



**HAL**  
open science

# Etude numérique des algorithmes de couplage océan-atmosphère avec prise en compte des paramétrisations physiques des couches limites

Sophie Theyry

► **To cite this version:**

Sophie Theyry. Etude numérique des algorithmes de couplage océan-atmosphère avec prise en compte des paramétrisations physiques des couches limites. Analyse numérique [cs.NA]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT : 2021GRALM003 . tel-03258179v3

**HAL Id: tel-03258179**

**<https://theses.hal.science/tel-03258179v3>**

Submitted on 11 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Sophie THERY**

Thèse dirigée par **Eric Blayo**, Université Grenoble Alpes  
et  
codirigée par **Florian Lemarié**, Inria

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**  
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et  
technologies de l'information, Informatique**

## Étude numérique des algorithmes de couplage océan-atmosphère avec prise en compte des paramétrisations physiques de couches limites

Thèse soutenue publiquement le 10 février 2021 devant le jury  
composé de :

**Mr Emmanuel AUDUSSE**

Maître de conférence HDR, Université Paris 13, Rapporteur

**Mr Martin GANDER**

Professeur Université de Genève, Rapporteur

**Mr Didier BRESCH**

Directeur de recherche, Université Savoie Mont-Blanc, Président

**Mr Véronique MARTIN**

Maître de conférence, Université Picardie Jules Verne, Examinatrice

**Mr Eric BLAYO**

Professeur Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

**Mr Florian LEMARIE**

Chargé de recherche Inria, Co-encadrant





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèles mathématiques des interactions océan-atmosphère</b>	<b>5</b>
1.1 Modélisation numérique des écoulements océaniques et atmosphériques . . .	6
1.1.1 Dérivation des équations à grande échelle . . . . .	6
1.1.2 Décomposition de Reynolds et hypothèse de Boussinesq . . . . .	8
1.1.3 Conditions de bords . . . . .	10
1.1.4 Simplification des modèles océan et atmosphère . . . . .	11
1.2 Modélisation des échanges océan-atmosphère . . . . .	12
1.2.1 Paramétrisation de la couche limite de surface . . . . .	13
1.2.2 Gestion de l'interface dans les modèles couplés OA . . . . .	17
1.2.3 Une paramétrisation plus cohérente de la couche limite de surface .	17
1.3 Le modèle couplé océan-atmosphère . . . . .	19
1.3.1 Conditions de couplage . . . . .	20
1.3.2 Les viscosités turbulentes considérées . . . . .	21
1.3.3 Le modèle couplé considéré . . . . .	22
<b>2 Couplage océan-atmosphère et méthodes de Schwarz</b>	<b>27</b>
2.1 Les méthodes de couplage Océan-Atmosphère . . . . .	28
2.1.1 Contraintes sur les méthodes de couplage . . . . .	28
2.1.2 Les méthodes de couplage océan-atmosphère actuelles . . . . .	29
2.1.3 Vers un processus itératif : les algorithmes de Schwarz . . . . .	33
2.2 Présentation générale des algorithmes de Schwarz . . . . .	35
2.2.1 Algorithme de Schwarz pour la décomposition de domaine . . . . .	36
2.2.2 Facteur de convergence . . . . .	41
2.2.3 Optimisation de la convergence . . . . .	46
2.3 Algorithme de Schwarz pour le couplage multiphysique . . . . .	49
2.3.1 Le cadre multiphysique . . . . .	49
2.3.2 Travaux antérieurs en lien avec notre problématique . . . . .	54
<b>3 Influence du découpage temporel sur l'algorithme de Schwarz</b>	<b>59</b>
3.1 Effets du découpage temporel sur le taux de convergence . . . . .	60
3.1.1 Étude de la convergence sur une fenêtre de taille finie . . . . .	61
3.1.2 Étude de la convergence de l'algorithme discret en temps . . . . .	63

3.1.3	Illustration des effets du découplage temporel . . . . .	66
3.2	Des conditions d'interface assurant la convergence de l'algorithme discret . . . . .	71
3.2.1	Les conditions optimales pour l'algorithme local en temps . . . . .	71
3.2.2	Illustrations et comparaison avec d'autres conditions d'interface . . . . .	74
3.3	Filtrage au sein des conditions d'interface . . . . .	78
3.3.1	Applications de filtres sur les conditions d'interfaces . . . . .	78
3.3.2	Effet de la moyenne sur l'algorithme de Schwarz . . . . .	82
3.3.3	Exemple d'application du filtre moyenne . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Les algorithmes de Schwarz pour le couplage de couches d'Ekman</b>	<b>91</b>
4.1	Mise en place de l'algorithme sur le couplage de couches d'Ekman . . . . .	92
4.1.1	Caractère bien posé et découpage en sous-problèmes . . . . .	93
4.1.2	Caractère bien posé de l'algorithme . . . . .	96
4.1.3	Traitement de l'effet de Coriolis dans l'étude de la convergence . . . . .	100
4.2	Convergence de l'algorithme de Schwarz : influence des spécificités du couplage océan-atmosphère . . . . .	103
4.2.1	Principaux effets des spécificités du couplage océan-atmosphère sur la convergence de l'algorithme . . . . .	103
4.2.2	Analysis of Schwarz waveform relaxation for the coupled Ekman boundary layer problem with continuously variable coefficients . . . . .	105
4.2.3	Compléments sur la convergence de l'algorithme de Schwarz pour le couplage de couches d'Ekman . . . . .	144
4.3	Application des algorithmes de Schwarz sur le problème océan-atmosphère simplifié . . . . .	146
4.3.1	Cas stationnaire sans effet de Coriolis . . . . .	148
4.3.2	Cas instationnaire avec effet de Coriolis . . . . .	151
4.3.3	Facteur de convergence pour le problème avec viscosité KPP . . . . .	156
<b>5</b>	<b>Étude d'un problème non-linéaire de couplage océan-atmosphère : caractère bien posé et algorithmes de Schwarz</b>	<b>163</b>
5.1	Caractère bien posé du problème stationnaire . . . . .	166
5.1.1	Caractère bien posé du problème stationnaire : le cas mono-domaine . . . . .	167
5.1.2	Généralisation à d'autres modèles de viscosité . . . . .	169
5.1.3	Caractère bien posé du problème couplé stationnaire sans effet de Coriolis . . . . .	171
5.1.4	Caractère bien posé pour le problème couplé stationnaire avec effet de Coriolis . . . . .	173
5.2	Application d'un algorithme de Schwarz sur le problème océan-atmosphère non linéaire . . . . .	175
5.2.1	Traitement des spécificités du problème couplé océan-atmosphère . . . . .	175
5.2.2	Méthodologie pour l'étude de convergence de l'algorithme de point fixe . . . . .	178
5.2.3	Simplification de la condition d'interface (formulation bulk) . . . . .	179
5.3	Étude de la convergence du problème stationnaire . . . . .	181

5.3.1	Convergence dans le cas mono-domaine . . . . .	182
5.3.2	Différentes notions de vitesse de convergence . . . . .	188
5.3.3	Convergence du problème couplé stationnaire . . . . .	190
5.3.4	Le problème couplé stationnaire avec effet de Coriolis . . . . .	194
5.4	Première étude empirique du problème instationnaire . . . . .	197
5.4.1	Le problème instationnaire avec application de filtre moyenne . . .	198
5.4.2	Simulations du problème instationnaire . . . . .	205
5.4.3	Pistes pour l'étude théorique du problème instationnaire . . . . .	211
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>215</b>
<b>Appendices</b>		
<b>Annexe A Démonstrations des propriétés (3.42)-(3.44)</b>		<b>223</b>
<b>Annexe B Rappel des preuves d'existence et d'unicité</b>		<b>225</b>
<b>Annexe C Rappel sur le théorème du point fixe de Banach</b>		<b>227</b>

# Introduction

Cette thèse s'est déroulée au sein de l'équipe AIRSEA du Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe commune à l'Université Grenoble Alpes et à Inria. Ce travail a été financé dans le cadre du projet ANR COCOA (*comprehensive coupling approach for the ocean and the atmosphere*). Il porte sur l'étude numérique des algorithmes de couplage océan-atmosphère, avec prise en compte des paramétrisations physiques des couches limites.

## Contexte

Diverses applications nécessitent des simulations couplant océan et atmosphère. Ainsi des phénomènes météorologiques extrêmes comme les cyclones tropicaux sont contrôlés par les interactions océan-atmosphère. Celles-ci sont également un ingrédient primordial des modèles numériques de climat, outils indispensables pour anticiper les risques futurs dus au changement climatique. Cependant, les modèles d'océan et d'atmosphère ont été développés de manière séparée, par deux communautés distinctes. A ce jour il n'existe pas de modèle unifié, et la mise en place d'un tel modèle demanderait un temps considérable et n'est pas à notre connaissance à l'ordre du jour. Un modèle océan-atmosphère doit donc résulter d'un couplage de modèles d'océan et d'atmosphère existants. Dans ce modèle couplé, les interactions océan-atmosphère, qui agissent comme des conditions aux limites, ont un fort impact sur l'état du système. Pour réaliser ce couplage, les méthodes utilisées actuellement présentent cependant des lacunes, liées notamment à des aspects mathématiques. En particulier les échanges d'informations sont décalés dans le temps et sont représentés de manière inexacte. Ceci peut entraîner notamment une incertitude sur les résultats, et avoir un impact significatif sur les prévisions finales.

Réalisée dans le cadre de l'ANR COCOA, cette thèse s'inscrit dans un projet global d'amélioration de la représentation des interactions océan-atmosphère dans les modèles couplés, afin de rendre leurs prévisions plus fiables. Sur le volet algorithmique, l'idée générale pour mieux rendre compte de ces interactions et pallier au manque de synchronisation évoqué précédemment est d'appliquer un processus itératif sur les modèles actuels. Ceci rentre dans le cadre plus large des algorithmes de Schwarz, bien connus en décomposition de domaines et déjà utilisés dans des contextes multiphysiques. L'objet principal de cette thèse est d'étudier ce processus itératif, sa convergence et son impact sur les modèles d'océan et d'atmosphère.

## Mise en place d'un processus itératif et étude des particularités du cadre océan-atmosphère

La mise en œuvre d'un processus itératif à partir des méthodes de couplage océan-atmosphère actuelles rentrent dans le cadre théorique plus large des algorithmes de Schwarz. Il existe déjà beaucoup d'études sur ces algorithmes dans un cadre mathématique général. Toutefois un modèle couplé océan-atmosphère est très complexe et s'inscrit difficilement tel quel dans un cadre général. Les principales difficultés sont issues du caractère fortement turbulent des deux milieux, et de la complexité de leurs échanges. Dans cette thèse, nous considérons une version simplifiée du couplage océan-atmosphère afin de se rapprocher d'un cadre général où l'application de l'algorithme de Schwarz est mieux connue. Cette étude sur un modèle simplifié peut déjà nous permettre d'appréhender partiellement le comportement que pourra avoir un algorithme de Schwarz pour le couplage océan-atmosphère dans des conditions réalistes. On se concentrera particulièrement sur l'impact des spécificités du cadre océan-atmosphère par rapport aux études "classiques" :

- i) Les particularités dues aux modèles d'océan et d'atmosphère : les modèles simplifiés considérés seront issus des équations de Navier-Stokes avec effet de Coriolis. Cet effet est parfois négligé dans les quelques études sur les algorithmes de Schwarz appliqués aux fluides géophysiques, car il apporte une complication dans la résolution. Nous verrons pourtant qu'il peut avoir un impact fort sur le comportement de l'algorithme. De plus, ces modèles océan et atmosphère sont fortement turbulents et les profils de viscosité qui en découlent seront variables au moins en espace. Nous verrons que cette variabilité a aussi une influence sur le comportement de l'algorithme et doit être prise en compte dans sa globalité.
- ii) Les particularités dues à la modélisation à l'interface : nous verrons que la méthode de couplage peut nécessiter de faire appel à des opérateurs de moyenne lors de l'échange des informations. Cette opération, en plus de modifier la solution obtenue, peut aussi influencer le comportement de l'algorithme. Par ailleurs, du fait de la manière dont est gérée l'interface océan-atmosphère dans les modèles, les conditions d'échange des informations comportent des non-linéarités. Celles-ci amènent une difficulté supplémentaire pour l'étude théorique.

Le cadre usuel d'étude des algorithmes de Schwarz sur des problèmes linéaires nous permet déjà d'appréhender l'impact que peuvent avoir les spécificités de l'item i) (effet de Coriolis, viscosité variable). Il existe des études prenant en compte l'une de ces spécificités pour différents modèles, mais elles ne sont à notre connaissance jamais considérées en même temps dans le cadre qui nous intéresse. Un premier objectif sera de décrire précisément l'influence de ces deux aspects sur l'algorithme. D'autre part, les particularités résultant de la modélisation à l'interface (item ii)) sont très spécifiques à ce problème, il est difficile de les relier à des résultats existants. Par exemple l'utilisation d'opérateurs moyenne comme tel n'est, à notre connaissance, pas étudiée dans la littérature actuelle. Un autre objectif sera donc d'explicitier l'impact de ces opérateurs, et plus largement l'impact du découpage temporel, sur le comportement de l'algorithme dans le cadre linéaire. Enfin, l'application



d'algorithmes de Schwarz à des problèmes non-linéaires n'est étudié que depuis peu, et dans un cadre mathématique très général. Or le couplage océan-atmosphère qui nous intéresse comporte des non-linéarités très spécifiques, qui ne rentrent a priori pas dans le cadre des travaux existants. Un dernier objectif pour cette thèse sera d'appréhender l'étude du couplage avec ces non-linéarités, et de faire des liens éventuels avec ce qui aura pu être montré dans le cadre linéaire.

### **Organisation du manuscrit**

Cette thèse est divisée en cinq chapitres. Nous exposerons d'abord les modèles océan et atmosphère au chapitre 1 ainsi que la façon dont les conditions limites à l'interface air-mer sont traitées. Ceci permettra d'introduire le problème couplé océan-atmosphère qui sera considéré dans la suite de cette thèse. Ce problème étant non linéaire, nous en construirons une version simplifiée linéaire, connue sous le terme de problème en couche d'Ekman. Nous discuterons ensuite dans le chapitre 2 des méthodes de couplage utilisées actuellement dans le contexte océan-atmosphère. Nous verrons les inconvénients de ces méthodes pour bien représenter les interactions air-mer, mais aussi que l'application d'un processus itératif permettrait de corriger ce point. De telles méthodes itératives peuvent s'inscrire dans le cadre des algorithmes de Schwarz, qui seront rapidement présentés dans le cadre linéaire à la fin du chapitre 2. La dimension temporelle du problème et son découpage en fenêtres (voir item ii) précédemment) ont une importance particulière sur le comportement de l'algorithme. Ce point sera discuté au chapitre 3 dans un cadre général. Le chapitre 4 étudie l'application d'un algorithme de Schwarz sur le problème simplifié en couche d'Ekman dérivé au chapitre 1. On étudiera notamment l'impact des particularités des modèles océan et atmosphère mentionnées précédemment (voir item i)). Le caractère non-linéaire sera finalement pris en compte au chapitre 5 qui constitue une première étude sur l'impact de non-linéarités spécifiques au couplage océan-atmosphère. Nous concluons ce manuscrit en synthétisant les principaux résultats obtenus dans cette thèse, et les perspectives qui peuvent être envisagées pour de futurs travaux.



# Chapitre 1

## Modèles mathématiques des interactions océan-atmosphère

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Modélisation numérique des écoulements océaniques et atmosphériques . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1	Dérivation des équations à grande échelle . . . . .	6
1.1.2	Décomposition de Reynolds et hypothèse de Boussinesq . . . . .	8
1.1.3	Conditions de bords . . . . .	10
1.1.4	Simplification des modèles océan et atmosphère . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Modélisation des échanges océan-atmosphère . . . . .</b>	<b>12</b>
1.2.1	Paramétrisation de la couche limite de surface . . . . .	13
1.2.2	Gestion de l'interface dans les modèles couplés OA . . . . .	17
1.2.3	Une paramétrisation plus cohérente de la couche limite de surface	17
<b>1.3</b>	<b>Le modèle couplé océan-atmosphère . . . . .</b>	<b>19</b>
1.3.1	Conditions de couplage . . . . .	20
1.3.2	Les viscosités turbulentes considérées . . . . .	21
1.3.3	Le modèle couplé considéré . . . . .	22

---

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions de base permettant de formuler le problème de couplage océan-atmosphère. Nous considérons que l'océan et l'atmosphère sont définis par les domaines  $\Omega_\alpha$  avec  $\alpha \in \{o, a\}$ . Chaque  $\Omega_\alpha$  est délimité par l'interface d'un côté, et par la hauteur/profondeur maximale  $z_\alpha^\infty$  de l'autre. Dans ce chapitre et les suivants, la notation  $(a, b)$  est définie par :

$$(a, b) = \begin{cases} ]a, b] & \text{si } a < b \\ [b, a[ & \text{si } a > b \end{cases}$$

Nous présentons tout d'abord les équations qui régissent les écoulements océaniques et atmosphériques à grande échelle en section 1.1. La section 1.2 décrit ensuite plus en détails les différentes lois empiriques sur lesquelles reposent la modélisation de l'interface océan-atmosphère. Finalement nous présentons en section 1.3 une version simplifiée du problème de couplage qui sera utilisée dans la suite de cette thèse.

## 1.1 Modélisation numérique des écoulements océaniques et atmosphériques

Les équations constitutives des modèles numériques décrivant la circulation des océans et de l'atmosphère sont issues des équations générales de la mécanique des fluides. Dans le paragraphe 1.1.1 nous présentons tout d'abord les principales étapes qui permettent d'établir le système d'équations qui formera les *équations primitives* pour l'atmosphère et l'océan. Du fait du caractère turbulent des écoulements considérés, notamment à proximité de l'interface air-mer, les équations primitives doivent être adaptées pour prendre en compte les *échelles sous-maille* comme nous l'expliquerons dans le paragraphe 1.1.2. Nous détaillerons ensuite dans le paragraphe 1.1.3 les conditions d'interface et nous discuterons la façon dont elles sont formulées à l'heure actuelle dans les modèles numériques. Enfin, le paragraphe 1.1.4 donne des simplifications qu'on appliquera aux modèles océan et atmosphère pour la suite de cette thèse.

### 1.1.1 Dérivation des équations à grande échelle

Pour modéliser les milieux océanique et atmosphérique, nous partons des équations de Navier-Stokes formulées dans un repère tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Elles font intervenir les quantités physiques suivantes :

- la vitesse du fluide  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  en  $\text{m.s}^{-1}$
- la pression  $p$  en  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$
- la masse volumique  $\rho$  en  $\text{kg.m}^{-3}$

$x$  et  $y$  représentent les directions horizontales et  $z$  la direction verticale. Ces équations s'écrivent sous forme advective :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \\ \rho (\partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nu^m \Delta \mathbf{U} - \rho \mathbf{g} - 2\Omega \times (\rho \mathbf{U}) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{g}$  représente l'accélération due à la gravité et  $\nu^m$  une viscosité dite moléculaire. Pour différencier les variables océaniques et atmosphériques, nous utiliserons dans la suite un indice  $\alpha$  avec  $\alpha \in \{o, a\}$ , comme c'est le cas pour les domaines  $\Omega_\alpha$ .

Du fait des échelles caractéristiques des écoulements océaniques et atmosphériques, un certain nombre d'hypothèses physiques sont traditionnellement appliquées afin de simplifier (1.1). Les hypothèses classiques sont les suivantes :

- *Approximation géoïde sphérique* : le champ gravitationnel est parfaitement vertical, à savoir  $\mathbf{g} = (0, 0, g)^T$  avec  $g \approx 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .
- *Approximation traditionnelle* : les termes associés aux composantes horizontales de  $\mathbf{\Omega}$  sont négligés. On supposera  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, f/2)^T$  avec  $f$  qui varie en fonction de la latitude.
- *Hypothèse hydrostatique* : les termes liés à l'accélération verticale dans l'équation pour  $w$  sont négligés devant le gradient de pression et la force de gravité. On remplace alors l'équation d'évolution pour  $w$  par l'équilibre (dit hydrostatique)  $\partial_z p = -\rho g$ . Cette hypothèse est systématiquement faite dans les modèles d'océan et d'atmosphère utilisés pour la simulation du climat.
- *Approximation de Boussinesq* (BOUSSINESQ, 1903) : les variations de  $\rho$  sont très faibles et oscillent autour d'une valeur constante  $\rho_0$ . On note pour la suite  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$  où la perturbation  $\tilde{\rho}$  est donnée par une équation d'état (*EOS : equation of state*) qui sera fonction de la thermodynamique (pression, température, salinité, humidité, etc.); on notera  $\tilde{\rho} = \rho_{\text{eos}}(\psi)$  où  $\psi$  représente symboliquement un état thermodynamique donné. L'approximation de Boussinesq consiste à négliger  $\tilde{\rho}$  sauf lorsqu'il est "multiplié" par  $\mathbf{g}$ . Bien que cette hypothèse n'est en pratique valable que dans l'océan, nous la considérons aussi dans l'atmosphère pour des soucis de simplicité, sans perdre pour autant la généralité de notre étude.

Après toutes ces hypothèses, le système (1.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{U}_\alpha = 0 \\ \partial_t u_\alpha + \nabla \cdot (\mathbf{U}_\alpha u_\alpha) = -\frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_x p_\alpha + \nu_\alpha^m \Delta u_\alpha + f v_\alpha \\ \partial_t v_\alpha + \nabla \cdot (\mathbf{U}_\alpha v_\alpha) = -\frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_y p_\alpha + \nu_\alpha^m \Delta v_\alpha - f u_\alpha \\ \partial_z p_\alpha + (\rho_{0,\alpha} + \tilde{\rho}_\alpha) g = 0 \\ \tilde{\rho}_\alpha = \rho_{\text{eos}}(\psi_\alpha) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où  $\alpha \in \{o, a\}$ . Le système (1.2) correspond aux équations primitives, pour lesquelles la pression est calculée via l'équilibre hydrostatique et la vitesse verticale  $w_\alpha$  est obtenue via l'équation de continuité. Dans la suite de ce document on supposera que l'état thermodynamique  $\psi_\alpha$  est une donnée du problème, alors que généralement dans les modèles celui-ci est issu d'équations d'évolution supplémentaires pour des quantités telles que la température, la salinité et l'humidité. Cependant nous avons choisi de nous focaliser sur la dynamique du système couplé océan-atmosphère en négligeant les échanges de masse et de chaleur entre les deux milieux. Ceci nous permet de garder une certaine pédagogie et de rester abordable pour des lecteurs peu familiers avec les écoulements géophysiques.

Les équations (1.2) ne sont pas celles directement résolues numériquement dans les modèles de prévision. En effet, les échelles spatio-temporelles caractéristiques des écoulements océaniques et atmosphériques couvrent un très large spectre allant de la micro-échelle  $O(10^{-3}\text{m}, 10^{-3}\text{s})$  à l'échelle globale  $O(10^7\text{m}, 10^{10}\text{s})$ . La résolution numérique directe des équations (1.2) nécessiterait donc une résolution spatiale et temporelle très fine (de l'ordre du centimètre et de la micro-seconde) pour représenter toutes les échelles du problème. Sous ces conditions, le coût de calcul associé serait inabordable. En pratique, les modèles contiennent donc des paramétrisations dites sous-maille, qui permettent de représenter empiriquement les interactions entre les échelles résolues par un maillage donné et les échelles sous-maille.

### 1.1.2 Décomposition de Reynolds et hypothèse de Boussinesq

Afin de tenir compte des fines échelles non résolues du fait d'une résolution spatiale et temporelle insuffisante des modèles, les équations (1.2) doivent être complétées par des schémas de paramétrisation "sous-maille". L'approche classique pour introduire ces paramétrisations consiste à utiliser la *décomposition de Reynolds* (REYNOLDS, 1895). Cette approche repose sur la décomposition de chaque variable de l'écoulement en deux composantes, l'une "résolue" et l'autre "non résolue" par la grille de calcul. Le système obtenu sera alors fermé à l'aide de schémas empiriques appelés fermetures turbulentes sous-maille qui sont souvent formulées via l'hypothèse de Boussinesq.

**La décomposition de Reynolds** Chaque variable  $X$  est décomposée en  $X = \langle X \rangle + X'$  où

- $\langle X \rangle$  est la partie *moyenne*. Elle représente la valeur moyenne de la variable sur une maille de calcul, ou encore sa partie à grande échelle. Un exemple de "moyenne" serait la vraie moyenne temporelle ou spatiale sur une maille.
- $X'$  est la partie *turbulente*. Elle représente une fluctuation sous-maille, c'est-à-dire la partie turbulente qui agit dans les petites échelles.

On supposera que l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \langle X' \rangle &= 0 \\ \langle \partial_\beta X \rangle &= \partial_\beta \langle X \rangle \quad \beta \in \{t, x, y, z\} \\ \langle \langle X \rangle \rangle &= \langle X \rangle \\ \langle \langle X \rangle Y \rangle &= \langle X \rangle \langle Y \rangle \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette décomposition peut être appliquée comme telle aux équations (1.2). Par souci de lisibilité, nous ne donnons ici que l'exemple de cette décomposition appliquée au membre de gauche de l'équation d'évolution de  $u_\alpha$  dans (1.2) :

$$\begin{aligned} \partial_t(\langle u_\alpha \rangle + u'_\alpha) + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle + \mathbf{U}'_\alpha)(\langle u_\alpha \rangle + u'_\alpha) &= \partial_t \langle u_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \langle u_\alpha \rangle) + \nabla \cdot (\mathbf{U}'_\alpha u'_\alpha) \\ &\quad + \partial_t u'_\alpha + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle u'_\alpha) + \nabla \cdot (\mathbf{U}'_\alpha \langle u_\alpha \rangle) \end{aligned} \tag{1.4}$$

En appliquant de nouveau l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$ , de nombreux termes s'annulent grâce aux propriétés (1.3), et il en résulte l'équation d'évolution suivante pour  $\langle u_\alpha \rangle$  :

$$\partial_t \langle u_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \langle u_\alpha \rangle) = -\frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_x \langle p_\alpha \rangle + \nu_\alpha^m \Delta \langle u_\alpha \rangle + f \langle v_\alpha \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{U}'_\alpha u'_\alpha \rangle \quad (1.5)$$

Les mêmes opérations peuvent être appliquées sur les autres équations de (1.2) pour obtenir un système sur les composantes moyennes de chaque variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \langle \mathbf{U}_\alpha \rangle = 0 \\ \partial_t \langle u_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \langle u_\alpha \rangle) = -\frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_x \langle p_\alpha \rangle + \nu_\alpha^m \Delta \langle u_\alpha \rangle + f \langle v_\alpha \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{U}'_\alpha u'_\alpha \rangle \\ \partial_t \langle v_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \langle v_\alpha \rangle) = -\frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_y \langle p_\alpha \rangle + \nu_\alpha^m \Delta \langle v_\alpha \rangle - f \langle u_\alpha \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{U}'_\alpha v'_\alpha \rangle \\ \partial_z \langle p_\alpha \rangle + (\rho_{0,\alpha} + \tilde{\rho}_\alpha) g = 0 \\ \tilde{\rho}_\alpha = \rho_{\text{eos}}(\langle \psi_\alpha \rangle) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Il reste donc à exprimer les termes "turbulents"  $\langle \mathbf{U}'_\alpha Y'_\alpha \rangle$  ( $Y_\alpha = u_\alpha, v_\alpha$ ) en fonction des composantes moyennes pour aboutir à un système ne faisant intervenir que ces dernières.

**Hypothèse de Boussinesq** Pour fermer le système (1.6) et modéliser l'effet des termes liés à la turbulence sous-maille, l'*hypothèse de Boussinesq* (BOUSSINESQ, 1897) est traditionnellement utilisée. Cette hypothèse repose sur l'observation que la turbulence est responsable d'une diffusion plus forte que la diffusion moléculaire et agit principalement "contre-gradient", ce qui fournit une fermeture de la forme :

$$\langle \mathbf{U}'_\alpha Y'_\alpha \rangle = -(\nu_{\alpha,x}^t \partial_x \langle Y_\alpha \rangle, \nu_{\alpha,y}^t \partial_y \langle Y_\alpha \rangle, \nu_{\alpha,z}^t \partial_z \langle Y_\alpha \rangle)^T$$

où  $\nu_{\alpha,\bullet}^t$  sont des *viscosités turbulentes* dépendant ici potentiellement de l'espace et du temps ainsi que d'autres paramètres<sup>1</sup>. En pratique ces viscosités turbulentes sont calculées par des schémas de paramétrisation plus ou moins complexes, dont nous donnerons quelques exemples par la suite. Notons que les valeurs de  $\nu_\alpha^t$  sont fortement anisotropes et on distinguera bien la direction verticale et les directions horizontales. Afin de se rapprocher des notations standards en mécanique des fluides, on introduit le *tenseur de contraintes* suivant :

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = -\langle p_\alpha \rangle \mathbf{I}_3 + \rho_{0,\alpha} \begin{pmatrix} (\nu_{\alpha,x}^t + \nu_\alpha^m) \partial_x \langle u_\alpha \rangle & (\nu_{\alpha,x}^t + \nu_\alpha^m) \partial_x \langle v_\alpha \rangle & 0 \\ (\nu_{\alpha,y}^t + \nu_\alpha^m) \partial_y \langle u_\alpha \rangle & (\nu_{\alpha,y}^t + \nu_\alpha^m) \partial_y \langle v_\alpha \rangle & 0 \\ (\nu_{\alpha,z}^t + \nu_\alpha^m) \partial_z \langle u_\alpha \rangle & (\nu_{\alpha,z}^t + \nu_\alpha^m) \partial_z \langle v_\alpha \rangle & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{I}_3$  la matrice identité. On peut ainsi réécrire (1.6) sous la forme compacte suivante :

$$\partial_t \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \otimes \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle) = -f \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle - \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_\alpha}{\rho_{0,\alpha}}\right) \mathbf{g} + \frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha \quad (1.8a)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U}_\alpha \rangle = 0 \quad (1.8b)$$

$$\tilde{\rho}_\alpha = \rho_{\text{eos}}(\langle \psi_\alpha \rangle) \quad (1.8c)$$

1. l'exposant  $\cdot^t$  désigne l'adjectif *turbulente*

où  $\mathbf{V}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha, 0)^T$ ,  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^T$  et  $\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \otimes \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = \langle \mathbf{U}_\alpha \rangle \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^T$ . Le système (1.8) correspond à ce qu'on appelle communément les *Reynolds-averaged primitive equations*. Dans la suite nous allons négliger les  $\langle \cdot \rangle$  dans les notations. Les premiers travaux d'analyse mathématique de ces équations primitives remontent à LIONS et al., 1992 et LIONS et al., 1995 ; voir aussi LI et TITI, 2018 pour une revue récente des résultats existants.

### 1.1.3 Conditions de bords

Le système (1.8) est complété par des conditions de bords. Dans la suite, les bords latéraux ne seront pas considérés (pour des applications globales, les conditions aux bords sont périodiques). Nous nous intéressons donc uniquement aux conditions sur les bords "horizontaux" (à savoir le haut de l'atmosphère, le fond de l'océan et l'interface océan-atmosphère). Tout d'abord définissons les vecteurs unitaires normaux aux bords extérieurs :

$$\mathbf{n}_{a,\infty} = (0, 0, -1)^T, \quad \mathbf{n}_{o,\infty} = (0, 0, 1)^T$$

On suppose donc que l'océan est à fond plat (c'est en fait plutôt une limite horizontale avec l'océan profond - voir figure 1.1). On introduit également le vecteur localement normal à la surface libre océanique  $\eta(x, y, t)$  :

$$\mathbf{n}_\Gamma = \frac{\nabla(z - \eta)}{\|\nabla(z - \eta)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2 + (\partial_y \eta)^2}} (-\partial_x \eta, -\partial_y \eta, 1)^T$$

- *Conditions aux bords extérieurs* : les vitesses normales sont supposées nulles et les vitesses tangentielles ainsi que la pression en haut du domaine atmosphère sont spécifiées :

$$\mathbf{U}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{a,\infty} = 0, \quad \mathbf{u}_\alpha(z = z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^{\text{ext}}, \quad p_a(z = z_a^\infty) = p_a^{\text{ext}}$$

avec  $\mathbf{u}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)^T$  la vitesse horizontale, et  $\mathbf{u}_\alpha^{\text{ext}}$  et  $p_a^{\text{ext}}$  supposés connus.

- *Conditions à l'interface  $\Gamma$*  : si on néglige l'évaporation et les précipitations, la condition cinématique de surface pour l'océan est

$$w_o(z = \eta) = \partial_t \eta + u_o(z = \eta) \partial_x \eta + v_o(z = \eta) \partial_y \eta \quad (1.9)$$

Cependant les conditions aux bords usuelles mises en oeuvre dans les modèles couplés négligent systématiquement les variations spatio-temporelles de surface libre, ce qui revient à considérer  $\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma = (0, 0, 1)^T$  au lieu de  $\mathbf{n}_\Gamma$ . En effet, dans le cadre des modèles de climat, les informations liées à la surface libre ne sont pas transmises au modèle atmosphérique qui considère l'océan comme une surface plate immobile localisée à  $z = 0$ . Si les modèles d'océan considèrent bien la condition cinématique de surface (1.9), du côté atmosphérique il est cependant considéré que  $\mathbf{U}_a \cdot \tilde{\mathbf{n}}_\Gamma = 0$ . La dernière condition d'interface, donnée par la continuité des contraintes, s'écrira donc

$$\tilde{\mathbf{n}}_\Gamma^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_a = \tilde{\mathbf{n}}_\Gamma^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_o$$



ce qui se traduit par la continuité de la pression

$$p_o(x, y, z = 0, t) = p_a(x, y, z = 0, t)$$

et la continuité du flux de quantité de mouvement

$$\rho_{0,a}(\nu_{a,z}^t + \nu_a^m)\partial_z \mathbf{V}_a = \rho_{0,o}(\nu_{o,z}^t + \nu_o^m)\partial_z \mathbf{V}_o = \boldsymbol{\tau} \quad (1.10)$$

avec  $\boldsymbol{\tau}$  la tension de vent dont le calcul sera explicité dans la suite de ce chapitre.

### 1.1.4 Simplification des modèles océan et atmosphère

Afin de faciliter l'étude mathématique du couplage océan-atmosphère, nous faisons plusieurs hypothèses pour simplifier le système (1.8).

#### Modèle 1D vertical avec "guide géostrophique"

Une simplification du système (1.8) est réalisée en faisant une hypothèse d'homogénéité horizontale<sup>2</sup>, à savoir que les termes en  $\partial_x \bullet$  et  $\partial_y \bullet$  sont négligés à l'exception du gradient de pression horizontal qui est imposé via les vitesses dites géostrophiques :

- Les vents/courants géostrophiques  $\mathbf{u}_\alpha^g$  définis par l'équilibre entre le terme de Coriolis et le gradient de pression

$$\begin{aligned} -f u_\alpha^g &= \frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_y p_\alpha \\ f v_\alpha^g &= \frac{1}{\rho_{0,\alpha}} \partial_x p_\alpha \end{aligned}$$

sont supposés connus, c'est-à-dire qu'on décompose  $\mathbf{u}_\alpha$  en une partie agéostrophique  $\tilde{\mathbf{u}}_\alpha$  et une partie géostrophique :  $\mathbf{u}_\alpha = \tilde{\mathbf{u}}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha^g$ . Remarquons qu'une conséquence de cette simplification est que les équations d'évolution pour  $u_\alpha$  et  $v_\alpha$  telles que données en (1.8) ne dépendent plus de la pression  $p$  et sont donc découplées de l'équilibre hydrostatique.

Après ces hypothèses, les équations pour les vitesses horizontales dans (1.8) deviennent :

$$\partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \partial_z (\nu_\alpha(z, t) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t)) = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{dans } \Omega_\alpha \times ]0, T] \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$  et la viscosité  $\nu_\alpha$  contient la viscosité verticale turbulente et la viscosité moléculaire  $\nu_\alpha = \nu_{\alpha,z}^t + \nu_\alpha^m$ . Quelques exemples de schémas de paramétrisation pour le calcul des viscosités  $\nu_\alpha$  seront donnés au paragraphe 1.3.2. Le système (1.11) est un système classique dérivé initialement par EKMAN, 1905 et très largement utilisé par la communauté des géophysiciens pour étudier le comportement des couches limites turbulentes au voisinage de l'interface air-mer.

---

2. Cette hypothèse est justifiée par la grande disparité qui existe entre les échelles horizontales et verticales

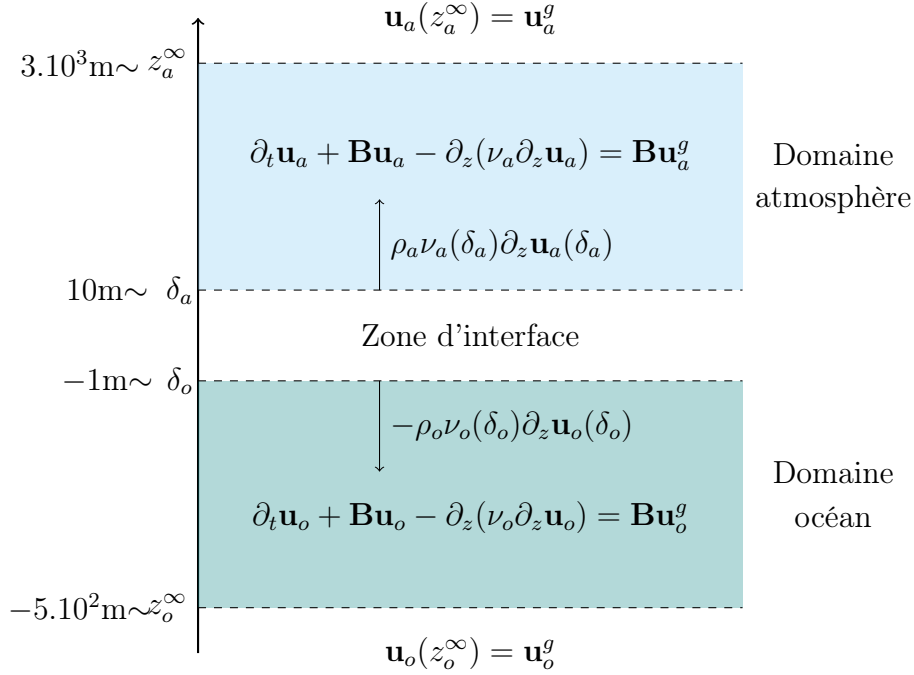


FIGURE 1.1 – Schéma de la géométrie des modèles océan et atmosphère dans cette thèse.

**Conditions de bords** On considère qu'aux bords  $z = z_\alpha^\infty$  et au temps initial  $t = 0$ , les vents/courants sont déterminés par les vents/courant géostrophiques  $\mathbf{u}_\alpha^g$ . Les équations régissant les domaines océan et atmosphère considérées dans cette thèse sont donc finalement :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha(z, t) + \partial_z (\nu_\alpha(z, t, \dots) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t)) &= \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha^g && \text{sur } \Omega_\alpha \times ]0, T] \\
 \mathbf{u}_\alpha(t, z_\alpha^\infty) &= \mathbf{u}_\alpha^g && \text{sur } ]0, T] \\
 \mathbf{u}_\alpha(t = 0, z) &= \mathbf{u}_\alpha^g && \text{sur } \Omega_\alpha \\
 \nu_\alpha \partial_z \mathbf{u}_\alpha(0, t) &= \text{cond. d'interface} && \text{sur } ]0, T]
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

La figure 1.1 présente un schéma récapitulatif de ces équations et des ordre de grandeurs des dimensions de chaque domaine.

A ce stade, il nous reste à discuter la façon dont est calculée la tension de vent  $\boldsymbol{\tau}$  dans (1.10). Cette tension de vent est directement reliée aux termes turbulents  $\langle w'_\alpha \mathbf{u}'_\alpha \rangle$  issus de la décomposition de Reynolds et son calcul est donc issu d'une paramétrisation .

## 1.2 Modélisation des échanges océan-atmosphère

Jusqu'à maintenant nous avons supposé que les échanges entre les deux milieux se faisaient via une interface 2-D commune et immobile, comme cela est implicitement formulé dans les modèles numériques de climat. Dans cette section nous précisons cependant que pour être cohérent avec les hypothèses des paramétrisations des flux air-mer, il faudrait considérer une zone d'interface 3-D plus étendue qu'une interface localisée en  $z = 0$ .

Les paramétrisations classiques considérées dans cette zone d'interface seront d'abord détaillées au paragraphe 1.2.1, puis leur incidence sur la géométrie du problème à considérer sera discutée dans le paragraphe 1.2.2. Nous aboutirons finalement à une formulation originale du problème de couplage océan-atmosphère qui lève un certain nombre d'ambiguïtés par rapport à la façon dont les modèles couplés le traitent.

### 1.2.1 Paramétrisation de la couche limite de surface

**L'interface air-mer** Les deux fluides océan et atmosphère échangent des flux de différentes natures (quantité de mouvement, de masse, de chaleur, etc.) au travers de leur interface. Cette interface n'a pas de géométrie fixe : elle bouge au cours du temps par l'effet des vagues et du vent, et dépend donc de l'état des milieux océan et atmosphère. La notion même d'interface est donc complexe à définir. En toute rigueur, il ne s'agit même pas d'une surface mais plutôt d'une zone 3-D où la transition entre air et eau est progressive. Cette zone peut être d'épaisseur variable (du millimétrique au métrique) suivant l'état de la mer. La région où les fluides "ressentent" la présence de l'interface air-mer est communément appelée *couche limite* dite "*de surface*". Dans la suite nous considérerons que cette couche limite s'étend entre une altitude  $\delta_a$  dans l'atmosphère et une profondeur  $\delta_o$  dans l'océan. Les ordres de grandeur approximatifs sont  $\delta_a \approx 10$  m et  $\delta_o \approx -1$  m. Du fait du caractère fortement turbulent des écoulements dans la région  $]\delta_o, \delta_a[$ , la résolution verticale et horizontale des modèles numériques ne permet pas d'y obtenir une représentation précise des variations spatio-temporelles rapides des solutions. La couche limite de surface doit donc être traitée via un schéma de paramétrisation physique sous-maille dont nous détaillons le contenu dans la suite. Il est important d'approfondir ce point car, entre autres choses, la contrainte de continuité du flux "turbulent" de quantité de mouvement (1.10) nécessite le calcul d'une tension de vent  $\boldsymbol{\tau}$  qui dépend directement de la façon dont est paramétrisée la région  $]\delta_o, \delta_a[$ .

**Description de la couche limite de surface** La paramétrisation des flux turbulents air-mer se base sur un certain nombre d'hypothèses concernant l'écoulement dans la couche limite de surface :

- *Quasi-stationnarité* : on suppose une échelle de temps assez longue pour que les profils soient indépendants du temps.
- *Homogénéité horizontale* : les profils sont indépendants de la coordonnée horizontale
- Les effets dus à la force de Coriolis sont négligeables.

Lorsqu'on applique ces hypothèses au système (1.8), on obtient l'égalité :

$$\partial_z ((\nu_\alpha^m + \nu_{\alpha,z}^t) \partial_z \mathbf{u}_\alpha) = 0$$

qui revient à supposer que la couche limite de surface est une couche à flux constant. Plus précisément, on pourra identifier deux sous-régions dans la couche limite de surface (pour chaque milieu  $\alpha = o, a$ ) :

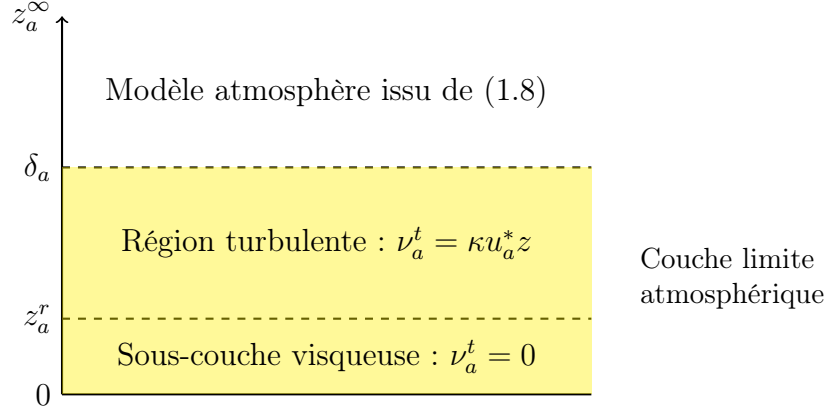


FIGURE 1.2 – Géométrie de la couche limite de surface atmosphérique, avec le profil des viscosités turbulentes.

- une région "turbulente" s'étendant d'une certaine distance  $z_\alpha^r$ , (appelée *longueur de rugosité*, très proche de l'interface) à  $\delta_\alpha$  (avec  $\delta_\alpha \gg z_\alpha^r$ ) où la turbulence domine et les effets moléculaires sont négligeables ;
- une région "non-turbulente", appelée *sous-couche visqueuse*, où les effets moléculaires dominent.

Dans la suite nous détaillons les profils de solutions considérés dans chacune de ces sous-couches, et comment cela se relie au calcul des flux turbulents air-mer. La figure 1.2 illustre les sous-régions de la couche limite de surface pour l'atmosphère.

**Profils de solutions dans la région  $[z_\alpha^r, \delta_\alpha]$**  Sous les hypothèses exposées précédemment, et en supposant négligeables les effets moléculaires, on obtient :

$$\nu_{\alpha,z}^t \partial_z \mathbf{u}_\alpha = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_{0,\alpha}}, \quad z \in [z_\alpha^r, \delta_\alpha] \quad (1.13)$$

Le flux de quantité de mouvement est plus communément exprimé en fonction d'une quantité intermédiaire  $u_\alpha^*$ , homogène à une vitesse et appelée *échelle de friction*, telle que

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \rho_{0,\alpha} (u_\alpha^*)^2 \quad (1.14)$$

De manière expérimentale il a été trouvé que le groupe sans dimension  $\partial_z \|\mathbf{u}_\alpha\| (z/u_\alpha^*)$  est approximativement égal à une constante  $\kappa$  appelée constante de Von Karman dont la valeur est environ 0.41 (MALARDEL, 2005). En introduisant le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_\tau$  dans la direction de la tension de vent, il en découle que

$$\partial_z \mathbf{u}_\alpha = \frac{u_\alpha^*}{\kappa z} \mathbf{e}_\tau \quad (1.15)$$

qui peut être intégré verticalement entre  $z_\alpha^r$  et  $z$  pour obtenir le profil logarithmique :

$$\mathbf{u}_a(z) = \mathbf{u}_a(z_a^r) + \frac{u_a^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_a^r}\right) \mathbf{e}_\tau, \quad z \in [z_a^r, \delta_a] \quad (1.16)$$

$$\mathbf{u}_o(z) = \mathbf{u}_o(z_o^r) - \frac{u_o^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_o^r}\right) \mathbf{e}_\tau, \quad z \in [\delta_o, z_o^r] \quad (1.17)$$

Notons qu'en recombinaison (1.13), (1.14) et (1.15), on trouve aisément que  $\nu_{\alpha,z}^t$  varie linéairement dans la région  $[z_\alpha^r, \delta_\alpha]$  :  $\nu_{\alpha,z}^t = \kappa u_\alpha^* z$ .

**Profils de solution dans la sous-couche visqueuse**  $[0, z_\alpha^r]$  On voit que pour  $z \rightarrow 0$  le profil logarithmique (1.16) devient singulier. Il convient donc de définir la sous-couche visqueuse pour correctement raccorder les solutions océan et atmosphère en  $z = 0$ . Dans la sous-couche visqueuse, la viscosité turbulente  $\nu_{\alpha,z}^t$  est nulle et l'hypothèse de couche à flux constant revient à considérer que  $\mathbf{u}_\alpha(z)$  varie linéairement. En assurant la continuité avec le profil logarithmique à  $z = z_\alpha^r$  et en notant  $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}(z = 0)$ , on obtient :

$$\mathbf{u}_a(z) = \mathbf{u}_\Gamma + \frac{u_a^*}{\kappa} \frac{z}{z_a^r} \mathbf{e}_\tau \quad z \in [0, z_a^r] \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u}_o(z) = \mathbf{u}_\Gamma - \frac{u_o^*}{\kappa} \frac{z}{z_o^r} \mathbf{e}_\tau \quad z \in [0, z_o^r] \quad (1.19)$$

**Calcul des échelles turbulentes  $u_\alpha^*$  et des longueurs de rugosité  $z_\alpha^r$**  Jusqu'à maintenant les profils de solutions ont été définis en fonction d'une vitesse de friction et d'une longueur de rugosité, sans préciser les valeurs de ces deux paramètres. Dans la suite, on se place tout d'abord du point de vue de l'atmosphère en supposant que  $\mathbf{u}_\Gamma$  est connu et que  $\mathbf{u}_a(\delta_a)$  est donné par la résolution numérique des équations primitives. On va combiner (1.16) et (1.18) en envisageant plusieurs options (correspondant à ce qui est utilisé dans différents modèles de climat).

- En supposant  $\mathbf{u}_a(z_a^r) = \mathbf{u}_\Gamma$  et  $z_\alpha^r$  indépendant de  $u_\alpha^*$  :

$$u_a^* = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{\delta_a}{z_a^r}\right)} \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma\|$$

- En supposant la sous-couche visqueuse et  $z_\alpha^r$  indépendant de  $u_\alpha^*$  :

$$u_a^* = \frac{\kappa}{1 + \ln\left(\frac{\delta_a}{z_a^r}\right)} \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma\| \quad (1.20)$$

- En supposant  $\mathbf{u}_a(z_a^r) = \mathbf{u}_\Gamma$  et  $z_\alpha^r = z_\alpha^r(u_\alpha^*)$  :  
une paramétrisation usuelle de la longueur de rugosité  $z_\alpha^r$  est issue de SMITH, 1988 :

$$z_\alpha^r = a_0 \frac{(u_\alpha^*)^2}{g} + b_0 \frac{\nu_\alpha^m}{u_\alpha^*} \quad (1.21)$$

où  $a_0 = 0.018$  est le paramètre de Charnock,  $b_0 = 0.11$  une constante sans unité, et  $\nu_a^m$  la viscosité moléculaire de l'air. Dans ce cas la détermination de  $u_a^*$  nécessite la résolution de l'équation non-linéaire suivante

$$u_a^* \ln \left( \frac{g u_a^* \delta_a}{a_0 (u_a^*)^3 + b_0 \nu_a^m g} \right) = \kappa \| \mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma \| \quad (1.22)$$

- En supposant la sous-couche visqueuse et  $z_\alpha^r = z_\alpha^r(u_a^*)$  :  
en recombinant (1.20) et (1.21) on obtient également une équation non-linéaire à résoudre pour déterminer  $u_a^*$ .

Afin d'unifier ces différentes options possibles, il est usuel d'introduire un coefficient de traînée (*drag coefficient*)  $C_D$ , réel positif défini par

$$u_a^* = \sqrt{C_D} \| \mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma \| \quad (1.23)$$

sachant que dans le cas où la longueur de rugosité est fonction de  $u_a^*$ ,  $C_D$  sera lui-même fonction de la vitesse de friction  $u_a^*$ . En utilisant (1.14) et (1.23) et en notant que  $\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma}{\| \mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma \|}$  on trouve aisément que la tension de vent peut s'exprimer comme

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_{0,a} (u_a^*)^2 \mathbf{e}_\tau = \rho_{0,a} C_D \| \mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma \| (\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_\Gamma) \quad (1.24)$$

où les différents niveaux de complexité dans la formulation de  $u_a^*$  en fonction des hypothèses faites sur  $z_\alpha^r$  sont encapsulés dans le coefficient  $C_D$ .

**Prise en compte de la stratification** Jusqu'à maintenant les variations de densité dans la couche limite de surface ont été ignorées et la théorie présentée est quasi similaire à la théorie de "loi du mur" bien connue en mécanique des fluides. Lorsque l'on prend en compte les variations de densité, comme cela est fait dans les modèles océan-atmosphère réalistes, la théorie de "loi du mur" n'est plus valable. Dans ce cas, une extension de la théorie semi-empirique présentée ci-dessus a été proposée par Monin-Obukhov (MONIN & OBUKHOV, 1954) et est très largement utilisée encore actuellement. Sans rentrer dans les détails, dans le formalisme Monin-Obukhov on ajoute aux paramétrisations issues du modèle sans stratification des *fonctions de stabilité* (habituellement notées  $\Phi_m$  et  $\Phi_h$ ) qui permettent de rendre compte de la stratification et qui mènent à des profils de solution qui ne sont plus purement logarithmiques. Cette prise en compte couple l'échelle de friction  $u^*$  avec d'autres échelles de frictions déterminant d'autres paramètres non pris en compte dans cette thèse (température, salinité, humidité). Dans ce cas, des systèmes d'équations non-linéaires doivent être résolus à chaque pas de temps (via un algorithme appelé *algorithme bulk*). Dans la suite, afin de permettre un maximum de calculs analytiques, nous avons choisi de simplifier notre étude en nous focalisant sur la dynamique en ignorant les effets dus à la stratification.

### 1.2.2 Gestion de l'interface dans les modèles couplés OA

Nous avons introduit jusqu'à maintenant tous les ingrédients permettant de décrire la façon dont les modèles couplés réalistes gèrent l'interface air-mer. Au niveau discret, le modèle d'océan est discrétisé du fond de l'océan jusqu'à la surface libre  $\eta(x, y)$  alors que les modèles d'atmosphère sont généralement discrétisés à partir d'une surface fixe située à un géopotentiel de référence (que l'on référencera comme  $z = 0$  au-dessus des océans) jusqu'à la stratosphère. La couche limite de surface est donc incluse dans le domaine discrétisé, et il est usuellement considéré que l'altitude  $\delta_a$  correspond à celle du centre de la première maille de calcul atmosphérique et  $\delta_o$  à la profondeur à celle du centre de la maille océanique de surface. En pratique, la gestion du couplage se fait alors en général suivant les étapes suivantes :

1. Les informations  $\mathbf{u}_a(\delta_a)$  et  $\mathbf{u}_o(\delta_o)$  sont envoyées à un module de calcul de flux qui, via un algorithme bulk, va calculer les échelles turbulentes ( $u_\alpha^*$  dans notre cas) puis en déduira les flux turbulents d'interface ( $\boldsymbol{\tau}$  dans notre cas). Notons que ce calcul de flux correspond à une résolution d'équation non-linéaire du type (1.22) en considérant que  $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_o(\delta_o)$ , ce qui revient à considérer un profil de vitesse constant entre  $z = \delta_o$  et  $z = z_a^r$  (nous discuterons cette approximation dans la suite).
2. Le calcul des échelles turbulentes permet également de déterminer les viscosités turbulentes  $\nu_{\alpha,z}^t$  sur toute la verticale.
3. Une fois  $\boldsymbol{\tau}$  calculé, ce flux est prescrit à chaque modèle comme condition limite de surface (à  $z = \eta$  dans l'océan et à  $z = 0$  dans l'atmosphère). La connaissance de  $\nu_{\alpha,z}^t$  permet donc d'avoir toutes les informations pour avancer le calcul dans les milieux océan et atmosphère via la résolution des équations primitives (1.8).

Étant donné que les domaines de calcul océan et atmosphère incluent la couche limite de surface, cela signifie que les schémas de discrétisation vont supposer un certain profil de solution (le plus souvent polynomial) dans les zones  $[0, \delta_a]$  et  $[\delta_o, \eta]$  qui sera différent de celui sur lequel le calcul du flux d'interface est basé. Cette incohérence a un certain nombre de conséquences :

- Les profils discrétisés ne se raccordent pas nécessairement de manière continue à l'interface.
- Les paramètres  $\delta_a$  et  $\delta_o$ , censés être des paramètres physiques délimitant la couche limite de surface, sont en pratique imposés par la grille verticale choisie.

### 1.2.3 Une paramétrisation plus cohérente de la couche limite de surface

Comme proposé récemment dans PELLETIER, 2018, une façon de corriger ces incohérences serait d'exclure la zone paramétrisée de couche limite de surface des domaines

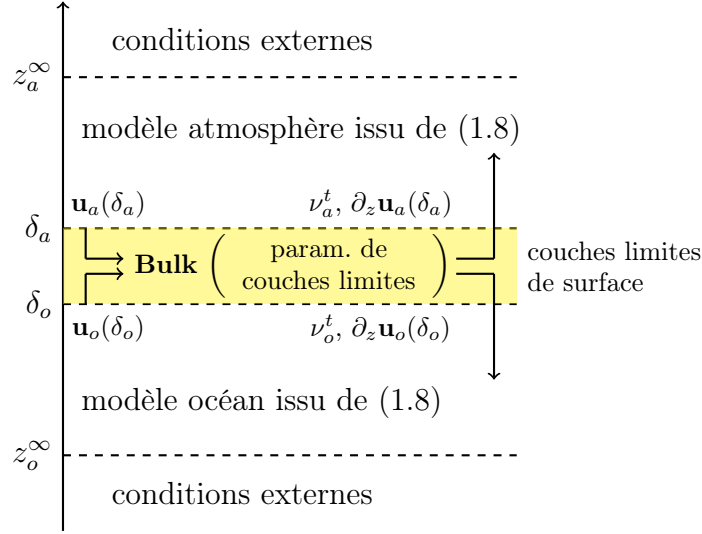


FIGURE 1.3 – Schéma de la zone d'interface dans les modèles couplés océan-atmosphère

de calcul, comme cela est fait dans d'autres domaines de la mécanique des fluides (e.g. MOHAMMADI et al., 1998). La figure 1.3 illustre le procédé.

Cette approche permet également d'ajouter une vraie prise en compte de la couche limite de surface du côté océanique car, comme mentionné ci-dessus, les modèles couplés actuels ne prennent en compte ni la sous-couche visqueuse (ce qui revient à considérer  $\mathbf{u}_a(z_a^r) = \mathbf{u}_o(z_o^r)$ ) ni la couche logarithmique océanique (ce qui revient à considérer  $\mathbf{u}_o(z_o^r) = \mathbf{u}_o(\delta_o)$ ). Dans la suite, cette première version des paramétrisations est appelée "classique". Cette version ne permet pas d'obtenir un profil  $\mathcal{C}^1$  des solutions, sachant qu'il n'y a pas d'arguments physiques justifiant cette "cassure".

Pour y remédier PELLETIER et al., 2020 proposent une version dite "complète", qui permet d'obtenir des profils  $\mathcal{C}^1$ . Celle-ci consiste en l'application d'une loi de type loi du mur également à l'océan, et de paramétrer les sous-couches visqueuses. Nous nous plaçons dans l'hypothèse où on connaît les données  $\mathbf{u}_\alpha(\delta_\alpha)$ . Les paramétrisations de l'interface sont donc données de l'interface  $\delta_\alpha$  vers la surface  $z = 0$ . Nous présentons deux versions :

- **version *one-sided*** : on considère une viscosité turbulente linéaire dans l'atmosphère et des profils constants dans les autres couches :

$$\begin{cases} \partial_z \mathbf{u}_a(z) = \frac{u_a^*}{\kappa z} \mathbf{e}_\tau & z \in [z_a^r, \delta_a] \\ \partial_z \mathbf{u}_a(z) = 0 & z \in ]0, z_a^r] \\ \partial_z \mathbf{u}_o(z) = 0 & z \in [\delta_o, 0[ \end{cases} \quad (1.25)$$



Avec une condition de continuité des profils entre la couche limite et la sous-couche visqueuse dans chaque milieu, nous obtenons un profil de type *log* :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_a(z) = \mathbf{u}_a(\delta_a) - \frac{u_a^*}{\kappa} \ln\left(\frac{\delta}{z}\right) \mathbf{e}_\tau & z \in [z_r^a, \delta_a] \\ \mathbf{u}_a(z) = \mathbf{u}_a(z_r^a) & z \in ]0, z_r^a] \\ \mathbf{u}_o(z) = \mathbf{u}_o(\delta_o) & z \in [\delta_o, 0[ \end{cases} \quad (1.26)$$

Remarquons que dans les modèles classiques, la valeur à la surface  $\mathbf{u}_\Gamma$  est en fait donnée par  $\mathbf{u}_o(\delta_o)$ . De plus, seule l'échelle turbulente  $u_a^*$  et la longueur de rugosité  $z_r^a$  sont présentes dans le problème.

- **version *two-sided*** : On suppose aussi une loi du mur dans la couche limite océanique et on garantit un raccord  $\mathcal{C}^1$  entre les couches limite et les sous-couches visqueuses dans chaque milieu :

$$\begin{cases} \partial_z \mathbf{u}_a(z) = \frac{u_a^*}{\kappa z} \mathbf{e}_\tau & z \in [z_r^a, \delta_a] \\ \partial_z \mathbf{u}_a(z) = \frac{u_a^*}{\kappa z_r^a} \mathbf{e}_\tau & z \in ]0, z_r^a] \\ \partial_z \mathbf{u}_o(z) = -\frac{u_o^*}{\kappa z} \mathbf{e}_\tau & z \in [\delta_o, z_o^r] \\ \partial_z \mathbf{u}_o(z) = -\frac{u_o^*}{\kappa z_o^r} \mathbf{e}_\tau & z \in [z_o^r, 0[ \end{cases} \quad (1.27)$$

ce qui nous donne comme profils de solutions :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_a(z) = \mathbf{u}_a(\delta_a) - \frac{u_a^*}{\kappa} \ln\left(\frac{\delta_a}{z}\right) \mathbf{e}_\tau & z \in [z_r^a, \delta_a] \\ \mathbf{u}_a(z) = \mathbf{u}_a(\delta_a) - \frac{u_a^*}{\kappa} \ln\left(\frac{\delta_a}{z_r^a}\right) \mathbf{e}_\tau - \frac{u_a^*}{\kappa z_r^a} (z_r^a - z) \mathbf{e}_\tau & z \in ]0, z_r^a] \\ \mathbf{u}_o(z) = \mathbf{u}_o(\delta_o) + \frac{u_o^*}{\kappa} \ln\left(\frac{\delta_o}{z}\right) \mathbf{e}_\tau & z \in [\delta_o, z_o^r] \\ \mathbf{u}_o(z) = \mathbf{u}_o(\delta_o) + \frac{u_o^*}{\kappa} \ln\left(\frac{\delta_o}{z_o^r}\right) \mathbf{e}_\tau + \frac{u_o^*}{\kappa z_o^r} (z_o^r - z) \mathbf{e}_\tau & z \in ]0, z_o^r] \end{cases} \quad (1.28)$$

Cette version fait intervenir deux paramètres supplémentaires  $u_o^*$  et  $z_o^r$  qui s'expriment directement en fonction de  $u_a^*$  et  $z_r^a$  comme précisé dans la section suivante.

### 1.3 Le modèle couplé océan-atmosphère

Les sections précédentes ont introduit les différents modèles pour l'océan, l'atmosphère et la zone d'interface. Nous allons dans cette section en dériver un modèle simplifié correspondant au couplage de ce qu'on appelle des *couches d'Ekman*, et sur lequel nous

travaillerons dans cette thèse. Les conditions de couplage se baseront sur la version "complète" de paramétrisation de la couche limite de surface donnée précédemment. Nous donnerons ensuite dans le paragraphe 1.3.2 les différentes formes de viscosité turbulente  $\nu_{\alpha,z}^t$  que l'on va considérer. Enfin le paragraphe 1.3.3 résume ce que l'on va appeler par la suite *le modèle couplé océan-atmosphère*. avec différents degrés de complexification.

### 1.3.1 Conditions de couplage

Nous avons simplifié les modèles océan et atmosphère au §1.1.4 afin de ne travailler que sur des équations 1D de la dynamique horizontale. La section 1.2 a expliqué les différents choix de paramétrisations pour la zone d'interface, il reste maintenant à donner des conditions à la "surface" pour fermer ce système de paramétrisations.

**Condition d'interface** La condition d'interface sur les modèles océan et atmosphère doit permettre de spécifier les termes  $\rho_\alpha \nu_\alpha \partial_z \mathbf{u}_\alpha$ . L'hypothèse de couche à flux constant dans la couche limite de surface conduit à la contrainte de continuité du flux turbulent  $\boldsymbol{\tau}$  (défini en (1.14)) suivante :

$$\rho_{0,o} \nu_o \partial_z \mathbf{u}_o(z = \delta_o) = \rho_{0,a} \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(z = \delta_a) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.29)$$

Si on applique les paramétrisations de la couche limite de surface présentées en §1.2.3, cette condition de couplage peut se réécrire sous la forme  $\rho_{0,o} (u_o^*)^2 = \rho_{0,a} (u_a^*)^2$  ce qui permet d'établir le lien entre les échelles de friction atmosphérique et océanique :

$$u_o^* = \lambda u_a^* \quad \text{avec } \lambda = \sqrt{\frac{\rho_{0,a}}{\rho_{0,o}}} \quad (1.30)$$

Notons que l'équivalent de la définition (1.24) pour  $\boldsymbol{\tau}$  s'écrit

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_{0,a} C_D \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\| (\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o))$$

où les différentes hypothèses sur les profils de couche limite sont contenues dans le coefficient  $C_D$ .

**Conditions en  $z = 0$**  Dans les deux versions, "*one-sided*" et "*two-sided*", on considère une condition de type Dirichlet à l'interface :

$$\mathbf{u}_o(0^-) = \mathbf{u}_a(0^+) \quad (1.31)$$

Pour fermer les paramétrisations *two-sided* dans la couche limite, nous ajoutons une contrainte qui peut être vue comme l'extension de la condition de couplage (1.29) en  $z = 0$  ce qui donne une condition de type Neumann :

$$\rho_o \nu_o^m \partial_z \mathbf{u}_o(0^-) = \rho_a \nu_a^m \partial_z \mathbf{u}_a(0^+) \quad (1.32)$$

Si on applique les paramétrisations de la couche limite "two-sided" données en §1.2.3 à la condition à l'interface (1.32), on obtient le lien entre les deux longueurs de rugosité  $z_\alpha^r$  :

$$\rho_o \frac{\nu_o^m u_o^*}{\kappa z_o^r} = \rho_a \frac{\nu_a^m u_a^*}{\kappa z_a^r} \quad \Longrightarrow \quad z_o^r = -\lambda \frac{\nu_a^m}{\nu_o^m} z_a^r$$

Dans le cadre du couplage océan-atmosphère, on peut généralement poser  $\nu_o^m = \lambda \nu_a^m$ , ce qui revient à l'égalité entre les deux longueurs de rugosité  $z_o^r = -z_a^r$ .

Ces conditions en  $z = 0$  suffisent à fixer la valeur du saut  $\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|$  :

$$\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\| = \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \left(1 + \ln \frac{\delta_a}{z_a^r}\right) + \lambda \left(1 + \ln \frac{\delta_o}{z_o^r}\right) \right]$$

ce qui nous permet d'obtenir une valeur de  $C_D$  qui sera considérée comme telle dans le chapitre 5 :

$$C_D = \left( \frac{\kappa}{\left(1 + \ln \frac{\delta_a}{z_a^r}\right) + \lambda \left(1 + \ln \frac{\delta_o}{z_o^r}\right)} \right)^2$$

$u_a^*$  est exprimé en fonction de  $\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|$  par :  $u_a^* = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|$

### 1.3.2 Les viscosités turbulentes considérées

Nous donnons ici quelques exemples simples de paramétrisations de la couche limite dite planétaire (à ne pas confondre avec la couche limite de surface), qui servent à déterminer le profil de viscosité turbulente  $\nu_{\alpha,z}^t(z)$  à l'intérieur du domaine de calcul (à savoir pour  $z \in [\delta_\alpha, z_\alpha^\infty]$ ).

- *Modèle KPP* (K-Profile-Parameterization, LARGE et al., 1994; MCWILLIAMS & HUCKLE, 2006) : un paramètre important de ce modèle est l'étendue de la couche limite planétaire, notée  $h_\alpha^*$  et estimée par la relation

$$h_\alpha^* = \frac{c_\alpha}{|f|} u_\alpha^* \quad (1.33)$$

avec du côté océanique  $c_o \approx 0.7$  (e.g. MCWILLIAMS & HUCKLE, 2006) et du côté atmosphérique  $c_a \approx 0.2$  (e.g. BENKLEY & SCHULMAN, 1979). Le paramètre  $h_\alpha^*$  correspond à la hauteur/profondeur à laquelle la viscosité revient à sa valeur moléculaire  $\nu_\alpha^m$ , à savoir  $\nu_{\alpha,z}^t(z) = 0$  pour  $z \in [h_\alpha^*, z_\alpha^\infty]$ . Une fois la hauteur/profondeur de couche limite connue, le profil vertical de viscosité est donné par un polynôme de degré 3 en  $z$  qui permet un raccord  $\mathcal{C}^1$  en  $z = \delta_\alpha$  avec le profil linéaire de viscosité de la couche limite de surface, ainsi qu'un raccord  $\mathcal{C}^1$  en  $z = h_\alpha^*$  avec la valeur moléculaire constante  $\nu_\alpha^m$ . Ce type de profil a été proposé par O'BRIEN, 1970 et est encore très largement utilisé dans les modèles de climat d'océan. La figure 1.4 donne un profil typique de viscosité KPP.

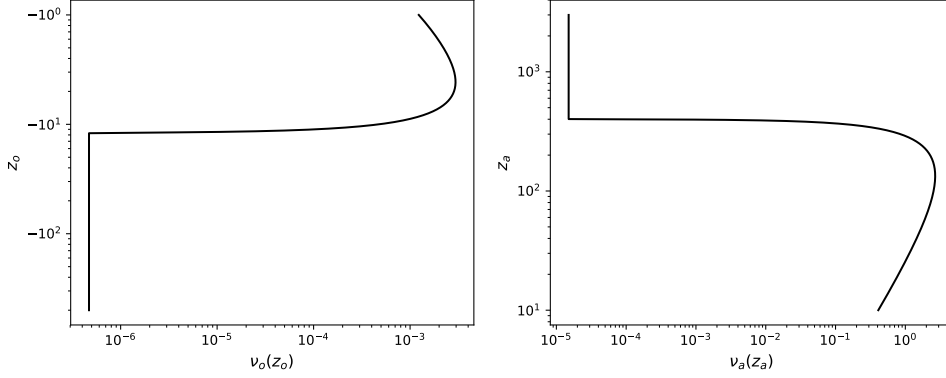


FIGURE 1.4 – Exemple d'un profil de viscosité de type KPP sur  $(\delta_\alpha, z_\alpha^\infty)$ , dans l'océan à gauche et l'atmosphère à droite, pour  $f = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $u_a^* = 0.1$  et  $u_o^* = \frac{\rho_a}{\rho_o} u_a^*$ .

- *Modèle TKE "à 1 équation"* : une autre forme de viscosité qui sera (succintement) considérée au chapitre 5 donne la viscosité turbulente comme

$$\nu_{\alpha,z}^t(u_\alpha^*, \partial_z \mathbf{u}_\alpha) = L^2(z, u_\alpha^*) \|\partial_z \mathbf{u}_\alpha(z)\| \quad (1.34)$$

avec  $L$  une quantité homogène à une longueur, appelée "longueur de mélange". Ce modèle est dérivé à partir d'une équation d'évolution pour l'énergie cinétique turbulente. Cette viscosité transforme la forme globale des modèles océan et atmosphère en une équation non linéaire faisant apparaître un terme  $\partial_z ([L^2(z, u_\alpha^*) \|\partial_z \mathbf{u}_\alpha\|] \partial_z \mathbf{u}_\alpha)$ .

**Condition sur la viscosité** La condition (1.29) donnée aux modèles océan et atmosphère en  $\delta_\alpha$  vérifie :

$$\rho_\alpha \nu_\alpha(\delta_\alpha) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(\delta_\alpha) = \rho_\alpha (u_\alpha^*)^2 \mathbf{e}_\tau \quad (1.35)$$

Pour assurer un profil  $\mathcal{C}^1$  des vents/courants  $\mathbf{u}_\alpha$  en  $\delta_\alpha$ , et suivant les paramétrisations données en §1.2.3, on obtient comme condition sur les viscosités :

$$\nu_\alpha^t(\delta_\alpha) = \kappa u_\alpha^* |\delta_\alpha| \quad (1.36)$$

### 1.3.3 Le modèle couplé considéré

Pour finir, nous donnons ici la définition du modèle couplé océan-atmosphère tel que considéré dans la suite de cette thèse, en envisageant deux degrés de difficulté. Nous faisons l'hypothèse générale que l'interface est paramétrisée par la version "*two-sided*", et nous appellerons *modèle couplé océan-atmosphère* ou *modèle couplé océan-atmosphère simplifié*, les deux modèles suivants.

### Le modèle couplé OA

Dans un cadre général, le modèle couplé océan-atmosphère s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(z, u_\alpha^*) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t)) = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \times ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g(z_\alpha^\infty, t) & \text{sur } ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z, 0) = \mathbf{u}_\alpha^g(z, 0) & \text{sur } [z_o^\infty, z_a^\infty] \\ \rho_o \nu_o \partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o) = \rho_a \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) = \rho_a C_D \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\| \quad (\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)) & \end{array} \right. \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nu_\alpha(z, u_\alpha^*) = \nu^t(z, u_\alpha^*) + \nu_\alpha^m$ , et  $C_D$  et  $u_\alpha^*$  sont calculés suivant les paramétrisations *two sided* données au §1.2.3. Les paramétrisations de la zone d'interface contiennent donc les conditions à l'interface :

$$\mathbf{u}_o(0^-, t) = \mathbf{u}_a(0^+, t) \quad \text{sur } ]0, T] \quad (1.38a)$$

$$\rho_a \nu_a^m \partial_z \mathbf{u}_a(0^+, t) = \rho_o \nu_o^m \partial_z \mathbf{u}_o(0^-, t) \quad \text{sur } ]0, T] \quad (1.38b)$$

Dans les modèles utilisés actuellement, les conditions d'interface en  $\delta_\alpha$  données en (1.37) sont généralement exprimées par une formulation équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(z, u_\alpha^*) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t)) = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \times ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g(z_\alpha^\infty, t) & \text{sur } ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z, 0) = \mathbf{u}_\alpha^g(z, 0) & \text{sur } [z_o^\infty, z_a^\infty] \\ \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) = (u^*)^2 \frac{\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)}{\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|} & \\ \rho_o \nu_o \partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o) = \rho_a \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) & \end{array} \right. \quad (1.39)$$

avec  $u^* = u_\alpha^*$  échelle de vitesse turbulente solution d'une équation non-linéaire de la forme

$$u^* = \sqrt{C_D(u^*)} \|\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|$$

(1.39) sera appelé le *problème couplé océan-atmosphère*, et étudié tel quel au chapitre 5.

### Le modèle couplé OA simplifié

Nous étudierons dans le chapitre 4 une version simplifiée de ce modèle couplé OA. On suppose dans un premier temps que  $u^*$  est fixé, ce qui permet d'avoir des équations linéaires de type diffusion sur  $(\delta_\alpha, z_\alpha^\infty)$  dans l'océan et dans l'atmosphère. Les paramétrisations des couches limites de surface peuvent également être formulées en terme d'équations de type diffusion. Afin d'exprimer l'ensemble du problème sur  $(0, z_\alpha^\infty)$  comme une EDP "classique", on simplifie la viscosité sur ces couches par  $\nu_\alpha^{\text{CLS}} = \kappa u_\alpha^* z + \nu_\alpha^m$ . Cette modification revient à considérer que  $\nu_\alpha^m \approx \kappa u_\alpha^* z_\alpha^r$  (cette supposition est en adéquation avec la

définition de  $z_\alpha^r$ ). On pourra ainsi définir  $\mathbf{u}_\alpha$  comme solution du problème de diffusion sur tout le domaine. Une version simplifiée du problème couplé océan-atmosphère sera donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(z) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t)) = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } (0, z_\alpha^\infty) \times ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g(z_\alpha^\infty, t) & \text{sur } ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z, 0) = \mathbf{u}_\alpha^g(z, 0) & \text{sur } [z_o^\infty, z_a^\infty] \\ \\ \mathbf{u}_o(0^-, t) = \mathbf{u}_a(0^+, t) & \text{sur } ]0, T] \\ \rho_a \nu_a^m \partial_z \mathbf{u}_a(0^+, t) = \rho_o \nu_o^m \partial_z \mathbf{u}_o(0^-, t) & \text{sur } ]0, T] \end{array} \right. \quad (1.40)$$

avec  $\nu_\alpha \in \mathcal{C}^1(0, z_\alpha^\infty)$  donné par

$$\nu_\alpha(u^*, z) = \begin{cases} \nu_\alpha^t(u^*, z) + \nu_\alpha^m & \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \\ \kappa u^* z + \nu_\alpha^m & \text{sur } (0, \delta_\alpha) \end{cases} \quad (1.41)$$

Ce problème est appelé *problème couplé océan-atmosphère simplifié* et sera étudié au chapitre 4.

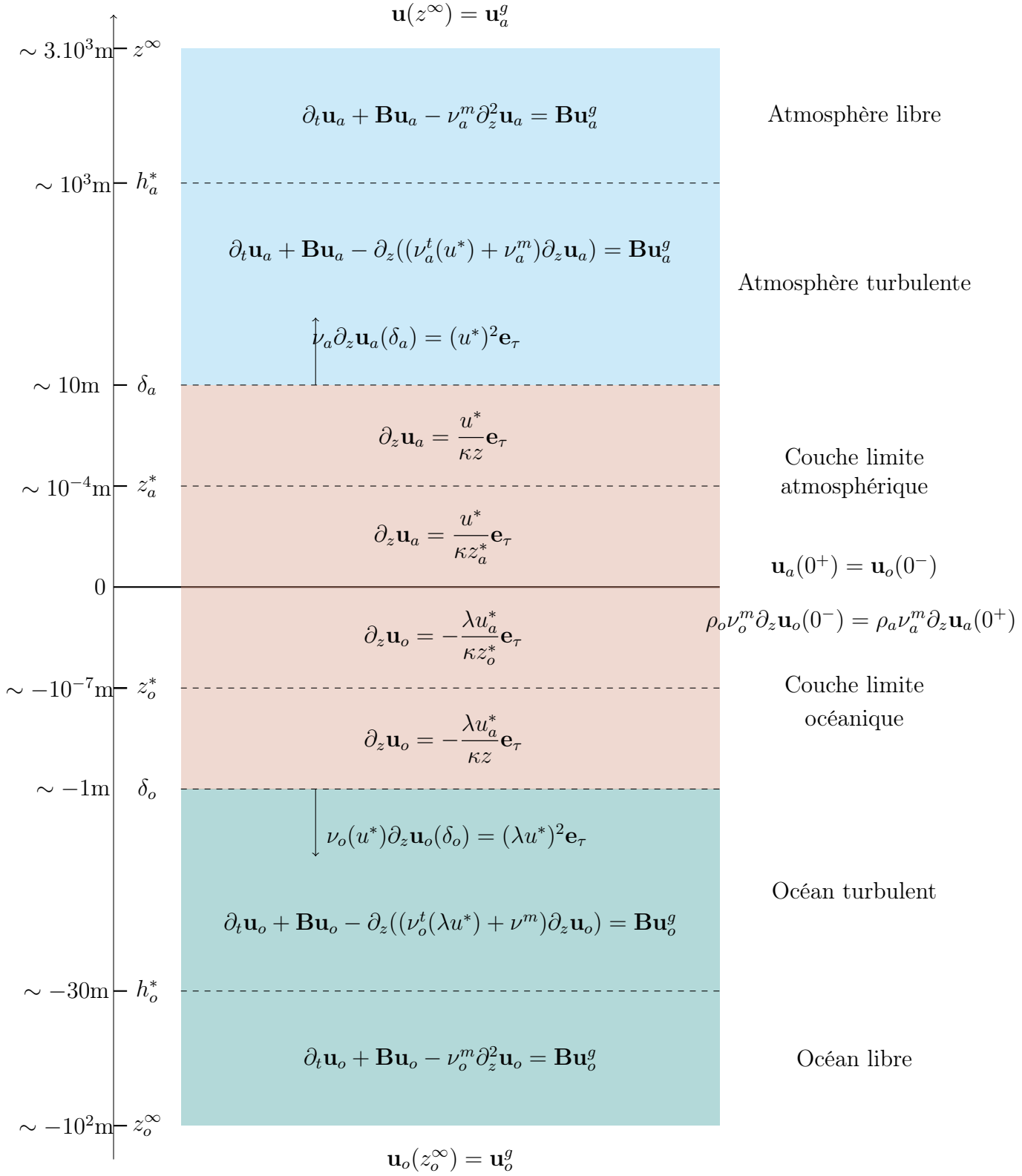


FIGURE 1.5 – Le modèle couplé océan-atmosphère complet. L'exposant  $\cdot^*$  signifie une dépendance au paramètre  $u^*$ . Dans le cadre "réaliste",  $u^*$  dépend de  $\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|$ . Dans le cadre "simplifié",  $u^*$  est fixé.





# Chapitre 2

## Couplage océan-atmosphère et méthodes de Schwarz

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Les méthodes de couplage Océan-Atmosphère . . . . .</b>	<b>28</b>
2.1.1	Contraintes sur les méthodes de couplage . . . . .	28
2.1.2	Les méthodes de couplage océan-atmosphère actuelles . . . . .	29
2.1.3	Vers un processus itératif : les algorithmes de Schwarz . . . . .	33
<b>2.2</b>	<b>Présentation générale des algorithmes de Schwarz . . . . .</b>	<b>35</b>
2.2.1	Algorithme de Schwarz pour la décomposition de domaine . . . . .	36
2.2.2	Facteur de convergence . . . . .	41
2.2.3	Optimisation de la convergence . . . . .	46
<b>2.3</b>	<b>Algorithme de Schwarz pour le couplage multiphysique . . . . .</b>	<b>49</b>
2.3.1	Le cadre multiphysique . . . . .	49
2.3.2	Travaux antérieurs en lien avec notre problématique . . . . .	54

---

Le chapitre 1 avait pour objectif de formaliser mathématiquement le problème de couplage océan-atmosphère. Nous nous intéressons maintenant à l'aspect algorithmique de ce type de couplage. Dans la section 2.1 nous faisons un rapide tour d'horizon des méthodes actuellement utilisées pour le couplage océan atmosphère. Nous proposons une approche alternative à ces méthodes en se rapprochant d'algorithmes couramment utilisés dans la décomposition de domaine, *les algorithmes de Schwarz*. La section 2.2 présente un état de l'art des algorithmes de Schwarz dans le cadre très général des décompositions de domaines. Nous verrons en section 2.3 comment ces algorithmes s'adaptent aux spécificités du couplage multiphysique.

## 2.1 Les méthodes de couplage Océan-Atmosphère

Nous exposons dans cette section les méthodes de couplage qui pourraient s'adapter au cas océan-atmosphère. Par souci de simplicité, nous considérons ici une formulation abstraite pour le couplage océan-atmosphère de type :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}} = F_{\text{atm}} & \text{dans } \Omega_{\text{atm}} \times [0, T] \\ \mathcal{L}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}} = F_{\text{oce}} & \text{dans } \Omega_{\text{oce}} \times [0, T] \\ \mathcal{F}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}|_{\Gamma_{\text{atm}}} = \mathcal{F}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}}|_{\Gamma_{\text{oce}}} = \mathcal{F}_{\text{OA}}(\mathbf{U}_{\text{atm}}|_{\Gamma_{\text{atm}}}, \mathbf{U}_{\text{oce}}|_{\Gamma_{\text{oce}}}, \mathcal{R}) & \text{sur } [0, T] \end{cases}$$

où  $\mathcal{R}$  regroupe un ensemble de paramètres extérieurs et  $\Gamma_{\text{oce}}$  (resp.  $\Gamma_{\text{atm}}$ ) représente le bord du domaine océan (resp. atmosphère) avec l'interface. Par exemple,  $\Gamma_{\text{oce}} = \{z = \delta_o\}$  et  $\Gamma_{\text{atm}} = \{z = \delta_a\}$  pour le modèle couplé océan-atmosphère (1.37), tandis que  $\Gamma_{\text{oce}} = \Gamma_{\text{atm}} = \{z = 0\}$  pour le modèle couplé simplifié (1.40). Les opérateurs aux dérivées partielles  $\mathcal{L}_{\text{atm}}$  et  $\mathcal{L}_{\text{oce}}$  représentent symboliquement les équations résolues par les modèles atmosphère et océan. Si on considère uniquement le couplage de la dynamique (i.e.  $\mathbf{U}_{\text{atm}} = \mathbf{u}_a$  et  $\mathbf{U}_{\text{oce}} = \mathbf{u}_o$ ), les conditions de couplage sont identiques à celles données en (1.37), à savoir :

$$\mathcal{F}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}}|_{\Gamma_{\text{oce}}} = \rho_o \nu_o(\delta_o) \partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o) \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{F}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}|_{\Gamma_{\text{atm}}} = \rho_a \nu_a(\delta_a) \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) \quad (2.1b)$$

$$\mathcal{F}_{\text{OA}} = \rho_a C_D \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\| (\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)) \quad (2.1c)$$

Nous listons d'abord au §2.1.1 des contraintes que doivent vérifier les méthodes de couplage pour être appliquées au cadre océan-atmosphère. Le §2.1.2 expose les méthodes classiquement utilisées pour résoudre numériquement ce problème de couplage. Nous verrons quelles contraintes sont respectées par ces méthodes, et quels sont leurs avantages et inconvénients. Suite à cela nous verrons au §2.1.3 qu'une approche itérative permet de résoudre les défauts mis en évidence dans les méthodes de couplage actuelles, et qu'une telle approche rentre dans le cadre des méthodes de Schwarz.

### 2.1.1 Contraintes sur les méthodes de couplage

Le cadre du problème couplé océan-atmosphère comporte des spécificités qui contraignent fortement le choix des méthodes de couplage qui peuvent être utilisées pour le résoudre numériquement. Nous pouvons énoncer les contraintes suivantes :

1. Le but étant d'appliquer le couplage à des systèmes régis par des lois physiques, ces méthodes de couplage doivent garantir le respect de ces lois (e.g. conservations de la masse, chaleur et quantité de mouvement).
2. Le temps de calcul est une contrainte forte dans le contexte océan-atmosphère, le volume de données est très important et les modèles sont complexes. Aussi le coût de calcul relatif à la méthode de couplage doit être réduit autant que possible.

Dans cet esprit, les méthodes pouvant être parallélisables seront préférées à celles ne permettant qu'un traitement séquentiel.

3. Dans le cadre du couplage océan-atmosphère, les écoulements océaniques et atmosphériques sont simulés à l'aide de modèles numériques distincts qui sont le fruit d'une longue chaîne de développement et qui présentent un haut niveau de complexité. Ces développements indépendants des modèles océan et atmosphère ne permettent pas de mettre en place des approches monolithiques. Il conviendra donc d'élaborer des méthodes de couplage qui devront être *non intrusives* afin d'avoir à modifier le moins possible les codes existants. Il s'agit là d'une contrainte très forte quant aux méthodologies à envisager pour effectuer ce couplage.
4. Une dernière contrainte est de s'assurer que l'échange d'information entre les modèles n'est pas décalé dans le temps, permettant ainsi d'obtenir une solution *tightly coupled* dans la terminologie de KEYES et al., 2013. Par opposition, les méthodes pour lesquelles l'interaction comporte un déphasage temporel fournissent des solutions dites *loosely coupled*.

Cette dernière contrainte n'est généralement pas vérifiée par les méthodes de couplage actuellement utilisées dans le cadre océan-atmosphère, celles-ci fournissant systématiquement des solutions *loosely coupled*. Ces méthodes préfèrent assurer les contraintes 1 à 3 en dépit de la contrainte 4 sur la bonne représentation des interactions en temps. L'intérêt de satisfaire la propriété 4 est pour la première fois abordé dans le cadre de simulations numériques du climat dans MARTI et al., 2020 (voir discussion §2.1.3). Ce point est essentiel pour assurer que la solution issue de la méthode de couplage est vraiment solution du problème couplé de départ. L'apport de cette thèse est de faire une première étude analytique de la mise en place d'une méthode de couplage qui vérifierait la propriété 4 pour le problème couplé océan-atmosphère.

### 2.1.2 Les méthodes de couplage océan-atmosphère actuelles

Les méthodes utilisées actuellement pour le couplage océan atmosphère sur une fenêtre temporelle donnée effectuent généralement les deux étapes suivantes :

1. Intégration du modèle d'atmosphère sur une fenêtre en temps en utilisant une information de surface de l'océan provenant d'une fenêtre de temps précédente.
2. Intégration du modèle d'océan en utilisant les flux d'interface calculés par le modèle d'atmosphère sur la fenêtre de temps courante.

Cet enchaînement ne garantit pas que la solution est *tightly coupled*. En effet, sur une fenêtre temporelle donnée, l'information de surface pour l'océan utilisée pour le calcul des flux d'interface est décalée en temps, car elle provient d'une fenêtre temporelle précédente. Les solutions ainsi obtenues sont donc *loosely coupled*.

VALCKE, 2020 détaille les différentes méthodes de couplage utilisées dans les modèles de climat. Nous présentons rapidement ici deux de ces méthodes ; leurs avantages/désavantages pour le couplage océan-atmosphère ont notamment été mis en évidence dans LEMARIÉ et al., 2015a et GROSS et al., 2018. Nous garderons en tête que les termes de diffusion/viscosité verticales (qui nous intéressent dans cette thèse) sont traités de manière implicite en temps, ce qui induit une contrainte supplémentaire au moment de l'échange de l'information pour assurer le caractère *tightly coupled* des solutions obtenues.

### Le couplage synchrone au niveau du pas de temps

Dans l'hypothèse où les deux modèles numériques ont régulièrement des instants de discrétisation communs (par exemple si le pas de temps océanique est un multiple du pas de temps atmosphérique), une première méthode de couplage consiste à échanger l'information de manière instantanée entre les deux milieux (voir Fig. 2.1). Ces instants communs sont notés  $t_i$ , et sur chaque fenêtre  $[t_i, t_{i+1}]$  chaque système est résolu dans chaque domaine avec comme condition à l'interface l'information venant de l'autre domaine à l'instant  $t_i$  que l'on fait persister sur toute la fenêtre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}} = f_{\text{atm}} & \text{dans } \Omega_{\text{atm}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \mathcal{F}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}|_{\Gamma_{\text{atm}}} = \mathcal{F}_{\text{OA}}(\mathbf{U}_{\text{oce}}|_{\Gamma_{\text{oce}}}(t_i), \mathbf{U}_{\text{atm}}|_{\Gamma_{\text{atm}}}(t_i), \mathcal{R}(t_i)) & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}} = f_{\text{oce}} & \text{dans } \Omega_{\text{oce}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \mathcal{F}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}}|_{\Gamma_{\text{oce}}} = \mathcal{F}_{\text{OA}}(\mathbf{U}_{\text{oce}}|_{\Gamma_{\text{oce}}}(t_i), \mathbf{U}_{\text{atm}}|_{\Gamma_{\text{atm}}}(t_i), \mathcal{R}(t_i)) & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (2.2b)$$

Remarquons que, du fait du traitement implicite de la viscosité/diffusion verticale, cette méthode ne permet pas de proprement coupler les deux milieux à cause du décalage temporel (de l'ordre d'un pas de temps) dans l'échange des informations. Cette méthode de couplage fournit donc des solutions *loosely coupled*. De plus, les inconvénients suivants peuvent être avancés :

- inconvénients "numériques" : cette méthode de couplage n'est que conditionnellement stable, même si les modèles de part et d'autre de l'interface sont inconditionnellement stables pour la diffusion/viscosité verticale (e.g. BELJAARS et al., 2017 ; ZHANG et al., 2020). De plus, elle nécessite des communications fréquentes entre les deux modèles, ce qui est pénalisant sur des environnements massivement parallèles.
- inconvénient "physique" : le couplage synchrone pose des problèmes en terme de validité physique (e.g. Sec 5 dans GROSS et al., 2018). Par exemple les conditions d'interface sont données par des formulations bulk qui ne sont pas fiables sur des temps courts (i.e. à l'échelle du pas de temps dynamique des modèles). En effet ces formulations sont basées sur la théorie semi-empirique de Monin-Obukhov dont la validité est discutée dans LARGE, 2006. Il apparaît qu'en considérant les hypothèses sous-jacentes à cette théorie (stationnarité, homogénéité et couche à flux constant) et le fait que les observations utilisées pour calibrer les formules bulk sont moyennées

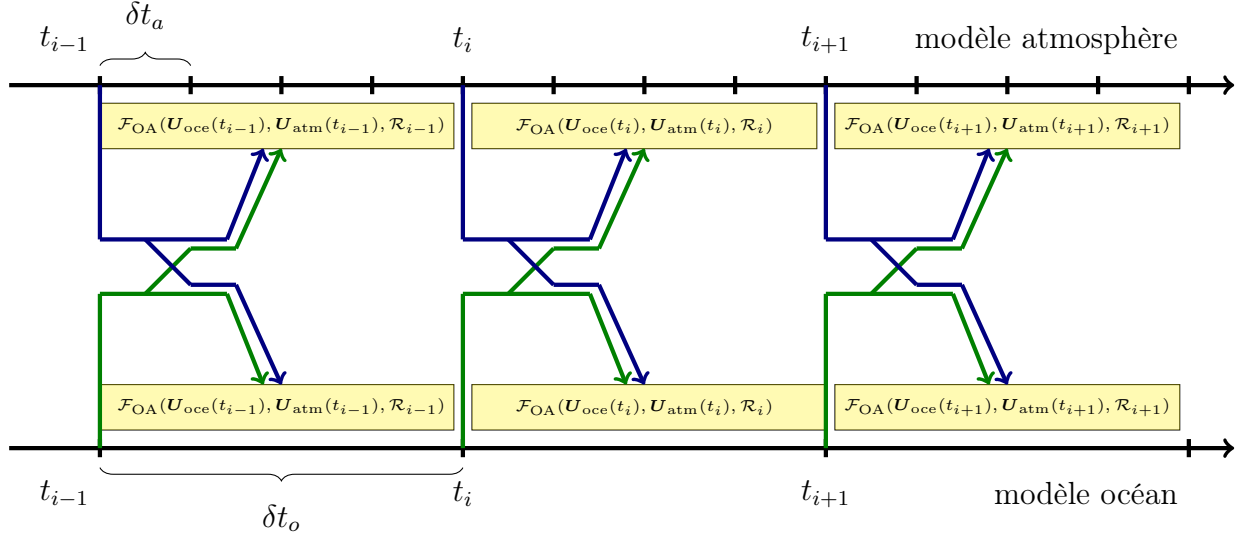


FIGURE 2.1 – Schéma des échanges entre l’océan et l’atmosphère par un couplage synchrone au niveau du pas de temps ; exemple où un pas de temps océan équivaut à 4 pas de temps atmosphère.

dans le temps, l’échelle de temps caractéristique sur laquelle la théorie de Monin-Obukhov est pertinente est de l’ordre d’une heure, soit généralement plus grande que la durée d’un pas de temps des modèles.

Ainsi, les points faibles de cette méthode n’en font pas un candidat satisfaisant, aussi bien d’un point de vue physique que numérique, pour traiter le problème de couplage océan-atmosphère.

### Le couplage asynchrone

Le couplage dit asynchrone (aussi appelé *’lagged coupling’* dans MARTI et al., 2020) est une méthode très largement utilisée dans la génération actuelle de modèles de climat. Le couplage asynchrone effectue le couplage sur des fenêtres temporelles assez longues (de l’ordre de 1 à 6 heures) sur lesquelles des flux moyens sont échangés (voir Fig. 2.2).

Dans sa version séquentielle, le couplage asynchrone se compose des étapes suivantes :

1. Le modèle atmosphère reçoit au début de la fenêtre de couplage  $i$  une information du modèle d’océan moyennée sur la fenêtre de couplage précédente  $\langle \mathbf{U}_{oce} |_{\Gamma_{oce}} \rangle_{i-1}$ .
2. Le modèle d’atmosphère est intégré sur la fenêtre de couplage en utilisant les variables de surface océanique  $\langle \mathbf{U}_{oce} |_{\Gamma_{oce}} \rangle_{i-1}$  pour le calcul des flux d’interface (via une formulation bulk).
3. Les flux calculés par le modèle d’atmosphère sur la fenêtre de couplage sont moyennés en temps et prescrits pour l’intégration du modèle d’océan (qui considère donc un flux constant sur l’ensemble de la fenêtre temporelle).

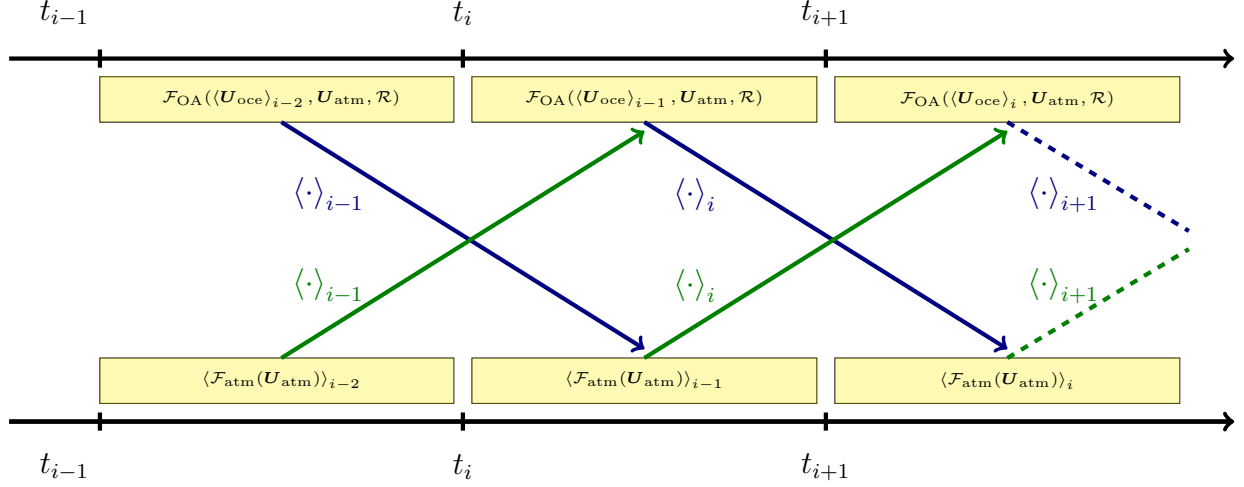


FIGURE 2.2 – Schéma d'un couplage "asynchrone" ; les opérateurs de moyenne sont appliqués sur les fenêtres de temps précédentes et l'algorithme est parallélisable.

On peut écrire mathématiquement ce couplage asynchrone comme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{atm} \mathbf{U}_{atm} = f_{atm} & \text{dans } \Omega_{atm} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \mathcal{F}_{atm} \mathbf{U}_{atm}|_{\Gamma_{atm}} = \mathcal{F}_{OA}(\langle \mathbf{U}_{oce}|_{\Gamma_{oce}} \rangle_{i-1}, \mathbf{U}_{atm}|_{\Gamma_{atm}}, \mathcal{R}) & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{atm} \mathbf{U}_{oce} = f_{atm} & \text{dans } \Omega_{oce} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \mathcal{F}_{oce} \mathbf{U}_{oce}|_{\Gamma_{oce}} = \langle \mathcal{F}_{atm} \mathbf{U}_{atm}|_{\Gamma_{atm}} \rangle_{i-1} & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (2.3b)$$

où le symbole  $\langle \cdot \rangle_i$  représente un opérateur de type moyenne sur la fenêtre de temps  $i$ .

Un avantage de cette méthode est l'utilisation d'opérateurs moyenne  $\langle \cdot \rangle$  pour transmettre l'information à l'interface. En effet ceci permet d'abord de satisfaire proprement les contraintes de conservation (§2.1.1 point 1), et également de ne pas avoir de contrainte sur la conformité de la grille temporelle. De plus, d'un point de vue physique, la transmission de l'information est moyennée sur une fenêtre de temps assez longue pour rester compatible avec les hypothèses de base des paramétrisations issues de la théorie de Monin-Obukhov utilisées pour le calcul des flux d'interface.

Cependant, comme on peut le voir sur le schéma 2.2, cette méthode de couplage implique un important décalage dans le temps des informations. Elle ne permet donc pas de bien phaser les deux modèles, ce qui est limitant si on s'intéresse à des processus de couplage sur des temps relativement rapides (typiquement sur les échelles de temps caractéristiques du cycle diurne). D'une manière générale les méthodes utilisées actuellement pour le couplage océan-atmosphère donnent la priorité à la réduction du coût de calcul via des méthodes non-itératives parallélisables, au prix d'une mauvaise synchronisation des échanges entre les deux milieux.

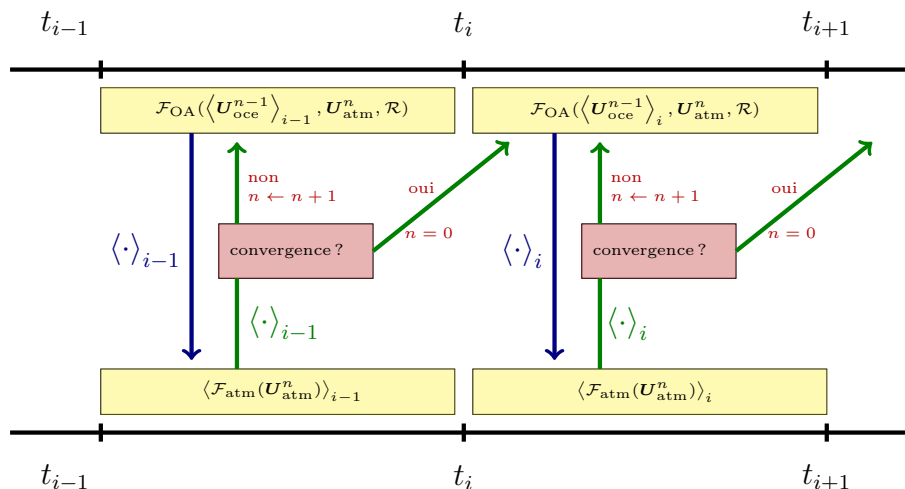


FIGURE 2.3 – Schéma d'application d'un processus itératif sur le couplage "asynchrone"

### 2.1.3 Vers un processus itératif : les algorithmes de Schwarz

Les méthodes actuelles, qu'elles soient synchrones ou asynchrones, possèdent le désavantage de ne pas correctement coupler les milieux océan et atmosphère notamment à cause d'un décalage temporel dans l'échange des informations. Appliquer de telles méthodes en itérant le processus permettrait de corriger ce décalage dans la transmission des informations, et donc dans l'idéal d'améliorer le couplage entre les deux milieux. Il faudrait alors itérer le processus d'intégration ((2.2) ou (2.3)) sur une fenêtre de temps (appelée par les physiciens *fenêtre de couplage*) jusqu'à une éventuelle convergence, dont le critère associé reste à définir. Par exemple, pour la méthode de couplage asynchrone, cela donnerait pour une itération  $n$  sur la fenêtre de couplage  $i$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}^n = f_{\text{atm}} & \text{dans } \Omega_{\text{atm}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \mathcal{F}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}^n |_{\Gamma_{\text{atm}}} = \mathcal{F}_{\text{OA}}(\langle \mathbf{U}_{\text{oce}} |_{\Gamma_{\text{oce}}} \rangle_i^{n-1}, \mathbf{U}_{\text{atm}}^{n-1} |_{\Gamma_{\text{atm}}}, \mathcal{R}) & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (2.4a)$$

puis

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}}^n = f_{\text{atm}} & \text{dans } \Omega_{\text{oce}} \times [t_i, t_{i+1}] \\ \mathcal{F}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}}^n |_{\Gamma_{\text{oce}}} = \langle \mathcal{F}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}^{n-1} |_{\Gamma_{\text{atm}}} \rangle_i & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \quad (2.4b)$$

Cet exemple est illustré par la figure 2.3. L'application d'itérations permet de conserver certains avantages de la méthode asynchrone comme le caractère non intrusif de la méthode et le respect des lois de conservation. De plus, si ce processus converge, alors la solution serait bien solution du problème couplé de départ<sup>1</sup>. Ce type de méthode rentre

1. Si on stoppe en pratique l'algorithme avant la convergence, on pourra imaginer effectuer une dernière itération seulement sur l'océan avec  $\mathcal{F}_{\text{oce}} \mathbf{U}_{\text{oce}}^n |_{\Gamma_{\text{oce}}} = \langle \mathcal{F}_{\text{atm}} \mathbf{U}_{\text{atm}}^n |_{\Gamma_{\text{atm}}} \rangle_i$  pour assurer qu'on a bien conservation des flux à l'interface.

en fait dans le cadre déjà connu des *algorithmes de Schwarz*. Et les méthodes de couplages usuelles, que l'on a jugées imparfaites pour fournir une solution satisfaisante au problème couplé, peuvent être vues comme une unique itération d'un algorithme qui devrait être itératif.

Une première implémentation d'une méthode itérative de couplage utilisant des modèles réalistes est décrite dans LEMARIÉ et al., 2014. Afin d'étudier la viabilité des méthodes de Schwarz dans le contexte du couplage océan-atmosphère, des simulations numériques de la propagation du cyclone Erica ont été réalisées. A l'aide de simulations d'ensemble générées en perturbant les conditions initiales et la taille de la fenêtre de couplage, il a été montré qu'une méthode itérative permet de réduire l'enveloppe d'incertitude autour de la moyenne d'ensemble des trajectoires et des intensités prédites comparativement aux méthodes usuelles de couplage. Ce résultat suggère qu'une source d'incertitude est supprimée lorsqu'un couplage itératif resynchronisant l'information entre les deux modèles est utilisé. Ce lien entre stabilité numérique de la méthode de couplage et incertitudes est aussi obtenu par CONNORS et GANIS, 2011 dans le cadre du couplage de deux systèmes d'équations de type Navier-Stokes. Plus récemment, dans le cadre du projet ANR COCOA, des algorithmes itératifs de couplage ont été implémentés dans une version 1D (une simple colonne verticale) du modèle de climat de Météo-France et dans la version 3D du modèle de climat de l'IPSL. MARTI et al., 2020 discute de l'application d'algorithme de Schwarz sur le modèle de l'IPSL. Nous en avons extrait un résultat dans la figure 2.4, qui représente l'évolution de la température de surface au cours des itérations pour différents points du globe et différentes tailles de fenêtre temporelle. L'algorithme semble converger et l'erreur peut être fortement réduite en n'effectuant que deux itérations (c'est-à-dire une itération de plus que le *first guess*).

En se basant sur des métriques assez diverses, ces différents exemples d'application d'algorithmes itératifs sur des modèles complexes semblent systématiquement mener à une amélioration du couplage entre les modèles. Cependant les méthodes itératives en l'état restent trop coûteuses pour être utilisées plus largement dans le cadre d'applications réalistes en "mode production". Cela constitue une des motivations pour une étude théorique plus approfondie sur les algorithmes de Schwarz appliqués au couplage océan-atmosphère.

Au-delà de son application dans le contexte océan-atmosphère, les algorithmes de Schwarz sont des méthodes classiquement utilisées dans les problèmes de décomposition de domaine et ont déjà été bien étudiées dans beaucoup d'applications. Ces méthodes ont aussi l'avantage d'être naturellement parallélisables, et nous verrons qu'il est possible d'optimiser leur vitesse de convergence afin de réduire le surcoût de calcul dû aux itérations. Les études sur ces algorithmes portent principalement sur l'étude et l'optimisation de cette vitesse de convergence. Elles se placent majoritairement dans un cadre d'équations linéaires; elles peuvent aussi tout à fait s'adapter à un cadre non linéaire mais ce champ d'étude est plus récent. Dans la suite de ce chapitre, une introduction rapide sur



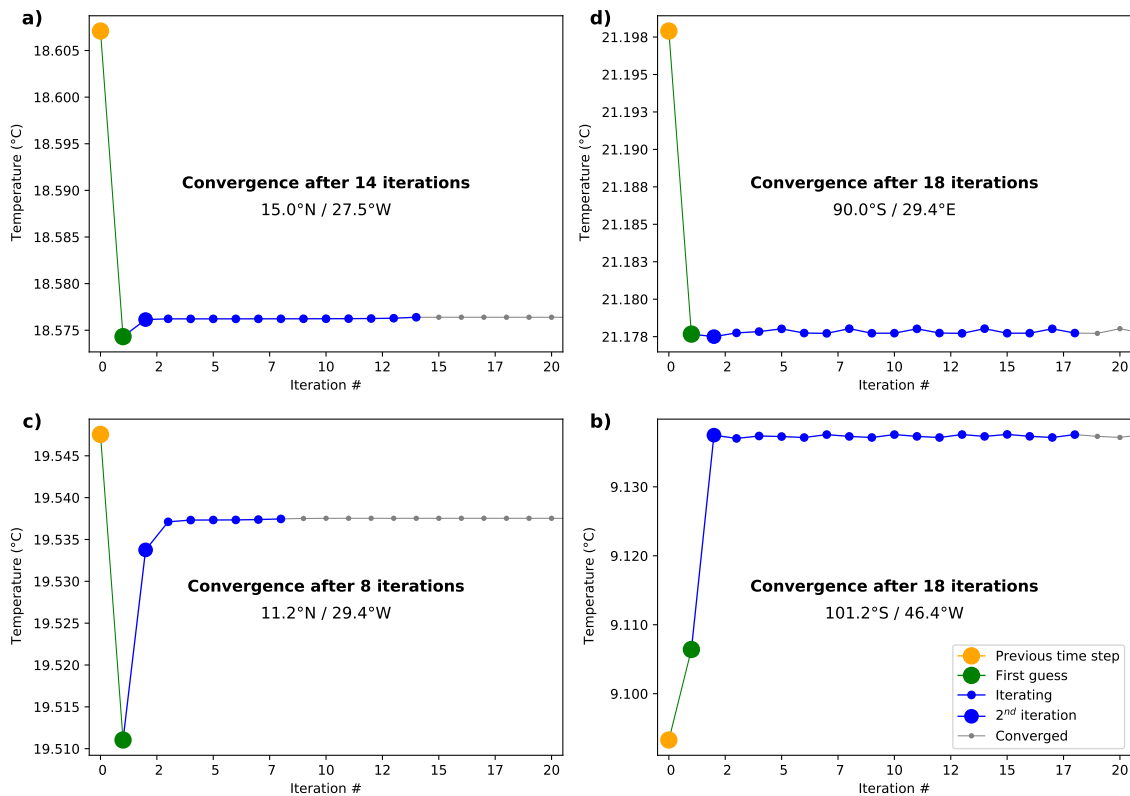


FIGURE 2.4 – Tiré de MARTI et al., 2020 : Comportement de la température de surface de la mer en quatre endroits du globe en fonction des itérations. Les points jaunes indiquent les valeurs à la fin de la fenêtre temporelle précédente, qui est l'état initial de la fenêtre actuelle. Les points verts indiquent les valeurs après la première itération (le *first guess*). Les points bleus indiquent le processus itératif. Les panneaux du haut sont donnés pour une taille de fenêtre temporelle de 4 heures, et ceux du bas de 1 heure.

ces algorithmes est donnée en insistant sur les aspects qui nous intéressent dans le cadre du couplage multiphysique d'équations linéaires.

## 2.2 Présentation générale des algorithmes de Schwarz

Dans cette section nous présentons les algorithmes de Schwarz dans le contexte usuel de la décomposition de domaine. Ceci va nous permettre d'introduire un certain nombre de notions générales sur ces méthodes qui seront ensuite adaptées à partir de la section 2.3 aux applications de type couplage multiphysique. Nous exposons plus en détail au §2.2.1 le fonctionnement de l'un de ces algorithmes (l'algorithme de Schwarz alterné), comment on en mesure la convergence (§2.2.2) et les techniques habituelles pour optimiser cette convergence (§2.2.3).

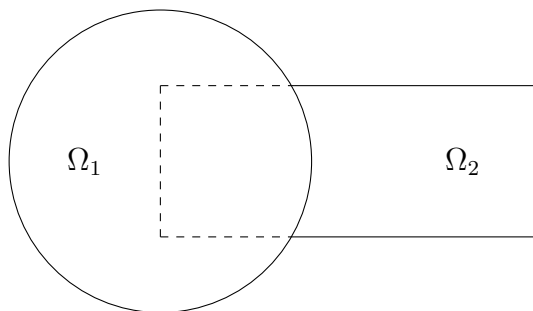


FIGURE 2.5 – Exemple de décomposition de domaine sur un domaine à géométrie complexe.

### 2.2.1 Algorithme de Schwarz pour la décomposition de domaine

Les algorithmes de Schwarz ont initialement été introduits par Schwarz en 1869 (SCHWARZ, 1869) comme outils pour une démonstration analytique d'existence et d'unicité d'une solution à un problème posé sur un domaine de forme géométrique complexe (voir figure 2.5). Le principe général est de séparer un problème global en plusieurs sous-problèmes plus simples à traiter et d'y appliquer un processus itératif. Chaque sous-problème est résolu dans un sous-domaine donné lors d'une itération, les échanges d'informations entre les sous-domaines se font via des conditions aux bords utilisant les résultats des itérations précédentes. Il y a deux principales versions de l'algorithme de Schwarz, qui sont l'algorithme alterné (ou multiplicatif) et l'algorithme parallèle (ou additif). Nous étudions ici la convergence de l'algorithme de Schwarz alterné, celle de l'algorithme de Schwarz parallèle se traite de manière similaire. Notons que la nature de la convergence ou de la divergence de l'algorithme parallèle est la même que celle de l'algorithme alterné.

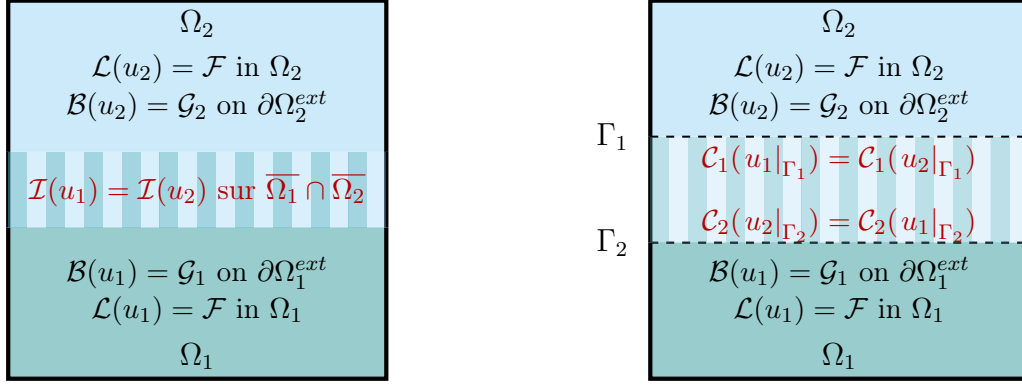
On fera la différence dans notre étude entre le cadre stationnaire et le cadre instationnaire :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = F & \text{sur } \Omega \\ \mathcal{B}u = G & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = F & \text{sur } \Omega \times \mathcal{T} \\ u(t=0) = g & \text{sur } \Omega \\ \mathcal{B}u = G & \text{sur } \partial\Omega \times \mathcal{T} \end{cases} \quad (2.5)$$

Cadre stationnaire Cadre instationnaire

où  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$  sont des opérateurs linéaires aux dérivées partielles,  $\mathcal{T}$  le domaine temporel,  $\Omega$  le domaine spatial et  $\partial\Omega$  son bord. Nous choisissons ici de traiter la variable temps différemment des variables d'espace. En effet, bien que du point de vue de l'EDP le cadre instationnaire peut se rapporter au cadre stationnaire multidimensionnel, le temps joue un rôle particulier du point de vue de l'algorithme appliqué.

On se place dans un contexte général de décomposition en deux sous-domaines. Les problèmes (2.5) sont séparés sur deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Ceux-ci peuvent avoir une intersection de mesure non nulle : on dit dans ce cas qu'on a un *recouvrement*. Le modèle  $\mathcal{L}$  induit des conditions de transmission sur  $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$  appelées *conditions de transmission naturelles*. La figure 2.6a représente un tel découpage, où les  $u_j$  sont les solutions du



(a) avec conditions de transmission naturelles (b) avec les sous-problèmes correspondants

FIGURE 2.6 – Schéma de décomposition de domaine : exemple dans le cadre stationnaire

problème (2.5) sur  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) et  $\mathcal{I}(u_1) = \mathcal{I}(u_2)$  sont les conditions de transmissions naturelles.

**Notation** Dans toute la suite, la notation  $\bar{j}$  est définie par :

$$\bar{j} = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si } j = 2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour créer un sous-problème dans chaque sous-domaine  $\Omega_j$ , il nous faut des conditions aux limites sur son interface avec l'autre sous-domaine. Ces conditions aux limites, notées  $\mathcal{C}_j$  pour  $j \in \{1, 2\}$ , doivent être équivalentes aux conditions de transmissions naturelles. Le problème (2.5) est ainsi séparé en deux sous-problèmes, qu'on donne ci-dessous dans le cadre stationnaire (2.7) et instationnaire (2.8) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u_1 = F & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}u_1 = G & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{C}_1u_1 = \mathcal{C}_1u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (2.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u_2 = F & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}u_2 = G & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{C}_2u_2 = \mathcal{C}_2u_1 & \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (2.7b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 + \mathcal{L}u_1 = F & \text{sur } \Omega_1 \times \mathcal{T} \\ u_1(t=0) = g & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}u_1 = G & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathcal{T} \\ \mathcal{C}_1u_1 = \mathcal{C}_1u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathcal{T} \end{array} \right. \quad (2.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_2 + \mathcal{L}u_2 = F & \text{sur } \Omega_2 \times \mathcal{T} \\ u_2(t=0) = g & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}u_2 = G & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathcal{T} \\ \mathcal{C}_2u_2 = \mathcal{C}_2u_1 & \text{sur } \Gamma_2 \times \mathcal{T} \end{array} \right. \quad (2.8b)$$

où  $\Gamma_j$  est le bord intérieur de  $\Omega_j$  ( $\Gamma_j = \partial\Omega_j \cap \overline{\Omega_{\bar{j}}}$ ) et  $\partial\Omega_j^{ext}$  le bord "extérieur" de  $\Omega_j$  ( $\partial\Omega_j^{ext} = \partial\Omega_j \setminus \Gamma_j$ ). La figure 2.6b représente la décomposition en sous-problèmes dans le cadre stationnaire.

**Fonctionnement de l'algorithme** Pour plus de simplicité, on décrit d'abord le processus sur le problème stationnaire. Une fois les deux sous-problèmes bien identifiés, on peut

appliquer le processus itératif. L'algorithme est initialisé par une première approximation de la condition à l'interface. On commence par résoudre le premier problème (2.7a); le résultat nous permet de calculer de nouvelles conditions à l'interface pour résoudre le deuxième problème (2.7b). On itère ensuite ce processus en utilisant comme nouvelle condition d'interface celle précédemment calculée. On peut écrire de manière très générale sous forme de l'algorithme 1.

Cet algorithme peut aussi s'adapter à un cadre instationnaire comme donné par l'algorithme 2.

---

**Algorithm 1** Schwarz alterné pour un problème stationnaire

---

**Require:**  $u_2^0$  sur  $\Gamma$

$n = 0$

**while** non convergence ou  $n < n_{max}$  **do**

résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^n = F & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}u_1^n = G & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{C}_1u_1^n = \mathcal{C}_1u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

puis résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_2^n = F & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}u_2^n = G & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{C}_2u_2^n = \mathcal{C}_2u_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

**end while**

---

En pratique, ces algorithmes sont appliqués sur des problèmes discrétisés en temps. On peut d'abord imaginer appliquer l'algorithme de Schwarz stationnaire à chaque pas de temps : l'algorithme est alors dit *local en temps*. Les conditions d'interface s'échangent donc à chaque pas de temps, comme pour le cas stationnaire. Cet algorithme appliqué tel quel reviendrait à appliquer un algorithme de couplage synchrone et comporte donc les désavantages présentés en section 2.1.3. Il est préférable d'utiliser pour un problème instationnaire l'algorithme de Schwarz dit *global en temps*. Chaque problème, (2.8a) et (2.8b), est résolu sur une fenêtre de temps nommée *fenêtre de couplage*. Cette fenêtre peut être de taille finie ou infinie suivant le cadre de l'étude. A chaque itération, les conditions d'interfaces sont échangées sur la fenêtre entière.

**Caractère bien posé de l'algorithme de Schwarz** Supposons ici que le problème couplé (2.5) que l'on souhaite résoudre est bien posé, c'est-à-dire qu'il existe une unique solution avec la régularité suffisante. L'algorithme de Schwarz est une méthode pour trouver la solution de ce problème. Comme le montre l'algorithme 2, il en découle qu'on doit résoudre à chaque itération deux sous-problèmes avec de nouvelles conditions de bord.

---

**Algorithm 2** Schwarz alterné pour un problème instationnaire, global en temps
 

---

**Require:**  $u_2^0$  sur  $\Gamma_1 \times \mathcal{T}$  avec  $\mathcal{T} = [t_0, t_f]$ 
 $n = 0$ 
**while** non convergence ou  $n < n_{max}$  **do**

résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1^n + \mathcal{L}u_1^n = F & \text{sur } \Omega_1 \times \mathcal{T} \\ \mathcal{B}u_1^n = G & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathcal{T} \\ u_1^n(x, t = t_0) = u_1(x, t_0) & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_1 u_1^n = \mathcal{C}_1 u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathcal{T} \end{array} \right.$$

puis résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_2^n + \mathcal{L}u_2^n = F & \text{sur } \Omega_2 \times \mathcal{T} \\ \mathcal{B}u_2^n = G & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathcal{T} \\ u_2^n(x, t = t_0) = u_2(x, t_0) & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_2 u_2^n = \mathcal{C}_2 u_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \times \mathcal{T} \end{array} \right.$$

**end while**


---

L'algorithme de Schwarz est donc bien posé s'il y a unicité d'une solution suffisamment régulière pour chaque sous-problème, et c'est un point qu'il faut vérifier. Par exemple on suppose que si  $u_2^{n-1} \in \mathcal{E}$  alors il existe une unique solution  $u_1^n \in \mathcal{E}'$  avec  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  des espaces à définir. Il faut donc assurer que la condition  $u_1^n \in \mathcal{E}'$  soit elle-même suffisante pour que dans le sous-problème suivant il existe une unique solution  $u_2^n \in \mathcal{E}$ . En général ces conditions pour que l'algorithme de Schwarz soit bien posé dépendent des opérateurs et des paramètres du problème. On en donne un exemple au paragraphe §2.3.1 pour un problème de type parabolique 1D qui se rapporte au cadre multiphysique qui nous intéresse.

### Les degrés de liberté des problèmes de décomposition de domaine

La littérature scientifique sur les méthodes de décomposition de domaine est foisonnante. On peut trouver une introduction aux algorithmes de Schwarz et aux méthodes de décomposition de domaine par exemple dans GANDER, 2008, ainsi que sur quelques méthodes de décomposition de domaines dans GANDER et HALPERN, 2012. Nous listons ici les principaux paramètres qui peuvent varier d'un problème de décomposition de domaine à un autre.

**Stationnaire 1D / multidimensionnel** D'une manière générale, le cadre stationnaire 1D permet, si on sait résoudre l'équation différentielle homogène  $\mathcal{L}u = 0$ , de bien décrire le fonctionnement de l'algorithme. Dans le cadre multidimensionnel (instationnaire ou stationnaire), il est en général nécessaire pour analyser la convergence de l'algorithme, de réaliser une transformée de Fourier sur toutes les variables qui ne sont pas dans la

direction perpendiculaire à l'interface, ceci afin de se ramener à une équation différentielle ordinaire. Pour des équations stationnaires à plusieurs dimensions, on pourra voir par exemple MAGOULÈS et al., 2004 pour des équation de type Helmholtz 2D et JAPHET et al., 2001 pour une équation d'advection-réaction-diffusion. Dans le cadre instationnaire, on pourra voir GANDER et HALPERN, 2003 pour une équation des ondes et une équation de la chaleur 1D.

**Remarque :** dans les chapitres suivants, nous nous plaçons dans le cadre instationnaire 1D.

**Algorithmes de Schwarz discrétisés** Les algorithmes de Schwarz sont initialement étudiés dans un cadre continu mais les simulations numériques traitent du problème discrétisé aussi bien en espace qu'en temps, et les choix de discrétisation ont une influence sur la convergence. En général, on s'intéresse principalement à l'influence des discrétisations des coordonnées qui ne sont pas dans la direction normale à l'interface (dans notre cas, c'est le temps) car elles ont une plus forte influence. Mais le choix de discrétisation de la coordonnée dans la direction normale à l'interface peut aussi être influente ; un comparatif de différents choix et de leur influence sur la convergence est réalisé par exemple dans BERTHE, 2013. Dans cette thèse nous ne nous arrêterons pas sur l'influence de ce choix de discrétisation en espace, mais il faut garder à l'esprit que le prendre en compte permet d'être plus précis sur l'étude de la vitesse de convergence. Par contre nous prendrons en compte la discrétisation de la variable temps et nous expliquerons comment elle influence la convergence de nos algorithmes (voir section 3.1).

**Avec recouvrement / sans recouvrement** Dans le cadre des décompositions de domaine classiques (non multiphysique), la découpe du domaine peut se faire avec un recouvrement ou sans recouvrement entre les différents domaines. Un exemple d'étude sur l'équation de chaleur avec recouvrement est proposé dans GANDER et HALPERN, 2003. D'une manière générale, le recouvrement permet une convergence plus rapide. Une comparaison entre le cas avec recouvrement et sans recouvrement est faite sur une équation de type advection-diffusion dans DUBOIS, 2007 et advection-réaction-diffusion à coefficients constants 2D dans BENNEQUIN et al., 2016. L'influence de la taille du recouvrement  $L$  se traduit par un terme  $e^{\alpha L}$  qui apparaît dans le calcul de la vitesse de convergence, avec  $\alpha$  dépendant des paramètres de l'équation. D'une manière générale, le recouvrement permet d'augmenter fortement la vitesse de convergence de l'algorithme. Il existe cependant également beaucoup d'études sur les problèmes non multiphysiques sans recouvrement, comme par exemple GANDER et al., 2007a pour l'équation de Helmholtz 2D, MARTIN, 2003 pour le système shallow water, et GERARDO-GIORDA et NATAF, 2005 pour l'équation d'advection-reaction-diffusion 2D. Dans notre objectif d'étudier les algorithmes de Schwarz appliqués au couplage océan-atmosphère, nous nous intéresserons dans les prochaines sections au problème multiphysique. Le recouvrement n'est donc pas possible entre les deux domaines et il faut donc renoncer aux avantages qu'il apporte.

### 2.2.2 Facteur de convergence

L'étude de la convergence est un point essentiel pour appliquer l'algorithme de Schwarz. D'abord on veut s'assurer que l'algorithme converge en chaque point de l'espace et du temps, mais on souhaiterait aussi pouvoir mesurer la vitesse de cette convergence. A cet effet, on introduit dans ce paragraphe la notion de *facteur de convergence*.

#### Définition du facteur de convergence

Reprenons notre modèle séparé en sous-problèmes dans le cadre stationnaire :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = F & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}u_1 = G & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{C}_1u_1 = \mathcal{C}_1u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.9a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_2 = F & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}u_2 = G & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{C}_2u_2 = \mathcal{C}_2u_1 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.9b)$$

Lors de l'application des algorithmes de Schwarz, pour chaque itération  $n$  l'état des solutions  $u_j^{n-1}$  est connu et on résout les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1^n = F & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}u_1^n = G & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{C}_1u_1^n = \mathcal{C}_1u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.10a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_2^n = F & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}u_2^n = G & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{C}_2u_2^n = \mathcal{C}_2u_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.10b)$$

On suppose maintenant qu'il existe une solution  $\tilde{u}$  du problème global correspondant (2.9a)-(2.9b). Aussi, on peut affirmer que l'algorithme converge vers la solution  $\tilde{u}$  si et seulement si les erreurs à chaque itération et sur chaque sous-domaine  $e_j^n = u_j^n - \tilde{u}|_{\Omega_j}$  convergent vers la solution nulle. On introduit alors le facteur de convergence  $\varrho$  et son module le taux de convergence  $\rho$  définis par :

$$\varrho_j^n(z) = \frac{e_j^n(z)}{e_j^{n-1}(z)} \quad \rho_j^n(z) = |\varrho_j^n(z)| = \frac{|e_j^n(z)|}{|e_j^{n-1}(z)|} \quad (2.11)$$

La vitesse de convergence de l'algorithme peut dépendre de différents paramètres suivant le type de problème étudié. D'une manière très générale, une condition suffisante de convergence de l'algorithme est  $\rho_j^n(z) < 1$  pour tout  $j, n$  et  $z$  (un point de  $\Omega$ ). Aussi, plus le facteur de convergence est faible, plus la vitesse de convergence est importante.

Nous verrons dans la suite que ce facteur de convergence est indépendant de  $z \in \Omega$  et de l'itération  $n$  : il sera généralement noté  $\varrho$  (resp.  $\rho$  pour le taux de convergence). Dans la section 3.1 nous introduirons d'autres variantes.

Dans le cas particulier où tous les opérateurs sont linéaires, à chaque itération  $n$ , l'erreur  $e_j^n$  satisfait le problème homogène (sauf sur l'interface) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_1^n = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}e_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{C}_1e_1^n = \mathcal{C}_1e_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.12a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_2^n = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}e_2^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{C}_2e_2^n = \mathcal{C}_2e_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.12b)$$

Si les opérateurs ne sont pas linéaires, il est souvent nécessaire de linéariser le problème pour étudier la convergence.

### Facteur de convergence pour le problème stationnaire

Dans un souci de lisibilité, on présente ici la méthode pour calculer le facteur de convergence pour un problème traitant une équation différentielle linéaire d'ordre 2, mais le principe peut s'appliquer à des problèmes d'ordres plus élevés.

Les solutions de l'équation différentielle  $\mathcal{L}(u) = 0$  sur un domaine  $\Omega$  sont de la forme  $u(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$  où  $f$  et  $g$  sont les fonctions de base associées à l'opérateur  $\mathcal{L}$  et  $\alpha, \beta$  des constantes dépendant des conditions de bord. Donc l'erreur  $e_j^n$  s'écrit pour chaque itération :

$$\begin{cases} e_j^n = A_j^n \left( f(z) - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g(z) \right) & \text{sur } \Omega_j, \\ \mathcal{C}_1e_1^n = \mathcal{C}_1e_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \mathcal{C}_2e_2^n = \mathcal{C}_2e_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

avec  $A_j^n$  une constante. Notons que les fonctions de base  $f$  et  $g$  ne dépendent pas de l'itération car  $\mathcal{L}$  est par définition indépendant de l'itération. En revanche, la constante  $A_j^n$  dépend des données à l'interface et donc de l'itération. Aussi, par définition de  $f$  et  $g$ ,

le terme  $\left( f(z) - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g(z) \right)$  ne peut être identiquement nul. Ainsi on a convergence de l'erreur vers 0 au fil des itérations si  $A_j^n$  converge vers 0. Le facteur de convergence défini précédemment est donc finalement indépendant de  $z$ , et peut s'écrire :

$$\varrho_j^n(z) = \frac{e_j^n(z)}{e_j^{n-1}(z)} = \frac{A_j^n}{A_j^{n-1}} \quad (2.14)$$

Pour calculer  $A_j^n$  on applique successivement les deux dernières lignes de (2.13), ce qui nous donne :

$$A_j^n = \frac{\mathcal{C}_1 \left( f|_{\Gamma_2} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g|_{\Gamma_2} \right) \mathcal{C}_2 \left( f|_{\Gamma_1} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g|_{\Gamma_1} \right)}{\mathcal{C}_2 \left( f|_{\Gamma_2} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g|_{\Gamma_2} \right) \mathcal{C}_1 \left( f|_{\Gamma_1} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g|_{\Gamma_1} \right)} A_j^{n-1} \quad (2.15)$$



Ces calculs montrent que le rapport  $A_j^n/A_j^{n-1}$  ne dépend pas de l'itération. Ainsi le facteur de convergence du problème (2.9a)-(2.9b) ne dépend que des opérateurs  $\mathcal{L}, \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}_j$  :

$$\varrho_{\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j}^{\text{sta}} = \frac{\mathcal{C}_1 \left( f|_{\Gamma_2} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g|_{\Gamma_2} \right) \mathcal{C}_2 \left( f|_{\Gamma_1} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g|_{\Gamma_1} \right)}{\mathcal{C}_2 \left( f|_{\Gamma_2} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g|_{\Gamma_2} \right) \mathcal{C}_1 \left( f|_{\Gamma_1} - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g|_{\Gamma_1} \right)} \quad (2.16)$$

### Facteur de convergence pour le problème instationnaire

Nous considérons maintenant un problème instationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1^n(z, t) + \mathcal{L}u_1^n(z, t) = F(z, t) & \text{sur } \Omega_1 \times [0, +\infty[ \\ \mathcal{B}u_1^n(z, t) = G(z, t) & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times [0, +\infty[ \\ u_1^n(z, 0) = u_0(z) & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_1 u_1^n(z, t) = \mathcal{C}_1 u_2^{n-1}(z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.17a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_2^n(z, t) + \mathcal{L}u_2^n(z, t) = F(z, t) & \text{sur } \Omega_2 \times [0, +\infty[ \\ \mathcal{B}u_2^n(z, t) = G(z, t) & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times [0, +\infty[ \\ u_2^n(z, 0) = u_0(z) & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_2 u_2^n(z, t) = \mathcal{C}_2 u_1^n(z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \times [0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.17b)$$

De même que pour le cas stationnaire, nous nous intéressons à la convergence du système donné sur les erreurs à chaque itération :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t e_1^n(z, t) + \mathcal{L}e_1^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \times [0, +\infty[ \\ \mathcal{B}e_1^n(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times [0, +\infty[ \\ e_1^n(z, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_1 e_1^n(z, t) = \mathcal{C}_1 e_2^{n-1}(z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.18a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t e_2^n(z, t) + \mathcal{L}e_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \times [0, +\infty[ \\ \mathcal{B}e_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times [0, +\infty[ \\ e_2^n(z, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_2 e_2^n(z, t) = \mathcal{C}_2 e_1^n(z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \times [0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.18b)$$

Dans l'idéal on aimerait résoudre le problème précédent et calculer le facteur de convergence sous la forme  $\varrho_j^n(z, t) = \frac{e_j^n(z, t)}{e_j^{n-1}(z, t)}$  mais ce calcul n'est en général pas faisable en pratique car nous ne savons pas résoudre l'équation différentielle  $\partial_t e_j^n(z, t) + \mathcal{L}e_j^n(z, t) = 0$  dans la majorité des cas. Aussi, il est commun d'appliquer aux systèmes (2.18a)-(2.18b) une transformée de Fourier en temps :

$$\widehat{u}(z, \omega) = \mathcal{F}(u)(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z, t) e^{-i\omega t} \delta t \quad (2.19)$$

Notons que ceci nécessite que la solution  $u(z, \cdot)$  soit  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  pour tout  $z$  fixé, ce qui est supposé ici. Dans un cadre plus général on pourra appliquer une transformée de Laplace ; la majorité des résultats restent valables.

On obtient un nouveau système dépendant d'un paramètre  $\omega$  dans le domaine de Fourier :

$$\begin{cases} i\omega\widehat{e}_1^n(z, \omega) + \mathcal{L}\widehat{e}_1^n(z, \omega) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}\widehat{e}_1^n(z, \omega) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_1\widehat{e}_1^n(z, \omega) = \mathcal{C}_1\widehat{e}_2^{n-1}(z, \omega) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} i\omega\widehat{e}_2^n(z, \omega) + \mathcal{L}\widehat{e}_2^n(z, \omega) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}\widehat{e}_2^n(z, \omega) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_2\widehat{e}_2^n(z, \omega) = \mathcal{C}_2\widehat{e}_1^n(z, \omega) & \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.21)$$

On a maintenant une nouvelle équation différentielle dépendant de  $\omega$ . On peut appliquer notre calcul du facteur de convergence vu précédemment dans le cadre stationnaire, avec  $f$  et  $g$  les fonctions de base du problème correspondant. Notons que  $f$ ,  $g$  et  $A_j^n$  dépendent maintenant tous de  $\omega$  :

$$\begin{cases} \widehat{e}_j^n(z, \omega) = A_j^n(\omega) \left( f(z, \omega) - \frac{\mathcal{B}(\omega)f(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}(\omega)g(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g(z, \omega) \right) & \text{sur } \Omega_j \\ \mathcal{C}_1\widehat{e}_1^n(\omega) = \mathcal{C}_1\widehat{e}_2^{n-1}(\omega) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \mathcal{C}_2\widehat{e}_2^n(\omega) = \mathcal{C}_2\widehat{e}_1^n(\omega) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Ainsi on peut définir le facteur de convergence dans le problème instationnaire (2.17a)-(2.17b) ne dépendant que des opérateurs correspondants et de  $\omega$  :

$$\varrho_{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_j}(\omega) = \frac{\widehat{e}_j^n(z, \omega)}{\widehat{e}_j^{n-1}(z, \omega)} = \frac{A_j^n(\omega)}{A_j^{n-1}(\omega)} \quad (2.22)$$

$$= \frac{\mathcal{C}_1 \left( f(\omega)|_{\Gamma_2} - \frac{\mathcal{B}f(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}g(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g(\omega)|_{\Gamma_2} \right) \mathcal{C}_2 \left( f(\omega)|_{\Gamma_1} - \frac{\mathcal{B}f(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}g(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g(\omega)|_{\Gamma_1} \right)}{\mathcal{C}_2 \left( f(\omega)|_{\Gamma_2} - \frac{\mathcal{B}f(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}g(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g(\omega)|_{\Gamma_2} \right) \mathcal{C}_1 \left( f|_{\Gamma_1} - \frac{\mathcal{B}f(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}g(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g(\omega)|_{\Gamma_1} \right)} \quad (2.23)$$

On peut dire qu'on a convergence de l'erreur  $|\widehat{e}_j^n(z, \omega)|$  vers 0 si l'on a :

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \varrho_{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_j}(\omega) < 1 \quad \text{avec } \varrho_{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_j} = |\varrho_{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_j}| \quad (2.24)$$

**Remarque** Il est naturel dans le cadre instationnaire de définir le facteur de convergence dans l'espace de Fourier car on peut y décrire le comportement de  $|\widehat{e}_j^n(z, \omega)|$  ; un lien avec la convergence de l'erreur dans l'espace temporel est fait en (2.29).

**Forme générale du facteur de convergence** Nous avons vu que le facteur de convergence dépendait des opérateurs et des conditions d'interface choisis. On peut l'écrire de manière générale

$$\rho(\omega) = |\mathcal{S}_2(\omega) (\mathcal{S}_1(\omega))^{-1}| \quad \text{où} \quad S_j(\omega) = \frac{\mathcal{C}_1 \left( f(\omega)|_{\Gamma_j} - \frac{\mathcal{B}(\omega)f(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}(\omega)g(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}g(\omega)|_{\Gamma_j} \right)}{\mathcal{C}_2 \left( f(\omega)|_{\Gamma_j} - \frac{\mathcal{B}(\omega)f(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}(\omega)g(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}g(\omega)|_{\Gamma_j} \right)} \quad (2.25)$$

Nous réutiliserons ces notations au chapitre 4.

### Lien entre le facteur de convergence et la convergence observée

Nous avons défini en (2.22) le facteur de convergence dans l'espace de Fourier. Il nous paraît essentiel de faire le lien avec la convergence observée sur l'erreur dans l'espace physique  $e_j^n(z, t)$ , qui est celle qui nous intéresse en pratique. Nous donnons ici quelques étapes simples qui nous permettent de faire le lien entre ces deux notions.

Nous avons défini notre taux de convergence du problème instationnaire comme suit :

$$\rho(\omega) = \frac{|\widehat{e}_j^n(z, \omega)|}{|\widehat{e}_j^{n-1}(z, \omega)|} \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad z \in \Omega_j, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.26)$$

Si on suppose que, pour tout  $z$  fixé,  $u(z, \cdot) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{u}(z, \cdot) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et on peut borner le rapport des normes  $\mathcal{L}^2$  :

$$\frac{\|\widehat{e}_j^{n+1}(z, \omega)\|_2}{\|\widehat{e}_j^n(z, \omega)\|_2} = \frac{\|\rho(\omega)\widehat{e}_j^n(z, \omega)\|_2}{\|\widehat{e}_j^n(z, \omega)\|_2} \quad (2.27)$$

$$\text{D'où} \quad \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) \leq \frac{\|\widehat{e}_j^{n+1}(z, \omega)\|_2}{\|\widehat{e}_j^n(z, \omega)\|_2} \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) \quad (2.28)$$

Le théorème de Parseval permet alors de revenir à l'espace réel, et l'on a :

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) \leq \frac{\|e_j^n(z, t)\|_2}{\|e_j^{n-1}(z, t)\|_2} = \frac{\|\widehat{e}_j^n(z, \omega)\|_2}{\|\widehat{e}_j^{n-1}(z, \omega)\|_2} \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega). \quad (2.29)$$

Ainsi, si  $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) < 1$  alors l'algorithme est convergent dans l'espace temporel :

$$\forall z \in \Omega, \quad \|e_j^n(z, \cdot)\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad j \in \{1, 2\} \quad (2.30)$$

La convergence de l'algorithme dans l'espace de Fourier peut donc s'interpréter comme la convergence de la norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur dans l'espace temporel, mais celle-ci ne nous

permet pas d'en déduire directement la convergence de l'erreur pour chaque temps  $t$ . Ceci dit, sous réserve d'une régularité généralement obtenue dans les problèmes classiques<sup>2</sup>, la formulation (2.30) montre qu'il existe une itération à partir de laquelle l'erreur  $|e_j^n(z, t)|$  converge vers 0.

### 2.2.3 Optimisation de la convergence

Nous avons vu dans les précédents paragraphes comment calculer le facteur de convergence d'un algorithme de Schwarz sur un problème instationnaire. Ce facteur dépend entre autres des conditions d'interface. Nous expliquons rapidement dans ce paragraphe comment la vitesse de convergence peut être optimisée en modifiant celles-ci sans dénaturer le problème couplé initial, via des techniques d'optimisation largement utilisées dans la communauté (voir §2.3.2).

**Conditions parfaitement transparentes** Remettons-nous dans le contexte général des erreurs et d'opérateurs  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$ , et  $\mathcal{C}$  linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t e_1^n(z, t) + \mathcal{L}e_1^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \times ]0, +\infty[ \\ \mathcal{B}e_1^n(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times ]0, +\infty[ \\ e_1^n(z, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_1 e_1^n(z, t) = \mathcal{C}_1 e_2^{n-1}(z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.31a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t e_2^n(z, t) + \mathcal{L}e_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \times ]0, +\infty[ \\ \mathcal{B}e_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times ]0, +\infty[ \\ e_2^n(z, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_2 e_2^n(z, t) = \mathcal{C}_2 e_1^n(z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \times ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.31b)$$

Nous pouvons voir que si les conditions d'interface annulent les membres de droite, c'est-à-dire si  $\mathcal{C}_2 e_1^n(z, t) = 0$  et  $\mathcal{C}_1 e_2^n(z, t) = 0$  dès lors que  $e_j^n$  est solution de l'EDP sur  $\Omega_j$ , alors l'algorithme converge en exactement deux itérations. Lors de la première itération, le *first guess* n'est a priori pas solution de l'EDP sur  $\Omega_j$ , mais à partir de la deuxième itération tous les membres de droite sont nuls et donc l'erreur vaut directement zéro. Dans ce cas précis, la solution issue de l'algorithme de Schwarz après deux itérations est la solution exacte du problème et le facteur de convergence donné en §2.2.2 vaut exactement zéro.

On appelle ces conditions les *conditions transparentes exactes* ou *conditions parfaitement transparentes*. Elles ont été initialement introduites par ENGQUIST et MAJDA, 1977 pour tronquer artificiellement un domaine sans que la solution numérique soit affectée, et leur intérêt en décomposition de domaine a été mis en évidence notamment par NATAF et al., 1994. Il est généralement possible de trouver ces conditions exactes pour des problèmes stationnaires; un premier exemple est donné par LIONS, 1990 pour des équations de diffusion. Pour des problèmes instationnaires, ces conditions exactes sont généralement non traduisibles en conditions d'interface locales en temps. Dans ce cas on cherche à optimiser la convergence en les approchant par de "très bonnes" conditions.

2. il faut généralement  $u(z, \cdot)$  continue et  $|\partial_t u(z, \cdot)|$  bornée.

Si l'on note  $\Lambda_j$  les conditions transparentes exactes, les conditions d'interface pour les erreurs sont

$$\Lambda_1 e_1^n(z, t) = \Lambda_1 e_2^{n-1}(z, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \Lambda_2 e_2^n(z, t) = \Lambda_2 e_1^n(z, t) \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Pour que ce système d'erreurs soit compatible avec l'étude de convergence, il faut supposer que ces opérateurs  $\Lambda_j$  sont linéaires. De plus pour que le problème soit bien posé, il faut s'assurer que  $\Lambda_j e_j$  est non-nul. Enfin, de telles conditions doivent permettre de satisfaire les conditions de transmission naturelles du problème initial (2.31).

**Conditions transparentes exactes dans le cadre stationnaire** On a vu au §2.2.2 que, dans le cadre général de problèmes stationnaires, il peut arriver qu'on sache résoudre l'équation différentielle donnée par  $\mathcal{L}$ . D'après (2.13), on peut alors écrire :

$$\begin{cases} e_j^n(z, \omega) = A_j^n H_j(z) & \text{sur } \Omega_j \quad (j = 1, 2) \\ \Lambda_1 e_1^n(z) = \Lambda_1 e_2^{n-1}(z) = A_2^{n-1} \Lambda_1 H_2(z) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \Lambda_2 e_2^n(z) = \Lambda_2 e_1^n(z) = A_1^n \Lambda_2 H_1(z) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

avec  $H_j(z) = \left( f(z) - \frac{\mathcal{B}f|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}g|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g(z) \right)$ . Si les fonctions  $H_j$  sont connues, alors des opérateurs  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  tels que  $\Lambda_1 H_2|_{\Gamma_1} = 0$  et  $\Lambda_2 H_1|_{\Gamma_2} = 0$  peuvent être déterminés.

Il est commun de chercher des conditions d'interfaces optimales sous la forme de combinaison linéaire des conditions de transmission naturelles données par le modèle. Dans notre contexte nous écrivons ces conditions comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_1^n(z) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}e_1^n(z) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{C}_1 e_1^n(z) + p \mathcal{C}_2 e_1^n(z) = \mathcal{C}_1 e_2^{n-1}(z) + p \mathcal{C}_2 e_2^{n-1}(z) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.33a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}e_2^n(z) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{C}_2 e_2^n(z) + q \mathcal{C}_1 e_2^n(z) = \mathcal{C}_2 e_1^n(z) + q \mathcal{C}_1 e_1^n(z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.33b)$$

avec  $p$  et  $q$  des constantes qui ne doivent pas pouvoir annuler le membre de gauche dans les conditions d'interface. Le fait de prendre une combinaison linéaire des conditions de transmission naturelles permet de ne pas changer la nature du problème. On peut ainsi calculer les erreurs à chaque itération :

$$\begin{cases} e_j^n(z) = A_j^n H_j(z) & \text{sur } \Omega_j \quad (j = 1, 2) \\ A_1^n (\mathcal{C}_1 H_1(z) + p \mathcal{C}_2 H_1(z)) = A_2^{n-1} (\mathcal{C}_1 H_2(z) + p \mathcal{C}_2 H_2(z)) & \text{sur } \Gamma_1 \\ A_2^n (\mathcal{C}_2 H_2(z) + q \mathcal{C}_1 H_2(z)) = A_1^n (\mathcal{C}_2 H_1(z) + q \mathcal{C}_1 H_1(z)) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.34)$$

Le choix qui permettrait d'annuler le facteur de convergence et de converger en 2 itérations est donné par

$$p^{exact} = - (\mathcal{C}_1 H_2|_{\Gamma_1}) (\mathcal{C}_2 H_2|_{\Gamma_1})^{-1} \quad (2.35a)$$

$$q^{exact} = - (\mathcal{C}_2 H_1|_{\Gamma_2}) (\mathcal{C}_1 H_1|_{\Gamma_2})^{-1} \quad (2.35b)$$

**Conditions transparentes exactes dans le cadre instationnaire** Nous avons vu que pour étudier la convergence dans le cas instationnaire, il est nécessaire de passer par une transformée de Fourier. L'erreur dans le domaine fréquentiel sur le problème avec les conditions transparentes exactes vérifierait :

$$\begin{cases} \widehat{e}_j^n(z, \omega) = A_j^n(\omega) H_j(z, \omega) & \text{sur } \Omega_j \ (j = 1, 2) \\ \mathcal{F}(\Lambda_1 e_1^n)(\omega) = \mathcal{F}(\Lambda_1 e_2^{n-1})(\omega) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \mathcal{F}(\Lambda_2 e_2^n)(\omega) = \mathcal{F}(\Lambda_2 e_1^n)(\omega) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

Des conditions transparentes exactes peuvent alors facilement être trouvées dans l'espace de Fourier, de la même manière que dans le cadre stationnaire.

Comme précédemment, si on ne veut pas dénaturer le problème initial, on peut poser les conditions d'interface comme combinaison des  $\mathcal{C}_j$  :  $\mathcal{C}_1 + \lambda_1 \mathcal{C}_2$  d'une part, et  $\mathcal{C}_2 + \lambda_2 \mathcal{C}_1$  d'autre part, avec  $\lambda_j$  des opérateurs que l'on cherche à définir. Pour obtenir les conditions transparentes exactes, ils doivent alors vérifier :

$$\lambda_1 \mathcal{C}_2 e_2^n = \mathcal{F}^{-1}(-\mathcal{C}_1 \widehat{e}_2^n) \quad (2.37a)$$

$$\lambda_2 \mathcal{C}_1 e_1^n = \mathcal{F}^{-1}(-\mathcal{C}_2 \widehat{e}_1^n) \quad (2.37b)$$

où  $\mathcal{F}^{-1}$  est la transformée de Fourier inverse. Ces conditions transparentes exactes  $\Lambda_1 = \mathcal{C}_1 + \lambda_1 \mathcal{C}_2$  et  $\Lambda_2 = \mathcal{C}_2 + \lambda_2 \mathcal{C}_1$  ne sont généralement pas locales en temps, et ne sont donc pas utilisables en pratique.

**Optimisation de la convergence dans le cadre instationnaire** Bien qu'on ne puisse pas toujours utiliser les conditions transparentes exactes qui garantissent la convergence en deux itérations, il existe des méthodes pour optimiser la convergence. NATAF, 2007 donne une description de ces méthodes d'optimisation. Nous rappelons ici la méthode largement utilisée dans les travaux autour des algorithmes de Schwarz. Il s'agit généralement de résoudre un problème "inf-sup" dans l'espace de Fourier et sur les conditions d'interface. On pourra trouver des résultats généraux pouvant s'appliquer à la résolution de problème de ce type de problème dans BENNEQUIN et al., 2009.

On propose ici d'écrire les conditions d'interface comme combinaisons linéaires des  $\mathcal{C}_j$ , c'est-à-dire de chercher  $\lambda_1 = p \text{Id}$  et  $\lambda_2 = q \text{Id}$  avec  $(p, q) \in \mathcal{P}$ , l'ensemble  $\mathcal{P}$  assurant le caractère bien posé du problème. Les conditions optimisées  $\lambda_i^{opt}$  correspondent à la solution du problème :

Trouver  $(p^*, q^*) \in \mathcal{P}$  tel que :

$$\sup_{\omega \in I_\omega} \rho_{RR}(\omega, p^*, q^*) = \inf_{(p, q) \in \mathcal{P}} \left\{ \max_{\omega \in I_\omega} \rho_{RR}(\omega, p, q) \right\} \quad (2.38)$$

où  $I_\omega$  est l'intervalle de prise en compte des fréquences  $\omega$ . La résolution de ce problème a été réalisée analytiquement pour différents types de problèmes, généralement sur un domaine infini et à coefficients constants. On pourra notamment se référer à une résolution

générale pour des équations de type advection-réaction-diffusion dans BENNEQUIN et al., 2016, mais aussi GANDER et al., 2007a et LEMARIÉ et al., 2013a. Pour les situations plus complexes, le problème (2.38) est résolu numériquement à condition qu'un facteur de convergence comme défini en §2.2.2 ait pu être calculé. Une autre approche pour obtenir des conditions de transmission optimisées consiste à utiliser une approximation à basse fréquence du symbole de Fourier des opérateurs  $\Lambda_j$ , comme par exemple dans JAPHET, 1998 ou MARTIN, 2003. Ce type d'optimisation est largement utilisé pour des couplages non multiphysiques, ce qui permet des simplifications dans les calculs pour résoudre le problème *inf-sup* correspondant (qu'on ne retrouve pas dans le cadre multiphysique).

Dans le chapitre 4, nous ne donnerons pas de nouveau résultat théorique sur l'optimisation de la convergence des algorithmes de Schwarz mais nous utiliserons la résolution numérique du problème (2.38) pour optimiser nos algorithmes.

## 2.3 Algorithme de Schwarz pour le couplage multiphysique

Dans un cadre multiphysique, contrairement au problème de décomposition de domaine classique, on ne résout pas le même problème sur les deux domaines. Les algorithmes de Schwarz, initialement introduits pour la décomposition de domaine, peuvent s'adapter à ce cadre mais amènent certaines problématiques supplémentaires. Un des premiers à s'intéresser aux algorithmes de Schwarz dans le cadre multiphysique est LIONS, 1990. Nous en reparlerons rapidement au §2.3.1 dans lequel on décrit les spécificités du cadre multiphysique et ce qui change. Nous présentons ensuite au §2.3.2 des travaux antérieurs qui partagent certaines des spécificités du couplage océan-atmosphère.

### 2.3.1 Le cadre multiphysique

Dans cette thèse nous nous concentrons sur les algorithmes de Schwarz appliqués à un couplage multiphysique sur deux domaines  $\Omega_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . On se place dans un cadre général où l'on souhaite résoudre le problème couplé suivant, dans sa version stationnaire (2.39) ou instationnaire (2.40) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1 = \mathcal{F}_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1 u_1 = \mathcal{G}_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathcal{L}_2 u_2 = \mathcal{F}_2 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2 u_2 = \mathcal{G}_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathcal{I}_1 u_1 = \mathcal{I}_2 u_2 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + \mathcal{L}_1 u_1 = \mathcal{F}_1 & \text{sur } \Omega_1 \times \mathcal{T} \\ u_1(t=0) = g_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1 u_1 = \mathcal{G}_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathcal{T} \\ \partial_t u_2 + \mathcal{L}_2 u_2 = \mathcal{F}_2 & \text{sur } \Omega_2 \times \mathcal{T} \\ u_2(t=0) = g_2 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2 u_2 = \mathcal{G}_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathcal{T} \\ \mathcal{I}_1 u_1 = \mathcal{I}_2 u_2 & \text{sur } \Gamma \times \mathcal{T} \end{cases} \quad (2.40)$$

où  $\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{I}_j$  sont des opérateurs linéaires aux dérivées partielles,  $\Gamma$  l'interface entre

les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (rappelons qu'il ne peut y avoir de recouvrement dans ce cas), et  $\partial\Omega_j^{ext} = \partial\Omega_j \setminus \Gamma$  le bord "extérieur". On représente le problème multiphysique stationnaire sur la figure 2.7.

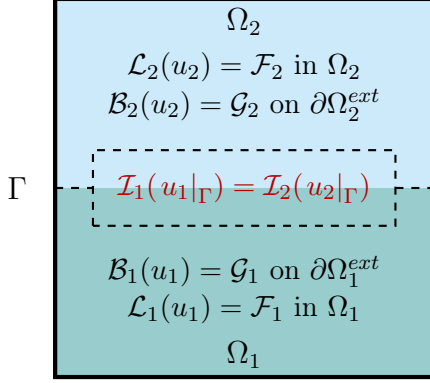


FIGURE 2.7 – Schéma d'un problème multiphysique dans le cadre stationnaire

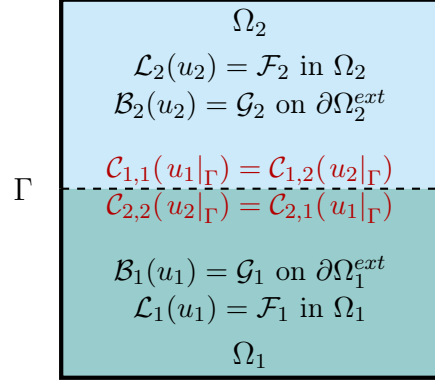


FIGURE 2.8 – Schéma d'un problème multiphysique décomposé en deux sous-problèmes dans le cadre stationnaire

Notons que dans le cadre du couplage multiphysique, les opérateurs  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , ou  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , ne sont en général pas les mêmes. Ceci dit leur caractère linéaire est essentiel pour les résultats qui suivront dans les prochaines sections de ce chapitre. Les *conditions de compatibilité*  $\mathcal{I}_1 u_1 = \mathcal{I}_2 u_2$  représentent une réalité physique, aussi il convient de choisir des opérateurs d'interface  $\mathcal{C}_{i,j}$  en accord avec ces conditions. Ceci ajoute une contrainte sur le choix des conditions d'interface par rapport au cadre non-multiphysique. D'une manière très générale, il faut que, à convergence, les conditions d'interfaces données en  $\mathcal{C}_{i,j}$  impliquent les conditions de compatibilité  $\mathcal{I}_1 u_1 = \mathcal{I}_2 u_2$  :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{1,1} u_1 = \mathcal{C}_{1,2} u_2 & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_{2,1} u_2 = \mathcal{C}_{2,1} u_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \implies \mathcal{I}_1 u_1 = \mathcal{I}_2 u_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.41)$$

On peut alors appliquer l'algorithme de Schwarz sur le problème résultant donné par la figure 2.8.

Les algorithmes de Schwarz stationnaires et globaux en temps s'adaptent naturellement au cadre multiphysique, comme pour la décomposition de domaine sans recouvrement. L'algorithme 3 décrit l'algorithme global en temps pour un couplage multiphysique instationnaire, le cas stationnaire s'en déduit de la même manière qu'au paragraphe 2.2.1.

Ce descriptif de l'algorithme de Schwarz global en temps nous permet de faire le lien avec les méthodes de couplage utilisées actuellement dans le cadre du couplage océan-atmosphère. On a vu que réduire la taille de la fenêtre de couplage à un seul pas de temps reviendrait à utiliser un couplage synchrone sans le processus itératif. De même, appliquer un algorithme asynchrone reviendrait à faire une seule itération de Schwarz global en temps. Ces derniers points sont les objets d'études de LEMARIÉ et al., 2015b qui montrent qu'il est pertinent d'utiliser cet algorithme pour le couplage océan-atmosphère.



**Algorithm 3** Schwarz global en temps pour le couplage multiphysique**Require:**  $u_2^0$  sur  $\Gamma_1 \times \mathcal{T}$  avec  $\mathcal{T} = [t_0, t_f]$  $n = 0$ **while** non convergence ou  $n < n_{max}$  **do**

résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u_1^n + \mathcal{L}_1 u_1^n = \mathcal{F}_1 & \text{sur } \Omega_1 \times \mathcal{T} \\ \mathcal{B}_1 u_1^n = \mathcal{G}_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathcal{T} \\ u_1^n(x, t = t_0) = u_1(x, t_0) & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_{1,1} u_1^n = \mathcal{C}_{1,2} u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma \times \mathcal{T} \end{cases}$$

puis résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u_2^n + \mathcal{L}_2 u_2^n = \mathcal{F}_2 & \text{sur } \Omega_2 \times \mathcal{T} \\ \mathcal{B}_2 u_2^n = \mathcal{G}_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathcal{T} \\ u_2^n(x, t = t_0) = u_2(x, t_0) & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_{2,2} u_2^n = \mathcal{C}_{2,1} u_1^n & \text{sur } \Gamma \times \mathcal{T} \end{cases}$$

**end while**

**Caractère bien posé : exemple d'un problème parabolique 1D** Comme expliqué au paragraphe §2.2.1, il faut définir quelles conditions sur les opérateurs  $\mathcal{L}_j$ ,  $\mathcal{B}_j$  et  $\mathcal{C}_{i,j}$  sont nécessaires pour que le problème (2.40) soit bien posé. On donne un exemple ci-dessous pour un problème de type parabolique 1D qui généralise le type de sous-problèmes qu'on obtient dans le cadre océan-atmosphère.

Des résultats très généraux sur les problèmes de type parabolique peuvent être trouvés dans LIONS et MAGENES, 1968b; nous tirons les prochains résultats d'existence et d'unicité de cet ouvrage.

A chaque itération  $n$ , sur le domaine  $j$ , on résout le problème de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mathcal{L}_j u_j = F & \Omega_j \times \mathcal{T} \\ \mathcal{B}_j u_j = G & \partial\Omega_j^{ext} \times \mathcal{T} \\ \mathcal{C}_j u_j = g & \Gamma \times \mathcal{T} \\ u_j(z, t = 0) = u_0(z) & \Omega_j \end{cases} \quad (2.42)$$

où  $(\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j)$  forment un problème elliptique régulier sur  $\Omega_j$ . Alors, il existe une unique solution  $u_j \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}^2(\Omega_j), \mathcal{T}) \cap \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2(\Omega_j), \mathcal{T})$  si :

1.  $F \in \mathcal{L}^2(\mathcal{L}^2(\Omega_j), \mathcal{T})$
2.  $u_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega_j)$
3.  $G \in \mathcal{H}^{3/4}(\mathcal{T})$  si  $\mathcal{B}_j$  est une condition de Dirichlet, et  $G \in \mathcal{H}^{1/4}(\mathcal{T})$  si  $\mathcal{B}_j$  est une condition de Neumann. De même pour  $g$  en fonction de la condition  $\mathcal{C}_j$ .

4.  $G(z, t = 0) = \mathcal{B}_j u_0$  pour tout  $z \in \partial\Omega_j^{ext}$  et  $g(z, t = 0) = \mathcal{C}_j u_0$  pour tout  $z \in \Gamma$ .

Au cours d'une itération de l'algorithme de Schwarz, la donnée à l'interface  $\Gamma$  provient de la solution de l'autre sous-problème à l'itération précédente  $g = \mathcal{C}_{\bar{j}} u_{\bar{j}}^{n-1}$ . Supposons que les conditions 1) à 4) sont vérifiées à l'itération précédente ; alors  $u_{\bar{j}}^{n-1} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega_{\bar{j}}, \mathcal{T})$  d'après le théorème de trace (voir LIONS et MAGENES, 1968b),  $u_{\bar{j}}^{n-1}|_{\Gamma}(z, t) \in \mathcal{H}^{3/4}(\mathcal{T})$  et  $\partial_z u_{\bar{j}}^{n-1}|_{\Gamma}(z, t) \in \mathcal{H}^{1/4}(\mathcal{T})$ . La régularité de la solution  $u_{\bar{j}}^{n-1}$  est suffisante pour garantir l'existence et l'unicité de  $u_j^n$ . Celle-ci est elle même suffisamment régulière pour garantir l'existence et l'unicité de  $u_{\bar{j}}^n \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega_{\bar{j}}, \mathcal{T})$  pour chaque sous-domaine et à chaque itération, et donc l'algorithme de Schwarz est bien posé.

### Remarques :

- Les conditions de bord peuvent être moins "classiques" que des conditions de Dirichlet ou Neumann (par exemple de type Robin). Il faut dans ce cas vérifier certaines hypothèses de compatibilité avec l'opérateur  $\mathcal{L}_j$  pour que l'énoncé ci-dessus soit encore valable.
- Le fait que les sous-problèmes à chaque itération de l'algorithme soient bien posés n'implique pas que l'algorithme soit convergent

**Facteur de convergence** En suivant les mêmes étapes de calcul que dans le paragraphe §2.2.2, on peut donner la forme générale du taux de convergence :

- dans le cadre stationnaire :

$$\rho_{\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j}^{\text{sta}} = \left| \frac{\mathcal{C}_{1,2} \left( f_2|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_2 f_2|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}_2 g_2|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g_2|_{\Gamma} \right) \mathcal{C}_{2,1} \left( f_1|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_1 f_1|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}_1 g_1|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g_1|_{\Gamma} \right)}{\mathcal{C}_{2,2} \left( f_2|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_2 f_2|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}_2 g_2|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g_2|_{\Gamma} \right) \mathcal{C}_{1,1} \left( f_1|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_1 f_1|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}_1 g_1|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g_1|_{\Gamma} \right)} \right| \quad (2.43)$$

avec  $f_j$  et  $g_j$  les fonctions de base des solutions de  $\mathcal{L}_j(u) = 0$  sur  $\Omega_j$ .

- dans le cadre instationnaire :

$$\rho_{\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j}(\omega) = \left| \frac{\mathcal{C}_{1,2} \left( f_2(\omega)|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_2(\omega) f_2(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}_2(\omega) g_2(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g_2(\omega)|_{\Gamma} \right) \mathcal{C}_{2,1} \left( f_1(\omega)|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_1(\omega) f_1(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}_1(\omega) g_1(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g_1(\omega)|_{\Gamma} \right)}{\mathcal{C}_{2,2} \left( f_2(\omega)|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_2(\omega) f_2(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}}{\mathcal{B}_2(\omega) g_2(\omega)|_{\partial\Omega_2^{ext}}} g_2(\omega)|_{\Gamma} \right) \mathcal{C}_{1,1} \left( f_1(\omega)|_{\Gamma} - \frac{\mathcal{B}_1(\omega) f_1(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}}{\mathcal{B}_1(\omega) g_1(\omega)|_{\partial\Omega_1^{ext}}} g_1(\omega)|_{\Gamma} \right)} \right| \quad (2.44)$$

avec  $f_j$  et  $g_j$  les fonctions de base des solutions de  $(i\omega + \mathcal{L}_j)(u) = 0$  sur  $\Omega_j$ .

Remarquons que si  $C_{1,2} = \gamma_1 C_{1,1} = \gamma_1 C_1$  et  $C_{2,1} = \gamma_2 C_{2,2} = \gamma_2 C_2$ , avec  $\gamma_j$  des constantes, ce qui pourra être le cas pour le couplage océan-atmosphère, alors on peut réécrire le facteur de convergence sous la forme

$$\rho(\omega) = |\gamma_1 \gamma_2 \mathcal{S}_2(\omega) (\mathcal{S}_1(\omega))^{-1}| \quad \text{où} \quad \mathcal{S}_j(\omega) = \frac{\mathcal{C}_1 \left( f_j(\omega)|_\Gamma - \frac{\mathcal{B}_j(\omega) f_j(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}_j(\omega) g_j(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g_j(\omega)|_\Gamma \right)}{\mathcal{C}_2 \left( f_j(\omega)|_\Gamma - \frac{\mathcal{B}_j(\omega) f_j(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}_j(\omega) g_j(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g_j(\omega)|_\Gamma \right)} \quad (2.45)$$

Rappelons que le paragraphe §2.2.2 donne le lien existant entre le facteur de convergence exprimé dans l'espace de Fourier (2.44) et la convergence de l'erreur observée dans l'espace réel. La propriété (2.29) est toujours valable dans le cadre multiphysique.

**Optimisation de la convergence dans le cadre multiphysique** Nous avons vu au paragraphe §2.2.3 qu'il existait pour un problème de décomposition de domaine des conditions parfaitement transparentes, mais que celles-ci n'étaient en général pas traduisibles dans l'espace physique dans le cadre instationnaire. De telles conditions existent aussi pour un couplage multiphysique ; elles sont calculées de la même manière et on retrouve les mêmes problématiques que dans les problèmes de décomposition de domaine.

- Dans le cadre stationnaire 1D, on sait calculer les conditions parfaitement transparentes dans le respect des conditions de compatibilité du couplage initial (2.39) :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{1,1} e_1^n(z) + p \mathcal{C}_{2,1} e_1^n(z) &= \mathcal{C}_{1,2} e_2^{n-1}(z) + p \mathcal{C}_{2,2} e_2^{n-1}(z) & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_{2,2} e_2^n(z) + q \mathcal{C}_{1,2} e_2^n(z) &= \mathcal{C}_{2,1} e_1^n(z) + q \mathcal{C}_{1,1} e_1^n(z) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.46a)$$

$$p^{exact} = -(\mathcal{C}_{1,2} H_2|_\Gamma) (\mathcal{C}_{2,2} H_2|_\Gamma)^{-1} \quad q^{exact} = -(\mathcal{C}_{2,1} H_1|_\Gamma) (\mathcal{C}_{1,1} H_1|_\Gamma)^{-1} \quad (2.46b)$$

On trouve un exemple de telles conditions parfaitement transparentes dans LIONS, 1990 pour des équations de diffusion à coefficients variables en contexte stationnaire.

- Dans le cadre instationnaire, on retrouve les difficultés exprimées au paragraphe §2.2.3 liées au fait que ces conditions sont exprimées dans l'espace de Fourier et a priori non traduisibles dans l'espace physique :

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,1} &= \mathcal{C}_{1,1} + \lambda_1 \mathcal{C}_{1,2} & \Lambda_{1,2} &= \mathcal{C}_{1,2} + \lambda_1 \mathcal{C}_{2,2} \\ \Lambda_{2,2} &= \mathcal{C}_{2,2} + \lambda_2 \mathcal{C}_{1,2} & \Lambda_{2,1} &= \mathcal{C}_{2,1} + \lambda_2 \mathcal{C}_{1,1} \\ \lambda_1 \mathcal{C}_{2,2} e_2^n &= \mathcal{F}^{-1}(-\mathcal{C}_{1,2} \tilde{e}_2^n) & \lambda_2 \mathcal{C}_{1,1} e_1^n &= \mathcal{F}^{-1}(-\mathcal{C}_{2,1} \tilde{e}_1^n) \end{aligned} \quad (2.47a)$$

où  $\mathcal{F}^{-1}$  est la transformée de Fourier inverse. Les méthodes d'optimisations données en §2.2.3 restent valides pour le cadre d'un couplage multiphysique. Cependant, les équations différentielles sur chacun des domaines  $\Omega_j$  sont généralement différentes, ce qui rajoute de la complexité au problème de type *inf-sup* généralement utilisé pour trouver les conditions optimales.

Notre cadre de couplage multiphysique peut se rapprocher d'études de décomposition de domaine par des algorithmes de Schwarz avec des coefficients discontinus à l'interface : NATAF, 2007, BLAYO et al., 2007, LEMARIÉ et al., 2013a et LEMARIÉ et al., 2013b, GANDER et VANZAN, 2019.

### 2.3.2 Travaux antérieurs en lien avec notre problématique

Dans ce paragraphe, nous faisons un bref tour d'horizon des travaux existants sur les algorithmes de Schwarz et pouvant se rapporter à notre étude (1.40). La majorité portent sur l'étude de la convergence, et plus précisément sur :

- la nature de la convergence et le caractère bien posé des problèmes : la solution tend-elle bien vers la solution du problème couplé au fil des itérations, et à quelles conditions ?
- la vitesse de la convergence : le but est bien souvent d'optimiser la vitesse de convergence en "jouant" sur les conditions d'interface.

Nous listons, de manière non exhaustive, un certain nombre d'aspects intervenant dans notre problème de couplage, et des travaux existants abordant au moins partiellement leur traitement par un algorithme de Schwarz. Le tableau 2.1 résume les éléments exposés dans ce paragraphe.

**Domaine infini/ domaine fini** Considérer des domaines de taille infinie permet de manipuler des équations plus simples que si l'on considère des domaines finis. Beaucoup de résultats d'optimisation de la convergence existent pour des études sur des domaines infinis. Mais en pratique la taille des domaines est généralement finie, et celle-ci peut influencer la convergence de l'algorithme. Ainsi, par exemple, DUBOIS, 2007 illustre ce point pour l'équation stationnaire de Helmholtz. Comme on le verra en chapitre 4, c'est aussi une de nos conclusions pour un problème de réaction-diffusion instationnaire sur des domaines de tailles finies.

**Coefficients constants/ Coefficients variables** Une majorité d'études se place dans le cas de coefficients constants, non nécessairement discontinus à l'interface, dans le cadre instationnaire. GANDER et XU, 2016 étudie une équation de type Helmholtz avec un coefficient continu mais variable. La convergence de l'algorithme de couplage multiphysique (coefficient discontinu à l'interface) dans le cas diffusion instationnaire est étudiée dans LEMARIÉ et al., 2013a et LEMARIÉ et al., 2013b. Dans LEMARIÉ et al., 2013a on s'intéresse à la convergence de l'algorithme de Schwarz et à son optimisation pour des coefficients constants et des domaines infinis. A notre connaissance, la seule étude avec des coefficients de diffusion variables et discontinus à l'interface est LEMARIÉ et al., 2013b. Celle-ci donne une appréciation très générale de la convergence pour une diffusion variable, mais ne permet pas d'optimiser la vitesse de convergence. Le tableau 2.2 classifie de telles études sur les coefficients constants/non constants qui pourraient se rapprocher d'une équation de

Auteurs et année	type d'équation	inst	coeff.	dom.	particularité
LIONS, 1990	<i>eq. diff 1D</i>	non	disc et variable	F. SR	condition transparente exacte stationnaire
NATAF et al., 1994	multidimensionnel	non	C.C	R	définition des conditions transparentes exactes dans le cadre multidimensionnel
JAPHET, 1998	<i>conv-diff 2D</i>	oui	C.C	I.SR	optimisation via l'approximation des CTE + optimisation conv discret
GANDER et al., 2002	<i>Helmoltz 2D</i>	non	C.C	I.SR	optimisation pour l'équation de Helmholtz
GANDER et HALPERN, 2003	<i>eq chaleur 1D</i>	oui	C.C	I.R	optimisation pour l'équation de la chaleur
MARTIN, 2003	<i>conv-diff et saint venant</i>	oui	C.C	I.SR	well posedness et optimisation
GANDER et ROHDE, 2005	<i>adv-diff 1D</i>	oui	C.C	I.R	non linéarité terme d'advection
GERARDO-GIORDA et NATAF, 2005	<i>adv-react-diff 2D</i>	non	C.C	I.SR	optimisation semi-discrète sans recouvrement
DUBOIS, 2007	<i>Helmholtz 2D</i>	non	disc. et constant	I..R & SR	optimisation (domaine infini) , multidomaine
GANDER et al., 2007b	<i>adv-react-diff 1D</i>	oui	disc. et constant	I.SR	optimisation & grille temporelle non conforme
BLAYO et al., 2007	<i>adv-react-diff 1D</i>	oui	disc. et constant	I.SR	optimisation grille temporelle non conforme
CAETANO et al., 2011	<i>diff+terme non linéaire</i>	oui	C.C	I. SR	optimisation pour un problème non linéaire
LEMARIÉ et al., 2013a & LEMARIÉ et al., 2013b	<i>eq. diff 1D</i>	oui	disc. et diffusion variable	I.SR	convergence dans le cadre multiphysique et coefficient de diffusion variable
BENNEQUIN et al., 2016	<i>adv-react-diff 2D</i>	oui	C.C	I..R & SR	optimisation convergence 2D
GANDER et VANZAN, 2019	<i>react-diff 2D</i>	non	disc. et constant	I.SR	optimisation dans le cadre multiphysique
THERY et al., 2020 (voir §4.2.2)	<i>react-diff 1D</i>	oui	coeff disc. et variable	F.SR	cadre multiphysique, influence de la variabilité des coefficients

TABLE 2.1 – Liste de certains travaux pouvant se rapprocher de notre modèle d'étude, en rouge les paramètres correspondant à notre problème (1.40). Coeff : C.C = continu et constant, domaines : I = Infini/F=fini, R=recouvrement/SR=sans recouvrement.

		Diffusion constante	Diffusion variable en espace
Stationnaire		<i>adv-diff 2D</i> JAPHET et al., 2001 <i>eq. Helmholtz</i> DUBOIS, 2007 MAGOULÈS et al., 2004	<i>eq. de diffusion</i> LIONS, 1990
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	<i>eq. chaleur</i> GANDER et HALPERN, 2003 <i>reaction-reaction-diff 2D</i> BENNEQUIN et al., 2016 et GANDER et al., 2007b	<i>eq. diffusion 1D</i> LEMARIÉ et al., 2013b
	avec effet de Coriolis	<i>2D shallow water</i> MARTIN, 2003 <i>eq. primitives 3D</i> AUDUSSE et al., 2009	<i>eq. diffusion 1D + Coriolis</i> chapitre 4

TABLE 2.2 – Liste de travaux autour des problèmes dont l'équation générale est de type réaction-diffusion ou Coriolis+diffusion, classée suivant les spécificités : *diffusion constante/diffusion variable* et *stationnaire/instationnaire*

type réaction diffusion ou de problèmes prenant en compte de l'effet de Coriolis. L'objectif du chapitre 4 sera de répondre aux problématiques de la case "instationnaire avec effet de Coriolis et diffusion variable".

**Prise en compte des non-linéarités** Dans cette thèse, nous cherchons à nous rapprocher du modèle "réaliste" de couplage océan-atmosphère (1.39) et à étudier comment les algorithmes de Schwarz peuvent s'y appliquer. Or ce modèle est fortement non-linéaire et l'étude de la convergence dans ce cas se fait plus difficilement. Contrairement au cas linéaire, il n'existe a priori pas de méthode générale pour étudier la convergence des algorithmes de Schwarz dans le cadre non-linéaire. Plusieurs articles traitent différents cas de "non-linéarité". Une étude très complète sur la convergence d'algorithme de Schwarz sur un problème non linéaire de type équation des ondes de type  $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(u, \partial_t u, \partial_z(u))$  avec  $f$  une application non linéaire est réalisée dans HALPERN et SZEFTTEL, 2007. Cette étude très général ne peut cependant pas s'appliquer directement sur notre problème où la non-linéarité porte sur les conditions d'interface et sur le terme de plus haut degré de dérivation en espace. GANDER et ROHDE, 2005 s'intéresse à un problème d'advection diffusion non-linéaire où la non-linéarité porte sur le terme d'advection :  $\partial_t u + \partial_x f(u) - \nu \partial_x^2 u = 0$ . CAETANO et al., 2011 étudie la convergence des algorithmes de Schwarz avec recouvrement sur une équation de type diffusion instationnaire avec un terme de réaction non linéaire. Dans tous les cas, l'approche consiste à linéariser le terme non linéaire afin de revenir à un problème connu. AHMED et al., 2018 est une récente étude plus générale sur

les problèmes non linéaires de type  $\partial_t u_j - \partial_z(\lambda(u_j)\partial_z \pi(u_j)) = 0$  où  $\lambda$  et  $\pi$  sont des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , où on étudie le caractère bien posé de l'algorithme de Schwarz et sa convergence. Ces derniers résultats pourraient être une piste pour étudier le type de non-linéarité qui apparaissent dans le couplage océan-atmosphère.

**Discrétisation non conforme en temps** Dans le cadre d'un couplage sans recouvrement, la grille temporelle utilisée peut être différente suivant les domaines. C'est notamment le cas en couplage Océan Atmosphère, où le pas de temps dans l'atmosphère est en général beaucoup plus petit que celui dans l'océan. On peut donc se demander comment faire l'échange d'information à l'interface et comment cela agit sur la convergence. Une approche est d'adapter la discrétisation temporelle à la méthode choisie. GANDER et al., 2007b et HALPERN et al., 2010 proposent d'utiliser un choix particulier de schéma en volumes finis qui permet de manipuler les conditions d'interface comme dans la formulation continue et d'en étudier la convergence.

Par ailleurs, nous avons vu que dans les méthodes de couplage océan-atmosphère actuelles, la gestion à l'interface se faisait via un moyennage sur la fenêtre temporelle. Nous verrons dans les chapitres suivants comment ce moyennage peut influencer la convergence de façon indépendante de la discrétisation temporelle.

**Les algorithmes de Schwarz appliqués au cadre océan et/ou atmosphère** L'application des algorithmes de Schwarz dans le cadre des modèles de circulation océanique a été étudiée pour les modèles de Saint-Venant (non multiphysique) par MARTIN, 2003 et BLAYO et al., 2017, et pour les équations primitives par AUDUSSE et al., 2009. Dans le cadre d'un couplage multiphysique, BELJAARS et al., 2017 s'intéresse à la stabilité des méthodes actuelles de couplage atmosphère/surface continentale. LEMARIÉ et al., 2015b et ZHANG et al., 2020 étudient la consistance et la stabilité de méthodes de couplage océan-atmosphère et introduit notamment l'application des algorithmes de Schwarz global en temps.

Les spécificités du couplage océan-atmosphère ne sont en général pas considérées simultanément dans les travaux sur les algorithmes de Schwarz (tableau 2.1). Comme indiqué précédemment, LEMARIÉ et al., 2013b prend en compte les aspects "multiphysique" et "diffusion variable". Nous ajouterons les aspects "domaines finis" et "force de Coriolis" au chapitre 4. Nous y étudierons également l'effet du moyennage sur les données à l'interface, ainsi que celui de la non-linéarité dans la condition de couplage au chapitre 5.





# Chapitre 3

## Influence du découpage temporel sur l'algorithme de Schwarz

### Sommaire

---

<b>3.1 Effets du découpage temporel sur le taux de convergence . . .</b>	<b>60</b>
3.1.1 Étude de la convergence sur une fenêtre de taille finie . . . . .	61
3.1.2 Étude de la convergence de l'algorithme discret en temps . . .	63
3.1.3 Illustration des effets du découplage temporel . . . . .	66
<b>3.2 Des conditions d'interface assurant la convergence de l'algorithme discret . . . . .</b>	<b>71</b>
3.2.1 Les conditions optimales pour l'algorithme local en temps . . .	71
3.2.2 Illustrations et comparaison avec d'autres conditions d'interface	74
<b>3.3 Filtrage au sein des conditions d'interface . . . . .</b>	<b>78</b>
3.3.1 Applications de filtres sur les conditions d'interfaces . . . . .	78
3.3.2 Effet de la moyenne sur l'algorithme de Schwarz . . . . .	82
3.3.3 Exemple d'application du filtre moyenne . . . . .	85

---

L'application des algorithmes de Schwarz sur des problèmes instationnaires comporte plusieurs paramètres temporels. Un premier paramètre est la longueur de la *fenêtre de couplage*, c'est-à-dire la fenêtre temporelle sur laquelle l'itération est appliquée. Dans le cadre discret, un deuxième paramètre d'importance est le pas de temps dans chacun des modèles. Ces paramètres influencent la convergence de l'algorithme et c'est l'objet de la section 3.1. La section 3.2 donne des conditions d'interface particulières au découpage temporel, et qui assurent la convergence de l'algorithme. Enfin, comme nous l'avons vu dans la section 2.1, il est usuel dans le cadre du couplage océan-atmosphère d'appliquer des opérateurs de moyennage temporel dans l'échange de conditions d'interface. La section 3.3 étudie l'influence de tels opérateurs sur le comportement des algorithmes de Schwarz.

A la fin de chaque section, un paragraphe propose des illustrations numériques des propriétés théoriques données dans celle-ci. Ces illustrations sont données dans le cadre général d'un couplage multiphysique de type :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_j(t, z) - \nu_j \partial_z^2 u_j(t, z) = F_j & (z, t) \in (0, h_j) \times [0, T] \\ u_j(t, h_j) = G_j & t \in [0, T] \\ u_j(0, z) = u_0(z) & z \in (0, h_j) \\ \\ u_1(0^-, t) = u_2(0^+, t) & t \in [0, T] \\ \nu_2 \partial_z u_2(0^-, t) = \nu_1 \partial_z u_1(0^+, t) & t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $\nu_j$ ,  $h_j$  et  $T$  sont des données qui seront précisées pour chaque exemple. L'algorithme de Schwarz est appliqué avec des conditions d'interface de type "Dirichlet-Neumann" telles que, à chaque itération  $n$  :

$$u_1^n(0^-, t) = u_2^{n-1}(0^+, t) \quad t \in [0, T] \quad (3.2a)$$

$$\nu_2 \partial_z u_2^n(0^+, t) = \nu_1 \partial_z u_1^n(0^-, t) \quad t \in [0, T] \quad (3.2b)$$

Nous admettons dans ce chapitre que le problème couplé (3.1) est bien posé ainsi que l'algorithme de Schwarz appliqué à ce problème avec les conditions d'interface (3.2). Cet aspect sera rediscuté au chapitre 4.

**Notations** Afin de rendre la lecture plus fluide, nous adoptons pour ce chapitre les notations suivantes :

- les variables sans police particulière correspondent au problème continu et sur une fenêtre de temps de longueur infinie. Par exemple :  $u$
- Les variables en majuscules sont des variables discrétisées en temps. Par exemple :  $U$
- Les variables en gras correspondent aux variables considérées sur une fenêtre de temps de longueur finie. Par exemple :  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{U}$
- les variables avec le symbole  $\tilde{\cdot}$  correspondent au problème pour lequel on a modifié les conditions d'interface via un opérateur de moyennage/filtrage. Par exemple :  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}$

### 3.1 Effets du découpage temporel sur le taux de convergence

Nous avons vu que l'étude de la convergence dans le cadre instationnaire se fait dans l'espace de Fourier. Or cette transformation est sensible au découpage temporel et le prendre en compte est essentiel pour une bonne précision des conclusions sur la convergence. Ainsi le paragraphe 3.1.1 montre les difficultés à déterminer la convergence lorsqu'on étudie le modèle sur une fenêtre de taille finie. De plus, les modèles numériques

utilisent une discrétisation en espace et en temps, alors que les précédentes sections ne considéraient qu'un contexte continu. Nous supposons dans cette thèse que la discrétisation de la variable d'espace est suffisamment précise pour ne pas influencer de manière significative l'étude de la convergence. Le paragraphe 3.1.2 traite alors de l'influence de la discrétisation temporelle sur la convergence de l'algorithme. Le paragraphe 3.1.3 illustre ensuite par des simulations numériques les différentes propriétés mises en avant dans les paragraphes précédents.

### 3.1.1 Étude de la convergence sur une fenêtre de taille finie

Tous les résultats des sections précédentes sont valides dans le cadre d'une simulation sur une fenêtre temporelle de taille infinie et dans les bonnes conditions de régularité pour que l'erreur tende vers 0 en temps infini. Plaçons-nous maintenant dans le cadre pratique où l'algorithme est appliqué sur une fenêtre de temps de taille finie  $[0, T]$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{e}_1^n(z, t) + \mathcal{L}_1 \mathbf{e}_1^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \times [0, T] \\ \mathcal{B}_1 \mathbf{e}_1^n(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times [0, T] \\ \mathbf{e}_1^n(z, t = 0) = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_{1,1} \mathbf{e}_1^n(z, t) = \mathcal{C}_{1,2} \mathbf{e}_2^{n-1}(z, t) & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ \partial_t \mathbf{e}_2^n(z, t) + \mathcal{L}_2 \mathbf{e}_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \times [0, T] \\ \mathcal{B}_2 \mathbf{e}_2^n(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times [0, T] \\ \mathbf{e}_2^n(z, t = 0) = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_{2,2} \mathbf{e}_2^n(z, t) = \mathcal{C}_{2,1} \mathbf{e}_1^n(z, t) & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Dans ce paragraphe, nous montrons :

- pourquoi il est difficile de donner alors un facteur de convergence
- comment on peut majorer ce facteur en norme  $\mathcal{L}^2$ .

**Difficulté à exprimer l'erreur sur une fenêtre de temps finie** Appliquer la transformée de Fourier sur le signal fenêtré amènerait à résoudre une équation de type :

$$i\omega \widehat{\mathbf{e}}_j^n(z, \omega) - \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{e}}_j^n(z, \omega)) = -\mathbf{e}_j^n(z, T) \exp(i\omega T) \quad (3.4)$$

Sans plus de connaissance sur l'erreur au temps  $T$ , on ne peut a priori pas résoudre l'équation différentielle (3.4), donc on ne peut pas exprimer l'erreur  $\widehat{\mathbf{e}}_j^n(z, \omega)$  en fonction seulement des paramètres de l'équation. Les erreurs s'écrivent en effet alors dans le domaine fréquentiel avec une solution particulière (notée  $G_j^n(z, \omega)$ ) dépendant du second membre, dépendant lui-même de la solution calculée au temps final :

$$\widehat{\mathbf{e}}_j^n(z, \omega) = A_j^n(\omega) H_j(z, \omega) + G_j^n(z, \omega)$$

Le facteur de convergence  $\varrho^n$  correspondant au problème (3.3) s'écrit alors sous la forme générale :

$$\varrho_j^n(z, \omega) = \varrho(z, \omega) + Q(G_j^n(z, \omega))$$

où  $\varrho$  est le facteur de convergence calculé sur une fenêtre de temps infinie, et  $Q$  est un opérateur sur les solutions particulières  $G_j^n$ .  $\boldsymbol{\rho}_j^n(z, \omega)$  dépend donc de l'itération et de la solution calculée par l'algorithme au temps  $T$ , ce qui rend a priori la résolution très complexe.

Une autre approche consisterait à définir  $\mathbf{e}_j^n = e_j^n P_{[0,T]}$ , avec  $P_{[0,T]}$  la fonction porte sur  $[0, T]$  et  $\widehat{\mathbf{e}}_j^n(\omega) = (\widehat{e}_j^n * \widehat{P}_{[0,T]})(\omega)$ , mais cette approche ne permet pas de calculer le facteur de convergence comme dans les sections précédentes.

**Propriété 3.1.1 Taux de convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  :** Nous avons vu au §2.2.2 que sous l'hypothèse où le problème est bien posé, la solution est suffisamment régulière et l'erreur tend vers 0 en temps infini. D'une manière générale on peut majorer le taux de convergence observé sur une petite fenêtre de temps par

$$\boldsymbol{\rho}_j^{n,\text{obs}}(z) = \frac{\|\mathbf{e}_j^n(z, \cdot)\|_2}{\|\mathbf{e}_j^{n-1}(z, \cdot)\|_2} \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) + \epsilon \quad (3.5)$$

avec  $\epsilon \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.* Nous exprimons le taux de convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur fenêtrée  $\boldsymbol{\rho}_j^{n,\text{obs}}$  par rapport à celui sur la fenêtre infinie  $\rho_j^{n,\text{obs}}$  comme suit :

$$\left(\boldsymbol{\rho}_j^{n,\text{obs}}\right)^2 = \frac{\int_0^T (\mathbf{e}_j^n(z=0, t))^2 dt}{\int_0^T (\mathbf{e}_j^{n-1}(z=0, t))^2 dt} = \left(\rho_j^{n,\text{obs}}\right)^2 \frac{1 - \Gamma_j^{n,T}}{1 - \Gamma_j^{n-1,T}} \quad (3.6a)$$

$$\text{avec} \quad \Gamma_j^{n,T} = \frac{\int_T^\infty (e_j^n(z=0, t))^2 dt}{\int_0^\infty (e_j^n(z=0, t))^2 dt} < 1, \quad \Gamma_j^{n,T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (3.6b)$$

Dans l'hypothèse où la fenêtre de temps considérée est assez grande, et donc que  $\Gamma_j^{n,T}$  est suffisamment proche de zéro pour être négligé, la convergence observée sur une fenêtre de temps finie est donc proche de la convergence observée sur la fenêtre infinie. De plus, l'encadrement du taux de convergence observé sur une fenêtre de temps infinie donnée en (2.29) peut être adapté à la fenêtre de temps finie, d'où :

$$\boldsymbol{\rho}_j^{n,\text{obs}} = \rho_j^{n,\text{obs}} + O\left(\Gamma_j^{n,T}, \Gamma_j^{n-1,T}\right) \leq \sup_{|\omega| \leq \mathbb{R}} \rho(\omega) + \epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (3.7)$$

Remarquons enfin par ailleurs que, même si  $T$  ne tend pas vers l'infini, l'égalité

$$\frac{1 - \Gamma_j^{n,T}}{1 - \Gamma_j^{n-1,T}} = 1 + \frac{\Gamma_j^{n-1,T} - \Gamma_j^{n,T}}{1 - \Gamma_j^{n-1,T}}$$

fait que (3.5) restera valide dès lors que  $n$  est tel qu'on est proche de la convergence.  $\square$

**Majoration de l'erreur** Il est en théorie difficile de déterminer le terme  $\epsilon$  dans la majoration du facteur de convergence donnée en (3.5). Cependant, étant donné que l'état de l'erreur ne dépend que des pas de temps précédents, et d'après (2.29), on peut directement majorer l'erreur fenêtrée comme suit :

$$\|e_j^n(z, \cdot)\|_2 \leq \|e_j^n(z, \cdot)\|_2 \leq \left( \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) \right)^{n-1} \|e_j^1(z, \cdot)\|_2 \quad (3.8)$$

où  $e_j^n$  est l'erreur issue de la  $n^{\text{ième}}$  itération si on avait prolongé la résolution de l'équation sur une fenêtre de temps de taille infinie. La majoration (3.8) assure donc la convergence de l'erreur pour l'algorithme fenêtré tant que  $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho(\omega) < 1$ .

**Remarque sur l'influence de la taille du fenêtrage** La majoration de la convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  donnée en (3.5) ne prend pas en compte la taille du fenêtrage. Pourtant celle-ci peut avoir une influence sur la convergence. GANDER et al., 2016 font le lien entre cette taille de la fenêtre temporelle et la norme  $\mathcal{L}^\infty$  de l'erreur, en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace inverse. Cette étude est aussi faite avec des choix de conditions de transmission particulières que nous n'exploiterons pas ici. Dans un cadre général, il n'est pas toujours possible de calculer la transformée inverse du facteur de convergence, ce qui rend l'application de cette méthode compliquée.

### 3.1.2 Étude de la convergence de l'algorithme discret en temps

En pratique, nous souhaitons étudier la convergence des solutions dans l'espace temporel discrétisé. On symbolise le schéma discrétisé de la dérivation temporelle au pas de temps  $m$  par la notation  $\mathcal{D}\mathbf{U}_j^{n,m} + \tilde{\mathcal{D}}\left(\mathbf{U}_j^{n,k}\right)_{k < m}$ . Le système étudié pour chaque pas de temps  $1 \leq m \leq M$  et chaque itération  $n \in \mathbb{N}^*$  est :

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{U}_1^{n,m}(z) + \mathcal{L}_1\mathbf{U}_1^{n,m}(z) = F_1(z, t^m) - \tilde{\mathcal{D}}\left(\mathbf{U}_1^{n,k}\right)_{k < m} & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1\mathbf{U}_1^{n,m}(z) = G_1(z, t^m) & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ \mathbf{U}_1^{n,0}(z) = u_0(z) & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_{1,1}\mathbf{U}_1^{n,m}(z) = \mathcal{C}_{1,2}\mathbf{U}_2^{n-1,m}(z) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{U}_2^{n,m}(z) + \mathcal{L}_2\mathbf{U}_2^{n,m}(z) = F_2(z, t^m) - \tilde{\mathcal{D}}\left(\mathbf{U}_2^{n,k}\right)_{k < m} & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2\mathbf{U}_2^{n,m}(z) = G_2(z, t^m) & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ \mathbf{U}_2^{n,0}(z) = u_0(z) & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_{2,2}\mathbf{U}_2^{n,m}(z) = \mathcal{C}_{2,1}\mathbf{U}_1^{n,m}(z) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.10)$$

Comme dans le cadre du problème continu, on peut définir un facteur de convergence dans l'espace de Fourier qui mesure l'évolution de l'erreur en fonction de la fréquence. Nous montrons ici le lien existant avec la convergence dans le cas continu, et comment la discrétisation temporelle agit sur celle-ci.

**Propriété 3.1.2 Taux de convergence observé de la solution discrète :** L'écart dans l'espace temporel entre la solution discrète et la solution continue est noté :

$$\mathbf{E}_j^{n,m}(z) = \mathbf{U}_j^{n,m}(z) - u_j^n(z, t_j^m) \quad 1 \leq m \leq M_j \quad (3.11)$$

Comme pour le problème continu, on définit le taux de convergence observé correspondant par :

$$\rho_j^{n,\text{obs}}(z) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M (\mathbf{E}_j^{n,m}(z))^2}{\sum_{m=1}^M (\mathbf{E}_j^{n-1,m}(z))^2}} \quad n \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\} \quad (3.12)$$

Nous montrons dans ce paragraphe les propriétés suivantes :

$$\rho_j^{n,\text{obs}} \leq \max_{|\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) + \epsilon, \quad \epsilon \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.13)$$

et nous pouvons majorer l'erreur en norme  $\mathcal{L}^2$  par

$$\|\mathbf{E}_j^{n,\cdot}\|_2 \leq \left( \sup_{|\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) \right)^{n-1} \|E_j^{1,\cdot}\|_2 \quad (3.14)$$

où  $E_j^1$  est l'erreur discrète issue de la première itération si on avait prolongé la résolution de l'équation sur toute la fenêtre temporelle. Comme dans le cas continu, (3.14) assure la convergence de l'erreur pour l'algorithme discret et fenêtré tant que  $\sup_{|\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) < 1$ .

*Démonstration.* Le paragraphe ci-dessous montre le résultat pour une fenêtre de taille infinie et pour lequel  $\epsilon = 0$  (voir équation (3.17b)). La majoration (3.13) donnée sur un signal discret de taille finie s'en déduit ensuite en utilisant le résultat (3.7) du paragraphe précédent. La majoration (3.14) se démontre comme (3.8).  $\square$

**Facteur de convergence du signal discret sur une fenêtre de temps infinie** On suppose dans un premier temps que nous simulons numériquement le problème discret en temps sur une fenêtre temporelle infinie avec un pas de temps  $\delta t$  commun pour les deux domaines. L'erreur numérique observée est notée comme suit, et peut être vue comme le résultat d'un peigne de Dirac sur l'erreur continue :

$$E_j^{n,m}(z) = U_j^{n,m}(z) - u(z, t_j^m) \quad \text{et} \quad E_j^{n,\cdot}(z) = \Delta_{\delta t} e_j^n(z, \cdot) \quad (3.15)$$

avec  $0 \leq m$ ,  $\Delta_{\delta t}$  le peigne de Dirac de période  $\delta t$  et  $e_j^n(z, t)$  l'erreur sur le problème continu. Les fréquences plus hautes que  $\pi/\delta t$  ne sont pas générées par la grille temporelle (cette question a été un peu détaillée par DUBOIS et al., 2012). Ainsi on peut appliquer le théorème de Nyquist-Shannon (voir par exemple GASQUET et WITOMSKI, 2000) qui nous permet d'identifier la transformée de Fourier de  $E_j^{n,\cdot}$  à celle de  $e^n(z, \cdot)$  sur un intervalle

$I_\omega$ , dépendant de la discrétisation temporelle. L'étude dans l'espace de Fourier des erreurs  $E_j^{n,\cdot}(z)$  peut se restreindre à l'intervalle  $I_\omega = \left[-\frac{\pi}{\delta t}; \frac{\pi}{\delta t}\right]$  :

$$\widehat{E}_j^{n,\cdot}(z, \omega) = \widehat{e}_j^n(z, \omega) \quad \forall \omega \in I_\omega \quad (3.16a)$$

$$\widehat{E}_j^{n,\cdot}(z, \omega) = \varrho(\omega) \widehat{E}_j^{n-1,\cdot}(z, \omega) \quad \forall \omega \in I_\omega \quad (3.16b)$$

Aussi, comme dans le cadre continu, on peut appliquer le théorème de Parseval et donner le facteur de convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  sur l'erreur (3.15) :

$$\rho_j^{n,\text{obs}} = \frac{\|E_j^{n,\cdot}(z = 0^\mp)\|_2}{\|E_j^{n-1,\cdot}(z = 0^\mp)\|_2} = \frac{\left(\int_{\omega \in I_\omega} (\rho(\omega))^2 \left|\widehat{e}_j^{n-1}(\omega)\right|^2 d\omega\right)^{1/2}}{\left(\int_{\omega \in I_\omega} \left|\widehat{e}_j^{n-1}(\omega)\right|^2 d\omega\right)^{1/2}} \quad n \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\} \quad (3.17a)$$

$$\min_{|\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) \leq \rho_j^{n,\text{obs}} \leq \max_{|\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) \quad (3.17b)$$

Dans la suite, nous noterons :

$$I_\omega = \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{\delta t}, \frac{\pi}{\delta t}\right] & \text{pour un problème discret} \\ \mathbb{R} & \text{pour un problème continu} \end{cases} \quad (3.18)$$

**Remarque sur la représentation fréquentielle de la solution sur une fenêtre de temps finie** La solution calculée est un signal échantillonné et de longueur finie  $(\mathbf{E}_j^{n,m}(z))_{0 \leq m \leq M}$  sur lequel on peut appliquer une Transformée de Fourier Discrète (TFD). La TFD s'applique sur des signaux qu'on considère périodiques, ce qui n'est a priori pas le cas ici. Donc appliquer une TFD sur nos solutions discrètes et finies ne permet pas d'obtenir la transformée de Fourier souhaitée. Ceci dit l'erreur commise sur les fréquences  $\omega_k = 2k\pi/T$  peut être négligeable si  $\delta t \ll T$  :

$$\text{TFD} \left( (\mathbf{E}_j^{n,m}(z))_{0 \leq m \leq M} \right)_k \approx \mathcal{F}((\mathbf{e}_j^{t,n}(z)P_{[0,T]}))(\omega_k) \quad \text{si} \quad \delta t \ll T$$

**Une fréquence minimale "observée"** Dans la grande majorité des études, l'ensemble des fréquences considérées pour l'étude du facteur de convergence est  $|\omega| \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . La fréquence  $\omega_{\max} = \pi/(\delta t)$  a été justifiée précédemment. La fréquence  $\omega_{\min}$  se justifie dans certains cas de décomposition de domaine sur un problème multidimensionnel et indépendant du temps. En effet, lorsque le modèle détermine au préalable des conditions sur les bords dans la dimension parallèle à l'interface (celle où est faite la transformée de Fourier), alors le système sur les erreurs correspondant est périodique et on peut appliquer une TFD<sup>1</sup>. De plus, suivant la "géométrie" de l'équation différentielle, il est aussi

1. Dans notre cas, cela reviendrait à déterminer  $\mathbf{u}_j^n(z, T) = \mathbf{u}_T(z)$  et donc  $\mathbf{e}_j^n(z, T) = 0$  et (3.4) pourrait être résolu.

possible d'utiliser des transformées en sinus ou en cosinus qui permettent de ne considérer que des fréquences discrètes de type  $\omega_k = k \frac{\pi}{K}$  où  $K$  est la taille du domaine. Ensuite, la fréquence  $\omega_0 = 0$  est généralement omise lors de l'optimisation de la convergence pour différentes raisons. GANDER, 2011 explique en détail ce procédé pour une équation de diffusion 2D sur un domaine de taille finie et GANDER, 2006 fait aussi mention de cette particularité pour une équation de Helmholtz 2D. D'une manière générale, les équations ne faisant pas intervenir le temps peuvent potentiellement permettre ce genre d'estimation. Dans notre cas, le modèle ne donne pas directement de condition sur l'erreur au temps final  $T$  et nous sommes confrontés aux difficultés présentées dans le paragraphe 3.1.1. On peut, dans un cas très particulier où les erreurs seraient périodiques sur  $[0, T]$  à chaque itération, appliquer une TFD sur l'équation différentielle et affirmer que  $\rho_j^n(\omega_k) = \rho(\omega_k)$  pour  $\omega_k = \left[ \frac{2\pi}{T}, \frac{\pi}{\delta t} \right]$ . Dans un cas plus général nous ne savons pas a priori comment exprimer le taux de convergence en fréquentiel  $\rho_j^n(\omega)$  en fonction du taux de convergence calculé  $\rho(\omega)$  et nous devons faire appel à la majoration (3.13).

**Propriété 3.1.3 Les fréquences influentes :** On peut observer (voir exemples au §3.1.3), dans le cadre de problèmes classiques, que le taux de convergence observé  $\rho_j^{n,\text{obs}}$  (défini en (3.12)) prend des valeurs correspondant à des valeurs de  $\rho(\omega^*)$  avec  $\omega^* \in \left[ \frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\delta t} \right]$ . Ceci n'est en revanche pas vrai pour la convergence sur une fréquence donnée :

on ne peut a priori pas garantir que  $\frac{TFD(\mathbf{e}_j^{n+1})(\omega_i)}{TFD(\mathbf{e}_j^n)(\omega_i)}$  soit égal à  $\rho(\omega_i)$ ; ceci pourra être observé sur les figures 3.2 et 3.4.

Pour un problème donné, on appelle l'intervalle  $\left[ \frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\delta t} \right]$  *les fréquences influentes*. Nous estimons ainsi que dans le cadre général :

$$\min_{\pi/T \leq |\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) \leq \rho_j^{n,\text{obs}} \leq \max_{\pi/T \leq |\omega| \leq \pi/\delta t} \rho(\omega) \quad (3.19)$$

Cette estimation implique bien la majoration (3.13).

### 3.1.3 Illustration des effets du découplage temporel

Nous illustrons dans ce paragraphe les résultats des paragraphes §3.1.1 et §3.1.2. Les exemples numériques étant obtenus par des simulations discrètes et finies en temps, il est difficile d'illustrer séparément ces deux aspects.

**Données des tests** Le tableau 3.1 indique les paramètres utilisés pour chacun des deux tests présentés ici :



Test	Simu	Données fixes				Données variables		
		$h_1$	$\nu_1$	$h_2$	$\nu_2$	$\delta t$	$T$	
1	A	-50m	0.012 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	200m	0.006 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	1000s	6 $\delta t$	
	B						60 $\delta t$	
	C						6000 $\delta t$	
2	A	-200 m	1.1 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	50m	0.8 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	300s	3.10 <sup>5</sup> s	
	B							3000s
	C							3.10 <sup>4</sup> s

TABLE 3.1 – Jeux de données pour le Test 1 (figures 3.1 et 3.2) et le Test 2 (figures 3.3 et 3.4)

**Majoration du taux de convergence observé** Nous avons vu au §3.1.1 que l'on pouvait majorer le taux de convergence observé en norme  $\mathcal{L}^2$  par le maximum du taux de convergence théorique en fréquentiel (voir (3.5)). Cette majoration est pondérée par une erreur  $\epsilon$  qui dépend de la taille de la fenêtre. Nous illustrons dans les figures 3.1 et 3.3 que, dans le cadre de modèles à base d'équations différentielles classiques<sup>2</sup>, ce  $\epsilon$  est très vite négligeable, même sur des petites tailles de fenêtre. Ces figures permettent aussi d'illustrer la propriété (3.19) déterminant les fréquences influentes : il apparaît que les valeurs données par la convergence théorique sur les fréquences influentes correspondent bien à la convergence observée pour chaque simulation. On observe aussi que le taux de convergence est meilleur lors des premières itérations : ce phénomène s'explique par le fait que certaines fréquences convergent plus vite, et donc la convergence "visible" est, après quelques itérations, plus influencée par les fréquences qui convergent le moins vite.

**Influence de la taille du fenêtrage** Nous avons vu au §3.1.1 qu'il était très difficile d'estimer le facteur de convergence fréquentiel dans le cas où la taille de la fenêtre de temps est finie. Cependant, nous avons expliqué qu'on pouvait restreindre la plage des valeurs influentes du facteur de convergence théorique, et qu'on a généralement (3.19). Nous rappelons que la borne inférieure  $|\omega| = \pi/T$  n'est pas bien justifiée dans notre cas (voir §3.1.2). La figure 3.1 indique justement ces bornes inférieures, et on observe que la propriété (3.19) est vérifiée pour les trois tailles de fenêtre. La figure 3.2 présente, pour les premières itérations, le taux de convergence observé sur la TFD des erreurs calculées pour chaque itération. On peut formuler les remarques suivantes concernant le taux de convergence fréquentiel  $\rho_j^n(\omega)$  :

- Pour une fenêtre de temps de 6 pas de temps, dans notre cas,  $\rho(\omega)$  est constant sur les fréquences influentes  $[\pi/T, \leq \pi/\delta t]$ . Le taux de convergence du signal fenêtré correspond donc à cette valeur.

---

2. dont les solutions sont suffisamment régulières

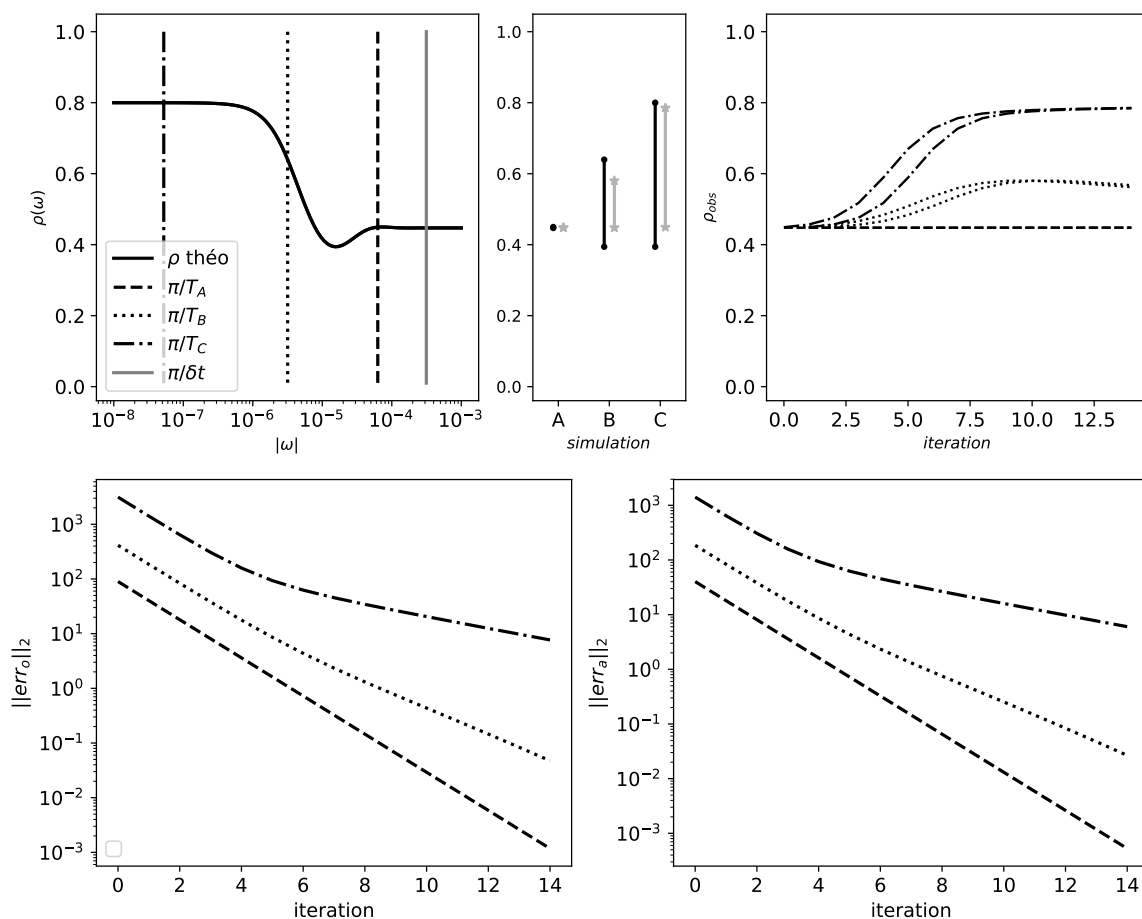


FIGURE 3.1 – Test 1 (voir tableau 3.1) pour les simulations A (tirets,  $T = 6\delta t$ ), B (pointillés,  $T = 60\delta t$ ) et C (point-tirets,  $T = 6000\delta t$ ). En haut à gauche, le facteur de convergence théorique, les fréquences  $\omega_{\min} = \pi/T$  et  $\omega_{\max} = \pi/\delta t$ . En haut à droite le taux de convergence observé dans les domaine 1 et 2. En haut au milieu un comparatif des plages de valeurs données par la convergence théorique (en noir  $\bullet$ ) sur les fréquences influentes et la convergence observée (en gris  $\star$ ). En bas l'évolution des erreurs en fonction de l'itération pour le domaine 1 à gauche et le domaine 2 à droite.

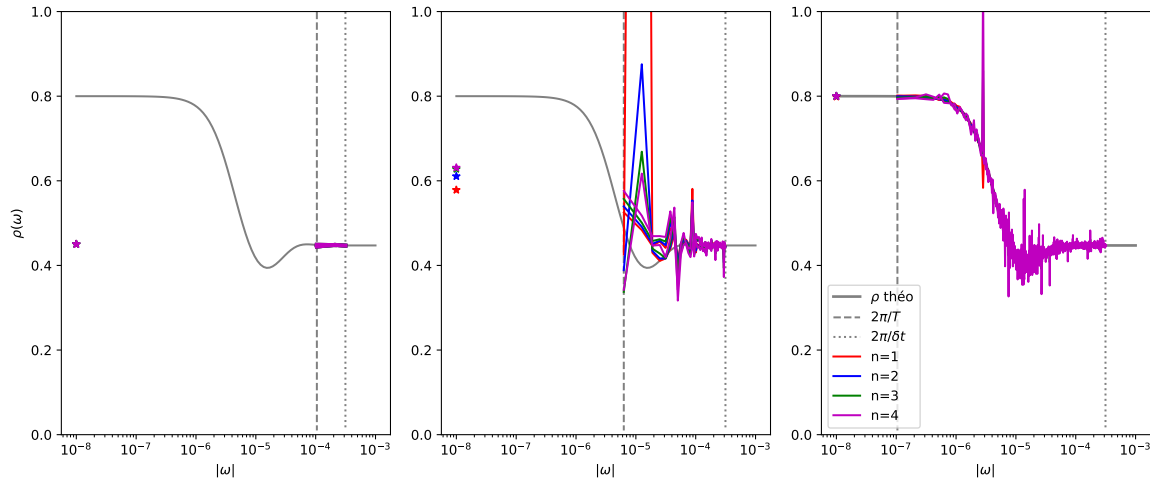


FIGURE 3.2 – Test 1 (voir tableau 3.1) : facteur de convergence en fréquentiel après application d’une TFD sur l’erreur en  $z = 0$ . A gauche pour une fenêtre de 6 pas de temps (cas A), au milieu 60 pas de temps (cas B) et à droite 6000 pas de temps (cas C). Chaque courbe représente la TFD du facteur de convergence pour une itération  $n$ , la fréquence 0 est représentée par le symbole  $\star$ .

- Pour une fenêtre de temps de 60 pas de temps, on voit apparaître la variation de  $\rho_j^n(\omega)$  en fonction de l’itération. Il est difficile dans ce cas de le faire correspondre à  $\rho(\omega)$  même si on reste globalement dans les mêmes ordres de grandeur.
- Pour une fenêtre de temps de 6000 pas de temps, on se rapproche du comportement attendu sur une fenêtre de temps infinie. Et  $\rho_j^n(\omega)$  suit globalement la courbe théorique de  $\rho(\omega)$  sur  $[\pi/T, \leq \pi/\delta t]$ . Les graphes montrent aussi que cette tendance est globale, et que certaines fréquences dépassent les valeurs prescrites par la convergence théorique  $\rho(\omega)$ . Cet aspect est aussi visible sur le test 2 (figures 3.3 et 3.4).

**Influence du pas de temps** Nous avons vu au §3.1.2 que la fréquence maximale influençant le taux de convergence dépendait du pas de temps. L’expérience donnant la figure 3.3 comporte 3 simulations avec chacune un pas de temps différent. Dans cet exemple, seules les basses fréquences convergent théoriquement. La simulation avec un petit pas de temps est capable de représenter des fréquences qui divergent, et le comportement des erreurs sur les figures du bas montre bien que l’algorithme diverge. Le taux de convergence observé est plus grand que 1, mais vérifie cependant bien la majoration théorique (3.19). La simulation avec un plus grand pas de temps ne représente quant à elle que des fréquences qui convergent. Le taux de convergence observé vérifie bien lui aussi la majoration (3.19).

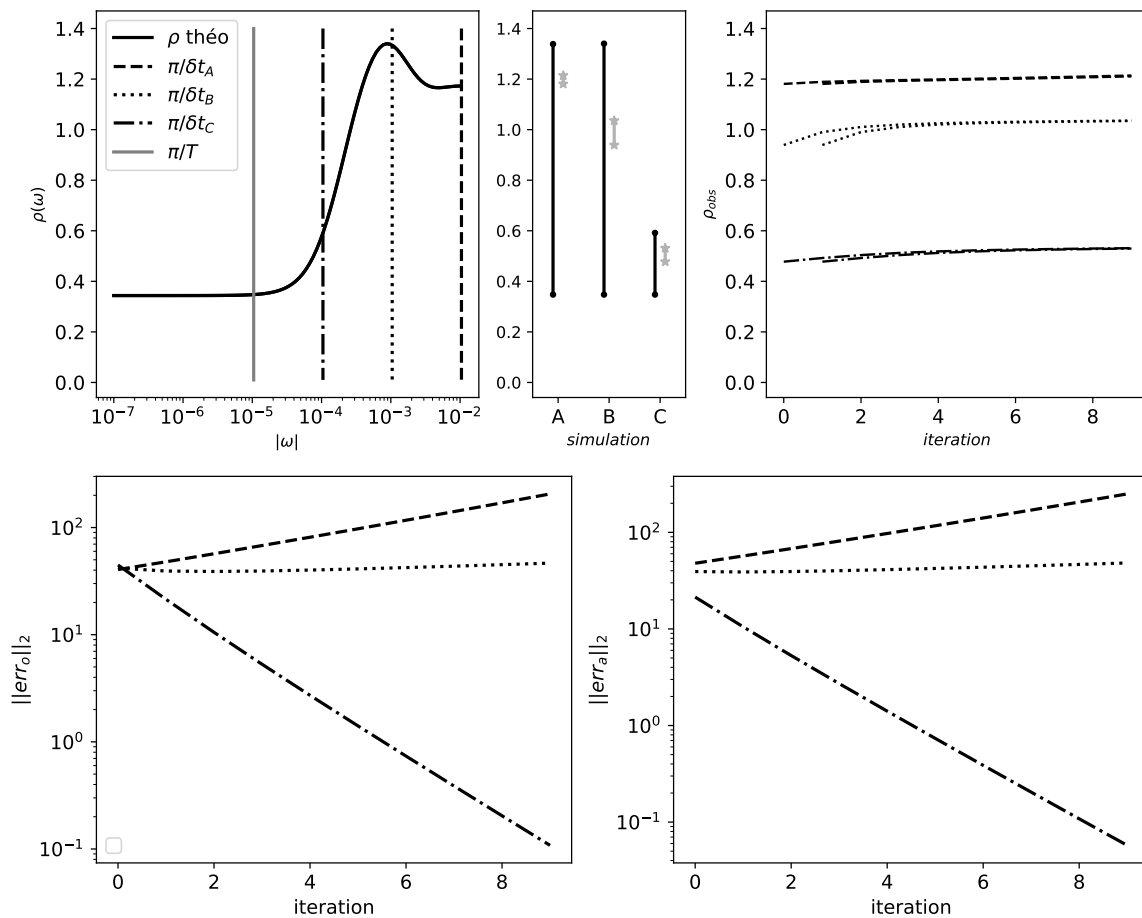


FIGURE 3.3 – Test 2 (voir tableau 3.1) pour les simulations A (tirets,  $\delta t = 300s$ ), B (pointillés,  $\delta t = 3000s$ ) et C (point-tirets,  $\delta t = 30000s$ ). En haut à gauche, le facteur de convergence théorique et les fréquences  $\omega_{\min} = \pi/T$  et  $\omega_{\max} = \pi/\delta t$  théoriques. Les autres panneaux fonctionnent comme dans la figure 3.1.

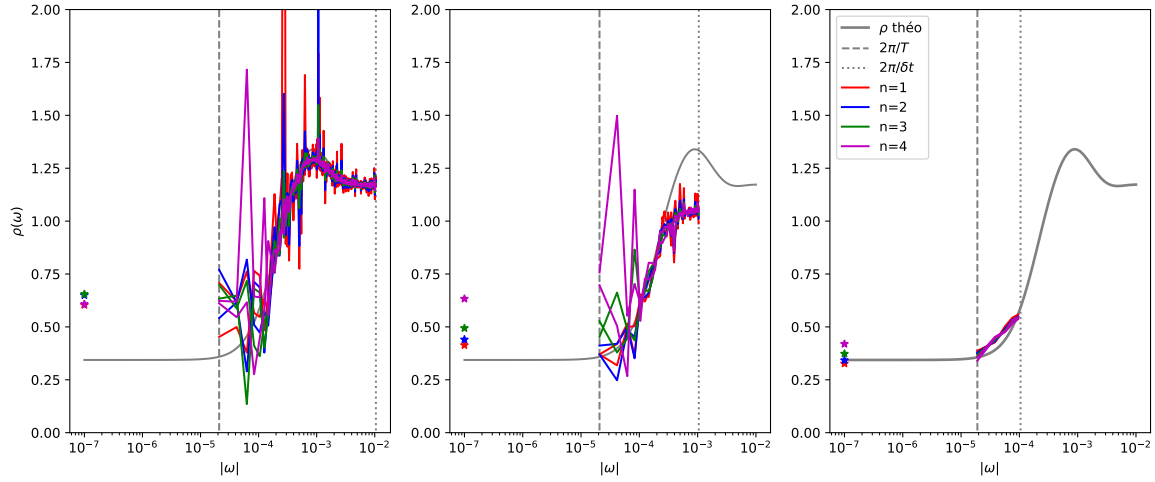


FIGURE 3.4 – Test 2 (voir tableau 3.1) : facteur de convergence en fréquentiel après application d'une TFD sur l'erreur en  $z = 0$  pour le domaine 1. A gauche pour un pas de temps de 300s (cas A), au milieu 3000s (cas B), et à droite 30000s (cas C).

## 3.2 Des conditions d'interface assurant la convergence de l'algorithme discret

Lorsque les conditions d'interface possèdent un degré de liberté, il est alors possible d'influencer la vitesse de convergence. Dans une majorité des cas, pour assurer une bonne convergence, on résout un problème d'optimisation "inf-sup" qui nécessite d'au moins pouvoir calculer le facteur de convergence dans le domaine fréquentiel (voir §2.2.3). Nous donnons dans cette section des conditions d'interface particulières qui assurent la convergence de l'algorithme sans nécessiter de résoudre le problème "inf-sup" et qui dépendent du schéma de discrétisation temporel des équations. Ces conditions correspondent aux conditions optimales de l'algorithme discrétisé en temps et appliqué sur un seul pas de temps et sont données au §3.2.1. Le paragraphe 3.2.2 illustre sur des cas pratiques les éléments théoriques énoncés au §3.2.1.

### 3.2.1 Les conditions optimales pour l'algorithme local en temps

Nous supposons comme au §3.1.2 que nous discrétisons notre modèle par un schéma symbolisé par  $\partial_t u(t_m) \rightarrow \mathcal{D}(u_m) + \tilde{\mathcal{D}}(u_k)_{k < m}$  avec  $\mathcal{D}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  des opérateurs linéaires. On se place dans le cadre où le pas de temps est le même dans les deux sous-domaines, et pour des conditions d'interface possédant deux degrés de liberté  $(p, q) \in \mathcal{P}$ . Pour chaque pas

de temps  $1 \leq m \leq M$ , on résout le système :

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{U}_{1,m}^n + \mathcal{L}_1\mathbf{U}_{1,m}^n = \mathcal{F}_{1,m} - \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{U}_{1,k}^n)_{k < m} & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1\mathbf{U}_{1,m}^n = \mathcal{G}_1^m & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ (\mathcal{C}_{1,1} + p\mathcal{C}_{2,1})\mathbf{U}_{1,m}^n = (\mathcal{C}_{1,2} + p\mathcal{C}_{2,2})\mathbf{U}_{2,m}^{n-1} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.20a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{U}_{2,m}^n + \mathcal{L}_2\mathbf{U}_{2,m}^n = \mathcal{F}_{2,m} - \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{U}_{2,k}^n)_{k < m} & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2\mathbf{U}_{2,m}^n = \mathcal{G}_{2,m} & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ (\mathcal{C}_{2,2} + q\mathcal{C}_{1,2})\mathbf{U}_{2,m}^n = (\mathcal{C}_{2,1} + q\mathcal{C}_{1,1})\mathbf{U}_{1,m}^n & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.20b)$$

On suppose que la solution au temps  $t = 0$  est connue ( $e_{j,0}^n = 0$ ). Tant que  $\mathcal{D}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  sont linéaires, le système vérifié par les erreurs par rapport à la solution du problème couplé discrétisé ( $\mathbf{U}_m$ ) est :

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{E}_{1,m}^n + \mathcal{L}_1\mathbf{E}_{1,m}^n = -\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{E}_{1,k}^n)_{k < m} & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1\mathbf{E}_{1,m}^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ (\mathcal{C}_{1,1} + p\mathcal{C}_{2,1})\mathbf{E}_{1,m}^n = (\mathcal{C}_{1,2} + p\mathcal{C}_{2,2})\mathbf{E}_{2,m}^{n-1} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.21a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{E}_{2,m}^n + \mathcal{L}_2\mathbf{E}_{2,m}^n = -\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{E}_{2,k}^n)_{k < m} & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2\mathbf{E}_{2,m}^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ (\mathcal{C}_{2,2} + q\mathcal{C}_{1,2})\mathbf{E}_{2,m}^n = (\mathcal{C}_{2,1} + q\mathcal{C}_{1,1})\mathbf{E}_{1,m}^n & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.21b)$$

Pour chaque pas de temps  $m$ , le système précédent peut être vu comme un problème stationnaire sur  $\mathbf{E}_{1,m}$ , avec un second membre non nul sauf pour le premier pas de temps. Ainsi pour le premier pas de temps on a toujours

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{E}_{1,1}^n + \mathcal{L}_1\mathbf{E}_{1,1}^n = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1\mathbf{E}_{1,1}^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \\ (\mathcal{C}_{1,1} + p\mathcal{C}_{2,1})\mathbf{E}_{1,1}^n = (\mathcal{C}_{1,2} + p\mathcal{C}_{2,2})\mathbf{E}_{2,1}^{n-1} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.22a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathbf{E}_{2,1}^n + \mathcal{L}_2\mathbf{E}_{2,1}^n = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2\mathbf{E}_{2,1}^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \\ (\mathcal{C}_{2,2} + q\mathcal{C}_{1,2})\mathbf{E}_{2,1}^n = (\mathcal{C}_{2,1} + q\mathcal{C}_{1,1})\mathbf{E}_{1,1}^n & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.22b)$$

**Propriété 3.2.1 Conditions d'interfaces qui garantissent la convergence :** Le choix  $(p, q) = (p_{\mathcal{D}}^{sta}, q_{\mathcal{D}}^{sta})$ , les coefficients correspondant aux conditions transparentes exactes du problème (3.22), garantit la convergence de l'algorithme de Schwarz sur le problème (3.21) en  $\lfloor (M+1)/2 \rfloor + 1$  itérations. Ce résultat rejoint celui déjà connu portant sur la convergence de problèmes multidomains et stationnaires (voir par exemple GERARDO-GIORDA et NATAF, 2005).

*Démonstration.* L'idée générale est que ce choix de conditions d'interface fait converger exactement d'abord le premier pas de temps, ce qui entraîne la convergence exacte au pas de temps suivant, et ainsi de suite. Notons d'abord que  $(p_{\mathcal{D}}^{sta}, q_{\mathcal{D}}^{sta})$  permet la convergence de l'algorithme en annulant le membre de droite des conditions d'interface. A une itération donnée, le membre de droite pour l'équation sur

le domaine  $\Omega_j$  s'annule s'il est appliqué à une solution de l'équation  $(\mathcal{D} + \mathcal{L}_{\bar{j}}) = 0$ . Par exemple

$$(\mathcal{C}_{2,1} + q_{\mathcal{D}}^{sta} \mathcal{C}_{1,1}) \mathbf{E}_{1,m}^n = 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{D} + \mathcal{L}_1 (\mathbf{E}_{1,m}^n) = 0$$

On dit dans ce cas que  $\mathbf{E}_{1,m}^n$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ . Montrons rapidement par récurrence sur  $n$  que, après  $\lfloor (M+1)/2 \rfloor$  itérations, on a convergence sur  $\Omega_2$  pour  $m \leq M-1$  ( $\mathbf{E}_{2,m}^n = 0$  pour  $m \leq M-1$ ) et sur  $\Omega_1$  pour  $m \leq M-2$  ( $\mathbf{E}_{1,m}^n = 0$  pour  $m \leq M-2$ ) et  $\mathbf{E}_{1,M-1}$  et  $\mathbf{E}_{2,M}$  vérifient  $(\mathcal{P})$ .

- Soit  $M = 1$ , à la première itération, le membre de droite de (3.22) dépend du *first guess*  $\mathbf{E}_{2,1}^0$  qui ne vérifie a priori pas les propriétés qui permettent d'annuler le membre de droite :  $(\mathcal{C}_{1,2} + p\mathcal{C}_{2,2}) \mathbf{E}_{2,1}^0 \neq 0$ . En revanche  $\mathbf{E}_{1,1}^1$  est solution de  $\mathcal{D} + \mathcal{L}_1 = 0$ , donc le membre de droite dans la condition d'interface pour  $\mathbf{E}_{2,1}^1$  s'annule :  $(\mathcal{C}_{2,1} + q\mathcal{C}_{1,1}) \mathbf{E}_{1,1}^1 = 0$ . Donc  $(\mathcal{C}_{2,2} + q\mathcal{C}_{1,2}) \mathbf{E}_{2,1}^1 = 0$  et, si le problème est bien posé, on a après la première itération  $\mathbf{E}_{2,1}^1(z) = 0$  et donc  $\mathbf{E}_{2,2}^1(z) = 0$  vérifie  $(\mathcal{P})$  et  $\mathbf{E}_{1,1}^1 \neq 0$  et  $\mathbf{E}_{1,2}^1(z) = 0$  vérifie  $(\mathcal{P})$ .
- Supposons qu'à l'itération  $n = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$  :  $\mathbf{E}_{2,m}^n = 0$  pour  $m \leq M-1$ ,  $\mathbf{E}_{1,m}^n = 0$  pour  $m \leq M-2$  et  $\mathbf{E}_{1,M-1}^n$  et  $\mathbf{E}_{2,M}^n$  vérifient  $(\mathcal{P})$ . Alors à l'itération  $N+1 = \lfloor (M+1)/2 \rfloor + 1$ 
  - $\mathbf{E}_{2,M-1}^n = 0$  implique que  $\mathbf{E}_{1,M}^{n+1} = 0$
  - $\mathbf{E}_{2,M}^n$  vérifie  $\mathbf{P}$  implique  $\mathbf{E}_{1,M}^{n+1} = 0$
  - $\mathbf{E}_{1,M}^{n+1} = 0$  implique  $\mathbf{E}_{1,M+1}^n$  vérifie  $(\mathcal{P})$
  - ce qui implique  $\mathbf{E}_{2,M+1}^n = 0$
  - ce qui implique  $\mathbf{E}_{2,M+2}^n$  vérifie  $(\mathcal{P})$

On voit qu'à chaque itération supplémentaire, la convergence est atteinte pour deux nouveaux pas de temps dans chaque domaine. Ce qui donne bien convergence jusqu'au pas de temps  $M$  à l'itération  $\lfloor (M+1)/2 \rfloor + 1$ . Remarquons que la convergence est "exacte" au bout de  $\lfloor (M+1)/2 \rfloor + 1$  itérations, c'est-à-dire qu'on a exactement  $\mathbf{E}_{j,m}^{\lfloor (M+1)/2 \rfloor + 1} = \mathbf{u}_{j,m}$  pour tout  $m \leq M$  avec  $\mathbf{u}_{j,m}$  solution du problème couplé discrétisé.  $\square$

**Exemple pour une discrétisation Euler implicite** Avec le schéma de discrétisation classique Euler implicite, on a  $\mathcal{D}\mathbf{E}_{j,m}^n = \mathbf{E}_{j,m}^n / \delta t$ . Les  $(p^{sta}(\delta t), q^{sta}(\delta t))$  correspondent donc aux conditions transparentes exactes pour le problème stationnaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{\delta t} + \mathcal{L}u = 0 \\ \mathcal{B}u = 0 \\ \text{condition d'interface dépendant de } p \text{ et } q \end{array} \right. \quad (3.23)$$

**Remarque :** Prendre une seule de ces conditions garantit aussi la convergence mais en 2 fois plus d'itérations. Ainsi, sur une grande fenêtre de temps on peut améliorer la convergence en choisissant un des coefficients optimaux pour l'algorithme local en temps (ce qui assure la convergence) et l'autre coefficient qui améliore la convergence sur les basses fréquences (donc accélère la convergence sur une grande fenêtre de temps).

### 3.2.2 Illustrations et comparaison avec d'autres conditions d'interface

Au §3.2.1, nous avons donné des coefficients de Robin qui assurent la convergence en  $\lfloor (M + 1)/2 \rfloor + 1$  itérations sur une fenêtre de  $M$  pas de temps. Ces coefficients particuliers sont notés  $(p^{\text{sta}}(\delta t), q^{\text{sta}}(\delta t))$  et nous en illustrons l'usage dans ce paragraphe.

**Données du test** On considère ici le modèle couplé (3.1) pour deux exemples ayant des paramètres donnés par le tableau 3.2 :

Simu	Données fixes						Données variables	
	$h_1$	$\nu_1$	$h_2$	$\nu_2$	$\delta t$	$T$		$(p, q)$
						ex.1	ex.2	
A	-50m	0.8 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	200m	0.6 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	1000s	10 $\delta t$	100 $\delta t$	$(p^{\text{sta}}(\delta t), q^{\text{sta}}(\delta t))$
B								$(p^{\text{opt}}, q^{\text{opt}})$
C								$(\tilde{p}^{\text{opt}}, \tilde{q}^{\text{opt}})$

TABLE 3.2 – Jeu de données pour les figures 3.5 (ex.1) et 3.6 (ex.2)

Nous comparons le comportement de l'algorithme avec ces conditions d'interface particulières à celui avec des conditions d'interface "optimisées", c'est à dire solution du problème "inf-sup" qui est la méthode généralement utilisée pour trouver les "meilleures" conditions d'interfaces. Dans les figures 3.5 et 3.6, nous comparons 3 cas avec les représentations suivantes :

- les courbes continues représentent les résultats pour l'algorithme avec les coefficients de Robin particuliers  $(p^{\text{sta}}(\delta t), q^{\text{sta}}(\delta t))$  issus de la discrétisation temporelle et introduits au §3.2.1. pour  $\omega \in \left[-\frac{\pi}{\delta t}, \frac{\pi}{\delta t}\right]$ .
- les courbes en tirets représentent les résultats pour l'algorithme avec les coefficients  $(p^{\text{opt}}, q^{\text{opt}})$  solution du problème "inf-sup" pour  $|\omega| \leq \frac{\pi}{\delta t}$  qui correspondent aux conditions d'interface optimales sur une fenêtre de temps de taille infinie.
- les courbes en pointillés représentent les résultats pour l'algorithme avec les coefficients  $(\tilde{p}^{\text{opt}}, \tilde{q}^{\text{opt}})$  solution du problème "inf-sup" pour  $|\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\delta t}\right]$  qui correspondent aux conditions d'interfaces optimales sur une fenêtre de temps  $[0, T]$ .



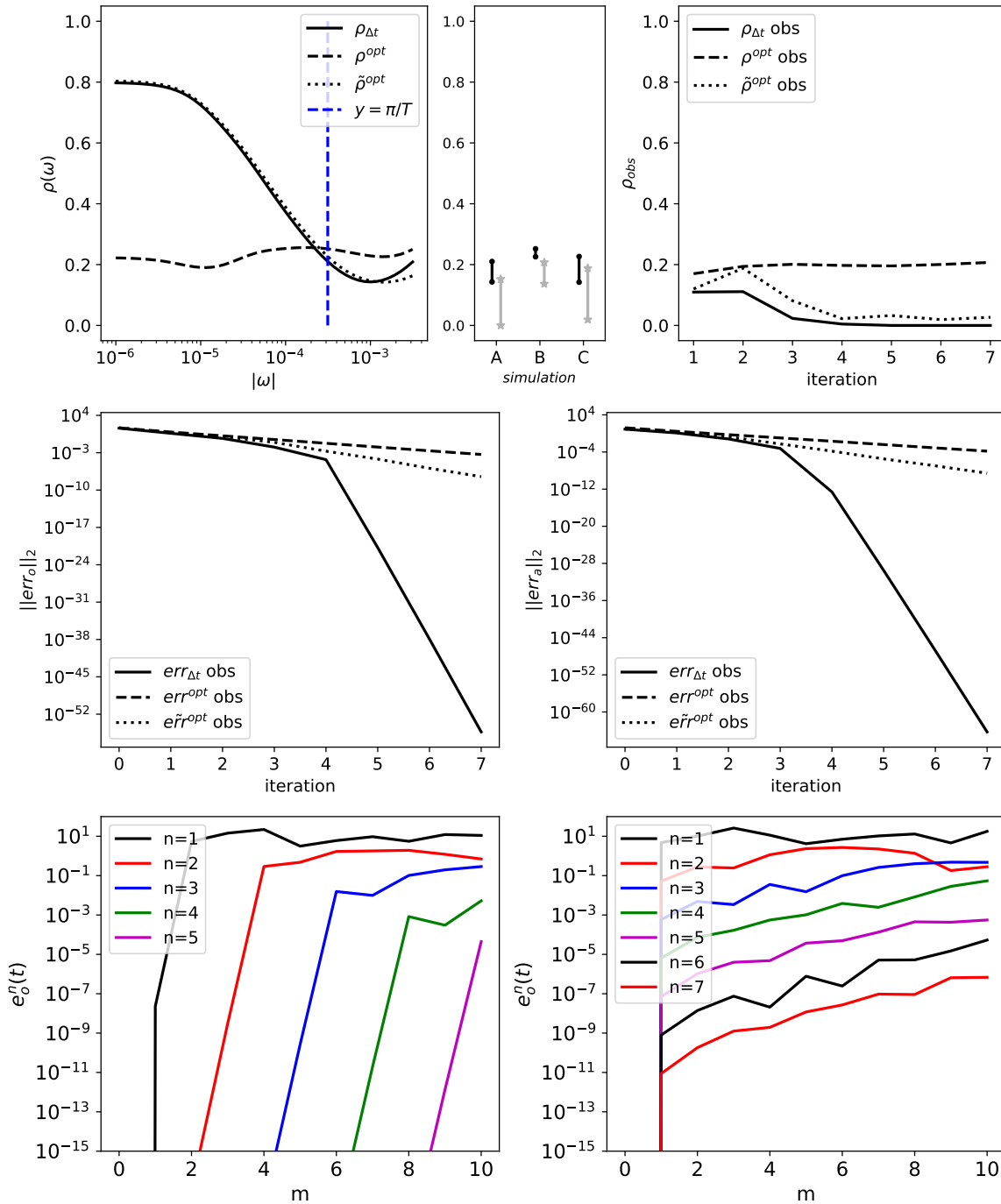


FIGURE 3.5 – Test décrit par le tableau 3.2 pour une fenêtre comportant  $M = 10$  pas de temps pour les simulations A (continu), B (tirets) et C (pointillés). Les panneaux du haut présentent le facteur de convergence théorique (à gauche) et observé (à droite) pour différents coefficients de Robin "optimaux". La ligne continue correspond aux coefficients de Robin particuliers ( $p^{sta}(\delta t), q^{sta}(\delta t)$ ), la ligne en tirets correspond aux coefficients de Robin solution du problème "inf-sup" sur  $|\omega| < \pi/\delta t$ , et la ligne pointillée correspond aux coefficients de Robin solutions du problème "inf-sup" sur  $\pi/T < |\omega| < \pi/\delta t$ . Les panneaux du milieu présentent la norme  $\mathcal{L}^2$  des erreurs observées dans le domaine 1 à gauche et 2 à droite. Les panneaux du bas présentent les erreurs à l'interface pour chaque pas de temps dans le domaine 2 : comparaison de l'optimal "classique" à droite et de l'optimal discret à gauche.

La figure 3.5 montre un exemple du comportement de l'algorithme sur une courte fenêtre de temps ( $M = 10$  pas de temps). On remarque que le facteur de convergence théorique pour les coefficients "discrets"  $\rho(p^{sta}(\delta t), q^{sta}(\delta t))$  est proche de  $\rho(\tilde{p}^{opt}, \tilde{q}^{opt}, \omega)$  résultant de l'optimisation sur  $|\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\delta t}\right]$ . Le facteur de convergence observé finit par s'annuler à partir de la 6ème itération, alors que le facteur de convergence théorique ne s'annule pas. L'algorithme a donc atteint la convergence et l'erreur est nulle pour tous les pas de temps. L'évolution de la norme  $\mathcal{L}^2$  des erreurs à l'interface donnée dans la ligne du dessous pour les deux sous-domaines illustre aussi ce phénomène.

On remarque un plongeon de l'erreur à partir de la 5ème itération, et celle-ci est largement plus faible pour les conditions d'interface particulière que pour les conditions d'interface issues de l'optimisation. Cette chute correspond à l'itération à partir de laquelle l'algorithme converge "exactement" comme le prédit la théorie. La dernière ligne de la figure 3.5 donne les erreurs à l'interface en fonction du pas de temps. On retrouve le schéma particulier expliqué au §3.2.1 où, à chaque itération, l'erreur s'annule sur deux pas de temps consécutifs. A partir de la 6ème itération, l'erreur devient négligeable sur tous les pas de temps.

Ainsi, sur un nombre fini d'itérations, ce choix de coefficients est plus efficace que les conditions dites "optimales".

Ces conditions particulières sont par contre, de par leur fonctionnement, moins efficaces sur des grandes fenêtres de temps. La figure 3.6 montre le même exemple que la figure 3.5 mais pour une fenêtre de temps plus grande :  $T = 100\delta t$ . Sur les premières itérations, on observe que le facteur de convergence et le comportement des erreurs en norme  $\mathcal{L}^2$  varient plus fortement et sont globalement plus grands que ceux issus des conditions d'interface optimisées. On observe de nouveau un "plongeon" de l'erreur après la 25ème itération. A partir de cette 25ème itération, le facteur de convergence descend bien en dessous des valeurs théoriques. A partir de la 35ème itération, l'erreur à l'interface, pour les conditions particulières, sont plus faibles que les erreurs issues des conditions "optimisées".

Ainsi, comme prévu par la théorie, bien que le facteur de convergence issu des conditions particulières ne présente pas de valeurs théoriques particulièrement faibles, ces conditions particulières mènent à un taux de convergence et à des erreurs plus faibles que ceux issus des conditions optimisées après un nombre fini d'itérations.

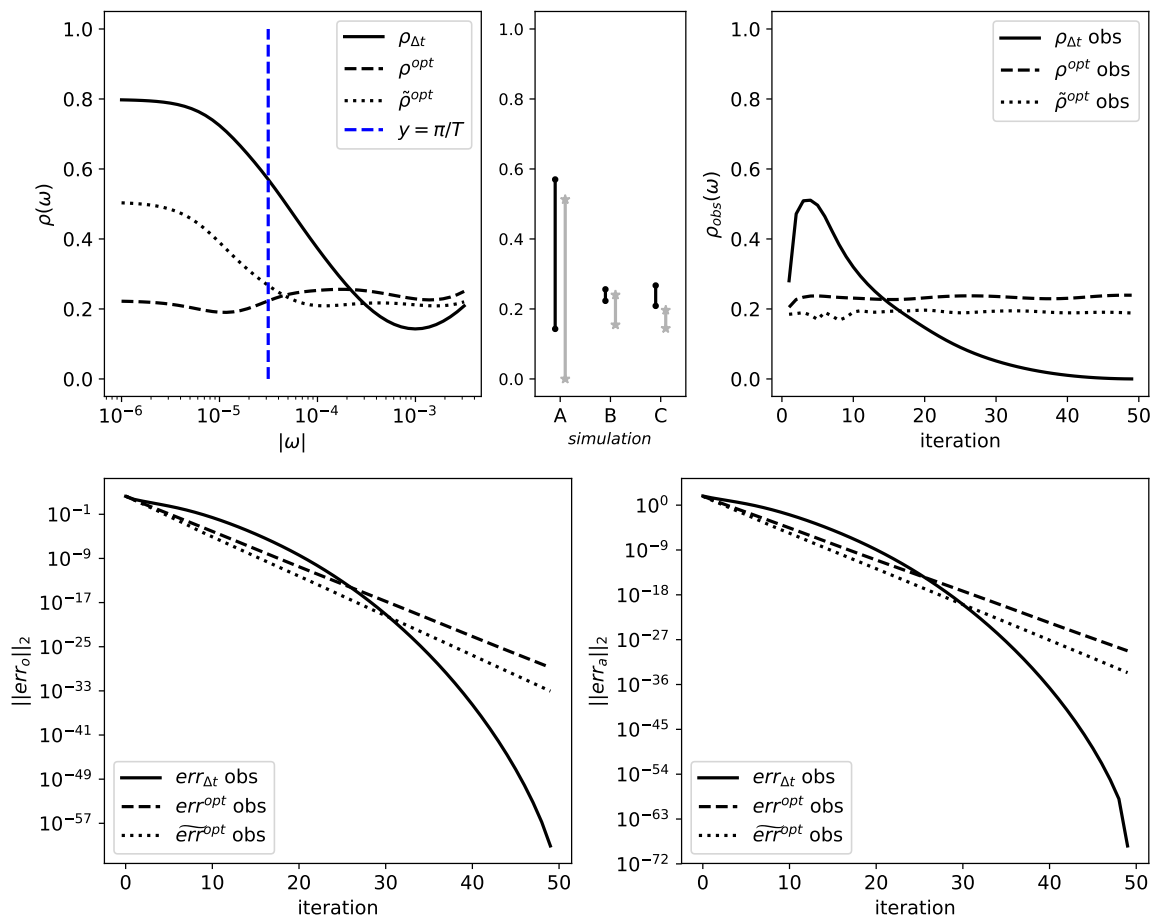


FIGURE 3.6 – Mêmes quatre premiers panneaux de la figure 3.5, mais pour  $M = 100$  pas de temps.

### 3.3 Filtrage au sein des conditions d'interface

En pratique il peut arriver que les conditions d'interface soient modifiées par rapport à leur définition dans le problème couplé initial. C'est le cas pour le couplage océan-atmosphère, où on utilise un opérateur moyenne pour transmettre les informations entre les domaines. Ces modifications peuvent bien sûr influencer la convergence de l'algorithme. Celle-ci étant définie dans l'espace de Fourier, modéliser une telle modification par des filtres temporels permettrait (grâce aux propriétés de la transformée de Fourier sur les filtres) de mieux comprendre le comportement de l'algorithme. Le paragraphe 3.3.1 s'intéresse à l'effet de tels filtres dans un cadre très général. Nous décrivons ensuite le cas particulier de l'opérateur moyenne dans le paragraphe 3.3.2.

**Notations pour cette section** Les notations introduites en section 3.1 restent valables. La notation  $\tilde{\cdot}$  désigne d'une manière générale les variables correspondant aux algorithmes modifiés (c'est-à-dire filtrés ou moyennés).

#### 3.3.1 Applications de filtres sur les conditions d'interfaces

Nous nous intéressons ici à l'effet de filtres au sein des conditions d'interface, sur la convergence de l'algorithme et sur l'éventuel écart avec la solution du problème de référence. Restons dans un premier temps dans le cadre très général d'un problème instationnaire avec des opérateurs linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 + \mathcal{L}_1 u_1 = F_1 & \text{sur } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_1 u_1 = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{1,1} u_1 = \mathcal{C}_{1,2} u_2 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \partial_t u_2 + \mathcal{L}_2 u_2 = F_2 & \text{sur } \Omega_2 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_2 u_2 = G_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2} u_2 = \mathcal{C}_{2,1} u_1 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Modifions maintenant le problème précédent en incluant des conditions d'interface filtrées. Ces filtres sont représentés ici par une convolution avec une fonction  $K_j$  ( $j \in \{1, 2\}$ ). Les solutions de ce problème sont notées  $\tilde{u}_j$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{u}_1 + \mathcal{L}_1 \tilde{u}_1 = F_1 & \text{sur } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_1 \tilde{u}_1 = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{1,1} \tilde{u}_1 = \mathcal{C}_{1,2} \tilde{u}_2 * K_2 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \partial_t \tilde{u}_2 + \mathcal{L}_2 \tilde{u}_2 = F_2 & \text{sur } \Omega_2 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_2 \tilde{u}_2 = G_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2} \tilde{u}_2 = \mathcal{C}_{2,1} \tilde{u}_1 * K_1 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Le but de ce paragraphe est d'établir les liens existant entre la solution dite "convergée"  $\tilde{u}$  et la solution dite "de référence"  $u$ .

**Propriété 3.3.1 Convergence de l'algorithme avec filtrage :** Le facteur et le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz appliqué au problème filtré (3.25) sont donnés par :

$$\tilde{\varrho}_j(\omega) = \varrho(\omega) \widehat{K}_1(\omega) \widehat{K}_2(\omega) \quad \tilde{\rho}_j(\omega) = \rho(\omega) \left| \widehat{K}_1(\omega) \widehat{K}_2(\omega) \right| \quad (3.26)$$

où  $\varrho(\omega)$  (resp.  $\rho$ ) est le facteur (resp. taux) de convergence du problème non filtré défini en (2.44). On peut voir avec cette formule que, par exemple, prendre des filtres tels que  $|\widehat{K}_j(\omega)| \leq 1$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  assure une meilleure convergence que le problème non filtré.

*Démonstration.* Nous étudions la convergence de l'algorithme de Schwarz pour le problème (3.25). Tant que les opérateurs  $\mathcal{L}_j$ ,  $\mathcal{B}_j$  et  $\mathcal{C}_{i,j}$  sont linéaires et que les opérateurs  $\mathcal{C}_{i,j}$  sont indépendants du temps, le système sur les erreurs  $\tilde{e}_j^n = \tilde{u}_j^n - \tilde{u}_j$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{e}_1^n + \mathcal{L}_1 \tilde{e}_1^n = 0 & \text{sur } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_1 \tilde{e}_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times \mathbb{R} \\ \tilde{e}_1^n = 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{C}_{1,1} \tilde{e}_1^n = \mathcal{C}_{1,2} \tilde{e}_2^{n-1} * K_2 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{e}_2^n + \mathcal{L}_2 \tilde{e}_2^n = 0 & \text{sur } \Omega_2 \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_2 \tilde{e}_2^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times \mathbb{R} \\ \tilde{e}_2^n = 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{C}_{2,2} \tilde{e}_2^n = \mathcal{C}_{2,1} \tilde{e}_1^n * K_1 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Comme au §2.2.2, on donne ici les étapes de raisonnement pour  $\mathcal{L}_j$  un opérateur différentiel de degré 2, mais celui-ci s'applique de la même manière pour les problèmes de plus haut degré. Pour étudier la convergence de ce problème, il nous faut passer dans l'espace de Fourier et résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\omega \widehat{e}_j^n - \partial_z \left( \nu(z) \partial_z \widehat{e}_j^n \right) = 0 & \Omega_j \times \mathbb{R} \\ \widehat{e}_j^n = 0 & \partial\Omega_j^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{1,1} \widehat{e}_1^n(\omega) = \mathcal{C}_{1,2} \widehat{e}_2^{n-1} \widehat{K}_2(\omega) & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2} \widehat{e}_2^n(\omega) = \mathcal{C}_{2,1} \widehat{e}_1^n \widehat{K}_1(\omega) & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

où  $\widehat{\cdot}$  est le symbole de la transformée de Fourier. Avec le même raisonnement qu'au §2.2.2 on peut exprimer l'erreur dans l'espace de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{e}_j^n(z, \omega) = A_j^n(\omega) \left( f_j(z, \omega) - \frac{\mathcal{B}_j(\omega) f_j(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}_j(\omega) g_j(\omega)|_{\partial\Omega_j^{ext}}} g_j(z, \omega) \right) & \text{sur } \Omega_j, \\ \mathcal{C}_{1,1} \widehat{e}_1^n(\omega) = \mathcal{C}_{1,2} \widehat{e}_2^n(\omega) \widehat{K}_2(\omega) & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_{2,2} \widehat{e}_2^n(\omega) = \mathcal{C}_{2,1} \widehat{e}_1^n(\omega) \widehat{K}_1(\omega) & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.30)$$

On peut ainsi en déduire le facteur et le taux de convergence pour l'erreur  $\widehat{e}_j^n$  donnés par (3.26).  $\square$

**Propriété 3.3.2 Erreur par rapport à la solution sans filtrage :** Il n'y a pas de raison pour que le problème filtré (3.25) et le problème non filtré (3.24) aient la même solution. L'erreur par rapport à la solution de référence  $\zeta_j^n = \tilde{u}_j^n - u_j$  dans chaque sous-domaine et à chaque itération vérifie :

$$\widehat{\zeta}_j^\infty(z, \omega) = H_j(z, \omega) \frac{\mathcal{R}_j(\omega)}{1 - \tilde{\varrho}(\omega)} \quad (3.31)$$

avec

$$\mathcal{R}_j(\omega) = \frac{\mathcal{C}_{\bar{j},j} \widehat{u}_j|_\Gamma(\omega)}{\mathcal{C}_{\bar{j},j} H_j|_\Gamma(\omega)} \left( \widehat{K}_j(\omega) - 1 \right) \varrho(\omega) \widehat{K}_{\bar{j}}(\omega) + \frac{\mathcal{C}_{j,\bar{j}} \widehat{u}_{\bar{j}}|_\Gamma(\omega)}{\mathcal{C}_{j,j} H_j|_\Gamma(\omega)} \left( \widehat{K}_{\bar{j}}(\omega) - 1 \right) \quad (3.32)$$

*Démonstration.* L'erreur par rapport à la solution de référence  $\zeta_j^n = \tilde{u}_j^n - u_j$  dans chaque domaine et à chaque itération vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \zeta_j^n - \mathcal{L}_j \zeta_j^n = 0 & \Omega_j \times [0, T] \\ \mathcal{B}_j \zeta_j^n = 0 & \partial \Omega_j^{ext} \times [0, T] \\ \mathcal{C}_{1,1} \zeta_1^n = \mathcal{C}_{1,2} \zeta_2^{n-1} * K_2 + \mathcal{C}_{1,2} u_2 * K_2 - \mathcal{C}_{1,2} u_2 & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_{2,2} \zeta_2^n = \mathcal{C}_{2,1} \zeta_1^n * K_1 + \mathcal{C}_{2,1} u_1 * K_1 - \mathcal{C}_{2,1} u_1 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Comme précédemment, on peut exprimer ce système dans l'espace de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\zeta}_j^n(z, \omega) = A_j^n(\omega) \left( f_j(z, \omega) - \frac{\mathcal{B}_j(\omega) f_j(\omega)|_{\partial \Omega_j^{ext}}}{\mathcal{B}_j(\omega) g_j(\omega)|_{\partial \Omega_j^{ext}}} g_j(z, \omega) \right) = A_j^n(\omega) H_j(z, \omega) & \text{sur } \Omega_j \\ \mathcal{C}_{1,1} \widehat{\zeta}_1^n = \mathcal{C}_{1,2} \widehat{\zeta}_2^{n-1} \widehat{K}_2 + \mathcal{C}_{1,2} \widehat{u}_2 \left( \widehat{K}_2 - 1 \right) & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_{2,2} \widehat{\zeta}_2^n = \mathcal{C}_{2,1} \widehat{\zeta}_1^n \widehat{K}_1 + \mathcal{C}_{2,1} \widehat{u}_1 \left( \widehat{K}_1 - 1 \right) & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.34)$$

L'évolution de l'erreur en fonction de  $n$  est donc différente suivant le sous-domaine considéré, mais suit un schéma similaire :

$$A_1^n(\omega) = \tilde{\varrho}(\omega) A_1^{n-1}(\omega) + \frac{\mathcal{C}_{2,1} \widehat{u}_1|_\Gamma \mathcal{C}_{1,2} H_2|_\Gamma}{\mathcal{C}_{2,2} H_2|_\Gamma \mathcal{C}_{1,1} H_1|_\Gamma} \left( \widehat{K}_1 - 1 \right) \widehat{K}_2 + \frac{\mathcal{C}_{1,2} \widehat{u}_2|_\Gamma}{\mathcal{C}_{1,1} H_1|_\Gamma} \left( \widehat{K}_2 - 1 \right) \quad (3.35a)$$

$$= \tilde{\varrho}(\omega) A_1^{n-1}(\omega) + \mathcal{R}_1(\omega) \quad (3.35b)$$

$$= (\tilde{\varrho}(\omega))^n A_1^0(\omega) + \mathcal{R}_1(\omega) \frac{1 - (\tilde{\varrho}(\omega))^n}{1 - \tilde{\varrho}(\omega)} \quad (3.35c)$$

$$A_2^n(\omega) = \tilde{\varrho}(\omega) A_2^{n-1}(\omega) + \frac{\mathcal{C}_{1,2} \widehat{u}_2|_\Gamma \mathcal{C}_{2,1} H_1|_\Gamma}{\mathcal{C}_{2,2} H_2|_\Gamma \mathcal{C}_{1,1} H_1|_\Gamma} \left( \widehat{K}_2 - 1 \right) \widehat{K}_1 + \frac{\mathcal{C}_{2,1} \widehat{u}_1|_\Gamma}{\mathcal{C}_{2,2} H_2|_\Gamma} \left( \widehat{K}_1 - 1 \right) \quad (3.35d)$$

$$= \tilde{\varrho}(\omega) A_2^{n-1}(\omega) + \mathcal{R}_2(\omega) \quad (3.35e)$$

$$= (\tilde{\varrho}(\omega))^n A_2^0(\omega) + \mathcal{R}_2(\omega) \frac{1 - (\tilde{\varrho}(\omega))^n}{1 - \tilde{\varrho}(\omega)} \quad (3.35f)$$

avec  $\mathcal{R}_j$  donné par (3.32). Supposons maintenant que l'algorithme avec filtrage converge, (c'est-à-dire  $|\tilde{\varrho}(\omega)| < 1$  pour tout  $\omega$ ). Alors les équations (3.35c)-(3.35f) montrent que le terme  $A_j^n$  va tendre vers  $\frac{\mathcal{R}_j}{1 - \tilde{\rho}}$ . Donc la différence entre la solution convergée et la solution de référence sera donnée par (3.31).  $\square$

Le résultat (3.31) fournit une caractérisation analytique du résultat attendu suivant : l'erreur entre la solution convergée et la solution de référence dépend de l'effet de ce filtre sur la solution de référence.

Par exemple si on sait que la solution de référence n'est pas modifiée par les filtres (c'est-à-dire  $\mathcal{C}_{\bar{j},j}u_j|_{\Gamma} * K_j - \mathcal{C}_{\bar{j},j}u_j|_{\Gamma} = 0$  et  $\mathcal{C}_{j,\bar{j}}u_{\bar{j}}|_{\Gamma} * K_{\bar{j}} - \mathcal{C}_{j,\bar{j}}u_{\bar{j}}|_{\Gamma} = 0$ ), alors la solution filtrée  $\tilde{u}_j^n$  convergera vers la solution de référence  $u_j$ . Dans ce cas l'algorithme filtré peut être utile pour modifier la vitesse de convergence. Par exemple si  $|\widehat{K}_1(\omega)\widehat{K}_2(\omega)| < 1$  pour tout  $\omega \in I_\omega$ , alors la convergence sera plus rapide. Un tel cas sera illustré au paragraphe 3.3.3.

D'une manière générale, on peut dire que si les deux facteurs de convergence sont très faibles,  $|\varrho(\omega)| \ll 1$  et  $|\tilde{\varrho}(\omega)| \ll 1$ , alors l'erreur à l'interface entre la solution convergée et la solution de référence est :

$$\mathcal{C}_{j,j}\zeta^\infty|_{\Gamma}(t) \approx (\mathcal{C}_{j,\bar{j}}u_{\bar{j}}|_{\Gamma} * K_j - \mathcal{C}_{j,\bar{j}}u_{\bar{j}}|_{\Gamma}) \quad (3.36)$$

**Exemple : du problème instationnaire au problème stationnaire** Nous avons considéré des conditions d'interface incluant un filtrage en temps par analogie à l'utilisation de l'opérateur moyenne dans les algorithmes de couplage océan-atmosphère. Nous ne pouvons pas à ce stade définir l'opérateur moyenne comme un simple filtre ; une étude plus profonde de cet opérateur sera faite au §3.3.2. Illustrons toutefois ici cet effet dans le cas limite d'une fenêtre de couplage de longueur infinie.

Prenons comme solution de référence la solution de (3.24) avec comme hypothèse que  $u(t)|_{\Gamma}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Supposons que les conditions d'interface sont :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{1,1}\tilde{e}_1^n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{1,2}\tilde{e}_2^{n-1}(t')dt' = \mathcal{C}_{1,2}\widehat{\tilde{e}_2^{n-1}}(\omega = 0) & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2}\tilde{e}_2^n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{2,1}\tilde{e}_1^n(t')dt' = \mathcal{C}_{2,1}\widehat{\tilde{e}_1^n}(\omega = 0) & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases}$$

On peut remarquer qu'en pratique, l'erreur est considérée nulle pour les temps négatifs. On peut interpréter ceci comme l'application d'un filtre<sup>3</sup> (correspondant à la fonction constante égale à 1) sur les conditions d'interface transmises. Pour éviter une notation un peu lourde en termes de distributions, on définit la fonction  $\delta_0$  :

$$\delta_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

---

3. La convolution est alors vue comme une convolution entre un signal  $\mathcal{L}^1$  et  $\mathcal{L}_{loc}^1$ .

D'après (3.30), on en déduit que la solution et l'erreur s'écrivent à l'interface :

$$\mathcal{C}_{i,j}\widehat{u}_j^n|_{\Gamma}(\omega) = \mathcal{C}_{i,j}\widehat{u}_j^n|_{\Gamma}(0)\delta_0(\omega) \quad \mathcal{C}_{i,j}\widehat{e}_j^n|_{\Gamma}(\omega) = \mathcal{C}_{i,j}\widehat{e}_j^n|_{\Gamma}(0)\delta_0(\omega) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$$

Dans ces conditions, que ce soit pour la solution calculée  $\widehat{u}_j^n$  ou l'erreur correspondante  $\widehat{e}_j^n$ , seule la fréquence nulle est présente sur la condition à l'interface. On peut remarquer que pour chaque itération on a la même équation différentielle pour  $\widehat{u}_j^n(\omega = 0)$  et  $\widehat{e}_j^n(\omega = 0)$ , et de même pour  $\widehat{\zeta}_j^n(\omega = 0)$  et  $\widehat{e}_j^n(\omega = 0)$ . On en déduit en particulier que pour tout  $z \in \Omega$  :

$$\widehat{u}_j^n(z, 0) = \widehat{u}_j^n(z, 0) \quad \widehat{\zeta}_j^n(z, 0) = \widehat{e}_j^n(z, 0) = \widehat{e}_j^n(z, 0) \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.37)$$

Le système sur les erreurs (3.27)-(3.28) a donc pour facteur de convergence  $\varrho \delta_0^4$ , où  $\varrho$  est le facteur de convergence du problème non-filtré. Ainsi, s'il y a convergence, on peut aussi calculer l'erreur par rapport à la solution de référence d'après (3.31) :

$$\widehat{\zeta}_j^\infty(z, \omega) = \frac{H_j(z, \omega)}{\mathcal{C}_{j,j}H_j(\omega)|_{\Gamma}}\mathcal{C}_{j,\bar{j}}\widehat{u}_{\bar{j}}|_{\Gamma}(\omega)(\delta_0(\omega)-1) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{j,j}\widehat{\zeta}_j^\infty(z, \omega) = \mathcal{C}_{j,\bar{j}}\widehat{u}_{\bar{j}}|_{\Gamma}(\omega)(\delta_0(\omega)-1)$$

On en déduit que la condition à l'interface de la solution filtrée converge, à chaque instant, vers la condition à l'interface de la solution stationnaire du problème de référence :

$$\mathcal{C}_{j,j}\widehat{u}_j^\infty|_{\Gamma}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{j,\bar{j}}u_{\bar{j}}|_{\Gamma}(t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{j,j}u_j|_{\Gamma}(t')dt' \quad (3.38)$$

De même, en utilisant  $\widehat{\zeta}_j^\infty(\omega = 0) = 0$ , on en déduit que l'état stationnaire de la solution filtrée converge vers la solution stationnaire du problème de référence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_j^\infty(z, t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(z, t')dt' \quad (3.39)$$

### 3.3.2 Effet de la moyenne sur l'algorithme de Schwarz

Dans le cas où l'opérateur moyenne agit sur une fenêtre de temps infinie, cet opérateur peut directement se traduire en terme de filtre et on trouve les résultats généraux du paragraphe précédent. Dans un cadre plus général, l'opérateur moyenne peut être appliqué sur plusieurs fenêtres de taille finie et l'opérateur ne peut donc plus être vu directement comme un simple filtrage. De plus, l'influence de l'opérateur moyenne dépend fortement de la taille de la fenêtre où on applique cette moyenne. Or nous avons vu qu'on pouvait difficilement lier la convergence dans le domaine fréquentiel de la solution sur une fenêtre finie au facteur de convergence calculé sur une fenêtre de temps infinie. Nous cherchons dans ce paragraphe à adapter les résultats des sections précédentes à cette problématique.

---

4. Pour la fréquence  $\omega = 0$ , il est clair que le facteur de convergence vaut  $\varrho(0)$ ; pour  $\omega \neq 0$ , on a toujours  $\widehat{e}_j^n(\omega) = 0$  donc le facteur de convergence n'a pas de sens et pour être cohérent avec (3.35) il faut donner comme facteur de convergence  $\varrho(0)\delta_0(\omega)$



On peut traduire l'application d'opérateurs moyenne au sein des conditions d'interface d'un algorithme de Schwarz sur un problème multiphysique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^n + \mathcal{L}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1^n = F_1 & \text{sur } \Omega_1 \times [0, T] \\ \mathcal{B}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1^n = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext} \times [0, T] \\ \mathcal{C}_{1,1} \tilde{\mathbf{u}}_1^n = \mathcal{M}(\mathcal{C}_{1,2} \tilde{\mathbf{u}}_2^{n-1}) & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_2^n + \mathcal{L}_2 \tilde{\mathbf{u}}_2^n = F_2 & \text{sur } \Omega_2 \times [0, T] \\ \mathcal{B}_2 \tilde{\mathbf{u}}_2^n = G_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext} \times [0, T] \\ \mathcal{C}_{2,2} \tilde{\mathbf{u}}_2^n = \mathcal{M}(\mathcal{C}_{2,1} \tilde{\mathbf{u}}_1^n) & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (3.40)$$

où  $\mathcal{M}$  est un opérateur de type moyenne :

$$\mathcal{M}(f)(t) = \frac{1}{|\mathcal{T}_l|} \int_{\mathcal{T}_l} f(t) dt \quad \text{pour } t \in \mathcal{T}_l \subset [0, T]$$

Dans un cadre général, on suppose que la moyenne est calculée sur des fenêtres  $\mathcal{T}_l = [t_l, t_{l+1}[$ . On considère que la fenêtre  $[0, T]$  est divisible en  $L + 1$  fenêtres de taille  $|\mathcal{T}_l|$ .

Nous donnons dans ce paragraphe les principaux résultats théoriques sur la convergence de l'algorithme et la solution convergée. Ces résultats seront illustrés dans le paragraphe 3.3.3.

**Notations particulières** Aux notations introduites en début de section et dans le §3.3.1, on ajoute :

- l'erreur entre la solution à chaque itération et la solution "convergée" :  $\tilde{\mathbf{e}}_j^n = \tilde{\mathbf{u}}_j^n - \tilde{\mathbf{u}}_j^\infty$
- l'erreur entre la solution convergée et la solution de référence :  $\zeta_j^n = \tilde{\mathbf{u}}_j^n - \mathbf{u}_j$
- la solution (ou l'erreur) sur la fenêtre  $\mathcal{T}_l$  et notée par un indice  $l$ . Par exemple :  $\mathbf{u}_{j,l}^n = \mathbf{u}_j^n P_{\mathcal{T}_l}$
- le facteur ou le taux de convergence en fréquentiel correspondant au signal fenêtré sur un intervalle  $\mathcal{T}$  s'écrit avec un indice  $\mathcal{T}$ . Par exemple

$$\widehat{\mathbf{e}}_{j,l}^n|_{\Gamma}(\omega) = \boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(\omega) \widehat{\mathbf{e}}_{j,l}^{n-1}|_{\Gamma}(\omega) \quad \boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(\omega) = |\boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(\omega)| \quad (3.41)$$

**Propriété 3.3.3 Convergence de l'algorithme et solution convergée :** Le facteur de convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  de l'algorithme modifié est majoré comme suit :

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{j,\mathcal{M}}^{n,\text{obs}} = \frac{\|\mathcal{C}_{j,j} \tilde{\mathbf{e}}_j^n|_{\Gamma}\|_2}{\|\mathcal{C}_{j,j} \tilde{\mathbf{e}}_j^{n-1}|_{\Gamma}\|_2} \leq \max_{0 \leq l \leq L} \boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(0) \quad (3.42)$$

où  $\boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)$  est le taux de convergence du problème de référence fenêtré sur  $\mathcal{T}_l$  pour la fréquence nulle. Cette valeur  $\boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)$  n'est pas forcément connue. En revanche on peut

majorer l'erreur en norme  $\mathcal{L}^2$  par la première erreur issue du *first guess*  $e_j^0|_\Gamma$  et du facteur de convergence  $\rho$  que l'on sait calculer :

$$\|\mathcal{C}_{j,j}\tilde{\mathbf{e}}_j|_\Gamma\|_2 \leq \left(\sup_{\omega \in I_\omega} \rho(\omega)\right)^n \|\mathcal{C}_{j,j}e_j^1|_\Gamma\|_2 \quad (3.43)$$

où  $e_j^1$  est l'erreur issue de la première itération de l'algorithme non moyenné si on avait prolongé la résolution de l'équation sur toute la fenêtre temporelle. Si l'algorithme modifié converge, la solution convergée  $\tilde{\mathbf{u}}_j^\infty$  vérifie :

$$\mathcal{C}_{j,j}\tilde{\mathbf{u}}_j^\infty|_\Gamma(t) = \frac{1}{|\mathcal{T}_l|} \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,\bar{j}}\mathbf{u}_{\bar{j}}|_\Gamma(t')dt' = \frac{1}{|\mathcal{T}_l|} \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,j}\mathbf{u}_j|_\Gamma(t')dt' \quad \text{sur } \mathcal{T}_l \quad (3.44a)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{T}_l|} \int_{\mathcal{T}_l} \tilde{\mathbf{u}}_j^\infty(z, t')dt' = \frac{1}{|\mathcal{T}_l|} \int_{\mathcal{T}_l} \mathbf{u}_j(z, t')dt' \quad \text{sur } \mathcal{T}_l \quad (3.44b)$$

Ce résultat retrouve l'idée "intuitive" de propriété de conservation de la moyenne sur l'opérateur  $\mathcal{C}_{j,j}$ , mais aussi de conservation de la moyenne sur la solution elle-même.

*Démonstration.* La démonstration de ces résultats est donnée en annexe A. Elle repose principalement sur le fait que l'état stationnaire sur les fenêtres  $\mathcal{T}_l$  est conservé par ces opérateurs moyennes.  $\square$

**Estimation empirique de la convergence observée** La détermination de  $\rho_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)$  est délicate, comme expliqué au §3.1.1, et on ne peut pas de manière générale lier  $\rho_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)$  au facteur de convergence  $\rho(\omega)$  que l'on connaît. On peut exprimer  $\rho_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)$  par

$$\rho_{j,\mathcal{T}_l}^n(0) = \left| \frac{\widehat{\mathbf{e}}_{j,l}^n(\omega=0)}{\widehat{\mathbf{e}}_{j,l}^{n-1}(\omega=0)} \right| = \left| \frac{\int_{I_\omega} \varrho(\omega) \widehat{e}_j^{n-1}(\omega) \zeta_l(\omega)}{\int_{I_\omega} \widehat{e}_j^{n-1}(\omega) \zeta_l(\omega)} \right| \quad (3.45)$$

avec  $\zeta_l(\omega) = \exp(-i\omega(t_{l+1} + t_l)) \text{sinc}(\omega|\mathcal{T}_l|/2)$ . On aimerait pouvoir définir  $\rho_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)$  directement en fonction de  $\varrho(\omega)$ , mais ce n'est pas possible sans hypothèse supplémentaire sur  $\widehat{e}$  ou  $\varrho$ . Remarquons cependant que :

- même si  $\varrho(\omega)$  peut avoir des variations brusques dans les très basses fréquences, le poids de cette plage de fréquences est faible dans les intégrales sur  $I_\omega$  de (3.45). Tant que chaque sous-problème est bien posé<sup>5</sup>, on peut estimer que les fréquences influentes dans les différents termes apparaissant dans (3.45) sont par exemple de l'ordre de  $[\frac{\pi}{10|\mathcal{T}_l|}, \frac{\pi}{\delta t}]$ . Ainsi, si  $\varrho(\omega)$  varie peu dans ces ordres de grandeurs, on peut estimer :

$$\rho_{j,\mathcal{T}_l}^n(0) \approx \rho(\omega^*) \quad \text{avec} \quad |\omega^*| \in \left[ \frac{\pi}{10|\mathcal{T}_l|}, \frac{\pi}{\delta t} \right] \quad (3.46)$$

Cette estimation peut être observée dans les figures du §3.1.3.

5. donc  $\mathbf{e}_j^{n-1}(\omega)$  est suffisamment régulière pour ne pas "exploser".

- le terme  $\text{sinc}(\omega|\mathcal{T}_l|/2)$  est majoré en valeur absolue par  $2/|\omega\mathcal{T}_l|$ , qui est décroissant en  $\omega$ , et son signe oscille à partir de  $\omega = 2\pi/|\mathcal{T}_l|$ . Aussi, en supposant que chaque  $\tilde{\mathbf{e}}_j^{n-1}(\omega)$  est suffisamment régulière, les fréquences de l'ordre de  $\pi/|\mathcal{T}_l|$  sont donc plus influentes que les hautes fréquences dans l'intégrale, et on peut réduire la plage des fréquences influentes en négligeant les plus hautes fréquences.

Ainsi, s'il n'y a qu'une seule fenêtre et que  $\rho(\omega)$  varie "raisonnablement", on observe généralement que  $\tilde{\rho}_{j,\mathcal{M}}^{n,\text{obs}}$  est proche de  $\rho(\pi/|\mathcal{T}_l|)$ . On se donne donc l'estimation empirique :

$$\min_{0.1\pi/|\mathcal{T}_l| \leq |\omega| \leq 3\pi/|\mathcal{T}_l|} \rho(\omega) \leq \tilde{\rho}_{j,\mathcal{M}}^{n,\text{obs}} \leq \max_{0.1\pi/|\mathcal{T}_l| \leq |\omega| \leq 3\pi/|\mathcal{T}_l|} \rho(\omega) \quad (3.47)$$

Cette approximation est un peu arbitraire et grossière (dans le sens où la plage donnée pour  $|\omega|$  est grande), mais elle permet cependant de lier en pratique le taux de convergence de l'algorithme moyenné  $\tilde{\rho}_{j,\mathcal{M}}^{n,\text{obs}}$  à la convergence théorique  $\rho(\omega)$ .

**Particularité du temps  $t = 0$**  Pour que l'algorithme soit bien posé, il faut que  $\mathbf{u}(z, 0) = u_0(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ , et ceci est valable aussi à l'interface. Il ne faut donc pas appliquer la moyenne sur le pas de temps 0, et les conditions d'interface s'écrivent plutôt :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{1,1}\tilde{\mathbf{u}}_1^n &= (\mathcal{C}_{1,2}u_0(t=0)) + M_{2,1}^{n-1}P|_{[\delta t, t_1]} + \sum M_{2,l}^{n-1}P|_{\mathcal{T}_l} & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2}\tilde{\mathbf{u}}_2^n &= (\mathcal{C}_{2,1}u_0(t=0)) + M_{1,1}^n P|_{[\delta t, t_1]} + \sum M_{1,l}^n P|_{\mathcal{T}_l} & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.48)$$

où  $M_{j,l}^n$  est la moyenne temporelle de  $\tilde{\mathbf{u}}_{j,l}^n|_{\Gamma}$  sur  $\mathcal{T}_l$ . Cela va modifier les résultats de convergence en fréquentiel pour chaque itération ; cette différence avec le cadre théorique que nous avons considéré est de l'ordre de  $O(\delta t/|\mathcal{T}_l|)\rho_{j,|\mathcal{T}_l|}^n$ . La convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  en sera aussi perturbée et cette perturbation est, dans le cadre général, difficile à estimer précisément. Elle peut généralement être négligée, soit quand il y a beaucoup de fenêtres (donc  $|\mathcal{T}_l|$  est petit), soit quand  $|\mathcal{T}_l|$  est suffisamment grand devant  $\delta t$ .

### 3.3.3 Exemple d'application du filtre moyenne

Nous illustrons ici les résultats généraux du paragraphe 3.3.2 sur l'utilisation d'opérateurs "moyenne" à l'interface.

**Données des tests** On considère le modèle couplé (3.1) avec les paramètres donnés par le tableau 3.3 :

Test	Simu	Données fixes						$ \mathcal{T}_l $
		$h_1$	$\nu_1$	$h_2$	$\nu_2$	$\delta t$	$T$	
1	A	-50m	0.012 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	200m	0.006 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	20000s	60 $\delta t$	4 $\delta t$
	B							8 $\delta t$
	C							60 $\delta t$
2	A	-3000 m	0.8 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	50m	0.6 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	2000s	40 $\delta t$	4 $\delta t$
	B							10 $\delta t$
	C							40 $\delta t$

TABLE 3.3 – Jeu de données pour le Test 1 (figures 3.7 et 3.8 ) et le Test 2 (figures 3.9 )

Les résultats de l'application de l'opérateur moyenne sur différentes tailles de fenêtre sont fournis sur les figures 3.7 et 3.9.

**Comportement des erreurs** On s'intéresse d'abord aux comportements des erreurs  $\tilde{\mathbf{e}}_j^n$  entre les solutions calculées et les solutions convergées. Les figures 3.7 et 3.9 donnent pour les jeux de données 1 et 2 le facteur de convergence théorique  $\rho(\omega)$  de l'algorithme de référence (sans moyennage) ainsi que la plage d'estimations de  $\tilde{\rho}_{j,\mathcal{M}}^{\text{noobs}}$  donnée par (3.47). On compare ces estimations théoriques au facteur de convergence observé sur les algorithmes avec des opérateurs moyennes. De ces figures, on peut tirer les remarques suivantes :

- l'estimation théorique donnée par (3.47) est vérifiée par les deux tests, et les fréquences influentes sont de l'ordre de  $\pi/|\mathcal{T}_l|$ .
- Le profil particulier du taux de convergence pour le test 2 fait que le taux de convergence diminue avec la taille de la fenêtre de moyennage. Mais ceci n'est pas vrai en général, comme le montre l'exemple du test 1 où l'algorithme moyenné sur la fenêtre entière converge moins vite que les autres simulations.

Nous verrons un autre exemple de l'application d'opérateur moyenne sur le test 1 en ajoutant l'effet de Coriolis dans le paragraphe 4.2.3.

**Comportement des solutions moyennées** Nous donnons en figure 3.8 les solutions à l'interface pour chaque pas de temps, sur le sous-domaine où on a appliqué la condition de Dirichlet  $\Omega_1$  et sur le sous-domaine où on a appliqué la condition de Neumann  $\Omega_2$ . On retrouve la convergence en escalier sur  $\Omega_1$  et, à convergence, on retrouve le résultat théorique qui donne  $\tilde{\mathbf{u}}_1^\infty(t) = \int_{\mathcal{T}_l} u_1^n(t') dt'$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_l$ .

De plus, si l'on trace la moyenne sur  $T_l$  des solutions à l'interface sur  $\Omega_2$ , on retrouve le résultat théorique de conservation globale de la moyenne de la solution  $\int_{T_l} \tilde{\mathbf{u}}_2^\infty(t) = \int_{T_l} \mathbf{u}_2^n(t') dt'$ .

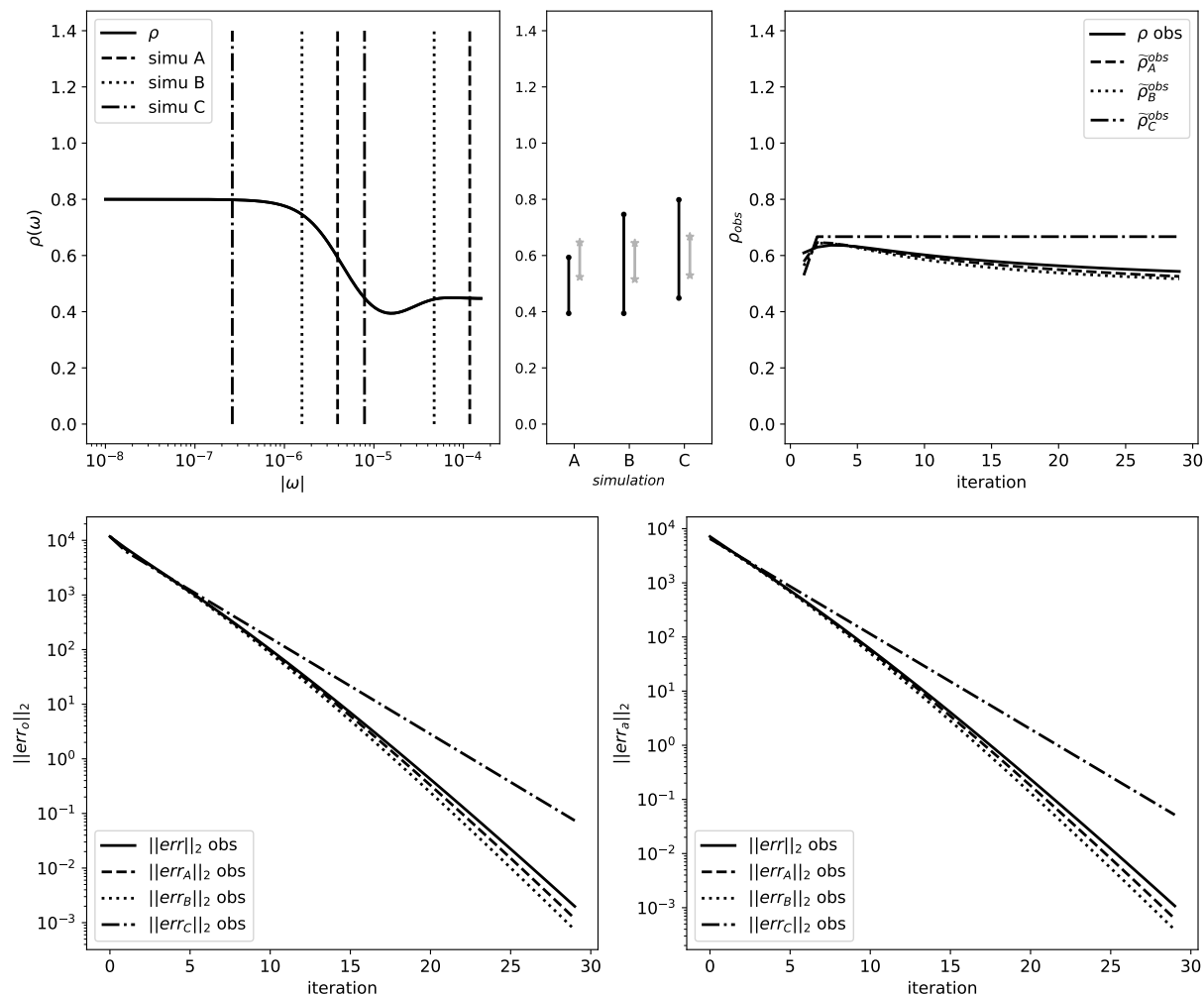


FIGURE 3.7 – Test 1 (voir tableau 3.3). Les panneaux du haut présentent le facteur de convergence théorique (à gauche) et observé (à droite) pour différentes tailles de fenêtre de moyennage. La ligne continue correspond à l’algorithme de référence (sans moyennage), la ligne en tirets à un moyennage sur une fenêtre de taille  $4\delta t$  (simu A), la ligne en pointillés à un moyennage sur une fenêtre de taille  $8\delta t$  (simu B), et la ligne en trait mixte à un moyennage sur la fenêtre entière (simu C). En haut au milieu : comparatif des valeurs données par la convergence théorique (en noir  $\bullet$ ) suivant l’estimation (3.47) et la convergence observée (en gris  $\star$ ). Les panneaux du bas présentent la norme  $\mathcal{L}^2$  des erreurs à l’interface dans le domaine 1 à gauche et 2 à droite.

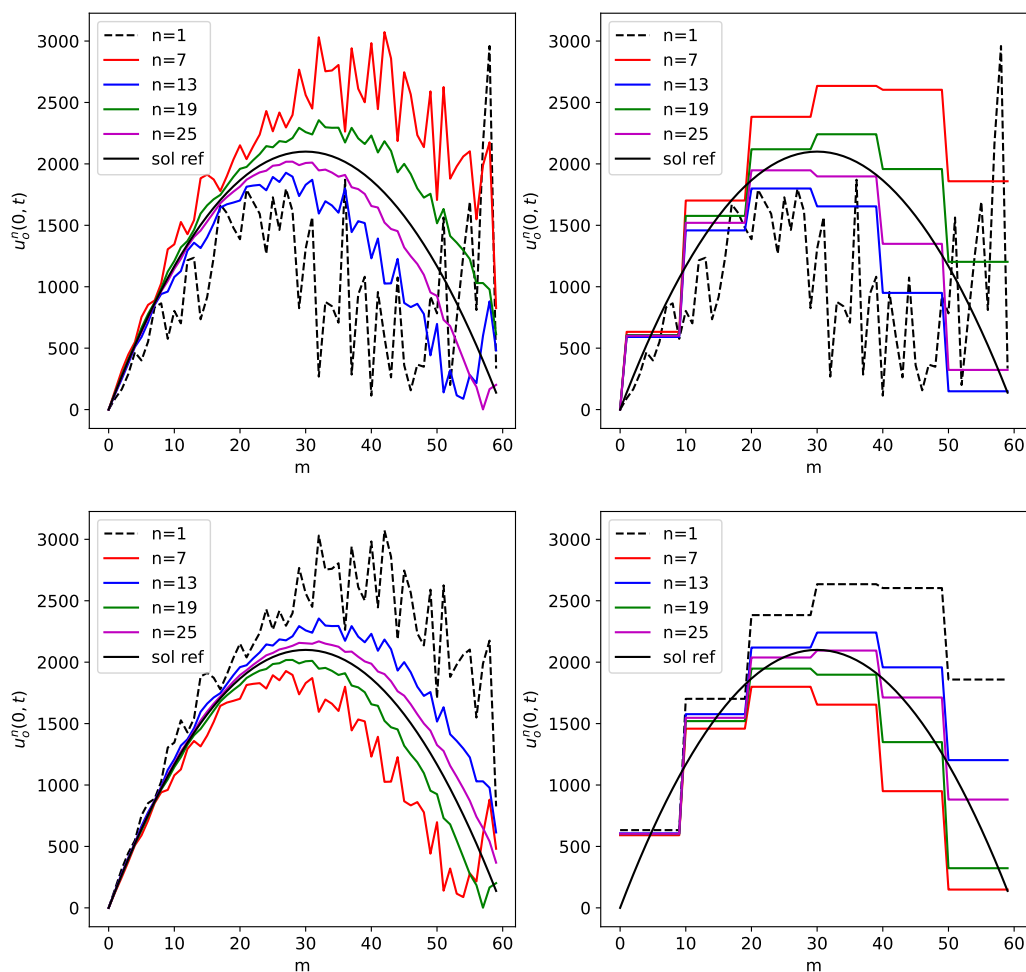


FIGURE 3.8 – Test 1 (voir tableau 3.3). Les panneaux du haut présentent, pour différentes itérations, l'erreur à l'interface pour le sous-domaine 1, pour l'algorithme de référence (à gauche) et la solution issue du moyennage sur 8 pas de temps (simu B, à droite). Les panneaux du bas présentent l'erreur à l'interface pour le sous-domaine 1 pour l'algorithme de référence (à gauche) et la moyenne sur chaque fenêtre de taille  $8\delta t$  de la solution issue du moyennage sur 8 pas de temps (à droite, premier itéré en pointillés).

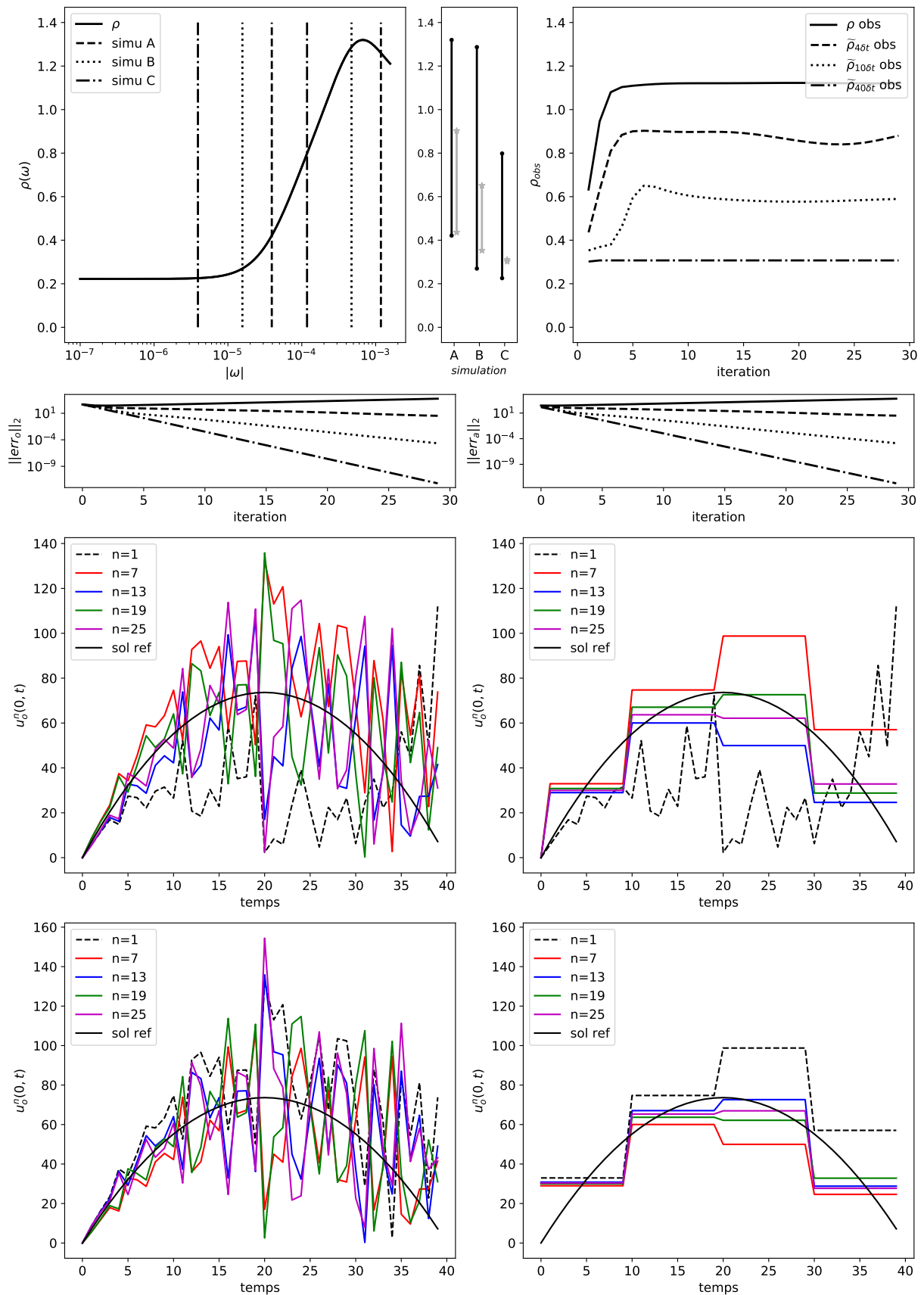


FIGURE 3.9 – Test 2 (tableau 3.3) : Idem figures 3.7 et 3.8 pour le jeu de données 2





# Chapitre 4

## Les algorithmes de Schwarz pour le couplage de couches d'Ekman

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Mise en place de l'algorithme sur le couplage de couches d'Ekman . . . . .</b>	<b>92</b>
4.1.1	Caractère bien posé et découpage en sous-problèmes . . . . .	93
4.1.2	Caractère bien posé de l'algorithme . . . . .	96
4.1.3	Traitement de l'effet de Coriolis dans l'étude de la convergence	100
<b>4.2</b>	<b>Convergence de l'algorithme de Schwarz : influence des spécificités du couplage océan-atmosphère . . . . .</b>	<b>103</b>
4.2.1	Principaux effets des spécificités du couplage océan-atmosphère sur la convergence de l'algorithme . . . . .	103
4.2.2	Analysis of Schwarz waveform relaxation for the coupled Ekman boundary layer problem with continuously variable coefficients	105
4.2.3	Compléments sur la convergence de l'algorithme de Schwarz pour le couplage de couches d'Ekman . . . . .	144
<b>4.3</b>	<b>Application des algorithmes de Schwarz sur le problème océan-atmosphère simplifié . . . . .</b>	<b>146</b>
4.3.1	Cas stationnaire sans effet de Coriolis . . . . .	148
4.3.2	Cas instationnaire avec effet de Coriolis . . . . .	151
4.3.3	Facteur de convergence pour le problème avec viscosité KPP . .	156

---

Les études sur les algorithmes de Schwarz se font généralement dans le cadre d'opérateurs linéaires, comme expliqué en chapitre 2. Or nous avons vu au chapitre 1 que les modèles couplés océan-atmosphère étaient fortement non linéaires dans les conditions d'interface et via le terme de viscosité. Dans un premier temps nous allons choisir de ne

pas prendre en compte cette non-linéarité et d'étudier le comportement des algorithmes de Schwarz sur le modèle dit "simplifié" du couplage océan-atmosphère introduit au chapitre 1 par (1.40). Dans ce problème simplifié, la viscosité est seulement fonction de  $z$  et les conditions d'interface incluses dans les paramétrisations de la couche limite sont des conditions de type "Dirichlet-Neumann". Ce modèle couplé simplifié s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(z) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t)) = \mathbf{F}_\alpha(z, t) & \text{sur } \Omega_\alpha \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_\alpha(z, t = 0) = \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } \Omega_\alpha \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } ]0, T[ \\ \mathbf{u}_\alpha(0, t) = \mathbf{u}_o(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \rho_a \nu_a(0) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(0, t) = \rho_o \nu_o(0) \partial_z \mathbf{u}_o(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{u}_\alpha \in \mathbb{R}^2$  représente les vitesses horizontales dans chaque milieu et  $\mathbf{u}_\alpha^g$  est un paramètre fixé constant en temps et en espace. La viscosité  $\nu_\alpha(z) = \nu_\alpha^t(z) + \nu_\alpha^m$  est supposée  $\mathcal{C}^1(0, z_\alpha^\infty)$  est aussi une donnée fixe du problème. Notons que la convention d'écriture introduite au chapitre 3 sur les variables en gras n'est plus utilisée : dans ce chapitre et le suivant, on retrouve la convention du chapitre 1, où les variables en gras sont des vecteurs.

En remarquant que  $\nu_\alpha(0) = \nu_\alpha^m$  (i.e.  $\nu_\alpha^t(0) = 0$ ), et sachant que les viscosités moléculaires sont telles que  $\nu_o^m \approx \lambda \nu_a^m$ , on exprimera dans la suite pour plus de généralité la condition d'interface de Neumann sous la forme :

$$\partial_z \mathbf{u}_\alpha(0, t) = \gamma \partial_z \mathbf{u}_o(0, t)$$

où  $\gamma = \lambda^{-1}$  (avec  $\lambda = \sqrt{\rho_a / \rho_o}$  introduit au chapitre 1).

Dans ce chapitre nous considérerons ce problème couplé (4.1). Les indices  $\alpha \in \{o, a\}$  seront remplacés par des indices  $j \in \{1, 2\}$  pour rester dans un cadre plus général. La section 4.1 explique les différentes étapes de mise en place pour passer du problème (4.1) à un problème de couplage multiphysique sur lequel on étudiera l'algorithme de Schwarz et sa convergence. Ce modèle couplé "océan-atmosphère simplifié", ou encore "de couches d'Ekman", présente plusieurs caractéristiques particulières : la viscosité variable, l'effet de Coriolis et les domaines  $\Omega_j$  finis. De tels aspects sont souvent négligés dans les études de convergence, ou rarement considérés en même temps. L'objectif de la section 4.2 est d'étudier la convergence en considérant toutes ces spécificités.

## 4.1 Mise en place de l'algorithme sur le couplage de couches d'Ekman

Dans cette section nous étudierons d'abord le caractère bien posé du problème couplé (4.1). Nous nous plaçons dans un cadre plus général sans hypothèse restrictives (autre que la régularité) sur les seconds membres et les viscosités. Nous verrons ensuite au §4.1.2 les

conditions nécessaires au caractère bien posé des algorithmes de Schwarz sur ce problème. Enfin nous mettons en place au §4.1.3 un changement de variable permettant d'étudier plus aisément la convergence de l'algorithme de Schwarz sur le problème de couches d'Ekman.

#### 4.1.1 Caractère bien posé et découpage en sous-problèmes

Considérons le problème global sur le domaine entier  $[h_1, h_2]$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(z, t) - \partial_z(\nu(z)\partial_z \mathbf{u}(z, t)) = \mathbf{F}(z, t) & \text{sur } [h_1, h_2] \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}(z, 0) = \mathbf{g}(z) & \text{sur } [h_1, h_2] \\ \mathbf{u}(h_j, t) = \mathbf{G}_j(t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec  $\mathbf{F}|_{\Omega_j} = \mathbf{F}_j$ ,  $\mathbf{g}|_{\Omega_j} = \mathbf{g}_j$ ,  $\nu|_{\Omega_j} = \nu_j$  et tel que  $\mathbf{g}(z = h_j) = \mathbf{G}_j(t = 0)$  et  $\nu(z) > 0$  et bornée pour tout  $z \in \Omega$ . Les conditions naturelles à l'interface qui découlent du problème global (4.2) sont des conditions de type Dirichlet-Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(0^-, t) = \mathbf{u}(0^+, t) \\ \gamma \partial_z \mathbf{u}(0^-, t) = \partial_z \mathbf{u}(0^+, t) \end{array} \right. \quad t \in ]0, T[$$

Le problème (4.1) peut alors être vu comme un cas particulier du problème (4.2) avec les conditions d'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_1(0, t) = \mathbf{u}_2(0, t) \\ \gamma \partial_z \mathbf{u}_1(0, t) = \partial_z \mathbf{u}_2(0, t) \end{array} \right. \quad t \in ]0, T[ \quad (4.3)$$

**Propriété 4.1.1 Caractère bien posé du problème couplé :** Un résultat général de LIONS et MAGENES, 1968b; ALLAIRE, 2005 assure l'existence et l'unicité de la solution faible  $\mathbf{u}$  du problème couplé (4.2) dans  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$  si  $\mathbf{F} \in \mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$ ,  $\mathbf{G}_j(t) \in \mathcal{L}^2(]0, T[)$  et  $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* D'après les théorèmes de trace (voir LIONS et MAGENES, 1968a), il existe un relèvement  $\mathbf{u}_r \in \mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^2(\Omega)) \cap \mathcal{H}^1(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$  [ tel que  $\mathbf{u}_r(h_j, t) = \mathbf{G}_j(t)$  pour tout  $t \in ]0, T[$ . La preuve d'existence et d'unicité se fait alors sur la variable  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r$  du problème homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(z, t) - \partial_z(\nu(z)\partial_z \tilde{\mathbf{u}}(z, t)) = \tilde{\mathbf{F}}(z, t) & \text{sur } [h_1, h_2] \times ]0, T[ \\ \tilde{\mathbf{u}}(z, t = 0) = \tilde{\mathbf{g}}(z) & \text{sur } [h_1, h_2] \\ \tilde{\mathbf{u}}(h_j, t) = 0 & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.4)$$

avec  $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$  et  $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ . La preuve d'existence et d'unicité se base sur une estimation d'énergie. Les particularités dans notre cas pour faire cette

estimation d'énergie sont la discontinuité de la viscosité en  $z = 0$  et le terme de Coriolis. Une fois l'estimation d'énergie faite, les preuves d'existence et d'unicité sont "classiques". Nous donnons ici cette estimation d'énergie, la suite de la preuve est donnée en annexe B.

Supposons que  $\tilde{\mathbf{u}} = (u, v)^T$  est solution de (4.4) dans  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$  au sens faible. En multipliant à gauche la première ligne de (4.4) par  $\tilde{\mathbf{u}}^T$  et en intégrant sur  $\Omega = [h_1, h_2]$  :

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \partial_t \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \partial_z (\nu \partial_z \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}$$

soit

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \nu \partial_z \tilde{\mathbf{u}}^T \partial_z \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}}^T \nu \partial_z \tilde{\mathbf{u}}]_{h_1}^{h_2} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}$$

c'est-à-dire  $\frac{1}{2} \partial_t \|\tilde{\mathbf{u}}\|_2^2 + \|\sqrt{\nu} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}\|_2^2 = \langle \tilde{\mathbf{u}}^T, \mathbf{F} \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (et resp.  $\|\cdot\|_2$ ) est le produit scalaire (resp. norme) sur  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . Chaque terme du membre de gauche étant positif, on a donc  $\langle \tilde{\mathbf{u}}^T, \mathbf{F} \rangle = \left| \langle \tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{F}} \rangle \right|$ . On intègre ensuite sur  $[0, t]$  pour  $t \in ]0, T]$ , et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient la majoration :

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_2^2(t) + \int_0^t \|\sqrt{\nu} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}\|_2^2(t') dt' = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_2^2 + \int_0^t \left| \langle \tilde{\mathbf{u}}^T, \tilde{\mathbf{F}} \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_2^2 + \int_0^t \|\tilde{\mathbf{u}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{F}}\|_2 \quad (4.5)$$

Il nous faut maintenant majorer le terme de droite dépendant de  $\tilde{\mathbf{u}}$  en fonction des données du problème. L'équation précédente implique l'inégalité  $\phi(t) \leq K + 2 \int_0^t \alpha(t') \sqrt{\phi(t')} dt'$  avec  $\phi(t) = \|\tilde{\mathbf{u}}\|_2^2$ ,  $K = \|\tilde{\mathbf{g}}\|_2^2$  et  $\alpha(t') = \|\tilde{\mathbf{F}}\|_2(t')$ . On peut ainsi appliquer une variante du lemme de Gronwall (voir ALLAIRE, 2005, chapitre 8) :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_2^2(t) \leq \left( \|\tilde{\mathbf{g}}\|_2 + \int_0^t \|\tilde{\mathbf{F}}\|_2(t') dt' \right)^2 \leq \left( \|\tilde{\mathbf{g}}\|_2 + \sqrt{T} \|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}^2]0, T[, \mathcal{L}^2(\Omega)} \right)^2 = C(T)^2 \quad (4.6)$$

Comme  $\tilde{\mathbf{F}}$  est supposé dans  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$ , cette expression nous donne une borne supérieure à  $\tilde{\mathbf{u}}$  dans  $\mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$ . Ensuite, la combinaison de (4.6) et (4.5) nous donne :

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_2^2(t) + \int_0^t \|\sqrt{\nu} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}\|_2^2(t') dt' \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_2^2 + C \|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}^2(0, T), \mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \quad (4.7)$$

Ceci nous donne la majoration de la solution  $\tilde{\mathbf{u}}$  dans l'espace  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega))$ .  $\square$

**Séparation en sous-problèmes** Notre objectif est de résoudre par un algorithme de Schwarz le problème couplé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_j(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_j(z, t) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z \mathbf{u}_j(z, t)) = \mathbf{F}_j(z, t) & \text{sur } \Omega_j \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_j(z, 0) = \mathbf{g}_j(z) & \text{sur } \Omega_j \\ \mathbf{u}_j(h_j, t) = \mathbf{G}_j(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \mathbf{u}_1(0, t) = \mathbf{u}_2(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \partial_z \mathbf{u}_2(0, t) = \gamma \partial_z \mathbf{u}_1(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Dans ce chapitre nous considérerons deux types de conditions d'interface qui découlent du problème couplé (4.8). On adopte la notation avec exposant  $n$ , qui désigne le numéro de l'itération lors de l'application de l'algorithme de Schwarz :

- des conditions d'interface de type "Dirichlet-Neumann", qui n'offrent aucun degré de liberté :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_1^n(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1^n(z, t) - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z \mathbf{u}_1^n(z, t)) = \mathbf{F}_1(z, t) & \text{sur } ]h_1, 0[ \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_1^n(z, 0) = \mathbf{g}_1(z) & \text{sur } ]h_1, 0[ \\ \mathbf{u}_1^n(h_1, t) = \mathbf{G}_1(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \mathbf{u}_1^n(0, t) = \mathbf{u}_2^{n-1}(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_2^n(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2^n(z, t) - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z \mathbf{u}_2^n(z, t)) = \mathbf{F}_2(z, t) & \text{sur } ]0, h_2[ \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_2^n(z, 0) = g_2(z) & \text{sur } ]0, h_2[ \\ \mathbf{u}_2^n(h_2, t) = \mathbf{G}_2(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \partial_z \mathbf{u}_2^n(0, t) = \gamma \partial_z \mathbf{u}_1^n(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right.$$

- des conditions d'interface de type "Robin-Robin" qui offrent des degrés de liberté  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_1^n(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1^n(z, t) - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z \mathbf{u}_1^n(z, t)) = \mathbf{F}_1(z, t) & \text{sur } ]h_1, 0[ \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_1^n(z, 0) = \mathbf{g}_1(z) & \text{sur } ]h_1, 0[ \\ \mathbf{u}_1^n(h_1, t) = \mathbf{G}_1(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \gamma \mathbf{Q} \partial_z \mathbf{u}_1^n(0, t) + \mathbf{u}_1^n(0, t) = \mathbf{Q} \partial_z \mathbf{u}_2^{n-1}(0, t) + \mathbf{u}_2^{n-1}(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.9)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_2^n(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2^n(z, t) - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z \mathbf{u}_2^n(z, t)) = \mathbf{F}_2(z, t) & \text{sur } ]0, h_2[ \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_2^n(z, 0) = g_2(z) & \text{sur } ]0, h_2[ \\ \mathbf{u}_2^n(h_2, t) = \mathbf{G}_2(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \partial_z \mathbf{u}_2^n(0, t) + \mathbf{P} \mathbf{u}_2^n(0, t) = \gamma \partial_z \mathbf{u}_1^n(0, t) + \mathbf{P} \mathbf{u}_1^n(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.10)$$

L'algorithme de "Dirichlet-Neumann" est en fait un choix particulier pour lequel  $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 0$ .

Nous choisissons de manière "arbitraire" d'imposer la condition de Dirichlet sur le domaine correspondant à l'océan ( $z < 0$ ) et la condition de Neumann sur le domaine correspondant à l'atmosphère ( $z > 0$ ). Ce choix n'a pas grande importance dans ce chapitre dont le but est d'étudier différents aspects particuliers de ce modèle multiphysique via les algorithmes de Schwarz.

### 4.1.2 Caractère bien posé de l'algorithme

Le choix des coefficients de Robin  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  doit assurer le caractère bien posé de l'algorithme de Schwarz, c'est-à-dire assurer que pour un "first-guess" donné, il existe une unique suite  $(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n)$  de solutions aux sous-problèmes (4.9)-(4.10). Ces solutions doivent être suffisamment régulières pour être utilisées comme conditions d'interface pour l'autre sous-problème (voir §2.3.1). Dans ce paragraphe, nous donnons de telles conditions.

**Propriété 4.1.2 Conditions sur  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  :** Si  $\mathbf{F}_j \in \mathcal{L}^2(]0, T[, \mathcal{L}^2(\Omega))$ ,  $\mathbf{g}_j \in \mathcal{H}^1(\Omega_j)$ , et si  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  tels que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ -p_3 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{tel que } (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ -q_3 & q_2 \end{pmatrix} \quad \text{tel que } (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad (4.11b)$$

alors il existe une unique solution à chaque itération pour chaque sous-problème (4.9) (4.10) dans  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^2(\Omega_j)) \cap \mathcal{H}^1(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega_j))$  et cette régularité garantit le caractère bien posé de l'algorithme de Schwarz. Cet espace est noté  $\mathcal{H}^{2,1}(0, T; \Omega_j)$ .

*Démonstration.* La preuve de ce résultat utilise l'estimation d'énergie, les étapes exposées ici sont librement inspirées d'autres travaux sur le sujet (MARTIN, 2003, BENNEQUIN et al., 2004, et BENNEQUIN et al., 2009). La principale différence entre ces études et notre problème est l'effet de Coriolis, qui transpose le problème dans le domaine des matrices  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ . Nous donnons les étapes de démonstration pour le sous-problème sur  $\Omega_1 = ]h_1, 0[$  qui fournit les conditions sur  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ . Les résultats sur  $\Omega_2$  et sur  $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  se déduisent de la même manière.

**Existence et unicité** A chaque itération, on considère le sous-problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_1^n(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_1^n(z, t) - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z \mathbf{u}_1^n(z, t)) & = \mathbf{F}_1(z, t) & \text{sur } ]h_1, 0[ \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}_1^n(z, 0) & = \mathbf{g}_1(z) & \text{sur } ]h_1, 0[ \\ \mathbf{u}_1^n(h_1, t) & = \mathbf{G}_1(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \gamma \mathbf{Q} \partial_z \mathbf{u}_1^n(0, t) + \mathbf{u}_1^n(0, t) & = \mathbf{v}(t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix}$ . Nous montrons d'abord l'existence et l'unicité de  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega_1))$ . Supposons  $\mathbf{F}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{G}_1$  comme donnés par l'énoncé et  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^{1/4}(]0, T[)$ . D'après les théorèmes de trace LIONS et MAGENES, 1968a, il est possible de définir un relèvement dans  $\mathcal{H}^{2,1}(0, T; \Omega_1)$  tel que étudier l'existence et l'unicité de la solution de (4.12) revient à étudier l'existence et l'unicité de  $\tilde{\mathbf{u}}_1 \in \mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega_1))$  solution de :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}_1 - \partial_z [\nu_1 \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1] = \tilde{\mathbf{F}}_1 \quad (z, t) \in ]h_1, 0[ \times ]0, T[ \quad (4.13a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(z, 0) = \tilde{\mathbf{g}}_1 \quad z \in ]h_1, 0[ \quad (4.13b)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(h_1, t) = 0 \quad t \in ]0, T[ \quad (4.13c)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) + \gamma \mathbf{Q} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) = 0 \quad t \in ]0, T[ \quad (4.13d)$$

Comme au §4.1.1, nous utilisons une estimation d'énergie pour montrer l'unicité de la solution (la preuve est rappelée en annexe B).

On multiplie l'équation (4.13a) par  $\tilde{\mathbf{u}}_1^T$ . Après intégration sur  $]h_1; 0[$  et application d'une formule de Green, on obtient :

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \gamma \nu_1(0) (\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t))^T \mathbf{Q}^T (\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)) = \langle \tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1 \rangle \quad (4.14)$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme  $\mathcal{L}^2$  sur  $]h_1, 0[$ . Pour que le membre de gauche ne comporte que des termes positifs, il suffit d'avoir  $(\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t))^T \mathbf{Q}^T (\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)) \geq 0$  et le choix de  $\mathbf{Q}$  donné par (4.11b) assure cette inégalité. On note  $\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T \mathbf{Q}^T (\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)) = \mathcal{Q}(\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t))$ . On a alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \gamma \nu_1(0) \min(q_1, q_2) |\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \partial_t \|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \gamma \nu_1(0) \mathcal{Q}(\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)) = \left| \langle \tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1 \rangle \right| \end{aligned}$$

On intègre ensuite sur  $[0, t]$  pour  $t \in ]0, T[$ , et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2(t) + \int_0^t \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2(t') dt' + \gamma \nu_1(0) \min(q_1, q_2) \int_0^t |\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t')|^2 dt' \\ & \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_2^2 + \int_0^t \left| \langle \tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1 \rangle \right|(t') dt' \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}_1\|_2^2 + \int_0^t \left\| \tilde{\mathbf{F}}_1 \right\|_2(t') \|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_2(t') dt' \quad (4.15) \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite le lemme de Gronwall comme au §4.1.1 pour obtenir une borne supérieure de  $\|\tilde{\mathbf{u}}_1\|$  dans le terme de droite. Le terme  $\|\tilde{\mathbf{u}}_1\|_{\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega_1))}$  n'est pas borné explicitement dans cette expression, mais en appliquant le lemme de Gronwall sur (4.15) on obtient une borne pour  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  dans  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega_1))$ . Cette estimation d'énergie nous permet de prouver l'existence et l'unicité de la solution de (4.13) dans  $\mathcal{L}^2(]0, T[; \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap \mathcal{L}^\infty(]0, T[; \mathcal{L}^2(\Omega_1))$ .

**Caractère bien posé de l'algorithme de Schwarz** Lors du processus itératif, la solution calculée sur  $\Omega_1$  sera donnée comme condition d'interface pour le sous-problème sur  $\Omega_2$ . Ceci nécessite de vérifier que la solution  $\mathbf{u}_1$  soit suffisamment régulière pour assurer l'existence et l'unicité de  $\mathbf{u}_2$  sur le sous-problème correspondant, et ainsi assurer le caractère bien posé de l'algorithme de Schwarz. Dans le cas de conditions d'interfaces de type Robin comme donné en (4.11), si  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{H}^{2,1}([0, T[; \Omega_1)$ , alors d'après le théorème de trace,  $\gamma \partial_z \mathbf{u}_1(0, t) + \mathbf{P} \mathbf{u}_1(0, t) \in \mathcal{H}^{1/4}([0, T[)$ . Pour montrer que  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{H}^{2,1}([0, T[; \Omega_1)$ , il suffit de montrer cette régularité sur  $\tilde{\mathbf{u}}_1 = (u \ v)^T$ . On multiplie (4.13a) par  $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T$ , ce qui fournit après intégration sur  $[h_1, 0]$  et application de la formule de Green :

$$\|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{2} \partial_t \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 - \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T \nu_1(0) \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) = \langle \tilde{\mathbf{F}}, \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1 \rangle \quad (4.16)$$

- Nous traitons d'abord le dernier terme du membre de gauche qui, en utilisant la condition en  $z = 0$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} (-\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T) \nu_1(0) \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) &= \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T \frac{\nu_1(0)}{\gamma} \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) \\ &= \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T \frac{\nu_1(0)}{\gamma \det \mathbf{Q}} \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) + \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T \frac{\nu_1(0)}{\gamma \det \mathbf{Q}} \begin{pmatrix} 0 & -q_3 \\ q_3 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) \end{aligned}$$

Nous traitons séparément les deux termes de cette dernière expression :

- Le premier terme peut être écrit comme

$$\frac{\nu_1(0)}{\gamma \det \mathbf{Q}} (q_2 \partial_t u(0, t) u(0, t) + q_1 \partial_t v(0, t) v(0, t)) = \frac{\nu_1(0)}{\gamma \det \mathbf{Q}} (q_2 \partial_t |u(0, t)|^2 + q_1 \partial_t |v(0, t)|^2)$$

Après intégration sur  $[0, t]$ , comme  $q_1, q_2 > 0$ , il ne restera que des termes positifs en  $|u(0, t)|^2$  et  $|v(0, t)|^2$  et des termes dépendant de la donnée initiale  $\mathbf{g}$ .

- On traite maintenant du deuxième terme :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)^T \frac{\nu_1(0)}{\gamma \det \mathbf{Q}} \begin{pmatrix} 0 & -q_3 \\ q_3 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1(0, t) = \frac{\nu_1(0) q_3}{\gamma \det \mathbf{Q}} (\partial_t v(0, t) u(0, t) - \partial_t u(0, t) v(0, t))$$

En appliquant successivement la formule de Green en espace puis en temps, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t u(0, t) v(0, t) &= \int_{\Omega_1} \partial_t \partial_z u(t) v(t) + \int_{\Omega_1} \partial_t u(t) \partial_z v(t) \\ &= - \int_{\Omega_1} \partial_z u(t) \partial_t v(t) + \partial_t \int_{\Omega_1} \partial_z u(t) v(t) + \int_{\Omega_1} \partial_t u(t) \partial_z v(t) \\ &= \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 + \partial_t \int_{\Omega_1} \partial_z u(t) v(t) \end{aligned}$$



avec  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  de sorte que  $\mathbf{B} = f\mathbf{C}$ . De même

$$\partial_t v(0, t)u(0, t) = - \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 + \partial_t \int_{\Omega_1} \partial_z v(t)u(t)$$

D'où

$$\partial_t v(0, t)u(0, t) - \partial_t u(0, t)v(0, t) = -2 \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 - \partial_t \int_{\Omega_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}_1$$

- Ainsi (4.16) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \frac{1}{2} \partial_t \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \frac{\nu_1(0)}{\gamma \det \mathbf{Q}} \partial_t (q_2 |u(0, t)|^2 + |q_1 |v(0, t)|^2) \\ &= \langle \tilde{\mathbf{F}}, \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1 \rangle - f \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}_1 + \frac{\nu_1(0)q_3}{\gamma \det \mathbf{Q}} \left( 2 \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 + \partial_t \int_{\Omega_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}_1 \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Après intégration en temps de (4.17) sur  $[0, t]$ , il faut majorer en norme chaque terme du membre de droite. Pour cela, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* 2ab \leq \alpha a^2 + b^2/\alpha$ , et on a en particulier :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}_1 \right| = \left| \int_{\Omega_1} (\partial_t u(z, t)v(z, t) - \partial_t v(z, t)u(z, t)) dz \right| \\ & \leq \|\partial_t u(t)\|_2 \|v(t)\|_2 + \|\partial_t v(t)\|_2 \|u(t)\|_2 \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \|\partial_t u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha} \|v(t)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\partial_t v(t)\|_2^2 + \frac{1}{2\alpha} \|u(t)\|_2^2 \\ & \leq \alpha \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

De la même manière on obtient :

$$\left| \int_{\Omega_1} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1 \right| \leq \alpha \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 \quad (4.19a)$$

$$\left| \int_{\Omega_1} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}_1 \right| \leq \alpha \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 \quad (4.19b)$$

Aussi après intégration en temps du dernier terme de (4.17), on fait apparaître un terme dépendant de  $\mathbf{g}$  qu'on majore :

$$\left| \int_{\Omega_1} \partial_z \tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{g}} \right| \leq \frac{1}{2} (\|\tilde{\mathbf{g}}\|_2^2 + \|\partial_z \tilde{\mathbf{g}}\|_2^2) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_1)}^2 \quad (4.20)$$

- En appliquant (4.18), (4.19) et (4.20) sur (4.17) intégré sur  $[0, t]$  on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \frac{\min(\sqrt{\nu_1})}{2} \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \frac{\nu_1(0) \min(q_1, q_2)}{\gamma \det \mathbf{Q}} |\tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)|^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \|\sqrt{\nu_1} \partial_z \tilde{\mathbf{g}}\|_2^2 + \frac{\nu_1(0) \max(q_1, q_2)}{\gamma \det \mathbf{Q}} |\tilde{\mathbf{g}}(0, t)|^2 + \frac{1}{\alpha} \|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}^2([0, T]; \mathcal{L}^2(\Omega_1))} + \alpha \int_0^t \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 \\
& + |f| \left( \alpha \int_0^t \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 \right) + \left| \frac{\nu_1(0) q_3}{2\gamma \det \mathbf{Q}} \right| \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_1)}^2 \\
& + \left| \frac{\nu_1(0) q_3}{\gamma \det \mathbf{Q}} \right| \left( \alpha \int_0^t \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \alpha \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{1}{\alpha} \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

soit

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha x_1) \int_0^t \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \left( \frac{\min(\sqrt{\nu_1})}{2} - \alpha x_2 \right) \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1\|_2^2 + \frac{\nu_1(0) \min(q_1, q_2)}{\gamma \det \mathbf{Q}} |\tilde{\mathbf{u}}_1(0, t)|^2 \\
\leq \max \left( \frac{\max(\sqrt{\nu_1})}{2}, x_3 \right) \|\partial_z \tilde{\mathbf{g}}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}^2([0, T]; \mathcal{L}^2(\Omega_1))} + \frac{x_2}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_1)}^2 \\
+ \frac{|f|}{\alpha} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{x_2}{\alpha} \int_0^t \|\partial_z \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2 + \frac{x_2}{\alpha} \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|_2^2
\end{aligned}$$

tel que  $x_2 = \left| \frac{\nu_1(0) q_3}{\gamma \det \mathbf{Q}} \right|$ ,  $x_1 = x_2 + |f| + 1$ ,  $x_3 = \left| \frac{\nu_1(0) \max(q_1, q_2)}{\gamma \det \mathbf{Q}} \right|$ . Comme  $\alpha > 0$  peut être choisi arbitrairement, nous le choisissons de sorte que  $(1 - \alpha x_1) > 0$  et  $(\min(\sqrt{\nu_1})/2 - \alpha x_2)$ , donc tous les membres de gauche sont bien positifs. Les termes restants dans le membre de droite dépendant de  $\tilde{\mathbf{u}}_1$  sont tous majorés par les normes de  $\tilde{\mathbf{F}}$  et  $\tilde{\mathbf{g}}$  dans (4.15). Nous obtenons donc une majoration dans  $\mathcal{H}^1([0, T]; \mathcal{L}^2(\Omega_1))$  pour  $\tilde{\mathbf{u}}_1$ .

En revenant à l'équation de base (4.13a), on obtient la régularité  $\partial_z^2 \tilde{\mathbf{u}}_1 \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathcal{L}^2(\Omega_1))$ .  $\square$

### 4.1.3 Traitement de l'effet de Coriolis dans l'étude de la convergence

Nous avons vu au chapitre 2 que le calcul du facteur de convergence utilise la résolution d'une équation différentielle dans le domaine de Fourier. Or dans notre modèle les deux composantes de la vitesse  $\mathbf{u}_j$  sont interdépendantes par le terme de Coriolis. Il est donc nécessaire de procéder à un changement de variable pour résoudre l'équation différentielle et en étudier la convergence.

**Changement de variable** L'équation différentielle dans les deux domaines s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{u}_j + \mathbf{B} \mathbf{u}_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \mathbf{u}_j) = \mathbf{F}_j \quad \text{avec } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Pour découpler ces deux équations différentielles, nous appliquons un changement de variable permettant de diagonaliser la matrice  $\mathbf{B}$  :  $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$  où

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} if & 0 \\ 0 & -if \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

On multiplie donc l'équation (4.22) à gauche par  $\mathbf{M}^{-1}$ , ce qui donne une équation différentielle sur une nouvelle variable  $\Phi$  :

$$\partial_t \Phi_j + \mathbf{D}\Phi_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \Phi_j) = \mathbf{F}_j^\Phi \quad \text{avec} \quad \Phi_j = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} \varphi_j(z, t) \\ \psi_j(z, t) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Les deux composantes vérifient les équations différentielles indépendantes

$$\partial_t \varphi_j + if \varphi_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \varphi_j) = F_j^\varphi \quad (4.24a)$$

$$\partial_t \psi_j - if \psi_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \psi_j) = F_j^\psi \quad (4.24b)$$

On peut donc écrire un système d'équations indépendantes équivalent à notre problème couplé (4.8) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \Phi_j + \mathbf{D}\Phi_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \Phi_j) = \mathbf{F}_j^\Phi & (z, t) \in (0, h_j) \times ]0, T] \\ \Phi_j(z, 0) = \Phi_{0,j}(z) & z \in [0, h_j] \\ \Phi_j(h_j, t) = \Phi_{g,j}(t) & t \in [0, T] \\ \Phi_1(0, t) = \Phi_2(0, t) & t \in [0, T] \\ \nu_1(0) \partial_z \Phi_1(0, t) = \nu_2(0) \partial_z \Phi_2(0, t) & t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Ainsi, l'étude de la convergence du problème (4.8) sur  $\mathbf{u}$  nécessite d'étudier la convergence sur les variables  $\varphi$  et  $\psi$ . Notons qu'ici, de par la nature du changement de variable, les solutions du problème couplé vérifient  $\varphi = \bar{\psi}$ .

**Traitement des conditions d'interface** On écrit les conditions d'interface de manière générale sous forme de conditions de Robin, le cas Dirichlet-Neumann se déduisant en prenant  $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ . Les matrices  $\mathbf{P}^\Phi$  et  $\mathbf{Q}^\Phi$  subissent alors le changement de variable :

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \partial_z \mathbf{u}_j = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \partial_z \mathbf{u}_j = \mathbf{Q}^\Phi \partial_z \Phi_j \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{u}_j = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_j = \mathbf{P}^\Phi \Phi_j \quad (4.26b)$$

Dans un souci de simplicité lors du calcul du facteur de convergence, nous considérons des matrices  $\mathbf{P}^\Phi$  et  $\mathbf{Q}^\Phi$  sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}^\Phi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \bar{p} \end{pmatrix} & p \in \mathbb{C} \\ \mathbf{Q}^\Phi = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & \bar{q} \end{pmatrix} & q \in \mathbb{C} \end{array} \quad \iff \quad \begin{array}{ll} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(p) & \operatorname{Im}(p) \\ -\operatorname{Im}(p) & \operatorname{Re}(p) \end{pmatrix} & \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(q) & \operatorname{Im}(q) \\ -\operatorname{Im}(q) & \operatorname{Re}(q) \end{pmatrix} & \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \end{array} \quad (4.27)$$

Ce choix spécifique de matrice se justifie aussi car il conserve la propriété  $\overline{\psi}_j^n = \varphi_j^n$  pour chaque sous-problème. De même, par les propriétés de la transformée de Fourier, on a :

$$\rho_\psi^{RR}(p, q, \omega) = \rho_\varphi^{RR}(\overline{p}, \overline{q}, -\omega) \quad (4.28)$$

Comme les fréquences  $\omega$  sont considérées dans un intervalle de type  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$  (voir §3.1.2), étudier la convergence en  $\varphi$  revient à étudier la convergence en  $\psi$ .

**Lien entre les convergences sur  $\varphi$  et sur  $\mathbf{u}$**  En pratique nous souhaitons étudier le comportement des composantes de  $\mathbf{u}$ . Dans l'espace temporel, le lien entre  $\mathbf{u}$  et  $\Phi$  est clairement déterminé par le changement de variable :  $u = \text{Re}(\varphi) = \text{Re}(\psi)$  et  $v = \text{Im}(\varphi) = -\text{Im}(\psi)$ . En revanche il est plus difficile de lier leurs transformées de Fourier (par exemple  $\widehat{u} \neq \text{Re}(\widehat{\varphi})$ ). On ne peut donc pas directement lier  $\widehat{u}(\omega)$  au facteur de convergence calculé en  $\varphi$ . Cependant,  $\mathbf{M}$  étant une matrice unitaire (c.a.d  $\mathbf{M}^{-1} = \overline{\mathbf{M}}^T$ ), on a l'égalité entre la norme de l'erreur sur  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}_j^n(z, t)$ , et la norme de l'erreur sur  $\phi$ ,  $\mathbf{e}_j^n(z, t)$  :

$$\|\mathbf{E}_j^n(z, \cdot)\|_2^2 = (\overline{\mathbf{E}}_j^n(z, \cdot))^T \overline{\mathbf{M}}^T \mathbf{M} \mathbf{E}_j^n(z, \cdot) = (\overline{\mathbf{e}}_j^n(z, \cdot))^T \mathbf{e}_j^n(z, \cdot) = \|\mathbf{e}_j^n(z, \cdot)\|_2^2 \quad (4.29)$$

Ainsi la convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur physique  $\mathbf{E}_j(z, t)$  est la même que la convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  de  $\mathbf{e}_j$ . Dans l'hypothèse où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont données par (4.27), on a l'égalité (4.28) et on peut montrer que :

$$\left| \widehat{\mathbf{e}}_{\phi, j}^n(z, \omega) \right| = \rho_\varphi(p, q, \omega) \left| \widehat{\mathbf{e}}_{\phi, j}^{n-1}(z, \omega) \right| \quad (4.30)$$

Ainsi le facteur de convergence calculé sur la variable  $\varphi$  borne aussi le facteur de convergence en norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur physique :

$$\min_{\omega \in I_\omega} \rho_\varphi(z, \omega) \leq \frac{\|\mathbf{E}_j^n(z, \cdot)\|_2}{\|\mathbf{E}_j^{n-1}(z, \cdot)\|_2} \leq \max_{\omega \in I_\omega} \rho_\varphi(z, \omega) \quad (4.31)$$

Dans la suite, nous étudierons la convergence de l'algorithme de Schwarz sur la variable  $\varphi$ , et pour simplifier l'écriture l'indice  $\varphi$  sera omis lorsque l'on parlera du facteur de convergence. On écrit les sous-problèmes sous la forme générale avec des coefficients de Robin  $(p, q) \in \mathbb{C}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \varphi_1^n(z, t) + if \varphi_1^n(z, t) - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z \varphi_1^n(z, t)) & = F_1(z, t) & \text{sur } ]h_1, 0[ \times ]0, T[ \\ \varphi_1^n(z, 0) & = g_1(z) & \text{sur } ]h_1, 0[ \\ \varphi_1^n(h_1, t) & = G_1(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \gamma p \partial_z \varphi_1^n(0, t) + \varphi_1^n(0, t) & = p \partial_z \varphi_2^{n-1}(0, t) + \varphi_2^{n-1}(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.32a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \varphi_2^n(z, t) + if \varphi_2^n(z, t) - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z \varphi_2^n(z, t)) & = F_2(z, t) & \text{sur } ]0, h_2[ \times ]0, T[ \\ \varphi_2^n(z, 0) & = g_2(z) & \text{sur } ]0, h_2[ \\ \varphi_2^n(h_2, t) & = G_2(t) & \text{sur } ]0, T[ \\ \partial_z \varphi_2^n(0, t) + q \varphi_2^n(0, t) & = \gamma \partial_z \varphi_1^n(0, t) + q \varphi_1^n(0, t) & \text{sur } ]0, T[ \end{array} \right. \quad (4.32b)$$

Conformément aux résultats du paragraphe 4.1.2, l'algorithme de Schwarz appliqué au problème couplé (4.32a)-(4.32b) est bien posé si  $(p, q) \in \mathcal{P}$  avec

$$\mathcal{P} = \{(p, q) \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(p) \leq 0 \text{ et } \operatorname{Re}(q) \geq 0\} \quad (4.33)$$

## 4.2 Convergence de l'algorithme de Schwarz : influence des spécificités du couplage océan-atmosphère

Dans cette section nous calculons explicitement le facteur de convergence de l'algorithme de Schwarz pour le couplage de couches d'Ekman, et nous étudions plus en détail l'effet des différentes spécificités de ce couplage. Les détails de ces résultats sont présentés au §4.2.2 sous la forme d'un article soumis dans la revue *Numerical Algorithms*. Le paragraphe 4.2.1 présente un résumé succinct de cet article, alors que le paragraphe 4.2.3 fournit des compléments et détails qui n'ont pas été donnés dans l'article.

**Forme de la viscosité** Dans les différents modèles couplés océan-atmosphère, la viscosité varie avec  $z$ . Elle est généralement considérée comme affine au voisinage immédiat de l'interface, puis variable suivant les différents profils expliqués en section 1.3.2, et enfin constante sur les domaines dits "libres". Pour prendre en compte ces différentes possibilités, on considérera trois types de viscosité : constante, affine ou parabolique. Dans cette section, nous considérons que le profil des viscosités est le même dans les deux domaines et qu'on a un seul profil par domaine. Les résultats de cette section fournissent les outils nécessaires pour l'étude de viscosités "hybrides", et nous les appliquons à la viscosité typique du cadre océan-atmosphère en section 4.3.

### 4.2.1 Principaux effets des spécificités du couplage océan-atmosphère sur la convergence de l'algorithme

Nous avons vu au paragraphe 4.1.3 que l'étude de l'algorithme de Schwarz sur le problème couplé de couches d'Ekman (4.8) pouvait se ramener à l'étude du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \varphi_j) = F_j & (z, t) \in (0, h_j) \times ]0, T[ \\ \varphi_j(z, 0) = g_j(z) & z \in [0, h_j] \\ \varphi_j(h_j, t) = G_j(t) & t \in [0, T[ \\ \varphi_1(0, t) = \varphi_2(0, t) & t \in [0, T[ \\ \gamma \partial_z \varphi_1(0, t) = \partial_z \varphi_2(0, t) & t \in [0, T[ \end{array} \right. \quad (4.34)$$

L'article THERY et al., 2020 présenté dans cette section s'intéresse principalement à l'impact de l'effet de Coriolis et de la forme de la viscosité sur la convergence de l'algorithme. On donne ici un résumé de ces résultats.

- Nous introduisons les fonctions de base des solutions de l'équation différentielle de type

$$i(f + \omega)u(z) + \partial_z(\nu(z)\partial_z u(z)) = 0 \quad f, \omega \in \mathbb{R}, \nu_j(z) > 0$$

qui sont nécessaires pour calculer le facteur de convergence  $\rho(p, q, \omega)$ , comme cela a été décrit en (2.44). Comme indiqué précédemment, nous avons supposé dans cet article que  $\nu(z)$  pouvait être constant, affine ou parabolique. Dans le cas parabolique, on pose  $\nu_j(0) = \nu_j(h_j)$ , ce qui se rapproche des profils de viscosité qu'on retrouve dans les modèles d'océan-atmosphère.

- Nous reprenons les notations apportées en (2.45) où le facteur de convergence est écrit comme  $\rho(\omega)$  en fonction de  $\mathcal{S}_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ .  $\mathcal{S}_j$  ne dépend que de la viscosité et du domaine  $\Omega_j$ . Lorsque la viscosité est constante,  $\mathcal{S}_j$  s'écrit avec des fonctions de type exponentiel ; si la viscosité est affine,  $\mathcal{S}_j$  s'écrit avec des fonctions de Bessel ; et si la viscosité est parabolique,  $\mathcal{S}_j$  s'écrit avec des polynômes de Legendre. On en déduit que la complexité de l'écriture théorique du facteur de convergence (et donc de l'étude de son comportement) augmente avec le degré du polynôme représentant le profil de viscosité.
- On étudie les différents cas asymptotiques, afin de montrer la consistance des  $\mathcal{S}_j$ , et donc du facteur de convergence, avec d'autres résultats ne prenant pas en compte les spécificités : lorsque  $f$  tend vers 0, on retrouve le facteur de convergence correspondant au cas sans effet de Coriolis ; lorsque  $\partial_z \nu(0)$  tend vers 0 pour les viscosités affine et parabolique, on retrouve les facteurs de convergence du cas à viscosité constante.
- Nous montrons aussi l'effet de ces spécificités :

- Le terme de Coriolis a pour effet principal de translater le facteur de convergence de la valeur  $f$  :

$$\rho_{f \neq 0}(p, q, \omega) = \rho_{f=0}(p, q, f + \omega) \text{ avec } \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$$

- La taille des domaines, et en particulier le rapport entre elles, influence le facteur de convergence (voir aussi complément §4.2.3).
- Le facteur de convergence dépend du profil entier de la viscosité, et pas seulement de sa valeur à l'interface. Il arrive que la viscosité soit réduite à sa valeur d'interface pour étudier la convergence : on montre ici qu'il existe des cas où cette approximation peut mener à conclure que l'algorithme est convergent (resp. divergent) alors qu'il est en fait divergent (resp. convergent).
- Enfin, nous établissons des conditions suffisantes sur les coefficients  $(p, q)$  pour que le facteur de convergence soit plus petit que 1 (et donc que l'algorithme soit convergent). Ces conditions suivent le même schéma pour les trois profils de viscosité. Pour des viscosités constantes, on peut prouver analytiquement ces résultats. On montre aussi que négliger les variations de la viscosité lors de l'optimisation de  $(p, q)$  peut entraîner de mauvais résultats sur la convergence.

**4.2.2 Analysis of Schwarz waveform relaxation for the coupled Ekman boundary layer problem with continuously variable coefficients**

## **Analysis of Schwarz waveform relaxation for the coupled Ekman boundary layer problem with continuously variable coefficients**

**Sophie They** · **Charles Pelletier** · **Florian Lemarié** · **Eric Blayo**

the date of receipt and acceptance should be inserted later

**Abstract** In this paper we present a global-in-time non-overlapping Schwarz method applied to the Ekman boundary layer problem. Such a coupled problem is representative of large-scale atmospheric and oceanic flows in the vicinity of the air-sea interface. Schwarz waveform relaxation (SWR) algorithms provide attractive methods for ensuring a "tight coupling" between the ocean and the atmosphere. However the convergence study of such algorithms in this context raises a number of challenges. Numerous convergence studies of Schwarz methods have been carried out in idealized settings, but the underlying assumptions to make these studies tractable may prohibit them to be directly extended to the complexity of climate models. We illustrate this aspect on the coupled Ekman problem, which includes several essential

---

S. They  
Univ. Grenoble-Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK, Grenoble, France  
Tel.: +33 4 76 63 12 63  
Fax: +33 4 76 61 52 52  
E-mail: sophie.thery@univ-grenoble-alpes.fr

C. Pelletier  
Earth and Life Institute, UCLouvain, Louvain-la-Neuve, Belgium  
Tel: +32 10 47 94 36  
Fax: +32 10 47 94 36  
E-mail: charles.pelletier@uclouvain.be

F. Lemarié  
Univ. Grenoble-Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK, Grenoble, France  
Tel.: +33 4 57 42 17 57  
Fax: +33 4 76 61 52 52  
E-mail: florian.lemarie@inria.fr

E. Blayo  
Univ. Grenoble-Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK, Grenoble, France  
Tel.: +33 4 57 42 17 11  
Fax: +33 4 76 61 52 52  
E-mail: eric.blayo@univ-grenoble-alpes.fr



features inherent to climate modeling while being simple enough for analytical results to be derived. We investigate its well-posedness and derive an appropriate SWR algorithm. Sufficient conditions for ensuring its convergence for different viscosity profiles are then established. Finally, we illustrate the relevance of our theoretical analysis with numerical results and suggest ways to improve the computational cost of the coupling. Our study emphasizes the fact that the convergence properties can be highly sensitive to some model characteristics such as the geometry of the problem and the use of continuously variable viscosity coefficients.

**Keywords** Schwarz waveform relaxation, variable coefficients, multiphysics coupling, coupled Ekman problem, numerical climate modeling.

## 1 Introduction

### 1.1 Context and motivations

Owing to advances in computer resources and simulation tools, weather prediction systems now routinely include coupling mechanisms between several Earth system compartments; e.g. atmosphere, waves, ocean, sea-ice [5, 37]. For such applications, the coupling methods used between individual components are usually ad-hoc algorithms raising synchrony issues [2, 23]. Following [20], such methods are referred to as *loose coupling methods*, since it can be shown that the coupling is relaxed to one single iteration of what should be an iterative process. Due to the overwhelming complexity of the coupling mechanisms in the context of weather and climate, the consequences of inaccuracies in coupling algorithms on the stability and regularity of solutions are hard to untangle for realistic applications, unless a strongly coupled solution can be used as a reference. Schwarz waveform relaxation (SWR) algorithms are attractive iterative coupling methods for geophysical applications. Indeed, they are very weakly intrusive, can be enhanced by an appropriate choice of transmission conditions, are naturally able to handle nonconformities in time and space, and can be combined with time parallelization techniques [4, 11, 15]. Several mathematical studies have investigated applying SWR algorithms to increase the efficiency of domain decomposition methods for increasingly complex problems derived from Earth sciences, e.g. for the so-called shallow-water equations [31, 36], or for the ocean primitive equations [1]. At a more practical level, the dynamical core of at least one Earth system numerical model relies on a SWR algorithm for its domain decomposition method [35], and empirical studies have been undertaken for including Schwarz methods in ocean - atmosphere couplers [30]. Generally speaking, the theoretical convergence analysis of SWR algorithms is restricted to relatively simple linear model problems, often approximating space-varying quantities as constant coefficients, assuming that scalar variables are independent from each other, so that all the conditions to apply Fourier and Laplace transformations are met. As a matter of fact, coupled problems arising in Earth system modeling often exhibit sharp turbulent boundary layers near the interfaces whose effect is parameterized using a spatially variable viscosity coefficient [32, 33]. The objective of this paper is to study

the SWR algorithm for a model problem representative of the coupling between the turbulent oceanic and atmospheric surface boundary layers.

## 1.2 The coupled Ekman problem

We specifically study the so-called coupled Ekman layer problem [9], which has already been investigated by several physicists and mathematicians [e.g. 6, 19, 25, 39] since it is representative of large-scale atmospheric and oceanic flows in the vicinity of the air-sea interface. So far, this type of coupled problems has been rarely studied with a focus on the numerical techniques to solve it, as proposed in the present work. The atmospheric and oceanic flows at large scale are generally represented by the so-called primitive equations, i.e. Navier-Stokes equations written in a rotated frame under the hydrostatic assumption. Assuming that the fluid is vertically homogeneous (i.e. time and space independent density) and that horizontal velocity gradients are small compared to vertical ones, the equation for the horizontal velocity  $\mathbf{U} = (u, v)$  reduces to the Reynolds averaged primitive equations:

$$\partial_t \mathbf{U} + f \mathbf{k} \times \mathbf{U} = -\partial_z \langle \mathbf{U}' w' \rangle - \rho^{-1} \nabla p + \mathbf{F}_U, \quad (1)$$

where  $\mathbf{k}$  is a vertical unit vector,  $\langle \mathbf{U}' w' \rangle$  is the vertical component of the Reynolds stress tensor,  $\rho$  is the density,  $p$  is the corresponding hydrostatic pressure, and  $\mathbf{F}_U$  contains any other forcing terms.  $f$  corresponds to the local Coriolis frequency associated with the Earth's rotation, whose values typically range from  $f = 0 \text{ s}^{-1}$  at the Equator to  $f \approx \pm 1.45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  at the poles. For the  $\langle \mathbf{U}' w' \rangle$  term, a common closure assumption (known as the Boussinesq hypothesis) is to consider that turbulence acts as a mixing term, thus leading to  $\langle \mathbf{U}' w' \rangle = -\nu(z) \partial_z \mathbf{U}$  where  $\nu$  is a so-called turbulent viscosity, much larger than the each fluid's molecular viscosities, and which varies with  $z$  [33]. Introducing the stationary geostrophic velocity  $\mathbf{U}_g$  defined as  $-f \mathbf{k} \times \mathbf{U}_g = \rho^{-1} \nabla p$ , (1) becomes

$$\partial_t \mathbf{U} + f \mathbf{k} \times \mathbf{U} - \partial_z (\nu(z) \partial_z \mathbf{U}) = \mathbf{F}_U + f \mathbf{k} \times \mathbf{U}_g. \quad (2)$$

Assuming that  $\mathbf{U}_g$  is known, the problem is one-dimensional and represents the balance between the Coriolis term and the stress due to small-scale turbulent motion, under the assumption that the large-scale dynamics are in geostrophic balance. This problem typically involves boundary layers (in this context, also known as Ekman layers) which have a typical depth of tens of meters in the ocean and hundreds of meters in the atmosphere.

In the following, the physical domain of interest is  $\Omega = ]h_1, h_2[$  where  $h_1 < 0 < h_2$ , and  $\{z = 0\}$  is the interface between two non-overlapping subdomains. The index  $j \in \{1, 2\}$  is used to distinguish subdomains, and for sake of simplicity the interval  $(a, b)$  stands for  $]a, b[$  if  $a < b$  and for  $]b, a[$  if  $a > b$ . We note  $\mathbf{U}_j = (u_j, v_j)$  the Ekman components of the velocity in subdomain  $\Omega_j = (0, h_j)$ ,  $\nu_j(z) > 0$  the turbulent viscosity, and the r.h.s. in (2) is grouped as a single forcing term denoted  $\mathbf{F}_j$ .

On the time interval  $]0, T]$ , the coupled Ekman boundary layer problem of interest is:

$$\partial_t \mathbf{U}_j + f \mathbf{k} \times \mathbf{U}_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \mathbf{U}_j) = \mathbf{F}_j, \quad (z, t) \in \Omega_j \times ]0, T], j \in \{1, 2\}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{U}_j(z, 0) = \mathbf{U}_{j,0}(z), \quad z \in \Omega_j, j \in \{1, 2\}, \quad (3b)$$

$$\mathbf{U}_j(h_j, t) = \mathbf{U}_{j,g}(t), \quad t \in [0, T], j \in \{1, 2\}, \quad (3c)$$

$$\nu_1(0^-) \partial_z \mathbf{U}_1(0^-, t) = \nu_2(0^+) \partial_z \mathbf{U}_2(0^+, t), \quad t \in [0, T], \quad (3d)$$

$$\mathbf{U}_2(0^+, t) = \mathbf{U}_1(0^-, t), \quad t \in [0, T], \quad (3e)$$

where  $\mathbf{U}_{j,0}(z)$  is the initial condition, and  $\mathbf{U}_{j,g}(t)$  is the geostrophic velocity component imposed at the external boundaries of the spatial domain.

### 1.3 Outline of the paper

When discretizing (3a) in numerical models, the turbulent viscosity is systematically treated implicitly in time due to the small vertical grid spacing (relative to the horizontal one) typically used in most configurations [24]. This implicit treatment yields significant challenges in solving the coupled problem at a numerical level. A possibility is to consider iterative SWR methods to solve (3), as motivated in Sec. 1.1. The convergence properties of Schwarz algorithms with continuously variable coefficients in each subdomain have already been studied using the technique of separation of variables to decouple the space and time variables (or equivalently the two spatial variables for steady-state problems) directly in the physical space. However, previously obtained results are either restricted to cases where the coefficients vary in the direction parallel to the interface [12], or difficult to interpret because the resulting convergence factors are given by a numerical series of abstract eigenmodes and eigenvalues [22]. The seminal work of [28] showed, for the one-dimensional steady-state model problem  $-\partial_z(\nu(z)\partial_z u) = F$ , that the absorbing boundary conditions depend on the full diffusion profile and not only on its local interfacial values. In the same spirit, the aim of the present paper is to further study the effect of continuously variable coefficients on the convergence properties of SWR algorithms. We study three specific expressions of the viscosity  $\nu_j(z)$ , which have already been considered in the Ekman problem literature:

- (i) the laminar case of [9] with constant viscosity ( $\nu_j(z) = \nu_j = \text{cst}$ );
- (ii) as in [25, 29], a more realistic case is studied by considering turbulent viscosities linearly increasing with depth (resp. with height);
- (iii) as in [19, 33], nearly parabolic shape functions for  $\nu_j(z)$  are introduced, consistently with what is used in climate simulations.

These studies addressed exclusively physical issues, and none of them tackled the numerical resolution of the associated coupled problem.

The paper is organized as follows. The well-posedness of the coupled Ekman problem (3) is studied in Sec. 2, leading to a SWR algorithm being formulated. Its convergence rates for various interface conditions and viscosity profiles are determined in Sec. 3. Their asymptotic behaviour w.r.t. the parameters of the problem are investigated in Sec. 4. Finally, numerical results illustrating the relevance of our theoretical analysis are shown in Sec. 5.

## 2 Formulation of the global-in-time Schwarz method and well-posedness

### 2.1 Well-posedness of the coupled problem

The coupled model (3) corresponds to a global parabolic problem with a discontinuous diffusion coefficient at the interface:

$$\partial_t \mathbf{U} + \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U} - \partial_z (\nu(z) \partial_z \mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad (z, t) \in ]h_1, h_2[ \times ]0, T], \quad (4a)$$

$$\mathbf{U}(z, 0) = \mathbf{U}_0(z), \quad z \in [h_1, h_2], \quad (4b)$$

$$\mathbf{U}(h_j, t) = \mathbf{U}_g(t), \quad t \in [0, T], \quad j \in 1, 2. \quad (4c)$$

In [26] (Chapter 4 and example 4.7.1.), it is shown that if  $\nu(z) > 0$  is bounded in  $[h_1, h_2]$ ,  $\mathbf{U}_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{U}_g \in \mathcal{H}^{3/4}([0, T])$  and  $\mathbf{F} \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ , then (4) has a unique weak solution in  $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ . This proof is based on an energy estimate.

The corresponding natural transmission conditions for (4) at  $z = 0$  read:

$$\nu_1(0^-) \partial_z \mathbf{U}_1(0^-, t) = \nu_2(0^+) \partial_z \mathbf{U}_2(0^+, t), \quad t \in [0, T], \quad (5a)$$

$$\mathbf{U}_2(0^+, t) = \mathbf{U}_1(0^-, t), \quad t \in [0, T], \quad (5b)$$

where  $\nu_j = \nu|_{\Omega_j}$ . These are the interface conditions (3d) and (3e) of the original problem. (4) is thus equivalent to (3), hence it is well-posed in  $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ .

### 2.2 Change of variables

In each medium (ocean and atmosphere), the evolution of the two velocity components,  $u_j$  and  $v_j$ , are coupled by the Coriolis term. In a matrix form, the systems (4a) for  $j \in \{1, 2\}$  can be rewritten as:

$$\partial_t \mathbf{U}_j + \mathbf{A} \mathbf{U}_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \mathbf{U}_j) = \mathbf{F}_j, \quad \text{with } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

In order to decouple the equations on  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ , we diagonalize  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$ , where:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} if & 0 \\ 0 & -if \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Inserting this diagonalization and multiplying on the left by  $\mathbf{P}^{-1}$ , (6) becomes:

$$\partial_t \boldsymbol{\Phi}_j + \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi}_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \boldsymbol{\Phi}_j) = \mathbf{F}_j^\Phi, \quad \text{with } \boldsymbol{\Phi}_j = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{U}_j = \begin{pmatrix} \varphi_j(z, t) \\ \bar{\varphi}_j(z, t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

which is equivalent to the following set of two independent scalar equations:

$$\partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \varphi_j) = F_j^\varphi, \quad (8a)$$

$$\partial_t \bar{\varphi}_j - i f \bar{\varphi}_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \bar{\varphi}_j) = F_j^{\bar{\varphi}} = \overline{F_j^\varphi}. \quad (8b)$$

Rewritten with these new variables, the coupled Ekman layer problem (3) now reads:

$$\partial_t \boldsymbol{\Phi}_j + \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi}_j - \partial_z (\nu_j(z) \partial_z \boldsymbol{\Phi}_j) = \mathbf{F}_j^\Phi, \quad (z, t) \in \Omega_j \times ]0, T], j \in \{1, 2\}, \quad (9a)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j(z, 0) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{0}, j}(z), \quad z \in \Omega_j, j \in \{1, 2\}, \quad (9b)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j(h_j, t) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{g}, j}(t), \quad t \in [0, T], j \in \{1, 2\}, \quad (9c)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1(0^-, t) = \boldsymbol{\Phi}_2(0^+, t), \quad t \in [0, T], \quad (9d)$$

$$\nu_1(0^-) \partial_z \boldsymbol{\Phi}_1(0^-, t) = \nu_2(0^+) \partial_z \boldsymbol{\Phi}_2(0^+, t), \quad t \in [0, T]. \quad (9e)$$

Note that since (3) is well-posed, so is (9).

### 2.3 Schwarz Waveform Relaxation algorithms for the coupled Ekman problem

We consider that both submodels are independent from each other, thus prohibiting solving (9) with a single-model monolithic method. Let us introduce a SWR algorithm for solving the first component of (9), related to  $\varphi$ . The time interval  $[0, T]$  is partitioned into  $N$  windows  $(\mathcal{T}_n)_{1 \leq n \leq N}$ , the iterative algorithm being applied successively on each window. For a given window  $\mathcal{T}_n$ , two sequences of subsolutions  $(\varphi_j^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  ( $j \in \{1, 2\}$ ) are defined by:

$$\partial_t \varphi_j^k + i f \varphi_j^k - \partial_z (\nu_j \partial_z \varphi_j^k) = F_j^\varphi, \quad (z, t) \in \Omega_j \times \mathcal{T}_n, j \in \{1, 2\}, \quad (10a)$$

$$\varphi_j^k(z, 0_{\mathcal{T}_n}) = \varphi_j^{0, \mathcal{T}_n}(z), \quad z \in \Omega_j, \quad (10b)$$

$$\varphi_j^k(h_j, t) = \varphi_{g, j}(t), \quad t \in \mathcal{T}_n, \quad (10c)$$

$$\mathcal{B}_{1,1} \varphi_1^k(0^-, t) = \mathcal{B}_{1,2} \varphi_2^k(0^+, t), \quad t \in \mathcal{T}_n, \quad (10d)$$

$$\mathcal{B}_{2,2} \varphi_2^k(0^+, t) = \mathcal{B}_{2,1} \varphi_1^{k-1}(0^-, t), \quad t \in \mathcal{T}_n. \quad (10e)$$

In (10b),  $0_{\mathcal{T}_n}$  is the initial time in  $\mathcal{T}_n$ , and  $\varphi_j^{0, \mathcal{T}_n}$  are either given by (9b) (if  $n = 1$ ), or by the final state of the solution on  $\mathcal{T}_{n-1}$  (if  $n \geq 2$ ). In the interface conditions (10d) and (10e),  $\mathcal{B}_{j,l}$  are four interface operators to be chosen. The simplest choice would be  $\mathcal{B}_{1,1} = \mathcal{B}_{1,2} = \text{Id}$ ,  $\mathcal{B}_{2,1} = \nu_1(0^-)\partial_z$  and  $\mathcal{B}_{2,2} = \nu_2(0^+)\partial_z$ , which, provided that the SWR algorithm converges, ensures that the coupling constraints (9d)-(9e) will be satisfied by the solution  $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ . However, as discussed in Sec. 3, other choices are possible to accelerate the convergence of (10) toward the solution of (9). Here we study the ‘‘multiplicative’’ Schwarz method: first, the problem on  $\varphi_2^k$  is solved using  $\varphi_1^{k-1}$ ; then, the problem on  $\varphi_1^k$  can be solved. Note that the well-posedness of the coupled problem, as well as SWR algorithm, applied to a similar problem with constant viscosity in each subdomain (but discontinuous at the interface) has been studied in [14].

## 2.4 Well-posedness of the SWR algorithm

The coupling algorithm (10) is made of successive resolutions restricted to one subdomain (either  $(h_1, 0)$  or  $(0, h_2)$ ). To ensure the well-posedness of the algorithm, it is first necessary to ensure the well-posedness of the subproblems, i.e. the existence and uniqueness of both subsolutions, and a sufficient regularity for these solutions to be applied as a boundary condition for the other subproblem. This leads to study the generic problem:

$$\partial_t \varphi(z, t) + i f \varphi(z, t) - \partial_z (\nu(z) \partial_z \varphi(z, t)) = F^\varphi(z, t), \quad (z, t) \in (0, h) \times ]0, T], \quad (11a)$$

$$\varphi(z, 0) = \varphi_0(z), \quad z \in (0, h), \quad (11b)$$

$$\varphi(h, t) = \varphi_g(t), \quad t \in [0, T], \quad (11c)$$

$$\mathcal{B}\varphi(0, t) = G(t), \quad t \in [0, T], \quad (11d)$$

where  $\mathcal{B}$  is a boundary operator. In the same way as in Sec. 2.1, the Coriolis effect has no impact on the well-posedness. Thus, according to [27], if the following conditions are satisfied:

- (i)  $\nu$  is bounded and strictly positive on  $(0, h)$ ;
- (ii)  $F^\varphi \in \mathcal{L}^2(0, T, \mathcal{L}^2(0, h))$ ;
- (iii)  $\varphi_g(t=0) = \varphi_0(z=h)$  and  $\varphi_0(t=0) = G(z=0, t=0)$ ;
- (iv)  $\varphi_0 \in \mathcal{H}^1(0, h)$ ;
- (v)  $\varphi_g \in \mathcal{H}^{3/4}(0, T)$ ;
- (vi)  $\mathcal{B}$  is a Dirichlet ( $\mathcal{B} = \text{Id}$ ) or a Neumann ( $\mathcal{B} = \partial_z$ ) operator;
- (vii)  $G \in \mathcal{H}^{3/4}(0, T)$  if  $\mathcal{B}$  is a Dirichlet operator or  $G \in \mathcal{H}^{1/4}(0, T)$  if  $\mathcal{B}$  is a Neumann operator;

then there exists a unique solution of (11) in  $\mathcal{L}^2(0, T, \mathcal{H}^2(0, h)) \cap \mathcal{H}^1(0, T, \mathcal{L}^2(0, h))$ . Both subproblems of the (10) coupled problem are thus well-posed. Moreover, the conditions (i)-(vii) listed above also guarantee that the trace  $\mathcal{B}\varphi(0, t)$  satisfies both regularity conditions required for  $G$  in (vii). Therefore, the Schwarz algorithm on coupled problem (10) is well-posed. If  $\mathcal{B}$  is a Robin operator ( $\mathcal{B} = \partial_z + r\text{Id}$ ), the same result can be obtained by introducing further constraints (see Sec. 3.2.2). While less constraining regularity conditions guaranteeing the well-posedness of (11) exist (depending on  $\mathcal{B}$ ), from now on we will assume the conditions (i)-(vii) to be satisfied, since they offer enough flexibility given our context.

### 3 Analytical determination of convergence rates

Setting the  $(\mathcal{B}_{j,l})$  operators directly from (9d) and (9e) would mean using the physical coupling operators. This has been shown to be at best suboptimal (slow SWR convergence), at worst leading to non-converging algorithms, even with both subproblems being well-posed (e.g., in the case of non-overlapping domains [13]). In the following, we derive convergence rates for two different sets of boundary operators.

#### 3.1 General form of convergence rates

##### 3.1.1 Ordinary differential equation for Schwarz iterate errors

A usual approach to prove the convergence of SWR algorithms is to analytically determine  $e_{\varphi,j}^k = \varphi_j^k - \varphi_j^*$ , the errors between SWR iterates and the exact solution  $\varphi_j^*$ . In a given time interval  $[0, T]$ , these errors satisfy the Ekman problem (10) with null r.h.s., null initial conditions, and null boundary conditions at  $z = h_j$ . Results introduced in Sec. 2.4 guarantee that  $e_{\varphi,j}^k$  has  $\mathcal{L}^2$  space regularity in  $[0, T]$ . A continuous time Fourier transform can be performed, assuming that  $T \rightarrow \infty$  and extending all functions to zero for  $t < 0$ . The problem satisfied by the errors  $\widehat{e}_{\varphi,j}^k(z, \omega)$  in Fourier space is:

$$i(f + \omega)\widehat{e}_{\varphi,j}^k - \partial_z(\nu_j(z)\partial_z\widehat{e}_{\varphi,j}^k) = 0, \quad (z, \omega) \in \Omega_j \times \mathbb{R}, \quad (12a)$$

$$\widehat{e}_{\varphi,j}^k(h_j, \omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (12b)$$

$$\mathcal{B}_{1,1}\widehat{e}_{\varphi,1}^k(0^-, \omega) = \mathcal{B}_{1,2}\widehat{e}_{\varphi,2}^k(0^+, \omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (12c)$$

$$\mathcal{B}_{2,2}\widehat{e}_{\varphi,2}^k(0^+, \omega) = \mathcal{B}_{2,1}\widehat{e}_{\varphi,1}^{k-1}(0^-, \omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (12d)$$

For each  $\omega \in \mathbb{R}$ , (12) is a set of two linear second-order ordinary differential equations on  $z$  for  $(\widehat{e}_{\varphi,1}^k, \widehat{e}_{\varphi,2}^k)$ . The differential operators in (12a) being independent of  $k$ , in each medium ( $j = 1, 2$ ), there exists two basis functions  $f_{\nu,j}(z, \omega)$  and  $g_{\nu,j}(z, \omega)$  such that:

$$\widehat{e}_{\varphi,j}^k(z, \omega) = A_{\nu,j}^k(\omega) f_{\nu,j}(z, \omega) + B_{\nu,j}^k(\omega) g_{\nu,j}(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Omega_j \times \mathbb{R}, \quad (13)$$

where  $(A_{\nu,j}^k, B_{\nu,j}^k)$  is determined thanks to the boundary conditions (12b) and transmission conditions (12c)-(12d). In Sec. 3.3, explicit forms of the basis functions are

given for the three physically meaningful forms of  $\nu_j$  introduced at the end of Sec. 1.3.

### 3.1.2 Convergence rates in the Fourier and the physical spaces

Convergence rates are the usual metric for assessing the asymptotic behavior of a SWR algorithm. They can be defined either in the Fourier space or in the physical space. Here we proceed as usually done with SWR algorithms: first, we define the convergence rate in the Fourier space for  $\varphi$ ; second, we investigate its relation to the convergence rate in the physical space for  $\mathbf{U}$ , which is our final interest.

In the Fourier space, the convergence rate of the SWR algorithm (10) can be defined as:

$$\rho_{\varphi,j}^k(\omega) = \frac{|\widehat{e}_{\varphi,j}^k(z=0^\mp, \omega)|}{|\widehat{e}_{\varphi,j}^{k-1}(z=0^\mp, \omega)|}, \quad \omega \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\}, \quad (14)$$

where  $\mp$  depends on  $j \in \{1, 2\}$ .  $\rho_{\varphi,j}^k(\omega)$  represents the damping (or the amplification) of the error at the  $k^{\text{th}}$  SWR iteration in the Fourier space, at the frequency  $\omega$ . A sufficient condition for the convergence of the SWR algorithm is:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega) < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, 2\}. \quad (15)$$

The smaller  $\rho_{\varphi,j}^k$ , the faster convergence is reached. Condition (15) is formulated in the Fourier space, yet our main interest is convergence in the physical space. Since  $t \mapsto e_{\varphi,j}^k(0^\mp, t)$  and  $\omega \mapsto \widehat{e}_{\varphi,j}^k(0^\mp, \omega)$  are  $\mathcal{L}^2$  functions, Parseval's theorem yields:

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega) \leq \frac{\|e_{\varphi,j}^k(0^\mp, t)\|_2}{\|e_{\varphi,j}^{k-1}(0^\mp, t)\|_2} = \frac{\|\widehat{e}_{\varphi,j}^k(0^\mp, \omega)\|_2}{\|\widehat{e}_{\varphi,j}^{k-1}(0^\mp, \omega)\|_2} \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega). \quad (16)$$

(15) is therefore a sufficient condition for (10) to converge in the  $\mathcal{L}^2$  physical space as well. In practice, we are interested in the numerical solutions of the time-dependent problem (3), using the physical variables  $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ . The numerically observed error of this problem is:

$$\mathbf{E}_j^{k,m}(z) = \mathbf{U}_j^{k,m}(z) - \mathbf{U}_j(z, t_j^m), \quad 1 \leq m \leq M_j, j \in \{1, 2\}, \quad (17)$$

where  $m$  is a time step index,  $t_j^m$  is the physical time corresponding to  $m$ , and  $M_j$  is the total number of time steps for the numerical approximation of  $\mathbf{U}_j$  in a given time window  $\mathcal{T}_n$ . The associated convergence rate of the SWR algorithm in the physical space is:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{U}_j}^k = \frac{\sum_{m=1}^{M_j} \|\mathbf{E}_j^{k,m}(0^\mp)\|_2}{\sum_{m=1}^{M_j} \|\mathbf{E}_j^{k-1,m}(0^\mp)\|_2}, \quad k \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\}. \quad (18)$$



Using the change of variables (7), it is shown in App. 2 that:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{U}_j}^k \leq \max \left\{ \sup_{|\omega| \leq \pi / \min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega), \sup_{|\omega| \leq \pi / \min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \rho_{\tilde{\varphi},j}^k(\omega) \right\} + \epsilon, \quad (19)$$

where  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $j \in \{1, 2\}$  and  $\epsilon \xrightarrow{M_j \rightarrow +\infty} 0$ .

(19) bounds  $\mathcal{R}_{\mathbf{U}_j}^k$ , the SWR algorithm convergence rate in the physical space, with its Fourier-space translation  $\rho_{\varphi,j}^k$ , which is easier to assess. Inequality (19) will be used for the numerical results presented in Sec. 5. In the remainder, the interval of relevant values for  $\omega$  from (19), which depends on the time discretization, is:

$$I_\omega := \left[ -\frac{\pi}{\min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}}; \frac{\pi}{\min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \right] = [-\omega_{\max}; \omega_{\max}]. \quad (20)$$

*Remark 1* The upper bound (19) does not account for the partitioning in time windows. In [17], a link is established between the length of the time windows and the  $\mathcal{L}^\infty$  convergence. However this result is valid for a particular case of interface conditions with a relaxation parameter, which is not directly translatable to our case. Indeed, the convergence factors arising from (10) do not benefit from the same regularity properties as those from [17].

### 3.2 Convergence rates for different interface conditions

We now provide exact expressions of convergence rates (14) for two different choices of interface operators ( $\mathcal{B}_{j,l}$ ).

#### 3.2.1 Dirichlet-Neumann interface conditions

Implementing a SWR algorithm with the natural Dirichlet-Neumann (DN) transmission conditions (9d) and (9e) yields choosing  $\mathcal{B}_{1,1} = \mathcal{B}_{1,2} = \text{Id}$ , and  $\mathcal{B}_{2,j} = \nu_j \partial_z$ . The determination of the  $(A_{\nu,j}^k, B_{\nu,j}^k)$  coefficients can be done by injecting the general form (13) for  $\tilde{e}_{\varphi,j}^k$  into boundary conditions (12c) and (12d). The following convergence rate, independent of both  $k \in \mathbb{N}$  and  $j \in \{1, 2\}$ , can then be obtained:

$$\rho_{\varphi,j}^{k,DN}(\omega) = \rho_\varphi^{DN}(\omega) = \lambda |\mathcal{S}_1(\omega) \mathcal{S}_2(\omega)|, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (21)$$

where:

$$\lambda = \frac{\nu_1(0^-)}{\nu_2(0^+)}, \quad (22a)$$

$$\mathcal{S}_1(\omega) = \frac{f_1(h_1, \omega) \partial_z g_1(0, \omega) - g_1(h_1, \omega) \partial_z f_1(0, \omega)}{f_1(h_1, \omega) g_1(0, \omega) - g_1(h_1, \omega) f_1(0, \omega)}, \quad (22b)$$

$$\mathcal{S}_2(\omega) = \frac{f_2(h_2, \omega) g_2(0, \omega) - g_2(h_2, \omega) f_2(0, \omega)}{f_2(h_2, \omega) \partial_z g_2(0, \omega) - g_2(h_2, \omega) \partial_z f_2(0, \omega)}. \quad (22c)$$

In the next subsections, we will give the exact expressions of  $\mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$  for different forms of  $\nu_j$ . If  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are of similar nature (i.e. both constant, linear or parabolic), then  $\mathcal{S}_1 = \psi(h_1, \nu_1)$  and  $\mathcal{S}_2 = 1/\psi(h_2, \nu_2)$ , where  $\psi$  depends on the particular form of  $\nu_j$ .

### 3.2.2 Robin-Robin interface conditions

We now consider the Robin-Robin (RR) transmission conditions:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1,1} &= \text{Id} + q\lambda\partial_z, & \mathcal{B}_{1,2} &= \text{Id} + q\partial_z, \\ \mathcal{B}_{2,2} &= p \text{Id} + \partial_z, & \mathcal{B}_{2,1} &= p \text{Id} + \lambda\partial_z, \end{aligned} \quad (23)$$

where  $(p, q) \in \mathbb{C}^2$  are free parameters and  $\lambda$  is defined in (22a). In order to be compatible with (12), the Robin-Robin  $\mathcal{B}_{j,l}$  operators must be in the form of (23), since any other choice of RR operators would not provide the same coupled solution as the natural DN transmission conditions (9d)-(9e).

**Proposition 1** *If:*

$$(p, q) \in \mathcal{P} = \{(p, q) \in \mathbb{C}^2 \mid \text{Re}(p) \leq 0 \text{ and } \text{Re}(q) \geq 0\}, \quad (24)$$

*then SWR algorithm (10), using Robin-Robin transmission conditions as defined in (23), is well-posed on each  $\mathcal{T}_n$  window.*

The proof (not detailed here) is based on a priori energy estimates, can be directly derived from [3], and is available in [38]. From now on, we will assume that  $(p, q) \in \mathcal{P}$ , so that the SWR algorithm (12) with RR conditions is well-posed.

Similar to the DN case, the  $(A_{\nu,j}^k, B_{\nu,j}^k)$  decomposition coefficients are determined using the boundary conditions (12b), (12c) and (12d). The resulting convergence rate for Robin-Robin conditions, written in terms of the  $\mathcal{S}_j$  functions defined in (22), reads:

$$\rho_{\varphi}^{RR}(p, q, \omega) = \left| \frac{(\mathcal{S}_2 + q)(p + \lambda\mathcal{S}_1)}{(1 + p\mathcal{S}_2)(1 + \lambda q\mathcal{S}_1)} \right| = \rho_{\varphi}^{DN}(\omega) \left| \frac{(1 + q\mathcal{S}_2^{-1})(1 + \lambda^{-1}p\mathcal{S}_1^{-1})}{(1 + p\mathcal{S}_2)(1 + \lambda q\mathcal{S}_1)} \right|. \quad (25)$$

As expected, setting  $p = q = 0$  in (25) corresponds to the DN case, i.e.  $\rho_{\varphi}^{DN}(\omega) = \rho_{\varphi}^{RR}(0, 0, \omega)$ .

### 3.3 Analytical expressions of the solution for various forms of $\nu$

We now give analytical expressions of the solutions to (12) for choices of  $\nu(z)$  (constant, affine, and parabolic) commonly used in Earth system applications. We aim at investigating and comparing  $\rho_{DN}(\omega)$  and  $\rho_{RR}(p, q, \omega)$ , for such forms of  $\nu_j(z)$  assumed strictly positive and bounded in  $\Omega_j$ .

*Remark 2* As explained in Sec. 2.2, convergence rates should be studied for both  $\varphi$  and its complex conjugate  $\bar{\varphi}$ . However, since both subequations of (8) are conjugation of one another, Fourier transform properties yield:

$$\rho_{\bar{\varphi}}^{DN}(\omega) = \rho_{\varphi}^{DN}(-\omega), \quad (26a)$$

$$\rho_{\bar{\varphi}}^{RR}(p, q, \omega) = \rho_{\varphi}^{RR}(\bar{p}, \bar{q}, -\omega). \quad (26b)$$

Since  $I_{\omega}$ , the interval of interest for  $\omega$ , is symmetric w.r.t. 0 (see (20)), we restrict our study to  $\varphi$ , with results on  $\bar{\varphi}$  arising from (26).

### 3.3.1 Constant viscosity

In the case  $\nu_j(z) = \nu_j^c$ , the basis functions ( $f_j, g_j$ ) are:

$$f_j^{\text{cst}}(z) = \exp \left[ \chi \sqrt{\frac{f+\omega}{\nu_j^c}} z \right] \quad \text{and} \quad g_j^{\text{cst}}(z) = \exp \left[ -\chi \sqrt{\frac{f+\omega}{\nu_j^c}} z \right], \quad (27)$$

where  $\chi = e^{\frac{\pi}{4}}$ . Injecting (27) into (22) yields:

$$\mathcal{S}_1^{\text{cst}} = -\chi \frac{\sqrt{\text{Fo}_1}}{|h_1|} \coth \left( -\chi \sqrt{\text{Fo}_1} \right), \quad \mathcal{S}_2^{\text{cst}} = -\chi^{-1} \frac{|h_2|}{\sqrt{\text{Fo}_2}} \tanh \left( \chi \sqrt{\text{Fo}_2} \right), \quad (28)$$

where the nondimensional number  $\text{Fo}_j = \frac{(f+\omega)h_j^2}{\nu_j^c}$  has been introduced.

### 3.3.2 Affine viscosity profile

We now consider  $\nu_j(z) = \nu_j^c + b_j z$  with the constraints  $b_1 < 0, b_2 > 0$  leading to  $\nu_j(z) > 0$  in  $\Omega_j$ . The basis functions ( $f_j, g_j$ ) are:

$$f_j^{\text{aff}}(z) = I_0 \left[ 2\chi \sqrt{\frac{f+\omega}{b_j^2} \nu_j(z)} \right] \quad \text{and} \quad g_j^{\text{aff}}(z) = K_0 \left[ 2\chi \sqrt{\frac{f+\omega}{b_j^2} \nu_j(z)} \right], \quad (29)$$

where  $I_0$  and  $K_0$  are the modified 0<sup>th</sup>-order Bessel functions. Injecting (29) into (22) yields:

$$\mathcal{S}_1^{\text{aff}} = \chi \frac{\sqrt{\text{Fo}_1}}{|h_1|} \frac{I_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1(\mu_1+1)}) K_1(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1}) + K_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1(\mu_1+1)}) I_1(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1})}{I_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1(\mu_1+1)}) K_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1}) - I_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1}) K_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_1\mu_1(\mu_1+1)})}, \quad (30a)$$

$$\mathcal{S}_2^{\text{aff}} = -\chi^{-1} \frac{|h_2|}{\sqrt{\text{Fo}_2}} \frac{I_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2(\mu_2+1)}) K_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2}) - I_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2}) K_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2(\mu_2+1)})}{I_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2(\mu_2+1)}) K_1(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2}) + K_0(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2(\mu_2+1)}) I_1(2\chi\sqrt{\text{Fo}_2\mu_2})}, \quad (30b)$$

where  $\mu_j$  is the following positive nondimensional number:

$$\mu_j = \left| \frac{\nu_j^c}{\partial_z \nu_j(0) h_j} \right| = \frac{\nu_j^c}{b_j h_j}. \quad (31)$$

### 3.3.3 Quadratic viscosity profile

Let us finally consider  $\nu_j(z) = \nu_j^c + b_j z + a_j z^2$ . To be consistent with the ocean-atmosphere context, we impose  $a_j < 0$ ,  $\nu_j(h_j) = \nu_j(0)$  and  $\nu_j(z) > 0$  in  $\Omega_j$ , which implies  $\nu_j(z) = \nu_j^c - a_j h_j z + a_j z^2$ . The basis functions  $(f_j, g_j)$  are:

$$f_j^{\text{par}}(z) = P_{\xi_j}^0(\eta_j(z)) = {}_2F_1\left(\xi_j + 1, -\xi_j, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\eta_j(z)\right), \quad (32a)$$

$$g_j^{\text{par}}(z) = P_{\xi_j}^0(-\eta_j(z)) = {}_2F_1\left(\xi_j + 1, -\xi_j, 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta_j(z)\right), \quad (32b)$$

where  $P_{\xi_j}^0$  are Legendre's functions and  ${}_2F_1(a, b, c, \cdot)$  is the hypergeometric function [34]. (32) also introduces  $\xi_j \in \mathbb{C}$  and  $\eta_j(z) \in \mathbb{C}$  for  $j \in \{1, 2\}$ , which are given in App. 1. Since we assume  $a_j < 0$  and  $\nu_j(z) > 0$  in  $\Omega_j$ ,  $\xi_j$  and  $\eta_j$  can be simplified to:

$$\xi_j(\omega) = -\frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\ell(f + \omega)}{a_j}} \right) = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4\ell\text{Fo} \mu_j} \right), \quad (33a)$$

$$\eta_j(z) = \frac{\partial_z \nu_j(z)}{\sqrt{(a_j h_j)^2 - 4a_j \nu_j^c}}, \quad (33b)$$

where  $\mu_j$  is defined like in (31):  $\mu_j = \left| \frac{\nu_j^c}{\partial_z \nu(0) h_j} \right| = \frac{\nu_j^c}{|a_j| h_j^2}$ . Computing the derivatives of the  $f_j^{\text{par}}$  and  $g_j^{\text{par}}$  functions defined in (32) yields:

$$S_1^{\text{par}} = \frac{(\xi_1 + 1)\xi_1}{|h_1| \sqrt{1 + 4\mu_1}} \frac{P_{\xi_1}^0(\eta_1)G_{\xi_1}(\eta_1) + P_{\xi_1}^0(-\eta_1)G_{\xi_1}(-\eta_1)}{\left[ P_{\xi_1}^0(-\eta_1) \right]^2 - \left[ P_{\xi_1}^0(\eta_1) \right]^2}, \quad (34a)$$

$$S_2^{\text{par}} = \frac{|h_2| \sqrt{1 + 4\mu_2}}{(\xi_2 + 1)\xi_2} \frac{\left[ P_{\xi_2}^0(-\eta_2) \right]^2 - \left[ P_{\xi_2}^0(\eta_2) \right]^2}{P_{\xi_2}^0(\eta_2)G_{\xi_2}(\eta_2) + P_{\xi_2}^0(-\eta_2)G_{\xi_2}(-\eta_2)}, \quad (34b)$$

where, for  $j \in \{1, 2\}$ ,  $\eta_j = \eta_j(0) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{1 + 4\mu_j}} = -\eta_j(H_j)$ , and

$$G_{\xi_j}(\pm\eta_j) = {}_2F_1\left(\xi_j + 2, 1 - \xi_j, 2, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\pm\eta_j)\right). \quad (35)$$

At this point we have prepared all the necessary ingredients to proceed to the actual convergence analysis for these three particular forms of  $\nu_j$ .

## 4 Convergence analysis

In this section, we study the behaviour of the convergence rates introduced in Sec. 3. Sec. 4.1 and 4.2 offer a review of known results on those convergence rates in specific cases, with the consistency of our results being checked in those limit cases. Sec. 4.3 focuses on the DN case and describes the derivation of upper bounds for the convergence factor in the linear and parabolic cases. Finally, Sec. 4.4 deals with the acceleration of SWR algorithm convergence using RR interface conditions.

### 4.1 Overview of the results obtained in simplified cases

Existing literature has already covered different results corresponding to particular cases of the more general problem (3). Here we described three such cases and express the corresponding  $\mathcal{S}_j$  quantities of interest.

#### 4.1.1 Stationary case without rotation ( $\omega = 0, f = 0$ )

As emphasized by Sec. 5 of [28], if one considers the equation  $\partial_z(\nu(z)\partial_z\varphi) = 0$ , it is possible to guarantee convergence of the SWR algorithm in two iterations. This result can easily be extended to the case where  $\nu(z)$  is discontinuous at the interface. Using our notations, we get:

$$\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta}} = \frac{1}{\nu_1^c} \left( \int_{h_1}^0 (\nu_1(z))^{-1} dz \right)^{-1}, \quad \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta}} = -\nu_2^c \left( \int_0^{h_2} (\nu_2(z))^{-1} dz \right), \quad (36)$$

with  $\mathcal{S}_{j,f=0}^{\text{sta}} = \mathcal{S}_j(\omega = 0, f = 0, \nu_j(z))$ . The DN convergence factor thus reads  $\rho_{\text{DN},f=0}^{\text{sta}} = \lambda \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta}} \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta}}$  and the boundary conditions leading to convergence in two iterations (i.e., transparent boundary conditions) are conditions (23) with  $p = -\lambda \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta}}$  and  $q = -\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta}}$ . For our three particular viscosity profiles of interest, we easily find that:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} &= \frac{1}{|h_1|}, & \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}} &= -h_2, \\ \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,aff}} &= \frac{1}{|h_1|} \frac{1}{\mu_1 \ln(1 + 1/\mu_1)}, & \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,aff}} &= -h_2 \mu_2 \ln(1 + 1/\mu_2), \\ \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,par}} &= \frac{1}{|h_1|} \frac{\sqrt{1 + 4\mu_1}}{4\mu_1 \operatorname{arccoth}\sqrt{1 + 4\mu_1}}, & \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,par}} &= -h_2 \frac{4\mu_2 \operatorname{arccoth}\sqrt{1 + 4\mu_2}}{\sqrt{1 + 4\mu_2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

The behaviours of  $\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,aff}} / \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}}$  (resp.  $\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} / \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,aff}}$ ) and  $\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,par}} / \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}}$  (resp.  $\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} / \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,par}}$ ) as functions of  $\mu_2$  (resp.  $\mu_1$ ) are displayed in Fig. 1a. Since the viscosity profiles tend to a constant value as  $\mu_j \rightarrow +\infty$ , the ratios tend to 1 for large values of  $\mu_j$ . However, for values of  $\mu_j$  smaller than 1, a significant impact of the variations in the viscosity profile on the values of  $\mathcal{S}_j^{\text{sta}}$  can be observed. This

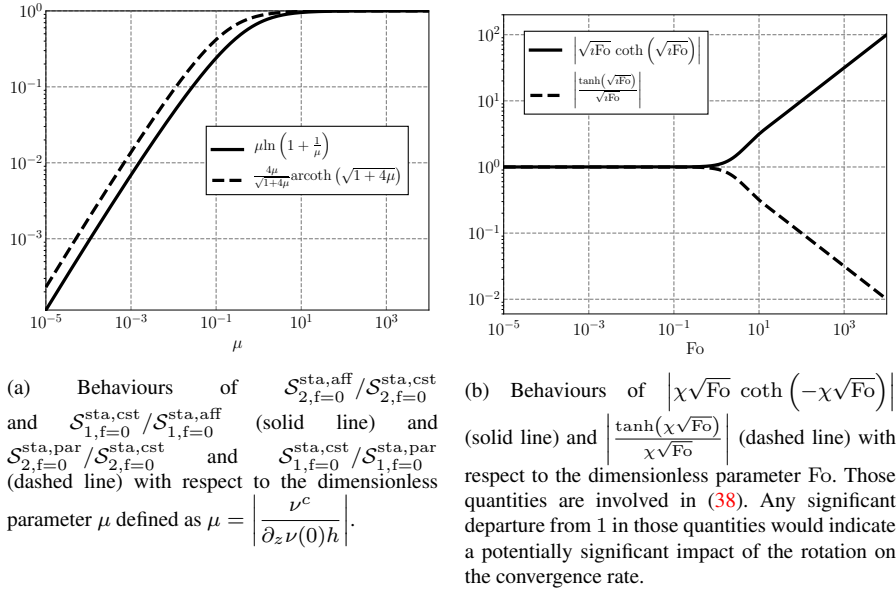


Fig. 1: Behaviours of various  $\mathcal{S}_j$  in the stationary case, (a) without and (b) with rotation.

would affect the convergence rate in the DN case as well as the optimal coefficients in the RR one.

#### 4.1.2 Stationary case with rotation and constant viscosity ( $\omega = 0$ , $\nu_j = \nu_j^c$ )

In the stationary ( $\partial_t = 0$ ) and constant viscosity case ( $\nu_j(z) = \nu_j^c$ ), the values of  $\mathcal{S}_j^{\text{sta,cst}}$  can easily be derived:

$$\mathcal{S}_1^{\text{sta,cst}} = \frac{1}{|h_1|} \frac{\chi\sqrt{\text{Fo}_1^0}}{\tanh(\chi\sqrt{\text{Fo}_1^0})}, \quad \mathcal{S}_2^{\text{sta,cst}} = -h_2 \frac{\tanh(\chi\sqrt{\text{Fo}_2^0})}{\chi\sqrt{\text{Fo}_2^0}}, \quad (38)$$

where  $\text{Fo}_j^0 = fh_j^2/\nu_j^c$  is the non-dimensional number introduced in (28), evaluated here for  $\omega = 0$ . As shown in Fig. 1b, in the small  $\text{Fo}_j^0$  limit, the rotation's impact is negligible. The same remark withholds when  $\text{Fo}_1^0 \approx \text{Fo}_2^0$  with DN interface conditions, since then  $|\mathcal{S}_1^{\text{sta,cst}} \mathcal{S}_2^{\text{sta,cst}}| \approx |\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}}|$ . In the general case, the rotation can become important in the convergence analysis as soon as  $\text{Fo}_j > 1$ . This numerical conjecture implies that the relative importance of the Coriolis effect  $f$ , the fluid's viscosity  $\nu_j^c$ , and the domain height  $h_j$ , determines the convergence (or lack thereof) of SWR algorithm in this stationary case. In other words, in this case, SWR

convergence is tributary to the particular setting of the physical problem: for example, convergence may be observed close to the equator (small  $f$  and  $\text{Fo}$ ), but not at higher latitudes (large  $f$  and  $\text{Fo}$ ).

#### 4.1.3 Nonstationary case on infinite domains without rotation and with constant viscosity ( $f = 0, \nu_j(z) = \nu_j^c, |h_j| \rightarrow \infty$ )

This case is thoroughly studied in [10] for  $\nu_1^c = \nu_2^c$ , and in [21] for  $\nu_1^c \neq \nu_2^c$ . With DN conditions,  $\rho_{\text{DN}}^{\infty, \text{cst}} = \sqrt{\nu_1^c/\nu_2^c} = \sqrt{\lambda}$ . The transparent conditions cannot be determined locally in time (i.e., in the physical space), but it is possible to optimize the  $(p, q)$  parameters in order to minimize the convergence rate over a given range of temporal frequencies  $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Such an optimization problem is analytically solved in [21]. In Sec. 5, we use those optimized transmission conditions obtained for constant viscosity in the case of non-constant viscosity profiles, and investigate their efficiency.

## 4.2 Consistency between the different viscosity profiles

We now promptly check that the convergence rates derived in Sec. 3 encompass the limit cases discussed in Sec. 4.1. In particular, we consider  $(\omega + f) \rightarrow 0, \mu_j \rightarrow \infty$ , and  $|h_j| \rightarrow \infty$ . Including the rotation (i.e.  $f \neq 0$ ) makes the  $\text{Fo} = 0$  case important, since it corresponds to  $\omega = -f$ , which is to be encountered in numerical climate applications. In the non-rotating case ( $f = 0$ ),  $\text{Fo} = 0$  is not encountered in practice, since it only occurs when  $\omega = 0$ , and the stationary part of the SWR algorithm error stays at its initial state, which is zero.

### 4.2.1 Stationary limit without rotation ( $\text{Fo}_j \rightarrow 0$ )

In the constant viscosity case, the  $\mathcal{S}_j^{\text{cst}}$  functions defined in (28) are such that  $\lim_{\text{Fo}_j \rightarrow 0} \mathcal{S}_j^{\text{cst}} = \mathcal{S}_{j, f=0}^{\text{sta, cst}}$ . For linear viscosity profiles, using Taylor expansion of Bessel functions yields:

$$\lim_{\text{Fo}_1 \rightarrow 0} \mathcal{S}_1^{\text{aff}} = \frac{1}{|h_1| \mu_1 \ln(1 + 1/\mu_1)} = \mathcal{S}_{1, f=0}^{\text{sta, aff}}, \quad (39a)$$

$$\lim_{\text{Fo}_2 \rightarrow 0} \mathcal{S}_2^{\text{aff}} = -h_2 \mu_2 \ln(1 + 1/\mu_2) = \mathcal{S}_{2, f=0}^{\text{sta, aff}}, \quad (39b)$$

which also holds in the parabolic case.

Similarly, assuming  $|h_j| \rightarrow \infty$ , the known results obtained under the infinite domain assumption can be obtained, both with and without rotation. It is worth mentioning that to maintain the consistency between the stationary and nonstationary cases for the convergence rates, we need to consider subdomains of finite sizes. Indeed, considering subdomains of infinite size implies that  $h_j^2 \gg \nu_j^c/(f + \omega)$ , which can not hold as  $f + \omega \rightarrow 0$ .

#### 4.2.2 Small viscosity gradient limit ( $\mu_j \rightarrow \infty$ )

Since the parameters  $\mu_j$  are defined as  $\mu_j = \frac{\nu_j(0)}{h_j \partial_z \nu_j(0)}$ , the limit case  $\partial_z \nu_j(0) \rightarrow 0$  (i.e.  $\mu_j \rightarrow \infty$ ) should lead to results similar to those obtained in the constant viscosity case. Indeed, studying  $\mathcal{S}_j^{\text{par}}$  and  $\mathcal{S}_j^{\text{aff}}$  leads to:

$$\lim_{\mu_j \rightarrow \infty} |\mathcal{S}_j^{\text{par}}| = \lim_{\mu_j \rightarrow \infty} |\mathcal{S}_j^{\text{aff}}| = |\mathcal{S}_j^{\text{cst}}|. \quad (40)$$

This result implies that for both DN and RR transmission conditions, in the  $\mu_j \rightarrow \infty$  limit, the convergence rates become equivalent for constant, affine and parabolic  $\nu_j$ .

#### 4.3 Behaviour of the convergence rates with DN transmission conditions

At this point we have checked that the convergence rates have the proper stationary (i.e. small  $\text{Fo}_j$ ) limit and small viscosity gradients (i.e.  $\mu_j \rightarrow \infty$ ) limit. The objective is now to characterize the parameter values for which the effect of the continuous viscosity variations on the convergence rate can be significant in the DN case. [22] suggested that the convergence is insensitive to variations of  $\nu_j(z)$  at large frequencies. Indeed, in the  $\omega \rightarrow \infty$  limit, regardless of the viscosity profile, the  $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2$  product, with  $\mathcal{S}_j$  defined in either (28), (30), or (34), converges towards the same value  $\sqrt{\nu_2^c / \nu_1^c} = \lambda^{-1/2}$ . The high frequency asymptote of the DN convergence rate is thus the same as the one obtained with constant coefficients and under the infinite domain assumption.

On the contrary, the stationary case discussed in Sec. 4.1 suggests that variations of the viscosity can have a large impact on the convergence rate at lower frequencies. Since the DN convergence rate is  $\lambda |\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2|$ , the variations in the viscosity profiles on the Dirichlet side (i.e. in  $(0, h_1)$ ) and on the Neumann side (i.e. in  $(0, h_2)$ ) will have opposite effects in terms of convergence speed. To further investigate this aspect, we introduce the following two quantities:

$$\mathcal{R}_j^{\text{aff,cst}} = \frac{|\mathcal{S}_j^{\text{aff}}|}{|\mathcal{S}_j^{\text{cst}}|}, \quad \mathcal{R}_j^{\text{par,cst}} = \frac{|\mathcal{S}_j^{\text{par}}|}{|\mathcal{S}_j^{\text{cst}}|}, \quad (41)$$

which are functions of the dimensionless parameters  $\text{Fo}_j$  and  $\mu_j$ . In the stationary case without rotation, we had  $\mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}} = 1/[\mu_1 \ln(1 + 1/\mu_1)]$  and  $\mathcal{R}_1^{\text{par,cst}} = \sqrt{1 + 4\mu_1} [4\mu_1 \text{arccoth}(\sqrt{1 + 4\mu_1})]^{-1}$ .  $\mathcal{R}_2^{\text{aff,cst}}$  and  $\mathcal{R}_2^{\text{par,cst}}$  can be obtained by taking the inverses of these expressions and replacing  $\mu_1$  by  $\mu_2$ . In the nonstation-



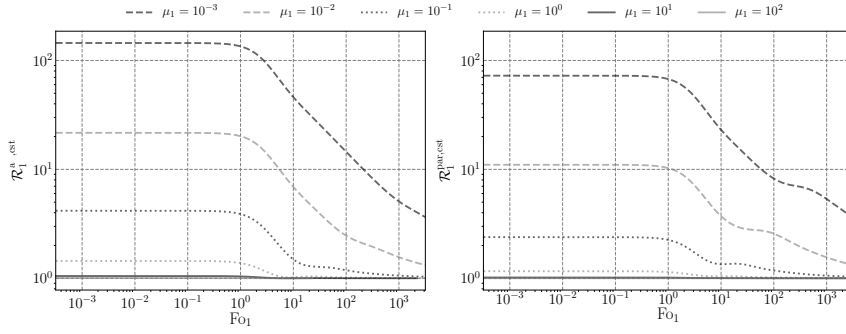


Fig. 2:  $\mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}}$  (left) and  $\mathcal{R}_1^{\text{par,cst}}$  (right) with respect to  $\text{Fo}_1$ , for various values of  $\mu_1$  (legend box above canvas).

any case, Fig. 2 suggests the following conjectures:

$$1 \leq \mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}} \leq \lim_{\text{Fo}_1 \rightarrow 0} \mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}} = \frac{\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,aff}} \right|}{\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} \right|} = \frac{1}{\mu_1 \ln(1 + 1/\mu_1)}, \quad (42a)$$

$$1 \leq \mathcal{R}_1^{\text{par,cst}} \leq \lim_{\text{Fo}_1 \rightarrow 0} \mathcal{R}_1^{\text{par,cst}} = \frac{\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,par}} \right|}{\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} \right|} = \frac{\sqrt{1 + 4\mu_1}}{4\mu_1 \text{arccoth}(\sqrt{1 + 4\mu_1})}. \quad (42b)$$

In the stationary case without Coriolis effect, from (36), and assuming that  $\min_z \nu^{\text{var}} = \nu^{\text{var}}(0) = \nu^{\text{cst}}$ , it can be shown that  $\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,var}} > \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}}$ . In the nonstationary case and with Coriolis effect, (42) can only be numerically checked and is assumed true from now on. Upper and lower bounds of  $\mathcal{R}_2^{\text{aff,cst}}$  (resp.  $\mathcal{R}_2^{\text{par,cst}}$ ) are obtained by taking the inverse of  $\mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}}$  (resp.  $\mathcal{R}_1^{\text{par,cst}}$ ). Moreover:

$$\rho_{\text{DN}}^\nu = \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \left| \mathcal{R}_1^{\nu,\text{cst}} \right| \left| \mathcal{R}_2^{\nu,\text{cst}} \right|, \quad (43)$$

which, combined to (42), leads to:

$$\left| \frac{\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,aff}}}{\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}}} \right| \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \leq \rho_{\text{DN}}^{\text{aff}} \leq \left| \frac{\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,aff}}}{\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}}} \right| \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \quad (44a)$$

$$\left| \frac{\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,par}}}{\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}}} \right| \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \leq \rho_{\text{DN}}^{\text{par}} \leq \left| \frac{\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,par}}}{\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}}} \right| \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \quad (44b)$$

with  $\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,aff}} \right| / \left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} \right|$  and  $\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,par}} \right| / \left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}} \right|$  given by (42). (44) contains upper bounds for the convergence rate with DN interface conditions in both the linear and parabolic viscosity cases. (44) and Fig. 1a suggest that different behaviours should be expected between  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$  and  $\rho_{\text{DN}}^{\text{aff}}$ , or  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$  and  $\rho_{\text{DN}}^{\text{par}}$ , for example:

$$[\mu_1 > 1 \text{ and } \mu_2 > 1] \implies \left[ \rho_{\text{DN}}^{\text{aff/par}} \approx \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \right] \quad (45)$$

The numerical conjecture expressed in (45) suggest that, as in previously covered simplified cases (e.g. Sec. 4.1.2), the particular physical setting of the problem (translated into the signs of  $\mu_j - 1$ ), over which the user has no control, bears an impact on the convergence properties of DN-derived SWR algorithms. For example, with parabolic  $\nu_j$ , convergence is less likely to occur as  $h_2$  increases and  $h_1$  decreases, since such a configuration would favour small  $\mu_1$  and large  $\mu_2$ . Hence, in addition to the physics of the problem (translating into the values of  $\nu_j$  and  $\partial_z \nu_j$ ), its geometric setting ( $h_j$ ) also impacts the potential convergence.

*Upper and lower bounds for  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$*  We now describe the derivation of an upper bound for  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$  to further exploit inequalities (44). First, injecting (28) into (21) and reformulating yields:

$$\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} = \sqrt{\lambda \frac{\mathcal{Q}(\sqrt{2\text{Fo}_2})}{\mathcal{Q}(\sqrt{2\text{Fo}_1})}}, \quad \text{with } \mathcal{Q}(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{\cosh x + \cos x}. \quad (46)$$

Introducing  $x^{(*,0)} \approx 2.36502$  and  $x^{(*,1)} \approx 5.49780$  the two smallest positive roots of the transcendental equation  $\tanh x + \tan x = 0$ , and denoting  $\beta = \mathcal{Q}(x^{(*,0)})/\mathcal{Q}(x^{(*,1)}) \approx 1.32165$ , it can then be proved (see App. 3) that:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda/\beta} \leq \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \leq \lambda \left| \frac{h_2}{h_1} \right| & \text{if } \sqrt{\lambda} > \left| \frac{h_2}{h_1} \right|, \\ \lambda \left| \frac{h_2}{h_1} \right| \leq \rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \leq \sqrt{\lambda\beta} & \text{if } \sqrt{\lambda} \leq \left| \frac{h_2}{h_1} \right|. \end{cases} \quad (47)$$

Note that these upper (resp. lower) bounds are reached maxima (resp. minima). Moreover, when studying convergence,  $\omega$  is a common parameter in  $\text{Fo}_2$  and  $\text{Fo}_1$  and  $|\lambda h_2/h_1| = \sqrt{\lambda \text{Fo}_2/\text{Fo}_1}$  with  $\text{Fo}_2/\text{Fo}_1$  independent of  $\omega$ .

*Upper and lower bounds for  $\rho_{\text{DN}}^{\text{aff/par}}$*  Replacing  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$  by its upper bound in inequalities (44), the following upper bound for the convergence rate in the DN case with affine viscosities can be obtained :

$$\rho_{\text{DN}}^{\text{aff}} \leq U_{\text{DN}}^{\text{aff}} := \begin{cases} \lambda \left| \frac{h_2}{h_1} \right| (\mu_1 \ln(1 + 1/\mu_1))^{-1} & \text{if } \text{Fo}_2 > \text{Fo}_1, \\ \sqrt{\lambda\beta} (\mu_1 \ln(1 + 1/\mu_1))^{-1} & \text{if } \text{Fo}_2 \leq \text{Fo}_1. \end{cases} \quad (48)$$

Similarly, with parabolic viscosities:

$$\rho_{\text{DN}}^{\text{par}} \leq U_{\text{DN}}^{\text{par}} := \begin{cases} \lambda \left| \frac{h_2}{h_1} \right| \left( \frac{\sqrt{1 + 4\mu_1}}{4\mu_1 \operatorname{arccoth}(\sqrt{1 + 4\mu_1})} \right) & \text{if } \text{Fo}_2 > \text{Fo}_1, \\ \frac{\sqrt{\lambda\beta(1 + 4\mu_1)}}{4\mu_1 \operatorname{arccoth}(\sqrt{1 + 4\mu_1})} & \text{if } \text{Fo}_2 \leq \text{Fo}_1. \end{cases} \quad (49)$$

So far, we have considered that  $\omega$  may vary in  $\mathbb{R}$ . However, for a discretized problem,  $\omega \in I_\omega$ , defined in (20). Limiting  $\omega$  to bounded values leads to reformulating (42) as:

$$\mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}}(\omega_{\max}) \leq \mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}} \leq \mathcal{R}_1^{\text{aff,cst}}(-f), \quad (50a)$$

$$\mathcal{R}_1^{\text{par,cst}}(\omega_{\max}) \leq \mathcal{R}_1^{\text{par,cst}} \leq \mathcal{R}_1^{\text{par,cst}}(-f), \quad (50b)$$

since  $\text{Fo}_1(-f) = 0$  and  $\text{Fo}_2(\omega_{\max}) = \max_{\omega \in I_\omega} (|\text{Fo}_2(\omega)|)$ , and since  $\mathcal{R}_j^{\nu,\text{cst}}$  decreases with  $\text{Fo}_j$  (see Fig. 2). Therefore,  $|\mathcal{R}_2^{\nu,\text{cst}}(\omega)| \leq \mathcal{R}_2^{\nu,\text{cst}}(\omega_{\max})$  can be inferred from (50). The following more restrictive upper bounds can then be obtained by injecting this into (43):

$$\rho_{\text{DN}}^{\text{aff}} \leq \text{U}_{\text{DN}}^{\text{aff}} \mathcal{R}_2^{\text{aff,cst}}(\omega_{\max}), \quad \rho_{\text{DN}}^{\text{par}} \leq \text{U}_{\text{DN}}^{\text{par}} \mathcal{R}_1^{\text{par,cst}}(\omega_{\max}), \quad (51)$$

where  $\text{U}_{\text{DN}}^{\text{aff}}$  (resp.  $\text{U}_{\text{DN}}^{\text{par}}$ ) is the upper bound of  $\rho_{\text{DN}}^{\text{aff}}$  (resp.  $\rho_{\text{DN}}^{\text{par}}$ ) defined in (48) (resp. (49)), and  $\mathcal{R}_2^{\text{aff,cst}}(\omega_{\max}), \mathcal{R}_1^{\text{par,cst}}(\omega_{\max}) \xrightarrow{\omega_{\max} \rightarrow \infty} 1^-$ . To our knowledge, similar upper bounds had already been derived only in the case of constant coefficients and subdomains of infinite size. In that case, they are all equal to  $\rho_{\text{DN}}^{\infty,c} = \sqrt{\lambda}$ .

#### 4.4 Convergence analysis for RR transmission conditions

The exact transparent conditions (leading to  $\rho = 0$  for all  $\omega$ , hence convergence in two iterations) can easily be found in the Fourier space. For our model problem (10), considering the interface operators  $\mathcal{B}_{1,1} = \text{Id} + \lambda \Lambda_2$ ,  $\mathcal{B}_{1,2} = \text{Id} + \Lambda_2$ ,  $\mathcal{B}_{2,1} = \Lambda_1 + \partial_z$  and  $\mathcal{B}_{2,2} = \Lambda_1 + \lambda \partial_z$ , convergence in two iterations is obtained for  $\Lambda_1(\varphi_2) = \mathcal{F}^{-1}(-\lambda \mathcal{S}_1 \widehat{\varphi}_2)$  and  $\Lambda_2(\varphi_1) = \mathcal{F}^{-1}(-\mathcal{S}_2 \partial_z \widehat{\varphi}_1)$  where  $\mathcal{F}^{-1}$  denotes the inverse Fourier transform. In the stationary case ( $\omega = 0$ ), the  $\Lambda_j$  operators can be found in the physical space ( $\Lambda_1 = -\lambda \mathcal{S}_1^{\text{sta}}$ ,  $\Lambda_2 = -\mathcal{S}_2^{\text{sta}} \partial_z$ ), but in the general case  $\omega \neq 0$ , these conditions are nonlocal in time. Nevertheless, it is possible to improve the convergence speed by using RR interface conditions as given in (23), which amounts to assimilating  $\Lambda_1$  to  $p\text{Id}$  and  $\Lambda_2$  to  $q\partial_z$ , with  $(p, q) \in \mathcal{P}$  so that the problem is well-posed. A classical way to find suitable values for  $(p, q)$  is to solve the optimization problem:

$$\text{Find } (p^*, q^*) \in \mathcal{P} \text{ such that } \max_{\omega \in I_\omega} \rho_{\text{RR}}(\omega, p^*, q^*) = \min_{(p,q) \in \mathcal{P}} \left\{ \max_{\omega \in I_\omega} \rho_{\text{RR}}(\omega, p, q) \right\}. \quad (52)$$

(52) has been analytically solved for simple cases with constant viscosity and infinite domain [e.g. 10, 21]. For more complicated settings, the min-max problem can only be solved numerically. In our case, with spatially-variable viscosity coefficients and bounded domains, the optimization can only be done numerically (see Sec. 5.3 for specific examples).

We now aim at finding values of  $(p, q) \in \mathcal{P}$  which would at least guarantee the convergence of the algorithm, without necessarily being the optimal choice. Let us

first recall that the convergence rate with RR interface conditions is:

$$\rho_{\text{RR}}(p, q, \omega) = \left| \frac{(\mathcal{S}_2(\omega) + q)(p + \lambda \mathcal{S}_1(\omega))}{(1 + p \mathcal{S}_2(\omega))(1 + \lambda q \mathcal{S}_1(\omega))} \right|. \quad (53)$$

Convergence (i.e.  $\rho_{\text{RR}} < 1$ ) then amounts to:

$$|pq + \lambda \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 + \lambda q \mathcal{S}_1 + p \mathcal{S}_2|^2 < |1 + pq \lambda \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 + \lambda q \mathcal{S}_1 + p \mathcal{S}_2|^2. \quad (54)$$

Ensuring SWR convergence thus boils down to finding sufficient conditions on  $(p, q) \in \mathcal{P}$  for satisfying (54). In order to simplify this endeavor, we will from now on assume that:

$$(p, q) \in \mathcal{P} \cap (\mathbb{R}^*)^2 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad (55)$$

which is a limitation guided by pragmatic motivations. By splitting (54) into real and imaginary parts and relying on (55), it is possible to show that (54) is equivalent to:

$$\begin{aligned} & (\rho_{\text{DN}}^2 - 1)(pq + 1) + 2p \underbrace{\left( \text{Re}(\lambda \mathcal{S}_1) |\mathcal{S}_2|^2 - \text{Re}(\mathcal{S}_2) \right)}_{\vartheta_1} \\ & + 2q \underbrace{\left( \text{Re}(\mathcal{S}_2) |\lambda \mathcal{S}_1|^2 - \text{Re}(\lambda \mathcal{S}_1) \right)}_{\vartheta_2} < 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Moreover:

$$\{(55), \text{Re}(\mathcal{S}_1) > 0 \text{ and } \text{Re}(\mathcal{S}_2) < 0\} \Rightarrow \{p\vartheta_1 < 0 \text{ and } q\vartheta_2 < 0\}. \quad (57)$$

While the left condition of (57) can readily be analytically checked in the constant

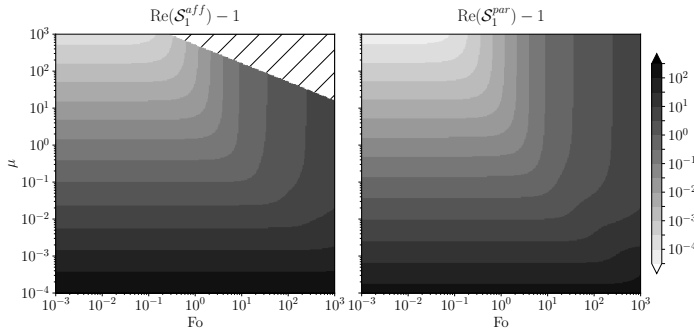


Fig. 3:  $\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{aff}}) - 1$  (left) and  $\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{par}}) - 1$  (right) with respect to  $\text{Fo}$  and  $\mu$ . Note that both axes and the colorbar are in logarithmic scale. The hatched area corresponds to values of  $(\text{Fo}, \mu)$  for which the computations of Bessel functions in  $\mathcal{S}_1^{\text{aff}}$  suffer from numerical instability.

viscosity case (using  $\mathcal{S}_j^{\text{cst}}$  defined in (28)), we have only been able to numerically check it in the affine and parabolic cases (see Fig. 3). Hence, from now on, we assume

the left condition of (57) to be true, so that its right condition is satisfied as well. By injecting this into (56), we obtain:

$$\{(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^* \text{ and } pq = -1\} \Rightarrow \{\forall \omega \in \mathbb{R}, \rho_{RR}(p, q, \omega) < 1\}. \quad (58)$$

The left condition of (58) is not optimal in terms of convergence speed, partly because of the limitations induced by (55), but it does ensure the convergence of the SWR algorithm with RR interface conditions, and its simple formulation can easily be implemented. Moreover, (58) illustrates the benefits of investigating RR-based SWR algorithms. Indeed, for DN-based ones,  $\rho_{DN}$  is directly derived from the problem's setting, hence convergence cannot be guaranteed; for RR-based ones, the  $pq + 1$  term in (56) permits modulating  $\rho_{RR}$  and thus potentially converging for problem settings under which DN-based algorithms diverge.

We now aim at extending the analytically certified region of convergence in the  $(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  space beyond the particular line  $pq = -1$ . For doing so, we still assume that the left condition of (57) is satisfied. Thanks to the bounds on  $\rho_{DN}$  determined in Sec. 4.3, in some cases, it is possible to predict the constant sign of  $\rho_{DN}^2 - 1$ , and then to choose  $(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  such that  $pq + 1$  has the opposite sign of  $\rho_{DN}^2 - 1$ . Yet, in other cases, the sign of  $\rho_{DN}^2 - 1$  can change with respect to  $\omega$ . However, this issue can be circumvented at theoretical (constant  $\nu_j$ ) or practical (affine or parabolic  $\nu_j$ ) levels.

**Proposition 2** *If the viscosity profiles are constant on each subdomain ( $\nu = \nu_j^c$ ), and if  $(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  are such that:*

$$-p \leq \frac{2}{\Gamma_0} \frac{\lambda}{|h_1|} \quad \text{and} \quad q \geq \frac{(\Gamma_0)^2}{2} |h_2|, \quad (59)$$

where  $\Gamma_0 \approx 1.45529$  is independent of the problem setting, then the SWR algorithm (10) with the RR transmission conditions defined in (23) converges for all  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 3** *If the viscosity profiles are constant on each subdomain ( $\nu = \nu_j^c$ ), and if  $(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  are such that:*

$$-p \geq \frac{(\Gamma_0)^2}{2} \lambda |\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega_{\max})| \quad \text{and} \quad q \leq \frac{2}{\Gamma_0} |\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega_{\max})|, \quad (60)$$

then the SWR algorithm (10) with the RR transmission conditions defined in (23) converges for all  $\omega \in I_\omega$ .

*Conjecture 1* Proposition 2 holds in the case of affine or parabolic viscosities. This means for all three choices of viscosity profiles, the choice of RR parameters providing the exact transparent conditions in the stationary case with the constant viscosity profiles  $\nu_j^{\text{cst}} = \nu_j(0)$  (i.e.  $p_0 = -\lambda/|h_1|$  and  $q_0 = |h_2|$ ) leads to SWR convergence ( $\rho_{RR}(\omega, p_0, q_0) < 1$ ).

*Conjecture 2* In the cases of affine or parabolic  $\nu_j$ , if  $(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  are such that either of these conditions are met:

$$-p \leq \frac{|\mathcal{S}_1^\nu(\omega_{\max})|}{|\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega_{\max})|} \frac{(\Gamma_0)^2}{2} \lambda \left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{cst,sta}} \right| \quad \text{and} \quad q \geq \frac{|\mathcal{S}_2^\nu(\omega_{\max})|}{|\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega_{\max})|} \frac{2}{\Gamma_0} \left| \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{cst,sta}} \right|, \quad (61a)$$

$$-p \geq \frac{\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\nu,\text{sta}} \right|}{\left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{cst,sta}} \right|} \frac{2}{\Gamma_0} \lambda \left| \mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega_{\max}) \right| \quad \text{and} \quad q \leq \frac{\left| \mathcal{S}_{2,f=0}^{\nu,\text{sta}} \right|}{\left| \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{cst,sta}} \right|} \frac{(\Gamma_0)^2}{2} \left| \mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega_{\max}) \right|, \quad (61b)$$

then the SWR algorithm (10) with the RR transmission conditions defined in (23) converges for all  $\omega \in I_\omega$ .

*Conjecture 3* Moreover, if  $\omega \mapsto |\text{Re}[\mathcal{S}_1(\omega)]|$  is increasing and  $\omega \mapsto |\text{Re}[\mathcal{S}_2(\omega)]|$  is decreasing, then (59) and (61) can be substituted with these less constraining sets of conditions:

$$-p \leq \frac{2}{\Gamma_0} \lambda \left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta},\nu} \right| \quad \text{and} \quad q \geq \frac{(\Gamma_0)^2}{2} \left| \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta},\nu} \right|, \quad (62a)$$

or

$$-p \geq \frac{(\Gamma_0)^2}{2} \lambda \left| \mathcal{S}_1^\nu(\omega_{\max}) \right| \quad \text{and} \quad q \leq \frac{2}{\Gamma_0} \left| \mathcal{S}_2^\nu(\omega_{\max}) \right|. \quad (62b)$$

In App. 4, Props. 2 and 3 are proved and Conjs. 1, 2 and 3 are discussed. While Prop. 2 and (62a) offer sufficient condition for theoretical SWR convergence ( $\omega \in \mathbb{R}$ ), Prop. 3 and (62b) are limited to its discrete implementation ( $\omega \in I_\omega$ ). Interestingly, for all three choices of viscosity profiles, the choice of RR parameters providing the exact transparent conditions in the stationary case (i.e.  $p_0 = -\lambda \left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta},\nu} \right|$  and  $q_0 = \left| \mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta},\nu} \right|$ ) leads to SWR convergence ( $\rho_{\text{RR}}(\omega, p_0, q_0) < 1$ ).

## 5 Numerical experiments

In this section, we illustrate the different properties highlighted in the previous sections with numerical experiments. In particular, we numerically investigate the influence of continuously variable coefficients on the convergence in the case of DN and RR interface conditions in view of our theoretical results. We directly simulate the equations for the errors, i.e. we set  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = 0$ ,  $\mathbf{U}_{1,g} = \mathbf{U}_{2,g} = 0$  in (3).

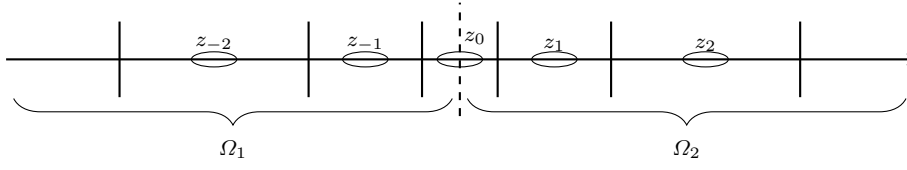


Fig. 4: Grid arrangement for the discretization of model problem (3) on subdomains  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ . Vertical lines indicate interfaces between grid cells while ellipses indicate cell centers. The vertical dashed line represents the interface between  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ .

### 5.1 Discretization

Because viscosity coefficients  $\nu_j(z)$  can have large variations in space, we use a nonuniform grid with increased resolution in the vicinity of the interface. On subdomain  $\Omega_j$  of length  $|h_j|$ , the location of the cell center  $z_k$  for grid cell  $k$  is

$$z_k = h_c \sigma_k + (|h_j| - h_c) \frac{\sinh(\sigma_k \theta_s)}{\sinh \theta_s}, \quad \sigma_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0, \dots, N;$$

where  $N + 1$  is the number of grid points for the discretization on  $\Omega_j$ , and  $(h_c, \theta_s)$  two parameters controlling the grid stretching. For our experiments, we choose  $h_c = 10^{-3}|h_j|$ ,  $\theta_s = 10^{-1}N$  and  $N \gg 10$ , which leads to a resolution of  $\Delta z \approx 10^{-3}|h_j|$  near the interface and  $\Delta z \approx 10^{-1}|h_j|$  near the external boundaries. As shown in Fig. 4, the interface is located in the middle of a grid cell at  $z_0 = 0$ . Regarding the discretization in time, in order to circumvent the stability issues of the Euler forward scheme to integrate the Coriolis term in (3), a Forward-Backward approach is used. For a velocity vector  $\mathbf{U} = (u, v)$ , this scheme reads:

$$u_k^* = u_k^n + \Delta t f v_k^n, \quad v_k^* = v_k^n - \Delta t f u_k^*.$$

The order of integration of  $u$  and  $v$  is inverted from one time-step to the other to minimize splitting errors. The diffusion is then discretized using a standard implicit finite-difference scheme. This leads to a tridiagonal system for interior grid points, which reads (for  $u$ , with the same applying for  $v$ ):

$$a_k u_{k-1}^{n+1} + b_k u_k^{n+1} + c_k u_{k+1}^{n+1} = u_k^*, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (63)$$

where  $a_k = -\frac{\nu_{k-1/2} \Delta t}{\Delta z_k \Delta z_{k-1/2}}$ ,  $c_k = -\frac{\nu_{k+1/2} \Delta t}{\Delta z_k \Delta z_{k+1/2}}$ , and  $b_k = 1 - a_k - c_k$ , with  $\Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$  and  $\Delta z_{k+1/2} = z_{k+1} - z_k$ . Same applies to the  $v$  velocity component.

Since the interface is located at a cell center (Fig. 4), the evaluation of the gradient  $(\partial_z u)_0$  at the interface (required for Neumann and Robin conditions) is obtained via extrapolation with a second-order formula. Simulations have been performed using a multiplicative Schwarz algorithm initialized with a random guess at the interface, so that the observed error widely samples the temporal frequencies that can be represented by the computational grid.

## 5.2 Numerical experiments for Dirichlet-Neumann interface conditions

We compare the theoretical convergence rate  $\rho_\varphi(\omega)$  on  $I_\omega$ , with the observed one  $\rho_{\mathbf{U}}^k(z=0)$  defined in (18), for the three viscosity profiles, and for fixed parameters  $h_j$ ,  $\nu_j^c$  and  $\partial_z \nu_j(0)$ . This comparison is illustrated by Fig. 5 and 6. The left panels represent the theoretical convergence rates  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}(\omega)$ ,  $\rho_{\text{DN}}^{\text{aff}}(\omega)$  and  $\rho_{\text{DN}}^{\text{par}}(\omega)$  for different parameter values, and the convergence rates obtained from numerical simulations. Since the latter vary from one Schwarz iteration to the next one, they are not restricted to a single line but are materialized by a shaded area delimited by the minimum and maximum observed values over  $I_\omega$ . Since we consider  $f \neq 0$ , the theoretical convergence rates are not symmetrical with respect to  $\omega = 0$ , hence the figures feature two curves for each rates: one for  $\rho_\varphi(\omega > 0)$  and one for  $\rho_\varphi(\omega < 0)$ , with  $|\omega|$  as the  $x$ -axis. Several remarks can be drawn. First, the numerically observed convergence rates satisfy the theoretical bound given by (19). Indeed, the maximum of the curves is systematically above the grey shaded areas, which are bounded by  $\min_k \rho_{\mathbf{U}_2}^k(z=0)$  and  $\max_k \rho_{\mathbf{U}_2}^k(z=0)$  (where  $k$  is the iteration number). As expected, the convergence (or divergence) of the SWR algorithm depends on both the physical configuration and the nature of the viscosity profile (constant, affine or parabolic). For instance, as shown in the right panels of Fig. 5 and 6, there are situations where the algorithm converges only for the constant viscosity case and diverges in the affine and parabolic cases (while the exact opposite behaviour can be found for other parameter values). These examples illustrate that the spatial variations of the diffusion coefficient is determining for the SWR algorithm convergence, and that results from one particular choice cannot be generalized to other ones.

Figure 6 confirms the consistency between the numerically observed convergence rate, computed in the physical space, and the theoretical convergence rate, computed in the Fourier space. The observed convergence rates (right panel) are smaller during the first iterations. This is due to the rapid damping of error components corresponding to the frequencies with fast convergence. As iterations progress, the errors at slower-converging frequencies have more influence on the  $\mathcal{L}^2$  norm, and thus on the observed convergence rate. This results in observed convergence rates which increasing at each iteration. Consistently, when the variations of the theoretical convergence rate in the Fourier space are small, the observed convergence rate is more stable throughout the iterations.

Figure 6 also shows that the peak corresponding to  $\omega + f = 0$  in the theoretical convergence rates indeed impacts the convergence at a numerical level. Such peak appears in the theoretical derivation only when considering finite size domains. Without these hypotheses, the curve for the convergence rate would be flat, corresponding to  $\rho(\omega > 0)$ . This example illustrates that the observed convergence rate is larger than the one given by the flat portion of the theoretical convergence rate, because its maximum value is influenced by the asymptotic case  $\omega + f \rightarrow 0$ . Adding the rotation ( $f \neq 0$ ) shifts this peak by  $-f$  in the  $\omega$  space. In the case where  $|f| < \pi/\delta t$ , the bounds for  $\rho^{\text{obs}}$  are the same as with the Coriolis effect. But if  $|f| > \pi/\delta t$ , or in the



stationary case, this shift could change the bounds and thus the convergence of the algorithm.

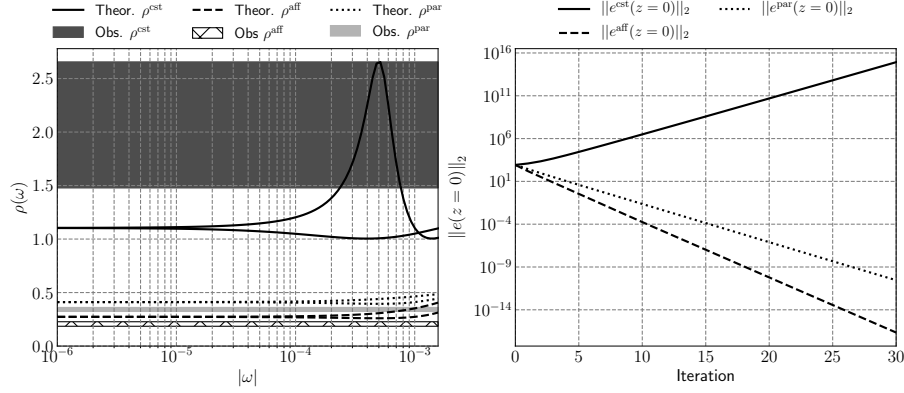


Fig. 5: Left panel: convergence rates with respect to  $|\omega| \leq \pi/\Delta t$  for three different viscosity profiles: constant (solid lines), parabolic (dotted lines) and affine (dashed lines). The two curves correspond to the theoretical convergence rate  $\rho(\omega > 0)$  and  $\rho(\omega < 0)$ . The grey or hatched areas correspond to the values reached by the observed convergence rate in  $\mathcal{L}^2$  norm. Right panel:  $\mathcal{L}^2$  norm of the error on  $(u, v)(z = 0)$  as a function of the iteration number. Here the parameter values are:  $h_1 = -50$  m,  $\nu_1^c = 0.8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\partial_z \nu_1(0) = -0.006 \text{ m s}^{-1}$ ,  $h_2 = 100.0$  m,  $\nu_2^c = 0.09 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\partial_z \nu_2(0) = 0.4 \text{ m s}^{-1}$ ,  $f = 5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta t = 2000$  s.

### 5.3 Numerical experiments for RR interface

Here we focus on the calculation of Robin coefficients for optimizing the SWR algorithm convergence, as explained in Sec. 4.4. While previous studies have already determined the optimized coefficients in various cases with infinite domain, constants viscosity profiles and without Coriolis effect [e.g. 10, 11, 21], the assumptions made during their determination may lead to such coefficients being irrelevant in the cases investigated below. In Fig. 7, the behaviour of the SWR algorithm for a parabolic profile is shown, with four different choices of Robin coefficients leading to four different convergence rates:

- (a)  $\rho_0^{\text{RR,par}}$ , corresponding to optimized coefficients analytically determined in [21] for infinite domain, constant viscosity and no Coriolis term (the corresponding convergence rate will be referred to as  $\rho_0^{\text{RR,par}}$ );
- (b)  $\rho_1^{\text{RR,par}}$ , corresponding to numerically optimized coefficients by solving the (52) min-max problem on  $\rho_{\text{RR}}^{\text{cst}}$ ;
- (c)  $\rho_2^{\text{RR,par}}$ , same as (b) with solving (52) on  $\rho_{\text{RR}}^{\text{aff}}$ ;

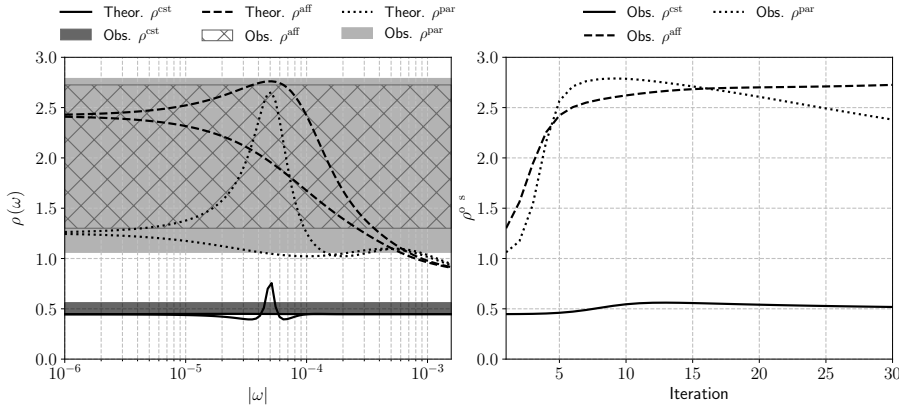


Fig. 6: Left panel: same as left panel of Fig. 5 but for different parameter values. Right panel: observed convergence rates in  $\mathcal{L}^2$  norm on  $(u, v)(z = 0)$  as a function of the iterations. Both panels use the same  $y$ -axis. Here the parameter values are:  $h_1 = -50$  m,  $\nu_1^c = 0.012$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $\partial_z \nu_1(0) = -0.04$  m s<sup>-1</sup>,  $h_2 = 200$  m,  $\nu_2^c = 0.06$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $\partial_z \nu_2(0) = 0.01$  m s<sup>-1</sup>,  $f = 5 \times 10^{-5}$  s<sup>-1</sup> and  $\Delta t = 2000$  s.

(d)  $\rho_3^{\text{RR,par}}$ , same as (b) with solving (52) on  $\rho_{\text{RR}}^{\text{par}}$ .

As in the DN case, the numerically observed convergence rates agree well with the theoretical bound given by (19). Figure 7a displays the theoretical convergence rates  $\rho_s^{\text{RR,par}}$  ( $s \in \{0 \dots 3\}$ ). This figure clearly illustrates that significant gain in performance can be obtained through optimizing Robin coefficients as consistently as possible with the practical problem of interest. As confirmed by the experiments shown in Fig. 7b, optimizing the Robin coefficients using a convergence rate which accounts for the parabolic viscosity profile, finite size subdomains and the Coriolis effect provides a very efficient algorithm. On the contrary, other alternatives, where simplifications had been made, are at best suboptimal and may even lead to divergence. Once again, neglecting the variations of the viscosity in the convergence analysis can conduct to critically erroneous choices of Robin coefficients.

Besides the determination of optimized Robin coefficients, Sec. 4.4 dealt with different ways of choosing acceptable coefficients without numerically solving the costly (52) min-max problem. Figure 8 maps the maximum (w.r.t.  $\omega$ ) of the convergence rate as a function of  $p < 0$  and  $q > 0$ , for the three types of considered viscosity profiles, with specific symbols localizing the four different couples of  $(p, q)$  values discussed in previous paragraph, and used in Fig. 7.  $(p, q)$  values corresponding to optimized parameter values in the nonrotating and stationary case (i.e.,  $p_0 = -\lambda S_{1,f=0}^{\text{sta,par}}$  and  $q_0 = -S_{2,f=0}^{\text{sta,par}}$ ), are also displayed.

The left panel of Fig. 8 underlines that using Robin coefficients obtained from optimizing the constant or affine viscosity case does not ensure good convergence of the model with a parabolic viscosity profile. These maps also display the areas of sufficient conditions for RR-based SWR algorithm convergence, established in Sec. 4.4.

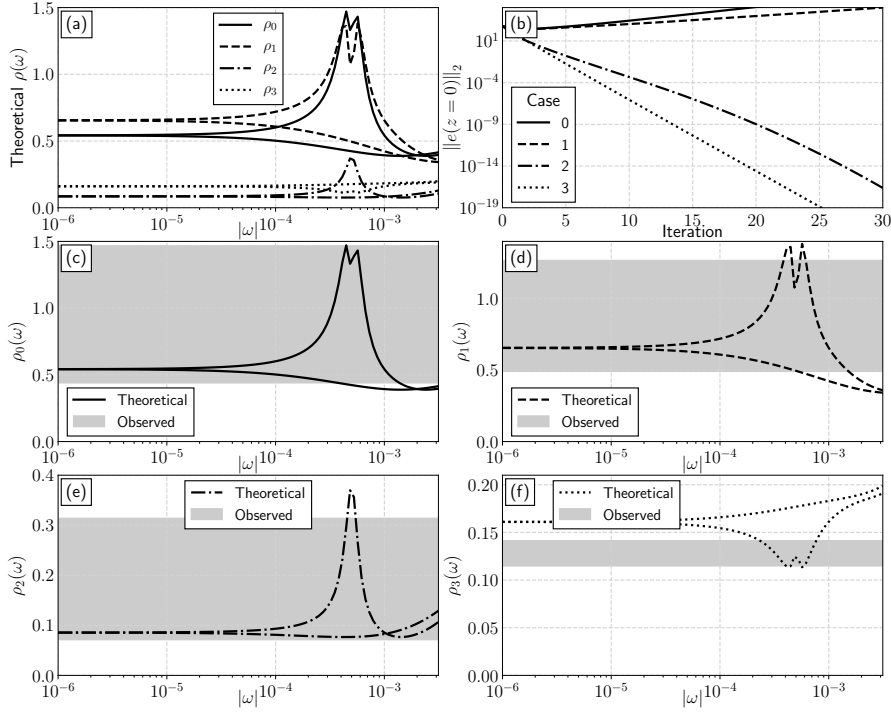


Fig. 7: (a): Theoretical convergence rate with respect to  $|\omega| \leq \pi/\Delta t$  for a given parabolic viscosity profile. The four couples of curves correspond to different choices of Robin coefficients (see Sec. 5.3). (b): Evolution of the  $L^2$ -norm of the error on  $(u, v)(z = 0)$  with respect to the iterations for numerical simulations in the same setting as reported in (a). (c)-(f): details of the four cases from (a), one by one. Grey zones correspond to the amplitude of the values reached by the observed convergence rate over the iterations and the temporal frequencies. Parameter values are:  $h_1 = -50$  m,  $\nu_1^c = 0.06$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $\partial_z \nu_1(0) = -0.001$  m s<sup>-1</sup>,  $h_2 = 200$  m,  $\nu_2^c = 0.012$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $\partial_z \nu_2(0) = 0.04$  m s<sup>-1</sup>,  $f = 5 \times 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>,  $\Delta t = 1000$  s.

As explained in Sec. 4.4, the  $(p_0, q_0)$  couple from the nonrotating and stationary case is located close to the white zone, which ensures convergence for all three viscosity profiles without requiring solving a costly optimization problem.

## 6 Conclusion

In this paper, we have analyzed the convergence of global-in-time Schwarz waveform relaxation algorithms on the coupled Ekman layer problem with continuously variable viscosity coefficients. We have obtained new theoretical results for problems featuring several delicacies which are very often neglected in existing convergence analyses: viscosity profiles are allowed to vary in space and the Coriolis effect as-

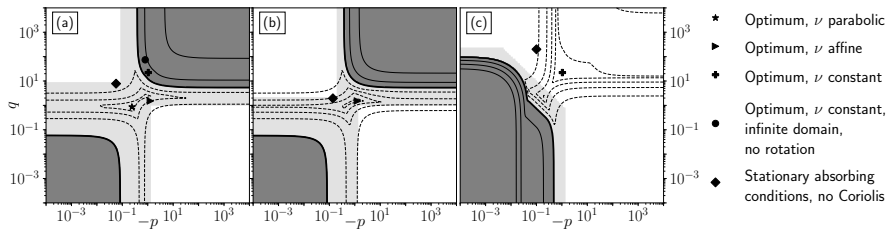


Fig. 8: Contour lines:  $\max_{\omega} \log_{10} \rho_{RR}(\omega)$  with respect to  $(-p, q) \in \mathbb{R}_+^2$  for different viscosity profiles: (a) parabolic; (b) affine; (c) constant. The bold line indicates  $\max_{\omega} \log_{10} \rho_{RR}(\omega) = 0$ ; thin full (resp. dashed) lines are drawn with a  $\pm 0.2$  increment. White zones correspond to areas of convergence guaranteed by Props. 2-3 (for constant  $\nu_j$ ) and Conjecture 3 (for affine and parabolic  $\nu_j$ ); light grey zones to observed convergence without having those conditions satisfied; dark grey zones to divergence. The first four symbols correspond to the values of  $(p, q)$  used in Fig. 7. The fifth symbol corresponds to  $(p_0, q_0)$  obtained in the stationary case without rotation (Sec. 4.4). The parameter values are the same as in Fig. 7.

sociated with the Earth's rotation is accounted for. First, we have emphasized that including the Coriolis effect amounts to investigating a reaction-diffusion equation in the complex space. We then have considered two types of SWR interface conditions (Dirichlet-Neumann (DN) and Robin-Robin (RR)), and three types of viscosity profiles (constant, affine and parabolic). Fourier space convergence rates have been given for all three cases, with indications on how such results are linked to empirical convergence rates observed from numerically simulated problems. In our physically realistic setting, we have defined analytical bounds of SWR convergence rate for constant viscosity profiles for the DN interface conditions, while for the RR case we have conjectured sufficient conditions ensuring convergence. Similar results extended to the affine and parabolic viscosity cases have also been numerically assessed. More importantly, we have emphasized that spatial variations in viscosity can be determining on the convergence of SWR algorithm, and that neglecting them can mislead preliminary convergence analyses.

This work is part of a community effort to mathematically and numerically evaluate the coupling methods presently used in realistic climate models. Several open perspectives are left. First, some of this work's conclusions rely on numerical conjectures that have not been proved, but only observed. Second, generalizing our study to cubic viscosity profiles would be interesting, as this would include the profile proposed by [33] which is used as a baseline in broadly-used turbulence schemes. In the same way as Bessel (resp. hypergeometric) functions are used for describing SWR algorithm solutions for affine (resp. parabolic) viscosity profiles, Heun's function is a good candidate for studying the cubic case. However, preliminary numerical studies have suffered from numerical instabilities arising from evaluating such functions. It should also be borne in mind that other recently proposed waveform relaxation algorithms derived from Dirichlet-Neumann conditions [e.g., 16, 18] have not been

investigated here, and may lead to convergence properties able to compete with the RR-based SWR algorithms presented here.

On the longer term, a significant challenge would be to investigate SWR algorithms in the context of viscosity profiles resulting from a turbulent kinetic energy (TKE) closure. Such methods, which are increasingly used in climate models, rely on solving an additional prognostic equation and result in space and time varying viscosity profiles depending nonlinearly on model variables. Investigating idealized testcases are a necessary and instructive endeavor for accurately seizing the main numerical challenges arising from model coupling.

## Acknowledgements

The authors acknowledge the support of the French national research agency (ANR) through contract ANR-16-CE01-0007.

## References

1. Audusse E, Dreyfuss P, Merlet B (2010) Optimized Schwarz waveform relaxation for the primitive equations of the ocean. *SIAM J Sci Comput* 32(5):2908–2936, DOI 10.1137/090770059
2. Beljaars A, Dutra E, Balsamo G, Lemarié F (2017) On the numerical stability of surface–atmosphere coupling in weather and climate models. *Geosci Model Dev* 10(2):977–989
3. Bennequin D, Gander MJ, Halpern L (2004) Optimized Schwarz Waveform Relaxation Methods for Convection Reaction Diffusion Problems. Tech. rep., 2004-24, LAGA, Université Paris 13
4. Blayo E, Halpern L, Japhet C (2007) Optimized Schwarz waveform relaxation algorithms with non-conforming time discretization for coupling convection-diffusion problems with discontinuous coefficients. In: *Domain decomposition methods in science and engineering XVI, Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, vol 55, Springer, Berlin, pp 267–274
5. Brassington G, Martin M, Tolman H, Akella S, Balmeseda M, Chambers C, Chassignet E, Cummings J, Drillet Y, Jansen P, Laloyaux P, Lea D, Mehra A, Mirouze I, Ritchie H, Samson G, Sandery P, Smith G, Suarez M, Todling R (2015) Progress and challenges in short- to medium-range coupled prediction. *J Oper Oceanogr* 8:s239–s258
6. Bye J (2002) Inertially coupled Ekman layers. *Dynam Atmos Oceans* 35(1):27–39
7. Dubois O, Gander MJ, Loisel S, A ASC, Daniel B (2012) The optimized Schwarz method with a coarse grid correction. *SIAM J Sci Comput* 34:A421–A458
8. Dunster T (2010) Legendre and related functions. In: *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*, Cambridge University Press, chap 14, URL <http://dlmf.nist.gov/14>
9. Ekman V (1905) On the influence of the Earth’s rotation in ocean-currents. *Arch Math Astron Phys* 2:1–52
10. Gander MJ, Halpern L (2003) Méthodes de relaxation d’ondes (SWR) pour l’équation de la chaleur en dimension 1. *Comptes Rendus Mathématique* 336(6):519 – 524
11. Gander MJ, Halpern L (2007) Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems. *SIAM J Numer Anal* 45(2)
12. Gander MJ, Xu Y (2016) Optimized Schwarz methods for model problems with continuously variable coefficients. *SIAM J Sci Comput* 38:A2964–A2986
13. Gander MJ, Halpern L, Nataf F (1999) Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation. In: Lai CH, Bjørstad P, Cross M, Widlund O (eds) *Proceedings of the 11th International Conference on Domain Decomposition Methods*
14. Gander MJ, Halpern L, Kern M (2007) A Schwarz waveform relaxation method for advection—diffusion—reaction problems with discontinuous coefficients and non-matching grids. In: Widlund OB, Keyes DE (eds) *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp 283–290

15. Gander MJ, Jiang YL, Li RJ (2013) Parareal Schwarz waveform relaxation methods. In: Bank R, Holst M, Widlund O, Xu J (eds) *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XX*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp 451–458
16. Gander MJ, Kwok F, Mandal BC (2016) Dirichlet-neumann and neumann-neumann waveform relaxation algorithms for parabolic problems. *Electron Trans Numer Anal* 45:424–456
17. Gander MJ, Kwok F, Mandal BC (2016) Dirichlet-Neumann and Neumann-Neumann waveform relaxation for the wave equation. In: Dickopf T, Gander MJ, Halpern L, Krause R, Pavarino LF (eds) *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXII*, Springer International Publishing, Cham, pp 501–509
18. Gander MJ, Kwok F, Mandal BC (2020) Dirichlet–Neumann waveform relaxation methods for parabolic and hyperbolic problems in multiple subdomains. *BIT Numer Math* DOI 10.1007/s10543-020-00823-2
19. Grisogono B (1995) A generalized Ekman layer profile with gradually varying eddy diffusivities. *Quart J Roy Meteorol Soc* 121(522):445–453
20. Keyes DE, et al. (2013) Multiphysics simulations: Challenges and opportunities. *International Journal of High Performance Computing Applications* 27(1):4–83
21. Lemarié F, Debreu L, Blayo E (2013) Toward an optimized global-in-time Schwarz algorithm for diffusion equations with discontinuous and spatially variable coefficients, part 1: The constant coefficients case. *Electron Trans Numer Anal* 40:148–169
22. Lemarié F, Debreu L, Blayo E (2013) Toward an optimized global-in-time Schwarz algorithm for diffusion equations with discontinuous and spatially variable coefficients, part 2: the variable coefficients case. *Electron Trans Numer Anal* 40:170–186
23. Lemarié F, Blayo E, Debreu L (2015) Analysis of ocean-atmosphere coupling algorithms: Consistency and stability. *Procedia Computer Science* 51(Supplement C):2066 – 2075, DOI 10.1016/j.procs.2015.05.473, iCCS 2015
24. Lemarié F, Debreu L, Madec G, Demange J, Molines J, Honnorat M (2015) Stability constraints for oceanic numerical models: implications for the formulation of time and space discretizations. *Ocean Modell* 92:124 – 148
25. Lewis D, Belcher S (2004) Time-dependent, coupled, Ekman boundary layer solutions incorporating Stokes drift. *Dynam Atmos Oceans* 37(4):313–351
26. Lions J, Magenes E (1968) *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol 1. Dunod
27. Lions J, Magenes E (1968) *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol 2. Dunod
28. Lions PL (1990) On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains. In: *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Houston, TX, 1989), SIAM, Philadelphia, PA, pp 202–223
29. Madsen OS (1977) A realistic model of the wind-induced Ekman boundary layer. *J Phys Oceanogr* 7(2):248–255, DOI 10.1175/1520-0485(1977)007<0248:ARMOTW>2.0.CO;2
30. Marti O, Nguyen S, Braconnot P, Valcke S, Lemarié F, Blayo E (2020) A Schwarz iterative method to evaluate ocean-atmosphere coupling schemes. Implementation and diagnostics in IPSL-CM6-SW-VLR. *Geosc Model Dev Disc* pp 1–19, DOI 10.5194/gmd-2020-307
31. Martin V (2009) Schwarz waveform relaxation algorithms for the linear viscous equatorial shallow water equations. *SIAM J Sci Comput* 31(5):3595–3625, DOI 10.1137/070691450
32. Monin AS, Obukhov AM (1954) Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere. *Trudy Akademii Nauk SSSR Geofizicheskogo Instituta* 24:163–187
33. O’Brien JJ (1970) A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer. *J Atmos Sci* 27(8):1213–1215
34. Olver FW (2010) Hypergeometric function. In: *NIST handbook of mathematical functions* hardback and CD-ROM, Cambridge University Press, chap 15, URL <http://dlmf.nist.gov/15>
35. Qaddouri A, Lee V (2011) The Canadian global environmental multiscale model on the Yin-Yang grid system. *Quart J Roy Meteorol Soc* 137(660):1913–1926, DOI 10.1002/qj.873
36. Qaddouri A, Laayouni L, Loisel S, Côté J, Gander MJ (2008) Optimized Schwarz methods with an overset grid for the shallow-water equations: preliminary results. *Appl Numer Math* 58(4):459–471, DOI 10.1016/j.apnum.2007.01.015
37. Smith GC, Bélanger JM, Roy F, Pellerin P, Ritchie H, Onu K, Roch M, Zadra A, Colan DS, Winter B, Fontecilla JS, Deacu D (2018) Impact of coupling with an ice-ocean model on global medium-range NWP forecast skill. *Mon Weather Rev* 146(4):1157–1180
38. Thery S (2021) *Étude numérique des algorithmes de couplage océan-atmosphère avec prise en compte des paramétrisations physiques des couches limites*. PhD thesis, Université Grenoble-Alpes, URL

<http://www.theses.fr/s184608>

39. Vallis GK (2006) Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation. Cambridge University Press

## 1 Quadratic viscosity basis functions

Eq. (12a) using the quadratic viscosity  $\nu(z) = c + bz + az^2$  for  $z \in \Omega$ , can be reduced to the Legendre ODE  $(1 - \eta^2) \frac{d^2 y}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dy}{d\eta} + \xi(\xi + 1)y = 0$  with

$$\eta(z) = \frac{2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left( z + \frac{b}{2a} \right) \quad \text{and} \quad \xi = -\frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4a(f + \omega)}{a}} \right), \quad (64)$$

where the choice of the sign in (64) does not bear any consequence. In particular, one can show that using relevant quadratic viscosity functions, (e.g. satisfying  $\nu(z) > 0$  for all  $z \in \Omega$  and  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ ),  $\eta \in \mathbb{R}$  and satisfies  $-1 < \eta(z) < 1$  for  $z \in \Omega$ . The functions given by (32) are then numerically satisfactory solutions to the Legendre ODE [meaning that computing a reasonable amount of sum terms leads to accurate values, 8], and thus to (12a). In our numerical results, Legendre functions have been computed using the hypergeometric function  ${}_2F_1$  [34] through:  $P_\xi^0(\eta) = {}_2F_1(\xi + 1, -\xi, 1; \eta)$ .

## 2 On the observed discretized convergence factor

Let us consider the numerical solution of the coupled problem (3) on a given time window  $\mathcal{T}_n$  using a finite difference discretization in time. The observed error can be written as (with  $\mathbf{U}_j = (u_j, v_j)$ ):

$$\mathbf{E}_j^{k,m}(z) = \mathbf{U}_j^{k,m}(z) - \mathbf{U}_j(z, t_j^m) \quad 1 \leq m \leq M_j, j \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{N}^*, \quad (65)$$

where  $m$  is an index for the time step,  $t_j^m$  is the physical time corresponding to time step  $m$ , and  $M_j$  is the total number of time steps for the numerical approximation of  $\mathbf{U}_j$  in  $\mathcal{T}_n$ . A convergence rate characterizing the behaviour of  $\mathbf{E}_j^{k,m} = (E_{u,j}^{k,m}, E_{v,j}^{k,m})$  as a function of  $k$  is:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{U}_j}^k = \frac{\left\| \left( \mathbf{E}_j^{k,m}(0^\mp) \right)_m \right\|_2}{\left\| \left( \mathbf{E}_j^{k-1,m}(0^\mp) \right)_m \right\|_2} = \frac{\left[ \sum_{m=1}^{M_j} \left( \left( E_{u,j}^{k,m}(0^\mp) \right)^2 + \left( E_{v,j}^{k,m}(0^\mp) \right)^2 \right) \right]^{1/2}}{\left[ \sum_{m=1}^{M_j} \left( \left( E_{u,j}^{k-1,m}(0^\mp) \right)^2 + \left( E_{v,j}^{k-1,m}(0^\mp) \right)^2 \right) \right]^{1/2}}, \quad k \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\}. \quad (66)$$

Also the discrete errors on the complex variables  $(\varphi, \bar{\varphi})$  are:

$$\mathbf{e}_j^{k,m}(z) = \begin{pmatrix} e_{\varphi,j}^{k,m}(z) \\ e_{\bar{\varphi},j}^{k,m}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_j^{k,m}(z) - \varphi(z, t_m^j) \\ \bar{\varphi}_j^{k,m}(z) - \bar{\varphi}(z, t_m^j) \end{pmatrix}, \quad (67)$$

where  $\varphi_j^{k,m}$  and  $\bar{\varphi}_j^{k,m}$  are defined by the Schwarz algorithm (10).  $\mathbf{E}_j^{k,m}$  is linked to  $\mathbf{e}_j^{k,m}$  by:

$$\mathbf{E}_j^{k,m} = \mathbf{P} \mathbf{e}_j^{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e_{\varphi,j}^{k,m} + e_{\bar{\varphi},j}^{k,m} \\ -ie_{\varphi,j}^{k,m} + ie_{\bar{\varphi},j}^{k,m} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

where  $\mathbf{P}$  is given in Sec. 2.2. Since  $\mathbf{P}$  is a unitary matrix (i.e.  $\mathbf{P}^{-1} = \bar{\mathbf{P}}^T$ ),

$$\|\mathbf{E}_j^{k,m}\|_2^2 = (\bar{\mathbf{e}}_j^{k,m})^T \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_j^{k,m} = (\bar{\mathbf{e}}_j^{k,m})^T \mathbf{e}_j^{k,m} = \|\mathbf{e}_j^{k,m}\|_2^2, \quad (69)$$

meaning that (66) becomes

$$\mathcal{R}_{\mathbf{U}_j}^k = \frac{\left[ \sum_{m=1}^{M_j} \left( (e_{\varphi,j}^{k,m}(0^\mp))^2 + (e_{\bar{\varphi},j}^{k,m}(0^\mp))^2 \right) \right]^{1/2}}{\left[ \sum_{m=1}^{M_j} \left( (e_{\varphi,j}^{k-1,m}(0^\mp))^2 + (e_{\bar{\varphi},j}^{k-1,m}(0^\mp))^2 \right) \right]^{1/2}}, \quad k \in \mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\}. \quad (70)$$

Let us now define  $\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,M_j} = \frac{\|(e_{\varphi,j}^{k,m}(z=0^\mp))\|_2}{\|(e_{\varphi,j}^{k-1,m}(z=0^\mp))\|_2} = \frac{\left[ \sum_{m=1}^{M_j} (e_{\varphi,j}^{k,m}(0^\mp))^2 \right]^{1/2}}{\left[ \sum_{m=1}^{M_j} (e_{\varphi,j}^{k-1,m}(0^\mp))^2 \right]^{1/2}}$  for  $k \in$

$\mathbb{N}^*, j \in \{1, 2\}$ . When  $M_j \rightarrow +\infty$  (i.e. simulating (10) on a infinite time window), the temporal grid can only generate modes which frequencies lie in  $I_\omega := \left[ -\frac{\pi}{\min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}}; \frac{\pi}{\min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \right]$ . This is due to the Nyquist-Shannon sampling theorem

[7].  $(e_{\varphi,j}^{k,m}(0^\mp))$  corresponds to the Fourier transform of the continuous error  $e_\varphi^k$  on  $I_\omega$ . The convergence factor denoted  $\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,\infty}$  can be linked to the errors in the Fourier space by the Parseval's theorem:

$$\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,\infty} = \frac{\left[ \sum_{m=1}^{\infty} (e_{\varphi,j}^{k,m}(0^\mp))^2 \right]^{1/2}}{\left[ \sum_{m=1}^{\infty} (e_{\varphi,j}^{k-1,m}(0^\mp))^2 \right]^{1/2}} = \frac{\left( \int_{\omega \in I} (\rho_{\varphi,j}^k(\omega))^2 |e_{\varphi,j}^{k-1}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}}{\left( \int_{\omega \in I} |e_{\varphi,j}^{k-1}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}},$$

which implies that  $\inf_{|\omega| \leq \pi / \min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega) \leq \tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,\infty} \leq \sup_{|\omega| \leq \pi / \min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega)$ .

Moreover, using the identity  $\sum_{m=1}^{M_j} x_m = \left( \sum_{m=1}^{\infty} x_m \right) \left( 1 - \left\{ \sum_{m=M_j+1}^{\infty} x_m \right\} / \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} x_m \right\} \right)$ ,



$\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,M_j}$  can easily be linked to  $\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,\infty}$ :

$$\left(\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,M_j}\right)^2 = \left(\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,\infty}\right)^2 \frac{1 - \Gamma_{\varphi,j}^{k,M_j}}{1 - \Gamma_{\varphi,j}^{k-1,M_j}} \quad \text{with } \Gamma_{\varphi,j}^{k,M_j} = \frac{\sum_{m=M_j+1}^{\infty} \left(e_{\varphi,j}^{k,m}(0^\mp)\right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \left(e_{\varphi,j}^{k,m}(0^\mp)\right)^2}. \quad (71)$$

Since  $\Gamma_{\varphi,j}^{k,M_j} \rightarrow 0$  as  $M_j \rightarrow \infty$  (thanks to §2.1), (71) can be rewritten as  $\tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,M_j} = \tilde{\rho}_{\varphi,j}^{k,\infty} + \mathcal{O}\left(\Gamma_{\varphi,j}^{k,M_j}, \Gamma_{\varphi,j}^{k-1,M_j}\right)$ . Finally the same relationships being true for  $e_{\varphi,j}^{k,m}$ , we end up with:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{U}_j}^k \leq \max \left\{ \sup_{|\omega| \leq \pi / \min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \rho_{\varphi,j}^k(\omega), \sup_{|\omega| \leq \pi / \min_{j \in \{1,2\}} \{\delta t_j\}} \rho_{\bar{\varphi},j}^k(\omega) \right\} + \epsilon. \quad (72)$$

### 3 Proof for the upper bound (47)

In this appendix we provide the proof for the upper bound (47) on  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$  for constant viscosity and Dirichlet-Neumann interface conditions given in Sec. 4.3. We first reformulate  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}}$  as  $\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} = \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{Q}(\sqrt{2\text{Fo}_2})}{\mathcal{Q}(\sqrt{2\text{Fo}_1})}}$  with

$$\mathcal{Q}(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{\cosh x + \cos x}.$$

#### 3.1 Proof for the upper bound (47) for $\text{Fo}_2 < \text{Fo}_1$

The derivative of  $\mathcal{Q}(x)$  cancels for  $x^*$  such that  $\tanh(x^*) + \tan(x^*) = 0$ . This transcendental equation has no root on  $[0, \pi/2]$  (and  $0 \leq \mathcal{Q}(x) \leq 1$  on that interval) and then one root  $x^{(*,k)}$  per interval  $[\pi/2 + k\pi, 3\pi/2 + k\pi]$  ( $k \geq 0$ ). For even values of  $k$ ,  $\mathcal{Q}(x^{(*,k)})$  is a local maximum and  $\mathcal{Q}(x) \geq 1$ , while for odd values of  $k$ ,  $\mathcal{Q}(x^{(*,k)})$  is a local minimum and  $\mathcal{Q}(x) \leq 1$ . Moreover it can be shown that  $\mathcal{Q}(x^{(*,0)}) > \mathcal{Q}(x^{(*,2)}) > \mathcal{Q}(x^{(*,4)}) > \dots > 1$  and  $\mathcal{Q}(x^{(*,1)}) < \mathcal{Q}(x^{(*,3)}) < \mathcal{Q}(x^{(*,5)}) < \dots < 1$ . This implies that the maximum of  $\mathcal{Q}(x)$  is  $\mathcal{Q}(x^{(*,0)})$  and thus that

$$\mathcal{Q}(x) \leq \mathcal{Q}(x^{(*,0)}), \quad x \geq 0.$$

If we now introduce  $\alpha = \sqrt{\text{Fo}_2/\text{Fo}_1}$  and consider  $x = \sqrt{2\text{Fo}_1}$ , our problem is to find the upper bound of  $\frac{\mathcal{Q}(\alpha x)}{\mathcal{Q}(x)}$  with  $\alpha \leq 1$  (because we consider the case  $\text{Fo}_2 < \text{Fo}_1$  here). It is straightforward to prove that  $\mathcal{Q}(\alpha x) \leq \mathcal{Q}(x^{(*,0)})$ , for  $x \geq 0, \alpha \leq 1$  and  $\mathcal{Q}(\alpha x)$  behaves like  $\mathcal{Q}(x)$  on the subintervals  $[\frac{\pi}{2\alpha} + k\pi, \frac{3\pi}{2\alpha} + k\pi]$ . We can then proceed sub-interval by sub-interval: (i) on  $[0, \pi/2]$   $\mathcal{Q}(x)$  increases more rapidly than  $\mathcal{Q}(\alpha x)$ . We thus have  $\frac{\mathcal{Q}(\alpha x)}{\mathcal{Q}(x)} \leq 1$  as soon as  $\alpha \leq 1$ ; (ii) on  $[\pi/2, 3\pi/2]$   $\mathcal{Q}(x)$  is larger than 1, meaning that  $\frac{1}{\mathcal{Q}(x)} \leq 1$ . We thus have  $\frac{\mathcal{Q}(\alpha x)}{\mathcal{Q}(x)} \leq \mathcal{Q}(x^{(*,0)})$  whatever the value

of  $\alpha$ ; (iii) on  $[3\pi/2, 5\pi/2]$   $Q(x)$  has a local minimum  $Q(x^{(\ast,1)})$  which is smaller than 1. We thus have  $\frac{1}{Q(x)} \leq \frac{1}{Q(x^{(\ast,1)})}$  and the worst case scenario is when this coincides with values of  $\alpha$  such that the maximum of  $Q(\alpha x)$  occurs for  $x \in [3\pi/2, 5\pi/2]$ . We thus obtain:

$$\frac{Q(\alpha x)}{Q(x)} \leq \frac{Q(x^{(\ast,0)})}{Q(x^{(\ast,1)})}.$$

Because of the ordering of the values  $Q(x^{(\ast,k)})$  given earlier (i.e.  $Q(x^{(\ast,k)})$  gets closer and closer to 1 as  $k$  increases), it is not needed to go beyond  $x = 5\pi/2$  since the upper bound could not be larger for  $x > 5\pi/2$ .

### 3.2 Proof for the upper bound (47) for $\text{Fo}_2 \geq \text{Fo}_1$

For this proof, we first study the behaviour of  $\frac{Q(x)}{x^2}$ . The sign of the derivative of  $\frac{Q(x)}{x^2}$  with respect to  $x$  is the same as

$$\cos^2(x) - \cosh^2(x) + x(\cosh(x) \sin(x) + \sinh(x) \cos(x)),$$

which is smaller or equal to zero for  $x \geq 0$ ,  $\frac{Q(x)}{x^2}$  is thus a decreasing function of  $x$  for  $x \geq 0$ . In the case  $\alpha \geq 1$  (i.e.  $\text{Fo}_2 \geq \text{Fo}_1$ ) we have  $\alpha x \leq x$ , hence  $\frac{Q(\alpha x)}{\alpha^2 x^2} \leq \frac{Q(x)}{x^2}$  which leads to  $\frac{Q(\alpha x)}{Q(x)} \leq \alpha^2$  where  $x = \sqrt{2\text{Fo}_1}$  and  $\alpha = \sqrt{\text{Fo}_2/\text{Fo}_1}$ . We can rewrite this last inequality in terms of  $\text{Fo}_j$  to obtain

$$\rho_{\text{DN}}^{\text{cst}} \leq \sqrt{\lambda \frac{\text{Fo}_2}{\text{Fo}_1}}. \quad (73)$$

Note that this also proves that  $|\mathcal{S}_2^{\text{st}}(\text{Fo})|$  decreases, and thus  $|\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\text{Fo})| \leq |\mathcal{S}_2^{\text{sta,cst}}| = |h_2|$ . Similarly,  $|\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\text{Fo})|$  increases and  $|\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\text{Fo})| \geq |\mathcal{S}_1^{\text{sta,cst}}| = |h_1|^{-1}$ .

## 4 Details on sufficient conditions for RR-based SWR algorithms

### 4.1 Proofs of Props. 2 and 3

These proofs are based upon the following lemma:

**Lemma 1** *If there exists  $(\gamma^\nu, \sigma_1^\nu, \Sigma_2^\nu) \in \mathbb{R}_+^3$  such that,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ :*

$$\forall j \in \{1, 2\}, \quad |\text{Im}(\mathcal{S}_j(\omega))| \leq \gamma^\nu |\text{Re}(\mathcal{S}_j(\omega))|, \quad (74a)$$

$$|\text{Re}(\mathcal{S}_1(\omega))| \geq \sigma_1^\nu, \quad (74b)$$

$$|\text{Re}(\mathcal{S}_2(\omega))| \leq \Sigma_2^\nu, \quad (74c)$$

then the following combination of conditions on  $(p, q) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  guarantees the convergence of the RR-based SWR algorithm, for all  $\omega \in \mathbb{R}$ :

$$-p \leq 2\lambda\sigma_1^\nu \quad \text{and} \quad q \geq \frac{1 + (\gamma^\nu)^2}{2} \Sigma_2^\nu. \quad (75)$$

*Proof (of Lemma 1)* By reorganising (56),  $\rho_{\text{RR}}(p, q, \omega) < 1$  is equivalent to :

$$\underbrace{pq\rho_{\text{DN}}^2 - 1 + 2p\vartheta_1}_{\vartheta_3} + \underbrace{2q \operatorname{Re}(\mathcal{S}_2) |\lambda\mathcal{S}_1|^2 + \rho_{\text{DN}}^2}_{\vartheta_4} - q \underbrace{(p + 2 \operatorname{Re}(\lambda\mathcal{S}_1))}_{\vartheta_5} < 0. \quad (76)$$

Since  $pq < 0$  and per hypothesis (57), we have  $\vartheta_3 < 0$ . Let us now exploit the conditions (74) to obtain (76). Using  $\rho_{\text{DN}}^2 = |\lambda\mathcal{S}_1||\mathcal{S}_2|$ , and recalling that  $\operatorname{Re}(\mathcal{S}_2) < 0$  and  $q > 0$ , then  $\vartheta_4 < 0$  is equivalent to  $-2q|\operatorname{Re}(\mathcal{S}_2)| + |\mathcal{S}_2|^2 < 0$ . (74c) implies  $|\mathcal{S}_2|^2 \leq (1 + (\gamma^\nu)^2)|\operatorname{Re}(\mathcal{S}_2)|^2$ . Then  $q > \frac{\Gamma_0^2}{2}|\operatorname{Re}(\mathcal{S}_2)|$  with  $\Gamma_0 = \sqrt{1 + (\gamma^\nu)^2}$  implies  $\vartheta_4 < 0$ . In the same way, because  $q > 0$  and  $\operatorname{Re}(\mathcal{S}_1) > 0$ ,  $-p < 2\lambda|\operatorname{Re}(\mathcal{S}_1)|$  is a sufficient condition for  $\vartheta_5 > 0$ .

*Proof (of Prop. 2)* As previously mentioned, we rely on Lemma 1. In the case of constant viscosities, then, using (28) and extensive reformulation (not detailed, analogous to (46)) yields:

$$\left| \frac{\operatorname{Im}(\mathcal{S}_j^{\text{cst}}(\omega))}{\operatorname{Re}(\mathcal{S}_j^{\text{cst}}(\omega))} \right| = \mathcal{V}(y_j) := \left| \frac{\sinh(y_j) - \sin(y_j)}{\sinh(y_j) + \sin(y_j)} \right| \quad \text{with} \quad y_j = \sqrt{2\operatorname{Fo}_j(\omega)}. \quad (77)$$

Analogously to what is done in App. 3, it can then be proved that:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\operatorname{Im}(\mathcal{S}_j^{\text{cst}}(\omega))}{\operatorname{Re}(\mathcal{S}_j^{\text{cst}}(\omega))} \right| \leq \gamma^{\text{cst}} := \mathcal{V}(y^*), \quad (78)$$

where  $y^*$  is the smallest positive root of  $\tanh(y) - \tan(y) = 0$ . Hence, (74a) is satisfied. Moreover, still in App. 3, it is proved that  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $|\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega)| \geq |\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{sta,cst}}| = 1/|h_1|$  and that  $|\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega)| \leq |\mathcal{S}_{2,f=0}^{\text{sta,cst}}| = |h_2|$ . Hence, (74b) and (74c) can be obtained by defining:

$$\sigma_1^{\text{cst}} := \left( \sqrt{1 + (\gamma^{\text{cst}})^2} |h_1| \right)^{-1} \quad \text{and} \quad \Sigma_2^{\text{cst}} := |h_2|. \quad (79)$$

Injecting (79) into (75), and defining  $\Gamma_0 := \sqrt{1 + (\gamma^{\text{cst}})^2}$ , lead to (59).  $\square$

*Proof (of Prop. 3)* The proof is analogous to that of Prop. 2, hence extensive detail is not provided. (78) still holds in that case with the same  $\gamma^{\text{cst}}$ . Moreover, since here  $\omega \in I_\omega \subsetneq \mathbb{R}$ , we know that there exists  $(\Sigma_1^{\text{cst}}, \sigma_2^{\text{cst}}) \in \mathbb{R}_+^2$  such that:

$$\forall \omega \in I_\omega, \quad \Sigma_1^{\text{cst}} \geq |\operatorname{Re}(\mathcal{S}_1(\omega))| \quad \text{and} \quad \sigma_2^{\text{cst}} \leq |\operatorname{Re}(\mathcal{S}_2(\omega))|. \quad (80)$$

Analogously to the proof of Lemma 1, and using (80), it can then be shown that (76), and thus SWR convergence, are satisfied as soon as:

$$-p \geq \frac{1 + (\gamma^{\text{cst}})^2}{2} \lambda \Sigma_1^{\text{cst}} \quad \text{and} \quad q \leq 2\sigma_2^{\text{cst}}. \quad (81)$$

Moreover, since  $|\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega))| \leq |\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega)|$  and  $\omega \mapsto |\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega)|$  is increasing (see App. 3), then  $\Sigma_1^{\text{cst}} := |\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega_{\text{max}})|$  is a suitable choice in (80). In the same way, since  $\Gamma_0 |\text{Re}(\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega))| \geq |\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega)|$  and  $\omega \mapsto |\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega)|$  is decreasing, then  $\sigma_2^{\text{cst}} = |\mathcal{S}_2^{\text{cst}}(\omega_{\text{max}})|/\Gamma_0$  satisfies (80). Reinjecting this into (81) and relying on  $\Gamma_0 := \sqrt{1 + (\gamma^{\text{cst}})^2}$  lead to (60), which, as previously mentioned, is a sufficient condition for SWR convergence with RR transmission conditions for  $\omega \in I_\omega$ .  $\square$

#### 4.2 Discussion on Conjectures 1, 2 and 3

As soon as the viscosity profiles are no longer constant, the validity of (57) and (74) can only be numerically assessed. From Fig. 3 we can conjecture that  $\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{aff}}) \geq 1$  (resp.  $\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{par}}) \geq 1$ ), which suggests that (57) and (74b) are satisfied on  $\mathcal{S}_1$ . Since  $\mathcal{S}_2(\mu, \text{Fo}) = -|h_2|/(|h_1|\mathcal{S}_1(\mu, \text{Fo}))$ , this would imply that (57) and (74c) are also satisfied for  $\mathcal{S}_2$ . Figure 9 shows numerical values of  $\log_{10}(\gamma)$ , with  $\gamma = |\text{Im}(\mathcal{S}_1^\nu)|/|\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu)|$  in the cases where  $\nu$  is affine and parabolic. It supports the idea that this ratio does not significantly depart from its constant viscosity value, which has been analytically found before. Then using result from App. 3 and (50) we find a lower bound to  $|\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega))|$ :

$$|\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega))| \geq |\mathcal{S}_1^\nu(\omega)|\Gamma_0^{-1} = |\mathcal{R}_1^\nu(\omega)|\Gamma_0^{-1}|\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega)| \geq |\mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{cst,sta}}|\Gamma_0^{-1}. \quad (82)$$

Analogously, an upper bound to  $|\text{Re}(\mathcal{S}_2^\nu(\omega))|$  can be found. Both bounds justify the first part of Conj. 1.

If  $\omega \in I_\omega$ , then the bounds on  $|\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega))|$  can be adjusted:

$$|\mathcal{R}_1^\nu(\omega_{\text{max}})| \left| \mathcal{S}_{1,f=0}^{\text{cst,sta}} \right| \Gamma_0^{-1} \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega))| \leq |\mathcal{R}_{1,f=0}^{\nu_1,\text{sta}}| |\mathcal{S}_1^{\text{cst}}(\omega_{\text{max}})|, \quad (83)$$

with analogous results for  $|\text{Re}(\mathcal{S}_2^\nu(\omega))|$ , hence Conj. 2.

Finally, assuming that  $\omega \mapsto |\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega))|$  is increasing and  $\omega \mapsto |\text{Re}(\mathcal{S}_2^\nu(\omega))|$  is decreasing, these new bounds justifying Conj. 3 can be established:

$$|\mathcal{S}_{1,f=0}^{\nu,\text{sta}}|\Gamma_0^{-1} \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_{1,f=0}^{\nu,\text{sta}})| \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega))| \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_1^\nu(\omega_{\text{max}}))| \leq |\mathcal{S}_1^\nu(\omega_{\text{max}})|, \quad (84a)$$

$$|\mathcal{S}_2^\nu(\omega_{\text{max}})|\Gamma_0^{-1} \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_2^\nu(\omega_{\text{max}}))| \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_2^\nu(\omega))| \leq |\text{Re}(\mathcal{S}_{2,f=0}^{\nu,\text{sta}})| \leq |\mathcal{S}_{2,f=0}^{\nu,\text{sta}}|. \quad (84b)$$

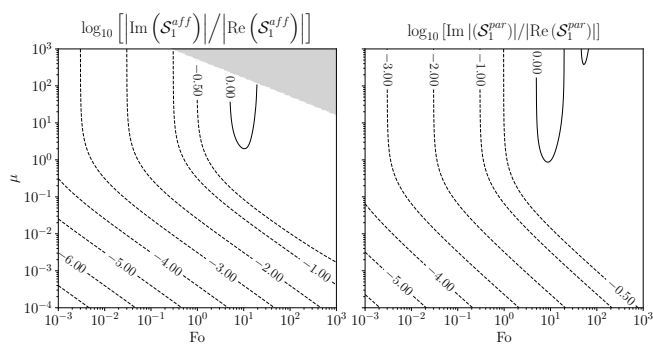


Fig. 9: Left:  $\log_{10} [|\text{Im}(\mathcal{S}_1^{\text{aff}})|/|\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{aff}})|]$ ; right:  $\log_{10} [|\text{Im}(\mathcal{S}_1^{\text{par}})|/|\text{Re}(\mathcal{S}_1^{\text{par}})|]$  with respect to  $F_0$  and  $\mu$  (both axes are in logarithmic scale). The grey area corresponds to values of  $(F_0, \mu)$  for which the computations of  $\mathcal{S}_1^{\text{aff}}$  suffer from numerical instability (in the Bessel function evaluation).

### 4.2.3 Compléments sur la convergence de l'algorithme de Schwarz pour le couplage de couches d'Ekman

Nous revenons ici rapidement sur l'influence des différentes spécificités de notre problème multiphysique (4.8). Uniquement dans ce paragraphe, nous reprenons les notations de l'article où le rapport entre les dérivées à l'interface est donné par  $\lambda$ .

**La prise en compte des longueurs des sous-domaines** Dans beaucoup d'études, la taille des domaines est supposée infinie. Cette hypothèse permet entre autre de n'exprimer le facteur de convergence qu'en fonction de deux fonctions de base (c'est quatre dans le cas de domaines de tailles finies). Cette simplification permet aussi d'obtenir des résultats analytiques dans la résolution du problème "inf-sup" pour l'optimisation de la convergence. Cependant, les résultats de notre article montrent que ce n'est pas seulement la taille des domaines qui influence la convergence, mais aussi le rapport entre elles. Ainsi par exemple, la figure 4.1 présente le maximum théorique du facteur de convergence  $\max_{\omega \in \mathbb{R}} \rho^{\text{cst}}(\omega)$  en fonction du rapport des viscosités à l'interface  $\lambda$ , et du rapport dépendant des hauteurs  $\sqrt{\lambda}|h_2/h_1|$ . Dans le cas de domaines infinis, le facteur de convergence  $\rho^{\infty, \text{cst}}(\omega) = \lambda$  pour tout  $\omega$ . Or la figure montre que pour des rapports de tailles des domaines tels que  $|h_2/h_1| > \sqrt{\lambda^{-1}}$ , on a  $\rho^{\infty, \text{cst}} < \max(\rho^{\text{cst}})$ . Ainsi négliger la finitude de la taille des domaines peut amener à prévoir une convergence alors que l'algorithme est divergent.

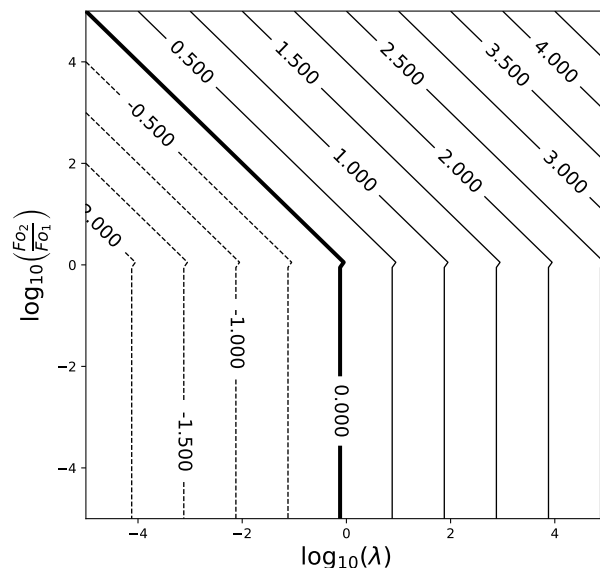


FIGURE 4.1 – Isolignes de  $\log_{10}$  du maximum théorique du facteur de convergence en fonction de  $\log_{10}(\lambda)$  et  $\log_{10}(\sqrt{\lambda}|h_2/h_1|)$  dans le cas où les viscosités sont constantes.

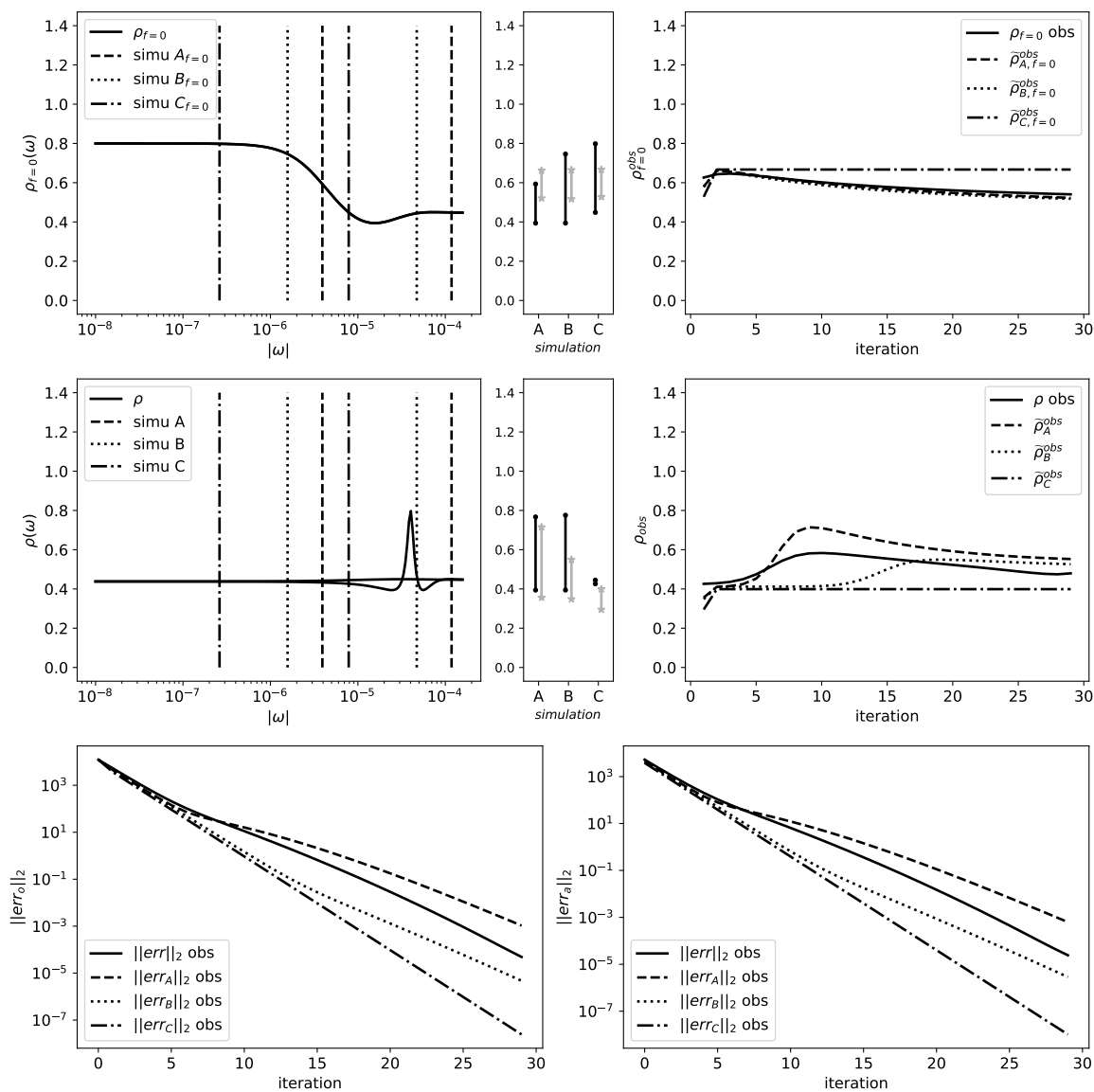


FIGURE 4.2 – Pour le jeu de données 1 du paragraphe 3.3.3. Les 4 panneaux du haut et du milieu présentent le facteur de convergence théorique (à gauche) et observé (à droite) pour différentes tailles de fenêtre de moyennage. En trait continu : algorithme de référence (sans moyennage) ; en trait tireté : moyennage sur une fenêtre de taille  $4\delta t$  ; en trait pointillé : moyennage sur une fenêtre de taille  $10\delta t$  ; en trait mixte : moyennage sur la fenêtre entière. La ligne du haut rappelle la version sans considérer l'effet de Coriolis donnée au §3.3.3. La ligne du milieu représente les résultats correspondants en considérant l'effet de Coriolis. Les panneaux du bas présentent la norme  $\mathcal{L}^2$  des erreurs à l'interface en fonction des itérations dans le domaine 1 à gauche et 2 à droite.

**Perturbation du taux de convergence de l'algorithme avec moyenne à l'interface par l'effet de Coriolis** L'application d'opérateurs "moyenne" à l'interface dans le cadre où on ne considère pas l'effet de Coriolis a été discuté à la section 3.3. Nous reprenons sur la figure 4.2 un des exemples du paragraphe 3.3.3 en considérant cette fois le terme de Coriolis. Il apparaît clairement que ce terme de Coriolis vient "perturber" la convergence théorique de l'algorithme et met en évidence son potentiel effet sur les fréquences "influentes". Dans cet exemple, pour les fenêtres  $\mathcal{T}_l$  de petites tailles, l'algorithme avec moyenne à l'interface converge moins vite que l'algorithme de référence. On retrouve bien l'influence du "pic" dû à l'effet de Coriolis dans les fréquences correspondant à l'estimation de  $\tilde{\rho}_{j,\mathcal{M}}^{n,\text{obs}}$  donnée par (3.47).

### 4.3 Application des algorithmes de Schwarz sur le problème océan-atmosphère simplifié

Dans cette section nous tentons de franchir une étape supplémentaire pour s'approcher des applications réelles. Pour cela, nous considérons le problème couplé avec une viscosité KPP, introduite au §1.3.2, spécifique au cadre océan-atmosphère. Cela revient à considérer le problème (1.40) pour lequel on suppose  $u^*$  fixé avec une forme plus complexe de  $\nu(z)$ . Ce problème ne comportant pas de non-linéarité, on peut donc appliquer les méthodes de Schwarz que nous avons vu aux chapitres 2 et les résultats précédents. On considère le problème global :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u}_\alpha(z, t) + \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(u^*, z)) \partial_z \mathbf{u}_\alpha(z, t) = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } (0, z_\alpha^\infty) \times ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } ]0, T] \\ \mathbf{u}_\alpha(z, 0) = \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } [z_o^\infty, z_\alpha^\infty] \\ \\ \mathbf{u}_o(0, t) = \mathbf{u}_a(0, t) \quad \text{sur } ]0, T] \\ \gamma \partial_z \mathbf{u}_o(0, t) = \partial_z \mathbf{u}_a(0, t) \quad \text{sur } ]0, T] \end{array} \right. \quad (4.35)$$

où  $\gamma = \rho_o \nu_o^m / (\rho_a \nu_a^m) = \lambda^{-1}$ ,  $u^*$  est un paramètre fixe et  $\nu$  est une viscosité de type KPP :

$$\nu_\alpha(u^*, z) = \nu(u_\alpha^*, z) = \begin{cases} \nu_\alpha^m & \text{sur } (h_\alpha^*, z_\alpha^\infty) \\ D_\alpha(u_\alpha^*, z) \in P^3(\mathbb{R}) & \text{sur } (\delta_\alpha, h_\alpha^*) \\ \kappa u^* z + \nu_\alpha^m & \text{sur } (0, \delta_\alpha) \end{cases} \quad (4.36a)$$

$$\text{avec } D_\alpha(u_\alpha^*, z) = \kappa |u_\alpha^*| \frac{(h_\alpha^* - z)^2}{|h_\alpha^* - \delta_\alpha|^3} (|h_\alpha^* + \delta_\alpha| |z| - 2\delta_\alpha^2) \quad (4.36b)$$

de sorte que  $\nu_\alpha \in \mathcal{C}^1(0, z_\alpha^\infty)$  et tel que  $u_o^* = \lambda u_a^* = \lambda u^*$ . La figure 4.3 présente un exemple de ce profil de viscosité dans l'océan et l'atmosphère pour une valeur de  $u^*$  fixée.



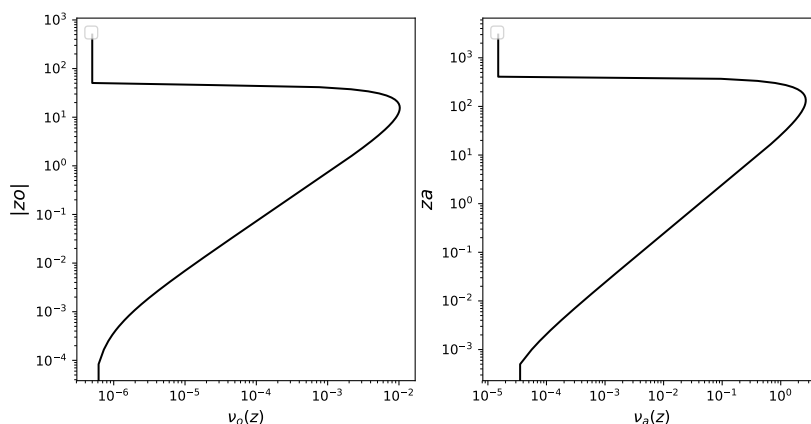


FIGURE 4.3 – Exemple de profils des viscosité KPP dans l’océan à gauche et l’atmosphère à droite pour  $u^* = 0.1$ .

**Valeurs de références** Nous choisissons ici un certain nombre de paramètres fixes, qu’on appellera *valeurs de référence pour le couplage océan-atmosphère* :

- $z_a^\infty = 3000\text{m}$  et  $z_o^\infty = -500\text{m}$
- $\delta_a = 10\text{m}$  et  $\delta_o = 1\text{m}$
- $h_a^* = c_a u^*$  et  $h_o^* = \lambda c_o u^*$  avec  $c_a = 0.2$  et  $c_o = 0.7$ .
- $\nu_a^m = 15.6 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  et  $\nu_o^m = 5 \times 10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
- $u_a^* \in [0.001, 1[$  et  $u_o^* = \lambda u_a^*$  avec  $\lambda = \nu_o^m / \nu_a^m \approx 0.03$ .

La plage de valeurs de  $u_a^*$  est celle considérée dans PELLETIER et al., 2020 et correspond à des valeurs "classiques" de ce paramètre dans les modèles d’océan-atmosphère. Nous retrouverons une justification de cette plage de valeurs dans le paragraphe 5.2.2.

L’étude analytique complète de la convergence des algorithmes de Schwarz sur le problème (4.35) est complexe à cause du profil particulier de la viscosité (4.36), et notamment de son écriture par un polynôme de degré 3. Nous étudions d’abord au §4.3.1 le cas stationnaire et sans effet de Coriolis, pour lequel l’étude analytique peut être faite entièrement. Ceci nous permet d’appréhender l’impact de la formulation KPP du profil de viscosité. Pour l’étude théorique dans le cadre instationnaire (§4.3.2), on approxime le profil de viscosité pour se ramener à des résultats connus. Enfin, nous élargissons cette étude à des conditions d’interface de type Robin-Robin au §4.3.3, et nous précisons l’impact du profil de la viscosité sur la convergence.

### 4.3.1 Cas stationnaire sans effet de Coriolis

Nous considérons ici la version stationnaire et sans effet de Coriolis du problème (4.35). Pour étudier la convergence de l'algorithme de Schwarz, on s'intéresse exclusivement à la version homogène de ce problème :

$$\begin{cases} \partial_z(\nu_\alpha(z)\partial_z\mathbf{u}_\alpha(z)) = 0 & \text{sur } (0, z_\alpha^\infty) \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

L'algorithme de Schwarz résout à chaque itération les sous-problèmes :

$$\begin{cases} \partial_z(\nu_o(z)\partial_z\mathbf{u}_o^n(z)) = 0 & \text{sur } [z_0^\infty, 0[ \\ \mathbf{u}_o^n(z_0^\infty) = 0 \\ \mathbf{u}_o^n(0) + q\gamma\partial_z\mathbf{u}_o^n(0) = \mathbf{u}_a^{n-1}(0) + q\partial_z\mathbf{u}_a^{n-1}(0) & q \leq 0 \end{cases} \quad (4.38a)$$

$$\begin{cases} \partial_z(\nu_a(z)\partial_z\mathbf{u}_a^n(z)) = 0 & \text{sur } ]0, z_a^\infty] \\ \mathbf{u}_a^n(z_a^\infty) = 0 \\ \partial_z\mathbf{u}_a^n(0) + p\mathbf{u}_a^n(0) = \gamma\partial_z\mathbf{u}_o^n(0) + p\mathbf{u}_o^n(0) & p \geq 0 \end{cases} \quad (4.38b)$$

En l'absence d'effet de Coriolis, les composantes de  $\mathbf{u}$  sont découplées ; dans la suite de ce paragraphe, on explicitera donc les résultats sur la composante  $u$ , et ceux de la composante  $v$  se déduisent de la même manière.

**Propriété 4.3.1 Résolution dans chaque sous-domaine :** Sans prendre en compte les conditions d'interface,  $u_\alpha^n$  s'écrit sur chaque sous-domaine :

$$u_\alpha^n(z) = A_\alpha^n \int_{(z, z_\alpha^\infty)} \frac{dz'}{\nu(z')} \quad (4.39)$$

avec  $A_\alpha^n$  une constante dépendant de la condition d'interface. En particulier, on a à l'interface  $u_o^n(0) = A_o^n \Psi_o$  et  $u_a^n(0) = -A_a^n \Psi_a$  où

$$\Psi_\alpha = \int_{(0, z_\alpha^\infty)} \frac{dz'}{\nu(z')} > 0 \quad (4.40)$$

Cette notation sera réutilisée au chapitre 5. Dans les ordres de grandeur des valeurs de référence du couplage océan-atmosphère et pour des valeurs "raisonnables" de  $u^*$ , on peut montrer que  $\Psi_\alpha$  est principalement influencé par les parties "libres" (c'est-à-dire au-delà de  $h_\alpha^*$ ) des domaines océan et atmosphère. Autrement dit :

$$\Psi_\alpha \approx \frac{|z_\alpha^\infty - h_\alpha^*|}{\nu_\alpha^m} \quad (4.41)$$

La figure 4.4 illustre cette propriété.

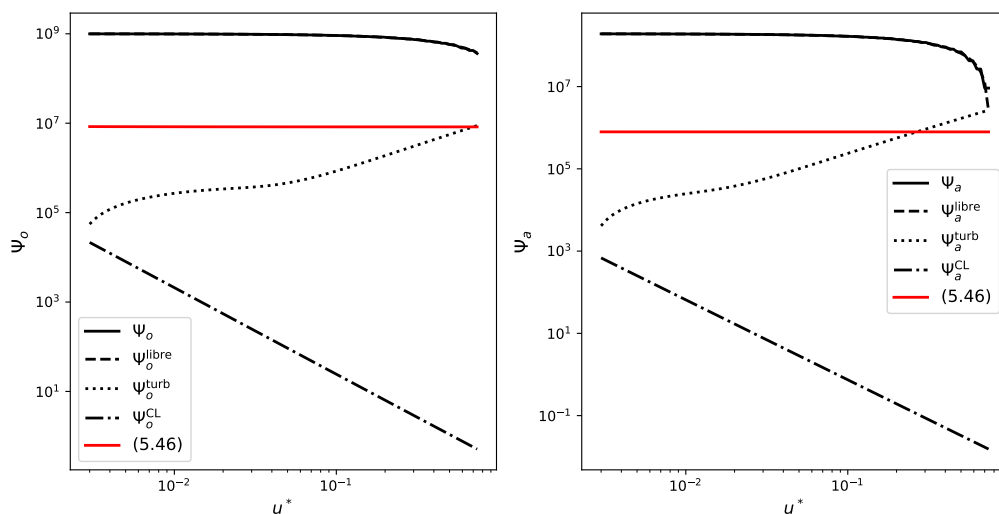


FIGURE 4.4 – Contribution à  $\Psi_\alpha$  des différentes zones données par (4.42) en fonction de  $u^*$ , pour les valeurs de référence. Trait continu : valeur exacte de  $\Psi_\alpha$ ; trait tireté : terme issu de la partie libre; trait pointillé : terme issu de la partie turbulente; trait mixte : terme issu de la couche limite; trait rouge : majoration donnée par (4.46). A gauche : domaine océan, à droite : domaine atmosphère. Dans les deux cas,  $\Psi_\alpha$  et son approximation  $\Psi_\alpha^{\text{libre}}$  donnée par (4.41) sont quasiment confondues.

*Démonstration.* Nous expliciterons la preuve pour le domaine atmosphère, le domaine océan étant symétrique on pourra en tirer les mêmes conclusions. Pour montrer (4.41), nous séparons  $\Psi$  suivant les différents sous-domaines définis par la forme de la viscosité  $\nu$  :

$$\Psi = \Psi^{\text{CL}} + \Psi^{\text{turb}} + \Psi^{\text{libre}} \quad (4.42a)$$

$$\text{avec } \Psi^{\text{CL}} = \int_0^\delta \frac{dz}{\kappa u^* z + \nu^m} = \frac{\ln(\kappa u^* \delta + \nu^m)}{\kappa u^*} \quad (4.42b)$$

$$\Psi^{\text{turb}} = \int_\delta^{h^*} \frac{dz}{D(z) + \nu^m} \quad (4.42c)$$

$$\Psi^{\text{libre}} = \int_{h^*}^{z^\infty} \frac{dz}{\nu^m} = \frac{z^\infty - h^*}{\nu^m} \quad (4.42d)$$

Les indices  $\alpha$  sont négligés ici, pour une meilleure lisibilité. Il est difficile de calculer analytiquement  $\int \frac{dz}{D(z) + \nu^m}$  avec  $D(z)$  donné par (4.36). Ceci dit, pour  $z < h^* - \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$  suffisamment grand pour que  $D(z) \gg \nu^m$ , on peut, via une décomposition

en éléments simples, approximer :

$$\frac{1}{D(z) + \nu^m} \approx \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{\kappa u^*} \left[ \frac{(h^* - \delta)^2}{(h^* + 2\delta)(h^* - z)^2} + \frac{(h^* - \delta)(h^* + \delta)^2}{(h^* + 2\delta)^2((h^* + \delta)z - 2\delta^2)} + \frac{(h^*)^2 - \delta^2}{(h^* + 2\delta)^2(h^* - z)} \right]$$

donc

$$\int_{\delta}^{h^* - \epsilon} \frac{dz}{D(z) + \nu^m} \approx \frac{1}{\kappa u^*} \left[ \frac{(h^* - \delta)^2}{(h^* + 2\delta)} \frac{1}{\epsilon} + \frac{(h^*)^2 - \delta^2}{(h^* + 2\delta)^2} \ln \left( \frac{(h^* - \epsilon)(h^* + \delta) - 2\delta^2}{\delta \epsilon} \right) \right] \quad (4.43)$$

On peut par exemple prendre  $\epsilon = (h^* - \delta)\sqrt{1000\nu^m/(\kappa h^* u^*)}$ . On a alors  $D(h^* - \epsilon) \approx 1000\nu^m \gg \nu^m$ , ce qui nous permet d'obtenir en négligeant  $\epsilon$  devant  $h^*$  :

$$\int_{\delta}^{h^* - \epsilon} \frac{dz}{D(z) + \nu^m} \approx \frac{1}{\kappa u^*} \left[ \frac{(h^* - \delta)}{(h^* + 2\delta)} \sqrt{\frac{\kappa u^* h^*}{1000\nu^m}} + \frac{(h^*)^2 - \delta^2}{(h^* + 2\delta)^2} \ln \left( \frac{h^*(h^* + \delta) - 2\delta^2}{\delta \epsilon} \right) \right] \quad (4.44)$$

On peut ainsi majorer :

$$\int_{\delta}^{h^*} \frac{dz}{D(z) + \nu^m} \leq \frac{\epsilon}{\nu^m} + \frac{1}{\kappa u^*} \left[ \frac{(h^* - \delta)}{(h^* + 2\delta)} \sqrt{\frac{\kappa u^* h^*}{1000\nu^m}} + \frac{1}{\kappa u^*} \frac{(h^*)^2 - \delta^2}{(h^* + 2\delta)^2} \ln \left( \frac{h^*(h^* + \delta) - 2\delta^2}{\delta(h^* - \delta)} \sqrt{\frac{\kappa h^* u^*}{10^3 \nu^m}} \right) \right] \quad (4.45)$$

Si  $u^*$  prend des valeurs raisonnables, c'est-à-dire qui garantissent  $h^* \gg \delta$  et  $h^* \ll z^\infty$ , alors on peut estimer l'ordre de grandeur de cette majoration :

$$\int_{\delta}^{h^*} \frac{dz}{D(z) + \nu^m} \leq \left( \frac{1}{\sqrt{1000}} + \sqrt{1000} \right) \sqrt{\frac{c}{\kappa \nu^m}} + \frac{1}{\kappa u^*} \ln \left( \frac{h^*}{\delta} \sqrt{\frac{\kappa h^* u^*}{10^3 \nu^m}} \right) \quad (4.46)$$

où  $c = h^*/u^*$  (voir introduction de la section 4.3). Dans nos ordres de grandeur avec  $\nu^m$  très faible, et tant que  $h^*$  est assez petit devant  $z^\infty$ , le terme correspondant à la zone "libre"  $(z^\infty - h^*)/\nu^m$  est bien plus grand que  $\int_{\delta}^{h^*} \frac{dz}{D + \nu^m}$ . La majoration (4.46), illustrée par la figure 4.4, nous permet d'estimer que (4.41) est valide pour  $h^* < 2z^\infty/3$  ce qui laisse encore une large plage de liberté pour  $h^*$ . De plus, si  $h^*$  est proche de  $\delta$ , il est alors clair que  $\int_{(\delta, h^*)} \frac{dz}{D(z) + \nu^m}$  tend vers 0. La figure 4.4 montre les profils de chaque composante suivant les valeurs de  $u^*$ , ainsi que le profil total de  $\Psi$  pour les valeurs de référence. Elle illustre l'approximation (4.41) et montre qu'elle est valide même pour des valeurs de  $h^*$  très proches de  $z^\infty$ .  $\square$

**Propriété 4.3.2 Facteur de convergence :** Avec des conditions d'interface de type Robin-Robin :

$$u_o^n(0) + q\gamma \partial_z u_o^n(0) = u_a^{n-1}(0) + q\partial_z u_a^{n-1}(0) \quad q \leq 0 \quad (4.47)$$

$$\partial_z u_a^n(0) + pu_a^n(0) = \gamma \partial_z u_o^n(0) + pu_o^n(0) \quad p \geq 0 \quad (4.48)$$

on obtient le facteur de convergence, en reprenant les notations du paragraphe 4.2.2 :

$$\rho_{\text{OA},f=0}^{\text{RR,sta}} = \frac{(\mathcal{S}_a^{\text{sta}} + q)(p + \gamma \mathcal{S}_o^{\text{sta}})}{(1 + p \mathcal{S}_a^{\text{sta}})(1 + \gamma q \mathcal{S}_o^{\text{sta}})} \quad \mathcal{S}_a^{\text{sta}} = -\nu_a^m \Psi_a \quad \mathcal{S}_o^{\text{sta}} = (\nu_o^m \Psi_o)^{-1} \quad (4.49)$$

On retrouve le résultat intuitif que  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{sta}}$  tend vers  $\mathcal{S}_{j,f=0}^{\text{sta,cst}}$ , la variable correspondant au cas où on considère un profil de viscosité constant sur tout le domaine (voir §4.2.2). D'une manière générale, l'approximation de  $\Psi_\alpha$  montre que les termes  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{sta}}$  (et donc la convergence théorique de l'algorithme) dépendent principalement de la zone "libre" des domaines. En particulier, on a :

$$\mathcal{S}_\alpha^{\text{sta}} \approx \mathcal{S}_{(h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)}^{\text{sta,cst}} \quad (4.50)$$

où  $\mathcal{S}_{(h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)}^{\text{sta,cst}}$  correspond au terme  $\mathcal{S}^{\text{sta,cst}}$  si on avait une viscosité constante  $\nu_\alpha^m$  sur un domaine  $(0, z_\alpha^\infty - h_\alpha^*)$ . Cette approximation est illustrée sur la figure 4.5.

Comme nous sommes dans le cadre stationnaire, les conditions de transmission exactes s'en déduisent facilement, et on peut, pour des valeurs "raisonnables" de  $u^*$ , donner leurs ordres de grandeur en utilisant l'approximation (4.41) de  $\Psi_\alpha$  :

$$\begin{aligned} p^{\text{opt}} &= -(\nu_o^m \Psi_o)^{-1} \approx (z_o^\infty - h_o^*)^{-1} \\ q^{\text{opt}} &= \nu_a^m \Psi_a \approx z_a^\infty - h_a^* \end{aligned} \quad (4.51)$$

Remarquons que ces coefficients optimaux sont très proche de ceux qu'on trouverait si on supposait une viscosité constante sur tout le domaine. On peut aussi donner le facteur de convergence dans le cadre de conditions de type Dirichlet-Neumann ( $p = q = 0$ ) :

$$\rho_{\text{OA},f=0}^{\text{DN,sta}} = |\gamma \mathcal{S}_o^{\text{sta}} \mathcal{S}_a^{\text{sta}}| \approx \left| \gamma \frac{z_a^\infty - h_a^*}{z_o^\infty - h_o^*} \right| \quad (4.52)$$

Cette dernière approximation montre que la convergence dépend beaucoup du rapport entre les longueurs  $|z_a^\infty|$  et  $|z_o^\infty|$ , qui sont des données extérieures au problème.

### 4.3.2 Cas instationnaire avec effet de Coriolis

Nous étudions maintenant la convergence pour le problème simplifié (4.35) dans son cadre général, c'est-à-dire en instationnaire et avec effet de Coriolis. En suivant les mêmes étapes qu'au §4.1.3, on doit résoudre les équations dans l'espace de Fourier sur chaque sous-domaine et pour chaque itération  $n$ . On considère donc les sous-problèmes suivants :

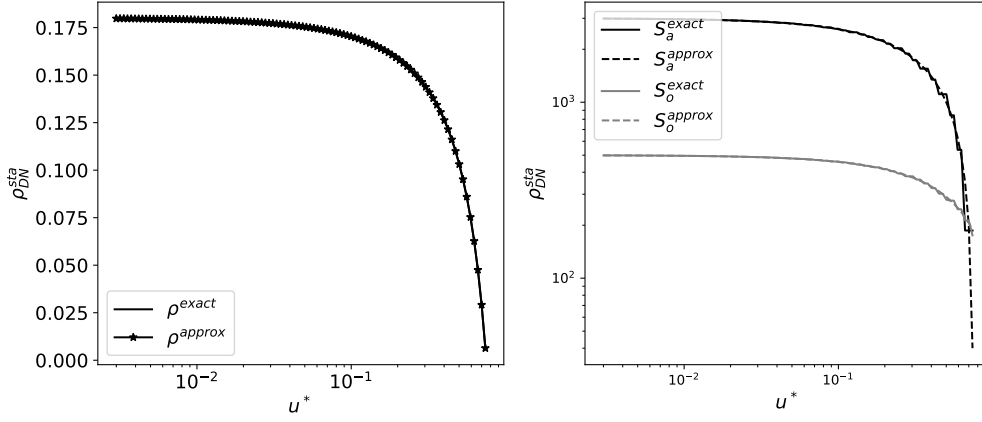


FIGURE 4.5 – Profils de  $\rho_{O_A, f=0}^{\text{DN, sta}}$  (à gauche) et  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{sta}}$  (à droite) en fonction de  $u^*$ . Trait continu : valeurs exactes ; trait pointillé : valeurs approximées issues de (4.41)

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\omega + f)\widehat{\varphi}_o^n(z, \omega) - \partial_z(\nu_\alpha(z)\partial_z\widehat{\varphi}_o^n(z, \omega)) = 0 & \text{sur } [z_o^\infty, 0[ \times \mathbb{R} \\ \widehat{\varphi}_o^n(z_o^\infty, \omega) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \\ \widehat{\varphi}_o^n(0, \omega) + q\gamma\partial_z\widehat{\varphi}_o^n(0, \omega) = \widehat{\varphi}_a^{n-1}(0, \omega) + q\partial_z\widehat{\varphi}_a^{n-1}(0, \omega) & \text{sur } \mathbb{R}, q \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.53a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\omega + f)\widehat{\varphi}_a^n(z, \omega) - \partial_z(\nu_\alpha(z)\partial_z\widehat{\varphi}_a^n(z, \omega)) = 0 & \text{sur } ]0, z_a^\infty] \times \mathbb{R} \\ \widehat{\varphi}_a^n(z_o^\infty, \omega) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \\ \partial_z\widehat{\varphi}_a^n(0, \omega) + p\widehat{\varphi}_a^n(0, \omega) = \gamma\partial_z\widehat{\varphi}_o^n(0, \omega) + p\widehat{\varphi}_o^n(0, \omega) & \text{sur } \mathbb{R}, p \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.53b)$$

avec  $\nu$  donné précédemment. Le cas stationnaire avec effet de Coriolis rentre dans cette étude en considérant  $\omega = 0$ .

**Simplification de la viscosité** Pour cette étude dans le cadre instationnaire, la viscosité (4.36) est trop complexe pour qu'on puisse obtenir les solutions analytiques du problème. Nous proposons d'en simplifier l'écriture en approximant  $D(z)$  de (4.36b) par un polynôme de degré 2 :

$$\nu_\alpha^{\text{approx}} = \begin{cases} \nu_\alpha^m & \text{sur } (h_\alpha^*, z_\alpha^\infty) \\ D_\alpha^{\text{approx}}(z) + \nu_\alpha^m \in P^2(\mathbb{R}) & \text{sur } (0, h_\alpha^*) \end{cases} \quad (4.54)$$

avec

$$D_\alpha^{\text{approx}}(z) = \kappa u_\alpha^* |z| \left( 1 - \frac{z}{h_\alpha^*} \right) \quad (4.55)$$

On a en particulier  $\nu_\alpha^{\text{approx}}(0) = \nu_\alpha^{\text{approx}}(h_\alpha)$ , ce qui nous permet d'utiliser les résultats et notations du paragraphe 4.2.2.

*Justification.* La construction de  $D^{\text{approx}}$  se fait d'abord en cherchant les polynômes de degré 2  $D^{\text{approx}}$  tels que

$$D^{\text{approx}}(\delta) = \kappa u^* \delta \quad D^{\text{approx}}(h^*) = 0 \quad (4.56)$$

ce qui donne  $D^{\text{approx}}(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$  où  $a_1 = \frac{\kappa u^* \delta}{\delta - h^*} - a_2 h^*$  et  $a_0 = -a_2 (h^*)^2 - a_1 h^*$ . Le choix de  $a_2$  pour approximer  $D$  peut se faire de différentes manières. Suite à l'étude dans le cas stationnaire, où le profil des solutions dépend de l'intégrale de  $\nu^{-1}$ , on propose ici de choisir  $a_2$  tel que  $\int_{(\delta, h^*)} (D^{\text{approx}}(z))^{-1} dz = \int_{(\delta, h^*)} (D(z))^{-1} dz$ . Les calculs (non explicités ici) mènent à  $a_2 \approx \kappa u^* / h^* = \kappa / c$ . Le paramètre  $a_2$  a donc une valeur fixe d'environ  $2.05|f|$  dans l'atmosphère et  $0.586|f|$  dans l'océan. Dans la mesure où on considère  $|h^*| \gg |\delta|$ , et dans les ordres de grandeur "raisonnables" de  $u^*$ , on a  $a_1 \approx -a_2 h^*$  et  $a_0 \approx 0$ . Ainsi, pour simplifier encore l'étude, on choisit d'approcher la valeur de  $\nu(z)$  par  $D^{\text{approx}}(z) + \nu^m$  sur  $(0, \delta)$  en choisissant  $a_1 = -a_2 h^*$  et  $a_0 = 0$ .

La figure 4.6 présente les profils de  $\nu_a$  et  $\nu_a^{\text{approx}}$  pour différentes valeurs de  $u^*$ . On y compare aussi les valeurs de  $\int_{(0, h^*)} (\nu)^{-1} dz$  et  $\int_{(0, h^*)} (\nu^{\text{approx}})^{-1} dz$  pour différentes valeurs de  $u^*$ .

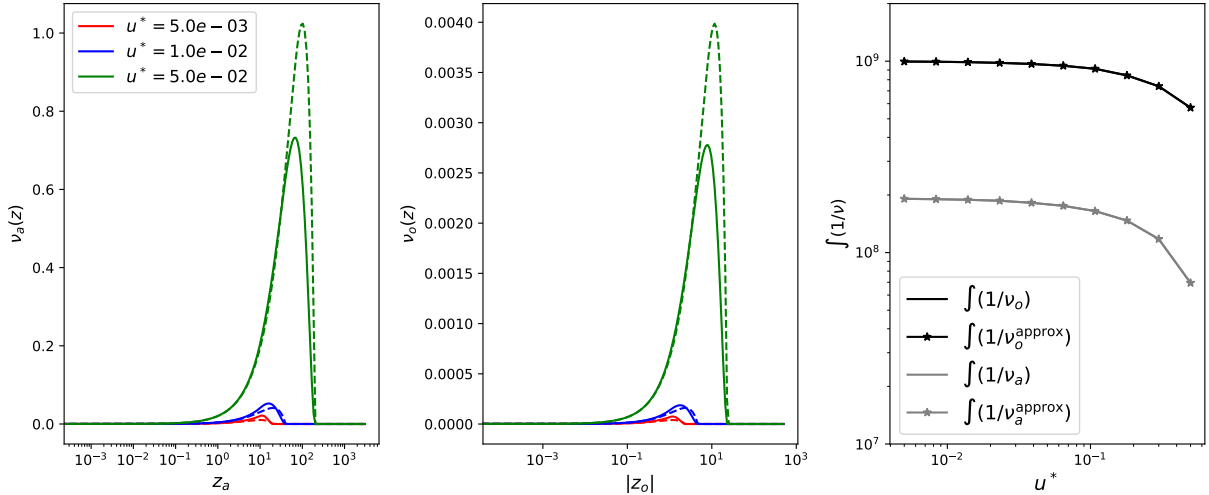


FIGURE 4.6 – Profils de viscosité dans l'océan (à gauche) et l'atmosphère (au centre) pour différentes valeurs de  $u^*$  :  $\nu(z)$  en trait continu et  $\nu^{\text{approx}}(z)$  en trait pointillé. La figure de droite présente  $\int_{(0, z_\alpha^\infty)} (\nu_\alpha(z))^{-1} dz$  et  $\int_{(0, z_\alpha^\infty)} (\nu_\alpha^{\text{approx}}(z))^{-1} dz$  en fonction de  $u^*$  : les deux courbes sont quasiment superposées.

**Propriété 4.3.3 Résolution des équations sur chaque sous-domaine :** On peut réutiliser les notations  $\mathcal{S}$  introduites au §4.2.2, qu'on note  $\mathcal{S}_\alpha$  pour ce cas particulier :

$$\mathcal{S}_\alpha = \left( \mathcal{X}_\alpha \frac{h_\alpha \sqrt{1 + 4\mu_\alpha} P_\alpha^+ + \Pi_\alpha P_\alpha^-}{\xi_\alpha (1 + \xi_\alpha) G_\alpha^+ - \Pi_\alpha G_\alpha^-} \right)^{\mathcal{X}_\alpha} \quad (4.57)$$

où  $P_\alpha^+ = P_\alpha(\eta_\alpha(0)) = {}_2F_1(\xi+1, -\xi, 1, (1-\eta)/2)$ ,  $P_\alpha^- = P_\alpha(-\eta_\alpha(0)) = {}_2F_1(\xi+1, -\xi, 1, (1+\eta)/2)$ , et de même pour  $G^+$  et  $G^-$  avec  $G = {}_2F_1(\xi+2, 1-\xi, 2, (1-\eta)/2)$  et  $\xi = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + i(f+\omega)/a_{2,\alpha}} \right)$ .

*Démonstration.* On peut maintenant résoudre les équations (4.53) sans considérer les conditions d'interface. On sépare les calculs en deux parties :

- Zone libre ( $z \in (h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)$ ) :

$$\widehat{\varphi}_\alpha^n(z) = A_{\alpha,l}^n (e^{\varsigma_\alpha z} - e^{\varsigma_\alpha(2z_\alpha^\infty - z)}) \quad \partial_z \widehat{\varphi}_\alpha^n = \varsigma_\alpha A_{\alpha,l}^n (e^{\varsigma_\alpha z} + e^{\varsigma_\alpha(2z_\alpha^\infty - z)}) \quad (4.58)$$

$$\text{avec } \varsigma_\alpha = \sqrt{\frac{i(f+\omega)}{\nu_\alpha^m}}$$

- Zone turbulente ( $z \in (0, h_\alpha^*)$ ) :

$$\widehat{\varphi}_\alpha^n(z) = A_{\alpha,t}^n P_\alpha(\eta_\alpha(z)) + B_{\alpha,t}^n P_\alpha(-\eta_\alpha(z)) \quad (4.59a)$$

$$\partial_z \widehat{\varphi}_\alpha^n(z) = \frac{\mathcal{X}_\alpha \xi_\alpha (\xi_\alpha + 1)}{h_\alpha^* \sqrt{1 + 4\mu_\alpha}} (A_{\alpha,t}^n G_\alpha(\eta_\alpha(z)) - B_{\alpha,t}^n G_\alpha(-\eta_\alpha(z))) \quad (4.59b)$$

avec  $\mathcal{X}_o = -1$ ,  $\mathcal{X}_a = 1$ ,  $\eta_\alpha(z) = \mathcal{X}_\alpha(2z/h_\alpha^* - 1)/\sqrt{1 + 4\mu_\alpha}$ ,  $\mu_\alpha = \nu_\alpha^m/(|a_{2,\alpha}|(h_\alpha^*)^2)$ ,  $P_\alpha(\eta) = P_{\xi_\alpha}^0(\eta)$  le polynôme de Legendre qu'on peut aussi écrire en termes de fonction hypergéométrique  ${}_2F_1(\xi+1, -\xi, 1, (1-\eta)/2)$ ,  $G = {}_2F_1(\xi+2, 1-\xi, 2, (1-\eta)/2)$  et  $\xi = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + i(f+\omega)/a_{2,\alpha}} \right)$

Le raccord  $\mathcal{C}^1$  en  $h_\alpha^*$  fournit les contraintes :

$$\begin{aligned} A_{\alpha,l} &= \frac{A_{\alpha,t} P_\alpha(\eta_\alpha(h_\alpha^*)) + B_{\alpha,t} P_\alpha(-\eta_\alpha(h_\alpha^*))}{e^{\varsigma_\alpha h_\alpha^*} + e^{\varsigma_\alpha(2z_\alpha^\infty - h_\alpha^*)}} & B_{\alpha,t} &= \Pi_\alpha A_{\alpha,t} \\ \Pi_\alpha &= \frac{G_\alpha(\eta_\alpha(h_\alpha^*)) - \beta_\alpha P_\alpha(\eta_\alpha(h_\alpha^*))}{G_\alpha(-\eta_\alpha(h_\alpha^*)) + \beta_\alpha P_\alpha(-\eta_\alpha(h_\alpha^*))} & \beta_\alpha &= \frac{-\varsigma_\alpha}{\tanh(\varsigma_\alpha(z_\alpha^\infty - h_\alpha^*))} \frac{h_\alpha^* \sqrt{1 + 4\mu_\alpha}}{\mathcal{X}_\alpha \xi_\alpha (\xi_\alpha + 1)} \end{aligned} \quad (4.60)$$

La dépendance en  $\omega$  de tous ces éléments a été omise pour alléger l'écriture. On obtient finalement :

$$\widehat{\varphi}_\alpha(z) = A_{\alpha,t} [P_\alpha(\eta_\alpha(z)) + \Pi_\alpha P_\alpha(-\eta_\alpha(z))] \quad (4.61a)$$

$$\partial_z \widehat{\varphi}_\alpha(z) = \frac{\xi_\alpha (\xi_\alpha + 1)}{2} \partial_z \eta_\alpha(z) A_{\alpha,t} [G_\alpha(\eta_\alpha(z)) - \Pi_\alpha G_\alpha(-\eta_\alpha(z))] \quad (4.61b)$$

□



**Comportement de  $\mathcal{S}_\alpha$**  On voit apparaître dans l'expression de  $\mathcal{S}_\alpha$  des termes qui régissent l'expression de :

- $\mathcal{S}_{(h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)}^{\text{cst}}$  le paramètre  $\mathcal{S}$  correspondant à un profil de viscosité constant  $\nu_\alpha^m$  sur un domaine  $(0, z_\alpha^\infty - h_\alpha^*)$ , (et donc  $\mathcal{S}_{(h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)}^{\text{cst}} = (\tanh(\zeta(0, z_\alpha^\infty - h_\alpha^*)/\zeta)^{\mathcal{X}_\alpha}$ ).
- $\mathcal{S}_{h_\alpha^*}^{\text{par}}$  le paramètre  $\mathcal{S}$  correspondant à un profil de viscosité parabolique  $\nu_\alpha$  sur un domaine  $(0, h_\alpha^*)$ , (et donc les  $\mathcal{S}_{h_\alpha^*}^{\text{par}}$  sont composés des  $P_\alpha$  et  $G_\alpha$  uniquement).

Nous avons déterminé ces éléments au paragraphe 4.2.2 en terme de variables  $\text{Fo}_\alpha$  et  $\mu_\alpha$ . Nous pouvons de même exprimer chaque élément de  $\mathcal{S}_\alpha$  en ces termes :

$$\text{Fo}_\alpha = \frac{\omega + f}{\nu_\alpha^m} (h_\alpha^*)^2 \quad \mu = \frac{\nu_\alpha^m}{a_\alpha (h_\alpha^*)^2} \quad \frac{z_\alpha^\infty}{h_\alpha^*} = \frac{z_\alpha^\infty a_\alpha}{\nu_\alpha^m} \mu_\alpha = x_\alpha \mu_\alpha \quad (4.62)$$

$$\beta_\alpha = \frac{\mathcal{X}_\alpha \sqrt{\text{Fo}_\alpha}}{\tanh(\mathcal{X}_\alpha \sqrt{\text{Fo}_\alpha} (z_\alpha^\infty / h_\alpha^* - 1)) \eta_\alpha(\xi_\alpha) (\xi_\alpha + 1)} \quad (4.63)$$

Pour nos valeurs de référence du couplage océan-atmosphère, le terme  $x_\alpha$  est constant avec  $x_o \approx 1.10^6$  et  $x_a \approx 2.10^4$ . Aussi dans notre cas où l'interface est en  $z = 0$ , on a  $\eta_\alpha(0) = -\eta_\alpha(h_\alpha^*)$ , et on peut écrire les  $\mathcal{S}_\alpha$  comme :

$$\mathcal{S}_\alpha = \left( \frac{h_\alpha^*}{-\eta_\alpha \xi_\alpha (\xi_\alpha + 1)} \frac{G_\alpha^+ P_\alpha^+ + G_\alpha^- P_\alpha^- + \beta_\alpha ((P_\alpha^+)^2 - (P_\alpha^-)^2)}{\beta_\alpha (G_\alpha^+ P_\alpha^+ + G_\alpha^- P_\alpha^-) + (G_\alpha^+)^2 - (G_\alpha^-)^2} \right)^{\mathcal{X}_\alpha} \quad (4.64)$$

Tant que l'interface est en  $z = 0$ , alors le terme  $\mathcal{S}_\alpha$  tend vers  $\mathcal{S}_{(h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)}^{\text{cst}}$  lorsque  $|\omega + f| \rightarrow 0$ , et à l'inverse il tend vers  $\mathcal{S}_{h_\alpha^*}^{\text{par}}$  quand  $|\omega + f|$  est grand. Plus précisément, si on reste dans les ordres de grandeur des valeurs de référence du couplage océan-atmosphère, on a :

$$\mathcal{S}_\alpha \approx \mathcal{S}_{(h_\alpha^*, z_\alpha^\infty)}^{\text{cst}} \quad \text{lorsque } |\omega + f| < 0.1 \nu_\alpha^m / (h_\alpha^*)^2 \approx 10^{-11} \text{s}^{-1} \quad (4.65a)$$

$$\mathcal{S}_\alpha \approx \mathcal{S}_{h_\alpha^*}^{\text{par}} \quad \text{lorsque } |\omega + f| > 10^6 \nu_\alpha^m / (z_\alpha^\infty h_\alpha^*) \approx 10^{-5} \text{s}^{-1} \quad (4.65b)$$

Ces approximations sont justifiées sur la figure 4.7. Ceci signifie que si les fréquences "influentes" de l'algorithme sont plus grandes que  $10^{-5} \text{s}^{-1}$ , alors la zone turbulente a une grande influence sur la convergence. A l'inverse, si les fréquences influentes sont telles que  $|\omega + f| \leq 10^{-11} \text{s}^{-1}$ , comme dans le cas stationnaire sans effet de Coriolis, alors c'est la zone "libre" des domaines qui influence le plus la convergence.

En général, les pas de temps utilisés dans les simulations sont nettement plus petits que 24 heures, donc les fréquences plus hautes que  $10^{-5} \text{s}^{-1}$  sont influentes. Ainsi, la zone turbulente, et donc le profil de la viscosité turbulente, influencent grandement la convergence de l'algorithme, et ce même pour des hauteurs de zone turbulente très petites. De même, si on considère l'effet de Coriolis, c'est la zone libre qui a le plus d'influence aux fréquences proche de  $|-f|$ . Ceci dit cet intervalle de fréquences influentes est très restreint, car celles-ci doivent être proches de  $|-f|$  avec un écart d'environ de  $10^{-11}$ .

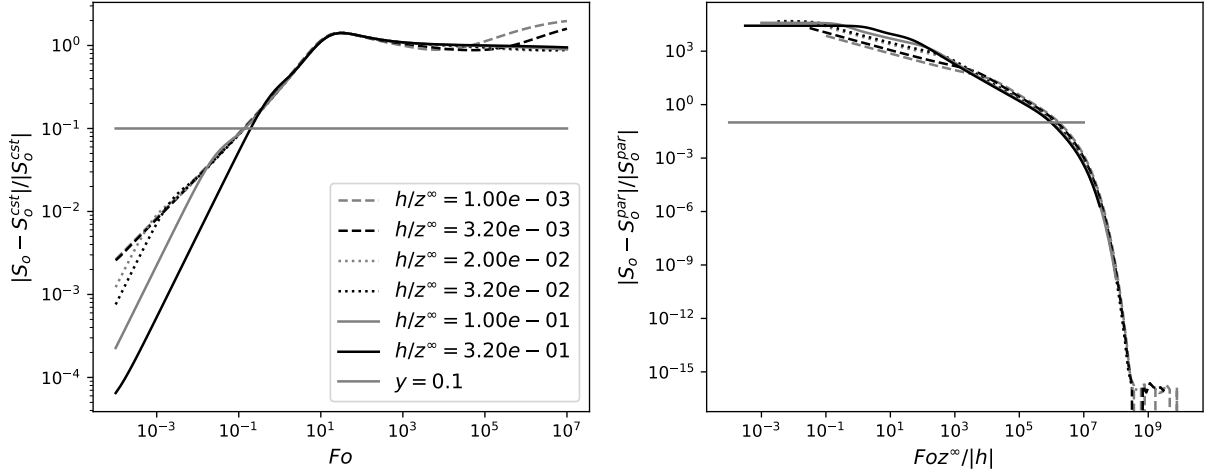


FIGURE 4.7 – Erreur relative entre  $\mathcal{S}_o$  et un paramètre  $\mathcal{S}$  correspondant à une seule zone du profil de viscosité en fonction de  $Fo$  et  $h_o^*/z_o^\infty$  avec  $x_o = 10^{-6}$  défini en (4.62). Le panneau de gauche donne l'erreur relative entre  $\mathcal{S}_o$  et  $\mathcal{S}_{(h_o^*, z_o^\infty)}^{\text{cst}}$ , le panneau de droite donne l'erreur relative entre  $\mathcal{S}_o$  et  $\mathcal{S}_{h_o^*}^{\text{par}}$ . La ligne horizontale  $y = 0.1$  donne l'erreur relative à partir de laquelle on considère l'approximation valide. La version pour le domaine atmosphère avec  $x_a = 2.10^{-4}$  donne des résultats sensiblement identiques.

### 4.3.3 Facteur de convergence pour le problème avec viscosité KPP

Nous avons vu que le comportement général des  $\mathcal{S}_\alpha$  issus de la viscosité "hybride" (4.36a) est influencé par la zone libre et/ou par la zone turbulente de la viscosité suivant les fréquences exprimées. Nous pouvons en déduire le comportement des facteurs de convergence théoriques du cadre instationnaire. Aussi, nous avons vu au paragraphe 4.2.2 comment obtenir, grâce aux propriétés observées pour des profils de viscosité plus classiques (avec un seul type de polynôme), des "zones" de coefficients de Robin qui garantissent la convergence. Nous montrons dans ce paragraphe qu'on retrouve ces comportements pour la viscosité "hybride" (4.36a). Ceci dit, la formulation explicite de  $\mathcal{S}_\alpha$  ne permet pas de calculer simplement des coefficients de Robin optimaux.

**Propriété 4.3.4 Facteur de convergence :** Avec des conditions d'interface de type Robin-Robin

$$\varphi_o^n(0, \omega) + q\gamma\partial_z\varphi_o^n(0, \omega) = \varphi_a^{n-1}(0, \omega) + q\partial_z\varphi_a^{n-1}(0, \omega) \quad q \geq 0 \quad (4.66a)$$

$$\partial_z\varphi_a^n(0, \omega) + p\varphi_a^n(0, \omega) = \gamma\partial_z\varphi_o^n(0, \omega) + p\varphi_o^n(0, \omega) \quad p \leq 0 \quad (4.66b)$$

on obtient le facteur de convergence :

$$\varrho_{\text{RR}}^{\text{KPP}} = \frac{(\mathcal{S}_a + q)(p + \gamma\mathcal{S}_o)}{(1 + p\mathcal{S}_a)(1 + \gamma q\mathcal{S}_o)} \quad \mathcal{S}_\alpha = \left( \mathcal{X}_\alpha \frac{h_\alpha \sqrt{1 + 4\mu_\alpha}}{\xi_\alpha(1 + \xi_\alpha)} \frac{P_\alpha^+ + \Pi_\alpha P_\alpha^-}{G_\alpha^+ - \Pi_\alpha G_\alpha^-} \right)^{\mathcal{X}_\alpha} \quad (4.67)$$

avec  $P_\alpha^+ = P_\alpha(\eta(0))$ ,  $P_\alpha^- = P_\alpha(-\eta(0))$ , et de même pour  $G_\alpha^\pm$ . En particulier on peut donner le taux de convergence pour des conditions de type Dirichlet-Neumann :

$$\rho_{\text{DN}}^{\text{KPP}} = |\gamma \mathcal{S}_o \mathcal{S}_a| = \gamma \left| \frac{h_a \sqrt{1+4\mu_a}}{\xi_a(1+\xi_a)} \frac{\xi_o(1+\xi_o)}{h_o \sqrt{1+4\mu_o}} \frac{P_a^+ + \Pi_a P_a^-}{G_a^+ - \Pi_a G_a^-} \frac{G_o^+ - \Pi_a G_o^-}{P_o^+ + \Pi_o P_o^-} \right| \quad (4.68)$$

La figure 4.8 présente ce taux de convergence (4.68) pour différentes valeurs de  $u^*$ . On compare sur le panneau gauche la convergence théorique issue de (4.68) avec les convergences théoriques dans le cas où le profil de viscosité est parabolique sur  $(0, h_\alpha)$  ou constant sur  $(0, z_\alpha^\infty - h_\alpha)$ . On voit apparaître clairement les influences des zones turbulentes (les termes en polynôme de Legendre) et des zone libres (les termes en  $\zeta$ ). Dans le panneau de droite, on présente les taux de convergence observés correspondants, et on observe cette même influence de la zone turbulente. Ainsi, bien que dans le cas stationnaire la zone turbulence a peu d'influence sur la convergence (voir §4.3.1), la figure 4.8 montre qu'elle est ici au contraire très influente sur les plus hautes fréquences, et notamment les fréquences "influentes"<sup>1</sup> dans le cadre d'un couplage océan-atmosphère. De plus, si on considère l'effet de Coriolis, alors  $|\omega + f| > 10^{-5} \text{s}^{-1}$ , ce qui correspond à des fréquences où  $\rho_{\text{DN}}(\omega) \approx \rho_{\text{DN}}^{\text{par}}(\omega)$ .

L'exemple est donné ici avec une condition de Dirichlet du coté océan et de Neumann du coté atmosphère, et produit un algorithme divergent. On aurait pu regarder l'inverse (Neumann coté océan et Dirichlet coté atmosphère) dont le facteur de convergence est l'inverse de celui considéré ici, et qui produirait donc un algorithme très vite convergent. La question de savoir laquelle des deux versions est la plus proche des conditions d'interface du modèle réaliste est peu pertinente dans la mesure où les conditions réalistes sont a priori très éloignées des conditions de type Dirichlet-Neumann, et la vitesse de convergence est donc potentiellement très différente. Ceci dit, cette approche nous donne un premier a priori des différentes influences des spécificités du cadre océan-atmosphère.

**Propriété 4.3.5 Zone de convergence :** De la même manière qu'au §4.2.2, nous conjecturons que  $\mathcal{S}_\alpha$  vérifie toutes les hypothèses permettant d'établir les zones de convergence :

- $\text{Re}(\mathcal{S}_o) > 0$  et  $\text{Re}(\mathcal{S}_a) < 0$
- $|\text{Im}(\mathcal{S}_\alpha)| < y_\alpha |\text{Re}(\mathcal{S}_\alpha)|$  avec  $y_o \approx 18$  et  $y_a \approx 4$ .

Les figures 4.7 et 4.9 permettent de justifier ces conjectures. Les zones de convergences sont donc données par :

- dans le cadre continu en temps :  $|p| \leq 2\gamma\sigma_o^c$  et  $q > \Sigma_a^c(1 + y_a^2)/2$ , avec

$$\sigma_o^c = \left( \sqrt{1 + y_o^2} |z_o^\infty - h_o^*| \right)^{-1} \quad \Sigma_a^c = |z_a^\infty - h_a^*| \quad (4.69)$$

1. Les fréquences influentes sont les fréquences entre  $\pi/\delta t$  et  $\pi/T$ ; voir section 3.1.

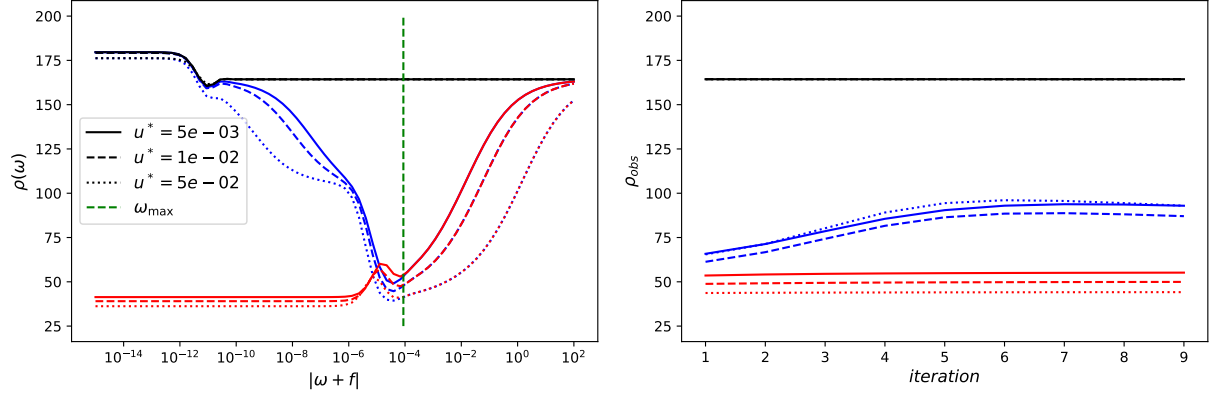


FIGURE 4.8 – Taux de convergence théorique et observé pour des conditions de Dirichlet-Neumann. Le panneau de gauche présente la convergence théorique en fonction de  $\omega + f$ . En bleu : taux issu de (4.68) ; en rouge : pour un profil de viscosité parabolique sur  $(0, h_\alpha)$  ; en noir : pour un profil de viscosité est constant sur  $(0, z_\alpha^\infty - h_\alpha)$ . La ligne verticale indique la valeur  $\omega_{\max} = \pi/\delta t$  utilisée pour les simulations numériques. Le panneau de droite présente les convergences observées correspondantes.

- dans le cadre discret en temps :  $|p| \geq \gamma \Sigma_o^d (1 + y_o^2)/2$  et  $q < 2\sigma_a^d$  avec :

$$\sqrt{1 + y_a^2} \sigma_a^d = |\mathcal{S}_a(\text{Fo}_{\max})| \quad (4.70a)$$

$$\Sigma_o^d = |\mathcal{S}_o(\text{Fo}_{\max})| \quad (4.70b)$$

La figure 4.11 présente  $\max \rho(\omega)$  pour différentes valeurs de  $u^*$  et pour différents coefficients de Robin.

*Justification.* Nous détaillons la justification des résultats pour le domaine océan, le domaine atmosphère se traitant de façon identique. La figure 4.10 montre le comportement de  $|\mathcal{S}_a(\text{Fo})|$ . On conjecture que pour tout  $\text{Fo} \in \mathbb{R}$  et pour tout  $u^*$  tel que  $10^{-3} \leq h_\alpha^*/|z_\alpha^\infty| \leq 1$  on a

$$|\mathcal{S}_o(0)| \leq |\mathcal{S}_o(\text{Fo})|$$

On peut ainsi minorer  $|\mathcal{S}_o(\text{Fo})|$  par  $|z_o^\infty - h_o|^{-1}$ , ce qui justifie la valeur de  $\sigma_o^c$  dans (4.69) via la même démarche que dans §4.2.2. La valeur de  $\Sigma_a^c$  se justifie de la même manière à partir de  $\mathcal{S}_a$ . Pour un algorithme discrétisé en temps, on peut compléter ces bornes par :

$$|\mathcal{S}_o(0)| \leq |\mathcal{S}_o(\text{Fo})| \leq |\mathcal{S}_o(\text{Fo}_{\max})|$$

Ce qui justifie la valeur de  $\Sigma_o^d$  dans (4.70), la valeur de  $\sigma_a^d$  se justifie de la même manière.

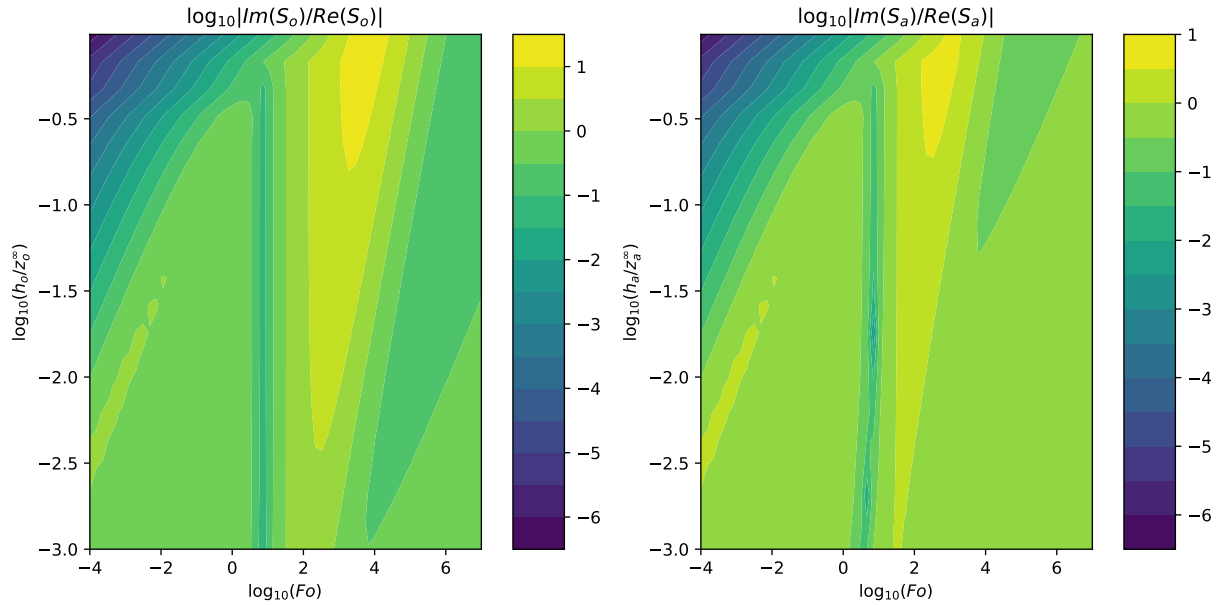


FIGURE 4.9 – Profil de  $\ln_{10}(|\text{Im}(\mathcal{S}_\alpha)|/|\text{Re}(\mathcal{S}_\alpha)|)$  en fonction de  $\ln_{10}(Fo)$  et de  $\ln_{10}(h_\alpha/z_\alpha^\infty)$ , pour déterminer  $y_\alpha$ . À gauche : domaine océan ; à droite : domaine atmosphère.

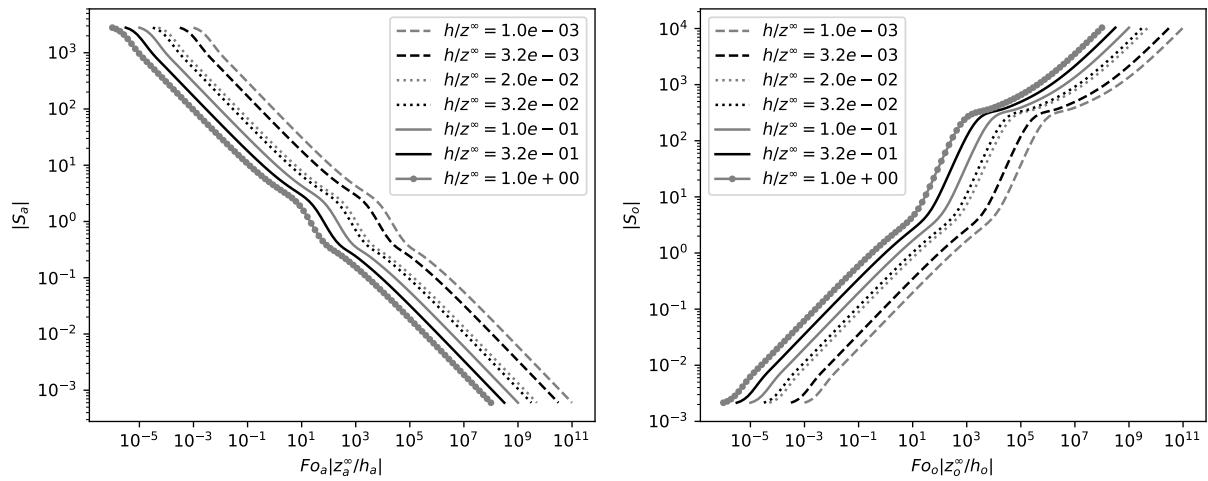


FIGURE 4.10 – Profil des  $|\mathcal{S}_\alpha|$  en fonction de  $Fo_\alpha \frac{|z_\alpha^\infty|}{|h_\alpha^*|}$  et pour différentes valeurs de  $h_\alpha^*/z_\alpha^\infty$ . À gauche pour le domaine atmosphère, à droite pour le domaine océan.

**Optimisation** La figure 4.11 présente le maximum de  $\rho(\omega)$  sur  $|\omega| \leq \pi/\delta t$  avec  $\delta t = 3600s$  et pour différents coefficients de Robin. Dans cet exemple, la plage de  $\omega$  est choisie telle que la fréquence  $\omega = -f$  (pour laquelle la partie libre influence la convergence) ainsi que les fréquences plus hautes (pour lesquelles la partie turbulente influence la convergence) sont dans la plage des valeurs des fréquences influentes. On compare ce maximum

avec celui qu'on obtiendrait si on ne considérait que la zone libre (avec une viscosité constante sur un domaine  $(0, z_\alpha^\infty - h_\alpha)$  — le facteur de convergence associé sera noté  $\rho_{(h, z_\alpha^\infty)}^{\text{cst}}$ ) ou que la zone turbulente (avec une viscosité parabolique sur une hauteur  $h_\alpha^*$  — le facteur de convergence associé sera noté  $\rho_{h^*}^{\text{par}}$ ).

Il apparaît qu'on ne peut pas supposer, en vue d'une optimisation, qu'une des deux parties (libre ou turbulente) est plus influente que l'autre sur la convergence. En effet, l'optimisation par une méthode "inf-sup" traite équitablement toutes les fréquences dans la plage de  $\omega$  considérée. Ainsi, même si le poids des fréquences influencées par la zone turbulente est plus important, la zone libre a une influence sur la recherche de conditions optimales strictes. En pratique, comme la partie libre n'a de l'influence que pour des fréquences extrêmement proches de  $-f$  ( $|\omega + f| < 10^{-11}$ ), elle n'influence que très peu la convergence observée. En réduisant l'optimisation à une plage excluant ces fréquences, le facteur de convergence (et donc les coefficients optimaux) pour le problème (4.35) correspondent fortement à ce que l'on obtient si on ne considère que la partie turbulente. Les panneaux du haut de la figure 4.11 présentent les facteurs de convergence théoriques pour les différents coefficients optimaux obtenus. Bien que les coefficients issus de l'optimisation ne considérant que la zone libre ou que la zone turbulente permettent la convergence, ils sont relativement éloignés des coefficients optimaux (c'est-à-dire considérant aussi les fréquences proches de  $-f$ ). Il apparaît aussi que les conditions Neumann-Dirichlet permettent déjà une bonne convergence.

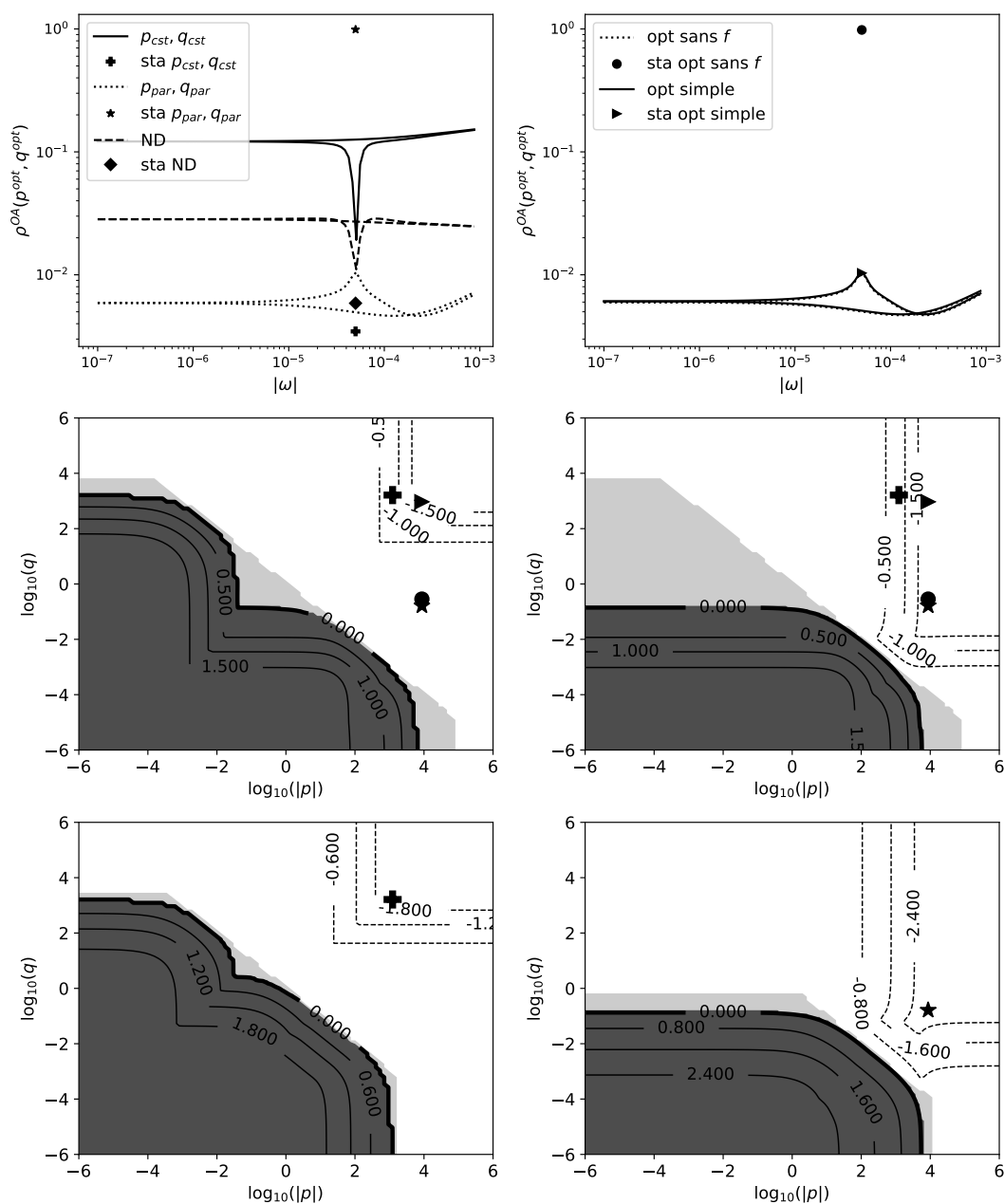


FIGURE 4.11 – En haut à gauche : taux de convergence théorique  $\rho^{KPP}(\omega, p^{opt}, q^{opt})$  pour les différents coefficients de Robin.  $\rho(\omega, p_{cst}^{opt}, q_{cst}^{opt})$ ,  $\rho(\omega, p_{par}^{opt}, q_{par}^{opt})$  et  $\rho_{ND}(\omega)$  sont indiqués. En haut à droite :  $\rho(\omega, p^{opt}, q^{opt})$  et  $\rho(\omega, p^{opt}, q^{opt})$ . Au milieu et en bas : différents profils de  $\max(\rho(\omega, p, q))$  pour  $|\omega| \in [\pi/T, \pi/\delta t]$  en fonction de  $|p|$  et  $q$ . Sur les panneaux du milieu, on ne considère pas les fréquences  $|\omega + f| < 10^{-11}$  à droite, et on les considère à gauche. Sur les panneaux du bas :  $\max(\rho_{z^\infty-h}^{cst}(\omega, p, q))$  à gauche, et  $\max(\rho_h^{par}(\omega, p, q))$  à droite.





# Chapitre 5

## Étude d'un problème non-linéaire de couplage océan-atmosphère : caractère bien posé et algorithmes de Schwarz

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Caractère bien posé du problème stationnaire</b>	<b>166</b>
5.1.1	Caractère bien posé du problème stationnaire : le cas mono-domaine	167
5.1.2	Généralisation à d'autres modèles de viscosité	169
5.1.3	Caractère bien posé du problème couplé stationnaire sans effet de Coriolis	171
5.1.4	Caractère bien posé pour le problème couplé stationnaire avec effet de Coriolis	173
<b>5.2</b>	<b>Application d'un algorithme de Schwarz sur le problème océan-atmosphère non linéaire</b>	<b>175</b>
5.2.1	Traitement des spécificités du problème couplé océan-atmosphère	175
5.2.2	Méthodologie pour l'étude de convergence de l'algorithme de point fixe	178
5.2.3	Simplification de la condition d'interface (formulation bulk)	179
<b>5.3</b>	<b>Étude de la convergence du problème stationnaire</b>	<b>181</b>
5.3.1	Convergence dans le cas mono-domaine	182
5.3.2	Différentes notions de vitesse de convergence	188
5.3.3	Convergence du problème couplé stationnaire	190
5.3.4	Le problème couplé stationnaire avec effet de Coriolis	194
<b>5.4</b>	<b>Première étude empirique du problème instationnaire</b>	<b>197</b>
5.4.1	Le problème instationnaire avec application de filtre moyenne	198

5.4.2	Simulations du problème instationnaire . . . . .	205
5.4.3	Pistes pour l'étude théorique du problème instationnaire . . . . .	211

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le couplage de deux problèmes d'Ekman linéaires en faisant l'hypothèse d'un profil de viscosité prescrit sur chaque sous-domaine et en considérant des conditions d'interface de type Dirichlet, Neumann ou Robin. Cependant, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, le problème de couplage tel que formulé dans les modèles de climat présente des non-linéarités, aussi bien dans les conditions d'interface que dans le calcul des viscosités turbulentes. Un problème incluant de manière plus réaliste les échelles turbulentes et représentatif du couplage océan-atmosphère est donné par (1.39), que nous rappelons ici :

$$\partial_t \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g + \partial_z (\nu_\alpha(z, u^*(t)) \partial_z \mathbf{u}_\alpha) \quad \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \times \mathcal{T}_l \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } \mathcal{T}_l \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{u}_\alpha(z, 0) = \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } [z_o^\infty, z_a^\infty] \quad (5.1c)$$

$$\nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a, t) = (u^*)^2 \frac{\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o, t)}{\|\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o, t)\|} \quad \text{sur } \mathcal{T}_l \quad (5.1d)$$

$$\nu_o \partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o, t) = \lambda^2 \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a, t) \quad \text{sur } \mathcal{T}_l \quad (5.1e)$$

où  $\mathbf{u}_{o,S}$  est la valeur de surface issue de l'océan directement déterminée à partir de  $\mathbf{u}_o(\delta_o)$ ,  $\lambda$  une constante et  $u^*$  une échelle de vitesse turbulente qui est solution d'une équation non-linéaire de la forme

$$u^* = \sqrt{C_D(u^*)} \|\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o, t)\|$$

avec  $C_D$  un coefficient de rugosité dépendant des paramétrisations dans la zone d'interface (voir section 1.2).  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$  représente l'effet de la force de Coriolis. Ce problème couplé est illustré sur la figure 5.1. Dans la suite on appellera de façon générique "formulation bulk" l'algorithme qui permet de calculer l'échelle de friction  $u^*$  en fonction des  $\mathbf{u}_\alpha(\delta_\alpha)$ .

**Viscosité KPP** On considère dans tout ce chapitre que la viscosité  $\nu_\alpha(u^*, z)$  est de type KPP (e.g. MCWILLIAMS & HUCKLE, 2006, dans le cas sans stratification) :

$$\nu_\alpha(u^*, z) = D_\alpha(u^*, z) H \left( 1 - \frac{z}{h_\alpha^*} \right) + \nu_\alpha^m \quad (5.2)$$

$$\text{avec } D_\alpha(u^*, z) = \kappa u_\alpha^* \frac{(h_\alpha^* - z)^2}{(h_\alpha^* - \delta_\alpha)^3} ((h_\alpha^* + \delta_\alpha)z - 2\delta_\alpha^2) \quad (5.3)$$

où  $u_\alpha^* = u^*$ ,  $u_o^* = \lambda u_a^*$ ,  $h_\alpha^* = c_\alpha u_\alpha^*$  avec  $c_\alpha$  une constante et  $H$  le créneau de Heaviside.

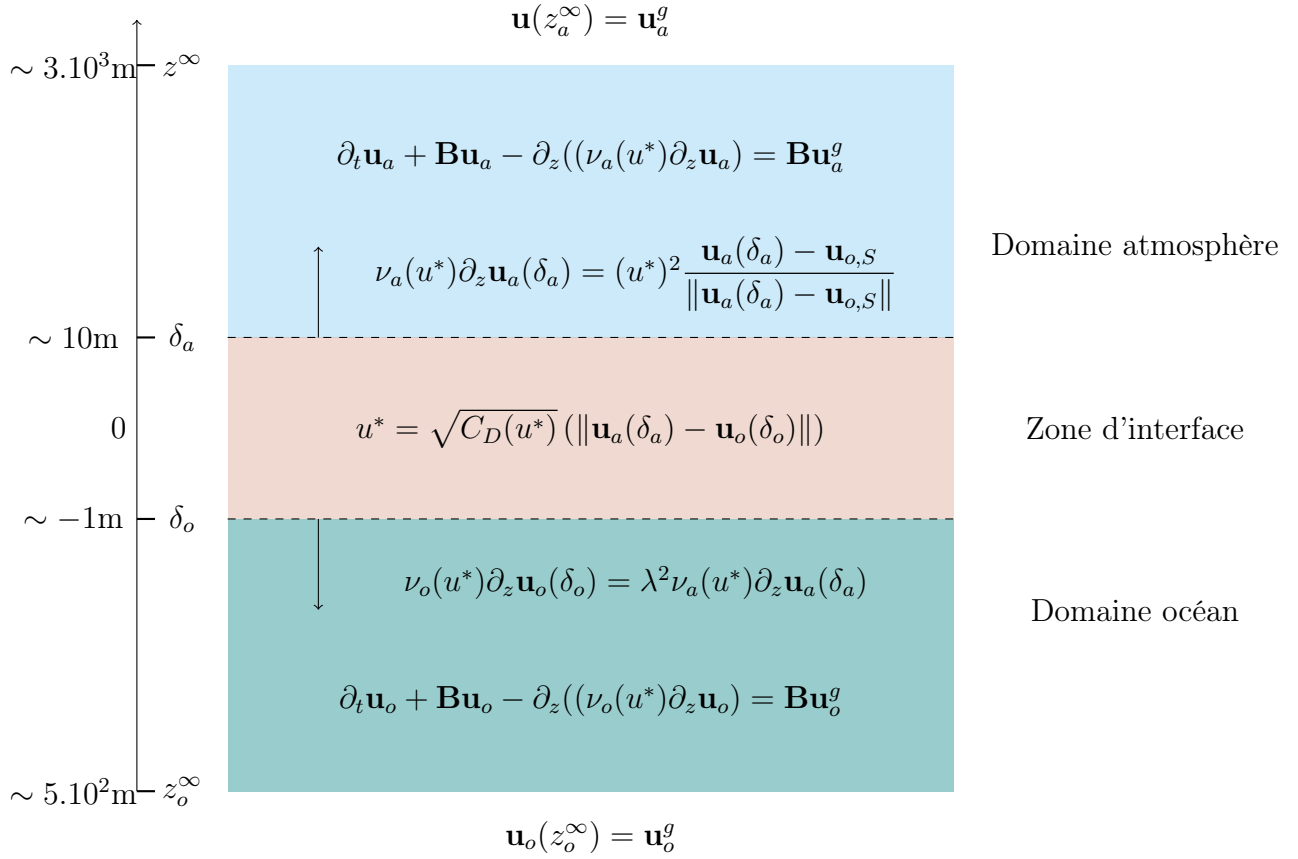


FIGURE 5.1 – Schéma du couplage océan-atmosphère non linéaire considéré dans ce chapitre

**Valeurs de référence pour les paramètres océan et atmosphère** Dans cette étude, nous prenons pour les différents paramètres des valeurs de référence typiques du contexte océan-atmosphère :

- Paramètres liés au couplage océan-atmosphère :
  - $\kappa = 0.41$  (constante de Von Kármán)
  - $\nu_a^m = 1.56 \times 10^{-5} \text{m.s}^{-2}$  et  $\nu_o^m = 5 \times 10^{-7} \text{m.s}^{-2}$  de sorte que  $\lambda = \sqrt{\rho_a/\rho_o} = \nu_o^m/\nu_a^m = 0.03$
  - $c_a = 0.2/|f|$  et  $c_o = 0.7/|f|$  avec  $f = 5 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$  la fréquence de Coriolis
- Paramètres liés au domaine de calcul :
  - $z_a^\infty = 3000 \text{ m}$  et  $z_o^\infty = -500 \text{ m}$
  - $\delta_a = 10 \text{ m}$  et  $\delta_o = 1 \text{ m}$

$\mathbf{u}_o^g$  et  $\mathbf{u}_a^g$  sont des données extérieures que l'on précisera lors des simulations.

Ce problème comporte différentes particularités présentes dans les modèles opérationnels, à savoir l'exclusion de la zone d'interface  $[\delta_o, \delta_a]$  et son traitement comme une entité "indépendante", ainsi que la non-linéarité des conditions d'interface qui sortent du cadre classique de l'étude des algorithmes de Schwarz exposée dans les chapitres précédents. Sur ce problème couplé, nous souhaitons étudier deux aspects :

- le caractère bien posé de l'algorithme : existe-t-il des solutions et sont-elles uniques ?
- la convergence d'un algorithme de Schwarz dans ce contexte non-linéaire : les itérations de Schwarz permettent-elles de converger vers une solution du problème ?

Le problème (5.1) et les questions ci-dessus ont été discutées dans le cadre d'une collaboration avec Véronique Martin (LAMFA, Université de Picardie). Nous étudierons d'abord le caractère bien posé du problème sous sa forme stationnaire dans la section 5.1. Nous nous intéresserons ensuite à l'application d'algorithme de Schwarz sur le problème couplé. La section 5.2 explique comment la prise en compte des particularités du couplage océan-atmosphère amène à étudier un algorithme de point fixe. Le cas stationnaire sera étudié de façon analytique dans la section 5.3, puis le cas instationnaire sera abordé de façon plus empirique dans la section 5.4.

## 5.1 Caractère bien posé du problème stationnaire

Nous allons étudier ici le caractère bien posé du problème (5.1) dans le cadre stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha - \partial_z(\nu_\alpha(z, u^*(t))\partial_z\mathbf{u}_\alpha) = \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^g \\ \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) = (u^*)^2 \frac{\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)}{\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|} \\ \nu_o \partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o) = \lambda^2 \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) \end{array} \right. \quad (5.4a)$$

$$\text{avec } u^* = \sqrt{C_D(u^*) \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|} \quad (5.4b)$$

Nous avons vu au paragraphe 4.1.1 que chaque sous-problème défini par (5.4a) est bien posé sous la condition que  $u^*$  est fixé et que l'orientation de  $\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)$  est fixée. Nous notons cette orientation :

$$\theta = \arg(\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\tau(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T$$

Dans cette section, nous chercherons des solutions au problème couplé (5.4) en déterminant  $\theta$  et en cherchant des solutions  $\tilde{u}^*$  de l'équation

$$\mathcal{U}(\tilde{u}^*) = R(\mathbf{u}_\alpha^g) \quad (5.5)$$

où  $\mathcal{U}$  et  $R$  seront différentes applications, suivant le cas considéré. Nous étudierons ensuite le nombre de solutions de (5.5) ayant un sens physique, c'est-à-dire dans des ordres de grandeur vraisemblables.

Nous travaillerons de façon progressive, d'abord pour une version mono-domaine du problème (5.4), ce qui nous permettra de discuter de la généralisation du caractère bien posé pour d'autres viscosités, puis pour le problème couplé tout d'abord sans, puis avec, effet de Coriolis.

### 5.1.1 Caractère bien posé du problème stationnaire : le cas mono-domaine

Dans un premier temps, nous proposons de nous concentrer sur le problème mono-domaine correspondant seulement à la partie atmosphérique du problème couplé (5.4) (voir figure 5.2), c'est-à-dire le problème suivant, où l'indice  $\cdot_a$  est négligé et où  $\mathbf{u}^g$  et  $\mathbf{u}_S$  sont des données extérieures :

$$\begin{cases} \partial_z(\nu(\tilde{u}^*, z)\partial_z(\mathbf{u}(z))) = 0 & \text{sur } [\delta, z^\infty] \\ \mathbf{u}(z^\infty) = \mathbf{u}^g \\ \nu(\tilde{u}^*, \delta)\partial_z\mathbf{u}(\delta) = (\tilde{u}^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta) \end{cases} \quad (5.6a)$$

$$\text{avec } \tilde{u}^* = \sqrt{C_D(\tilde{u}^*)} \|\mathbf{u}(\delta) - \mathbf{u}_S\| \quad (5.6b)$$

avec  $\theta = \arg(\mathbf{u}(\delta) - \mathbf{u}_S)$  et  $C_D$  issu des paramétrisations de la couche limite de surface :  $\sqrt{C_D(u^*)} = \ln(\delta/z^r(u^*))/\kappa$ , et  $z^r$  dépend de  $u^*$  et est défini par (1.21).

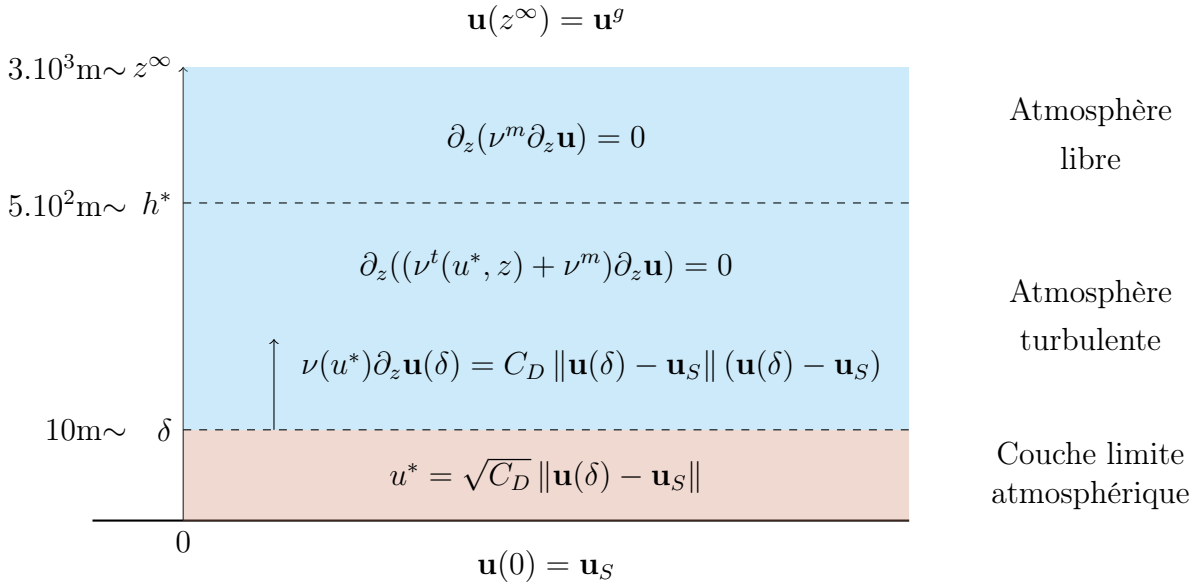


FIGURE 5.2 – Schéma du problème mono-domaine

Les calculs sont similaires à ceux du §4.3.1, et l'on obtient par intégration :

$$\mathbf{u}(\delta) - \mathbf{u}_S = \mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S - (\tilde{u}^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta) \Psi(\tilde{u}^*) \quad (5.7)$$

où  $\Psi(\tilde{u}^*) = \int_{\delta}^{z^{\infty}} (\nu(z'))^{-1} dz'$ . Une solution du problème mono-domaine (5.6) vérifie donc

$$\theta = \arg(\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \tilde{u}^* \left( \sqrt{C_D^{-1}(\tilde{u}^*)} + \tilde{u}^* \Psi(\tilde{u}^*) \right) = \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| \quad (5.8)$$

On s'intéresse aux solutions  $\tilde{u}^*$  correspondant à des valeurs physiquement acceptables, c'est-à-dire telles que le sommet de la couche limite turbulente soit au-dessus de la couche limite de surface et en-dessous de la hauteur totale :

$$\delta < h^*(\tilde{u}^*) < z^{\infty}, \quad \text{soit} \quad \tilde{u}^* \in I = \left[ \frac{\delta}{c}, \frac{z^{\infty}}{c} \right]$$

La figure 5.3 (panneau de droite) présente  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|$  pour  $\tilde{u}^* \in I$ , pour les valeurs de référence des divers paramètres.

**Propriété 5.1.1 Existence de solutions du problème mono-domaine :** On peut montrer de façon relativement robuste (plus précisément sans dépendance aux valeurs exactes de  $z^{\infty}$  et  $\delta$ , mais seulement à leurs ordres de grandeur) qu'il existe des solutions  $\tilde{u}^* \in I$  de  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|$  si

$$\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| \in [\mathcal{U}(u_{min}^*), \mathcal{U}(w^*)] = U^* \quad \text{avec} \quad u_{min}^* = \delta/c \quad \text{et} \quad w^* \approx \frac{2z^{\infty}}{3c} \quad (5.9)$$

La figure 5.3 (à droite) montre que cela correspond environ à  $\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| \in [10^3, 10^7]$ . Ces valeurs de vitesse de vent sont évidemment totalement irréalistes. Nous verrons plus loin que ceci est dû à une trop grande simplification du problème, et notamment à l'absence de prise en compte à ce stade de la force de Coriolis.

De plus, pour les plus grandes valeurs de  $\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|$ , on voit qu'il existe deux solutions, de part et d'autre de la valeur  $w^*$ . Dans la suite, on ne considérera que la plus petite d'entre elles car elle est plus "vraisemblable" d'un point de vue physique (l'autre solution vérifie en effet  $h^*(\tilde{u}^*) > \frac{2z^{\infty}}{3}$ , c'est-à-dire une hauteur de couche-limite turbulente proche de la hauteur totale du domaine). On notera  $I^* = \left[ \frac{\delta}{c}, \frac{2z^{\infty}}{3c} \right]$  cet intervalle de valeurs admissibles de  $u^*$ , qui sont alors solutions uniques.

*Démonstration.* L'équation (5.7) indique que  $\arg(\mathbf{u}(\delta) - \mathbf{u}_S) = \arg(\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S) = \theta$ . De plus la solution vérifie l'égalité  $\|\mathbf{u}(\delta) - \mathbf{u}_S\| = \tilde{u}^*/\sqrt{C_D}$ . Donc les  $\tilde{u}^*$  sont solutions de

$$\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| = \tilde{u}^* \left( \sqrt{C_D^{-1}} + \tilde{u}^* \Psi(\tilde{u}^*) \right) = \mathcal{U}(\tilde{u}^*) \quad (5.10)$$

Comme il l'a été montré au paragraphe 4.3.1, on peut approcher  $\Psi(u^*)$  pour tout  $u^* \in [\delta/c, z^{\infty}/c - \epsilon]$  par la partie de l'intégrale ne dépendant que de l'atmosphère libre (i.e.  $z \geq h^*$ ) :

$$\Psi = \int_{\delta}^{z^{\infty}} (\nu(z'))^{-1} dz' \approx \int_{h^*}^{z^{\infty}} (\nu(z'))^{-1} dz' = \frac{z^{\infty} - h^*}{\nu^m} = \Psi^{\text{libre}} \quad (5.11)$$

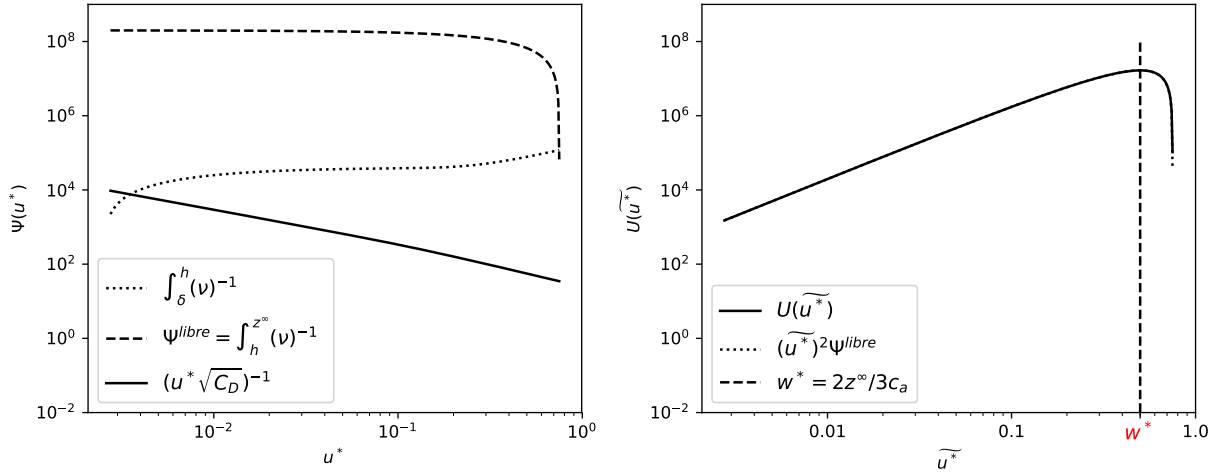


FIGURE 5.3 – A gauche : contributions à  $\Psi$  des zones turbulente  $[\delta, h^*]$  et libre  $[h^*, z^\infty]$ , et le terme  $(u^* \sqrt{C_D})^{-1}$  en fonction de  $u^* \in I$ . A droite : en ligne continue la valeur exacte de  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*)$  et en pointillé son approximation issue de (5.13).

Le terme  $C_D$  étant calculé directement par la paramétrisation dans la couche limite de surface (voir §1.2.1), il vaut par définition  $\sqrt{C_D}(u^*) = \kappa / \ln(\delta/z^r)$  où  $z^r$  est défini par (1.21). Dans nos ordres de grandeur, le terme  $\sqrt{C_D} \approx 3.5 \cdot 10^{-2}$  et on peut supposer que :

$$\sqrt{C_D}^{-1} \ll u^* \Psi(u^*) \quad (5.12)$$

Les deux propriétés (5.11)-(5.12) sont clairement vérifiées dans la figure 5.3 (à gauche). En utilisant ces approximations, (5.10) devient :

$$\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| = \mathcal{U}(\tilde{u}^*) \approx \frac{(\tilde{u}^*)^2 (z^\infty - c\tilde{u}^*)}{\nu^m} \quad (5.13)$$

Ce polynôme de degré 3 en  $\tilde{u}^*$  est d'abord croissant sur  $I$ , puis décroissant à partir  $\tilde{u}^* = 2z^\infty/(3c)$ . Ses valeurs sont faibles quand  $\tilde{u}^*$  tend vers  $\delta/c$ , son maximum vaut  $\frac{4}{27} \frac{(z^\infty)^3}{c^2 \nu^m} \approx 10^{-3} (z^\infty)^3 \approx (z^\infty)^2$ , et il tend vers 0 quand  $\tilde{u}^*$  tend vers  $z^\infty/c$ . Même si cette approximation polynomiale de  $\Psi(u^*)$  n'est plus valide en théorie lorsque  $u^*$  tend vers  $z^\infty/c$ , le même comportement demeure car  $\mathcal{U}$  reste décroissant à partir  $w^*$ . La figure 5.3 (à droite) montre d'ailleurs que l'approximation reste très bonne même pour  $u^*$  proche de  $z^\infty/c$ .  $\square$

### 5.1.2 Généralisation à d'autres modèles de viscosité

Le type de viscosité peut bien sûr varier suivant les modèles océan-atmosphère. Si nous nous sommes focalisés au §5.1.1 (et le ferons également au §5.3.1) sur une viscosité de type KPP bien précise, nous discutons maintenant ce qu'il adviendrait pour d'autres types de viscosité.

**Autres viscosités "à zéro équation"** Les modèles de viscosité "à zéro équation", comme la viscosité KPP utilisée précédemment, sont entièrement déterminés par le paramètre  $u^*$  (sans avoir besoin d'équation supplémentaire, d'où ce vocable de "zéro équation"). Dans la mesure où la zone turbulente est restreinte à l'intervalle  $(\delta, h^*)$  dans chaque sous-domaine, on peut écrire cette viscosité d'une manière très générale similaire à (5.2) :

$$\nu_{KPP}(u^*, z) = \tilde{D}(u^*, z) H\left(1 - \frac{z}{h^*}\right) + \nu^m \quad (5.14)$$

où  $H$  est le créneau de Heaviside et  $\tilde{D}(u^*, z) \gg \nu^m$  pour  $z \in [\delta, h^* - \epsilon]$ , avec un  $\epsilon > 0$  assez petit. Dans le cadre stationnaire, comme c'est l'intégrale de l'inverse de la viscosité qui influence la convergence, tant que le terme  $\int_{(\delta, h^*)}$  est négligeable devant  $|z^\infty - h^*|/\nu^m$ , alors les résultats des paragraphes 5.1.1 et 5.3.1 sont toujours valables. Dans le cadre du couplage océan-atmosphère, cette hypothèse est généralement vérifiée pour tout type de viscosité turbulente, car la viscosité moléculaire  $\nu^m$  est très faible devant les viscosités turbulentes.

**Viscosités "à une équation"** D'autres modèles de viscosité turbulente ne sont pas déterminés uniquement par le paramètre  $u^*$ , mais également par le profil de la solution. C'est notamment le cas pour les modèles basés sur l'énergie cinétique turbulente (e.g. REDELSPERGER & SOMMERIA, 1981) qui sous certaines hypothèses mènent à une viscosité du type

$$\nu^{1eq}(u^*, z, \|\partial_z \mathbf{u}(z)\|) = L^2(u^*, z) \|\partial_z \mathbf{u}(z)\| \quad \text{où} \quad u^* L(u^*, z) = \tilde{D}(u^*, z) H\left(1 - \frac{z}{h^*}\right) + \nu^m \quad (5.15)$$

On peut facilement étudier le caractère bien posé du problème mono-domaine avec une telle viscosité en remarquant qu'une solution  $\tilde{u}^*$  de (5.6) et la fonction  $\tilde{\mathbf{u}}$  correspondante vérifient :

$$\nu^{1eq}(u^*, z, \|\partial_z \mathbf{u}(z)\|) \partial_z \tilde{\mathbf{u}}(z) = (\tilde{u}^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\tilde{\theta}) \quad \implies \quad \nu^{1eq}(\tilde{u}^*, z) = \tilde{u}^* L(\tilde{u}^*, z) \quad (5.16)$$

Le nombre de solutions du problème avec viscosité "à une équation" correspond donc exactement au nombre de solutions du problème avec la viscosité KPP  $\nu_{KPP}(u^*, z) = u^* L(u^*, z)$ .

**Modèles de viscosité considérés dans la suite** Dans la suite, l'étude du caractère bien posé est étendue au cadre couplé toujours dans le cas stationnaire. Nous considérerons toujours des viscosités de type KPP, et pour des ordres de grandeur tels que  $D(u^*, z) \gg \nu^m$  dans les deux sous-domaines. Les démonstrations mathématiques des résultats théoriques se baseront sur l'approximation (4.41) qui est issue de cette hypothèse et les résultats sont donc applicables à une viscosité "à zéro équation" de forme générale (5.14) ou à une viscosité "à une équation" de forme générale (5.15).



### 5.1.3 Caractère bien posé du problème couplé stationnaire sans effet de Coriolis

Après le cas stationnaire mono-domaine, nous passons maintenant dans ce paragraphe au cas du problème stationnaire couplé, pour l'instant sans effet de Coriolis :

$$\begin{cases} \partial_z (\nu_\alpha(z, u^*) \partial_z \mathbf{u}_\alpha) = 0 & \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^g(z_\alpha^\infty) \\ \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) = (u^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta) \\ \nu_o \partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o) = \lambda^2 \nu_a \partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) \end{cases} \quad (5.17a)$$

$$\text{avec } u^* = \sqrt{C_D(u^*)} \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\| \quad (5.17b)$$

**Propriété 5.1.2 Caractère bien posé du problème couplé :** Nous pouvons montrer que pour des viscosités de type KPP ou "à une équation" comme présenté au §5.1.2, pour tout

$$\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| \in U^* = [\mathcal{U}(u_{min}^*), \mathcal{U}(W^*)] \quad \text{avec} \quad u_{min}^* = \max\left(\frac{\delta_a}{c_a}, \frac{|\delta_o|}{\lambda c_o}\right) \quad (5.18)$$

il existe une seule solution  $\tilde{u}^*$  au problème couplé (5.17) dans l'intervalle

$$I^* = \left[ \max\left(\frac{\delta_a}{c_a}, \frac{|\delta_o|}{\lambda c_o}\right), \min\left(\frac{z_a^\infty}{c_a}, \frac{|z_o^\infty|}{\lambda c_o}, W^*\right) \right] \quad (5.19)$$

où  $\mathcal{U}$  est l'application qui à un point fixe  $\tilde{u}^*$  associe la valeur de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$  correspondant et

$$W^* = \frac{2Z}{3C} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Z = z_a^\infty - \lambda z_o^\infty > 0 \\ C = c_a - \lambda^2 c_o > 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

La résolution de (5.17) sur chaque sous-domaine nous permet d'obtenir les valeurs des solutions en  $\delta_\alpha$  :

$$\mathbf{u}_a(\delta_a) = \mathbf{u}_a^g - (u^*)^2 \Psi_a e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_o(\delta_o) = \mathbf{u}_o^g + \lambda^2 (u^*)^2 \Psi_o e^{i\theta} \quad (5.21)$$

avec

$$\Psi_\alpha = \int_{(\delta_\alpha, z_\alpha^\infty)} \frac{dz'}{\nu_\alpha(u^*, z')} > 0 \quad (5.22)$$

Ainsi, la solution du problème couplé stationnaire (5.17) vérifie :

$$\theta = \arg(\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g) \quad \mathcal{U}(\tilde{u}^*) = (\tilde{u}^*)^2 \left( \left( \tilde{u}^* \sqrt{C_D(\tilde{u}^*)} \right)^{-1} + \Psi_a(\tilde{u}^*) + \lambda^2 \Psi_o(\tilde{u}^*) \right) = \|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| \quad (5.23)$$

Dans nos ordres de grandeur, ces solutions sont très proches des solutions du cadre mono-domaine (§5.1.1). Ces solutions sont données sur la figure 5.4.

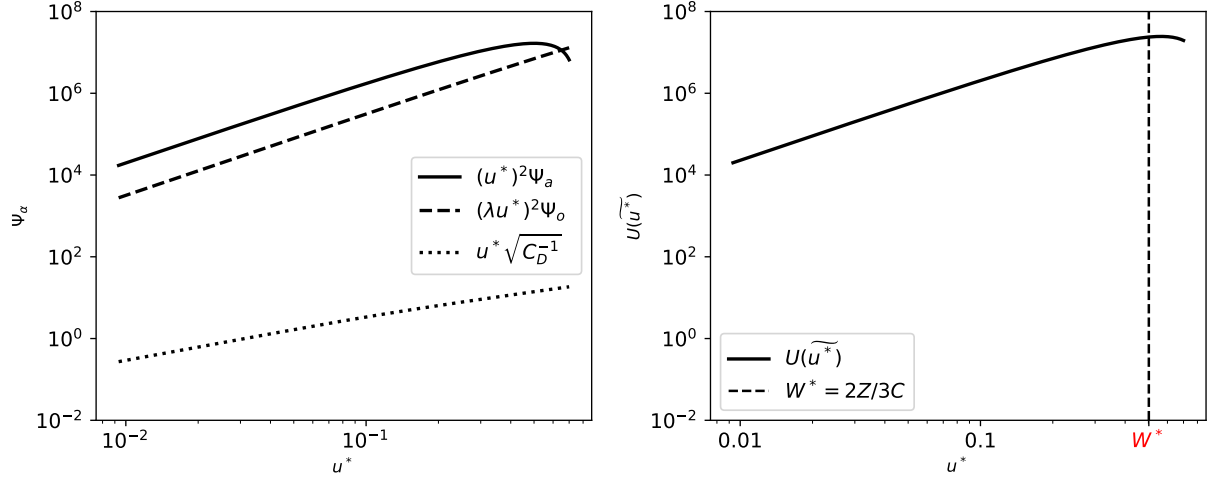


FIGURE 5.4 – A gauche : profils de  $(u_\alpha^*)^2 \Psi_\alpha$  et de  $u^* \sqrt{C_D(u^*)^{-1}}$  en fonction de  $u^*$ . A droite : le profil  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*)$ , et en tiret la borne des valeurs considérées pour  $\tilde{u}^*$  :  $W^* = 2Z/(3C)$

*Démonstration.* La démonstration déterminant les solutions du problème couplé est calquée sur celle du problème mono-domaine. Dans le cadre couplé, les valeurs "acceptables" de  $\tilde{u}^*$  sont données par :

$$\tilde{u}^* \in \left[ \frac{|\delta_o|}{\lambda c_o}, \frac{|z_o^\infty|}{\lambda c_o} \right] \cap \left[ \frac{\delta_a}{c_a}, \frac{z_a^\infty}{c_a} \right] =: I \quad (5.24)$$

Pour nos ordres de grandeur,  $I \approx [0.009; 0.7]$ . En remplaçant  $\Psi_\alpha$  par son approximation

$$\Psi_\alpha \approx \frac{|z_\alpha^\infty - h_\alpha^*|}{\nu_\alpha^m} = \Psi_\alpha^{libre} \quad (5.25)$$

démontrée au paragraphe 4.3.1, et en utilisant  $\nu_o^m = \lambda \nu_a^m$ , les solutions de (5.23) sont solutions de :

$$\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| \approx (\tilde{u}^*)^2 \left| \frac{Z - C\tilde{u}^*}{\nu_a^m} \right|$$

De la même manière que pour le problème mono-domaine, on montre que le terme de droite est croissant puis décroissant sur  $I$ , avec un maximum en  $2Z/3C$ , et  $2Z/3C$  est suffisamment proche de  $\min(z_a^\infty/c_a, |z_o^\infty|/(\lambda c_o))$  pour ne considérer que les solutions qui lui sont inférieures.  $\square$

**Influence des zones libres** Il apparaît que nous manipulons des termes  $\Psi_\alpha$  semblables à ceux apparus dans la section 4.3. L'approximation qui en découle dans le cadre stationnaire et sans effet de Coriolis montre que les termes issus des zone "libres" de l'océan et de l'atmosphère (c'est-à-dire ne subissant pas l'effet de la turbulence) sont bien plus influents que les zones turbulentes ou que la paramétrisation de la zone d'interface.

### 5.1.4 Caractère bien posé pour le problème couplé stationnaire avec effet de Coriolis

Nous allons maintenant ajouter l'effet de Coriolis au cas précédent, en considérant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} 0 & f \\ -f & 0 \end{array} \right) \mathbf{u}_\alpha(z) - \partial_z(\nu_\alpha(z, u^*)\partial_z \mathbf{u}_\alpha(z)) = \left( \begin{array}{cc} 0 & f \\ -f & 0 \end{array} \right) \mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^g \\ \nu_a(u^*, \delta_a)\partial_z \mathbf{u}_a(\delta_a) = (u^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta) \\ \nu_o(u^*, \delta_o)\partial_z \mathbf{u}_o(\delta_o) = \lambda^2(u^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta) \end{array} \right. \quad (5.26a)$$

$$\text{avec } u^* = C_D \|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\| \quad (5.26b)$$

Ce cas de figure est identique au paragraphe 4.1.3, et nous considérons donc le changement de variable (voir (4.23)) :

$$\begin{pmatrix} \varphi_\alpha(z) \\ \bar{\varphi}_\alpha(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha(z) = \mathbf{M} \mathbf{u}_\alpha(z) \quad (5.27)$$

Dans l'hypothèse où les conditions d'interface utilisées sont linéaires, et comme la matrice  $\mathbf{M}$  est orthogonale, étudier (5.26) revient à étudier :

$$\left\{ \begin{array}{l} if\varphi_\alpha(z) - \partial_z(\nu_\alpha(z, u^*)\partial_z \varphi_\alpha(z)) = if\varphi_\alpha^g \quad \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \\ \varphi_\alpha(z_\alpha^\infty) = \varphi_\alpha^g(z_\alpha^\infty) \\ \nu_a(u^*, \delta_a)\partial_z \varphi_a(\delta_a) = (u^*)^2 e^{i\theta} \\ \nu_o(u^*, \delta_o)\partial_z \varphi_o(\delta_o) = \lambda^2(u^*)^2 e^{i\theta} \end{array} \right. \quad (5.28a)$$

$$\text{avec } u^* = \sqrt{C_D} |\varphi_a(\delta_a) - \varphi_o(\delta_o)| \quad (5.28b)$$

Comme  $\mathbf{u}_\alpha^g$  (et donc  $\varphi_\alpha^g$ ) est constant, c'est une solution particulière de l'équation dans chaque sous-domaine. On considère le changement de variable  $V_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi_\alpha^g$  de sorte que  $V_\alpha$  vérifie le problème homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} ifV_\alpha(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(u^*, z)\partial_z V_\alpha(z)) = 0 \quad \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \\ V_\alpha(z_\alpha^\infty) = 0 \\ \nu_a(u^*, \delta_a)\partial_z V_a(\delta_a) = (u^*)^2 e^{i\theta} \\ \nu_o(u^*, \delta_o)\partial_z V_o(\delta_o) = \lambda^2(u^*)^2 e^{i\theta} \end{array} \right. \quad (5.29a)$$

$$\text{avec } u^* = \sqrt{C_D} |V_a(\delta_a) - V_o(\delta_o) + \varphi_a^g - \varphi_o^g| \quad (5.29b)$$

Les équations (5.29) dans chaque sous-domaine avec une viscosité de type KPP ont déjà été résolues au paragraphe 4.3.2. On reprend ici les mêmes notations et approximations de la viscosité.

**Résolution sur chaque sous-domaine** Dans le cadre général où la condition à l'interface est donnée par

$$\nu_\alpha(u^*, \delta_\alpha) \partial_z V_\alpha(\delta_\alpha) = \mathcal{CI}_\alpha(u^*) e^{i\theta} \quad (5.30)$$

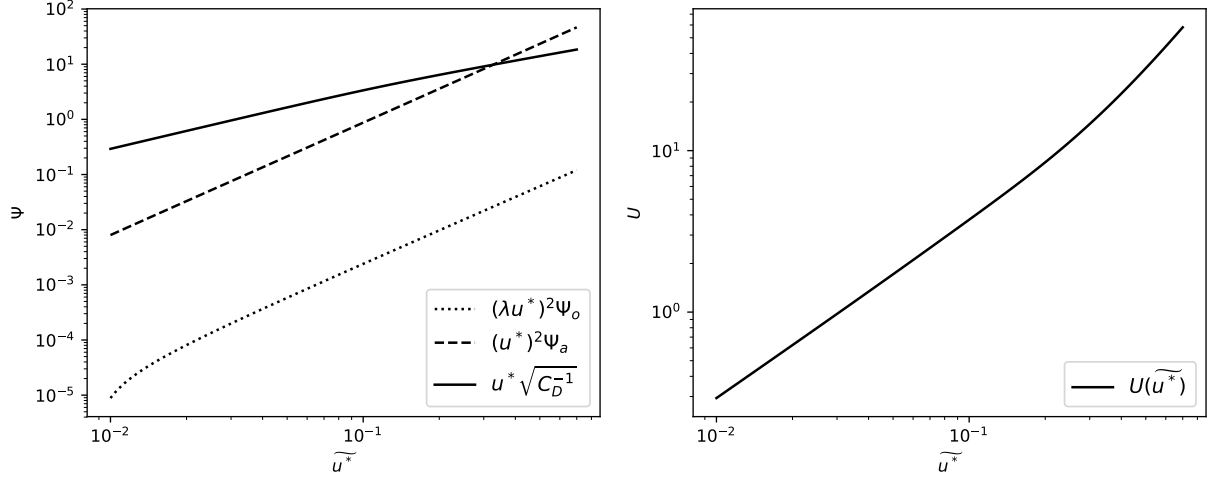


FIGURE 5.5 – A gauche : les différentes composantes de  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*)$  de (5.33) en fonction de la solution  $\tilde{u}^*$ . A droite : profil de  $|\varphi_a^g - \varphi_o^g|$  entier en fonction de la solution  $\tilde{u}^*$

avec  $\mathcal{CI}_a(u^*) = (u^*)^2$  et  $\mathcal{CI}_o = (\lambda u^*)^2$ , la solution en  $\delta_\alpha$  est :

$$\varphi_\alpha(\delta_\alpha) = \varphi_\alpha^g + \mathcal{CI}(u^*) \mathcal{X}_\alpha \frac{h_\alpha \sqrt{1 + 4\mu_\alpha} P_\alpha(\eta(\delta_\alpha)) + \Pi_\alpha P_\alpha(-\eta(\delta_\alpha))}{\xi_\alpha(1 + \xi_\alpha) G_\alpha(\eta(\delta_\alpha)) - \Pi_\alpha G_\alpha(-\eta(\delta_\alpha))} \quad (5.31)$$

avec  $\Pi_\alpha$ ,  $P$  et  $G$  définis en §4.3.2. On peut donc adapter les notations  $\Psi_\alpha$  du cas sans effet de Coriolis (§5.1.3) en remarquant que les profils de solutions (5.31) s'écrivent en fonction de  $\mathcal{S}_\alpha(\delta_\alpha)$  défini en (4.57), et on a de la même façon qu'en (5.21) :

$$\varphi_a(\delta_a) = \varphi_a^g - (u^*)^2 \Psi_a e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad \Psi_a = -\mathcal{S}_a(\delta_o) \quad (5.32a)$$

$$\varphi_o(\delta_o) = \varphi_o^g + \lambda^2 (u^*)^2 \Psi_o e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad \Psi_o = (\mathcal{S}_o(\delta_o))^{-1} \quad (5.32b)$$

L'équation pour  $u^*$  qui nous permet d'établir le caractère bien posé en terme de  $\Psi_\alpha$  est donc la même que (5.23) au §5.1.3. Par contre, dans la mesure où l'expression de  $\Psi_\alpha$  est compliquée, nous allons justifier les résultats seulement numériquement.

### Propriété 5.1.3 Caractère bien posé du problème couplé avec effet de Coriolis

: Les solutions  $\tilde{u}^*$  du problème couplé (5.29) sont les solutions de l'équation :

$$\theta = \arg(\varphi_a^g - \varphi_o^g) \quad \mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \tilde{u}^* \sqrt{C_D^{-1}(\tilde{u}^*)} + (\tilde{u}^*)^2 (\Psi_a + \lambda^2 \Psi_o) = |\varphi_a^g - \varphi_o^g| \quad (5.33)$$

La figure 5.5 présente le profil de  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*)$  avec  $C_D$  donné par la paramétrisation classique. Il apparaît que pour nos valeurs de référence, on obtient  $|\varphi_a^g - \varphi_o^g| \in [0.5, 50]$  et il existe alors une unique solution  $\tilde{u}^*$  dans  $I^*$ . Notons que ces ordres de grandeurs sont très différents, et beaucoup plus réalistes, que ceux obtenus sans l'effet de Coriolis.

**Influence de la zone turbulente et de la couche limite** Le panneau gauche de la figure 5.5 donne le profil des différentes composantes de (5.33). On remarque que les approximations faites dans le cadre stationnaire sans effet de Coriolis (§5.1.3) ne sont plus valides. Le terme issu du domaine atmosphère (en tirets) domine toujours largement le terme issu du domaine océan (en pointillés), mais le terme en  $C_D$  (trait continu), et donc les paramétrisations dans la zone d'interface, a ici une influence forte sur  $\mathcal{U}$ .

De plus, l'écriture de  $\Psi_\alpha$  (5.32) permet de faire le lien avec l'étude du comportement des termes  $\mathcal{S}_\alpha$  de §4.3.2, qui montre que les valeurs des solutions en  $\delta$  sont très influencées par la partie turbulente de la viscosité.

## 5.2 Application d'un algorithme de Schwarz sur le problème océan-atmosphère non linéaire

Nous souhaitons maintenant appliquer un algorithme de Schwarz au problème couplé non linéaire (5.1). Dans le cadre linéaire, il existe une méthodologie pour étudier la convergence de ces algorithmes (voir chapitre 2). Dans le cadre non-linéaire, cette méthodologie est a priori difficilement applicable. Nous expliquons d'abord au §5.2.1 comment les algorithmes de Schwarz peuvent être utilisés pour le couplage océan-atmosphère dans ce contexte de non-linéarité des conditions d'interface, et qu'ils se ramènent à l'étude d'un algorithme de point fixe. Nous rappelons ensuite au §5.2.2 quels outils mathématiques nous permettront d'étudier le caractère bien posé et la convergence de tels algorithmes de point fixe. Deux non-linéarités sont présentes, l'une au sein des modèles atmosphérique et océanique et l'autre à l'intérieur des formulations bulk qui régissent la condition d'interface. Cette dernière sera simplifiée pour une étude analytique au §5.2.3, et nous expliquerons en quoi elle est peu influente.

### 5.2.1 Traitement des spécificités du problème couplé océan-atmosphère

Les algorithmes de Schwarz sont bien connus pour la résolution de problèmes linéaires. Cependant, nous avons vu que le couplage océan-atmosphère "réel" n'entre pas dans ce cadre classique : la dynamique peut être fortement non-linéaire, les sous-domaines ne se touchent pas vraiment, et les conditions d'interface sont données via une formulation bulk complexe. Une adaptation des algorithmes de Schwarz apparaît donc nécessaire sur différents points :

- **la gestion de la couche limite** : La zone d'interface est considérée comme un domaine séparé de l'océan et de l'atmosphère, ce qui permet de prescrire les flux vers l'océan et vers l'atmosphère en  $\delta_\alpha$ . Dans ce sous-domaine "couche limite de surface", des formulations de type bulk, comme présentées au chapitre 1, estiment ces flux.
- **condition d'interface** : La formulation bulk permet de calculer une échelle de friction  $u^*$ . Or ce  $u^*$  et le profil des solutions sont interdépendants. Cette non-linéarité sera gérée par le processus itératif.

- **utilisation éventuelle de l'opérateur moyenne** : Pour se rapprocher de l'étude du modèle asynchrone le plus souvent utilisé en pratique (cf §2.1.2), et parce que l'application d'un opérateur moyenne présente des avantages (cf §2.1.2), on supposera aussi que des opérateurs moyenne peuvent être utilisés pour échanger les informations. Cette possibilité sera examinée dans l'étude du problème instationnaire au §5.4.1.

**Formulation en algorithme de point fixe** S'il est relativement aisé d'exprimer le taux de convergence d'un algorithme de Schwarz dans un cas linéaire, les spécificités que nous venons de lister nous font sortir de ce cadre méthodologique usuel. Toutefois, il est bien connu que la méthode de Schwarz peut être interprétée comme un algorithme de point fixe pour les valeurs à l'interface (e.g. GERARDO-GIORDA et NATAF, 2005). C'est ce point de vue que nous allons adopter ici, car il permet d'intégrer naturellement les difficultés évoquées ci-dessus, et notamment le traitement de la formulation bulk.

La figure 5.6 présente l'algorithme considéré dans son écriture générale. Nous considérons dans cette section et les suivantes une viscosité de type KPP, et nous avons vu au paragraphe 4.1.2 que pour une viscosité  $\nu$  fixée, c'est-à-dire pour  $u^*$  et  $\theta$  fixés (avec les notations de la figure 5.6), il existe une seule solution pour chaque sous-domaine. Donc, comme pour l'étude du caractère bien posé, on peut considérer le problème couplé (5.1) comme un problème sur les variables  $u^*$  et  $\theta$ . Ainsi le processus itératif peut être vu in fine comme un algorithme de point fixe sur  $(u_n^*, \theta_{n-1})$ , dont les étapes, à partir d'un  $(u_0^*, \theta_{-1})$  initial, sont à chaque itération  $n$  :

1. calcul des  $\nu_\alpha^n(z) = \nu_\alpha(u_n^*, z)$
2. résolution des équations de diffusion dans  $(\delta_\alpha, z_\alpha^\infty)$
3. calcul de  $\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o)$ , d'où  $\theta_n = \arg(\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o))$
4. calcul de  $u_{n+1}^*$  via la formulation bulk

**Formulations de la condition d'interface** Nous verrons dans la suite que la convergence de cet algorithme de point fixe dépend fortement de la manière dont sont formulées les conditions d'interface. Nous serons ainsi amené à en considérer deux formulations :

- une formulation "classique" et intuitive :

$$\nu_a^n(\delta_a) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) = (u_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) = u_n^* \sqrt{C_D(u_n^*)} (\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)) \quad (5.34a)$$

$$\nu_o^n(\delta_o) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = (\lambda u_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) = \lambda^2 u_n^* \sqrt{C_D(u_n^*)} (\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)) \quad (5.34b)$$

qui correspond en fait à une condition de Neumann dans chaque sous-domaine, et dont nous verrons qu'elle peut poser des problèmes de convergence ;

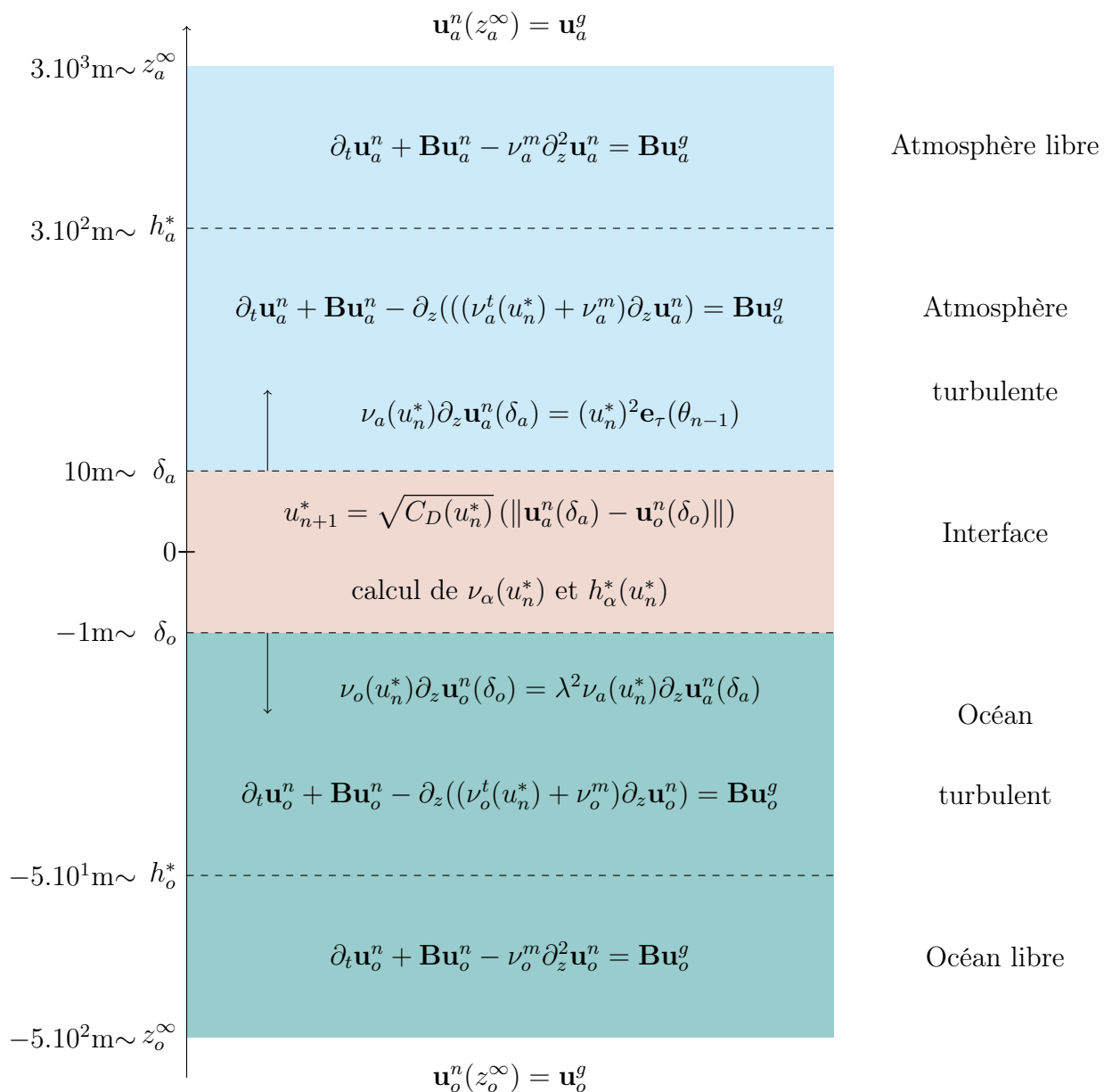


FIGURE 5.6 – Application d'un processus itératif sur le problème couplé océan-atmosphère

- une formulation alternative :

$$\nu_a^n(\delta_a) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) = u_n^* \sqrt{C_D(u_n^*)} (\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)) \quad (5.35a)$$

$$\nu_o^n(\delta_o) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2 u_n^* \sqrt{C_D(u_n^*)} (\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o)) \quad (5.35b)$$

qui a pour conséquence principale de transformer "naturellement" les conditions de Neumann en conditions de Robin.

Ces conditions sont cohérentes avec la condition de couplage du problème (5.1) dans le sens où, à convergence, elles définissent les mêmes points fixes, qui sont bien les solutions du problème couplé.

## 5.2.2 Méthodologie pour l'étude de convergence de l'algorithme de point fixe

L'algorithme précédent peut être écrit formellement :

$$(u_{n+1}^*, \theta_n) = \Phi(u_n^*, \theta_{n-1}) \quad (5.36)$$

où  $\Phi$  est une application à préciser.

**Simplification du problème** On a établi (§5.1.1) que  $\theta = \arg(\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g)$ . C'est donc une donnée du problème, connue dès le départ, et qui peut être choisie pour  $\theta_{-1}$ . Même si l'algorithme produit une suite de  $\theta_n$  qui ne sont a priori pas forcément égaux à  $\theta$ , il nous paraît raisonnable de supposer qu'ils sont en pratique constamment proches de  $\theta$ , et qu'on peut donc simplifier l'étude théorique en fixant  $\theta_n = \theta$ . Dans la suite, on étudiera donc l'algorithme de point fixe restreint à la variable  $u_n^*$  :

$$u_{n+1}^* = \Phi(u_n^*) \quad (5.37)$$

**Théorème du point fixe de Banach et condition de convergence** Si  $\Phi$  est continûment dérivable, l'étude de convergence entre dans le cadre théorique du *théorème du point fixe de Banach*. Ce théorème et des résultats qui en découlent sont brièvement rappelés en annexe C. Ainsi, l'algorithme converge vers  $\tilde{u}^*$  si et seulement si :

- le point fixe est stable, c'est-à-dire  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)| < 1$  ;
- le premier itéré  $u_0^*$  est dans "l'intervalle de convergence"  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$ . En effet, si  $\tilde{u}^*$  est stable, alors il existe un intervalle  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$  tel que toute suite initialisée dans  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$  converge vers  $\tilde{u}^*$ .



**Et pour notre application** Comme déjà discuté dans la section 5.1, on connaît un intervalle  $I$  de valeurs "raisonnables" pour  $u^*$ , donné par (5.24). On considérera ainsi que chaque  $u_n^*$  est dans cet intervalle :

$$u_n^* \in I = \left[ \frac{|\delta_o|}{\lambda c_o}, \frac{|z_o^\infty|}{\lambda c_o} \right] \cap \left[ \frac{\delta_a}{c_a}, \frac{z_a^\infty}{c_a} \right] \quad (5.38)$$

Et comme précédemment, on note  $I^* \subset I$  l'intervalle sur lequel les points fixes  $\tilde{u}^*$  sont uniques. Rappelons que le fait de fixer des données extérieures va entièrement déterminer la fonction  $\Phi$  ainsi que son unique point fixe dans  $I^*$ .

Dans notre cas, on souhaite vérifier la convergence pour tous les points fixes potentiels  $\tilde{u}^* \in I^*$ . Ainsi une première étape dans l'étude de la convergence sera de vérifier la stabilité pour tout  $\tilde{u}^* \in I^*$  :

$$|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)| < 1 \quad \forall \tilde{u}^* \in I^* \quad (5.39)$$

On cherchera ensuite une approximation de la zone de convergence, ce qui fournira une appréciation de l'erreur maximale acceptable pour le premier itéré. On observera deux types de zones de convergence :

- la zone de convergence stricte  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$ , qui est le plus grand intervalle de  $I^*$  contenant  $\tilde{u}^*$  et tel que  $|\partial_u \Phi(u^*)| < 1 \quad \forall u^* \in \mathcal{I}(\tilde{u}^*)$ .  
Ainsi, si le premier itéré  $u_0^*$  est dans  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$ , on assure que l'algorithme se rapproche du point fixe à chaque itération, c'est-à-dire  $|u_{n+1}^* - \tilde{u}^*| < |u_n^* - \tilde{u}^*|$ .
- la zone de convergence maximale  $\mathcal{I}_{conv}(\tilde{u}^*)$  qui est le plus grand intervalle de  $I^*$  contenant  $\tilde{u}^*$  et tel que si  $u_0^* \in \mathcal{I}_{conv}(\tilde{u}^*)$ , alors l'algorithme converge vers  $\tilde{u}^*$ .  
Cette zone de convergence, plus large que la zone de convergence stricte, ne permet cependant pas d'assurer que l'on se rapproche du point fixe à chaque itération.

### 5.2.3 Simplification de la condition d'interface (formulation bulk)

Comme expliqué précédemment, nous cherchons, pour étudier sa convergence, à résumer l'algorithme sous la forme :

$$u_{n+1}^* = \Phi(u_n^*) \quad (5.40)$$

Nous allons ici faire plusieurs simplifications qui vont faciliter l'étude théorique de convergence, sans affecter la généralité des résultats.

**Prise en compte des couches limites de surface** Les paramétrisations des couches limites de surface ont été décrites en §1.2.3. Elles interviennent pour le calcul de l'échelle de friction  $u_{n+1}^*$ . Ce calcul est géré par une formulation bulk qu'on peut résumer par  $u_{n+1}^* = \mathcal{Bulk}(\|\mathbf{u}_a^n(u_n^*, \delta_a) - \mathbf{u}_o^n(u_n^*, \delta_o)\|)$  tel que

$$u_{n+1}^* = \sqrt{C_D(u_{n+1}^*)} \|\mathbf{u}_a^n(u_n^*, \delta_a) - \mathbf{u}_o^n(u_n^*, \delta_o)\| \quad (5.41)$$

Avec les paramétrisations introduites au §1.2.3, on a ainsi :

$$\sqrt{C_D(u_{n+1}^*)} = \frac{\kappa}{\ln(\delta_a/z^r(u_{n+1}^*)) + 1 + \lambda^2 (\ln(\delta_o/z^r(u_{n+1}^*)) + 1)} \quad (5.42)$$

La formulation bulk qui détermine l'échelle de friction  $u_{n+1}^*$  solution de (5.41) peut être vue comme un algorithme du point fixe. On peut montrer que cette formulation (5.41) avec  $\sqrt{C_D}$  donné par (5.42) garantit l'unicité de  $u_{n+1}^*$  (il suffit de montrer que la fonction  $u \rightarrow u(\ln(\delta/z^r(u)) + 1)$  est croissante sur  $I$ ). Notons que ceci n'est pas vrai pour une formulation plus "classique" de la bulk où la sous-couche visqueuse atmosphérique n'est pas prise en compte (voir §1.2.1). Nous avons vérifié (figure 5.7) que ce choix de paramétrisation de l'interface a peu d'influence sur la valeur de sortie  $\sqrt{C_D}$ .

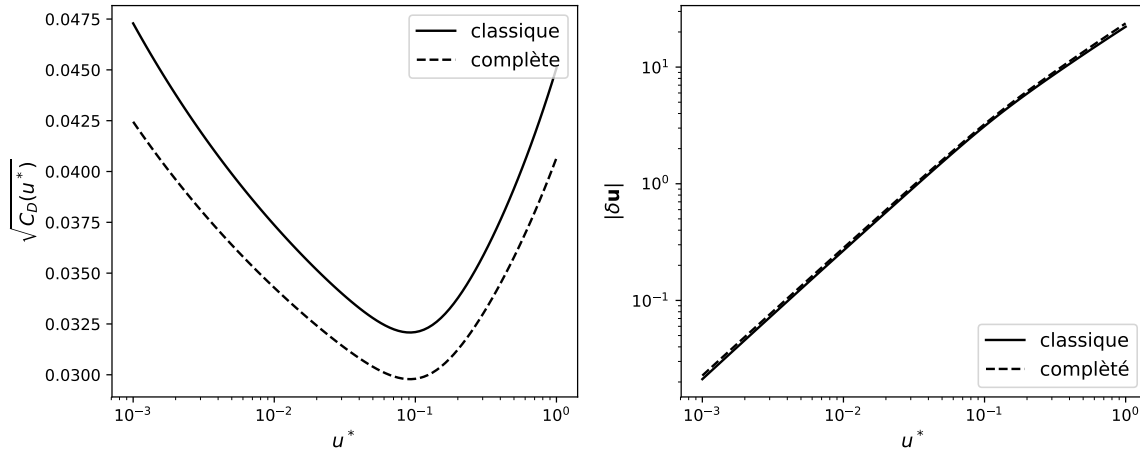


FIGURE 5.7 – Sans considérer la stratification (voir §1.2.1) : valeurs de  $\sqrt{C_D}$  (à gauche) et  $\|\mathbf{u}_a(\delta_a) - \mathbf{u}_o(\delta_o)\|$  (à droite) pour les formulations bulk classique (sans paramétrisation des sous-couches visqueuses ni de la couche limite océanique, en trait continu) et complète (avec ces paramétrisations, en trait tireté).

**Approximation de  $\sqrt{C_D}$**  La résolution de (5.41) est complexe, du fait notamment de l'expression de la fonction  $z^r(u^*)$ . Comme nous l'avons vu au §1.2.1, on a en effet dans le cas le plus simple (sans stratification)  $z^r(u^*) = a(u^*)^2 + b/u^*$ , avec  $a, b$  des constantes, et une expression encore plus compliquée dans le cas standard avec stratification. Ceci rend particulièrement difficile, et a priori hors d'atteinte, une étude théorique de convergence de l'algorithme de point fixe (5.40).

Toutefois on peut remarquer (figure 5.7 à gauche) que la valeur de  $\sqrt{C_D}(u^*)$  varie très peu dans le domaine  $I$  dans le cas sans stratification, et que  $\partial_{u^*}\sqrt{C_D}(u^*)$  est généralement négligeable dans les calculs. La prise en compte de la stratification ne modifie pas fondamentalement les choses, puisqu'on reste généralement dans les mêmes types de comportement et d'ordres de grandeur (e.g. LARGE & POND, 1981). Dans la suite, pour l'étude théorique seulement, nous ferons donc l'hypothèse que  $\sqrt{C_D}$  est constant. La valeur exacte de cette constante sera peu importante, seul son ordre de grandeur compte.

Ces différentes simplifications ramènent finalement l'étude théorique de l'itération de point fixe (5.40) à :

$$u_{n+1}^* \propto \|\mathbf{u}_a^n(u_n^*, \delta_a) - \mathbf{u}_o^n(u_n^*, \delta_o)\|$$

### 5.3 Étude de la convergence du problème stationnaire

Nous allons maintenant étudier les propriétés de convergence de l'algorithme de point fixe construit précédemment, en commençant dans cette section par le cas du problème stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha^n - \partial_z(\nu_\alpha^n(z)\partial_z\mathbf{u}_\alpha^n(z)) = \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha^g \quad \text{sur } (\delta_\alpha, z_\alpha^\infty) \\ \mathbf{u}_\alpha^n(z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^g(z_\alpha^\infty) \\ \nu_a^n(\delta_a)\partial_z\mathbf{u}_a^n(\delta_a) = (u_n^*)^2\mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \\ \nu_o^n(\delta_o)\partial_z\mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2(u_n^*)^2\mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \end{array} \right. \quad (5.43a)$$

$$\text{avec } u_n^* = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)\| \quad \text{et } \theta_{n-1} = \arg(\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)) \quad (5.43b)$$

On fait ici l'approximation  $\sqrt{C_D}$  constant justifiée précédemment.

Les conditions d'interface dans (5.43) sont celles que nous avons qualifiées de "classiques" au §5.2.1, et correspondent à l'équation (5.34). Elles peuvent être reformulées comme :

$$\nu_a^n(\delta_a)\partial_z\mathbf{u}_a^n(\delta_a) = (u_n^*)^2\mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) = u_n^*\sqrt{C_D}(\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)) \quad (5.44a)$$

$$\nu_o^n(\delta_o)\partial_z\mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2(u_n^*)^2\mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) = \lambda^2u_n^*\sqrt{C_D}(\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)) \quad (5.44b)$$

Comme annoncé au §5.2.1, nous en considérerons aussi une version alternative, correspondant à l'équation (5.35), et qui s'écrit ici comme les conditions de Robin :

$$\nu_a^n(\delta_a)\partial_z\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - u_n^*\sqrt{C_D}\mathbf{u}_a^n(\delta_a) = -u_n^*\sqrt{C_D}\mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o) \quad (5.45a)$$

$$\nu_o^n(\delta_o)\partial_z\mathbf{u}_o^n(\delta_o) + \lambda^2u_n^*\sqrt{C_D}\mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2u_n^*\sqrt{C_D}\mathbf{u}_a^n(\delta_a) \quad (5.45b)$$

Une version parallélisable de ces conditions d'interface ferait intervenir  $\mathbf{u}_a^{n-1}$  au lieu de  $\mathbf{u}_a^n$  dans (5.45b). Cette version complexifie encore les calculs et nous préférons expliciter les calculs de la version non parallélisable (5.45) comme première approche.

Nous procéderons ici de façon progressive, comme au §5.1. Nous étudierons la convergence de l'algorithme tout d'abord dans le cas mono-domaine (§5.3.1), ce qui permettra d'identifier les effets des conditions d'interface données ci-dessus, et discuterons au §5.3.2 le fait que la vitesse de convergence est plus délicate à déterminer que dans le cadre linéaire. Nous étudierons ensuite la convergence du problème couplé, d'abord sans effet de Coriolis (§5.3.3), puis avec cet effet (§5.3.4).

### 5.3.1 Convergence dans le cas mono-domaine

Commençons par étudier la convergence de l'algorithme de point fixe sur le problème mono-domaine introduit au §5.1.1 :

$$\begin{cases} \partial_z(\nu(\tilde{u}^*, z)\partial_z(\mathbf{u}(z))) = 0 & \text{sur } [\delta, z^\infty] \\ \mathbf{u}(z^\infty) = \mathbf{u}^g \\ \nu(\tilde{u}^*, \delta)\partial_z(\mathbf{u}(\delta)) = (\tilde{u}^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta) & \text{avec } \theta = \arg(\mathbf{u}(\delta) - \mathbf{u}_S) \end{cases} \quad (5.46)$$

Nous avons vu que la solution  $\tilde{u}^*$  vérifie :

$$\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| = \mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \tilde{u}^* \left( \sqrt{C_D^{-1}} + \tilde{u}^* \Psi(u^*) \right) \quad \text{avec } \Psi(u^*) = \int_\delta^{z^\infty} \frac{dz'}{\nu(u^*, z')} \quad (5.47)$$

La version itérative est donc :

$$\begin{cases} \partial_z(\nu^n(z)\partial_z(\mathbf{u}^n(z))) = 0 & \text{sur } [\delta, z^\infty] \\ \mathbf{u}^n(z^\infty) = \mathbf{u}^g \end{cases}$$

L'échelle de friction est estimée par  $u_n^* = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}^{n-1}(\delta) - \mathbf{u}_S\|$ . Comme annoncé plus haut, nous allons considérer ici deux écritures des conditions d'interface :

- la condition classique de Neumann :  $\nu^n(\delta)\partial_z\mathbf{u}^n(\delta) = u_n^*\sqrt{C_D}(\mathbf{u}^{n-1}(\delta) - \mathbf{u}_S)$ .

On peut notamment en déduire que :  $\mathbf{u}^n(\delta) = \mathbf{u}^g - u_n^*\Psi(u_n^*)\sqrt{C_D}(\mathbf{u}^{n-1}(\delta) - \mathbf{u}_S)$

- la condition alternative de Robin :  $\nu(\delta)\partial_z\mathbf{u}^n(\delta) - u_n^*\sqrt{C_D}\mathbf{u}^n(\delta) = -u_n^*\sqrt{C_D}\mathbf{u}_S$ .

On a alors :  $\mathbf{u}^n(\delta) = \frac{\mathbf{u}^g + \mathbf{u}_S u_n^* \sqrt{C_D} \Psi(u_n^*)}{1 + u_n^* \sqrt{C_D} \Psi(u_n^*)}$

La figure 5.8 présente l'algorithme de point fixe pour ces deux conditions d'interface. Les solutions du problème mono-domaine (5.46) sont donc les points fixes de ces algorithmes, pour la condition d'interface "classique" ou "alternative". Rappelons également que, comme au §5.1.1, nous ne nous intéresserons qu'aux points fixes vérifiant  $\tilde{u}^* < 2z^\infty/(3c)$ .

**Propriété 5.3.1 Convergence pour la condition de Neumann classique :** Pour tout  $\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|$  dans l'intervalle admissible  $U^*$  défini par (5.9), seuls les points fixes dans l'intervalle

$$I_{conv} = \left[ \frac{2}{3} \frac{z^\infty}{c} - \frac{\nu^m}{2\sqrt{C_D}z^\infty}, \frac{2}{3} \frac{z^\infty}{c} + \frac{\nu^m}{2\sqrt{C_D}z^\infty} \right] \approx \left[ \frac{2}{3} \frac{z^\infty}{c} - 7 \cdot 10^{-8}, \frac{2}{3} \frac{z^\infty}{c} + 7 \cdot 10^{-8} \right] \quad (5.48)$$

sont stables.

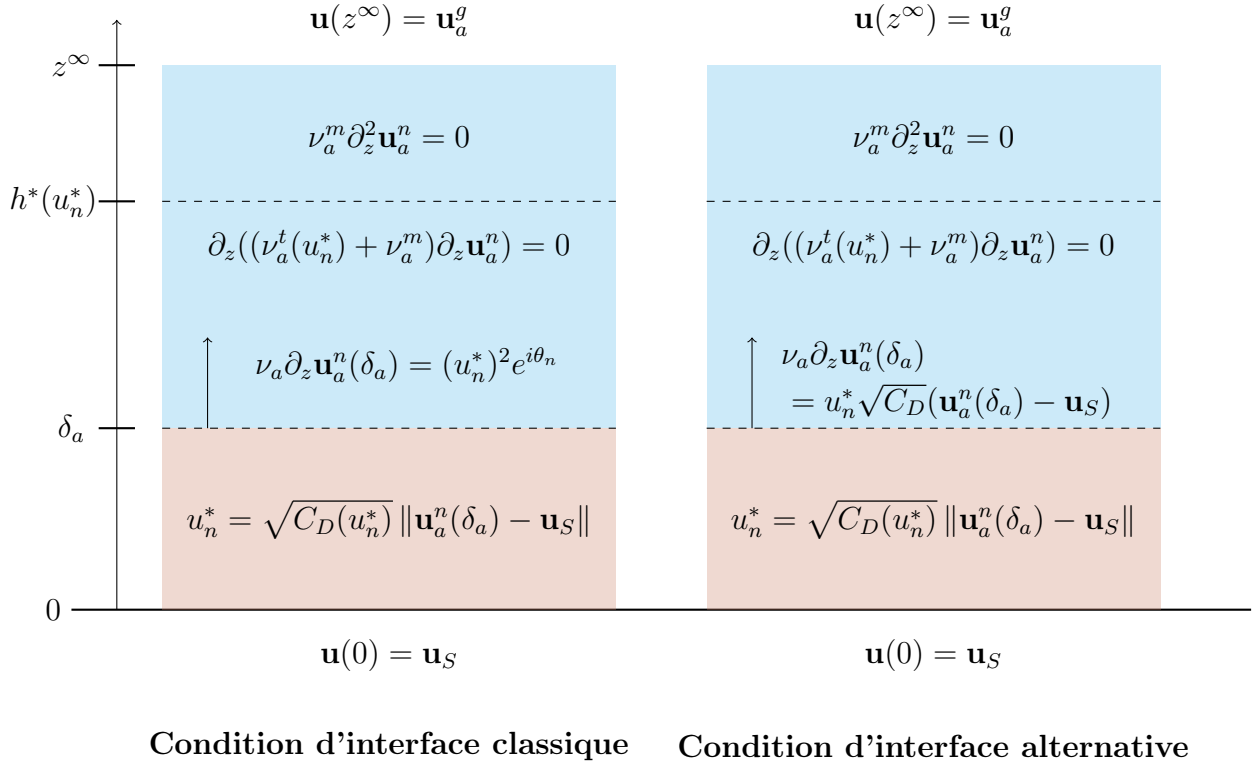


FIGURE 5.8 – Schémas du problème mono-domaine avec la condition classique (à gauche) et alternative (à droite)

*Démonstration.* On a pour la condition classique

$$u_{n+1}^* = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}^n(\delta) - \mathbf{u}_S\| = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S - (u_n^*)^2 \Psi(u_n^*) \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1})\|$$

L'approximation  $\theta_{n-1} \approx \theta$  discutée au §5.2.2 permet de se ramener à

$$\begin{aligned} u_{n+1}^* = \Phi(u_n^*) &= \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S - (u_n^*)^2 \Psi(u_n^*) \mathbf{e}_\tau(\theta)\| \\ &= \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| - (u_n^*)^2 \Psi(u_n^*) \end{aligned}$$

La dérivée exacte de  $\Phi(u^*)$  a une expression compliquée, car elle fait intervenir la dérivée de  $\Psi(u^*)$  (rappelons que  $\Psi(u^*)$  est donnée par (5.47)), ce qui implique une dérivation de la paramétrisation KPP (5.2). Nous avons réalisé ce calcul par différences finies et tracé le résultat sur la figure 5.9 (gauche). On constate que la zone de convergence, si elle existe (il faudrait raffiner les calculs à l'extrême pour le confirmer), est un intervalle extrêmement petit, et qu'il y a donc en pratique non convergence de l'algorithme avec cette condition classique de Neumann.

On peut par ailleurs tenter d'obtenir de façon plus simple une estimation de  $\Psi'(u^*)$ , en utilisant l'approximation de  $\Psi(u^*)$  vue au §5.1.1 :  $\Psi(u^*)$  peut être approché avec

une très bonne précision par  $\frac{z^\infty - h^*}{\nu^m} = \frac{z^\infty - cu^*}{\nu^m}$ . On peut vérifier graphiquement que cette approximation de la dérivée  $\Psi'(u^*)$  est de bonne qualité. On en déduit alors :

$$|\partial_u \Phi(u^*)| = \sqrt{C_D} |\partial_u [(u^*)^2 \Psi(u^*)]| \approx \sqrt{C_D} u^* \frac{|2z^\infty - 3cu^*|}{\nu^m} \quad (5.49)$$

Pour que les points fixes  $\tilde{u}^*$  soient stables, il faut que  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)| < 1$ . L'étude du signe de  $\sqrt{C_D} \tilde{u}^* |2z^\infty - 3c\tilde{u}^*| - \nu^m$  montre que cette condition correspond à un intervalle extrêmement restreint autour de  $2z^\infty/3c$  donné par (5.48). Le tracé de cette dérivée approchée est indiqué également sur la figure 5.9 (gauche) : on constate que l'approximation est très correcte. Ceci confirme la non stabilité qu'on doit observer en pratique.  $\square$

Cette propriété de non stabilité des points fixes avec la condition de Neumann classique a été vérifiée expérimentalement : dans les simulations numériques, on observe en effet que l'algorithme converge vers un autre point fixe situé complètement en-dehors de l'intervalle  $I$  des valeurs acceptables.

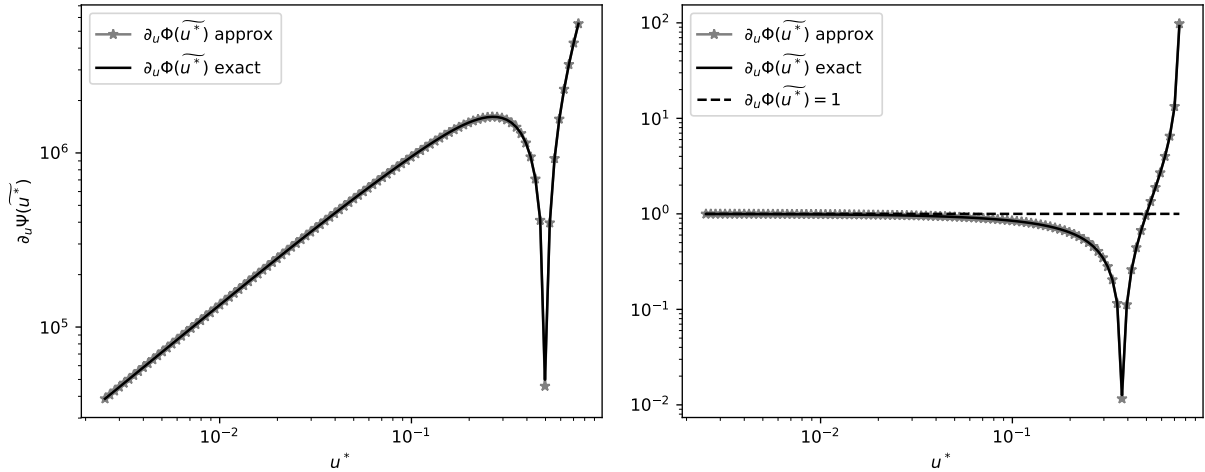


FIGURE 5.9 – Profil de  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$  pour la condition classique (à gauche) et alternative (à droite). La valeur exacte de  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$  est calculée à partir de l'estimation numérique de  $|\partial_u \Psi(\tilde{u}^*)|$ , la valeur approchée de  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$  est calculée à partir de l'approximation  $\Psi(u^*) = \frac{z^\infty - h^*}{\nu^m}$

**Propriété 5.3.2 Convergence pour la condition alternative de Robin :** Par opposition au cas précédent, avec la condition alternative, tous les points fixes de  $I^*$  sont stables. Pour les valeurs faibles de points fixes ( $\tilde{u}^* \ll z^\infty/c$ ), la zone de convergence stricte est très restreinte et peut être estimée par :

$$\mathcal{I}(\tilde{u}^*) = [\tilde{u}^*(1 - \epsilon), \tilde{u}^*(1 + \epsilon)] \quad \text{avec } \epsilon \leq 0.1 \text{ pour } \tilde{u}^* < 0.1z^\infty/c \quad (5.50)$$

Cet  $\epsilon$  est estimé numériquement et tracé sur la figure 5.10 en fonction du point fixe. Il correspond à l'erreur relative maximale sur le premier itéré pour que l'algorithme converge strictement vers  $\tilde{u}^*$ . La zone de convergence maximale  $\mathcal{I}_{conv}$  est plus large et vérifie

$$\left[ \frac{2\nu^m c \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|}{(z^\infty)^2}, \frac{z^\infty}{2c} \right] \approx \left[ 2, 7(\tilde{u}^*)^2, \frac{z^\infty}{2c} \right] \subset \mathcal{I}_{conv}(\tilde{u}^*) \quad (5.51)$$

Pour des valeurs de  $\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|$  telles que  $\tilde{u}^*$  soit plus petit que  $z^\infty/(2c)$ , la zone  $\mathcal{I}_{conv}$  contient une large partie de  $I^*$ . Les délimitations de la zone  $\mathcal{I}_{conv}$  sont tracées sur la figure 5.10.

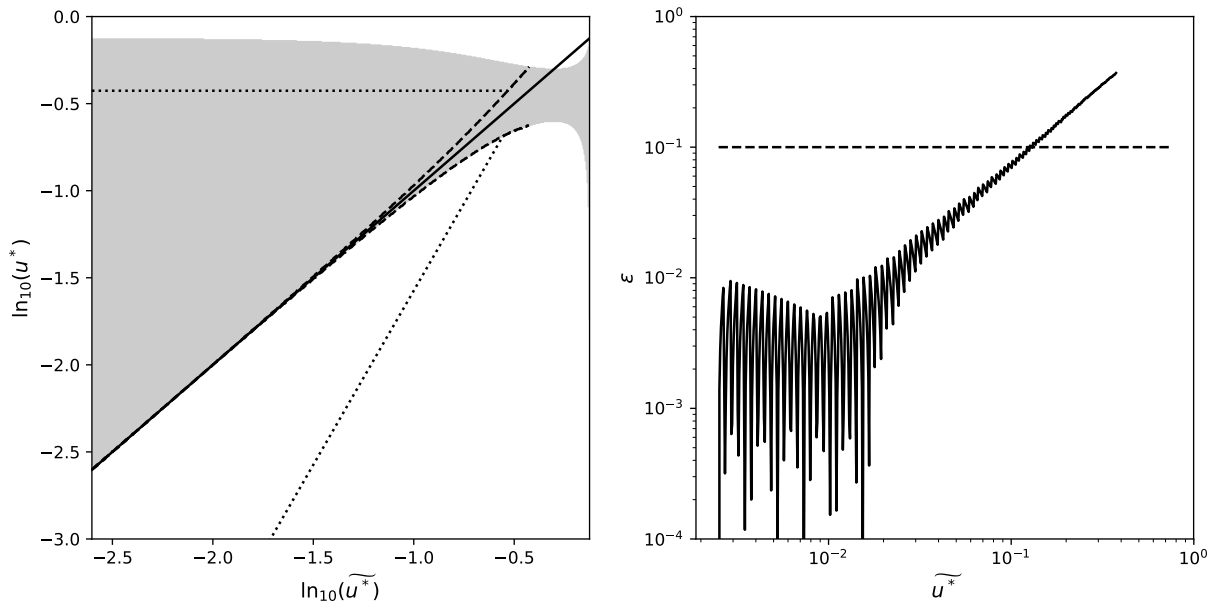


FIGURE 5.10 – Condition alternative de Robin. A gauche : en grisé la zone où  $|\partial_u \Phi(u^*)| < 1$  en fonction de  $\tilde{u}^*$ . On indique aussi, pour  $\tilde{u}^* < z^\infty/(2c)$ , la zone de convergence stricte  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$  (délimitée par les traits tiretés) et la zone de convergence maximale  $\mathcal{I}_{conv}(\tilde{u}^*)$  (délimitée par les traits pointillés). A droite : estimation de  $\epsilon$  dans (5.50) correspondant à la zone en pointillé du panneau de gauche.

*Démonstration.* Pour la condition alternative de Robin,  $\Phi$  s'écrit :

$$u_{n+1}^* = \Phi(u_n^*) = \left| \frac{\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\|}{\sqrt{C_D^{-1} + u_n^* \Psi(u_n^*)}} \right| \quad (5.52)$$

On a donc :

$$|\partial_u \Phi(u^*)| = \|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| \left| \frac{\Psi(u^*) + u^* \Psi'(u^*)}{\left(\sqrt{C_D^{-1} + u^* \Psi(u^*)}\right)^2} \right| \quad (5.53)$$

*Stabilité* : Tout point fixe  $\tilde{u}^*$  vérifie de plus l'égalité  $\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| = \tilde{u}^* \left| \sqrt{C_D^{-1} + \tilde{u}^* \Psi(\tilde{u}^*)} \right|$ , donc

$$|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)| = \tilde{u}^* \left| \frac{\Psi(\tilde{u}^*) + \tilde{u}^* \Psi'(\tilde{u}^*)}{\sqrt{C_D^{-1} + \tilde{u}^* \Psi(\tilde{u}^*)}} \right| \approx \frac{|z^\infty - 2c\tilde{u}^*|}{|z^\infty - c\tilde{u}^*|} \quad (5.54)$$

On montre aisément que cette dernière expression est décroissante sur  $[\delta/c, z^\infty/(2c)]$ , puis croissante. De plus, elle est strictement inférieure à 1 en en  $\delta/c$  et vaut 1 en  $2z^\infty/(3c)$ . Donc  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)| < 1$  pour tout  $\tilde{u}^* < 2z^\infty/(3c)$ , à la qualité de l'approximation (5.54) près.

*Zone de convergence stricte* : Pour la zone de convergence, on étudie le signe de  $\partial_u |\partial_u \Phi(u^*)|$  à partir de l'expression (5.53) et on montre que  $|\partial_u \Phi(u^*)|$  est décroissant jusque  $u^* = z^\infty/(2c)$  puis croissant. La limite gauche de  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*)$  est donc la plus petite valeur  $u^* < \tilde{u}^*$  telle que  $|\partial_u \Phi(u^*)| < 1$ . Cette limite gauche détermine aussi la limite droite, pour assurer que  $\Phi(\mathcal{I}(\tilde{u}^*)) \subset \mathcal{I}(\tilde{u}^*)$ . La figure 5.10 représente les zones où  $|\partial_u \Phi(u^*)| < 1$  en fonction de  $\tilde{u}^*$ , et indique le  $\epsilon$  défini par (5.50), qui détermine l'erreur relative maximale sur le premier itéré.

*Zone de convergence maximale* : Pour  $\tilde{u}^* < z^\infty/(2c)$ ,  $|\partial_u \Phi(u^*)|$  est décroissant autour de  $\tilde{u}^*$ . Il existe donc une zone  $J = [w_{conv}^*, \tilde{u}^*]$  telle que  $\Phi(J) \subset [\tilde{u}^*, z^\infty/(2c)]$  et  $\Phi([\tilde{u}^*, z^\infty/(2c)]) \subset J$ . Naturellement  $\mathcal{I}(\tilde{u}^*) \subset \mathcal{I}_{conv}(\tilde{u}^*)$ . Donc pour une itération donnée, si  $u_n^* \in J \setminus \mathcal{I}$  on peut alors assurer la convergence de l'algorithme si  $|\partial_u \Phi(w_{conv}^*)| |\partial_u \Phi(\tilde{u}^*(1 + \epsilon))| < 1$ . On peut estimer ce  $w_{conv}^*$  tel que  $\Phi(w_{conv}^*) = z^\infty/(2c)$ . Cette solution existe si  $(z^\infty)^3 > 8c^2\nu U$  ce qui est le cas dans nos ordres de grandeur et on obtient la zone de convergence présentée en (5.51).  $\square$

Nous donnons un exemple du comportement de la dérivée  $|\partial_u \Phi(u^*)|$  et de la zone de convergence  $\mathcal{I}_{conv}(\tilde{u}^*)$  dans la figure 5.11. L'évolution de  $u_n^*$  pour cet exemple est donnée dans la figure 5.12, et on vérifie que la valeur de  $u^*$  convergée est bien la solution du problème mono-domaine donné au §5.1.1. Sur cet exemple, la zone de convergence stricte est assez restreinte, et le première itéré est dans la zone de convergence maximale. On observe bien la convergence, mais sur les premières itérations on ne se rapproche pas du point fixe à chaque itération ( $|u_{n+1} - \tilde{u}^*| > |u_n - \tilde{u}^*|$  mais  $|u_{n+2} - \tilde{u}^*| < |u_n - \tilde{u}^*|$ ). La figure 5.13 donne un exemple où la zone de convergence stricte est plus large, et lorsque le premier itéré est dans cette zone de convergence stricte, on améliore bien la convergence à chaque itération.



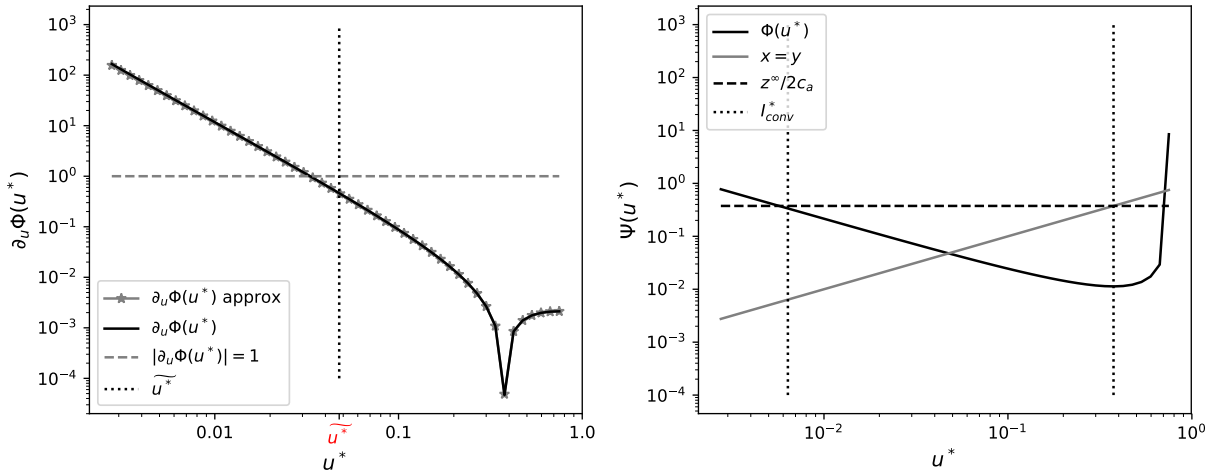


FIGURE 5.11 – Pour la condition alternative de Robin : profil de  $|\partial_u \Phi(u^*)|$  (à gauche) et  $|\Phi(u^*)|$  (à droite) pour un cas particulier avec  $\|\mathbf{u}^g - \mathbf{u}_S\| = \sqrt{2} 10^6$ . Le panneau de gauche est la dérivée en  $u^*$  donnée par (5.53). Les pointillés verticaux représentent la valeur du point fixe pour cet exemple. Le panneau de droite représente le profil de  $|\Phi(u^*)|$  et la droite  $y = x$ , les pointillés verticaux représentent la "zone de convergence" (5.51) pour cet exemple.

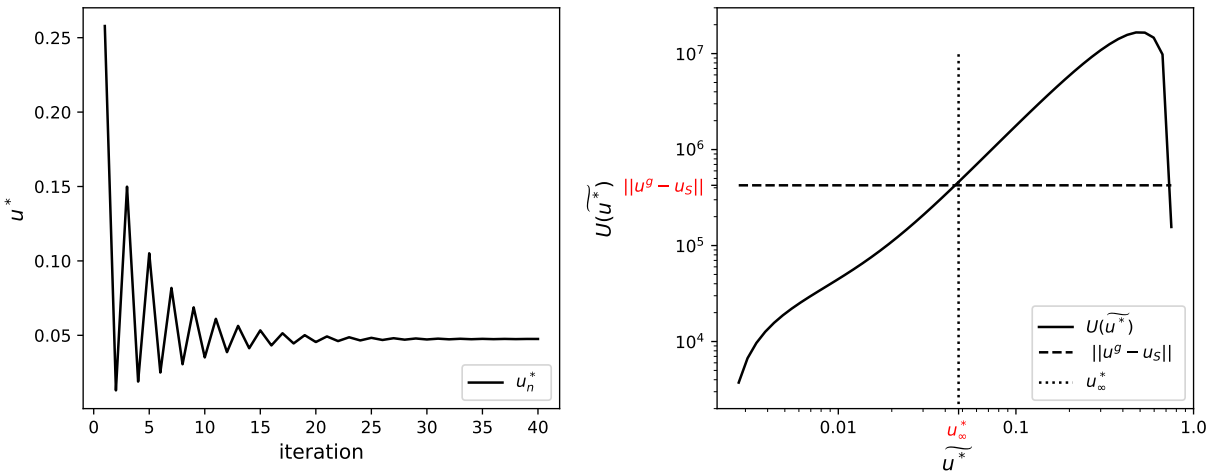


FIGURE 5.12 – Pour  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_S\| = 3\sqrt{2} 10^5$ . A gauche : évolution de  $u_n^*$  pour chaque itération pour le problème de la figure 5.11. A droite : on compare la solution convergée  $u_\infty^*$  (en trait pointillé vertical) avec sa valeur théorique  $\tilde{u}^*$  qui est la solution de  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_S\|$  où  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_S\|$  est donnée par la droite horizontale, et où la courbe continue représente le profil de  $\mathcal{U}(u^*)$ . Il apparaît que l'algorithme converge bien vers la solution théorique.

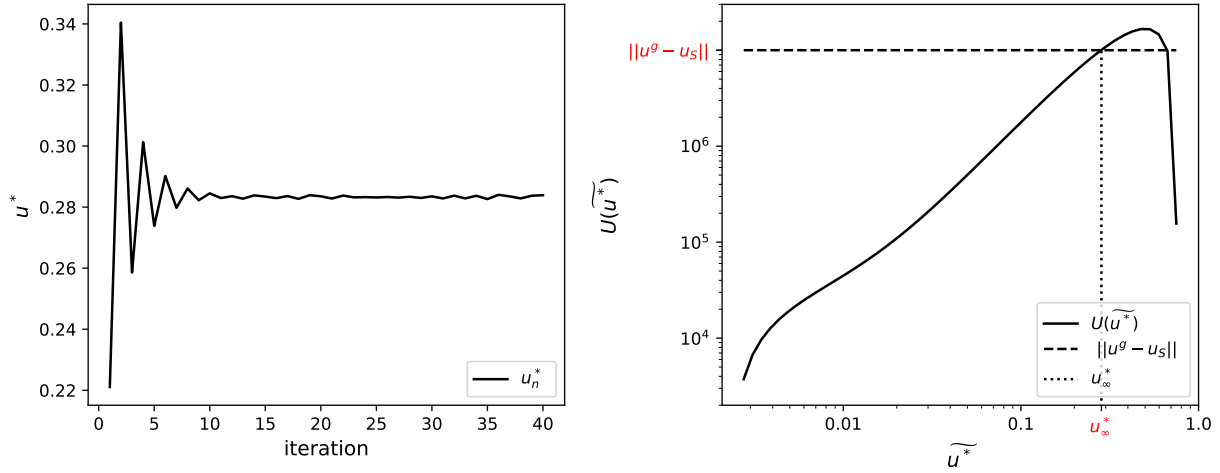


FIGURE 5.13 – Pour  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_S\| = 10^7$ . A gauche : évolution de  $u_n^*$  pour chaque itération. A droite : on compare la solution convergée  $\tilde{u}^*$  avec sa valeur théorique.

### 5.3.2 Différentes notions de vitesse de convergence

Nous venons de voir comment déterminer si un algorithme de point fixe était convergent ou pas vers une certaine valeur  $\tilde{u}^*$ . Nous avons vu par ailleurs au §2.2.3 que, pour un problème couplé linéaire et stationnaire, on peut toujours trouver des conditions d'interface qui permettent à l'algorithme de Schwarz de converger en 2 itérations. Il est donc légitime de chercher, de façon similaire, à accélérer la convergence de l'algorithme de point fixe. Pour cela, nous allons d'abord revenir sur la notion de vitesse de convergence et les différents moyens de la calculer. Nous pourrons ensuite essayer d'optimiser cette vitesse de convergence en rajoutant un degré de liberté dans nos conditions d'interface.

**La vitesse de convergence** Nous proposons ici deux manières d'évaluer la vitesse de convergence de notre algorithme :

1. Si l'on suppose que  $\Phi$  est dérivable, on peut évaluer la vitesse de convergence lorsqu'on est assez proche du point fixe  $\tilde{u}^*$  par le développement de Taylor :

$$u_{n+1}^* - \tilde{u}^* = \partial_u \Phi(\tilde{u}^*)(u_n^* - \tilde{u}^*) + O(u_n^* - \tilde{u}^*)^2 \quad (5.55)$$

Le terme  $\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)$ , qui n'est pas un facteur de convergence à proprement parler, donne donc une appréciation de la vitesse à laquelle on peut potentiellement converger vers ce point fixe. Cette notion de vitesse de convergence est robuste, au sens qu'elle ne dépend pas de la donnée extérieure (comme par exemple en (5.49) et (5.54), la valeur de  $\tilde{u}^*$  dépend de données extérieures, mais  $\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)$  peut s'écrire indépendamment de cette donnée extérieure). De plus, si l'on est sûr d'être suffisamment proche du point fixe, on peut potentiellement établir un taux  $\rho$  tel que  $|u_n^* - \tilde{u}^*| = \rho |u_{n-1}^* - \tilde{u}^*|$  avec  $\rho \approx |\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$ . Mais ceci ne donne pas d'information directe sur la largeur de la zone de convergence.

2. Pour un first guess donné  $u_0^* = \tilde{u}^* + \epsilon$ , supposons que l'on peut estimer l'erreur  $\epsilon$  et que  $u_0^*$  se trouve dans la zone de convergence  $I_{conv}$ . On peut alors estimer la constante  $\rho$  telle que  $\Phi$  est  $\rho$ -Lipschitzienne sur  $[\tilde{u}^* - |\epsilon|, \tilde{u}^* + |\epsilon|] = I_\epsilon^*$ . On aura alors, d'après (C.2) :

$$|u_n^* - \tilde{u}^*| \leq \rho^n |2\epsilon|$$

Pour déterminer ce facteur  $\rho$ , il faut déterminer  $\max \partial_u \Phi(u^*)$  pour  $u^* \in I_\epsilon$ . Cette notion est difficilement applicable dans un cadre général car elle dépend fortement de la donnée extérieure  $\mathbf{u}_\alpha^g$ . Aussi une convergence forte sur une zone restreinte autour du point fixe précis peut aussi entraîner une instabilité des autres points fixes. Ceci dit, elle assure qu'on se rapproche du point fixe à chaque itération et permet d'en maîtriser la "vitesse".

**Difficulté pour établir une vitesse de convergence** Contrairement au cadre des algorithmes de Schwarz appliqués à des problèmes linéaires, où l'on a pu établir un facteur de convergence (voir chapitre 2), la notion de convergence est plus complexe ici. L'étude de la stabilité se fait par l'étude du terme  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$ , elle est indépendante des paramètres extérieurs et donc robuste. Mais contrairement au cadre linéaire, on ne peut pas assurer ici la convergence pour n'importe quel premier itéré : il faut étudier la zone de convergence (qui dépend de la donnée extérieure), et il y a une erreur maximale autorisée sur le premier itéré. Pour assurer qu'on se rapproche bien du point fixe à chaque itération et déterminer cette erreur maximale sur le premier itéré, on peut étudier le deuxième type de mesure de convergence, potentiellement dépendant des paramètres extérieurs,  $|\partial_u \Phi(u^*)|$ . Une étude générale n'est donc a priori pas possible, mais elle peut être envisageable pour une simulation précise.

Dans notre cas, nous avons en plus la particularité d'avoir un deuxième algorithme du point fixe au sein de la couche limite (la formulation bulk). Celui-ci n'a pas été pris en compte dans les calculs, mais il complexifie encore davantage la tâche pour établir une vitesse de convergence.

**Difficulté pour une optimisation** Dans le cadre d'algorithmes de Schwarz sur des problèmes linéaires, la combinaison des conditions naturelles d'interface et l'ajout d'un degré de liberté permettent, au moins dans le cadre stationnaire, de trouver des conditions d'interface qui garantissent la convergence en 2 itérations. Pour le présent problème, les définitions de la vitesse de convergence proposées ci-dessus ne permettent par contre a priori pas d'établir de telles conditions optimales.

### 5.3.3 Convergence du problème couplé stationnaire

On étudie dans cette section les propriétés de convergence du problème couplé stationnaire, qui s'écrit dans le cadre classique :

$$\begin{cases} \partial_z(\nu_\alpha(z, u_n^*)\partial_z \mathbf{u}_\alpha^n(z)) = 0 & \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^g \\ \nu_a(u_n^*, \delta_a)\partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) = (u_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \\ \nu_o(u_n^*, \delta_o)\partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2 (u_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \end{cases} \quad (5.56a)$$

$$\text{avec } u_n^* = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)\| \quad (5.56b)$$

Comme au paragraphe 5.3.1, on considère toujours  $\sqrt{C_D}$  constant et  $\Phi(u_n^*) = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)\|$ .

**Propriété 5.3.3 Convergence pour la condition de Neumann classique :** Pour tout  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$  dans l'intervalle admissible  $U^*$  défini par (5.18), aucun point fixe de  $I^*$  n'est stable avec la condition de Neumann classique. Un exemple d'évolution de  $u_n^*$  au fil des itérations est proposé sur la figure 5.14.

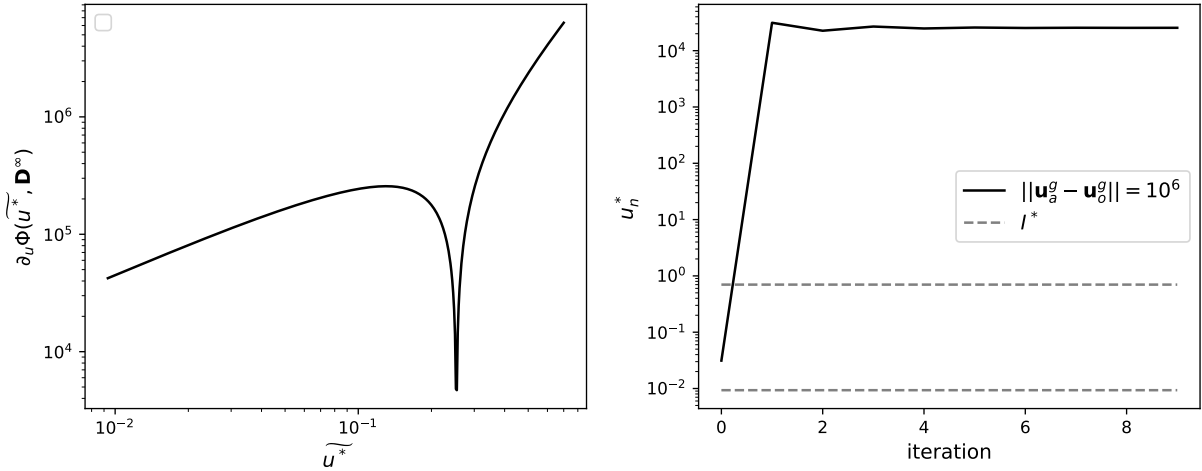


FIGURE 5.14 – Pour des conditions Neumann classiques (5.56). Panneau de gauche : profil de  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$  en fonction de  $\tilde{u}^*$ . Panneau de droite : évolution de  $u_n^*$  pour chaque itération avec  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| = 10^6$

On peut aussi envisager d'élargir ces conditions classiques en les combinant et en les reformulant de façon à transmettre directement l'information sur le flux  $\nu_\alpha \partial_z \mathbf{u}_\alpha$ , ce qui serait potentiellement compatible avec la manière dont sont transmises les informations dans les modèles actuels. Ces conditions "classiques élargies" seraient, pour  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\nu_a^n \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) = p \lambda^{-2} \nu_o^{n-1} \partial_z \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o) + (1-p)(u_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \quad (5.57a)$$

$$\nu_o^n \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = q \lambda^2 \nu_a^n \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) + (1-q) \lambda^2 (u_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \quad (5.57b)$$

Elles sont proches des conditions classiques (cas particulier  $p = q = 0$ ) dans le sens où la condition sur les domaines océan et atmosphère est du type Neumann, mais l'information transmise dans (5.57a) dépend également de la dérivée venant de l'autre domaine (et non plus seulement de  $u^*$ ). Pourtant, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ , l'algorithme de point fixe sur le problème couplé avec les conditions (5.57) n'a pas (ou que ponctuellement) de point fixe stable sur  $I^*$ .

*Démonstration.* Nous proposons de traduire l'équation différentielle sur les domaines océan et atmosphère par :

$$\nu_a(u_n^*, z) \partial_z \mathbf{u}_a^n(z) = \mathbf{A}^n \quad \nu_o(u_n^*, z) \partial_z \mathbf{u}_o^n(z) = \mathbf{B}^n \quad (5.58a)$$

$$\mathbf{u}_a^n(z) = \mathbf{u}_a^g - \mathbf{A}^n \Psi_a^n \quad \mathbf{u}_o^n(z) = \mathbf{u}_o^g + \mathbf{B}^n \Psi_o^n \quad (5.58b)$$

On peut alors considérer notre algorithme comme un problème de point fixe sur deux variables  $(u_{n+1}^*, \mathbf{A}^{n+1}) = (\Phi(u_n^*, \mathbf{A}^n), \mathcal{A}(u_n^*, \mathbf{A}^n))$  tel que :

$$\Phi(u_n^*, \mathbf{A}^n) = \sqrt{C_D} \|\Theta^n\| = \sqrt{C_D} \|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g - \mathbf{A}^n \Psi_a^n - \lambda^2 (q \mathbf{A}^n + (1-q)(u_n^*)^2) \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \Psi_o^n\| \quad (5.59a)$$

$$\mathcal{A}(u_n^*, \mathbf{A}^n) = pq \mathbf{A}^n + (p(1-q) + (1-p)) (\Phi(u_n^*, \mathbf{A}^n))^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) \quad (5.59b)$$

Pour assurer que les points fixes sont stables, il faut et il suffit de vérifier que  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| + |\partial_A \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| < 1$  et  $|\partial_u \mathcal{A}(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| + |\partial_A \mathcal{A}(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| < 1$ . En remarquant que  $\mathbf{A}^\infty = (\tilde{u}^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta)$ , et si on considère que  $\theta_n = \theta$  pour toute itération  $n$ , on a :

$$|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| = \sqrt{C_D} \tilde{u}^* |\tilde{u}^* \partial_u \Psi_a(\tilde{u}^*) + \lambda^2 \tilde{u}^* \partial_u \Psi_o(\tilde{u}^*) + 2(1-q) \lambda^2 \Psi_o|$$

Cette dernière expression (après remplacement de  $\Psi_\alpha$  par leur approximation) s'écrit  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| \approx |-a + b(1-q)| / \nu_a^m$  avec  $a = (c_a + \lambda^2 c_o) \tilde{u}^* > 0$  et  $b = 2\lambda(h_o^* - z_o^\infty) > 0$ . Par exemple si  $(1-q) > a/b$  alors  $-a + b(1-q) > 0$  et donc  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| < 1$  si  $(1-q) < (\nu_a^m + a)/b$ . Dans nos ordres de grandeur,  $\nu_a^m$  est très faible devant  $a$  et  $b$ . Comme ceux-ci dépendent de  $\tilde{u}^*$  et varient très fortement, la plage de valeurs de  $q$  qui vérifierait  $a/b < 1 - q < (\nu_a^m + a)/b$  pour un  $\tilde{u}^*$  donné est extrêmement restreinte. Autrement dit les conditions  $a/b < (1-q)$  et  $(1-q) < (\nu_a^m + a)/b$  pour tous  $\tilde{u}^* \in I^*$  sont incompatibles, et on ne peut trouver des valeurs  $q$  pour lesquelles  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| + |\partial_A \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{A}^\infty)| < 1$  que pour des valeurs très "ponctuelles" de  $\tilde{u}^*$ , comme c'est le cas pour les conditions classiques (voir figure 5.15). Ce point règle directement la question de la stabilité de l'algorithme avec des conditions classiques élargies. On trace sur la figure 5.14 le profil de  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*)|$  pour le cas spécifique des conditions Neumann classiques (5.56), c'est-à-dire  $p = q = 0$ .  $\square$

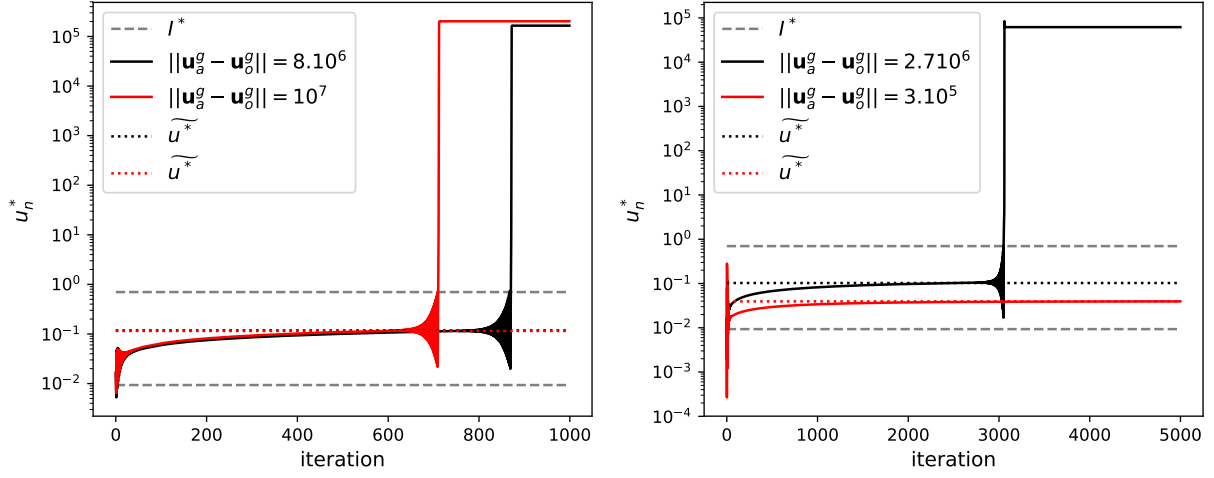


FIGURE 5.15 – Pour des conditions alternatives de Robin, exemples d'évolution de  $u_n^*$  au fil des itérations pour différentes valeurs de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$ . À gauche :  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| = 8.10^6$  en noir et  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| = 10^7$  en rouge, en pointillé les points fixes correspondant à ces valeurs de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$ , et en tirets gris les bornes de  $I^*$ . À droite : idem avec  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| = 2.710^6$  en noir et  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| = 3.10^5$  en rouge.

**Propriété 5.3.4 Convergence pour les conditions alternatives de Robin :** Prenons maintenant les conditions dites alternatives :

$$\nu_a(\delta)\partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) - u_n^* \sqrt{C_D} \mathbf{u}_a^n(\delta_a) = -u_n^* \sqrt{C_D} \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o) \quad (5.60a)$$

$$\nu_o(\delta)\partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o) + \lambda^2 u_n^* \sqrt{C_D} \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2 u_n^* \sqrt{C_D} \mathbf{u}_a^n(\delta_a) \quad (5.60b)$$

Seuls les points fixes très petits  $\tilde{u}^* < 0.02$  sont parfaitement stables. En pratique, pour tous  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| \in U^*$ , l'algorithme converge extrêmement lentement vers une valeur très proche du point fixe  $\tilde{u}^*$ , et finit (pour  $\tilde{u}^* > 0.02$ ) par diverger ou converger en dehors de  $I^*$  après un très grand nombre d'itérations. Des exemples de tels comportements pour différentes valeurs de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$  sont illustrés sur la figure 5.15.

*Démonstration.* Après résolution sur chaque sous-domaine, on trouve :

$$\boldsymbol{\delta u}^n = \frac{(\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g) + \mathbf{D}^{n-1} X_a^n}{(1 + X_o^n)(1 + X_a^n)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}^{n-1} = \boldsymbol{\delta u}^{n-1} X_o^{n-1} \quad (5.61)$$

avec  $\boldsymbol{\delta u}^n = \|\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o)\|$  et

$$X_a^n = u_n^* \sqrt{C_D} \Psi_a^n \quad \text{et} \quad X_o^n = \lambda^2 u_n^* \sqrt{C_D} \Psi_o^n \quad (5.62)$$

On peut donc voir l'algorithme comme un algorithme du point fixe sur les variables  $(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1})$ , tel que  $(u_{n+1}^*, \mathbf{D}^n) = (\Phi(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1}), \mathcal{D}(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1}))$  avec  $\Phi(u_n^*, \mathbf{D}^n) = \sqrt{C_D} |\boldsymbol{\delta u}^n(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1})|$  et  $\mathcal{D}(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1}) = \boldsymbol{\delta u}^n(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1}) X_o^{n-1}$ .

En supposant qu'on a dès la première itération  $\arg(\mathbf{u}_a^0(\delta_a) - \mathbf{u}_o^0(\delta_o)) = \arg(\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g)$ , alors pour chaque itération  $\arg(\boldsymbol{\delta u}^n) = \pm\theta$ . On introduit pour ces calculs les

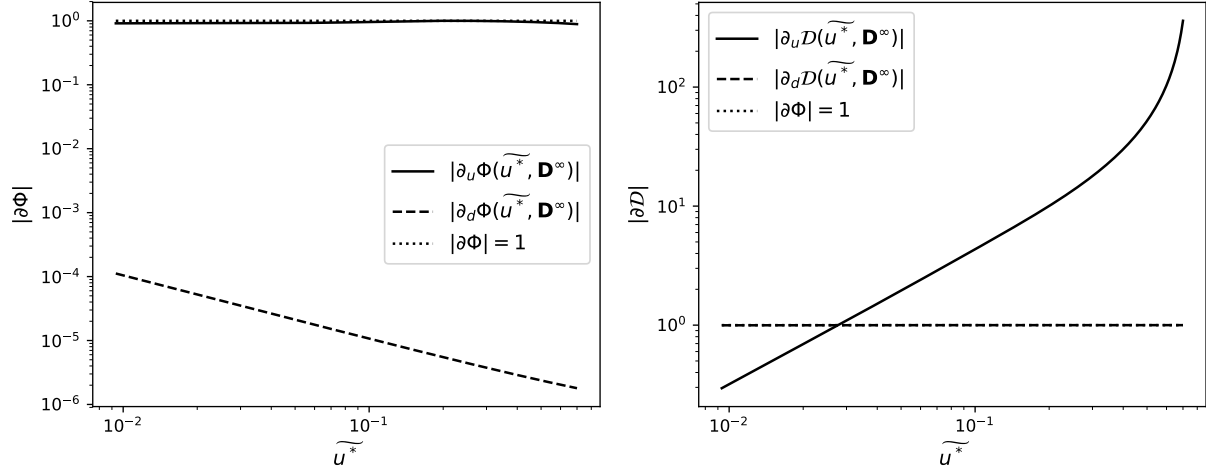


FIGURE 5.16 – Étude de stabilité des points fixes :  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$ ,  $|\partial_d \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$ ,  $|\partial_u \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$ ,  $|\partial_d \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$  en fonction de  $\tilde{u}^* \in I$ .

notations  $\mathbf{u}_a^n(\delta_a) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = U \mathbf{e}_\tau(\theta)$  avec  $U > 0$ ,  $\delta \mathbf{u}^n = \Theta^n \mathbf{e}_\tau(\theta)$  et  $\mathbf{D}^n = d^n \mathbf{e}_\tau(\theta)$  ( $\Theta^n$  et  $d^n$  peuvent être négatifs ou positifs). On peut alors calculer les dérivées pour chaque composante

$$\partial_u \Phi(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1}) = \sqrt{C_D} \xi^n \left( \frac{d^{n-1} X_a^n ' Y^n - (Y^n ') [U + d^{n-1} X_a^n]}{(Y^n)^2} \right) \quad (5.63a)$$

$$\partial_d \Phi(u_n^*, \mathbf{D}^{n-1}) = \sqrt{C_D} \xi^n \left( \frac{X_a^n}{(1 + X_o^n)(1 + X_a^n)} \right) \approx \sqrt{C_D} \xi^n \frac{1}{X_o^n} \quad (5.63b)$$

où  $\xi^n$  est le signe de  $\Theta^n$  et  $Y^n = (1 + X_o^n)(1 + X_a^n)$ . La dernière approximation est faite en utilisant les approximations de  $\Psi_\alpha$  et  $\partial_u \Psi_\alpha$  du paragraphe précédent. Il apparaît que  $X_\alpha \approx \sqrt{C_D} u \Psi^{\text{libre}}$  et  $X_\alpha' \approx \sqrt{C_D} u \Psi^{\text{libre}}$ . Lorsqu'on atteint la convergence, on a notamment  $\mathbf{D}^\infty = \delta \mathbf{u}^\infty X_o^\infty = \Theta X_o(\tilde{u}^*)$  et  $U = \Theta(1 + X_o + X_a)(\tilde{u}^*)$  et  $\tilde{u}^* = \sqrt{C_D} |\Theta(\tilde{u}^*)|$ , donc :

$$|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| = \tilde{u}^* \left| \frac{X_a X_o' + X_o' + X_a'}{(1 + X_o)(1 + X_a)} \right| \approx \tilde{u}^* \frac{X_o'}{X_o} \quad (5.64)$$

Pour la variable  $\mathbf{D}$ , sans rentrer dans les détails de calculs, on a :

$$|\partial_u \mathcal{D}^n(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| = |\partial_u \Theta^n X_o^n + \Theta^n X_o^n'| = \frac{\tilde{u}^*}{\sqrt{C_D}} \left| \frac{X_o X_a' - X_o'(1 + X_a)}{(1 + X_o)(1 + X_a)} \right| \quad (5.65a)$$

$$|\partial_d \mathcal{D}^n(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| = \left| \frac{X_o X_a}{(1 + X_o)(1 + X_a)} \right| \quad (5.65b)$$

En utilisant les approximations de  $\Psi_\alpha \approx \Psi_\alpha^{\text{libre}}$  et  $\partial_u \Psi_\alpha = \partial_u \Psi_\alpha^{\text{libre}}$ , on peut montrer que pour tout  $\tilde{u}^* \in I^*$  :

$$\begin{aligned} |\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| &< 1 & |\partial_d \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| &\ll 1 \\ |\partial_u \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| &\begin{cases} < 1 & \text{pour } \tilde{u}^* < w_0 \\ > 1 & \text{pour } \tilde{u}^* > w_0 \end{cases} & |\partial_d \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| &< 1 \end{aligned}$$

avec  $w_0 = \sqrt{C_D}(\lambda c_o z_a^\infty - z_o^\infty c_a)/(\lambda c_a c_o) \approx 0.06$ . Ceci explique le caractère de convergence ou non convergence de l'algorithme. La valeur de  $w_0$  est ici issue d'une approximation, et s'avère en pratique être plus proche de  $w_0 \approx 0.02$ . De plus, dans nos ordres de grandeur, on a :

$$|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| \approx 1 \quad |\partial_d \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| \approx 1$$

Ceci explique que l'algorithme évolue extrêmement lentement. La figure 5.16 représente les profils non approximés, issus de (5.63b)-(5.65b), de  $|\partial_u \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$ ,  $|\partial_d \Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$ ,  $|\partial_u \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$  et  $|\partial_d \mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$  en fonction de  $\tilde{u}^*$ .  $\square$

En pratique, les deux versions de l'algorithme (classique et alternative), lorsqu'elles ne sont pas convergentes dans  $I^*$ , convergent en fait vers une autre solution  $\tilde{u}^* > 1$  qui existe d'un point vue mathématique mais n'a aucun sens physique. Des exemples sont donnés sur les figures 5.14 et 5.15. On peut dans l'ensemble remarquer que le  $u_n^*$  de l'algorithme avec des conditions classique sort complètement de  $I^*$  dès la première itération, alors qu'il reste dans  $I^*$  pour les premières itérations de l'algorithme avec des conditions alternatives.

### 5.3.4 Le problème couplé stationnaire avec effet de Coriolis

Toujours dans le cadre stationnaire, nous souhaitons maintenant étudier la convergence de l'algorithme de point fixe sur le problème couplé en considérant l'effet de Coriolis, et étudier l'impact de ce dernier sur la convergence. L'algorithme correspondant est décrit par le système :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha^n(z) - \partial_z(\nu_\alpha(z, u_n^*) \partial_z \mathbf{u}_\alpha^n(z)) = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty) = \mathbf{u}_\alpha^g & (5.66a) \\ \nu_a(u_n^*, \delta_a) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a) = (u_n^*)^2 \tau(\theta_{n-1}) \\ \nu_o(u_n^*, \delta_o) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o) = \lambda^2 (u_n^*)^2 \tau(\theta_{n-1}) \end{cases}$$

$$\text{avec } u_n^* = C_D \|\mathbf{u}_a^{n-1}(\delta_a) - \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o)\| \quad (5.66b)$$

En suivant les mêmes étapes qu'au §5.1.4, ceci revient à étudier le problème :

$$\begin{cases} ifV_\alpha^n(z, t) - \partial_z(\nu_\alpha(z, u_n^*) \partial_z V_\alpha^n(z)) = 0 & \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \\ V_\alpha^n(z_\alpha^\infty) = 0 \\ \nu_a(u_n^*, \delta_a) \partial_z V_a^n(\delta_a) = (u_n^*)^2 e^{i\theta_\tau} \\ \nu_o(u_n^*, \delta_o) \partial_z V_o^n(\delta_o) = \lambda^2 (u_n^*)^2 e^{i\theta_\tau} \\ u_{n+1}^* = C_D |V_a^n(\delta_a) - V_o^n(\delta_o) + U| \end{cases} \quad (5.67)$$



avec  $U = \varphi_a^g - \varphi_o^g$ . Les équations (5.67) dans chaque sous-domaine avec une viscosité de type KPP ont déjà été résolues au §4.3.2. On reprend ici les notations et les approximations de la viscosité introduites dans ce paragraphe. Comme déjà expliqué au §5.1.4, le terme  $\sqrt{C_D}$  n'est plus négligeable devant les termes en  $\Psi_\alpha$  (voir figure 5.5), et ce terme  $\sqrt{C_D}$  sera bien pris en compte dans les calculs de ce paragraphe.

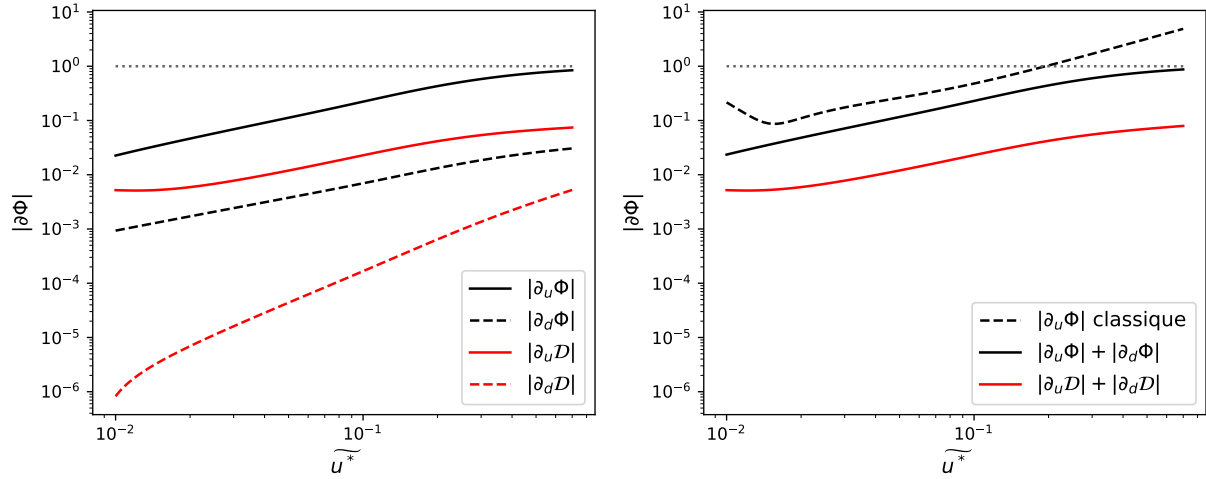


FIGURE 5.17 – Stabilité des points fixes. Panneau gauche pour des conditions alternatives de Robin : en trait noir continu  $\partial_u\Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)$  donné par (5.64), et en noir tireté  $\partial_d\Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)$  donné par (5.63b) ; en trait rouge continu  $\partial_u\mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)$  donné par (5.65a) et en rouge tireté  $\partial_d\mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)$  donné par (5.65b). Panneau droit : en noir tireté pour des conditions classiques de Neumann  $|\partial_u\Phi(\tilde{u}^*)|$ , pour des conditions alternatives de Robin  $|\partial_y\Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| + |\partial_u\Phi(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$  en noir et  $|\partial_y\mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)| + |\partial_u\mathcal{D}(\tilde{u}^*, \mathbf{D}^\infty)|$  en rouge

**Résolution sur chaque sous-domaine** Dans le cadre général où la condition à l'interface est donnée par

$$\nu_\alpha(u_n^*, \delta_\alpha) \partial_z \varphi_\alpha^n(\delta_\alpha) = \mathcal{CI}(u_n^*, \varphi_\alpha^n) \quad (5.68)$$

on a comme valeur de la solution en  $\delta_\alpha$  :

$$\varphi_\alpha^n(\delta_\alpha) = \varphi_\alpha^g + \mathcal{CI}(u_n^*, \varphi_\alpha^n) \mathcal{X}_\alpha \frac{h_\alpha \sqrt{1 + 4\mu_\alpha} P_\alpha(\eta(\delta_\alpha)) + \Pi_\alpha P_\alpha(-\eta(\delta_\alpha))}{\xi_\alpha(1 + \xi_\alpha) G_\alpha(\eta(\delta_\alpha)) - \Pi_\alpha G_\alpha(-\eta(\delta_\alpha))} \quad (5.69)$$

avec  $\Pi_\alpha$ ,  $P_\alpha$  et  $G_\alpha$  définis au §4.3.2. On peut donc adapter les notations  $\Psi_\alpha^n$  du §5.3.3 en rapprochant les profils de solutions (5.69) des termes  $\mathcal{S}_\alpha(\delta_\alpha)$  définis en (4.57) :

$$\varphi_a^n(\delta_a) = \varphi_a^g - \mathcal{CI}(u_n^*, \varphi_a^n) \Psi_a^n \quad \Psi_a^n = -\mathcal{S}_a(u_n^*, \delta_o) \quad (5.70a)$$

$$\varphi_o^n(\delta_o) = \varphi_o^g + \mathcal{CI}(u_n^*, \varphi_o^n) \Psi_o^n \quad \Psi_o^n = (\mathcal{S}_o(u_n^*, \delta_o))^{-1} \quad (5.70b)$$

Les différentes équations qui nous permettent d'établir la stabilité et la convergence des points fixes en terme de  $\Psi_\alpha^n$  sont donc les mêmes que celles données dans le cadre stationnaire sans effet de Coriolis au §5.3.3. Dans la mesure où l'expression de  $\Psi_\alpha^n$  est complexe, nous allons justifier les résultats seulement numériquement.

**Propriété 5.3.5 Convergence pour différentes conditions d'interface :** On peut montrer que, pour des conditions classiques de type Neumann ou alternatives de type Robin, les points fixes dans  $I^*$  sont stables. Ceci montre que l'effet de Coriolis, même faible, a un impact fort sur la convergence de l'algorithme. La figure 5.17 présente (panneau de gauche) le comportement des différents termes des équations (5.63b)-(5.64)-(5.65a)-(5.65b), permettant de déterminer la stabilité des points fixes. Le panneau de droite détermine cette condition de stabilité pour les conditions alternatives de Robin (courbes continues) et classiques de Neumann (courbe tiret). Il apparaît que tous les points fixes sont stables pour les conditions de Robin. En revanche le graphe laisse penser que l'algorithme avec conditions classiques de Neumann ne permet pas la stabilité des points fixes pour les plus grandes valeurs de  $\tilde{u}^*$  ( $\tilde{u}^* > 0.2$ ).

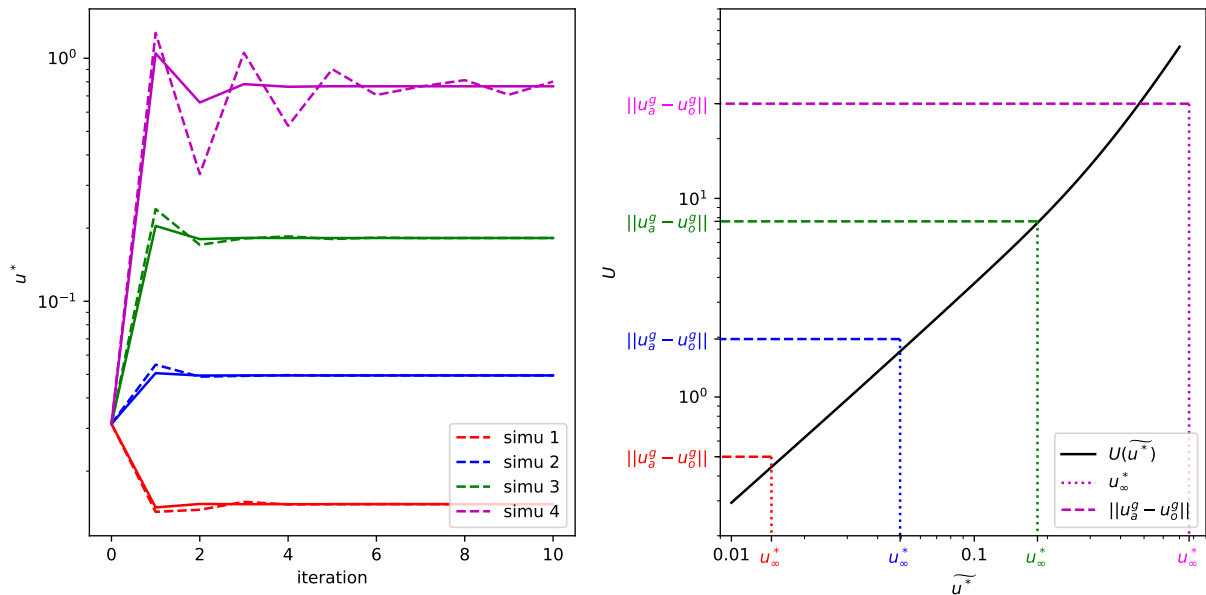


FIGURE 5.18 – Simulation pour différentes valeurs de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$  (respectivement 0.5, 2.5, 12 et 60  $\text{m.s}^{-1}$ , pour les simulations 1 à 4). A gauche : évolution de  $u_n^*$  en fonction des itérations, en trait continu pour des conditions alternatives de Robin, en trait pointillé pour des conditions de Neumann classiques. A droite : on compare la solution convergée  $u_\infty^*$  (en trait pointillé vertical) avec sa valeur théorique  $\tilde{u}^*$  qui est la solution de  $\mathcal{U}(\tilde{u}^*) = \|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_s\|$  où  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_s\|$  est donnée par la droite horizontale et la courbe continue représente le profil de  $\mathcal{U}(u^*)$ . Il apparaît que l'algorithme converge bien vers la solution théorique donnée par (5.33).

**Simulations** Les figures 5.18-5.19 présentent plusieurs simulations correspondant à différentes valeurs du paramètre  $\varphi_\alpha^g$ . Il apparaît que les simulations convergent pour les deux conditions d'interface, même pour de "grandes" valeurs de  $\tilde{u}^*$  pour des conditions classiques, contrairement à ce que prédit la théorie. De plus, la valeur convergée de  $u_\infty^*$  ne correspond pas à celle prédite par la théorie ( $\tilde{u}^*$ ) lorsque  $\tilde{u}^*$  est grand (donc  $h^*$  proche de  $z^\infty$ ). Nous interprétons cet écart à l'approximation qui a été faite sur la viscosité dans sa partie

turbulente<sup>1</sup> : l'approximation étant construite de sorte que  $\int_{\Omega_\alpha} (\nu_\alpha^{-1}) = \int_{\Omega_\alpha} ((\nu_\alpha^{\text{approx}})^{-1})$  n'est peut-être pas pertinente lorsqu'on considère l'effet de Coriolis. On remarque aussi que, contrairement à ce qui avait été observé dans le cadre mono-domaine, chaque itération rapproche du point fixe. Enfin, comme pouvaient le laisser penser les profils des dérivées partielles, l'algorithme converge plus vite avec les conditions alternatives de Robin, surtout pour les grandes valeurs de  $\tilde{u}^*$ .

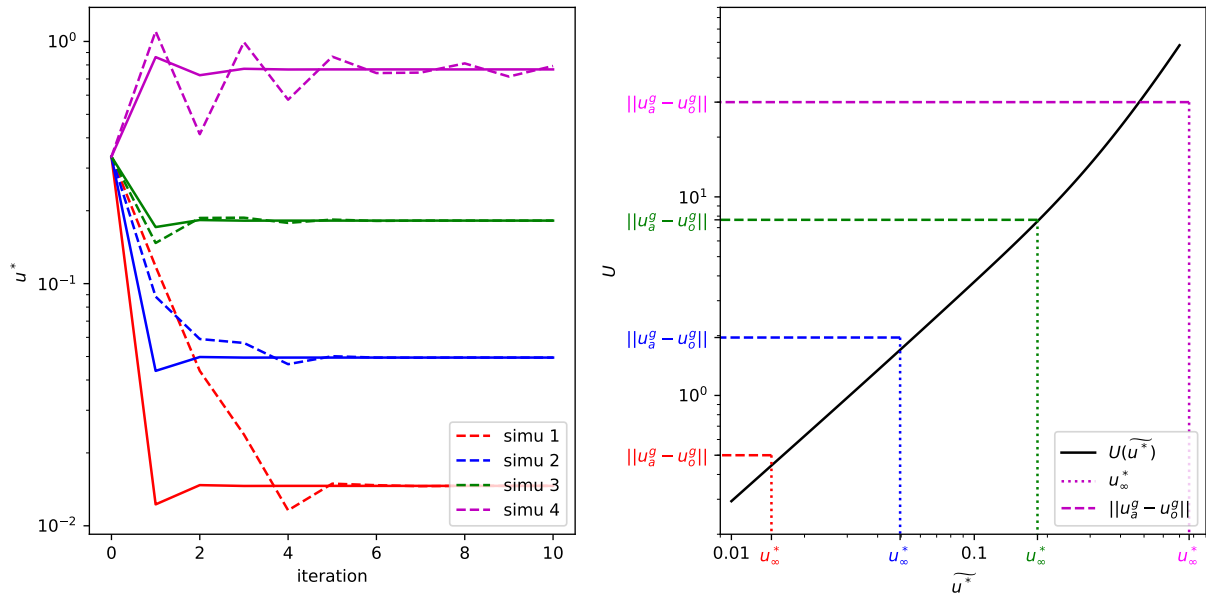


FIGURE 5.19 – Idem Figure 5.18, avec un premier itéré différent.

## 5.4 Première étude empirique du problème instationnaire

Passons maintenant au problème couplé instationnaire. Dans un cadre linéaire, la méthode la plus répandue pour étudier la convergence consiste à appliquer une transformée de Fourier sur chaque sous-problème. Dans notre cas, du fait de la dépendance en temps de la viscosité et de la non-linéarité des conditions d'interface, appliquer une transformée de Fourier ne permet pas de simplifier l'étude de la convergence. Aussi nous proposons dans cette section, comme première approche, d'observer simplement via des simulations numériques le comportement de notre algorithme dans le cadre instationnaire. Nous mettons ainsi en évidence des comportements qui peuvent être liés à ce qui a été étudié dans le cadre d'un problème linéaire correspondant (voir chapitre 4).

**Caractère bien posé du problème couplé** Nous n'avons pas parlé du caractère bien posé du problème couplé instationnaire ; or il faudrait normalement étudier l'existence et

1. lorsque  $\tilde{u}^*$  est grand la zone turbulente est importante

l'unicité de solutions sur ce problème instationnaire avant d'étudier la convergence des algorithmes. De manière analogue au cadre stationnaire, il suffit de déterminer  $\tilde{u}^*(t) \in \mathcal{C}^1(]0, T[)$  et  $\theta(t) \in \mathcal{C}^1(]0, T[)$  pour assurer le caractère bien posé sur chaque sous domaine (voir LIONS et MAGENES, 1968b).

On suppose ici qu'il existe des solutions  $(\tilde{u}^*(t), \theta(t))$  avec  $\tilde{u}^*(t) \in I$  pour tout  $t \in [0, T]$ . On pourra valider cette hypothèse de manière empirique en vérifiant que l'algorithme du point fixe converge, mais rien n'indique que la solution trouvée empiriquement soit unique.

**Hypothèses** Comme dans le cadre linéaire, on suppose que pour une simulation sur une fenêtre temporelle de durée  $T$  avec un pas de temps  $\delta t$ , la plage des fréquences influentes est  $|\omega| \in \left[ \frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\delta t} \right]$ . De plus, comme dans les sections précédentes, on considérera des conditions d'interface de type :

- classiques (Neumann) :

$$\nu_a^n(t) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) = (u_n^*(t))^2 \tau(\theta_{n-1}) \quad \text{et} \quad \nu_o^n(t) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) = \lambda^2 (u_n^*(t))^2 \tau(\theta_{n-1}) \quad (5.71)$$

- alternatives (Robin) :

$$\nu_a^n(t) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) - u_n^*(t) \sqrt{C_D} \mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) = -u_n^*(t) \sqrt{C_D} \mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o, t) \quad (5.72a)$$

$$\nu_o^n(t) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) + \lambda^2 u_n^*(t) \sqrt{C_D} \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) = \lambda^2 u_n^*(t) \sqrt{C_D} \mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) \quad (5.72b)$$

On considère que les points fixes découlant de ces conditions d'interface sont bien les solutions du problème couplé (5.1).

### 5.4.1 Le problème instationnaire avec application de filtre moyenne

Nous avons vu que, pour des algorithmes de Schwarz sur des problèmes linéaires, l'application d'un filtre moyenne revenait à étudier l'état stationnaire de l'algorithme sur la fenêtre de temps où on applique la moyenne. Dans notre cas, afin de ne pas se préoccuper de la dépendance en temps de  $u_n^*$ , nous simulons l'algorithme instationnaire en appliquant un opérateur moyenne sur toute la fenêtre de simulation. Dans l'idée d'échanger des flux moyens entre les deux domaines comme cela se fait dans le couplage océan-atmosphère,

nous proposons d'étudier dans un premier temps l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_\alpha^n(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^n(z, t) - \partial_z (\nu_\alpha(z, \mathbf{u}_n^*) \partial_z \mathbf{u}_\alpha^n(z, t)) = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \times \mathcal{T} \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}_\alpha^n(z, 0) = \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } [z_o^\infty, z_a^\infty] \\ \nu_a(\mathbf{u}_n^*, \delta_a) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) = (\mathbf{u}_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}(t)) & \text{sur } \mathcal{T} \\ \nu_o(\mathbf{u}_n^*, \delta_o) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) = \lambda^2 (\mathbf{u}_n^*)^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}(t)) & \text{sur } \mathcal{T} \end{array} \right. \quad (5.73a)$$

$$\text{avec } \mathbf{u}_{n+1}^* = \sqrt{\langle (\mathbf{u}_{n+1}^*(t))^2 \rangle_{\mathcal{T}}} \quad \mathbf{u}_{n+1}^*(t) = \sqrt{C_D(\mathbf{u}_{n+1}^*(t))} \|\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t)\| \quad (5.73b)$$

où  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{T} = ]0, T[$ . Avec cette écriture, et même en supposant des conditions moyennées, appliquer une transformée de Fourier ne permet pas de retomber directement sur un des problèmes stationnaires étudiés dans les paragraphes précédents à cause de la non-linéarité du module  $\|\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t)\|$  et de la non-linéarité de  $\sqrt{\langle (\mathbf{u}_{n+1}^*(t))^2 \rangle_{\mathcal{T}}}$ .

Cependant, dans l'hypothèse où  $\sqrt{C_D}$  est constant et où, pour chaque itération, le saut des solutions est toujours aligné au saut des données extérieures  $\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g = U \mathbf{e}_\tau(\theta)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) = \Theta^n(t) \mathbf{e}_\tau(\theta)$  avec  $\Theta^n(t) > 0$ , alors on a :  $\mathbf{u}_{n+1}^* = \sqrt{C_D} \langle \Theta(t) \rangle_{\mathcal{T}}$ . Ainsi on se retrouve dans des conditions similaires à celles du paragraphe 3.3.2 et les mêmes résultats globaux peuvent être déduits : l'étude du caractère bien posé et de la convergence du système (5.73) revient à étudier l'état stationnaire de (5.73) sur  $\mathcal{T}$ .

Dans le paragraphe 3.3.2, nous avons pu extraire des résultats de convergence des algorithmes moyennés à partir des résultats de convergence des algorithmes instationnaire non moyenné. Dans notre cas, nous n'avons pu étudier que l'état stationnaire sur des fenêtres infinies. Nous baserons donc notre étude numérique d'abord sur des simulations de (5.73) (sans hypothèses d'alignement ou de  $\sqrt{C_D}$  constant) avec  $\mathcal{T}$  une fenêtre de taille infinie<sup>2</sup>. Puis nous étudierons, toujours numériquement, le comportement de l'algorithme de point fixe sur le problème (5.73) sur des fenêtres finies. Dans ce dernier cas on pourra utiliser le comportement décrit dans le chapitre 3 sur des problèmes linéaires comme base de discussion.

**Moyenne sur une fenêtre de taille infinie** Dans le cadre linéaire, appliquer un filtre moyenne sur une fenêtre de taille infinie revenait à ne simuler que la composante stationnaire du problème. Comme on pouvait s'y attendre, nous observons le même phénomène sur le problème non linéaire (5.73). On présente sur la figure 5.20 plusieurs simulations du problème (5.73) avec un moyennage sur une fenêtre considérée comme infinie, pour différentes données extérieures  $\mathbf{u}_\alpha^g$  (ce test utilise un pas de temps de 30 000 s, mais les

2. Dans nos expériences numériques, on peut par exemple considérer qu'on simule une fenêtre infinie lorsque  $\pi/T \ll |f|$ .

résultats obtenus pour d'autres valeurs du pas de temps sont similaires). Dans la figure de droite, on retrouve le fait que les solutions convergées  $\tilde{u}^*$  sont celles du problème stationnaire (ici avec effet de Coriolis). Ainsi l'algorithme possède les mêmes propriétés de convergence que dans le cas stationnaire avec effet de Coriolis, et les deux types de conditions d'interface mènent à un algorithme convergent. Cette conjecture nous amène aussi à considérer des valeurs de  $\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g$  compatibles avec l'algorithme stationnaire donné au §5.1.3 pour la suite.

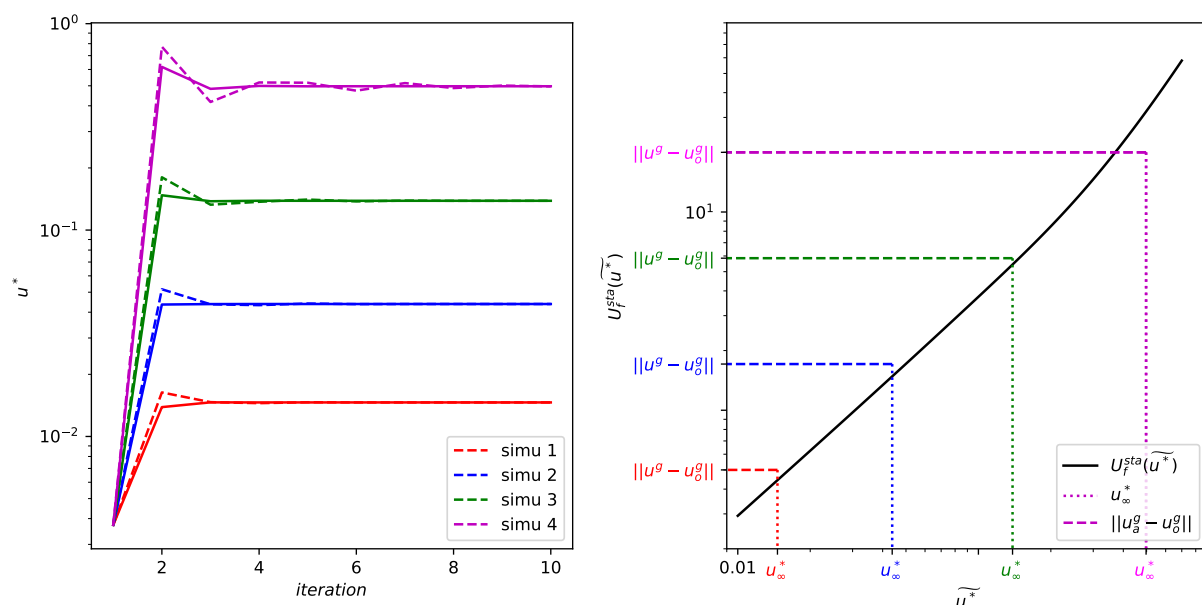


FIGURE 5.20 – Simulations de (5.73) sur une fenêtre temporelle de taille "infinie" pour différentes valeurs de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$ , comme pour la figure 5.18, avec  $\delta t = 30\,000$ s. A gauche : évolution des  $u_n^*$  au fil des itérations pour des conditions de Neumann classiques (trait continu) et de Robin alternatives (trait pointillé). A droite : comparaison des points fixes convergés (pour des conditions alternatives) avec les points fixes théoriques dans le cadre stationnaire avec effet de Coriolis.

### Moyenne sur une seule fenêtre de taille finie : influence du découpage temporel

Dans le cadre linéaire, appliquer un filtre moyenne sur la fenêtre temporelle  $\mathcal{T}$  entière mais de taille finie revenait au cadre stationnaire du problème fenêtré sur  $\mathcal{T}$ . Nous ne connaissons pas les convergences théoriques du cadre stationnaire sur un problème fenêtré, mais nous supposons que, comme expliqué au §3.3.2, lorsqu'on applique un opérateur moyenne celle-ci dépend principalement de la convergence des fréquences qui sont proches<sup>3</sup> de  $\pi/|\mathcal{T}| = \pi/T$ . Nous observons donc le comportement de l'algorithme pour différentes tailles de fenêtres et pour différents pas de temps. Les figures 5.21, 5.22 et 5.23 laissent apparaître que

3. la notion de "proche" est très arbitraire et nous avons vu au §3.3.2 que l'estimation  $\rho_{[0,T]}^{\text{obs}} \approx \rho(\pi/T)$  était empirique.

- lorsque  $\pi/|T|$  est du même ordre de grandeur que  $|f|$ , c'est-à-dire lorsque les fréquences influençant la convergence sont de l'ordre de  $|f|$ , l'algorithme converge dans  $I^*$  pour les conditions alternatives de Robin, mais ne converge pas dans  $I^*$  pour les conditions de Neumann classiques. Il est dans ce dernier cas soit divergent, soit convergent vers une autre solution située en dehors de  $I^*$ .
- Lorsque les fréquences influençant la convergence ne sont pas du même ordre de grandeur de  $|f|$  ( $\pi/|T| \ll |f|$  ou  $\pi/|T| \gg |f|$ ), l'algorithme converge dans  $I^*$  pour les deux conditions d'interface.

De ces résultats nous conjecturons donc que l'algorithme est toujours convergent pour des conditions alternatives, et converge seulement pour les fréquences influentes qui ne sont pas de l'ordre de  $|f|$  pour des conditions classiques.

En se reportant aux résultats du cadre linéaire, ces résultats nous laissent penser que l'effet de Coriolis induit un "décalage" en fréquence des propriétés de convergence. Nous conjecturons que l'algorithme est toujours convergent pour des conditions alternatives, et converge seulement lorsque  $\pi/|T|$  n'est pas du même ordre de grandeur que  $|f|$  pour des conditions classiques.

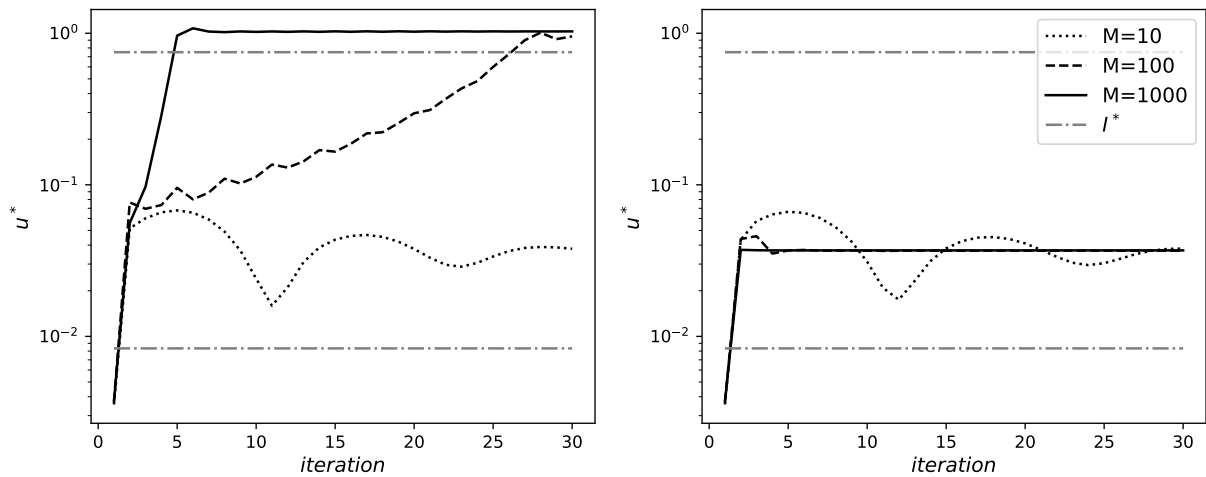


FIGURE 5.21 – Évolution des  $u_n^*$  au fil des itérations pour des simulations du problème (5.73) avec application de moyenne sur la fenêtre entière. On considère un pas de temps  $\delta t = 1000$ s pour différentes tailles de fenêtre  $M\delta t$ . En trait pointillé  $M = 10$  et  $\pi/(M\delta t) \gg |f|$ ; en trait tireté  $M = 100$  et  $\pi/(M\delta t) \approx |f|$ ; en trait continu  $M = 1000$  et  $\pi/(M\delta t) \ll |f|$ . L'algorithme avec conditions d'interface alternatives (à droite) converge dans  $I^*$  (indiqué par les traits mixtes horizontaux), mais l'algorithme avec conditions d'interface classiques (à gauche) ne converge pas dans  $I^*$  lorsque  $\pi/(M\delta t)$  est de l'ordre de grandeur de  $|f|$ , ni lorsque  $\pi/(M\delta t) \ll |f|$  car une large plage de fréquences influentes est de l'ordre de  $|f|$ .

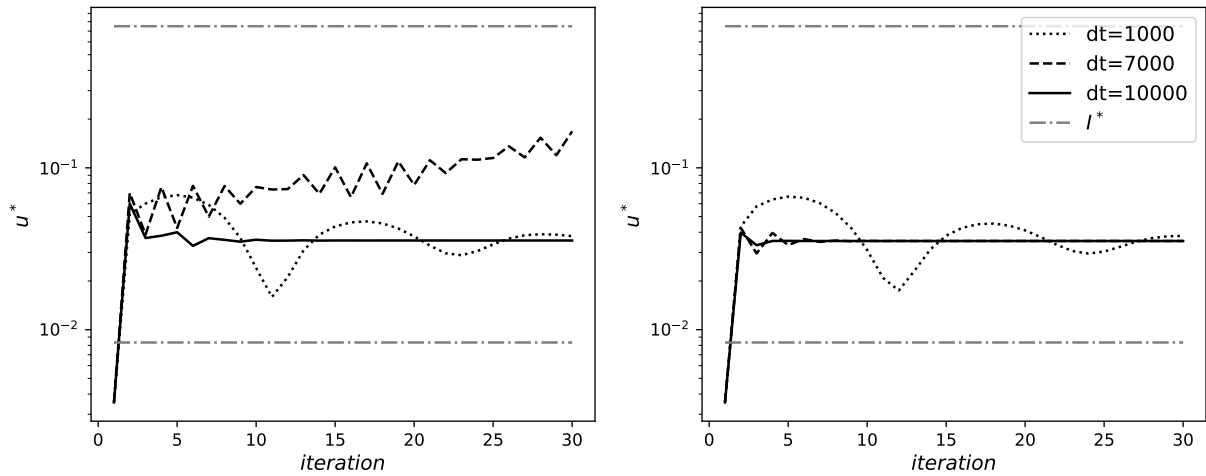


FIGURE 5.22 – Simulations du problème (5.73) avec application de moyenne sur la fenêtre entière. On compare l'évolution des  $u_n^*$  pour des conditions d'interface de Neumann classiques à gauche, et de Robin alternatives à droite. On simule  $M = 10$  pas de temps avec un pas de temps  $\delta t = 10^3$ s et  $\pi/T \gg |f|$  (en trait pointillé),  $\delta t = 7 \cdot 10^3$ s et  $\pi/T \approx |f|$  (en trait tireté),  $\delta t = 10^4$ s et  $\pi/T \ll |f|$  en trait continu.

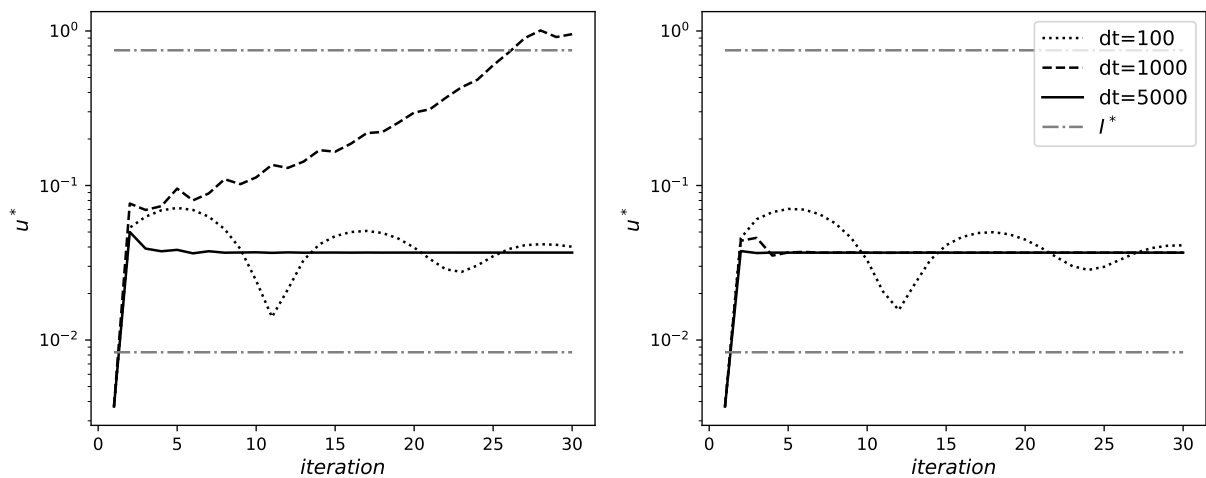


FIGURE 5.23 – Idem Figure 5.22 avec  $M = 100$  pas de temps. En trait pointillé  $\delta t = 100$ s et  $\pi/T \gg |f|$ , en trait tireté  $\delta t = 10^3$ s et  $\pi/T \approx |f|$ , en trait continu  $\delta t = 5 \cdot 10^3$ s et  $\pi/T \ll |f|$ .

**Comportement singulier pour les très hautes fréquences** Pour les fréquences "intermédiaires", les figures 5.21 à 5.23 suggèrent que l'algorithme converge relativement vite, ou que l'on se rapproche au moins du point fixe à chaque itération. Afin de simuler les hautes fréquences, la figure 5.24 représente le comportement de  $u_n^*$  pour un grand nombre d'itérations et pour des pas de temps très faibles. Il apparaît que, même s'il y a convergence vers un point fixe, on ne peut pas assurer que  $|u_{n+1}^* - \tilde{u}^*| < |u_n^* - \tilde{u}^*|$ . Ce comportement



montre que la zone de convergence maximale est large mais que (contrairement au cas stationnaire avec effet de Coriolis) la zone de convergence stricte est restreinte autour du point fixe.

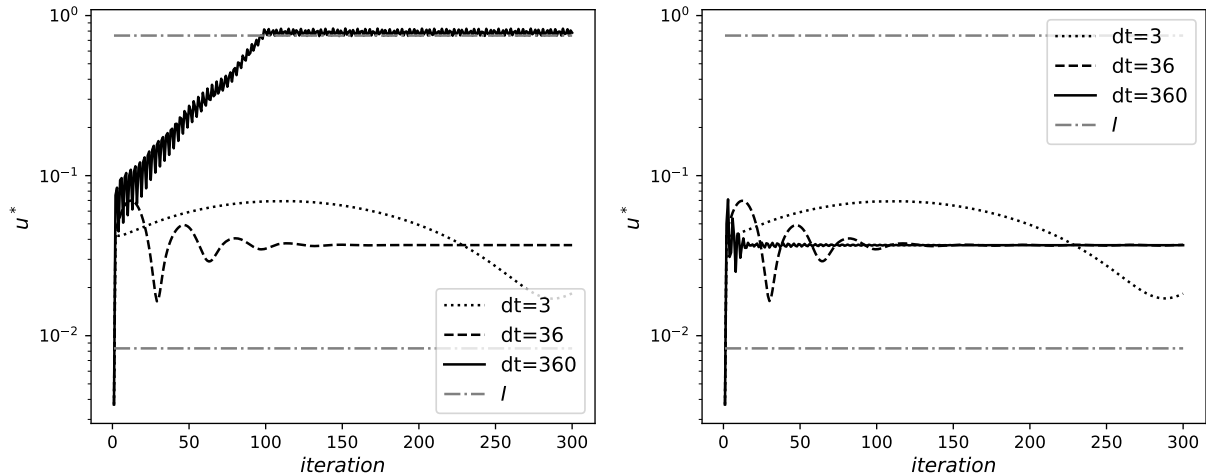


FIGURE 5.24 – Simulation du problème (5.73) avec application de moyenne sur la fenêtre entière. On compare l'évolution des  $u_n^*$  pour des conditions d'interfaces classiques (à gauche) et alternatives (à droite), pour différents pas de temps et une taille de fenêtre  $100\delta t$ .

**Influence de la zone turbulente** L'étude du problème stationnaire avec effet de Coriolis a montré que la zone turbulente des domaines océan et atmosphère a une forte influence sur la convergence de l'algorithme, et ceci même lorsque la taille de la zone turbulente est très petite devant celle de la zone libre. La figure 5.25 compare un test avec une viscosité type KPP à un test avec une viscosité constante  $\nu_\alpha = \nu_\alpha^m$  sur chaque domaine. Il apparaît que, pour des conditions de Neumann classiques les simulations avec des viscosités constantes "explorent". Pour des conditions alternatives de Robin, les simulations convergent quelle que soit la viscosité. En revanche, les solutions convergées ne sont pas les mêmes pour des viscosités KPP ou pour des viscosités constantes. Cet exemple montre que l'influence de la zone libre est faible, même lorsque celle-ci est bien plus grande que la zone turbulente (c'est à dire  $\tilde{u}^*$  faible).

**Remarque sur le caractère bien posé de l'algorithme** Si le problème couplé (5.73) est bien posé, le point fixe solution  $\tilde{u}^*$  ne devrait pas dépendre du pas de temps choisi, mais il peut éventuellement dépendre de la taille de la fenêtre de temps car on applique ici un opérateur moyenne sur toute cette fenêtre. Les tests illustrés par les figures 5.21-5.24 montrent que, lorsqu'on a convergence, les différentes simulations convergent bien vers le même point fixe, ce qui corrobore donc l'hypothèse du caractère bien posé du problème (5.73) au moins sur la fenêtre de temps considérée.

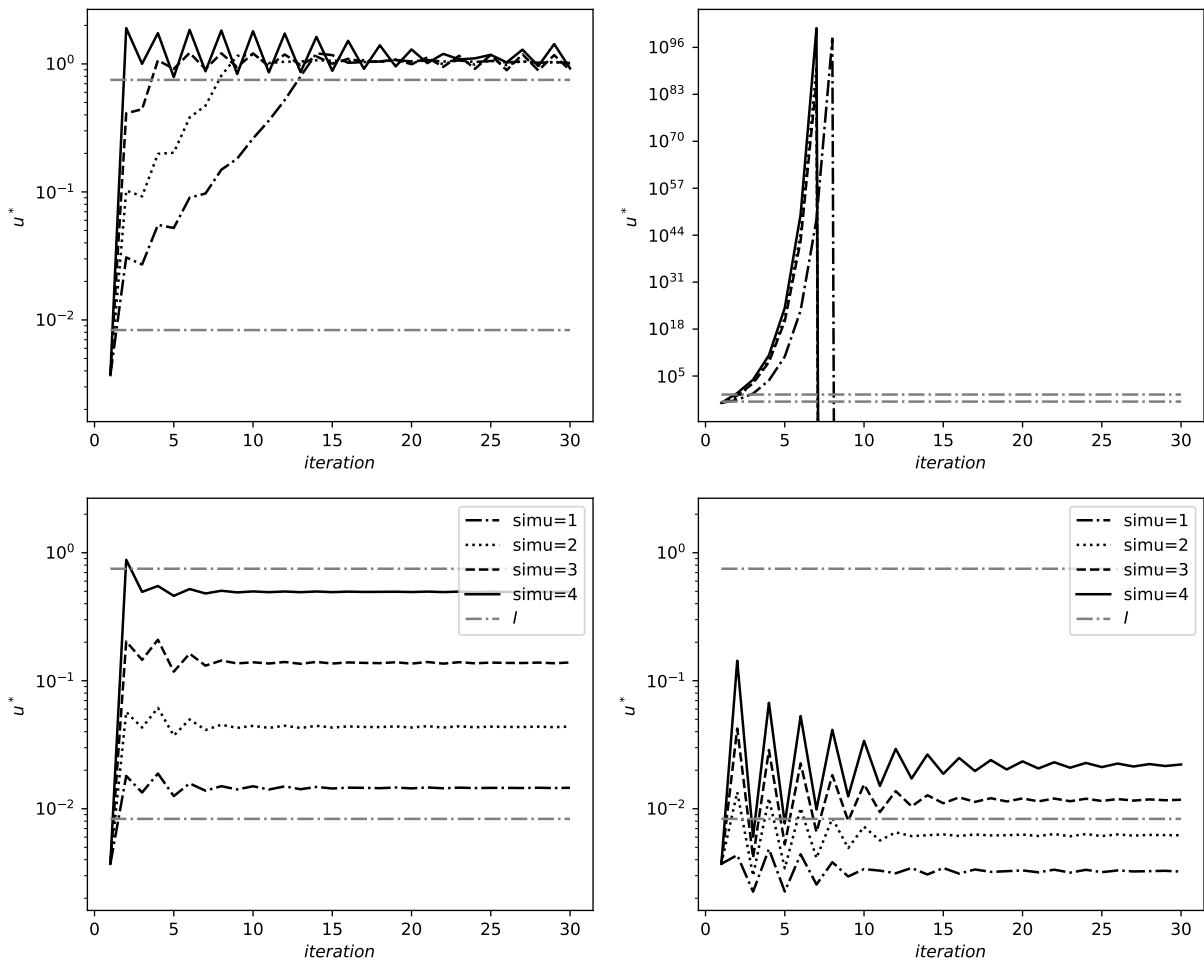


FIGURE 5.25 – Évolution de  $u_n^*$  au fil des itérations pour des simulations de (5.73) sur une fenêtre  $T = 100\delta t$  avec  $\delta t = 700s$ , pour différentes valeurs de  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$ . En trait continu  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\| = 0.5m.s^{-1}$  (simu 1), en trait tireté  $1.7m.s^{-1}$  (simu 2), en trait pointillé  $5.8m.s^{-1}$  (simu 3) et en trait mixte  $20m.s^{-1}$  (simu 4). En haut : conditions de Neumann classiques ; en bas : conditions alternatives de Robin. A gauche : viscosité KPP ; à droite : viscosité constante.

### 5.4.2 Simulations du problème instationnaire

On étudie dans ce paragraphe le comportement de l'algorithme instationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_\alpha^n(z, t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^n(z, t) - \partial_z (\nu_\alpha(z, u_n^*(t)) \partial_z \mathbf{u}_\alpha^n(z, t)) = \mathbf{B} \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } (h_\alpha^*, \delta_\alpha) \times \mathcal{T} \\ \mathbf{u}_\alpha(z_\alpha^\infty, t) = \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } \mathcal{T} \\ \mathbf{u}_\alpha^n(z, t = 0) = \mathbf{u}_\alpha^g & \text{sur } [z_o^\infty, z_a^\infty] \\ \nu_a(u_n^*(t), \delta_a) \partial_z \mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) = (u_n^*(t))^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) & \text{sur } \mathcal{T} \\ \nu_o(u_n^*(t), \delta_o) \partial_z \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) = \lambda^2 (u_n^*(t))^2 \mathbf{e}_\tau(\theta_{n-1}) & \\ \text{avec } \sqrt{C_D(u_{n+1}^*(t))} \|\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o^n(\delta_o, t)\| = u_{n+1}^*(t) & \end{array} \right. \quad (5.74)$$

Une différence importante avec les cas stationnaire ou moyenné, est que la viscosité dépend maintenant aussi du temps. Nous affirmons ici que, pour chaque itération, les sous-problèmes sont bien posés et que, comme pour le cadre stationnaire, pour un  $u_n^*(t) \in \mathcal{C}^1([0, T])$  déterminé<sup>4</sup>, chaque sous-problème est bien posé dans son domaine respectif. Ainsi, trouver un point fixe  $\tilde{u}^*(t) \in \mathcal{C}^1([0, T])$  permet de trouver une solution au problème (5.74).

**Comportement général en fonction du temps** De manière générale, on observe que  $u_n^*$  converge pour notre problème vers une solution stationnaire. Ceci rejoint l'idée que, à convergence, la composante  $\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o, t)$  est alignée avec  $\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g$  qui est un terme constant dans notre cas. Pour le reste, les comportements mis en avant lorsqu'on applique un filtre moyenne se retrouvent dans ce cadre plus général. On a en plus  $u_n^*(t)$  qui dépend du temps et donc une vitesse de convergence possiblement différente en fonction du temps. Les figures 5.26 à 5.29 illustrent plusieurs caractéristiques, listées ci-dessous. Dans le cadre d'algorithmes de Schwarz sur des problèmes linéaires, la vitesse de convergence dépend surtout de la convergence théorique sur la plage de valeur des fréquences "influentes"  $|\omega| \in [\pi/T, \pi/\delta t]$  (voir §3.1). Nous interprétons les résultats du cadre non-linéaire en supposant l'existence de ces mêmes fréquences "influentes". Les tests numériques nous permettent de conjecturer les éléments suivants :

- **le caractère bien posé** A convergence dans  $I^*$ , les différentes simulations tendent vers la même solution indépendamment du pas de temps et de la taille de la fenêtre.
- **influence de l'effet de Coriolis** Nous observons des résultats similaires à ce qui a été décrit dans le paragraphe 5.4.1. En effet si  $|\omega = -f|$  fait partie de la plage des fréquences influentes ( $\pi/\delta t \leq |\omega| \leq \pi/T$ ), alors la nature de la stabilité (et donc de la convergence) du cadre stationnaire sans Coriolis (donné au §5.1.3) a une influence sur la stabilité (et donc sur la convergence) de l'algorithme instationnaire. D'une manière générale, on observe que :

4. voir LIONS et MAGENES, 1968b, chapitre 6

- pour des fenêtres telles que les fréquences influentes sont  $|\omega| > f$ , l'algorithme converge dans  $I^*$  pour les deux conditions d'interface (mais pas nécessairement vers la même solution que dans le cas stationnaire).
  - pour des fenêtres telles que les fréquences influentes  $|\omega| < f$ , l'algorithme converge dans  $I^*$  pour les deux conditions d'interface vers les solutions du cadre stationnaire.
  - si la fréquence  $\omega = -f$  est présente dans la plage des fréquences influentes, l'algorithme converge dans  $I^*$  pour les conditions alternatives de Robin, mais ne converge pas dans  $I^*$  pour les conditions de Neumann classiques (mais converge généralement vers une autre solution située en dehors de  $I^*$ ).
- **l'influence du découpage temporel** La vitesse de convergence dépend, entre autres, du pas de temps  $\delta t$  et de la taille de la fenêtre temporelle  $T$ . Globalement, on observe que la vitesse de convergence diminue lorsque les fréquences influentes sont grandes ( $T$  petit), et au contraire la vitesse de convergence augmente lorsque la taille de de la fenêtre temporelle est grande. La figure 5.26 présente plusieurs simulations du problème (5.74) avec un temps final  $T$  commun à toutes les simulations. Il apparaît pour cet exemple que, lorsque l'algorithme est convergent, la vitesse de convergence est sensiblement la même pour les différents choix de pas de temps. A l'inverse, la figure 5.27 présente plusieurs simulations du problème (5.74) avec le même pas de temps mais des tailles de fenêtre différentes. Il apparaît que la vitesse de convergence est influencée par la taille de la fenêtre temporelle. La figure 5.28 reprend l'exemple de la figure 5.23 sans l'application de moyenne à l'interface. Il apparaît que le cas où  $\delta t = 5000s$  est convergent lorsqu'on applique l'opérateur moyenne mais non convergent dans  $I^*$  pour l'algorithme initial (sans application de moyenne). Ceci confirme que lorsqu'on applique un opérateur moyenne, ce sont bien les fréquences proches de  $\pi/T$  qui sont les plus influentes (dans cet exemple  $\pi/T \ll |f|$ ), contrairement au cas sans moyennage où l'ensemble de la plage de fréquences  $|\omega| \in [\pi/T, \pi/\delta t]$  a une influence (dans cet exemple  $\pi/T \leq |f| \leq \pi/\delta t$ ).
  - **le comportement singulier pour les hautes fréquences** Pour des fréquences influentes suffisamment grandes, l'algorithme est convergent au moins pour des conditions alternatives de Robin. Cependant,  $u_n^*(t)$  évolue via des oscillations de plus ou moins forte amplitude dépendant de l'itération. On ne peut donc pas assurer que  $|u_{n+1}^* - \tilde{u}^*| < |u_n^* - \tilde{u}^*|$  et donc on ne peut pas assurer qu'on se rapproche du point fixe à chaque pas de temps.
  - **l'influence de la zone turbulente** Dans la figure 5.29, on reprend la comparaison avec des viscosités constantes comme pour la figure 5.25. Il apparaît que les solutions convergées ne sont pas les mêmes lorsqu'on considère une viscosité constante sur tout le domaine, et ceci même lorsque la zone turbulente est très petite devant la zone libre. On observe la même chose sur la vitesse de convergence. On en déduit que la zone turbulente a une forte influence sur le comportement de l'algorithme.

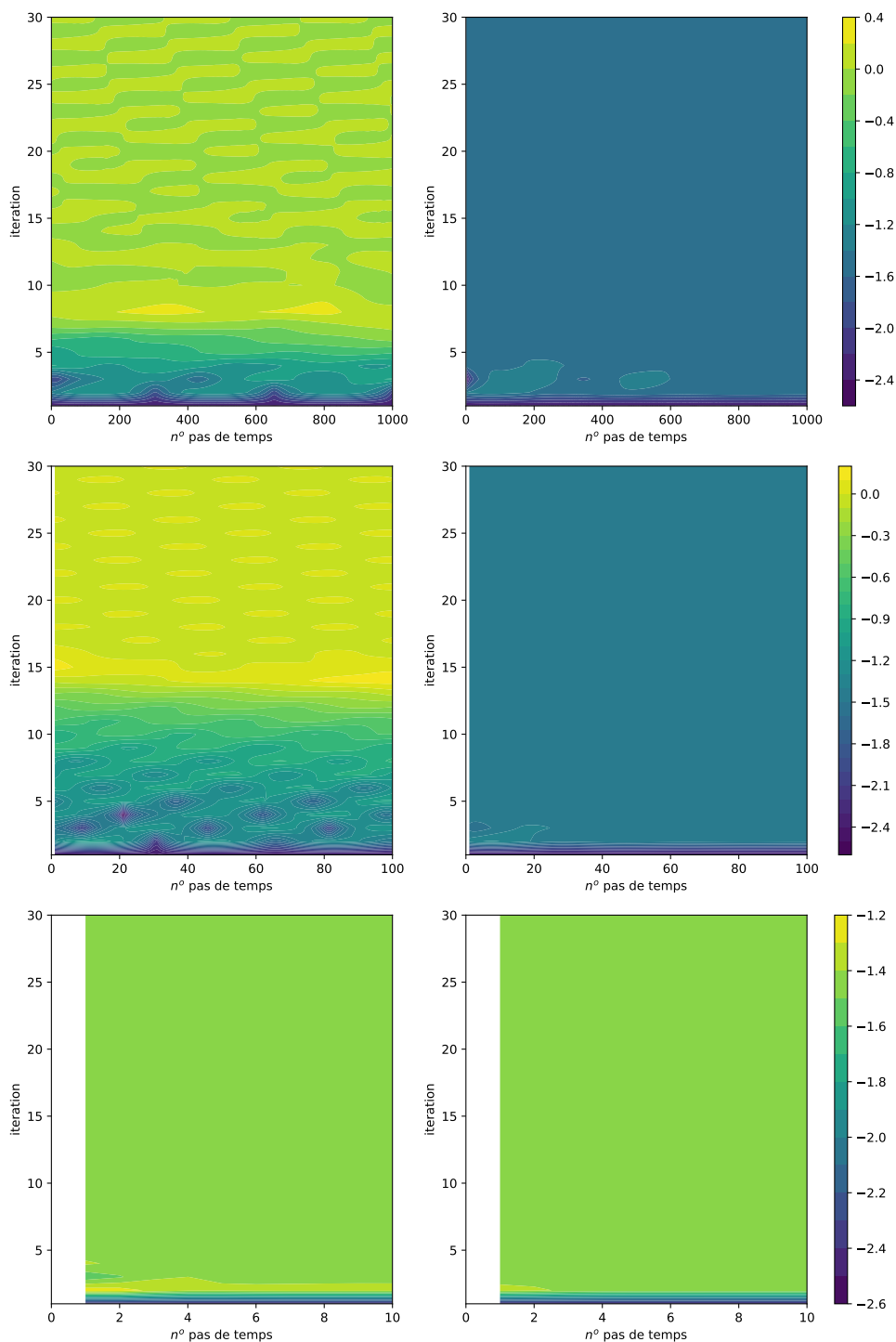


FIGURE 5.26 – Simulations du problème (5.74). On compare l'évolution des  $u_n^*(t_m)$  pour des conditions d'interface de Neumann classiques à gauche, et alternatives de Robin à droite. On considère le même temps final fixe  $T = 3.6 \cdot 10^5$ s pour différents pas de temps. L'algorithme avec conditions alternatives converge toujours dans  $I^*$ , mais l'algorithme avec conditions classiques ne converge pas dans  $I^*$  lorsque  $\omega = f$  est dans la plage de fréquences influentes (deux premières lignes) et converge dans  $I^*$  lorsque  $\omega = f$  n'est pas dans cette plage (dernière ligne).

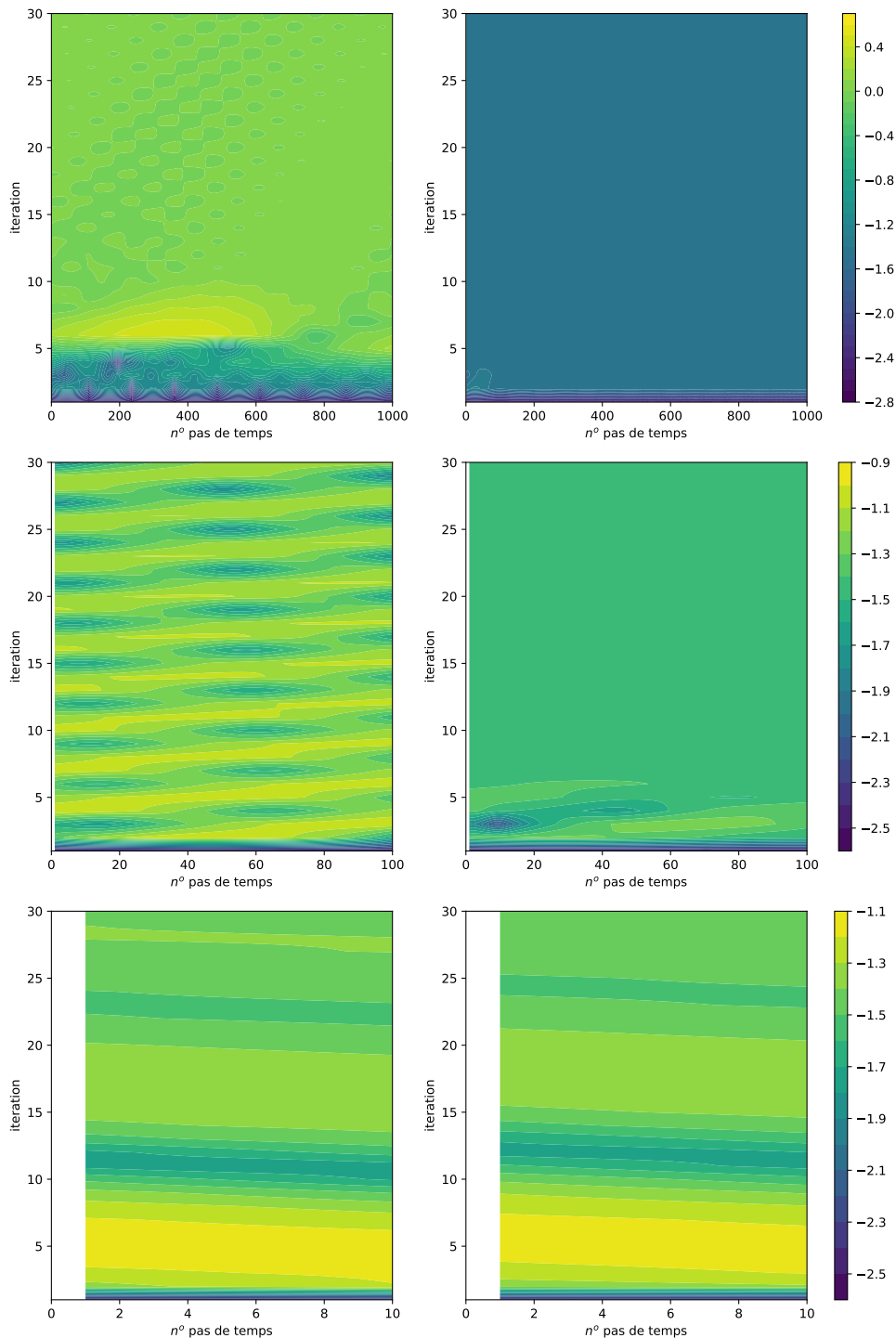


FIGURE 5.27 – Idem figure 5.26 mais pour un même pas de temps  $\delta t = 1000s$  et différentes tailles de fenêtre :  $1000\delta t$  en haut,  $100\delta t$  au milieu,  $10\delta t$  en bas. Les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux de la figure 5.21 sans application d'opérateur moyenne. L'algorithme avec conditions classiques diverge lorsque  $\omega = f$  est dans la plage des fréquences influentes (deux premières lignes) alors que l'algorithme avec conditions alternatives converge. Lorsque  $\omega = f$  n'est dans la plage de fréquences influentes (dernière ligne), les deux algorithmes convergent vers la même solution.

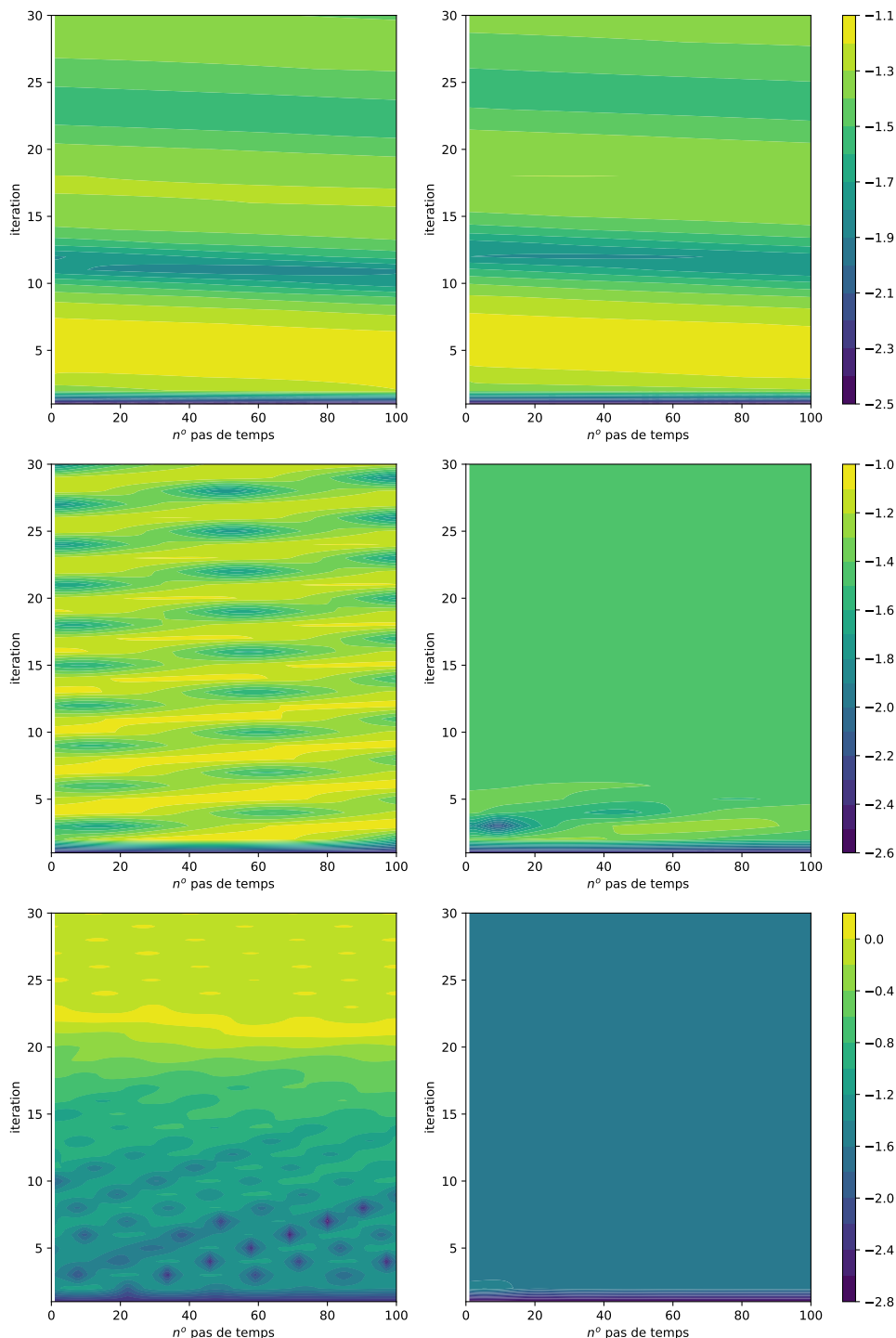


FIGURE 5.28 – Idem figure 5.27 mais avec une même taille de fenêtre de  $100\delta t$ , avec  $\delta t = 100s$  en haut,  $\delta t = 1000s$  au milieu,  $\delta t = 5000s$  en bas. Les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux de la figure 5.23 sans application d’opérateur moyenne. L’algorithme avec conditions classiques diverge lorsque  $\omega = f$  est dans la plage des fréquences influentes (deux dernières lignes) alors que l’algorithme avec conditions alternatives converge. Lorsque  $\omega = f$  n’est dans la plage de fréquences influentes (première ligne), les deux algorithmes convergent vers la même solution. Contrairement à la figure 5.23, le cas  $\delta t = 5000s$  (ligne du bas) ne converge pas dans  $I^*$ .

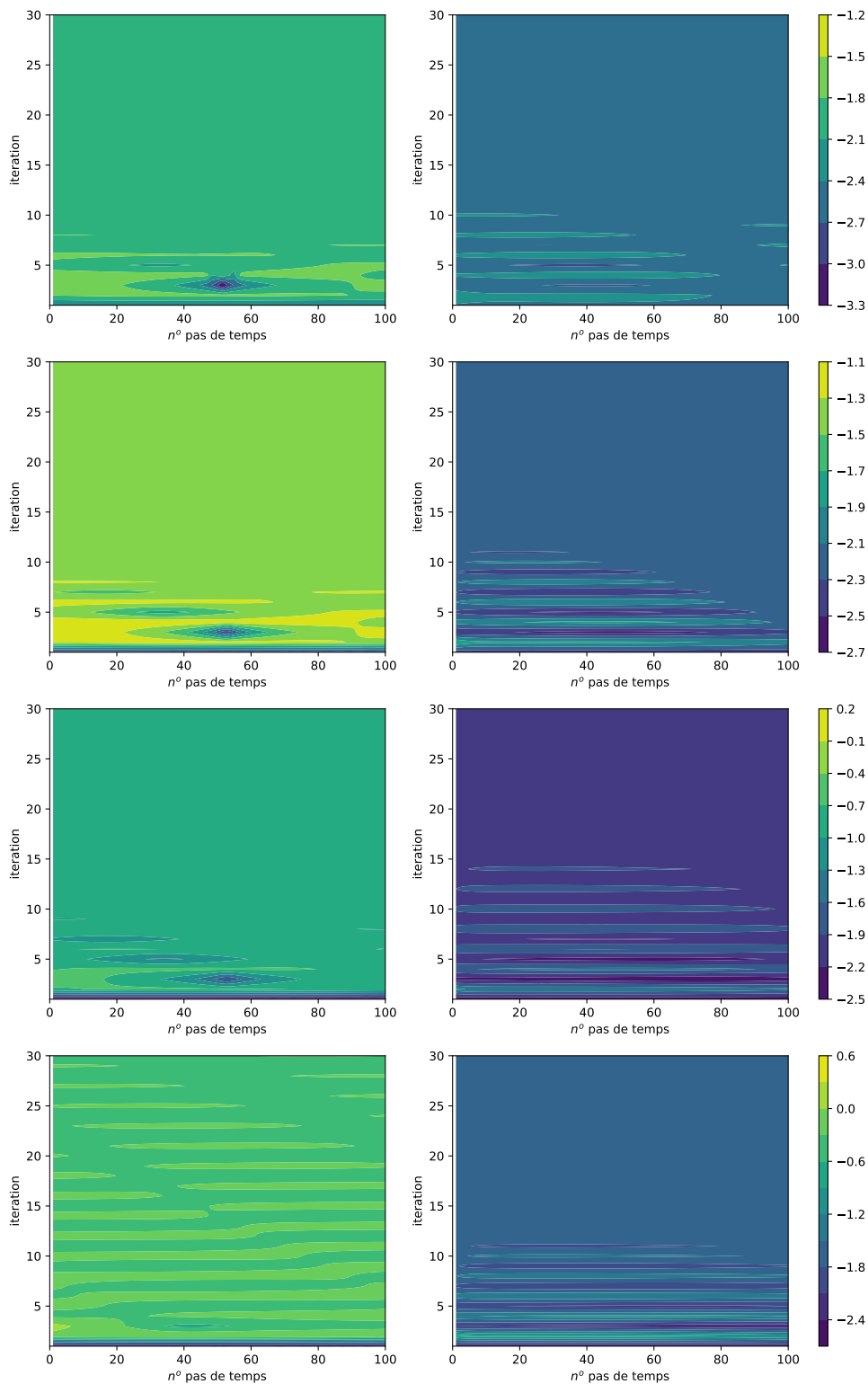


FIGURE 5.29 – Idem figure 5.28 mais avec un seul pas de temps  $\delta t = 700s$  et différentes valeurs pour les données extérieures  $\|\mathbf{u}_a^g - \mathbf{u}_o^g\|$  de la simulation 1 (en haut) à la simulation 4 (en bas). Même simulation que pour la figure 5.25 sans application d’opérateur moyenne et seulement pour des conditions alternatives. A gauche : viscosité KPP ; à droite : viscosité constante.



### 5.4.3 Pistes pour l'étude théorique du problème instationnaire

Nous avons pu observer de manière empirique que les différents paramètres intervenant dans le couplage océan-atmosphère (e.g. effet de Coriolis, couches limites turbulentes) avaient une influence sur le comportement de l'algorithme de Schwarz associé. Nous avons pu établir quelques liens avec les résultats obtenus dans le cadre d'une simplification en un problème linéaire. Par exemple, l'étude de l'algorithme stationnaire sans effet de Coriolis nous a permis de caractériser le comportement général de l'algorithme instationnaire pour les fréquences proches de  $\omega = f$ . Pour les fréquences éloignées de  $f$ , la zone turbulente semble avoir une influence importante sur la convergence de l'algorithme. A l'inverse c'est la zone libre qui est la plus influente pour des fréquences proches de  $f$ . Il faut cependant prendre ces résultats avec précaution : à ce stade, l'étude dans le cadre instationnaire non-linéaire a été menée numériquement et a uniquement permis de dresser quelques conjectures. Les résultats numériques ont été lus sous l'angle des algorithmes de Schwarz linéaires et mettent en avant des similitudes avec le cas non-linéaire, mais cette lecture peut être biaisée. Ceci dit, ces premiers tests montrent l'importance d'étudier le problème couplé instationnaire en prenant bien en compte toutes ces spécificités.

De mon point de vue, il faudrait s'attaquer aux deux problématiques suivantes pour avancer sur le sujet :

- trouver une bonne simplification du problème couplé océan-atmosphère dans un cadre linéaire : les conditions d'interface de type Dirichlet-Neumann ne semblent pas être représentatives du comportement des conditions obtenues via les paramétrisations de la couche limite de surface. Rendre plus représentatif le modèle dans un cadre linéaire permettrait de garder la simplicité du cadre théorique classique pour l'étude des algorithmes de Schwarz.
- trouver une méthode permettant d'étudier le problème instationnaire en prenant en compte les non-linéarités, et ainsi se rapprocher un peu plus d'une étude sur le couplage océan-atmosphère avec des conditions d'interface "réalistes".

Nous proposons quelques pistes qui pourraient être explorées pour aborder ces deux problématiques.

**Linéarisation des conditions d'interfaces** Nous avons vu que le comportement de l'algorithme sur le problème couplé dépendait fortement des conditions d'interface et de la manière dont elles sont données à chaque itération. Nous avons considéré un premier problème simplifié avec des conditions de type Dirichlet-Neumann pour modéliser les échanges océan-atmosphère. Or, l'étude de cet algorithme a fourni des résultats théoriques assez éloignés de ceux obtenus avec conditions d'interface non-linéaires. Les conditions de type Dirichlet-Neumann ne semblent donc pas être représentatives des conditions d'interface tels qu'utilisées en pratique dans les modèles numériques. Une première étape serait de linéariser les conditions d'interface non-linéaires, de manière à se rapprocher un peu plus des conditions d'interface réalistes, mais toujours sur un problème linéaire. Dans un premier temps, tout en supposant  $u^*$  constant (en temps et pour chaque itération), on pourra

modéliser les conditions d'interface alternatives de Robin par :

$$\nu_a(\delta_a)\partial_z\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) + p\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) = p\mathbf{u}_o^{n-1}(\delta_o, t) \quad (5.75a)$$

$$\nu_o(\delta_o)\partial_z\mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) + q\mathbf{u}_o^n(\delta_o, t) = q\mathbf{u}_a^n(\delta_a, t) \quad (5.75b)$$

On pourrait ainsi étudier l'application d'un algorithme de Schwarz sur un problème linéaire, pour lequel la théorie est bien connue, et voir si on retrouve les propriétés observées dans les simulations numériques. Un problème linéaire muni des conditions d'interface (5.75) pourrait aussi nous renseigner sur la stabilité du problème non-linéaire correspondant : si on considère qu'on atteint le "point fixe"  $\tilde{u}^*$  constant en temps du problème, si l'algorithme de Schwarz avec les conditions (5.75) est divergent, il y a peu de chance que l'algorithme du point fixe avec des conditions alternatives de Robin soit stable, et inversement. Il reste à théoriser et valider ou non cet argument, et définir si c'est une condition suffisante ou nécessaire.

On pourra dans la suite tenter de simplifier de la même manière la condition classique par exemple en linéarisant  $\Phi(u^*)$ . Mais cette étape pourrait s'avérer difficile car, même avec une formulation bulk grandement simplifiée, la condition d'interface est fortement dépendante de la norme au carré du saut des solutions autour de la zone d'interface.

**Les algorithmes de Schwarz sur un problème non linéaire** Il existe quelques études des algorithmes de Schwarz dans le cas non-linéaire (voir §2.3.2). Celles-ci se restreignent à un cadre théorique très précis qui n'est pas directement applicable à notre problème couplé océan-atmosphère. Principalement parce-que la non linéarité est présente dans la forme de l'équation différentielle seulement et non dans les conditions d'interface. Or dans notre problème c'est principalement aux interfaces que sont présentes les non linéarités.

Une étude pouvant se rapprocher de nos problématiques serait le modèle proposé par AHMED et al., 2018 où des équations de type diffusion

$$\begin{cases} \partial_t u_j - \nabla(\lambda(u_j)\nabla\pi(u_j)) = 0 \\ + \text{condition de bord} \end{cases} \quad (5.76)$$

sont considérées sur chaque sous-domaine  $\Omega_j$  avec des conditions d'interfaces entre deux domaines  $i$  et  $j$ ,

$$\begin{cases} \pi(u_j) = \pi(u_i) \\ \lambda(u_j)\nabla\pi(u_j) = \lambda(u_i)\nabla\pi(u_i) \end{cases} \quad (5.77)$$

La méthode proposée, précédemment élaborée par CANCEÈS, 2008 dans un contexte similaire, consiste à utiliser une transformation de Kirchoff pour gérer la non-linéarité dans l'EDP et se ramener à une équation de type

$$\partial_t u_j - \Delta\Psi(u_j) = 0$$

sur une nouvelle variable donnée par :  $\Psi = \int_0^s \lambda(s')\nabla\pi(s')ds'$ .

Cette transformation est complexe mais elle a l'avantage de traiter les termes potentiellement non linéaires comme une seule entité. On pourrait s'inspirer d'une telle méthode

pour éventuellement l'adapter au problème couplé instationnaire (5.1) avec des viscosités de type KPP, voire à 1 équation. Par exemple, si on considère une viscosité KPP, on peut poser  $\pi(u_\alpha) = u^*(\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o, t))\mathbf{u}_\alpha(z, t)$  et  $\lambda_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \nu_\alpha(u^*(\mathbf{u}_a(\delta_a, t) - \mathbf{u}_o(\delta_o, t)), z)/u^*$ . On peut alors retranscrire les conditions alternatives de Robin comme :

$$\begin{cases} \lambda(u_\alpha)\nabla\pi(u_\alpha) &= \sqrt{C_D}(\pi(u_a) - \pi(u_o)) \\ \lambda(u_\alpha)\nabla\pi(u_\alpha) &= \frac{\rho_a}{\rho_o}\sqrt{C_D}(\pi(u_a) - \pi(u_o)) \end{cases}$$

Malgré cela, cette méthode ne peut pas s'appliquer directement comme telle que décrite par AHMED et al., 2018, car les conditions sur  $\lambda$  et  $\pi$  qui sont utilisées ne sont pas nécessairement vérifiées dans notre cas. De plus l'étude de AHMED et al., 2018 considère ensuite des conditions d'interface de type "Dirichlet-Neumann" comme en (5.77) sur les variables transformées, mais dans notre cas, les conditions d'interface peuvent difficilement se ramener à de telles conditions. On pourrait cependant s'inspirer de cette démarche pour l'adapter à notre problème.



# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié comment les algorithmes de Schwarz pouvaient être utilisés pour le couplage océan-atmosphère, et en quoi les spécificités de cette application pouvaient influencer la convergence de l'algorithme.

## Conclusion

Dans le chapitre 1 nous avons construit les modèles océan et atmosphère que nous avons considéré tout au long de cette thèse. Nous avons regardé exclusivement le comportement sur la dynamique dans chaque domaine, à savoir le couplage vents/courants, décrit par des équations de type diffusion 1D verticale avec effet de Coriolis. Une particularité importante du couplage océan-atmosphère est le caractère fortement turbulent des écoulements, notamment à proximité de la surface, qui est pris en compte via des profils de viscosité variables en espace. Les couches limites turbulentes dans la zone d'interface entre l'océan et l'atmosphère sont gérées de manière complexe faisant apparaître des non-linéarités. Schématiquement, l'effet de la turbulence sur les domaines océan et atmosphère est contenu dans une variable nommée *échelle de friction* dépendant de l'état des solutions de part et d'autre de l'interface. Nous avons ainsi construit un modèle couplé dans lequel la zone d'interface est considérée comme une entité séparée des domaines océan et atmosphère. Les profils de viscosité et les conditions aux bords des domaines dépendent de cette échelle de friction, ce qui rend le problème couplé non-linéaire. A la fin de ce chapitre, nous avons présenté les deux problèmes couplés que nous considérons tout au long de la thèse. Le premier est le problème complet, possédant toutes les spécificités du couplage océan-atmosphère. Un second problème linéarisé, plus simple, est introduit, qui correspond à un couplage de couches d'Ekman.

Nous revenons rapidement dans le chapitre 2 sur les méthodes utilisées actuellement pour effectuer le couplage océan-atmosphère dans les modèles réalistes. Nous expliquons que leur principal défaut est qu'elles ne permettent pas de bien phaser les interactions physiques entre l'océan et l'atmosphère, car l'échange d'informations se fait avec un décalage dans le temps. De plus, afin d'être cohérentes avec les hypothèses physiques sous-jacentes aux paramétrisations de la zone d'interface, les méthodes de couplage actuelles utilisent des opérateurs de moyenne temporelle lors de cet échange d'information. Cet aspect est très spécifique au contexte océan-atmosphère. Pour corriger le décalage dans les échanges entre modèles, nous proposons d'appliquer un processus itératif. Cette solution rentre

dans le cadre bien connu des algorithmes de Schwarz. Nous exposons dans la suite du chapitre 2 les principaux résultats théoriques concernant ces algorithmes de Schwarz dans un cadre linéaire. Il est notamment admis dans la communauté que la convergence théorique se mesure dans l'espace de Fourier, à savoir sur les fréquences temporelles pour notre cas. Nous présentons ensuite un panorama des différentes études qui peuvent se rapprocher du problème couplé océan-atmosphère que nous considérons. Cependant, il n'existe pas, à notre connaissance, d'études prenant en compte toutes ses spécificités. Ce tour d'horizon de la littérature sur le sujet motive une première étude prenant en compte l'effet de Coriolis et la variabilité des profils de viscosité (voir chapitre 4).

La théorie autour de la convergence des algorithmes de Schwarz montre que le découpage temporel, à savoir le choix du fenêtrage et du pas de temps dynamique, a un fort impact sur la convergence de l'algorithme. Cet aspect est détaillé dans le chapitre 3 où on définit une plage de fréquences temporelles "influentes", dépendant exclusivement du pas de temps et de la taille de la fenêtre temporelle. Celles-ci permettent de faire le lien entre la convergence théorique dans l'espace fréquentiel et la convergence observée lors d'expériences numériques dans l'espace physique. Nous y exposons aussi l'influence du découpage temporel de manière plus large, en dérivant des conditions d'interface qui garantissent la convergence de l'algorithme. Celles-ci dépendent notamment du schéma de discrétisation temporelle. Enfin, nous montrons comment l'opérateur moyenne appliqué lors de l'échange d'information au travers de l'interface impacte le comportement de l'algorithme. Il apparaît d'abord que la convergence dépend fortement de la taille des fenêtres temporelles sur lesquelles on applique la moyenne. Nous montrons aussi que, quel que soit l'opérateur d'interface sur lequel on applique la moyenne, la moyenne des solutions convergées reste bien égale à la moyenne de la solution de référence. Pour chacun des cas traités dans ce chapitre, nous explicitons les liens entre la convergence calculée dans le cadre théorique (i.e. dans l'espace de Fourier) et la convergence qui peut être observée en pratique dans l'espace physique. Pour conclure chaque section de ce chapitre, nous illustrons les différentes propriétés de convergence démontrées jusqu'ici par des exemples numériques qui corroborent nos résultats théoriques.

Les propriétés discutées dans le chapitre 3 ont été démontrées dans un cadre linéaire très général. Dans le chapitre 4 nous nous intéressons plus spécifiquement aux propriétés de convergence du modèle linéaire simplifié de couplage océan-atmosphère dérivé au chapitre 1 (le couplage de couches d'Ekman). Nous insistons particulièrement sur l'impact des spécificités des modèles océan et atmosphère, et plus particulièrement sur ceux de l'effet de Coriolis et des variations spatiales du profil de viscosité. Dans un premier temps, nous montrons que l'effet de Coriolis s'intègre aisément aux calculs théoriques des chapitres précédents en décalant le spectre du facteur de convergence par la valeur  $f$  de la fréquence de Coriolis ( $|f| \leq \frac{2\pi}{12 \text{ [h]}} \simeq 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ). Son effet sur la vitesse de convergence est donc particulièrement fort lorsque la valeur  $f$  fait partie de la plage des fréquences influentes telles que définies dans le chapitre 3. Ensuite, nous donnons des outils permettant de décrire la convergence de l'algorithme en prenant en compte les profils complets

(i.e. sur la totalité du domaine d'étude) de viscosité variables en espace. La complexité des calculs augmentant rapidement avec le degré de complexité des profils de viscosité considérés, nous nous intéressons au cas particulier de profils constants, affines ou paraboliques. Les outils théoriques mis en place nous permettent, à la fin de ce chapitre, de décrire précisément les propriétés théoriques de convergence des algorithmes de Schwarz appliqués à notre problème couplé océan-atmosphère simplifié sous la forme d'un couplage de couches d'Ekman. En prenant des ordres de grandeurs représentatifs du couplage air-mer pour les différents paramètres du problème, il apparaît que l'effet de Coriolis et du profil de viscosité dans la zone turbulente ont une très forte influence sur la convergence. Ces résultats montrent l'importance de bien prendre en compte toutes les caractéristiques du problème considéré lors de l'étude théorique de convergence.

Le problème complet non-linéaire est finalement étudié au chapitre 5. Comme première étape dans l'étude de ce problème, nous avons vérifié qu'il existait des solutions physiquement acceptables, et nous avons pu les calculer analytiquement dans le cas stationnaire. Le caractère non-linéaire du problème étudié ne permet pas une application directe de la théorie usuelle pour l'étude des algorithmes de Schwarz. Nous avons cependant pu décrire dans le cas stationnaire les propriétés de convergence de l'algorithme car les calculs sont très étroitement liés aux calculs et outils introduits dans le cas linéaire. Il apparaît que l'effet de Coriolis a aussi un impact fort sur la convergence. D'une manière générale, nous avons pu montrer que l'algorithme sur le problème non-linéaire stationnaire sans effet de Coriolis ne pouvait pas converger vers une solution physiquement acceptable. A l'inverse, l'algorithme sur le problème non-linéaire stationnaire avec effet de Coriolis converge très rapidement. Dans le cas instationnaire, nous avons réalisé des premières expériences numériques, avec et sans moyennage des conditions d'interface. L'analyse des résultats de ces expériences met en avant un certain nombre de propriétés qui ont été démontrées précédemment dans le cas linéaire : *(i)* le découpage temporel permet de décrire une plage de fréquences "influentes" ; *(ii)* l'impact du moyennage temporel des conditions d'interface sur la convergence dépend fortement de la taille des fenêtres ; *(iii)* l'effet de Coriolis entraîne un décalage du spectre de la convergence théorique ; *(iv)* la turbulence proche de l'interface influe fortement sur la convergence de l'algorithme. Cette analogie entre le cas linéaire et le cas non-linéaire est montrée de manière empirique, mais nous donnons quelques pistes en fin de chapitre pour aller vers l'étude théorique du problème instationnaire non-linéaire.

En résumé, les travaux présentés dans cette thèse permettent à notre avis une avancée significative dans la compréhension du comportement d'algorithmes itératifs pour le couplage océan-atmosphère. Il a notamment été mis en avant que les différentes spécificités inhérentes à ce problème de couplage, encore jamais prises en compte dans des études théoriques, ont une influence non négligeable sur les propriétés de convergence. Ceci pointe notamment la nécessité d'introduire explicitement dans l'étude de convergence un maximum d'ingrédients du problème complet que l'on souhaite étudier. Dans un futur proche, il sera intéressant de confronter ces résultats aux propriétés de convergence constatées

lorsque des méthodes itératives de couplage seront implémentées dans les modèles de climat réalistes. Cette démarche est notamment en cours dans les deux modèles de climat supportés par la communauté scientifique française (MARTI et al., 2020). Ceci fait partie des perspectives que l'on peut esquisser à la suite de ces travaux.

## Perspectives

Si le cadre bien connu des algorithmes de Schwarz permet une étude théorique approfondie d'un problème linéaire comme notre modèle océan-atmosphère simplifié, il ne permet pas de bien décrire le comportement de sa version plus "réaliste". Celle-ci est bien plus complexe et comporte des non-linéarités qui rentrent difficilement dans un cadre théorique (voir §5.4.3). Un premier objectif pour des travaux futurs serait donc d'élaborer une approche permettant d'étudier théoriquement, dans le cadre instationnaire, le problème couplé océan-atmosphère non-linéaire proposé dans cette thèse. Il faudra d'abord s'assurer du caractère bien posé du problème en vérifiant qu'il existe des solutions cohérentes avec la physique. Ensuite on pourra étudier la convergence de l'algorithme, d'abord avec une viscosité de type KPP, puis avec d'autres types de viscosités comme les viscosités "1-équation". Les résultats pourraient être bien différents, mettant ainsi en avant le rôle du profil de viscosité sur le comportement de l'algorithme. De plus, il serait pertinent de vérifier si les résultats sur l'influence du découpage temporel obtenus dans le cas linéaire demeurent valides sur le problème non-linéaire. Même si les tests empiriques de la section 5.4 vont dans ce sens, nous n'avons pas de résultat théorique qui le garantisse. Comme il est probable que le cadre théorique approprié au problème non-linéaire soit difficile à manipuler, on pourrait aussi chercher à identifier comment les outils développés sur le problème linéaire, et plus facilement manipulables, pourraient être utilisés.

Le problème couplé océan-atmosphère qu'on propose dans cette thèse est, même dans sa version non-linéaire, encore éloigné des modèles couplés océan-atmosphère réalistes. Leur complexité rend difficilement envisageable une étude mathématique théorique, et une expérimentation numérique bien ciblée revêt donc de l'importance. Dans le cadre de l'ANR COCOA, de premiers cas-tests ont été effectués en ce sens. Ainsi une étude a été réalisée par S. Valcke (CERFACS) et A. Voldoire (Météo-France) sur une version 1-D verticale du modèle de climat CNRM-CM, cas relativement proche du modèle non-linéaire étudié dans cette thèse. Il apparaît par exemple (figure C1) que le processus itératif de couplage permet de converger vers une solution, parfois significativement différente de la solution issue du premier itéré. Il sera pertinent d'approfondir ces cas-tests pour permettre d'éventuels parallèles avec ce qu'on a pu (ou ce qu'on pourra) en dire d'un point de vue théorique. Ceci permettrait de valider le modèle simplifié utilisé dans cette thèse ou, au contraire d'en invalider des aspects insuffisamment représentatifs des modèles réalistes.



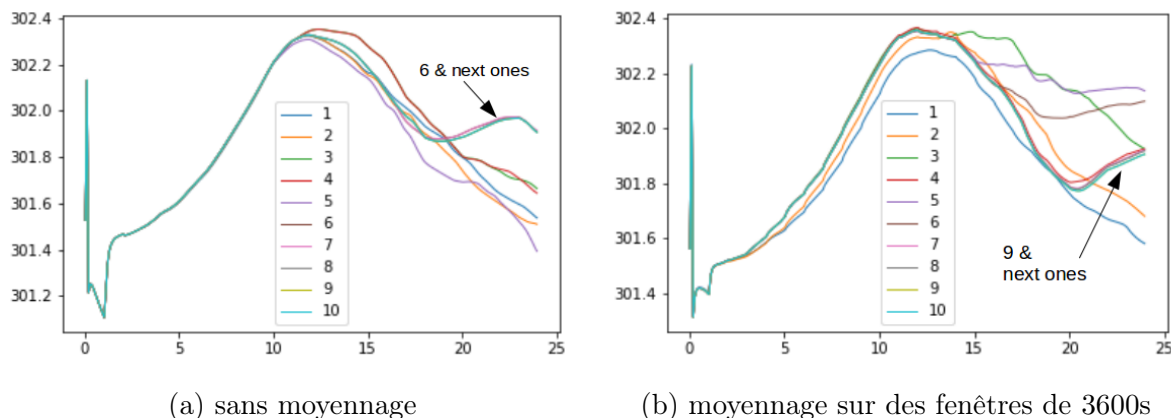


FIGURE C1 —Simulation sur 24h avec le modèle CNRM-CM 1D vertical, avec un pas de temps de 300s, avec et sans moyennage à l’interface. Sont tracés les profils de température (en °K) au premier niveau au-dessus de l’océan en fonction du temps (en heures). Chaque couleur représente une itération de Schwarz. On voit que les premiers itérés diffèrent significativement de la solution convergée. Extrait d’un rapport de recherche de l’ANR COCOA par Sophie Valcke (CERFACS) et Aurore Voltaire (Centre National de Recherche Météorologique).

Une autre étude, réalisée par MARTI et al., 2020 toujours dans le cadre de l’ANR COCOA, met en oeuvre l’algorithme de Schwarz sur le modèle de climat IPSL-CM6. Ce cas-test réaliste 3-D est nettement plus éloigné du cadre théorique considéré dans cette thèse. Pourtant, le résultat principal demeure (figure C2) : l’application d’algorithme de Schwarz permet une convergence vers une solution souvent différente de la solution obtenue par méthode usuelle, et l’erreur relative par rapport à la solution convergée est très significativement réduite dès la deuxième itération.

Ces premiers tests effectués dans le projet ANR COCOA, illustrés en partie ci-dessus, semblent montrer que l’algorithme de Schwarz, en assurant une meilleure synchronisation entre les deux milieux, permet une correction significative des variables d’état dès les premières itérations. La question immédiate est alors de savoir si ceci se traduit par un impact significatif sur les quantités d’intérêt pour les prévisions. En ce qui concerne la prévision à court terme, on s’intéresse essentiellement à déterminer le plus précisément possible la trajectoire des variables d’état elles-mêmes, et de premiers tests assez réalistes dans ce contexte LEMARIÉ et al., 2014 semblaient déjà montrer avant le début de cette thèse que l’approche itérative permet de supprimer une erreur numérique non négligeable. En ce qui concerne la prévision à plus long terme, comme la prévision climatique, on s’intéresse surtout à des tendances et à des quantités moyennées : l’impact réel de l’approche de Schwarz reste donc à évaluer à ces échelles ; de prochaines simulations longues avec IPSL-CM6 devraient apporter des éléments de réponse.

Les diverses applications du couplage océan-atmosphère vont rencontrer un intérêt croissant dans les prochaines années : plusieurs grands centres de prévision météorologique

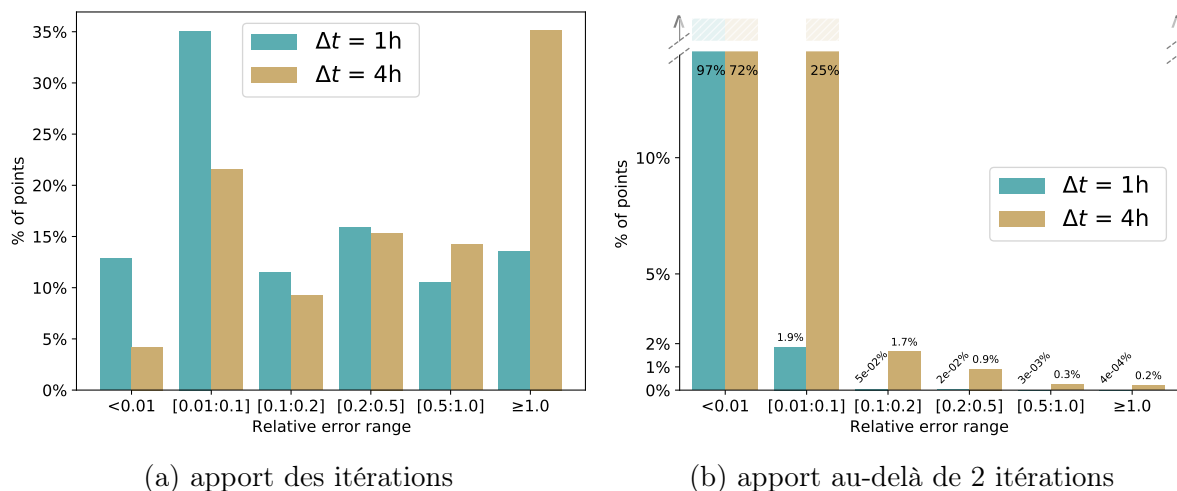


FIGURE C2 — Histogrammes réalisés à partir des valeurs de la température de surface de l'océan en des centaines de milliers de points de grille et instants, pour des simulations d'IPSL-CM6 avec des fenêtres temporelles de 1h (en vert) ou de 4h (en ocre). A gauche : part de correction (après normalisation) apportée par les itérations de Schwarz par rapport à la méthode usuelle; cette correction supplémentaire est très significative dans plus de la moitié des cas. A droite : part de correction (après normalisation) apportée par les itérations de Schwarz au-delà de la deuxième itération; un très faible pourcentage de points de grille nécessitent plus de deux itérations. Figure issue de MARTI et al., 2020.

vont passer à court ou moyen terme à une modélisation couplée (alors qu'ils réalisent actuellement des simulations de l'atmosphère seule); les phénomènes extrêmes, comme les cyclones tropicaux, vont croître en nombre et en intensité, et leur prévision précise est un enjeu croissant; et il est inutile de détailler les enjeux liés au changement climatique, et donc l'importance d'améliorer les modèles de climat. Si l'usage de méthodes itératives de couplage peut permettre d'améliorer la qualité des simulations numériques pour ces différentes applications, il implique cependant un coût de calcul supplémentaire a priori très important : dans une implémentation "naïve", le coût initial est multiplié par le nombre d'itérations. Ce surcoût, même d'un "simple" facteur 2, n'est actuellement pas acceptable pour la majorité des applications. Il est donc important de travailler à le réduire dans la pratique, typiquement en réduisant les modèles sur lesquels on applique ce processus itératif. Ainsi par exemple, des tests préliminaires dans IPSL-CM6 consistant à n'appliquer les itérations que sur les équations de diffusion verticale semblent très encourageants, car les calculs sont très largement réduits tout en conservant le bénéfice des itérations (O. Marti, communication personnelle). Des travaux supplémentaires en ce sens, visant à cibler au strict minimum l'usage des processus itératifs au sein des modèles à coupler, devront être réalisés pour faciliter l'usage des méthodes de Schwarz pour le couplage océan-atmosphère.

# Appendices



# Annexe A

## Démonstrations des propriétés (3.42)-(3.44)

Nous donnons dans cette annexe les démonstrations des propriétés (3.42) et (3.44). D'une manière générale nous notons les conditions moyennées à l'interface comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_{1,1}\tilde{\mathbf{u}}_1^n = \sum_{l=0}^L M_{2,l}^{n-1} P_{\mathcal{T}_l} \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2}\tilde{\mathbf{u}}_2^n = \sum_{l=0}^L M_{1,l}^n P_{\mathcal{T}_l} \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad M_{j,l}^n = \frac{1}{|\mathcal{T}_l|} \int_{\mathcal{T}_l} (\mathcal{C}_{\bar{j},j}\tilde{\mathbf{u}}_j^n(t')) dt' \quad (\text{A.1})$$

On peut aussi donner  $M_{j,l}^n$  par  $M_{j,l}^n = \mathcal{C}_{\bar{j},j}\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_{j,l}^n(0)/|\mathcal{T}_l|$  où  $\tilde{\mathbf{u}}_{j,l} = \tilde{\mathbf{u}}_j P_{\mathcal{T}_l}$  avec  $P_{\mathcal{T}_l}$  la fonction porte sur  $\mathcal{T}_l$ . Dans le domaine fréquentiel, le membre de droite des conditions à l'interface s'exprime donc comme somme des termes :

$$\left( \widehat{M}_{j,l}^n * \widehat{P}_{\mathcal{T}_l} \right) (\omega) = \left( \frac{1}{|\mathcal{T}_l|} (\mathcal{C}_{\bar{j},j}\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_{j,l}^n(0)\delta_0) * \widehat{P}_{\mathcal{T}_l} \right) (\omega) = \mathcal{C}_{\bar{j},j}\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_{j,l}^n(0) \exp\left(-i(2l+1)\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

**Démonstration de (3.42)** Nous écrivons l'état du système vérifié par les erreurs  $\tilde{\mathbf{e}}_{j,l}^n$  de l'algorithme modifié sur une fenêtre  $\mathcal{T}_l$  à chaque itération et dans le domaine de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^n(z, \omega) + \mathcal{L}_j\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^n(z, \omega) = [\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^n(z, \cdot) \exp(-i\omega\cdot)]_{t_l}^{t_l+1} \quad \text{sur } \Omega_j \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_j\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^n(z, \omega) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_j^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_1^n(z, \omega) = \mathcal{C}_{1,2}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_2^{n-1}(z, 0) \exp\left(-i\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \text{sinc}\left(\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_2^n(z, \omega) = \mathcal{C}_{2,1}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_1^n(z, 0) \exp\left(-i\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \text{sinc}\left(\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

On observe que le système vérifié par les erreurs  $\tilde{\mathbf{e}}_{j,l}^n$  pour la fréquence nulle est le même que celui vérifié par  $\mathbf{e}_{j,l}^n$  (sans application de moyenne mais fenêtré sur  $\mathcal{T}_l$ ) pour la fréquence nulle. Donc, à chaque itération,  $\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(\omega = 0)$  et  $\widehat{\mathbf{e}}_{j,l}^n(\omega = 0)$  sont l'unique solution du

même problème. Le facteur de convergence pour la fréquence nulle est donc le même pour  $\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(\omega = 0)$  et  $\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\mathbf{e}}_{j,l}^n(\omega = 0)$ . La fréquence nulle nous permet de revenir dans l'espace réel :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(\omega = 0) &= \mathcal{C}_{j,j}\boldsymbol{\rho}(0)\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^{n-1}(\omega = 0) \\ \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,j}\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n|_{\Gamma}(t') dt' &= \boldsymbol{\rho}(0) \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^{n-1}|_{\Gamma}(t') \\ \mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n|_{\Gamma}(t) &= \boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(0)\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^{n-1}|_{\Gamma}(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}_l \\ \|\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n|_{\Gamma}\|_2 &= \boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(0) \|\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^{n-1}|_{\Gamma}\|_2\end{aligned}$$

Comme  $\|\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^n(z, \omega)\|_2^2 = \sum_{l=0}^L \|\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(z, \omega)\|_2^2$ , on en déduit que

$$\|\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^n|_{\Gamma}(\omega)\|_2^2 \leq \max_{1 \leq l \leq L} \boldsymbol{\rho}_{j,\mathcal{T}_l}^n(0) \|\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_j^{n-1}|_{\Gamma}(\omega)\|_2^2 \quad (\text{A.4})$$

ce qui démontre (3.42).

**Démonstration de (3.44)** De même l'erreur  $\zeta_{j,l}^n$  vérifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_j\widehat{\zeta}_j^n(z, \omega) &= [\zeta_j^n(z, \cdot) \exp(-i\omega \cdot)]_{t_l}^{t_{l+1}} - i\omega\widehat{\zeta}_j^n(z, \omega) && \text{sur } \Omega_j \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_j\widehat{\zeta}_j^n(z, \omega) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_j^{ext} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{j,j}\widehat{\zeta}_j^n|_{\Gamma}(\omega) &= \mathcal{C}_{1,2}\widehat{\zeta}_2^{n-1}|_{\Gamma}(0) \exp\left(-i\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \text{sinc}\left(\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) + \xi(\mathcal{C}_{1,2}\mathbf{u}_{2,l})(\omega) && \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \mathcal{C}_{2,2}\widehat{\zeta}_2^n|_{\Gamma}(\omega) &= \mathcal{C}_{2,1}\widehat{\zeta}_1^n|_{\Gamma}(0) \exp\left(-i\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \text{sinc}\left(\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) + \xi(\mathcal{C}_{2,1}\mathbf{u}_{1,l})(\omega) && \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où  $\xi(\mathcal{C}_{j,\bar{j}}\widehat{\mathbf{u}}_{\bar{j},l})(\omega) = \mathcal{C}_{j,\bar{j}}\widehat{\mathbf{u}}_{\bar{j},l}(0) \exp\left(-i\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) \text{sinc}\left(\omega\frac{|\mathcal{T}_l|}{2}\right) - \mathcal{C}_{j,\bar{j}}\widehat{\mathbf{u}}_{\bar{j},l}(\omega)$ , et en particulier  $\xi(\mathcal{C}_{j,\bar{j}}\widehat{\mathbf{u}}_{\bar{j},l})(0) = 0$ . Sur le même principe, on observe que la fréquence nulle est conservée pour chaque itération. A chaque itération,  $\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(\omega = 0)$  et  $\widehat{\zeta}_{j,l}^n(\omega = 0)$  sont solutions de la même équation différentielle. On peut donc affirmer que pour chaque itération :

$$\mathcal{C}_{i,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n|_{\Gamma}(0) = \mathcal{C}_{i,j}\widehat{\zeta}_{j,l}^n|_{\Gamma}(0) \quad \widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(z, 0) = \widehat{\zeta}_{j,l}^n(z, 0) \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad \forall l \in \{0, 1, \dots, L\}$$

Ainsi, si l'on a convergence de l'algorithme modifié (en particulier on a  $\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\tilde{\mathbf{e}}}_{j,l}^n(z, 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ) alors  $\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\zeta}_{j,l}^{\infty}(z, 0) = 0$ . On en déduit (3.44a) en remarquant que :

$$\mathcal{C}_{j,j}\widehat{\zeta}_{j,l}^{\infty}|_{\Gamma}(0) = \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,j}\widehat{\zeta}_{j,l}^{\infty}|_{\Gamma} = \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,j}\mathbf{u}_{j,l}^{\infty}|_{\Gamma}(t') - \mathcal{C}_{j,j}\mathbf{u}_j^n|_{\Gamma}(t') dt' = 0$$

ce qui implique  $|\mathcal{T}_l|\mathcal{C}_{j,j}\mathbf{u}_{j,l}^{\infty}|_{\Gamma}(t) = \int_{\mathcal{T}_l} \mathcal{C}_{j,j}\mathbf{u}_j^n|_{\Gamma}(t') dt'$  pour  $t \in \mathcal{T}_l$ .

De même  $\widehat{\zeta}_{j,l}^{\infty}(z, 0) = 0$  permet d'obtenir (3.44b).

## Annexe B

# Rappel des preuves d'existence et d'unicité

Dans cette annexe, nous revenons sur la preuve de l'existence d'une solution  $\mathbf{u}$  au problème homogène

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(z, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z, t) - \partial_z(\nu(z)\partial_z \mathbf{u}(z, t)) = \mathbf{F}(z, t) & \text{sur } \Omega \times ]0, T[ \\ \mathbf{u}(z, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u}(z, 0) = \mathbf{u}_0(z) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec  $\mathbf{u}$  une solution au sens faible dans  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ . Remarquons que ici  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ , donc la notation  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega))$  signifie en réalité  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega)) \times \mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega))$ . Ceci dit, par souci de lisibilité nous gardons la notation simple. Cette preuve est donnée dans (DAUTRAY et LIONS, 1985 chapitre XVII), et l'on se contente ici d'en redonner très rapidement les étapes.

**Formulation variationnelle** La solution faible  $\mathbf{u}$  est solution de la formulation variationnelle du problème (B.1) :

$$\begin{cases} \partial_t \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega) & \text{sur } ]0, T[ \\ \mathbf{u}(z, 0) = \mathbf{u}_0(z) & & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où

$$a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \nu(z)\partial_z \mathbf{u}(t), \partial_z \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La forme bilinéaire  $a$  est coersive. De plus, il existe un  $M$  indépendant de  $t$  tel que  $|a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})|_{\mathcal{L}^2} \leq M \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{H}_0^1} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}_0^1}$

**Méthode de Galerkin** Soit une suite  $(V_m)_m$  de sous-espaces de  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , avec  $\dim V_m = d_m$ ,  $V_m \subset V_{m+1}$ , et  $V_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . De plus,  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  donc il existe une suite d'éléments de  $(\mathbf{u}_{0,m})_m \in V_m$  tel que  $\mathbf{u}_{0,m} \rightarrow \mathbf{u}_0$  dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

Dans l'espace  $V_m$ , un élément  $\mathbf{u}_m$  s'écrit :

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^{d_m} g_{m,k} W_{m,k} \quad \text{avec } (W_{m,k})_k \text{ une base de } V_m \quad (\text{B.4})$$

On introduit le nouveau problème dans  $V_m$  :

$$\begin{cases} \langle \partial_t \mathbf{u}_m(t), W_{m,j} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + a(\mathbf{u}_m(t), W_{m,j}) = \langle \mathbf{F}(t), W_{m,j} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} & \forall 1 \leq j \leq d_m \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0,m} \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{B.5})$$

et  $\partial_t \mathbf{u}_m \in \mathcal{L}^2([0, T], V_m)$ . Ce système est équivalent au système sur  $\mathbb{R}^{d_m} \times \mathbb{R}^{d_m}$  :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_m \frac{d\mathbf{g}_m}{dt} + \mathcal{A}_m(t) \mathbf{g}_m = \gamma_m \\ \mathbf{g}_m(0) = \mathbf{g}_{0,m} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

avec  $\mathcal{B}_m$  et  $\mathcal{A}_m$  des matrices de taille  $(2d_m, 2d_m)$  dont les éléments sont définis par  $\beta_{i,j} = (W_{i,m}, W_{j,m})$  et  $\alpha_{i,j}(t) = a(t, W_{i,m}, W_{j,m})$ . Nous avons  $\det \mathcal{B}_m \neq 0$  donc le système (B.6) possède une unique solution. Ainsi il existe une unique solution  $\mathbf{u}_m$  de (B.5) telle que  $\mathbf{u}_m \in \mathcal{C}([0, T], V_m)$  et  $\partial_t \mathbf{u}_m \in \mathcal{L}^2([0, T], V_m)$ .

**Convergence des sous-suites** L'estimation d'énergie faite au §4.1.1 nous donne en plus une borne à la norme de  $\mathbf{u}_m$  dans  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega))$  et  $\mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ . Alors il existe une sous-suite de  $(\mathbf{u}_m)_m$  notée  $(\mathbf{u}_{m'})_{m'}$  telle que :

1.  $\mathbf{u}_{m'}$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ .
2.  $\mathbf{u}_{m'}$  converge faiblement \* vers  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega))$ .

Ce qui mène à l'existence de  $\mathbf{u}$  solution de :

$$\begin{cases} - \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \delta_t \varphi(t) dt + \int_0^T a(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \varphi(t) dt = \int_0^T (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}) \varphi(t) dt \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T]) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

**Solution du problème variationnel et convergence forte** De (B.7), on déduit que  $\mathbf{u}$  est solution du problème variationnel (B.2) avec  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$  et  $\partial_t \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}^{-1}(\Omega))$ , cet espace est noté  $W([0, T], \mathcal{H}_0^1, \mathcal{H}^{-1})$ . De plus, par un résultat de topologie, il existe une injection continue de  $W([0, T], \mathcal{H}_0^1, \mathcal{H}^{-1})$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega))$  (voir aussi LIONS et MAGENES, 1968a). On a donc  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega))$ . L'estimation d'énergie nous garantit que la solution de (B.5) est unique. En appliquant (B.5) sur  $(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})$  et en intégrant sur  $[0, T]$ , on a aussi une convergence forte de  $\mathbf{u}_m$  vers  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$  et dans  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ .

Ceci montre l'existence d'une solution  $\mathbf{u}$  de (B.1) dans  $\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathcal{L}^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}^2([0, T], \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ .



## Annexe C

# Rappel sur le théorème du point fixe de Banach

Dans cette annexe, nous rappelons rapidement quelques résultats d'analyse autour du théorème du point fixe de Banach.

**Le théorème du point fixe de Banach** Nous rappelons *le théorème des points fixes de Banach* (appliqué à une application de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) :

Soit  $J \subset \mathbb{R}$ . Si  $\Phi : J \rightarrow J$  est  $q$ -contractante, alors  $\Phi$  possède un unique point fixe  $\tilde{u}^*$  dans  $J$  et toute suite d'éléments de  $J$  vérifiant  $u_{n+1}^* = \Phi(u_n^*)$  converge vers  $\tilde{u}^*$ . On a aussi

$$|u_k^* - \tilde{u}^*| \leq \frac{q^n}{1-q} |u_0^* - u_1^*| \quad (\text{C.1})$$

On peut aussi montrer que

$$|u_k^* - \tilde{u}^*| \leq q^n |u_{\max}^* - u_{\min}^*| \quad \text{avec } J = [u_{\min}^*, u_{\max}^*] \quad (\text{C.2})$$

On rappelle que  $\Phi$   $q$ -contractante sur  $J$  s'il existe  $q < 1$  tel que

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in J \quad (\text{C.3})$$

Pour montrer qu'une fonction est  $q$ -contractante, on peut utiliser la propriété issue du théorème des accroissements finis :

Si  $\Phi(x)$  continûment dérivable alors

$$|\partial_x \Phi(x)| < q \quad \forall x \in J \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ est } q\text{-lipschitzienne sur } J \quad (\text{C.4})$$

Dans le cadre de fonctions de  $\mathbb{R}^K$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut traduire cette propriété par :

$$\sum_{k=1}^K |\partial_{x_k} \Phi(x)| < q \quad \forall x \in J \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ est } q\text{-lipschitzienne sur } J \quad (\text{C.5})$$



# Bibliographie

- AHMED, E., C. JAPHET et M. KERN (2018). “Global-in-Time Domain Decomposition for a Nonlinear Diffusion Problem”. In : *25th International Domain Decomposition Conference, DD25*. Proceedings of the XXV International Domain Decomposition Conference. St John’s, Canada : Springer. URL : <https://hal.inria.fr/hal-02263280>.
- ALLAIRE, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Mathématiques appliquées. Editions de l’Ecole polytechnique. ISBN : 9782730212557. URL : <https://books.google.fr/books?id=vReEuE4margC>.
- AUDUSSE, E., P. DREYFUSS et B. MERLET (2009). “Optimized Schwarz waveform relaxation for Primitive Equations of the ocean”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 32. DOI : 10.1137/090770059.
- BELJAARS, A., E. DUTRA, G. BALSAMO et F. LEMARIÉ (2017). “On the numerical stability of surface–atmosphere coupling in weather and climate models”. In : *Geosci. Model Dev.* 10.2, p. 977-989. DOI : 10.5194/gmd-10-977-2017. URL : <https://www.geosci-model-dev.net/10/977/2017/>.
- BENKLEY, C. et L. L. SCHULMAN (1979). “Estimating Hourly Mixing Depths from Historical Meteorological Data”. In : *Journal of Applied Meteorology* 18.6, p. 772-780. ISSN : 0021-8952. DOI : 10.1175/1520-0450(1979)018<0772:EHMDFH>2.0.CO;2. eprint : [https://journals.ametsoc.org/jamc/article-pdf/18/6/772/4970804/1520-0450\(1979\)018\\_0772\\_ehmdfh\\_2\\_0\\_co\\_2.pdf](https://journals.ametsoc.org/jamc/article-pdf/18/6/772/4970804/1520-0450(1979)018_0772_ehmdfh_2_0_co_2.pdf). URL : [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1979\)018%3C0772:EHMDFH%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1979)018%3C0772:EHMDFH%3E2.0.CO;2).
- BENNEQUIN, D., M. J. GANDER et L. HALPERN (2004). *Optimized Schwarz Waveform Relaxation Methods for Convection Reaction Diffusion Problems*. Rapp. tech. 2004-24, LAGA, Université Paris 13.
- BENNEQUIN, D., M. GANDER, L. GOUARIN et L. HALPERN (2016). “Optimized Schwarz waveform relaxation for advection reaction diffusion equations in two dimensions”. In : *Numerische Mathematik* 134, p. 513-567. DOI : 10.1007/s00211-015-0784-8.
- BENNEQUIN, D., M. J. GANDER et L. HALPERN (2009). “A homographic best approximation problem with application to optimized Schwarz waveform relaxation”. In : *Math. Comput.* 78.265, p. 185-223. DOI : 10.1090/S0025-5718-08-02145-5. URL : <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-08-02145-5>.
- BERTHE, P.-M. (2013). “Méthode de décomposition de domaine de type relaxation d’ondes optimisée pour l’équation de convection-diffusion instationnaire discrétisée par volumes finis”. Thèse de doct. Université Paris 13.

- BLAYO, E., L. HALPERN et C. JAPHET (2007). “Optimized Schwarz Waveform Relaxation Algorithms with Nonconforming Time Discretization for Coupling Convection-diffusion Problems with Discontinuous Coefficients”. In : 55. DOI : 10.1007/978-3-540-34469-8\_31.
- BLAYO, E., A. ROUSSEAU et M. TAYACHI (2017). “Boundary conditions and Schwarz waveform relaxation method for linear viscous Shallow Water equations in hydrodynamics”. In : *SMAI Journal of Computational Mathematics* 3, p. 117-137. DOI : 10.5802/smai-jcm.22.
- BOUSSINESQ, J. (1897). *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section ptie. 2. Gauthier-Villars et fils. URL : [https://books.google.fr/books?id=Xuk%5C\\_AQAAMAAJ](https://books.google.fr/books?id=Xuk%5C_AQAAMAAJ).
- BOUSSINESQ, J. V. (1903). *Théorie Analytique de la Chaleur*. Vol. II. Gauthier-Villars, Paris.
- CAETANO, F., M. GANDER, L. HALPERN et J. SZEFTTEL (2011). “Schwarz Waveform Relaxation Algorithms with Nonlinear Transmission Conditions for Reaction-Diffusion Equations”. In : t. 78, p. 245-252. DOI : 10.1007/978-3-642-11304-8\_27.
- CANCÈS, C. (2008). “Nonlinear Parabolic Equations with Spatial Discontinuities”. In : *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 15, p. 427-456. DOI : 10.1007/s00030-008-6030-7.
- CONNORS, J. et B. GANIS (2011). “Stability of algorithms for a two domain natural convection problem and observed model uncertainty”. In : *Computat. Geosci.* 15.3, p. 509-527. ISSN : 1420-0597. DOI : 10.1007/s10596-010-9219-x.
- DAUTRAY, R. et J.-L. LIONS (1985). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology vol 5. Springer.
- DUBOIS, O. (2007). “Optimized Schwarz Methods for the Advection-Diffusion Equation and for Problems with Discontinuous Coefficients”. Thèse de doct. McGill University, Montréal.
- DUBOIS, O., M. GANGER, S. LOISEL, A. ST-CYR et B. DANIEL (2012). “The optimized Schwarz method with a coarse grid correction”. In : *SIAM J. Sci. Comput.* 34, A421-A458.
- EKMAN, V. (1905). “On the influence of the Earth's rotation in ocean-currents”. In : *Arch. Math. Astron. Phys.* 2, p. 1-52.
- ENGQUIST, B. et A. MAJDA (1977). “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves”. English (US). In : *Mathematics of Computation* 31.139, p. 629-651. ISSN : 0025-5718. DOI : 10.1090/S0025-5718-1977-0436612-4.
- GANDER, M. (2011). “On the influence of geometry on optimized Schwarz methods”. In : *SeMA Journal* 53. DOI : 10.1007/BF03322582.
- GANDER, M. et Y. XU (2016). “Optimized Schwarz Methods for Model Problems with Continuously Variable Coefficients”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 38, A2964-A2986. DOI : 10.1137/15M1053943.

- GANDER, M. J. (2008). “Schwarz methods over the course of time”. In : *Electron. Trans. Numer. Anal.* 31, p. 228-255.
- (2006). “Optimized Schwarz methods”. In : *SIAM J. Numer. Anal.* 44, p. 699-731.
- GANDER, M., L. HALPERN et F. MAGOULÈS (2007a). “An optimized Schwarz method with two-sided Robin transmission conditions for the Helmholtz equation”. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 55, p. 163-175. DOI : 10.1002/flid.1433.
- GANDER, M. et L. HALPERN (2012). *Méthodes de décomposition de domaines*. Encyclopédie des Techniques de l’Ingénieur.
- GANDER, M., F. MAGOULÈS et F. NATAF (2002). “Optimized Schwarz Methods without Overlap for the Helmholtz Equation”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 24, p. 38-60. DOI : 10.1137/S1064827501387012.
- GANDER, M. et T. VANZAN (2019). “Heterogeneous Optimized Schwarz Methods for Second Order Elliptic PDEs”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 41, A2329-A2354. DOI : 10.1137/18M122114X.
- GANDER, M. J. et L. HALPERN (2003). “Méthodes de relaxation d’ondes (SWR) pour l’équation de la chaleur en dimension 1 Optimized Schwarz Waveform Relaxation (SWR) for the one-dimensional heat equation”. In : *Compte rendus Mathématiques* 336.
- GANDER, M. J., L. HALPERN et M. KERN (2007b). “A Schwarz Waveform Relaxation Method for Advection—Diffusion—Reaction Problems with Discontinuous Coefficients and Non-matching Grids”. In : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*. Sous la dir. d’O. B. WIDLUND et D. E. KEYES. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 283-290. ISBN : 978-3-540-34469-8.
- GANDER, M. J., F. KWOK et B. C. MANDAL (2016). “Dirichlet-Neumann and Neumann-Neumann Waveform Relaxation for the Wave Equation”. In : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXII*. Sous la dir. de T. DICKOPF, M. J. GANDER, L. HALPERN, R. KRAUSE et L. F. PAVARINO. Cham : Springer International Publishing, p. 501-509. ISBN : 978-3-319-18827-0.
- GANDER, M. J. et C. ROHDE (2005). “Nonlinear Advection Problems and Overlapping Schwarz Waveform Relaxation”. In : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*. Sous la dir. de T. J. BARTH et al. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 251-258. ISBN : 978-3-540-26825-3.
- GASQUET, C. et P. WITOMSKI (2000). *Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Sciences sup. Dunod.
- GERARDO-GIORDA, L. et F. NATAF (2005). “Optimized Schwarz methods for unsymmetric layered problems with strongly discontinuous and anisotropic coefficients”. In : *J. Numer. Mat.* 13.4, p. 265-294.
- GROSS, M. et al. (2018). “Physics–Dynamics Coupling in Weather, Climate, and Earth System Models : Challenges and Recent Progress”. In : *Mon. Wea. Rev.* 146.11, p. 3505-3544. ISSN : 0027-0644. DOI : 10.1175/MWR-D-17-0345.1. eprint : [https://journals.ametsoc.org/mwr/article-pdf/146/11/3505/4369817/mwr-d-17-0345\\_1.pdf](https://journals.ametsoc.org/mwr/article-pdf/146/11/3505/4369817/mwr-d-17-0345_1.pdf). URL : <https://doi.org/10.1175/MWR-D-17-0345.1>.

- HALPERN, L., C. JAPHET et P. OMNES (juin 2010). “Nonconforming int time domain decomposition method for porous media applications”. In :
- HALPERN, L. et J. SZEFTTEL (2007). “Nonlinear Nonoverlapping Schwarz Waveform Relaxation for Semilinear Wave Propagation”. 20 pages. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00128219>.
- JAPHET, C., F. NATAF et F. ROGIER (2001). “The optimized order 2 method : Application to convection–diffusion problems”. In : *Future Generation Computer Systems* 18, p. 17-30. DOI : 10.1016/S0167-739X(00)00072-8.
- JAPHET, C. (1998). “Domain decomposition methods and artificial boundary conditions in fluid dynamics : Optimized Order 2 method.” Theses. Université Paris-Nord - Paris XIII. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00558701>.
- KEYES, D. E. et al. (2013). “Multiphysics simulations : Challenges and opportunities”. In : *International Journal of High Performance Computing Applications* 27.1, p. 4-83. DOI : 10.1177/1094342012468181. eprint : <http://hpc.sagepub.com/content/27/1/4.full.pdf+html>. URL : <http://hpc.sagepub.com/content/27/1/4.abstract>.
- LARGE, W. B. (2006). “Surface Fluxes for Practitioners of Global Ocean Data Assimilation”. In : *Ocean Weather Forecasting. An Integrated View of Oceanography*. Sous la dir. d’E. P. CHASSIGNET et J. VERRON. Springer. Chap. 9, p. 229-270.
- LARGE, W. G., J. C. MCWILLIAMS et S. C. DONEY (1994). “Oceanic vertical mixing : A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization”. In : *Rev. Geophys.* 32.4, p. 363-403.
- LARGE, W. G. et S. POND (1981). “Open Ocean Momentum Flux Measurements in Moderate to Strong Winds”. In : *Journal of Physical Oceanography* 11.3, p. 324-336. ISSN : 0022-3670. DOI : 10.1175/1520-0485(1981)011<0324:00MFMI>2.0.CO;2.
- LEMARIÉ, F., L. DEBREU et E. BLAYO (2013a). “Toward an Optimized Global-in-Time Schwarz Algorithm for Diffusion Equations with Discontinuous and Spatially Variable Coefficients, Part 1 : The Constant Coefficients Case”. In : 40, p. 148-169.
- (2013b). “Toward an Optimized Global-in-Time Schwarz Algorithm for Diffusion Equations with Discontinuous and Spatially Variable Coefficients, Part 2 : the Variable Coefficients Case”. In : 40, p. 170-186.
- LEMARIÉ, F., L. DEBREU, G. MADEC, J. DEMANGE, J. MOLINES et M. HONNORAT (2015a). “Stability constraints for oceanic numerical models : implications for the formulation of time and space discretizations”. In : *Ocean Modell.* 92, p. 124-148. ISSN : 1463-5003.
- LEMARIÉ, F., P. MARCHESIELLO, L. DEBREU et E. BLAYO (2014). *Sensitivity of Ocean-Atmosphere Coupled Models to the Coupling Method : Example of Tropical Cyclone Erica*. Research Report RR-8651. Inria Grenoble ; Inria, p. 32. URL : <https://hal.inria.fr/hal-00872496>.
- LEMARIÉ, F., E. BLAYO et L. DEBREU (2015b). “Analysis of Ocean-atmosphere Coupling Algorithms : Consistency and Stability”. In : *Procedia Computer Science* 51. Supplement C. International Conference On Computational Science, ICCS 2015, p. 2066-2075. ISSN : 1877-0509. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.05.473>.

- LI, J. et E. S. TITI (2018). “Recent Advances Concerning Certain Class of Geophysical Flows”. In : *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*. Sous la dir. d’Y. GIGA et A. NOVOTNY. Springer, p. 933-971.
- LIONS, J.-L., R. TEMAM et S. WANG (1992). “On the equations of large-scale ocean”. In : *Nonlinearity* 5, p. 1007-1053. DOI : 10.1088/0951-7715/5/5/002.
- LIONS, J. et E. MAGENES (1968a). *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. T. 1. Dunod.
- (1968b). *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. T. 2. Dunod.
- LIONS, J., R. TEMAM et S. WANG (1995). “Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models (CAO III)”. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 74 (2).
- LIONS, P.-L. (1990). “On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains”. In : *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989)*. Philadelphia, PA : SIAM, p. 202-223.
- MAGOULÈS, F., P. IVÁNYI et B. TOPPING (2004). “Convergence analysis of Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation”. In : *Computers and Structures* 82.22, p. 1835-1847.
- MALARDEL, S. (2005). *Fondamentaux de météorologie : à l’école du temps*. Cépaduès. ISBN : 9782854286311. URL : <https://books.google.fr/books?id=4huTAAACAAJ>.
- MARTI, O., S. NGUYEN, P. BRACONNOT, S. VALCKE, F. LEMARIÉ et E. BLAYO (2020). “A Schwarz iterative method to evaluate ocean- atmosphere coupling schemes. Implementation and diagnostics in IPSL-CM6-SW-VLR”. In : *Geosci. model dev. disc* 2020, p. 1-19. DOI : 10.5194/gmd-2020-307. URL : <https://gmd.copernicus.org/preprints/gmd-2020-307/>.
- MARTIN, V. (2003). “Schwarz Waveform Relaxation Methods for oceanographic equations”. Thèse de doct. Université Paris-Nord - Paris XIII. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01717274>.
- MCWILLIAMS, J. C. et E. HUCKLE (2006). “Ekman Layer Rectification”. In : *Journal of Physical Oceanography* 36.8, p. 1646-1659. ISSN : 0022-3670. DOI : 10.1175/JP02912.1. eprint : [https://journals.ametsoc.org/jpo/article-pdf/36/8/1646/4484149/jpo2912\\_1.pdf](https://journals.ametsoc.org/jpo/article-pdf/36/8/1646/4484149/jpo2912_1.pdf). URL : <https://doi.org/10.1175/JP02912.1>.
- MOHAMMADI, B., O. PIRONNEAU et F. VALENTIN (1998). “Rough boundaries and wall laws”. In : *International journal for numerical methods in fluids* 27, p. 169-177.
- MONIN, A. et A. OBUKHOV (1954). “Basic Laws of Turbulent Mixing in the Surface Layer of the Atmosphere”. In : *Contrib. Geophys. Inst. Acad. Sci. USSR* 24, p. 163-187.
- NATAF, F. (2007). “Recent Developments on Optimized Schwarz Methods”. In : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*. Sous la dir. d’O. B. WIDLUND et D. E. KEYES. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 115-125. ISBN : 978-3-540-34469-8.
- NATAF, F., F. ROGIER et E. DE STURLER (1994). *Optimal Interface Conditions for Domain Decomposition Methods*. Technical Report 301. CMAP Ecole Polytechnique. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02194208>.

- O'BRIEN, J. J. (1970). "A Note on the Vertical Structure of the Eddy Exchange Coefficient in the Planetary Boundary Layer". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 27.8, p. 1213-1215. ISSN : 0022-4928. DOI : 10.1175/1520-0469(1970)027<1213:ANOTVS>2.0.CO;2.
- PELLETIER, C., F. LEMARIÉ, E. BLAYO, M.-N. BOUIN et J.-L. REDELSPERGER (2020). "Two-sided turbulent surface layer parameterizations for computing air-sea fluxes". In : *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* to appear, p. 1-42.
- PELLETIER, C. (2018). "Etude mathématique du problème de couplage océan-atmosphère incluant les échelles turbulentes". Theses. Université Grenoble Alpes. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01717274>.
- REDELSPERGER, J.-L. et G. SOMMERIA (1981). "Méthode de représentation de la turbulence d'échelle inférieure à la maille pour un modèle tri-dimensionnel de convection nuageuse". In : *Boundary-Layer Meteorol* 21, p. 509-530. DOI : 10.1007/BF02033598.
- REYNOLDS, O. (1895). "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion". In : *PT*. URL : [http://archipelago.uma.pt/pdf\\_library/Reynolds\\_1895\\_PT.pdf](http://archipelago.uma.pt/pdf_library/Reynolds_1895_PT.pdf).
- SCHWARZ, H. (1869). "Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel." ger. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 70, p. 121-136. URL : <http://eudml.org/doc/148077>.
- SMITH, S. (1988). "Coefficients for Sea Surface Wind Stress, Heat Flux, and Wind Profiles as a Function of Wind Speed and Temperature." In : *Journal Of Geophysical Research*.
- THERY, S., C. PELLETIER, F. LEMARIÉ et E. BLAYO (2020). "Analysis of Schwarz waveform relaxation for the coupled Ekman boundary layer problem with variable coefficients". In : submitted.
- VALCKE, S. (2020). "Coupling algorithms and specific coupling features in CGCMs". In : *Ocean-Atmosphere Modeling*. Sous la dir. de C. MECHOSO, S. VALCKE et A. SOON-IL. Singapore : World Scientific Publishing Co., p. 1-20.
- ZHANG, H., Z. LIU, E. CONSTANTINESCU et R. JACOB (2020). "Stability Analysis of Interface Conditions for Ocean-Atmosphere Coupling". In : *SIAM Journal of Scientific Computing*. 84, p. 44. DOI : 10.1007/s10915-020-01293-y.