*, 2007).
2. La *localisation des covariances dans l'espace des observations*. Dans la formule du gain de Kalman  $\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d}$ , la matrice  $\mathbf{B}$  apparaît deux fois. L'idée est de localiser  $\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  dans l'espace des observations, et  $\mathbf{B}\mathbf{H}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$  dans un espace croisé espace d'état - espace des observations (voir les revues de Houtekamer et Zhang, 2016 ou Vetra-Carvalho *et al.*, 2018).

Par rapport à la localisation des covariances dans l'espace du modèle, la limitation principale de ces approches réside dans la difficulté à assimiler des observations non-locales,

telles que les observations satellites (Campbell *et al.*, 2010; Fertig *et al.*, 2007). Il reste cependant possible d’implémenter une localisation implicite des covariances dans l’espace du modèle avec un filtre de Kalman d’ensemble. L’idée consiste à augmenter la taille de l’ensemble comme évoqué en section 2.2.2.c, pour obtenir un ensemble étendu dont les covariances correspondent aux covariances localisées de l’ensemble d’origine (Bishop et Hodyss, 2009b, 2011; Leng *et al.*, 2013; Bishop *et al.*, 2017; Farchi et Bocquet, 2019). Pour éviter une inflation prohibitive de la taille d’ensemble, il est possible de ne traiter ainsi que la localisation verticale, ce qui permet de résoudre le problème des observations satellitaires non-locales. Une localisation horizontale par domaine peut alors compléter le processus (voir par exemple Farchi et Bocquet, 2019).

### 2.2.4.b Localisation dépendante de l’échelle

En assimilation de données variationnelle, une alternative possible à un schéma de localisation homogène et isotrope est le schéma de localisation dépendante de l’échelle, ou SDL (*Scale-Dependent Localization*, Buehner, 2012; Buehner et Shlyueva, 2015). L’idée consiste à localiser plus ou moins sévèrement les covariances d’erreurs selon l’échelle spatiale des perturbations. Pour cela, les perturbations sont filtrées selon plusieurs bandes spectrales (généralement 3 dans la pratique), et une localisation adaptée est appliquée à chaque set de perturbations filtrées. Bien que les formulations d’origine du SDL aient été pensées pour un schéma variationnel avec préconditionnement en  $\mathbf{B}^{1/2}$ , nous donnons ici l’expression du SDL dans le cas d’un préconditionnement en  $\mathbf{B}$ , à la suite de Caron *et al.* (2018).

Chaque perturbation peut être décomposée selon plusieurs bandes spectrales, à l’aide de filtres spectraux  $\Psi_j$ ,  $1 \leq j \leq N_{\text{bands}}$ . Les perturbations filtrées sont notées  $\delta \mathbf{x}_j^k = \Psi_j \delta \mathbf{x}^k$ . Les filtres spectraux sont conçus de sorte à ce que la somme des perturbations filtrées redonne la perturbation d’origine, c’est-à-dire  $\sum_{j=1}^{N_{\text{bands}}} \delta \mathbf{x}_j^k = \delta \mathbf{x}^k$ . La matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste localisée avec l’approche SDL s’écrit alors :

$$\mathbf{B}_{\text{SDL}} = \sum_{j_1=1}^{N_{\text{bands}}} \sum_{j_2=1}^{N_{\text{bands}}} \left( \sum_{k=1}^N \delta \mathbf{x}_{j_1}^k \delta \mathbf{x}_{j_2}^{k\text{T}} \right) \circ \mathbf{L}_{j_1, j_2} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{L}_{j_1, j_2}$  est la matrice de localisation entre bandes spectrales  $j_1$  et  $j_2$ , vérifiant  $\mathbf{L}_{j_1, j_2} = \mathbf{U}^{j_1} \mathbf{U}^{j_2\text{T}}$ , avec  $\mathbf{U}^{j_1}$  une racine de  $\mathbf{L}_{j_1, j_1}$ .

Appliquer la matrice  $\mathbf{B}_{\text{SDL}}$  ainsi obtenue s’effectue dans la pratique via les racines des localisations intra-bandes :

$$\mathbf{B}_{\text{SDL}} \mathbf{x} = \sum_{j_1=1}^{N_{\text{bands}}} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_{j_1}^k \circ \left( \mathbf{U}^{j_1} \left( \sum_{j_2=1}^{N_{\text{bands}}} \mathbf{U}^{j_2\text{T}} (\delta \mathbf{x}_{j_2}^k \circ \mathbf{x}) \right) \right). \quad (2.14)$$

Par rapport à l'expression standard de la localisation (équation 2.12), le coût est multiplié par  $2N_{\text{bands}}$  (sans compter le filtrage des perturbations).

Notons que le SDL n'est donc pas une localisation par produit de Schur, dans la mesure où il est impossible d'exprimer la matrice de covariance localisée sous la forme  $\mathbf{L} \circ \tilde{\mathbf{B}}$ . En particulier, la formulation d'origine du SDL proposée par Buehner (2012) forçait à 0 les localisations croisées inter-bandes  $\mathbf{L}_{j_1, j_2}$ , ce qui produisait un effet de lissage spatial des covariances. Les comparaisons des formulations avec ou sans localisations croisées laissent penser que la formulation de Buehner (2012) n'est bénéfique qu'avec de petites tailles d'ensemble, de l'ordre de  $\mathcal{O}(10)$  (Caron *et al.*, 2018). Par la suite, nous désignons par SDL l'approche que nous venons de présenter, avec localisations croisées.

La localisation dépendante de l'échelle a été testée dans plusieurs modèles de PNT à échelle globale ou locale, avec un impact positif sur les scores de prévision. Le SDL a en particulier été implémenté dans le prototype de 3DEnVar d'AROME par Caron *et al.* (2018). De manière générale, l'effet du SDL sur les covariances localisées est similaire à celui d'une localisation dépendante de la variable, du niveau vertical et de la position géographique (Caron et Buehner, 2018). Jusqu'à présent, le SDL n'a été appliqué que pour appliquer des localisations *horizontales* différentes selon les échelles *horizontales* des perturbations.

#### 2.2.4.c Covariances hybrides

Dans un contexte variationnel, l'approche hybride (Hamill et Snyder, 2000 ; Lorenc, 2003 ; Wang *et al.*, 2007) est aussi très utilisée. Elle consiste à utiliser comme matrice  $\mathbf{B}$  une combinaison linéaire  $\mathbf{B}_{\text{hyb}}$  d'une matrice ensembliste  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \circ \tilde{\mathbf{B}}$  et d'une matrice climatologique  $\mathbf{B}_{\text{clim}}$  :

$$\mathbf{B}_{\text{hyb}} = \beta_e^2 \hat{\mathbf{B}} + \beta_c^2 \mathbf{B}_{\text{clim}}$$

où  $\beta_e^2$  et  $\beta_c^2$  sont des coefficients scalaires positifs. On peut voir cette approche comme un raffinement de la localisation, où le filtrage des covariances n'est plus linéaire ( $L_{ij} \tilde{B}_{ij}$ ), mais affine ( $\beta_e L_{ij} \tilde{B}_{ij} + B_{\text{clim } ij}$ ). Pour éviter les ambiguïtés, un schéma 3DEnVar qui n'utilise pas de covariances climatologiques est parfois appelé schéma 3DEnVar *pur*, par opposition à un schéma 3DEnVar *hybride*.

Notons que cette approche a des équivalents dans la communauté du filtre de Kalman d'ensemble. Ainsi, Kretschmer *et al.* (2015) proposent d'augmenter la taille de l'ensemble par des perturbations *climatologiques*, ce qui revient à rajouter un terme statique à la matrice de covariance empirique de l'ensemble.

#### 2.2.4.d Time-lag

Une augmentation possible de la taille de l'ensemble est d'utiliser l'approche *time-lag* (Hoffman et Kalnay, 1983) pour l'estimation de la matrice de covariance d'erreurs d'ébauches. Cette approche consiste à augmenter la taille de l'ensemble en utilisant des membres d'échéances différentes valides au même moment. Ces membres correspondent donc à des réseaux différents, et l'utilisation du *time-lag* peut demander de prolonger des prévisions au-delà de l'habituel, afin qu'elles soient disponibles à l'instant souhaité. Bien qu'elle permette d'augmenter le rang de la matrice de covariance empirique, cette approche ne dispense pas de l'utilisation de la localisation.

L'approche *time-lag* a été utilisée par exemple par Wang *et al.* (2017) et Caron *et al.* (2018) pour des modèles à aire limitée, et par Lorenc (2017) pour un modèle global. Toutes ces applications montrent un impact positif sur les prévisions subséquentes.

### 2.2.5 Le revers de la médaille

Depuis Cohn *et al.* (1998), il est connu que la localisation peut introduire un déséquilibre dans l'analyse. Dans le cas de la localisation des covariances dans l'espace du modèle, Lorenc (2003) montre comment la localisation détériore l'équilibre géostrophique du système.

Cette explication est illustrée par la figure 2.5, tirée de Greybush *et al.* (2011). Dans le cadre simplifié des équations en eaux peu profondes, la figure présente un incrément de hauteur de l'atmosphère et un incrément de vent méridien, engendrés par l'assimilation d'une seule observation de hauteur en  $x = 0$  km. Puisque tous les membres de l'ensemble vérifient l'équilibre géostrophique, c'est aussi le cas des perturbations, et par linéarité, de l'incrément obtenu. Mais la localisation vient détruire cet équilibre : l'amplitude réduite du vent après localisation devrait s'accompagner d'un gradient plus faible de hauteur. Or c'est le contraire qui se produit ! Une composante agéostrophique du vent apparaît donc.

Plusieurs études ont étudié la rupture d'équilibre provoquée par la localisation ; citons par exemple Houtekamer et Mitchell (2005), Kepert (2009), Greybush *et al.* (2011) et Bannister (2015). Ces deux derniers comparent plusieurs schémas de localisations (dans l'espace du modèle ou des observations, adaptatifs ou non) au vu de leur impact sur l'équilibre de l'analyse. On retiendra surtout que quel que soit le schéma utilisé, une part de déséquilibre est nécessairement introduite. La solution la plus simple consiste alors à augmenter le rayon de localisation, ce qui implique d'avoir plus de membres... Pour nuancer ce propos, notons que Caron et Buehner (2018) n'observent pas de dégradations des équilibres entre champs de masse et de vent lorsqu'ils appliquent leur méthode de localisation dépendante de l'échelle (SDL) dans un modèle global.



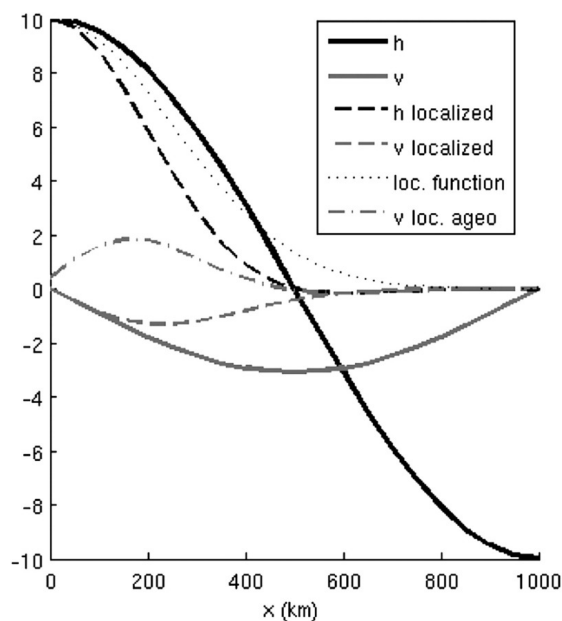


FIGURE 2.5 – Introduction de vent agéostrophique par localisation. Les incréments non localisés de hauteur  $h$  (en noir) et de vent méridien  $u$  (en gris) sont montrés en traits pleins. Les incréments localisés sont en traits interrompus, et la fonction de localisation en pointillés. La composante agéostrophique du vent engendrée par la localisation est en trait mixte (tiret-point). Figure extraite de Greybush *et al.* (2011), commentant Lorenc (2003).

Une autre limite de la localisation réside dans l'hypothèse de faibles corrélations à grandes séparations. Nous avons vu que les covariances ensemblistes sont plus fiables lorsque les corrélations asymptotiques sont proches de 1. Le présupposé selon lequel cela se produit à faible séparation atteint ses limites dans le cas des covariances entre composantes du vent et température par exemple, comme remarqué par Gustafsson (2007), et comme illustré au chapitre précédent, figure 1.8. On notera une similitude avec le cas de la localisation croisée entre deux fenêtres temporelles dans un contexte 4D, qui amène à développer des techniques d'advection de la localisation par exemple (Bocquet, 2016 ; Desroziers *et al.*, 2016).

## 2.3 Le bon schéma pour les hydrométéores ?

À ce stade, il est bon de reprendre les défis posés par l'assimilation des hydrométéores (section 1.4.2), et de voir dans quelle mesure les schémas EnVar permettent ou non d'y répondre.

### 2.3.1 Modélisation des erreurs d'ébauche

Notons tout d'abord que les schémas EnVar permettent de prendre en compte la grande variabilité spatio-temporelle des covariances d'erreurs d'ébauche, ce qui est leur grand avantage par rapport à des approches variationnelles avec covariances d'erreurs d'ébauche climatologique.

En contrepartie, un schéma EnVar pur ne pourra pas produire d'incrément d'hydrométéores là où il n'y avait pas d'hydrométéores dans l'ensemble (problème des variances nulles). Comme remarqué par Michel *et al.* (2011), cette limitation peut être contournée en utilisant une approche hybride, qui permettrait de rajouter un terme de variance non-nul. La modélisation d'une matrice de covariance statique avec hydrométéores suffisamment réaliste reste cependant ardue. La seule comparaison publiée (à notre connaissance) entre un EnVar pur avec hydrométéores et un EnVar hybride avec hydrométéores montre une légère détérioration des analyses d'hydrométéores dans le cas hybride (Kong *et al.*, 2018).

### 2.3.2 Non-gaussianité, non-linéarités, positivité

Ces trois sujets sont particulièrement imbriqués. Les non-linéarités par exemple entraînent nécessairement des non-gaussianités : une distribution gaussienne ne le reste pas sous l'action d'un modèle non-linéaire (Bocquet *et al.*, 2010, par exemple). Ces problèmes de non-linéarités affectent particulièrement les hydrométéores, comme vu en section 1.1.3.

L'article de revue de Bocquet *et al.* (2010) fournit un panorama des techniques possibles pour limiter les effets de la non-gaussianité. Une revue plus récente mais plus succincte est proposée par Carrassi *et al.* (2018, leur section 5.2)

Il existe plusieurs algorithmes, qui semblent spécialement conçus pour traiter ces questions de non-gaussianité ou de non-linéarité, tous plus ou moins proches des méthodes de Kalman d'ensemble. Il paraît pertinent d'en relever quelques-uns :

- Les filtres particuliers, qui font l'objet de nombreuses recherches (Leeuwen *et al.*, 2019 ; Vetra-Carvalho *et al.*, 2018) mais dont l'applicabilité à des problèmes de grande dimension reste à montrer (Snyder *et al.*, 2008) ;
- Les méthodes par histogrammes, à mi-chemin entre les filtres particuliers et les filtres de Kalman d'ensemble (Anderson, 2010 ; Metref *et al.*, 2014) ;
- Des algorithmes conçus spécialement pour prendre en compte les erreurs de déplacements (Lawson et Hansen, 2005 ; Ravela *et al.*, 2007) ;
- D'autres algorithmes qui reprennent l'approche bayésienne en s'affranchissant (au moins partiellement) de l'hypothèse gaussienne.

1. Fletcher et Zupanski (2006) par exemple proposent une approche variationnelle dans le cas d'erreurs log-normales (travaux poursuivis par Fletcher, 2007 ; Fletcher, 2010 ; Fletcher et Jones, 2014 ; Kliwer *et al.*, 2015).
2. Plus généralement, Hodyss (2012) et Hodyss et Campbell (2013) ont proposé un algorithme dérivé de l'EnKF qui prend aussi en compte les moments d'ordre 3 et 4 des erreurs d'ébauche. Cet algorithme demande cependant un ensemble d'au moins 100 membres pour estimer ces moments avec fiabilité.
3. Plus récemment, on relève la proposition de Bishop (2016) pour prendre en compte des erreurs distribuées selon une loi Gamma ou Gamma inverse (le schéma *Gamma, Inverse-Gamma and Gaussian - EnKF*).

Notre thèse étant axée sur l'approche ensembliste variationnelle, nous ne nous sommes pas penchés sur ces méthodes. La plupart d'entre elles restent d'ailleurs numériquement trop coûteuses (peut-être pour un temps seulement) pour des applications à un modèle tel qu'AROME.

D'autres approches sont construites à partir de l'approche variationnelle avec hypothèse gaussienne. Les possibilités sont nombreuses :

- Ajouter des boucles externes dans les minimisations (approche incrémentale, voir section 1.3.3.b). Utiliser plusieurs boucles externes avec re-linéarisation de l'opérateur d'observation permettrait de prendre en compte une partie des non-linéarités.
- Appliquer un changement de variable pour rendre les erreurs gaussiennes. Plusieurs auteurs utilisent une transformation analytique de type logarithmique à cette fin (procédé initialement proposé par Cohn, 1997). Cette technique est adaptée si les variables concernées sont positives, et si leurs erreurs sont log-normales et multiplicatives. Dans le cas où les erreurs ne sont pas log-normales mais connues avec précision, on peut aussi utiliser une transformation numérique construite sur mesure (procédé d'anamorphose). C'est un procédé couramment utilisé pour l'estimation des cumuls de pluie (Kotsuki *et al.*, 2017, par exemple). Mentionnons également les transformations de variables proposées par Hólm *et al.* (2002) pour l'humidité. Ces approches ont l'avantage de garantir la positivité de l'analyse.
- Contraindre la positivité des variables. Avec le filtre de Kalman d'ensemble, Janjić *et al.* (2014) proposent d'utiliser la technique de programmation quadratique pour effectuer l'analyse sous contrainte. Leur approche est reprise avec un angle plus théorique et généraliste par Albers *et al.* (2019). D'après les auteurs, l'adaptation aux approches variationnelles est théoriquement possible.

Comme la quasi-totalité des tentatives d'analyse des hydrométéores, cette thèse reste basée sur un cadre gaussien et quasi-linéaire, et les différentes possibilités évoquées ci-dessus ne sont pas abordées dans ce travail. La relative souplesse de l'approche variationnelle par rapport aux questions de non-linéarité laissera la possibilité de prolonger ensuite le travail réalisé à des cas non-linéaires et non-gaussiens.

### 2.3.3 Ajouter une variable de contrôle

Ajouter une variable de contrôle dans un 3D $\text{EnVar}$  pur est direct si cette variable est présente dans les membres de l'ensemble d'assimilations. Il suffit de redéfinir les opérations sur les vecteurs d'état (additions, multiplications, application de la localisation, produits scalaires) pour prendre en compte leur extension aux nouvelles variables.

On illustre ici par quelques équations l'extension de la variable de contrôle dans le cas d'un opérateur d'observation linéaire. La généralisation au cas non-linéaire peut être faite via l'approche incrémentale, chaque boucle externe d'un tel algorithme correspondant à un opérateur d'observation linéaire.

Supposons que la variable de contrôle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  soit étendue à  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+m}$  par l'ajout de  $m$  paramètres supplémentaires concaténés à la suite de  $\mathbf{x}$ . Supposons que les observations  $\mathbf{y}$  et leurs covariances d'erreurs  $\mathbf{R}$  sont inchangées (on n'assimile pas de nouvelles observations). L'espace de départ change pour l'opérateur linéaire  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  qui devient donc  $\underline{\mathbf{H}} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Notons  $\underline{\mathbf{\Pi}}_1 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'opérateur qui à tout vecteur de contrôle étendu associe ses  $n$  premières composantes (vecteur de contrôle d'origine), et  $\underline{\mathbf{\Pi}}_2 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  l'opérateur qui lui associe les  $m$  dernières composantes. Si l'opérateur n'est pas sensible aux nouvelles variables, c'est-à-dire si  $\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\underline{\mathbf{\Pi}}_1$ , alors il peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\mathbf{H}} = \left[ \mathbf{H} \mid \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p \times m} \right].$$

De même, la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche étendue s'écrit :

$$\underline{\mathbf{B}} = \left[ \begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{\Pi}}_1 \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{\Pi}}_1^T & \underline{\mathbf{\Pi}}_1 \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{\Pi}}_2^T \\ \hline \underline{\mathbf{\Pi}}_2 \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{\Pi}}_1^T & \underline{\mathbf{\Pi}}_2 \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{\Pi}}_2^T \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \underline{\mathbf{B}}_{21}^T \\ \hline \underline{\mathbf{B}}_{21} & \underline{\mathbf{B}}_{22} \end{array} \right].$$

L'estimateur BLUE (équations 1.7 et 1.8) donne alors l'analyse :

$$\underline{\mathbf{x}}^a = \underline{\mathbf{x}}^b + \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}^T (\mathbf{R} + \underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{x}}^b).$$

En remarquant que  $\underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{H}}^T = \mathbf{H}\underline{\mathbf{\Pi}}_1 \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{\Pi}}_1^T \mathbf{H}^T = \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T$  et en supposant que  $\underline{\mathbf{\Pi}}_1 \underline{\mathbf{x}}^b = \mathbf{x}^b$  (l'ébauche reste inchangée pour les variables d'origine), on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{\Pi}}_1 \underline{\mathbf{x}}^a &= \mathbf{x}^b + \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^b) = \mathbf{x}^a \\ \text{et } \underline{\mathbf{\Pi}}_2 \underline{\mathbf{x}}^a &= \underline{\mathbf{\Pi}}_2 \underline{\mathbf{x}}^b + \underline{\mathbf{B}}_{21} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^b), \end{aligned}$$

On note deux caractéristiques intéressantes de ces équations :

1. Les incréments des variables d'origine ne sont pas perturbés par l'extension de la variable de contrôle, tant que l'opérateur d'observation ne dépend pas des nouvelles variables.
2. Des incréments sont produits pour les nouvelles variables même sans observations desdites variables ! En effet, les covariances croisées de la matrice  $\mathbf{B}$  permettent de projeter les incréments des variables d'origine sur les nouvelles variables, comme illustré en figure 1.9 au chapitre précédent.

C'est l'approche que nous utilisons dans cette thèse pour l'ajout des hydrométéores dans la variable de contrôle. Nous n'utilisons donc pas d'observations directes d'hydrométéores. En particulier, nous n'avons pas étudié la question des opérateurs d'observations sensibles aux hydrométéores, question qui est par ailleurs le sujet de recherches dédiées à Météo-France (voir Thomas *et al.*, 2020 par exemple en ce qui concerne les variables issues des radars à double polarisation). Nous utiliserons cependant les pseudo-profiles d'humidité relative déduits des observations radar par la méthode 1D-Bayésien de Caumont *et al.* (2010).

Notons que le point 2 fournit un moyen peu coûteux pour obtenir l'incrément d'hydrométéores sans observation d'hydrométéores. Si lors d'une itération de la boucle externe la minimisation a fourni un vecteur  $\mathbf{u}$  tel que l'incrément pour les variables classiques est  $\mathbf{B}\mathbf{u}$ , alors l'incrément pour les hydrométéores se calcule simplement par la projection  $\mathbf{B}_{21}\mathbf{u}$ , sans augmenter le coût de la minimisation proprement dite. Le même procédé peut-être répété à chaque itération de la boucle externe.

Notons finalement que nous nous sommes limités dans cette thèse à l'utilisation d'un 3DEnVar pur ; nous n'avons pas étudié l'apport potentiel d'un terme statique dans la matrice de covariance des erreurs d'ébauche. À partir de maintenant, sauf mention explicite du contraire, les références au 3DEnVar AROME le désignent donc dans sa version purement ensembliste.

## 2.4 Ajout des hydrométéores dans l'EnVar AROME

Nous illustrons dans cette section l'extension de la variable de contrôle du 3DEnVar AROME aux hydrométéores. Cette extension avait été codée dans le prototype de 3DEnVar en amont de la thèse, par Jean-François Caron d'ECCC (Environnement et Changement Climatique Canada), lors d'une visite scientifique à Météo-France.

Dans cette section, nous présentons quelques illustrations des covariances d'erreurs d'ébauche (sections 2.4.1 et 2.4.2) et des analyses (section 2.4.3) avec hydrométéores. Le cas d'étude retenu est une situation orageuse qui laisse espérer d'importants contenus en

hydrométéores dans les prévisions AROME (cas du 21 mai 2018 à 15 h TU).

### 2.4.1 Covariances verticales moyennes

Pour se familiariser avec le contenu de la matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste avec hydrométéores, nous présentons quelques diagnostics de matrices de covariances verticales en figure 2.7. Ces diagnostics ont été obtenus avec le logiciel BUMP<sup>1</sup> (Ménétrier, 2020a), présenté plus avant au chapitre suivant (chapitre 3). Nous présentons ici la méthode utilisée pour diagnostiquer ces covariances ensemblistes variables par variables, à partir d'un ensemble de 50 membres de l'EDA AROME (section 2.1.1) valide au jour d'étude.

1. Les variances échantillonnées sont calculées en tout point du modèle. Dans le cas d'une variable hydrométéore, on définit les points « avec hydrométéores » comme l'ensemble des points du modèle pour lesquels la variance échantillonnée est supérieure à un seuil donné (fixé ici à  $10^{-24} (\text{kg kg}^{-1})^2$ , cf. chapitre 3 pour une justification de ce choix). L'ensemble des points avec hydrométéores est le *masque* géographique de la variable.
2. Jusqu'à 10 000 colonnes sont ensuite échantillonnées parmi les colonnes du modèle qui comportent au moins un point dans le masque 3D.
3. Pour chacune de ces colonnes, on calcule une matrice de variance-covariance ensembliste, sans localisation. Chaque colonne comportant 90 niveaux verticaux, chaque matrice comporte  $90 \times 90$  éléments. Les lignes et les colonnes de la matrice qui correspondent à des points hors-masque (sans hydrométéores) ne sont pas calculées.
4. Les matrices ainsi obtenues sont moyennées spatialement.

Cette moyenne spatiale permet de filtrer le bruit d'échantillonnage, et d'obtenir une estimation plus précise des covariances sans recourir à la localisation. En contrepartie, les éventuelles spécificités locales des covariances sont noyées dans les statistiques à l'échelle du domaine.

Un autre effet négatif du moyennage spatial est la possible dilution du signal pour les hydrométéores. C'est le recours au masque géographique qui permet d'éviter cette dilution en n'étudiant que les covariances moyennes dans les zones avec hydrométéores.

On remarque que :

- Les variances échantillonnées (diagonale des matrices, aussi montrées en figure 2.6) peuvent être nulles à certaines altitudes. Inversement, les valeurs de variance les plus importantes sont souvent concentrées dans une portion de l'atmosphère : entre 250 hPa et 800 hPa pour les cristaux de glace  $q_i$  par exemple. Ces zones correspondent dans

---

1. *B matrix on an Unstructured Mesh Package*

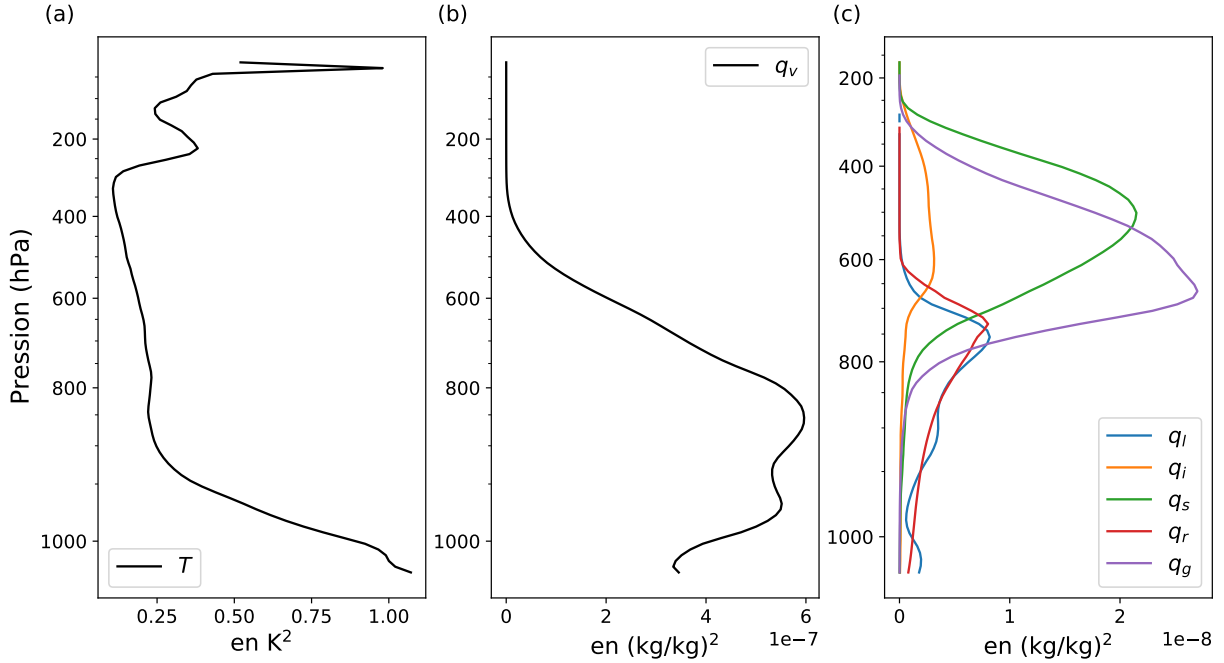


FIGURE 2.6 – Variances ensemblistes moyennées par échantillonnage spatial horizontal sur des sous-zones masquées du domaine AROME (voir texte pour les détails), valides le 21 mai 2018 à 15 h TU. (a) Variances ensemblistes pour la température, (b) Variances ensemblistes pour l’humidité spécifique, (c) variances ensemblistes pour les hydrométéores.

la pratique aux zones de résidence des hydrométéores considérés, mises en évidence au chapitre 1 (figure 1.2).

- Les trois hydrométéores précipitant sont ceux pour lesquels les covariances d’erreurs inter-niveaux sont les plus élevées par rapport aux variances. Les erreurs sont très corrélées verticalement, ce qui peut s’expliquer physiquement par une certaine uniformité des profils sur la verticale (s’il pleut à un niveau, il pleut aussi aux niveaux inférieurs). Les profils d’hydrométéores nuageux sont plus stratifiés, ce qui se traduit par de faibles corrélations inter-niveaux.

Nous pouvons calculer de la même manière les covariances verticales inter-variables. Dans le cas de variables  $V_1$  et  $V_2$  associées à des masques 3D  $M_1$  et  $M_2$ , les colonnes sont échantillonnées parmi celles qui comportent au moins un point dans l’intersection des masques  $M_1$  et  $M_2$ . Les covariances verticales locales sont ensuite calculées dans l’intersection des deux masques, puis moyennées.

Chaque matrice de la figure 2.8 correspond à un bloc extra-diagonal d’une matrice de covariance. On observe des covariances d’erreurs positives sur la diagonale de ces matrices dans le cas de paires de variables de la microphysique. Ces covariances positives sont associées à des corrélations des erreurs de contenus en eau atmosphérique entre niveaux verticaux proches. D’autres caractéristiques méritent d’être relevées :

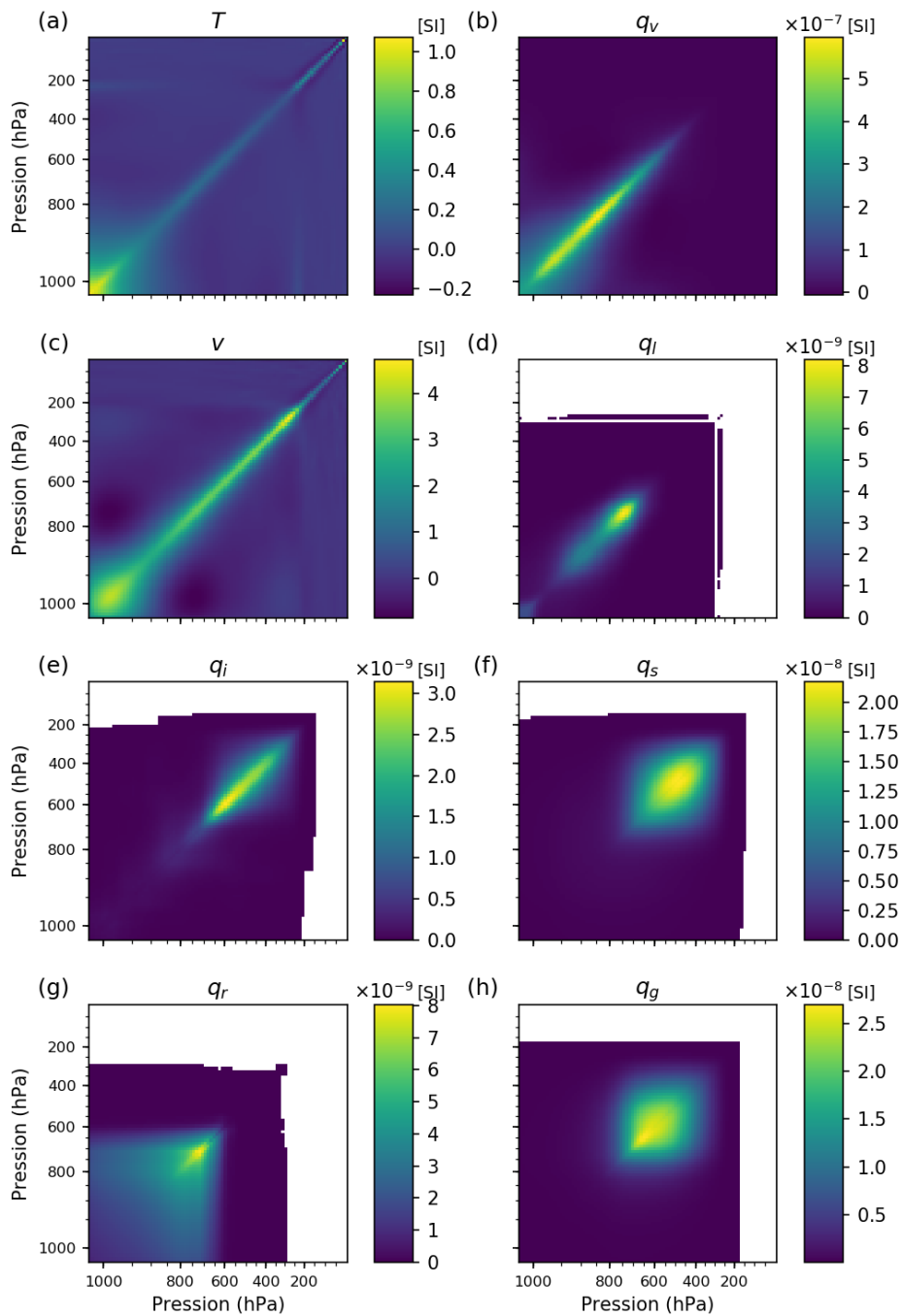


FIGURE 2.7 – Matrices ensemblistes d’auto-covariances verticales, moyennées par échantillonnage spatial horizontal sur des sous-zones masquées du domaine AROME (diagnostics du logiciel BUMP, voir texte pour les détails). L’ensemble sous-jacent comprend 50 membres de l’EDA AROME, valides le 21 mai 2018 à 15 h TU. Pour chaque hydrométéore, les zones blanches correspondent aux points sans hydrométéores.



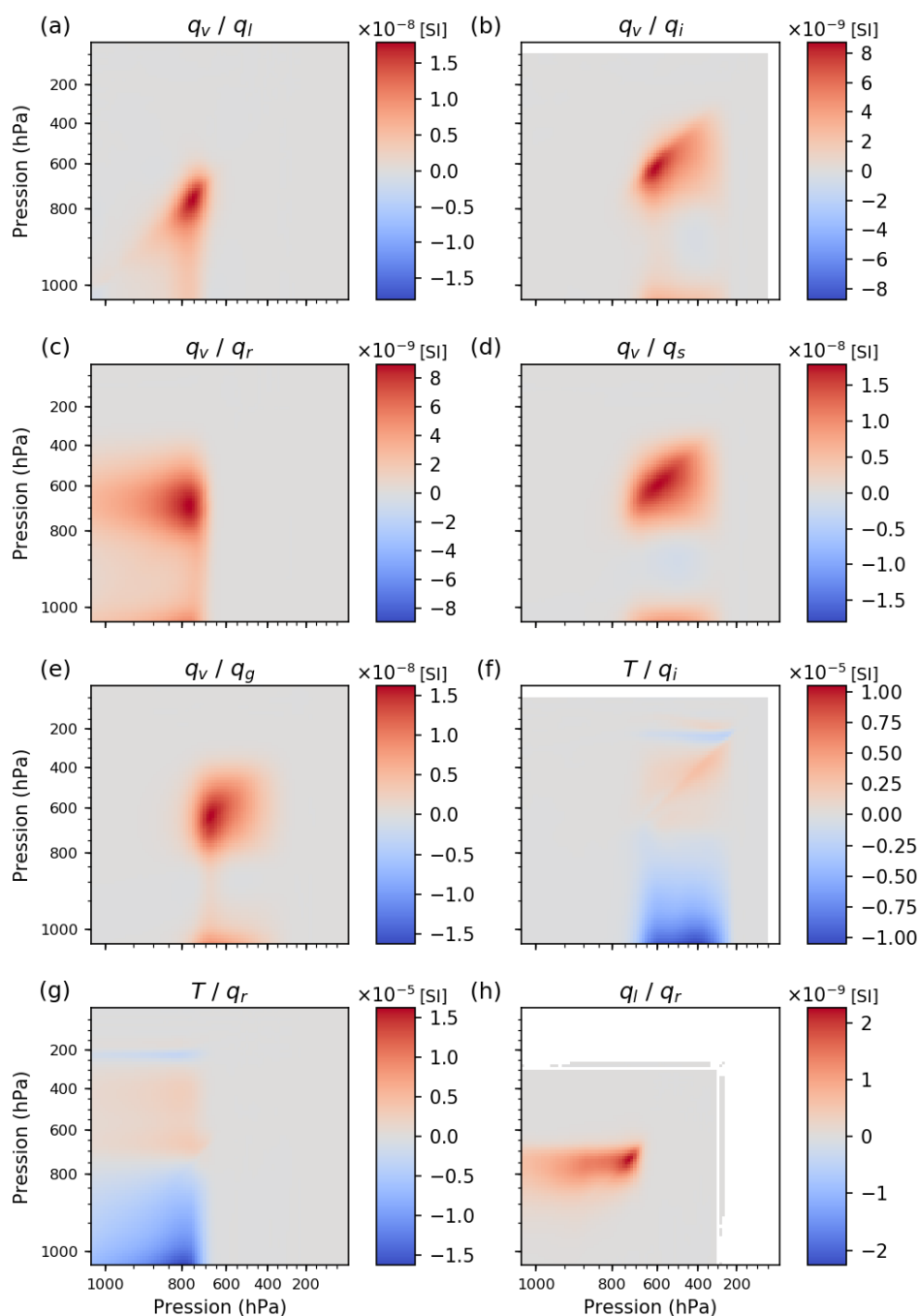


FIGURE 2.8 – Équivalent de la figure 2.7 pour une sélection de covariances verticales inter-variables. La première variable citée dans le titre correspond aux coordonnées verticales de la matrice, la seconde aux coordonnées horizontales.

- Les covariances croisées entre  $q_v$  et  $q_r$  s'étendent depuis la diagonale vers le bas de l'atmosphère, alors qu'elles chutent à zéro au-delà de 700 hPa (volet (c)). Ces structures de covariances sont cohérentes avec les auto-covariances de la pluie, très corrélées dans les basses couches et quasi-nulles en altitude.
- Les covariances d'erreurs entre hydrométéores et température semblent présenter une structure de dipôle. Pour la pluie toujours (volet (g)), l'erreur de température proche du sol est corrélée négativement avec l'erreur en pluie dans les niveaux supérieurs. Cette anti-corrélation peut s'expliquer par le refroidissement dû à l'évaporation de la pluie. Inversement, l'erreur de température au-dessus des niveaux pluvieux est corrélée positivement avec l'erreur de contenu en pluie, probablement du fait des dégagements de chaleur latente dus à la condensation dans les nuages.

### 2.4.2 Fonctions de structure

Nous nous intéressons maintenant aux fonctions de structure, c'est-à-dire aux colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$  avec hydrométéores. La matrice est estimée sous la forme d'une matrice localisée  $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \circ \widetilde{\mathbf{B}}$ . Dans un premier temps, la même localisation est appliquée à toutes les variables. La localisation horizontale est fixée à 150km (longueur de Daley), et la localisation verticale à  $0,4 \ln(\text{Pa})$ .

Comme nous l'avons vu en section 2.2.1.c, il est possible de visualiser des colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$  en l'appliquant à un vecteur  $\mathbf{e}_i$  de type Dirac. La figure 2.9 montre une carte de colonne de la matrice  $B$  pour un Dirac appliqué à une variable d'humidité spécifique. La figure 2.10 montre une section verticale de cette même fonction de structure.

On observe que les covariances croisées entre humidité spécifique et eau nuageuse liquide ne sont pas nulles. L'extension spatiale est horizontalement plus faible que pour les auto-covariances de l'humidité spécifique. Les covariances sont anisotropes, avec une concentration du signal sur les zones terrestres pour l'eau nuageuse, et de légères anti-corrélations au sud-est de la Corse. L'anisotropie est également visible sur la section de la fonction de structure en figure 2.10, où les covariances positives se concentrent plutôt à l'est du dirac (sur terre) plutôt qu'à l'ouest (sur mer). Cette anisotropie est probablement due à une concentration de la convection diurne sur les surfaces continentales, plus chaudes que les surfaces maritimes en début d'après-midi.

### 2.4.3 Analyses et incréments

Après avoir vérifié la cohérence des fonctions de structure, qui correspondent à des incréments pour l'assimilation d'une seule observation, nous présentons ici quelques exemples

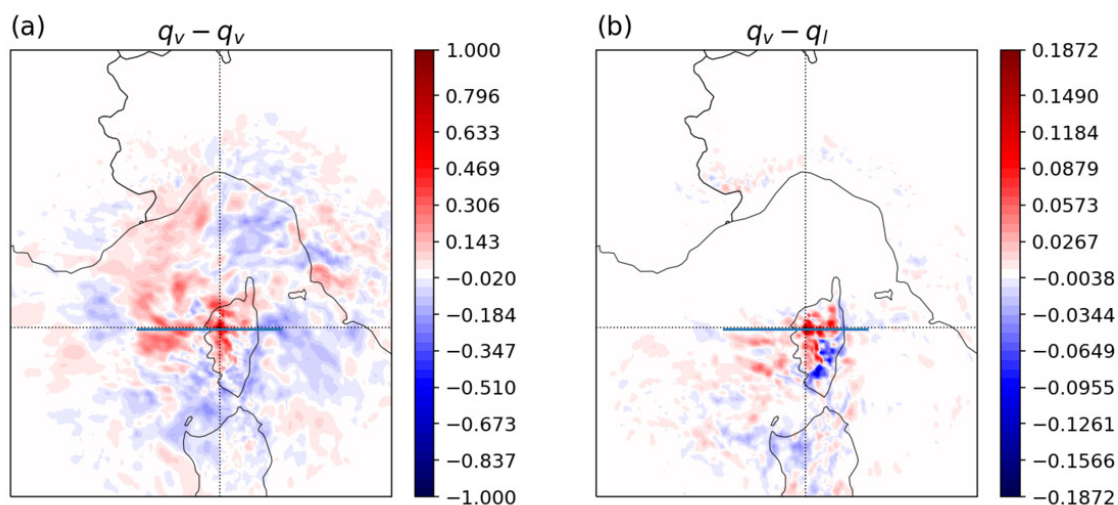


FIGURE 2.9 – Colonne d’une matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste localisée avec hydrométéores, section horizontale au niveau modèle 70. (a) Auto-covariances de l’humidité. (b) Covariances croisées entre humidité spécifique et eau nuageuse. L’estimation est réalisée à partir d’un ensemble de 50 membres de l’EDA AROME valides le 21 mai 2018 à 15 h TU, et normalisée pour valoir 1 sur la diagonale de la matrice (intersection des lignes pointillées sur le volet a). Le trait bleu horizontal indique la position de la section verticale de la figure 2.10.

d’incrément obtenus lors d’une minimisation impliquant les observations habituellement assimilées dans AROME.

Pour l’implémentation de l’EnVar, les questions de non-linéarité et de non-gaussianité sont mises de côté pour l’instant. La positivité des analyses d’hydrométéores n’est pas garantie, ce qui n’est pas rédhibitoire dans la mesure où le schéma microphysique d’AROME remet à zéro les contenus négatifs lors de tests préalables à toute exécution. Pour les illustrations de cette section, les contenus négatifs sont systématiquement ramenés à zéro.

Les membres de l’EDA étant à la résolution spatiale de 3,2 km (section 2.1.1), il en est de même des covariances d’erreurs d’ébauche échantillonnées. Tous les vecteurs météorologiques de l’assimilation (ébauches, incréments, analyses) sont donc désormais considérés à cette résolution. La compatibilité avec la version opérationnelle du modèle AROME (à 1,3 km) reste possible à condition de faire intervenir une interpolation permettant d’interpoler l’incrément (3,2 km) à la résolution de l’ébauche (1,3 km) pour obtenir des analyses à 1,3 km (ou des états intermédiaires dans le cas d’un schéma à plusieurs boucles externes).

Dans les cas qui nous intéressent, l’ébauche est une prévision à 3 h d’échéance, contenant donc des champs d’hydrométéores non-nuls. Les observations assimilées sont les observations habituelles de l’assimilation d’AROME (voir la figure 1.12 pour un exemple de données assimilées, ou le chapitre 4 pour un détail de ces observations). En particulier, les observa-

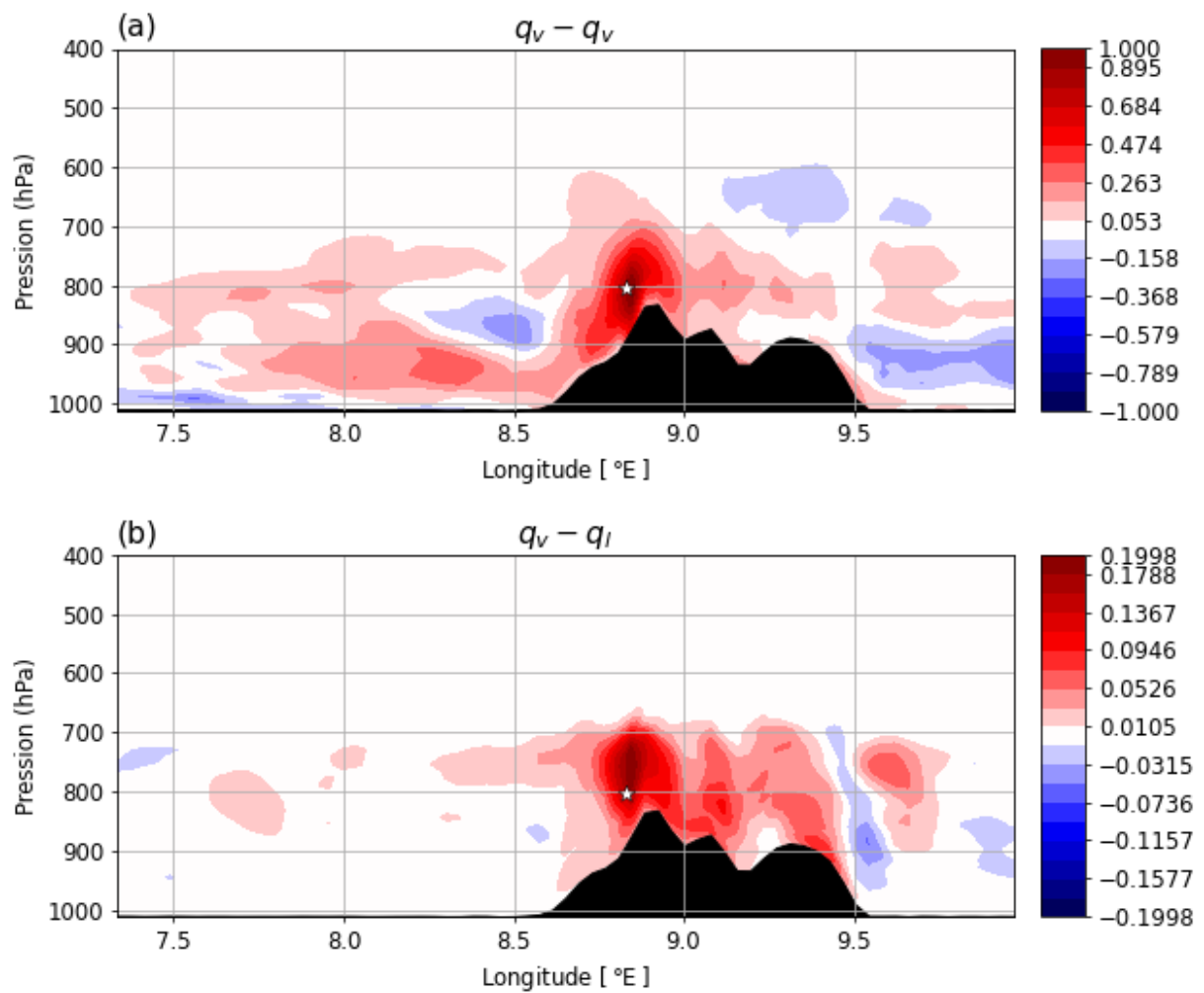


FIGURE 2.10 – Même fonction de structure que la figure 2.9, en section verticale le long d'un parallèle, pour l'humidité spécifique (a) et l'eau nuageuse liquide (b). L'étoile indique la position géographique du Dirac d'humidité spécifique.

tions de réflectivité radar sont assimilées indirectement, via des pseudo-profil d'humidité spécifique (Wattrelot *et al.*, 2014). La minimisation de la fonction de coût de l'assimilation est effectuée avec une unique itération de la boucle externe.

### 2.4.3.a Illustration sur un cas convectif

La figure 2.11 illustre l'état des contenus en humidité spécifique et hydrométéores nuageux au cours de l'assimilation, pour le cas orageux du 21 mai 2018. Si une expérience de contrôle sans hydrométéores était effectuée, les champs d'hydrométéores de l'ébauche (première colonne) seraient également recyclés dans l'analyse (deuxième colonne), et les incréments d'hydrométéores seraient nuls (dernière colonne). Le caractère globulaire des champs d'hydrométéores, particulièrement marqué pour la glace nuageuse, révèle la présence de cellules convectives. Sans assimilation directe d'hydrométéores, les incréments obtenus sont presque de même magnitude que l'ébauche. L'analyse reste visuellement proche de l'ébauche, mais des modifications significatives sont possibles. C'est le cas pour les cristaux de glace par exemple, où une cellule est ajoutée à l'est de l'embouchure de la Gironde.

De même, des incréments en hydrométéores précipitant sont également générés par l'analyse (figure 2.12). On observera en particulier l'ajout de trois cellules de graupel à l'est de la Gironde. La position des observations radar, indiquée par les croix sur la figure, permet de vérifier que les incréments d'hydrométéores ont bien un sens physique. En particulier, les incréments de neige correspondent bien à la position des observations de réflectivité : de la neige n'est ajoutée dans l'analyse que là où des observations radar sont disponibles. Cette corrélation confirme le fait que les incréments d'hydrométéores sont bien obtenus par les covariances croisées avec l'humidité spécifique dans  $\mathbf{B}$ , puisque les observations radar sont assimilées sous forme de pseudo-observations d'humidité spécifique.

Quelques sections verticales (2.13) permettent de mieux visualiser l'effet de l'analyse sur les structures convectives. Pour le contenu en cristaux de glace, deux cellules sont nettement visibles autour de  $0^\circ\text{E}$  et  $0,2^\circ\text{E}$ . L'analyse vient atténuer leur intensité (en matière de contenu en hydrométéores) et créer une nouvelle cellule entre  $0,4^\circ\text{E}$  et  $0,5^\circ\text{E}$ . Il est possible que ces corrections soient motivées par l'assimilation indirecte des observations radar, et cherchent à corriger une erreur de positionnement des cellules convectives. Un comportement similaire est observé pour l'analyse du contenu en neige et de manière générale pour les 5 classes d'hydrométéores (non montré).

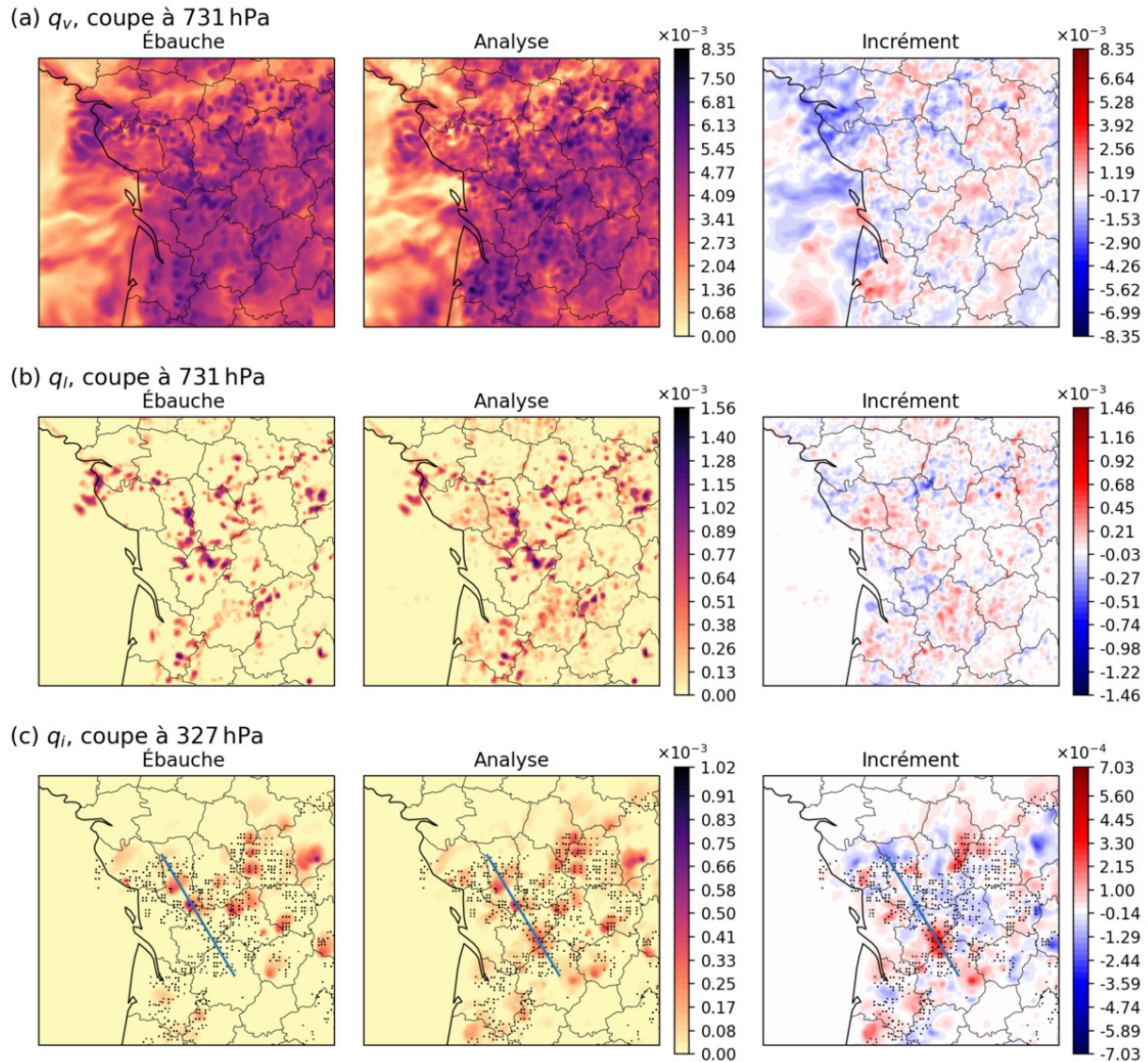


FIGURE 2.11 – Cartes de contenu en humidité spécifique (a), en eau liquide nuageuse (b) et en cristaux de glace (c) pour l'ébauche (première colonne), l'analyse (deuxième colonne) et l'incrément d'analyse (dernière colonne), pour une sélection de niveaux verticaux. Le niveau 0 correspond au sommet du modèle, le niveau 90 à la surface. Pour mieux visualiser les incréments, les cartes sont centrées sur l'ouest de la France. Le trait bleu (troisième ligne) indique la position de la section verticale de la figure 2.13. Les croix noires indiquent les réflectivités radar non-nulles assimilées pour la figure (c).



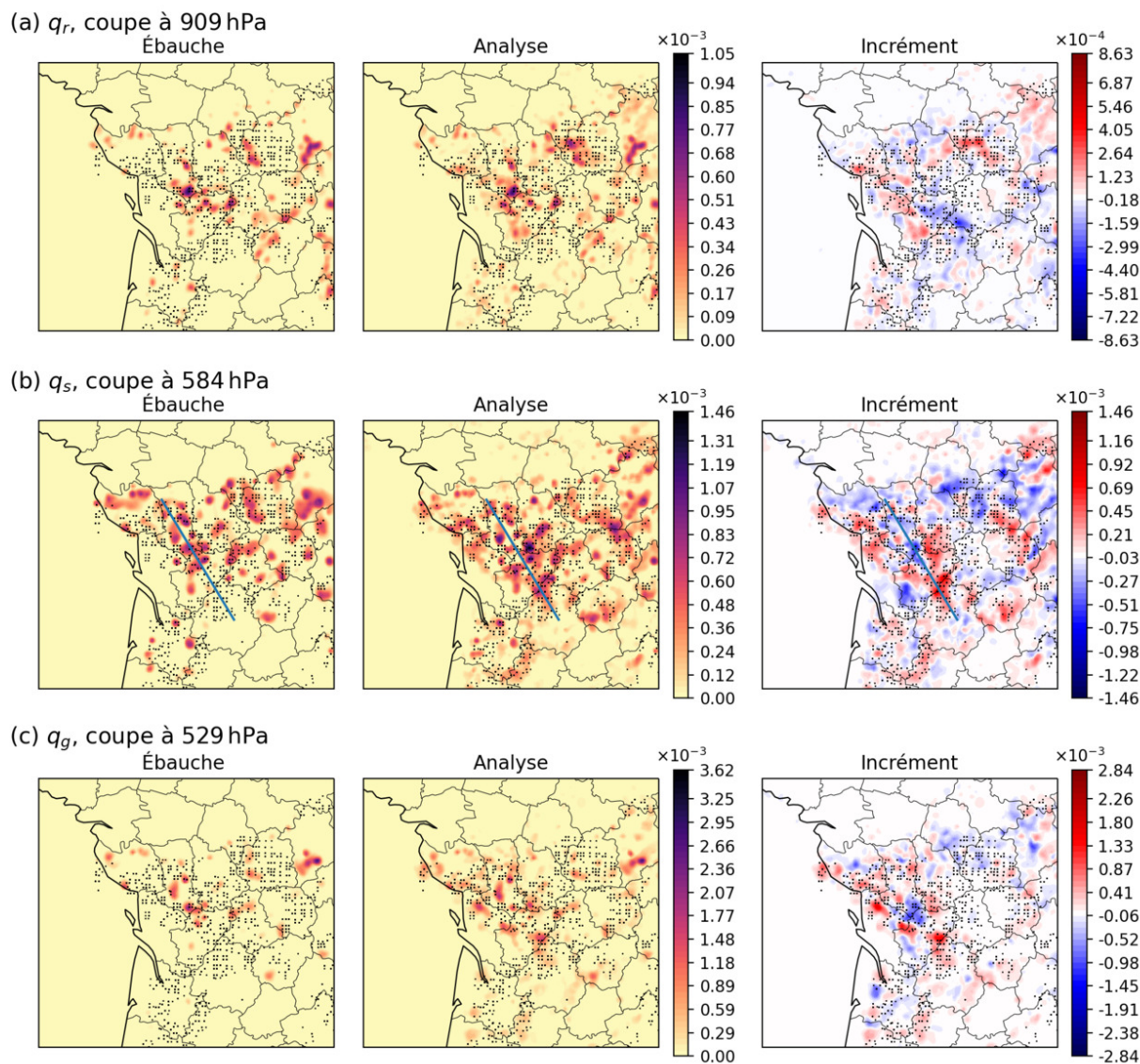


FIGURE 2.12 – Carte de contenu en pluie (a), neige (b) et graupel (c) pour l'ébauche (première colonne), l'analyse (deuxième colonne) et l'incrément d'analyse (dernière colonne), pour une sélection de niveaux verticaux. Le trait bleu (deuxième ligne) indique le tracé de la section verticale de la figure 2.13. Les croix noires indiquent les réflectivités radar non-nulles assimilées.

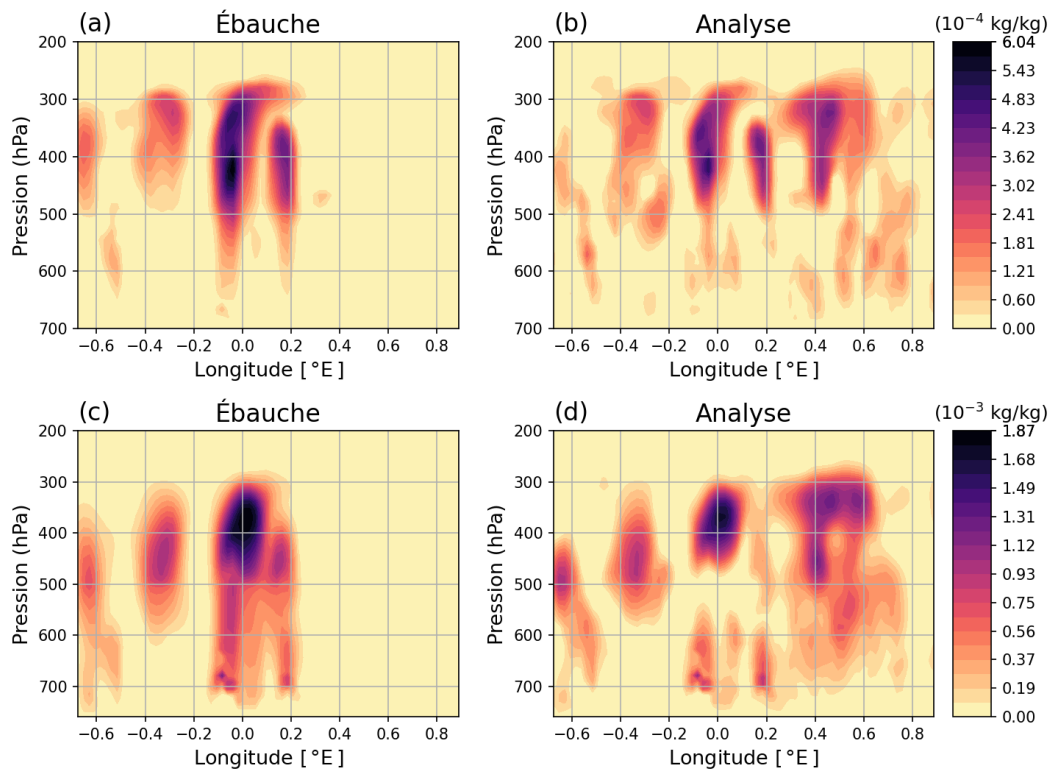


FIGURE 2.13 – Section verticale de l'ébauche et de l'analyse des champs de contenu en cristaux de glace ( $q_i$ , première ligne) et neige ( $q_s$ , deuxième ligne).

### 2.4.3.b Illustration sur une ligne de grain

Nous terminons cette section de visualisation des incréments par un cas moins convectif, à savoir le passage d'une ligne de grain sur le Sud-Est de la France le 25 avril 2019 à 18 h TU (figure 2.14). Le front froid est bien visible sur les cartes de l'ébauche et de l'analyse. L'incrément de température est globalement négatif le long du front, et associé à un incrément positif de pluie. Ce comportement est explicable par les anti-corrélations locales dans la matrice  $\mathbf{B}$  entre contenu en pluie et température (de manière similaire à la figure 2.8(g)). La ligne de grain est ainsi renforcée en termes de précipitations dans l'analyse obtenue.

Pour évaluer qualitativement les analyses produites, il est possible de se comparer aux restitutions de cumuls de pluie à partir d'observations radar et de pluviomètres (lame d'eau ANTILOPE). La durée minimale d'un cumul de pluie étant de 1 h, nous basons cette comparaison sur les cumuls prévus par une prévision +1 h initialisée par l'analyse étudiée. Le cumul évalué est donc prévu et observé de 18 h (heure d'analyse) à 19 h. Une prévision initialisée par une analyse 3DEnVar sans hydrométéores est également évaluée en tant qu'expérience de référence. Les cumuls prévus (figure 2.15) sont très proches entre les deux



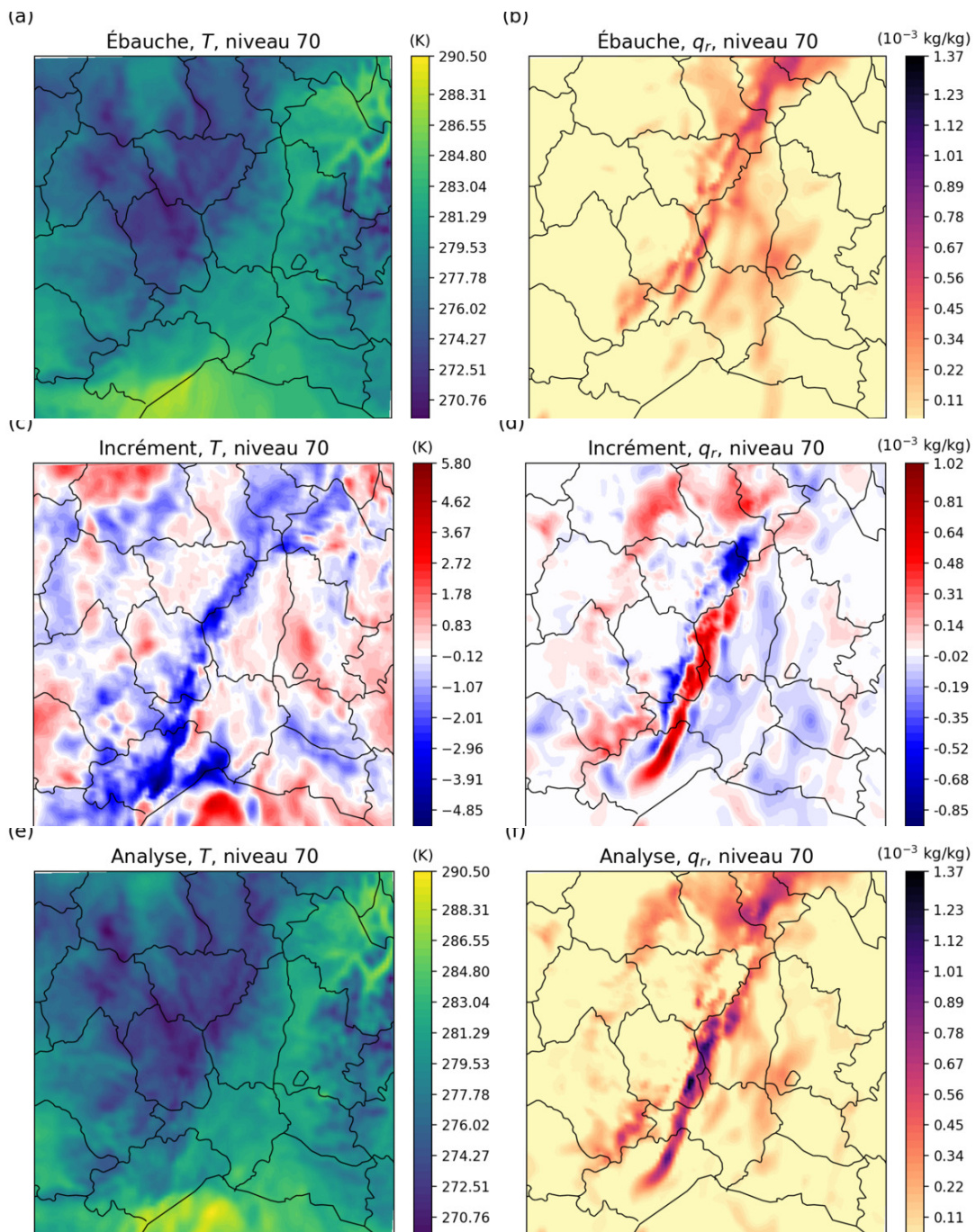


FIGURE 2.14 – Analyse des champs de température (a, c, e) et de pluie (b, d, f) au niveau 70 du modèle (environ 920 hPa) lors du passage d’une ligne de grain dans le Sud-Est de la France, le 25 avril 2019 à 18 h TU. L’ensemble utilisé est généré par la version opérationnelle de l’EDA AROME (25 membres).

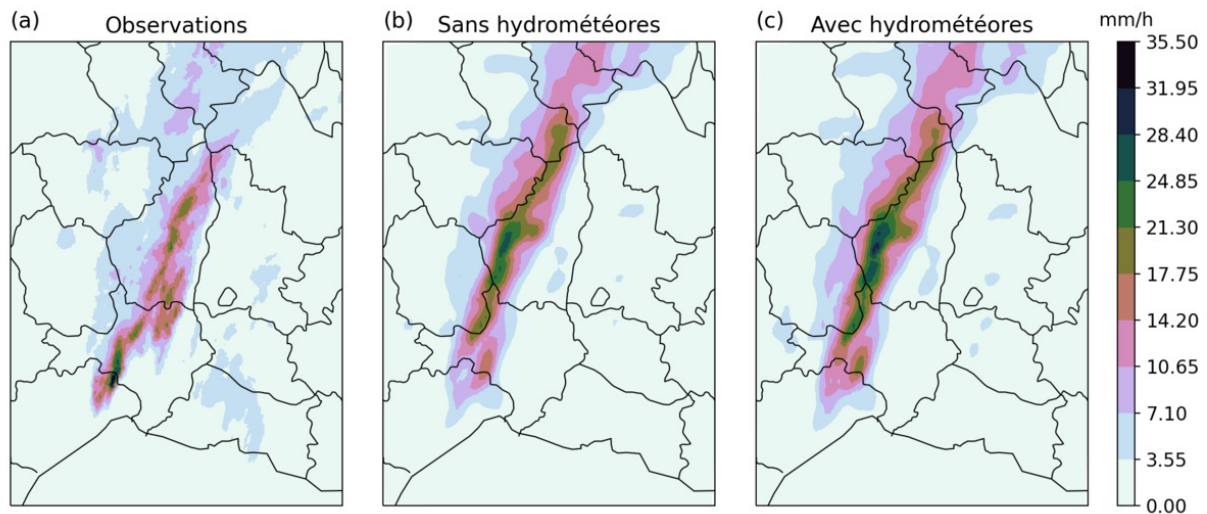


FIGURE 2.15 – Cumuls de pluie observés et prévus une heure après analyse. (a) Observations de la lame d'eau ANTILOPE; (b) Cumuls prévus par le 3DEnVar AROME sans hydrométéores en variables de contrôle; (c) Cumuls prévus par le 3DEnVar AROME avec hydrométéores en variables de contrôle.

expériences, et s'éloignent sensiblement des observations. Cela indique que les modifications apportées par l'analyse avec hydrométéores n'ont pas perduré aussi longtemps qu'espéré dans la prévision subséquente. On note cependant que l'événement précipitant au sud de la ligne de grain, avec des cumuls observés supérieurs à 30 mm/h, a été mieux prédit en termes d'intensité par la configuration avec hydrométéores, ce qui est un résultat encourageant.

Deux raisons principales peuvent expliquer pourquoi l'impact sur les prévisions de pluie semble limité dans cette expérience.

Par rapport à l'expérience de référence, l'analyse étudiée ne diffère que par les champs d'hydrométéores. L'environnement thermodynamique (humidité, température, pression, vents) reste inchangé au début de la prévision, ce qui explique les faibles différences observées sur les prévisions de cumuls de pluie. On peut espérer que la modification de l'environnement thermodynamique soit facilitée par une prise en compte directe des observations d'hydrométéores. Une telle assimilation directe devrait également permettre de renforcer les incréments d'hydrométéores ici obtenus.

Une autre piste d'amélioration réside dans le schéma de localisation utilisé, assez simpliste dans ce cas, et qui pourrait ne pas être adapté aux covariances d'erreurs d'ébauche avec hydrométéores.

Nous avons vu dans ce chapitre 2 que la description ensembliste des covariances d'erreurs d'ébauche dans le 3DEnVar en fait un candidat intéressant pour l'ajout des hydrométéores en variables de contrôle de l'analyse. La simple présence des hydrométéores dans l'ensemble

d'assimilations et donc dans la matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste permet d'obtenir des incréments d'hydrométéores, même sans assimilation directe des observations d'hydrométéores.

Nous avons également vu qu'un sujet de recherche important en assimilation de données (variationnelle) ensembliste était celui de la localisation, qui rend abordable l'estimation ensembliste des covariances. Dans l'implémentation actuelle du prototype de 3DEnVar d'AROME, la localisation appliquée pour filtrer les covariances échantillonnées est la même pour toutes les variables. Les courtes échelles spatiales des champs d'hydrométéores amènent à se demander si cette hypothèse reste adaptée pour leurs covariances d'erreurs d'ébauche. Le chapitre 3 vient répondre à cette question à l'aide des diagnostics objectifs de localisation pour covariances d'erreurs d'ébauche avec hydrométéores.

# Quelle localisation pour les hydrométéores ?

*Où il est question de la localisation optimale pour les covariances ensemblistes des erreurs d'ébauche des variables d'hydrométéores. Ce chapitre est structuré autour d'un article accepté pour publication au Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society (Destouches et al., 2020).*

## Sommaire

3.1	Tenants et aboutissants de l'article . . . . .	<b>103</b>
3.1.1	Contexte et problématique . . . . .	103
3.1.2	Choix de la méthode d'estimation de la localisation optimale . . . . .	104
3.1.3	Adaptation de la méthode de Ménétrier <i>et al.</i> (2015) aux hydrométéores	106
3.1.4	Diagnostics de localisation . . . . .	108
3.1.5	Conséquences pour l'EnVar AROME avec hydrométéores . . . . .	108
3.2	Article . . . . .	<b>109</b>

## 3.1 Tenants et aboutissants de l'article

### 3.1.1 Contexte et problématique

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous avons vu que l'initialisation des variables d'hydrométéores dans le même cadre que les autres variables pronostiques du modèle était un enjeu crucial en prévision numérique du temps à échelle convective, et particulièrement pour les prévisions à très courtes échéances. Cette amélioration des systèmes de prévision se heurte cependant à de nombreuses difficultés, tant théoriques que pratiques. Une d'elles réside dans la description des statistiques d'erreurs d'ébauche au moment de l'analyse, représentées par la matrice **B**. Pour envisager une analyse des hydrométéores, qui sont très variables spatialement et temporellement, cette description doit pouvoir dépendre de l'écoulement géophysique.

Dans le cadre de cette thèse, la description de ces statistiques d'erreurs d'ébauche est rendue possible par l'utilisation d'un schéma ensembliste variationnel. Nous avons vu au chapitre précédent que deux ingrédients seulement sont nécessaires pour estimer une matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste dans ce type de schéma : un ensemble échantillonnant l'erreur d'ébauche d'une part, et un schéma de localisation pour compenser la taille trop réduite de cet ensemble d'autre part. Une telle localisation permet non seulement de réduire le bruit d'échantillonnage, mais aussi d'augmenter le rang de la matrice de covariance ensembliste (section 2.2). L'EDA AROME comprenant déjà des hydrométéores au même titre que toutes les variables pronostiques du modèle AROME, seule la question de la localisation demeure.

Certes, d'autres éléments de l'EnVar pourraient également être adaptés, en particulier pour traiter les non-linéarités et les non-gaussianités associées aux variables d'hydrométéores et à leurs observations. Cependant, l'optimisation de la localisation, et donc des covariances des erreurs d'ébauche, semble être le premier point à traiter, ne serait-ce que pour savoir ce que l'on peut espérer d'une analyse des hydrométéores dans un cadre linéaire. L'objectif de ce chapitre est donc de répondre à la question suivante : quelle localisation choisir pour les covariances d'erreurs d'ébauche des hydrométéores dans le prototype de 3DEnVar d'AROME ?

### 3.1.2 Choix de la méthode d'estimation de la localisation optimale

La question de la localisation optimale est complexe. Pour un EnVar, celle-ci dépend de la taille de l'ensemble, mais également de l'étendue spatiale du domaine, de la résolution de l'ensemble et de la densité du réseau d'observation (voir par exemple Buehner et Shlyayeva, 2015). La matrice de localisation  $\mathbf{L}$  étant de la même taille que  $\mathbf{B}$ , il est impossible de la stocker numériquement, ni même de l'estimer parfaitement. On en choisit donc généralement une représentation paramétrée, par exemple sous la forme d'un opérateur de convolution gaussien ou quasi-gaussien. Les paramètres de cet opérateur (longueurs horizontale et verticale par exemple) sont ensuite déterminés empiriquement, de manière à minimiser l'erreur d'analyse ou de prévision. Ce réglage est numériquement très coûteux puisqu'il implique de réaliser un ensemble d'expériences d'assimilation en situation quasi-opérationnelle pour chaque combinaison de paramètres à tester. En conséquence, les schémas de localisation restent simples, et sont généralement définis par une poignée de paramètres scalaires<sup>1</sup>.

Il est tout à fait possible qu'une localisation qui a été optimisée pour le prototype de 3DEnVar AROME sans hydrométéores ne soit pas adaptée aux covariances d'erreurs d'ébauche empirique des hydrométéores. Nous nous proposons donc d'estimer les caractéristiques d'une localisation optimale pour ces covariances.

---

1. Cette simplicité des schémas de localisation est aussi assumée pour limiter le coût de l'application de la localisation à un vecteur.

L'estimation de localisations optimales a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. Bishop et Hodyss (2007) ont proposé d'exprimer la localisation comme une puissance des corrélations empiriques, puis adapté leur méthode pour qu'elle soit moins coûteuse numériquement (2009a) et utilisable avec un filtre de Kalman d'ensemble (2009b). Cependant, l'extension du concept à un schéma EnVar (Bishop et Hodyss, 2011) n'a pas montré d'apport significatif par rapport à une localisation standard. Qui plus est, la méthode demande de définir une deuxième fonction de localisation de plus grande portée que la première, repoussant ainsi le problème.

Une autre approche intéressante proposée par Anderson (2007) est basée sur la subdivision de l'ensemble en plusieurs sous-ensembles. La variabilité des résultats obtenus d'un sous-ensemble à l'autre permet d'estimer un facteur de localisation adapté. La localisation ainsi fournie n'est cependant optimale que pour la taille des sous-ensembles, et non pour la taille de l'ensemble principal. Une estimation basée sur les corrélations empiriques et sur la taille d'ensemble est proposée par Anderson (2012). Anderson et Lei (2013) proposent de déterminer en amont de l'assimilation (à l'aide d'expériences simulées jumelles, OSSE) des *fonctions de localisation empiriques*. Leur méthode a été évaluée avec un modèle sans physique (noyau dynamique) par Lei et Anderson (2014), et utilisée pour différencier localisation en zones précipitantes ou non-précipitantes par Lei *et al.* (2015). Mentionnons pour finir les approches de Kirchgessner *et al.* (2014, étude avec OSSE qui lie taille d'ensemble et nombre effectif d'observations), Perianez *et al.* (2014, lien avec le réseau d'observation) et Flowerdew (2015, minimise l'erreur d'analyse pour une expérience *single-observation*).

Dans leur grande majorité, ces approches s'intéressent à déterminer une localisation optimale entre l'espace des observations et l'espace du modèle, ce qui est typique de l'EnKF mais inadapté pour un EnVar. Nous avons retenu pour notre problème la méthode de Ménétrier *et al.* (2015a,b), qui nous semble particulièrement adaptée à la situation :

1. Elle fournit un diagnostic de localisation des covariances *dans l'espace du modèle*.
2. La méthode suppose que la fonction de localisation est horizontalement homogène et isotrope, mais ne formule pas d'autre hypothèse a priori sur la forme de la fonction de localisation.
3. La localisation n'est pas diagnostiquée de manière ad-hoc ou par intuition, mais en se basant sur une théorie solide d'optimalité (unissant théorie du filtrage linéaire et théorie des moments centrés).
4. La méthode ne fait aucun présupposé sur la distribution de probabilité des erreurs d'ébauche, ce qui est bienvenu pour des erreurs non-gaussiennes telles que celles des hydrométéores.
5. Les diagnostics se basent uniquement sur les données de l'ensemble, ce qui permet de s'affranchir de la dépendance potentielle à un réseau d'observation donné.
6. Les diagnostics sont peu coûteux numériquement, et permettent de documenter une

potentielle variabilité de la localisation optimale : en fonction de la variable considérée, du niveau vertical, de la situation météorologique.

Cette méthode fait par ailleurs l'objet d'un outil informatique dédié (BUMP, *B matrix on an Unstructured Mesh Package*, Ménétrier, 2020a).

L'application de la méthode de Ménétrier *et al.* (2015a) aux hydrométéores demande cependant quelques adaptations. Deux caractéristiques des hydrométéores posent problème : leur grande variabilité spatiale d'une part, et la prédominance dans le modèle de contenus nuls en hydrométéores d'autre part. Les bases théoriques et l'implémentation pratique de la méthode en sont affectées : mise à mal de l'hypothèse d'ergodicité horizontale (une hypothèse centrale dans l'estimation des diagnostics), sous-échantillonnage des zones avec hydrométéores, remise en question de la validité spatiale des diagnostics obtenus.

Ces limitations potentielles sont traitées et résolues dans notre article, inclus en section 3.2.

### 3.1.3 Adaptation de la méthode de Ménétrier *et al.* (2015) aux hydrométéores

Cette section synthétise les adaptations apportées à la méthode de Ménétrier *et al.* (2015a). Elle est surtout destinée au lecteur qui ne souhaiterait pas lire l'article en détail, les autres pouvant reprendre la lecture directement en section 3.1.4.

Nous avons déjà mentionné brièvement les difficultés soulevées par l'application de la méthode aux hydrométéores. Ces difficultés ont été résolues aussi bien par des apports théoriques que pratiques, sans changement fondamental de la méthode.

#### Définition de masques géographiques 3D

D'un point de vue théorique, la première contribution a été de légitimer l'usage de masques géographiques. L'approche proposée avant le début de la thèse consistait à utiliser des masques bidimensionnels pour limiter l'étude aux zones pluvieuses, à la manière de Montmerle et Berre (2010) et Michel *et al.* (2011). Nous montrons que l'utilisation pour chaque variable d'un masque *tridimensionnel* sur les *variances* empiriques de l'ensemble est plus adéquat. Plus précisément, les diagnostics ainsi obtenus sont identiques aux diagnostics qui seraient obtenus sans masque géographique, mais avec un échantillonnage spatial plus dense (et donc plus robuste).

### Validité de l'hypothèse d'ergodicité

La deuxième proposition théorique concerne la validité de l'hypothèse d'ergodicité, indispensable à l'implémentation de la méthode. Cette hypothèse stipule que les processus statistiques générant les covariances échantillonnées sont invariants horizontalement et angulairement. En conséquence, les diagnostics de localisation optimale entre deux points ne dépendent que du niveau vertical de chacun des points et de leur séparation horizontale. Ce choix de représentation de la localisation optimale paraît sensé, dans la mesure où les schémas de localisation effectivement utilisés dans les modèles géophysiques sont plus simplifiés encore. Cependant, l'hypothèse d'ergodicité qui mène à cette représentation est particulièrement discutable dans le cas de champs d'hydrométéores, dont les statistiques d'erreurs peuvent varier géographiquement sur un même niveau vertical. C'est par exemple le cas pour l'humidité, comme montré par Ménétrier *et al.* (2014).

Nous proposons une autre interprétation de l'hypothèse d'ergodicité, qui permet de défendre la validité des diagnostics dans un cas de rupture simple de cette hypothèse. Quel diagnostic est produit lorsque deux processus aléatoires différents sont présents là où on n'en attendait qu'un seul (deux niveaux verticaux donnés, une séparation horizontale donnée)? Il s'avère que même sans être capable de distinguer a priori les zones où sont actifs l'un ou l'autre processus, les diagnostics obtenus sont une forme de combinaison des diagnostics qui seraient obtenus pour chacune des zones! Il est difficile d'aller plus avant sans entrer dès maintenant dans le détail des équations, disons simplement qu'on ne prétend plus que la localisation diagnostiquée minimise l'espérance d'une erreur d'estimation locale (comme c'était le cas avec l'hypothèse d'ergodicité), mais plutôt qu'elle minimise une *somme pondérée* d'espérances des erreurs d'estimation sur le domaine. L'hypothèse d'ergodicité peut ainsi être remplacée par l'hypothèse d'existence d'une décomposition spatiale en sous-classes ergodiques, la démonstration étant généralisable au cas d'un nombre fini de sous-classes, dans la limite où chaque classe est correctement échantillonnée au cours de l'algorithme.

Enfin, nous proposons quelques tests supplémentaires pour vérifier a posteriori l'hypothèse d'ergodicité, tests valides également dans le cas de sous-classes ergodiques.

### Adaptation de la conversion en profils verticaux

D'autres adaptations d'ordre plus pratique ont également été apportées<sup>1</sup>, visant essentiellement à obtenir une conversion plus robuste des fonctions de localisation en profils verticaux de longueurs de localisation. Cette étape de conversion en profils verticaux im-

---

1. Ces modifications ont été codées (et proposées pour certaines) par Benjamin Ménétrier, que nous remercions ici.



prique d'ajuster une fonction de localisation analytique 3D (de type quasi-gaussienne) aux fonctions de localisations optimales diagnostiquées. Les diagnostics sont rendus plus robustes par a) l'usage de fonctions de localisation analytiques différant de 1 à séparation nulle, b) l'utilisation d'une pénalité de lissage pour limiter le bruit numérique et c) une étape de post-traitement permettant de rejeter les diagnostics associés à de trop piètres ajustements entre les fonctions de localisation analytique et diagnostiquée.

### 3.1.4 Diagnostics de localisation

Des diagnostics de localisation optimale pour les hydrométéores ont ainsi été obtenus avec succès, indépendamment de toute expérience d'assimilation. Ces diagnostics ont été réalisés sur 8 cas météorologiques répartis sur l'année 2018, pour les variables classiques et pour les hydrométéores<sup>1</sup>.

Les résultats montrent que la localisation optimale varie en fonction de la situation météorologique et du niveau vertical. Par exemple, pour certains niveaux verticaux, les longueurs de localisation horizontale pour les erreurs en eau liquide nuageuse peuvent varier d'un facteur 5 d'un jour au jour suivant ! Une certaine variabilité saisonnière est également observée, avec des longueurs horizontales globalement plus courtes sur les cas convectifs que pour les cas stratiformes.

Cette variabilité des résultats n'empêche pas de caractériser la localisation optimale des hydrométéores par rapport aux autres variables. Les longueurs de localisation horizontale sont toujours plus courtes pour les hydrométéores, d'un facteur 2 à 6. Verticalement, la localisation optimale est moins sévère pour les hydrométéores précipitants (pluie, neige, graupel) que pour toutes les autres variables.

### 3.1.5 Conséquences pour l'EnVar AROME avec hydrométéores

Ces résultats ont des implications sur le choix du schéma de localisation adapté aux hydrométéores. Un compromis doit être trouvé entre optimalité du schéma de localisation d'une part, coût numérique et robustesse d'autre part. Les schémas envisageables sont les suivants (du plus simple au plus complexe) :

1. Une seule localisation pour toutes les variables. C'est l'implémentation de la localisation dans l'article de Montmerle *et al.* (2018) et dans la plupart des schémas EnVar de manière générale.

---

1. Seule la localisation pour les auto-covariances de chaque variable a été étudiée, la localisation des covariances croisées n'a pas été abordée.

2. Une localisation dépendante de la variable. Le coût de ces schémas est plus important, mais peut être limité si certaines variables ont la même localisation. Trois groupes de variables pourraient ainsi être formés : les variables conventionnelles, les variables nuageuses (localisation horizontale plus sévère) et les variables précipitantes (localisation horizontale plus sévère *et* localisation verticale moins sévère).
3. Une localisation dépendante de la variable, du niveau vertical, et de la situation météorologique. Ce genre de schéma serait particulièrement coûteux, impliquant entre autres d'estimer avant chaque analyse la localisation optimale du jour.
4. Une localisation dépendante de l'écoulement. Cette localisation plus complexe encore pourrait paradoxalement être implémentée de manière relativement simple par des méthodes de localisation adaptatives telles que le SDL (section 2.2.4.a).

Au vu des résultats de ce chapitre, les schémas de localisation dépendante de la variable ou dépendante de l'échelle semblent les plus adaptés à la situation. Ils seront donc retenus au chapitre suivant pour évaluer l'EnVar AROME avec hydrométéores en situation d'assimilation – prévision cyclée.

## 3.2 Article

L'article est présenté ci-après dans sa version acceptée après relecture par les pairs, avec la mise en page des auteurs.

ORIGINAL ARTICLE

Data Assimilation

# Estimating optimal localization for sampled background error covariances of hydrometeor variables

Mayeul Destouches<sup>1</sup> | Thibaut Montmerle<sup>2</sup> |  
Yann Michel<sup>3</sup> | Benjamin Ménétrier<sup>4</sup>

<sup>1,2,3</sup>CNRM, Université de Toulouse,  
Météo-France, CNRS, Toulouse, France

<sup>4</sup>IRIT, Toulouse, France

## Correspondence

Mayeul Destouches, Météo-France,  
CNRM/GMAP, 42 Avenue Coriolis, 31057  
Toulouse Cedex, France  
Email: mayeul.destouches@umr-cnrm.fr

## Present address

Météo-France, CNRM/GMAP, 42 Avenue  
Coriolis, 31057 Toulouse Cedex, France

## Funding information

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la  
Recherche et de l'Innovation, AMX grant;  
INSU, LEFE HYDRE

---

This is the peer reviewed version of the following article: *Destouches, Mayeul, Thibaut Montmerle, Yann Michel et Benjamin Ménétrier (2020). "Estimating optimal localization for sampled background error covariances of hydrometeor variables". In : Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, which has been published in final form at <https://dx.doi.org/10.1002/qj.3906>. This article may be used for non-commercial purposes in accordance with Wiley Terms and Conditions for Use of Self-Archived Versions.

## ABSTRACT

Kilometric scale Numerical Weather Prediction addresses the challenge of forecasting accurately clouds and precipitations. Ensemble-based data assimilation methods make use of background error covariances that are sampled from an ensemble of forecasts. These methods can be considered in order to include hydrometeor variables and their flow-dependent error covariances in the data assimilation system. Yet, because of limited ensemble size, rank deficiency of the resulting covariances and sampling noise occur, which can be mitigated by a localization procedure. In order to optimally localize covariances for hydrometeor variables, a previous work by the authors has been extended. This approach estimates localization as a linear filtering on covariances, optimal in the sense of minimizing sampling noise. The zero-variance and the high spatial variability issues met with hydrometeor variables are addressed by using an improved method for spatial sampling, based on geographical masks. Diagnosed optimal horizontal localization lengths appear to be much shorter for hydrometeors than for other classical thermodynamic variables. Conversely, we report optimal vertical localization to be very broad for precipitating species. Great variability between different meteorological situations has also been noticed, which reflects the high flow dependency of hydrometeor forecast errors. This suggests that ensemble-based data assimilation schemes that consider hydrometeors as control variables shall adopt more refined localization schemes than the common "one-size-fits-all" approach.

**Keywords** — Hydrometeor, background error covariances, optimal localization, ensemble data assimilation

## 1 | INTRODUCTION

Cloud cover and rainfall forecasting benefits from the development of convective-scale numerical weather prediction models with dedicated microphysics schemes, which describe the time evolution of three-dimensional hydrometeor contents. As other prognostic variables, hydrometeors require an appropriate initialization.

Optimal initial conditions are usually determined through the data assimilation (DA) process. Operationally, most convective-scale models include dynamic and thermodynamic variables such as horizontal winds, surface pressure, temperature and specific humidity (hereafter *conventional* variables) in the control variable of the DA process (Gustafsson *et al.*, 2018). Hydrometeors, on the other hand, are usually not analyzed and simply kept unchanged through the DA process. This difference of treatment can lead to physical imbalances in the initial state, and spurious microphysical adjustments in the first time steps of the model integration.

Recently, a lot of research focused on the benefit of adding hydrometeor fields in the control variable of different DA systems. Snyder and Zhang (2003) used a rainwater control variable to assimilate simulated radar data, followed by Dowell *et al.* (2004) with real radar observations. Zhang *et al.* (2013) added five hydrometeor species in the control variable of the Maximum Likelihood

Ensemble Filter to assimilate precipitation-affected satellite data. A positive impact on the prediction skill was observed, especially for rainfall location and intensity. Meng *et al.* (2019) showed a similar improvement in forecasting skill for precipitation when adding four hydrometeor variables in an hybrid ensemble-variational (EnVar) DA system.

Despite these results, the initialisation of hydrometeor fields remains a difficult task, both in theory and in practice (Bannister *et al.*, 2019). Hydrometeor assimilation involves complex and highly non-linear processes, in microphysics schemes and in observation operators (Errico *et al.*, 2007; Auligné *et al.*, 2011). Besides, hydrometeor mixing ratios should always remain positive. Non-Gaussian statistics naturally arise from these non-linearities and boundedness. Yet, almost all attempts to include hydrometeors in the control variable are based on Gaussian and near-linear frameworks. This article is no exception to the rule. The perspective of this work is to optimize the usual Gaussian-based DA methods to better handle hydrometeors, without fundamentally changing the algorithms.

In this context, unbiased forecast errors are fully described by their second-order moments, i.e. background error covariance matrices. The role of forecast errors, in particular their representation in the background error covariances, is prominent in DA (Bannister, 2008). As a matter of fact, an adequate description of forecast errors is required to properly weigh observations against the background state and to propagate the information spatially and among physical variables.

Hydrometeor forecast errors are especially flow dependent, due to the intrinsically heterogeneous and variable nature of hydrometeor fields (see for instance Michel *et al.*, 2011). Part of this flow dependency can be described using a Monte-Carlo approach applied on an ensemble of forecasts, in order to sample the forecast error distribution at each run time. Time- and space-dependent background error covariances are then directly deduced from the ensemble. For hydrometeor assimilation, studies based on EnVar and ensemble Kalman filters (EnKFs) methods proved to outperform variational methods with static background error covariances (Johnson *et al.*, 2015; Kong *et al.*, 2018) and cloud analysis methods (Duda *et al.*, 2019), thanks to the flow dependent retrieved increments. However, no operational applications have been reported yet.

## 1.1 | Localization of background error covariances

The computational cost of ensemble methods for systems with large state vectors limits the number of members in the ensemble. This limitation results in sampling noise, evidenced by spurious long-distance correlations in the estimated covariances. Filtering techniques are commonly used to remove these spurious correlations. The focus here is on the localization technique (Houtekamer and Mitchell, 2001; Hamill *et al.*, 2001), which is used in both EnKF or EnVar systems. In practice though, localization is studied here for error auto-covariances in model space only, to be used e.g. in EnVar systems. In particular, domain localization is left out, as well as localization of covariances in observation space or in the cross-product of observation space and model space (as is done in many EnKF systems, see for instance Houtekamer and Zhang, 2016).

The main idea of localization in model space is to multiply the background error covariances by a localization factor, generally depending on the horizontal and vertical distances between the

considered grid points (hereafter horizontal and vertical *separations*). The localization factor generally decreases from one at zero separation to zero for large separations. The signal is thus attenuated where the covariances and the signal-to-noise ratio are expected to be low. Note that in some cases, the localization factor does not depend solely on horizontal and vertical separations, for example when applying localization to covariances between different variables, or between different time steps.

A variety of methods have been proposed to diagnose optimal localization functions. Some can determine the whole shape of the function (*e.g.* Anderson, 2012; Flowerdew, 2015; Ménétrier *et al.*, 2015a). Other methods rely on Gaussian-like localization functions and focus only on the optimal width of the Gaussian, the optimal localization length (or radius) (Sobash and Stensrud, 2013; Perianez *et al.*, 2014; Kong *et al.*, 2018). In most of these methods, localization is optimized for a specific context, be it the choice of an assimilation method (EnKF or EnVar flavours) or even the design of a full Observation System Simulation Experiments (OSSEs). The latter are used for instance by Sobash and Stensrud (2013), Lei *et al.* (2015), and Kong *et al.* (2018) with EnKF systems, and by Lorenc (2017) with a 3DEnVar system.

A different approach has been proposed by Ménétrier *et al.*, 2015a (hereafter M15). The authors of this article propose a purely statistical method, based on the sampled ensemble only and independent from any other information about the system configuration. This independence from any operational system is interesting, as it allows to draw general conclusions that are hopefully not too much affected by a particular observational configuration or DA system. The methodology of M15 has been employed by several studies, with applications to operational weather models (Michel *et al.*, 2016; Montmerle *et al.*, 2018; Caron *et al.*, 2018). This method is chosen here for optimal localization diagnosis.

## 1.2 | Hydrometeor localization

For hydrometeor background error covariances, shorter horizontal localization lengths are usually reported (compared to conventional background error covariances). Sobash and Stensrud (2013) for instance confirmed this result for microphysical variables through an OSSE experiment in an EnKF setting. Most attempts to include hydrometeor in the DA control variables follow the same paradigm, with horizontal localization radii of the order of 10 km in EnKF systems (Aksoy *et al.*, 2009; Dowell *et al.*, 2011; Sobash and Stensrud, 2013; Johnson *et al.*, 2015). At least two reasons can justify the choice of shorter localization lengths for hydrometeor variables. Firstly, especially in EnKF systems, the localization radii are related to observations, rather than microphysical variables only. Tighter localization functions are thus empirically imposed to adapt to dense radar observation networks. Another reason for shorter localization length, can be found in the high spatial variability of hydrometeor background error covariances. Michel *et al.* (2011) for instance have studied the characteristics of multivariate dynamical and hydrometeor background error covariances. *Inter alia*, they showed on two meteorological situations that hydrometeor horizontal correlation length-scales were shorter than other variables. As localization length scales with correlation length (*e.g.* Flowerdew, 2015; Bannister *et al.*, 2019), shorter optimal localization lengths should be deduced for hydrometeors.

So far, to the best of our knowledge, no objective localization diagnosis such as the method of

M15 has been applied to hydrometeor fields in convective-scale models. Does this method confirm the choice of shorter localization lengths for hydrometeor covariances, compared to conventional ones? If so, is this result consistent over all microphysical variables, weather types and vertical levels? What prescriptions can be deduced for localization schemes involving hydrometeor control variables? The present study addresses these questions. In section 2, the theory of optimal localization from M15 is briefly recalled. The requirements for its extension to hydrometeors are detailed in section 3. The experimental set-up is then presented in section 4. Results are detailed in section 5 which ends with consequences for localization schemes involving hydrometeor forecast errors. The study is concluded in section 6.

## 2 | THE OPTIMAL LOCALIZATION METHOD: THEORY AND PRACTICE

### 2.1 | Theory

Let  $x_1, \dots, x_N$  be an ensemble of  $N$  mutually independent forecasts of size  $n$ , drawn from the same random process (with  $N$  greater than 4). The unbiased sampled covariance matrix  $\tilde{\mathbf{B}}$  of the ensemble is given by:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}})^T \quad (1)$$

where  $\bar{\mathbf{x}}$  is the ensemble mean. A Schur (element-wise) product with a symmetric positive localization matrix  $\mathbf{L}$  yields the filtered covariance matrix  $\hat{\mathbf{B}}$ , commonly used in EnVar.

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \circ \tilde{\mathbf{B}} \quad (2)$$

where  $\hat{B}_{ij} = L_{ij} \tilde{B}_{ij}$  for all  $i, j = 1, \dots, n$ .

By defining the asymptotic matrix  $\mathbf{B}^*$  as the limit of  $\tilde{\mathbf{B}}$  when the ensemble size  $N$  goes to infinity, one can define the optimal localization matrix as the  $\mathbf{L}^{\text{opt}}$  matrix minimizing the distance  $\mathbb{E}[\|\mathbf{L} \circ \tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^*\|^2]$ , where  $\|\cdot\|$  denotes the Frobenius norm. Relying on results from linear filtering and centered moment estimation theories, the optimal localization matrix can be diagnosed from sampled estimates only (M15, their Equation 62):

$$L_{ij}^{\text{opt}} = \frac{(N-1)^2}{N(N-3)} - \frac{N}{(N-2)(N-3)} \frac{\mathbb{E}[\tilde{\Xi}_{ijjj}]}{\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^2]} + \frac{N-1}{N(N-2)(N-3)} \frac{\mathbb{E}[\tilde{B}_{ii} \tilde{B}_{jj}]}{\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^2]} \quad (3)$$

where  $\tilde{\Xi}$  is the sampled fourth-order centered moment of the ensemble and  $1 \leq i, j \leq n$ .

As outlined by Lorenc (2017), the diagnosed localizations are optimal in the sense of minimizing the distance between localized and asymptotic background error covariances. Hence, the method only addresses the problem of sampling noise, independently of the optimality of the resulting analysis. Optimal localization in terms of optimal analysis may differ from localization diagnosed here, depending on the relative weights given to observation and forecast errors, or on the quality of the ensemble (Lorenc, 2017).

This article focuses on optimal localization for auto-covariances of hydrometeors and of conventional variables. In particular, localization of inter-variable covariances is not studied there, though cross-covariances could also (at least theoretically) be studied with the M15 method.

## 2.2 | Ergodicity assumptions

### 2.2.1 | Use of spatial averaging

The expectation operators  $\mathbb{E}[\cdot]$  in Equation 3 apply to both (independent) processes of asymptotic statistics generation and drawing  $N$  members consistent with these asymptotic statistics (see M15 for details). Given that only one ensemble of  $N$  members is available at a time, these expectations cannot be estimated directly. To approximate these operators, M15 formulate an ergodicity assumption by replacing the statistical expectations by horizontal and angular spatial averages. If the forecasts are discretized on a three-dimensional grid, all pairs  $(i, j)$  of grid points of coordinates  $(x_i, y_i, z_i)$  and  $(x_j, y_j, z_j)$  can be partitioned into *separation classes* of given horizontal separation  $d_h = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  and vertical model levels  $z_i$  and  $z_j$  (irrespectively of the order of  $i$  or  $j$ , the problem being symmetric in  $i$  and  $j$ ). The horizontal separation distance  $d_h$  is discretized to ensure there are enough pairs in each separation class. In order to keep computations affordable, a spatial sub-sampling approach is employed. A few representative pairs (at least 1000 in practice) are selected in each separation class, before computing the associated spatial average. Since the considered diagnostic package is conceived for possibly irregular grids, representative pairs are chosen by random, geographically homogeneous sampling in each class. The expectation operator is thus approximated as follows:

$$L^{\text{opt}}(d_h, z_i, z_j) = \frac{(N-1)^2}{N(N-3)} - \frac{N}{(N-2)(N-3)} \frac{\mu \left[ \tilde{\Xi}_{ijij} \right]}{\mu \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right]} + \frac{N-1}{N(N-2)(N-3)} \frac{\mu \left[ \tilde{B}_{ii} \tilde{B}_{jj} \right]}{\mu \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right]} \quad (4)$$

where  $\mu[\cdot]$  denotes an averaging operator on a random sub-sample from the separation class  $(d_h, z_i, z_j)$ , and  $L^{\text{opt}}(d_h, z_i, z_j)$  is now the diagnosed localization function defined on the three-dimensional discrete



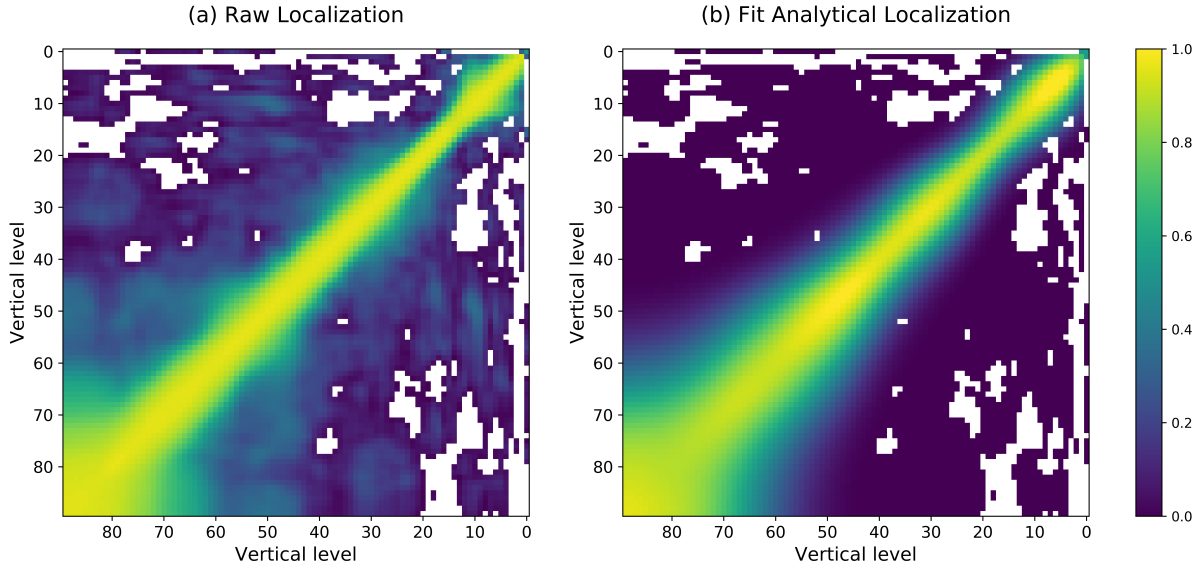


FIGURE 1 Raw (a) and fit analytical (b) localization functions for specific humidity. The localization is shown here when the horizontal separation  $d_h$  is zero. It is diagnosed from an ensemble of 50 forecasts from the AROME EDA (cf. section 4), valid on November 15<sup>th</sup>, 2018 at 06 UTC. Missing values in white.

space of separation classes. For illustration purpose, figure 1(a) shows a diagnosed localization function in  $(z_i, z_j)$  coordinates and for  $d_h = 0$ , for specific humidity. Each color pixel represents an independent localization diagnosis. Equivalently, a different choice of coordinates to represent separation classes is given by vertical level  $z = z_i$ , vertical separation  $d_z = z_j - z_i$  and horizontal separation  $d_h$ . Localization in figure 2(a) is shown in  $(d_h, d_z)$  coordinates for instance.

## 2.2.2 | Decomposition into ergodic sub-classes

The ergodicity assumption may appear as a strong one to some readers. Actually, another interpretation of the spatial averaging can be given, allowing to relax the ergodicity assumption to the weaker assumption of ergodic decomposition.

Let us assume that a given separation class  $C$  can be divided into  $K$  ergodic sub-classes  $C_k$ , sampled with proportion  $\alpha_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ), and that each subclass is correctly sampled. Then, the diagnosis  $L^{\text{opt}}(d_h, z_i, z_j)$  given by spatial averaging can be shown to verify:

$$L^{\text{opt}}(d_h, z_i, z_j) \approx \frac{\sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbb{E}_k \left[ B_{ij}^{*2} \right]}{\sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbb{E}_k \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right]}. \quad (5)$$

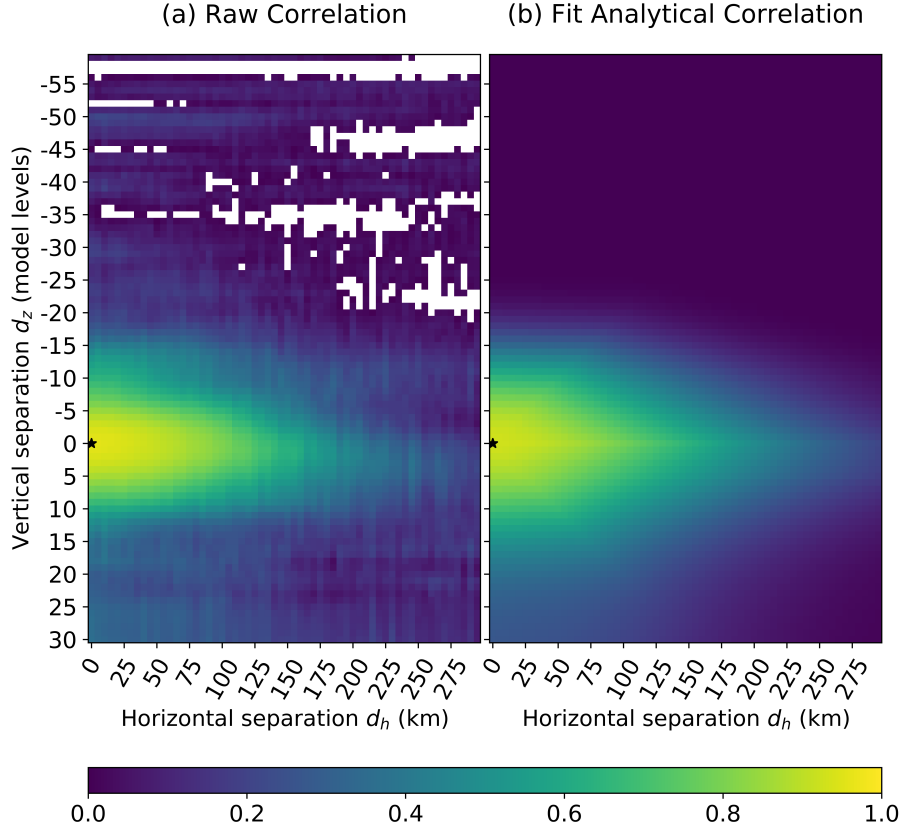


FIGURE 2 Same as figure 1, but localization is shown here in  $(d_h, d_z)$  coordinates for model level  $z = 60$ , that is around 430hPa. The black star indicates the zero separation pair, where localization is close to 1 in both panels.

where  $\mathbb{E}_k[\cdot]$  denotes expectation over the random process sampled by subclass  $C_k$ . The  $\approx$  sign comes from imperfections in the estimations of expectations, due to limited size of each subclass. To better understand this formulation, Equations 30c and 57 of M15 can be combined to obtain the optimality criterion:

$$\mathbb{E} \left[ B_{ij}^{*2} \right] - L_{ij}^{\text{opt}} \mathbb{E} \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right] = 0, \quad (6)$$

which implies that

$$L_{ij}^{\text{opt}} = \frac{\mathbb{E} \left[ B_{ij}^{*2} \right]}{\mathbb{E} \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right]}. \quad (7)$$

Hence the right-hand side of Equation 5 is almost an average of sub-diagnoses  $\mathbb{E}_k \left[ B_{ij}^{*2} \right] / \mathbb{E}_k \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right]$ .

Plus, it can be shown that this “average” actually minimizes

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbb{E}_k \left[ \left( L_{ij} \tilde{B}_{ij} - B_{ij}^* \right)^2 \right], \quad (8)$$

which is the natural cost function to estimate a single optimal value of localization to be applied across different covariance statistics.

In practice, this interpretation of optimality is useful when diagnosing optimal localization over a domain where several weather situations co-exist. In this case, each sub-diagnosis correspond to each local weather situation, and the final diagnosis is the optimal combination of local diagnoses, following Equation 5.

### 2.2.3 | Consistency tests

Though these hypotheses of ergodicity are impossible to validate explicitly, a few *a posteriori* checks of consistency can be performed. These checks are consistent with both interpretations of the spatial averaging (sections 2.2.1 and 2.2.2). For the sake of clarity, we limit ourselves to the first interpretation (ergodicity assumption).

From sampled estimates  $\mu[\tilde{B}_{ij}^2]$ ,  $\mu[\tilde{B}_{ii}\tilde{B}_{jj}]$  and  $\mu[\tilde{\Xi}_{ijij}]$ , and under the assumption that  $\mu[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot]$ , it is possible to retrieve the asymptotic quantities  $\mathbb{E}[B_{ij}^{*2}]$  and  $\mathbb{E}[B_{ii}^*B_{jj}^*]$ .

The consistency tests consist in verifying a few basic statistical properties that should be true for these asymptotic statistics. Failures in passing these tests occur when the estimation  $\mu[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot]$  is too rough. Before issuing a diagnosis, we verify that:

$$0 \leq \mathbb{E} \left[ B_{ii}^* B_{jj}^* \right] \quad (9)$$

$$\mathbb{E} \left[ B_{ij}^* \right]^2 \leq \mathbb{E} \left[ B_{ij}^{*2} \right] \quad (10)$$

$$\mathbb{E} \left[ B_{ij}^{*2} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \tilde{B}_{ij}^2 \right] \quad (11)$$

Equation 10 is Hölder’s inequality and implies that  $0 \leq \mathbb{E}[B_{ij}^{*2}]$ . This guarantees that  $L_{ij}^{\text{opt}} \geq 0$  (cf. Equation 7), but is more constraining than mere positivity of diagnosed localization. Similarly, Equation 11 comes from sampling theory and guarantees that  $L_{ij}^{\text{opt}} \leq 1$ .

Missing values of raw localization can be seen in upper model levels in figures 1(a) and 2(a). These missing values correspond to separation classes where one at least of these inequalities is not verified (Equations 9 or 10 for most classes). Fortunately, this phenomenon is generally observed in zones of small sample correlation, where optimal localization is expected to be low. Surrounding separation classes have weak values of localization, so that the global shape of the localization function is not affected by these rejections.

In the experiments presented in this article, the use of these consistency tests, the spatial consistency of results across separation classes, and the robustness to changes in spatial sampling comforts the idea that the assumption of ergodicity (or ergodic decomposition) is reasonable.

### 2.3 | Zero separation localization

Equation 4 does not enforce the localization to be 1 at zero separation, contrary to what could be expected from common practices in the literature. Even in the case of a Gaussian distributed ensemble, the theoretical value of localization at zero separation is  $(N - 1)/(N + 1)$  (Equation 68 in M15). As a result, the corresponding estimator of variance differs from the standard unbiased estimator. This is because the optimal value of  $L_{ij}$  minimizes the mean squared error  $\mathbb{E}[(L_{ij}\tilde{B}_{ij} - B_{ij}^*)^2] = \mathbb{E}[L_{ij}\tilde{B}_{ij} - B_{ij}^*]^2 + \text{Var}(L_{ij}\tilde{B}_{ij} - B_{ij}^*)$  which includes a variance term in addition to the squared bias. The fact that optimal localization  $L_{ij}$  is strictly lower than 1 means that accepting a certain bias can be more than outweighed by the associated reduction in variance.

Small values of localization (even below 0.5) at zero separation are thus possible. According to the second term in Equation 4, this behavior indicates high kurtosis in the ensemble. In practice, such high values of kurtosis only concern hydrometeor distributions, which exhibit a peak at 0 and large tails evidenced by a few extreme values. As detailed in section 2.4, this hydrometeor specificity does not prevent from diagnosing localization lengths for hydrometeors. Indeed, applying a localization function that is strictly less than 1 at zero separation amounts to first reducing the ensemble spread (according to localization at zero separation), and then applying a normalized localization function. While the optimal localization at zero separation may still be an interest for future studies, zero separation diagnoses are not discussed further in the rest of the paper. Indeed, the ensemble spread might be modified anyway by an inflation scheme later in the DA process, depending on the considered system. Hereafter, the focus is put on optimal localization lengths.

### 2.4 | From localization functions to localization lengths

We propose to reduce the information contained in diagnosed localization functions to a length-scale when convenient:

- In order to easily visualize the results and compare them across different variables, or different meteorological situations;
- In order to provide relevant information, simple enough to be compatible with predefined localization schemes in DA systems.

In sections 2.1 and 2.2, localization is diagnosed as a function of vertical level  $z$ , vertical separation  $d_z$  and horizontal separation  $d_h$ . This section explains how horizontal and vertical localization length profiles,  $r_h(z)$  and  $r_v(z)$  respectively, can be extracted from the diagnosed localization function.

$r_h$  and  $r_v$  profiles are chosen to minimize the distance between diagnosed localization (hereafter

raw localization) and an analytical Gaussian-like localization described by  $r_h$  and  $r_v$ . In order to fit precisely the raw localization function, the analytical localization function is not constrained to be 1 at zero separation. A normalization factor  $\alpha(z)$  is introduced to adjust this zero separation value.

The Gaspari and Cohn correlation profile (from Gaspari and Cohn, 1999) is chosen for the analytical localization, both in vertical and horizontal directions. This function approximates a Gaussian correlation function by a piece-wise fifth-order polynomial function of compact support, and is commonly used for localization purposes (*e.g.* Buehner, 2005). Therein, localization lengths refer to the Daley length  $L_D$  of functions (Daley, 1993).

It should be noted that preserving the symmetry property of the analytical localization function is not straightforward if the localization lengths  $r_h$ ,  $r_v$  and the normalization factor  $\alpha$  vary with model level  $z$ . A few details on the computation of the analytical localization function are given in appendix A. Besides, a penalty term for sharp profiles is added in the fit process, to avoid over-fitting the raw localization function. More details are given in appendix B. Note also that diagnosed localizations are generally not positive definite, which motivates their empirical fit by analytical functions. The fit step increases the robustness of the diagnoses by aggregating them, and is generally non-sensitive to large-separation missing values evoked in section 2.2.

Typical localization length profiles are shown in figure 3. The corresponding analytical localization function is shown in figure 1 and 2, side by side with raw localization. The analytical localization correctly reproduces the features observed in raw localization, at least for short separation distances. The symmetry of both raw and analytical localization functions is clearly visible in figure 1.

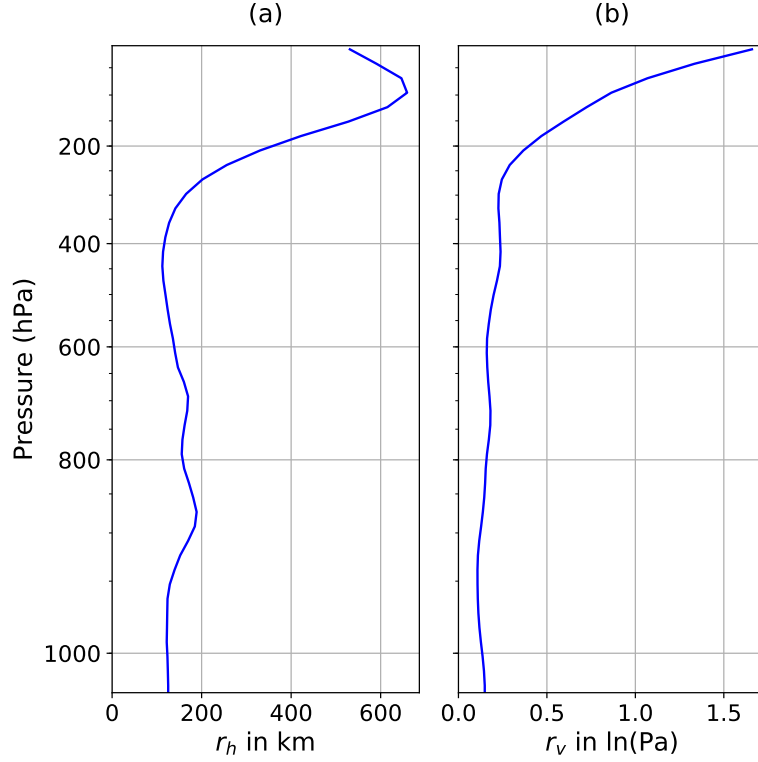


FIGURE 3 Diagnosed localization lengths as a function of vertical level, for specific humidity, same case as figure 1. (a) Horizontal and (b) vertical localization lengths.

### 3 | EXTENSION TO HYDROMETEOR VARIABLES

#### 3.1 | The issue of zero variances

Applying the method of M15 to hydrometeor fields requires a few adaptations. By nature, hydrometeor fields are heterogeneous. As a matter of fact, hydrometeor mixing ratios are frequently zero where thermodynamic conditions below saturation prevail. When such a zero value is found at grid point  $i$  in every ensemble member, the associated sampled variance  $\tilde{B}_{ij}$  is zero. Hence, sampled covariances  $\tilde{B}_{ij}$  are zero, and possibly the expectation of squared sampled covariances  $\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^2]$  as well. Yet, Equation 3 requires that the expectation  $\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^2]$  be non-zero, otherwise the fractions in the expression of optimal localization are undefined.

To better understand this limitation, one can refer to the optimality criterion of Equation 6. When  $\mathbb{E}[\tilde{B}_{ij}^2]$  is zero, the value of the expression does not depend on  $L_{ij}$ . Since there is no covariance to be localized,  $L_{ij}$  can indeed take any possible value without impacting the filtered covariances. This reasoning can be applied to the resulting analysis increments as well: if all ensemble members are equal on a given grid point, the increment at this grid point is necessarily zero (in a pure ensemble scheme), independently of the chosen localization. Consequently, there is no *optimal* localization  $L_{ij}^{\text{opt}}$ ,

and concerned pairs  $(i, j)$  of grid points can just be excluded from the diagnosis.

### 3.2 | Sampling hydrometeor fields more efficiently

The discussion in previous section is essentially theoretical, since a statement such as  $\mathbb{E} \left[ \widetilde{B}_{ij}^2 \right] = 0$  cannot be evaluated in practice. The actual problem to be answered is what to do with separation classes where the expectations are *estimated* as zero:  $\mathbb{E} \left[ \widetilde{B}_{ij}^2 \right] \approx \mu \left[ \widetilde{B}_{ij}^2 \right] = 0$ , where  $\mu$  is the sampling-averaging operator over the separation class of pair  $(i, j)$  (see Equation 4). A cautious choice is to discard such separation classes from the diagnosis. This questions in turn the validity of the estimation: what if we just under-sampled the separation class? What if we missed some non-zero pairs in the separation class? Then, the separation class would have been wrongly rejected, while a diagnosis might have been provided. Even then, how much confidence could one have on a diagnosis based on just a few grid points? To avoid such problems, more robust estimations of the expectations are needed. This section shows how sampling directly non-zero variance pairs improves the robustness of the estimations.

Let  $C = (d_h, z_i, z_j)$  be a separation class. Let  $\mathcal{I} \subset C$  be a random subset of  $C$ . Then the expectation  $\mathbb{E} \left[ \widetilde{B}_{ij}^2 \right]$  can be estimated by ergodicity:

$$\mu \left[ \widetilde{B}_{ij}^2 \right] = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{I})} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} \widetilde{B}_{ij}^2,$$

where  $\text{Card}(\mathcal{I})$  designates the cardinal of set  $\mathcal{I}$ . In practice,  $\mathcal{I}$  is sampled so that  $\text{Card}(\mathcal{I}) \ll \text{Card}(C)$ , in order to enable faster computations and to limit memory usage. The set  $\mathcal{I}$  can be partitioned into pairs of zero variances and pairs of non-zero variances:  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_+$  with

$$\mathcal{I}_0 = \left\{ i, j \in \mathcal{I} \mid \widetilde{B}_{ii} = 0 \text{ or } \widetilde{B}_{jj} = 0 \right\} \quad (12)$$

$$\mathcal{I}_+ = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0 = \left\{ i, j \in \mathcal{I} \mid \widetilde{B}_{ii} > 0 \text{ and } \widetilde{B}_{jj} > 0 \right\} \quad (13)$$

And similarly  $C = C_0 \cup C_+$ . This partition of  $\mathcal{I}$  enables to simplify the fractions in Equation 4. For its second term for instance:

$$\frac{\mu \left[ \widetilde{\Xi}_{ijij} \right]}{\mu \left[ \widetilde{B}_{ij}^2 \right]} = \frac{\frac{1}{\text{Card}(\mathcal{I})} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} \widetilde{\Xi}_{ijij}}{\frac{1}{\text{Card}(\mathcal{I})} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} \widetilde{B}_{ij}^2} = \frac{\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_+} \widetilde{\Xi}_{ijij}}{\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_+} \widetilde{B}_{ij}^2}, \quad (14)$$

since zero variances imply zero fourth-order moments. A similar result is obtained for the third term of Equation 4. As a consequence, localization diagnosed from set  $\mathcal{I}$  is the same as localization diagnosed from set  $\mathcal{I}_+$ . This argues in favour of rejecting zero-variance pairs (in  $\mathcal{I}_0$ ) from the sampling step. By

sampling pairs directly in  $C_+$  while keeping the same number of sampled pairs, the effective sample size is increased by a factor  $\text{Card}(C)/\text{Card}(C_+)$  on average, which can be quite important if only a small part of the geographical domain has a non-zero hydrometeor content. The diagnosis is thus made more robust, by sampling more densely the separation class. Note however that the increase in effective sample size obtained by sampling more densely is partly mitigated by higher spatial correlations among the sampled pair. The given increase factor  $\text{Card}(C)/\text{Card}(C_+)$  may thus be an upper bound.

### 3.3 | Excluding zero variances in practice

A rather straightforward way of sampling only non-zero variance pairs consists in excluding zero variance points individually, before forming pairs. Yet, due to rounding errors in the different computations, a significant part of variances may not be exactly zero, but still be exceedingly small and non physically significant. A threshold has to be chosen, below which standard deviation are considered to be zero, leading to rejection of the grid points. A threshold value of  $10^{-12}$  kg kg<sup>-1</sup> in ensemble standard deviation is chosen. Several arguments are given below to support this choice.

1. A  $10^{-12}$  standard deviation corresponds to a variance of  $10^{-24}$ , which is below the accuracy of double precision computations.
2. Figure 4 shows that the accepted grid points gather around high concentration zones, which should not be the case for numerical noise.
3. This choice is confirmed by looking at the implied geographical three-dimensional masks on variances. As shown in figure 5, the chosen threshold is located in a range of values (from  $10^{-11}$  to  $10^{-17}$ ) where the mask is almost non sensitive to the choice of threshold .
4. This threshold is relevant across all hydrometeor types, all levels and all considered weather situations.



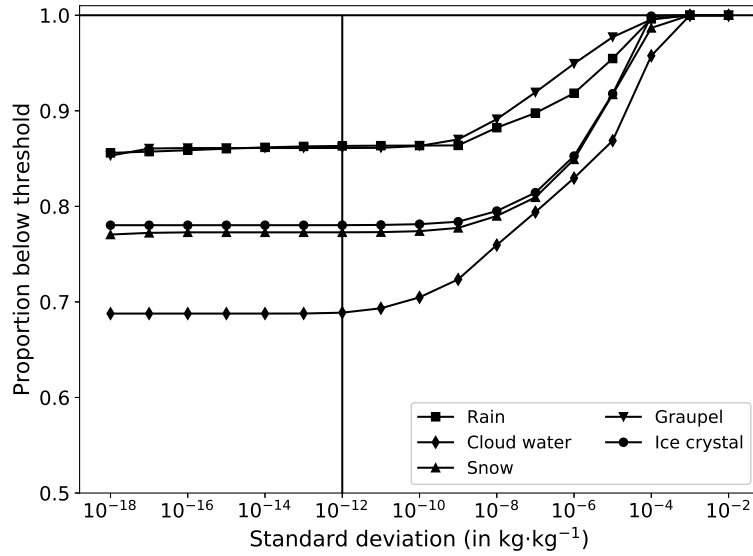


FIGURE 5 Empirical cumulative distribution function of hydrometeor sampled variances in ensemble for case 7 and across all vertical levels. The horizontal scale is logarithmic.

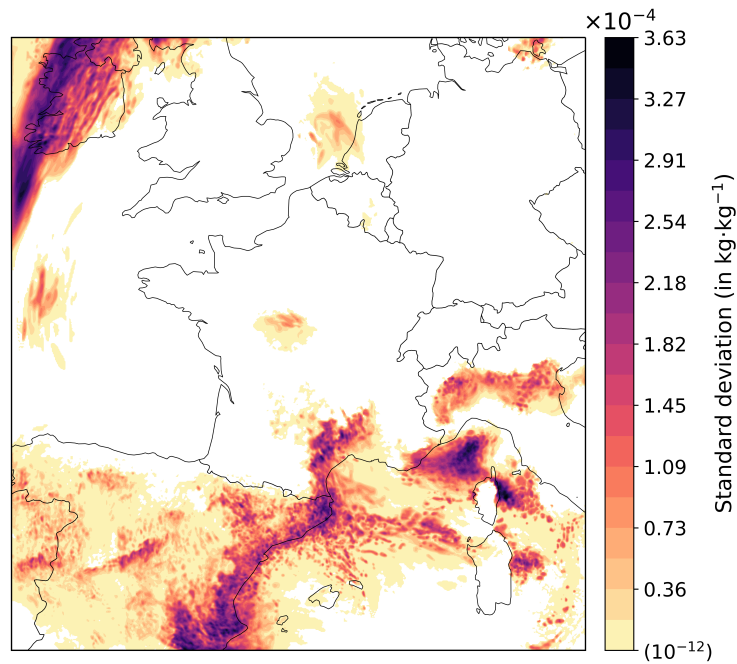


FIGURE 4 Standard deviations of cloud water ( $q_l$ ) content at model level 62 (around 850 hPa) over the AROME domain. The standard deviations are sampled from a 50 member ensemble from the AROME EDA system, valid at 6 UTC in November 15<sup>th</sup>, 2018. Standard deviations are masked below the threshold value  $10^{-12} \text{ kg kg}^{-1}$ .

### 3.4 | Acceptance tests for localization lengths

Once the diagnosis is performed, a test of acceptance is carried out level by level on  $r_h$  and  $r_v$  profiles. Indeed, the fit of the analytical function is performed globally, so that  $r_h(z)$  and  $r_v(z)$  are defined across all levels. The acceptance test aims at rejecting levels where the raw localization was not correctly fitted by the analytical localization function. This typically happens when the shape of the raw localization function strongly differs from a Gaussian, when the raw localization diagnosis is very noisy, with no sign of decay with increasing separation distance, or when the diagnosis could simply not be performed because of absence of hydrometeor. The former cases are evidenced by unusually high residuals of the fit. The latter is evidenced when too few localization diagnoses are available to describe the raw localization function at a given level. More details on the acceptance tests are given in appendix C.

Even though this quality control step only affects hydrometeor variables in practice, the whole localization diagnosis is performed identically for hydrometeor variables and conventional variables.

## 4 | EXPERIMENTAL SET-UP

### 4.1 | The AROME EDA

Given that localization diagnoses only require information from an ensemble of forecasts, ensemble generation deserves a specific attention. All ensembles used in this study are generated by the AROME Ensemble Data Assimilation (EDA) system, which evolves 50 members through 3 hour cycles of DA and forecast steps. Such a system aims to simulate the error evolution of the AROME-France DA system (Seity *et al.*, 2011) through the addition and propagation of both observation and model perturbations during the DA cycling. In addition to what is classically done at global scale (e.g Berre and Desroziers, 2010), perturbed lateral boundary conditions provided by the operational EDA at global scale based on the ARPEGE model are also used (Berre *et al.*, 2015). No inflation is applied to the ensemble, but the method of Stochastically Perturbed Parametrization Tendencies (SPPT) is used to simulate model error (Palmer *et al.*, 2009; Bouttier *et al.*, 2012) with a horizontal length-scale of 500 km. The water species are evolved by the single-moment microphysics scheme ICE3 (Lascaux *et al.*, 2006). Besides mass mixing ratio of water vapour  $q_v$ , the ICE3 scheme describes the evolution of five hydrometeor variables: cloud water  $q_l$ , ice crystals  $q_i$ , rain  $q_r$ , snow  $q_s$  and graupel  $q_g$  (that also includes hail as large graupel particles). Compared to the deterministic AROME-France model, which nowadays runs at 1.3 km horizontal resolution and performs hourly DA cycles (Brousseau *et al.*, 2016), the same vertical discretization of 90 levels is used, whereas a lower horizontal resolution of 3.2 km has been preferred to lower computational cost.

As the AROME EDA was not yet in operation at Météo-France, three cycling experiments have been performed over February 2018, May to October 2018 and November 2018, encompassing eight meteorological situations of interest. The eight studied ensembles are extracted at least 2 days after the beginning of each EDA cycled experiment, to make sure the system has reached an equilibrium state with an appropriate dispersion.

As displayed in Equation 3, the absolute value of the diagnosed localization length depends of the ensemble size. Yet, the ratio of the retrieved lengths between hydrometeors and conventional variables should be less sensitive to such size, which keeps the results relevant for application to different ensemble-based DA systems.

## 4.2 | Meteorological situations

#	Validity date	Weather type
1	2018/02/11 03h	Weather disturbance
2	2018/02/13 03h	Little rain winter case
3	2018/05/21 15h	Barometric swamp thunderstorms
4	2018/05/28 15h	Locally intense thunderstorms
5	2018/08/09 12h	Thunderstorms.
6	2018/10/15 03h	High Precipitation Event in South-Eastern France
7	2018/11/15 06h	Fog over northern France
8	2018/11/16 06h	Fog over northern France

TABLE 1 Studied meteorological situations. Hours are given in UTC.

Eight cases are studied, and listed in table 1. The meteorological situations were chosen to be representative of different weather patterns implying different hydrometeor species over the AROME domain in 2018. Cases have been selected both in winter (two in February), in summer (one in August) and in mid-seasons (two in May, one in October, two in November). Half of the cases are mostly convective, for instance in the end of May, where intense thunderstorms developed over France. The August case has been chosen for being the most active in the month, in terms of number of detected lightning flashes. Finally, the October case is a High Precipitation Event in South France, with local rainfall reaching about 260 mm in 12 h, which caused 14 casualties in the Aude department from the resulting flooding. More stratiform cloud cases were selected in November, with two situations of wide-spread fog over the North of France. The two winter cases are more common, with the passage of a weather disturbance with scattered showers over France, and a more dry but cloudy typical mid-latitude winter atmosphere.

## 4.3 | Implementation of the localization diagnoses

The localization diagnoses have been performed using the BUMP package developed by Benjamin Ménétrier (see acknowledgment section for details). A few technical details are given here.

As mentioned in section 2.2, separation classes are divided according to a discretized horizontal separation distance, *inter alia*. The horizontal resolution  $\Delta d$  should be fine enough to properly inform on the decay of localization with horizontal separation. On the other hand, it should be consistent with the horizontal resolution of the ensemble (3.2km), to make sure that there are enough pairs in a given

separation class. Otherwise, estimation of expectations in Equation 4 might suffer from under-sampling. The horizontal class width is chosen as  $\Delta d = 5$  km in these experiments, with horizontal separations ranging from 0 km to 300 km.

Vertically, separation classes are naturally discretized by all possible pairs of levels.

For the sampling step, up to 10 000 pairs are sampled and averaged for each separation class.

#### 4.4 | Confidence

To have an idea of the robustness of the diagnoses, the whole process of localization profile estimation is performed ten times per variables, with different seeds of the random number generator. Changing the seed changes the random selection of geographical pairs  $(i, j)$  that are used in each separation class, and finally changes the localization diagnosis. The variability of the results gives a coarse idea of the uncertainty due to spatial sampling. These uncertainty ranges are shaded in figure 6. If less than half of the 10 diagnoses pass the acceptance tests at a given vertical level (section 3.4 and appendix C), the remaining diagnosed localization lengths at this level are screened out, and the result is regarded as not robust enough to be considered. Otherwise, the median value of the level is kept as diagnosed localization length, to get rid of potential outliers.

### 5 | RESULTS: LOCALIZATION DIAGNOSES

#### 5.1 | Horizontal localization

Diagnosed horizontal localization lengths ( $r_h$ ) for November 15<sup>th</sup> (first fog case) are presented in figure 6. At first,  $r_h$  uncertainty ranges look wider for hydrometeors: around 30 %, against 10 % for conventional variables. Yet, the absolute width of the uncertainty range is similar, around 15 km for every variable and for most levels. The uncertainty range is omitted for the sake of clarity in figure 7, where  $r_h$  profiles from all meteorological cases are gathered for a selection of variables.

##### 5.1.1 | Dependence to vertical level

Diagnosed horizontal localization lengths  $r_h$  are strongly dependent on vertical level. This dependence is especially clear for hydrometeor variables, for which localization can be diagnosed for a fraction of vertical levels only. Different hydrometeor variables in the ensemble are gathered in different portions of the atmosphere: lower levels for cloud water and rain, upper levels for snow and ice crystals, all levels for graupels that gather a mix of melted particles essentially present in convective towers.

Where the diagnoses can be performed,  $r_h$  values for hydrometeor remain level dependent. For  $q_l$  for instance, in figure 6, a peak is displayed around 850 hPa with values greater than 200 km, which is roughly 4 times the value below (around 1000 hPa) and above (around 750 hPa). We hypothesize that the diagnosed peak in  $r_h$  is due to the passage of a linear cloud structure in the north-western part of the domain. This structure leaves its imprint on the map of sampled standard deviations in figure 4). This

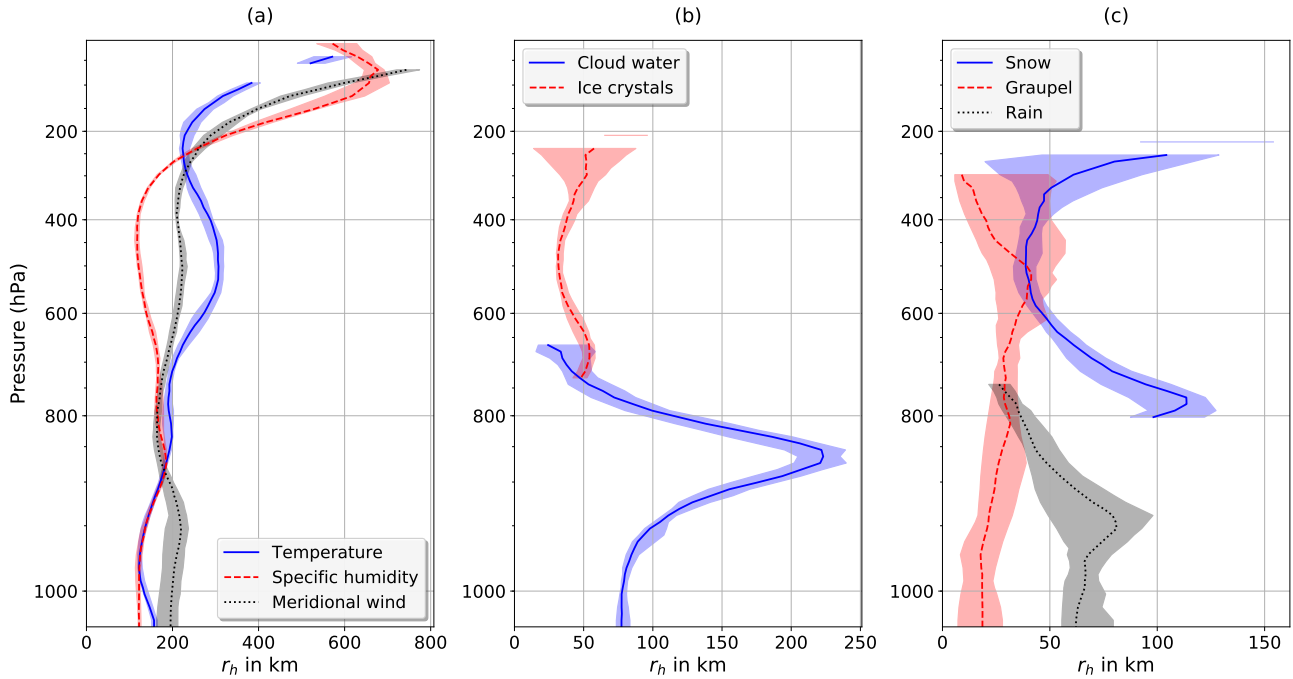


FIGURE 6 Diagnosed horizontal localization lengths diagnosed for November 15<sup>th</sup>, 2018 6 UTC case. Shaded areas show the interval between the 10<sup>th</sup> and 90<sup>th</sup> percentiles of a 10 run ensemble. Horizontal scales differ from one panel to another.

hypothesis is confirmed by performing separate diagnoses for the southern and northern halves of the domain. Only the northern diagnosis reproduces this peak in  $r_h$  (not shown), associated with larger correlation lengths on average. So the diagnosis on the whole domain is the optimal combination of southern and northern diagnoses, as described in section 2.2.2.

Profiles of  $r_h$  diagnosed for the other weather situations reveal similar vertical variability. Figure 7 shows that for each hydrometeor variable, at least one day exhibits a significantly vertical-dependent profile. This variability can be simply quantified for each profile by computing the ratio of maximum over minimum localization lengths (max over min ratio). This max over min ratio is almost always higher than 2, across all variables and times. Cloud water  $r_h$  profiles in particular are often peaky, with a max over min ratio above 9.0 in 7 cases out of 8. Other hydrometeor variables can be quite uniform, especially for rain, but frequently present a peak in localization at some altitude. This uniformity might be related to their precipitating nature, which implies similar error structures across vertical levels, and hence similar  $r_h$ .

For conventional variables,  $r_h$  values rapidly increase from 100 – 300 km in the troposphere to 400 – 700 km in the stratosphere. This phenomenon has already been noticed by Ménétrier *et al.* (2015b) and Montmerle *et al.* (2018). This could be partly a specific feature of the AROME-EDA, maybe related to coupling to a large scale model on the top of the atmosphere. It could also be related to the usual increase of correlation length scales with height (see for instance Caron and Buehner, 2018).

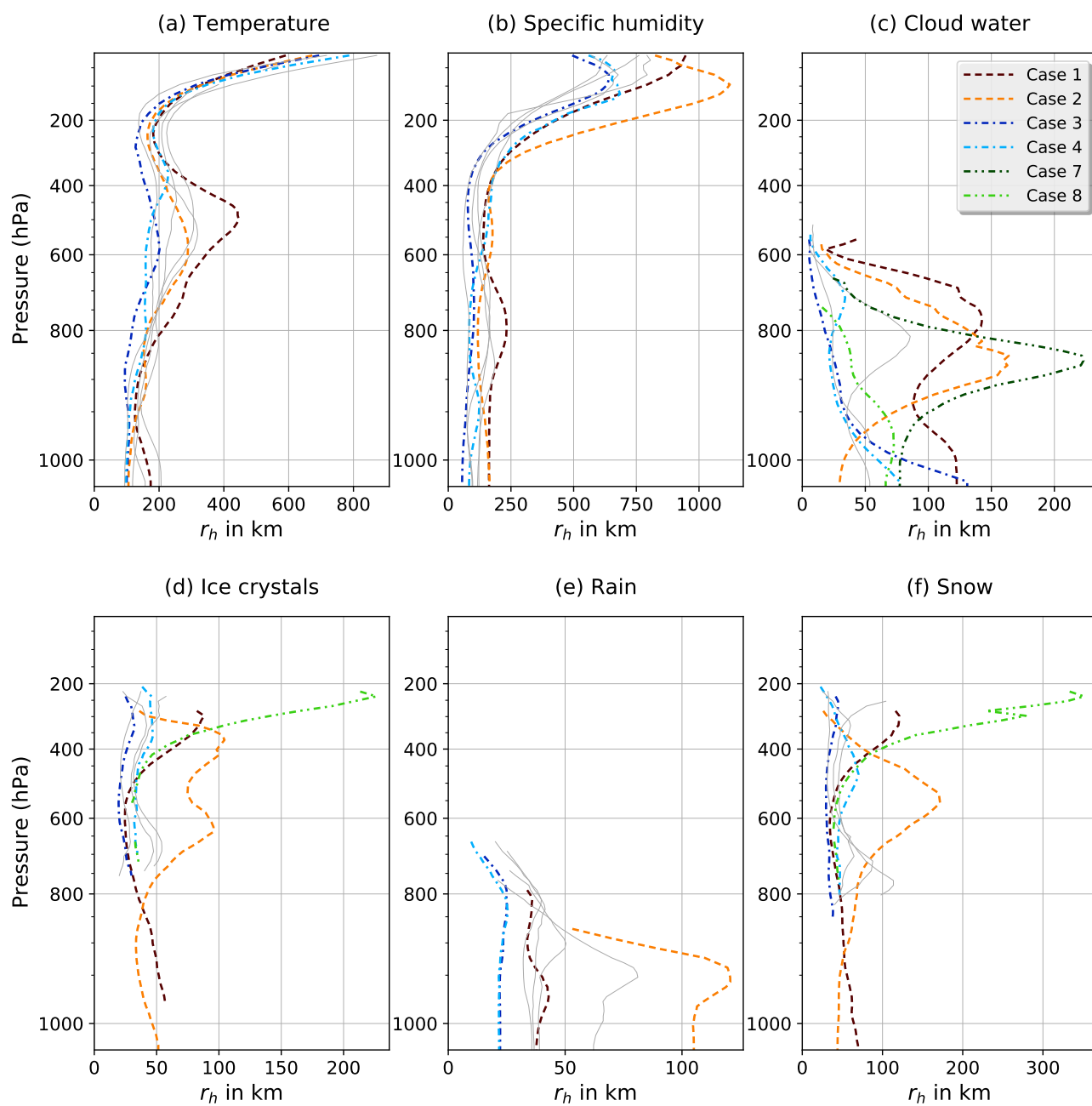


FIGURE 7 Diagnoses of horizontal localization lengths for 8 studied ensembles and 6 variables. Each profile is the median value from 10 runs. Data is not shown where more than half of the 10 runs fail to issue a diagnosis. Some days are enhanced by specific color and line style, see text for details. Horizontal scales differ between panels.

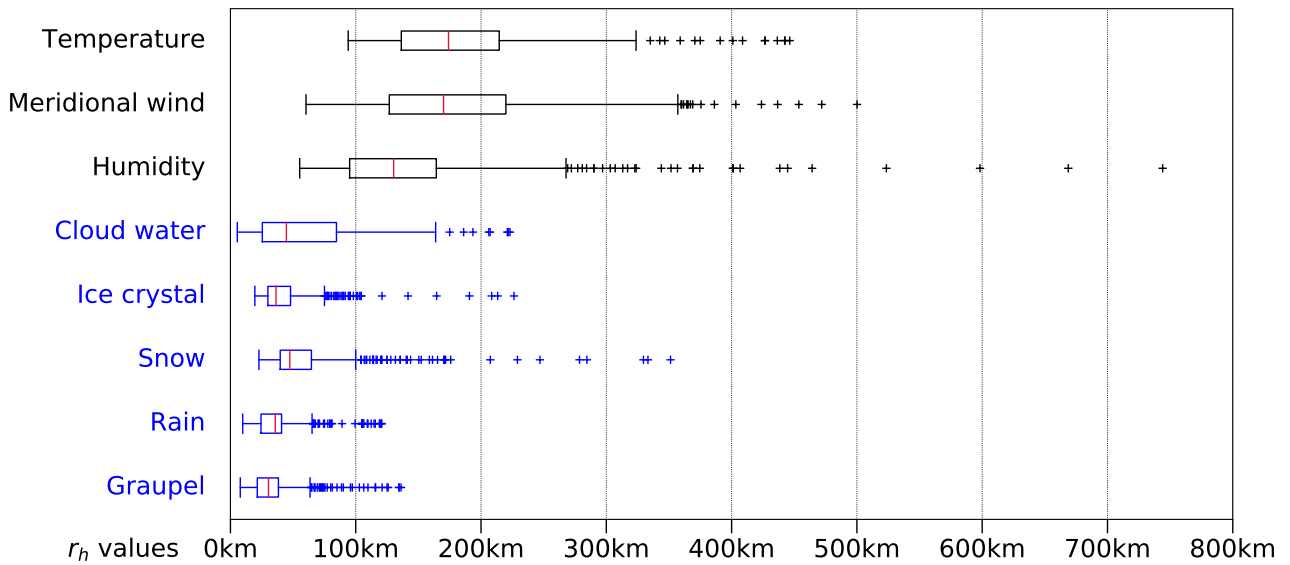


FIGURE 8 Range of values for  $r_h$  for different variables, aggregated from all 8 studied days and vertical levels below 190 hPa. Localization lengths above 190 hPa are discarded, since there is no hydrometeor diagnosis for comparison with conventional variables at these levels. The boxes extend from first quartile  $Q1$  to third quartile  $Q3$ . The median value is shown in between. The whiskers extend on each side to the furthest points within  $d$  km of box ends, where  $d$  is 1.5 times the inter-quartile range  $Q3 - Q1$ . Points farther away are marked with crosses.

### 5.1.2 | Dependence to weather situation

As shown in figure 7, the localization diagnosis depends on the considered meteorological situation. For instance, diagnosed  $r_h$  are generally larger for winter cases (cases 1 and 2) than for the convective May cases (cases 3 and 4), for all considered variables. This difference is probably linked to similar differences in the correlation structures, more flattened in stratified winter situations. Hence, the variability of correlation structures with weather types, already noted by Brousseau *et al.* (2012) and Ménétrier *et al.* (2014) for instance, is reflected in the variability of the diagnosed localizations.

The daily variability of  $r_h$  is comparable to, and maybe even greater than the seasonal variability. Two diagnoses can clearly differ from one day to the next, as shown by the two November profiles (fog cases 7 and 8) for cloud water in figure 7(c). The diagnosed profiles are similar in the first bottom layers of the atmosphere, where fog conditions are similar. However, the profiles rapidly diverge above the first few layers, due to the passage of the linear cloud structure previously mentioned in case 7, which is absent of the domain in case 8.

### 5.1.3 | Range of values for horizontal localization

Figure 8 summarizes the differences of diagnosed  $r_h$  for all levels, cases and variables, by displaying on one figure the range of diagnosed values. Clearly, shorter  $r_h$  (mainly 20 km to 90 km) have been obtained for hydrometeors, compared to conventional variables (mostly 90 km to 220 km, except in

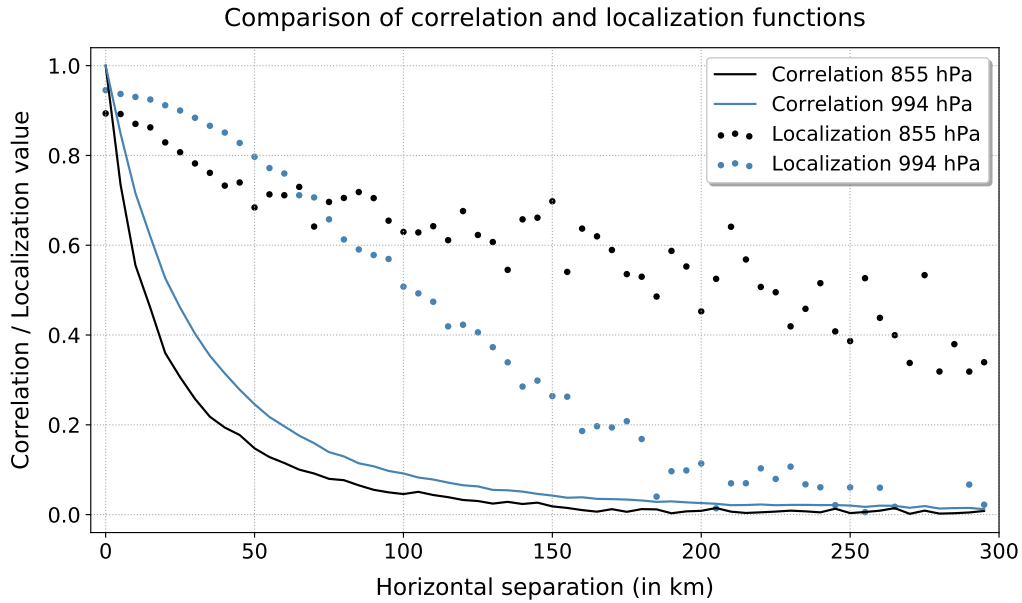


FIGURE 9 Horizontal section of mean sample correlation and optimal localization functions. The sections are extracted at two different altitudes and correspond to cloud water on figure 6 (b).

the stratosphere). The shortest values are consistently displayed for liquid rain and graupel, that are the condensate with the largest fall speed, whereas values for liquid cloud are more variable and can be larger. These results are quite consistent when compared day by day and level by level, with values for hydrometeors that are smaller compared to conventional variables by a factor 2 to 6 (not shown). Surface pressure diagnoses have been performed for comparison purposes and show a median value for  $r_h$  around 940 km, making surface pressure the conventional variable with largest horizontal localization length.

#### 5.1.4 | Relationship to correlation lengths

The ambiguous relationship between correlation and localization is illustrated in figure 9, where sections of correlation and localization functions are displayed together. This figure evidences that broader mean sample correlation functions are not always associated to broader localization functions.

More generally, even though correlation structures can help to understand localization diagnoses, the vertical variability of  $r_h$  cannot be fully explained by the underlying correlation functions. For instance, a peak of diagnosed  $r_h$  is observed for cloud water in case 2 (February 13<sup>th</sup>), while no such feature can be observed in the sample correlation function around this altitude (not shown).

Similar results show that optimal vertical localization lengths cannot always be related to correlation length-scales (not shown).



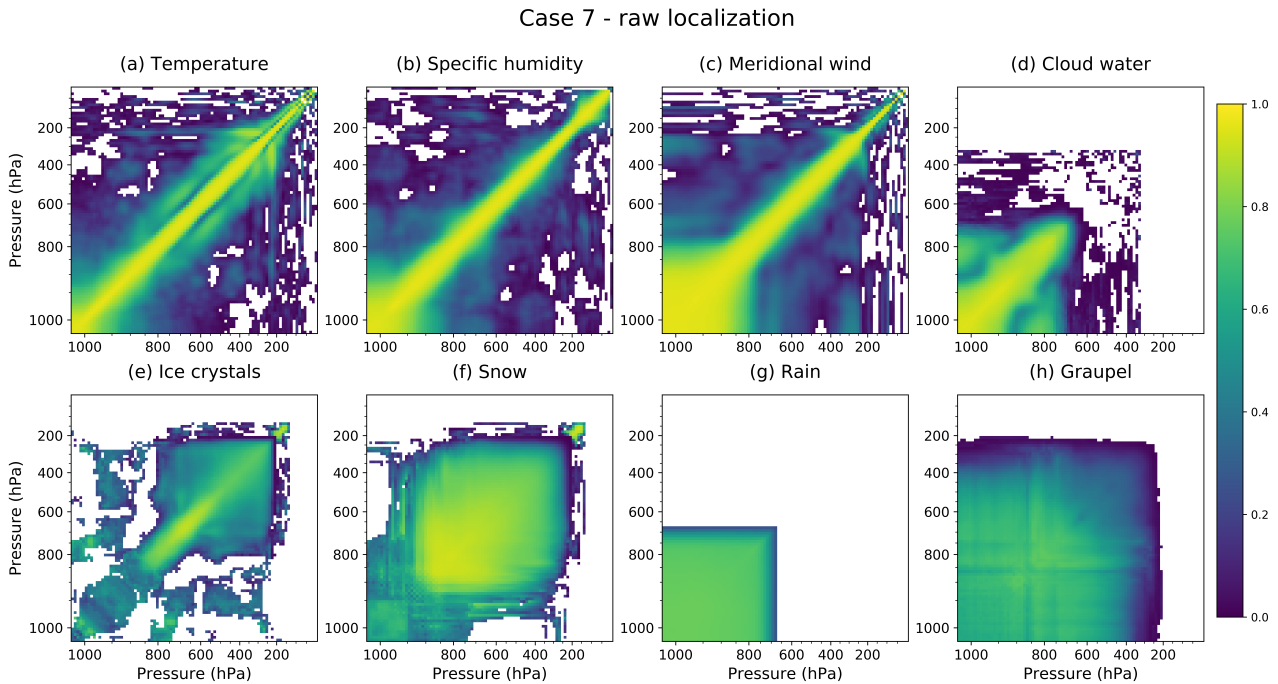


FIGURE 10 Matrices of raw localization at zero horizontal separation for case 7 (November 15<sup>th</sup>). The values shown here are the median of the 10 runs, where half at least of these runs give a non-missing value. This explains why (b) differs from figure 1(a).

## 5.2 | Vertical localization

### 5.2.1 | Raw localization functions

Figure 10 presents raw localization functions for conventional and hydrometeor variables, for case 7 (first November fog case).

A first interesting feature is the significantly lower localization  $L_{ji}$  at zero separation (on the diagonals) for rain and graupel. Maximum value for these variables is around 0.77, while it is 0.90 – 0.95 for other hydrometeor variables, and around 0.96 (the value for Gaussian ensembles) for conventional variables. As mentioned in section 2.3, these rather low values may reflect heavy tails of graupel and rain distributions in the ensemble.

Another specificity of rain and graupel is the quasi uniform values in the vertical localization matrices. For both cases, raw localization decays only very slowly with increasing vertical separation, and drops suddenly to zero just before reaching the zone of non-definiteness (levels without hydrometeor content). The same phenomenon, to a lesser extent, is observed for snow. We suggest that these broad vertical localization structures are linked to the precipitating nature of these particular variables. This result is consistent with the large vertical correlation structures found for liquid rain by Michel *et al.* (2011).

These vertical uniformities of localization values are observed for all other cases as well, especially

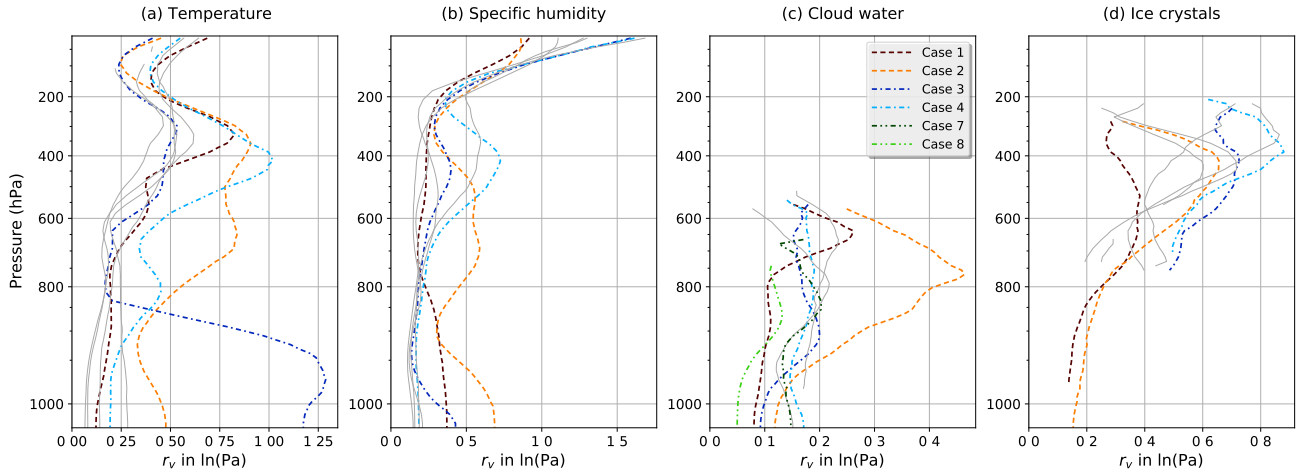


FIGURE 11 As figure 7 for vertical localization lengths.

for rain (not shown). Day-to-day variability mainly resides in the altitude of the transition level from high to zero localization values, which varies depending on the vertical stratification of the considered weather situation and on the considered hydrometeor.

### 5.2.2 | Localization lengths

Diagnosed profiles of  $r_v$  are shown in figure 11 for all studied cases. No estimation is performed for precipitating variables, since their raw localization shapes differ too strongly from the analytical Gaussian shape.

Similarly to  $r_h$ ,  $r_v$  values depend on the vertical level, on the variable and on the weather situation. Most profiles present one or two peaks, in all displayed variables. For  $q_i$  especially, one peak of maximum values is always observed between 550 hPa and 300 hPa. These peaks correspond to the levels of maximum  $q_i$  content. The two winter profiles for ice crystal almost reach surface level, while no diagnosis can be performed below 800 hPa for summer and mid-season cases.

Contrary to  $r_h$ , no clear connection can be established between  $r_v$  and convective activity. Case 2 (February 13<sup>th</sup>) profile exhibits especially large values for temperature,  $q_l$ , and to a lesser extent specific humidity. Yet, values do not seem to be especially larger for May convective cases, nor shorter for November stratified cases.

Another important difference with  $r_h$  is the similarity of profiles for conventional variables and cloud variables ( $q_i$  and  $q_l$ ), at least in terms of range of values. No significant difference can be shown here from one variable to another. From the surface to 600 hPa,  $r_v$  values for  $q_i$  and  $q_l$  are gathered just below 0.2 (in ln(Pa) in this section), with extreme values above 0.4, consistently with  $q_v$  values. Above 600 hPa, vertical lengths for  $q_i$  extend from 0.2 to 0.8, rather like temperature lengths.

### 5.3 | Consequences for localization schemes

Here follows a list of possible localization schemes accounting for the results of this study, from the simplest to the most elaborate. All of them apply to convective-scale models that consider hydrometeor in their control variables.

1. Single localization scheme. This is one of the cheapest possible localization schemes in terms of computational cost: one value of  $r_h$  and  $r_v$ , common for all variables, all levels, all days.
2. Variable-dependent localization scheme. The idea of such a scheme is not new, and has recently been advocated by Necker *et al.* (2020) for instance. This scheme is more expensive in terms of computer power, but the cost can be limited if some variables have a common localization. Typically, control variables could be divided into three sets: conventional variables, cloud variables and precipitating variables. The latter two (hydrometeors variables) should have shorter  $r_h$  compared to conventional variables, by a factor 2 to 6. On the other hand, precipitating hydrometeors could be only slightly localized in the vertical, with a large  $r_v$  compared to other hydrometeors and conventional variables.
3. Variable-, level- and day-dependent localization scheme. Such an increase in complexity is required to significantly refine the localization scheme. This implies that an estimation of optimal localization should be performed every day, ideally before every DA cycle.
4. Flow-dependent localization. If the geographical domain of the convective-scale model is large enough, optimal localization may vary spatially, even within one model level. For instance, correlation structures of conventional variables are known to vary between precipitating and non-precipitating zones (Montmerle and Berre, 2010), so that localization may be thought to vary accordingly.

Rapid implementations of the last two schemes are likely to have prohibitive numerical costs. Furthermore, variable-dependent scheme should give a specific attention to localization of cross-covariances between variables from two different sets.

An alternative solution would consist in using a kind of adaptive localization. Among existing schemes, an interesting possibility would be the use of a scale-dependent localization scheme (SDL, Buehner and Shlyayeva, 2015), that has been recently implemented in the experimental 3D-EnVar of AROME-France (Caron *et al.*, 2018). Indeed, optimal localization lengths might be correlated with the spatial scale of error covariance structures, both horizontally and vertically. Hence, a scale-dependent localization would indirectly be a kind of variable-dependent, day-dependent and level-dependent localization, as shown by Caron and Buehner, 2018. Yet, SDL schemes would remain computationally expensive compared to single-length localization schemes, the cost being multiplied by the number of spectral bands chosen in the algorithm. With three bands, the cost of SDL is likely to be similar to the cost of a variable-dependent localization scheme with three sets of variables. Besides, we are not aware of an SDL scheme that could simultaneously filter horizontal and vertical scales, though this perspective is mentioned by Caron and Buehner, 2018.

## 6 | CONCLUSION AND PERSPECTIVES

The method of Ménétrier *et al.* (2015a) diagnoses localization lengths for ensemble-based covariances, based on the ensemble of forecast only. This method has been extended to positive and highly heterogeneous variables such as hydrometeors. To deal with the problem of zero-variance grid points, we have recourse to geographical masks based on sample variances. The effect of these masks is twofold. First, model levels and separations where all covariances are zero (and thus where no localization is needed) are directly rejected from the diagnosis. Then, the step of spatial sampling related to the ergodicity assumption is made more efficient by sampling directly among the non-zero variance pairs of each separation class. Both modifications make the diagnoses more robust. A simple quality criterion for the diagnoses is also implemented, based on the agreement of raw diagnosed localization and its fit by an analytical localization function.

Horizontal localization lengths in model space are then diagnosed for hydrometeor variables from eight ensembles describing forecast error for different weather situations in 2018. For 50-member ensembles, hydrometeor localization lengths are mainly diagnosed between 20–80 km, with large values (around 100 km) for cloud water and some extreme values on one day near the tropopause for ice crystals and snow. In line with previous studies, larger typical values (from 100 km to 300 km) are found for conventional variables, with higher values in the stratosphere. Though localization profiles are highly dependent on vertical level and weather situation, a level-by-level and day-by-day ratio shows that horizontal localization lengths diagnosed for hydrometeors are constantly shorter by a factor 2 to 6 compared to conventional variables.

Vertical localization lengths are also dependent on level and weather situation. Similar ranges of values are found for conventional variables, cloud water and ice crystals. Precipitating hydrometeors exhibit larger vertical localization structures and more abrupt transitions to zero values than other variables.

The absolute values of localization lengths given here can be extrapolated to different ensemble sizes: shorter lengths for smaller ensembles, larger ones for bigger ensembles. It should be noted though that the choice of ensemble size is not supposed to affect the main results of this study: day-to-day variability, dependence to vertical level, comparisons from variable to variable. Similarly, these results can reasonably be thought to extend to any convective scale model with a single-moment microphysics scheme.

Logarithm transforms or Gaussian anamorphosis are sometimes invoked as a workaround to deal with the non-Gaussian behavior of hydrometeors (Bocquet *et al.*, 2010). The method used herein could be straightforwardly applied to such transformed ensembles, to see how our results extend to transformed hydrometeor fields.

Following the recommendations of this study about localization schemes for hydrometeor variables, cycling experiments are currently being performed at Météo-France to compare a single-localization, a variable-dependent localization and a scale-dependent localization schemes. The potential gain in skill will be weighed against the higher cost in computation power and time. In such assimilation experiments, hydrometeor increments can be produced even without hydrometeor observations, by

projecting conventional increments to hydrometeor variables through cross-covariances of the  $\mathbf{B}$  matrix. Hence, localization diagnoses for cross-covariances between hydrometeors and conventional variables would be worth studying in future research.

## 7 | ACKNOWLEDGEMENTS

The paper benefited from the careful reading of Loïk Berre. The PhD thesis of M. Destouches is funded by the French *Ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation*, through a grant for alumni from the École polytechnique. The LEFE program (*Les Enveloppes Fluides et l'Environnement*) of the INSU-CNRS (*Institut National des Sciences de l'Univers - Centre National de la Recherche Scientifique*) funded part of this research within the framework of the Hydre project. The BUMP package (B matrix on an Unstructured Mesh Package) with all developments mentioned here and more is available on the SABER (StAtic Background Error Representation) github repository of the Joint Center for Satellite Data Assimilation: <https://github.com/jcsda/saber>. As of today, this repository is still private. However, it will become public with the first release of the JEDI (Joint Effort for Data assimilation Integration) system, scheduled for the fall of 2020.

## A | COMPUTING THE ANALYTICAL LOCALIZATION FUNCTION

A few precisions are given about the computation of the analytical localization from  $r_h$ ,  $r_v$  and  $\alpha$  profiles. For the sake of clarity, we first omit the normalization factors  $\alpha(z)$ .

For a given separation class  $(z, d_z, d_h)$ , how is the analytical localization  $L^{\text{ana}}(z, d_z, d_h)$  computed? An intuitive choice would be:

$$L^{\text{ana}}(z, d_z, d_h) = \exp\left(-\frac{\Delta(z, d_z, d_h)^2}{2}\right) \quad (\text{A.1})$$

where  $\Delta(z, d_z, d_h)$  is the *normalized distance* associated to the separation class:

$$\Delta(z, d_z, d_h) = \sqrt{\left(\frac{d_h}{r_h(z)}\right)^2 + \left(\frac{d_z}{r_v(z)}\right)^2}. \quad (\text{A.2})$$

The associated approximation using the correlation function from Gaspari and Cohn (1999) would be  $L^{\text{ana}}(z, d_z, d_h) = \text{GC99}(\Delta(z, d_z, d_h))$ , where GC99 denotes the approximation of a Gaussian with a unit Daley length-scale. The problem with this formulation comes from its asymmetry: why choosing  $r_v(z)$  and not  $r_v(z + d_z)$  to normalize vertical separation?  $L^{\text{ana}}(z, d_z, d_h)$  and  $L^{\text{ana}}(z + d_z, -d_z, d_h)$  would differ here, making the underlying localization matrix non-symmetric: localization between levels  $z$  and  $z + d_z$  would be different from localization between levels  $z + d_z$  and  $z$ .

Another candidate ensuring symmetry of the localization function shall be found for  $\Delta$ . Plus, we require that the distance between points at different levels  $z_i$  and  $z_j$ ,  $i \leq j$ , accounts for all intermediate

values  $r_h(z_k)$  and  $r_v(z_k)$ ,  $i \leq k \leq j$ , and not only for extreme values at levels  $z_i$  and  $z_j$ .

To do so, at a given level  $z$ , we associate to each possible values of  $d_h$  and  $d_z$  a point on the 2D plane of possible horizontal and vertical separations. This plane is discretized as explained in section 2.2.

We first define a *locally* normalized distance  $\delta$  between two neighboring points  $(d_1^h, d_1^z)$  and  $(d_2^h, d_2^z)$ , *i.e.* points that are horizontally, vertically or diagonally neighbors on the discrete 2D plane. We naturally have:

$$\delta \left( (d_1^h, d_1^z), (d_2^h, d_2^z) \right) = \sqrt{\left( \frac{|d_1^h - d_2^h|}{r_h(z_{12})} \right)^2 + \left( \frac{|d_1^z - d_2^z|}{r_v(z_{12})} \right)^2} \quad (\text{A.3})$$

where  $r_h(z_{12})$  is the mean of  $r_h$  at levels  $z + d_1^z$  and  $z + d_2^z$ , and similarly for  $r_v(z_{12})$ .

Then, we define as *path* any sequence of points  $((d_i^h, d_i^z))_{0 \leq i \leq p}$  such that two consecutive points are neighbors on the grid. The *length* of a path is naturally defined as the sum of locally normalized distances:  $\sum_{i=0}^{p-1} \delta \left( (d_i^h, d_i^z), (d_{i+1}^h, d_{i+1}^z) \right)$ .

We now choose as normalized distance  $\Delta(z, d_z, d_h)$  for separation class  $(z, d_z, d_h)$  the length of the shortest path from zero separation to  $(d_h, d_z)$ , "shortest" meaning "of minimal length".

Finally, the obtained localization function is normalized by the factor  $\alpha(z)$ , still taking care of preserving the symmetry property:  $L^{\text{ana}}(z_i, z_j, d_h) \leftarrow L^{\text{ana}}(z_i, z_j, d_h) \times \sqrt{\alpha(z_i)\alpha(z_j)}$ .

## B | FITTING THE ANALYTICAL LOCALIZATION FUNCTION

In practice, a simple implementation of the fit process leads to  $r_h$  and  $r_v$  profiles that exhibit sharp, high-frequency features. The non reproducibility from one run to another suggest that these 2-level frequency features are numerical noise, resulting from an over-fitting of the raw localization function. To prevent this behavior, to make the diagnoses more robust and to remain close to smooth profiles and Gaussian shapes of the analytical function, two elements are added to the fit step.

1. Penalty terms are included in the cost function, penalizing high-curvature profiles. The penalty terms are sums of discrete normalized second order derivatives along the vertical direction, and are zero if the profiles are linear.
2. The control variables  $r_h$ ,  $r_v$  and  $\alpha$  of the minimization are shortened by controlling the profiles only one level out of two. The missing intermediate levels are found by linear interpolation before computation of  $L^{\text{ana}}$ .

Both modifications are necessary in practice. The cost function being minimized to obtain  $r_h$  and  $r_v$  is

$$\begin{aligned}
J(r'_h, r'_v, \alpha') &= \|L^{\text{ana}}(r_h, r_v, \alpha) - L^{\text{raw}}\|_2^2 \\
&+ J^{\text{curv}}(r_h) + J^{\text{curv}}(r_v) + J^{\text{curv}}(\alpha)
\end{aligned}
\tag{B.1}$$

where the norm is computed over all values of  $z$ ,  $d_z$  and  $d_h$ . This approach allows to extract localization length profiles while exploiting the full information of the raw localization function, which is more robust than deducing them from raw localization at zero horizontal or vertical separation. The  $r_h$  profile is linearly interpolated from the twice shorter  $r'_h$ ,  $r_v$  is interpolated from  $r'_v$  and  $\alpha$  from  $\alpha'$ . If an excessive weight is given to the penalty terms  $J^{\text{curv}}$ , fit profiles tend towards linear profiles. Obtaining peaked profiles in section 5 shows that the penalty terms are correctly balanced relative to the first term. Plus, sharper localization profiles would be useless compared to the current difficulties in applying localization schemes with varying lengths (vertically constant localization lengths were used in Montmerle *et al.*, 2018 for instance).

## C | ACCEPTANCE TESTS FOR PROFILES OF LOCALIZATION LENGTHS

As explained in section 3.4, for a given level  $z$ ,  $r_h(z)$  and  $r_v(z)$  are simultaneously accepted or rejected, based on the confidence we have on the fit step.

1. The agreement between raw localization and analytical localization is assessed by computing a signal-to-noise ratio (SNR). Since the fit process is important only in the decaying zone of the function, the SNR is computed only "near the zero separation class" (within a one bin distance of the zero separation class, in the  $d_h, d_z$  plane) and where the fit localization is above half its maximum value. Noise is estimated by the root mean square difference of raw and analytical localization functions, and signal is estimated by the mean value of raw localization in the decaying zone. Levels where the SNR is lower than 1 are rejected.
2. Insufficient hydrometeor contents are declared when there are not enough diagnosed points in the raw localization function at level  $z$  to correctly fit the analytical function. Separation classes "near the zero separation class" (cf. point 1) should all have a valid localization value, diagnosed from at least 1000 pairs. Otherwise,  $r_h(z)$  and  $r_v(z)$  are rejected.

## REFERENCES

- Aksoy, Altuğ, David C Dowell, and Chris Snyder (2009). "A multicaser comparative assessment of the ensemble Kalman filter for assimilation of radar observations. Part I: Storm-scale analyses." In: *Monthly Weather Review* 137.6, pp. 1805–1824. DOI: 10.1175/2008mwr2691.1.
- Anderson, Jeffrey L. (2012). "Localization and Sampling Error Correction in Ensemble Kalman Filter Data Assimilation." In: *Monthly Weather Review* 140.7, pp. 2359–2371. ISSN: 0027-0644. DOI: 10.1175/mwr-d-11-00013.1.

- Auligné, Thomas, Andrew Lorenc, Yann Michel, Thibaut Montmerle, A Jones, M Hu, and Jimmy Dudhia (2011). "Toward a new cloud analysis and prediction system." In: *Bulletin of the American Meteorological Society* 92.2, pp. 207–210. DOI: 10.1175/2010bams2978.1.
- Bannister, Ross N (2008). "A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. I: Characteristics and measurements of forecast error covariances." In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 134.637, pp. 1951–1970. DOI: 10.1002/qj.339.
- Bannister, Ross Noel, Hristo Chipilski, and Oscar Martinez-Alvarado (2019). "Techniques and challenges in the assimilation of atmospheric water observations for numerical weather prediction towards convective scales." In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. DOI: 10.1002/qj.3652.
- Berre, Loïk and Gérald Desroziers (2010). "Filtering of Background Error Variances and Correlations by Local Spatial Averaging: A Review." In: *Monthly Weather Review* 138.10, pp. 3693–3720. DOI: 10.1175/2010mwr3111.1.
- Berre, Loïk, Hubert Varella, and Gérald Desroziers (2015). "Modelling of flow-dependent ensemble-based background-error correlations using a wavelet formulation in 4D-Var at Météo-France." In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.692, pp. 2803–2812. DOI: 10.1002/qj.2565.
- Bocquet, Marc, Carlos A Pires, and Lin Wu (2010). "Beyond Gaussian statistical modeling in geophysical data assimilation." In: *Monthly Weather Review* 138.8, pp. 2997–3023. DOI: 10.1175/2010mwr3164.1.
- Bouttier, François, Benoît Vié, Olivier Nuissier, and Laure Raynaud (2012). "Impact of stochastic physics in a convection-permitting ensemble." In: *Monthly Weather Review* 140.11, pp. 3706–3721. DOI: 10.1175/mwr-d-12-00031.1.
- Brousseau, Pierre, Loïk Berre, François Bouttier, and Gérald Desroziers (2012). "Flow-dependent background-error covariances for a convective-scale data assimilation system." In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 138.663, pp. 310–322. DOI: 10.1002/qj.920.
- Brousseau, Pierre, Yann Seity, Didier Ricard, and Julien Léger (2016). "Improvement of the forecast of convective activity from the AROME-France system." In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.699, pp. 2231–2243. DOI: 10.1002/qj.2822.
- Buehner, Mark (2005). "Ensemble-derived stationary and flow-dependent background-error covariances: Evaluation in a quasi-operational NWP setting." In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131.607, pp. 1013–1043. DOI: 10.1256/qj.04.15.
- Buehner, Mark and Anna Shlyayeva (2015). "Scale-dependent background-error covariance localisation." In: *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography* 67.1, p. 28027. DOI: 10.3402/tellusa.v67.28027.
- Caron, Jean-François and Mark Buehner (2018). "Scale-Dependent Background-Error Covariance Localization: Evaluation in a Global Deterministic Weather Forecasting System." In: *Monthly Weather Review* 146.5, pp. 1367–1381. DOI: 10.1175/mwr-d-17-0369.1.
- Caron, Jean-François, Yann Michel, Thibaut Montmerle, and Étienne Arbogast (2018). "Improving Background-Error Covariances in a 3D Ensemble-Variational Data Assimilation System for Regional NWP." In: *Monthly Weather Review*. DOI: 10.1175/mwr-d-18-0248.1.
- Daley, Roger (1993). *Atmospheric data analysis*. 2. Cambridge university press.
- Dowell, David C., Fuqing Zhang, Louis J. Wicker, Chris Snyder, and N. Andrew Crook (2004). "Wind and Temperature Retrievals in the 17 May 1981 Arcadia, Oklahoma, Supercell: Ensemble Kalman Filter Experiments." In: *Monthly Weather Review* 132.8, pp. 1982–2005. DOI: 10.1175/1520-0493(2004)132<1982:watrit>2.0.co;2.
- Dowell, David C, Louis J Wicker, and Chris Snyder (2011). "Ensemble Kalman filter assimilation of radar observations of the 8 May 2003 Oklahoma City supercell: Influences of reflectivity observations on storm-scale analyses." In: *Monthly Weather Review* 139.1, pp. 272–294. DOI: 10.1175/2010mwr3438.1.
- Duda, Jeffrey D., Xuguang Wang, Yongming Wang, and Jacob R. Carley (2019). "Comparing the Assimilation of Radar Reflectivity Using the Direct GSI based Ensemble-Variational (EnVar) and Indirect Cloud Analysis Methods in Convection-Allowing Forecasts over the Continental US." In: *Monthly Weather Review*. DOI: 10.1175/mwr-d-18-0171.1.



- Errico, Ronald M, Peter Bauer, and Jean-François Mahfouf (2007). “Issues regarding the assimilation of cloud and precipitation data.” In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 64.11, pp. 3785–3798. DOI: 10.1175/2006jas2044.1.
- Flowerdew, Jonathan (2015). “Towards a theory of optimal localisation.” In: *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography* 67.1, p. 25257. DOI: 10.3402/tellusa.v67.25257.
- Gaspari, Gregory and Stephen E Cohn (1999). “Construction of correlation functions in two and three dimensions.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 125.554, pp. 723–757. DOI: 10.1002/qj.49712555417.
- Gustafsson, Nils, Tijana Janjić, Christoph Schraff, Daniel Leuenberger, Martin Weissmann, Hendrik Reich, Pierre Brousseau, Thibaut Montmerle, Eric Wattrelot, Antonín Bučánek, Máté Mile, Rafiq Hamdi, Magnus Lindskog, Jan Barkmeijer, Mats Dahlbom, Bruce Macpherson, Sue Ballard, Gordon Inverarity, Jacob Carley, Curtis Alexander, David Dowell, Shun Liu, Yasutaka Ikuta, and Tadashi Fujita (2018). “Survey of data assimilation methods for convective-scale numerical weather prediction at operational centres.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.713, pp. 1218–1256. DOI: 10.1002/qj.3179.
- Hamill, Thomas M, Jeffrey S Whitaker, and Chris Snyder (2001). “Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble Kalman filter.” In: *Monthly Weather Review* 129.11, pp. 2776–2790. DOI: 10.1175/1520-0493(2001)129<2776:ddfobe>2.0.co;2.
- Houtekamer, Peter L and Herschel L Mitchell (2001). “A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation.” In: *Monthly Weather Review* 129.1, pp. 123–137. DOI: 10.1175/1520-0493(2001)129<0123:asekff>2.0.co;2.
- Houtekamer, Peter L and Fuqing Zhang (2016). “Review of the ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation.” In: *Monthly Weather Review* 144.12, pp. 4489–4532. DOI: 10.1175/mwr-d-15-0440.1.
- Johnson, Aaron, Xuguang Wang, Jacob R. Carley, Louis J. Wicker, and Christopher Karstens (2015). “A Comparison of Multiscale GSI-Based EnKF and 3DVar Data Assimilation Using Radar and Conventional Observations for Midlatitude Convective-Scale Precipitation Forecasts.” In: *Monthly Weather Review* 143.8, pp. 3087–3108. DOI: 10.1175/mwr-d-14-00345.1.
- Kong, Rong, Ming Xue, and Chengsi Liu (2018). “Development of a Hybrid En3DVar Data Assimilation System and Comparisons with 3DVar and EnKF for Radar Data Assimilation with Observing System Simulation Experiments.” In: *Monthly Weather Review* 146.1, pp. 175–198. DOI: 10.1175/mwr-d-17-0164.1.
- Lascaux, Franck, Evelyne Richard, and Jean-Pierre Pinty (2006). “Numerical simulations of three different MAP IOPs and the associated microphysical processes.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 132.619, pp. 1907–1926. DOI: 10.1256/qj.05.197.
- Lei, Lili, Jeffrey L. Anderson, and Glen S. Romine (2015). “Empirical Localization Functions for Ensemble Kalman Filter Data Assimilation in Regions with and without Precipitation.” In: *Monthly Weather Review* 143.9, pp. 3664–3679. ISSN: 0027-0644. DOI: 10.1175/mwr-d-14-00415.1.
- Lorenc, Andrew C. (2017). “Improving ensemble covariances in hybrid variational data assimilation without increasing ensemble size.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 143.703, pp. 1062–1072. ISSN: 0035-9009. DOI: 10.1002/qj.2990.
- Ménétrier, Benjamin, Thibaut Montmerle, Loïk Berre, and Yann Michel (2014). “Estimation and diagnosis of heterogeneous flow-dependent background-error covariances at the convective scale using either large or small ensembles.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 140.683, pp. 2050–2061. DOI: 10.1002/qj.2267.
- Ménétrier, Benjamin, Thibaut Montmerle, Yann Michel, and Loïk Berre (2015a). “Linear Filtering of Sample Covariances for Ensemble-Based Data Assimilation. Part I: Optimality Criteria and Application to Variance Filtering and Covariance Localization.” In: *Monthly Weather Review* 143.5, pp. 1622–1643. DOI: 10.1175/mwr-d-14-00157.1.
- (2015b). “Linear filtering of sample covariances for ensemble-based data assimilation. Part II: Application to a convective-scale NWP model.” In: *Monthly Weather Review* 143.5, pp. 1644–1664. DOI: 10.1175/mwr-d-14-00156.1.

- Meng, Deming, Yaodeng Chen, Hongli Wang, Yufang Gao, Roland Potthast, and Yuanbing Wang (2019). “The evaluation of EnVar method including hydrometeors analysis variables for assimilating cloud liquid/ice water path on prediction of rainfall events.” In: *Atmospheric Research* 219, pp. 1–12. DOI: 10.1016/j.atmosres.2018.12.017.
- Michel, Yann, Thomas Auligné, and Thibaut Montmerle (2011). “Heterogeneous convective-scale background error covariances with the inclusion of hydrometeor variables.” In: *Monthly Weather Review* 139.9, pp. 2994–3015. DOI: 10.1175/2011mwr3632.1.
- Michel, Yann, Benjamin Ménétrier, and Thibaut Montmerle (2016). “Objective filtering of the local correlation tensor.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.699, pp. 2314–2323. DOI: 10.1002/qj.2824.
- Montmerle, Thibaut and Loïk Berre (2010). “Diagnosis and formulation of heterogeneous background-error covariances at the mesoscale.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 136.651, pp. 1408–1420. DOI: 10.1002/qj.655.
- Montmerle, Thibaut, Yann Michel, Etienne Arbogast, Benjamin Ménétrier, and Pierre Brousseau (2018). “A 3D ensemble variational data assimilation scheme for the limited-area AROME model: Formulation and preliminary results.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.716, pp. 2196–2215. DOI: 10.1002/qj.3334.
- Necker, Tobias, Stefan Geiss, Martin Weissmann, Juan Ruiz, Takemasa Miyoshi, and Guo-Yuan Lien (2020). “A convective-scale 1000-member ensemble simulation and potential applications.” In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. DOI: 10.1002/qj.3744.
- Palmer, Tim N., Roberto Buizza, Francisco J Doblus-Reyes, Thomas Jung, Martin Leutbecher, Glenn J. Shutts, Martin Steinheimer, and Antje Weisheimer (2009). *Stochastic parametrization and model uncertainty*. Tech. rep. 598. ECMWF. DOI: 10.21957/PS8GBWBDV.
- Perianez, Africa, Hendrik Reich, and Roland Potthast (2014). “Optimal localization for ensemble Kalman filter systems.” In: *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* 92.6, pp. 585–597. DOI: 10.2151/jmsj.2014-605.
- Seity, Yann, Pierre Brousseau, Sophie Malardel, Gwenaëlle Hello, Pierre Bénard, François Bouttier, Christine Lac, and Valérie Masson (2011). “The AROME-France convective-scale operational model.” In: *Monthly Weather Review* 139.3, pp. 976–991. DOI: 10.1175/2010mwr3425.1.
- Snyder, Chris and Fuqing Zhang (2003). “Assimilation of simulated Doppler radar observations with an ensemble Kalman filter.” In: *Monthly Weather Review* 131.8. DOI: 10.1175//2555.1.
- Sobash, Ryan A. and David J. Stensrud (2013). “The Impact of Covariance Localization for Radar Data on EnKF Analyses of a Developing MCS: Observing System Simulation Experiments.” In: *Monthly Weather Review* 141.11, pp. 3691–3709. DOI: 10.1175/mwr-d-12-00203.1.
- Zhang, Sara Q, Milija Zupanski, Arthur Y Hou, Xin Lin, and Samson H Cheung (2013). “Assimilation of precipitation-affected radiances in a cloud-resolving WRF ensemble data assimilation system.” In: *Monthly Weather Review* 141.2, pp. 754–772. DOI: 10.1175/mwr-d-12-00055.1.



# Évaluation par expériences d'assimilation cyclées

## Sommaire

4.1	Introduction . . . . .	<b>143</b>
4.2	Configuration des expériences . . . . .	<b>144</b>
4.2.1	Période d'étude . . . . .	144
4.2.2	Cyclage . . . . .	145
4.2.3	Analyses et prévisions . . . . .	146
4.2.4	Schémas de localisation . . . . .	147
4.3	Choix des observations de référence et des scores . . . . .	<b>153</b>
4.3.1	Vapeur d'eau et nuages . . . . .	153
4.3.2	Cumuls de pluie . . . . .	157
4.3.3	Variables classiques . . . . .	159
4.4	Résultats . . . . .	<b>160</b>
4.4.1	Impact de l'initialisation des hydrométéores . . . . .	160
4.4.2	Avec d'autres schémas de localisation . . . . .	168
4.5	Conclusion . . . . .	<b>172</b>

## 4.1 Introduction

Nous avons présenté au chapitre 2 le prototype de 3DEnVar AROME avec hydrométéores en variables de contrôle. Nous avons ensuite estimé au chapitre 3 les caractéristiques d'une localisation optimale pour les hydrométéores, et proposé en conséquence divers schémas de localisation de complexité variable. Nous proposons maintenant d'étudier les performances de cette nouvelle configuration du 3DEnVar dans une configuration proche de la prévision opérationnelle, lorsque les analyses sont appariées à des modèles de PNT dans des cycles assimilation - prévision. L'objectif de ce chapitre est multiple :

1. Évaluer l'impact de l'initialisation des hydrométéores sur leur prévision, en l'absence d'observation directe des hydrométéores, donc sans modification des autres champs

thermodynamiques (voir section 2.3.3) ;

2. Évaluer le comportement de l'EnVar avec hydrométéores dans un cycle long d'assimilation - prévision ;
3. Comparer l'impact de différents schémas de localisation sur la qualité des prévisions.

Dans un contexte où seules les variables d'hydrométéores sont modifiées dans l'état initial, on s'attend à ce que les hydrométéores s'ajustent dans la prévision aux variables analysées de plus grande échelle. Le début de la prévision est donc le plus sensible aux changements d'état initial, ce qui nous amène à mesurer l'impact des modifications sur les premières heures des prévisions suivant l'analyse. Cet impact est quantifié par l'amélioration ou la dégradation des prévisions de précipitations, de positionnement des sommets des nuages et de contenu en vapeur d'eau atmosphérique. Ces variables sont directement liées aux hydrométéores, ce sont donc celles pour lesquelles l'impact attendu est maximal. Cependant, pour vérifier que la dynamique de la prévision n'est pas détériorée, l'impact sur les variables thermodynamiques classiques (vents, température, pression) est aussi vérifié.

Les différentes expériences réalisées sont présentées en section 4.2. La section 4.3 présente les méthodes utilisées pour évaluer les expériences. Les scores obtenus sont présentés et discutés (section 4.4) avant de conclure le chapitre (section 4.5).

## 4.2 Configuration des expériences

Pour chaque schéma de localisation, nous comparons des expériences avec hydrométéores en variables de contrôle de l'analyse par rapport à une expérience de contrôle sans hydrométéores. Il est ainsi possible de différencier l'impact d'un schéma de localisation particulier d'une part, et des hydrométéores en variables de contrôle d'autre part.

### 4.2.1 Période d'étude

Les expériences d'analyses et de prévisions sont effectuées sur une période de 3 mois du 13 mai 2018 à 3 h TU au 15 août 2018 à 21 h TU (heure de la dernière analyse). Cette période comporte plusieurs épisodes orageux intenses, en particulier pendant la deuxième quinzaine du mois de mai. Trois de ces cas orageux ont d'ailleurs été retenus pour les diagnostics de localisation du chapitre précédent.

## 4.2. CONFIGURATION DES EXPÉRIENCES

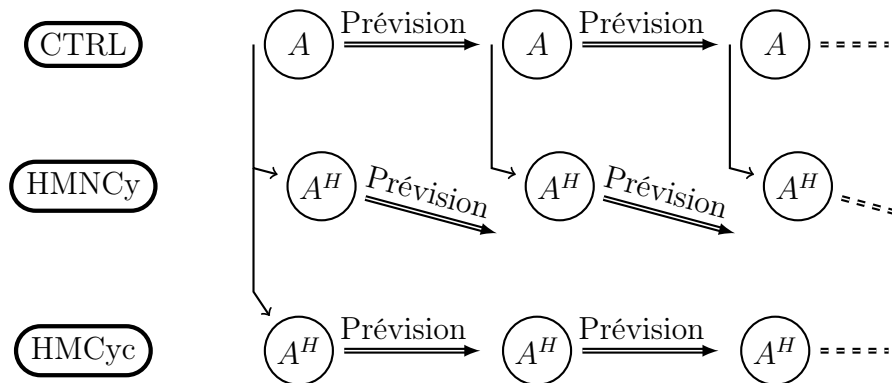


FIGURE 4.1 – Schéma de principe des différents configuration de cyclage. Les étapes d’analyse sont marquées d’un rond ( $A$  : sans hydrométéores en variables de contrôle ;  $A^H$  : avec hydrométéores en variables de contrôle). Les flèches simples indiquent la provenance des ébauches. Pour le premier réseau d’assimilation, les trois configurations ont des ébauches communes.

### 4.2.2 Cyclage

Pour un schéma de localisation donné, trois configurations possibles des expériences ont été évaluées, selon leur traitement des variables d’hydrométéores au cours de l’analyse, et selon leur cyclage ou non des prévisions comme ébauche du cycle d’assimilation suivant. Ces configurations sont décrites par le schéma de principe de la figure 4.1 et par la table 4.1. Toutes les expériences utilisent le schéma 3DEnVar pour les analyses et un cycle d’assimilation de 3 h. Les caractéristiques techniques du processus d’assimilation et de prévision sont données section suivante (4.2.3).

Configuration	Hydrométéores en variables de contrôle	Cyclage des prévisions
CTRL	Non	Oui
HMNCy	Oui	Non (ébauches de CTRL)
HMCyc	Oui	Oui

TABLE 4.1 – Fonctionnement des configurations cyclées et non-cyclées avec hydrométéores.

La configuration de contrôle (CTRL) est une configuration d’assimilation - prévision cyclée, basée sur le prototype de 3DEnVar de Montmerle *et al.* (2018). À chaque cycle d’assimilation, l’analyse produite sert d’état initial à la prévision. L’état initial est fourni par l’ébauche pour les champs d’hydrométéores<sup>1</sup>. La prévision à 3 h d’échéance ainsi obtenue sert d’ébauche pour l’analyse suivante<sup>2</sup>.

1. Et pour les autres variables pronostiques non-analysées, ici le champ d’énergie cinétique turbulente seulement puisqu’une configuration hydrostatique du modèle est utilisée.

2. Cette durée de cyclage de 3 h est une des caractéristiques différenciant ces expériences de la configu-

Les hydrométéores sont ajoutés en variable de contrôle de l’assimilation dans les configurations HMNCy et HMCyc. La configuration non-cyclée (HMNCy) utilise à chaque cycle d’assimilation l’ébauche de la configuration de contrôle CTRL. Les prévisions issues de cette configuration non-cyclée ne sont donc pas utilisées comme ébauche pour les cycles suivants. Ce fonctionnement non-cyclé est similaire à celui qui est actuellement utilisé à la division Prévision Immédiate de Météo-France pour le système AROME-PI (Auger *et al.*, 2014). Ce système vise à produire des prévisions jusqu’à 6 h d’échéance en temps quasi-réel ( $t+30$  min environ). Pour tenir ces délais, seules les observations effectuées dans une fenêtre  $[t-10 \text{ min}, t+10 \text{ min}]$  (principalement observations conventionnelles et radar) sont assimilées. AROME-PI utilise un 3DVar dont l’ébauche est constituée de la dernière prévision disponible de AROME-France, ce qui lui permet de bénéficier indirectement de l’information apportée par de nombreuses autres observations qui ne pourraient pas être prises en compte sinon car arrivant trop tardivement.

La configuration cyclée avec hydrométéores en variables de contrôle (HMCyc) ne diffère de la configuration de contrôle que par l’ajout des hydrométéores pour l’assimilation. Les expériences HMCyc sont donc indépendantes des expériences CTRL<sup>1</sup>, ce qui n’est pas le cas des expériences HMNCy. Au premier cycle d’assimilation, les ébauches des trois configurations sont communes. Pour les cycles suivants, les ébauches de CTRL et HMCyc proviennent de leurs prévisions respectives. Dans la configuration cyclée, si un déséquilibre ou un biais est introduit par l’analyse et perdure jusqu’à l’ébauche du cycle suivant, il est possible qu’il soit amplifié par les assimilations successives.

Pour chacune de ces configurations, les prévisions sont prolongées jusqu’à 12 h d’échéance. Les prévisions ne sont pas prolongées au-delà dans la mesure où l’essentiel de l’impact est attendu en début de prévision, du fait de la courte durée de vie des champs d’hydrométéores. On sait également que de manière générale, l’influence des conditions initiales sur une prévision de modèle à aire limitée disparaît peu à peu au profit des conditions aux bords fournies par le modèle coupleur (voir par exemple la revue de Gustafsson *et al.* (2018)).

### 4.2.3 Analyses et prévisions

Les étapes d’analyse et de prévision sont relativement proches des descriptions de Montmerle *et al.* (2018), les différences principales résidant dans la résolution horizontale utilisée et dans la génération de l’ensemble d’assimilations.

L’ensemble d’assimilations utilisé est la version recherche de l’EDA AROME, présenté

---

ration opérationnelle d’AROME, actuellement basée sur un cyclage horaire.

1. Dans la mesure où les expériences n’échangent pas d’information. Elles restent liées indirectement par les observations assimilées, les covariances d’erreurs d’ébauches déduites de l’ensemble d’assimilation, les conditions au bord du domaine etc.

## 4.2. CONFIGURATION DES EXPÉRIENCES

---

en section 2.1.1. En particulier, il utilise 50 membres au lieu des 25 de Montmerle *et al.* (2018), il décrit les erreurs du modèle par un schéma de perturbation des tendances de la physique au lieu d'utiliser un facteur d'inflation, et sa résolution horizontale est de 3,2 km au lieu de 3,8 km. Les ensembles utilisés ne diffèrent pas d'une expérience à l'autre.

Les analyses et les prévisions sont effectuées à la même résolution horizontale de 3,2 km. Le schéma d'assimilation est le schéma de 3DEnVar pur présenté au chapitre 2, avec les hydrométéores en variables de contrôle (section 2.4) pour les configurations HMCyc et HMNCy. Seules les covariances d'erreurs d'ébauche ensemblistes sont utilisées, aucune expérience n'utilise de covariances hybrides. Un préconditionnement en  $\mathbf{B}$  est utilisé. Les schémas de localisation varient selon les expériences et sont présentés en section 4.2.4.

Le modèle de prévision utilisé est une version à plus basses résolutions spatiale et temporelle du modèle AROME présenté en section 1.1. Les simplifications sont similaires à celles effectuées pour les prévisions de l'EDA AROME : la résolution horizontale est dégradée de 1,3 km à 3,2 km, le pas de temps est augmenté de 50 s à 100 s, et la formulation hydrostatique du noyau dynamique remplace la formulation non-hydrostatique. Notons cependant que la physique du modèle reste identique, et que la résolution spatiale utilisée est relativement proche de celle qui était utilisée en opérationnel de 2008 à 2015 (2,5 km). Les conditions aux bords sont fournies par les prévisions opérationnelles du modèle global ARPEGE.

La plupart des observations assimilées opérationnellement sont aussi assimilées pour ces expériences (voir figure 1.12 par exemple). Sont assimilées en particulier les observations conventionnelles, les vitesses radiales mesurées par radar, les réflectivités radar via des pseudo-profilés d'humidité relative, et des radiances de satellites géostationnaires et défilants. Certaines observations satellitaires (scattéromètres, GMI<sup>1</sup>, CrIS<sup>2</sup>, ATMS<sup>3</sup>) ne sont pas assimilées. La correction de biais variationnelle, pour certaines mesures telles les radiances d'IASI<sup>4</sup> et de SEVIRI<sup>5</sup>, n'est pas implémentée dans la version utilisée. Ces observations sont donc débiaisées avec les coefficients obtenus pour la prévision opérationnelle correspondant, et non des coefficients déterminés conjointement à l'analyse.

### 4.2.4 Schémas de localisation

Les divers schémas de localisation évalués ont été choisis en lien avec les diagnostics de localisation optimale du chapitre précédent. Les caractéristiques principales des schémas

- 
1. *GPM Microwave Imager*
  2. *Cross-track Infrared Sounder*
  3. *Advanced Technology Microwave Sounder*
  4. *Infrared Atmospheric Sounding Interferometer*
  5. *Spinning Enhanced Visible Infra-Red Imager*



Localisation	Formulation 1/2	S'applique à...	$L_h$ (km)	$L_v$ (ln(Pa))
FULL	Non	toutes variables de contrôle	150	0,4
SQRT	Oui	toutes variables de contrôle	150	0,4
HVDL	Oui	variables classiques	150	0,4
		$q_l, q_i, q_r, q_s, q_g$	50	0,4
VVDL	Oui	classiques + $q_l, q_i$	150	0,4
		$q_r, q_s, q_g$	150	0,8
SDL	Oui	pert. filtrées, nombre d'onde 25	75	0,4
		pert. filtrées, nombre d'onde 8	150	0,4
		pert. filtrées, nombre d'onde 2	300	0,4

TABLE 4.2 – Récapitulatif des schémas de localisation évalués. Les longueurs de localisation horizontale ( $L_h$ ) et verticale ( $L_v$ ) sont les longueurs de Daley. Les variables de contrôle « classiques » sont la température  $T$ , les composantes du vent horizontal  $u$  et  $v$ , l'humidité spécifique  $q_v$  et la pression de surface  $P_s$ . La formulation spectrale de la localisation spatiale est utilisée pour le SDL uniquement.

utilisés sont réunies dans la table 4.2. Nous présentons ici les implémentations des schémas de localisation standard (section 4.2.4.a), des schémas de localisation dépendante de la variable (section 4.2.4.b) et des schémas de localisation dépendante de l'échelle (section 4.2.4.c).

#### 4.2.4.a Localisation standard

Le premier schéma de localisation testé est un schéma de localisation commun à toutes les variables. Suivant les résultats de Montmerle *et al.* (2018), la formulation en points de grille avec filtres récursifs est préférée à la version spectrale. Deux formulations de la localisation avec filtres récursifs sont possibles, une formulation standard (FULL) et une formulation racine carrée (SQRT).

La formulation racine carrée (SQRT) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{L}^{\text{SQRT}} = \mathbf{U}_v \mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T \mathbf{U}_v^T, \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{U}_v$  est une racine de l'opérateur de localisation verticale, et  $\mathbf{U}_h$  une racine de l'opérateur de localisation horizontale. L'application de la localisation par filtres récursifs (Purser *et al.*, 2003, voir aussi section 2.2.3) consiste en un certain nombre de *passes* horizontales ou verticales. Chaque passe est auto-adjointe. L'application successive de chacune de ces passes

## 4.2. CONFIGURATION DES EXPÉRIENCES

---

permet d'approximer une convolution par un profil gaussien. Plus le nombre de passes est élevé, plus l'approximation du profil gaussien est précise. Ainsi, les opérations successives appliquées à un vecteur d'état  $\mathbf{x}$  pour calculer  $\mathbf{L}^{\text{SQRT}}\mathbf{x}$  sont les suivantes :

- déformation de la grille verticale du modèle vers une grille régulière (Michel, 2012b), puis application des passes verticales des filtres récurrents ( $\mathbf{U}_v^T$ );
- double application des passes horizontales des filtres récurrents ( $\mathbf{U}_h^T = \mathbf{U}_h$ , puis  $\mathbf{U}_h$ );
- application des passes verticales des filtres récurrents, puis déformation de la grille verticale régulière vers la grille des niveaux modèles ( $\mathbf{U}_v$ ).

La formulation standard (FULL) est très similaire :

$$\mathbf{L}^{\text{FULL}} = \mathbf{U}_v \mathbf{L}_h \mathbf{U}_v^T. \quad (4.2)$$

La seule différence réside dans la fusion des opérateurs  $\mathbf{U}_h$  et  $\mathbf{U}_h^T$  en un unique opérateur de localisation horizontale  $\mathbf{L}_h$ . Ainsi, le nombre de passes horizontales pourra être impair, contrairement à la formulation SQRT. Dans notre cas, la localisation FULL est basée sur l'application d'une unique passe horizontale, ce qui limite le coût numérique par rapport à la formulation SQRT, qui utilise deux passes au total. Les formes des fonctions de localisation diffèrent d'une formulation à l'autre, notamment par la possibilité d'avoir des légers lobes négatifs pour la forme FULL.

### Coût de l'application de la localisation standard

Dans ce cas simple où la même localisation est choisie pour toutes les variables, il est courant de simplifier le calcul pour ne pas appliquer une matrice de localisation multivariée  $\underline{\mathbf{L}}$  mais seulement une matrice de localisation  $\mathbf{L}$  adaptée à une variable tridimensionnelle. Dans un cas avec  $k$  variables tridimensionnelles :

$$\underline{\mathbf{L}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \cdots & \mathbf{L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L} & \cdots & \mathbf{L} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{pmatrix} \mathbf{L} (\mathbf{I}_N \cdots \mathbf{I}_N) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Il est donc possible de n'appliquer  $\mathbf{L}$  qu'une unique fois, se ramenant au coût de calcul pour un champ univarié (auquel s'ajoute le coût des sommes des champs et des entrées/sorties). Les étapes associées au calcul (4.3) sont les suivantes :

1. Sommer toutes les variables tridimensionnelles;
2. Appliquer  $\mathbf{L}$  à la somme des variables;
3. Dupliquer  $k$  fois le champs résultant dans le vecteur d'état multivarié final.

### Configuration de la localisation standard

Nous choisissons pour ces expériences une longueur de localisation horizontale de 150 km et une longueur de localisation verticale de  $0,4 \ln(\text{Pa})$ . Cette configuration est cohérente avec les résultats obtenus au chapitre 3. Elle diffère de la configuration proposée par Montmerle *et al.* (2018) pour un ensemble à 25 membres et 3,8 km de résolution horizontale. La localisation n'a pas été optimisée pour obtenir les meilleurs scores possibles sur la période d'étude.

#### 4.2.4.b Localisation dépendante de la variable (VDL)

La localisation dépendante de la variable (VDL, *Variable-Dependent Localisation*) peut être définie par la racine de l'opérateur de localisation associé. Définir une localisation par sa racine permet de définir implicitement les localisations croisées, tout en assurant la symétrie et le caractère positif de la matrice obtenue. Ainsi, dans un cas simple à deux variables tridimensionnelles, si la localisation  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T$  est associée à la première variable et  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^T$  à la deuxième, la matrice de localisation résultante sera donnée par :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{U}_1^T \quad \mathbf{U}_2^T) \quad (4.4)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T & \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^T \\ \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^T & \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^T \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Pour limiter le coût numérique de l'application de ce schéma de localisation, il est souhaitable de ne pas choisir une localisation propre à chaque variable, mais de regrouper ensemble les variables pour lesquelles une localisation commune est possible.

Dans le cas où deux groupes de  $k$  et  $l$  variables sont formés, on peut se ramener à l'application de 4 matrices de localisation univariées :

$$\underline{\mathbf{L}}^{\text{VDL}}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{U}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{U}_1^T \quad \mathbf{U}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{U}_2^T) \mathbf{x} \quad (4.6)$$

## 4.2. CONFIGURATION DES EXPÉRIENCES

---

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{U}_1^T \quad \mathbf{U}_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & \cdots & \mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_N & \cdots & \mathbf{I}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+l} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Ce qui s'applique dans la pratique par les opérations suivantes :

1. Sommer ensemble les variables de chaque groupe ;
2. Appliquer  $\mathbf{U}_1^T$  à la première somme, et  $\mathbf{U}_2^T$  à la deuxième ;
3. Sommer les deux champs résultants ;
4. Appliquer  $\mathbf{U}_1$  au résultat de l'étape 3, et écrire le champ résultant dans les  $k$  premières variables du vecteur d'état multivarié final ;
5. Appliquer  $\mathbf{U}_2$  au résultat de l'étape 3, et écrire le champ résultant dans les  $l$  dernières variables du vecteur multivarié final.

De manière générale, appliquer une localisation à  $M$  groupes de variables demande  $2M$  applications de localisation. La parallélisation est possible pour les  $M$  premières applications de la localisation (étape 2) et pour les  $M$  dernières (étapes 4 et 5), avec cependant un besoin de communications entre les deux séries de  $M$  applications pour sommer les résultats intermédiaires.

Comme expliqué dans la note technique de Ménétrier (2020b), la différence des longueurs de portée des localisations  $\mathbf{L}_1$  et  $\mathbf{L}_2$  a un double impact sur les localisations croisées inter-variables du type  $\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^T$ . Les longueurs des localisations croisées ainsi définies sont comprises entre les longueurs de localisation de chacune des deux variables. Ce choix semble être par ailleurs le plus simple pour combiner ces deux longueurs. Le deuxième impact est l'atténuation de l'amplitude des localisations croisées, qui ne valent donc plus 1 à séparation spatiale nulle.

### Configuration du VDL

Pour nos expériences, nous évaluons deux configurations du VDL, conformément aux recommandations du chapitre 3 :

- un schéma dépendant de la variable pour la localisation horizontale (HVDL), séparant les variables classiques des variables d'hydrométéores ;
- un schéma dépendant de la variable pour la localisation verticale (VVDL), distinguant les hydrométéores précipitants des autres variables de contrôle.

Comme indiqué en table 4.2), nous choisissons pour la localisation HVDL une longueur de

Configuration	FULL	SQRT	HVDL	VVDL	SDL
CTRL	CTRL-full	CTRL-sqrt	—	—	CTRL-SDL
HMNCy	HMNCy-full	HMNCy-sqrt	HMNCy-HVDL	HMNCy-VVDL	HMNCy-SDL
HMCyc	HMCyc-full	HMCyc-sqrt	HMCyc-HVDL	HMCyc-VVDL	HMCyc-SDL

TABLE 4.3 – Tableau récapitulatif des différentes expériences cyclées. Les configurations CTRL-HVDL et CTRL-VVDL sont identiques à la configuration CTRL-SQRT. Voir les tables 4.1 et 4.2 pour un descriptif des différentes configurations et localisations du tableau.

localisation 3 fois plus courte pour les hydrométéores que pour les variables classiques. Pour la localisation VVDL, nous choisissons des longueurs verticales deux fois plus longues pour les hydrométéores précipitants. Ces résultats sont cohérents avec les diagnostics de localisation présentés au chapitre 3.

#### 4.2.4.c Localisation dépendante de l’échelle (SDL)

Le schéma SDL (*Scale-Dependent Localization*), dernier schéma de localisation évalué, a été implémenté pour AROME par Caron *et al.* (2018). Conformément à leurs résultats, nous utilisons ici la version de Buehner (2012) du SDL, dans laquelle les covariances inter-échelles sont forcées à zéro (voir section 2.2.4.a pour une présentation rapide du SDL).

Contrairement au cas de Caron *et al.* (2018), nous utilisons un ensemble à 50 membres au lieu de 25, une résolution spatiale horizontale de 3,2 km au lieu de 3,8 km, et une version sans inflation de l’EDA AROME. Nous conservons le choix de filtrer les perturbations selon 3 bandes spectrales dont nous ne changeons pas la configuration (figure 1 de leur article). La longueur de localisation horizontale pour la bande centrale est fixée à 150 km comme dans les expériences FULL, SQRT et VDL. Elle est divisée ou multipliée par 2 dans les autres bandes spectrales : à 75 km pour les petites échelles et à 300 km pour les longues échelles. Ce choix empirique diffère des valeurs optimales obtenues par Caron *et al.* (2018), qui étaient 448 km, 224 km et 84 km.

Contrairement à Caron *et al.* (2018), une formulation spectrale de la localisation a été utilisée pour l’expérience SDL, la formulation avec filtres récursifs n’étant pas disponible au moment de l’expérience. La localisation horizontale est donc calculée dans l’espace spectral, tandis qu’un profil de type Gaspari et Cohn (1999) est utilisé pour la localisation verticale. Plus de détails sur la localisation spatiale dans l’espace spectral sont donnés par Montmerle *et al.* (2018).

La table 4.3 résume les différentes localisations et configurations évaluées dans ce chapitre.

### 4.3 Choix des observations de référence et des scores

La vérification des prévisions météorologiques à échelle convective est un sujet de recherche actif. Des méthodes de vérification adaptées aux possibles erreurs de positionnement sont généralement préférées à la comparaison point de grille par point de grille ; nous renvoyons le lecteur intéressé aux revues de Ebert (2008) et Gilleland *et al.* (2009) sur le sujet. Sur les questions de significativité des scores, nous suivons les conseils de Gilleland *et al.* (2018) et la note technique du même auteur (2010).

#### 4.3.1 Vapeur d'eau et nuages

##### Observations SEVIRI

Une première série de scores se base sur les observations satellites du sondeur SEVIRI<sup>1</sup>, embarqué à bord du satellite géostationnaire MSG<sup>2</sup>. Les canaux utilisés sont le canal de 10,8  $\mu\text{m}$ , sensible à la température de surface et à la température du sommet des nuages, et le canal de 6,2  $\mu\text{m}$ , sensible à la vapeur d'eau en moyenne troposphère. Ces deux canaux ne sondent donc pas la même portion de l'atmosphère et ne sont pas sensibles aux mêmes variables. Le canal vapeur d'eau sera également utilisé comme une des mesures de référence pour l'humidité dans les cartes de scores 4.3.3. Pour chacun de ces canaux, SEVIRI fournit toutes les 15 minutes une carte des températures de brillance sur la France, comme illustré en figure 4.2.

Ces observations sont comparées aux images satellites prévues (ISP) des différentes expériences. Le modèle de transfert radiatif RTTOV<sup>3</sup> (Saunders *et al.*, 2018) permet de calculer les ISP toutes les 15 minutes de prévision, aux pas de temps les plus proches des observations. Ces ISP sont ensuite interpolées sur la grille des observations, par interpolation au plus proche voisin. Notons que les problèmes de parallaxe ne sont pas pris en compte dans ces calculs. Dans la pratique, l'angle d'incidence de SEVIRI étant proche de 45°, un nuage placé à 10 km d'altitude sera déplacé de 10 km vers le nord dans les observations par rapport aux ISP. Ce décalage spatial renforce la pertinence des méthodes de vérification avec tolérance spatiale.

---

1. *Spinning Enhanced Visible Infra-Red Imager* , voir section 1.2.3.  
2. *Meteosat Second Generation*  
3. *Radiative Transfer for TOVS*

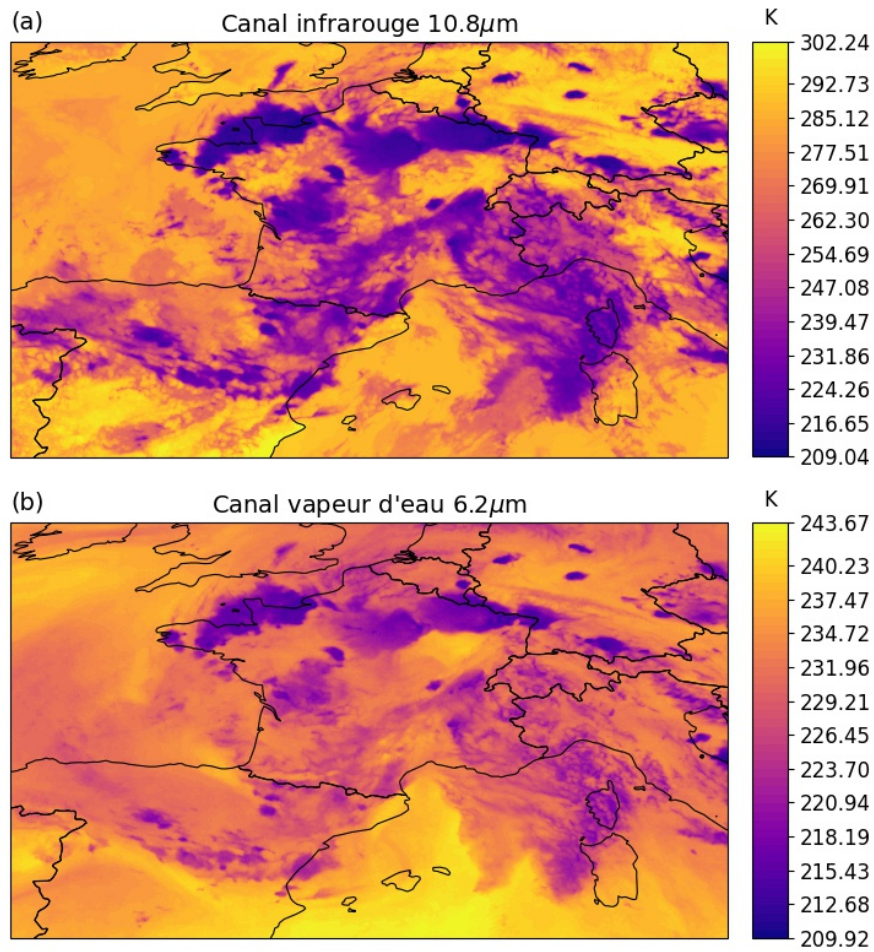


FIGURE 4.2 – Observations SEVIRI dans les canaux 10,8µm (a) et 6,2µm (b). Les cartes sont montrées telles que « vues » par un satellite géostationnaire, d'où l'impression d'aplatissement par rapport au domaine AROME habituel, qui utilise une projection Lambert conforme.

#### *Fractions Skill Score*

Nous faisons le choix du *Fraction Skill Score* (FSS) de Roberts et Lean (2008) pour évaluer les prévisions. Ce score par voisinage est particulièrement populaire dans un contexte d'évaluation de modèles régionaux (voir par exemple Dixon *et al.*, 2009 pour l'assimilation de données radar avec *nudging*, Wang *et al.*, 2013a pour l'assimilation de données radar dans un 3DVar, et Duda *et al.*, 2019 pour l'évaluation d'un 3DEnVar avec hydrométéores). Ce score figure également depuis 2007 dans le système de vérification des prévisions du Met Office (Mittermaier *et al.*, 2013). Notons qu'il aurait aussi été possible d'utiliser le BSS (*Brier Skill Score*) avec normalisation par la persistance, un score très similaire au FSS et utilisé pour l'évaluation des prévisions opérationnelles d'AROME à Météo-France (Amodei *et al.*, 2015).

L'utilisation du FSS demande de définir des seuils de température de brillance, dont le dépassement caractérise l'occurrence des *événements* associés. Le FSS n'étant pas adapté aux événements extrêmes<sup>1</sup>, nous définissons les seuils de température de brillance à partir des fréquences d'événements mesurées dans les observations. Les seuils retenus sont 230 K, 240 K, 250 K, 260 K, 270 K et 290 K pour le canal 10,8  $\mu\text{m}$  et 220 K, 225 K, 230 K, 235 K et 240 K pour le canal 6,2  $\mu\text{m}$ . L'occurrence de l'événement associé au seuil  $T_s$  est défini par  $T \leq T_s$ . Ainsi, les événements associés aux températures de brillance les plus froides à 10,8  $\mu\text{m}$  peuvent correspondre par exemple à des percées de cellules convectives dans la haute troposphère, tandis que les températures de brillance les plus chaudes concernent la prévision de la température de surface.

Le calcul du FSS, est basé sur la comparaison entre la fréquence d'événements observés et la fréquence d'événements prévus dans un voisinage spatial. Nous utilisons dans la pratique des voisinages rectangulaires, de 52 km de côté, de manière similaire à ce qui a été fait pour AROME par Amodei *et al.* (2015). Ces voisinages permettent de définir le *Fraction Brier Score*, donné par :

$$\text{FBS} = \frac{1}{N_v} \sum_{v=1}^{N_v} (f_o(v) - f_p(v))^2 \quad (4.8)$$

où  $v = 1 \dots N_v$  indexe les voisinages du domaine (avec possibilité de recouvrement), et où  $f_o(v)$  et  $f_p(v)$  sont les fréquences empiriques d'événements observés et prévus dans le voisinage  $v$ . Le FSS est obtenu en normalisant le FBS par un FBS de référence correspondant

---

1. Le FSS devient particulièrement non-linéaire quand les fréquences observées ou prévues sont proches de 0% ou 100%. Pour traiter ce type de situation, on pourrait utiliser un score adapté, par exemple le *symmetric extremal dependence index* (SEDI) de Ferro et Stephenson (2011), éventuellement en combinaison avec les tables de contingences à tolérance spatiale de Stein et Stoop (2018).



au pire FBS possible avec les mêmes fréquences locales :

$$\text{FSS} = 1 - \frac{\text{FBS}}{\text{FBS}_{\text{ref}}}, \quad (4.9)$$

$$\text{avec } \text{FBS}_{\text{ref}} = \frac{1}{N_v} \sum_{v=1}^N (f_o(v) + f_p(v))^2. \quad (4.10)$$

Le FSS varie de 0, cas limite sans événement dans les observations ou dans les prévisions, à 1, cas d'une prévision parfaite. Il dépend du biais fréquentiel  $\text{FBI} = f_p(V)/f_o(V)$ , où  $V$  désigne le domaine AROME. Il est donc bienvenu de considérer le FBI conjointement au FSS (Mittermaier *et al.*, 2013).

### Agrégation du FSS

Dans la pratique, pour une heure de la journée donnée (un réseau), pour une échéance donnée et un seuil donné, nous sommes sur toute la période d'évaluation les FBS et  $\text{FBS}_{\text{ref}}$  obtenus chaque jour. Nous obtenons ainsi un FSS agrégé sur la période d'évaluation. Le FSS agrégé est le FSS qui serait obtenu si les prévisions de la période étaient toutes accolées les unes aux autres, et si un FSS était calculé pour cette prévision multi-temporelle. Plusieurs raisons viennent appuyer ce choix, les articles de référence étant peu clairs à ce sujet.

- Le FSS n'étant pas linéaire, un FSS moyen diffère d'un FSS agrégé. Le FSS agrégé a une signification physique, qui est moins évidente pour le FSS moyen.
- La non-linéarité du score dans les cas d'événements rares peut provoquer des scores extrêmes sur certains jours de prévision, à partir d'un seul point mal prévu en bordure de domaine par exemple. L'utilisation d'un FSS agrégé permet de supprimer ces scores extrêmes, évitant qu'ils ne noient le signal présent dans les autres prévisions de la période. Mittermaier *et al.* (2013) règlent ce problème différemment en rejetant les prévisions associées à des biais fréquents supérieurs à 10 (ou inférieurs à 0,1).

En contrepartie, le FSS agrégé donne plus de poids aux jours de forte activité météorologique, le FBS étant dépendant de la fréquence des événements observés dans le domaine. Notons que ce choix a été inspiré par la proposition de Hamill (1999) de sommer des tables de contingences sur la période d'évaluation *avant* de calculer des scores catégoriels non-linéaires.

### Significativité

La donnée d'un score sans qualification de sa significativité est de faible intérêt. Nous essaierons tant que possible d'assortir les scores d'une telle information. Dans ce chapitre,

### 4.3. CHOIX DES OBSERVATIONS DE RÉFÉRENCE ET DES SCORES

---

les calculs de significativité des scores obtenus s'appuient toujours sur des différences de scores entre une expérience à évaluer et une expérience de référence.

Parmi les différentes méthodes existantes pour évaluer la significativité des scores, une de celles qui formulent le moins d'hypothèses sur les distributions de probabilité sous-jacentes est la méthode du *bootstrap* (Gilleland *et al.*, 2018). Cette méthode est particulièrement adaptée lorsqu'on dispose d'un large échantillon de prévisions, comme c'est le cas ici. L'indépendance des réalisations est assurée par le choix d'évaluer les prévisions réseau par réseau, donc avec 24 h de différence entre deux prévisions successives<sup>1</sup>. Nous utilisons ici des intervalles de confiance à 95 %. Dans le cas où l'on souhaite évaluer la significativité d'un événement du type « une différence de scores  $\Delta s$  est strictement positive », nous utilisons des intervalles de confiance unilatéraux du type  $\Delta s \in [\alpha, +\infty[$ , et déclarons la différence significative si  $\alpha > 0$ .

#### 4.3.2 Cumuls de pluie

Les cumuls de pluie prévus ont également été évalués. Nous utilisons comme référence la lame d'eau ANTILOPE, qui fournit une estimation des cumuls de pluie à partir des mesures de pluviomètres et de réflectivités radar, à fréquence horaire et avec une résolution spatiale de  $0,01^\circ$  (Champeaux *et al.*, 2009). Les cumuls horaires de pluie sont parfois appelés RR1 (*hourly Rain Rates*). Nous rejetons les cumuls estimés par ANTILOPE à plus de  $0,25^\circ$  de longitude ou de latitude des côtes, considérés de moindre fiabilité. En effet, les radars se trouvant tous sur le continent, ces estimations sont basées uniquement sur les réflectivités mesurées à haute altitude, (du fait de la géométrie de la mesure). La figure 4.3 présente un exemple de lame d'eau ANTILOPE et de cumuls prévus correspondant aux mêmes heures.

Nous évaluons ces prévisions de précipitations avec le FSS et le FBI présentés plus haut. Les événements retenus sont les dépassements des cumuls 0,5 mm/h, 1 mm/h, 2 mm/h, 5 mm/h, 10 mm/h et 20 mm/h. Ces deux derniers seuils sont cependant à considérer avec prudence, dans la mesure où ils correspondent à des événements rares. Ainsi, l'indice composite utilisé pour l'évaluation des prévisions AROME rejette le seuil de 10 mm pour 6 h, correspondant à 1 % des observations seulement (Amodei *et al.*, 2015). Des voisinages géographiques de 50 km sont utilisés. Comme pour les images satellites prévues, les prévisions de précipitations sont interpolées au plus proche voisin sur la grille des observations avant calcul des scores.

L'interprétation en termes d'occurrence ou de non-occurrence des événements étant

---

1. Il est possible que les scores soient légèrement corrélés à 24 h d'intervalles. Dans ce cas, il serait possible de calculer de nouveaux intervalles de confiance à l'aide d'une méthode de *circular block bootstrap*, *bootstrap* circulaire par blocs, qui permet de conserver les structures de corrélations présentes dans les séries temporelles.

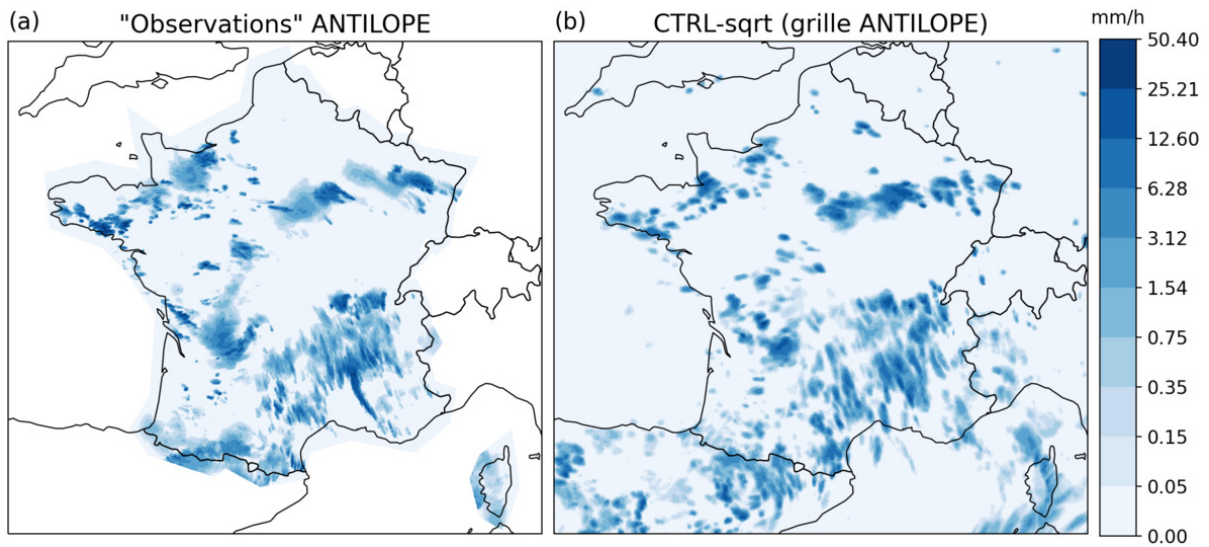


FIGURE 4.3 – Cumuls de précipitations horaires observés et prévus. (a) Lamme d'eau Antilope après rejet des observations sur mer, (b) Prévision modèle associée après interpolation sur la grille des observations.

particulièrement aisée pour des cumuls de précipitations, nous utilisons également les tables de contingences avec tolérance spatiale de Stein et Stoop (2018). Une table de contingences permet de dénombrer les occurrences prévues ou observées d'un événement dans le domaine :

Événements		Observés	
		Oui	Non
Prévus	Oui	$A$	$B$
	Non	$C$	$D$

$A$  désigne ici le nombre de bonnes détections,  $B$  les fausses alarmes,  $C$  les non-détections et  $D$  les rejets corrects. La méthode de Stein et Stoop (2018) permet d'inclure une tolérance spatiale dans le calcul des tables de contingences. Une fausse alarme et une non-détection spatialement proches<sup>1</sup> peuvent ainsi se compenser et compter pour une détection et un rejet correct. Notons que les tables de contingences de Stein et Stoop (2018) sont conçues de manière à ce que le biais fréquentiel, aussi défini par  $FBI = (A + B)/(A + C)$ , soit identique au biais calculé à partir de tables de contingences classiques.

De nombreux scores permettent de synthétiser l'information des tables de contingences.

1. Nous utilisons les mêmes voisinages pour les calculs de FSS et de tables de contingences.

### 4.3. CHOIX DES OBSERVATIONS DE RÉFÉRENCE ET DES SCORES

---

Nous en retenons deux, qui se complètent mutuellement, le taux de fausses alarmes (FAR, *False Alarm Ratio*<sup>1</sup>) et la probabilité de détection (POD, *Probability Of Detection*<sup>2</sup>).

$$\text{FAR} = \frac{B}{A + B} \quad (4.11)$$

$$\text{POD} = \frac{A}{A + C} \quad (4.12)$$

Le FAR est la proportion de fausses alertes par rapport au nombre total d’alertes, tandis que le POD est la proportion de d’événements observés qui avaient été effectivement prévus.

De manière similaire à ce qui est effectué pour le FSS et suivant la proposition de Hamill (1999), les tables de contingences sont sommées sur la période d’étude avant de calculer les scores catégoriels (FAR, POD, FBI).

#### 4.3.3 Variables classiques

Enfin, l’impact global de l’assimilation a également été vérifié à l’aide des *cartes de scores* développées au CNRM. Cet outil, utilisé par Montmerle *et al.* (2018) et Caron *et al.* (2018) par exemple, s’appuie sur de multiples observations des variables classiques : vents Doppler, stations météorologiques au sol, contenu intégré en vapeur d’eau mesuré par les récepteurs GPS au sol, profileurs de vent et canaux de vapeur d’eau de SEVIRI. Ces observations ne seraient pas adaptées pour évaluer les progrès d’un modèle au fil du temps, puisqu’elles forment un réseau d’observations temporellement variable. Cependant, leur utilisation est particulièrement adaptée lorsqu’il s’agit comme ici de comparer plusieurs expériences sur une même période d’évaluation.

Les prévisions sont évaluées par le biais de l’écart quadratique moyen aux observations. Les scores sont multipliés par  $-1$  pour qu’une hausse des scores corresponde à amélioration des prévisions. Ces scores ne prennent pas en compte de manière spécifique les erreurs de positionnement, ce qui est relativement justifié dans la mesure où les variables classiques sont plus continues et spatialement moins variables que les champs liés aux hydrométéores.

Les scores associés aux différentes observations sont agrégés par variable du modèle correspondante, par niveaux verticaux (niveaux verticaux proches de la surface ou en altitude) et par échéance. La significativité à 95 % est testée à l’aide d’un test du signe, qui permet de s’affranchir de toute hypothèse sur les lois de probabilité des distributions sous-jacentes (Dixon et Mood, 1946).

---

1. À ne pas confondre avec le *False Alarm Rate*,  $F = B/(B + D)$ .

2. Aussi appelé *Hit Rate*.

## 4.4 Résultats

### 4.4.1 Impact de l'initialisation des hydrométéores

Nous commentons dans un premier temps les résultats des expériences avec localisation SQRT, c'est-à-dire avec une même localisation pour toutes les variables. L'enjeu de cette section est de répondre à la double question : le simple ajout des hydrométéores en variable de contrôle permet-il d'améliorer les prévisions ? Le système avec hydrométéores est-il assez robuste pour fonctionner en mode cyclé ?

#### 4.4.1.a Scores globaux

Les cartes de scores sont présentées en figure 4.4 pour l'expérience `HMNCy-sqrt`, évaluée par rapport à son contrôle `CTRL-sqrt`. Seuls les réseaux de minuit et de midi sont présentés ici. L'impact se révèle modéré, toujours d'amplitude inférieure à 1 % et généralement neutre. Des impacts significativement positifs sont cependant visibles pour les variables de surface telles que la pression (réseaux de 0 h et 12 h), l'humidité à 2 m (réseau de 0 h) ou la température à 2 m (réseau de 12 h). L'impact positif sur la pression de surface est le plus marqué, et perdure sur toute la durée de prévision évaluée, de 1 h à 12 h d'échéance.

La même étude peut être effectuée dans le cas cyclé où les prévisions obtenues à 3 h d'échéance servent d'ébauche au cycle d'assimilation suivant (figure 4.5). Les scores positifs de pression de surface et d'humidité à 2 m déjà observés dans le cas non-cyclé sont renforcés, et atteignent pour certaines échéances des valeurs de l'ordre de +1 %. En revanche, les scores de vent à 10 m se dégradent, parfois significativement. En altitude, les scores sont globalement négatifs, surtout pour le réseau de minuit. Pour la température en particulier, il est possible que ces détériorations soient dues à des modifications dans le schéma de rayonnement, elles-mêmes dues à des différences dans les champs nuageux de l'état initial. La majorité des scores d'altitude sont cependant non-significatifs.

Pour mieux comprendre l'apport mitigé des hydrométéores dans le cas cyclé, nous proposons de compléter ces scores par des comparaisons aux observations de SEVIRI et par comparaison aux cumuls de précipitations d'ANTILOPE. L'enjeu est également de quantifier l'impact de l'ajout des hydrométéores sur les prévisions de précipitations et de couverture nuageuse.

#### 4.4. RÉSULTATS

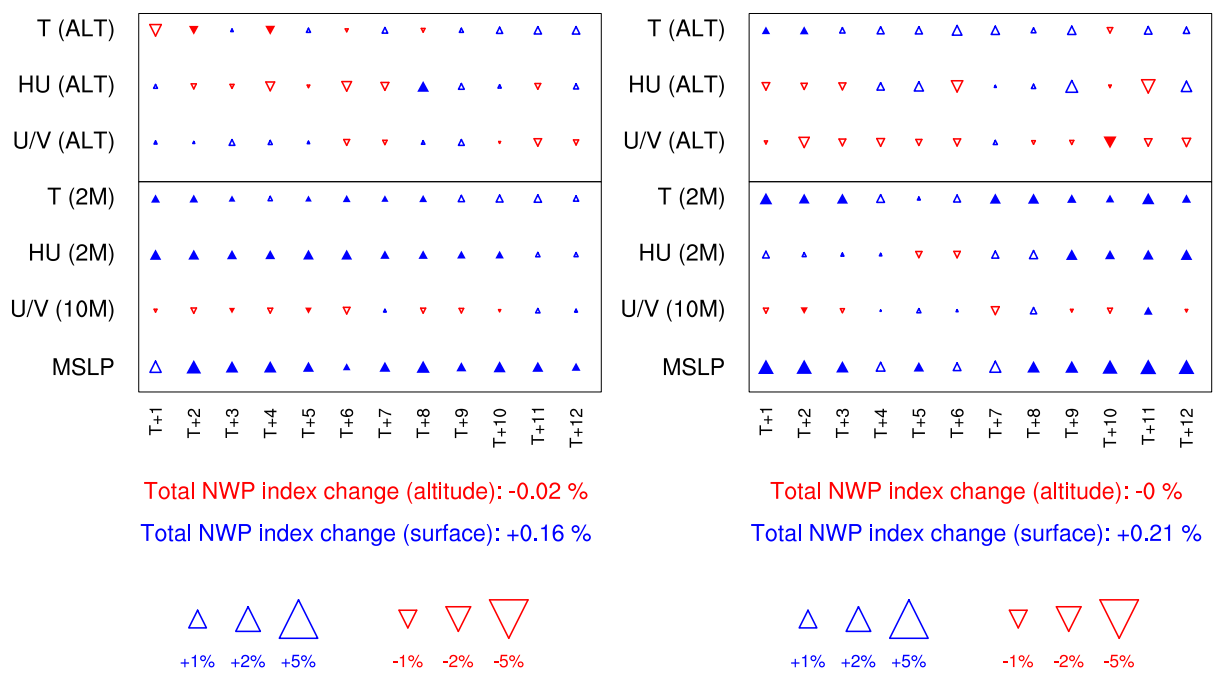


FIGURE 4.4 – Cartes de scores par variables et par échéance pour l’expérience HMNCy-sqrt, par rapport à son contrôle. Les triangles pleins signalent des différences significatives à 95 %. Le *Total NWP Index change* correspond à une moyenne des différences relatives pour les variables de surface ou d’altitude. Réseau de midi à gauche, de minuit à droite. MSLP : *Mean Sea Level Pressure*, Pression au niveau moyen de la mer.

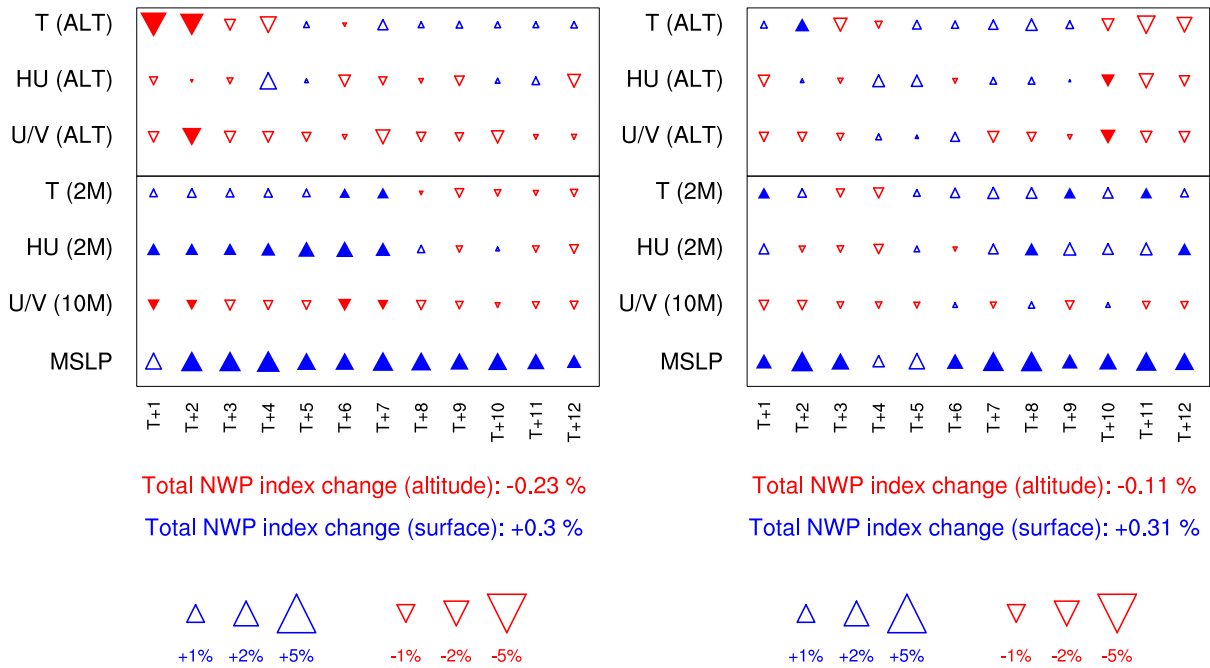


FIGURE 4.5 – Cartes de scores par variables et par échéances pour l’expérience *HMCyc-sqrt*, par rapport à son contrôle. Réseau de midi à gauche, de minuit à droite.

#### 4.4.1.b Canal infrarouge

La figure 4.6 présente les FSS relatifs ( $\Delta$ FSS) de l’expérience non-cyclée *HMNCy-sqrt* par rapport à l’expérience de contrôle sans hydrométéores, pour le canal 10,8  $\mu$ m de SEVIRI.

Les scores sont significativement positifs ou neutres. Pour le réseau de minuit, la quasi-totalité des scores sont significativement positifs, du début de la prévision jusqu’à 12 h d’échéance. Les améliorations sont modestes, avec une majorité de scores relatifs entre +0 % et +0,5 %. L’amélioration est la plus marquée pour le seuil de température de brillance le plus froid, correspondant aux nuages les plus hauts, avec des améliorations relatives dépassant localement 2 %. Ce seuil est cependant celui pour lequel on obtient le moins de scores significatifs.

Pour le réseau de midi, l’impact positif est très marqué dans les premières heures. Il disparaît ensuite, en commençant par les températures froides (à 230 K, premier score neutre après environ 2h30 de prévision) pour finir par les températures chaudes (à 290 K, premier score neutre après 8 h environ). Les scores neutres en fin de prévision s’accompagnent de quelques scores négatifs non-significatifs dans l’ensemble, qui semblent se propager des températures froides vers les températures chaudes.

Les scores sont plus mitigés dans le cas de l’expérience cyclée (figure 4.7). L’amélioration

#### 4.4. RÉSULTATS

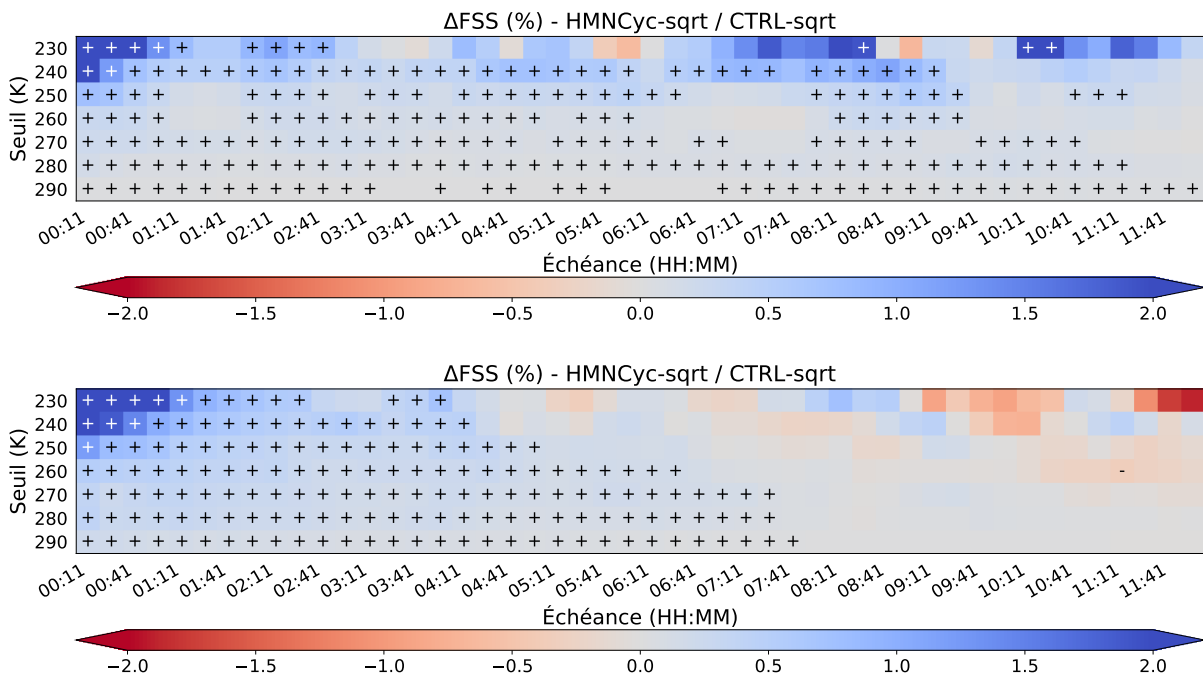


FIGURE 4.6 – FSS relatifs de HMNCy-sqrt par rapport au contrôle associé (CTRL-sqrt), pour le canal 10,8  $\mu\text{m}$  de SEVIRI. Réseaux de 0 h (haut) et 12 h TU (bas). Le choix des échéances d'évaluation est imposé par la date de validité du scan SEVIRI sur la France. Les scores significativement positifs sont marqués d'un signe +, tandis que les scores significativement négatifs sont marqués d'un signe -.



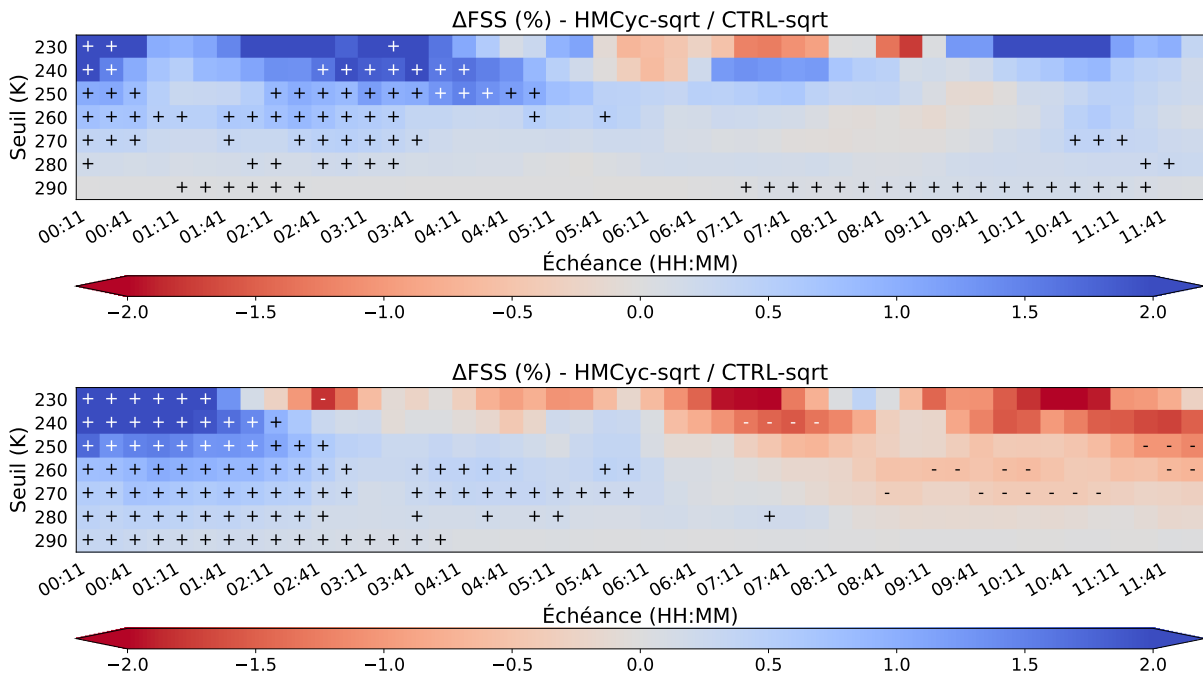


FIGURE 4.7 – FSS relatifs de HMCyc-sqrt par rapport au contrôle associé (CTRL-sqrt), pour le canal 10,8  $\mu\text{m}$  de SEVIRI. Voir figure 4.6 pour les détails.

en début de prévision reste visible, et plus marquée encore que dans le cas non-cyclé. Ce résultat diffère de ce qui était observé avec les cartes de scores, probablement parce que ces dernières sont plus indicatives des zones de ciel clair, tandis que les scores infrarouge évaluent plutôt les prévisions de nuages. Après quelques heures de prévisions cependant, les scores deviennent neutres plus rapidement, et sont moins significatifs dans l'ensemble. Pour le réseau de midi, quelques scores significativement négatifs sont même observés en fin de prévisions, et quelques scores particulièrement négatifs (mais non significatifs) apparaissent pour le seuil le plus froid (230 K).

Pour mieux visualiser les scores très variables mais moins significatifs de l'expérience en mode cyclé, nous proposons de regarder les scores de FSS relatifs à 240 K, avec les intervalles de confiance associés (figure 4.8). Les scores des deux expériences sont similaires, avec un impact marqué en début de prévision, qui décroît rapidement pour stagner à des valeurs positives en moyenne. L'expérience cyclée présente cependant des scores très variables, et associés à une incertitude bien plus grande (d'un facteur 4 environ) que dans le cas non-cyclé. Cela laisse penser que l'impact positif n'est pas observé de manière systématique sur la période d'évaluation pour cette expérience.

Terminons cette section sur les observations infrarouge par une étude du biais fréquentiel (FBI), donné pour ce même seuil de température de brillance en figure 4.9. Le FBI reste

## 4.4. RÉSULTATS

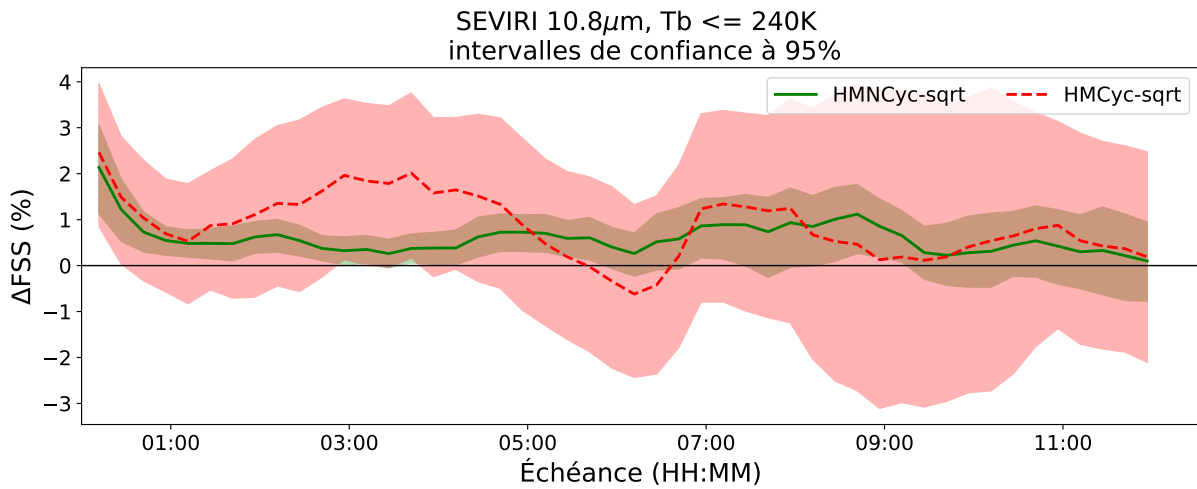


FIGURE 4.8 –  $\Delta$ FSS moyens et intervalles de confiance associés en fonction de l'échéance, pour le seuil 240 K et le réseau de 0 h. Correspond à la 1<sup>re</sup> ligne des figures 4.6 et 4.7. Cependant, les intervalles de confiance à 95 % utilisés ici sont centrés, et diffèrent donc des intervalles de confiance *unilatéraux* utilisés pour les figures 4.6 et 4.7 (voir commentaires sur les intervalles de confiance page 157).

globalement proche de 1, variant environ de 0,9 à 1,2 (0,70 à 1,25 pour les autres seuils, non montré). Il reste sensiblement proche de l'expérience de contrôle lorsqu'on ajoute les hydrométéores dans l'analyse. Cependant, une légère hausse du biais est observée en début de prévision, ce qui laisse penser que les nuages hauts sont renforcés lorsque les champs d'hydrométéores sont analysés. Cette hausse initiale est la plus marquée pour les seuils 230 K et 240 K, mais est également observée sur les autres seuils et pour tous les réseaux (non montré). Notons également que le biais semble plus marqué dans le cas cyclé que non-cyclé, ce qui appuie la remarque faite plus tôt sur la possibilité d'une propagation ou d'un renforcement d'un biais (probablement d'humidité) d'un cycle d'assimilation au suivant.

### 4.4.1.c Canal de vapeur d'eau

Les scores sur le canal 6,2  $\mu$ m de SEVIRI présentent des caractéristiques similaires à ceux du canal infrarouge, et sont montrés en annexe E (figures E.1 et E.2). Les scores sont tous très positifs dans la première heure de la prévision (quel que soit le réseau, en mode cyclé ou non), certains persistant de manière presque continue jusqu'à 12 h de prévision. L'impact est plus marqué pour le seuil 220 K (le plus froid) que pour le seuil 240 K (le plus chaud), ce-dernier étant presque insensible à l'ajout des hydrométéores.

Dans le cas cyclé, les scores deviennent très variables pour les seuils froids (220 K et

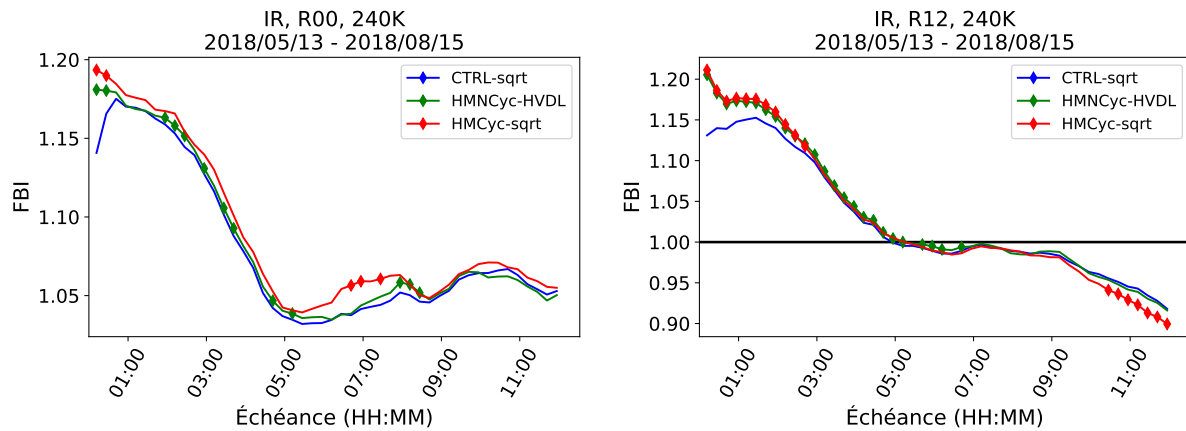


FIGURE 4.9 – Biais fréquentiel sur la période d'étude, pour le seuil 240 K du canal 10,8  $\mu\text{m}$  de SEVIRI, en fonction de l'échéance et pour les expériences SQRT. Un losange est tracé sur chaque donnée de FBI significativement différente de l'expérience de contrôle.

230 K), comme observé précédemment pour le canal infrarouge : scores tantôt très positifs, tantôt très négatifs, mais rarement significativement.

#### 4.4.1.d Précipitations

Les tables de FSS pour les cumuls de précipitations sont données en figure 4.10. Les scores relatifs sont beaucoup plus marqués que pour les observations SEVIRI, d'amplitude avoisinant les 10 %. L'impact est clairement positif sur la première heure de prévision, mais devient plus mitigé ensuite, en particulier dans le cas cyclé. Quelques scores significativement négatifs sont observés en particulier pour les seuils élevés de 10 mm/h et 20 mm/h, bien que ces seuils soient à considérer avec prudence<sup>1</sup>. Pour les faibles cumuls, on note des scores légèrement positifs, parfois significativement dans le cas non-cyclé, pour les précipitations ayant lieu l'après-midi.

Le biais fréquentiel pour le seuil 1 mm/h est donné en figure 4.11. On note une augmentation du biais fréquentiel en début de prévision pour les expériences avec hydrométéores. Cette augmentation est bénéfique quand la prévision de contrôle sous-estime les précipitations, ce qui est le cas ici. Comme dans le cas des observations infrarouge, ce comportement se retrouve sur tous les réseaux et tous les seuils<sup>2</sup>.

Pour les diagrammes FAR/POD, nous choisissons de commenter la première échéance,

1. Outre leur rareté déjà évoquée dans la présentation des scores, on verra en figure 4.12 qu'ils sont associés à des biais fréquents importants.

2. Certes, une légère diminution du FBI est observée pour le seuil 220 K en figure 4.12, mais elle n'est pas significative à 95 %.

#### 4.4. RÉSULTATS

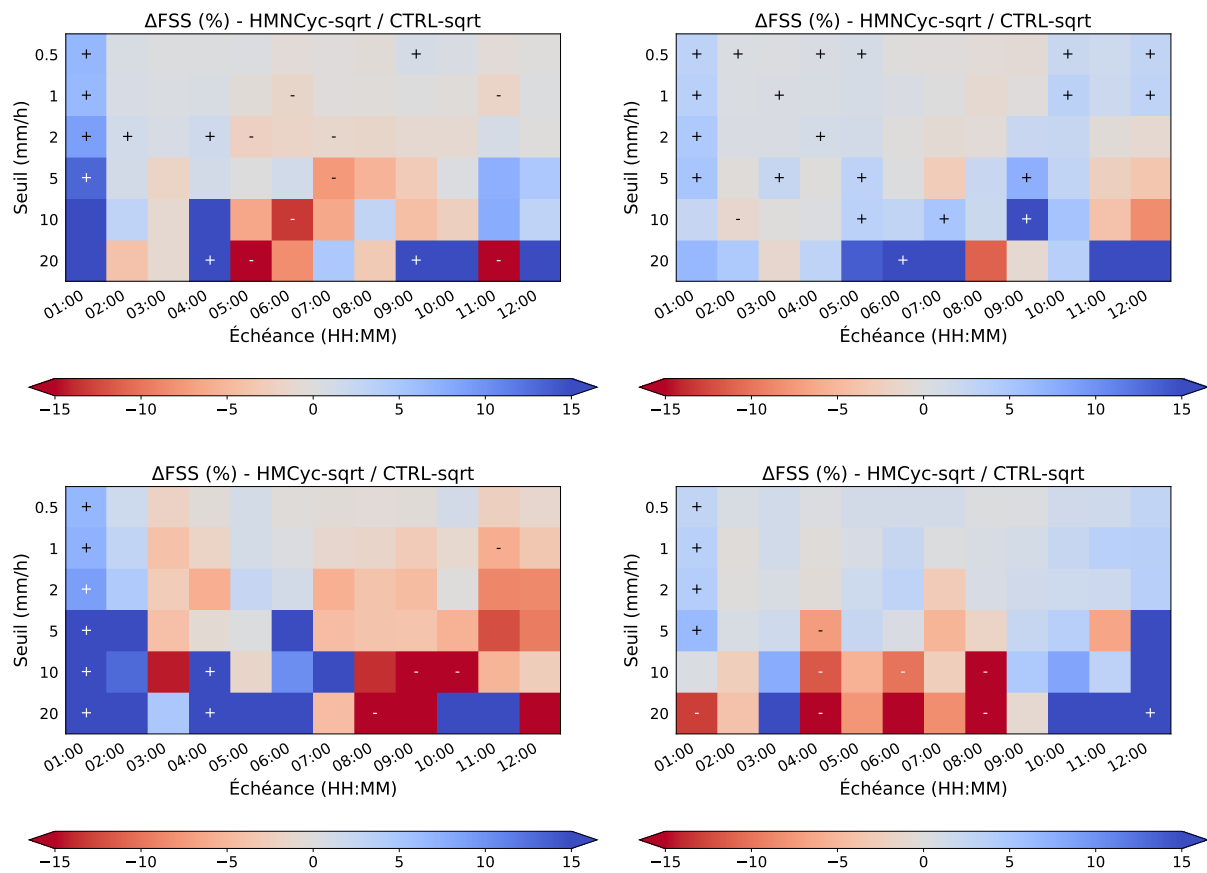


FIGURE 4.10 – FSS relatifs pour les cumuls de précipitations en fonction de l'échéance et du seuil. Expériences HMNCy-sqrt (haut) et HMCyc-sqrt (bas) par rapport au contrôle sans hydrométéores. Réseaux de minuit (gauche) et midi (droite). Voir légende de la figure 4.6 pour les détails.

puisque c'est a priori la plus facile à interpréter (figure 4.12). La probabilité de détection (POD) est systématiquement améliorée par la prise en compte des hydrométéores, parfois au détriment du taux de fausses alarmes (FAR). Ces variations s'accompagnent généralement d'une hausse du biais fréquentiel, initialement sous-estimé.

Au vu des scores ici présentés, deux interprétations peuvent être émises. La première interprétation concerne la différence marquée entre scores de surface et scores d'altitude. Nous supposons que la prise en compte des hydrométéores dégrade après quelques heures la prévision des variables classiques en altitude, en particulier en mode cyclé, et que cette dégradation se propage ensuite vers la surface. Cette possible propagation est légèrement visible par la structure des scores négatifs sur les tables de FSS relatifs pour le canal 10,8  $\mu\text{m}$  de SEVIRI (figures 4.6 et 4.7). De telles structures sont également observées sur les autres réseaux, en particulier pour le réseau de 15 h (figure E.3 en annexe). Il est d'autant plus difficile d'estimer l'origine de cette dégradation d'altitude qu'elle n'apparaît

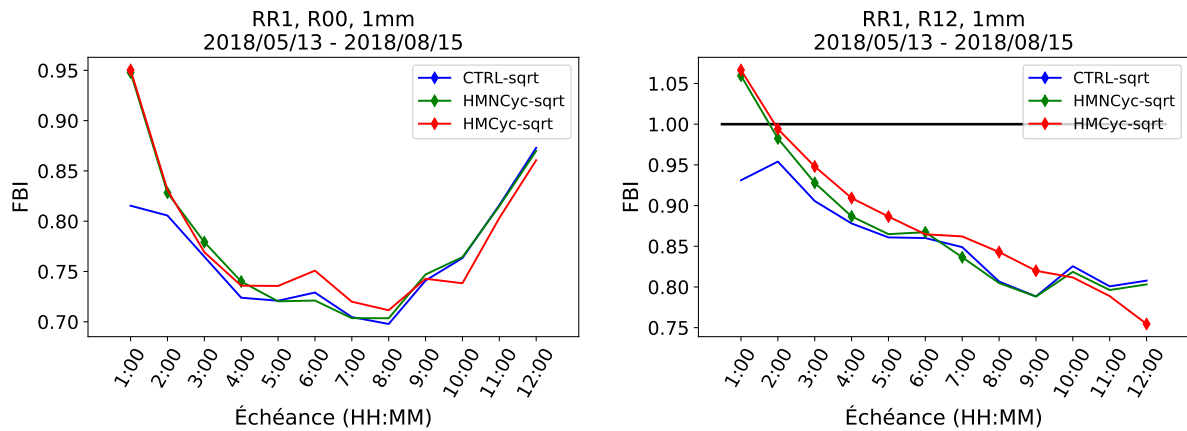


FIGURE 4.11 – Biases fréquentiel pour les cumuls de pluie pour le seuil 1 mm/h. Expériences avec localisation SQRT. Voir légende de la figure 4.9 pour plus de détails.

pas immédiatement à l'analyse, mais à partir de 1 h de prévision au plus tôt (sur les cartes de scores), voire bien plus tardivement (à partir de 6 h d'échéance pour le réseau de 15 h par exemple). Les processus en jeu impliquent à la fois le système d'analyse et la prévision, et sont donc difficilement identifiables.

Une deuxième hypothèse d'interprétation concerne le biais fréquentiel observé pour les précipitations, qui serait dû au traitement des contenus spécifiques négatifs. En effet, les incréments d'hydrométéores dépendent linéairement des incréments des variables classiques, et sont donc de moyenne globalement nulle : on ajoute pendant l'analyse autant de contenu en hydrométéores qu'on en enlève. Cependant, les analyses ainsi obtenues comportent une part importante de contenus négatifs, qui sont seuillés pour les ramener à des valeurs nulles. Les incréments *effectivement produits* sont donc tronqués, et de moyennes strictement positives. Cela n'est pas problématique a priori ; il est bien connu que l'assimilation n'est pas un procédé conservatif. Cependant, les biais positifs de températures de brillance et de précipitations en début de prévision, ainsi que la hausse des scores de POD et de FAR, semblent tous être des effets de ce traitement asymétrique des incréments d'hydrométéores. Bien que ce biais s'avère positif dans un contexte où les précipitations sont sous-estimées en début de prévision, il est probable que ce ne soit pas systématiquement le cas sur la période d'évaluation. Un cyclage du biais en configuration cyclée expliquerait donc la plus grande variabilité des scores, tantôt positifs tantôt négatifs sur la période.

#### 4.4.2 Avec d'autres schémas de localisation

L'impact de la prise en compte des hydrométéores est-il différent lorsque d'autres schémas de localisation sont utilisés ? En particulier, d'autres schémas de localisation

## 4.4. RÉSULTATS

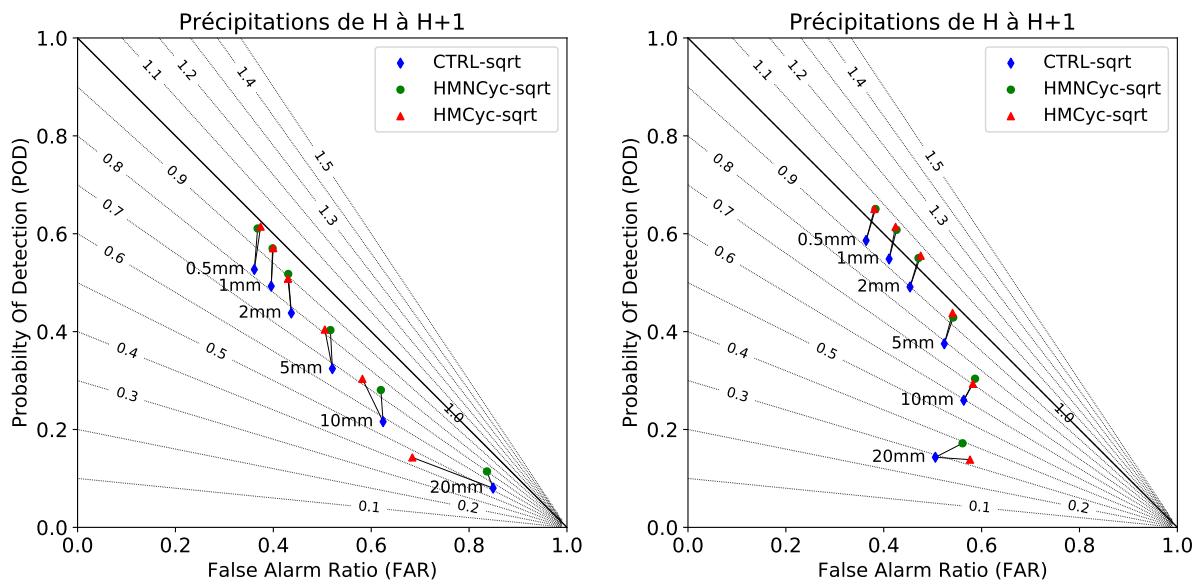


FIGURE 4.12 – Diagrammes FAR/POD pour les cumuls de précipitation sur la première heure de prévision. Prévisions de minuit (gauche) et midi (droite). Les lignes de niveaux en pointillés indiquent la valeur du biais fréquentiel. Les prévisions non biaisées sont sur la deuxième diagonale, et les meilleurs scores de FAR et de POD sont dans le quartier nord-ouest.

permettent-ils d’atténuer certaines des détériorations observées dans le cas cyclé ?

### 4.4.2.a Apport des hydrométéores avec d’autres schémas de localisation

La table 4.4 synthétise l’impact global de l’ajout des hydrométéores pour divers schémas de localisation. La première ligne synthétise les résultats de la section précédente : a) l’ajout des hydrométéores est bénéfique pour les variables de surface, avec un apport d’autant plus marqué dans le cas cyclé, b) les scores d’altitude globalement neutres en mode non-cyclé deviennent négatifs dans le cas cyclé.

Cette structure de scores se répète dans tous les schémas de localisations évalués, bien que dans une moindre mesure pour le schéma FULL. Une étude des cartes de scores (non montrées) montre que les indices globaux donnés en table 4.4 ne cachent pas de grandes disparités en fonction des échéances ou des variables. Les conclusions de la section 4.4.1.a restent donc valides pour les autres localisations, avec des scores d’altitude significativement négatifs en particulier pour le vent, et parfois pour la température en début de prévision. Les scores obtenus pour le schéma VVDL apparaissent toutefois meilleurs que ceux obtenus avec le HVDL pour la surface. Cette différence n’est marquée que pour le réseau de 12 h TU en mode cyclé.

	HMNCy		HMCyc	
	00 h TU	12 h TU	00 h TU	12 h TU
SQRT	-0,02	-0,00	-0,23	-0,11
	+0,16	+0,21	+0,30	+0,31
HVDL	-0,00	+0,01	-0,12	-0,27
	+0,12	+0,15	+0,21	+0,04
VVDL	-0,03	+0,03	-0,11	-0,27
	+0,17	+0,20	+0,29	+0,21
SDL	-0,06	-0,04	-0,30	-0,22
	+0,14	+0,24	+0,14	+0,14
FULL	-0,03	+0,09	-0,04	-0,08
	+0,16	+0,23	+0,48	+0,09

(a) Apport des hydrométéores pour différents schémas de localisation. Chaque expérience est évaluée par rapport à son contrôle, comme indiqué en table 4.3. En particulier, les expériences SDL et FULL ne sont pas évaluées par rapport au même contrôle que les autres expériences.

	00 h TU	12 h TU
CTRL-SDL/CTRL-sqrt	+0,70	+0,47
	+2,34	+0,58
CTRL-full/CTRL-sqrt	+0,27	-0,15
	+0,76	+0,29

(b) Apport du SDL et de la localisation FULL, hors impact des hydrométéores.

TABLE 4.4 – Variations de l'indice PNT total en % pour divers couples d'expériences. Les deux valeurs données correspondent aux scores en altitude (haut) et aux scores de surface (bas). Les variations d'amplitude supérieure à 0,10 % sont mises en évidence par la couleur.

Notons cependant que le cas du SDL est particulier, dans la mesure où la différence de localisation implique des scores différents même sans hydrométéores (table 4.4b). L'apport du SDL dans un cas sans hydrométéores est très positif, allant même au-delà des scores obtenus par Caron *et al.* (2018). Il n'est pas étonnant que les scores ici obtenus diffèrent de cette étude. Outre les différences de configuration déjà mentionnées, le SDL est ici évalué par rapport à une localisation de type SQRT, différant légèrement de la localisation de référence choisie par Caron *et al.* (2018). Ainsi, les scores sont plus modérés si le SDL est évalué par rapport à la localisation FULL, avec un apport maximal de +1,67% au lieu de +2,34% (pour l'indice PNT total de surface, réseau de 0 h). Enfin, les périodes d'évaluation diffèrent : nous nous intéressons ici à une période estivale, et non hivernale comme le font Caron *et al.* (2018).

## 4.4. RÉSULTATS

---

Pour évaluer l'apport des hydrométéores dans le SDL, celui-ci est évalué par rapport à son propre contrôle (CTRL-SDL) dans l'avant-dernière ligne de la table 4.4a. L'apport *relatif* est tout aussi mitigé que pour les autres variables. Une comparaison absolue des expériences SDL et SQRT dans un cadre avec hydrométéores penche en faveur du SDL (figure E.4 en annexe). Cependant, l'amélioration globale observée ne traduit pas une amélioration pour toutes les échéances, les prévisions de 8 h à 12 h pouvant être dégradées par l'utilisation du SDL.

Le cas de la localisation FULL est similaire à celui du SDL, l'apport des hydrométéores n'étant pas mesuré par rapport au même contrôle que les expériences SQRT et VDL. Les différences significatives des expériences de contrôle CTRL-full et CTRL-sqrt (table 4.4b) correspondent à une amélioration marquée des scores de surface avec la localisation FULL. Cette amélioration est la plus visible à la première heure de prévision, puis s'estompe peu à peu (figure E.5 en annexe). Le fait que les deux expériences diffèrent était attendu, dans la mesure où elles n'utilisent pas exactement la même forme de localisation, avec des lobes négatifs pour la formulation FULL. L'amplitude de la différence est cependant surprenante, et inviterait à une analyse plus détaillée. Il serait possible par exemple que les deux schémas modélisent des localisations significativement différentes proche de la surface. En conséquence, on s'abstiendra de conclusions hâtives lorsque l'on comparera deux expériences basées sur des schémas de localisations différents.

### 4.4.2.b Comparaison à la localisation standard (SQRT)

**Canal infrarouge** Des FSS relatifs calculés à partir des observations infrarouge montrent des structures similaires à ce qui était déjà observé pour la localisation standard. Pour différencier les schémas de localisation, nous proposons de comparer chacun d'eux à son équivalent (cyclé ou non-cyclé) en localisation SQRT.

À partir des tables de FSS obtenues, il est difficile d'affirmer qu'un des schéma de localisation proposé serait plus adapté que la localisation standard. Les améliorations observées ne le sont en effet que pour certains réseaux ou certaines échéances, et toujours accompagnées de quelques détériorations. À titre d'illustration, nous montrons en figure 4.13 les scores relatifs des expériences avec hydrométéores en localisation HVDL par rapport à leurs équivalents en localisation standard. Les quelque améliorations en fin de prévision ne compensent pas les dégradations des scores observées en début de prévision, particulièrement dans le cas non-cyclé.

Les figures équivalentes pour les expériences VVDL, SDL et FULL sont données en annexe (figures E.6, E.7 et E.8). Nous les commentons rapidement :

- à l'inverse du HVDL, l'apport du VVDL paraît plutôt neutre voire positif pour ce type de scores (figure E.6) ;



- le SDL améliore significativement les scores pour les températures de brillance chaudes, sensibles à la basse troposphère (figure E.7). Cela confirme ainsi les scores positifs pour les variables de surface notés dans les cartes de scores correspondantes (figure E.4). Des détériorations significatives sont toutefois visibles dans la première heure de prévision ;
- le schéma FULL présente des dégradations des température de brillance chaudes par rapport au schéma SQRT, nuancant les résultats synthétisés par l'indice PNT total en table 4.4b.

**Précipitations** En ce qui concerne les précipitations, nous proposons de comparer le biais des différents schémas de localisation avec hydrométéores. La figure 4.14 montre que les divers schémas de localisation mènent à des biais très proches, avec une hausse systématique du biais en début de prévision, comme observé en section 4.4.1 pour le schéma SQRT. Le schéma SDL semble cependant sortir du lot, avec un biais significativement plus élevé et plus proche de 1 sur presque toute la durée de la prévision.

Pour vérifier si le SDL a aussi un impact sur la qualité des précipitations, nous proposons de regarder les diagrammes FAR-POD associés aux différents schémas de localisation, pour la première heure de prévision (figure 4.15). La supériorité du schéma SDL est clairement marquée, avec une réduction systématique du taux de fausses alertes et une hausse de la probabilité de détection, en mode cyclé ou non, pour le réseau de midi ou de minuit. Excepté pour le seuil 20 mm/h, ces améliorations sont observées sur toute la fenêtre de prévision. Rappelons que parmi les expériences non-cyclées qui figurent sur les diagrammes FAR-POD, toutes à part le SDL ont le même état initial pour les variables classiques. L'apport du SDL n'est donc pas uniquement celui d'une localisation adaptée aux hydrométéores, mais aussi celui d'une localisation dépendante de l'échelle pour les variables classiques également.

## 4.5 Conclusion

L'apport des hydrométéores en variables de contrôle de l'assimilation s'avère globalement positif pour les prévisions subséquentes, en particulier pour les premières heures suivant l'assimilation. L'impact est généralement positif jusqu'à 6 h, parfois jusqu'à 12 h. Les variables de surface sont celles dont la prévision est la plus améliorée : pression, humidité, température. Cependant, ces améliorations ne sont pas partagées par les variables d'altitude, pour lesquelles un impact neutre, voire négatif, est observé.

Dans une configuration cyclée, c'est-à-dire lorsque les prévisions sont réutilisées comme ébauches du cycle d'assimilation suivant, l'impact des hydrométéores est accru : les scores de surface et les scores en début de prévision sont plus positifs encore, tandis que les scores

## 4.5. CONCLUSION

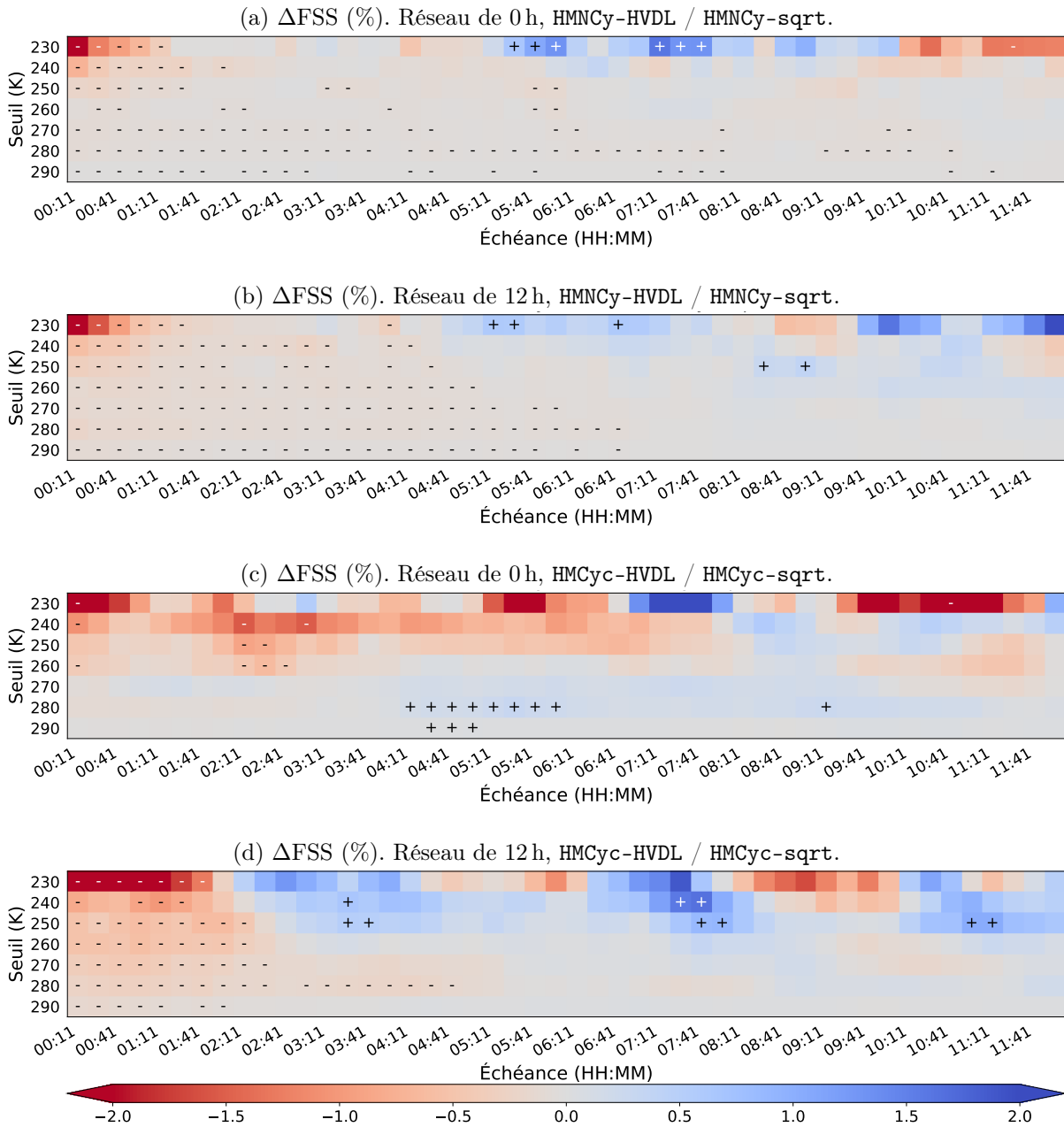


FIGURE 4.13 – FSS relatifs pour les expériences de type HM-HVDL par rapport à leurs équivalents HM-sqrt.

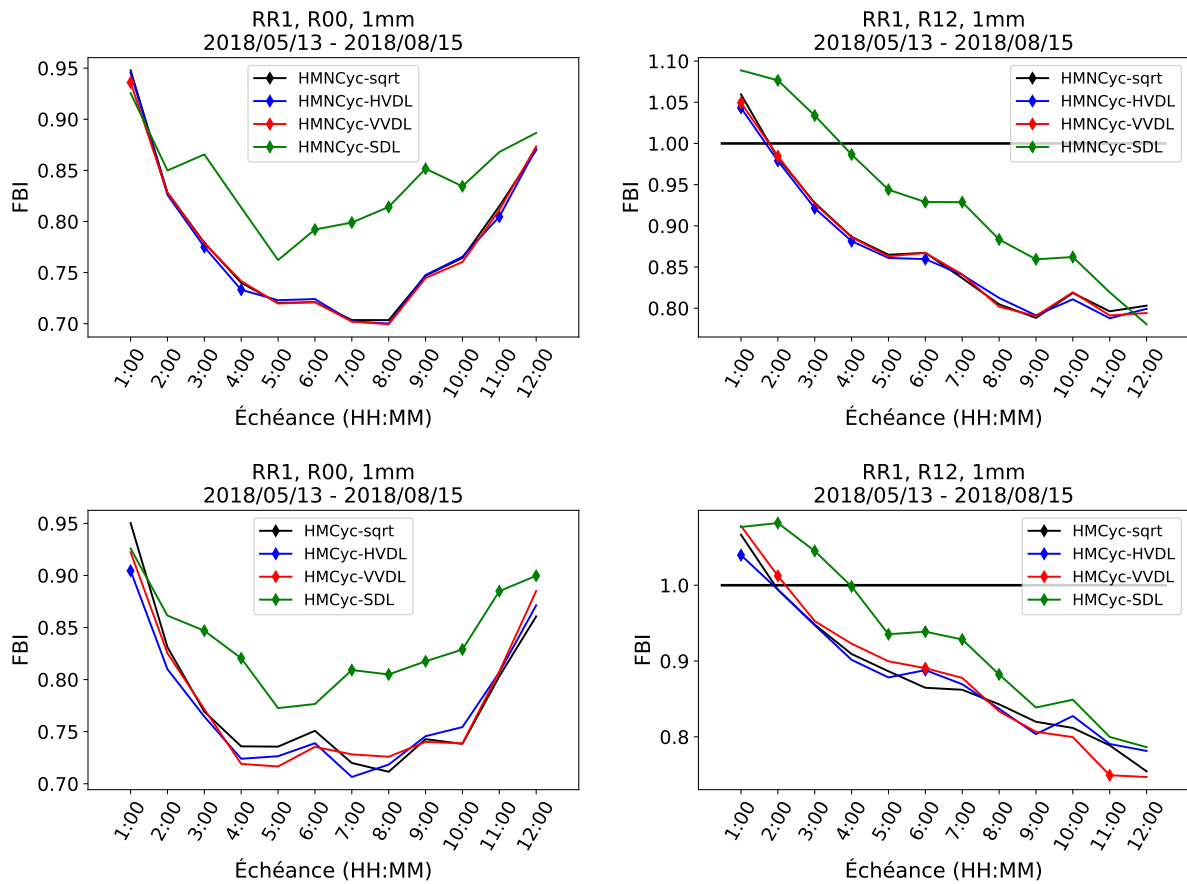


FIGURE 4.14 – Biais fréquentiel pour les cumuls de pluie pour le seuil 1 mm/h et pour divers schémas de localisation. Expériences non-cyclées (haut) et cyclées (bas), réseaux de 0 h (gauche) et de 12 h (droite). Les différences significatives par rapport à la première expérience (schéma SQRT) sont marquées d'un losange.

## 4.5. CONCLUSION

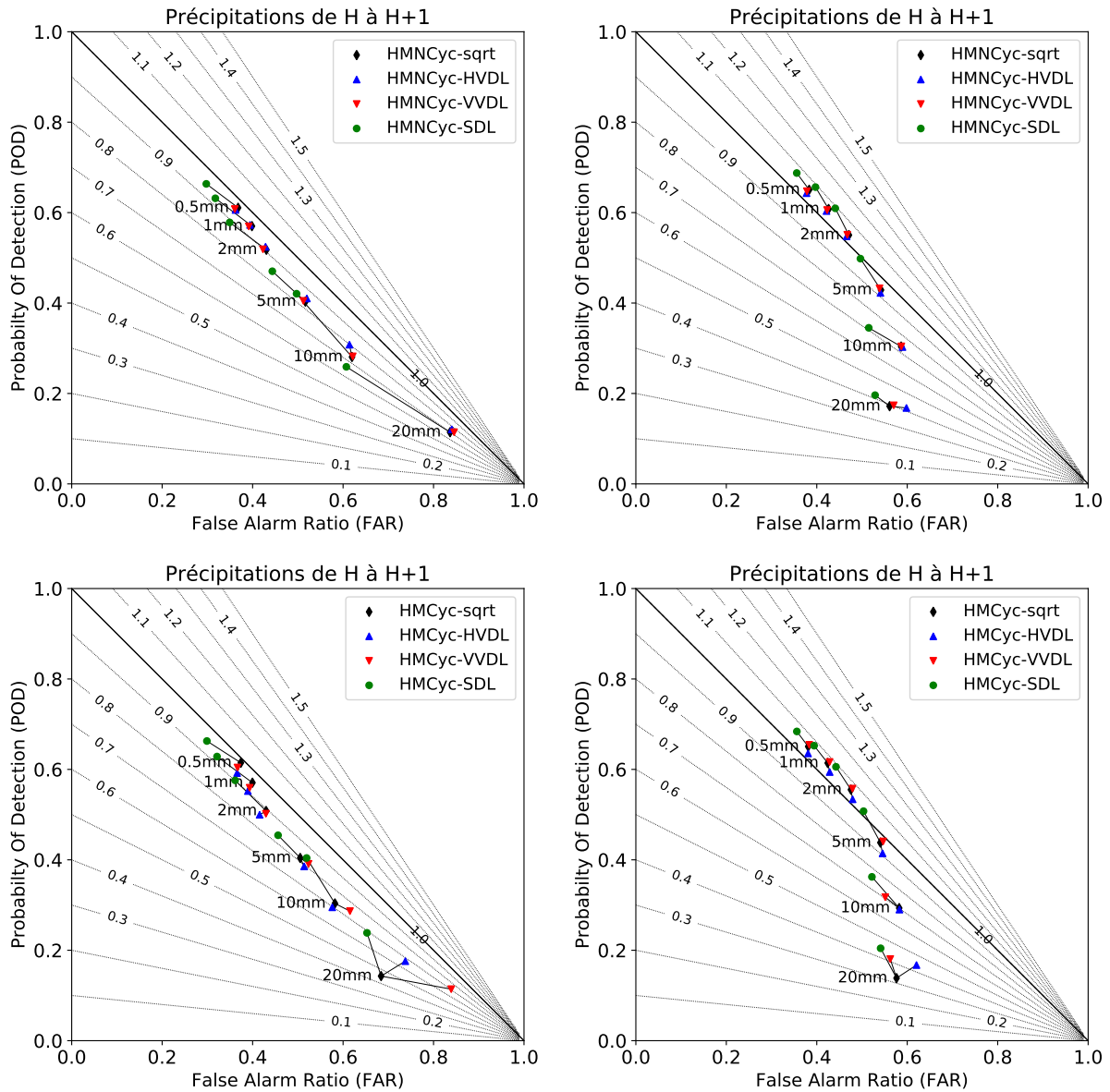


FIGURE 4.15 – Diagrammes FAR/POD pour les cumuls de précipitation sur la première heure de prévision. Expériences non-cyclées (haut) et cyclées (bas), réseaux de 0h (gauche) et de 12h (droite). Voir légende de la figure 4.12 pour plus de détails.

d'altitude ou de deuxième moitié de prévision sont dégradés. Une hypothèse proposée pour expliquer ces différences repose sur un possible renforcement d'un biais positif de contenu en eau atmosphérique au cours des cycles d'assimilation successifs. En effet, le seuillage des contenus spécifiques négatifs dans l'analyse implique que les incréments d'hydrométéores soient de moyenne strictement positive.

En ce qui concerne les prévisions de précipitations, l'ajout des hydrométéores en variable de contrôle permet une nette amélioration des scores, généralement limitée à la première heure de prévision. La sous-estimation des cumuls de pluie dans l'expérience de référence est partiellement corrigée par l'analyse avec hydrométéores. L'augmentation de la probabilité de détection associée est cependant accompagnée d'une légère hausse du taux de fausses alarmes.

Les schémas de localisation dépendante de la variable (VDL) permettent d'améliorer certaines prévisions, mais aucun d'eux ne semble apporter d'amélioration systématique aux prévisions. Relâcher la localisation verticale pour les hydrométéores précipitants semble toutefois légèrement plus bénéfique que de diminuer la localisation horizontale pour l'ensemble des hydrométéores.

Plusieurs interprétations pourraient expliquer l'apport mitigé des schémas VDL. Peut-être les longueurs de localisation horizontale choisies pour les hydrométéores sont-elles encore trop longues, et un facteur 4 ou 5 par rapport aux variables classiques aurait-il été préférable.

Plus probablement, l'atténuation des covariances croisées inhérente à l'utilisation d'un schéma VDL est-elle en cause. Par exemple, les expériences de VDL pour la localisation horizontale sont associées à une réduction d'amplitude des covariances croisées entre hydrométéores et variables classiques de 38 % environ. Or les incréments d'hydrométéores obtenus dans ces expériences sont directement proportionnels aux covariances croisées, puisque l'opérateur d'observation n'est pas sensible aux hydrométéores. L'amplitude des incréments d'hydrométéores est donc réduite de 38 % par rapport à un schéma de localisation qui permettrait de conserver l'amplitude des localisations croisées<sup>1</sup>.

Il est enfin possible que les diagnostics de localisation du chapitre 3 ne soient pas adaptés pour des expériences où l'incrément d'hydrométéores ne dépend que des covariances croisées de  $\mathbf{B}$  et non de ses auto-covariances. En effet, ces diagnostics étaient estimés à partir d'auto-covariances d'erreurs des hydrométéores, et ne sont peut-être pas généralisables aux covariances *croisées* entre hydrométéores et variables classiques.

L'apport d'un schéma de localisation dépendante de l'échelle (SDL) a également été évalué. Quelques détériorations sont observées pour le placement des nuages en tout début de prévision, ou pour les scores de surface après 8 h de prévision. Ces dégradations restent

---

1. Notons cependant qu'un schéma de localisation dépendant de la variable implique nécessairement une réduction d'amplitude pour les localisations croisées, cf. annexe D.

## 4.5. CONCLUSION

---

cependant minimales par rapport aux impacts positifs observés par ailleurs. En particulier, l'utilisation du SDL semble être en mesure de réduire le biais négatif pour les précipitations sans augmenter le taux de fausses alertes.

Rappelons que l'utilisation du schéma SDL modifie la localisation pour les hydrométéores, mais également celle pour les variables classiques. L'impact positif du SDL peut donc être attribué à une meilleure initialisation des prévisions, mais il n'est pas possible de dire si cette meilleure initialisation concerne essentiellement les hydrométéores ou bien les variables classique, voire les deux. Par ailleurs, les schémas de localisation évalués ont été appliqués sans chercher à optimiser leurs paramètres (longueurs de localisation, choix des bandes spectrales pour le SDL). Comparer les expériences avec SDL aux expériences avec d'autres schémas est donc peut-être prématuré, puisqu'on ne sait pas à quel point ces schémas sont éloignés de leur configuration optimale. L'apport du VDL pour la localisation verticale pourrait être combiné à celui du SDL, en concevant un schéma SDL basé sur des perturbations filtrées horizontalement *et* verticalement par exemple. Une telle adaptation impliquerait cependant une multiplication du coût numérique par le nombre de bandes spectrales utilisées verticalement, sachant que le coût du SDL évalué ici est déjà trois fois supérieur à celui d'une localisation standard. L'utilisation d'une quatrième bande spectrale pour les échelles horizontales les plus courtes pourrait également être envisagée, l'ajout des hydrométéores dans la variable de contrôle impliquant un surcroît de petites échelles dans les perturbations.

Peut-être aussi les scores ne pourront-ils pas être constamment améliorés si l'on se restreint à un cadre linéaire. Des améliorations non-linéaires possibles consisteraient à appliquer un changement de variable aux variables de contrôle d'hydrométéores, ou à effectuer plusieurs boucles externes lors de la minimisation. Il est possible également que des améliorations soient obtenues en modifiant l'analyse des variables classiques, par exemple en assimilant directement des observations d'hydrométéores, ou bien en effectuant des minimisations sous contrainte de positivité.

Une amélioration potentielle du système pourrait également provenir d'une plus grande cohérence entre le schéma 3D $EnVar$  déterministe et l'EDA associé. L'EDA actuel est formé de schémas 3D $Var$  perturbés. Idéalement, pour décrire les erreurs d'un système 3D $EnVar$ , l'EDA devrait plutôt s'appuyer sur des 3D $EnVar$  perturbés. Cette possibilité ne demande pas d'utiliser un nouvel EDA pour chaque membre de l'EDA actuel, chaque membre pouvant s'appuyer sur les covariances ensemblistes fournies par les autres, de manière similaire à la configuration de Hamill et Snyder (2000). Il est probable cependant que l'amélioration ainsi obtenue soit minime face à l'apport de covariances d'erreurs d'ébauche dépendantes de l'écoulement.

Des applications des résultats de ce chapitre à la prévision opérationnelle seraient envisageables sans modification importante des configurations testées. C'est le cas par exemple pour les applications en prévision immédiate, où des prévisions non-cyclées à 6 h

d'échéance sont utilisées, ce qui correspond aux configurations associées aux meilleurs scores dans nos expériences. L'amélioration de la couverture nuageuse sur ces mêmes échéances pourrait également permettre d'améliorer la nébulosité prévue. Toujours dans un contexte de prévision immédiate, les améliorations des scores de précipitations en début de prévision pourrait également bénéficier aux outils de fusion de lames d'eau. Ces outils se basent sur des extrapolations temporelles de lames d'eau radar, assez précises en début de prévision, puis sur des prévisions numériques d'AROME-PI lorsque les extrapolations ne sont plus suffisamment fiables. Une meilleure prévision numérique permettrait d'améliorer le produit en basculant plus tôt sur AROME-PI.

Avant d'envisager des applications dans AROME-France ou AROME-PI, il reste toutefois à évaluer la méthode sur des analyses et des prévisions à haute résolution (1,3 km). Des expérimentations sans hydrométéores, toujours basées sur l'utilisation de perturbations à 3,2 km mais utilisant des opérateurs d'interpolation directs et adjoints lors de l'application de la matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste au vecteur de contrôle (équation 2.12) sont actuellement en cours au CNRM pour évaluer l'apport de tels incréments finaux à haute résolution.

L'utilisation d'un schéma de type 3DEnVar hybride, avec un terme statique de covariances d'erreurs d'ébauche, pourrait également être envisagée. De premiers scores positifs ont été obtenus au CNRM pour la formulation hybride du 3DEnVar AROME par rapport à la version purement ensembliste<sup>1</sup>. Un terme de covariances statique pour les hydrométéores pourrait être modélisé à la manière de Michel *et al.* (2011). Il est cependant probable que des impacts positifs ne pourront être obtenus qu'à condition d'inclure une certaine dépendance à l'écoulement dans ce terme statique.

---

1. À une résolution de 1,3 km, et contrairement aux résultats de Montmerle *et al.* (2018) à 3,8 km.

## Conclusion et perspectives

Cette thèse s'inscrit dans un effort de recherche continu à Météo-France pour améliorer la prévision de la pluie et des nuages aux échelles décrites par le modèle AROME-France. Cette amélioration passe par une meilleure initialisation de l'environnement thermodynamique, mais aussi des variables hydrométéores elles mêmes. Imaginons par exemple qu'un nuage convectif ait été prévu au mauvais endroit, et que les observations viennent corriger cette erreur de positionnement via l'assimilation de données opérationnelle d'AROME. La zone de convergence de basse couche sera alors déplacée, mais cette correction ne pourra pas s'accompagner du déplacement correspondant pour la pluie et la neige des étages supérieurs. Ainsi, après chaque étape d'analyse, un certain temps d'ajustement est requis pour que les champs d'hydrométéores s'adaptent aux modifications d'environnement thermodynamique, en évaporant de la pluie ici, en recréant un nuage là etc. L'objectif de cette thèse est de permettre à l'étape d'assimilation de modifier ces champs d'hydrométéores dès l'étape d'analyse, permettant ainsi d'initialiser une prévision avec des structures thermodynamiques, nuageuses et précipitantes cohérentes entre elles.

On dispose par ailleurs de nombreuses observations sensibles aux hydrométéores : réflectivités radar, radiances satellitaires dans le domaine infrarouge ou micro-ondes etc. Leur impact dans l'assimilation actuelle est limité et indirect, puisqu'on ne les utilise que pour corriger les variables thermodynamiques telles que la température ou l'humidité. Être capable d'analyser les champs d'hydrométéores est une étape nécessaire vers une meilleure exploitation de l'information contenue dans ces données.

Nous nous sommes appliqués dans cette thèse à évaluer l'apport potentiel cette prise en compte des hydrométéores, dans le cadre du prototype de 3DEnVar d'AROME.

Dans un premier chapitre, nous avons présenté les hydrométéores, d'une part en tant que variables pronostiques de la microphysique nuageuse, d'autre part par le biais des nombreuses observations associées. La prise en compte des hydrométéores dans le processus d'assimilation de données fait l'objet d'une recherche active dans plusieurs centre de PNT. Depuis la première tentative d'inclusion des hydrométéores dans un schéma variationnel 4D par Sun et Crook en 1997, les variables d'hydrométéores ont été exploitées pour l'assimilation des observations radar dans le cadre du filtre de Kalman d'ensemble (Snyder et Zhang, 2003 ; Dowell *et al.*, 2004), ou de manière moins coûteuses dans des schémas variationnels 3D (Xiao et Sun, 2007, par exemple). Quelques systèmes opérationnels de prévision à échelle convective incluent maintenant dans le processus d'analyse des variables liées aux hydrométéores. C'est le cas par exemple avec un LETKF<sup>1</sup> pour le centre allemand (voir section correspondante dans Geer *et al.*, 2018) ou au Royaume-Uni avec une variable

---

1. *Local Ensemble Transform Kalman Filter*



---

incluant vapeur d'eau et hydrométéores nuageux (Ingleby *et al.*, 2012; Migliorini et Candy, 2019).

La plupart des méthodes qui s'essaient à une assimilation directe des hydrométéores utilisent une approche ensembliste ce qui leur permet de décrire des erreurs de prévision dépendantes de l'écoulement. Cette dépendance est un élément clé pour l'analyse des hydrométéores à l'échelle convective. Nous avons vu dans un deuxième chapitre comment les méthodes de type EnVar permettent de fournir, dans un cadre variationnel, une telle description ensembliste des covariances d'erreurs. Dans notre cas, ces covariances sont échantillonnées à partir de prévisions issues de l'ensemble d'assimilations AROME. La taille de l'ensemble étant limitée à 50 membres, il est nécessaire de recourir à la localisation, un procédé de filtrage des covariances empiriques pour limiter le bruit d'échantillonnage. Dans la mesure où les hydrométéores sont déjà présents dans l'ensemble, leur ajout en variables de contrôle du prototype de 3DEnVar AROME — basé sur une configuration hydrostatique de AROME-France avec une résolution horizontale de 3,2 km — est relativement aisé. Quelques fonctions de structure et incréments d'hydrométéores obtenus avec ce 3DEnVar sont montrés dans le cas où le même schéma de localisation est utilisé pour toutes les variables, y compris les hydrométéores. On vérifie ainsi qu'il est possible d'obtenir des incréments d'hydrométéores même si les opérateurs d'observation ne sont pas sensibles à ces variables, du fait des corrélations de l'erreur de prévision entre variables classiques et hydrométéores. Ainsi, l'introduction des hydrométéores dans le schéma d'assimilation est en mesure de changer la qualité des prévisions, même à réseau d'observation constant !

Le troisième chapitre s'intéresse à la localisation optimale pour les covariances d'erreurs d'ébauche des hydrométéores (Destouches *et al.*, 2020). La méthode d'estimation de la localisation optimale proposée par Ménétrier *et al.* (2015a) est étendue pour cela au cas de variables positives et hautement variables dans le temps et dans l'espace. Pour traiter le problème des points de variance nulle, nous avons recours à des masques géographiques tri-dimensionnels basés sur les variances empiriques de l'ensemble. L'utilisation de ces masques permet de rejeter les niveaux verticaux et les séparations où les covariances sont nulles, et où le problème de la localisation optimale ne se pose donc pas. Elle permet également d'augmenter la densité de l'échantillonnage spatial aléatoire au cours du diagnostic, assurant ainsi une plus grande robustesse des résultats.

Des localisations optimales ont été diagnostiquées pour 8 situations météorologiques. Pour des ensembles de 50 membres à 3,2 km de résolution, les longueurs de localisation horizontale des hydrométéores sont principalement diagnostiquées entre 20 km et 80 km, avec de grandes valeurs (autour de 100 km) pour l'eau nuageuse. Conformément aux études précédentes, on trouve des longueurs plus importantes (de 100 km à 300 km) pour les variables classiques, avec des valeurs plus élevées dans la stratosphère. Bien que les profils de localisation dépendent fortement du niveau vertical et de la situation météorologique, un rapport niveau par niveau et jour par jour montre que les longueurs de localisation

horizontale diagnostiquées pour les hydrométéores sont constamment plus courtes d'un facteur 2 à 6 par rapport aux variables conventionnelles. Les longueurs obtenues pour la localisation verticale dépendent également du niveau et de la situation météorologique. Les plages de valeurs diagnostiquées sont similaires pour les variables conventionnelles et les hydrométéores non-précipitants. En revanche, les hydrométéores précipitants présentent des structures de localisation verticale optimale plus lâches, avec des transitions vers 0 plus abruptes que pour les autres variables.

Plusieurs schémas de localisation pouvant prendre en compte ces caractéristiques ont finalement été présentés. Outre le SDL<sup>1</sup> de Buehner et Shlyueva (2015), on propose en particulier un nouveau schéma de localisation qui spécifie des localisations différentes par variable ou groupe de variables, le VDL<sup>2</sup>. On pourrait ainsi appliquer des localisations différentes aux variables classiques de l'assimilation, aux hydrométéores nuageux, et aux hydrométéores précipitants. Dans ce cadre, la hausse du coût de calcul pour appliquer la localisation serait limitée à un facteur 3.

En ce qui concerne le VDL, il serait intéressant de prolonger le travail de Destouches *et al.* (2020) au cas des covariances croisées entre les hydrométéores et les autres variables. On pourrait ainsi vérifier que les diagnostics de localisations croisées soient cohérents avec la localisation croisée implicitement imposée par le VDL, à savoir une localisation a) de longueur de portée intermédiaire par rapport aux localisations des auto-covariances associées, et b) d'amplitude inférieure à 1 à séparation nulle.

L'apport des hydrométéores en variables de contrôle du 3DEnVar AROME a été évalué en quatrième et dernier chapitre à l'aide d'expériences d'assimilation - prévision sur une période estivale de trois mois. Les prévisions ont été évaluées par les écarts quadratiques moyens aux observations pour les variables classiques, et à l'aide du FSS<sup>3</sup> de Roberts et Lean (2008) et des tables de contingences avec tolérance spatiale de Stein et Stoop (2018) pour les précipitations et les nuages. De manière générale, l'impact des hydrométéores est significativement positif sur les premières heures suivant la prévision. L'impact est notable mais de courte durée pour les précipitations (de 1 h à 2 h). Il est plus durable pour le positionnement des nuages et pour les prévisions de pression de surface (jusqu'à 12 h au moins dans certaines situations). Parmi les variables classiques du modèle, les variables de surface sont celles dont la prévision est la plus améliorée. Un impact neutre et occasionnellement négatif est observé pour les variables d'altitudes.

Dans une configuration cyclée, c'est-à-dire lorsque les prévisions sont réutilisées comme ébauches du cycle d'assimilation suivant, l'impact des hydrométéores est plus contrasté : les scores de surface et les scores en début de prévision sont plus positifs encore, tandis que les scores d'altitude ou au-delà de 6 h d'échéance sont dégradés. Nous avons formulé l'hypothèse que ces différences proviennent d'un renforcement d'un biais positif de contenu

---

1. *Scale-Dependent Localization*
2. *Variable-Dependent Localisation*
3. *Fraction Skill Score*

en eau atmosphérique au cours des cycles d’assimilation successifs. Cette interprétation est cohérente avec une hausse de biais fréquentiel pour les précipitations lors de l’ajout des hydrométéores ; elle est également cohérente avec le seuillage des contenus négatifs effectué après analyse.

Les schémas de localisation dépendante de la variable (VDL, implémenté dans le cadre de cette thèse) ou dépendante de l’échelle spatiale (SDL) ont été testés. L’impact du VDL est globalement neutre. Relâcher la localisation verticale pour les hydrométéores précipitants semble cependant légèrement plus bénéfique que de diminuer la localisation horizontale pour l’ensemble des hydrométéores. Les résultats du SDL en revanche sont très prometteurs, ce schéma semblant être le seul en mesure de réduire les sous-estimations globales de précipitations sans augmenter le taux de fausses alertes.

Des travaux complémentaires restent cependant nécessaires pour savoir à quoi attribuer les apports du SDL, ceux-ci étant en effet bien plus marqués que dans l’étude de Caron *et al.* (2018), également effectuée dans le cadre du 3DnVar AROME, mais avec une configuration différente de l’EDA. Une étude plus poussée pourrait également permettre de comprendre les résultats mitigés du VDL, qui ne semblent pas confirmer les diagnostics du chapitre 3. Il est probable que l’atténuation d’amplitude des covariances croisées soit en partie responsable de ce faible impact. Ces travaux complémentaires pourraient consister en une étude subjective des prévisions associées à chaque schéma, pour une sélection de cas météorologiques d’intérêt. De manière plus globale, une comparaison plus équitable des différents schémas de localisation pourrait être réalisée si chacun d’eux était évalué dans sa configuration optimale. Une évaluation sur une période hivernale pourrait également permettre de confirmer ou de nuancer certains résultats observés sur la période estivale retenue pour la thèse.

Diverses extensions des schémas de localisation évalués seraient envisageables. Un schéma VDL avec trois groupes de variables permettrait d’obtenir une localisation variable horizontalement et verticalement, pour le même coût numérique qu’une expérience SDL avec trois sets de perturbations filtrées. Le SDL offre également de nombreuses améliorations possibles. Horizontalement, une quatrième bande spectrale pourrait être ajoutée pour les hautes fréquences spatiales. Une décomposition en échelles pourrait être implémentée pour rendre la localisation verticale dépendante de l’échelle verticale. Une combinaison de SDL horizontal et de VDL vertical pourrait également être envisagée. Enfin, il serait intéressant d’évaluer la formulation du SDL sans annulation des covariances inter-échelles (Buehner et Shlyueva, 2015).

L’hybridation des covariances avec un terme statique pour les hydrométéores pourrait également aider à améliorer l’estimation des covariances. La modélisation de ce terme statique, peut-être à la manière de Michel *et al.* (2011), demanderait une certaine attention, notamment pour y inclure une forme de dépendance à l’écoulement. Une approche possible

proposée par Liu *et al.* (2019a) consisterait à adapter en chaque point les variances des erreurs d'hydrométéores en fonction de la température de l'ébauche.

Au-delà des questions de localisation, et plus généralement d'optimisation de la matrice de covariance des erreurs d'ébauche, plusieurs pistes d'améliorations pourraient être explorées.

1. Le caractère non-gaussien des erreurs d'hydrométéores pourrait être partiellement pris en compte par l'utilisation de changements de variables de contrôle. L'apport d'une transformée de type logarithmique pourrait ainsi être testé (Fletcher, 2007 ; Bocquet *et al.*, 2010). Des transformations plus physiques, impliquant une dépendance avec les variables classiques, pourraient également être envisagées (Hólm *et al.*, 2002).
2. Une autre perspective intéressante serait l'analyse des hydrométéores sous contraintes de positivité (Janjić *et al.*, 2014). Une telle approche permettrait par exemple de modifier les incréments de variables classiques sans utiliser de nouvelles observations, simplement par le biais des covariances croisées et des contraintes de positivité.
3. Il est possible que l'intérêt principal des hydrométéores en variables de contrôle soit à attendre de l'assimilation directe de nouvelles observations sensibles aux hydrométéores (Bannister *et al.*, 2019). Les développements possibles de ce côté concernent plutôt l'espace des observations : modélisation des erreurs d'observation, tangents linéaires et adjoints des opérateurs d'observation par exemple. Notons que l'assimilation directe de ces observations n'est pas à dissocier du premier point, dans la mesure où un changement de variables de contrôle implique un changement d'opérateur d'observation.

À plus long terme, il serait intéressant de considérer l'apport potentiel d'une prise en compte des dernières variables non-encore assimilées, à savoir l'énergie cinétique turbulente (variable de la physique), et les deux variables non-hydrostatiques du noyau dynamique d'AROME. Pour analyser ces deux variables, il faudrait cependant les ajouter au préalable dans l'EDA AROME, qui se base actuellement sur une formulation hydrostatique du noyau dynamique.

Indépendamment de ces perspectives, une évaluation du 3DEnVar avec hydrométéores sur des analyses et des prévisions à haute résolution (1,3km) serait bienvenue. Un tel 3DEnVar à haute résolution mais sans hydrométéores en variables de contrôle est en effet en cours de test pour AROME. Si les nombreux résultats obtenus en mode recherche se confirment, il remplacera prochainement le 3DVar utilisé depuis 2008. Dans ce contexte, une application dans le modèle AROME-PI utilisé en prévision immédiate paraît la plus immédiatement envisageable. Nous avons en effet montré la capacité d'un système 3DEnVar avec hydrométéores à améliorer systématiquement les prévisions de précipitations et de couverture nuageuse à courte échéance et en mode non-cyclé, ce qui est particulièrement adapté pour des applications de prévision immédiate. Restent cependant à résoudre les

questions de disponibilité en temps réel de l'ensemble d'assimilation, ainsi que les questions liées au temps d'exécution d'un tel 3DEnVar.

Une dernière perspective à plus long terme est celle de l'utilisation d'un 4DEnVar, dont un prototype est en cours d'évaluation pour AROME. Rajouter une dimension temporelle au problème est particulièrement intéressant pour des champs rapidement variables comme les hydrométéores. Par exemple, des observations radar temporellement éloignées de l'instant de l'assimilation pourraient être prises en compte sans approximation sur l'instant de validité.

Par ailleurs, un schéma 4DEnVar ne nécessite pas de recourir à un tangent linéaire ni à un adjoint du modèle de prévision, ce qui permettrait d'obtenir facilement des corrélations entre variables classiques à un pas de temps et hydrométéores à un autre, résolvant ainsi les difficultés rencontrées par un 4DVar pour linéariser explicitement les processus de la physique nuageuse. L'observation d'hydrométéores précipitants en fin de fenêtre permettrait ainsi d'ajuster les conditions thermodynamiques en début de fenêtre, de manière similaire à l'effet déjà bien connu avec les 4DVar (par exemple Sun et Crook, 1997).

Enfin, l'utilisation de plusieurs boucles externes lors des minimisations implique que les trajectoires de chaque membre de l'ensemble soient recalculées plusieurs fois lors de l'analyse, et ce sur toute la durée de la fenêtre d'assimilation (1 h dans le prototype actuel). Ces nouvelles générations de l'ensemble au cours de l'analyse offrent des perspectives intéressantes pour résoudre les problèmes de variances nulles, qui, indépendamment des observations, empêchent l'ajout d'hydrométéores s'ils ne sont présents dans aucun membre de l'ensemble.

# Rang de l'estimateur de la covariance

## Proposition A.1

Si  $\text{Im } \mathbf{A}$  désigne l'image d'une matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Ker } \mathbf{A}$  son noyau, et  $E^\perp$  le sous-espace vectoriel orthogonal à  $E$  pour le produit scalaire canonique, on a :

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \text{Im } \mathbf{A}^T = (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp.$$

*Démonstration.* Commençons par montrer l'inclusion directe. Soit  $y \in \text{Im } \mathbf{A}^T, y = \mathbf{A}^T x$ . Soit  $z \in \text{Ker } \mathbf{A}$ . Alors  $\langle y; z \rangle = x^T \mathbf{A} z = 0$ . Donc  $y \in (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp$ .

Il suffit maintenant de montrer que les deux ensembles sont de même dimension. D'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker } \mathbf{A})^\perp = \text{rg}(\mathbf{A})$  (l'application linéaire associée à  $\mathbf{A}$  réalise une bijection d'un espace dans l'autre). De même,  $\dim(\text{Ker } \mathbf{A}^T)^\perp = \text{rg}(\mathbf{A}^T)$ . On sait également d'après l'inclusion directe que  $\text{rg}(\mathbf{A}^T) \leq \dim(\text{Ker } \mathbf{A})^\perp$ , et en remplaçant  $\mathbf{A}$  par  $\mathbf{A}^T$  :  $\text{rg}(\mathbf{A}) \leq \dim(\text{Ker } \mathbf{A}^T)^\perp$ . En regroupant toutes ces relations :

$$\text{rg}(\mathbf{A}^T) \leq \dim(\text{Ker } \mathbf{A})^\perp = \text{rg}(\mathbf{A}) \leq \dim(\text{Ker } \mathbf{A}^T)^\perp = \text{rg}(\mathbf{A}^T)$$

D'où l'on déduit l'égalité de toutes ces relations, et *a fortiori* l'égalité des ensembles  $\text{Im } \mathbf{A}^T$  et  $(\text{Ker } \mathbf{A})^\perp$ . On remarquera qu'on a montré au passage la propriété « *row rank equals column rank* »,  $\text{rg } \mathbf{A} = \text{rg } \mathbf{A}^T$ .  $\square$

## Proposition A.2

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \text{Im } \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \text{Im } \mathbf{A}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\text{Ker } \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \text{Ker } \mathbf{A}^T$ .

Si  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T x = 0$ ,  $\mathbf{A}^T x \in \text{Ker } \mathbf{A}$ . Mais on a aussi  $\mathbf{A}^T x \in \text{Im } \mathbf{A}^T$ . D'après la proposition A.1, ces deux espaces vectoriels sont orthogonaux, donc  $\mathbf{A}^T x = 0$ , c'est-à-dire  $x \in \text{Ker } \mathbf{A}^T$ . L'inclusion réciproque est immédiate.

Il suffit maintenant d'appliquer deux fois le théorème du rang :

$$\text{rg } \mathbf{A} \mathbf{A}^T = n - \dim \text{Ker } \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$

$$\begin{aligned}
 &= n - \dim \text{Ker } \mathbf{A}^T \\
 &= \text{rg } \mathbf{A}^T \\
 &= \text{rg } \mathbf{A}.
 \end{aligned}$$

On déduit le résultat recherché de cette égalité de dimensions et de l'inclusion directe  $\text{Im } \mathbf{A}\mathbf{A}^T \subset \text{Im } \mathbf{A}$ .  $\square$

On voit donc que la matrice de covariance échantillonnée  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  n'est inversible que si la matrice des perturbations  $\mathbf{X}$  est de rang  $n$ . Ce qui n'est possible que si elle compte au moins  $n$  colonnes, c'est-à-dire si l'ensemble à  $n$  membres. On peut même aller légèrement plus loin avec la proposition suivante.

**Proposition A.3**

*Le rang de la matrice  $\mathbf{X}$  des perturbations est majoré par  $N - 1$  où  $N$  est le nombre de membres.*

*Démonstration.* La somme des perturbations est nulle (par définition des perturbations). Autrement dit  $\mathbf{X}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^n}$ , où  $\mathbf{1}_N = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$ . Donc  $\mathbf{1}_N \in \text{Ker } \mathbf{X}$  et  $\dim \text{Ker } \mathbf{X} \geq 1$ . Par le théorème du rang,  $\text{rg } \mathbf{X} \leq N - 1$ .  $\square$

# Factorisation du produit de Schur

**Proposition B.1**
*Factorisation du produit de Schur*

Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ . Alors

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \circ (\mathbf{C}\mathbf{C}^T) = (\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})^T$$

*Démonstration.* On reproduit ici la démonstration déjà fournie par exemple par Bishop et Hodyss (2009b). Pour  $0 \leq i, j \leq n-1$ , l'élément  $i, j$  de la matrice  $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \circ (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)$  est :

$$\begin{aligned} [(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \circ (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)]_{i,j} &= (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)_{i,j} (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)_{i,j} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{p-1} A_{i,k} A_{j,k} \right) \left( \sum_{l=0}^{q-1} C_{i,l} C_{j,l} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \left( \sum_{l=0}^{q-1} C_{i,l} C_{j,l} \right) A_{i,k} A_{j,k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{q-1} A_{i,k} C_{i,l} A_{j,k} C_{j,l} \\ &= \sum_{m=0}^{pq-1} (\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})_{i,m} (\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})_{j,m} \text{ avec } m = kp + l \\ &= [(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})^T]_{i,j} \end{aligned}$$

□

Il s'ensuit qu'un produit de Schur de deux matrices symétriques positives est également symétrique positif.

Le caractère défini positif est légèrement plus contraignant. Il faudrait déterminer sous quelles conditions  $(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})^T$  est inversible, c'est-à-dire sous quelle conditions  $(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C})$  est inversible d'après la proposition A.2. Une condition suffisante est que l'une



des deux matrices soit inversible, et que l'autre ne comporte aucune ligne avec uniquement des zéros :

**Proposition B.2**

**Image d'un produit de modulation**

Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ . Soit  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  la famille des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  la famille des vecteurs de la base canonique « associés » aux lignes non-nulles de  $\mathbf{C}$ , i.e.

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_i \in \mathcal{B} \mid \exists j \in 1..q : C_{ij} \neq 0\}$$

Alors si  $\mathbf{A}$  est inversible, l'image du produit de modulation  $\mathbf{A} \Delta \mathbf{C}$  est donnée par

$$\text{Im}(\mathbf{A} \Delta \mathbf{C}) = \text{Vect}(\mathcal{F}),$$

où  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* L'idée est de remarquer que  $\mathbf{A} \Delta \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C} \Delta \mathbf{A}$  ont la même image (elles ont les mêmes colonnes, à une permutation près), puis de reprendre la formulation de Buehner (2005) pour le produit de modulation :

$$\mathbf{C} \Delta \mathbf{A} = [\text{Diag}(\mathbf{C}_{:,1}) \mathbf{A} \quad \text{Diag}(\mathbf{C}_{:,2}) \mathbf{A} \quad \dots \quad \text{Diag}(\mathbf{C}_{:,q}) \mathbf{A}], \quad (\text{B.1})$$

où  $\text{Diag}(\mathbf{x})$  désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont ceux du vecteur  $\mathbf{x}$ . À partir de là, avec les hypothèses déjà faites, il est aisé de se convaincre du résultat.

Voici une possibilité de démonstration pour le lecteur sceptique. Soit  $\mathbf{e}_i \in \mathcal{F}$ . Alors il existe  $j \in 1..q$  tel que  $C_{ij} \neq 0$ . Nous allons construire un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  tel que  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{C} \Delta \mathbf{A})\mathbf{x}$ . En s'inspirant de la formulation B.1 du produit de modulation, il est possible de définir  $\mathbf{x}$  comme la concaténation de  $q$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Nous choisissons ces  $q$  vecteurs tous nuls, sauf le  $j^{\text{e}}$  que nous fixons à  $(1/C_{ij})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i$ . Le résultat est direct :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \Delta \mathbf{A})\mathbf{x} &= [\text{Diag}(\mathbf{C}_{:,1}) \mathbf{A} \quad \dots \quad \text{Diag}(\mathbf{C}_{:,j}) \mathbf{A} \quad \dots \quad \text{Diag}(\mathbf{C}_{:,q}) \mathbf{A}] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \\ (1/C_{ij})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} + \dots + \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} + \text{Diag}(\mathbf{C}_{:,j}) \mathbf{A} (1/C_{ij})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i + \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} + \dots + \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \\ &= (1/C_{ij}) \text{Diag}(\mathbf{C}_{:,j}) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
&= (1/C_{ij}) \mathbf{C}_{:,j} \circ \mathbf{e}_i \\
&= \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que  $\text{Vect } \mathcal{F} \subset \text{Im}(\mathbf{C} \Delta \mathbf{A})$ . L'inclusion réciproque est immédiate, puisque les lignes nulles de  $\mathbf{C}$  sont nulles aussi pour le produit de modulation.  $\square$

**Application** : si une matrice de localisation  $L$  est inversible, le rang de la matrice  $\mathbf{B}$  ensembliste localisée correspond au nombre de composantes du vecteur d'état dont la variance échantillonnée est non-nulle. En particulier, dans le cadre d'un EnVar pur avec hydrométéores, la matrice localisée ne sera jamais définie positive puisqu'il existe toujours des points du modèle pour lesquels la variance d'ensemble est nulle (contenu en eau liquide en altitude par exemple).

## Appliquer une matrice B localisée

Cette annexe reprend les notations du chapitre 2. Il est possible d'appliquer une matrice  $\mathbf{B}$  localisée de la forme  $\widehat{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{B}} \circ \mathbf{L}$  à un vecteur, sans calculer explicitement ni la matrice  $\widehat{\mathbf{B}}$  ni une de ses racines. Pour cela, on utilise la forme factorisée du produit de Schur (Equation 2.9). Nous avons vu que si  $\mathbf{U}$  est une racine de la matrice  $\mathbf{L}$ , alors  $\widehat{\mathbf{B}}$  est donnée par le produit de modulation<sup>2</sup> :

$$\mathbf{X} \triangle \mathbf{U} = [\text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(1)}) \mathbf{U} \quad \text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(2)}) \mathbf{U} \quad \dots \quad \text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(N)}) \mathbf{U}], \quad (\text{C.1})$$

en reprenant l'écriture de Buehner (2005), et en notant  $\text{Diag}(\mathbf{x})$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux du vecteur  $\mathbf{x}$ . Ces matrices diagonales jouent le rôle d'opérateurs de produit (de Schur) colonne par colonne avec chacune des perturbations de l'ensemble.

Appliquer  $\widehat{\mathbf{B}}$  à un vecteur  $\mathbf{x}$  s'opère alors simplement :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{x} &= (\mathbf{U} \triangle \mathbf{X})(\mathbf{U} \triangle \mathbf{X})^T \mathbf{x} \\ &= [\text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(1)}) \mathbf{U} \quad \dots \quad \text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(N)}) \mathbf{U}] \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{U}^T \text{Diag}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(N)}) \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ (\mathbf{U}\mathbf{U}^T (\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ \mathbf{x})) \\ &= \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ (\mathbf{L} (\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}^{(k)} \circ \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

2.  $\mathbf{X} \triangle \mathbf{U}$  et  $\mathbf{U} \triangle \mathbf{X}$  diffèrent par l'ordre de leurs colonnes, mais sont toutes deux racines de  $\widehat{\mathbf{B}}$ .

# Localisation inter-variables avec le VDL

Cette annexe détaille quelques propriétés du schéma de localisation dépendant de la variable (VDL) présenté au chapitre 4 (page 150). En particulier, nous essayons de caractériser les localisations croisées entre deux variables dont les localisations diffèrent. Nous passerons par une formulation continue, ce qui nous permet de recourir au théorème de la convolution, stipulant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier de ses termes. Notons cependant qu'il existe aussi une formulation discrète du théorème de la convolution, ce qui pourrait peut-être permettre d'obtenir plus directement les résultats ici présentés.

## Lien entre opérateur de localisation et convolution continue

Par souci de simplicité, nous nous plaçons dans le cas d'un espace à une dimension spatiale  $x$  (hypothèse 1). Le domaine météorologique est borné :  $x \in [0, L]$ , et discrétisé par  $x_k = k\Delta x$ , avec  $1 \leq k \leq n$  et  $L = n\Delta x$ .

Nous supposons que le profil de localisation est une gaussienne (hypothèse 2) :

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \exp\left(-\frac{[\Delta x(i-j)]^2}{2\sigma^2}\right), \\ &= \mathcal{G}_\sigma(\Delta x(i-j)) \end{aligned}$$

avec  $1 \leq i, j \leq n$  et  $\mathcal{G}_\sigma$  la gaussienne centrée d'écart-type  $\sigma$ .

Pour  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}\mathbf{f})_i &= \sum_{j=1}^n L_{ij} f_j \\ &= \sum_{j=1}^n \mathcal{G}_\sigma(\Delta x(i-j)) f_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_\sigma(\Delta x(i-j)) f_j.$$

L'extension des bornes de la somme n'est possible que si on définit  $f_j = 0$  pour  $j < 1$  ou  $j > n$ . Cette dernière ligne est une forme de discrétisation d'un produit de convolution. En effet, si  $\mathbf{f}$  est la discrétisation d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall k \in \mathbb{Z}, f_k = f(x_k)$ , alors

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta x} \mathcal{G}_\sigma * f \right) (x_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta x} \mathcal{G}_\sigma(x_i - t) f(t) dt \\ &\approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta x} \mathcal{G}_\sigma(x_i - x_j) f(x_j) \Delta x \\ &= (\mathbf{L}\mathbf{f})_i, \end{aligned}$$

approximation valide sous réserve que la résolution  $\Delta x$  soit suffisamment fine pour représenter correctement le profil gaussien (hypothèse 3). Une matrice de localisation de longueur  $\sigma$  est donc associée à la convolution par  $\frac{1}{\Delta x} \mathcal{G}_\sigma$ .

## Racine d'une matrice de localisation

Nous définissons ici la transformée de Fourier par<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : f \mapsto \hat{f} : \nu \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\nu} dx \\ \text{et son inverse } \mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{+ix\nu} d\nu. \end{aligned}$$

Nous rappelons que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{G}_\sigma) &= \sigma \sqrt{2\pi} \mathcal{G}_{1/\sigma}, \\ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{G}_\sigma) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{G}_{1/\sigma}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{G}$  s'applique dans l'espace des fréquences  $\nu$  ou des distances  $x$  selon le contexte.

Nous supposons finalement (hypothèse 4) que les racines des matrices de localisation

---

1. Les fonctions ici utilisées sont suffisamment régulières pour qu'on n'ait pas besoin de se soucier des domaines de définition : les fonctions sont continues à support compact ou gaussiennes.

---

sont des matrices symétriques construites sur la base d'un profil gaussien, avec un facteur de normalisation  $\beta$ . L'application de  $\mathbf{L}$  se traduit alors par la double application d'une convolution par  $(\beta/\Delta x) \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}}$ . Or :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left( \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} * \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} \right) &= \mathcal{F} \left( \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} \right) \times \mathcal{F} \left( \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} \right) \\ &= \left( \frac{\beta}{\Delta x} \sigma_{1/2} \sqrt{2\pi} \mathcal{G}_{\frac{1}{\sigma_{1/2}}} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\beta}{\Delta x} \sigma_{1/2} \sqrt{2\pi} \right)^2 \mathcal{G}_{\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{1/2}}} \end{aligned}$$

En prenant maintenant la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} * \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} &= \left( \frac{\beta}{\Delta x} \sigma_{1/2} \sqrt{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{G}_{\sqrt{2}\sigma_{1/2}} \\ &= \frac{\beta^2 \sigma_{1/2} \sqrt{\pi}}{\Delta x^2} \mathcal{G}_{\sqrt{2}\sigma_{1/2}}. \end{aligned}$$

En égalisant  $\frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}} * \frac{\beta}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_{1/2}}$  et  $\frac{1}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma}$  on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_{1/2} &= \sigma / \sqrt{2}, \\ \beta &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{\Delta x}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Notons que l'expression obtenue pour la longueur  $\sigma_{1/2}$  est bien connue.

## Produit de racines distinctes

Nous cherchons à déterminer l'amplitude et la longueur de localisation associées aux localisation croisées d'un VDL, entre deux groupes de variables localisés par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  distincts. Nous nous plaçons toujours dans le même cadre 1D avec approximation continue, et avec des racines qui sont elles-mêmes des opérateurs de convolution gaussiens. L'opérateur de convolution associé à la localisation croisée est alors donné par  $\frac{\beta_1}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_1/\sqrt{2}} * \frac{\beta_2}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_2/\sqrt{2}}$ , avec

$$\beta_1 = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{\Delta x}{\sigma_1}}$$

$$\text{et } \beta_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{\Delta x}{\sigma_2}}.$$

Comme précédemment, on peut passer par l'espace de Fourier pour calculer ce produit de convolution. Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\beta_1}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_1/\sqrt{2}} * \frac{\beta_2}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_2/\sqrt{2}}\right) &= \frac{\beta_1 \beta_2}{\Delta x^2} \mathcal{F}\left(\mathcal{G}_{\sigma_1/\sqrt{2}}\right) \times \mathcal{F}\left(\mathcal{G}_{\sigma_2/\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma_1 \sigma_2}}\right) \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \mathcal{G}_{\sqrt{2}/\sigma_1}\right) \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \mathcal{G}_{\sqrt{2}/\sigma_2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta x} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \sqrt{2\pi}\right) \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}. \end{aligned}$$

La simplification de la dernière ligne peut se détailler en :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sqrt{2}/\sigma_1}(\nu) \mathcal{G}_{\sqrt{2}/\sigma_2}(\nu) &= \exp\left(-\frac{\nu^2}{2(\sqrt{2}/\sigma_1)^2}\right) \exp\left(-\frac{\nu^2}{2(\sqrt{2}/\sigma_2)^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\nu^2 \sigma_1^2}{4} - \frac{\nu^2 \sigma_2^2}{4}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\nu^2}{2} \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}\right)\right) \\ &= \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}(\nu). \end{aligned}$$

La transformation de Fourier inverse permet d'obtenir le produit recherché :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_1/\sqrt{2}} * \frac{\beta_2}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sigma_2/\sqrt{2}} &= \left(\frac{1}{\Delta x} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \sqrt{2\pi}\right) \sqrt{\frac{2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \frac{1}{\Delta x} \mathcal{G}_{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}} \end{aligned}$$

La longueur de localisation implicite pour les localisations croisées est donc  $\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$ , qui est toujours supérieure à la moyenne arithmétique des longueurs (strictement si  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ). Dans le cas  $\sigma_1 = 150$  km et  $\sigma_2 = 50$  km, on obtient une longueur croisée d'environ 112 km.

La diminution d'amplitude est  $\sqrt{\frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ , qui est aussi le ratio entre la moyenne géométrique  $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$  et la racine de la moyenne des carrés  $\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$ . Si on note le  $\alpha$  le rapport entre

les deux longueurs, de sorte que  $\sigma_1 = \alpha\sigma_2$ , on peut montrer que l'amplitude ne dépend que de ce rapport et vaut  $\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}$ . Dans le cas d'un rapport 3, l'amplitude théorique des localisations croisées est de 0,77, comme illustré en figure D.1.

Dans le cas d'un VDL bidimensionnel, c'est-à-dire lorsque les longueurs de localisation horizontale seulement sont variables, l'application de la localisation est équivalente à deux applications unidimensionnelles successives, selon les longitudes et selon les latitudes. L'amplitude des localisations croisées est alors de  $2\alpha/(1+\alpha^2)$ , c'est-à-dire 0,6 pour un rapport 3. Cette valeur théorique est très proche de la valeur observée de 38 % d'atténuation, mentionnée en conclusion du chapitre 4 (différence relative de 3,3 %). Cette différence peut provenir des différentes hypothèses invoquées dans le raisonnement. Parmi ces hypothèses, la moins vérifiée est probablement celle qui stipule que les racines des opérateurs de localisation sont des profils gaussiens, ce qui n'est pas le cas en pratique avec les filtres récursifs.

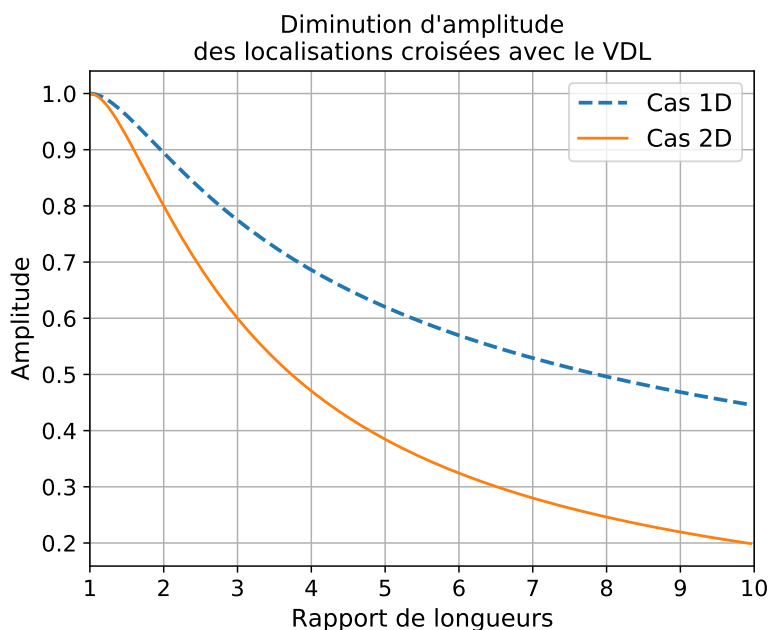


FIGURE D.1 – Diminution d'amplitude des localisations croisées avec le VDL, en fonction du rapport des longueurs de localisation associées. Le VDL vertical correspond au cas 1D, le VDL horizontal au cas 2D.



# Suppléments de scores

---

Nous présentons ici quelques figures supplémentaires que nous n'avons pas inséré au chapitre 4 pour ne pas surcharger le corps du document.

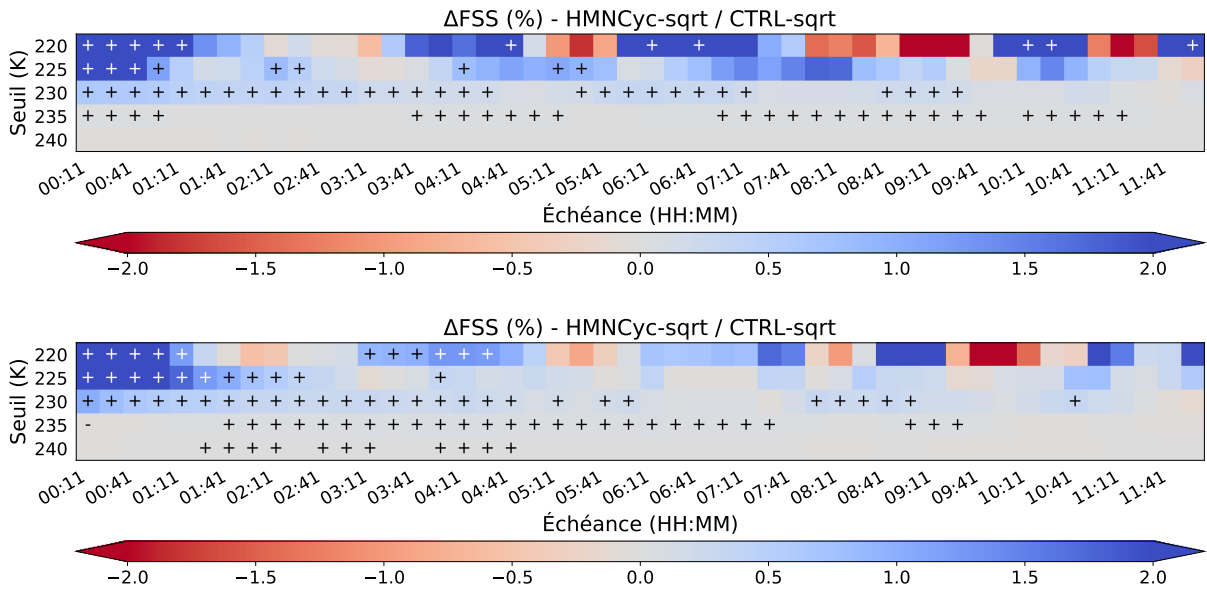


FIGURE E.1 – FSS relatifs de HMNCyc-sqrt par rapport au contrôle associé (CTRL-sqrt), pour le canal 6,2  $\mu\text{m}$  de SEVIRI. Voir légende de la figure 4.6 pour les détails.

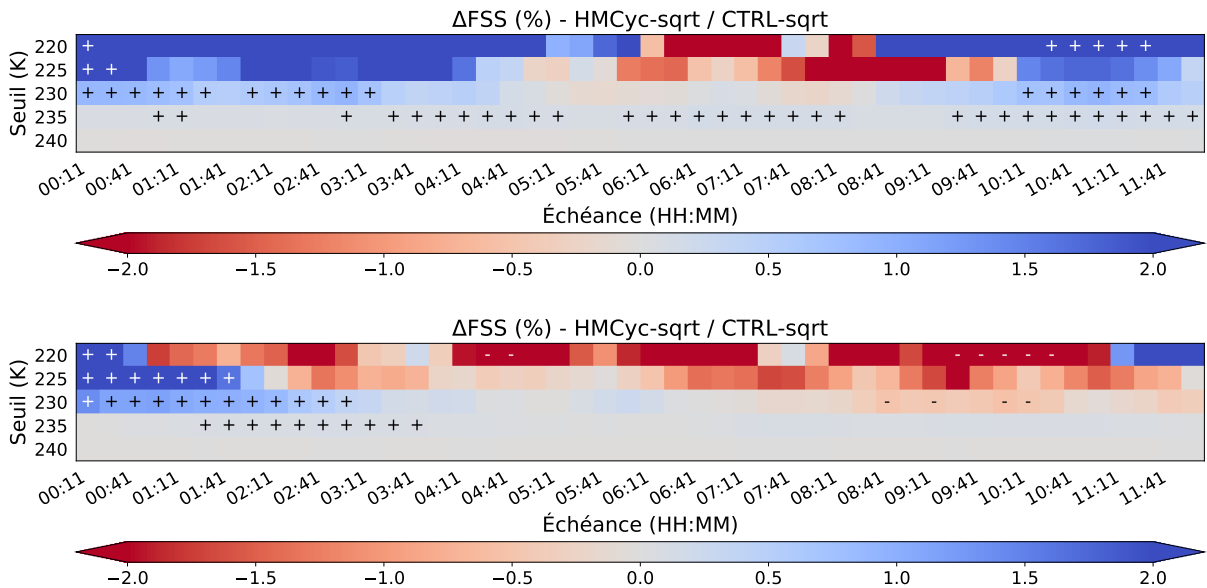


FIGURE E.2 – FSS relatifs de HMCyc-sqrt par rapport au contrôle associé (CTRL-sqrt), pour le canal 6,2  $\mu\text{m}$  de SEVIRI. Voir légende de la figure 4.6 pour les détails.

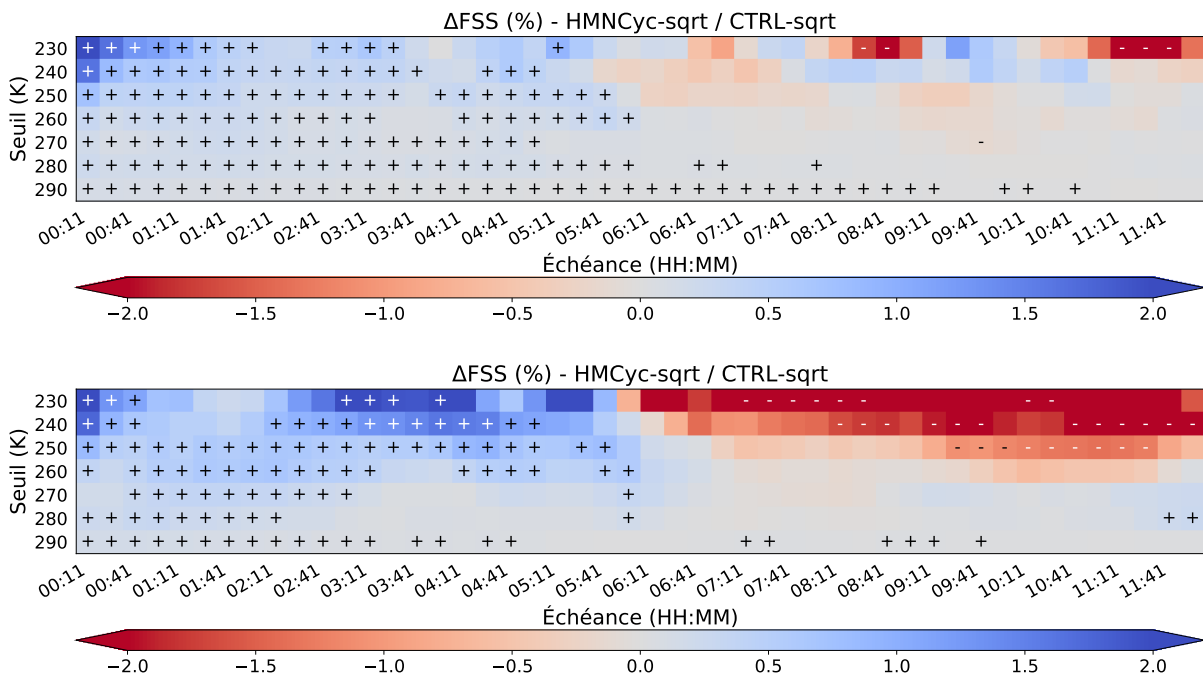


FIGURE E.3 – FSS relatifs des expériences avec hydrométéores (HMNCy-sqrt en haut, HMCyc-sqrt en bas) pour le réseau de 15 h et pour le canal 10,8  $\mu\text{m}$  de SEVIRI. Voir légende de la figure 4.6 pour les détails.

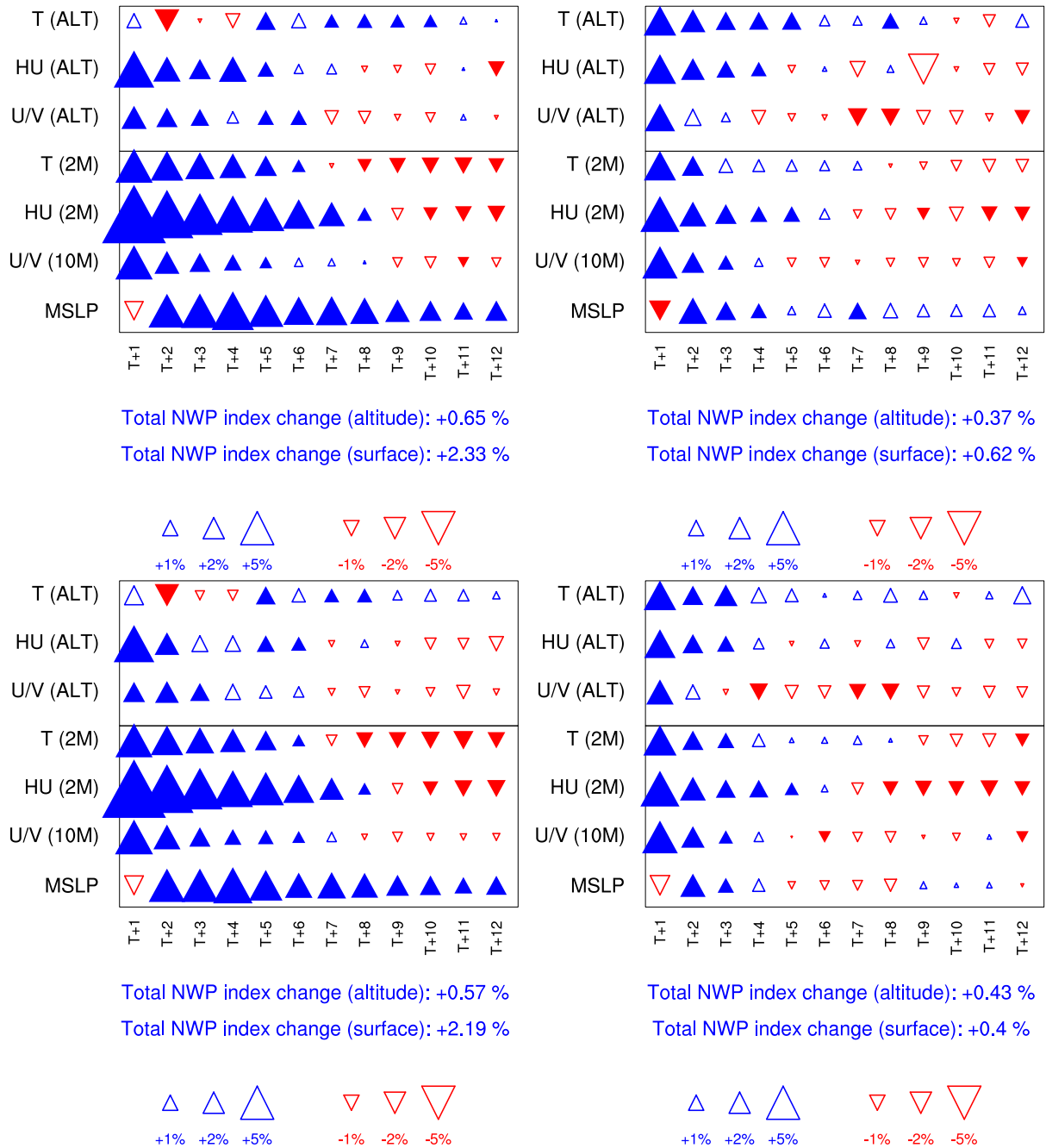


FIGURE E.4 – Cartes de scores en fonction de la variable et de l'échéance, comparaison des expériences SDL et de leurs équivalents SQRT. Configurations non-cyclée en haut (HMNCy-SDL par rapport à HMNCy-sqrt), configurations cyclées en bas (HMCyc-SDL par rapport à HMCyc-sqrt). Réseaux de 0 h à gauche et 12 h à droite.

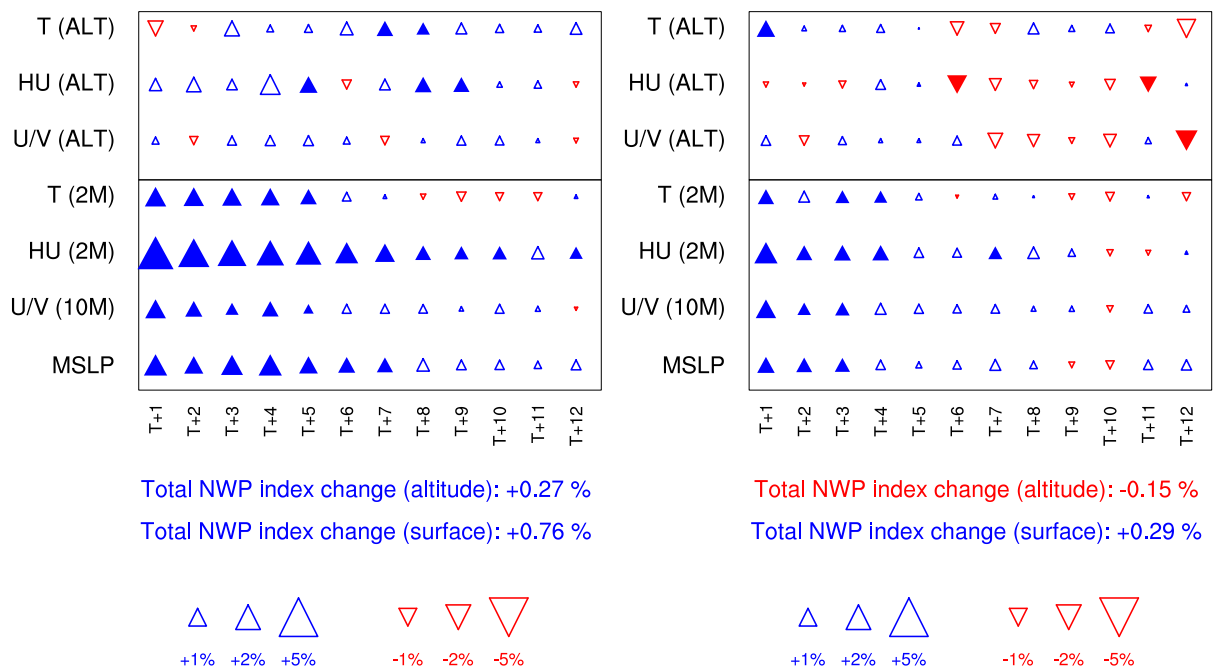


FIGURE E.5 – Cartes de scores en fonction de la variable et de l'échéance, comparaison de l'expérience sans hydrométéores CTRL-full par rapport à CTRL-sqrt. Réseaux de 0 h à gauche et 12 h à droite.

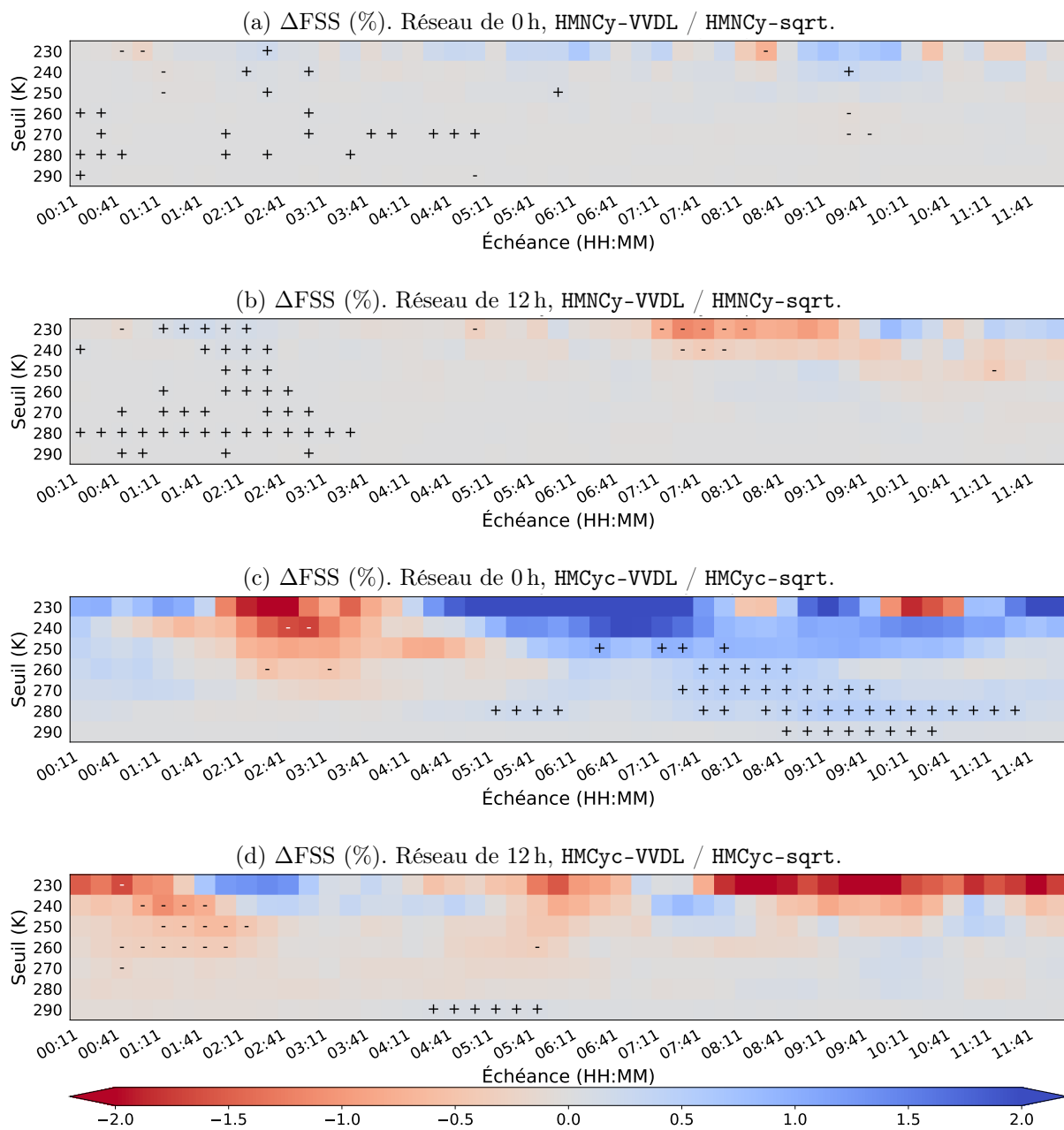


FIGURE E.6 – FSS relatifs pour les expériences de type HM-VVDL par rapport à leurs équivalents HM-sqrt. Canal 10,8  $\mu$ m de SEVIRI.

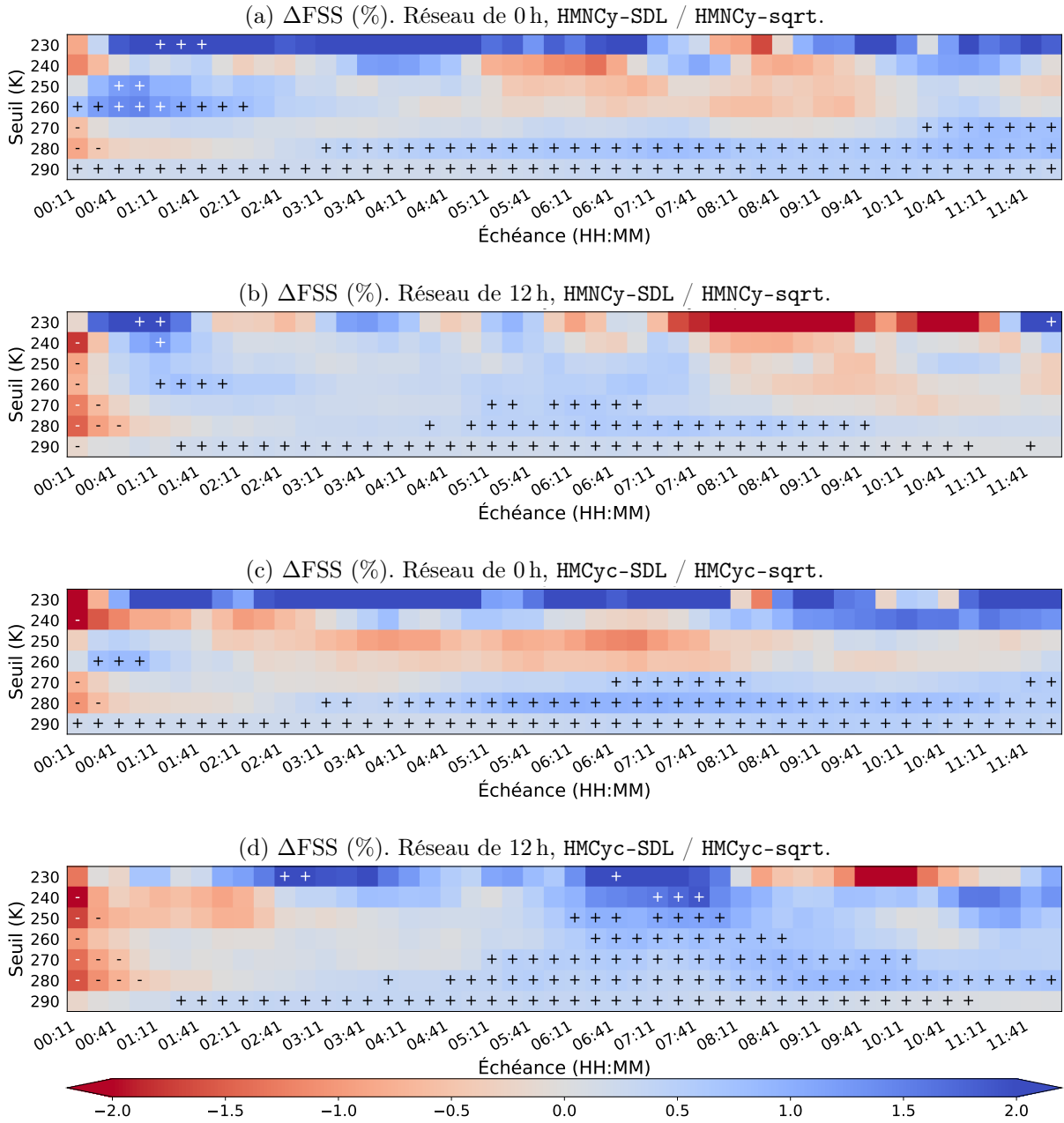


FIGURE E.7 – FSS relatifs pour les expériences de type HM-SDL par rapport à leurs équivalents HM-sqrt. Canal 10,8  $\mu$ m de SEVIRI.

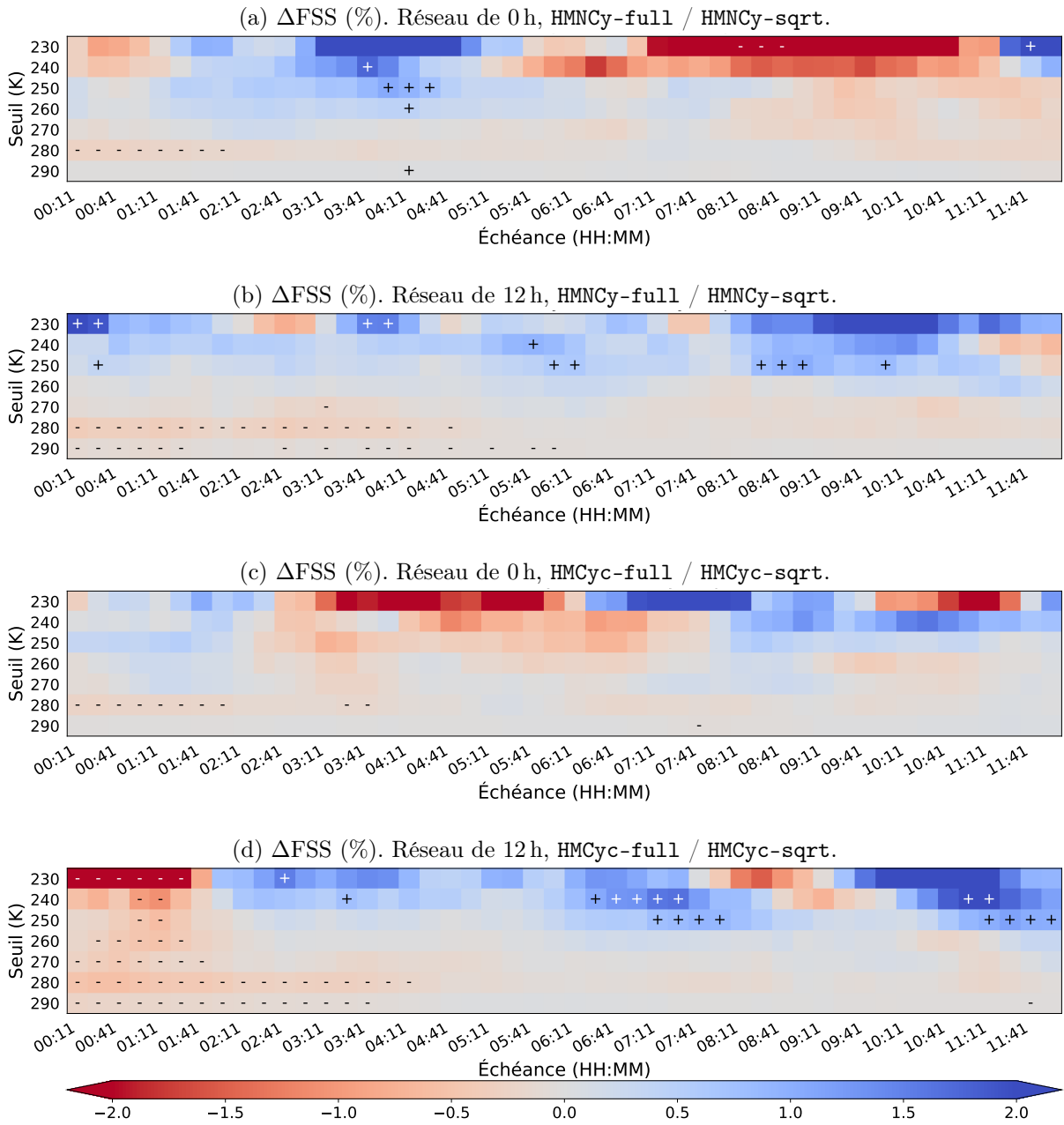


FIGURE E.8 – FSS relatifs pour les expériences de type HM-full par rapport à leurs équivalents HM-sqrt. Canal 10,8  $\mu$ m de SEVIRI.



# Table des sigles et acronymes

<b>3DEnVar</b>	Schéma variationnel ensembliste 3D
<b>3DVar</b>	Schéma variationnel 3D
<b>4DVar</b>	Schéma variationnel 4D
<b>ANTILOPE</b>	ANalyse par spaTiaLisation hOraire des PrECipitations
<b>ARAMIS</b>	Application Radar A la Météorologie Infra-Synoptique
<b>AROME</b>	Application de la Recherche à l'Opérationnel à Méso-Échelle
<b>AROME-PI</b>	AROME Prévision Immédiate
<b>ARPEGE</b>	Action de Recherche Petite Echelle Grande Echelle, modèle global de Météo-France
<b>ATMS</b>	<i>Advanced Technology Microwave Sounder</i>
<b>BLUE</b>	<i>Best Linear Unbiased Estimator</i>
<b>BUMP</b>	<i>B matrix on an Unstructured Mesh Package</i>
<b>CALIOP</b>	<i>Cloud-Aerosol Lidar with Orthogonal Polarisation</i>
<b>CALIPSO</b>	<i>Cloud-Aerosol Lidar and Infrared Pathfinder Satellite Observations</i>
<b>CEPMMT</b>	Centre Européen de Prévision Météorologique à Moyen Terme
<b>COSMO</b>	<i>COnsortium for Small-scale MOdelling model</i>
<b>CrIS</b>	<i>Cross-track Infrared Sounder</i>
<b>DPR</b>	<i>Dual-frequency Precipitation Radar</i>
<b>DWD</b>	<i>Deutscher Wetterdienst</i> , service météorologique allemand
<b>ECCC</b>	Environnement et Changement Climatique Canada
<b>EDA</b>	<i>Ensemble of Data Assimilations</i> ou Ensemble D'Assimilations
<b>FSS</b>	<i>Fraction Skill Score</i>
<b>GMI</b>	<i>GPM Microwave Imager</i>
<b>GPM</b>	<i>Global Precipitation Measurement</i>
<b>HyMeX</b>	<i>Hydrological cycle in the Mediterranean Experiment</i>
<b>IASI</b>	<i>Infrared Atmospheric Sounding Interferometer</i>
<b>IAU</b>	<i>Incremental Analysis Update</i>
<b>ICE3</b>	schéma microphysique avec 3 catégories d'hydrométéores glacés
<b>IFOV</b>	<i>Instantaneous Field Of View</i>

<b>LETKF</b>	<i>Local Ensemble Transform Kalman Filter</i>
<b>LIDAR</b>	<i>LIght Detection And Ranging</i>
<b>LIMA</b>	<i>Liquid Ice Multiple Aerosols</i>
<b>LHN</b>	<i>Latent Heat Nudging</i>
<b>METOP</b>	<i>Meteorological OPERational satellites</i>
<b>MHS</b>	<i>Microwave Humidity Sounding</i>
<b>MLEF</b>	<i>Maximum Likelihood Ensemble Filter</i>
<b>MSG</b>	<i>Meteosat Second Generation</i>
<b>OPERA</b>	<i>Operational Programme for the Exchange of weather Radar Information</i>
<b>OSSE</b>	<i>Observing System Simulation Experiment, expérience d'assimilation où les « observations » proviennent d'une simulation numérique qui sert de « réalité » par rapport à laquelle évaluer les expériences.</i>
<b>PNT</b>	Prévision Numérique du Temps
<b>RADOME</b>	Réseau d'Acquisition de Données et d'Observations Météorologiques Etendu
<b>RTTOV</b>	<i>Radiative Transfer for TOVS</i>
<b>RCE</b>	Réseau Climatologique d'Etat
<b>SDL</b>	<i>Scale-Dependent Localization</i>
<b>SEVIRI</b>	<i>Spinning Enhanced Visible Infra-Red Imager</i>
<b>VDL</b>	<i>Variable-Dependent Localisation</i>
<b>WRF</b>	<i>Weather Research and Forecasting Model, modèle à échelle convective développé par le NCAR, National Center for Atmospheric Research</i>

## Bibliographie

- AKKRAOUI, Amal El, Pierre GAUTHIER, Simon PELLERIN et Samuel BUIS (2008). « Intercomparison of the primal and dual formulations of variational data assimilation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 134.633, p. 1015-1025. DOI : 10.1002/qj.257 (cf. p. 40).
- AKSOY, Altuğ, David C DOWELL et Chris SNYDER (2009). « A multicaser comparative assessment of the ensemble Kalman filter for assimilation of radar observations. Part I : Storm-scale analyses ». In : *Monthly Weather Review* 137.6, p. 1805-1824. DOI : 10.1175/2008mwr2691.1 (cf. p. 57).
- ALBERS, David J., Paul-Adrien BLANCQUART, Matthew E. LEVINE, Elnaz Esmailzadeh SEYLABI et Andrew STUART (2019). « Ensemble Kalman Methods With Constraints ». In : *Inverse Problems*. DOI : 10.1088/1361-6420/ab1c09. arXiv : <http://arxiv.org/abs/1901.05668v1> [math.OA] (cf. p. 86).
- ALBERS, Steven C., John A. MCGINLEY, Daniel L. BIRKENHEUER et John R. SMART (1996). « The Local Analysis and Prediction System (LAPS) : Analyses of Clouds, Precipitation, and Temperature ». In : *Weather and Forecasting* 11.3, p. 273-287. DOI : 10.1175/1520-0434(1996)011<0273:tlaaps>2.0.co;2 (cf. p. 56).
- AMODEI, Marielle, Isabelle SANCHEZ et Joël STEIN (2015). « Verification of the French operational high-resolution model AROME with the regional Brier probability score ». In : *Meteorological Applications* 22.4, p. 731-745. DOI : 10.1002/met.1510 (cf. p. 155, 157).
- ANDERSON, Jeffrey L. (2007). « Exploring the need for localization in ensemble data assimilation using a hierarchical ensemble filter ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 230.1-2, p. 99-111. DOI : 10.1016/j.physd.2006.02.011 (cf. p. 105).
- (2010). « A non-Gaussian ensemble filter update for data assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 138.11, p. 4186-4198. DOI : 10.1175/2010MWR3253.1 (cf. p. 85).
- (2012). « Localization and Sampling Error Correction in Ensemble Kalman Filter Data Assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 140.7, p. 2359-2371. ISSN : 0027-0644. DOI : 10.1175/mwr-d-11-00013.1 (cf. p. 105).
- ANDERSON, Jeffrey L. et Lili LEI (2013). « Empirical localization of observation impact in ensemble Kalman filters ». In : *Monthly Weather Review* 141.11, p. 4140-4153. DOI : 10.1175/MWR-D-12-00330.1 (cf. p. 105).
- AUGER, Ludovic, Olivier DUPONT, Susanna HAGELIN, Pierre BROUSSEAU et Pascal BROVELLI (2014). « AROME-NWC : a new nowcasting tool based on an operational mesoscale forecasting system ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.690, p. 1603-1611. DOI : 10.1002/qj.2463 (cf. p. 146).
- AULIGNÉ, Thomas, Andrew C. LORENC, Yann MICHEL, Thibaut MONTMERLE, A JONES, M HU et Jimmy DUDHIA (2011). « Toward a new cloud analysis and prediction system ». In : *Bulletin of the American Meteorological Society* 92.2, p. 207-210. DOI : 10.1175/2010bams2978.1 (cf. p. 50).
- BANNISTER, Ross Noël (2008a). « A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. I : Characteristics and measurements of forecast error covariances ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 134.637, p. 1951-1970. DOI : 10.1002/qj.339 (cf. p. 31).
- (2008b). « A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. II : Modelling the forecast error covariance statistics ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 134.637, p. 1971-1996. DOI : 10.1002/qj.340 (cf. p. 31).
- (2015). « How is the Balance of a Forecast Ensemble Affected by Adaptive and Nonadaptive Localization Schemes ? » In : *Monthly Weather Review* 143.9, p. 3680-3699. DOI : 10.1175/mwr-d-14-00379.1 (cf. p. 83).
- (2017). « A review of operational methods of variational and ensemble-variational data assimilation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 143.703, p. 607-633. DOI : 10.1002/qj.2982 (cf. p. 39, 65).
- BANNISTER, Ross Noël, Hristo CHIPILSKI et Oscar MARTINEZ-ALVARADO (2019). « Techniques and challenges in the assimilation of atmospheric water observations for numerical weather prediction towards convective scales ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. DOI : 10.1002/qj.3652 (cf. p. 23, 27, 46, 48, 50, 52-54, 57, 183).
- BAUER, Peter, Philippe LOPEZ, Angela BENEDETTI, Deborah SALMOND et Emmanuel MOREAU (2006). « Implementation of 1D + 4D-Var assimilation of precipitation-affected microwave radiances at ECMWF. I : 1D-Var ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 132.620, p. 2277-2306. DOI : 10.1256/qj.05.189 (cf. p. 55).
- BAUER, Peter, Alan J. GEER, Philippe LOPEZ et Deborah SALMOND (2010). « Direct 4D-Var assimilation of all-sky radiances. Part I : Implementation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 136.652, p. 1868-1885. DOI : 10.1002/qj.659 (cf. p. 58).
- BAUER, Peter, Alan THORPE et Gilbert BRUNET (2015). « The quiet revolution of numerical weather prediction ». In : *Nature* 525.7567, p. 47-55. DOI : 10.1038/nature14956 (cf. p. 7).
- BENJAMIN, Stanley G., Stephen S. WEYGANDT, John M. BROWN, Ming HU, Curtis R. ALEXANDER, Tatiana G. SMIRNOVA, Joseph B. OLSON, Eric P. JAMES, David C. DOWELL, Georg A. GRELL, Haidao LIN, Steven E. PECKHAM, Tracy Lorraine SMITH, William R. MONINGER, Jaymes S. KENYON et Geoffrey S. MANIKIN (2016). « A North American Hourly Assimilation and Model Forecast Cycle : The Rapid Refresh ». In : *Monthly Weather Review* 144.4, p. 1669-1694. DOI : 10.1175/mwr-d-15-0242.1 (cf. p. 56).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- BERRE, Loïc (2000). « Estimation of Synoptic and Mesoscale Forecast Error Covariances in a Limited-Area Model ». In : *Monthly Weather Review* 128.3, p. 644-667. DOI : 10.1175/1520-0493(2000)128<0644:eosamf>2.0.co;2 (cf. p. 45).
- BERRE, Loïc et G eralD DESROZIERs (2010). « Filtering of Background Error Variances and Correlations by Local Spatial Averaging : A Review ». In : *Monthly Weather Review* 138.10, p. 3693-3720. DOI : 10.1175/2010mwr3111.1 (cf. p. 66).
- BERRE, Loïc, Hubert VARELLA et G eralD DESROZIERs (2015). « Modelling of flow-dependent ensemble-based background-error correlations using a wavelet formulation in 4D-Var at M t eo-France ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.692, p. 2803-2812. DOI : 10.1002/qj.2565 (cf. p. 66, 67).
- BISHOP, Craig H. (2016). « The GIGG-EnKF : ensemble Kalman filtering for highly skewed non-negative uncertainty distributions ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.696, p. 1395-1412. DOI : 10.1002/qj.2742 (cf. p. 86).
- BISHOP, Craig H. et Daniel HODYSS (2007). « Flow-adaptive moderation of spurious ensemble correlations and its use in ensemble-based data assimilation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society : A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography* 133.629, p. 2029-2044. DOI : 10.1002/qj.169 (cf. p. 105).
- (2009a). « Ensemble covariances adaptively localized with ECO-RAP. Part 1 : Tests on simple error models ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 61.1, p. 84-96. DOI : 10.1111/j.1600-0870.2007.00371.x (cf. p. 105).
- (2009b). « Ensemble covariances adaptively localized with ECO-RAP. Part 2 : a strategy for the atmosphere ». In : *Tellus A* 61.1, p. 97-111. DOI : 10.1111/j.1600-0870.2008.00372.x (cf. p. 81, 105, 187).
- (2011). « Adaptive Ensemble Covariance Localization in Ensemble 4D-VAR State Estimation ». In : *Monthly Weather Review* 139.4, p. 1241-1255. DOI : 10.1175/2010mwr3403.1 (cf. p. 81, 105).
- BISHOP, Craig H., Daniel HODYSS, Peter STEINLE, Holly SIMS, Adam M. CLAYTON, Andrew C. LORENC, Dale M. BARKER et Mark BUEHNER (2011). « Efficient Ensemble Covariance Localization in Variational Data Assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 139.2, p. 573-580. DOI : 10.1175/2010mwr3405.1 (cf. p. 79).
- BISHOP, Craig H., Jeffrey S WHITAKER et Lili LEI (2017). « Gain Form of the Ensemble Transform Kalman Filter and Its Relevance to Satellite Data Assimilation with Model Space Ensemble Covariance Localization ». In : *Monthly Weather Review* 145.11, p. 4575-4592. DOI : 10.1175/mwr-d-17-0102.1 (cf. p. 76, 81).
- BLOOM, S. C., L. L. TAKACS, A. M. da SILVA et D. LEDVINA (1996). « Data Assimilation Using Incremental Analysis Updates ». In : *Monthly Weather Review* 124.6, p. 1256-1271. DOI : 10.1175/1520-0493(1996)124<1256:dauiau>2.0.co;2 (cf. p. 52).
- BOCQUET, Marc (2016). « Localization and the iterative ensemble Kalman smoother ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.695, p. 1075-1089. DOI : 10.1002/qj.2711 (cf. p. 84).
- BOCQUET, Marc et Alberto CARRASSI (2017). « Four-dimensional ensemble variational data assimilation and the unstable subspace ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 69.1, p. 1304504. DOI : 10.1080/16000870.2017.1304504 (cf. p. 75).
- BOCQUET, Marc, Carlos A PIRES et Lin WU (2010). « Beyond Gaussian statistical modeling in geophysical data assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 138.8, p. 2997-3023. DOI : 10.1175/2010mwr3164.1 (cf. p. 85, 183).
- BONAVITA, Massimo, Lars ISAKSEN et Eli s H OLM (2012). « On the use of EDA background error variances in the ECMWF 4D-Var ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 138.667, p. 1540-1559. DOI : 10.1002/qj.1899 (cf. p. 66).
- BONAVITA, Massimo, Eli s H OLM, Lars ISAKSEN et Mike FISHER (2015). « The evolution of the ECMWF hybrid data assimilation system ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.694, p. 287-303. DOI : 10.1002/qj.2652 (cf. p. 66).
- BORMANN, Niels, Massimo BONAVITA, Rossana DRAGANI, Reima ERESMAA, Marco MATRICARDI et Anthony McNALLY (2016). « Enhancing the impact of IASI observations through an updated observation-error covariance matrix ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.697, p. 1767-1780. DOI : 10.1002/qj.2774 (cf. p. 33).
- BOUTTIER, Fran ois, Beno t VI E, Olivier NUISsIER et Laure RAYNAUD (2012). « Impact of stochastic physics in a convection-permitting ensemble ». In : *Monthly Weather Review* 140.11, p. 3706-3721. DOI : 10.1175/mwr-d-12-00031.1 (cf. p. 67).
- BRANKART, Jean-Michel, Cl ment UBELMANN, Charles-Emmanuel TESTUT, Emmanuel COSME, Pierre BRASSEUR et Jacques VERRON (2009). « Efficient Parameterization of the Observation Error Covariance Matrix for Square Root or Ensemble Kalman Filters : Application to Ocean Altimetry ». In : *Monthly Weather Review* 137.6, p. 1908-1927. DOI : 10.1175/2008mwr2693.1 (cf. p. 33).
- BROUSSEAU, Pierre, Lo c BERRE, Fran ois BOUTTIER et G eralD DESROZIERs (2011). « Background-error covariances for a convective-scale data-assimilation system : AROME-France 3D-Var ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 137.655, p. 409-422. DOI : 10.1002/qj.750 (cf. p. 45).
- (2012). « Flow-dependent background-error covariances for a convective-scale data assimilation system ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 138.663, p. 310-322. DOI : 10.1002/qj.920 (cf. p. 46, 66).
- BROUSSEAU, Pierre, Yann SEITY, Didier RICARD et Julien L GER (2016). « Improvement of the forecast of convective activity from the AROME-France system ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.699, p. 2231-2243. DOI : 10.1002/qj.2822 (cf. p. 9, 15, 44, 50, 51).
- BUBNOV A, Radmila, Gwena lle HELLO, Pierre B NARD et Jean-Fran ois GELEYN (1995). « Integration of the fully elastic equations cast in the hydrostatic pressure terrain-following coordinate in the framework of the ARPEGE/Aladin

- NWP system ». In : *Monthly Weather Review* 123.2, p. 515-535. DOI : 10.1175/1520-0493(1995)123<0515:IOTFEE>2.0.CO;2 (cf. p. 15).
- BUEHNER, Mark (2005). « Ensemble-derived stationary and flow-dependent background-error covariances : Evaluation in a quasi-operational NWP setting ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131.607, p. 1013-1043. DOI : 10.1256/qj.04.15 (cf. p. 10, 43, 66, 76, 188, 190).
- (2012). « Evaluation of a Spatial/Spectral Covariance Localization Approach for Atmospheric Data Assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 140.2, p. 617-636. DOI : 10.1175/mwr-d-10-05052.1 (cf. p. 81, 82, 152).
- BUEHNER, Mark et Anna SHLYAEVA (2015). « Scale-dependent background-error covariance localisation ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 67.1, p. 28027. DOI : 10.3402/tellusa.v67.28027 (cf. p. 81, 104, 181, 182).
- BURGERS, Gerrit, Peter Jan van LEEUWEN et Geir EVENSEN (1998). « Analysis Scheme in the Ensemble Kalman Filter ». In : *Monthly Weather Review* 126.6, p. 1719-1724. DOI : 10.1175/1520-0493(1998)126<1719:asitek>2.0.co;2 (cf. p. 42).
- BÉNARD, Pierre, J. VIVODA, J. MAŠEK, P. SMOLÍKOVÁ, Karim YESSAD, Ch. SMITH, R. BROŽKOVÁ et Jean-François GELEYN (2010). « Dynamical kernel of the Aladin-NH spectral limited-area model : Revised formulation and sensitivity experiments ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 136.646, p. 155-169. DOI : 10.1002/qj.522 (cf. p. 16).
- CAMPBELL, William F., Craig H. BISHOP et Daniel HODYSS (2010). « Vertical Covariance Localization for Satellite Radiances in Ensemble Kalman Filters ». In : *Monthly Weather Review* 138.1, p. 282-290. DOI : 10.1175/2009mwr3017.1 (cf. p. 81).
- CARON, Jean-François et Mark BUEHNER (2018). « Scale-Dependent Background-Error Covariance Localization : Evaluation in a Global Deterministic Weather Forecasting System ». In : *Monthly Weather Review* 146.5, p. 1367-1381. DOI : 10.1175/mwr-d-17-0369.1 (cf. p. 82, 83).
- CARON, Jean-François, Yann MICHEL, Thibaut MONTMERLE et Étienne ARBOGAST (2018). « Improving Background-Error Covariances in a 3D Ensemble-Variational Data Assimilation System for Regional NWP. » In : *Monthly Weather Review*. DOI : 10.1175/mwr-d-18-0248.1 (cf. p. 81-83, 152, 159, 170, 182).
- CARRASSI, Alberto, Marc BOCQUET, Laurent BERTINO et Geir EVENSEN (2018). « Data assimilation in the geosciences : An overview of methods, issues, and perspectives ». In : *Wiley Interdisciplinary Reviews : Climate Change* 9.5, e535. DOI : 10.1002/wcc.535 (cf. p. 30, 85).
- CAUMONT, Olivier, Véronique DUCROCQ, Guy DELRIEU, Marielle GOSSET, Jean-Pierre PINTY, Jacques Parent du CHÂTELET, Hervé ANDRIEU, Yvon LEMAÎTRE et Georges SCIALOM (2006). « A Radar Simulator for High-Resolution Nonhydrostatic Models ». In : *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 23.8, p. 1049-1067. DOI : 10.1175/jtech1905.1 (cf. p. 53).
- CAUMONT, Olivier, Véronique DUCROCQ, Éric WATTRELOT, Geneviève JAUBERT et Stéphanie PRADIER-VABRE (2010). « 1D + 3DVar assimilation of radar reflectivity data : a proof of concept ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 62.2, p. 173-187. DOI : 10.1111/j.1600-0870.2009.00430.x (cf. p. 55, 88).
- CHABOT, Vincent, Maëlle NODÉT et Arthur VIDARD (2020). « Multiscale Representation of Observation Error Statistics in Data Assimilation ». In : *Sensors* 20.5, p. 1460. DOI : 10.3390/s20051460 (cf. p. 33).
- CHAMPEAUX, Jean-Louis, Pascale DUPUY, Olivier LAURANTIN, Isabelle SOULAN, Pierre TABARY et Jean-Michel SOUBEYROUX (2009). « Les mesures de précipitations et l'estimation des lames d'eau à Météo-France : état de l'art et perspectives ». In : *La Houille Blanche* 5, p. 28-34. DOI : 10.1051/lhb/2009052 (cf. p. 25, 157).
- CHARNEY, Jule G., R. FJØRTOFT et John Von NEUMANN (1950). « Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation ». In : *Tellus* 2.4, p. 237-254. DOI : 10.3402/tellusa.v2i4.8607 (cf. p. 7).
- CLARK, Peter, Nigel ROBERTS, Humphrey LEAN, Susan P. BALLARD et Cristina CHARLTON-PEREZ (2016). « Convection-permitting models : a step-change in rainfall forecasting ». In : *Meteorological Applications* 23.2, p. 165-181. DOI : 10.1002/met.1538 (cf. p. 8).
- COHN, Stephen E. (1997). « An Introduction to Estimation Theory ». In : *Journal of the Meteorological Society of Japan* 75.1B, p. 257-288. DOI : 10.2151/jmsj1965.75.1b\_257 (cf. p. 86).
- COHN, Stephen E., Arlindo da SILVA, Jing GUO, Meta SIENKIEWICZ et David LAMICH (1998). « Assessing the Effects of Data Selection with the DAO Physical-Space Statistical Analysis System ». In : *Monthly Weather Review* 126.11, p. 2913-2926. DOI : 10.1175/1520-0493(1998)126<2913:ateods>2.0.co;2 (cf. p. 83).
- COSME, Emmanuel, Jacques VERRON, Pierre BRASSEUR, Jacques BLUM et Didier AUROUX (2012). « Smoothing Problems in a Bayesian Framework and Their Linear Gaussian Solutions ». In : *Monthly Weather Review* 140.2, p. 683-695. DOI : 10.1175/mwr-d-10-05025.1 (cf. p. 43).
- COURTIER, Philippe, Jean-Noël THÉPAUT et A. HOLLINGSWORTH (1994). « A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 120.519, p. 1367-1387. DOI : 10.1002/qj.49712051912 (cf. p. 37).
- DAVIES, H. C. (1976). « A lateral boundary formulation for multi-level prediction models ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 102.432, p. 405-418. DOI : 10.1002/qj.49710243210 (cf. p. 14).
- DAVOLIO, S. et A. BUZZI (2004). « A Nudging Scheme for the Assimilation of Precipitation Data into a Mesoscale Model ». In : *Weather and Forecasting* 19.5, p. 855-871. DOI : 10.1175/1520-0434(2004)019<0855:ansfta>2.0.co;2 (cf. p. 56).
- DERBER, John et Anthony ROSATI (1989). « A Global Oceanic Data Assimilation System ». In : *Journal of Physical Oceanography* 19.9, p. 1333-1347. DOI : 10.1175/1520-0485(1989)019<1333:agodas>2.0.co;2 (cf. p. 39).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- DERBER, John C. (1989). « A Variational Continuous Assimilation Technique ». In : *Monthly Weather Review* 117.11, p. 2437-2446. DOI : 10.1175/1520-0493(1989)117<2437:avcat>2.0.co;2 (cf. p. 37).
- DESROZIERS, Gérald, Loïc BERRE, Bernard CHAPNIK et Paul POLI (2005). « Diagnosis of observation, background and analysis-error statistics in observation space ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131.613, p. 3385-3396. DOI : 10.1256/qj.05.108 (cf. p. 33).
- DESROZIERS, Gérald, Jean-Thomas CAMINO et Loïc BERRE (2014). « 4DEnVar : link with 4D state formulation of variational assimilation and different possible implementations ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 140.684, p. 2097-2110. DOI : 10.1002/qj.2325 (cf. p. 65).
- DESROZIERS, Gérald, Etienne ARBOGAST et Loïc BERRE (2016). « Improving spatial localization in 4DEnVar ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.701, p. 3171-3185. DOI : 10.1002/qj.2898 (cf. p. 84).
- DESTOUCHES, Mayeul, Thibaut MONTMERLE, Yann MICHEL et Benjamin MÉNÉTRIER (2020). « Estimating optimal localization for sampled background error covariances of hydrometeor variables ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, p. 1-20. DOI : 10.1002/qj.3906 (cf. p. 10, 103, 180, 181).
- DIXON, Mark, Zhihong LI, Humphrey LEAN, Nigel ROBERTS et Sue BALLARD (2009). « Impact of Data Assimilation on Forecasting Convection over the United Kingdom Using a High-Resolution Version of the Met Office Unified Model ». In : *Monthly Weather Review* 137.5, p. 1562-1584. DOI : 10.1175/2008mwr2561.1 (cf. p. 50, 56, 155).
- DIXON, W. J. et A. M. MOOD (1946). « The Statistical Sign Test ». In : *Journal of the American Statistical Association* 41.236, p. 557-566. DOI : 10.1080/01621459.1946.10501898 (cf. p. 159).
- DOVIAK, Richard J. et Dušan S. ZRNIC (1993). *Doppler Radar and Weather Observations*. Sous la dir. d'Inc. ACADEMIC PRESS. Second edition. 1250 Sixth Avenue, San Diego, California 92101-4311 : Elsevier. ISBN : 978-0-12-221422-6. DOI : 10.1016/c2009-0-22358-0 (cf. p. 23).
- DOWELL, David C., Fuqing ZHANG, Louis J. WICKER, Chris SNYDER et N. Andrew CROOK (2004). « Wind and Temperature Retrievals in the 17 May 1981 Arcadia, Oklahoma, Supercell : Ensemble Kalman Filter Experiments ». In : *Monthly Weather Review* 132.8, p. 1982-2005. DOI : 10.1175/1520-0493(2004)132<1982:watrit>2.0.co;2 (cf. p. 57, 179).
- DOWELL, David C, Louis J WICKER et Chris SNYDER (2011). « Ensemble Kalman filter assimilation of radar observations of the 8 May 2003 Oklahoma City supercell : Influences of reflectivity observations on storm-scale analyses ». In : *Monthly Weather Review* 139.1, p. 272-294. DOI : 10.1175/2010mwr3438.1 (cf. p. 57).
- DUC, Le et Kazuo SAITO (2017). « On Cost Functions in the Hybrid Variational-Ensemble Method ». In : *Monthly Weather Review* 145.6, p. 2071-2082. DOI : 10.1175/mwr-d-16-0325.1 (cf. p. 39).
- DUCROCQ, Véronique, Didier RICARD, Jean-Philippe LAFORE et Françoise ORAIN (2002). « Storm-Scale Numerical Rainfall Prediction for Five Precipitating Events over France : On the Importance of the Initial Humidity Field ». In : *Weather and Forecasting* 17.6, p. 1236-1256. DOI : 10.1175/1520-0434(2002)017<1236:ssnrpf>2.0.co;2 (cf. p. 8).
- DUCROCQ, Véronique, Sophie BELAMARI, Brice BOUDEVILLAIN, Olivier BOUSQUET, Philippe COCQUEREZ, Alexis DOERENBECHER, Philippe DROBINSKI, Cyrille FLAMANT, Laurent LABATUT, Dominique LAMBERT, Mathieu NURET, Évelyne RICHARD, Odile ROUSSOT, Pierre TESTOR, Philippe ARBOGAST, Pierre-Alain AYRAL, Joël Van BAELEN, Claude BASDEVANT, Jean-Luc BOICHARD, Denis BOURRAS, Christophe BOUVIER, Marie-Noëlle BOUIN, Olivier BOCK, Isabelle BRAUD, Cédric CHAMPOLLION, Laurent COPPOLA, Sylvain COQUILLAT, Éric DEFER, Julien DELANOË, Guy DELRIEU, Jean-François DIDON-LESCOT, Pierre DURAND, Claude ESTOURNEL, Nadia FOURRIÉ, Olivier GARROUSTE, Hervé GIORDANI, Jérôme Le COZ, Yann MICHEL, Olivier NUISIER, Grégory ROBERTS, Frédérique SAID, Alfons SCHWARZENBOECK, Karine SELLEGRI, Isabelle TAUPIER-LIETAGE et Jean-Pierre VANDERVAERE (2013). « HyMeX, les campagnes de mesures : focus sur les événements extrêmes en Méditerranée ». In : *La Météorologie* 8.80, p. 37. DOI : 10.4267/2042/48793 (cf. p. 7).
- DUDA, Jeffrey D., Xuguang WANG, Yongming WANG et Jacob R. CARLEY (2019). « Comparing the Assimilation of Radar Reflectivity Using the Direct GSI based Ensemble-Variational (EnVar) and Indirect Cloud Analysis Methods in Convection-Allowing Forecasts over the Continental US ». In : *Monthly Weather Review*. DOI : 10.1175/mwr-d-18-0171.1 (cf. p. 155).
- DUDHIA, Jimmy (2014). « A history of mesoscale model development ». In : *Asia-Pacific Journal of Atmospheric Sciences* 50.1, p. 121-131. DOI : 10.1007/s13143-014-0031-8 (cf. p. 8).
- DURUISSEAU, Fabrice, Philippe CHAMBON, Eric WATTRELOT, Marylis BARREYAT et Jean-François MAHFOUF (2019). « Assimilating cloudy and rainy microwave observations from SAPHIR on board Megha Tropiques within the ARPEGE global model ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 145.719, p. 620-641. DOI : 10.1002/qj.3456 (cf. p. 55).
- EBERT, Elizabeth E. (2008). « Fuzzy verification of high-resolution gridded forecasts : a review and proposed framework ». In : *Meteorological Applications* 15.1, p. 51-64. DOI : 10.1002/met.25 (cf. p. 153).
- ERRICO, Ronald M, Peter BAUER et Jean-François MAHFOUF (2007). « Issues regarding the assimilation of cloud and precipitation data ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 64.11, p. 3785-3798. DOI : 10.1175/2006jas2044.1 (cf. p. 48, 49, 52, 53).
- EVENSEN, Geir (1994). « Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics ». In : *Journal of Geophysical Research* 99.C5, p. 10143. DOI : 10.1029/94jc00572 (cf. p. 10, 42).

- EVENSEN, Geir (2003). « The Ensemble Kalman Filter : theoretical formulation and practical implementation ». In : *Ocean Dynamics* 53.4, p. 343-367. DOI : 10.1007/s10236-003-0036-9 (cf. p. 10, 42).
- EYRE, John R., S. J. ENGLISH et M. FORSYTHE (2019). « Assimilation of satellite data in numerical weather prediction. Part I : The early years ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 146.726, p. 49-68. DOI : 10.1002/qj.3654 (cf. p. 54).
- FARCHI, Alban et Marc BOCQUET (2019). « On the Efficiency of Covariance Localisation of the Ensemble Kalman Filter Using Augmented Ensembles ». In : *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* 5. DOI : 10.3389/fams.2019.00003 (cf. p. 81).
- FAROUK, Imane (2018). « Quelles approches pour l'amélioration de l'assimilation des radiances nuageuses IASI en prévision numérique du temps ? » Thèse de doct. Université de Toulouse (cf. p. 55).
- FERRO, Christopher A. T. et David B. STEPHENSON (2011). « Extremal Dependence Indices : Improved Verification Measures for Deterministic Forecasts of Rare Binary Events ». In : *Weather and Forecasting* 26.5, p. 699-713. DOI : 10.1175/waf-d-10-05030.1 (cf. p. 155).
- FERTIG, Elana J., Brian R. HUNT, Edward OTT et Istvan SZUNYOGH (2007). « Assimilating non-local observations with a local ensemble Kalman filter ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 59.5, p. 719-730. DOI : 10.1111/j.1600-0870.2007.00260.x (cf. p. 81).
- FISCHER, Claude, Thibaut MONTMERLE, Loïk BERRE, Ludovic AUGER et Simona Ecaterina ȘTEFĂNESCU (2005). « An overview of the variational assimilation in the ALADIN/France numerical weather-prediction system ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131.613, p. 3477-3492. DOI : 10.1256/qj.05.115 (cf. p. 9).
- FISHER, Mike et Erik ANDERSSON (2001). « Developments in 4D-Var and Kalman Filtering ». In : *ECMWF Technical Memoranda* 347, p. 36. DOI : 10.21957/5GH0FNP6C (cf. p. 44).
- FISHER, Mike, M. LEUTBECHER et G. A. KELLY (2005). « On the equivalence between Kalman smoothing and weak-constraint four-dimensional variational data assimilation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131.613, p. 3235-3246. DOI : 10.1256/qj.04.142 (cf. p. 43).
- FISHER, Mike, Yannick TRÉMOLET, H. AUVINEN, D. TAN et P. POLI (2011). « Weak-constraint and long window 4DVAR ». In : *ECMWF Technical Memoranda* 655. DOI : 10.21957/9II4D4DSQ (cf. p. 37).
- FLETCHER, S. J. (2010). « Mixed Gaussian-lognormal four-dimensional data assimilation ». In : *Tellus A* 62.3, p. 266-287. DOI : 10.1111/j.1600-0870.2010.00439.x (cf. p. 86).
- FLETCHER, Steven J. (2007). « Implications and impacts of transforming lognormal variables into normal variables in VAR ». In : *Meteorologische Zeitschrift* 16.6, p. 755-765 (cf. p. 86, 183).
- FLETCHER, Steven J. et Andrew S. JONES (2014). « Multiplicative and Additive Incremental Variational Data Assimilation for Mixed Lognormal-Gaussian Errors ». In : *Monthly Weather Review* 142.7, p. 2521-2544. DOI : 10.1175/mwr-d-13-00136.1 (cf. p. 86).
- FLETCHER, Steven J. et Milija ZUPANSKI (2006). « A hybrid multivariate Normal and lognormal distribution for data assimilation ». In : *Atmospheric Science Letters* 7.2, p. 43-46. DOI : 10.1002/as1.128 (cf. p. 86).
- FLOWERDEW, Jonathan (2015). « Towards a theory of optimal localisation ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 67.1, p. 25257. DOI : 10.3402/tellusa.v67.25257 (cf. p. 105).
- FOWLER, A, Ross Noël BANNISTER et J EYRE (2010). « Characterising the background errors for the boundary-layer capping inversion ». In : *Australian Meteorological and Oceanographic Journal* 59.1SP, p. 17-24. DOI : 10.22499/2.5901.004 (cf. p. 52).
- GAO, Jidong et David J. STENSRUD (2012). « Assimilation of Reflectivity Data in a Convective-Scale, Cycled 3DVAR Framework with Hydrometeor Classification ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 69.3, p. 1054-1065. DOI : 10.1175/jas-d-11-0162.1 (cf. p. 59).
- GASPARI, Gregory et Stephen E COHN (1999). « Construction of correlation functions in two and three dimensions ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 125.554, p. 723-757. DOI : 10.1002/qj.49712555417 (cf. p. 72, 73, 152).
- GAUTHIER, Pierre et Jean-Noël THÉPAUT (2001). « Impact of the Digital Filter as a Weak Constraint in the Preoperational 4DVAR Assimilation System of Météo-France ». In : *Monthly Weather Review* 129.8, p. 2089-2102. DOI : 10.1175/1520-0493(2001)129<2089:iotdfa>2.0.co;2 (cf. p. 9, 52).
- GEER, Alan J., Peter BAUER et Philippe LOPEZ (2008). « Lessons learnt from the operational 1D + 4D-Var assimilation of rain- and cloud-affected SSM/I observations at ECMWF ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 134.635, p. 1513-1525. DOI : 10.1002/qj.304 (cf. p. 54).
- GEER, Alan J., Baordo FABRIZIO, Niels BORMANN et Stephen ENGLISH (2014). *All-sky assimilation of microwave humidity sounders*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (cf. p. 58).
- GEER, Alan J., Katrin LONITZ, Peter WESTON, Masahiro KAZUMORI, Kozo OKAMOTO, Yanqiu ZHU, Emily Huichun LIU, Andrew COLLARD, William BELL, Stefano MIGLIORINI, Philippe CHAMBON, Nadia FOURRIÉ, Min-Jeong KIM, Christina KÖPKEN-WATTS et Christoph SCHRAFF (2018). « All-sky satellite data assimilation at operational weather forecasting centres ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.713, p. 1191-1217. DOI : 10.1002/qj.3202 (cf. p. 46, 48, 57, 179).
- GILLELAND, Eric (2010). *Confidence Intervals for Forecast Verification*. Rapp. tech. 479. [Online ; accessed 17. Dec. 2018]. NCAR. DOI : 10.5065/D6WD3XJM (cf. p. 153).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- GILLELAND, Eric, David AHIJEVYCH, Barbara G. BROWN, Barbara CASATI et Elizabeth E. EBERT (2009). « Intercomparison of Spatial Forecast Verification Methods ». In : *Weather and Forecasting* 24.5, p. 1416-1430. DOI : 10.1175/2009waf2222269.1 (cf. p. 153).
- GILLELAND, Eric, Amanda S. HERING, Tressa L. FOWLER et Barbara G. BROWN (2018). « Testing the Tests : What Are the Impacts of Incorrect Assumptions When Applying Confidence Intervals or Hypothesis Tests to Compare Competing Forecasts? » In : *Monthly Weather Review* 146.6, p. 1685-1703. DOI : 10.1175/mwr-d-17-0295.1 (cf. p. 153, 157).
- GRATTON, Serge et Jean TSHIMANGA (2009). « An observation-space formulation of variational assimilation using a restricted preconditioned conjugate gradient algorithm ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 135.643, p. 1573-1585. DOI : 10.1002/qj.477 (cf. p. 40).
- GRATTON, Serge, Amos S. LAWLESS et Nancy K. NICHOLS (2007). « Approximate Gauss–Newton Methods for Nonlinear Least Squares Problems ». In : *SIAM Journal on Optimization* 18.1, p. 106-132. DOI : 10.1137/050624935 (cf. p. 37).
- GREYBUSH, Steven J., Eugenia KALNAY, Takemasa MIYOSHI, Kayo IDE et Brian R. HUNT (2011). « Balance and Ensemble Kalman Filter Localization Techniques ». In : *Monthly Weather Review* 139.2, p. 511-522. DOI : 10.1175/2010mwr3328.1 (cf. p. 50, 83, 84).
- GUILLET, Oliver, Anthony T. WEAVER, Xavier VASSEUR, Yann MICHEL, Serge GRATTON et Selime GÜROL (2019). « Modelling spatially correlated observation errors in variational data assimilation using a diffusion operator on an unstructured mesh ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 145.722, p. 1947-1967. DOI : 10.1002/qj.3537 (cf. p. 33).
- GUSTAFSSON, Nils (2007). « Discussion on ‘4D-Var or EnKF?’ » In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 59.5, p. 774-777. DOI : 10.1111/j.1600-0870.2007.00262.x (cf. p. 84).
- GUSTAFSSON, Nils, Tijana JANJIĆ, Christoph SCHRAFF, Daniel LEUENBERGER, Martin WEISSMANN, Hendrik REICH, Pierre BROUSSEAU, Thibaut MONTMERLE, Eric WATTRELOT, Antonín BUČÁNEK, Máté MILE, Rafiq HAMDİ, Magnus LINDSKOG, Jan BARKMEIJER, Mats DAHLBOM, Bruce MACPHERSON, Sue BALLARD, Gordon INVERARITY, Jacob CARLEY, Curtis ALEXANDER, David DOWELL, Shun LIU, Yasutaka IKUTA et Tadashi FUJITA (2018). « Survey of data assimilation methods for convective-scale numerical weather prediction at operational centres ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.713, p. 1218-1256. DOI : 10.1002/qj.3179 (cf. p. 9, 80, 146).
- GÜROL, Selime, Anthony T. WEAVER, Alan M. MOORE, Andrea PIACENTINI, Hernan G. ARANGO et Serge GRATTON (2013). « B-preconditioned minimization algorithms for variational data assimilation with the dual formulation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 140.679, p. 539-556. DOI : 10.1002/qj.2150 (cf. p. 39).
- HAMILL, Thomas M. (1999). « Hypothesis Tests for Evaluating Numerical Precipitation Forecasts ». In : *Weather and Forecasting* 14.2, p. 155-167. DOI : 10.1175/1520-0434(1999)014<0155:htfenp>2.0.co;2 (cf. p. 156, 159).
- HAMILL, Thomas M et Chris SNYDER (2000). « A hybrid ensemble Kalman filter–3D variational analysis scheme ». In : *Monthly Weather Review* 128.8, p. 2905-2919. DOI : 10.1175/1520-0493(2000)128<2905:ahkefv>2.0.co;2 (cf. p. 10, 43, 82, 177).
- HAMILL, Thomas M, Jeffrey S WHITAKER et Chris SNYDER (2001). « Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble Kalman filter ». In : *Monthly Weather Review* 129.11, p. 2776-2790. DOI : 10.1175/1520-0493(2001)129<2776:ddfobe>2.0.co;2 (cf. p. 70, 80).
- HODYSS, Daniel (2012). « Accounting for Skewness in Ensemble Data Assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 140.7, p. 2346-2358. DOI : 10.1175/mwr-d-11-00198.1 (cf. p. 86).
- HODYSS, Daniel et William F. CAMPBELL (2013). « Square Root and Perturbed Observation Ensemble Generation Techniques in Kalman and Quadratic Ensemble Filtering Algorithms ». In : *Monthly Weather Review* 141.7, p. 2561-2573. DOI : 10.1175/mwr-d-12-00117.1 (cf. p. 86).
- HOFFMAN, Ross N. et Eugenia KALNAY (1983). « Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo forecasting ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 35.2, p. 100-118. DOI : 10.3402/tellusa.v35i2.11425 (cf. p. 83).
- HOLLINGSWORTH, A. et P. LÖNNBERG (1986). « The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part I : The wind field ». In : *Tellus A* 38A.2, p. 111-136. DOI : 10.1111/j.1600-0870.1986.tb00460.x (cf. p. 33).
- HÖLM, Elias, E ANDERSSON, A BELJAARS, Philippe LOPEZ, Jean-François MAHFOUF, A SIMMONS et Jean-Noël THÉPAUT (2002). « Assimilation and modelling of the hydrological cycle : ECMWF’s status and plans ». In : *Technical Memoranda* 383 (cf. p. 50, 86, 183).
- HOUTEKAMER, Peter L. et Herschel L. MITCHELL (1998). « Data Assimilation Using an Ensemble Kalman Filter Technique ». In : *Monthly Weather Review* 126.3, p. 796-811. DOI : 10.1175/1520-0493(1998)126<0796:dauaek>2.0.co;2 (cf. p. 80).
- (2001). « A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 129.1, p. 123-137. DOI : 10.1175/1520-0493(2001)129<0123:asekff>2.0.co;2 (cf. p. 10, 71, 72, 80).
- (2005). « Ensemble kalman filtering ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131.613, p. 3269-3289. DOI : 10.1256/qj.05.135 (cf. p. 83).
- HOUTEKAMER, Peter L. et Fuqing ZHANG (2016). « Review of the ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 144.12, p. 4489-4532. DOI : 10.1175/mwr-d-15-0440.1 (cf. p. 42, 43, 80).



- HOUTEKAMER, Peter L., Louis LEFAIVRE, Jacques DEROME, Harold RITCHIE et Herschel L. MITCHELL (1996). « A System Simulation Approach to Ensemble Prediction ». In : *Monthly Weather Review* 124.6, p. 1225-1242. DOI : 10.1175/1520-0493(1996)124<1225:assate>2.0.co;2 (cf. p. 66).
- HU, Ming, Ming XUE et Keith BREWSTER (2006). « 3DVAR and Cloud Analysis with WSR-88D Level-II Data for the Prediction of the Fort Worth, Texas, Tornadoic Thunderstorms. Part I : Cloud Analysis and Its Impact ». In : *Monthly Weather Review* 134.2, p. 675-698. DOI : 10.1175/mwr3092.1 (cf. p. 56).
- HUNT, Brian R., Eric J. KOSTELICH et Istvan SZUNYOGH (2007). « Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos : A local ensemble transform Kalman filter ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 230.1-2, p. 112-126. DOI : 10.1016/j.physd.2006.11.008 (cf. p. 39, 57, 80).
- HWANG, Seung-On, Jun PARK et Hyun Mee KIM (2019). « Effect of hydrometeor species on very-short-range simulations of precipitation using ERA5 ». In : *Atmospheric Research* 218, p. 245-256. DOI : 10.1016/j.atmosres.2018.12.008 (cf. p. 50).
- INGLEBY, N. B., Andrew C. LORENC, K. NGAN, F. RAWLINS et D. R. JACKSON (2012). « Improved variational analyses using a nonlinear humidity control variable ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 139.676, p. 1875-1887. DOI : 10.1002/qj.2073 (cf. p. 50, 58, 180).
- ISAKSEN, Lars, M BONAVITA, R BUIZZA, M FISHER, J HASELER, M LEUTBECHER et Laure RAYNAUD (2010). *Ensemble of data assimilations at ECMWF*. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (cf. p. 67).
- JANISKOVA, M. (2015). « Assimilation of cloud information from space-borne radar and lidar : experimental study using a 1D + 4D-Var technique ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.692, p. 2708-2725. DOI : 10.1002/qj.2558 (cf. p. 55).
- JANJIĆ, Tijana, Dennis MCLAUGHLIN, Stephen E. COHN et Martin VERLAAN (2014). « Conservation of mass and preservation of positivity with ensemble-type Kalman filter algorithms ». In : *Monthly Weather Review* 142.2, p. 755-773. DOI : 10.1175/mwr-d-13-00056.1 (cf. p. 86, 183).
- JANJIĆ, Tijana, Niels BORMANN, Marc BOCQUET, J. A. CARTON, S. E. COHN, Sarah. L. DANCE, S. N. LOSA, Nancy K. NICHOLS, Rolland POTTHAST, J. A. WALLER et P. WESTON (2017). « On the representation error in data assimilation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.713, p. 1257-1278. DOI : 10.1002/qj.3130 (cf. p. 32).
- JARDAK, Mohamed et Olivier TALAGRAND (2018a). « Ensemble variational assimilation as a probabilistic estimator – Part 1 : The linear and weak non-linear case ». In : *Nonlinear Processes in Geophysics* 25.3, p. 565-587. DOI : 10.5194/npg-25-565-2018 (cf. p. 66, 67).
- (2018b). « Ensemble variational assimilation as a probabilistic estimator – Part 2 : The fully non-linear case ». In : *Nonlinear Processes in Geophysics* 25.3, p. 589-604. DOI : 10.5194/npg-25-589-2018 (cf. p. 66, 67).
- JAZWINSKI, Andrew H. (1970). *Stochastic processes and filtering theory*. New York : Academic Press, Inc. (cf. p. 43).
- JOHNSON, Aaron, Xuguang WANG, Jacob R. CARLEY, Louis J. WICKER et Christopher KARSTENS (2015). « A Comparison of Multiscale GSI-Based EnKF and 3DVar Data Assimilation Using Radar and Conventional Observations for Midlatitude Convective-Scale Precipitation Forecasts ». In : *Monthly Weather Review* 143.8, p. 3087-3108. DOI : 10.1175/mwr-d-14-00345.1 (cf. p. 59).
- JONES, C D et B MACPHERSON (1997). « A latent heat nudging scheme for the assimilation of precipitation data into an operational mesoscale model ». In : *Meteorological Applications* 4.3, p. 269-277. DOI : 10.1017/s1350482797000522 (cf. p. 56).
- JUNG, Youngsun, Ming XUE et Mingjing TONG (2012). « Ensemble Kalman Filter Analyses of the 29–30 May 2004 Oklahoma Tornadoic Thunderstorm Using One- and Two-Moment Bulk Microphysics Schemes, with Verification against Polarimetric Radar Data ». In : *Monthly Weather Review* 140.5, p. 1457-1475. DOI : 10.1175/mwr-d-11-00032.1 (cf. p. 57).
- KALMAN, R. E. (1960). « A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems ». In : *Journal of Basic Engineering* 82.1, p. 35-45. DOI : 10.1115/1.3662552 (cf. p. 42).
- KALNAY, Eugenia (2013). *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK : Cambridge University Press. 368 p. ISBN : 0521796296 (cf. p. 49, 50).
- KALNAY, Eugenia et Shu-Chih YANG (2010). « Accelerating the spin-up of Ensemble Kalman Filtering ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 136.651, p. 1644-1651. DOI : 10.1002/qj.652 (cf. p. 50, 52).
- KEPERT, Jeffrey D. (2009). « Covariance localisation and balance in an Ensemble Kalman Filter ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 135.642, p. 1157-1176. DOI : 10.1002/qj.443 (cf. p. 83).
- KHAIN, A. P., K. D. BEHENG, A. HEYMSFIELD, A. KOROLEV, S. O. KRICHAK, Z. LEVIN, M. PINSKY, V. PHILLIPS, T. PRABHAKARAN, A. TELLER, S. C. van den HEEVER et J.-I. YANO (2015). « Representation of microphysical processes in cloud-resolving models : Spectral (bin) microphysics versus bulk parameterization ». In : *Reviews of Geophysics* 53.2, p. 247-322. DOI : 10.1002/2014rg000468 (cf. p. 18).
- KIDD, Chris, Andreas BECKER, George J. HUFFMAN, Catherine L. MULLER, Paul JOE, Gail SKOFRONICK-JACKSON et Dalia B. KIRSCHBAUM (2017). « So, How Much of the Earth's Surface Is Covered by Rain Gauges? » In : *Bulletin of the American Meteorological Society* 98.1, p. 69-78. DOI : 10.1175/bams-d-14-00283.1 (cf. p. 23).
- KING, Michael D., Steven PLATNICK, W. Paul MENZEL, Steven A. ACKERMAN et Paul A. HUBANKS (2013). « Spatial and Temporal Distribution of Clouds Observed by MODIS Onboard the Terra and Aqua Satellites ». In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 51.7, p. 3826-3852. DOI : 10.1109/tgrs.2012.2227333 (cf. p. 48).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- KIRCHGESSNER, Paul, Lars NERGER et Angelika BUNSE-GERSTNER (2014). « On the Choice of an Optimal Localization Radius in Ensemble Kalman Filter Methods ». In : *Monthly Weather Review* 142.6, p. 2165-2175. ISSN : 0027-0644. DOI : 10.1175/mwr-d-13-00246.1 (cf. p. 105).
- KLIEWER, A. J., S. J. FLETCHER, A. S. JONES et J. M. FORSYTHE (2015). « Comparison of Gaussian, logarithmic transform and mixed Gaussian-log-normal distribution based 1DVAR microwave temperature-water-vapour mixing ratio retrievals ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.694, p. 274-286. DOI : 10.1002/qj.2651 (cf. p. 86).
- KONG, Rong, Ming XUE et Chengsi LIU (2018). « Development of a Hybrid En3DVar Data Assimilation System and Comparisons with 3DVar and EnKF for Radar Data Assimilation with Observing System Simulation Experiments ». In : *Monthly Weather Review* 146.1, p. 175-198. DOI : 10.1175/mwr-d-17-0164.1 (cf. p. 59-61, 85).
- KONG, Rong, Ming XUE, Chengsi LIU et Youngsun JUNG (2020). « Comparisons of Hybrid En3DVar with 3DVar and EnKF for Radar Data Assimilation : Tests with the 10 May 2010 Oklahoma Tornado Outbreak ». In : *Monthly Weather Review*, p. 1-60. DOI : 10.1175/mwr-d-20-0053.1 (cf. p. 61).
- KOTSUKI, Shunji, Takemasa MIYOSHI, Koji TERASAKI, Guo-Yuan LIEN et Eugenia KALNAY (2017). « Assimilating the global satellite mapping of precipitation data with the Nonhydrostatic Icosahedral Atmospheric Model (NICAM) ». In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 122.2, p. 631-650. DOI : 10.1002/2016jd025355 (cf. p. 86).
- KRETSCHMER, Matthew, Brian R. HUNT et Edward OTT (2015). « Data assimilation using a climatologically augmented local ensemble transform Kalman filter ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 67.1, p. 26617. DOI : 10.3402/tellusa.v67.26617 (cf. p. 82).
- LAC, Christine, Jean-Pierre CHABOUREAU, Valéry MASSON, Jean-Pierre PINTY, Pierre TULET, Juan ESCOBAR, Maud LERICHE, Christelle BARTHE, Benjamin AOUIZERATS, Clotilde AUGROS, Pierre AUMOND, Franck AUGUSTE, Peter BECHTOLD, Sarah BERTHET, Soline BIELLI, Frédéric BOSSEUR, Olivier CAUMONT, Jean-Martial COHARD, Jeanne COLIN, Fleur COUVREUX, Joan CUXART, Gaëlle DELAUTIER, Thibaut DAUHUT, Véronique DUCROCQ, Jean-Baptiste FILIPPI, Didier GAZEN, Olivier GEOFFROY, François GHEUSI, Rachel HONNERT, Jean-Philippe LAFORE, Cindy Lebeauin BROSSIER, Quentin LIBOIS, Thibaut LUNET, Céline MARI, Tomislav MARIC, Patrick MASCART, Maxime MOGÉ, Gilles MOLINIÉ, Olivier NUISSIER, Florian PANTILLON, Philippe PEYRILLÉ, Julien PERGAUD, Emilie PERRAUD, Joris PIANEZZE, Jean-Luc REDELSPERGER, Didier RICARD, Evelyne RICHARD, Sébastien RIETTE, Quentin RODIER, Robert SCHOETTER, Léo SEYFRIED, Joël STEIN, Karsten SUHRE, Marie TAUFOUR, Odile THOURON, Sandra TURNER, Antoine VERRELLE, Benoît VIÉ, Florian VISENTIN, Vincent VIONNET et Philippe WAUTELET (2018). « Overview of the Meso-NH model version 5.4 and its applications ». In : *Geoscientific Model Development* 11.5, p. 1929-1969. DOI : 10.5194/gmd-11-1929-2018 (cf. p. 17, 22).
- LAFORE, J. P., J. STEIN, N. ASENCIO, P. BOUGEAULT, V. DUCROCQ, J. DURON, C. FISCHER, P. HÉREIL, P. MASCART, V. MASSON, J. P. PINTY, J. L. REDELSPERGER, E. RICHARD et J. Vilà-Guerau de ARELLANO (1998). « The Meso-NH Atmospheric Simulation System. Part I : adiabatic formulation and control simulations ». In : *Annales Geophysicae* 16.1, p. 90-109. DOI : 10.1007/s00585-997-0090-6 (cf. p. 17).
- LASCAUX, Franck, Evelyne RICHARD et Jean-Pierre PINTY (2006). « Numerical simulations of three different MAP IOPs and the associated microphysical processes ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 132.619, p. 1907-1926. DOI : 10.1256/qj.05.197 (cf. p. 17).
- LAWSON, W. Gregory et James A. HANSEN (2005). « Alignment Error Models and Ensemble-Based Data Assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 133.6, p. 1687-1709. DOI : 10.1175/mwr2945.1 (cf. p. 52, 85).
- LEEUWEN, Peter Jan, Hans R. KÜNSCH, Lars NERGER, Roland POTTHAST et Sebastian REICH (2019). « Particle filters for high-dimensional geoscience applications : A review ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 145.723, p. 2335-2365. DOI : 10.1002/qj.3551 (cf. p. 35, 85).
- LEI, Lili et Jeffrey L. ANDERSON (2014). « Comparisons of empirical localization techniques for serial ensemble Kalman filters in a simple atmospheric general circulation model ». In : *Monthly Weather Review* 142.2, p. 739-754. DOI : 10.1175/MWR-D-13-00152.1 (cf. p. 105).
- LEI, Lili, Jeffrey L. ANDERSON et Glen S. ROMINE (2015). « Empirical Localization Functions for Ensemble Kalman Filter Data Assimilation in Regions with and without Precipitation ». In : *Monthly Weather Review* 143.9, p. 3664-3679. ISSN : 0027-0644. DOI : 10.1175/mwr-d-14-00415.1 (cf. p. 105).
- LENG, Hongze, Junqiang SONG, Fengshun LU et Xiaoqun CAO (2013). « A New Data Assimilation Scheme : The Space-Expanded Ensemble Localization Kalman Filter ». In : *Advances in Meteorology* 2013, p. 1-6. DOI : 10.1155/2013/410812 (cf. p. 81).
- LEUENBERGER, D. et A. ROSSA (2007). « Revisiting the latent heat nudging scheme for the rainfall assimilation of a simulated convective storm ». In : *Meteorology and Atmospheric Physics* 98.3-4, p. 195-215. DOI : 10.1007/s00703-007-0260-9 (cf. p. 56).
- LIU, Chengsi, Ming XUE et Rong KONG (2019a). « Direct Assimilation of Radar Reflectivity Data Using 3DVAR : Treatment of Hydrometeor Background Errors and OSSE Tests ». In : *Monthly Weather Review* 147.1, p. 17-29. DOI : 10.1175/mwr-d-18-0033.1 (cf. p. 59, 183).
- (2019b). « Direct Variational Assimilation of Radar Reflectivity and Radial Velocity Data : Issues with Nonlinear Reflectivity Operator and Solutions ». In : *Monthly Weather Review*. DOI : 10.1175/mwr-d-19-0149.1 (cf. p. 59).

- LOPEZ, Philippe (2011). « Direct 4D-Var Assimilation of NCEP Stage IV Radar and Gauge Precipitation Data at ECMWF ». In : *Monthly Weather Review* 139.7, p. 2098-2116. DOI : 10.1175/2010mwr3565.1 (cf. p. 54).
- LOPEZ, Philippe et Peter BAUER (2007). « “1D + 4DVAR” Assimilation of NCEP Stage-IV Radar and Gauge Hourly Precipitation Data at ECMWF ». In : *Monthly Weather Review* 135.7, p. 2506-2524. DOI : 10.1175/mwr3409.1 (cf. p. 55).
- LORENC, Andrew C. (1986). « Analysis methods for numerical weather prediction ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 112.474, p. 1177-1194 (cf. p. 35).
- (2003). « The potential of the ensemble Kalman filter for NWP — a comparison with 4D-Var ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 129.595, p. 3183-3203. DOI : 10.1256/qj.02.132 (cf. p. 10, 43, 71, 75, 78, 82-84).
- LORENC, Andrew C (2017). « Improving ensemble covariances in hybrid variational data assimilation without increasing ensemble size ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 143.703, p. 1062-1072. ISSN : 0035-9009. DOI : 10.1002/qj.2990 (cf. p. 83).
- LYNCH, Peter et Xiang-Yu HUANG (1992). « Initialization of the HIRLAM Model Using a Digital Filter ». In : *Monthly Weather Review* 120.6, p. 1019-1034. DOI : 10.1175/1520-0493(1992)120<1019:iothmu>2.0.co;2 (cf. p. 52).
- MARÉCAL, Virginie et Jean-François MAHFOUF (2002). « Four-Dimensional Variational Assimilation of Total Column Water Vapor in Rainy Areas ». In : *Monthly Weather Review* 130.1, p. 43-58. DOI : 10.1175/1520-0493(2002)130<0043:fdvaot>2.0.co;2 (cf. p. 54).
- M McNALLY, A. P. (2002). « A note on the occurrence of cloud in meteorologically sensitive areas and the implications for advanced infrared sounders ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 128.585, p. 2551-2556. DOI : 10.1256/qj.01.206 (cf. p. 48).
- MÉNÉTRIER, Benjamin (2014). « Utilisation d’une assimilation d’ensemble pour modéliser des covariances d’erreur d’ébauche dépendantes de la situation météorologique à échelle convective ». Thèse de doct. Université de Toulouse (cf. p. 46).
- (2020a). *B matrix on an Unstructured Mesh Package - Standalone package 2020-09-01 version*. DOI : 10.5281/ZENODO.4010631 (cf. p. 89, 106).
- (2020b). *Multivariate localization*. DOI : 10.5281/ZENODO.4009125 (cf. p. 151).
- (2020c). *Normalized Interpolated Convolution from an Adaptive Subgrid documentation*. DOI : 10.5281/ZENODO.4058620 (cf. p. 79).
- MÉNÉTRIER, Benjamin et Thomas AULIGNÉ (2015). « An Overlooked Issue of Variational Data Assimilation ». In : *Monthly Weather Review* 143.10, p. 3925-3930. ISSN : 0027-0644. DOI : 10.1175/mwr-d-14-00404.1 (cf. p. 39, 69).
- MÉNÉTRIER, Benjamin, Thibaut MONTMERLE, Loïk BERGE et Yann MICHEL (2014). « Estimation and diagnosis of heterogeneous flow-dependent background-error covariances at the convective scale using either large or small ensembles ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 140.683, p. 2050-2061. DOI : 10.1002/qj.2267 (cf. p. 107).
- MÉNÉTRIER, Benjamin, Thibaut MONTMERLE, Yann MICHEL et Loïk BERGE (2015a). « Linear Filtering of Sample Covariances for Ensemble-Based Data Assimilation. Part I : Optimality Criteria and Application to Variance Filtering and Covariance Localization ». In : *Monthly Weather Review* 143.5, p. 1622-1643. DOI : 10.1175/mwr-d-14-00157.1 (cf. p. 10, 70, 105, 106, 180).
- (2015b). « Linear filtering of sample covariances for ensemble-based data assimilation. Part II : Application to a convective-scale NWP model ». In : *Monthly Weather Review* 143.5, p. 1644-1664. DOI : 10.1175/mwr-d-14-00156.1 (cf. p. 70, 105).
- MENG, Deming, Yaodeng CHEN, Hongli WANG, Yufang GAO, Roland POTTAST et Yuanbing WANG (2019). « The evaluation of EnVar method including hydrometeors analysis variables for assimilating cloud liquid/ice water path on prediction of rainfall events ». In : *Atmospheric Research* 219, p. 1-12. DOI : 10.1016/j.atmosres.2018.12.017 (cf. p. 61, 63).
- METREF, Sammy, Emmanuel COSME, Chris SNYDER et Pierre BRASSEUR (2014). « A non-Gaussian analysis scheme using rank histograms for ensemble data assimilation ». In : *Nonlinear Processes in Geophysics* 21.4, p. 869-885. DOI : 10.5194/npg-21-869-2014 (cf. p. 85).
- MICHEL, Yann (2012a). « Estimating deformations of random processes for correlation modelling in a limited area model ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 139.671, p. 534-547. DOI : 10.1002/qj.1978 (cf. p. 79).
- (2012b). « Estimating deformations of random processes for correlation modelling : methodology and the one-dimensional case ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 139.672, p. 771-783. DOI : 10.1002/qj.2007 (cf. p. 149).
- (2018). « Revisiting Fisher’s approach to the handling of horizontal spatial correlations of observation errors in a variational framework ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.716, p. 2011-2025. DOI : 10.1002/qj.3249 (cf. p. 33).
- MICHEL, Yann et Thomas AULIGNÉ (2010). « Inhomogeneous Background Error Modeling and Estimation over Antarctica ». In : *Monthly Weather Review* 138.6, p. 2229-2252. DOI : 10.1175/2009mwr3139.1 (cf. p. 79).
- MICHEL, Yann, Thomas AULIGNÉ et Thibaut MONTMERLE (2011). « Heterogeneous convective-scale background error covariances with the inclusion of hydrometeor variables ». In : *Monthly Weather Review* 139.9, p. 2994-3015. DOI : 10.1175/2011mwr3632.1 (cf. p. 52, 85, 106, 178, 182).
- MIGLIORINI, Stefano et Brett CANDY (2019). « All-sky satellite data assimilation of microwave temperature sounding channels at the Met Office ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 145.719, p. 867-883. DOI : 10.1002/qj.3470 (cf. p. 58, 180).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- MIGLIORINI, Stefano, Andrew C. LORENC et William BELL (2018). « A moisture-incrementing operator for the assimilation of humidity- and cloud-sensitive observations : formulation and preliminary results ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.711, p. 443-457. DOI : 10.1002/qj.3216 (cf. p. 58).
- MITTERMAIER, Marion, Nigel ROBERTS et Simon A THOMPSON (2013). « A long-term assessment of precipitation forecast skill using the Fractions Skill Score ». In : *Meteorological Applications* 20.2, p. 176-186 (cf. p. 155, 156).
- MONTMERLE, Thibaut et Loïk BERRE (2010). « Diagnosis and formulation of heterogeneous background-error covariances at the mesoscale ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 136.651, p. 1408-1420. DOI : 10.1002/qj.655 (cf. p. 52, 106).
- MONTMERLE, Thibaut, Yann MICHEL, Etienne ARBOGAST, Benjamin MÉNÉTRIER et Pierre BROUSSEAU (2018). « A 3D ensemble variational data assimilation scheme for the limited-area AROME model : Formulation and preliminary results ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144.716, p. 2196-2215. DOI : 10.1002/qj.3334 (cf. p. 65, 75, 80, 108, 145-148, 150, 152, 159, 178).
- NOCEDAL, Jorge et Stephen WRIGHT (2006). *Numerical Optimization*. New York : Springer New York. DOI : 10.1007/978-0-387-40065-5 (cf. p. 37).
- OTT, Edward, Brian R. HUNT, Istvan SZUNYOGH, Aleksey V. ZIMIN, Eric J. KOSTELICH, Matteo CORAZZA, Eugenia KALNAY, D.J. PATIL et J. A. YORKE (2004). « A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 56.5, p. 415-428. DOI : 10.3402/tellusa.v56i5.14462 (cf. p. 80).
- PALMER, Tim N., Roberto BUIZZA, Francisco J DOBLAS-REYES, Thomas JUNG, Martin LEUTBECHER, Glenn J. SHUTTS, Martin STEINHEIMER et Antje WEISHEIMER (2009). *Stochastic parametrization and model uncertainty*. Rapp. tech. 598. ECMWF. DOI : 10.21957/PS8GBWBDV (cf. p. 67).
- PARK, Sangwoo, Erchin SERPEDIN et Khalid QARAQE (2013). « Gaussian Assumption : The Least Favorable but the Most Useful ». In : *IEEE Signal Processing Magazine* 30.3, p. 183-186. DOI : 10.1109/msp.2013.2238691 (cf. p. 36).
- PECKHAM, Steven E., Tatiana G. SMIRNOVA, Stanley G. BENJAMIN, John M. BROWN et Jaymes S. KENYON (2015). « Implementation of a Digital Filter Initialization in the WRF Model and Its Application in the Rapid Refresh ». In : *Monthly Weather Review* 144.1, p. 99-106. DOI : 10.1175/mwr-d-15-0219.1 (cf. p. 52).
- PEREIRA, Margarida Belo et Loïk BERRE (2006). « The Use of an Ensemble Approach to Study the Background Error Covariances in a Global NWP Model ». In : *Monthly Weather Review* 134.9, p. 2466-2489. DOI : 10.1175/mwr3189.1 (cf. p. 66).
- PERIANEZ, Africa, Hendrik REICH et Roland POTTHAST (2014). « Optimal localization for ensemble Kalman filter systems ». In : *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* 92.6, p. 585-597. DOI : 10.2151/jmsj.2014-605 (cf. p. 105).
- PURSER, R James, Wan-Shu WU, David F PARRISH et Nigel M ROBERTS (2003). « Numerical aspects of the application of recursive filters to variational statistical analysis. Part I : Spatially homogeneous and isotropic Gaussian covariances. » In : *Monthly Weather Review* 131.8. DOI : 10.1175//1520-0493(2003)131<1524:naotao>2.0.co;2 (cf. p. 79, 148).
- PUTNAM, Bryan, Ming XUE, Youngsun JUNG, Nathan SNOOK et Guifu ZHANG (2019). « Ensemble Kalman Filter Assimilation of Polarimetric Radar Observations for the 20 May 2013 Oklahoma Tornadoic Supercell Case ». In : *Monthly Weather Review* 147.7, p. 2511-2533. DOI : 10.1175/mwr-d-18-0251.1 (cf. p. 57).
- RABIER, F., H. JÄRVINEN, E. KLINKER, J.-F. MAHFOUF et A. SIMMONS (2000). « The ECMWF operational implementation of four-dimensional variational assimilation. I : Experimental results with simplified physics ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 126.564, p. 1143-1170. DOI : 10.1002/qj.49712656415 (cf. p. 9, 37).
- RABIER, Florence (2006). « Importance of Data : A Meteorological Perspective ». In : *Ocean Weather Forecasting*. Dordrecht : Springer-Verlag. Chap. 12, p. 343-360. ISBN : 978-1-4020-4028-3. DOI : 10.1007/1-4020-4028-8\_12 (cf. p. 33).
- RAINWATER, Sabrina, Craig H. BISHOP et William F. CAMPBELL (2015). « The benefits of correlated observation errors for small scales ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.693, p. 3439-3445. DOI : 10.1002/qj.2582 (cf. p. 33).
- RAVELA, Sai, Kerry EMANUEL et Dennis MCLAUGHLIN (2007). « Data assimilation by field alignment ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 230.1-2, p. 127-145. DOI : 10.1016/j.physd.2006.09.035 (cf. p. 85).
- RAYNAUD, Laure et F. BOUTTIER (2015). « Comparison of initial perturbation methods for ensemble prediction at convective scale ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.695, p. 854-866. DOI : 10.1002/qj.2686 (cf. p. 67).
- RENSHAW, Richard et Peter N. FRANCIS (2011). « Variational assimilation of cloud fraction in the operational Met Office Unified Model ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 137.661, p. 1963-1974. DOI : 10.1002/qj.980 (cf. p. 57).
- RICARD, Didier, Christine LAC, Sébastien RIETTE, Raphaël LEGRAND et Alexandre MARY (2012). « Kinetic energy spectra characteristics of two convection-permitting limited-area models AROME and Meso-NH ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 139.674, p. 1327-1341. DOI : 10.1002/qj.2025 (cf. p. 16).
- ROBERTS, Nigel M et Humphrey W LEAN (2008). « Scale-selective verification of rainfall accumulations from high-resolution forecasts of convective events ». In : *Monthly Weather Review* 136.1, p. 78-97. DOI : 10.1175/2007mwr2123.1 (cf. p. 155, 181).
- SAAD, Yousef (2003). *Iterative methods for sparse linear systems*. 2<sup>e</sup> éd. SIAM. 528 p. ISBN : 0898715342 (cf. p. 37).

- SALTIKOFF, Elena, Günther HAASE, Laurent DELOBBE, Nicolas GAUSSIAT, Maud MARTET, Daniel IDZIOREK, Hidde LEIJNSE, Petr NOVÁK, Maryna LUKACH et Klaus STEPHAN (2019). « OPERA the Radar Project ». In : *Atmosphere* 10.6, p. 320. DOI : 10.3390/atmos10060320 (cf. p. 24).
- SASAKI, Yoshikazu (1970). « Some basic formalisms in numerical variational analysis ». In : *Monthly Weather Review* 98.12, p. 875-883 (cf. p. 37).
- SAUNDERS, Roger, James HOCKING, Emma TURNER, Peter RAYER, David RUNDLE, Pascal BRUNEL, Jérôme VIDOT, Pascale ROQUET, Marco MATRICARDI, Alan GEER, Niels BORMANN et Cristina LUPU (2018). « An update on the RTTOV fast radiative transfer model (currently at version 12) ». In : *Geoscientific Model Development* 11.7, p. 2717-2737. DOI : 10.5194/gmd-11-2717-2018 (cf. p. 153).
- SCHOMBURG, A, C SCHRAFF et Roland POTTHAST (2015). « A concept for the assimilation of satellite cloud information in an Ensemble Kalman Filter : single-observation experiments ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.688, p. 893-908. DOI : 10.1002/qj.2407 (cf. p. 57, 58).
- SCHRAFF, C., H. REICH, A. RHODIN, A. SCHOMBURG, K. STEPHAN, A. PERIÁÑEZ et R. POTTHAST (2016). « Kilometre-scale ensemble data assimilation for the COSMO model (KENDA). Ensemble Data Assimilation for the COSMO Model ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142.696, p. 1453-1472. ISSN : 0035-9009. DOI : 10.1002/qj.2748 (cf. p. 57).
- SEITY, Yann, Pierre BROUSSEAU, Sophie MALARDEL, Gwenaëlle HELLO, Pierre BÉNARD, François BOUTTIER, Christine LAC et Valérie MASSON (2011). « The AROME-France convective-scale operational model ». In : *Monthly Weather Review* 139.3, p. 976-991. DOI : 10.1175/2010mwr3425.1 (cf. p. 14).
- SNYDER, Chris et Fuqing ZHANG (2003). « Assimilation of simulated Doppler radar observations with an ensemble Kalman filter. » In : *Monthly Weather Review* 131.8. DOI : 10.1175//2555.1 (cf. p. 57, 179).
- SNYDER, Chris, Thomas BENGTTSSON, Peter BICKEL et Jeff ANDERSON (2008). « Obstacles to High-Dimensional Particle Filtering ». In : *Monthly Weather Review* 136.12, p. 4629-4640. DOI : 10.1175/2008mwr2529.1 (cf. p. 85).
- STEIN, Joël et Fabien STOOP (2018). « Neighborhood-based contingency tables including errors compensation ». In : *Monthly Weather Review*. DOI : 10.1175/mwr-d-17-0288.1 (cf. p. 155, 158, 181).
- STEPHAN, K., S. KLINK et C. SCHRAFF (2008). « Assimilation of radar-derived rain rates into the convective-scale model COSMO-DE at DWD ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 134.634, p. 1315-1326. DOI : 10.1002/qj.269 (cf. p. 56).
- STEWART, L. M., Sarah L. DANCE, Nancy K. NICHOLS, J. R. EYRE et J. CAMERON (2013a). « Estimating interchannel observation-error correlations for IASI radiance data in the Met Office system ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 140.681, p. 1236-1244. DOI : 10.1002/qj.2211 (cf. p. 33).
- STEWART, Laura M., Sarah L. DANCE et Nancy K. NICHOLS (2013b). « Data assimilation with correlated observation errors : experiments with a 1-D shallow water model ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 65.1, p. 195-46. DOI : 10.3402/tellusa.v65i0.19546 (cf. p. 33).
- SUN, Juanzhen et N. Andrew CROOK (1997). « Dynamical and Microphysical Retrieval from Doppler Radar Observations Using a Cloud Model and Its Adjoint. Part I : Model Development and Simulated Data Experiments ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 54.12, p. 1642-1661. DOI : 10.1175/1520-0469(1997)054<1642:damrfd>2.0.co;2 (cf. p. 58, 179, 184).
- SUN, Juanzhen, Stanley B. TRIER, Qingnong XIAO, Morris L. WEISMAN, Hongli WANG, Zhuming YING, Mei XU et Ying ZHANG (2012). « Sensitivity of 0–12-h Warm-Season Precipitation Forecasts over the Central United States to Model Initialization ». In : *Weather and Forecasting* 27.4, p. 832-855. DOI : 10.1175/waf-d-11-00075.1 (cf. p. 50).
- SUN, Juanzhen, Ming XUE, James W. WILSON, Isztar ZAWADZKI, Sue P. BALLARD, Jeanette ONVLEE-HOOIMEYER, Paul JOE, Dale M. BARKER, Ping-Wah LI, Brian GOLDING, Mei XU et James PINTO (2014). « Use of NWP for Nowcasting Convective Precipitation : Recent Progress and Challenges ». In : *Bulletin of the American Meteorological Society* 95.3, p. 409-426. DOI : 10.1175/bams-d-11-00263.1 (cf. p. 50, 55).
- TABARY, Pierre, Clotilde AUGROS, Jean-Louis CHAMPEAUX, Jean-Luc CHÈZE, Dominique FAURE, Daniel IDZIOREK, Richard LORANDEL, Bernard URBAN et Valérie VOGT (2013). « Le réseau et les produits radars de Météo-France ». In : *La Météorologie* (cf. p. 24).
- THOMAS, Guillaume, Jean-François MAHFOUF et Thibaut MONTMERLE (2020). « Toward a variational assimilation of polarimetric radar observations in a convective-scale numerical weather prediction (NWP) model ». In : *Atmospheric Measurement Techniques* 13.5, p. 2279-2298. DOI : 10.5194/amt-13-2279-2020 (cf. p. 88).
- VETRA-CARVALHO, Sanita, Peter Jan VAN LEEUWEN, Lars NERGER, Alexander BARTH, M Umer ALTAJ, Pierre BRASSEUR, Paul KIRCHGESSNER et Jean-Marie BECKERS (2018). « State-of-the-art stochastic data assimilation methods for high-dimensional non-Gaussian problems ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 70.1, p. 1445364. DOI : 10.1080/16000870.2018.1445364 (cf. p. 80, 85).
- VIDARD, Arthur, Andrea PIACENTINI et François-Xavier Le DIMET (2004). « Variational data analysis with control of the forecast bias ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 56.3, p. 177-188. DOI : 10.3402/tellusa.v56i3.14414 (cf. p. 37).
- VIÉ, Benoît, Jean-Pierre PINTY, Sarah BERTHET et Maud LERICHE (2016). « LIMA (v1.0) : A quasi two-moment microphysical scheme driven by a multimodal population of cloud condensation and ice freezing nuclei ». In : *Geoscientific Model Development* 9.2, p. 567-586. DOI : 10.5194/gmd-9-567-2016 (cf. p. 20).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- WANG, Hongli, Juanzhen SUN, Shuiyong FAN et Xiang-Yu HUANG (2013a). « Indirect Assimilation of Radar Reflectivity with WRF 3D-Var and Its Impact on Prediction of Four Summertime Convective Events ». In : *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 52.4, p. 889-902. DOI : 10.1175/jamc-d-12-0120.1 (cf. p. 55, 56, 155).
- WANG, Hongli, Juanzhen SUN, Xin ZHANG, Xiang-Yu HUANG et Thomas AULIGNÉ (2013b). « Radar Data Assimilation with WRF 4D-Var. Part I : System Development and Preliminary Testing ». In : *Monthly Weather Review* 141.7, p. 2224-2244. DOI : 10.1175/mwr-d-12-00168.1 (cf. p. 58).
- WANG, Jingnan, Lifeng ZHANG, Jiping GUAN et Mingyang ZHANG (2020). « Evaluation of Combined Satellite and Radar Data Assimilation with POD-4DVar Method on Rainfall Forecast ». In : *Applied Sciences* 10.16, p. 5493. DOI : 10.3390/app10165493 (cf. p. 61).
- WANG, Xuguang, Chris SNYDER et Thomas M. HAMILL (2007). « On the theoretical equivalence of differently proposed ensemble-3DVAR hybrid analysis schemes ». In : *Monthly Weather Review* 135.1, p. 222-227. DOI : 10.1175/mwr3282.1 (cf. p. 82).
- WANG, Xuguang, Dale M. BARKER, Chris SNYDER et Thomas M. HAMILL (2008). « A Hybrid ETKF-3DVAR Data Assimilation Scheme for the WRF Model. Part I : Observing System Simulation Experiment ». In : *Monthly Weather Review* 136.12, p. 5116-5131. DOI : 10.1175/2008mwr2444.1 (cf. p. 78).
- WANG, Yongming et Xuguang WANG (2017). « Direct Assimilation of Radar Reflectivity without Tangent Linear and Adjoint of the Nonlinear Observation Operator in the GSI-Based EnVar System : Methodology and Experiment with the 8 May 2003 Oklahoma City Tornadoic Supercell ». In : *Monthly Weather Review* 145.4, p. 1447-1471. DOI : 10.1175/mwr-d-16-0231.1 (cf. p. 61).
- WANG, Yuanbing, Jinzhong MIN, Yaodeng CHEN, Xiang-Yu HUANG, Mingjian ZENG et Xin LI (2017). « Improving precipitation forecast with hybrid 3DVar and time-lagged ensembles in a heavy rainfall event ». In : *Atmospheric Research* 183, p. 1-16. DOI : 10.1016/j.atmosres.2016.07.026 (cf. p. 83).
- WATTRELOT, Eric, Olivier CAUMONT et Jean-François MAHFOUF (2014). « Operational Implementation of the 1D + 3D-Var Assimilation Method of Radar Reflectivity Data in the AROME Model ». In : *Monthly Weather Review* 142.5, p. 1852-1873. DOI : 10.1175/mwr-d-13-00230.1 (cf. p. 55, 96).
- XIAO, Qingnong et Juanzhen SUN (2007). « Multiple-Radar Data Assimilation and Short-Range Quantitative Precipitation Forecasting of a Squall Line Observed during IHOP\_2002 ». In : *Monthly Weather Review* 135.10, p. 3381-3404. DOI : 10.1175/mwr3471.1 (cf. p. 59, 62, 179).
- XUE, Ming, Youngsun JUNG et Guifu ZHANG (2010). « State estimation of convective storms with a two-moment micro-physics scheme and an ensemble Kalman filter : Experiments with simulated radar data ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. DOI : 10.1002/qj.593 (cf. p. 57).
- ZHANG, Bin, Xiangjun TIAN, Jianhua SUN, Feng CHEN, Yuanchun ZHANG, Lifeng ZHANG et Shenming FU (2015). « PODEn4DVar-based radar data assimilation scheme : formulation and preliminary results from real-data experiments with advanced research WRF (ARW) ». In : *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography* 67.1, p. 26045. DOI : 10.3402/tellusa.v67.26045 (cf. p. 61).
- ZHANG, Sara Q, Milija ZUPANSKI, Arthur Y HOU, Xin LIN et Samson H CHEUNG (2013). « Assimilation of precipitation-affected radiances in a cloud-resolving WRF ensemble data assimilation system ». In : *Monthly Weather Review* 141.2, p. 754-772. DOI : 10.1175/mwr-d-12-00055.1 (cf. p. 61).
- ZUPANSKI, Dusanka, Sara Q. ZHANG, Milija ZUPANSKI, Arthur Y. HOU et Samson H. CHEUNG (2011). « A Prototype WRF-Based Ensemble Data Assimilation System for Dynamically Downscaling Satellite Precipitation Observations ». In : *Journal of Hydrometeorology* 12.1, p. 118-134. DOI : 10.1175/2010jhm1271.1 (cf. p. 61).







---

**Résumé** — L’initialisation des hydrométéores est un enjeu majeur de la prévision numérique du temps à échelle convective. Cette thèse vise à analyser ces hydrométéores dans le schéma d’assimilation variationnel ensembliste (3DEnVar) récemment implémenté pour le modèle de prévision AROME, et à documenter l’impact d’une telle analyse sur les prévisions résultantes. Ce schéma utilise une approche Monte-Carlo pour estimer des covariances empiriques des erreurs d’ébauche. Des localisations optimales ont été diagnostiquées pour filtrer ces covariances, en répondant aux problèmes de discontinuité et d’hétérogénéité propres aux hydrométéores. Une grande dépendance à la variable, à l’altitude et à la situation météorologique a été montrée. Des expériences cyclées d’assimilation sur une période estivale de 3 mois ont ensuite montré un apport significativement positif de l’initialisation des hydrométéores sur les prévisions de pluie, de couverture nuageuse et de pression de surface, même en l’absence d’observations directes d’hydrométéores. L’apport d’un nouveau schéma de localisation dépendant de la variable s’est révélé mitigé, celui d’une localisation dépendant de l’échelle est plus positif.

**Mots clés :** Assimilation de données ensembliste, hydrométéores, covariances d’erreurs d’ébauche

---

---

**Abstract** — Initialization of hydrometeor variables is a major challenge in convective-scale numerical weather prediction. This PhD thesis aims at analyzing these hydrometeor in the ensemble variational data assimilation scheme (3DEnVar) recently implemented for the prediction model AROME. This scheme uses an ensemble of forecasts to sample background error covariances. To filter these covariances, optimal localization has been diagnosed using an objective method based on the ensemble statistics only. Heterogeneity and discontinuities of hydrometeor fields have been tackled to perform these diagnoses. Optimal localization depends on model variable, model level and weather situation; a specific localization is advocated for hydrometeor variables. Cycled data assimilation experiments were then performed over a three-month summer period to assess the impact of proposed changes. Precipitation, cloud cover and surface pressure forecasts are significantly improved when hydrometeor are added to the control variables. A new variable-dependent localization scheme is tested, but show neutral impact. Better results were obtained with scale-dependent localization.

**Keywords:** Ensemble Data Assimilation, hydrometeors, background error covariances

---