



**HAL**  
open science

# Méthode d'imagerie par tomographie d'ondes élastiques guidées des contraintes multiaxiales d'une plaque ferromagnétique au moyen d'EMAT

Abdellahi Abderahmane

► **To cite this version:**

Abdellahi Abderahmane. Méthode d'imagerie par tomographie d'ondes élastiques guidées des contraintes multiaxiales d'une plaque ferromagnétique au moyen d'EMAT. Energie électrique. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPAST048 . tel-03261580

**HAL Id: tel-03261580**

**<https://theses.hal.science/tel-03261580>**

Submitted on 15 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode d'imagerie par tomographie d'ondes  
élastiques guidées des contraintes multiaxiales d'une  
plaque ferromagnétique au moyen d'EMAT

*An elastic guided wave tomographic method for multiaxial  
stress imaging in a ferromagnetic plate using EMAT*

**Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay**

École doctorale n°575, electrical, optical, bio : physics and engineering (EOBE)  
Spécialité de doctorat : Génie électrique  
Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CEA, Institut LIST, 91191, Gif-sur-Yvette, France.  
Réfèrent : CentraleSupélec,

Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay,  
le 11/05/2021, par :

**Abdellahi ABDERAHMANE**

**Composition du Jury**

<b>Olivier HUBERT</b> Professeur., ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay	Président
<b>Marc DUQUENNOY</b> Professeur., Université Polytechnique Hauts-de-France	Rapporteur et examinateur
<b>Fabien TREYSSÈDE</b> Chargé de recherche (HDR), Université Gustave Eiffel	Rapporteur et examinateur
<b>Nicolas TRIANTAFYLIDIS</b> Professeur., École Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris	Examineur
<b>Vincent PAGNEUX</b> Directeur de recherche CNRS, Le Mans Université	Examineur
<b>Laurent DANIEL</b> Professeur., CentraleSupélec, Université Paris-Saclay	Directeur
<b>Alain LHÉMERY</b> Directeur de recherche CEA, CEA LIST	Co-Encadrant

---

Titre : Méthode d'imagerie par tomographie d'ondes élastiques guidées des contraintes multiaxiales d'une plaque ferromagnétique au moyen d'EMAT.

Mots clés : Électromagnétisme, Effet acoustoélastique, Effet magnétoélastique, Tomographie, Ondes guidées.

Résumé : la contrainte mécanique peut modifier la forme et les propriétés physiques d'une structure. Elle peut la rendre plus résistante comme elle peut causer sa rupture. L'évaluation de l'état de contrainte est donc important pour contrôler la santé des structures. Cette évaluation se fait en mesurant des grandeurs physiques qui sont affectées par la contrainte, puis en utilisant des lois pour retrouver la contrainte à partir de ces grandeurs. L'objectif du présent travail est de proposer une nouvelle méthode d'imagerie de la contrainte, pour résoudre certaines problématiques pour lesquelles il n'existe pas une solution pratique dans la littérature. Parmi ces problématiques, la caractérisation d'un état de contrainte multiaxial et inhomogène dans les plaques métalliques. L'approche suivie lors du développement de cette méthode se base sur la mesure des effets

magnétoélastique et acoustoélastique. Pour ce faire les capteurs EMAT (Electro-Magnetic-Acoustic-Transducer) sont utilisés. Tout d'abord un modèle acoustoélastique permettant de trouver les variations des vitesses des ondes de Lamb et SH induites par la contrainte, est développé. Puis une version analytique de ce modèle est proposée pour remonter à la contrainte à partir de ces variations. Cette version est utilisée pour développer une nouvelle méthode tomographique pour l'imagerie d'un état de contrainte multiaxial.

La modélisation de la détection d'une onde élastique par un EMAT en milieu ferromagnétique est étudiée, et un modèle est développé. Finalement une méthode qui considère l'EMAT comme un capteur à courants de Foucault, et qui permet de trouver la contrainte locale à partir de la tension induite dans l'EMAT est proposée.

Title : An elastic guided wave tomographic method for multiaxial stress imaging in a ferromagnetic plate using EMAT

Keywords : Electromagnetism, Acoustoelastic effect, Magnetoelastic effect, Tomography, guided waves

Abstract : mechanical stress can affect structures in many ways. It can for example deform their shape, or alter their physical properties. These effects can have positive or negative outcomes such as rendering a structure more resistant or causing it to fail prematurely. It is therefore of great interest to assess the stress state in a given structure. This is done by evaluating the effect of stress on measurable physical quantities, and using certain laws to deduce the stress from these quantities. The aim of the current work is to propose a new stress imaging method that allows the treatment of certain problems, to which there are no practical solutions in the literature. One of these problems is to image a multiaxial inhomogeneous stress state in metallic plates. The approach adopted to develop

the imaging method is based on the measurement of the magneto elastic and acoustoelastic effects.

For this the method uses Electro-Magnetic-Acoustic-Transducers (EMAT), which can measure both effects. First, a model that allows calculating the stress induced velocity changes for Lamb and SH waves is developed. Then, an analytical version of this model is proposed in order to get the stress from the velocity changes. This version is used to develop a new tomographic technique for multiaxial stress imagery.

The mechanism with which an EMAT can detect the arrival of an elastic wave in a ferromagnetic material is developed. Finally a local characterisation method, is proposed. This method considers the EMAT to be an Eddy current sensor, and gives the local stress as a function of the voltage induced in the EMAT.



---

## Remerciement :

I want to start by thanking my professor and supervisor Alain Lhémy who contributed greatly to this work. As a PhD student, I didn't see past the next task I needed to do. This lack of a "global" vision would lead in general to losing sight of the final goal and the road to get to it. To prevent this Alain represented the guide whose instructions helped me navigate my way through this PhD. On top of that he was also present at the end of the road to make what I have written readable first presentable second.

Laurent Daniel gave not only the necessary technical insights to steer this work towards the right direction, but also showed me what does it mean to present an idea in a simple and concise format<sup>1</sup>. I remember when we were talking about how to define a reference state of a material, and I said it must be stress-free (which can only exist in theory: since almost all processes will induce some sort of stress). Laurent then took my reasoning to its logical conclusion and said we need therefore to go to mines to have our stress-free state.

I can say I was fortunate to have been supervised by Alain Lhémy and Laurent Daniel. Not just for the technical aspect, but mostly the human aspect, since it was them who were looking after my present and future. For this and many other things I sincerely thank you both.

I am also greatly indebted to all the people who work or have worked in the DISC. I thank Raphaele Raillon for the constructive chats we had whenever we came across each other in the hallway, and for showing me around the department. I also thank Daniel Lobjois, for being my reference in the field of modern technologies, without you Daniel, I don't know how this work would have come about. I also thank our super Boss Edouard Demaldent who knew when to intervene so things can be done in a finite time.

I also thank the many people with whom I had friendly and constructive chats over the last years (Marie-Odile, Sandrine, Coralie, Ghida, Tom, Valentin, Amond, Georges, Taha, Safae, Romain, Gallien, Coentint, Arnaud, Kombossé, Tinh, Hajer, Yassin, Samar, Florian, Christophe, Alexandre,.... And the list goes on, unlike the space left on this page).

Finally, I cannot forget my awesome officemates, starting with non other then Bastien Clause, who was there when need be, to answer my most urgent questions, and who have contributed greatly in paving the path to EMATs in ferromagnetic materials (Merci beaucoup Bastien). Jordan and Guillaume, you guys were really cool (you still are). Jordan with your vast intellect, I was able to learn more about the French culture/history, both in the recent and remote past. You have also been the most appreciative of my "thought provoking awesome jokes" unlike you know who. Speaking of a kill-joy, Guillaume, if Jordan gave me enough Knowledge to live in France without being seen as an extraterrestrial entity, I have been always reluctant to put that knowledge into practice, and it was you who forced my hand, into doing the right thing. For this I hope you guys the best in your future ☺.

Finally (x2) the reader of this manuscript, this whole work is for you ☺, all of these pages were written so you can enjoy yourself while reading them (I have my doubts though, but you can still try). If you are going to read the whole thing this means you are more or less familiar with the subject, so here is a piece of advice.

50 % (time/effort) should be invested in reading other people work.

20% (time effort) searching for a solution (this percentage should be enough after the first part is done properly).

10% (time/effort) implementing the solution (try not to use other people codes, it may turn out to be counterproductive).

20% (time/effort), interpreting your results and using them to solve the upcoming problems.

40% (time/effort) should go into communicating your work to others.

---

<sup>1</sup> Any reader of this manuscript will correctly conclude that I still haven't understood how to present an idea in a simple and concise format ☺.

---



---

# Sommaire

<b>0.</b>	<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>I.</b>	<b>Qu'est-ce qu'une contrainte mécanique ?</b> .....	<b>2</b>
A.	Définition .....	2
B.	Causes .....	2
C.	Catégories .....	2
<b>II.</b>	<b>Pourquoi caractériser la contrainte ?</b> .....	<b>4</b>
A.	Effet de la contrainte sur l'état mécanique .....	4
B.	Effet de la contrainte sur les propriétés physiques .....	5
C.	Conclusion .....	5
<b>III.</b>	<b>Comment caractériser la contrainte mécanique ?</b> .....	<b>6</b>
A.	Méthodes s'appuyant sur l'effet de la contrainte sur l'état mécanique .....	6
B.	Méthodes s'appuyant sur l'effet de la contrainte sur les propriétés physiques .....	8
C.	Conclusion .....	10
<b>IV.</b>	<b>Pourquoi une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte ?</b> .....	<b>11</b>
<b>V.</b>	<b>Environnement de la thèse et bases de la méthode de caractérisation</b> .....	<b>13</b>
<b>VI.</b>	<b>Une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte</b> .....	<b>15</b>
<b>VII.</b>	<b>Organisation du mémoire</b> .....	<b>19</b>
A.	Le problème acoustoélastique direct (PAED) : .....	19
B.	Le problème acoustoélastique inverse (PAEI) .....	20
C.	Le problème de réception (PR) .....	21
D.	Le problème de caractérisation de contrainte locale (PCL) .....	22
E.	La conclusion .....	22
<b>1.</b>	<b>Théorie d'acoustoélasticité (TAE)</b> .....	<b>24</b>
<b>I.</b>	<b>Étude bibliographique</b> .....	<b>25</b>
A.	Développement et première application .....	25
B.	Estimation de l'effet acoustoélastique .....	26
C.	Acoustoélasticité en ondes guidées .....	30
D.	Conclusion .....	32
<b>II.</b>	<b>Développement de la TAE</b> .....	<b>33</b>
A.	Équation du mouvement .....	33
B.	Linéarisation du problème .....	35
C.	Expression du tenseur de rigidité en fonction de la contrainte .....	39
<b>III.</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>45</b>
<b>2.</b>	<b>Application de la TAE aux ondes guidées</b> .....	<b>47</b>
<b>I.</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>48</b>
<b>II.</b>	<b>La méthode SAFE-AE</b> .....	<b>49</b>
<b>III.</b>	<b>Cas d'une contrainte avec un profil constant dans l'épaisseur</b> .....	<b>54</b>
A.	Déplacements modaux en présence de contrainte .....	54
B.	Courbes de dispersion .....	55
C.	Variation de vitesse induite par l'effet de la contrainte sur l'épaisseur .....	57
D.	Non-linéarité de l'EAE .....	58
E.	Anisotropie acoustoélastique .....	59
F.	Décomposition de l'EAE .....	60
<b>IV.</b>	<b>Cas d'une contrainte avec un profil variable dans l'épaisseur</b> .....	<b>63</b>
A.	Profils de contrainte : une étude comparative .....	64
B.	Non-linéarité de l'EAE en fonction du profil de la contrainte .....	66
C.	Anisotropie de l'EAE en fonction du profil de la contrainte .....	68
D.	Décomposition de l'EAE vis-à-vis de la nature multiaxiale .....	70
E.	Décomposition de l'EAE vis-à-vis du profil variable .....	73



F.	Conclusion .....	81
V.	Validation du modèle acoustoélastique (MAE).....	82
VI.	Conclusion.....	84
VII.	Annexe .....	85
<b>3. Un MAE analytique pour la résolution du PAEI.....</b>		<b>103</b>
I.	Introduction .....	104
A.	Le PAEI résolu par des ondes de Volume/Surface.....	105
B.	Le PAEI résolu par des ondes de Lamb .....	106
C.	Définition de l'erreur .....	108
II.	Problème acoustoélastique inverse .....	110
A.	Contrainte uniaxiale normale .....	110
B.	Contrainte uniaxiale dans le plan.....	114
C.	Contrainte triaxiale .....	126
III.	Conclusion.....	135
IV.	Annexe .....	136
A.	Résolution du problème direct en utilisant la formule : .....	139
<b>4. Méthode tomographique pour l'imagerie de la contrainte.....</b>		<b>143</b>
I.	Introduction .....	144
II.	Problématique du chapitre .....	145
III.	La tomographie .....	146
A.	Approches tomographiques.....	146
B.	Algorithmes de tomographie par rayons droits .....	154
IV.	Inversion tomographique des objets anisotropes.....	161
V.	Simulation .....	164
A.	Cas d'une contrainte uniaxiale hors plan .....	166
B.	Cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan.....	167
C.	Cas d'une contrainte biaxiale dans/hors plan .....	169
D.	Cas d'une contrainte biaxiale dans le plan.....	172
VI.	Conclusion.....	173
VII.	Annexe .....	177
A.	Démonstration de la théorie de tranche de Fourier.....	177
B.	Cas d'une contrainte biaxiale dans le plan.....	177
C.	Cas d'une contrainte triaxiale .....	180
<b>5. Modèle de réception d'ondes élastiques par EMAT .....</b>		<b>183</b>
I.	Quelques rappels d'électromagnétisme .....	184
II.	Introduction .....	189
A.	Réception / détection d'une onde.....	189
B.	Problématique du chapitre .....	190
III.	Problèmes d'induction électromagnétique .....	192
A.	Élément de courant stationnaire et bobine qui se déplace / se déforme .....	192
B.	Élément de courant en mouvement et bobine stationnaire .....	193
C.	Conclusion .....	195
IV.	Problème de réception par la méthode directe .....	196
A.	Cas d'une plaque magnétique non conductrice.....	196
B.	Cas d'une plaque magnétique conductrice (ferromagnétique) .....	207
C.	Bibliographie.....	210
D.	Conclusion .....	211
E.	Hypothèse de petites perturbations.....	212
V.	Modèle de réception par réciprocité .....	214
A.	Problème de réception dans le domaine fréquentiel par la <i>méthode directe</i> .....	214
B.	Méthode utilisant la réciprocité.....	216

<b>VI.</b>	<b>Conclusion :</b> .....	<b>224</b>
<b>6.</b>	<b>Faisabilité de la méthode d'imagerie</b> .....	<b>226</b>
<b>I.</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>228</b>
<b>II.</b>	<b>Faisabilité de la méthode d'imagerie en absence de contrainte locale</b> .....	<b>229</b>
A.	Démarche numérique .....	229
B.	Démarche expérimentale.....	236
<b>III.</b>	<b>Faisabilité de la méthode d'imagerie en présence de contrainte locale</b> .....	<b>239</b>
A.	Conséquences sur la démarche expérimentale .....	239
B.	Conséquences sur la démarche numérique.....	245
C.	Conclusion .....	245
<b>IV.</b>	<b>Une méthode de caractérisation de contrainte locale</b> .....	<b>247</b>
A.	Nouvelle démarche expérimentale .....	254
B.	Nouvelle démarche numérique.....	255
<b>V.</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>257</b>
<b>7.</b>	<b>Conclusion générale</b> .....	<b>258</b>
<b>8.</b>	<b>Perspectives</b> .....	<b>260</b>
C.	Développements théoriques .....	260
D.	Simulation numérique.....	260
E.	Validation expérimentale.....	260
<b>9.</b>	<b>Références</b> .....	<b>261</b>

## O. Introduction générale

### Résumé :

Ce chapitre sert à présenter le sujet de la thèse, et les objectifs à atteindre. Il contient les sept sections suivantes :

Sec.I (Qu'est-ce qu'une contrainte mécanique ?) [p. 2] : dans cette section on donne la définition, de la contrainte et ses causes.

Sec. II (Pourquoi caractériser la contrainte ?)[p. 4] : cette section donne les effets essentiels de la contrainte, et les conséquences qu'ils peuvent avoir sur la structure. L'objectif de cette section est de montrer qu'il est important de caractériser l'état de contrainte présent dans une pièce, d'une part pour mieux modéliser les phénomènes physiques qui y prennent place et d'autre part pour la contrôler.

Sec. III (Comment caractériser la contrainte mécanique ?) [p. 6] : dans cette section on passe en revue les méthodes qu'on trouve dans la littérature, qui traitent la problématique de la caractérisation de la contrainte.

Sec.IV (Pourquoi une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte ?) [p. 11] : après avoir présenté les méthodes qu'on trouve dans la littérature (dans la section précédente), on donne dans cette section une problématique, qui nécessite le développement d'une nouvelle méthode. Cette problématique consiste à trouver d'une manière non-destructive l'état de contrainte multiaxial inhomogène dans le plan et dans l'épaisseur d'une plaque métallique.

Sec.V (Environnement de la thèse et bases de la méthode de caractérisation) [p. 13] : cette section présente l'environnement et les raisons pour lesquels ce sujet de thèse a été proposé. Dans cette section on verra que cet environnement fixe les directives que doit suivre la nouvelle méthode de caractérisation.

Sec.VI (Une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte) [p. 15] : cette section présente les briques (modèles et méthodes) essentielles pour le développement de la méthode, parmi lesquelles certaines ont déjà été développées (avant la thèse).

Sec.VII (Organisation du mémoire) [p. 19] : finalement dans cette section on présente ce que contient le mémoire (*i.e.* le développement des briques restantes).

## I. Qu'est-ce qu'une contrainte mécanique ?

### A. Définition

La contrainte mécanique trouve sa définition en mécanique des milieux continus. Elle décrit les efforts – internes – que subit une partie du milieu, de la part des parties qui l'entourent. Ces efforts décrivent les interactions moléculaires. Le fait que ces interactions à l'échelle microscopique sont de nature électromagnétique (donc à courte portée), implique qu'à l'échelle macroscopique les efforts décrivant ces interactions sont *surfaci*ques. Ces efforts surfaci

### B. Causes

La contrainte mécanique peut résulter de plusieurs effets dont on liste ici quelques-uns :

#### 1. Chargement mécanique :

Le chargement mécanique induit dans le matériau une contrainte mécanique. Celle-ci peut être homogène ou inhomogène, uniaxiale ou multiaxiale, temporaire (qui s'annule si le chargement est éliminé), ou permanente / résiduelle (qui reste après avoir éliminé le chargement).

On donne ici quelques exemples :

- Contrainte induite lors d'un essai de traction / compression.
- Contrainte induite par un procédé de fabrication : laminage, façonnage, emboutissage, ...

#### 2. Chargement thermique :

Le chargement thermique peut induire une contrainte mécanique. Celle-ci est généralement due à un gradient de température dans la pièce. On donne ici quelques exemples

- Trempe : ce traitement thermique crée – lors de sa phase de refroidissement – un gradient de température (de la surface à l'intérieur de la pièce), ce qui induit un état de contrainte.
- Coulage : ce procédé de mise en forme, peut induire une contrainte mécanique.
- Soudage : à cause du refroidissement non-uniforme qui accompagne le soudage, des contraintes mécaniques sont induites dans et autour de la zone soudée.

#### 3. Changement de phase :

Lors d'un traitement thermique, une transformation de phase peut prendre place. Si la nouvelle phase possède un volume différent de celui de la phase avant traitement (*e.g.* transformation austénite → martensite), un état de contrainte mécanique est alors induit.

### C. Catégories

La contrainte mécanique peut être divisée en deux catégories :

#### 1. La contrainte appliquée

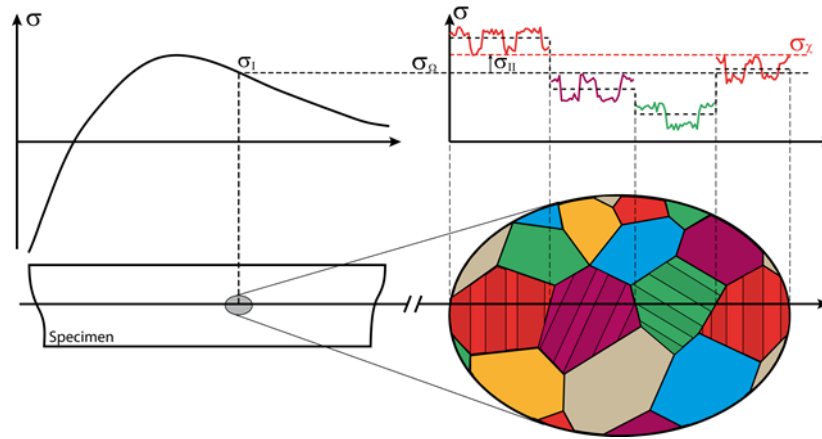
C'est la contrainte qui s'annule si le chargement est éliminé. Elle résulte généralement d'un processus réversible (*e.g.* déformation élastique).

#### 2. La contrainte résiduelle (voir Schajer [2])

C'est la contrainte qui reste présente dans la pièce même après avoir éliminé le chargement qui lui a donné naissance. Cette contrainte est dite auto-équilibrée, ce qui veut dire qu'il existe une longueur caractéristique, sur laquelle la résultante totale de cette contrainte doit être nulle. Cette contrainte se divise en trois types :

- Type I : de structure (elle s'équilibre à l'échelle de la structure).
- Type II : interphase (ou intergranulaire pour les polycristaux). Ce type représente (pour les polycristaux) la déviation par rapport à la moyenne du type I dans une famille de plusieurs grains, d'orientations cristallographiques différentes.
- Type III : ceci représente la déviation par rapport à la moyenne du type II dans un grain.

Voir la figure suivante :



**Fig. 0-1** : les trois types de la contrainte mécanique dans un polycristal. Type I ( $\sigma_I$ ) est la contrainte macroscopique indépendante des hétérogénéité du matériau. Type II ( $\sigma_{II}$ ) représente la déviation par rapport à la moyenne de  $\sigma_I$  dans une famille de plusieurs grains ( $\sigma_{\chi}$ ). Type III ( $\sigma_{III}$ ) (non représentée) est la déviation par rapport à la moyenne de  $\sigma_{II}$  dans un grain. (Figure prise de Daniel *et al* [<sup>1</sup>])

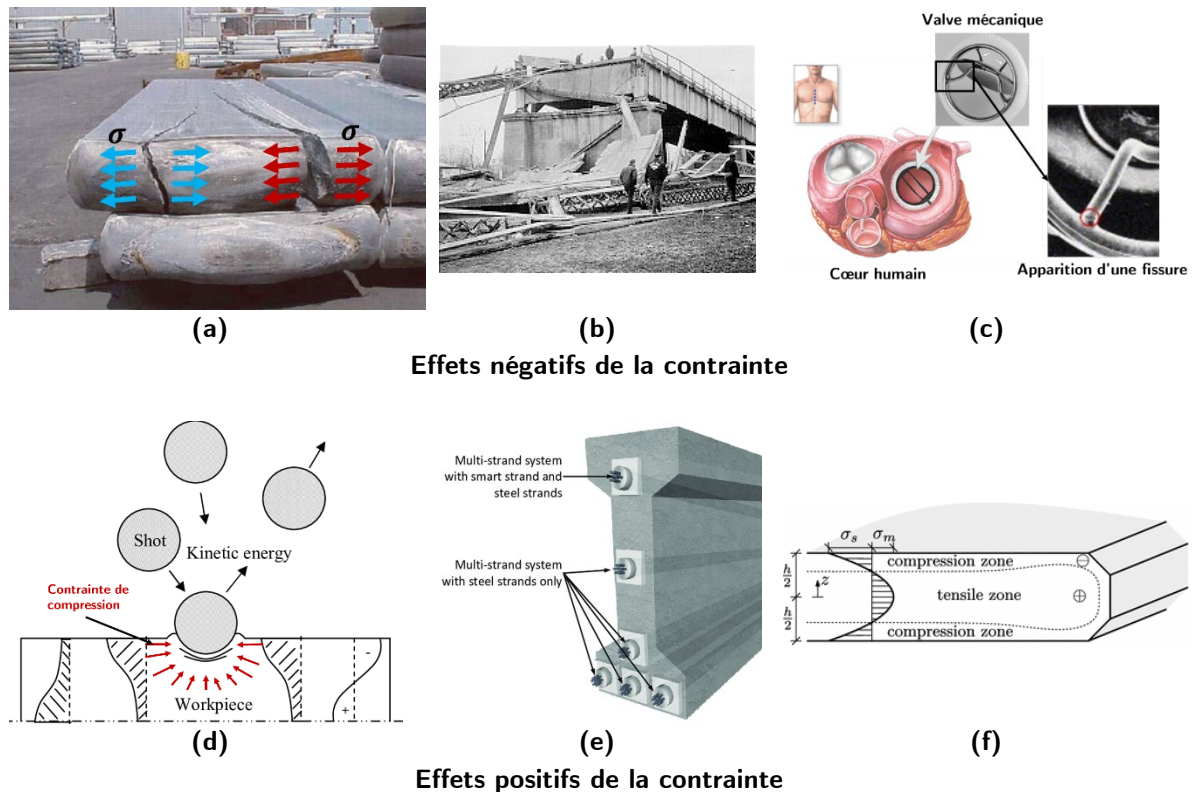
<sup>1</sup> L. Daniel, D.A. Hall, P.J. Withers : A multiscale modelling analysis of the contribution of crystalline elastic anisotropy to intergranular stresses in ferroelectric materials, *Journal of Physics D : Applied Physics*, 47:325303 (2014).

## II. Pourquoi caractériser la contrainte ?

À partir de la définition de la contrainte (force interne par unité de surface), on peut conclure qu'elle peut déformer un matériau, comme elle peut modifier également ses propriétés physiques. On divise ici les effets de la contrainte en deux catégories :

### A. Effet de la contrainte sur l'état mécanique

La contrainte mécanique peut avoir des effets négatifs ou positifs sur une structure. Elle peut par exemple causer la plastification d'une pièce et par conséquent peut causer sa rupture. Elle peut également donner naissance à des fissures ou les aider à se propager (voir Withers [3]). La contrainte peut en contraste être délibérément induite dans une pièce pour la rendre plus résistante à l'apparition et/ou la propagation des fissures (voir par exemple Hatemleh *et al* [4] et Bagheri & Guagliano [5]). On donne ici quelques exemples de l'effet de la contrainte sur l'état mécanique :



**Fig. 0-2 :** (a) rupture dans un bloc en aluminium après laminage. (b) effondrement du pont silver Bridge. (c) apparition d'une fissure de fatigue dans une valve cardiaque mécanique. (d) procédé de grenailage. (e) verre trempé.

- Rupture d'un bloc en aluminium : ce bloc a été d'abord coulé, puis laminé ; la contrainte mécanique (résiduelle) induite par ces procédés a conduit à sa rupture (voir Schajer [2]).
- Effondrement du pont silver bridge : en 1967, ce pont s'est effondré à cause de l'apparition des fissures dans l'arceau, induites par la présence des contraintes mécaniques (Demers & Fisher [6])<sup>1</sup>.
- Apparition de fissure dans une valve cardiaque mécanique : la contrainte résiduelle a causé l'apparition d'une fissure dans le pied gauche des valves cardiaques (dites Björk–Shiley convexo–concave). Ceci a causé la rupture du pied, et par conséquent a mis en danger la vie du patient (voir de Mol *et al* [7]).
- Procédé de grenailage : ce traitement de surface consistant à projeter des microbilles sur la surface de la pièce, permet d'augmenter la résistance en fatigue de celle-ci, du fait de la contrainte de compression induite près de la surface (voir Hatemleh *et al* [4])<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> La photo du pont qui apparaît dans la figure n'est pas prise de la référence [6], mais de Wikipédia, où elle est plus claire.

<sup>2</sup> L'image de la figure (d) est prise de la Réf.[8].

- (e) **Béton précontraint** : la résistance en traction du béton est plus faible que celle en compression. Pour le rendre plus résistant en traction, il est possible de le couler sur des câbles métalliques initialement soumis à un effort de traction (voir Hurst [9])<sup>1</sup>.
- (f) **Verre trempé** : la trempe (thermique ou chimique) de verre le rend plus résistant, en induisant près de la surface une contrainte de compression, qui s'oppose à la propagation des fissures pouvant apparaître (voir Nielsen [11]).

## B. Effet de la contrainte sur les propriétés physiques

La contrainte mécanique peut modifier les propriétés physiques du matériau. Par ailleurs, le fait que la contrainte soit un tenseur (une grandeur directionnelle) peut transformer une propriété initialement isotrope en l'absence de contrainte en une propriété anisotrope. On donne ici quelques exemples :

1. **Effet photoélastique** : la contrainte affecte l'indice de réfraction de la lumière (onde électromagnétique), le rendant anisotrope (voir Kestens [12]).
2. **Effet acoustoélastique** : la contrainte affecte les vitesses des ondes élastiques / acoustiques (voir Pao [13]), via son effet sur les propriétés élastiques du milieu.
3. **Effet thermoélastique** : la contrainte affecte l'énergie thermique (voir Wong [14]).
4. **Effet magnéto-élastique** : la contrainte affecte les propriétés magnétiques (perméabilité magnétique) et magnétostrictives (déformation de magnétostriction) d'un matériau magnétique (voir Bozorth [15]).
5. **Effet piézo-résistif** : la contrainte affecte la résistivité électrique (voir ch2 de la Pallàs [16]).

## C. Conclusion

Dans cette section, nous avons vu très brièvement les effets que peut avoir la contrainte sur un matériau. Ces effets peuvent être négatifs et conduire à une rupture prématurée de la structure, ou positifs, ce qui permet de rendre la structure plus résistante. On a vu également que la contrainte affecte les propriétés physiques des matériaux.

Ces observations ont deux conséquences :

1. Dans le cas où la contrainte est inconnue, les propriétés physiques sont *à priori* inconnues, ce qui affecte la modélisation des phénomènes physiques et par conséquent la résolution des problèmes qu'ils posent.
2. Rendre anisotropes les propriétés isotropes

Il est par conséquent important de caractériser l'état de contrainte présent dans un milieu. Plusieurs méthodes utilisant les effets de la contrainte sont employées à cette fin. On donne une liste non exhaustive dans la section suivante.

---

<sup>1</sup> L'image de la figure (e) est prise de la Réf.[10].

### III. Comment caractériser la contrainte mécanique ?

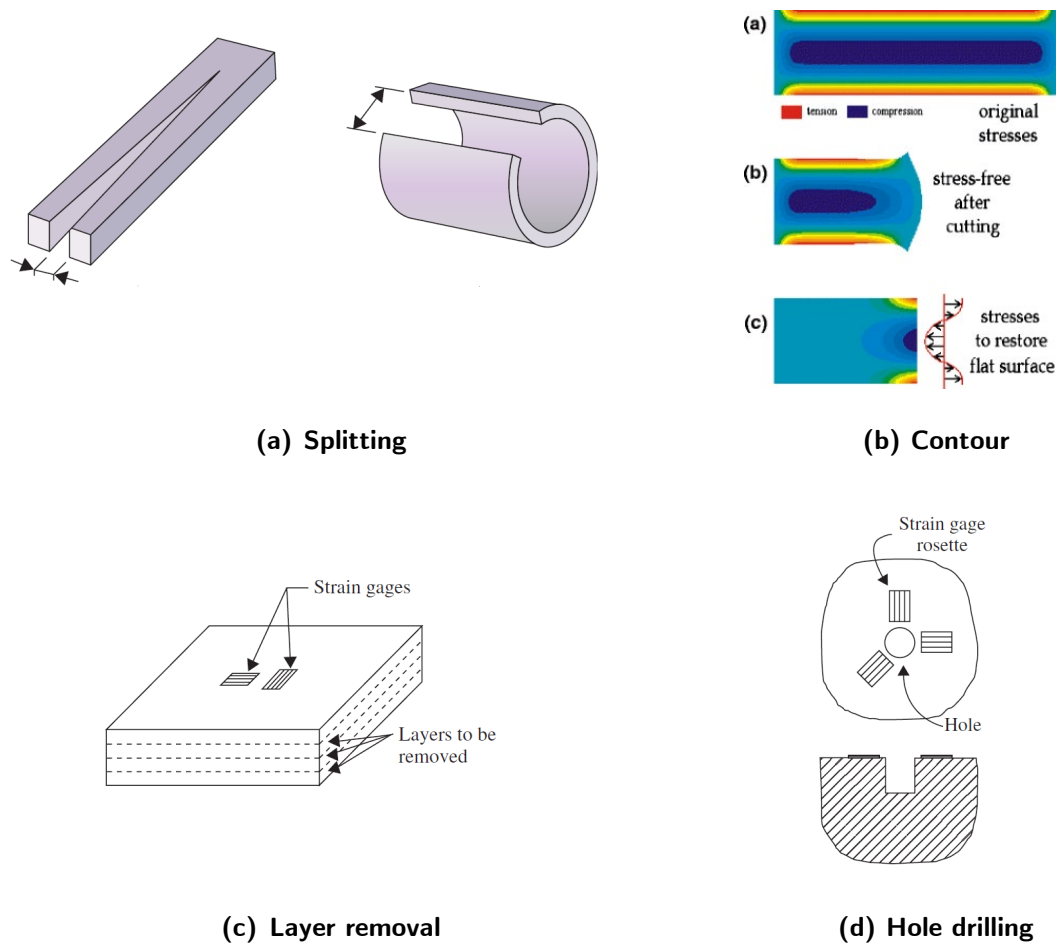
La contrainte n'étant pas une grandeur physique qu'on peut mesurer directement, sa caractérisation est faite grâce aux effets qu'elle a sur le matériau (*état mécanique* et *propriétés physiques*). On donne dans cette section une liste des méthodes les plus utilisées (pour plus de détails voir Schajer [2] et Hauk [17]).

#### A. Méthodes s'appuyant sur l'effet de la contrainte sur l'état mécanique

Ces méthodes utilisent le fait que la contrainte modifie la géométrie de la pièce. On peut diviser ces méthodes en deux catégories.

##### 1. Méthodes destructives ou semi-destructives

Ces méthodes dites parfois de relaxation (Réf. [2]) reposent sur la mesure de la déformation qui accompagne la libération de la contrainte. On donne ci-dessous quelques exemples :



**Fig. 0-3** : quelques exemples des méthodes de caractérisation de contrainte (résiduelle) utilisant l'effet de la contrainte sur la géométrie de la pièce. Toutes les images sont prises de la Réf. [2] sauf (b), qui est prise de la Réf. [18].

- (a) **Splitting** : cette méthode consiste à couper le matériau et mesurer la distance entre les deux bouts. Si les deux bouts s'éloignent alors la contrainte résiduelle est de traction, s'ils se rapprochent alors c'est une contrainte de compression<sup>1</sup>.
- (b) **Contour** : cette méthode consiste à couper le matériau et mesurer le champ du déplacement de la section. Ce champ est dû à la relaxation de la contrainte résiduelle. Ensuite des outils numériques sont utilisés pour calculer la distribution de la contrainte nécessaire pour ramener la section à sa

<sup>1</sup> En pratique une partie du matériau est enlevée pour laisser la possibilité aux deux bouts de se rapprocher (Réf. [18]).



forme non-déformée. Cette contrainte est alors prise comme la contrainte résiduelle initialement présente dans la pièce (Réf. [2]).

- (c) **Layer removal** : cette méthode consiste à découper successivement des couches de la pièce. À chaque coupe enlevée une partie de la contrainte est libérée. Cette relaxation de la contrainte est accompagnée par une déformation, qui est mesurée – par des jauges de déformation– sur la surface supérieure de la pièce.
- (d) **Hole drilling** : cette méthode – semi-destructive – consiste à forer un trou dans la pièce et mesurer la déformation qui accompagne la relaxation de la contrainte.

Il existe également d'autres méthodes destructives ou semi-destructives comme :

- Slitting Method.
- Sectioning Method.
- Deep Hole.

Cependant le principe de base est identique à celui des méthodes présentées ici, à savoir la mesure de la déformation qui accompagne la relaxation de la contrainte.

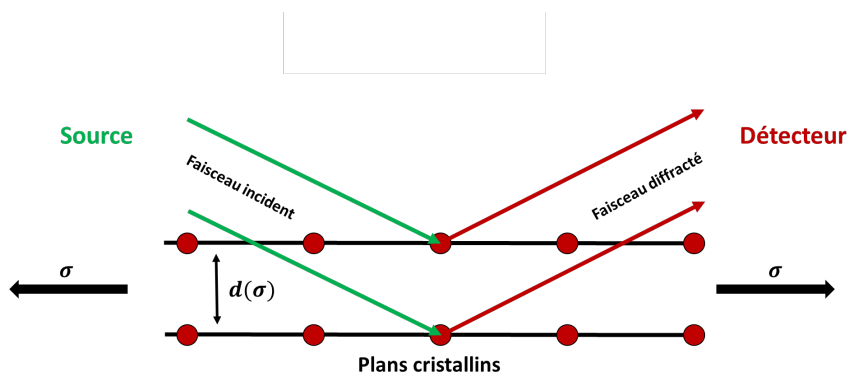
L'avantage des méthodes destructives ou semi-destructives est qu'elles sont indépendantes de la nature du matériau. Elles nécessitent cependant la connaissance des propriétés élastiques, ce qui permet de passer de la déformation à la contrainte. Dans la sous-section suivante, on présente des méthodes non-destructives applicables seulement aux matériaux cristallins.

## 2. Méthodes non-destructives

Parmi les méthodes non-destructives de caractérisation de contrainte utilisant son effet *sur l'état mécanique* on peut citer :

- (a) **Caractérisation par diffraction de Rayon-X** : cette méthode se base sur deux aspects :
  1. Le fait que les ondes électromagnétiques (rayon X) sont diffractées par les matériaux cristallins / polycristallins.
  2. Le fait que pour les matériaux cristallins / polycristallins, la distance entre les plans cristallins est constante en absence de contrainte et est affectée par sa présence.
- (b) **Caractérisation par Diffraction de neutrons** : cette méthode se base également sur ces mêmes deux aspects à la différence que dans ce cas, ceux sont les neutrons qui sont diffractés.

On illustre ci-dessous une configuration dans laquelle ces deux méthodes sont utilisées pour mesurer la contrainte.



**Fig. 0-4** : Configuration de caractérisation de contrainte par diffraction de rayon X ou de neutrons. La distance entre les plans cristallins  $d$  est fonction de la contrainte  $\sigma$ . Les billes rouges représentent les atomes.

Ces deux méthodes permettent la caractérisation des trois types de contrainte résiduelle (Type I, II, et III), contrairement aux méthodes précédentes qui ne traitent que le type I.

L'avantage de la méthode de diffraction de neutrons par rapport à celle de rayon X est qu'elle permet de mesurer la contrainte à l'intérieur du matériau, alors que celle de rayon X n'est sensible qu'à la contrainte surfacique<sup>1</sup>.

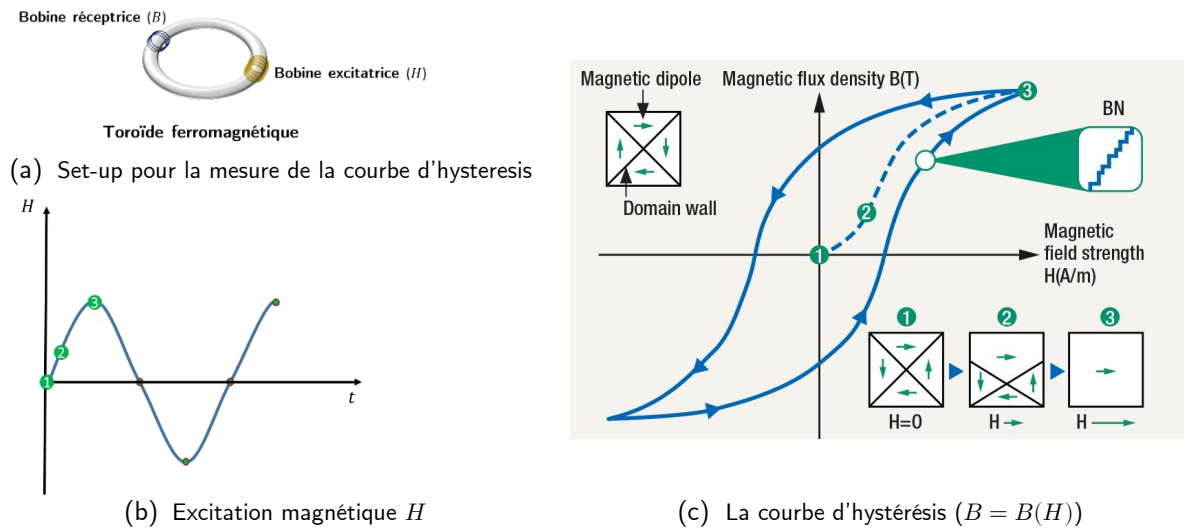
## B. Méthodes s'appuyant sur l'effet de la contrainte sur les propriétés physiques

Le fait que la contrainte affecte non seulement la géométrie de la pièce mais également ses propriétés physiques, permet de développer une multitude de méthodes de caractérisation se basant sur les mesures des variations de ces propriétés. Toutes ces méthodes sont non-destructives. On donne ici les méthodes les plus utilisées :

### 1. Méthodes électromagnétiques

Ces méthodes se basent sur l'effet de la contrainte sur la perméabilité magnétique du matériau.

Pour mieux comprendre le principe de ces méthodes, on fait un petit rappel sur le processus d'aimantation d'un matériau ferromagnétique.



**Fig. 0-5** : Mesure de la courbe d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique. (a) configuration expérimentale. (b) champ magnétique dans la bobine excitatrice. (c) courbe d'hystérésis mesurée<sup>2</sup>.

La caractérisation des propriétés magnétiques d'un matériau ferromagnétique, en particulier la perméabilité, passe par l'identification de sa courbe d'hystérésis ( $B(H)$  ou  $M(H)$ )<sup>3</sup>. La configuration expérimentale utilise généralement une pièce toroïdale avec deux bobinages, le premier excitateur ( $H$ ) et le deuxième récepteur (pour calculer l'induction  $B$ ) [Fig. 0-5-(b)]. L'excitation  $H$  est périodique de valeur moyenne nulle.

Le processus d'aimantation d'un matériau ferromagnétique est décrit par l'alignement des dipôles magnétiques atomiques avec l'excitation  $H$ . Les matériaux ferromagnétiques sont composés de petites régions dont l'aimantation est constante et uniaxiale, dites domaines de Weiss (voir Bozorth [15]). À l'état désaimanté, l'aimantation de ces domaines est orientée de telle sorte que l'aimantation nette dans la pièce est nulle. Lorsque l'excitation  $H$  est appliquée, les domaines dont le sens d'aimantation est proche de celui de  $H$  augmentent en volume. Ceci est décrit par le déplacement de leurs parois (voir Fig. 0-5-(c)). Les matériaux ferromagnétiques réels contiennent des imperfections comme des inclusions ou des dislocations, ce qui fait que le déplacement des parois des domaines ne se fait pas d'une manière continue. Le passage de la paroi par une inclusion cause une variation abrupte de l'aimantation du

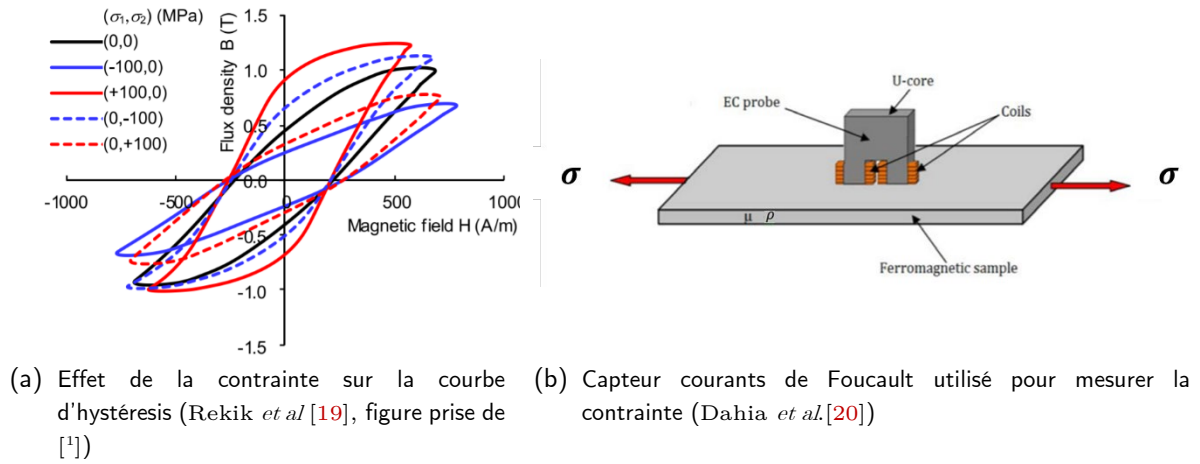
<sup>1</sup> On note cependant qu'il existe une technique de diffraction par rayon-X à haute énergie qui s'appelle synchrotron X-ray (voir Réf. [2]) qui a une profondeur de pénétration intermédiaire entre rayon-X (usuelle) et la diffraction par neutrons.

<sup>2</sup> Cette image est prise de ce site <https://www.industrialheating.com>

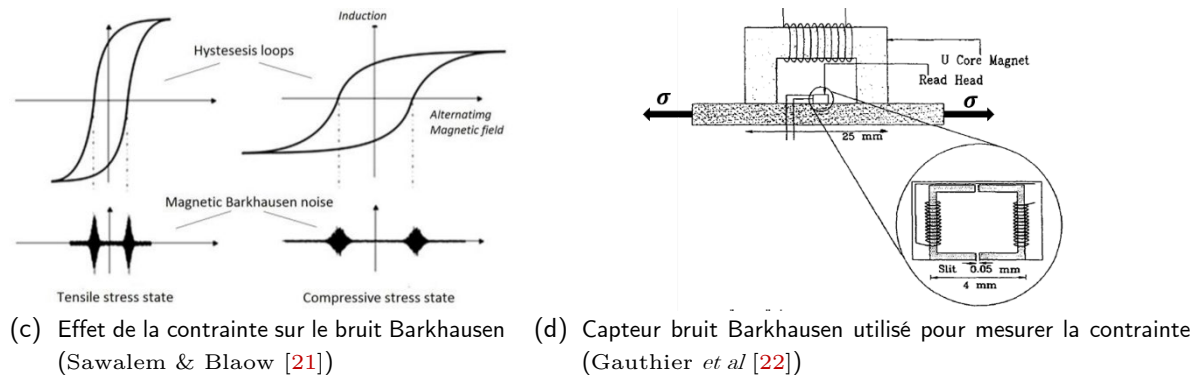
<sup>3</sup>  $H$ ,  $M$  et  $B$  : (resp) le champ magnétique, l'aimantation et l'induction magnétique.

domaine. Ces variations abruptes de l'aimantation se manifestent par le bruit Barkhausen (BN) (voir Fig. 0-5-(c)).

La courbe d'hystérésis et le bruit Barkhausen sont sensibles à la présence d'un état de contrainte, ce qui permet de développer des méthodes de caractérisation basées sur cet effet. On donne les deux exemples suivants :



### Courants de Foucault



### Bruit Barkhausen

Fig. 0-6 : deux exemples des méthodes de caractérisation électromagnétique de contrainte.

- **Par courants de Foucault** : la méthode de caractérisation par courants de Foucault n'utilise pas réellement les courants de Foucault, mais plutôt la variation de la perméabilité. La Fig. 0-6-(a) montre l'effet de la contrainte sur les courbes d'hystérésis. Cet effet pourrait être utilisé pour remonter à la valeur de la contrainte (Fig. 0-6-(b)). Le capteur CF (courants de Foucault) mesure la variation de la tension / impédance du capteur (une bobine + un noyau ferrite) induite par la présence de la contrainte. Pour plus de détails, voir Dahia *et al.* [20].
- **Par Bruit Barkhausen** : la configuration de mesure de la contrainte par bruit Barkhausen est similaire à celle par courants de Foucault. L'amplitude du bruit Barkhausen est sensible à la contrainte ce qui permet de remonter à sa valeur. Pour plus de détails voir Gauthier *et al* [22].

<sup>1</sup> K. Yamazaki, H. Mukaiyama, L. Daniel, "Effects of multi-axial mechanical stress on loss characteristics of electrical steel sheets and interior permanent magnet machines", IEEE Transactions on Magnetics, 54(3):1300304 (2018).

## 2. Méthode optique

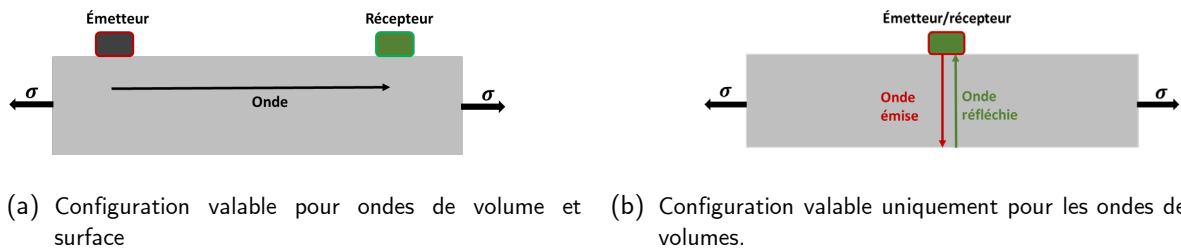
Cette méthode utilise l'effet de la contrainte sur l'indice de réfraction des milieux *transparents*. Elle permet en mesurant cet indice de remonter à la valeur de la contrainte. La base de cette méthode est la théorie de photoélasticité (voir Aben & Guillemet [23] et Duquennoy[24]).

## 3. Méthode thermoélastique

Cette méthode se base sur l'effet thermoélastique, à savoir la dépendance de l'énergie thermique de la contrainte. Wong *et al* [14] proposent une méthode de caractérisation de la contrainte résiduelle se basant sur cet effet. Dans cette méthode, la température d'une pièce soumise à un chargement uniaxial *dynamique* est mesurée. La pièce contient un état de contrainte initial. En faisant dépendre les propriétés élastiques de la pièce de la température, les auteurs donnent une formule permettant de remonter à la contrainte en fonction de la température.

## 4. Méthodes ultrasonores

Ces méthodes se basent sur l'effet de la contrainte sur les vitesses des ondes élastiques. On trouve dans la littérature de nombreuses études qui utilisent essentiellement des ondes de volume ou de surface pour développer une méthode de caractérisation de contrainte. On illustre ici la configuration utilisée.



**Fig. 0-7** : illustration de la configuration de la mesure de la contrainte à partir des variations de vitesses des ondes élastiques.

Dans la première configuration, un émetteur et un récepteur sont utilisés. Cette configuration est valable pour les ondes de volume et les ondes de surface (voir par exemple King & Fortunko [25] et Duquennoy *et al* [26]). Dans la deuxième configuration un seul capteur est utilisé, qui joue le rôle d'émetteur et de récepteur. Cette configuration n'est valable que pour les ondes de volume (voir par exemple Vangi [27]).

En présence de contrainte, les ondes élastiques sont plus rapides / lentes que dans le cas où la contrainte est absente ; ceci est traduit par une variation dans les temps de vol. Les méthodes ultrasonores remontent à la contrainte à partir des mesures de ces variations.

## C. Conclusion

Dans cette section nous avons essayé de répondre à la question « comment caractériser la contrainte ? », en donnant une liste non exhaustive des méthodes utilisées à cette fin. On a fait le choix de diviser les méthodes de caractérisation en deux catégories : la première se base sur le fait que la contrainte modifie la géométrie de la pièce. Dans cette catégorie on trouve les méthodes destructives & semi-destructives et les méthodes par diffraction (rayon X ou neutrons). La deuxième catégorie se base sur le fait que la contrainte modifie les propriétés physiques du matériau de la pièce. Dans cette catégorie on trouve les méthodes électromagnétique, optique, thermique, et ultrasonore.

Dans la section suivante on traite la question « pourquoi une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte ? ».

#### IV. Pourquoi une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte ?

Compte tenu du grand nombre de méthodes de caractérisation de la contrainte qui existent, on peut douter du besoin d'une nouvelle méthode. Cependant, ce besoin se manifeste si on essaie de résoudre la problématique suivante :

**Problématique d'imagerie** : imaginons une plaque métallique avec un état de contrainte  $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  la direction de  $\sigma_3$  étant normale à la plaque. La direction du tenseur de contrainte (de Cauchy) est donc définie par un angle unique  $\alpha$ , entre la composante  $\sigma_1$  et le vecteur  $e_1$  du repère  $R_0$  lié à la plaque. Par abus de langage on appelle cet angle la direction de la contrainte. Chaque composante de la contrainte et sa direction varie en fonction de la position.

Le problème à résoudre est :

Trouver les quatre inconnues :  $\sigma_1(x, y, z)$ ,  $\sigma_2(x, y, z)$ ,  $\sigma_3(x, y, z)$  et  $\alpha(x, y, z)$  sans détruire la plaque.

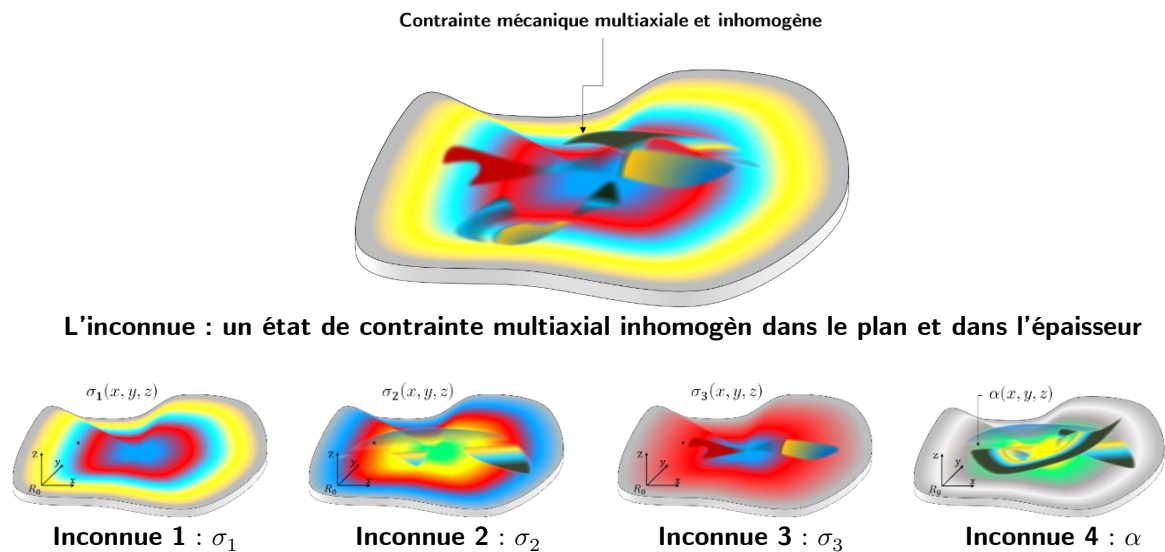


Fig. 0-8 : un état de contrainte triaxial inhomogène dans le plan de la plaque et dans son épaisseur.

La résolution de ce problème doit donc être réalisée en utilisant les méthodes non-destructives. On donne ici pourquoi il n'est pas pratique voire impossible d'utiliser ces méthodes pour le résoudre :

- **Méthode optique** : cette méthode ne fonctionne que sur les matériaux transparents, elle ne peut donc pas résoudre ce problème puisque les métaux absorbent la lumière<sup>1</sup>.
- **Méthode thermoélastique** : cette méthode ne peut résoudre ce problème puisque d'une part la contrainte est inhomogène dans l'épaisseur et d'autre part, la contrainte est multiaxiale de direction inconnue. Les variations de température, mesurées à la surface de la plaque, sont significatives de la moyenne de cette contrainte. Cette méthode souffre également d'un défaut majeur, qui est le fait que la plaque doit être chargée *dynamiquement*, ce qui rend difficile de l'employer sur le terrain.
- **Méthodes électromagnétiques** : ces méthodes ne peuvent pas résoudre ce problème puisqu'elles sont généralement surfaciques (à cause de l'épaisseur de peau), et la contrainte est inhomogène dans l'épaisseur. Par ailleurs ces méthodes sont locales, ceci représente un grand inconvénient si on veut contrôler des grandes structures.

<sup>1</sup> On note également qu'on n'a pas trouvé de références qui traitent le problème (les trois composantes et la direction de la contrainte sont inhomogènes), pour des matériaux transparents.

- **Méthodes ultrasonores** : les méthodes de la littérature traitent des cas où la contrainte est homogène sur le trajet de la propagation de l'onde ; elles ne peuvent donc pas résoudre ce problème, où la contrainte est inhomogène dans l'épaisseur<sup>1</sup>.
- **Méthode par diffraction de rayon X** : cette méthode ne pas résoudre ce problème puisqu'elle est surfacique.
- **Méthode par diffraction de neutrons ou synchrotron X-ray** : ces méthodes sont les seules capables de traiter ce problème, puisque contrairement à la méthode de diffraction par rayon X usuelle, la pénétration de neutrons dans les métaux peut aller jusqu'à quelques centimètres (voir chapitre 3 de Hauk [17]), et la méthode synchrotron X-Ray utilise une source à haute énergie pour avoir une profondeur de pénétration de quelques dizaine de mm. Cependant ces méthodes souffrent des défauts suivants :
  1. elles nécessitent une source de neutrons / une source à haute énergie, ce qui les rend chères et difficiles si ce n'est pas impossible à les mettre en œuvre sur le terrain.
  2. elles sont des méthodes locales (comme les méthodes électromagnétiques), qui ne permet de connaître que l'information locale, dans un petit volume du matériau (dite *gage volume*), et exige donc beaucoup de mesures, surtout pour le cas d'une contrainte multiaxiale de direction inconnue, puisqu'il faut au moins six mesures (dans six directions) pour chaque *gage volume* (voir §.4 du chapitre 3 de Hauk [17]).

Il est donc nécessaire de développer une nouvelle méthode qui soit capable de résoudre ce problème, tout en restant facile à mettre en œuvre, applicable sur le terrain, et surtout une méthode non-locale pour gagner en temps. Dans la section suivante, on présente tout d'abord l'environnement dans lequel s'inscrit cette thèse qui a aidé à en fixer les directions générales dans le but d'aboutir à une nouvelle méthode de caractérisation.

---

<sup>1</sup> La difficulté posée par l'inhomogénéité de la contrainte dans le plan de la plaque pourrait être soulevée en utilisant une grille de capteurs (ou un capteur qui se déplace sur la surface de la plaque) qui émettent dans l'épaisseur. Ceci a été fait par Dorfi *et al* [28] dans le cas d'une contrainte biaxiale.

## V. Environnement de la thèse et bases de la méthode de caractérisation

Caractériser de façon quantitative et non-destructive les contraintes mécaniques est un problème important de l'industrie mécanique pour lequel il n'existe pas de solution universelle. Bien qu'ancien, ce problème reste d'actualité et de nouvelles solutions sont recherchées pour de nombreuses applications potentielles. Il intervient notamment dans l'industrie sidérurgique, dont celle produisant des aciers ferromagnétiques où deux géométries de produits dominent : celle des *plaques* et celle des *tubes*.

Dans un matériau ferromagnétique, les contraintes mécaniques engendrent des effets multi-physiques complexes comme nous le précisons dans la suite de ce mémoire. La mesure de ces effets doit permettre, de façon indirecte, de déduire quelles sont les contraintes qui en sont à l'origine. Parmi eux, on peut distinguer les deux principaux qui vont faire l'objet d'études dans le présent mémoire : les effets magnéto-élastiques et les effets acoustoélastiques.

Les deux géométries canoniques des produits sidérurgiques sont simples et propices à la propagation d'ondes élastiques guidées ; de fait, ce sont les géométries pour lesquelles sont développées la majorité des méthodes de contrôle non-destructif (CND) basées sur ces ondes.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés dans le cadre d'une collaboration entre le département DISC du CEA et le laboratoire GeePs de CentraleSupélec, qui résulte de la rencontre entre mes deux encadrants de thèse, Laurent Daniel, professeur à CentraleSupélec, et Alain Lhémercy, directeur de recherche au CEA.

À l'ENS-Cachan puis à CentraleSupélec dans le laboratoire GeePs, Laurent Daniel mène et dirige des recherches dont certaines visent à modéliser les effets magnétiques locaux engendrés par des contraintes mécanique dans les milieux ferromagnétiques, ces effets pouvant être mesurés à l'aide de sondes à courants de Foucault (voir les méthodes électromagnétiques dans III-0.1 [p. 8]). On peut ensuite chercher à inverser de telles mesures sur la base des connaissances acquises par les solutions du modèle direct (le modèle magnéto-mécanique (MMM) développé par Daniel *et al* [29] qui permet de prédire à l'aide de quelques paramètres physiques mesurables l'effet de contraintes sur la magnétisation).

Au CEA dans le département DISC, Alain Lhémercy mène et dirige des recherches sur la modélisation du CND dont le CND à longues distances par ondes élastiques guidées (guides unidirectionnels – cylindres de section arbitraire, ou guides multi-directionnels – plaques) et sur les traducteurs dont les traducteurs électro-magnéto-acoustiques – en anglais *Electro-Magneto-Acoustic Transducers* (EMAT) en milieu ferromagnétiques. Ces traducteurs peuvent émettre (et être sensibles à) des ondes élastiques guidées, de tout type de polarisation, de façon sélective, sans contact avec la pièce ; ils peuvent aussi être utilisés localement comme sondes à courants de Foucault.

Par ailleurs, le CEA DISC s'intéresse également à différents procédés d'imagerie de défauts (Kulakovskiy *et al*. [30, 31]) ou de perte d'épaisseur exploitant des mesures par ondes guidées, dont des méthodes de reconstruction tomographiques (plaques : Druet *et al* [32, 33], tubes : Hoang [34]). De plus, et parallèlement au présent travail, Jordan Barras a développé dans sa thèse [35, 36] une théorie modale du rayonnement par une source arbitraire d'ondes guidées dans une plaque de taille finie, traitant notamment le cas de la propagation dans une plaque homogène isotrope ou anisotrope et d'une plaque présentant une élasticité inhomogène ; dans le cas inhomogène, la propagation non-rectiligne engendrée par les gradients d'élasticité est prise en compte.

Des échanges relatifs à l'effet d'une contrainte résiduelle sur les phénomènes de transduction magnéto-élastique, entre Laurent Daniel, Alain Lhémercy et Bastien Clausse, ont permis à ce dernier [37, 38] de faire tourner au sein de son modèle d'émission (ME) d'un EMAT en milieu ferromagnétique le modèle de Laurent Daniel (MMM) prédisant les lois d'aimantation et de magnétostriction d'un matériau magnétique localement contraint. L'idée a émergé d'un travail en collaboration visant à développer une méthode de caractérisation des contraintes mécaniques exploitant les effets magnéto-élastiques locaux (au voisinage immédiat de l'EMAT) et les effets acoustoélastiques à longue portée (sur les ondes guidées

émises et reçues par des EMAT), pouvant aboutir à une cartographie de répartitions inhomogènes des composantes de contraintes résiduelles d'une plaque reconstruites par tomographie des mesures d'ondes guidées.

Cet environnement initial de la thèse a fixé les bases de la méthode de caractérisation à développer, à savoir l'exploitation des effets acoustoélastique et magnétoélastique à travers l'utilisation de traducteur EMAT et la propagation des ondes élastiques guidées (Lamb et SH). Il a permis également d'identifier la technique d'imagerie par tomographie comme un outil intéressant pour rendre cette méthode non-locale.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a eu donc pour objet de mener des travaux de modélisation de problèmes directs (prédictions d'effets mesurables liés à la présence de contraintes) et de résolution de problèmes inverses (reconstruction des contraintes, à partir de mesures de ces effets dont elles sont à l'origine), afin de montrer la faisabilité du développement d'une telle méthode. Les travaux présentés en posent les bases, dans le cas géométriquement le plus simple mais industriellement pertinent d'une plaque d'acier.

Dans la section suivante on présente les briques essentielles que contient cette méthode.



## VI. Une nouvelle méthode de caractérisation de contrainte

On donne tout d'abord la définition de l'EMAT

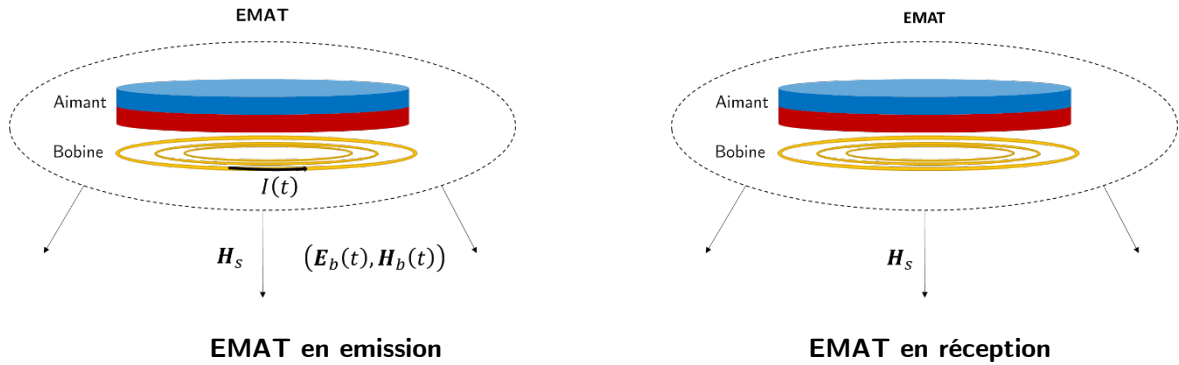


Fig. 0-9 : le capteur EMAT (electro-magnetic-acoustis-trasducer).

Un EMAT est un capteur sans contact composé d'un aimant permanent et d'une bobine. Lorsque l'EMAT est utilisé pour générer une onde élastique, la bobine dans laquelle circule un courant électrique alternatif<sup>1</sup>  $I(t)$  rayonne un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b)$ . Lorsque l'EMAT est utilisé pour détecter une onde élastique, la bobine est en circuit ouvert et le seul champ rayonné est le champ magnétique statique  $\mathbf{H}_s$  de l'aimant. La réception est donc décrite par l'induction d'une tension dans la bobine due au passage de l'onde.

L'EMAT peut jouer le rôle d'un transducteur ultrasonore (émetteur/détecteur d'ondes élastiques), mais aussi de capteur à courants de Foucault (sensible à la variation locale des propriétés électrique et magnétique du matériau).

Pour comprendre maintenant les briques essentielles pour le développement d'une nouvelle méthode, revenons au problème posé dans la sec IV. On ajoute ici des transducteurs sur la plaque, en notant que ces capteurs sont des EMATs.

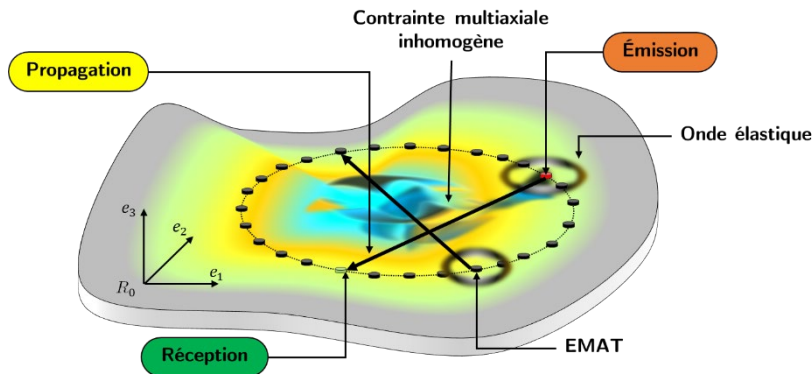


Fig. 0-10 : configuration d'imagerie gardée pour le développement de la méthode de caractérisation de la contrainte.

À première vue la méthode de caractérisation, dénommée dorénavant la *méthode d'imagerie*, fait intervenir quatre étapes qui sont autant de questions à résoudre :

1. l'émission de l'onde élastique,
2. la propagation de cette onde dans un milieu élastique inhomogène,
3. la réception de l'onde élastique,
4. l'inversion de l'information transportée par l'onde (temps de vol, amplitude, ...).

<sup>1</sup> Le mot alternatif n'est pas à être compris dans le sens strict du terme. Il est utilisé pour dire un courant non continu.

Cependant, si on prend en considération le fait que les mécanismes de transduction d'une onde élastique par un EMAT sont régis en grande partie par les lois de comportement du matériau dans lequel les phénomènes de transduction se déroulent, et que ces lois sont très sensibles à la présence de la contrainte, on se rend compte que si la contrainte est présente sous des capteurs, il faut aussi rendre compte d'une cinquième étape, qui consiste à caractériser cette contrainte locale. Cette étape précède l'étape d'émission (resp la réception).

On passe dans la sous-section suivante en revue des modèles et méthodes qui seront utilisés dans le développement de la *méthode d'imagerie*. Certains de ces modèles ont été développés avant la thèse. Ces modèles sont repartis sur les cinq étapes.

## 1. Caractérisation de la contrainte locale.

L'objectif de cette étape est de trouver la contrainte à proximité des traducteurs (émetteur ou récepteur), pour que la modélisation des mécanismes de transduction de l'EMAT soit possible. Cette étape se base sur un modèle et une méthode :

- **MMM** : le modèle magnéto-mécanique permet, connaissant les propriétés physiques du matériau, le champ magnétique et la contrainte, de prédire l'aimantation  $\mathbf{M}^1$ . Plusieurs modèles (ex : Preisach Réf. [39], Jiles-Atherton Réf. [40,41] et Daniel *et al* [29]) existent dans la littérature. Les hypothèses et les limites de validité de ces modèles sont différentes. L'étude qui permet de savoir lequel parmi ces modèles est le mieux adapté pour traiter la problématique que pose la *méthode d'imagerie*<sup>2</sup> n'a pas été réalisée dans ce mémoire mais dans la thèse de Clause [37], qui a permis de choisir le modèle de Daniel *et al* [3], comme MMM de cette méthode<sup>4</sup>.
- **MCL** : la méthode de caractérisation locale. Cette méthode considère l'EMAT comme un capteur courants de Foucault. Cette méthode se base un **MMM inversible** (permet de trouver la contrainte à partir de l'aimantation / perméabilité magnétique). N'importe quel **MMM inversible** pourrait être utilisé par cette méthode ; cependant on fait le choix de prendre la version analytique du modèle de Daniel [42], la plus simple, afin de démontrer a minima la faisabilité de la méthode. La **MCL** donne la contrainte locale  $\sigma_i^r$  en fonction de la variation de la tension induite dans la bobine de l'EMAT due à la présence de la contrainte. Cette méthode doit être développée.

## 2. Émission des ondes en presence de contrainte

Une fois la contrainte locale caractérisée, l'étape suivante dans le développement de la *méthode d'imagerie* est la modélisation de l'émission de l'onde. Cette étape a été traitée durant la thèse de Clause [37] et se base sur deux modèles :

- **MMM** : le modèle prend en entrée les propriétés physiques du matériau, la contrainte locale (en dessous de l'émetteur) calculée par la **MCL** ( $\sigma_i^r$ ) et donne en sortie l'aimantation ( $\mathbf{M}$ ) et la déformation de magnétostriction ( $\epsilon^{MS}$ ).
- **ME** : le modèle d'émission développé par Clause [37] prend en entrée les sorties du **MMM** ( $\mathbf{M}, \epsilon^{MS}$ ) et donne en sortie une densité de force dynamique surfacique ( $\mathbf{t}_T$ ), source de l'onde élastique. On note que ce modèle nécessite, en plus des sorties du **MMM**, le tenseur de rigidité élastique dans l'état contraint dit *tenseur de rigidité équivalent* ( $\mathbf{C}^{eq}$ ). Cette deuxième entrée est calculée par le modèle acoustoélastique (**MAE**) (voir le point suivant).

<sup>1</sup> Si nécessaire ce modèle peut donner également la déformation de magnétostriction ( $\epsilon^{Ms}$ ).

<sup>2</sup> Trouver l'aimantation induite par une excitation dynamique dans une pièce ferromagnétique présentant un état de contrainte multiaxial inhomogène.

<sup>3</sup> L. Daniel, O. Hubert, M. Rezik : A simplified 3D constitutive law for magneto-mechanical behaviour, IEEE Transactions on Magnetics, 51(3):7300704 (2015). Une version simplifiée du MME complet (Daniel *et al* [29])

<sup>4</sup> S'il s'avère que ce modèle n'est pas capable de résoudre la problématique de la *méthode d'imagerie*, un autre MMM peut être utilisé.

### 3. Propagation de l'onde dans le milieu contraint

Une fois la densité de force (source de l'onde) calculée, le problème de propagation de l'onde élastique dans le milieu contraint peut être traité. Cette étape contient deux modèles :

- **MAE** : le modèle acoustoélastique prend en entrée la contrainte (sous le capteur et sur le trajet de l'onde), les propriétés élastiques du matériau dans l'état de référence (supposé ici non-contraint), et donne comme sorties le tenseur de rigidité dans l'état contraint  $C^{eq}$ , les déplacements modaux ( $U$ ) et les nombres d'onde ( $k$ ) des modes de Lamb et SH. Ce modèle doit être développé.
- **MP** : le modèle de propagation traite la problématique de propagation d'une onde élastique, en milieu élastiquement inhomogène. Cette problématique n'est pas nouvelle et a été traitée par plusieurs auteurs (voir par exemple Réf. [43, 44] pour les ondes de volume et Pagneux & Maurel [45] pour les ondes de Lamb). De la même façon que pour le **MMM**, le **MP** n'est présenté dans ce mémoire que pour indiquer son rôle dans le développement de la méthode d'imagerie. Cependant, on fait le choix de prendre comme **MP**, le modèle de pinceaux développé par Barras dans sa thèse [35]. Les entrées de ce modèle sont  $t_T$  du **ME** et  $(C^{eq}, U, k)$  du **MAE**. Ce modèle donne en sortie le champ élastodynamique de l'onde  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$  partout dans la plaque, en particulier là où est positionné le récepteur.

### 4. Réception de l'onde

Le problème de la prédiction de la réception / détection des ondes élastiques consiste à trouver la tension induite dans la bobine de l'EMAT engendrée par leur passage. La contrainte locale (sous du récepteur) doit être connue. Cette étape est donc précédée par une étape de caractérisation de contrainte locale (étape 1). Une fois la contrainte locale connue, cette étape fait appel à deux modèles

- **MMM** : ce modèle prend en entrée les propriétés physique du matériau, la contrainte locale (sous le récepteur) calculée par le **MCL** ( $\boldsymbol{\sigma}_l^r$ ) et donne en sortie l'aimantation ( $M$ ).
- **MR** : le modèle de réception prend en entrée, les sorties du **MP**  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$ , du **MMM** ( $M$ ) et de la **MCL** ( $\boldsymbol{\sigma}_l^r$ ) et donne en sortie la tension induite dans la bobine de l'EMAT, qui sert ensuite à définir le temps de vol (time-of-flight en anglais, noté TOF) entre l'émetteur et le récepteur. Ce modèle doit être développé.

### 5. L'inversion

Les quatre premières étapes sont répétées pour chaque couple émetteur-récepteur. Une fois ce processus terminé, les temps de vol calculés sont utilisés pour remonter à la cartographie de la contrainte, en utilisant une technique d'imagerie par tomographie.

Pour que cette étape soit possible, il faut trouver une loi qui permette de remonter à la contrainte à partir de la mesure d'une variation de vitesse / temps de vol des ondes guidées. Une telle loi existe pour les ondes de volume (voir King & Fortunko [16]) et de Rayleigh (voir Duquennoy [20]), mais pas pour les ondes de Lamb et SH. Il faut donc chercher de telles lois.

Les techniques de tomographie existant dans la littérature utilisant les ondes élastiques en CND (contrôle non destructif), ou acoustiques en échographie, ou électromagnétiques en radiographie, traitent des problèmes dont la grandeur à imager (variation d'épaisseur, pour les ondes élastiques, densité pour les ondes acoustiques, ou coefficient d'absorption pour les ondes électromagnétiques) est scalaire et mono-variable. Comme la contrainte est une grandeur multi-variables et directionnelle (un tenseur), ces techniques ne peuvent pas être appliquées pour résoudre le problème posé ici. Il faut donc développer une nouvelle méthode tomographique (**MT**) permettant d'imager un état de contrainte inhomogène.

L'étape d'inversion comporte donc un modèle et une méthode :

- **MAE-An** : le modèle acoustoélastique analytique se présente sous la forme d'une loi qui permet de remonter à la contrainte à partir de la connaissance de la variation de vitesse induite par celle-ci. Ce modèle doit être développé.

- **MT** : la méthode tomographique traite l'imagerie par ondes élastiques guidées d'une grandeur multi-variables et directionnelle (le tenseur de contrainte). Elle prend en entrée les TOF (sorties du **MR**) et utilise le **MAE-An** pour fournir en sortie la cartographie de la contrainte globale  $\sigma_g^r$  (contrainte dans la région entourée par les capteurs). Cette méthode doit être développée.

En conclusion la démonstration de la faisabilité d'une nouvelle méthode d'imagerie passe par l'utilisation de sept modèles (MMM, MME-An, ME, MP, MR, MAE, MAE-An) dont quatre ont été développés avant la thèse, et de deux méthodes (MT et MCL) qui doivent être développées.

Comment ces modèles et méthodes sont reliés entre eux, et comment la démonstration de la faisabilité de la méthode en utilisant une démarche numérique peut être menée, est schématisé par la Fig. 0-11.

Les numéros (dans les cercles) indiquent l'ordre du passage d'un tel modèle / méthode lors de la démonstration de faisabilité de la *méthode d'imagerie*. Les modèles dans les rectangles verts sont les modèles qui existent avant la thèse. Les modèles dans les rectangles rouges et les méthodes dans les cercles rouges doivent être développés.

Un état de contrainte multiaxial et inhomogène dans toute la plaque est choisie. La contrainte locale (à proximité de l'émetteur et le récepteur) est caractérisée (*étape de caractérisation*). Elle est ensuite comparée à la contrainte originale ; si le résultat est acceptable, cette contrainte ( $\sigma_l^r$ ) est utilisée par le **MMM** pour calculer l'aimantation  $M$  et la déformation de magnétostriction  $\epsilon^{MS}$ , et par le **MAE** pour calculer le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$  en dessous de l'émetteur. Ces trois entrées ( $M, \epsilon, C^{eq}$ ) sont utilisées par le **ME** pour déterminer la source de l'onde ( $t_T$ ). Celle-ci, avec le tenseur de rigidité équivalent, les déplacement modaux et les nombres d'onde ( $C^{eq}, U, k$ ), calculés en utilisant la contrainte originale globale  $\sigma_g$  (*i.e.* la contrainte sur le trajet de l'onde), forment les entrées du **MP**, qui donne en sortie le champ élastodynamique de l'onde ( $u, v, \tau$ ). Le **MR** prend en entrée la contrainte locale reconstruite  $\sigma_l^r$ , l'aimantation  $M$  et le champ élastodynamique de l'onde ( $u, v, \tau$ ) puis donne en sortie le temps de vol entre l'émetteur et le récepteur. Le **MAE-An** est retrouvé à partir du **MAE** ; il est utilisé dans la méthode tomographique pour remonter à la cartographie de la contrainte globale  $\sigma_g^r$ . Celle-ci est comparée à la contrainte originale  $\sigma_g$  pour démontrer la faisabilité de la méthode.

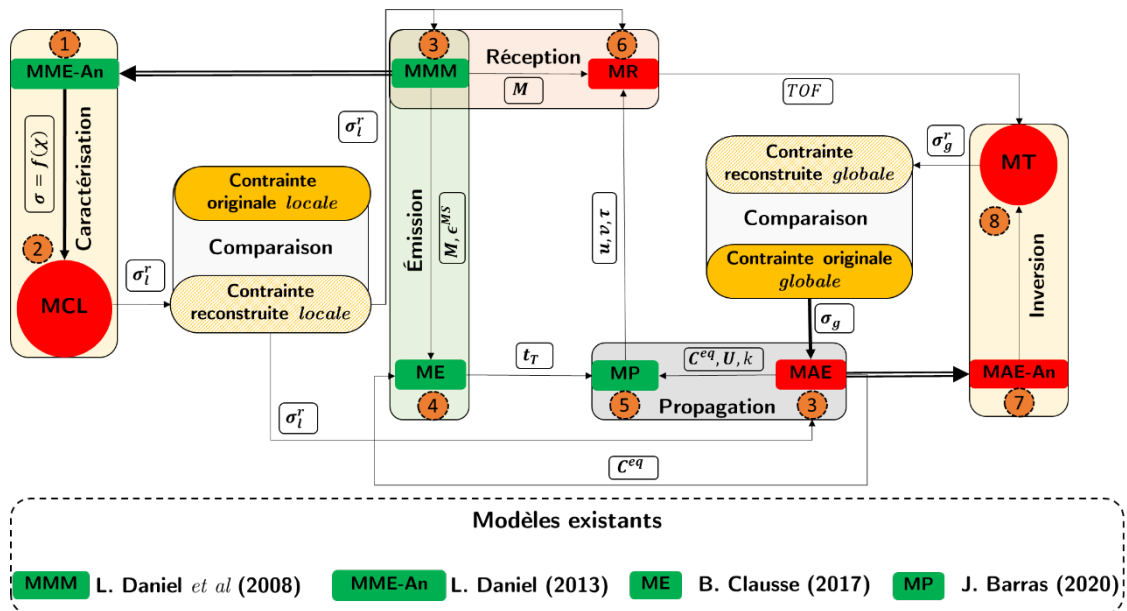


Fig. 0-11 : architecture de la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie par une démarche numérique<sup>(1)</sup>.

<sup>1</sup>  $\chi$  : la susceptibilité magnétique.

## VII. Oraganisation du mémoire

Pour que la méthode soit développée et sa faisabilité testée, il est nécessaire de développer les modèles et méthodes qui n'existent pas préalablement à la thèse. Ceci est fait sous la forme de la résolution de quatre problèmes, dont deux élastodynamiques, un électro-magnéto-élastique et un électromagnétique :

1. le problème acoustoélastique direct (PAED : élastodynamique),
2. le problème acoustoélastique inverse (PAEI : élastodynamique),
3. le problème de réception (PR : électro-magnéto-élastique),
4. le problème de caractérisation de la contrainte locale (PCL : électromagnétique).

La résolution de ces problèmes se répartit sur les six chapitres du mémoire comme suit :

Problème	PAED	PAEI		PR	PCL
Chapitres	Ch.1 + Ch.2	Ch.3	Ch.4	Ch.5	Ch.6
Modèle/Méthode	<b>MAE</b>	<b>MAE-An</b>	<b>MT</b>	<b>MR</b>	<b>MCL</b>

### A. Le problème acoustoélastique direct (PAED) :

Ce problème traite la question suivante :

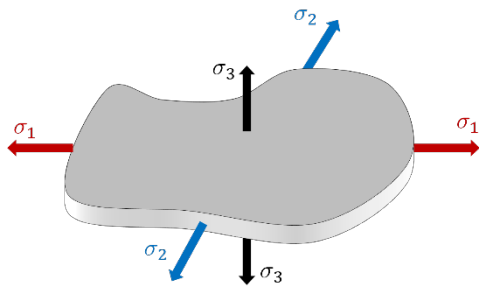
Connaissant la contrainte appliquée à une plaque, comment peut-on trouver les variations de vitesses des modes de Lamb et SH ?

Ce problème est divisé en deux sous-problèmes, dont chacun est traité dans un chapitre.

#### 1. Ch.1 : Théorie d'acoustoélasticité (TAE)

Dans ce chapitre on traite la problématique suivante :

▮ Trouver le tenseur de rigidité d'un matériau en fonction de la contrainte appliquée.



**Fig. 0-12** : la problématique du chapitre est de trouver l'expression du tenseur de rigidité d'un matériau contraint.

Données	Inconnues
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$C_{ijkl}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

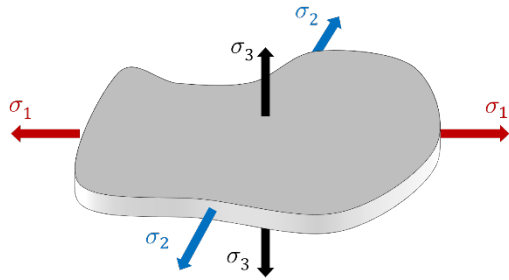
Dans ce premier chapitre, on présente tout d'abord une étude bibliographique sur la théorie de l'acoustoélasticité, dans l'objectif de rappeler ses applications et ses limites. Ensuite, on donne le formalisme mathématique de cette théorie.

On aboutit à une équation d'onde avec un tenseur de rigidité équivalent, décrivant la rigidité d'un matériau de symétrie matérielle arbitraire, soumis à un chargement quelconque. Ce tenseur est ensuite écrit d'une manière explicite en fonction des trois composantes de la contrainte, dans le cas d'un matériau élastiquement isotrope (dans son état de référence) soumis à un chargement triaxial.

## 2. Ch.2 : Application de TAE aux ondes guidées

Dans ce chapitre on traite la problématique suivante :

Trouver les variations de vitesses des ondes de Lamb et SH, induites par une contrainte multiaxiale.



**Fig. 0-13** : la problématique du chapitre est de trouver les vitesses des ondes de Lamb et SH dans un matériau contraint.

Données	Inconnues
$C_{ijkl}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	$v^{Lamb+SH}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Ce chapitre résout l'équation d'onde retrouvée au chapitre précédent, en utilisant la méthode SAFE (semi-Analytical-Finite-Element).

Dans ce chapitre on traite deux cas :

1. la variation de vitesse induite par une contrainte multiaxiale homogène dans l'épaisseur et dans le plan de la plaque,
2. la variation de vitesse induite par une contrainte multiaxiale inhomogène dans l'épaisseur et homogène dans le plan de la plaque.

Ces deux chapitres fournissent donc une solution au problème acoustoélastique direct (**PAED**), dans lesquels le modèle acoustoélastique (**MAE**) est développé (voir Abderahmane *et al* <sup>(1)</sup>).

### B. Le problème acoustoélastique inverse (PAEI)

Ce problème traite la question suivante :

Connaissant les variations de vitesses des modes de Lamb et SH, comment peut-on trouver les trois composantes et la direction de la contrainte?

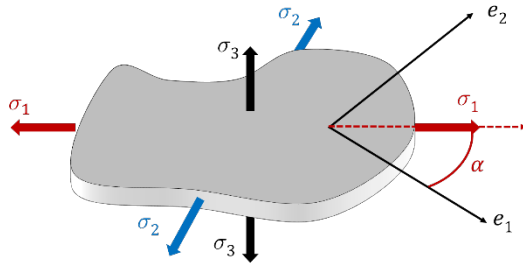
Ce problème est divisé en deux sous-problèmes, dont chacun est traité dans un chapitre.

## 1. Ch.3 : Un MAE analytique pour la résolution du PAEI

Dans ce chapitre on traite la problématique suivante :

Trouver les trois composantes de la contrainte et sa direction en fonction des variations de vitesses des ondes de Lamb et SH, dans le cas où la contrainte est homogène dans l'épaisseur et dans le plan de la plaque.

<sup>1</sup> A. Abderahmane, A. Lhémy, Laurent Daniel, "Effects of multiaxial pre-stress on Lamb and shear horizontal guided waves" J. Acous Soc. America 149, 1724 (2021); <https://doi.org/10.1121/10.0003630>



**Fig. 0-14** : la problématique de ce chapitre est de remonter aux trois composantes de la contrainte et sa direction en fonction des vitesses de Lamb et SH.

Données	Inconnues
$v_{Lamb+SH}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha)$

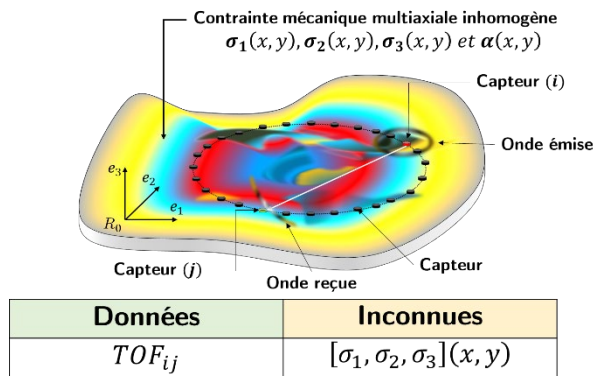
Pour résoudre le PAEI, on propose dans ce chapitre une version réduite (analytique) du modèle acoustoélastique (MAE) développé dans les deux premiers chapitres. Cette version donne d'une manière explicite les vitesses de Lamb et SH en fonction de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha$  et des coefficients (trois) indépendants de la contrainte dits coefficients acoustoélastiques.

On montre qu'il est possible de trouver les quatre inconnues  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha)$  en utilisant trois capteurs formant un triangle rectangle isocèle.

## 2. Ch.4 : Méthodes tomographiques pour l'imagerie de la contrainte.

Dans ce chapitre on traite la problématique suivante :

Trouver les trois composantes de la contrainte et sa direction en fonction des variations de vitesses des ondes de Lamb et SH, dans le cas où la contrainte est homogène dans l'épaisseur et inhomogène dans le plan de la plaque.



**Fig. 0-15** : la problématique du chapitre est de développer une méthode d'imagerie permettant de retrouver les quatre cartographies  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha)$  à partir des temps de vols  $TOF_{ij}$ .

Données	Inconnues
$TOF_{ij}$	$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3](x, y)$

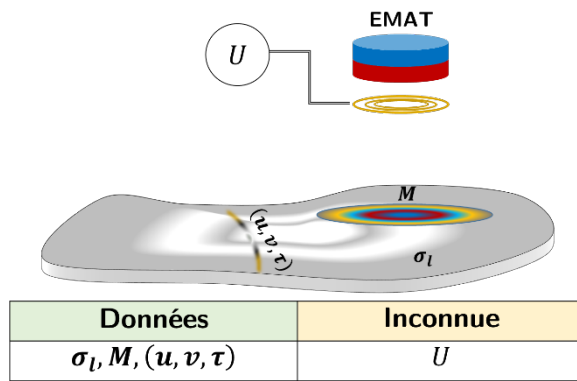
Dans ce chapitre on utilise le MAE-An proposé au Ch. 3 et on profite de la nature multimodale et dispersive des ondes guidées pour développer des méthodes tomographiques (MT) pour cartographier une grandeur multi-variables et directionnelle (le tenseur de contrainte).

### C. Le problème de réception (PR)

Ce problème traite la question suivante :

Connaissant le champ élastodynamique de l'onde, comment peut-on trouver la tension induite dans l'EMAT par son passage ?

Cette question est traitée dans le Ch. 5, dans lequel le passage de l'onde sous le capteur est tout d'abord traduit par l'induction des densités de courant électrique et des courants magnétiques équivalents. Ensuite les équations de Maxwell sont résolues avec pour sources ces densités de courants afin de trouver la tension induite dans la bobine.



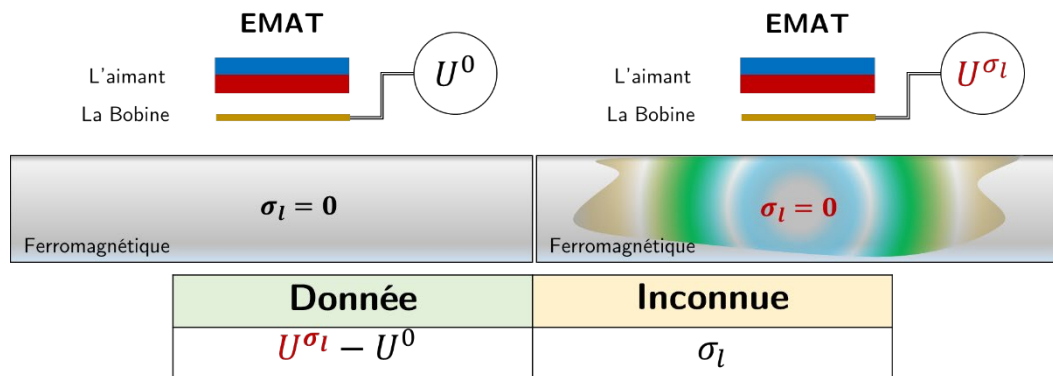
**Fig. 0-16** : la problématique du chapitre est de développer une modèle qui permet de trouver la tension induite  $U$  dans la bobine de l'EMAT due au passage de l'onde élastique  $(u, v, \tau)$ .

La version finale du modèle de réception (MR) développée dans ce chapitre fait usage du fait que l'EMAT émetteur est identique au EMAT récepteur.

#### D. Le problème de caractérisation de contrainte locale (PCL)

Ce problème traite la question suivante :

Connaissant la variation de tension induite dans l'EMAT due à la présence de la contrainte locale comment peut-on remonter à celle-ci ?



**Fig. 0-17** : la problématique du chapitre est de développer une méthode qui permet de trouver la contrainte locale à partir de la variation de tension qu'elle induit dans la bobine de l'EMAT.

Cette question est traitée dans le Ch. 6 dans lequel on passe en revue tous les modèles nécessaires pour le développement de la méthode d'imagerie et leur état actuel de développement (à la fin de la thèse).

#### E. La conclusion

Ce mémoire se termine avec une conclusion générale et une liste de perspectives pour l'après thèse.





# 1. Théorie d'acoustoélasticité (TAE)

## Résumé :

Ce chapitre est composé de deux sections. La première est consacrée à l'étude bibliographique, la seconde au développement de la théorie d'acoustoélasticité (TAE).

Dans la première section, Sec. I [p. 25], on présente le cadre général de la TAE, qui est un cas particulier (*linéarisé*) de l'élasticité non-linéaire. On s'intéresse (dans I-A) à une première application de cette théorie, consistant à utiliser des *ondes de volume / surface* pour mesurer des constantes d'élasticité non-linéaires, dites constantes de Murnaghan. La deuxième application de la théorie (celle qui nous intéresse plus directement) est abordée dans la sous-section I-B. Cette application consiste dans un premier temps à estimer l'effet acoustoélastique (EAE<sup>1</sup>) et dans un deuxième temps développer des méthodes de caractérisation de contrainte (uniaxiale et biaxiale) se basant sur la mesure de variations de vitesse (*d'onde de volume / surface*) par rapport à un état de référence (non-contraint). L'étude bibliographique montre qu'on peut distinguer deux cas, suivant la capacité de la théorie de prédire les résultats expérimentaux (*i.e.* estimer l'EAE) :

- estimer l'EAE induit par l'application d'une contrainte, dont la déformation résultante est purement élastique. Dans ce cas, la théorie s'est montrée capable de prédire les bonnes variations de vitesse (EAE) ;
- estimer l'EAE induit par l'application d'une contrainte qui plastifie le matériau, ou bien d'une contrainte qui résulte d'un gradient de température (par exemple induite par un soudage). Dans ce cas, les prédictions de la théorie n'étaient pas en accord avec les résultats expérimentaux. Cette incapacité de la TAE de prédire l'EAE dans ce cas, vient du fait que les hypothèses faites pour développer la TAE ne sont pas respectées en cas de déformation plastique ou suite à l'application d'un gradient de température.

Dans la sous-section I-C [p. 30], on présente quelques travaux de la littérature traitant l'effet acoustoélastique (EAE) dans le cas de la propagation des ondes guidées (OG). Du fait que l'application de la TAE aux ondes guidées est récente, les travaux sont de nature exploratoire, réalisés dans l'objectif d'étudier d'une manière générale l'EAE des modes de Lamb en présence de contrainte uniaxiale ou biaxiale. Ces études ont permis de retrouver quelques résultats établis pour les ondes de volume / surface. Quelques points que nous jugeons inconsistants dans l'application de la TAE aux OG font l'objet d'une attention particulière et sont discutés.

Dans la seconde section, Sec. II [p. 33], on présente formellement le développement mathématique de la TAE et les hypothèses nécessaires au traitement de notre problématique. Ce développement commence par l'identification de trois états d'un matériau élastique, à savoir : l'état *naturel* défini comme l'état de référence par rapport auquel on veut mesurer les variations de vitesse, et auquel on vient appliquer une contrainte (un chargement) statique pour déformer le matériau (élastiquement) jusqu'à son nouvel état dénommé état *initial*. Le matériau, dans cet état, représente le milieu de propagation de l'onde élastique. La superposition de la propagation de l'onde à cet état définit le troisième état, dénommé état *final*.

Dans la sous-section II-A, on donne l'équation d'équilibre de l'état *initial* et l'équation du mouvement de l'état *final*. Cette dernière équation est linéarisée (dans II-B), puis écrite sous la forme d'une équation d'onde, avec un tenseur de rigidité équivalent. Grâce au tenseur de rigidité équivalent, cette équation d'onde permet —formellement— d'étudier la propagation d'une onde élastique dans un milieu de symétrie matérielle arbitraire, soumis à un chargement initial quelconque. Cependant la résolution de cette équation n'est pas pratique, d'une part du fait du grand nombre de paramètres à identifier (jusqu'à 86), d'autre part du fait que le tenseur de rigidité équivalent ne fait pas figurer explicitement la contrainte appliquée, ce qui ne permet pas d'étudier l'EAE. Pour ces raisons, nous restreignons notre étude (dans la sous-section III-C [p. 39]) au cas d'un matériau isotrope (dans son état *naturel* supposé non-contraint) soumis à un chargement pouvant aller jusqu'au cas triaxial. Cette simplification permet de réduire la complexité du problème (on passe de 86 à 8 paramètres) et d'écrire explicitement le tenseur de rigidité équivalent en fonction de la contrainte, ce qui représente la base sur laquelle on peut étudier l'EAE (le problème acoustoélastique direct), et à partir de cette étude voir si on peut développer des méthodes de caractérisation de la contrainte (le problème acoustoélastique inverse).

<sup>1</sup> EAE : la variation de vitesse de l'onde élastique induite par la présence d'une contrainte sur le trajet de propagation.

## I. Étude bibliographique

L'effet acoustoélastique (EAE), comme son analogue —plus connu—, l'effet photoélastique, décrit l'effet d'une contrainte mécanique sur les vitesses des ondes élastiques<sup>1</sup> (électromagnétiques pour l'effet photoélastique).

La théorie qui étudie cet effet est appelée la théorie d'acoustoélasticité (TAE). Cette théorie parfois dénommée SOL<sup>2</sup> étudie la variation de vitesse de l'onde élastique entre la propagation dans un état de référence, dit l'état *naturel*, dont les propriétés élastiques sont connues et la propagation dans un deuxième état dit *initial*, défini par la déformation élastostatique du premier. Cette variation de vitesse est faible ( $10^{-3}\%$  dans l'aluminium pour 1 MPa de contrainte appliquée d'après Pao *et al* [13] pour les ondes de volume).

La TAE est fondée sur la théorie d'élasticité non-linéaire, et l'EAE résulte de l'une des deux non-linéarités suivantes :

1. La non-linéarité géométrique, représentée par l'usage du tenseur de déformation de Lagrange qui est non-linéaire (*i.e.* la relation entre la déformation et le gradient du déplacement est non-linéaire). Cette non-linéarité ne dépend pas du matériau utilisé (d'où la dénomination de *géométrique*).
2. La non-linéarité constitutive (ou physique Johnson & Rasolofosaon [46]), représentée par une relation non-linéaire entre le tenseur de contrainte et celui de déformation. Cette non-linéarité dépend du matériau (d'où la dénomination de *constitutive*).

Suivant le matériau l'une de ces non-linéarités peut être dominante (voir l'exemple des roches Johnson & Rasolofosaon [46] où c'est la non-linéarité *constitutive* qui prédomine).

Dans la première partie de cette section (I-A), on passe en revue une série (non exhaustive) des travaux sur le développement de cette théorie et sur ses premières applications. Dans la deuxième partie (I-B), on s'intéresse plus spécifiquement aux travaux traitant de l'application de la TAE à l'estimation de l'EAE. Dans la troisième partie (I-C), on s'intéresse aux travaux traitant de l'EAE dans le cas des ondes guidées.

### A. Développement et première application

L'effet acoustoélastique a été premièrement investigué par Brillouin [47] qui a étudié le cas d'un matériau soumis à une pression hydrostatique, et a montré que les vitesses des ondes élastiques décroissent avec la pression. John [48] a étudié le même cas (pression hydrostatique), et a conclu que les ondes de cisaillement cessent de se propager, à une valeur de pression qui excède deux fois le module de cisaillement.

Tang [49] s'est basé sur les calculs de Novozilov (voir Truesdell [50]) et Bolotin [51], traitant la superposition d'une petite déformation dynamique à une déformation statique finie, et a traité le cas d'un matériau initialement isotrope et homogène, soumis à trois types de chargement:

**Une pression hydrostatique :** dans lequel il a montré que la propagation des ondes dépend de la pression, et a ensuite donné des coefficients élastiques équivalents en fonction de la pression et des coefficients élastiques de l'état non-contraint. (coefficients de Lamé)

**Une traction uniaxiale :** dans lequel il a montré que la propagation dépend de la direction (anisotropie acoustoélastique).

**Un effort de cisaillement :** dans lequel il a donné les vitesses en fonction de la contrainte et l'angle de propagation de l'onde.

On note qu'il n'a pris dans ses calculs que la non-linéarité géométrique. Ce qui a donné des vitesses qui ne dépendent que de la contrainte et les coefficients élastiques de Lamé, ce qui a priori n'est pas justifiable, puisqu'il faut les deux non-linéarités pour avoir une description complète de l'EAE (Réf. [46]). Une autre étude qui prend en compte les deux non-linéarités a été menée par Hughes & Kelly [52], qui ont repris les travaux de Murnaghan [53] sur la théorie de déformation finie (une théorie d'élasticité non-linéaire) des solides homogènes et isotropes. Hughes & Kelly [52] ont traité les deux

<sup>1</sup> Ou bien une pression dans un fluide sur les ondes acoustiques.

<sup>2</sup> SOL : Small on large (Ang) : superposition d'une petite déformation dynamique (*e.g.* l'onde élastique) à une déformation statique plus grande (*e.g.* déformation lors d'un essai de traction).

cas : pression hydrostatique et traction uniaxiale. Les auteurs ont commencé par donner les vitesses des ondes de volume – dans des directions de propagation particulières – en fonction de la pression (resp la traction), et les coefficients de Lamé et ceux de Murnaghan [53] (dits coefficients d'élasticité non-linéaire). Ils ont ensuite – connaissant les efforts appliqués – mesuré les coefficients de Murnaghan, pour le polystyrène, le fer, et le verre pyrex. Johnson & Rasolofosaon [46], se sont basés sur les travaux de Murnaghan [53], Brugger [54] et de Thurston & Brugger [55], sur la TAE, en milieu isotrope et homogène et ont traité le cas d'une pression hydrostatique et une traction uniaxiale. Dans leurs calculs les deux non-linéarités ont été traitées ce qui a donné les mêmes relations acoustoélastiques (*i.e.* relations entre la vitesse et la contrainte) trouvées par Réf. [52]. Ils ont ensuite appliqué ces relations, pour mesurer les coefficients de Murnaghan des roches (dans leur papier ces coefficients sont nommés TOE<sup>1</sup>). Ils ont montré que pour les roches, la non linéarité constitutive est dominante. Toupin & Bernstein [56] ont développé les équations dynamiques décrivant la superposition d'une petite déformation dynamique à une déformation statique finie. Ils ont étendu les résultats de Réf. [52], aux matériaux de symétrie quelconque. Ils ont ensuite donné des restrictions sur l'énergie de déformation élastique, sous lesquelles des ondes planes peuvent se propager dans un milieu initialement contraint. Biot [57] a développé une théorie d'élasticité non-linéaire, et en se basant sur cette théorie, a traité le cas d'un milieu sous différent type de chargement. Il a montré que dans le cas d'un milieu avec un gradient de pression, l'onde longitudinale se convertit en une onde transversale et vice-versa Biot [58].

## B. Estimation de l'effet acoustoélastique

L'une des applications de la théorie d'acoustoélasticité la plus intéressante, est l'estimation des variations de vitesse induites par la présence d'un état de contrainte. À partir de cette estimation des méthodes de caractérisation de contrainte, se basant sur les variations de vitesse ont été développées pour les ondes de volume / surface.

Les travaux que nous avons trouvés dans la littérature, qui traitent le problème direct, à savoir estimer la variation de vitesse induite par la contrainte, utilisent les relations acoustoélastiques développées par Hughes & Kelly. [52], ou des relations similaires, permettant de prendre en compte : des symétries matérielles quelconques (voir par exemple King & Fortunko [25]), et des propagations dans des directions arbitraires par rapport à la direction de la contrainte (Réf. [46]), ou bien une déformation plastique Pao *et al* [13].

Pour plus de clarté on reporte ici les formules de Réf [52]. Dans les deux cas de chargements traités par les auteurs.

**Pression hydrostatique :** Dans ce cas la propagation des ondes est isotrope (à cause de la symétrie du chargement) et les vitesses des ondes longitudinale et transversale sont données par :

$$v_l^2(P) = v_L^2(P=0) - \frac{P}{3\rho_0 K_0} (6l + 4m + 7\lambda + 10\mu) \quad (1-1)$$

$$v_t^2(P) = v_S^2(P=0) - \frac{P}{3\rho_0 K_0} \left( 3m - \frac{1}{2}n + 3\lambda + 6\mu \right) \quad (1-2)$$

$v_{l/t}$  : vitesse de l'onde longitudinale (resp transversale).

$P$  : pression hydrostatique.

$K_0$  : module d'élasticité isostatique.

$\lambda, \mu$  : coefficients de Lamé.

$l, m, n$  : coefficients de Murnaghan

**Traction uniaxiale :** dans ce cas, la propagation des ondes dépend de la direction (à cause du chargement anisotrope). On donne ci-après les vitesses calculées dans la Réf. [52] pour quelques

<sup>1</sup> Third Order nonlinear Elastic constants (en Ang).

directions particulières. Le lecteur intéressé peut se reporter aux travaux de Johnson & Rasolofosaon [46] dans lesquels les vitesses sont données pour une direction de propagation arbitraire.

$$v_{ix}^2(\sigma) = v_i^2(\sigma=0) - \frac{\sigma}{3\rho_0 K_0} \left( 2l + \lambda + \frac{\lambda + \mu}{\mu} (4m + 4\lambda + 10\mu) \right) \quad (1-3)$$

$$v_{iy}^2(\sigma) = v_i^2(\sigma=0) - \frac{\sigma}{3\rho_0 K_0} \left( 2l + \frac{2\lambda}{\mu} (m + \lambda + 2\mu) \right) \quad (1-4)$$

$$v_{ix}^2(\sigma) = v_i^2(\sigma=0) - \frac{\sigma}{3\rho_0 K_0} \left( m + \frac{\lambda n}{4\mu} + 4\lambda + 4\mu \right) \quad (1-5)$$

$$v_{iy}^2(\sigma) = v_i^2(\sigma=0) - \frac{\sigma}{3\rho_0 K_0} \left( m + \frac{\lambda n}{4\mu} + \lambda + 2\mu \right) \quad (1-6)$$

$$v_{iz}^2(\sigma) = v_i^2(\sigma=0) - \frac{\sigma}{3\rho_0 K_0} \left( m - \frac{n(\lambda + \mu)}{2\mu} - 2\lambda \right) \quad (1-7)$$

$\sigma$  : contrainte de traction dans la direction x.

$v_*$  : vitesses des ondes dans les direction x, y, ou z.

Pour déterminer les coefficients de Murnaghan ( $l, m, n$ ), un système de trois équations suffit. On peut remarquer que ces formules expriment le carré de la vitesse en fonction de la contrainte. Par conséquent, on peut conclure que la relation  $v(\sigma) = f(\sigma)$  est non-linéaire dans le cas général.

Ces formules sont utilisées dans le cas d'une déformation élastique d'un matériau isotrope, et pour une propagation dans la direction parallèle ou perpendiculaire à la direction de la contrainte uniaxiale appliquée. Pour traiter des cas plus complexes, plusieurs auteurs Vangi [27], Pao *et al* [13], Clark & Moulder [59] et Schneider [60] ont dérivé de la théorie d'acoustoélasticité des formules qui peuvent être écrites sous la forme générale suivante<sup>1</sup> :

$$\frac{\Delta v_{i/t}(\boldsymbol{\sigma}, \theta)}{v_{i/t}(\boldsymbol{\sigma} = 0, \theta)} = A_{i/t}(C_{ijkl}, C_{ijklmn})f(\boldsymbol{\sigma}, \theta) \quad (1-8)$$

$\Delta v_{i/t}$  : variation de vitesses des ondes longitudinale/transversale, en fonction de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et l'angle de propagation  $\theta$ .

$A_{i/t}$  : coefficients dits coefficients acoustoélastiques qui ne dépendent que des constants élastiques du matériau dans son état de référence.

$f(\boldsymbol{\sigma}, \theta)$  : une fonction *linéaire* de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , et  $\sin^2(\theta)$ .

On note que cette formule est valable également pour les ondes de Rayleigh (Duquennoy [26] et Schneider [60]) et les ondes rampantes Réf. [60]. Cette formule est dite de biréfringence, une nomenclature connue en optique. Le lecteur intéressé par l'analogie entre la photoélasticité et l'acoustoélasticité peut voir les travaux de Crecraft [61] et Nelson [62]. On note qu'un développement limité à l'ordre 1, des équations de Hughes & Kelly [52], (Éq.(1-1)-(1-7)) donne une formule similaire à (1-8).

L'usage de la formule (1-8) pour estimer les variations de vitesses a donné deux résultats, selon l'origine de la contrainte:

**La contrainte appliquée** : si la contrainte est induite par un effort qui ne déforme le matériau qu'élastiquement, la TAE (formule (1-8)) a été en bon accord avec l'expérience, et cela même en présence d'anisotropie élastique dans l'état de référence.

<sup>1</sup> On note que cette formule sous cette écriture ne se trouve pas dans les travaux cités. Cependant les formules qu'on trouve dans ces travaux peuvent toutes être écrites sous cette forme.

**La contrainte résiduelle** : si par contre l'origine de la contrainte est une déformation plastique ou un gradient de température (*e.g.* une soudure) la TAE s'est montrée incapable de donner des résultats satisfaisant.

Pour comprendre les raisons pour lesquelles la TAE s'est montrée parfois incapable d'estimer les variations de vitesses induites dans le cas où l'origine de la contrainte —résiduelle— est une déformation plastique ou une soudure. On commence par donner les différences entre les contraintes résiduelles et appliquées. Et voir si les hypothèses prises dans le développement de la TAE sont respectées. On cite également les travaux de la littérature qui correspondent à chaque cas.

## 1. Contrainte appliquée dans le régime élastique

C'est la contrainte due à un chargement appliqué au matériau. Elle s'annule si le chargement est éliminé. Cette contrainte peut être contrôlée, de telle sorte que la déformation que subie le matériau reste toujours élastique (*e.g.* essais de traction, flexion, torsion, ... dans le régime élastique). Pour ce type de contrainte la théorie est en bon accord avec les essais expérimentaux. Voir par exemple les travaux de Vangi [27] qui se basent sur ceux de Réf. [52], dans lesquels l'auteur a estimé les variations de vitesses des ondes longitudinales dans deux directions perpendiculaire dans une pièce en aluminium soumise à un effort biaxial. Nelson [62] a traité le cas d'un disque en aluminium soumis à une compression uniaxiale, et a montré que les prédictions de la TAE sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Crecraft [61] a fait des tests de tractions et de compression sur des barres en aluminium, cuivre, et fer-nickel. Il a ensuite mesuré (en utilisant les formules de Réf. [52]), les coefficients de Murnaghan pour ces trois matériaux.

## 2. Contrainte résiduelle (Schijve [63])

La contrainte résiduelle, contrairement à la contrainte appliquée, reste présente après l'élimination du chargement. On peut distinguer deux types de contrainte résiduelle :

### i. La contrainte résiduelle qui résulte d'une déformation élastique

C'est la contrainte qui se trouve dans une pièce ou dans un assemblage, comme par exemple un système vis-écrou, où la vis est en traction, et le reste est en compression. C'est aussi par exemple le cas de la roue du vélo, où les rayons sont en traction et la jante est en compression.

L'application de la TAE pour l'estimation de la variation de vitesse induite par ce type de contrainte résiduelle a donné des bons accords entre la théorie et l'expérience, comme le montrent les travaux de Clark & Moulder [59] et King & Fortunko [25]. Dans leurs travaux, la contrainte induite lors d'un procédé de freinage a été étudiée. Dans ces travaux l'expérience consiste dans un premier temps à élever la température d'une pièce en aluminium —présentant une faible anisotropie élastique initiale—, avec un trou débouchant usiné dans la profondeur, et à abaisser la température d'une barre en acier de section circulaire dont le diamètre est supérieur à celui du trou. Ensuite, les deux pièces sont assemblées et se refroidissent jusqu'à la température ambiante. L'assemblage est le siège d'une contrainte résiduelle : compression radiale centripète dans la barre et centrifuge dans la pièce. Les auteurs mesurent la contrainte résiduelle dans la pièce en aluminium en utilisant des EMAT (ElectroMagnetic Acoustic Transducer) pour générer des ondes de volume de cisaillement de polarisations orthogonales. Clark & Moulder [59] utilisent une relation de biréfringence, qui comporte un terme décrivant la variation de vitesse induite par la faible anisotropie initiale. Pour se soustraire de l'effet de cette anisotropie — qui peut introduire des variations de vitesse du même ordre de grandeur que l'EAE — une mesure préalable avait été réalisée sur la pièce avant l'assemblage, permettant de retrancher la variation de vitesse correspondante de la variation totale (après assemblage). Les variations de vitesse mesurées après cette correction sont en accord avec les prédictions de la TAE.

La capacité de la théorie à prédire les résultats expérimentaux dans ce cas peut être expliquée par le fait que les pièces sous contrainte n'ont pas dépassé leurs limites d'élasticité. Après désassemblage, les pièces

reviennent à leurs états naturel (non-contraint), ce qui rend l'expérience décrite comparable au cas précédant d'une contrainte *appliquée* en dessous de la limite d'élasticité.

## ii. La contrainte résiduelle qui résulte d'une déformation plastique, une soudure,...

Cette contrainte peut être présente dans une pièce isolée, résultant par exemple de la flexion d'une barre au-delà de la limite d'élasticité, dans laquelle les parties supérieure et inférieure<sup>1</sup> sont déformées plastiquement, alors que les parties internes<sup>2</sup> n'ont subi qu'une déformation élastique.

Dans cet exemple, la contrainte résiduelle passe de la traction (à l'extrados) à la compression (à l'intrados).

L'intégrale de la contrainte résiduelle sur l'ensemble de la pièce isolée doit être nulle. L'origine de ce type de contraintes peut être variée. Elles peuvent résulter de :

- une déformation plastique, comme décrit dans l'exemple de la flexion d'une barre ;
- une solidification rapide d'une pièce, qui engendre des contraintes de compression sur la surface et de traction dans la profondeur ;
- une solidification non-uniforme comme lors d'un soudage ;
- une transformation de phase : lors d'un traitement thermique, une transformation de phase peut prendre place. Si la nouvelle phase possède un volume plus grand que celui de la phase avant traitement (*e.g.* transformation austénite → martensite), les zones extérieures se refroidissent les premières ce qui engendre une traction des zones externes et une compression des zones internes.

L'application de la TAE pour estimer les variations de vitesse induites par ce type de contrainte rencontre deux difficultés :

1. la première concerne la propagation de l'onde qui se fait dans un milieu dont la déformation par rapport à l'état de référence n'est pas entièrement régie par la théorie de l'élasticité (par exemple dans le cas d'une déformation plastique) ;
2. la seconde concerne les propriétés élastiques utilisées dans le développement de la TAE qui peuvent être affectées par la source de contrainte résiduelle (déformation plastique, changement de phase, ...).

On passe en revue ci-après quelques travaux traitant de l'estimation des variations de la vitesse induite par la contrainte due à une déformation plastique, ou résultant d'un soudage.

### Le cas d'une déformation plastique :

Kobayashi [64] (voir Eq. (124) de Pao *et al* [13]) propose une théorie de l'acoustoplasticité dans laquelle la formule de biréfringence contient un terme supplémentaire décrivant la variation de vitesse en fonction de la déformation plastique, relativement à un état de référence, donnée par

$$\frac{(v_2^\sigma - v_1^\sigma)}{v^0} = A_E(\sigma_2 - \sigma_1) + A_P(e_2 - e_1) \quad (1-9)$$

$e_{1/2}$  : déformation plastique.

$A_*$  : coefficient acoustoélastique (resp acoustoplastique).

Cette formule a été reprise par Hirao & Pao [65] avec un terme supplémentaire qui correspond à la variation de vitesse introduite par l'anisotropie initiale. Hirao & Pao [65] traitent le cas d'une pièce en aluminium faiblement anisotrope, soumise à un effort de flexion au-delà de la limite d'élasticité. Pour comparer les variations de vitesses, les auteurs effectuent une première mesure sur la plaque dans son état naturel (avant application de contrainte) afin de quantifier l'effet de l'anisotropie initiale, puis une deuxième mesure dans l'état initial (après application de contrainte) pour quantifier les effets de l'anisotropie, de la contrainte résiduelle et de la déformation plastique et enfin une troisième mesure dans

<sup>1</sup> Près des surfaces supérieure et inférieure de la barre.

<sup>2</sup> Près de la ligne moyenne de la barre.

l'état relaxé de la pièce (après découpage de la pièce dans le but de libérer les contraintes résiduelles) afin de quantifier l'effet de l'anisotropie et la déformation plastique. Il apparaît que dans les régions déformées élastiquement (à l'intérieur de la pièce), la TAE est en bon accord avec l'expérience. Par contre dans les régions qui se sont déformées plastiquement (proches de la surface) et après libération de la contrainte résiduelle, la déformation plastique introduit des variations de vitesses qui ne peuvent pas être négligées et que la théorie d'acoustoélasticité (formule (1-8) [p. 27]) ne peut prédire. Cette incapacité se manifeste par le fait que le coefficient acoustoplastique dépend du signe de la déformation (compression/traction), en contradiction avec l'hypothèse que les coefficients ( $A_E$  et  $A_p$ ) ne dépendent que des données de l'état de référence.

Thompson *et al* [66] traitent le cas d'une plaque en aluminium soumise à un essai de traction au-delà de la limite d'élasticité, suivie d'une décharge. Les résultats de l'expérience montrent une relation linéaire entre la contrainte et la variation de vitesse du mode SH0 dans le régime élastique et une relation non linéaire dans le régime plastique, ce qui n'est pas prédit par la TAE.

**Remarque :** la non-linéarité induite dans le régime plastique est différente de celle prédite par la TAE ( Réf. [52], (Éq.(1-1)-(1-7))). Cela vient du fait que la variation de vitesse induite par les termes non-linéaires (retrouvés après un développement limité) des formules.(1-1)-(1-7), pourrait être négligée par rapport à celle induite par le terme linéaire (un facteur de  $\approx 10^{-4}$  entre les deux), pour l'aluminium (*i.e.* le matériau traité par Thompson *et al* [66]). En revanche la variation de vitesse induite par la non-linéarité dans le régime plastique de l'expérience de Réf. [66] est du même ordre de grandeur que la variation de vitesse induite dans le régime élastique (ce qui est prédit par la TAE).

Les résultats de Thompson *et al* [66] ont montré également que la variation de vitesse lors de la charge est différente de celle lors de la décharge (après la déformation plastique) ; cela suggère que la déformation plastique a modifié les propriétés élastiques –non-linéaires– de la pièce.

Crecraft [61] traite le cas d'une barre soumise à un effort de flexion au-delà de la limite d'élasticité. Il montre également que les variations de vitesses induites dans la barre ne sont pas prédites par la TAE.

### Le cas du soudage :

Tanala *et al* [67] appliquent les résultats de la TAE pour mesurer la contrainte résiduelle –près de la surface–, induite lors du soudage de deux plaques en aluminium. Les auteurs utilisent des EMAT pour générer des ondes de Rayleigh. Les mesures sont effectuées près de la zone soudée. La théorie permet de prédire la composante de la contrainte dans la direction du cordon de soudure, mais pas dans la direction transversale. Schneider [60] montre qu'en connaissant les propriétés élastiques de la soudure, et celles des zones affectées par la température, on peut appliquer la TAE pour mesurer la contrainte dans et autour de la soudure. L'auteur utilise des ondes rampantes pour mesurer la contrainte résiduelle près de la surface dans un acier durci et montre qu'il y'a un bon accord entre les résultats de la TAE et ceux de la méthode du trou incrémental<sup>1</sup>.

## C. Acoustoélasticité en ondes guidées

L'application de la théorie d'acoustoélasticité aux ondes guidées est récente et la littérature est moins riche que celle concernant les ondes de volume / surface. On fait ici une revue non exhaustive des travaux traitant la propagation des ondes de Lamb en présence de contrainte, en notant que seul le cas d'une contrainte appliquée en dessous de la limite d'élasticité est traité dans cette littérature.

Gandhi *et al* [68] ont utilisé les résultats de Pao & Gamer [69] sur la TAE et ont traité numériquement la propagation des ondes de Lamb dans une plaque soumise à une contrainte biaxiale et ont effectué des mesures dans le cas uniaxial. La variation de vitesse des modes de Lamb induite par l'application de la

<sup>1</sup> Méthode du trou incrémental : méthode semi-destructive de mesure de contrainte qui consiste à percer un trou dans la pièce et mesurer la déformation induite par la libération de la contrainte résiduelle, puis de cette déformation déduire la contrainte ; cette mesure est répétée en augmentant progressivement la profondeur du trou.



contrainte est une fonction linéaire de la contrainte, en accord avec la théorie d'acoustoélasticité pour les ondes de volume / surface (voir la formule (1-8)). Les auteurs traitent également la propagation dans plusieurs directions en maintenant fixe la valeur de la contrainte uniaxiale appliquée ; la variation de la vitesse est anisotrope, comme observé pour les ondes de volume (voir par exemple Hirao *et al* [70] et Clark & Moulder [59]). Shi *et al* [71] ont étudié numériquement le cas d'une contrainte biaxiale dans le plan et ont donné la variation de vitesse du mode fondamental symétrique de Lamb (S0) en fonction de deux coefficients acoustoélastiques et de la direction de propagation. Pei & Bond [72] traitent le cas de la propagation des modes de Lamb d'ordre supérieur, dans la direction de la contrainte uniaxiale, dans une plaque en aluminium, et montrent expérimentalement que la variation de vitesse du mode S1 (le deuxième mode symétrique de Lamb) en fonction de la contrainte est linéaire. Cette linéarité a été également validée expérimentalement par Jäger *et al* [73] pour le mode A0 (le mode fondamental antisymétrique de Lamb), dans une plaque en acier. Peddetti & Santhanam [74] traitent numériquement les variations de vitesse des modes A0, S0, A1 et S1 en fonction d'une contrainte de traction avec gradient dans l'épaisseur. Yang *et al* [75] ont étudié numériquement l'effet acoustoélastique dans un guide unidirectionnel de section arbitraire. Zuo *et al* [76] ont étudié numériquement la propagation dans une plaque soumise à un effort biaxial et une pression hydrostatique.

Cependant dans tous ces travaux relatifs au cas des ondes guidées, les auteurs ne prennent pas en compte la variation de la section du guide induite par l'application de la contrainte.

Il est important de chercher à quantifier cet effet dans le cas des ondes guidées dont les vitesses dépendent de la section. Cela a été expérimentalement observé par Murayama [77] qui a utilisé les résultats de la TAE pour estimer la contrainte uniaxiale appliquée à une éprouvette lors d'un essai de traction. L'auteur a utilisé les variations de vitesse des modes symétriques fondamentaux (SH0 et S0), et a remarqué que l'estimation utilisant le mode S0 était entachée d'une erreur plus grande que celle utilisant le mode SH0. Cela est dû au fait qu'en appliquant la contrainte, l'épaisseur de l'éprouvette varie, ce qui affecte la vitesse du mode S0 qui dépend de la fréquence et la section du guide, mais pas celle du mode SH0.

Cet effet a été également pris en compte par Treyssède [78] lors de la propagation des ondes guidées dans des câbles tressés à sept torons, soumis un à chargement uniaxial.

Les auteurs des Réf. [68, 71-76, 79] ont appliqué la TAE en faisant certaines hypothèses que nous jugeons problématiques. Ces hypothèses sont discutées en détail dans la sous-section II-C [p. 39] ; des corrections y sont proposées.

## D. Conclusion

Dans cette section nous avons vu la définition de la théorie d'acoustoélasticité, et l'application de cette théorie dans le but de mesurer les constantes d'élasticité non-linéaire introduites par Murnaghan [53]. Nous avons vu également, l'application de la théorie pour estimer les variations de vitesse induites par la contrainte résiduelle / appliquée. Nous avons noté (d'après les résultats des travaux cités), que dans le cas d'une contrainte appliquée en-dessous de la limite d'élasticité, sur un matériau dont les propriétés élastiques (linéaires et non linéaires) sont connues dans son état de référence, la théorie est capable de prédire les résultats expérimentaux, et cela reste vrai en présence d'une anisotropie élastique initiale. Par contre dans le cas où la contrainte résiduelle est induite par une déformation plastique, nous avons noté que la théorie n'a pas donné une estimation satisfaisante et que les corrections rajoutées à la théorie par quelques auteurs, pour prendre en compte l'effet de la déformation plastique ont échoué à prédire les résultats expérimentaux. Dans le cas d'une contrainte résiduelle induite par une soudure, la théorie s'est montrée efficace, à condition que les propriétés élastiques, de la soudure et ce qui l'entoure sont connues. L'application de la théorie aux ondes guidées a permis de retrouver quelques résultats qui ont été établis pour les ondes de volume / surface, tels que la linéarité entre la contrainte et la variation de vitesse, et l'anisotropie acoustoélastique. Cependant les auteurs qui ont traité le cas des ondes guidées par les plaques ont oublié de prendre en compte la variation de l'épaisseur induite par l'application de la contrainte, et ont faits quelques hypothèses qu'on a trouvée problématiques.

Dans la section suivante, on donne le développement mathématique de la théorie d'acoustoélasticité, avec l'hypothèse que la déformation que subit le matériau reste dans le régime élastique, et que les propriétés élastiques sont homogènes.

## II. Développement de la TAE

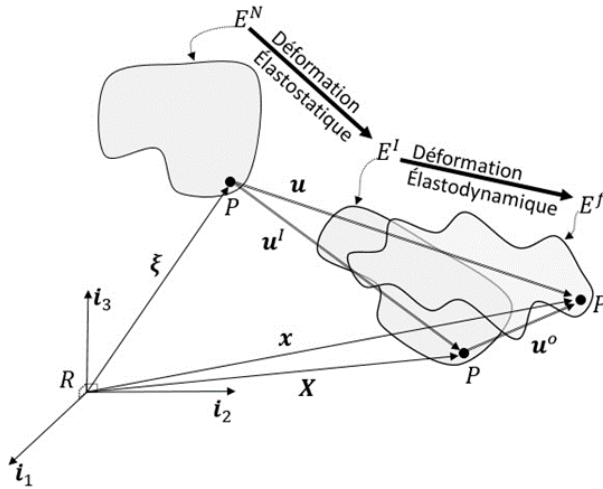
Cette section comporte trois sous-sections. Dans la première (II-A) on présente le cadre général de la théorie d'acoustoélasticité. Dans la deuxième (II-B) nous suivons les développements de Toupin & Bernstein [56] et Norris [80] de cette théorie pour arriver à une équation d'onde avec un tenseur de rigidité équivalent qui décrit l'élasticité d'un milieu de symétrie matérielle quelconque soumis à un chargement statique arbitraire. Dans la troisième (II-C) on écrit explicitement ce tenseur de rigidité en fonction du tenseur de contrainte.

### A. Équation du mouvement

L'effet acoustoélastique provient de la superposition d'une déformation dynamique, à une déformation statique. On commence donc par définir trois états du matériau :

1. l'état *naturel* ( $E^N$ ), état de référence dont on connaît les propriétés élastiques (linéaires et non-linéaires), et par rapport auquel on veut mesurer les variations de vitesses. On note que cet état de référence n'est pas nécessairement non-contraint ; il peut être soumis à des contraintes résiduelles / appliquées, mais on doit en connaître les propriétés élastiques ;
2. l'état *initial* ( $E^I$ ), état du matériau après avoir été déformé élastiquement par rapport à son état *naturel* (e.g. une pièce en traction). C'est cette déformation dont on veut mesurer l'effet sur les vitesses des ondes élastiques ;
3. l'état *final* ( $E^f$ ), état du matériau où on vient superposer une onde élastique (une déformation infinitésimale) à la déformation statique présente dans l'état *initial*.

Pour illustration, on présente la figure suivante où un point matériel est considéré dans les différents états successifs.



**Fig. 1-1** : Un matériau élastique dans les trois états, naturel ( $E^N$ ) initial ( $E^I$ ), et final ( $E^f$ ). Le point P est un point matériel repéré dans le repère cartésien  $R$  par ses trois positions :  $\xi$  dans  $E^N$ ,  $X$  dans  $E^I$  et  $x$  dans  $E^f$ .

On utilise la description Lagrangienne du problème : soit un point matériel P, et un repère cartésien stationnaire et indépendant du matériau  $R(i_1, i_2, i_3)$ . Le point P se trouve dans l'état *naturel* à la position  $\xi$ , dans l'état *initial* (après la déformation élastostatique) à la position  $X$ , et dans l'état *final* à la position  $x$ . Toutes les grandeurs physiques de l'état *final* dépendent du temps ; cependant pour rendre l'écriture plus compacte, cette dépendance n'est pas explicitement notée dans les expressions qui suivent.

On définit les déplacements du point matériel d'un état à un autre :

$$u^I = X - \xi, \quad u^o = x - X, \quad \text{et} \quad u = x - \xi \quad (1-10)$$

Ces déplacements décrivent (respectivement) : le déplacement du point matériel entre sa position dans l'état *naturel*, à l'état *initial* ( $u^I$ ), le déplacement associé à l'onde élastique ( $u^o$ ), qui est interprété par

la vibration dynamique du point matériel autour de sa position initiale. Et le déplacement du point matériel de l'état *naturel* à l'état *final* ( $\mathbf{u}$ ).

On définit également les tenseurs de déformation et contrainte suivants (de l'état *naturel* à l'état *final*) Réf. [1 et 81]:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{N} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \quad (1-11)$$

$J$  : le déterminant du gradient de transformation (tenseur)  $\mathbf{F}$ .

Le tenseur  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation vectorielle  $\boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{x}$ . Le tenseur  $\mathbf{E}$  est le tenseur de déformation *non-linéaire* de Lagrange de l'état *naturel* à l'état *final*.  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy.  $\mathbf{N}$  est le tenseur nominal de contrainte (égal à la transposée du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff).

$W$  est l'énergie de déformation élastique de l'état naturel à l'état final. Cette énergie peut être écrite comme le développement limité en  $\mathbf{E}$  à l'ordre 3 sous la forme suivante (Toupin & Bernstein [56] et Norris [80]) :

$$W = \frac{1}{2!} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklmn} E_{ij} E_{kl} E_{mn} \quad (1-12)$$

Ce développement débute par un terme quadratique ( $C_{ijkl} E_{ij} E_{kl}$ ). Cela vient du fait que l'énergie de déformation doit s'annuler à déformation nulle (ce qui élimine le terme constant dans le développement limité), et doit présenter un minimum à déformation nulle (ce qui élimine le terme linéaire dans le développement limité). Dans le cadre de l'élasticité linéaire, seul le terme quadratique ( $C_{ijkl} E_{ij} E_{kl}$ ) est conservé. Son gradient par rapport à la déformation ( $\mathbf{E}$ ) donne la relation constitutive *linéaire* entre la déformation et la contrainte (loi de Hooke généralisée).

On définit la *non-linéarité constitutive* par l'usage du terme supplémentaire ( $C_{ijklmn} E_{ij} E_{kl} E_{mn}$ ) dans la formule de l'énergie de déformation. La prise en compte de ce terme permet de faire apparaître l'EAE. Les tenseurs  $C_{ijkl}$  et  $C_{ijklmn}$  sont les tenseurs de rigidité du second et troisième ordre, dans l'état *naturel*, définis par :

$$C_{ijkl} = \left. \frac{\partial W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \quad (1-13)$$

$$C_{ijklmn} = \left. \frac{\partial W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl} \partial E_{mn}} \right|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \quad (1-14)$$

En utilisant le fait que le tenseur  $\mathbf{E}$  est symétrique et que  $\partial W / \partial E_{ij} \partial E_{kl} = \partial W / \partial E_{kl} \partial E_{ij}$  on retrouve les symétries des tenseurs de rigidité :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{jilk} = \dots \quad (1-15)$$

$$C_{ijklmn} = C_{klijmn} = C_{klmni j} = \dots \quad (1-16)$$

On donne les équations d'équilibre dans l'état *initial* et du mouvement dans l'état *final* (Réf. [56, et 80]) :

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N}^I = 0, \quad \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1-17)$$

$\rho_0$  : la densité du matériau dans l'état *naturel*.

$\mathbf{N}^I$  : le tenseur de contrainte nominale de l'état *naturel* à l'état *initial*.

Le choix d'écrire les équations d'équilibre et du mouvement en utilisant les variables  $(\rho_0, \mathbf{N}$  et  $\boldsymbol{\xi}$ ) au lieu de  $(\rho, \boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{x}$ ) [ $\rho$  étant la densité du matériau dans le l'état *initial* définie par  $\rho = \rho_0/J$ ] permet d'utiliser les propriétés élastiques du matériau dans son état de référence, qui sont supposées connues. On rappelle que les deux choix sont équivalents (voir Réf [56] et Ogden [81]).

En notant que le déplacement initial est statique et que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + \mathbf{u}^o$ , on réécrit l'équation du mouvement sous la forme suivante :

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^o}{\partial t^2} \quad (1-18)$$

L'objectif suivant va être de transformer cette équation en une équation d'onde. On fera apparaître explicitement dans le membre de gauche le Laplacien du déplacement de l'onde, en considérant l'état *final* comme une petite perturbation de l'état *initial*, puis en linéarisant le problème autour de ce dernier.

## B. Linéarisation du problème

Notre objectif maintenant est de linéariser l'équation du mouvement<sup>1</sup>. Pour cela il faut écrire  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N}$  en fonction du déplacement de l'onde, et des quantités qui dépendent de l'état *initial* ou *naturel*. On commence tout d'abord par écrire le tenseur de déformation de Lagrange en fonction du déplacement :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} - \delta_{ij} \right), \quad \text{avec } x_k = u_k + \xi_k \quad (1-19)$$

ce qui donne

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_j} \right) \quad (1-20)$$

*La non-linéarité géométrique* : on remarque que la relation  $\mathbf{E} = \mathbf{f}(\partial \mathbf{u} / \partial \boldsymbol{\xi})$  est non-linéaire, cette non-linéarité dite géométrique est indépendante des propriétés élastiques du matériau. Sa prise en compte permet de donner naissance à l'EAE, on peut voir par exemple dans l'étude de Tang [49], où il n'a considéré que cette non-linéarité. Cependant on note que la description complète de la théorie d'acoustoélasticité nécessite la prise en compte des deux types de non-linéarité.

Écrivons à présent le tenseur de contrainte nominale (donné par Éq.(1-11)) en fonction du tenseur de déformation de Lagrange  $\mathbf{E}$ . On a :

$$N_{ab} = \frac{\partial W}{\partial E_{ap}} F_{pb}, \quad (1-21)$$

en utilisant  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi}$  on trouve

$$F_{pb} = \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} + \delta_{pb}, \quad (1-22)$$

on différencie l'énergie par rapport à  $E_{ap}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial E_{ap}} &= \frac{1}{2} (C_{ijkl} \delta_{ia} \delta_{jp} E_{kl} + C_{ijkl} E_{ij} \delta_{ka} \delta_{lp}) \\ &+ \frac{1}{3!} (C_{ijklmn} \delta_{ia} \delta_{jp} E_{kl} E_{mn} + C_{ijklmn} E_{ij} \delta_{ka} \delta_{lp} E_{mn} + C_{ijklmn} E_{ij} E_{kl} \delta_{ma} \delta_{np}). \end{aligned} \quad (1-23)$$

<sup>1</sup> La non-linéarité de l'équation du mouvement vient de la non-linéarité entre le tenseur nominal de contrainte et le gradient du déplacement

En notant qu'il y a une sommation sur tous les indices  $i, j, k, l, et m$  et en utilisant les symétries des tenseurs de rigidité, on trouve :

$$\frac{\partial W}{\partial E_{ap}} = C_{apkl} E_{kl} + \frac{1}{2} C_{apklmn} E_{kl} E_{mn} \quad (1-24)$$

Le tenseur de contrainte  $\mathbf{N}$  s'écrit alors en fonction du tenseur de déformation de Lagrange sous la forme suivante :

$$N_{ab} = C_{abkl} E_{kl} + \frac{1}{2} C_{abklmn} E_{kl} E_{mn} + C_{apkl} E_{kl} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} + \frac{1}{2} C_{apklmn} E_{kl} E_{mn} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} \quad (1-25)$$

En remplaçant le tenseur de déformation  $\mathbf{E}$  par son expression en fonction du gradient du déplacement Éq.(1-20), on trouve :

$$\begin{aligned} N_{ab} = & \frac{1}{2} C_{abkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_l} \right) + \frac{1}{8} C_{abklmn} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_l} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_l} \right) \\ & + \frac{1}{2} C_{apkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_l} \right) \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} \\ & + \frac{1}{8} C_{apklmn} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_l} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_l} \right) \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} \end{aligned} \quad (1-26)$$

En regroupant les termes selon les puissance de  $\partial \mathbf{u} / \partial \boldsymbol{\xi}$  on trouve :

$$\begin{aligned} N_{ab} = & \frac{1}{2} C_{abkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} \right) + \frac{1}{2} C_{abkl} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_l} \\ & + \frac{1}{8} C_{abklmn} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_m}{\partial \xi_n} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_n}{\partial \xi_m} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_m}{\partial \xi_n} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_n}{\partial \xi_m} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_l} \right) \\ & + \frac{1}{2} C_{apkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_b} \right) + O \left( \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (1-27)$$

Dans le cadre de notre étude on s'intéresse à des matériaux métalliques sous chargement en-dessous de la limite d'élasticité ce qui permet de faire l'hypothèse que la déformation de l'état *naturel* à l'état *final* vérifie  $|\partial \mathbf{u} / \partial \boldsymbol{\xi}| \ll 1$  on peut donc négliger les termes d'ordres supérieurs (*i.e.*  $O((\partial \mathbf{u} / \partial \boldsymbol{\xi})^3)$ ). En notant qu'il y a une sommation sur tous les indices  $k, l, \alpha, \beta, m, n, et p$  on peut réécrire le tenseur de contrainte sous la forme suivante (Norris [80] et Eldevik [82]):

$$N_{ab} = C_{abkl} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{1}{2} M_{baklmn} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_m}{\partial \xi_n} \quad (1-28)$$

Avec

$$M_{abklmn} = C_{abklmn} + C_{abln} \delta_{km} + C_{bnkl} \delta_{am} + C_{blmn} \delta_{ak} \quad (1-29)$$

$\mathbf{N}$  est ainsi écrit en fonction des tenseurs de rigidité de l'état *naturel*, et du gradient du déplacement dans l'état *final* ( $\mathbf{u}$ ) par rapport à la position dans l'état *naturel* ( $\boldsymbol{\xi}$ ). À ce stade, deux choix sont possibles, suivant la position du point matériel.

Le premier choix consiste à utiliser la position dans l'état *naturel*  $\boldsymbol{\xi}$ . Il convient bien au cas où les capteurs utilisés pour mesurer les variations de vitesse sont « collés » à la pièce (*e.g.* des pastilles PZT). Dans ce cas la distance entre les capteurs dans l'état *naturel* est différente de celle dans l'état *initial* (après la déformation élastostatique) ; une correction est donc ajoutée pour prendre en compte cette variation de distance (voir Gandhi *et al* [68]).

Le second choix consiste à utiliser la position dans l'état *initial*. Ce choix est plus judicieux dans le cas où les capteurs ne sont pas en contact avec la pièce (*e.g.* des EMAT), car la distance entre les capteurs peut être maintenue fixe avant et après la déformation élastostatique (*naturel*  $\rightarrow$  *initial*) et il n'est donc pas nécessaire de faire une correction sur les distances.

Dans cette étude où on a en perspective l'utilisation d'EMAT pour les transductions, on fait le second choix, ce qui revient à réécrire le gradient par rapport à  $\xi$  en fonction du gradient par rapport à  $\mathbf{X}$ . Pour ce faire, on réécrit la dérivée par rapport à  $\xi_i$  en fonction du déplacement initial (en utilisant la règle de la dérivée composée  $\xi = f(\mathbf{X})$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{u}^I + \xi$ ). On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial}{\partial X_r} \frac{\partial X_r}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial X_r} \frac{\partial (u_r^I + \xi_r)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_r} \frac{\partial u_r^I}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_r} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_r} \frac{\partial u_r^I}{\partial \xi_i} \right) u_r^I \\ &= \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial X_r} + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_r} \frac{\partial u_r^I}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial X_r} \end{aligned} \quad (1-30)$$

En négligeant les termes supérieurs en  $\partial u^I / \partial \mathbf{X}$ , on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial X_r} \quad (1-31)$$

En remplaçant dans l'équation (1-28), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{ab}}{\partial \xi_a} &= \frac{\partial N_{ab}}{\partial X_a} + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_a} \frac{\partial N_{ab}}{\partial X_r} = \frac{\partial}{\partial X_a} \left( C_{abkl} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{1}{2} M_{baklmn} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_m}{\partial \xi_n} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_r} \left( C_{abkl} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} + \frac{1}{2} M_{baklmn} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_m}{\partial \xi_n} \right) \end{aligned} \quad (1-32)$$

Jusqu'ici, aucune hypothèse n'a été faite sur la variation spatiale des tenseurs de rigidité dans l'état *naturel* : ces tenseurs (représentant l'élasticité du matériau dans son état de référence) sont considérés homogènes. Ceci permet d'écrire l'équation du mouvement (1-18) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{ab}}{\partial \xi_a} &= C_{abkl} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_l} + \frac{\partial^2 u_r^I}{\partial X_a \partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_r} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_r} \frac{\partial u_r^I}{\partial X_l} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_a} C_{abkl} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_l} + \frac{\partial^2 u_r^I}{\partial X_r \partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_r} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_s} \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} M_{baklmn} \left( \frac{\partial}{\partial X_a} + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_r} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} \\ &= C_{abkl} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_l} + \frac{\partial^2 u_r^I}{\partial X_a \partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_r} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_r} \frac{\partial u_r^I}{\partial X_l} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_a} C_{abkl} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_l} + \frac{\partial^2 u_r^I}{\partial X_r \partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_r} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_s} \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} M_{baklmn} \left[ \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_a \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_p^I}{\partial X_a \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} \right. \right. \\ &\quad + \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_a \partial X_p} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_s^I}{\partial X_a \partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} \\ &\quad + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_a \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} + \frac{\partial^2 u_s^I}{\partial X_a \partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial^2 u_p^I}{\partial X_a \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} \\ &\quad + \left. \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_a \partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_a \partial X_p} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_r^I}{\partial X_a} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_r \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_p^I}{\partial X_r \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_l} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} \right. \\ &\quad + \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_r \partial X_p} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_s^I}{\partial X_r \partial X_l} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_r \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \\ &\quad + \frac{\partial^2 u_s^I}{\partial X_r \partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial^2 u_p^I}{\partial X_r \partial X_n} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_r \partial X_s} \frac{\partial u_m}{\partial X_p} \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_s^I}{\partial X_l} \frac{\partial u_p^I}{\partial X_n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X_r \partial X_p} \frac{\partial u_k}{\partial X_s} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_b^o}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1-33)$$

**Linéarisation de l'équation du mouvement :** jusqu'ici, aucune hypothèse n'a été faite sur l'amplitude de la déformation élastodynamique (*initial*  $\rightarrow$  *final*) par rapport à la déformation

élastostatique (*naturel*  $\rightarrow$  *initial*). L'équation précédente est donc valide pour le traitement de la propagation des ondes d'amplitude finie. Le lecteur intéressé par l'acoustique non-linéaire peut se référer aux travaux de Zarembko & Krasil'nikov [83] et Davison [84].

À partir de maintenant, on fait l'hypothèse que la déformation dynamique (*i.e.* l'onde élastique) est infinitésimale et est très petite devant la déformation statique. En remplaçant  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{u}^I + \mathbf{u}^o$  dans l'Éq.(1-33) le membre de gauche dans l'équation du mouvement peut être réécrit comme la somme de quatre termes :

$$\frac{\partial N_{ab}}{\partial \xi_a} = f_0(u^I) + f_1(u^o \cdot u^I) + f_d(u^o) + f_{>1}(u^o \cdot u^I) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_b^o}{\partial t^2} \quad (1-34)$$

Le premier terme ( $f_0$ ) ne dépend que des dérivées du déplacement initial par rapport à  $\mathbf{X}$  ; ce terme est statique et est nul du fait qu'il représente l'équation d'équilibre  $\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{N}^I = \mathbf{0}$ . Le deuxième terme ( $f_1$ ) ne dépend que des dérivées du produit  $\mathbf{u}^o \cdot \mathbf{u}^I$  par rapport à  $\mathbf{X}$ . Le troisième terme ( $f_d$ ) ne dépend que du déplacement de l'onde  $\mathbf{u}^o$  ; ce terme est négligeable devant le deuxième terme du fait qu'on a supposé que la déformation dynamique est très petite devant la déformation statique. Le quatrième terme ( $f_{>1}$ ) contient les ordres supérieurs des dérivées par rapport à  $\mathbf{X}$  du produit  $\mathbf{u}^o \cdot \mathbf{u}^I$  ; ce terme est également négligeable devant le deuxième terme, du fait que l'on ne s'intéresse qu'aux matériaux métalliques soumis à des chargements en dessous de la limite d'élasticité, si bien que la déformation statique vérifie  $|\partial \mathbf{u}^I / \partial \mathbf{X}| \ll 1$ .

Dès lors, l'équation du mouvement (1-18) peut s'écrire formellement comme une équation d'onde avec un tenseur de rigidité équivalent Norris [80] et Eldevik [82] :

$$C_{baki}^{eq} \frac{\partial^2 u_k^o}{\partial X_a \partial X_l} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_b^o}{\partial t^2} \quad (1-35)$$

Le tenseur de rigidité équivalent est égal à la somme des trois termes suivants :

$$\mathbf{C}^{eq} = \mathbf{C} + \mathbf{C}^{NL-Geom} + \mathbf{C}^{NL-Cons} \quad (1-36)$$

$\mathbf{C}$  : tenseur de rigidité du second ordre, du matériau dans son état de référence,

$\mathbf{C}^{NL-Geom}$  : tenseur de rigidité qui provient de la prise en compte de la *non-linéarité géométrique*, vaut

$$C_{ijkl}^{NL-Geom} = \delta_{ik} C_{jlqr} \frac{\partial u_q^I}{\partial X_r} + C_{rjkl} \frac{\partial u_i^I}{\partial X_r} + C_{irkl} \frac{\partial u_j^I}{\partial X_r} + C_{ijrl} \frac{\partial u_k^I}{\partial X_r} + C_{ijkr} \frac{\partial u_l^I}{\partial X_r} \quad (1-37)$$

$\mathbf{C}^{NL-Cons}$  : tenseur de rigidité qui provient de la prise en compte de la *non-linéarité constitutive*, s'écrit

$$C_{ijkl}^{NL-Cons} = C_{ijklmn} \frac{\partial u_m^I}{\partial X_n} \quad (1-38)$$

L'équation d'onde (1-35) décrit la propagation d'une onde élastique dans un matériau soumis à un chargement statique initial. La forme du tenseur de rigidité équivalent donnée permet de traiter l'EAE pour des ondes de volume, de surface ou guidées, dans un matériau de symétrie quelconque soumis à un chargement arbitraire. Cependant la résolution de cette équation pose une difficile question pratique, puisqu'il faut connaître le gradient du déplacement, les tenseurs de rigidité du second et du troisième ordre : dans le cas général, le problème contient 86 (9 + 21 + 56) paramètres à identifier<sup>1</sup>. Pour lever cette difficulté, la littérature s'est essentiellement intéressée à des chargements relativement simples (hydrostatique, ou bi-axiaux), appliqués à des matériaux isotropes (dans leur état *naturel*). Même lorsqu'une anisotropie élastique initiale est prise en compte, la résolution ne passe pas par l'identification des paramètres matériaux, mais plutôt par l'élimination de son effet à travers une mesure dans l'état

<sup>1</sup> 9 composantes du tenseur du gradient du déplacement, 21 + 56, paramètres pour les tenseurs de rigidité du second et troisième ordre dans le cas d'une symétrie triclinique.



non-contraint que l'on retranche de celle effectuée une fois le chargement appliqué (voir Clark & Moulder [59]).

Par ailleurs, l'expression du tenseur de rigidité équivalent ne fait pas explicitement apparaître le tenseur de contrainte de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ). Cela est particulièrement problématique dans le cadre de la résolution du problème acoustoélastique direct consistant à étudier l'effet de la contrainte sur les vitesses des ondes élastiques. Cela l'est également dans le cadre de la résolution du problème acoustoélastique inverse consistant à trouver la contrainte à partir de variations de vitesses.

Pour aller plus loin, il est donc nécessaire de réduire la complexité du problème : nous nous restreignons dans ce qui suit au cas d'un matériau isotrope, mais considérons un chargement pouvant aller jusqu'au cas triaxial.

### C. Expression du tenseur de rigidité en fonction de la contrainte

L'écriture explicite de  $\mathbf{C}^{eq}$  en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}$  est fondamentale pour pouvoir étudier les effets de la contrainte sur les vitesses des ondes élastiques. Pour simplifier la formule du tenseur de rigidité, on traite le cas d'un matériau isotrope<sup>1</sup> dans son état de référence.

On présente ici une méthode qui diffère de celle qu'on trouve dans la littérature Réf. [68, 71-76, 79]. En effet, nous avons jugé problématiques des hypothèses faites dans la littérature, car inconsistantes avec le développement de la théorie.

Dans les travaux Réf. [68, 71-76, 79], les auteurs utilisent le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff, et font l'hypothèse que dans l'état *initial*, ce tenseur est égal au tenseur de contrainte de Cauchy. Ils supposent de plus que ce tenseur est *linéairement* lié à la partie *linéaire* du tenseur de déformation de Lagrange.

Par exemple les équations (6), (11) et (13) de Réf [68] fournissent :

$$\mathbf{T}_{ij}^I = \sigma_{ij}^I = C_{ijkl} e_{kl}^I \quad (1-39)$$

$\mathbf{T}^I$  étant le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff, et  $\mathbf{e}^I$  est la partie linéaire du tenseur de déformation de Lagrange  $\mathbf{E}^I$  de l'état *naturel* à l'état *initial*.

Les hypothèses faites dans les Réf. [68, 71-76, 79] sont problématiques en ce qu'elles éliminent les deux non-linéarités (constitutive et géométrique) dans l'état *initial*. Cela est inconsistant avec la théorie d'acoustoélasticité : i) d'une part l'effet acoustoélastique n'apparaît que si l'une de ces non-linéarités est prise en compte. ii) d'autre part si la déformation statique initiale est traitée *linéairement*, il faudrait qu'il en soit de même, *a fortiori*, pour la déformation dynamique, qui elle, est *très faible* comparée à la déformation statique, ce qui élimine par conséquent toutes les sources de non-linéarité dans le développement de la théorie de l'acoustoélasticité.

Pour cette raison, nous présentons ici une méthode qui ne fait aucune approximation sur le tenseur de contrainte, et qui conserve les deux non-linéarités. Cette méthode est une généralisation de celle présentée par Abiza *et al* [85].

Dans le reste de cette section on s'intéresse à la déformation de l'état *naturel* à l'état *initial*.

L'hypothèse d'isotropie dans l'état *naturel* simplifie la formule de l'énergie de déformation, étant donné que celle-ci est maintenant invariante par changement de repère. Elle ne dépend donc que des invariants du tenseur de déformation de Lagrange, à savoir :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{E}^I), \quad I_2 = \text{tr}(\mathbf{E}^{I^2}), \quad I_3 = \text{tr}(\mathbf{E}^{I^3}) \quad (1-40)$$

$\mathbf{E}^I$  : tenseur de déformation de Lagrange de l'état *naturel* à l'état *initial*.

L'énergie de déformation (de l'état *naturel* à l'état *initial*) est donnée pour un matériau isotrope élastique sous la forme suivante (Abiza *et al* [85]):

<sup>1</sup> Dans tout ce document le matériau est élastiquement isotrope dans son état de référence.

$$W^I = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right) I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{n}{3} I_3 + \left(m - \frac{n}{2}\right) I_1 I_2 + \left(\frac{l - m + \frac{n}{2}}{3}\right) I_1^3 \quad (1-41)$$

$(\lambda, \mu)$  et  $(l, m, n)$  : sont respectivement les coefficients de Lamé et de Murnaghan.

Le lecteur intéressé peut se référer à Marckmann & Verron [86] pour un résumé de différentes formes d'énergie de déformation pour un matériau isotrope.

La nouvelle formulation de l'énergie permet d'expliciter les tenseurs de rigidité du second et troisième ordre en fonction des coefficients de Lamé et de Murnaghan. On rappelle leurs définitions ci-après :

$$C_{ijkl} = \left. \frac{\partial W^I}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} \right|_{\mathbf{E}^I = \mathbf{0}} \quad (1-42)$$

$$C_{ijklmn} = \left. \frac{\partial W^I}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I \partial E_{mn}^I} \right|_{\mathbf{E}^I = \mathbf{0}} \quad (1-43)$$

En remplaçant par la nouvelle forme de l'énergie, on trouve pour  $C_{ijkl}$  :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} \left( \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right) I_1^2 - 2\mu I_2 \right) = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right) \frac{\partial^2 I_1^2}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} - 2\mu \frac{\partial^2 I_2}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} \quad (1-44)$$

Pour calculer les dérivées des invariants par rapport à la déformation. On rappelle la formule de différentiation de la trace d'une fonction matricielle par rapport à une matrice.

Soit  $\mathbf{X}$  une matrice et  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ , une fonction matricielle qui dépend de la matrice  $\mathbf{X}$ , si  $\mathbf{F}$  est différentiable par rapport à  $\mathbf{X}$  (jusqu'à un ordre arbitraire) on a :

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X})^T \quad (1-45)$$

$f$  : la dérivée scalaire de la fonction  $F$ .

En utilisant cette règle et en rappelant que le tenseur de déformation est symétrique on trouve les dérivées des invariants :

$$\frac{\partial I_1^2}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} = \frac{\partial (\text{tr}(\mathbf{E}^I))^2}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} = 2\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (1-46)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} = \frac{\partial [\text{tr}(\mathbf{E}^I)^2]}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1-47)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I \partial E_{mn}^I} = \frac{\partial [\text{tr}(\mathbf{E}^I)^3]}{\partial E_{ij}^I \partial E_{kl}^I \partial E_{mn}^I} = \frac{3}{2} (\delta_{ik}I_{jlmn} + \delta_{il}I_{jkmn} + \delta_{jk}I_{ilmn} + \delta_{jl}I_{ikmn}) \quad (1-48)$$

avec  $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

Les tenseurs de rigidité du second et troisième ordre pour un matériau isotrope s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1-49)$$

$$C_{ijklmn} = (2l - 2m + n)\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + (2m - n)(\delta_{ij}I_{klmn} + \delta_{kl}I_{mnij} + \delta_{mn}I_{ijkl}) + \frac{1}{2}n(\delta_{ik}I_{jlmn} + \delta_{il}I_{jkmn} + \delta_{jk}I_{ilmn} + \delta_{jl}I_{ikmn}) \quad (1-50)$$

L'hypothèse d'isotropie a permis de réduire le nombre de constantes d'élasticité du tenseur de rigidité du second ordre de 21 à 2, et de celles du tenseur de troisième ordre de 56 à 3. En prenant en compte le chargement, ce sont désormais  $2 + 3 + 9 = 14$  paramètres qui interviennent dans le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$  dont 5 sont intrinsèques au matériau et 9 sont extrinsèques, liés au chargement appliqué. Dans le paragraphe suivant, on spécifie le type du chargement que nous allons étudier dans ce document.

### Déformation homogène :

Dans la formule du tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$ , le chargement est donné sous la forme du gradient du déplacement  $\partial u_i^I / \partial X_j$ . Nous souhaitons l'écrire en fonction du tenseur de contrainte de Cauchy, appelé aussi *true stress* en anglais.

On rappelle que le tenseur de déformation de Lagrange est symétrique (et réel) ; il est donc diagonalisable. On définit  $(v_1, v_2, v_3)$  comme la base orthonormée formée par ses vecteurs propres. On fait le choix de faire coïncider cette base avec celle du repère  $R$  (lié à la pièce). On s'intéresse maintenant à une déformation homogène du matériau isotrope dans ce repère. Cette déformation (voir Ogden [81]) est donnée par :

$$X_1 = \lambda_1 \xi_1, \quad X_2 = \lambda_2 \xi_2, \quad X_3 = \lambda_3 \xi_3 \quad (1-51)$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  : Sont appelées les extensions principales<sup>1</sup>.

Le tenseur du gradient du déplacement qui apparaît dans la formule du tenseur de rigidité équivalent peut s'écrire en fonction de  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  :

$$\frac{\partial u_i^I}{\partial X_j} = \frac{\partial (X_i - \xi_i)}{\partial X_j} = (\lambda_i - 1) \delta_{ij} \quad (1-52)$$

L'hypothèse d'une déformation homogène, a permis de réduire le nombre de terme dans le tenseur du gradient du déplacement, de 9 à 3. Nous nous retrouvons donc avec un tenseur de rigidité équivalent qui ne dépend que de 8 paramètres  $(\lambda, \mu, l, m, n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  au lieu de 86 dans le cas d'une symétrie triclinique avec chargement quelconque. La nouvelle formule du tenseur de rigidité équivalent est :

$$C_{ijkl}^{eq} = C_{ijkl}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l - 3) + \delta_{ik} C_{jlqq}(\lambda_q - 1) + C_{ijklmm}(\lambda_m - 1) \quad (1-53)$$

Pour faire apparaître maintenant le tenseur de contrainte de Cauchy dans l'expression du  $C_{ijkl}^{eq}$ , on commence par expliciter l'énergie de déformation en fonction de  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

En remplaçant le tenseur de transformation  $(\partial X_k / \partial \xi_i)$  par sa valeur dans l'expression de  $\mathbf{E}^I$  (Éq.(1-20)), on trouve :

$$E_{ij}^I = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial X_k}{\partial \xi_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \delta_{ij} = E_{ii}^I \delta_{ij} \quad (1-54)$$

ce qui donne les invariants sous la forme suivante :

$$I_1 = tr(\mathbf{E}^I) = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (1-55)$$

$$I_2 = tr(\mathbf{E}^{I^2}) = \frac{1}{4} ((\lambda_1^2 - 1)^2 + (\lambda_2^2 - 1)^2 + (\lambda_3^2 - 1)^2) \quad (1-56)$$

$$I_3 = det(\mathbf{E}^{I^3}) = \frac{1}{8} ((\lambda_1^2 - 1)^3 + (\lambda_2^2 - 1)^3 + (\lambda_3^2 - 1)^3) \quad (1-57)$$

L'énergie de déformation s'écrit alors explicitement en fonction de  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , comme :

<sup>1</sup> Principal stretches (Ang)

$$\begin{aligned}
 W^I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \left( \frac{l}{24} + \frac{m}{12} \right) (\lambda_1^6 + \lambda_2^6 + \lambda_3^6) + \left( \frac{l}{8} \right) (\lambda_1^2 \lambda_2^4 + \lambda_1^4 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^4 + \lambda_1^4 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^4 + \lambda_2^4 \lambda_3^2) \\
 & + \left( \frac{l}{4} - \frac{m}{4} + \frac{n}{8} \right) \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \left( \frac{\lambda}{8} + \frac{\mu}{4} - \frac{3l}{8} - \frac{m}{4} \right) (\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4) \\
 & + \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{3l}{4} + \frac{m}{4} - \frac{n}{8} \right) (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2) - \left( \frac{3\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} - \frac{9l}{8} - \frac{n}{8} \right) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \\
 & + \frac{9\lambda}{8} + \frac{3\mu}{4} - \frac{9l}{8} - \frac{n}{8}
 \end{aligned} \tag{1-58}$$

On rappelle maintenant que le tenseur de contrainte de Cauchy est symétrique. Le lecteur intéressé peut en voir la démonstration de Landau & Lifshitz [1]. Ce tenseur est donc diagonalisable, soit  $(w_1, w_2, w_3)$  la base de vecteurs propres. On rappelle que pour un matériau isotrope, les directions principales de contrainte sont identiques aux directions principales de déformation. On peut donc faire coïncider cette base à celle du repère  $R$ , qui devient dorénavant le repère principal. Nous nous intéressons à présent à un chargement du type  $\sigma^I = \text{diag}(\sigma_1^I, \sigma_2^I, \sigma_3^I)$  tel que les  $\sigma_i^I$  sont les contraintes principales, et les déformations (principales) qui en résultent sont notées  $E_i$ . Pour avoir des déformations homogènes, on se place dans le cadre d'étude des matériaux métalliques comme l'aluminium ou l'acier et on fait l'hypothèse que le chargement ne dépasse pas la limite d'élasticité. Sous cette condition, les déformations principales induites par le chargement sont homogènes. On peut donc utiliser la formule de l'énergie pour un matériau isotrope se déformant d'une manière homogène.

En utilisant la définition du tenseur de contrainte de Cauchy ( *i.e.*  $\sigma^I = (1/J^I) \mathbf{F}^I \partial W^I / \partial \mathbf{F}^I$  ) on peut écrire les  $\sigma_i^I$  en fonction des  $\lambda_i$ . On rappelle que :

$$F_{ij}^I = \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} = F_{ii}^I = \lambda_i \delta_{ij} \Rightarrow \sigma_i^I = \frac{1}{J^I} \frac{\partial W^I}{\partial F_{ii}^I} F_{ii}^I = \frac{1}{J^I} \frac{\partial W^I}{\partial \lambda_i} \left( \frac{\partial F_{ii}^I}{\partial \lambda_i} \right) F_{ii}^I = \frac{\lambda_i}{J^I} \frac{\partial W^I}{\partial \lambda_i} \tag{1-59}$$

$$J^I = \det(\mathbf{F}^I) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \tag{1-60}$$

Tout calcul fait, on donne ici la formule de  $\sigma_1^I$  :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^I = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} & \left[ \lambda_1^5 \left( \frac{l}{4} + \frac{m}{2} \right) + \frac{l}{4} (\lambda_1 \lambda_2^4 + \lambda_1 \lambda_3^4 + 2\lambda_1^3 \lambda_2^2 + 2\lambda_1^3 \lambda_3^2) + \left( \frac{l}{2} - \frac{m}{2} + \frac{n}{4} \right) \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \right. \\
 & + \lambda_1^3 \left( \frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{3l}{2} - m \right) + \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{3l}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) (\lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3^2) \\
 & \left. - \lambda_1 \left( \frac{3\lambda}{2} + \mu - \frac{9l}{4} - \frac{n}{4} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1-61}$$

$\sigma_2^I$  et  $\sigma_3^I$  ont des formules semblables (une permutation sur les indices 1,2, et 3).

On a donc écrit explicitement les contraintes principales en fonction de  $\lambda_i$ . On veut maintenant écrire les  $\sigma_i^I$  en fonction des déformations principales qui sont données par  $E_i^I = \lambda_i - 1$ . Pour cela, on fait l'hypothèse que les déformations principales sont petites (en norme) devant 1. Cette hypothèse est justifiable pour les matériaux et le chargement spécifiés au paragraphe précédent<sup>1</sup>.

On fait un développement limité de  $1/\lambda_2 \lambda_3$  à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \approx 1 - (E_2^I + E_3^I + E_2^I E_3^I) + (E_2^{I2} + E_3^{I2}) \tag{1-62}$$

En remplaçant  $\lambda_i$  par  $1 + E_i^I$  et en négligeant les termes en  $O(E_i^{I3})$  on écrit les contraintes principales sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^I &= E_1^I (\lambda + 2\mu) + \lambda (E_2^I + E_3^I) - a E_1^{I2} - b (E_2^{I2} + E_3^{I2}) - c (E_1^I E_2^I + E_1^I E_3^I) - d E_2^I E_3^I \\
 \sigma_2^I &= E_2^I (\lambda + 2\mu) + \lambda (E_1^I + E_3^I) - a E_2^{I2} - b (E_1^{I2} + E_3^{I2}) - c (E_1^I E_2^I + E_2^I E_3^I) - d E_1^I E_3^I \\
 \sigma_3^I &= E_3^I (\lambda + 2\mu) + \lambda (E_1^I + E_2^I) - a E_3^{I2} - b (E_1^{I2} + E_2^{I2}) - c (E_3^I E_1^I + E_3^I E_2^I) - d E_1^I E_2^I
 \end{aligned} \tag{1-63}$$

<sup>1</sup> La déformation à la limite d'élasticité pour l'acier est autour de 0.002.

Avec

$$a = \frac{3\lambda}{2} + 3\mu + l + 2m, \quad b = \frac{3\lambda}{2} + l, \quad c = 2\lambda + 2\mu + 2l, \quad d = 2\lambda + 2l - 2m + n \quad (1-64)$$

On peut remarquer que les constantes de Murnaghan n'apparaissent qu'avec les termes non-linéaires. En négligeant les termes quadratiques, on retrouve la loi de Hooke (linéaire) pour un matériau isotrope.

On veut maintenant exprimer les déformations principales en fonction des contraintes principales. On note que dans le cas de l'élasticité linéaire, les formules précédentes forment un système de trois équations (linéaires et indépendantes) à trois inconnues : il est aisé de passer de la contrainte à la déformation et *vice-versa*. Dans le cas non-linéaire, pour passer de la déformation à la contrainte, on commence par réécrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^I \\ \sigma_2^I \\ \sigma_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^I \\ E_2^I \\ E_3^I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (1-65)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 &= aE_1^{I^2} + b(E_2^{I^2} + E_3^{I^2}) + c(E_1^I E_2^I + E_1^I E_3^I) + dE_2^I E_3^I \\ f_2 &= aE_2^{I^2} + b(E_1^{I^2} + E_3^{I^2}) + c(E_1^I E_2^I + E_2^I E_3^I) + dE_1^I E_3^I \\ f_3 &= aE_3^{I^2} + b(E_1^{I^2} + E_2^{I^2}) + c(E_3^I E_1^I + E_3^I E_2^I) + dE_1^I E_2^I \end{aligned} \quad (1-66)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} E_1 &= k_1 \sigma_1 - k_2 (\sigma_2 + \sigma_3) + k_1 f_1 - k_2 (f_2 + f_3) \\ E_2 &= k_1 \sigma_2 - k_2 (\sigma_1 + \sigma_3) + k_1 f_2 - k_2 (f_1 + f_3) \\ E_3 &= k_1 \sigma_3 - k_2 (\sigma_2 + \sigma_1) + k_1 f_3 - k_2 (f_2 + f_1) \end{aligned} \quad (1-67)$$

avec

$$k_1 = \frac{\lambda + \mu}{2\mu^2 + 3\lambda\mu}, \quad k_2 = \frac{\lambda}{2(2\mu^2 + 3\lambda\mu)} \quad (1-68)$$

En faisant le développement des expressions  $f_i$  en fonction de  $\sigma_i^I$  et  $E_i^I$  et en négligeant les termes d'ordre supérieurs (*i.e.*  $O(E_i^{I^3})$ ), on peut écrire les déformations principales en fonction des contraintes principales on obtient :

$$E_1^I = k_1 \sigma_1^I - k_2 (\sigma_2^I + \sigma_3^I) + P \sigma_1^{I^2} + Q (\sigma_2^{I^2} + \sigma_3^{I^2}) + R (\sigma_1^I \sigma_2^I + \sigma_1^I \sigma_3^I) + S \sigma_2^I \sigma_3^I \quad (1-69)$$

$E_2^I$  et  $E_3^I$  ont des formules semblables (une permutation sur les indices 1,2, et 3).

Dans cette équation, les constantes élastiques  $P, Q, R, S$  sont données par :

$$P = ak_1^3 - 2ak_2^3 - 2bk_2^3 - 2ck_2^3 + 2bk_1k_2^2 - 2bk_1^2k_2 + 2ck_1k_2^2 - 2ck_1^2k_2 + 3dk_1k_2^2 \quad (1-70)$$

$$Q = bk_1^3 - ak_2^3 - 3bk_2^3 - ck_2^3 - dk_2^3 + ak_1k_2^2 - ak_1^2k_2 + bk_1k_2^2 - bk_1^2k_2 + 4ck_1k_2^2 - ck_1^2k_2 + dk_1k_2^2 - dk_1^2k_2 \quad (1-71)$$

$$R = ck_1^3 - 2ak_2^3 - 2bk_2^3 - 4ck_2^3 - 2dk_2^3 + 2ak_1k_2^2 - 2ak_1^2k_2 + 8bk_1k_2^2 - 2bk_1^2k_2 + 5ck_1k_2^2 - 2ck_1^2k_2 - 2dk_1^2k_2 + 2dk_1k_2^2 \quad (1-72)$$

$$S = dk_1^3 - 2dk_2^3 + 6ak_1k_2^2 + 4bk_1k_2^2 - 4bk_1^2k_2 + 4ck_1k_2^2 - 4ck_1^2k_2 + 3dk_1k_2^2 - 4bk_2^3 - 4ck_2^3 \quad (1-73)$$

Les formules  $E_i^I(\sigma_i^I)$  permettent de donner le tenseur de rigidité équivalent d'un matériau isotrope soumis à un chargement triaxial, ces formules sont une généralisation de celles trouvées par Abiza *et al* [85] dans le cas d'un chargement hydrostatique ( $\sigma_1^I = \sigma_2^I = \sigma_3^I$ ) et un chargement uniaxial ( $\sigma_2^I = \sigma_3^I = 0$ )<sup>1</sup>.

Le tenseur de rigidité équivalent peut donc s'écrire explicitement en fonction des contraintes principales, cependant la formule est très encombrante, et on fait le choix de donner la formule ici en fonction des déformations :

$$C_{ijkl}^{eq} = C_{ijkl} + C_{ijkl}(E_i + E_j + E_k + E_l) + \delta_{ik}C_{jlqq}E_q + C_{ijklmm}E_m \quad (1-74)$$

L'écriture du tenseur de rigidité équivalent en fonction de la contrainte constitue une étape essentielle dans le traitement du problème acoustoélastique direct (étude de l'effet de la contrainte sur les vitesses des ondes élastiques) et dans celui du problème acoustoélastique inverse (développement de méthodes permettant de trouver la contrainte connaissant les variations de vitesses).

On remarque que le tenseur équivalent est égal au tenseur de rigidité du second ordre dans l'état non-contraint auquel s'ajoutent des termes contenant la déformation initiale. Ainsi, si la déformation initiale est nulle, on retrouve la rigidité d'un matériau non-contraint (*i.e.*  $C_{ijkl}^{eq} = C_{ijkl}$ ). On note également que les termes supplémentaires sont faibles comparés au tenseur de rigidité du second ordre, du fait qu'ils contiennent la déformation initiale, qui est très faible ( $E_i^I \ll 1$ ). L'EAE sera donc très faible, et peut être interprété comme une petite variation de la vitesse autour de sa valeur dans l'état *naturel*.

---

<sup>1</sup> Dans cette référence la même démarche qu'ici (*i.e.* un développement à un ordre supérieur) a été suivie pour traiter les cas hydrostatique et uniaxial.

### III. Conclusion

Dans la première partie (Sec. I) du chapitre, nous avons établi une liste bibliographique de travaux permettant de présenter le cadre général de la théorie d'acoustoélasticité, ainsi que ses principales applications et ses limites. Cette théorie a été développée à partir de la théorie de l'élasticité non-linéaire avec comme première application la mesure des coefficients de Murnaghan, dits, coefficients d'élasticité non-linéaire. Plusieurs auteurs ont ensuite utilisé la TAE pour développer des méthodes permettant d'estimer les variations de vitesse induites par la contrainte (l'EAE). Ces méthodes sont fiables dans le cas des contraintes appliquées dont la valeur n'excède pas la limite d'élasticité, mais pas dans le cas où le matériau s'est déformé plastiquement par rapport à l'état de référence, ni dans celui où les ondes se propagent près d'une soudure.

Dans la seconde partie (Sec. II), nous avons présenté formellement le développement de la théorie, permettant de donner le tenseur de rigidité équivalent sous une forme générale, pour une anisotropie matérielle quelconque et un chargement quelconque. Cette forme générale fait intervenir un grand nombre de paramètres intrinsèques et de données et n'est guère utilisable en tant que telle. Pour aller plus loin, nous avons choisi de restreindre le cadre de notre étude au cas d'un matériau isotrope dans son état de référence, soumis à un chargement triaxial. Des formules ont été développées permettant d'écrire explicitement le tenseur de rigidité équivalent en fonction de la contrainte appliquée, ce qui représente un point de départ pour l'étude des effets de la contrainte sur les ondes élastiques.

Le tenseur de rigidité donné dans ce chapitre est général et permet d'étudier l'effet acoustoélastique pour différents types d'onde (volume, surface, guidées, ...). Cependant dans la suite de notre étude, nous nous intéresserons uniquement à la propagation des ondes guidées dans des plaques. L'application formelle à ce cas est l'objet du chapitre suivant.





## 2. Application de la TAE aux ondes guidées

### Résumé :

Dans le chapitre précédent on a écrit d'une manière explicite le tenseur de rigidité équivalent en fonction de la contrainte appliquée, ce qui permet d'étudier les effets de la contrainte sur les ondes élastiques (volumiques, surfaciques, guidées).

Dans ce chapitre, on s'intéresse uniquement aux ondes guidées (Lamb et SH). Ce chapitre contient trois parties :

1. Présentation de la méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) acoustoélastique (SAFE-AE).
2. Étude générale (exploratoire) des effets de la contrainte mécanique sur les ondes de Lamb et SH.
3. Validation du modèle développé, dont une partie a été présentée dans le chapitre précédent (*i.e.* écrire le tenseur de rigidité équivalent d'une manière explicite en fonction de la contrainte).

Dans la Sec. II [p. 49], on utilise la méthode SAFE pour résoudre l'équation d'onde donnée au chapitre précédent. Cette méthode doit être légèrement modifiée pour prendre en compte l'effet acoustoélastique (l'EAE). Ces modifications permettent de prendre en compte la perte de symétrie dans le tenseur de rigidité équivalent et la variation de la section du guide induite par la contrainte.

Dans la Sec. III [p. 54], on étudie quelques effets de la contrainte sur les modes de Lamb et SH. Cette section contient six sous-sections : Dans (III.A [p. 54]), l'effet de la contrainte sur les déplacements modaux est étudié. Cela montre que dans le cas d'un matériau contraint, les modes ne peuvent plus être classés d'une manière nette en mode de Lamb et SH, et que ce « couplage » varie en fonction de la direction. Dans (III.B [p. 55]), on donne les courbes de dispersion dans le cas où la plaque est non-contrainte et dans la cas où elle est soumise à un effort uniaxial dans le plan. Cela permet de mettre en évidence le fait que l'EAE est très faible ( $\approx 1\%$  de variation par rapport au cas non-contraint) et qu'il est dispersif. Dans (III.C [p. 57]), l'effet de la contrainte sur la variation de l'épaisseur de la plaque et par conséquent sur la dispersion des modes guidés est étudié. Cela montre que cet effet doit être pris en compte lors de l'application de la TAE aux ondes guidées, puisque les erreurs introduites en le négligeant sont du même ordre de grandeur que l'EAE induit par l'effet de la contrainte sur l'élasticité du milieu. Dans (III.D [p. 58]), on étudie la non-linéarité de l'EAE et on montre que cette non-linéarité dépend de la fréquence et de la direction de propagation. Dans (III.E [p. 59]), on étudie la variation de la vitesse en fonction de la direction de propagation de l'onde, et on retrouve l'anisotropie acoustoélastique qui a été établie dans la littérature pour le cas des ondes de volume et de Lamb. Dans (III.F [p. 60]), on étudie l'hypothèse qui stipule que l'EAE induit par un tenseur multiaxial (*e.g.* triaxial) est égal à la somme des EAE induits par les composantes du tenseur considérées séparément. Cette étude montre que cette hypothèse n'est pas toujours vraie et qu'une étude paramétrique rigoureuse est nécessaire pour connaître sa limite de validité.

Dans la Sec. IV [p. 63] on s'intéresse au cas où la contrainte peut avoir un profil variable dans l'épaisseur. Cette section contient cinq sous-sections. Dans (IV.A [p. 64]), il est montré que l'EAE est très sensible au profil de la contrainte. Dans (IV.B [p. 66]), il est montré que non seulement la non-linéarité de l'EAE dépend du profil de la contrainte, mais aussi que suivant le profil, la partie linéaire de l'EAE est négligeable devant la partie non-linéaire. Dans (IV.C [p. 68]), il est montré que l'anisotropie acoustoélastique est fortement dépendante du profil de la contrainte. Dans (IV.D [p. 70]), l'hypothèse de décomposition de l'EAE vis-à-vis de la nature multiaxiale du tenseur de contrainte est étudiée (comme elle l'avait été dans le cas d'un profil constant dans la Sec III.F [p. 60], et montrée comme dépendant du profil de contrainte. Finalement, dans (IV.E [p. 73]), une nouvelle hypothèse est étudiée, qui stipule que si le profil de la contrainte est égal à la somme des profils élémentaires, alors l'EAE induit par ce profil est égal à la somme des EAE induits par chacun des profils élémentaires considérés séparément. Sa validité dépend de la nature des profils élémentaires.

Dans la Sec.V [p. 82] on compare les prédictions données par le modèle acoustoélastique (MAE) proposé, à des résultats expérimentaux de la littérature et des prédictions d'autres modèles théoriques. Cette comparaison permet de valider le présent modèle et de montrer que les prédictions qu'il permet sont plus précises que celles des modèles théoriques précédemment proposés dans la littérature.

## I. Introduction

Dans le chapitre précédent, on a écrit le tenseur de rigidité en fonction de la contrainte. Cette écriture permet d'étudier l'effet acoustoélastique (EAE) pour les ondes élastiques se propageant dans un milieu isotrope soumis à un chargement triaxial. Le cas des ondes guidées est particulièrement intéressant du fait de leur capacité à se propager sur des longues distances. Les travaux dans la littérature Réf. [68, 71-76, 79] traitent la propagation des ondes de Lamb, dans des plaques soumises à un effort uniaxial ou biaxial dans le plan de la plaque. Les conclusions principales de ces travaux sont :

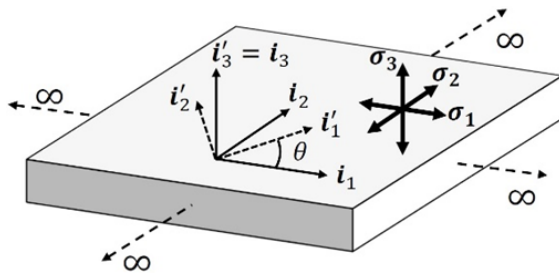
1. L'EAE est très faible (de l'ordre de  $\approx 1\%$  de variation de vitesse pour 100 MPa de contrainte appliquée).
2. L'EAE est dispersif et varie d'un mode à un autre.
3. L'EAE induit par l'application d'une contrainte uniaxiale dans le plan est anisotrope.
4. L'EAE dépend *linéairement* de la contrainte.

Les auteurs des Réf. [68, et 74] ont mentionné que l'application de la contrainte couple les modes de Lamb et les modes SH, sans toutefois l'avoir démontré. Cet effet est démontré numériquement dans ce chapitre, grâce à la méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) qui, grâce à son formalisme permet de donner les déplacements modaux des modes de Lamb et SH à une fréquence et dans une direction de propagation données. De même, on retrouve également les conclusions (1 à 3) de la littérature, et on montre que pour (4), la relation est *non-linéaire*, et que cette non-linéarité dépend à la fois de la fréquence et de la direction de propagation de l'onde.

Dans tout ce chapitre on s'intéresse à la propagation des ondes de Lamb et SH dans une plaque avec contrainte, relativement aux mêmes propagations dans la plaque dans son *état naturel* supposé élastiquement isotrope et non-contraint.

Dans le chapitre précédent, un unique repère  $R = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  était considéré, associé au repère principal de la contrainte. Dans le présent chapitre, on est obligé par la nature multidirectionnelle de la propagation dans le plan de la plaque et par la petite dimension dans la direction  $\mathbf{i}_3$  perpendiculaire à ce plan, d'introduire un nouveau repère lié à la propagation de l'onde. Ce repère est défini par la rotation (autour de l'axe  $\mathbf{i}_3$ ) du repère  $R$  d'un angle  $\theta$  qui définit la direction de propagation de l'onde élastique guidée par la plaque.

La problématique du chapitre est illustrée par la figure suivante :



**Fig. 2-1** : Une plaque « infinie » dans le plan  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  est soumise à un effort triaxial  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Deux repères cartésiens sont affectés à la plaque :  $R(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  et  $R'(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3 = \mathbf{i}_3)$ . Le repère  $R$  est le repère principal lié aux contraintes principales  $\sigma_i$ . Le repère  $R'$  est le repère de propagation, défini par la rotation de  $R$  autour de  $\mathbf{i}_3$ , d'un angle  $\theta = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$  que fait la direction de propagation de l'onde avec  $\mathbf{i}_1$ .

L'étude réalisée ici consiste essentiellement à trouver les effets de la contrainte sur les modes de Lamb et SH. Pour cela, on fait une comparaison entre les résultats dans le cas non-contraint de la plaque (*i.e.* l'état naturel), et dans le cas où la plaque est soumise à un chargement du type  $\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , telles que les  $\sigma_i$  sont les contraintes principales (*i.e.* l'état initial) ; et  $\sigma_3$  est dans la direction  $\mathbf{i}_3$ . La méthode utilisée pour étudier ce problème est la méthode SAFE-AE qui représente une version légèrement modifiée de la méthode SAFE classique, afin de prendre en compte l'EAE. Cette méthode est présentée dans la section suivante.

## II. La méthode SAFE-AE

Dans cette section, on présente la méthode SAFE-AE (en anglais : Semi-Analytical Finite Element + Acoustoelastic). Cette méthode est une version légèrement modifiée de la méthode SAFE classique, pour prendre en compte l'EAE.

La méthode SAFE est très utilisée dans les problèmes de propagation des ondes guidées. Contrairement à la méthode des éléments finis, où l'intégralité du guide est maillée, dans la méthode SAFE, seule la section du guide est maillée et une solution analytique est retenue dans la direction de la propagation. Elle a été validée expérimentalement dans le cas des rails et barre (Hayashi *et al* [87]), des plaques (Ahmad [88]) et comparée à la méthode SPBW (Ang : superposition of partial bulk waves) (Peddeti & Santhanam [74]). Le développement de la méthode SAFE présenté dans cette section, suit celui de Bartoli *et al* [89].

Pour résoudre l'équation d'onde trouvée dans le chapitre précédent (*i.e.* Éq.(1-35) [p. 38]), suivant le formalisme de la méthode SAFE, on la réécrit dans le repère  $R'$ . Cela revient à tourner le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$  d'un angle  $\theta$  autour de  $i_3$ , ce qui donne :

$$C_{ijkl}^{eq}(\theta) = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}C_{mnpq}^{eq} \quad (2-1)$$

avec

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin\theta & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

Pour des raisons de compacité, la notation  $\mathbf{u}^o$  (le déplacement particulaire associé à l'onde) est remplacée par  $\mathbf{u}$ . En multipliant maintenant l'équation d'onde par un déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}$  on trouve :

$$C_{ijkl}^{eq}(\theta) \delta u_i \frac{\partial^2 u_k}{\partial X'_j \partial X'_l} = \rho_0 \delta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2-3)$$

$X'$  est la position du point matériel dans le repère  $R'$ .

En intégrant sur le volume de la plaque, et en utilisant une intégration par partie on trouve :

$$\int_{V(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X'_j} C_{ijkl}^{eq}(\theta) \frac{\partial u_k}{\partial X'_l} dV - \int_{S(\boldsymbol{\sigma})} C_{ijkl}^{eq}(\theta) \delta u_i \frac{\partial u_k}{\partial X'_l} n_l(\boldsymbol{\sigma}) dS = - \int_{V(\boldsymbol{\sigma})} \rho_0 \delta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV \quad (2-4)$$

$V, S, \mathbf{n}$  sont respectivement le volume de la plaque, sa surface et la normale à la surface.

La dépendance de  $V(\boldsymbol{\sigma}), S(\boldsymbol{\sigma})$  et  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})$  sur la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  vient du fait que le matériau est déformable. Toutefois la nature isotrope du matériau et le chargement qui nous intéressent (*i.e.*  $\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , tel que les  $\sigma_i$  sont les contraintes principales), conduisent à ce que la normale à la surface reste la même<sup>1</sup> (dans les deux états : *naturel* et *initial*). On peut donc éliminer la dépendance de  $\mathbf{n}$  avec la contrainte. L'effet de la contrainte sur le volume<sup>2</sup> de la pièce (qui se réduit à l'effet de la contrainte sur l'épaisseur, dans le cas des plaques infinies) est particulièrement important pour les ondes guidées, car il induit une variation de vitesse du même ordre de grandeur que l'effet de la contrainte sur les propriétés élastiques. Cet effet a été oublié dans la littérature sur le calcul de la propagation guidée en présence de contrainte Réf. [68, 71-76, 79]. Il a été pris en compte dans l'application de la méthode SAFE en milieu contraint par Treysède [78], (dans le cas des câbles tressés à sept torons). Et il a été observé expérimentalement (voir Murayama [77]) que sa prise en compte est importante (dans le cas des plaques). Dans ce chapitre cet effet est étudié pour les modes de Lamb et SH.

<sup>1</sup> Ce type de chargement transforme un cube de matériau isotrope en un parallélépipède rectangle.

<sup>2</sup> Le terme « volume » utilisé ici englobe le volume et la forme. Du fait que le matériau est compressible.

Nous faisons l'hypothèse que l'effet de la contrainte *statique* sur la plaque est entièrement pris en compte par la variation des propriétés élastiques et de la forme de la plaque (on suppose donc que la surface de la plaque est libre lors de la résolution du problème *dynamique*).

La plaque étant infinie dans le plan  $(i_1, i_2)$ , l'intégrale sur le volume de la plaque se réduit à une intégrale linéique sur la seule épaisseur de la plaque. L'équation précédente se simplifie en :

$$\int_{d(\sigma)} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X'_j} C_{ijkl}^{eq}(\theta) \frac{\partial u_k}{\partial X'_l} dX_3 = - \int_{d(\sigma)} \rho_0 \delta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dX_3 \quad (2-5)$$

$d(\sigma)$ , épaisseur de la plaque, fonction de la contrainte.

Dans le cas d'une plaque soumise au chargement triaxial étudié dans ce document, cette épaisseur est donnée en fonction de l'épaisseur avant l'application de la contrainte  $d_0$  par la relation :

$$d(\sigma) = d_0(1 + E_3(\sigma)) \quad (2-6)$$

$E_3$  représente la déformation principale dans la direction  $i_3$ , dont l'expression en fonction de la contrainte est donnée dans le chapitre précédent (voir Éq.(1-69) [p. 43]).

Pour résoudre maintenant l'Éq.(2-5) suivant le formalisme SAFE donné par Bartoli *et al* [89], on choisit une solution en éléments finis dans l'épaisseur et une solution analytique dans la direction de propagation ( $i'_1$ ). Comme la plaque est infinie dans le plan  $(i'_1, i'_2)$ , et que l'on s'intéresse à la propagation d'ondes planes, le déplacement n'est fonction que de  $X'_1$  et  $X_3$ . On donne ici le déplacement d'un élément :

$$\mathbf{u}_e(X'_1, X_3, t) = \begin{bmatrix} u_1(X_3) \\ u_2(X_3) \\ u_3(X_3) \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kX'_1)} = \mathbf{N}(X_3) \mathbf{Q}_e e^{i(\omega t - kX'_1)} \quad (2-7)$$

$k, \omega, t$  sont respectivement, le nombre d'onde, la pulsation et le temps.  $\mathbf{N}$  est la matrice de fonctions de forme, et  $\mathbf{Q}_e$  est le déplacement nodal de l'élément  $e$ . Ces deux matrices sont définies par :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(1)} \\ N^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(2)} \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ N^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(n)} \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (2-8)$$

[  $\ ]^{(n)}$  : est le nombre de nœuds par élément ( $n \geq 2$ ).

La réécriture matricielle de l'Éq.(2-5) repose dans le cas classique (Bartoli *et al* [89]), sur le fait que le tenseur de rigidité du matériau possède les mêmes symétries que  $C_{ijkl}$ , trouvées dans le chapitre précédent, à savoir  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{lki j} = C_{lkji} = C_{jilk} = C_{ijlk} = C_{klji}$ . Ces symétries permettent d'utiliser la notation de Voigt, et donc de transformer le tenseur de rigidité d'ordre 4 en une matrice  $6 \times 6$ .

Cela n'est plus le cas lorsque le matériau est soumis à un chargement initial, comme on le montre ici. Pour cela rappelons la formule du tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$ .

$$C_{ijkl}^{eq} = \underbrace{C_{ijkl} + C_{ijkl}(E_i + E_j + E_k + E_l)}_{1^{er} \text{ groupe}} + \underbrace{C_{ijklmm} E_m + \delta_{ik} C_{jlqq} E_q}_{2^{ième} \text{ groupe}} \quad (2-9)$$

Le premier groupe possède les mêmes symétries que  $C_{ijkl}$ . Pour montrer que le second ne les possède pas, on prend le contre-exemple suivant :  $i = 1, j = 2, k = 1$  et  $l = 2$ . On peut voir que  $\delta_{11}C_{22qq}E_q = \lambda + 2\mu\delta_{2q} \neq \delta_{21}C_{12qq}E_q = 0$ , ce qui montre que  $C_{ijkl}^{eq} \neq C_{jikl}^{eq}$ . Il devient donc impératif d'utiliser la notation complète (*i.e.*  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6, 32 \rightarrow 7, 13 \rightarrow 8, 21 \rightarrow 9$ ), pour prendre en compte cette perte de symétrie. Le tenseur  $C^{eq}$  est transformé (avec cette notation) en une matrice  $9 \times 9$ . En appliquant cette notation sur le gradient du déplacement  $\partial \mathbf{u}_e / \partial X'$ , on trouve :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial X'} = \mathbf{L}_1 \frac{\partial}{\partial X'_1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kX'_1)} + \mathbf{L}_3 \frac{\partial}{\partial X_3} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kX'_1)} \quad (2-10)$$

avec

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-11)$$

En posant  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{L}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial X_3}$  et  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{N}$ , on peut réécrire le gradient du déplacement d'un élément sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial X'} = (\mathbf{B}_1 - ik\mathbf{B}_2)\mathbf{Q}_e e^{i(\omega t - kX'_1)} \quad (2-12)$$

En supposant maintenant que le déplacement virtuel admet la même écriture que celle du déplacement  $\mathbf{u}_e$  (*i.e.*  $\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{N}(X_2, X_3)\delta \mathbf{Q}_e e^{i(\omega t - kX'_1)}$ ), on peut réécrire l'équation d'onde Éq. (2-5) sous la forme :

$$\int_{d_e(\sigma)} (-\omega^2 \rho_0 \delta \mathbf{Q}_e^T \mathbf{N}^T (\mathbf{N} \mathbf{Q}_e) + \delta \mathbf{Q}_e^T (\mathbf{B}_1^T + ik\mathbf{B}_2^T) C_e^{eq} (\mathbf{B}_1 - ik\mathbf{B}_2) \mathbf{Q}_e) dX_3 = 0 \quad (2-13)$$

où on a utilisé le fait que  $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{u}$ .  $C_e^{eq}$  est le tenseur de rigidité équivalent de l'élément  $e$ . Ce tenseur peut varier d'un élément à un autre, si la contrainte appliquée est variable dans l'épaisseur de la plaque. En notant que  $\mathbf{Q}_e$  et  $\delta \mathbf{Q}_e^T$  ne dépendent pas de  $dX_3$ , l'équation précédente devient :

$$\delta \mathbf{Q}_e^T \left[ (\mathbf{K}_e^{(1)} + ik\mathbf{K}_e^{(2)} + k^2 \mathbf{K}_e^{(3)} - \omega^2 \mathbf{M}_e) \right] \mathbf{Q}_e = 0 \quad (2-14)$$

avec les matrices élémentaires données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{(1)} &= \int_{S_e} \mathbf{B}_1^T C_e^{eq} \mathbf{B}_1 dX_3, & \mathbf{K}_e^{(2)} &= - \int_{S_e} (\mathbf{B}_1^T C_e^{eq} \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T C_e^{eq} \mathbf{B}_1) dX_3, \\ \mathbf{K}_e^{(3)} &= \int_{S_e} \mathbf{B}_2^T C_e^{eq} \mathbf{B}_2 dX_3 & \text{et } \mathbf{M}_e &= \int_{S_e} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} dX_3 \end{aligned} \quad (2-15)$$

Le terme  $\delta \mathbf{Q}_e^T$  est arbitraire (déplacement virtuel arbitraire) ; on peut donc le prendre égal à *conjug*  $\left[ (\mathbf{K}_e^{(1)} + ik\mathbf{K}_e^{(2)} + k^2 \mathbf{K}_e^{(3)} - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{Q}_e \right]$  ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \left| (\mathbf{K}_e^{(1)} + ik\mathbf{K}_e^{(2)} + k^2 \mathbf{K}_e^{(3)} - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{Q}_e \right|^2 = 0 \\ \Rightarrow & (\mathbf{K}_e^{(1)} + ik\mathbf{K}_e^{(2)} + k^2 \mathbf{K}_e^{(3)} - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{Q}_e = 0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

En appliquant une méthode d'assemblage des matrices élémentaires en matrices globales, on retombe sur un système avec un problème aux valeurs propres semblable à celui de la méthode SAFE classique :

$$(\mathbf{K}^{(1)} + ik\mathbf{K}^{(2)} + k^2\mathbf{K}^{(3)} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (2-17)$$

Les matrices  $\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(3)}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques. Cela n'est pas le cas pour  $\mathbf{K}^{(2)}$ . Pour améliorer la résolution numérique du problème (rendre les matrices symétriques), on commence par multiplier l'équation précédente à droite par  $\mathbf{T}^T$  et à gauche par  $\mathbf{T}$ , avec  $\mathbf{T} = \text{diag}[i, 1, 1, i, 1, 1, \dots]$ . On obtient donc :

$$(\mathbf{K}^{(1)} + k\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + k^2\mathbf{K}^{(3)} - \omega^2\mathbf{M})\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (2-18)$$

avec  $\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = i\mathbf{T}^T\mathbf{K}^{(2)}\mathbf{T}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^T\mathbf{Q}$ .

Ce système peut être résolu en fixant le nombre d'onde ( $k$ ) et en cherchant la pulsation ( $\omega$ ), ou l'inverse. On peut le résoudre numériquement en utilisant la fonction `polyeig`, du logiciel Matlab. Cependant une meilleure résolution numérique est trouvée en transformant le système en la forme linéaire suivante et en utilisant la fonction `eig` :

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{B})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2-19)$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} \\ k\tilde{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(1)} - \omega^2\mathbf{M} \\ \mathbf{K}^{(1)} - \omega^2\mathbf{M} & \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} - \omega^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

La résolution du système d'équations (2-19) se fait en fixant la pulsation ( $\omega = 2\pi \times \text{fréquence}$ ) et en cherchant les nombres d'onde. Les nombres d'onde dont la partie imaginaire est non nulle correspondent aux modes évanescents, et ils ne seront pas traités dans ce document. Seuls les modes propagatifs (nombres d'onde réel) sont conservés dans la solution.

Pour chaque nombre d'onde, les vitesses de phase et de groupe des modes propagatifs se calculent facilement grâce à la formulation du problème par la méthode SAFE. La vitesse de phase est :

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (2-21)$$

Pour trouver la vitesse de groupe, on différentie le système de la méthode SAFE Éq.(2-18) par rapport au nombre d'onde ( $k$ ). On a :

$$\left( \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + 2k\mathbf{K}^{(3)} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{M} \right) \tilde{\mathbf{Q}} + \left( \mathbf{K}^{(1)} + k\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + k^2\mathbf{K}^{(3)} - \omega^2\mathbf{M} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial k} = \mathbf{0} \quad (2-22)$$

En multipliant à droite par  $\tilde{\mathbf{Q}}^T$ , on trouve :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T \left( \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + 2k\mathbf{K}^{(3)} - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{M} \right) \tilde{\mathbf{Q}} + \left[ \tilde{\mathbf{Q}}^T \left( \mathbf{K}^{(1)} + k\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + k^2\mathbf{K}^{(3)} - \omega^2\mathbf{M} \right) \right] \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial k} = \mathbf{0}, \quad (2-23)$$

En prenant la transposée de Éq.(2-18) (toutes les matrices dans les parenthèses sont symétriques), on peut remarquer que le terme dans les crochets est nul. Ce qui permet d'écrire la vitesse de groupe sous la forme suivante :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \tilde{\mathbf{Q}} + 2k\tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{K}^{(3)} \tilde{\mathbf{Q}}}{2\omega \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{Q}}} \quad (2-24)$$

**Conclusion** : Dans cette section nous avons suivi le développement classique de la méthode SAFE, pour résoudre l'équation d'onde qui a été trouvée au chapitre précédent. On a remarqué que la présence de la contrainte impose deux modifications du développement classique : d'une part, il faut prendre en compte l'effet de la contrainte sur la forme de la pièce ; d'autre part, il faut prendre en compte la perte de symétrie du tenseur de rigidité.

Dans la section suivante, on utilise la méthode SAFE-AE développée ici et l'implémentation que nous en avons faite pour étudier les effets de la contrainte sur les ondes de Lamb et SH.

Deux cas sont traités successivement :

1. cas d'une contrainte avec un profil uniforme dans l'épaisseur ;
2. cas d'une contrainte avec un profil variable dans l'épaisseur.

### III. Cas d'une contrainte avec un profil constant dans l'épaisseur

Le matériau considéré dans ce chapitre pour étudier l'effet acoustoélastique (EAE) est l'aluminium Al 6061-T6 dont la densité et l'épaisseur dans l'état naturel sont  $\rho_0 = 2704 \text{ kg}$  et  $d_0 = 5 \text{ mm}$ . Les propriétés élastiques (linéaires et non-linéaires) sont données dans le tableau ci-après.

Dans la présente section, on étudie les effets de la contrainte mécanique sur les ondes de Lamb et SH dans le cas d'une contrainte avec un profil constant dans l'épaisseur. Grâce à une expérimentation numérique, il a pu être déterminé que 10 éléments 1D-3 noeuds iso-paramétriques pour discrétiser l'épaisseur de la plaque suffisaient à donner des résultats précis dans la gamme de fréquences considérée.

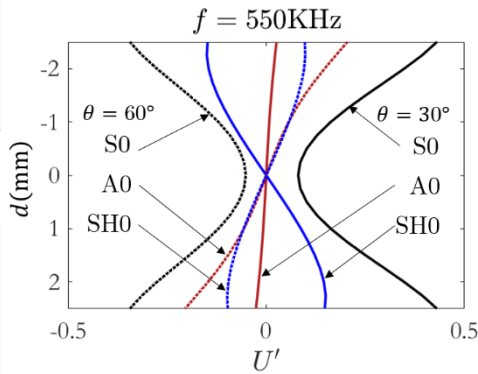
**Tableau I** : constantes de Lamé et Murnaghan de l'Al 6061-T6 à 25°C (Asay & Guenther [90])

Constante	$\lambda$	$\mu$	$l$	$m$	$n$
Valeur (GPa)	56.35	27.5	-281.5	-339	-416

#### A. Déplacements modaux en présence de contrainte

Dans le cas d'un matériau isotrope, les modes de Lamb et SH peuvent être distingués grâce au fait que les déplacements modaux des modes SH n'admettent qu'une seule composante non nulle (dans notre configuration, cette composante est suivant  $i_2$ , et est notée  $U'_2$ ), et que la composante  $U'_2$  des déplacements modaux des modes de Lamb est nulle.

Cela n'est plus le cas si la plaque est soumise à un chargement initial, induisant une anisotropie élastique. Pour étudier cet effet, on soumet la plaque à un chargement biaxial dans le plan  $\sigma_1 = 200 \text{ MPa}$  et  $\sigma_2 = -100 \text{ MPa}$ . On étudie spécifiquement les composantes des déplacements modaux qui, dans l'état non-contraint, seraient nulles (*i.e.*  $U'_1$  et  $U'_3$  pour SH et  $U'_2$  pour Lamb). On normalise la composante hors-plan (notée  $U'_3$ ) du déplacement modal du mode SH0 par rapport au maximum d'amplitude de la composante tangentielle du même mode ( $U'_2$ ). On normalise également la composante  $U'_2$  des modes S0 et A0 par rapport au plus grand des deux maxima d'amplitude de  $U'_1$  et  $U'_3$  des mêmes modes. Cette normalisation a pour but d'estimer les déviations par rapport au cas non-contraint, dans lequel on aurait  $U'_2(\text{A0}) = U'_2(\text{S0}) = U'_3(\text{SH0}) = 0$ . Les mesures sont faites dans deux directions,  $\theta = 30^\circ$ ,  $60^\circ$ , et on se place à une fréquence  $f = 550 \text{ kHz}$ .



**Fig. 2-2** : les déplacements modaux normalisés ( $U'_2(\text{A0})$ ,  $U'_2(\text{S0})$  et  $U'_3(\text{SH0})$ ), des trois modes fondamentaux, dans deux directions de propagation, à une fréquence  $f = 550 \text{ kHz}$ . Dans le cas d'un chargement biaxial  $\sigma_1 = 200 \text{ MPa}$  et  $\sigma_2 = -100 \text{ MPa}$ . Dans le cas non-contraint tous les déplacements représentés ici seraient nuls.

Pour des raisons de symétrie, les déplacements modaux dans les deux directions principales de contrainte (*i.e.*  $\theta = 0^\circ$  et  $90^\circ$ ), qui sont des axes (plans) de symétrie du problème, vérifient :  $U'_2(\text{A0}) = U'_2(\text{S0}) = U'_3(\text{SH0}) = 0$ . Ils se comportent donc comme si la plaque était isotrope. Dans les directions principales les modes ne sont donc pas « couplés » (ce sont de purs modes de-Lamb et purs modes SH).

Cela est le cas également pour une propagation dans une direction qui représente un axe de symétrie du problème. Par exemple si la plaque est soumise à une traction biaxiale dans le plan avec deux composantes identiques et une compression hors plan, par exemple  $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 100 \text{ MPa}$  et  $\sigma_3 = -80 \text{ MPa}$ , tout axe dans le plan est un axe de symétrie du problème : la propagation des ondes guidées est alors isotrope et les modes restent purs modes de Lamb et purs modes SH (voir Annexe An-Ch2-Fig.



1 [p. 85]). On note cependant que la présence de contrainte affecte les déplacements modaux, mais elle ne les fait pas perdre leur nature.

Dans le cas où la propagation se fait dans des directions qui ne sont pas des axes de symétrie du problème (e.g.  $\theta = 30^\circ$  et  $60^\circ$ ), les déplacements ( $U'_2(A0)$ ,  $U'_2(S0)$  et  $U'_3(SH0)$ ) ne sont plus nuls, et la déviation par rapport au cas pur-Lamb et pur-SH est assez importante ( $\approx 45\%$  pour S0,  $\approx 25\%$  pour A0 et  $\approx 20\%$  pour SH0). Le fait que l'effet de la contrainte soit plus important pour le mode S0 sera remarqué tout au long de ce chapitre. On remarque également qu'à  $\theta = 30^\circ$  le déplacement  $U'_2(A0)$  est presque nul (le mode A0 est donc pur-Lamb) pour cette configuration (chargement et fréquence). On verra dans la sous-section (E [p. 59]) qu'il existe des configurations (chargement, fréquence et directions) où l'EAE pour un mode donné est nul.

Le « couplage » des modes de Lamb et SH est caractéristique des plaques anisotropes, dans lesquelles les modes sont classés en quasi-S et quasi-A. Dans notre étude, on veut être capable de faire le suivi des modes. Pour cela, on fait l'hypothèse que les modes de Lamb et SH après application du chargement sont semblables à leurs homologues dans l'état non-contraint, et on propose l'algorithme de séparation suivant.

---

Algorithme 2-A : L'algorithme de séparation des modes<sup>1</sup> de Lamb et SH, et de S et A

---

$$\text{si } \int_{d(\sigma)} |U'_2| dX_3 > \max \left( \int_{d(\sigma)} |U'_1| dX_3, \int_{d(\sigma)} |U'_3| dX_3 \right)$$

Alors le mode est **SH**

Sinon si  $U'_1$  admet le plan médian de la plaque comme plan de symétrie

Alors le mode est **S**

Sinon si  $U'_3$  admet le plan médian de la plaque comme plan de symétrie

Alors le mode est **A**

---

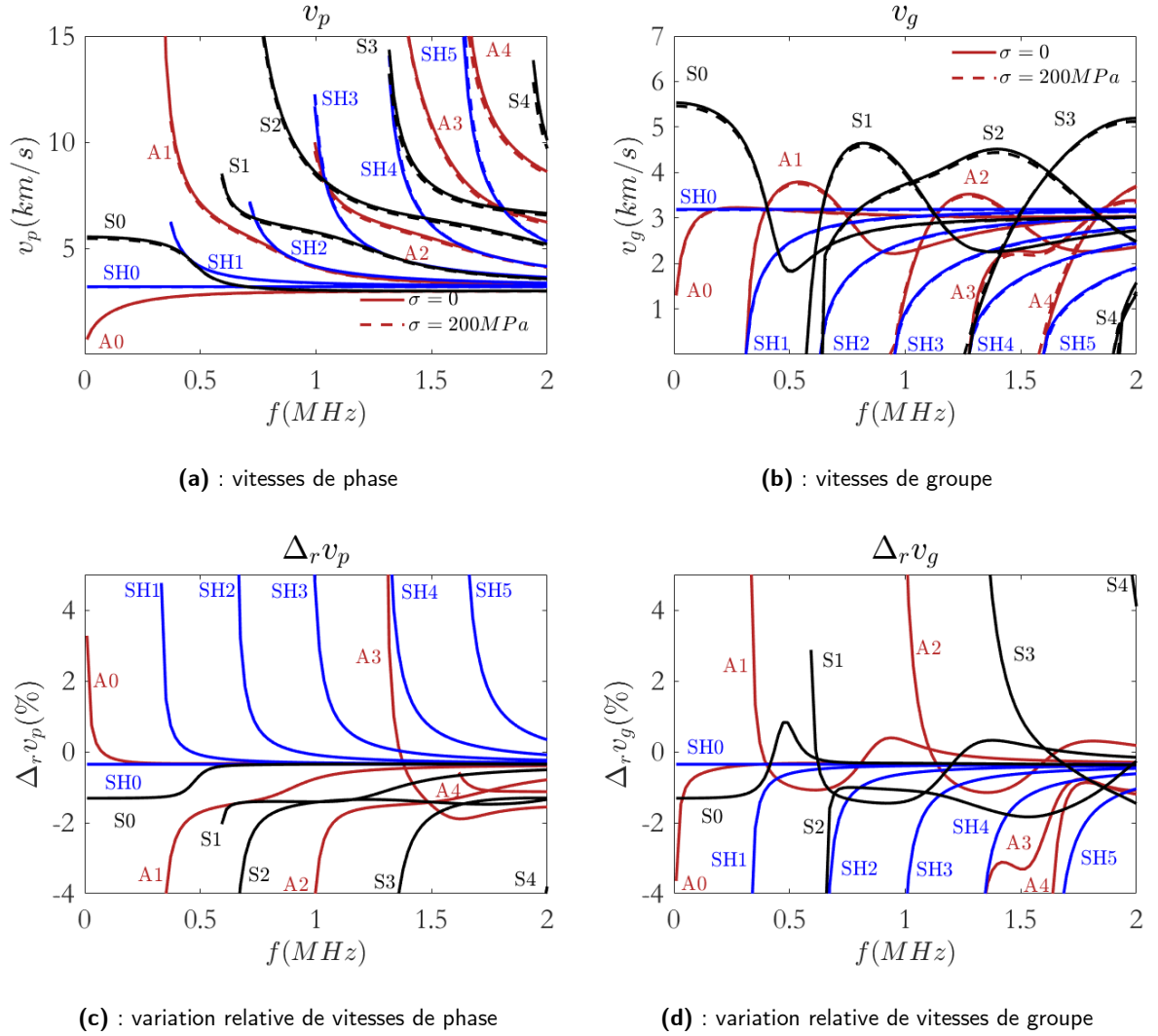
Dans la présente section, où l'on s'intéresse à une contrainte avec un profil constant dans l'épaisseur, cet algorithme s'est montré capable de séparer les modes de Lamb et SH, et entre les modes Lamb-S et Lamb-A. Sa validation nécessiterait une étude paramétrique sur 5 paramètres  $\sigma_i, \theta$  et  $f$ , ce qui est très lourd à faire. Pour éviter de se trouver dans des configurations où l'algorithme ne permettrait pas de distinguer les modes, on s'intéressera à des plages de fréquence où les modes peuvent être séparés non pas à partir de leurs déplacements modaux mais plutôt à partir de leurs vitesses qui sont proches de celles du cas non-contraint, pour lequel les modes sont facilement séparables.

## B. Courbes de dispersion

Dans cette sous-section, on montre l'aspect « faible » de l'EAE, ce qui est attendu, puisque la formule donnant le tenseur de rigidité équivalent, en fonction des déformations principales (chapitre 1 : Éq.(1-74) [p. 44]), montre que  $C^{ev}$  peut être interprété comme une petite perturbation autour de  $C$  (tenseur de rigidité du second ordre dans l'état naturel). Pour illustrer cela, on donne ici les courbes de dispersion dans les deux états *naturel* et *initial*. Ce dernier est défini par l'application d'une contrainte uniaxiale dans le plan  $\sigma_1 = 200$  MPa, la propagation se fait dans la direction principale  $\theta = 0^\circ$  (parallèle à la contrainte uniaxiale).

---

<sup>1</sup> L'usage de la nomenclature Lamb et SH dans le cas où ils sont couplés, est un abus de langage qu'on tolère dans ce document, pour ne pas dire Lamb-like et SH-like.



**Fig. 2-3** : les vitesses de phase (a) et de groupe (b), et les variations relatives de ces vitesses ((c) et (d)), entre les deux états naturel et initial, pour une plaque d'épaisseur 5mm (dans l'état naturel). La direction de propagation de l'onde est parallèle à la direction de la contrainte uniaxiale ( $\sigma = 200 \text{ MPa}$ ) appliquée dans la direction  $\theta = 0^\circ$ . Les courbes en trait continu (dans (a) et (b)) montrent les vitesses dans l'état naturel, celles en trait interrompu, dans l'état initial.

En regardant à l'échelle absolue (Fig. 2.3 [(a) et (b)]), on remarque que l'EAE est très faible, et que les vitesses dans les deux états sont difficilement discernables. Pour parvenir à étudier l'EAE, on représente les résultats en différence relative par rapport à l'état *naturel* (Fig. 2.3 [(c) et (d)]):

$$\Delta_r v(\sigma) = 100 \times \frac{(v(\sigma) - v(\sigma = \mathbf{0}))}{v(\sigma = \mathbf{0})} \quad (2-25)$$

En analysant les (Fig. 2.3 [(c) et (d)]), on peut faire les remarques suivantes :

1. l'EAE (représenté par  $\Delta_r v$ ) pour les ondes guidées est plus important que pour les ondes de volume, pour lesquelles il n'est que de 0.1 % pour une contrainte de 100 MPa (voir Pao [13]) ;
2. l'EAE pour les vitesses de phase est différent de celui pour les vitesses de groupe ; cependant ils ont les mêmes ordres de grandeur, dans le cas de ce chargement et pour cette direction de propagation ;
3. l'EAE dépend du mode : hormis aux fréquences proches des fréquences de coupure, les modes de Lamb symétriques sont les plus affectés, alors que les modes SH sont les moins affectés ;
4. l'EAE est dispersif. Les courbes donnant  $\Delta_r v$  ressemblent aux courbes de dispersion. En observant de près les (Fig. 2.3 [(a) et (c)]), on remarque que les vitesses de phase des modes SH ressemblent

aux  $\Delta, v$  des mêmes modes ; par contre, pour les modes de Lamb, la ressemblance est présente mais inversée. Cela est aussi le cas pour les vitesses de groupe ((Fig. 2.3 [(b) et (d)])

### C. Variation de vitesse induite par l'effet de la contrainte sur l'épaisseur

La contrainte mécanique fait varier les vitesses des ondes élastiques, en affectant :

- le tenseur de rigidité du matériau : cela est visible dans la formule du tenseur de rigidité équivalent Éq.(1-74) [p. 44] ;
- la densité du matériau : ceci vient du fait qu'on suppose le matériau compressible. Cela ne figure pas explicitement dans le développement présenté ici du fait qu'on a choisi d'utiliser les variable  $\mathbf{N}, \xi$  et  $\rho_0$  au lieu de  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}$  et  $\rho$ . (voir II.A [p. 33]) ;
- la forme du matériau : cet effet est une particularité des ondes élastiques guidées, puisqu'elles dépendent de la section du guide. Dans le cas d'un guide multidirectionnel comme une plaque, la seule dimension finie est l'épaisseur. Il est donc nécessaire d'étudier l'effet de la contrainte sur l'épaisseur de la plaque et voir s'il est ou non négligeable. Cet effet a été oublié dans la littérature Réf.[68, 71-76, 79] mais a été observé expérimentalement pour le mode S0 par Murayama [77], lors de l'estimation de la contrainte dans un essai de traction. Et pris en compte dans le développement de la méthode SAFE par Treysède [78].

Dans cette sous-section, on étudie numériquement ce troisième effet en se basant sur des résultats calculés à l'aide de la méthode SAFE-AE. L'application d'un chargement anisotrope (par exemple une traction uniaxiale) génère une anisotropie acoustique, tandis que la variation de l'épaisseur induit une isotropie acoustoélastique, cela résultant de ce que la contrainte est un tenseur et que la perte de l'épaisseur est un scalaire. Pour éviter donc de comparer une variation de vitesses anisotrope à une isotrope, on choisit d'appliquer un chargement qui n'induit pas d'anisotropie acoustique. Tel est le cas d'une traction biaxiale dans le plan  $\sigma_1 = \sigma_2 = 200$  MPa. Pour mieux étudier l'effet de la variation de l'épaisseur, on définit les variations de vitesses suivantes :

$$\Delta v_T = v(\boldsymbol{\sigma}, d(\boldsymbol{\sigma}), f) - v(\mathbf{0}, d_0, f) \quad (2-26)$$

$$\Delta v_C = v(\boldsymbol{\sigma}, d_0, f) - v(\mathbf{0}, d_0, f) \quad (2-27)$$

$$\Delta v_d = v(\mathbf{0}, d(\boldsymbol{\sigma}), f) - v(\mathbf{0}, d_0, f) \quad (2-28)$$

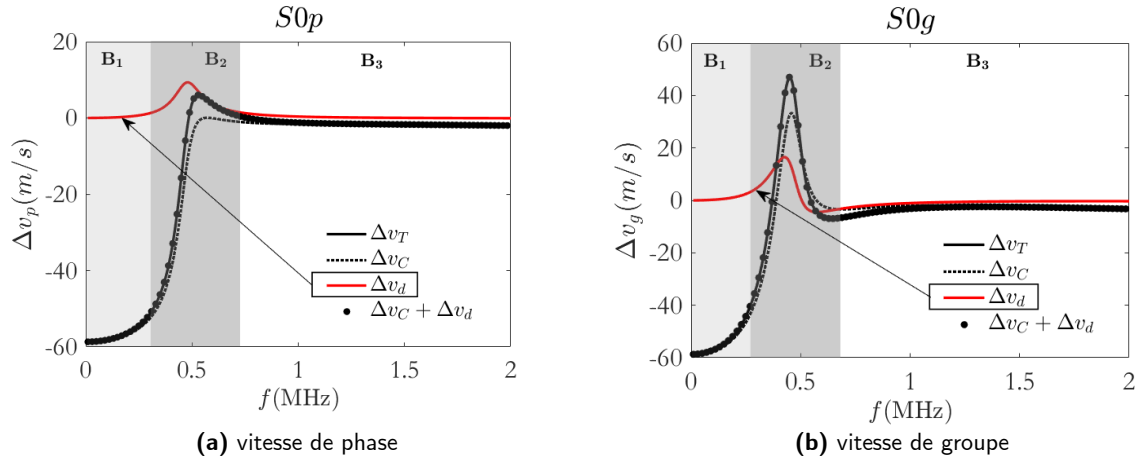
$\Delta v_T$  : variation de vitesse totale ;  $\Delta v_C$  : variation de vitesse induite par la prise en compte uniquement de l'effet de la contrainte sur l'élasticité ;  $\Delta v_d$  : variation de vitesse induite par la prise en compte uniquement de l'effet de la contrainte sur l'épaisseur de la plaque. L'épaisseur de la plaque est donnée par la formule Éq (2-6) [p. 50].

On donne ci-après (Fig. 2.4) ces variations de vitesse pour le mode S0.

Pour montrer que la variation de vitesse totale induite par l'effet de la contrainte sur l'élasticité et l'épaisseur peut être décomposée en deux parties indépendantes (*i.e.* la variation de vitesse induite par l'effet de la contrainte sur l'élasticité du milieu et la variation de vitesse induite par l'effet de la contrainte sur l'épaisseur), on a fait deux simulations. Dans la première, les deux effets sont pris en compte simultanément ( $\Delta v_T$ ). Dans la seconde, les deux effets sont traités séparément ( $\Delta v_C$  et  $\Delta v_d$ ).

On voit que  $\Delta v_T$  (trait continu noir) et  $\Delta v_C + \Delta v_d$  (marqueurs noirs) se superposent très bien, ce qui permet de faire la comparaison entre  $\Delta v_C$  et  $\Delta v_T$ .

Pour montrer que  $\Delta v_d$  doit être pris en compte dans l'application de la TAE aux ondes guidées, il suffit de voir que  $\Delta v_d$  est du même ordre de grandeur que  $\Delta v_C$ . Si l'on prend par exemple (pour la vitesse de phase),  $f \approx 0.56$  MHz, on a  $\Delta v_C \approx 0$  m/s et  $\Delta v_T \approx \Delta v_d \approx 5.1$  m/s ; négliger  $\Delta v_d$  est donc erroné. Si l'on regarde maintenant la vitesse de groupe à  $f \approx 0.38$  MHz, on a  $\Delta v_C \approx 0$  m/s et  $\Delta v_T \approx \Delta v_d \approx 13.3$  m/s.



**Fig. 2-4** : Comparaison entre la variation de vitesse induite par l'effet total de la contrainte ( $\Delta v_T$ ), son effet uniquement sur l'élasticité du milieu ( $\Delta v_C$ ) et uniquement sur l'épaisseur ( $\Delta v_d$ ) dans le cas où la plaque est soumise à  $\sigma_1 = \sigma_2 = 200$  MPa.

D'autres remarques peuvent être faites sur les variations de  $\Delta v_C$  et  $\Delta v_d$  en fonction de la fréquence. Pour cela, on identifie trois bandes de fréquence  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  et  $\mathbf{B}_3$ , suivant la dispersion du mode S0 (voir Fig. 2.3). La variation de  $\Delta v_d$  en fonction de la fréquence pourrait être aisément prédite à partir des courbes de dispersion de l'état *naturel*, comme on le voit dans la Fig. 2.3 [(a) et (b)], où c'est dans  $\mathbf{B}_2$  que la dispersion est la plus forte<sup>1</sup>. Cela est traduit par le fait que c'est dans bande  $\mathbf{B}_2$  que  $\Delta v_d$  est la plus importante, alors qu'elle est presque nulle dans  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_3$ .

En ce qui concerne la variation de  $\Delta v_C$ , on peut voir qu'elle a un comportement différent de celui de  $\Delta v_d$  du fait qu'elle est importante dans  $\mathbf{B}_1$  (alors que  $\Delta v_d \approx 0$  dans cette bande de fréquence) et qu'elle converge (à haute fréquence) vers  $\Delta v_C \approx 0$  m/s, ce qui n'est pas expliqué par la dispersion du mode S0. Dans  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_3$ , on a  $\Delta v_d \approx 0$  ce qui veut dire que la variation de vitesse totale résulte entièrement de l'effet de la contrainte sur l'élasticité du milieu.

En observant maintenant les variations de vitesses dans  $\mathbf{B}_2$ , on peut conjecturer que les fréquences auxquelles les modes sont le plus dispersifs ( $\Delta v_d$  importante) correspondent également aux fréquences où l'EAE ( $\Delta v_T$ ) est important. Cette tendance a été également observée pour le chargement suivant ( $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = 200$  MPa) dont les résultats pour les modes A0, A1, SH1, S0 et S1 (le mode SH0 étant non dispersif on a :  $\Delta v_d^{\text{SH0}} = 0$ ), sont donnés en annexe (An-Ch2-Fig. 2 [p. 86]).

En conclusion, il est donc nécessaire de prendre en compte la variation de l'épaisseur de la plaque induite par la contrainte.

#### D. Non-linéarité de l'EAE

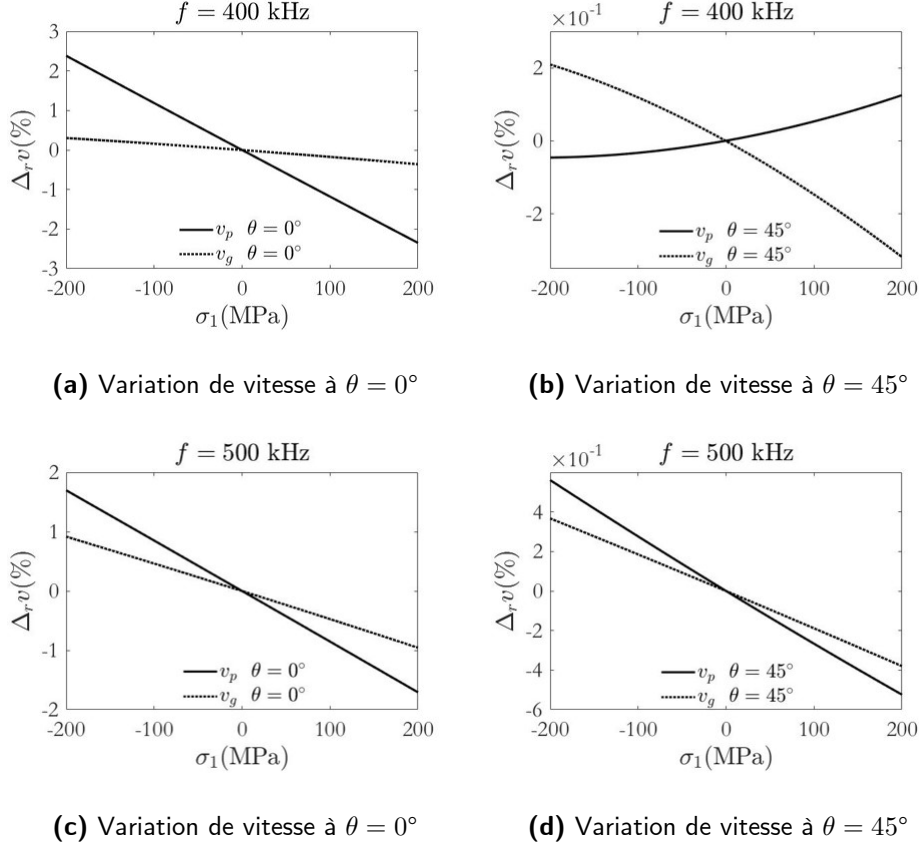
Il a été montré théoriquement Réf. [68,75] et expérimentalement Réf. [68,72,73,91], que la variation de vitesse des ondes de volume et des ondes guidées pouvait être considérée une fonction linéaire de la contrainte. Cela est vrai à une très bonne approximation. Cependant, des déviations de cette loi peuvent émerger à certaines fréquences et suivant certaines directions.

Pour illustrer cette non-linéarité, on étudie les variations relatives de vitesse du mode A1 dans le cas où la plaque est soumise à un chargement uniaxial allant de  $-200$  MPa à  $+200$  MPa. Deux fréquences ( $f = 400$  kHz et  $500$  kHz) et deux directions de propagations ( $\theta = 0^\circ$  et  $45^\circ$ ) sont considérées.

Les résultats montrent une variation quasiment linéaire pour la fréquence  $f = 500$  kHz, et dans les deux directions considérées (Fig. 2.5 (c) et (d)) et pour  $f = 400$  kHz dans la direction  $\theta = 0^\circ$ . Cela n'est plus

<sup>1</sup> On note que  $\mathbf{B}_2$  est utilisée pour indiquer la bande de fréquence où la dispersion des vitesses de phase et de groupe est la plus forte. Elle n'est donc en générale pas la même pour les vitesse de phase et de groupe.

le cas à la fréquence  $f = 400$  kHz et pour  $\theta = 45^\circ$  où la variation présente une forte non-linéarité (Fig. 2.5 (b)). Ceci montre que la non-linéarité est à la fois anisotrope et dépendante de la fréquence. La Fig. 2.5 (b) montre que la variation de vitesse en traction ( $\sigma > 0$ ) diffère de celle en compression ( $\sigma < 0$ ). Cela vient du fait que le tenseur de rigidité et l'épaisseur sont des fonctions quadratiques (et non pas linéaires) de la contrainte (Éq.(1-69),(1-74) et (2-6), montrent que  $d(-\sigma_1) \neq -d(+\sigma_1)$  et  $C^{eq}(-\sigma_1) \neq -C^{eq}(+\sigma_1) \Rightarrow \Delta_r v(-\sigma_1) \neq -\Delta_r v(+\sigma_1)$ ).



**Fig. 2-5** : Variation relative de vitesse de groupe (pointillé) et de phase (trait continu), dans le cas d'un chargement uniaxial  $\sigma_1 = [-200, 200]$  MPa, et pour deux fréquences ( $f = 400$  et  $500$  kHz) et deux directions données ( $\theta = 0^\circ$  et  $45^\circ$ ).

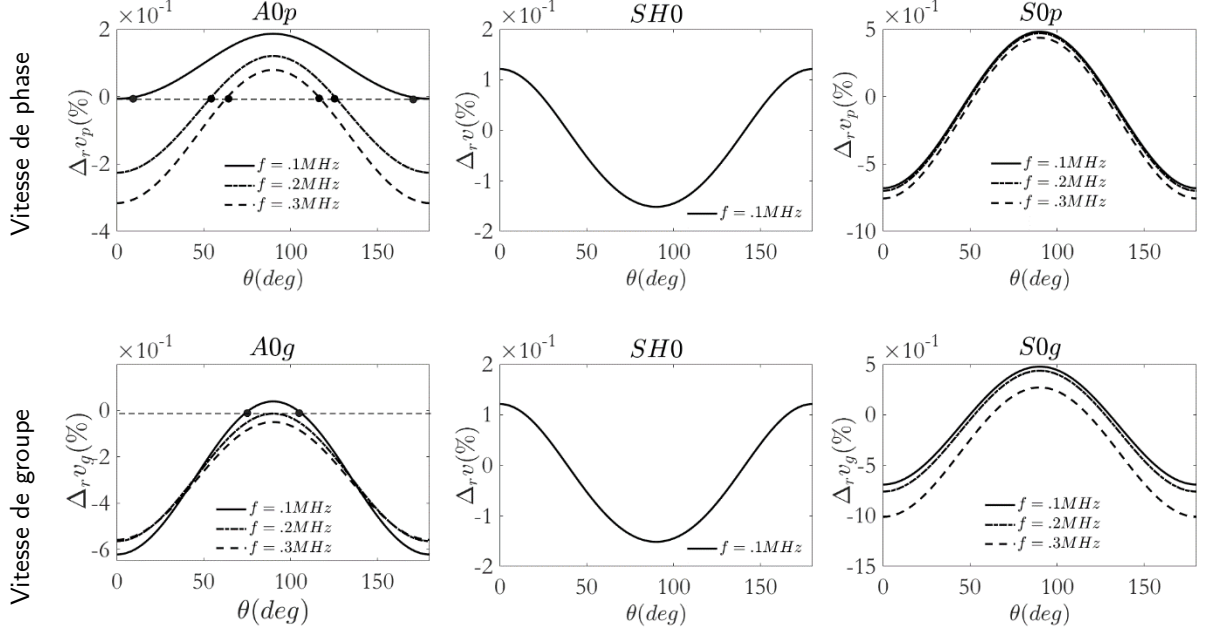
Finalement, en comparant les variations de vitesses dans les deux directions, on voit que l'anisotropie acoustique est très importante :  $\Delta_r v \approx \pm 3\%$  dans la direction  $\theta = 0^\circ$  et  $\Delta_r v \approx \pm 0.6\%$  dans la direction  $\theta = 45^\circ$ . Cette anisotropie est étudiée plus en détails dans la sous-section suivante.

## E. Anisotropie acoustoélastique

Dans cette section, la plaque est soumise à l'effort triaxial  $\sigma_1 = 100$  MPa,  $\sigma_2 = -50$  MPa et  $\sigma_3 = 80$  MPa. Trois fréquences sont étudiées  $f = 0.1, 0.2$  et  $0.3$  MHz auxquelles seuls les modes fondamentaux existent. L'objectif est d'étudier l'anisotropie acoustoélastique induite par ce chargement.

On donne dans (Fig. 2.6) les variations relatives de vitesse des trois modes fondamentaux, en fonction de la direction de propagation  $\theta$ . Ces résultats montrent bien l'anisotropie acoustoélastique qui a été observée non seulement pour les ondes de Lamb par Gandhi *et al* [68], mais aussi pour les ondes de Rayleigh et les ondes rampantes par Schneider [60], pour les ondes de volume par Johnson & Rasolofosaon [46] et pour le mode SH0 par Thompson *et al* [92]. Cette anisotropie s'explique par le fait que le chargement est anisotrope, rendant ainsi le matériau élastiquement anisotrope. On remarque que toutes les courbes sont symétriques par rapport à l'axe  $\theta = 90^\circ$ . Cela vient du fait que le chargement admet deux plans de symétrie (*i.e.*  $(i_1, i_3)$  et  $(i_2, i_3)$ ). On peut noter également que l'EAE des vitesses de groupe sont un peu plus grands que ceux des vitesses de phase ; cela était le cas pour le chargement dans la sous-section III-C (voir aussi annexe An-Ch2-Fig. 2 [p. 86]). Le mode S0 (resp. SH0) est le plus (resp. moins) anisotrope. En observant les variations de vitesse du mode A0, on remarque qu'à  $f = 0.2$  et

0.3 MHz, et pour des directions entre  $\approx 60^\circ$  et  $\approx 120^\circ$  on a  $\Delta_r v(\text{phase}) > 0$  tandis que  $\Delta_r v(\text{groupe}) < 0$ , ce qui veut dire que, si le signal d'excitation de la source est centré autour de ces fréquences, alors la propagation du paquet d'onde sera *plus lente*, mais en *avance de phase* par rapport à celle dans l'état non-contraint. Dans certaines directions, les variations de vitesses de groupe ou de phase sont nulles. Cependant, celles suivant lesquelles  $\Delta_r v(\text{phase}) = 0$  diffèrent de celles suivant lesquelles  $\Delta_r v(\text{groupe}) = 0$ , ce qui laisse toujours la possibilité de détecter l'EAE, en se basant sur le temps d'arrivée d'un paquet d'onde ou sur la phase du signal. On remarque également qu'à  $\theta \approx 45^\circ$ ,  $\Delta_r v^{A0}(\text{groupe})$  ne dépend pas de la fréquence, ce qui n'est pas le cas pour  $\Delta_r v^{A0}(\text{phase})$ .



**Fig. 2-6 :** Variations relatives de vitesses des trois modes fondamentaux, en fonction de la direction, à trois fréquences  $f = .1, .2$ , et  $0.3$  MHz. La plaque est soumise au chargement triaxial  $\sigma_1 = 100$  MPa,  $\sigma_2 = -50$  MPa et  $\sigma_3 = 100$  MPa.

## F. Décomposition de l'EAE

Dans cette sous-section, on étudie la validité de l'hypothèse qui stipule que l'EAE induit par l'application d'un tenseur de contrainte multiaxiale est égal à la somme des EAE induits par les composantes du tenseur considérées séparément. Cette hypothèse est traduite mathématiquement par l'approximation du développement de Taylor de la fonction (*multi variable*)  $\Delta v_\sigma = \Delta v(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  par la somme des développements de Taylor des trois fonctions (*à une seule variable*),  $\Delta v(\sigma_i)$ , soit :

$$\Delta v_\sigma = \sum_{l=1}^{+\infty} \left( \sum_i^3 a_i^{(l)} \sigma_i^l \right) + \sum_{l,m=1}^{+\infty} \left( \sum_{i,j}^3 b_{ij}^{(l,m)} \sigma_i^l \sigma_j^m \right) + \sum_{l,m,n=1}^{+\infty} \left( \sum_{i,j,k}^3 c_{ijk}^{(l,m,n)} \sigma_i^l \sigma_j^m \sigma_k^n \right) \quad (2-29)$$

$$\approx \sum_{l=1}^{+\infty} \left( \sum_i^3 a_i^{(l)} \sigma_i^l \right) = \sum_i^3 \Delta v(\sigma_i)$$

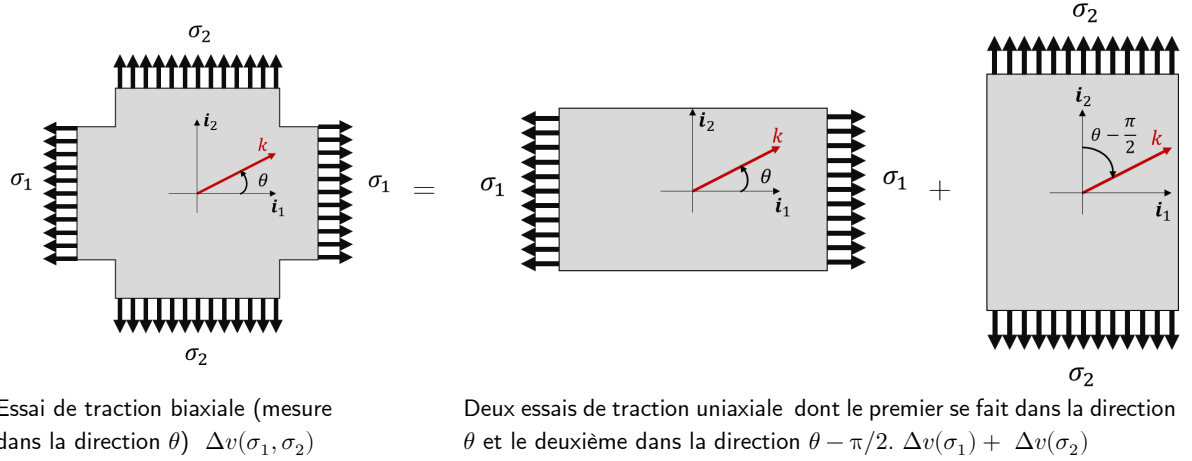
avec

$$a_i^{(l)} = \frac{1}{l!} \left( \frac{\partial^l (\Delta v_\sigma)}{\partial \sigma_i^l} \right) \Bigg|_{\sigma=0}, \quad b_{ij}^{(l,m)} = \frac{1}{(l+m)!} \left( \frac{\partial^{l+m} (\Delta v_\sigma)}{\partial \sigma_i^l \partial \sigma_j^m} \right) \Bigg|_{\sigma=0} \quad (2-30)$$

$$c_{ijk}^{(l,m,n)} = \frac{1}{(l+m+n)!} \left( \frac{\partial^{l+m+n} (\Delta v_\sigma)}{\partial \sigma_i^l \partial \sigma_j^m \partial \sigma_k^n} \right) \Bigg|_{\sigma=0}$$

avec  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  et  $i \neq j \neq k$ . Notons que  $a_i^{(l)}$ ,  $b_{ij}^{(l,m)}$  et  $c_{ijk}^{(l,m,n)}$  dépendent de la fréquence et de la direction de propagation, du fait que  $\Delta v_\sigma$  en dépend.

Cette hypothèse, si elle est valide, permet des simplifications majeures sur le plan calculatoire mais surtout dans la pratique. Par exemple, au lieu d'utiliser une machine de traction *biaxiale* pour mesurer l'EAE, dans une direction  $\theta$  donnée, on peut utiliser une machine *uniaxiale*, et faire deux mesures dans les deux directions  $\theta$  et  $\theta - \pi/2$  (voir la Fig. 2.7). Cette hypothèse permet également de faciliter la recherche des méthodes d'inversion des contraintes multiaxiales (chapitre suivant), puisqu'on suppose que les effets des composantes de la contrainte sont découplés.



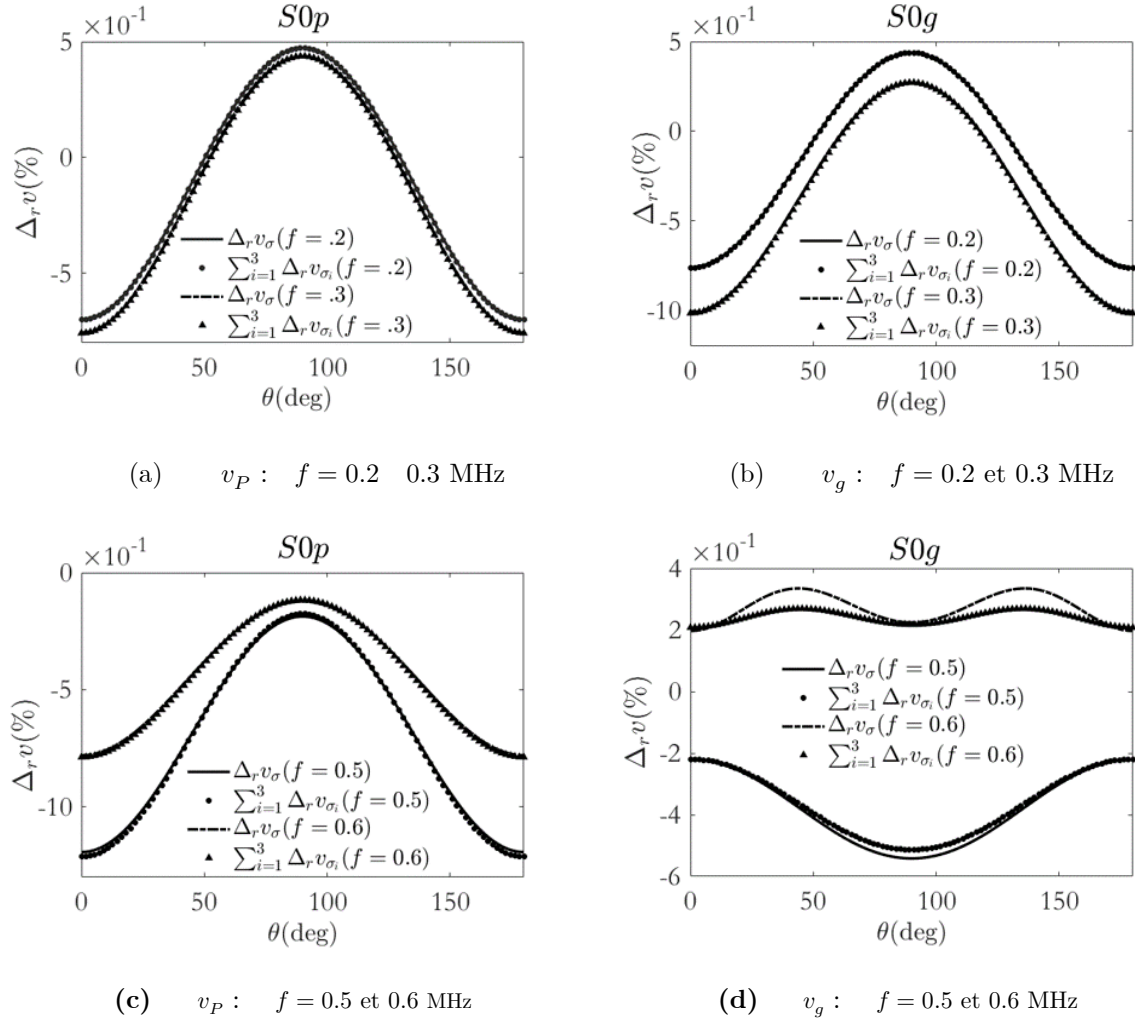
**Fig. 2-7** : Décomposition de l'EAE induit par l'application d'une contrainte biaxiale comme la somme des EAE induits par deux contraintes uniaxiales. Les mesures de vitesses sont faites dans les directions  $\theta$  et  $\theta - \pi/2$ ,  $k$  étant le vecteur d'onde.

Dans la suite de cette sous-section, la plaque est soumise au chargement triaxial considéré dans la sous-section précédente (*i.e.*  $\sigma_1 = 100$  MPa,  $\sigma_2 = 100$  MPa et  $\sigma_3 = 80$  MPa). On étudie les variations relatives de vitesse du mode S0 à quatre fréquences  $f = 0.2, 0.3, 0.5$  et  $0.6$  MHz. Pour simplifier les notations, l'EAE induit par le tenseur de contrainte multiaxiale  $\Delta v(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  est noté  $\Delta v_\sigma$ , et l'EAE induit par une composante du tenseur de contrainte  $\Delta v(\sigma_i)$  est noté  $\Delta v_{\sigma_i}$ . Les résultats sont donnés en fonction de la variation relative de vitesses et non pas absolue.

On présente ci-après (Fig. 2.8) les simulations permettant de tester la validité de l'hypothèse. Les variations de la vitesse de phase [(a) et (c)] montrent que l'hypothèse (2-29) est valide pour les quatre fréquences considérées, avec une déviation mineure à  $f = 0.5$  MHz (Fig. 2.8 (c)). Cela reste le cas aussi pour la vitesse de groupe pour les deux premières fréquences ((b) et (d)). Par contre à  $f = 0.5$  et  $0.6$  MHz (Fig. 2.8 (d)), la différence entre  $\Delta v_\sigma$  et la somme des  $\Delta v_{\sigma_i}$  est importante.

Les différences sont importantes autour de la direction  $90^\circ$  pour  $f = 0.5$  MHz et autour de  $45^\circ$  pour  $f = 0.6$  MHz. Ainsi, la validité de l'hypothèse (2-29) dépend à la fois de la fréquence et la direction.

L'identification des limites de la validité de (2-29) représente un point de départ pour le développement des méthodes de caractérisation des contraintes multiaxiales en se basant sur les variations de vitesse.



**Fig. 2-8** :  $\Delta_r v$  du mode S0, en fonction de  $\theta$ . Pour  $f = 0.2, 0.3, 0.5$  et  $0.6$  MHz et  $\sigma_1 = 100$  MPa,  $\sigma_2 = -50$  MPa, et  $\sigma_3 = 80$  MPa.  $\Delta_r v$  induite par le tenseur de contrainte multiaxiale (trait continu et interrompu), et la somme de variations relatives de vitesses induites par chaque composante du tenseur (les marqueurs circulaires et triangulaires).

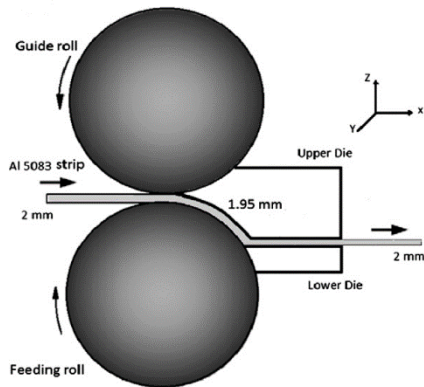


#### IV. Cas d'une contrainte avec un profil variable dans l'épaisseur

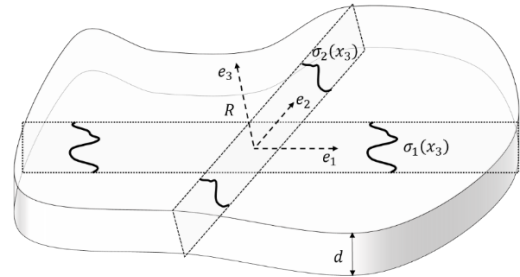
Dans la section précédente, on s'est intéressé au cas où la contrainte – multiaxiale – est uniforme dans l'épaisseur. Ce cas, que l'on retrouve généralement lors des essais de traction/compression, est intéressant et son étude représente la première étape à franchir pour mieux comprendre le cas le plus complexe, qui est celui d'une contrainte avec un profil variable dans l'épaisseur. Ce dernier est le plus répandu dans les cas industriels et son étude est donc importante.

Cette section s'intéresse donc au cas des contraintes non-uniformes. L'étude a été menée en toute fin de thèse et n'est pas complète. Elle constitue une étude préliminaire et exploratoire permettant néanmoins de mettre en évidence une série de résultats intéressants. Les conclusions qui en sont tirées ne peuvent pas être considérées comme générales par rapport à la question industrielle posée que l'on décrit ci-après.

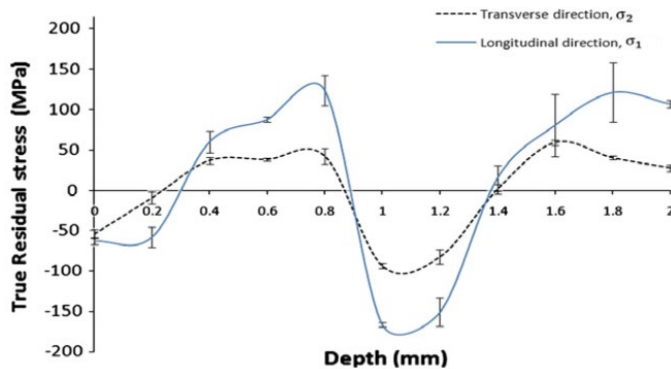
Il existe de très nombreux types possibles de profils non-uniformes de la contrainte en fonctions de l'épaisseur suivant les procédés de fabrication / traitement qui sont à leur origine. Il est donc impossible de mener une étude exhaustive. De plus, la contrainte reste toujours multiaxiale et il se peut que chaque composante<sup>1</sup> possède un profil différent de ceux des autres. Pour illustrer, cela on reporte ici quelques résultats pris de la Réf. [93].



(a) Procédé ECAR (Fig.1 (a) de la Réf. [67]) utilisé pour augmenter la limite d'élasticité du matériau.



(b) Illustration d'un état de contrainte biaxial, homogène dans le plan de la plaque et variable dans l'épaisseur.



(c) Profils de contrainte biaxiale dans l'épaisseur de la plaque (Fig.8 de la Réf. [93])

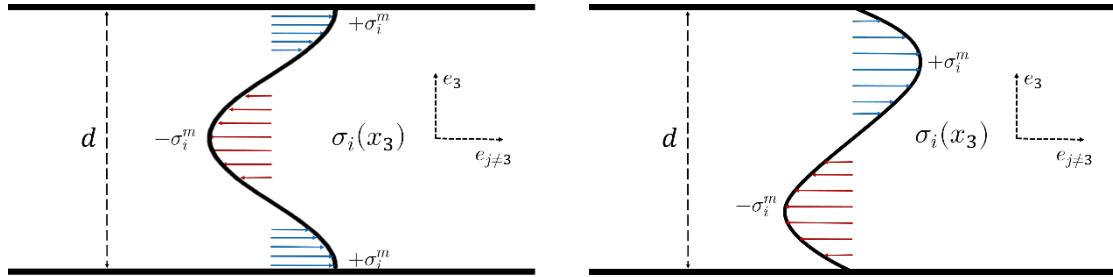
**Fig. 2-9** : Exemple de traitement mécanique induisant un profil variable de contrainte dans une plaque. (a) le traitement ECAR dont l'objectif est d'augmenter la limite d'élasticité du matériau. (b) une illustration de l'état biaxial de contrainte induit. (c) profils de contrainte biaxiale ( $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ ) dans l'épaisseur de la plaque après avoir subi le ECAR.

Les auteurs de Réf. [93] mesurent la contrainte résiduelle dans l'épaisseur d'une plaque en aluminium, en utilisant la méthode de diffraction des rayons-X couplée à la méthode d'enlèvement de couche. La contrainte résiduelle supposée biaxiale et homogène dans le plan de la plaque est induite par un procédé de laminage dit ECAR (de l'anglais Equal Channel Angular Rolling), dont l'objectif est d'augmenter la

<sup>1</sup> On parle ici des composantes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de la contrainte, mais la direction  $\alpha$  peut aussi avoir un profil variable dans l'épaisseur, qui lui est propre.

limite d'élasticité du matériau. Ce procédé est représenté par la Fig. 2.9 (a). Avant application du laminage, la pièce est non-contrainte et son épaisseur est de 2mm ; après traitement, elle conserve la même épaisseur mais connaît un état de contrainte biaxial induit – donné par la Fig. 2.9 (b) – homogène dans le plan de la plaque et variable dans l'épaisseur. La limite d'élasticité passe de 150 MPa à 300 MPa (voir la Fig.9 de la Réf. [93]). Sur la Fig. 2.9 (c), on trouve les profils des deux composantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de la contrainte. Cette figure montre que l'état de contrainte induit est multiaxial et les profils de chaque composante sont différents l'un de l'autre. D'autres procédés de fabrication ou de traitement peuvent induire d'autres états de contrainte (voir par exemple Réf. [26,94-96]).

Dans cette section, on s'intéresse aux effets d'une contrainte à profil variable dans l'épaisseur, sur les ondes de Lamb et SH. Les études qu'on a pu trouver utilisant les ondes de Lamb sont celles de Peddeti & Santhanam [74] et Zuo *et al* [76] dans lesquelles les auteurs ont donné la variation de vitesse – en fonction de la fréquence – dans la direction de la contrainte uniaxiale dans le plan, dans le cas où cette contrainte possède un gradient linéaire dans l'épaisseur. Pour ne pas alourdir cette section, on restreint notre étude aux cas des contraintes biaxiales, dont les composantes peuvent avoir des profils quelconques. Dans les quatre premières sous-sections, on s'intéresse essentiellement aux profils suivants :



(a) Profil de contrainte dans l'épaisseur de la plaque donné par :  $\sigma_i(x_3) = \sigma_i^m \cos(2\pi x_3/d)$  décrivant une traction près des bords de la plaque, et une compression à cœur.

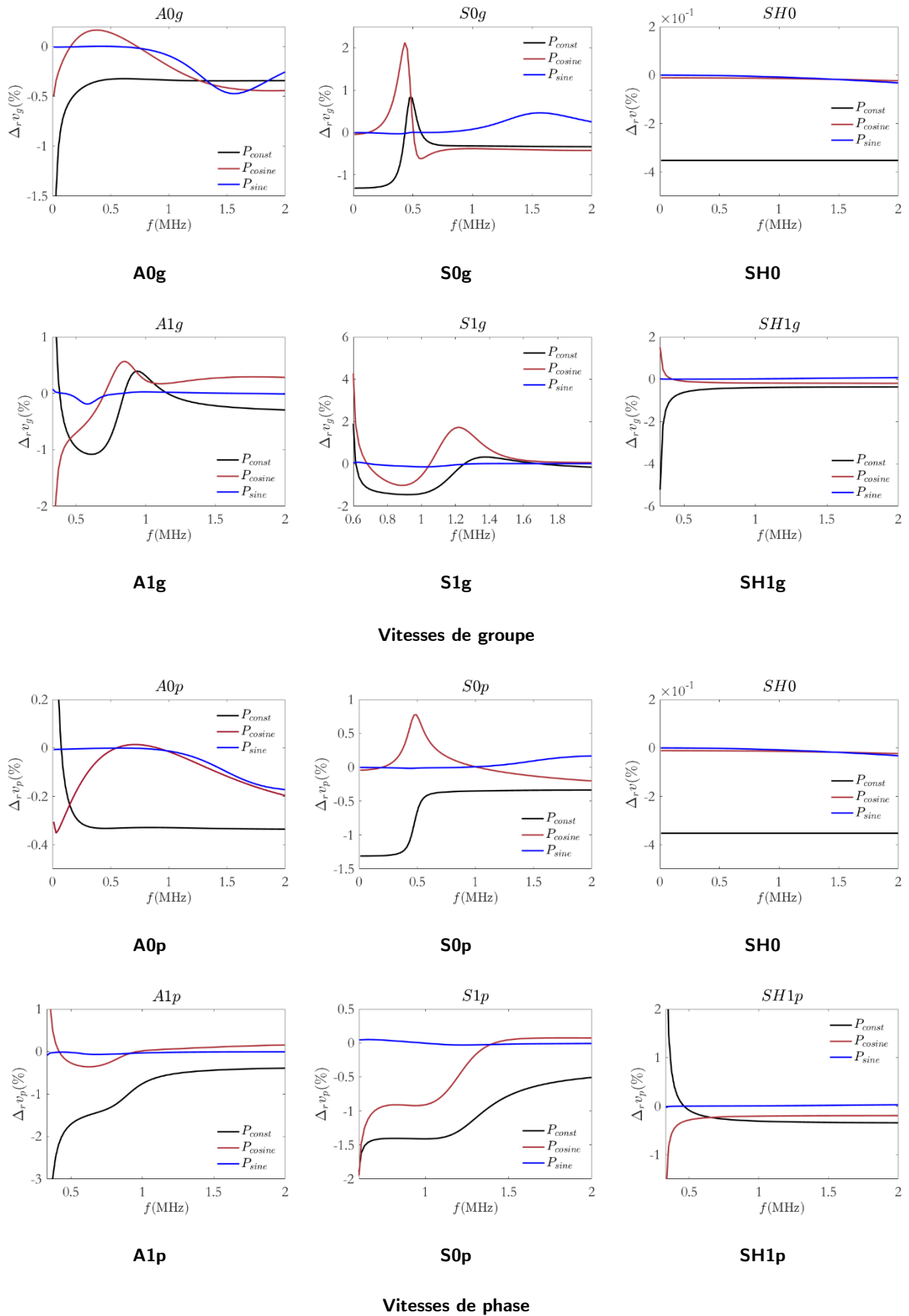
(b) Profil de contrainte dans l'épaisseur de la plaque donné par  $\sigma_i(x_3) = \sigma_i^m \sin(2\pi x_3/d)$  Décrivant une traction dans la première moitié de la plaque, une compression dans la seconde.

**Fig. 2-10** : Les deux profils variables de contrainte dans l'épaisseur ( $d$ ).  $\sigma_i$  sont les contraintes principales.  $\sigma_i^m$  sont les amplitudes (positives) des contraintes principales. ( $x_3 = 0$ ) correspond à la surface inférieure de la plaque.  $e_{j \neq 3} = e_1$  ou  $e_2$ .

**Remarque** : dans la section précédente où le profil de la contrainte était constant dans l'épaisseur, on a utilisé 10 éléments pour mailler l'épaisseur, nombre d'éléments déterminé par expérimentation numérique comme suffisant pour obtenir des résultats précis. Dans cette section, nous avons remarqué que pour converger et obtenir des résultats précis, il était nécessaire d'augmenter le nombre d'éléments dans l'épaisseur. Nous avons choisi de la mailler par 32 éléments puis 64 éléments dans la sous-section IV.E [p. 73]). Dans cette section la plaque à les mêmes propriétés élastiques et épaisseur que dans la section précédente.

### A. Profils de contrainte : une étude comparative

Dans cette sous-section, nous étudions brièvement la sensibilité des modes guidés au profil de la contrainte. Pour cela, on étudie le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan, d'amplitude  $\sigma_1^m = 200$  MPa. Les trois profils sont :  $P_{const}$  défini par un profil constant dans l'épaisseur,  $P_{cosine}$  défini par la fonction cosinus (Fig. 2.10 (a)) et  $P_{sine}$  défini par la fonction sinus (Fig. 2.10 (b)). Seuls les modes A0, S0, SH0, A1, SH1 et S1 sont étudiés. La propagation se fait suivant la direction de la contrainte. Les résultats de cette étude sont donnés Fig. 2.11.



**Fig. 2-11** : Variations relatives de vitesse des modes A0, S0, SH0, A1, S1 et SH1 en fonction de la fréquence. Dans le cas où le profil de la contrainte uniaxiale dans le plan est constant ( $P_{const}$ ), en forme de cos ( $P_{cosine}$ ) et en forme de sinus ( $P_{sine}$ ). La propagation se fait dans la direction de la contrainte.

La première ligne de la Fig. 2.11 montre les variations relatives de vitesse de groupe des modes fondamentaux, la seconde, celles des modes d'ordre 1, la troisième, les variations relatives de vitesses de phase des modes fondamentaux et la dernière, celles des modes d'ordre 1. Les résultats pour  $P_{const}$  sont tracés en noir, ceux pour  $P_{cosine}$  en rouge et ceux pour  $P_{sine}$  en bleu. Toutes les variations sont relatives à l'état non-contraint.

Les variations relatives de vitesses (traduisant l'EAE) sont très sensibles au profil de la contrainte. Pour un même mode, on peut avoir une variation quasi-nulle pour un profil alors qu'elle est importante pour un autre (voir le cas de la vitesse S1g). Par ailleurs, l'EAE est toujours dispersif mais diversement selon le mode, et selon qu'il s'agit de la vitesse de groupe ou de celle de phase.

Pour la vitesse de groupe du mode A0 (cellule (1,1) dans la Fig. 2.11) l'EAE induit par un profil constant ( $P_{const}$ ) suit à peu près le même comportement que celui pour la vitesse A0g (voir Fig. 2.3). Pour  $P_{sine}$ , l'EAE est presque nul à basse fréquence (là où la dispersion et l'EAE dus au  $P_{const}$  sont importants), mais important à haute fréquence ( $f = 1.5$  MHz).

Les EAE associés aux deux profils  $P_{const}$  et  $P_{sine}$  sont nuls ou négatifs, ce qui signifie que dans cette direction, l'onde dans l'état contraint sera en retard par rapport à l'état non-contraint. Cependant, cela n'est pas vrai pour l'EAE induit par le profil  $P_{cosine}$  qui quant à lui passe du négatif au positif puis de nouveau au négatif.

Les résultats du mode S0 (cellule (1,2) dans la Fig. 2.11) montrent que même s'il y a une ressemblance entre les EAE dus aux profils  $P_{const}$  et  $P_{cosine}$ , leurs valeurs restent différentes, ce qui consolide l'idée que l'EAE est sensible au profil de la contrainte. L'EAE dû au profil  $P_{sine}$  est presque nul jusqu'à 1 MHz et relativement important au-delà (jusqu'à 2 MHz).

Pour le mode SH0 (cellule (1,3) dans la Fig. 2.11), l'EAE est relativement faible comparé à ceux des modes A0 et S0. Les EAE dus aux profils  $P_{sine}$  et  $P_{cosine}$  sont tous deux très faibles mais dispersifs (ce qui n'est pas le cas pour l'EAE dû au profil  $P_{const}$ ) comme déjà remarqué dans les travaux de Zuo *et al* [36] (Fig.9 et 10 de la référence) pour une plaque soumise un cisaillement simple.

Les EAE sur les modes d'ordre 1 (cellule (2,1-3) dans la Fig. 2.11) sont peu sensibles au profil  $P_{sine}$ , quand ceux dus aux deux autres profils sont toujours distincts. De façon générale, les modes de Lamb sont les plus sensibles à la contrainte.

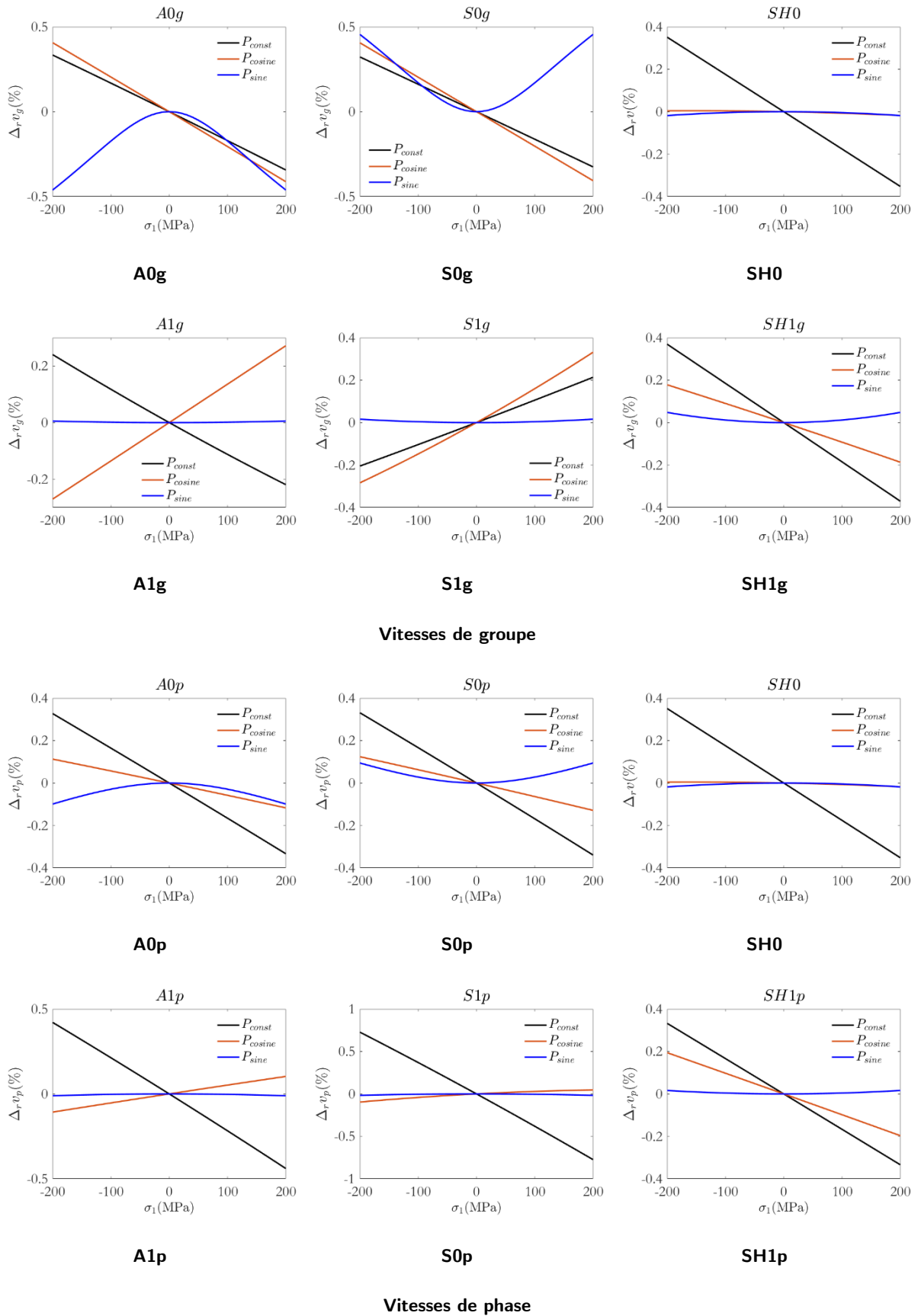
En résumé, les vitesses de groupe et de phase partagent à peu près les mêmes tendances : les EAE sont très sensibles au profil de la contrainte ; les modes SH sont moins sensibles que les modes de Lamb ; l'EAE dû au profil  $P_{sine}$  est plus faible que les EAE dus aux deux autres profils considérés.

## B. Non-linéarité de l'EAE en fonction du profil de la contrainte.

Nous avons mis en évidence dans le cas d'une contrainte constante dans l'épaisseur que l'EAE n'est pas toujours linéaire et que la non-linéarité dépend à la fois de la fréquence et la direction de propagation. On cherche ici à étudier si cette non-linéarité dépend aussi du profil de la contrainte. Pour cela, on mène une étude où l'on a fait varier l'amplitude de la contrainte, pour des ondes à fréquence fixée (à 1.5 MHz), fréquence pour laquelle les variations de vitesses dues aux trois profils sont importantes (voir la Fig. 2.11). Les résultats sont donnés Fig. 2.12.

Les EAE dus aux deux profils  $P_{const}$  et  $P_{cosine}$  sont quasiment linéaires. En revanche, l'EAE induit par le profil  $P_{sine}$  est non-linéaire (si le terme linéaire existe, il est négligeable) ; l'allure des variations de vitesse avec la contrainte est parabolique dans ce cas. Cette tendance non-linéaire de l'EAE dû à ce profil a été observée pour d'autres fréquence et directions de propagation.

Pour aller plus loin, on a étudié deux profils :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \cos(4\pi x_3/d)$  et  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(4\pi x_3/d)$ , mais pour ne pas encombrer le corps du chapitre, les résultats sont donnés dans l'annexe An-Ch2-Fig. 3 [p. 87]. Ces résultats montrent que pour les trois profils  $P_C$  :  $\sigma_1(x_3) = C^{st}$ ,  $P_{\cos(1)}$  :  $\sigma_1(x_3) = \cos(2\pi x_3/d)$  et ,  $P_{\cos(2)}$  :  $\sigma_1(x_3) = \cos(4\pi x_3/d)$ , les variations de vitesse en fonction de l'amplitude de la contrainte sont linéaires. En revanche, pour les deux profils  $P_{\sin(1)}$  :  $\sigma_1(x_3) = \sin(2\pi x_3/d)$  et ,  $P_{\sin(2)}$  :  $\sigma_1(x_3) = \sin(4\pi x_3/d)$ , les variations de vitesse sont non-linéaires, d'allure parabolique.



**Fig. 2-12 :** Variation relative de vitesse des modes A0, S0, SH0, A1, S1 et SH1, pour  $f = 1.5$  MHz en fonction de la contrainte ( $\sigma_1 = \sigma_1^m$ ), pour une contrainte uniaxiale dans le plan dont le profil dans l'épaisseur est constant ( $P_{const}$ ), en forme de cos ( $P_{cosine}$ ) et en forme de sinus ( $P_{sine}$ ). La propagation se fait dans la direction de la contrainte.

Finalement, pour les profils de contrainte  $P_{\sin(n)} : \sigma_1(x_3) = \sin(2n\pi x_3/d)$ , les variations de vitesse dépendent de façon quadratique de la contrainte pour tous les modes A0, S0, SH0, A1, S1 et SH1 étudiés. Assurer que ce résultat général nécessiterait une étude paramétrique plus complète qui n'a pas été réalisée ici.

### C. Anisotropie de l'EAE en fonction du profil de la contrainte

On étudie ici l'influence du profil dans l'épaisseur sur l'anisotropie des EAE, influence constatée dans le cas de profil constant dans l'épaisseur. On calcule les variations relatives de vitesses des modes A0, S0, SH0, A1, S1 et SH1 à la fréquence  $f = 1.5$  MHz en fonction de l'angle  $\theta$  entre la direction de propagation de l'onde et la direction de la contrainte uniaxiale  $\sigma_1$  maintenue à 200 MPa. Les résultats sont donnés Fig. 2.13.

Pour la vitesse de groupe A0g (cellule (1,1) de la Fig. 2.13), l'anisotropie de l'EAE pour le profil  $P_{const}$  et celle pour le profil  $P_{cosine}$  sont similaires et ressemblent à la courbe de la fonction usuelle  $F_1 = a + b \cos(2\theta)$ . Suivant la direction de propagation, la variation relative de vitesse peut être positive ou négative. Cela n'est pas le cas pour l'EAE induit par le profil  $P_{sine}$  qui est négatif quelle que soit la direction de propagation. L'EAE induit par ce profil semble se rapprocher de la courbe de la fonction usuelle  $F_2 = a + b_1 \cos(2\theta) + b_2 \cos(4\theta)$ . Ceci conforte la conclusion des deux sous-sections précédentes sur le fait que l'EAE est très sensible au profil de la contrainte.

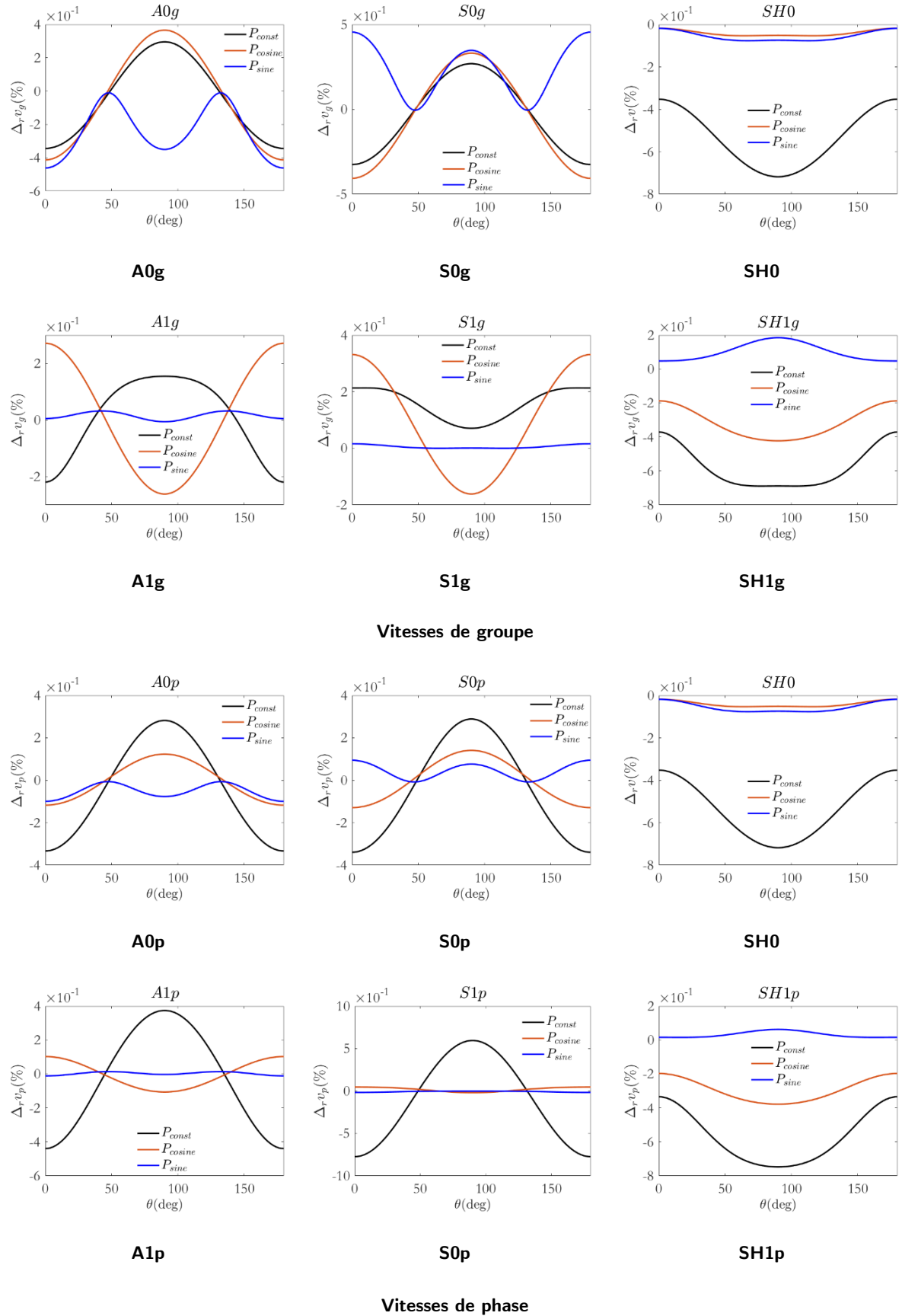
Pour la vitesse S0g (cellule (1,2) de la Fig. 2.13), les tendances sont similaires à celles observées pour A0g à la différence près qu'autour de  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$ , tous les EAE semblent s'annuler ; il en est de même pour la vitesse S0p (cellule (3,2) de la Fig. 2.13). Ainsi, dans cette direction, une onde à la fréquence  $f = 1.5$  MHz ne sera pas affectée par la contrainte et ce pour les trois profils considérés.

L'EAE du mode SH0 (cellule (1,3) de la Fig. 2.13) est très faible pour les deux profils  $P_{sine}$  et  $P_{cosine}$  et ressemble à la courbe de la fonction  $F_2$  alors que celui pour le profil  $P_{const}$  est relativement important (comparable aux EAE des modes de Lamb). Son allure ressemble à la fonction  $F_1$ . Pour la vitesse A1g (cellule (2,1) de la Fig. 2.13), autour de  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$ , l'EAE est quasiment nul pour les trois profils ; il en est de même pour la vitesse A1p et pour le mode S0. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour le mode S0, les EAE induits par les deux profils  $P_{const}$  et  $P_{cosine}$  ne sont pas semblables : celui dû au  $P_{cosine}$  ressemble à la fonction  $F_1$  mais pas celui dû au  $P_{const}$ . L'EAE dû au profil  $P_{sine}$  est peu anisotrope et faible comparé à ceux des autres profils.

Les résultats du mode S1 montrent que pour l'EAE induit par le profil  $P_{cosine}$ , pour la vitesse de phase (cellule (4,2) de la Fig. 2.13) est presque nul dans toutes les directions, alors que celui de la vitesse de groupe (cellule (2,2) de la Fig. 2.13) est le plus important parmi les trois EAE des différents profils. L'EAE induit par le profil  $P_{sine}$  est presque nul pour ce mode, pour les deux vitesses de phase et de groupe. Finalement, l'EAE induit par le profil  $P_{const}$  est ou bien positif pour toutes les directions ou négatif, ce qui est différent des EAE dus aux deux autres profils.

Pour le mode SH1, l'anisotropie est différente de celle des modes de Lamb. Les variations de vitesses ne se croisent pas (aucun point d'intersection des courbes représentant les EAE de chaque profil) et sont positives (pour le profil  $P_{sine}$ ) ou négatives (pour les deux profils  $P_{const}$  et  $P_{cosine}$ ). Contrairement aux modes de Lamb où certaines variations de vitesse ressemblaient à la courbe de la fonction  $F_1$ , pour le mode SH1, aucune variation de vitesse ne pourrait être décrite précisément par cette fonction.

Pour résumer, l'anisotropie acoustoélastique est très sensible au profil de la contrainte. L'allure de cette anisotropie varie d'un mode à un autre, et diffère suivant qu'il s'agit de la vitesse de phase ou de groupe.



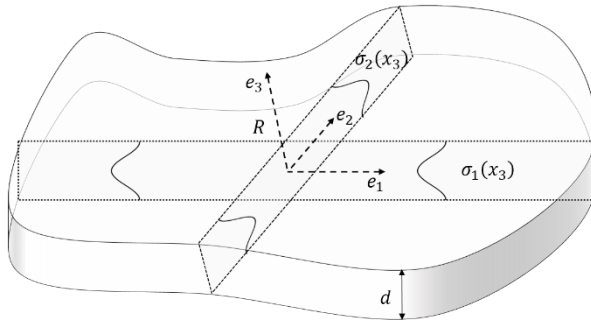
**Fig. 2-13** : Variation relative de vitesse des modes A0, S0, SH0, A1, S1 et SH1, à la fréquence  $f = 1.5$  MHz en fonction de l'angle entre la direction de propagation et celle de la contrainte. Les profils dans l'épaisseur de la contrainte uniaxiale dans le plan est constant ( $P_{const}$ ), en forme de cos ( $P_{cosine}$ ) ou en forme de sinus ( $P_{sine}$ ).

## D. Décomposition de l'EAE vis-à-vis de la nature multiaxiale

On a étudié l'hypothèse que l'EAE induit par un tenseur multiaxial (*e.g.* triaxial) est égal à la somme des EAE induits par chaque composante uniaxiale considérée séparément dans le cas des profils constants. Sa validité dépend à la fois de la fréquence et de la direction de propagation et du mode considéré. Lorsqu'elle est valide, on peut espérer développer des méthodes d'inversion de la contrainte. Dans cette section, on l'étudie pour le cas de contraintes biaxiale avec profils variables dans l'épaisseur.

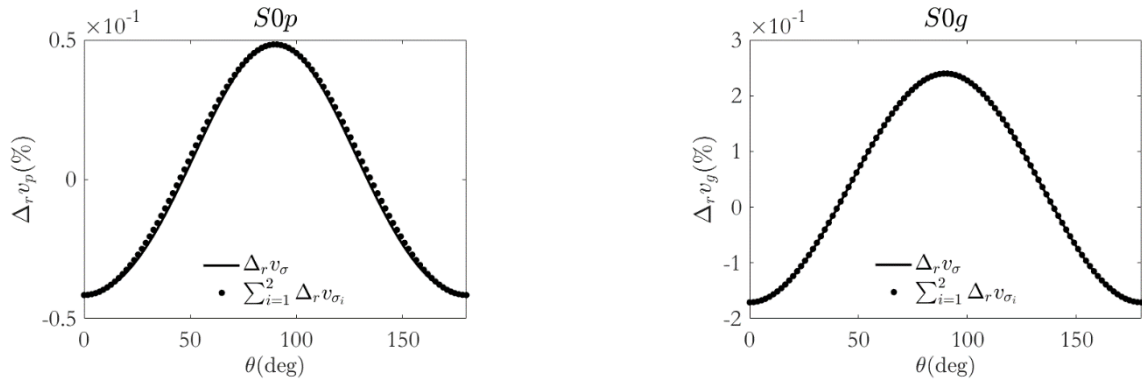
### 1. Profils cissoïdal–cissoïdal

La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan, avec deux composantes dont les profils sont donnés par  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \cos(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa. L'étude est faite à la fréquence  $f = 1.5$  MHz, (fréquence à laquelle les variations de vitesses étaient importantes pour la plupart des modes (voir Fig. 2.11)). Ce cas est illustré par la figure suivante :



**Fig. 2-14** : La plaque d'épaisseur 5mm soumise à un effort biaxial dans le plan, qui varie en fonction de l'épaisseur. Les deux profils de chaque composante sont données par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \cos(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa.

Les résultats pour le mode S0 sont d'abord présentés.



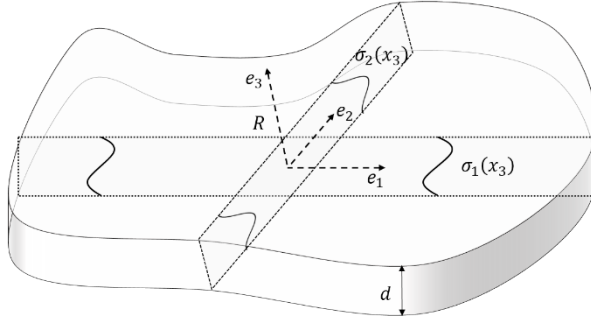
**Fig. 2-15** : variation relative de vitesse du mode S0 en fonction de l'angle  $\theta$  (entre la direction  $e_1$  et celle de l'onde, à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les profils sont donnés par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \cos(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa ( $d$ , épaisseur de la plaque ;  $x_3$ , position dans l'épaisseur).  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial.  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

L'EAE induit par le chargement biaxial (trait continu) et la somme des EAE induits par chaque composante prise séparément (marqueurs circulaires) se superposent, indiquant que l'hypothèse de décomposition est valide. Pour les autres modes (A0, SH0, A1, S1 et SH1 avec les résultats donnés dans l'annexe An-Ch2-Fig. 4 [p. 88]), hormis pour le mode SH0 et la vitesse S1p où les déviations entre  $\Delta_r v_\sigma$  et  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  sont importantes, l'hypothèse est également valide. Nous n'avons pas mené d'étude paramétrique poussée pour établir quelles sont les plages de fréquence dans lesquelles elle le demeure.

### 2. Profils sinusoïdal – cissoïdal

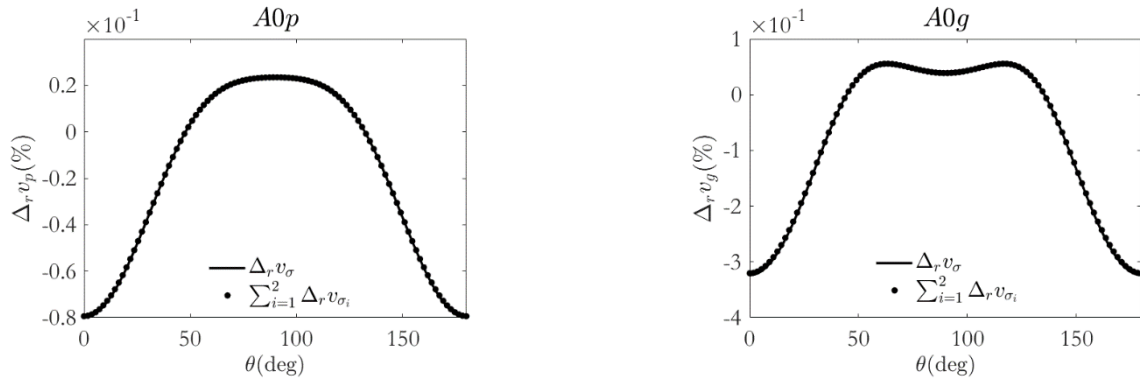
On traite maintenant un cas où dans la direction principale de contrainte  $e_1$  le profil de contrainte est sinusoïdal (*i.e.*  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa) et dans la direction  $e_2$  le profil est cissoïdal (*i.e.*  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_2^m = -80$  MPa). La figure suivante illustre le cas étudié :





**Fig. 2-16** : La plaque d'épaisseur  $d$  soumise à un effort biaxial dans le plan, qui varie en fonction de l'épaisseur. Les deux profils de deux composantes sont donnés par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa.

Les résultats sont présentés pour le mode A0.

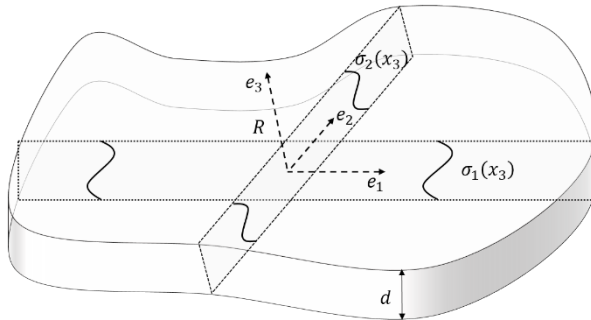


**Fig. 2-17** : variation relative des vitesses du mode A0 en fonction de l'angle  $\theta$  à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les composantes ont pour profils  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa.  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial,  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

À nouveau, les deux courbes se superposent, indiquant que pour ce cas (profils sinusoïdal – cissoïdal) l'hypothèse de décomposition est valide. Contrairement au cas précédent (cissoïdal – cissoïdal), l'hypothèse est ici vérifiée pour tous les modes (résultats dans l'annexe [An-Ch2-Fig. 5](#) [p. 89]). L'allure de l'EAE sur le mode A0 est différente de celle du cas précédent (voir aussi [An-Ch2-Fig. 4](#) [p. 88]) ; elle ne ressemble pas à la courbe de la fonction usuelle  $F_1$  (introduite sous-section [IV.C](#) [p. 68]) mais plutôt à celle de  $F_2$  (voir [IV.C](#) [p. 68]). L'origine de cette différence vient de la superposition de l'anisotropie acoustoélastique induite par le profil cissoïdal (mieux représentée par la fonction  $F_1$ ) et celle induite par le profil sinusoïdal (mieux représentée par la fonction  $F_2$ ).

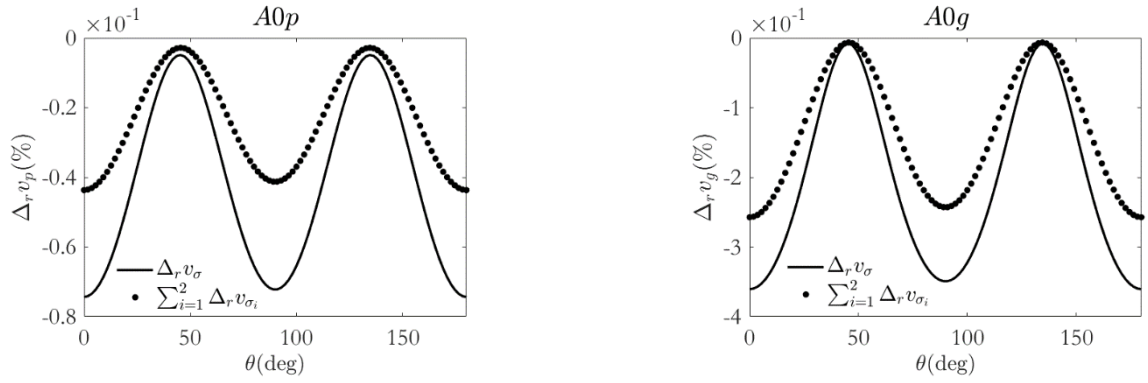
### 3. Profils sinusoïdal– sinusoïdal

On poursuit l'étude avec deux composantes du tenseur biaxial à profils sinusoïdaux. La figure suivante illustre le cas étudié.



**Fig. 2-18** : La plaque d'épaisseur  $d$  soumise à un effort biaxial dans le plan, qui varie en fonction de l'épaisseur. Les deux profils des composantes sont donnés par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa .

On présente les résultats obtenus pour le mode A0.

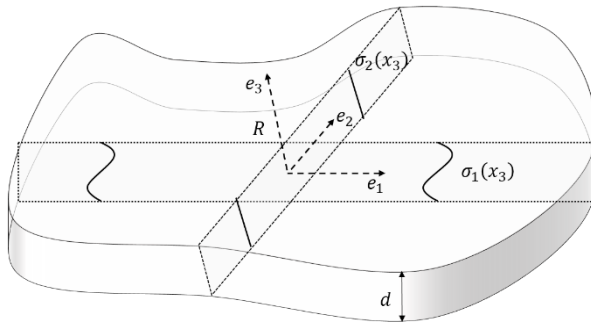


**Fig. 2-19** : variation relative des vitesses du mode A0 en fonction de l'angle  $\theta$ , à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial, avec des composantes dont les profils sont donnés par  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa.  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial,  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

Contrairement aux deux cas précédents, l'hypothèse de décomposition n'est pas vérifiée dans le cas présent, comme présenté par la Fig. 2.19 et ne l'est d'ailleurs pour aucun mode (annexe An-Ch2-Fig. 6 [p. 90]).

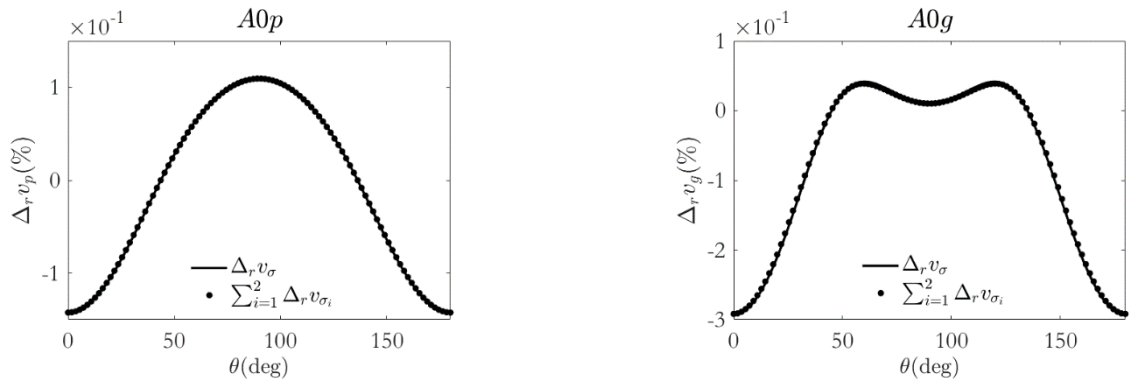
#### 4. Profils sinusoïdal– constant

Ici, le profil dans l'épaisseur de la composante de la contrainte suivant  $e_1$  est sinusoïdal tandis que celui de la composante suivant  $e_2$  est constant.



**Fig. 2-20** : La plaque d'épaisseur  $d$  soumise à un effort biaxial dans le plan, qui varie en fonction de l'épaisseur. Les deux profils des composantes sont donnés par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa .

Les résultats sont montrés pour le mode A0 :



**Fig. 2-21** : variation relative de vitesses du mode A0 en fonction de l'angle  $\theta$ , à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les composantes sont données par  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa .  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial,  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

L'hypothèse de décomposition est valide pour tous les modes étudiés, S0, SH0, A1, SH1, et S1 (An-Ch2-Fig. 7 [p. 91]). Par ailleurs on remarque que les variations de vitesse ont ici des allures similaires à celles du cas des profils sinusoïdal-cissoïdal (IV-D.2 [p. 70]).

## 5. Conclusion

Dans cette sous-section, nous avons étudié la validité de l'hypothèse que l'EAE induit par un tenseur biaxial est égal à la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément, hypothèse essentielle pour imaginer des solutions au problème inverse consistant à trouver les distributions de contraintes grâce à la mesure des variations de vitesses modales.

Quatre cas de combinaisons de profils variables ont été étudiés, combinant profils sinusoïdal, cissoïdal et uniforme/constant. Dans les différents cas, sauf le cas combinant deux profils sinusoïdaux, l'hypothèse était valide, et ce, pour des modes de Lamb, SH, fondamentaux ou du premier ordre. Pour le cas où elle n'est pas vérifiée, on soupçonne que la non-validité provient de deux facteurs suivants :

1. *Non-linéarité de l'EAE induite par le profil sinusoïdal* : il a été observé (voir la Fig. 2.12 [p. 67]) que contrairement aux profils constant et cissoïdal, le profil sinusoïdal induit un EAE non-linéaire (quadratique), alors qu'il est quasiment linéaire pour les deux autres. Cela peut expliquer que la somme des EAE induits par des composantes à profil sinusoïdal ne peut être comparée à l'EAE de leur combinaison.
2. *L'EAE induit par le profil sinusoïdal est relativement plus faible* : dans les résultats des Fig. 2.12 [p. 67] et Fig. 2.13 [p. 69] pour presque tous les modes, l'EAE induit par le profil sinusoïdal est plus faible que ceux induits par les deux autres profils. En combinant un tel profil sinusoïdal avec l'un des deux autres, l'hypothèse de décomposition reste valide, la non-linéarité du faible EAE induit par le profil sinusoïdal est dominée par la linéarité de l'EAE induit par l'un des deux autres profils.

## E. Décomposition de l'EAE vis-à-vis du profil variable

Dans cette section, compte tenu des résultats précédents, on essaie de fournir quelques éléments pouvant être utiles à la résolution du problème acoustoélastique inverse dans le cas où les profils de contrainte dans l'épaisseur ne sont pas constants avec l'objectif de les caractériser.

L'idée est la suivante. Si l'on se donne une base de fonctions (Fourier, B-Splines, polynômes...) sur laquelle projeter des profils quelconques de contraintes, alors, au lieu d'étudier l'EAE induit par ces contraintes, on peut étudier les EAE induits par les contraintes ayant pour profils des éléments de cette base. Dans l'hypothèse de linéarité, où l'EAE induit par la contrainte quelconque serait égal à la somme des EAE induits par la combinaison linéaire décomposant cette contrainte sur les éléments de la base, on peut « espérer » développer des méthodes d'inversion pour des profils arbitraires se basant uniquement sur la connaissance des variations de vitesses pour les profils élémentaires.

Formellement, considérons un profil de contrainte  $P$  (une fonction quelconque de la position  $x_3$  dans l'épaisseur) et  $\tilde{P}$  sa projection sur la base des fonctions  $P_k$ , avec

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^N \alpha_k P_k \quad (2-31)$$

$N$  étant le nombre de profils élémentaires figurant dans la projection et  $\alpha_k$  sont des constantes réelles. En supposant que  $|P - \tilde{P}|$  est acceptable<sup>1</sup> on doit examiner dans quelle mesure l'égalité suivante est vérifiée :

$$\Delta v_{\sigma_i}(\tilde{P}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta v_{\sigma_i}(P_k) \quad (2-32)$$

$\Delta v_{\sigma_i}$  : variation de vitesse (EAE) induite par une composante  $i$  de la contrainte  $i \in \{1,2,3\}$ .

Si elle est vérifiée, on peut imaginer des méthodes pour inverser à partir des variations de vitesses, non pas  $\Delta v_{\sigma_i}(P)$  (*i.e.* trouver la contrainte, profil compris), mais uniquement les  $\Delta v_{\sigma_i}(P_k)$ .

<sup>1</sup> C'est l'intervalle de tolérance sur la mesure de la contrainte qui impose ce critère d'acceptabilité.

Ici, seul le cas uniaxial est traité afin de concentrer la discussion des résultats sur la décomposition elle-même. La fréquence d'étude est toujours  $f = 1.5$  MHz. La base choisie est une base permettant la décomposition en série de Fourier (sans le terme constant). Plusieurs cas sont étudiés, suivant la complexité du profil de la contrainte, pour mieux saisir à quoi tient la validité ou non de cette décomposition.

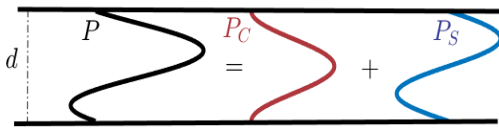
### 1. Profil constitué de deux fonctions de base.

Dans ce cas, le profil  $P$  de la contrainte uniaxiale, est donné par :

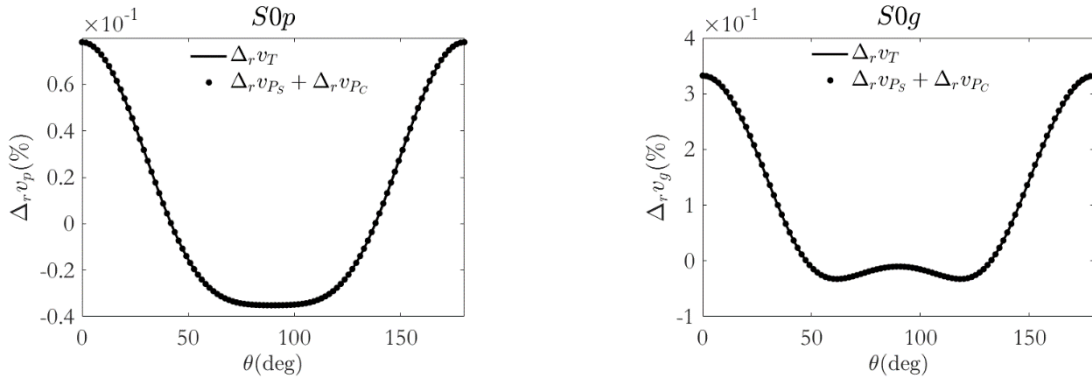
$$P(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d) + \sigma_1^{2m} \sin(2\pi x_3/d) \quad (2-33)$$

avec  $\sigma_1^{1m} = 100$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = -80$  MPa.

Dans ce cas, on a  $P = \tilde{P}$ . Cet exemple vise à vérifier que la décomposition est possible dans un cadre simple (deux fonctions de base et  $P = \tilde{P}$ ).



**Fig. 2-22 :** La plaque d'épaisseur  $d$  est soumise à un effort uniaxial dans le plan, qui varie en fonction de l'épaisseur. Le profil de la contrainte est la somme des deux profils suivants :  $P_C(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$  et  $P_S(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = 100$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = -80$  MPa.



**Fig. 2-23 :** EAE en fonction de l'angle  $\theta$ , à la fréquence de 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan. Le profil de la contrainte est la somme des deux profils :  $P_C(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$  et  $P_S(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = 100$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = -80$  MPa.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P_C + P_S$ . Et  $\Delta_r v_{P_S} + \Delta_r v_{P_C}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considérée séparément.

La Fig. 2.23 présente les résultats pour le mode S0. L'EAE induit par le profil  $P$  (trait continu :  $\Delta_r v_T$ ) est égal à la somme des EAE induits par chaque profil (marqueur circulaires :  $\Delta_r v_{P_S} + \Delta_r v_{P_C}$ ). Cela est également vérifié pour les autres modes (An-Ch2-Fig. 8 [p. 92]), avec des petites déviations pour le mode SH0, autour de la direction de propagation à  $90^\circ$  de la composante de la contrainte.

### 2. Profil constitué de quatre fonctions de base plus une erreur

On choisit cette fois un profil plus complexe, donné ci-dessous :

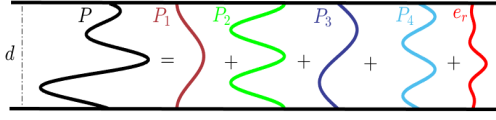
$$P(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d) + \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d) + \sigma_1^{3m} \sin(2\pi x_3/d) + \sigma_1^{4m} \sin(2\pi x_3/d) + e_r(x_3) \quad (2-34)$$

avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 80$  MPa et  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa. On ajoute ici  $e_r$ , une fonction erreur donnée par<sup>1</sup> :

$$e_r(x) = \sigma_e \operatorname{sinc}(x \in [-4,3]) \quad (2-35)$$

avec  $\sigma_e = 25$  MPa

<sup>1</sup>  $e_r(x_3 = \frac{d}{2}) = \operatorname{sinc}(-4)$  et  $e_r(x_3 = -\frac{d}{2}) = \operatorname{sinc}(3)$



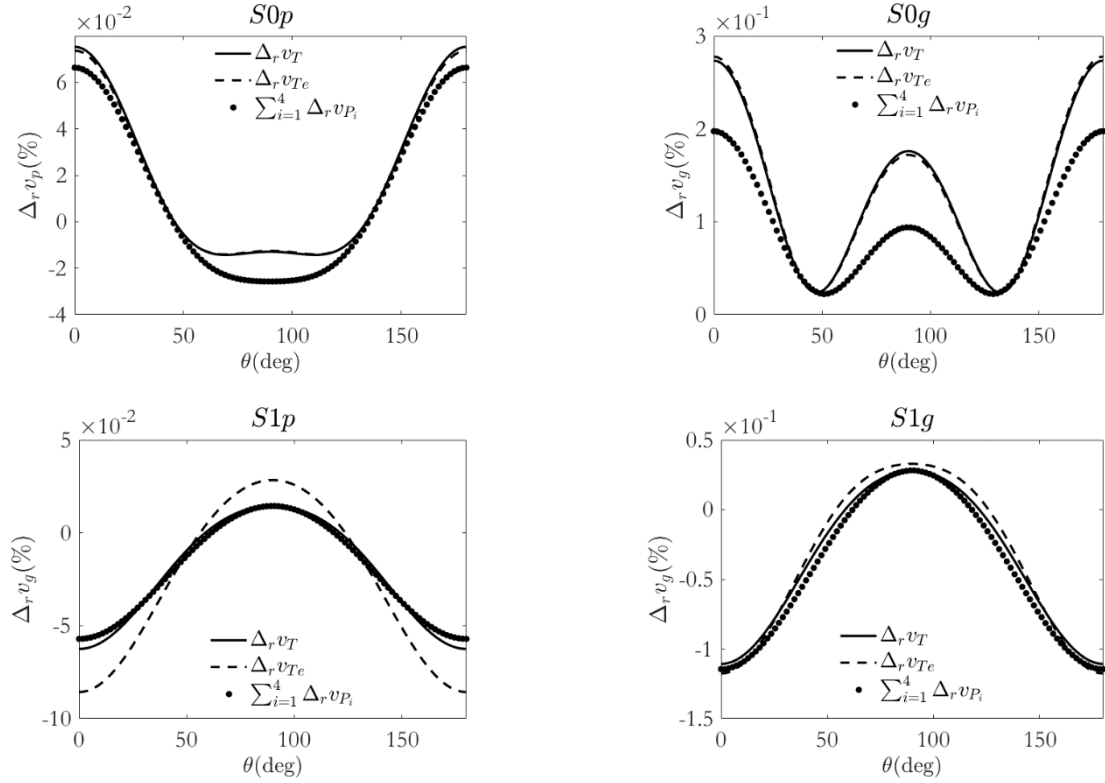
**Fig. 2-24** : Plaque d'épaisseur  $d$  soumise à un effort uniaxial dans le plan, variable dans l'épaisseur. Le profil de la contrainte est la somme des cinq profils suivants :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$  ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_4(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$  et  $e_r(x) = \sigma_e \text{sinc}(x \in [-4,3])$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa ,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa ,  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa et  $\sigma_e = 25$  MPa.

Pour étudier la validité de l'hypothèse de décomposition (2-32), et l'effet de l'erreur, on donne Fig. 2.25 les résultats pour les modes S0 et S1, les résultats pour les autres modes étant donnés dans l'annexe (An-Ch2-Fig. 9 [p. 93])

Cette fois, l'hypothèse de validité de la décomposition n'est pas toujours vérifiée. Cela dépend du mode, de la nature de la vitesse considérée (phase ou groupe) et de l'angle. La déviation induite par la présence de l'erreur dépend elle aussi de ces différents facteurs. Les résultats pour les modes S0 et A0 sont peu affectés par la présence de l'erreur contrairement à ceux pour le mode SH0 (An-Ch2-Fig. 9 [p. 93]). La déviation entre  $\Delta_r v_T$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la plus importante autour des angles  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

Pour les modes S1 (et A1 en annexe (An-Ch2-Fig. 9 [p. 93])), l'hypothèse de décomposition pourrait être considérée comme valide, mais l'EAE est affecté pour ces modes par la présence de l'erreur. Dans la même annexe, il apparaît que l'hypothèse de décomposition est mieux vérifiée pour les effets sur les modes d'ordre supérieur (*i.e.* A1, SH1, et S1) que pour ceux sur les modes fondamentaux (*i.e.* A0, SH0, et S0). Hormis pour le mode SH1, dans tous les résultats (An-Ch2-Fig. 9 [p. 93]) la déviation entre  $\Delta_r v_T$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est plus petite que celle entre  $\Delta_r v_{T_e}$  (*i.e.* EAE induit par le profil défini par la somme des quatre profils  $P_i$  plus celui de l'erreur  $e_r$ ) et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$ .

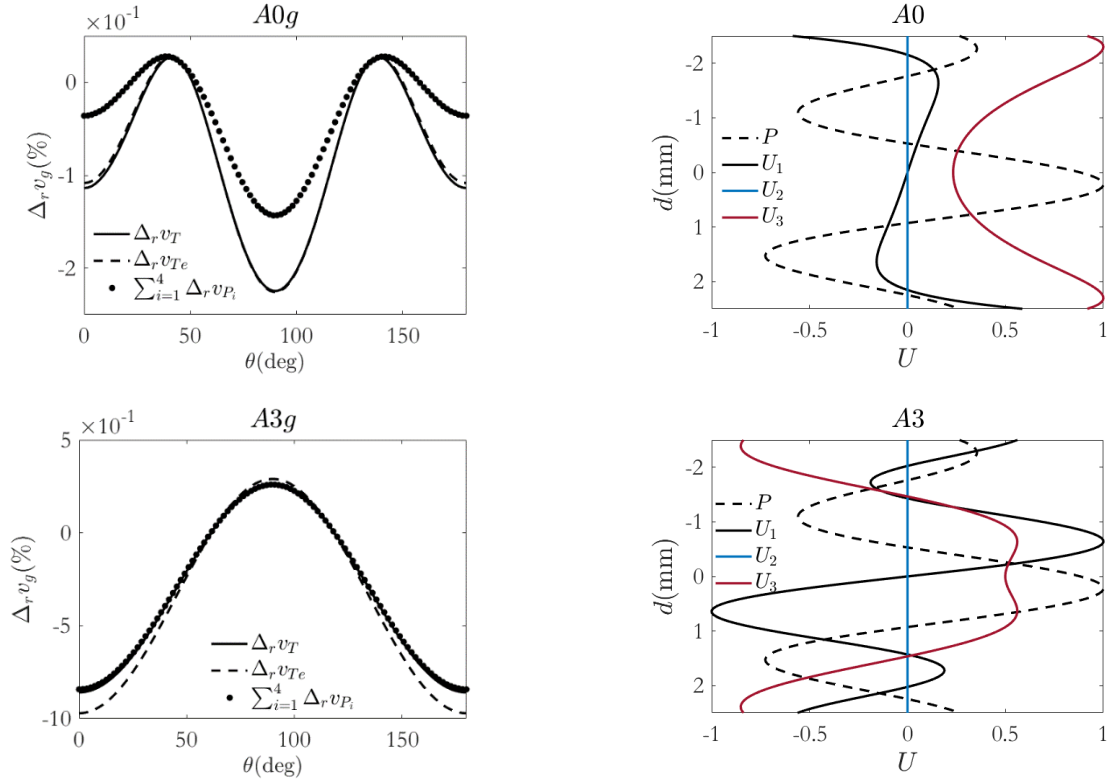
Afin de comprendre l'origine de ces comportements et tenter de formuler une règle permettant de savoir *a priori* pour quel mode la décomposition (2-32) est la mieux respectée, les résultats pour les 13 modes existant à la fréquence de 1.5 MHz ont tous été étudiés (A0, A1, A2, A3, S0, S1, S2, S3, SH0, SH1, SH2, SH3, et SH4) et sont présentés dans l'annexe An-Ch2-Fig. 10 [p. 94]. Dans la même annexe (An-Ch2-Fig. 11 [p. 95]) on a donné aussi les déplacements modaux (dans le cas non-contraint), et on a superposé à ces déplacements le profil normalisé de la contrainte.



**Fig. 2-25** : EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_{T_e}$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i + e_r$ ,  $\Delta_r v_T$  celui dont le profil est  $P = \sum P_i$ , et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Les profils sont donnés par  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_4(x_3) = \sigma_1^{4m} \sin(4\pi x_3/d)$  et  $e_r(x) = \sigma_e \text{sinc}(x \in [-4,3])$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa,  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa et  $\sigma_e = 25$  MPa.

L'objectif est d'étudier si le fait que l'hypothèse de décomposition (2-32) soit vérifiée dépend ou non de l'allure des déplacements modaux et de leur capacité à « mimer » le profil de la contrainte. En effet, elle est généralement vérifiée pour les modes d'ordre 1 (voir Fig. 2.25 et An-Ch2-Fig. 9 [p. 93]) qui possèdent de plus hautes fréquences spatiales que celles du profil de la contrainte. On peut donc imaginer qu'ils seront plus aptes à interagir avec profil complexe de contrainte, alors qu'un mode dont les déplacements modaux ont une fréquence spatiale faible *moyennerait* cette interaction sur l'ensemble de l'épaisseur.

La Fig. 2.26 présente la superposition des profils modaux (A0 et A3) et des contraintes statiques ainsi que les résultats semblables à ceux présentés précédemment comparant les EAE pour ces modes prédits suivant les différentes modalités de calcul permettant de vérifier l'hypothèse de décomposition.



**Fig. 2-26** : (colonne 1) EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz, pour la vitesse de groupe des modes A0 et A3. (la colonne 2) les déplacements modaux de ces modes (dans l'état non contraint), superposés au profil de la contrainte uniaxiale  $P$  normalisé (trait interrompu noir). Les profils sont donnés par  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_4(x_3) = \sigma_1^{4m} \sin(4\pi x_3/d)$  et  $e_r(x) = \sigma_e \text{sinc}(x \in [-4,3])$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa,  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa et  $\sigma_e = 25$  MPa.

Les profils des déplacements modaux du mode A0 sont relativement simples, alors que la variation de celui de la contrainte dans l'épaisseur ne l'est pas. L'interaction du mode A0 avec cette contrainte peut donc avoir un effet intégrateur/moyenneur sur l'épaisseur de la relative complexité de la contrainte. Inversement, ceci pourrait expliquer pourquoi les variations de vitesses induites par une contrainte complexe se comportent plus conformément à notre *conjecture* (*i.e.* plus on monte en ordre dans les modes, plus la déviation entre  $\Delta_r v_T$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est faible). Cette dernière est bien vérifiée pour tous les modes de Lamb antisymétriques A0, A1, A2, et A3, (voir annexe [An-Ch2-Fig. 10](#) [p. 94]) pour lesquels la déviation entre  $\Delta_r v_T$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est presque négligeable. Il en va de même pour les modes de Lamb symétriques, (voir annexe [An-Ch2-Fig. 10](#) [p. 94]), hormis pour le mode S3. Notons que pour le mode S3, la variation relative de vitesse est très faible comparée à celle des autres modes de Lamb symétriques. Pour les modes SH ([An-Ch2-Fig. 10](#) [p. 94]), la *conjecture* n'est pas respectée à cause du mode SH3, pour lequel l'écart entre  $\Delta_r v_T$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est plus grand que celui des modes SH0, SH1, et SH2.

L'effet de l'erreur  $e_r$  sur les EAE des 13 modes est variable et ne respecte pas la *conjecture* suivant laquelle plus on monte en ordre dans les modes plus la déviation entre  $\Delta_r v_{T_e}$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est faible. Cela peut s'expliquer par le fait que les déplacements modaux ne sont pas en mesure de décrire la complexité de la variation spatiale du profil d'erreur, ce qui conduit à des résultats pouvant apparaître « aléatoires ». On peut à ce stade conjecturer que pour que l'EAE induit par un profil  $\tilde{P}$  – combinaison des fonctions de base  $P_i$  – soit égal à la somme des EAE induits par chaque profil donné des éléments de cette base (hypothèse (2-32)), il faut que les déplacements modaux puissent décrire la variation dans l'épaisseur du profil  $\tilde{P}$ . De façon corollaire, il faudra utiliser des modes d'ordre élevé pour des profils de contrainte présentant d'importantes variations dans l'épaisseur.

Les résultats de la [Fig. 2.12](#) [p. 67] et [An-Ch2-Fig. 3](#) [p. 87] (voir annexe) montrent que les EAE induits par des profils sinusoïdaux dépendent non-linéairement de la contrainte, quand ceux induits par des profils cissoïdaux sont quasiment linéaires. La non-linéarité liée aux profils sinusoïdaux empêche de décomposer l'EAE induit par un effort biaxial (dont les deux profils sont sinusoïdaux) en la somme des

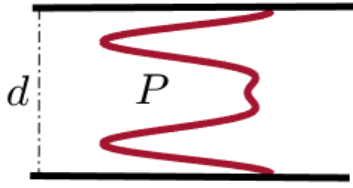
EAE induits par chaque composante uniaxiale considérée séparément (voir D.3 [p. 71]). Les profils sinusoïdaux sont donc vraisemblablement à l'origine de la non-vérification de l'hypothèse (2-32). Pour le confirmer, on étudie trois profils différents dans la suite de cette sous-section.

### 3. Profil constitué de trois fonction de base cissoïdales

L'hypothèse (2-32) est d'abord étudiée dans le cas d'un profil de la contrainte dans l'épaisseur composé uniquement de profils cissoïdaux :

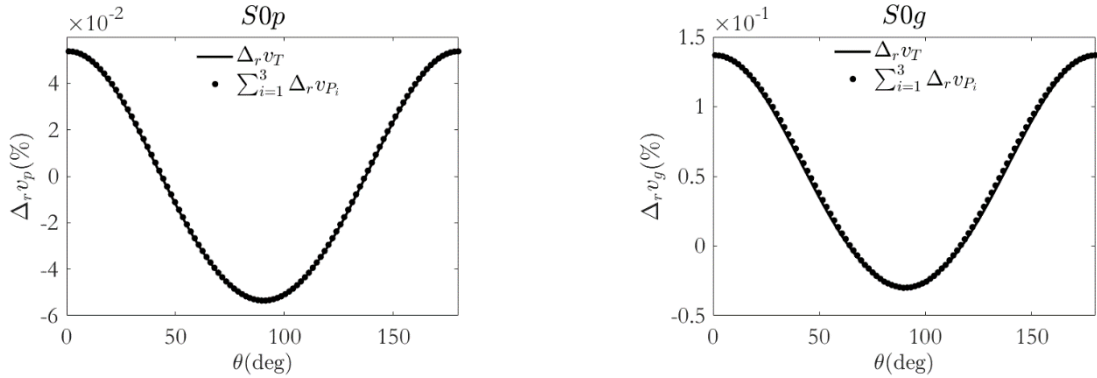
$$P(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d) + \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d) + \sigma_1^{3m} \cos(6\pi x_3/d) \quad (2-36)$$

avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa. Le profil de la contrainte est illustré ici.



**Fig. 2-27** : Plaque d'épaisseur 5mm soumise à un effort uniaxial dans le plan, variable avec l'épaisseur. Le profil de la contrainte est la somme des cinq profils suivants :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ , et  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \cos(-\pi x_3/d)$ . avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

Les résultats sont donnés pour le mode S0.



**Fig. 2-28** : EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort de profil  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \cos(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

L'EAE induit par le profil  $P$  est égal à la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément et l'hypothèse de décomposition est valide pour ce mode. Dans l'annexe An-Ch2-Fig. 12 [p. 96] et An-Ch2-Fig. 13 [p. 97]), on donne les résultats pour les autres modes, montrant que l'hypothèse (2-32) est valide, presque pour toutes les vitesses, sauf A2p où une déviation importante se manifeste. Cependant, la variation relative de cette vitesse est très faible comparée aux autres.

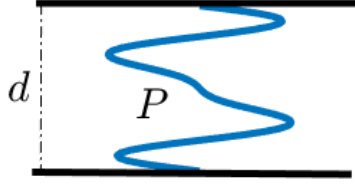
### 4. Profil constitué de trois fonctions de base sinusoïdales

On étudie maintenant la validité de l'hypothèse (2-32) dans le cas où le profil de la contrainte dans l'épaisseur n'est composé que des profils sinusoïdaux :

$$P(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d) + \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d) + \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d) \quad (2-37)$$

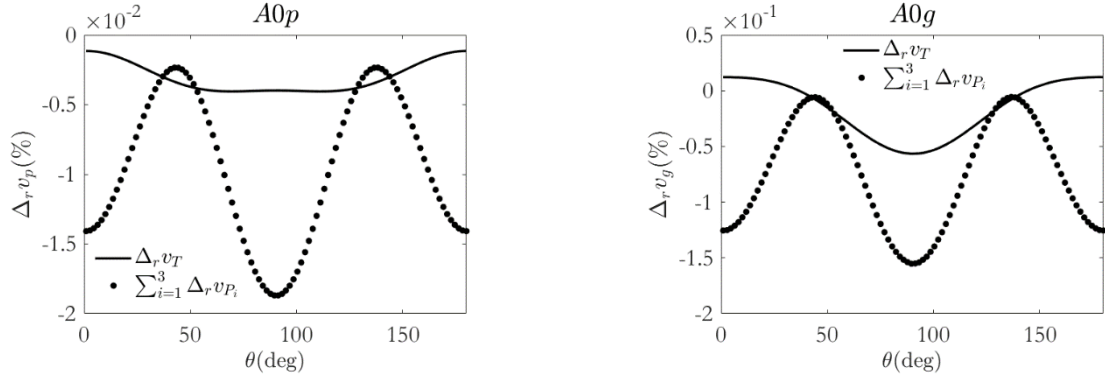
avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa. Le profil de la contrainte est illustré ici.





**Fig. 2-29** : Plaque d'épaisseur 5mm soumise à un effort uniaxial dans le plan, variable avec l'épaisseur. Le profil de la contrainte est la somme des cinq profils suivants :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ , et  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(-\pi x_3/d)$ . avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

Les résultats sont présentés pour le mode A0 :



**Fig. 2-30** : EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_r$  est l'EAE induit par l'effort de profil  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

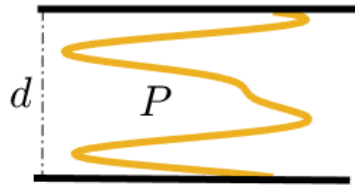
La figure ci-dessus et les résultats dans l'annexe ([An-Ch2-Fig. 14](#) [p. 98] et [An-Ch2-Fig. 15](#) [p. 99]) montrent qu' hormis le cas du mode SH4, les déviations entre l'EAE induit par le profil  $P$  et la somme des EAE induits par les profils  $P_i$  sont telles que l'hypothèse de décomposition n'est pas valide.

## 5. Profil constitué de six fonctions de base

Pour finir, on étudie la validité de l'hypothèse en choisissant le profil donné par la somme des deux profils précédemment étudiés, l'un conduisant à conclure à sa validité, l'autre, à conclure le contraire.

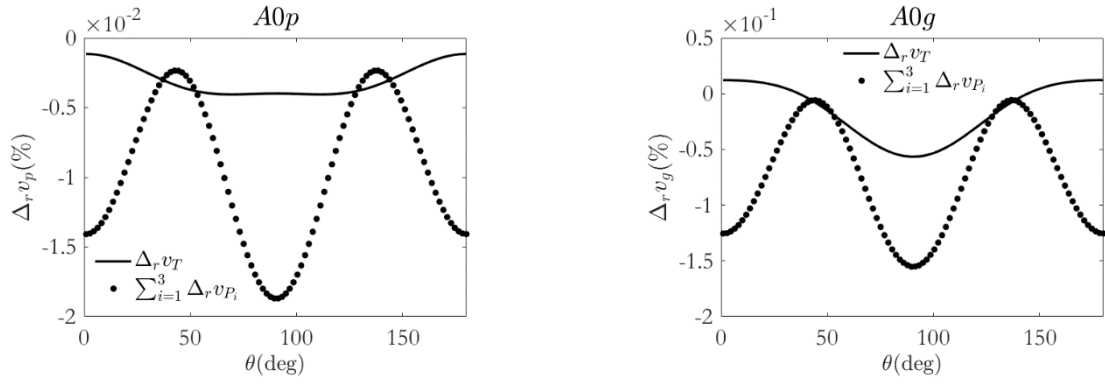
$$P(x_3) = \sigma_1^{1m} (\cos(2\pi x_3/d) + \sin(2\pi x_3/d)) + \sigma_1^{2m} (\cos(4\pi x_3/d) + \sin(4\pi x_3/d)) + \sigma_1^{3m} (\cos(6\pi x_3/d) + \sin(6\pi x_3/d)) \quad (2-38)$$

avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

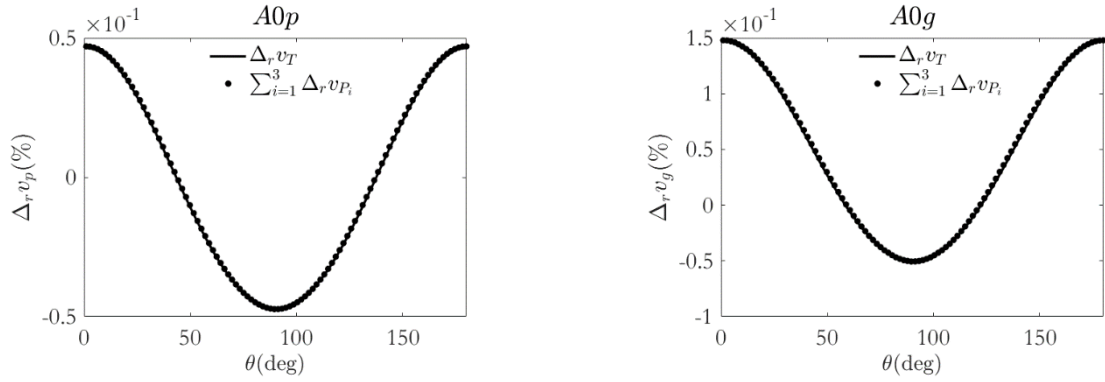


**Fig. 2-31** : Plaque d'épaisseur 5mm soumise à un effort uniaxial dans le plan, variable avec l'épaisseur. Le profil de la contrainte est la somme des cinq profils suivants :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ , et  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \cos(6\pi x_3/d)$ .  $P_4(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$   $P_5(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ , et  $P_6(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$ . avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

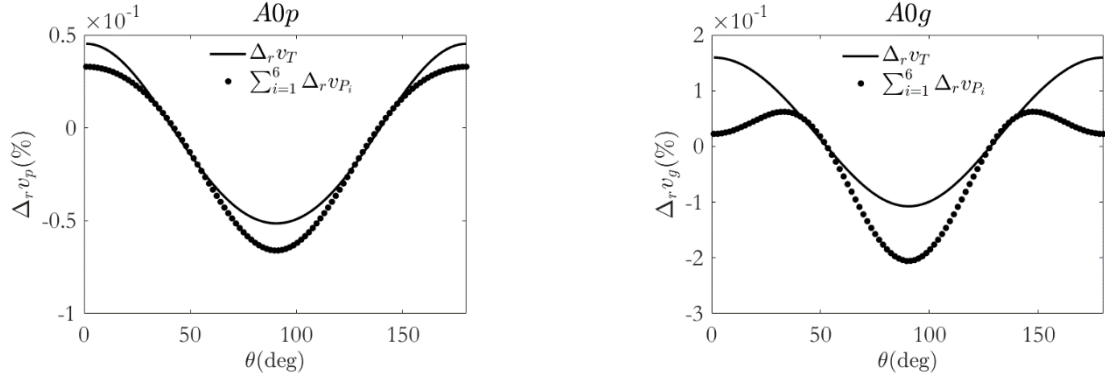
Les résultats pour le mode A0 sont donnés pour les trois profils, sinusoïdaux, cissoïdaux et la somme de ces deux.



Profils sinusoïdaux



Profils cissoïdaux



Profils cissoïdaux + sinusoïdaux

**Fig. 2-32** : EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ , et  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \cos(6\pi x_3/d)$ .  $P_4(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_5(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ , et  $P_6(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$ . avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa,  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

Cette fois, l'hypothèse (2-32) est mieux vérifiée qu'elle ne l'est pour le cas sinusoïdal, mais moins bien que pour le cas cissoïdal. Il en est de même pour tous les modes existant à cette fréquence (voir annexe An-Ch2-Fig. 16 [p. 100] et An-Ch2-Fig. 17 [p. 101]).

Par ailleurs on remarque que l'EAE ( $\Delta_r v_T$  dans la dernière ligne de Fig. 2.23) induit par le profil  $P$  défini par la somme des deux profils  $P_3^c$  (combinaison des profils cissoïdaux) et  $P_3^s$  (combinaison des profils sinusoïdaux), est égal à la somme des deux EAE ( $\Delta_r v_T$  dans les deux premières lignes de Fig. 2.23) induits par chacun de ces deux derniers. C'est aussi le cas pour les autres modes (voir annexe An-Ch2-

Fig. 15 [p. 99] An-Ch2-Fig. 16 [p. 100] et An-Ch2-Fig. 17 [p. 101]). Ce constat suggère que les EAE induits par les profils cissoïdaux et ceux induits par les profils sinusoïdaux sont découplés.

On peut finalement déduire des présents résultats que la validité ou non de l'hypothèse de décomposition (2-32) est régie par le comportement linéaire ou non-linéaire des EAE induits par les profils élémentaire  $P_i$  engendrant le profil de la contrainte.

Cependant, tous les résultats présentés pour étudier la validité de l'hypothèse de décomposition ont été calculés à une seule fréquence. Comme l'EAE est fortement dispersif, il se pourrait que pour d'autres fréquences, des explications avancées ici ne tiennent plus. Seule une étude fréquentielle s'intéressant à tous les modes présents à chaque fréquence permettrait réellement de conclure avec certitude sur la possibilité de décomposition d'un profil quelconque de contrainte dans l'épaisseur. Une telle étude est prévue dans le cadre d'un projet déposé en collaboration avec la société Vallourec.

## F. Conclusion

Dans cette section, on s'est intéressé au cas où la contrainte possède un profil variable dans l'épaisseur de la plaque. Il est représentatif de cas que l'on rencontre dans l'industrie, résultant de certains procédés de fabrication. À présent, seules les méthodes semi-destructives ou destructives permettent de les mesurer. Développer une méthode non-destructive de caractérisation d'un état de contrainte à profil arbitraire dans l'épaisseur constitue donc un enjeu important.

Dans cette section, on s'est intéressé à la sensibilité des ondes guidées à ces contraintes – avec en tête l'idée d'imaginer la possibilité de développement de méthodes non-destructives permettant de les caractériser – en étudiant les EAE qu'elles induisent. Pour cela, on a suivi une démarche semblable à celle suivie dans la Sec. III [p. 54] dans le cas des contraintes constantes dans l'épaisseur. Cette étude constitue une première approche et aboutit à quelques conclusions partielles ; une étude complète doit être menée ultérieurement qui dépasse le cadre et de la durée de cette thèse.

On a tout d'abord montré que l'EAE est bien sensible à différents types de profils non-uniformes (IV.A [p. 64]). Puis, on a étudié (IV.B [p. 66]) la linéarité de l'EAE selon le profil de contrainte et montré que les profils constants et cissoïdaux conduisent à des EAE linéaires quand un profil sinusoïdal conduit à un EAE fortement non-linéaire.

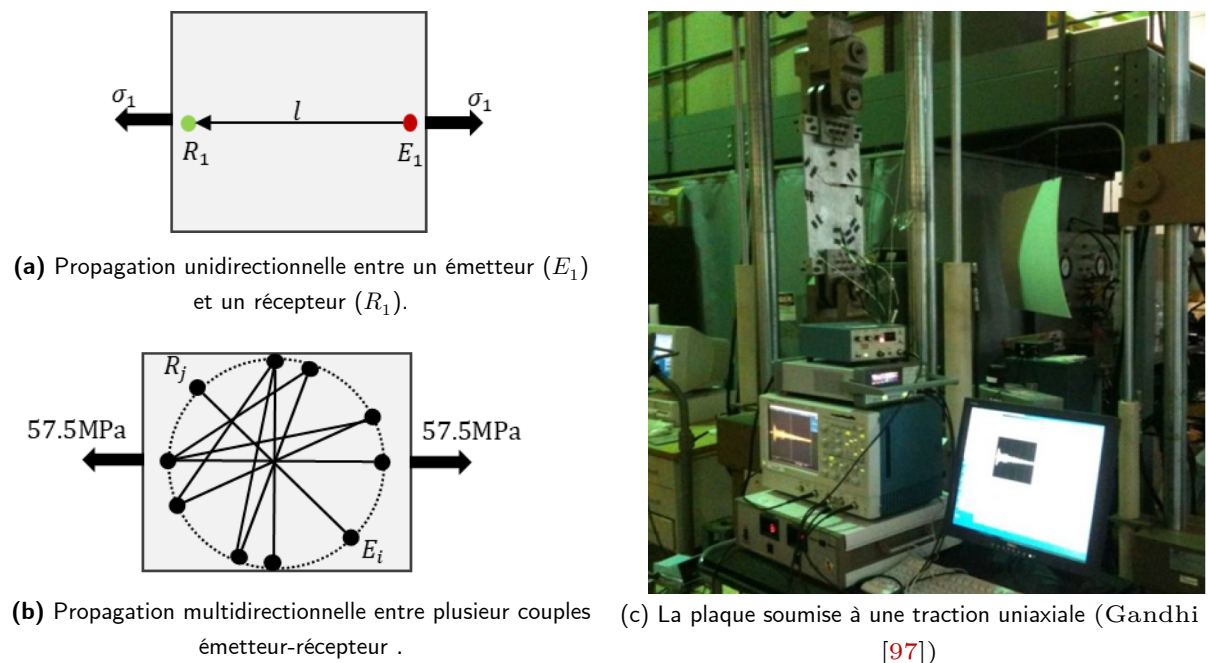
La sous-section IV.C [p. 68] a permis de s'intéresser à l'anisotropie acoustoélastique induite, qui s'avère dépendre de ces profils.

On a montré (IV.D [p. 70]) que l'EAE induit par une contrainte biaxiale avec deux profils non-uniformes est égal à la somme des EAE des deux composantes uniaxiales prises séparément dès lors qu'aucun profil sinusoïdal n'est impliqué, un tel profil induisant des EAE non-linéaires.

Finalement, dans la sous-section IV.E [p. 73], nous avons étudié dans le cas d'une contrainte uniaxiale si un profil complexe, descriptible comme une combinaison linéaire de profils de base (par ex :., sous la forme d'une décomposition en série de Fourier), induit des EAE égaux à la combinaison linéaire des EAE induits par les profils de base. Il apparaît plus adapté de prendre en considération des modes de rang élevé (dont le profil de déplacement est complexe dans l'épaisseur) pour reconstruire correctement les profils complexes de contrainte. Les EAE non-linéaires induits par les profils sinusoïdaux semblent poser problème pour cette superposition.

## V. Validation du modèle acoustoélastique (MAE)

Dans cette section, on valide le modèle développé dans les deux chapitres (1 et 2). Cette validation consiste à comparer les prédictions du modèle (*i.e.* variations de vitesse en fonction de la contrainte) avec des résultats expérimentaux. Pour cela, on a cherché dans la littérature des résultats expérimentaux sur les ondes de Lamb et SH. Cependant, du fait que l'application de la TAE aux cas de la propagation guidée est relativement récente, peu de résultats expérimentaux sont disponibles. On peut citer par exemple les travaux de Murayama [77] dans lesquels les variations de vitesse des modes S0 et SH0 ont été mesurées lors d'un essai de traction. Les constantes d'élasticité non-linéaires intervenant n'étant pas fournies, il nous a été impossible de chercher à les reproduire par le calcul. On peut citer également les travaux de Jäger *et al.* [73] dans lesquels les variations de vitesse des modes A0 et S0 ont été mesurées en fonction de la contrainte uniaxiale mais de nouveau, les constantes d'élasticité non-linéaire ne sont pas fournies. Les travaux de Pei & Bond [72] ont traité expérimentalement la variation de vitesse de groupe du mode S1 en fonction de la *déformation* induite par la contrainte uniaxiale (les variations de vitesse sont mesurées dans la direction de la contrainte). La théorie et le matériau de ces travaux sont ceux présentés dans les travaux de Gandhi *et al.* [68] dans lesquels l'expérience a été faite pour les trois modes S0, A0, et S1 et les variations de vitesse sont données en fonction de la contrainte (et non pas la déformation) dans plusieurs directions de propagation. Les résultats expérimentaux de Gandhi *et al.* [68] sont donc utilisés dans ce qui suit pour la validation du modèle développé dans les deux premiers chapitres. Dans ces travaux, la plaque en aluminium (de même propriétés que celles de la plaque étudiée tout au long de ce chapitre), a une épaisseur de  $d_0 = 6.35$  mm, et est soumise à un chargement uniaxial dans le plan. Les variations de vitesses par rapport à l'état non-contraint des trois modes S0 à 250 kHz, A1 à 400 kHz, et S1 à 600 kHz sont étudiées. Deux séries de mesures ont été effectuées. 1) Propagation unidirectionnelle : dans cette série, la variation de vitesse est mesurée dans la direction de la contrainte uniaxiale pour des valeurs de contrainte allant de 0 à 57.5 MPa par pas de 5.75 MPa. L'objectif de cette expérience est d'étudier la variation de la vitesse en fonction de la valeur de la contrainte. 2) Propagation multidirectionnelle : dans cette série, la contrainte uniaxiale est maintenue à 57.5 MPa et les variations de vitesses sont mesurées dans différentes directions (9 directions) par rapport à celle de la contrainte. Ces expériences sont présentées par la figure suivante :

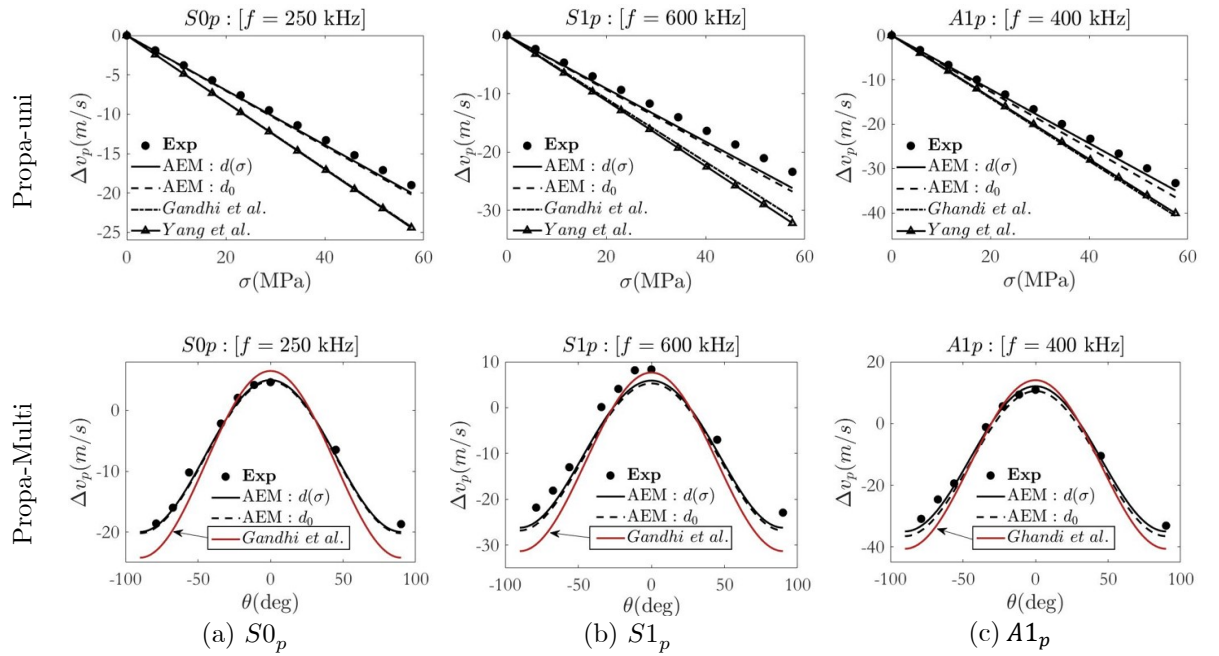


**Fig. 2-33** : La plaque est soumise à un effort uniaxial. (a) les variations de vitesses sont mesurées dans la direction de la contrainte. (b) Les variations sont mesurées dans plusieurs directions, comme indiquées sur le schéma (9 au total). (c) : plaque dans une machine de traction.

Les transducteurs utilisés dans l'expérience Réf. [68] sont des pastilles PZT *collées* à la plaque dans son état naturel. Par conséquent, la distance entre l'émetteur et le récepteur (e.g.  $l$  sur Fig. 2.33 (a)) dépend de la contrainte. Gandhi *et al* [68] prennent en compte ce fait à travers des corrections des mesures de la variation de vitesse. Dans le cas de la propagation unidirectionnelle, la variation de la distance est donnée par  $\Delta l = e_1 \cdot l_0$  où  $e_1$  est la déformation induite par la contrainte et  $l_0$  la distance entre les capteurs dans l'état naturel.

Dans la figure ci-dessous (Fig. 2.34), on compare :

- les résultats expérimentaux (Exp : marqueur circulaire noir) de la Réf. [68],
- les prédictions à l'aide du présent modèle avec la prise en compte de la variation de l'épaisseur de la plaque (AEM :  $d(\sigma)$  : trait continu noir),
- les prédictions à l'aide du présent modèle sans la prise en compte de la variation de l'épaisseur de la plaque (AEM :  $d_0$  : trait interrompu noir),
- les résultats théoriques de Réf. [68] (Gandhi *et al* : trait dash-dotted),
- les résultats théoriques de Yang *et al* [75] (Yang *et al* : trait continu + marqueur triangulaire).



**Fig. 2-34** : Comparaison entre les résultats expérimentaux, le modèle théorique, et les travaux théorique de Réf. [68 et 75]. Dans la première ligne on donne la propagation unidirectionnelle, et dans la deuxième la propagation multidirectionnelle. De gauche à droite : le modes  $S0_p$ ,  $S1_p$ , et  $A1_p$ .

Dans la première ligne de la Fig. 2.34, on donne les résultats de la première série de mesure (propagation unidirectionnelle), et dans la seconde ceux de la deuxième (propagation multidirectionnelle). Dans les deux cas, le présent modèle (trait continu noir) prédit de façon plus précise les expériences que les modèles de la littérature (Réf. [68 et 75]), et est en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Les différences observables avec les résultats théoriques de la littérature peuvent être expliquées par les raisons mentionnées dans le chapitre 1 (Sec. II-C [p. 39] <sup>(1)</sup>). En comparant les résultats où la variation de l'épaisseur induite par la contrainte a été prise en compte (trait continu noir) et ceux où elle ne l'a pas été (trait interrompu noir), on remarque que la prise en compte améliore les résultats. Cependant, la correction apportée n'est pas quantitativement très importante. De fait, à ces fréquences, la dispersion des modes  $S0_p$ ,  $A1_p$ , et  $S1_p$  est très faible, ce qui conduit à ce que  $\Delta v_d$  le soit aussi.

<sup>1</sup> La démarche linéaire pour le calcul de la déformation initiale.

## VI. Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode SAFE a été adaptée pour prédire les solutions modales de la propagation guidée dans une plaque en présence de contraintes dans le cadre du développement de la TAE. L'une des modifications consiste à prendre en compte le changement d'épaisseur de la plaque induit par l'application de la contrainte. L'effet de ce changement induit des variations de vitesse du même ordre de grandeur que celles induites par l'effet de la contrainte sur les propriétés élastiques du matériau. À l'aide du code SAFE-AE, on a étudié l'effet de la contrainte sur les déplacements modaux et on a montré que la nature pure de modes de Lamb et SH est perdue si la contrainte mécanique est appliquée. Un algorithme pour classer les modes se basant sur le fait que les modes restent « semblables » à leurs homologues dans le cas non-contraint a été proposé. La relation entre variation de vitesse et contrainte (EAE) a été étudiée : on a pu montrer qu'elle est non-linéaire dans le cas général, et que cette non-linéarité dépend de la fréquence et est anisotrope. On a également retrouvé l'anisotropie acoustoélastique observée dans le cas d'autres types d'ondes (ondes de volume, de Rayleigh, ...).

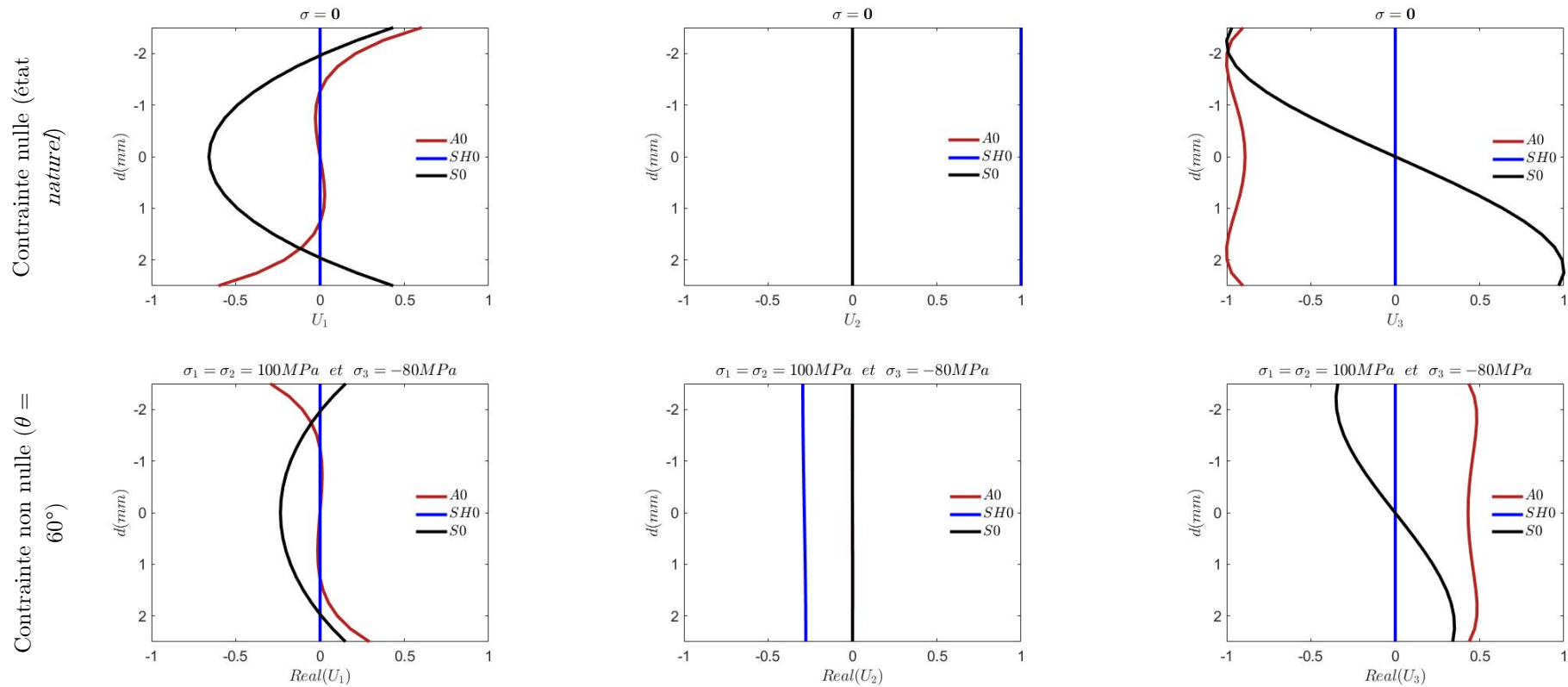
Finalement l'hypothèse de prendre l'EAE induit par une contrainte triaxiale comme la somme des EAE induits par chaque composante de la contrainte a été étudiée. La validité de cette hypothèse n'est pas systématique et dépend à la fois de la fréquence et la direction de propagation. Les limites de validité de cette hypothèse sont identifiées de façon plus détaillée au chapitre suivant, dans lequel on s'intéresse au développement des méthodes (inverses) de caractérisation de contrainte triaxiale homogène, en se basant sur les mesures de variations de vitesses.

Le cas d'une contrainte avec un profil variable dans l'épaisseur a également été traité, selon une démarche identique à celle utilisée pour traiter le cas d'une contrainte dont le profil dans l'épaisseur est constant. Cette étude a permis de montrer que l'effet acoustoélastique est très sensible à ce profil. Elle a également montré que pour certains profils, la non-linéarité est dominante (ce qui n'a pas été observé dans le cas où le profil de la contrainte était constant). La validité de l'hypothèse de décomposer l'EAE induit par un tenseur biaxial en la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément dépend du profil. Enfin, l'hypothèse que l'EAE induit par un profil donné décomposable en la somme de profils élémentaires, est égal à la somme des EAE induits par chaque profil élémentaire considéré séparément a été étudiée. Cette hypothèse est vérifiée dans un certain nombre de cas, laissant espérer la possibilité d'une inversion de mesures de variations de vitesses d'ondes guidées pour une caractérisation non-destructive des contraintes et de leur profil dans l'épaisseur.

La validation du modèle a été réalisée en comparant ses prédictions avec des résultats expérimentaux de la littérature dans le cas de profils de contraintes constants dans l'épaisseur. Ceci a permis d'une part de montrer que le modèle peut prédire les résultats expérimentaux avec une erreur faible, et d'autre part qu'il est plus précis que les modèles publiés auparavant.

## VII. Annexe

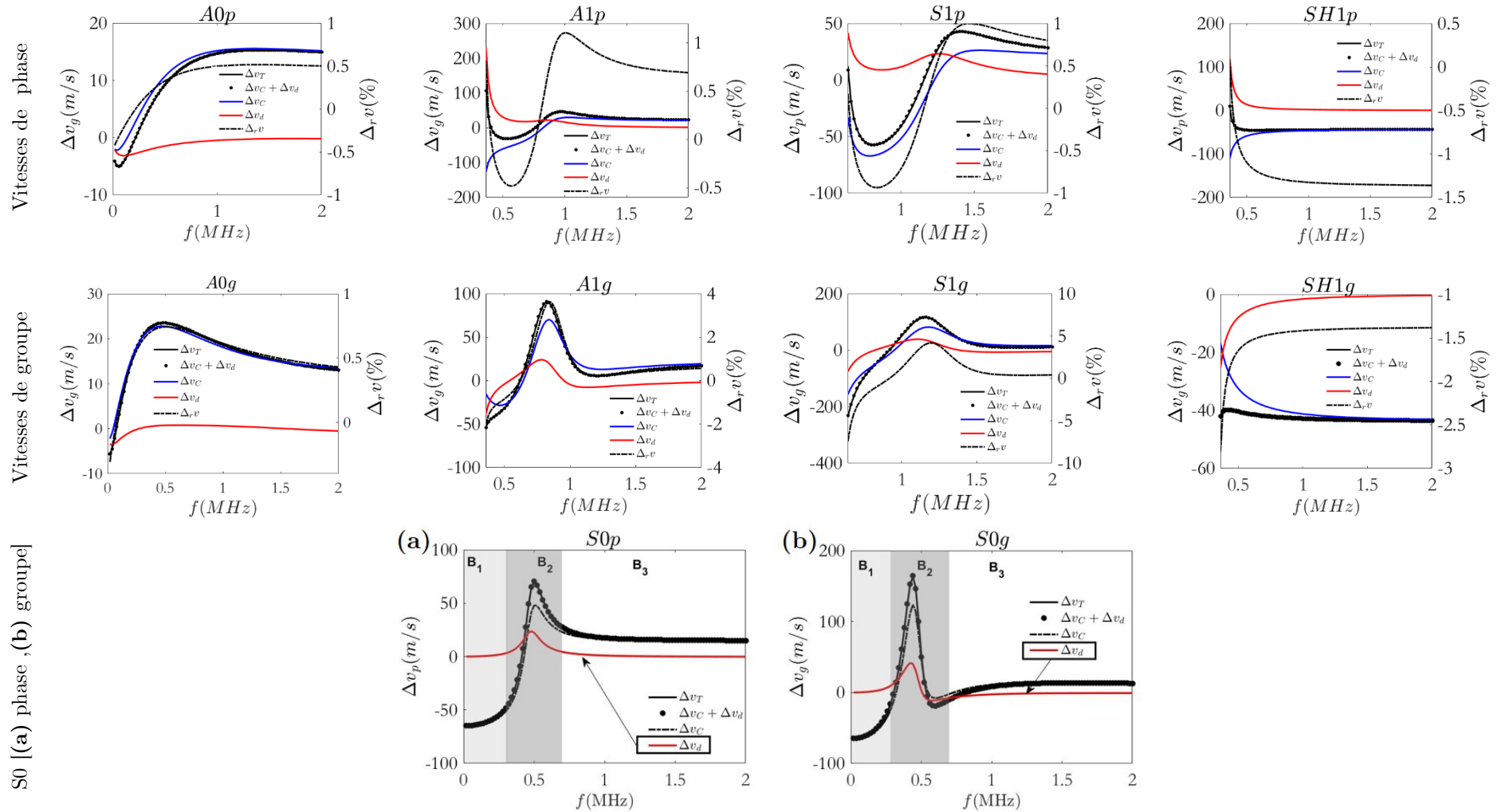
### L'effet de la contrainte sur les déplacements modaux (voir III-A [p. 54])



**An-Ch2-Fig. 1** : Les déplacements modaux des trois modes fondamentaux (A0, S0 et SH0), à une fréquence = 550 kHz . Dans la première ligne on donne les déplacements modaux pour le cas non-contraint, qui est isotrope. On remarque que pour ce cas les modes sont pur-Lamb ( $U_2(S0) = U_2(A0) = 0$ ) et pur-SH ( $U_1(SH0) = U_3(SH0) = 0$ ). Dans le cas où la contrainte est non nulle (ligne 2), mais n'induisant pas une anisotropie pour les ondes guidées, telle qu'une traction radiale dans le plan ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 100 \text{ MPa}$ ) et une compression hors plan ( $\sigma_3 = -80 \text{ MPa}$ ). Les déplacements modaux, dans la direction ( $\theta = 60^\circ$ )<sup>1</sup> sont affectés (ils deviennent complexes), mais la nature pur-Lamb et pur-SH est conservée.

<sup>1</sup> On a choisi  $\theta = 60^\circ$ , cependant on aurait pu choisir  $\theta = 0^\circ$ , puisque sous ce chargement toute direction (dans le plan de la plaque) est une direction principale de contrainte.

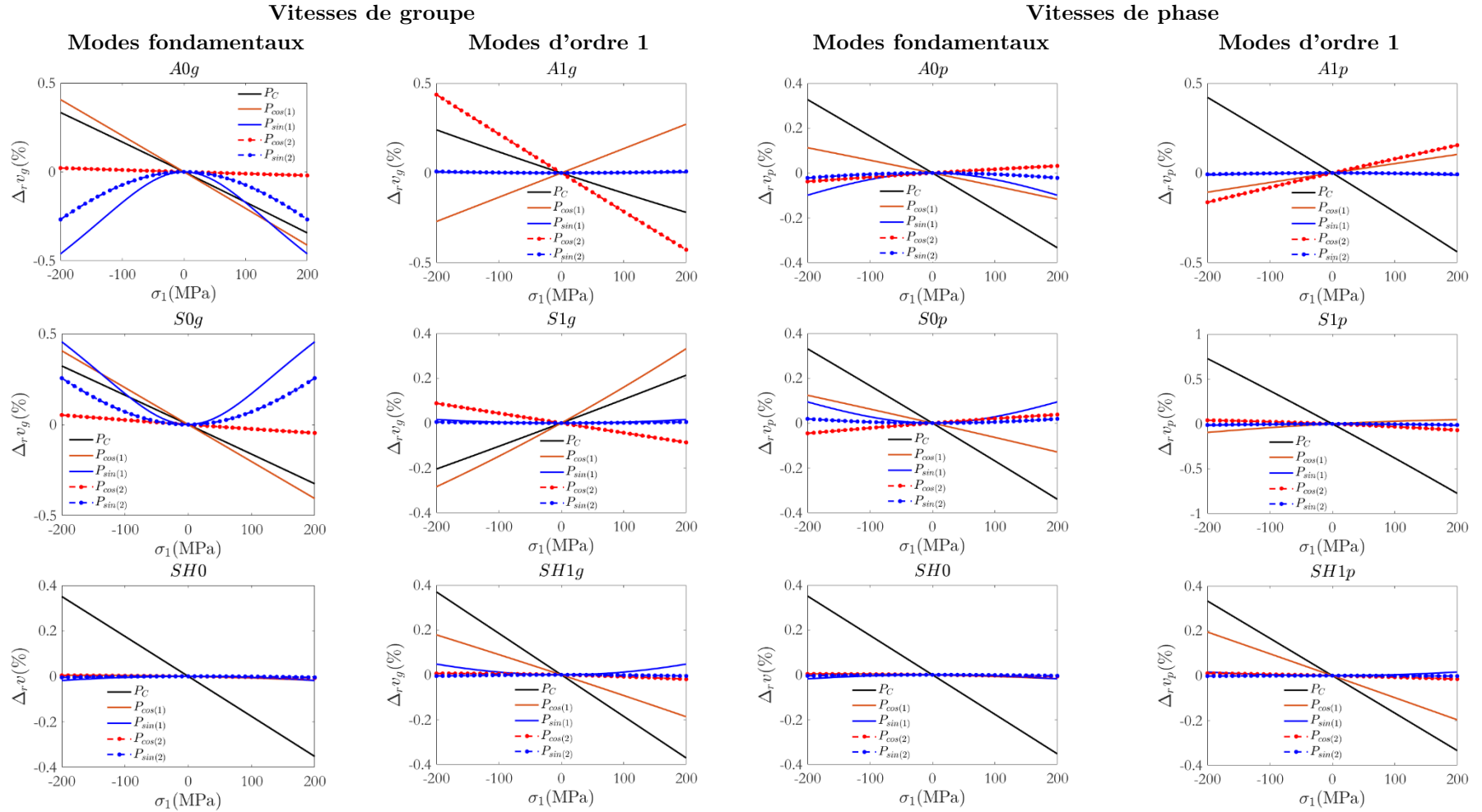
## La variation de vitesses induite par l'effet de la contrainte sur l'épaisseur (voir III-C [p. 57])



**An-Ch2-Fig. 2** : Comparaison entre la variation de vitesse induite par l'effet total (élasticité + épaisseur) de la contrainte ( $\Delta v_T$ ), son effet sur l'élasticité ( $\Delta v_C$ ) uniquement et sur l'épaisseur ( $\Delta v_d$ ) uniquement, dans le cas où la plaque est soumise à  $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = 200$  MPa. On remarque que  $\Delta v_d$  est du même ordre de grandeur que  $\Delta v_C$ . On remarque également que dans les bandes de fréquences où la dispersion est importante (*i.e.*  $\Delta v_d$  importante)  $\Delta v_T$  est aussi importante. La variation de vitesse relative ( $\Delta v_r$ ) est représenté sur l'axe des ordonnées à droite. On remarque que l'EAE des vitesses de groupe est plus important que celui des vitesses de phase.

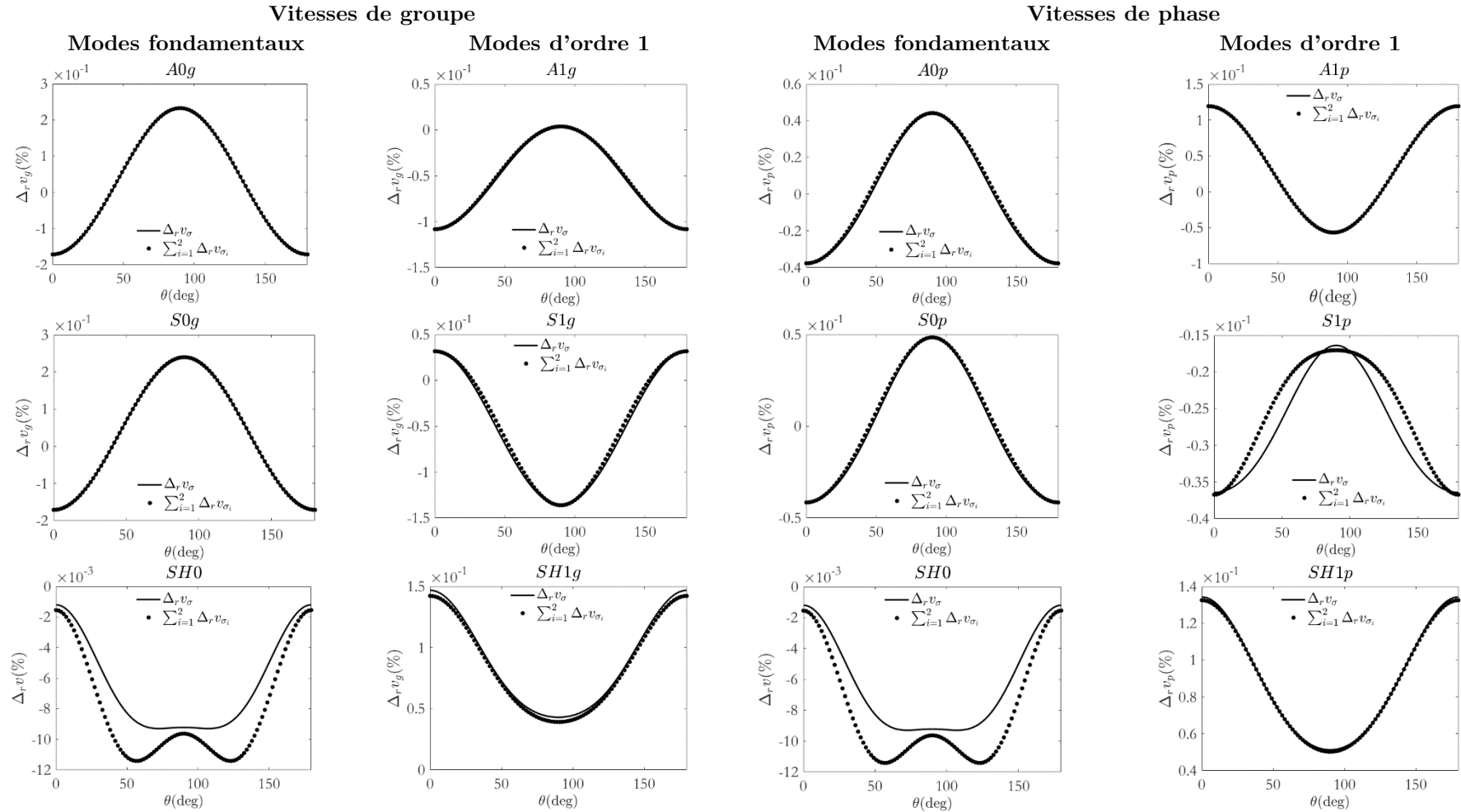


## La non-linéarité de l'EAE en fonction du profil de la contrainte (voir IV.B. [p. 66]).



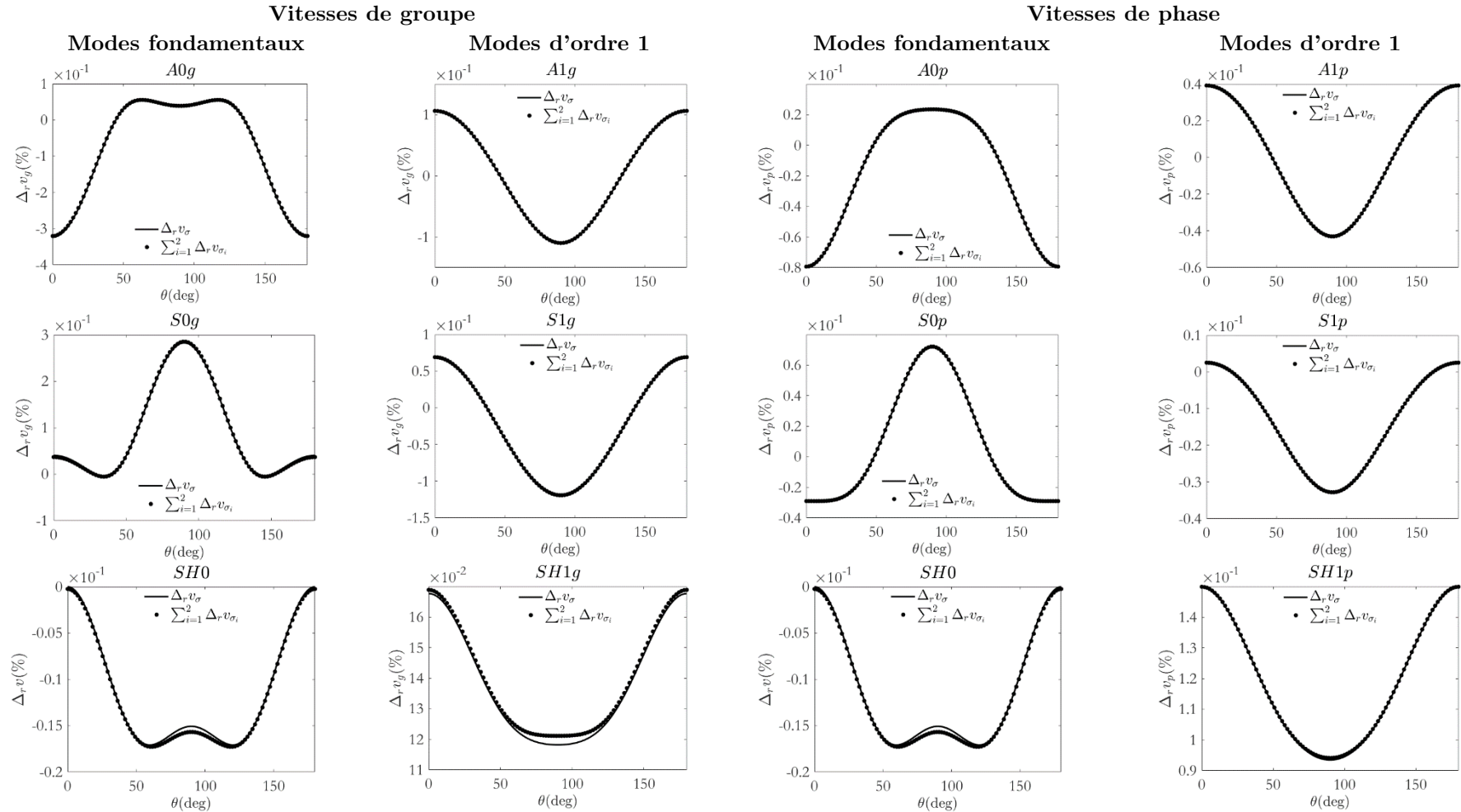
**An-Ch2-Fig. 3** : variation relative de vitesse en fonction de l'amplitude de la contrainte ( $\sigma_1$ ), pour cinq profils de contrainte dans l'épaisseur :  $P_C$  (le profil constant),  $P_{cos(1)}$  (le profil cissoïdal de fréquence spatial  $1/d$ ),  $P_{sin(1)}$  (le profil sinusoïdal de fréquence spatial  $1/d$ ),  $P_{cos(2)}$  (le profil cissoïdal de fréquence spatial  $2/d$ ), et  $P_{sin(2)}$  (le profil sinusoïdal de fréquence spatial  $2/d$ ). La fréquence d'étude est  $f = 1.5$  MHz. Et la direction de propagation est celle de la contrainte. Les six modes : A0, S0, SH0, A1, SH1 et S1 sont étudiés.

La décomposition de l'EAE biaxial en la somme des EAE uniaxiaux : cas de profils cissoïdal – cissoïdal (voir IV.D.1 [p. 70]) .



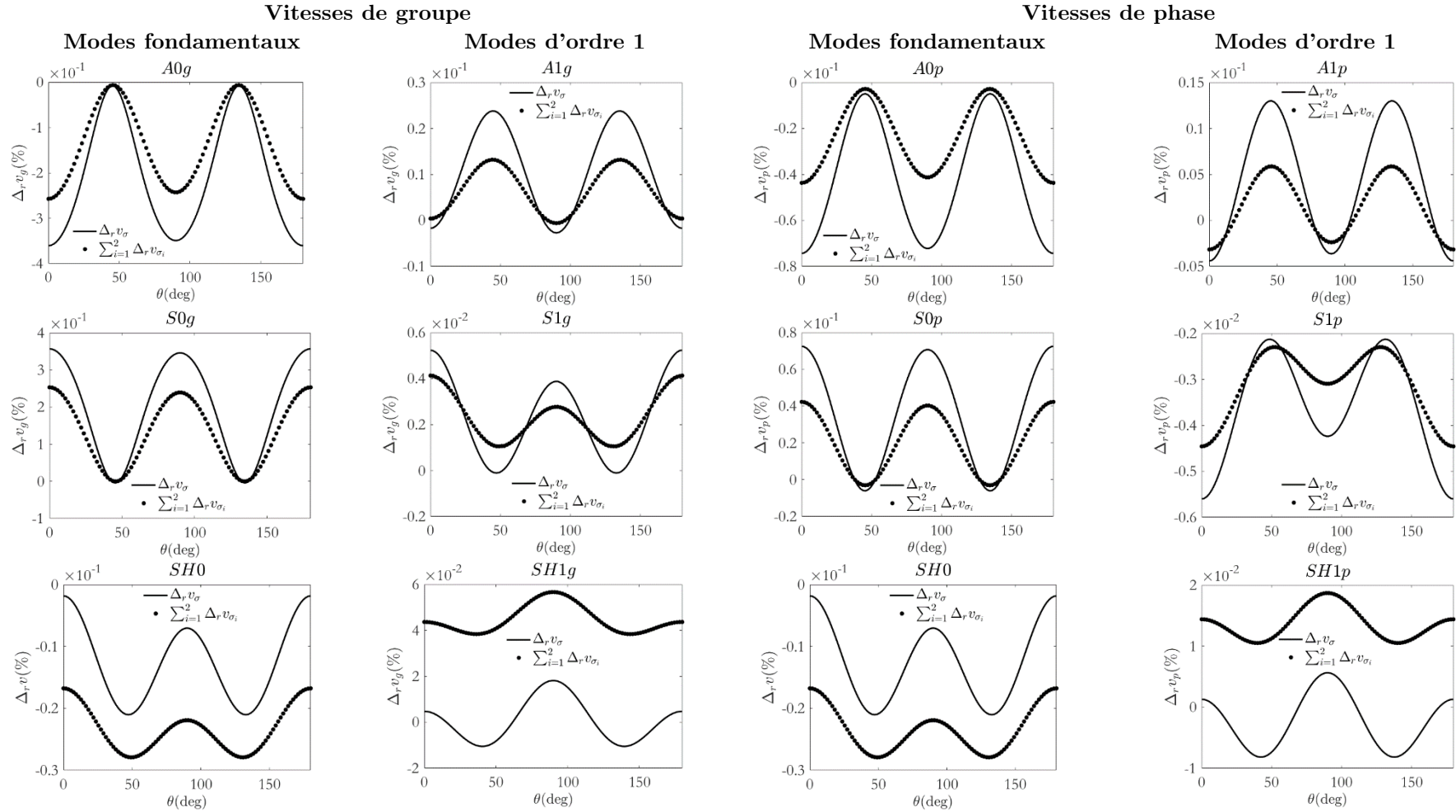
**An-Ch2-Fig. 4** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  (l'angle entre la direction de la contrainte uniaxiale et celle de l'onde élastique). L'étude est faite à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les deux profils de chaque composante sont données par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \cos(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa ( $d$  est l'épaisseur de la plaque et  $x_3$  la position dans l'épaisseur).  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial. Et  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

La décomposition de l'EAE biaxial en la somme des EAE uniaxiaux : cas de profils sinusoidal – cissoïdal (voir IV.D.2 [p. 70]) .



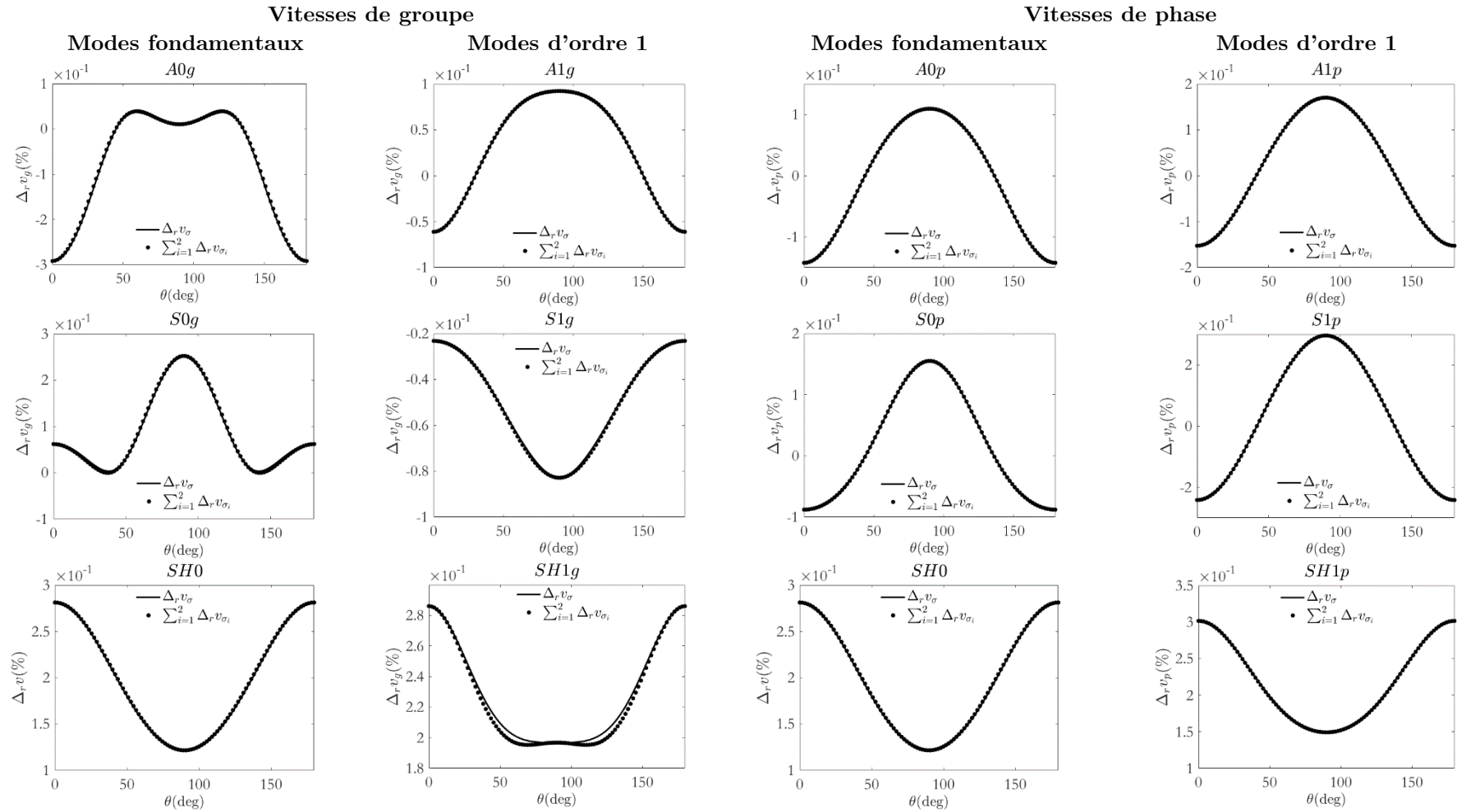
**An-Ch2-Fig. 5** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  (l'angle entre la direction de la contrainte uniaxiale et celle de l'onde élastique). L'étude est faite à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les deux profils de chaque composante sont donnés par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \cos(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa ( $d$  est l'épaisseur de la plaque et  $x_3$  la position dans l'épaisseur).  $\Delta_r v_{\sigma}$  est l'EAE induit par l'effort biaxial. Et  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

## La décomposition de l'EAE biaxial en la somme des EAE uniaxiaux : cas de profils sinusoidal – sinusoidal (voir IV.D.3 [p. 71])

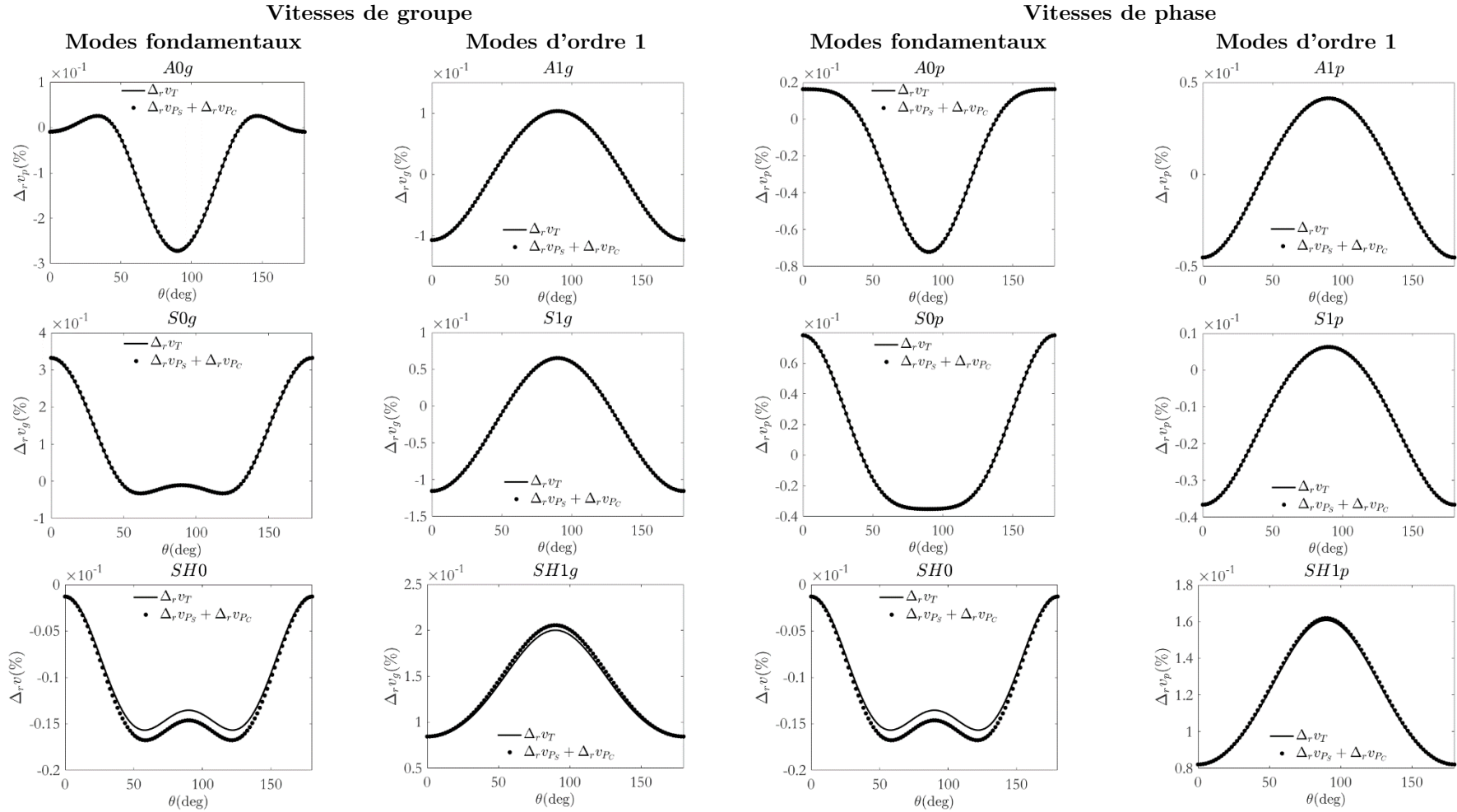


**An-Ch2-Fig. 6:** l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  (l'angle entre la direction de la contrainte uniaxiale et celle de l'onde élastique). L'étude est faite à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les deux profils de chaque composante sont données par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa ( $d$  est l'épaisseur de la plaque et  $x_3$  la position dans l'épaisseur).  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial. Et  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

## La décomposition de l'EAE biaxial en la somme des EAE uniaxiaux : cas de profils sinusoïdal – constant (voir IV.D.4 [p. 72])

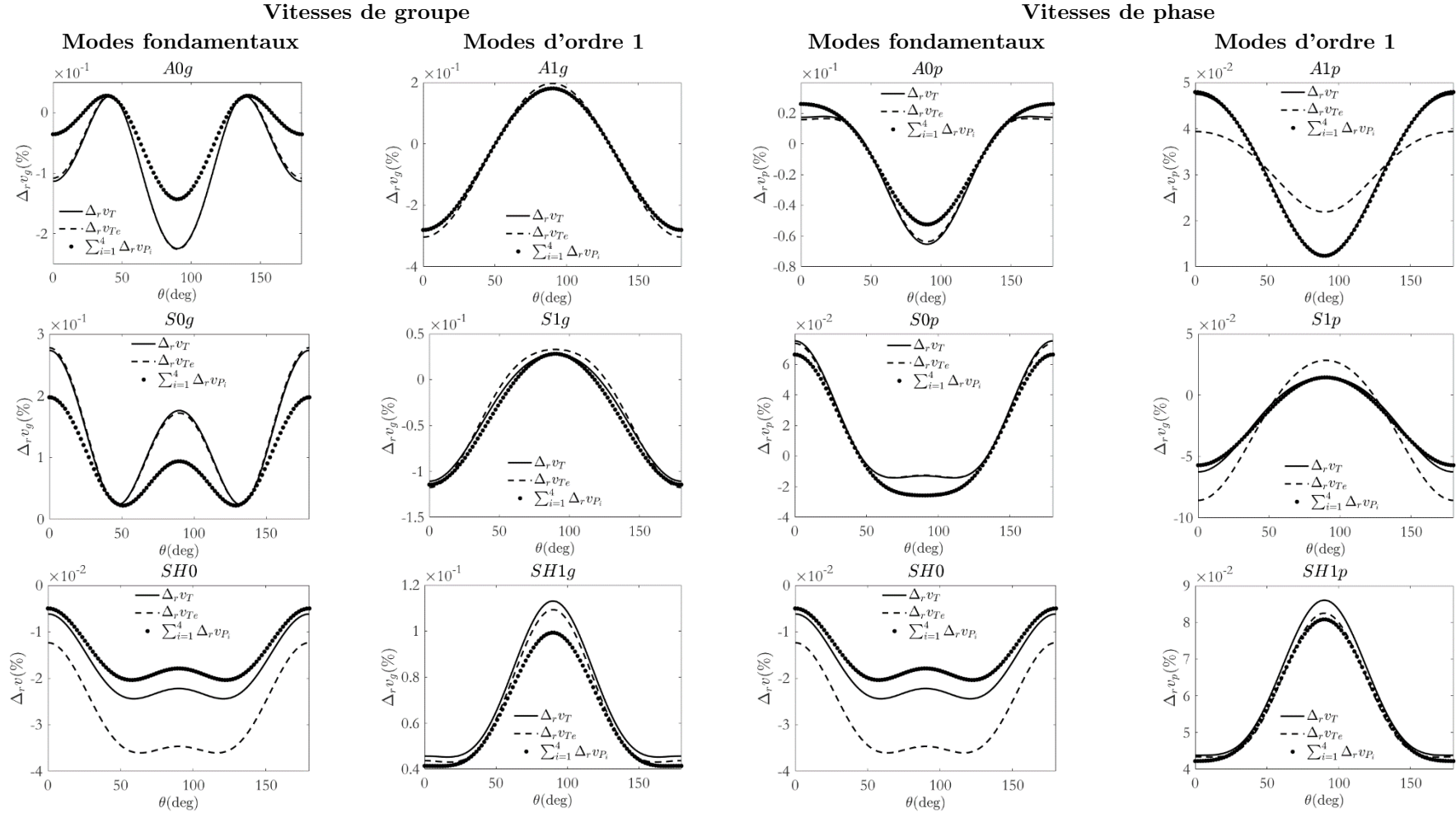


**An-Ch2-Fig. 7** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  (l'angle entre la direction de la contrainte uniaxiale et celle de l'onde élastique). L'étude est faite à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort biaxial dans le plan dont les deux profils de chaque composante sont données par :  $\sigma_1(x_3) = \sigma_1^m \sin(2\pi x_3/d)$  et  $\sigma_2(x_3) = \sigma_2^m$  avec  $\sigma_1^m = 100$  MPa et  $\sigma_2^m = -80$  MPa ( $d$  est l'épaisseur de la plaque et  $x_3$  la position dans l'épaisseur).  $\Delta_r v_\sigma$  est l'EAE induit par l'effort biaxial. Et  $\sum_{i=1}^2 \Delta_r v_{\sigma_i}$  est la somme des EAE induits par chaque composante considérée séparément.

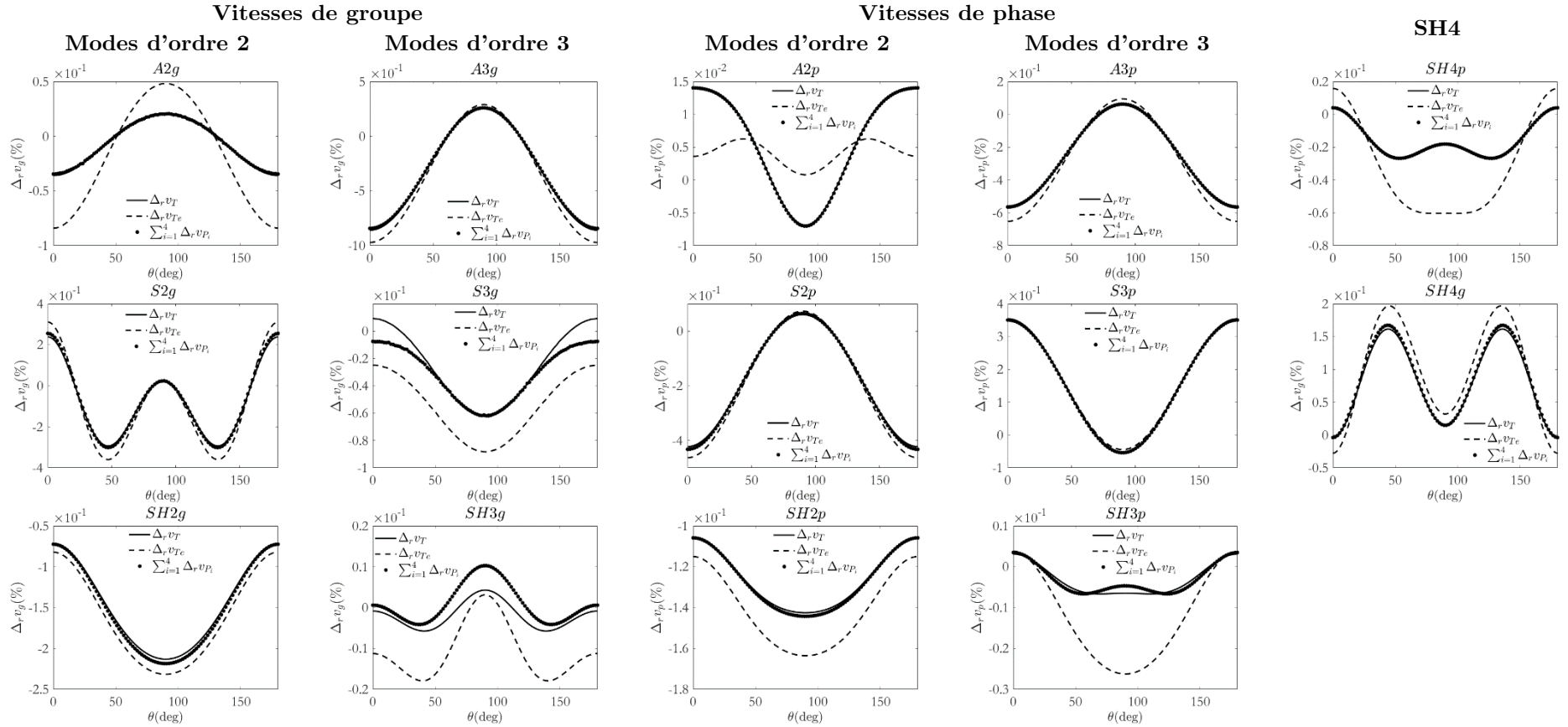
La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : cas de profils  $P_2$  (voir IV.E.1 [p. 74])


**An-Ch2-Fig. 8** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$ . L'étude est faite à la fréquence  $f = 1.5$  MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan. Le profil de la contrainte est la somme des deux profils suivants :  $P_C(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$  et  $P_S(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(2\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = 100$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = -80$  MPa ( $d$  est l'épaisseur de la plaque et  $x_3$  la position dans l'épaisseur).  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P_C + P_S$ . Et  $\Delta_r v_{P_S} + \Delta_r v_{P_C}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considérée séparément.

## La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : cas de profils (voir IV.E.2 [p. 74])



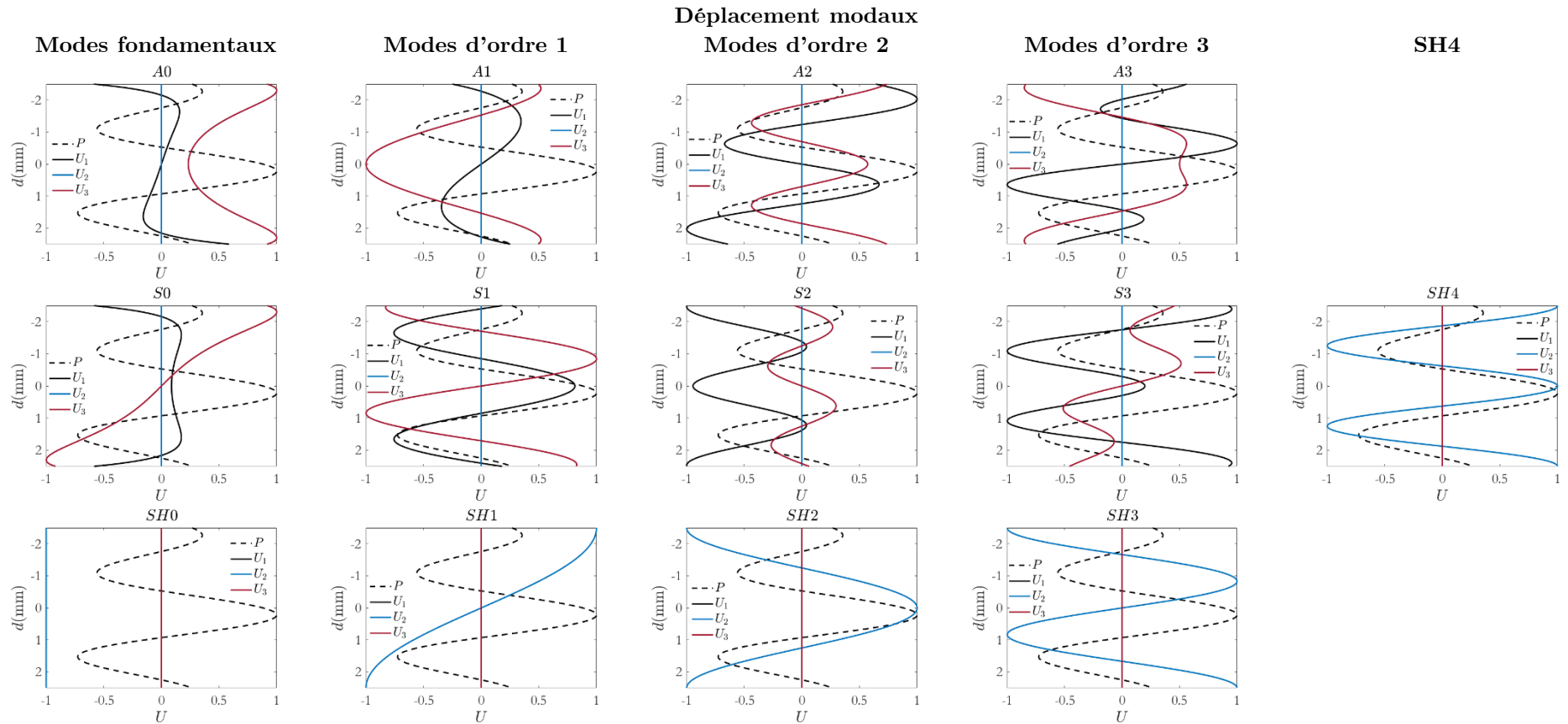
**An-Ch2-Fig. 9** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_{T_e}$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i + e_r$ .  $\Delta_r v_T$  celui dont le profil est  $P = \sum P_i$ . Et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_4(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$  et  $e_r(x) = \sigma_e \sin(x \in [-4,3])$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa,  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa et  $\sigma_e = 25$  MPa.

La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : cas de profils  $P_4^e$  (mode d'ordre sup) (voir IV.E. 2 [p. 74])


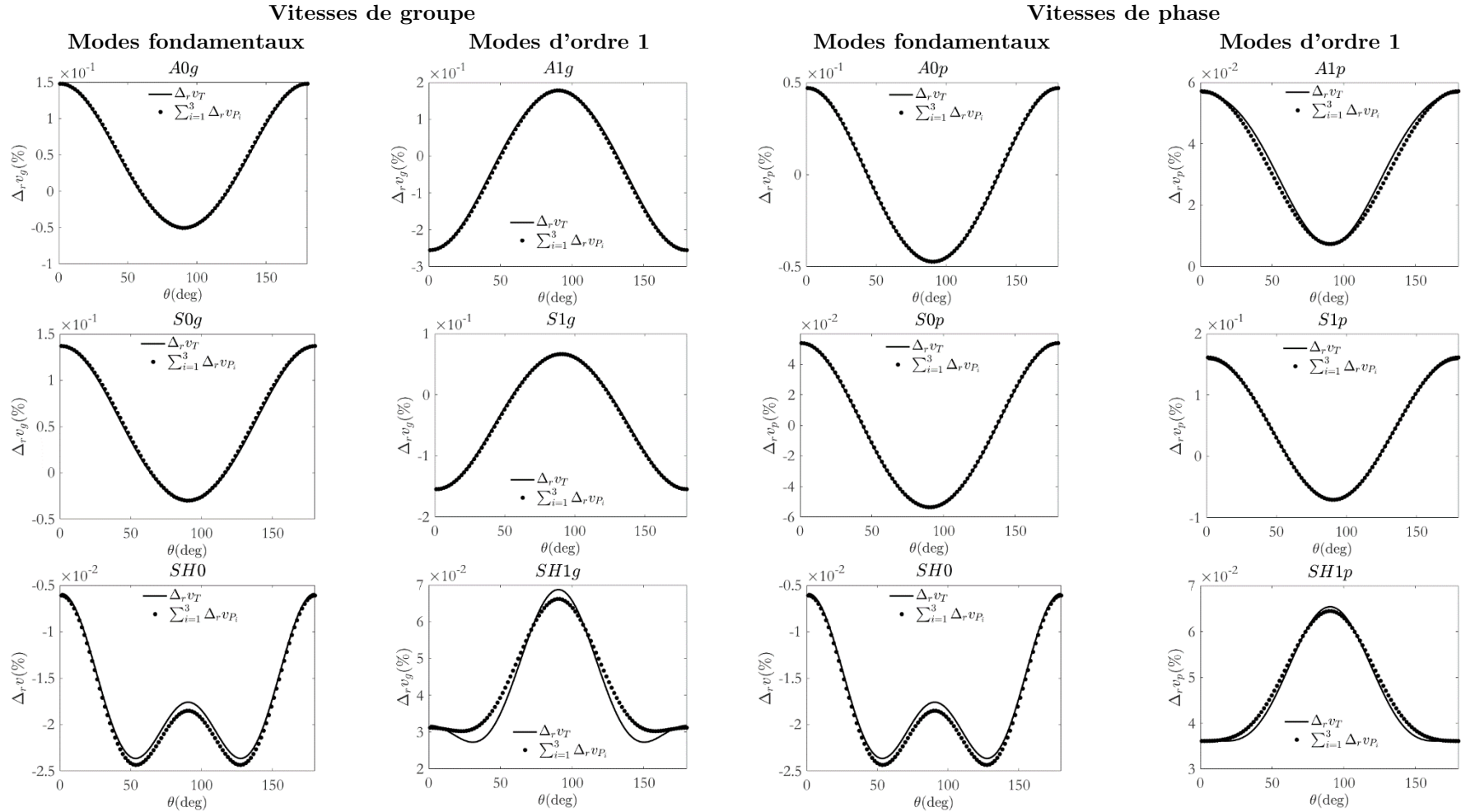
**An-Ch2-Fig. 10** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_{T_e}$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i + e_r$ .  $\Delta_r v_{T_c}$  celui dont le profil est  $P = \sum P_i$ . Et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_4(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$  et  $e_r(x) = \sigma_e \text{sinc}(x \in [-4,3])$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa ,  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa et  $\sigma_e = 25$  MPa.



## La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : (déplacements modaux) (voir IV.E. 2 [p. 74])

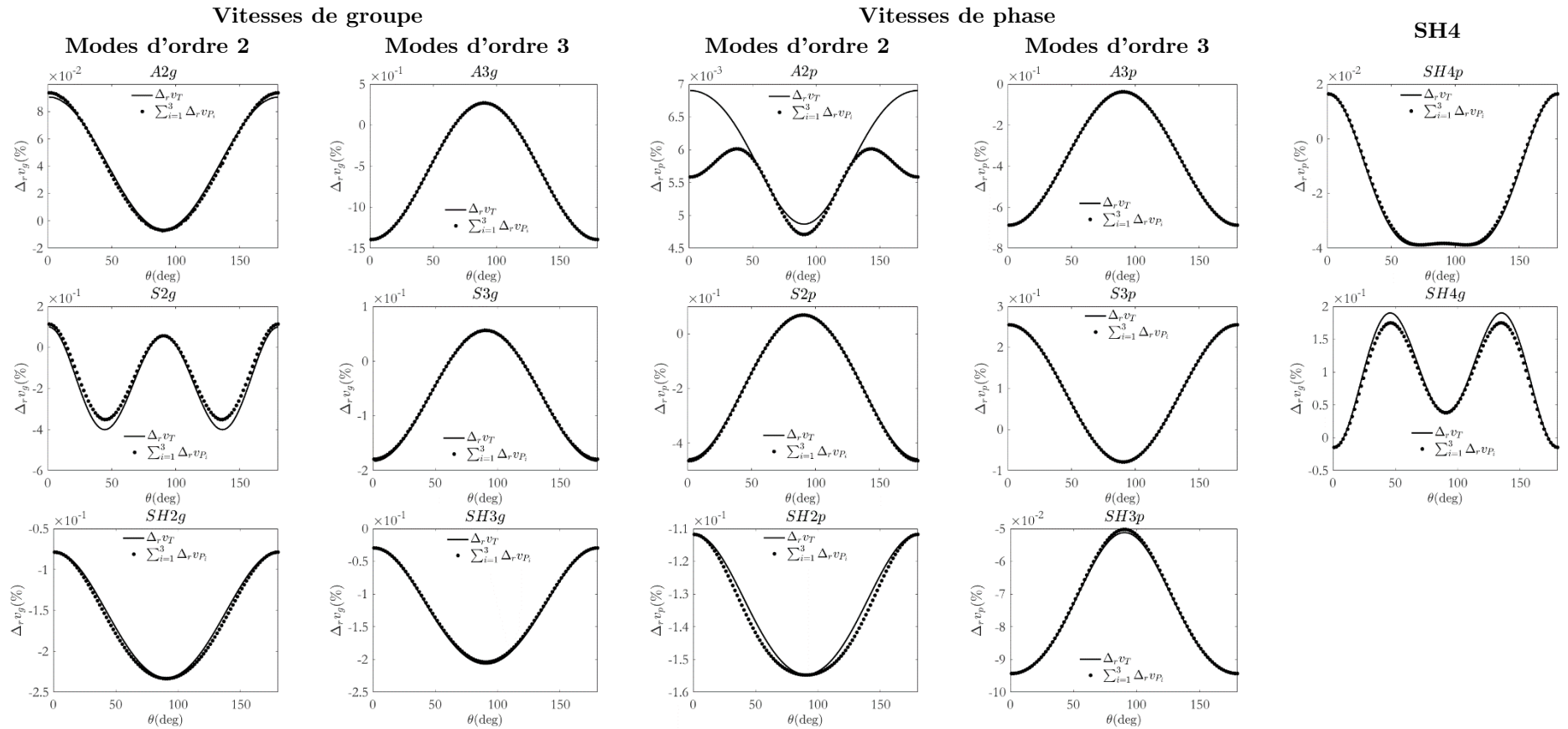


**An-Ch2-Fig. 11 :** les déplacements modaux des modes A0, A1, A2, A3, S0, S1, S2, S3, SH0, SH1, SH2, SH3, et SH4. À la fréquence 1.5 MHz. Dans le cas non contraint ( $U_1, U_2, et U_3$ ). Et pour mieux voir si la validé ou non de l'hypothèse (2-32) dépend de la relation entre le profil de la contrainte dans l'épaisseur et les déplacements modaux on a superposé à ces dernier le profil de la contrainte  $P$  normalisé (trait interrompu noir) tels que  $P = \sum P_i$ , et :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_4(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$  et  $e_r(x) = \sigma_e \text{sinc}(x \in [-4,3])$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa,  $\sigma_1^{4m} = 60$  MPa et  $\sigma_e = 25$  MPa.

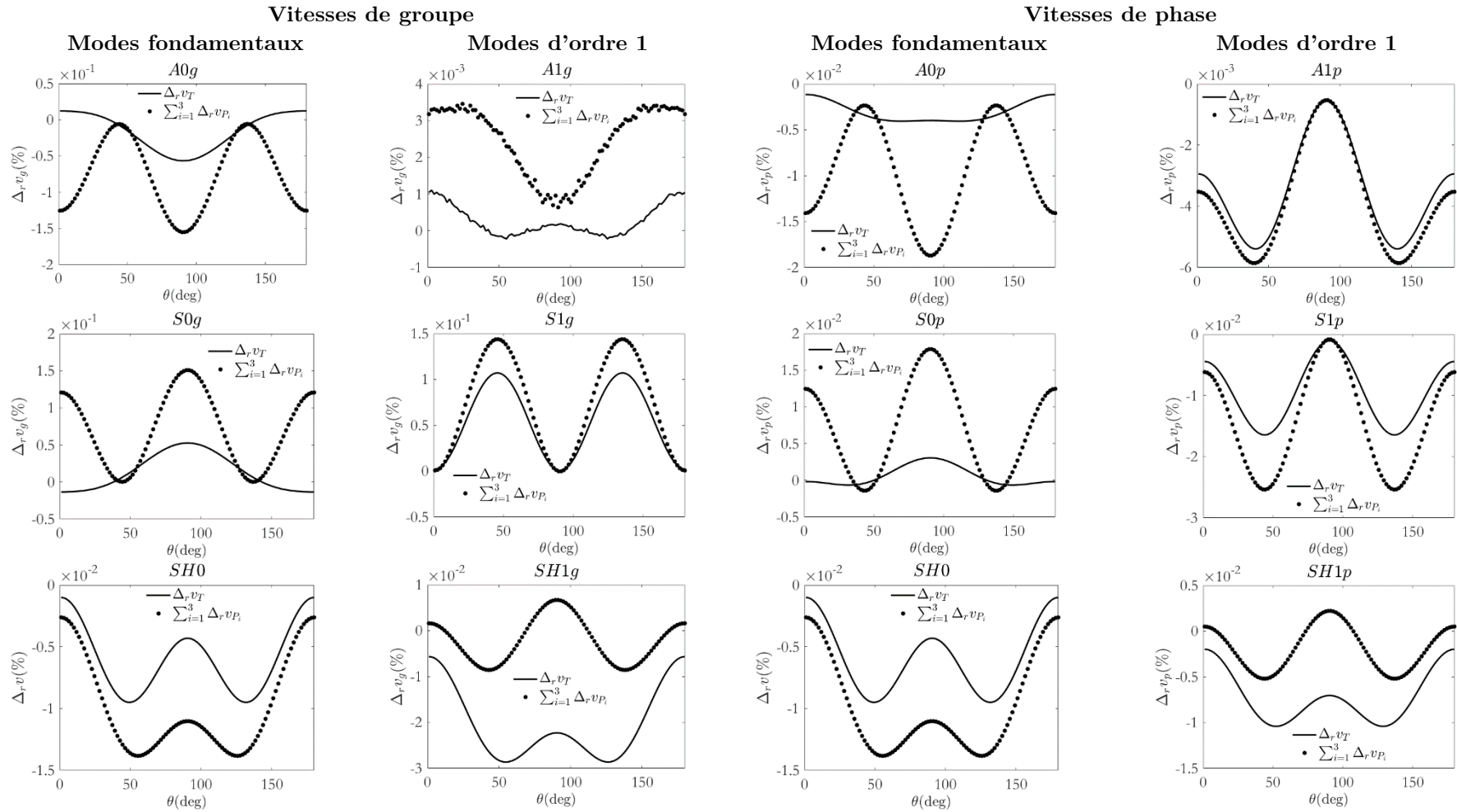
La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : cas de profils  $P_3^c$  (voir IV.E.3 [p. 78])


**An-Ch2-Fig. 12** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \cos(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa.

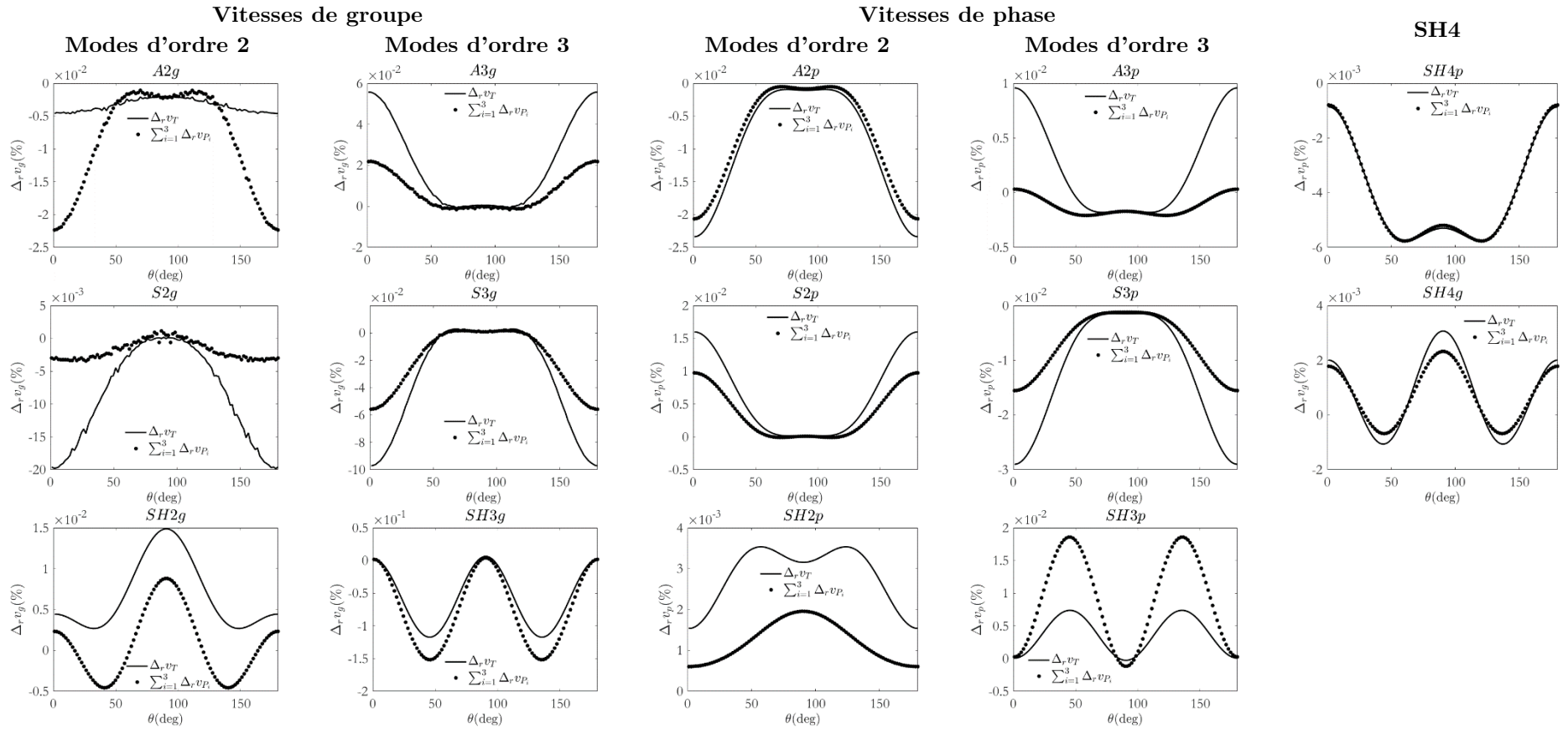
## La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : (modes sup)(voir IV.E.3 [p. 78])



**An-Ch2-Fig. 13** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \cos(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \cos(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \cos(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa

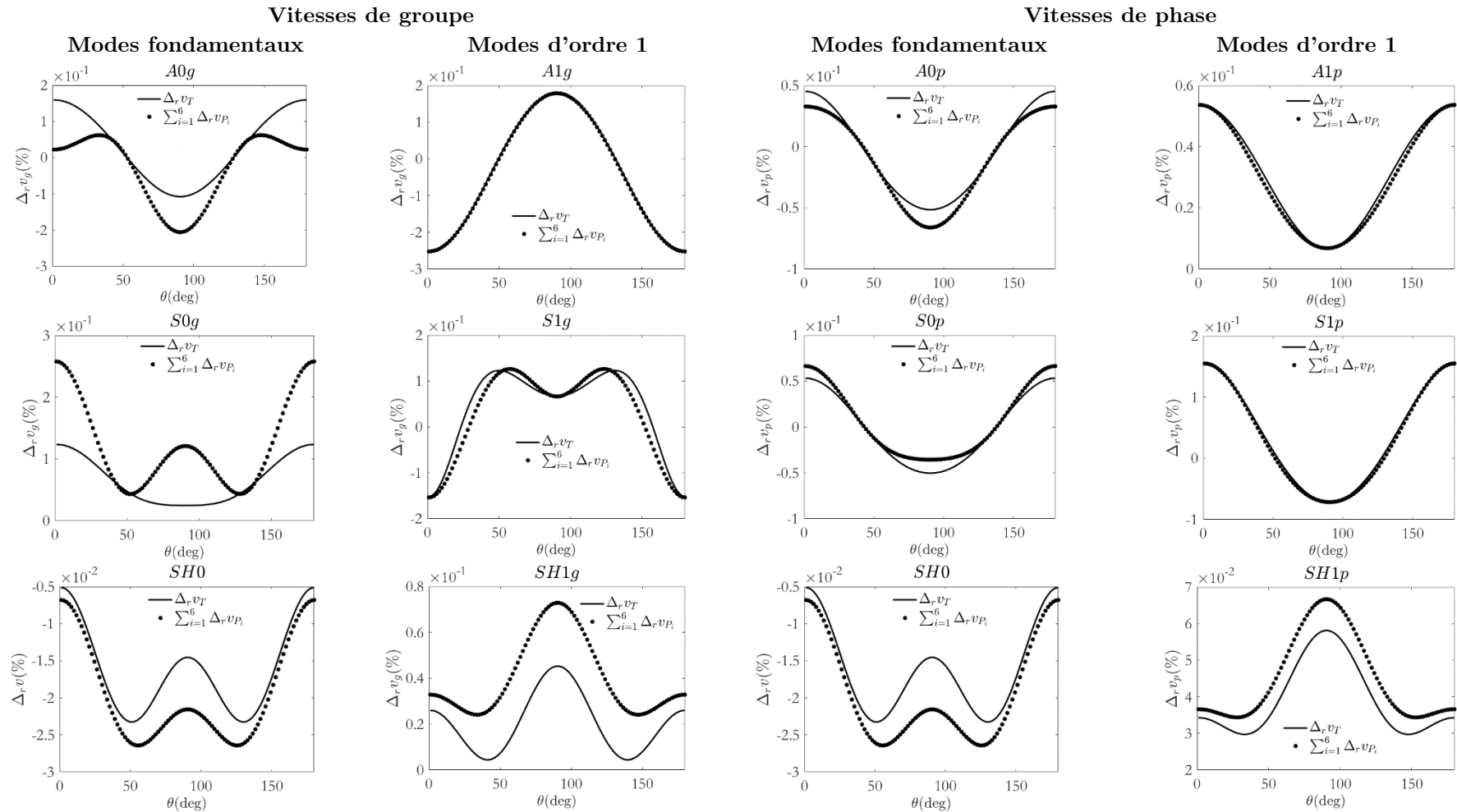
La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : cas de profils  $P_3^s$  (voir IV.E.4 [p. 78])


**An-Ch2-Fig. 14** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa.

La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : cas de profils  $P_3^s$  (mode sup) (voir IV.E.4 [p. 78])


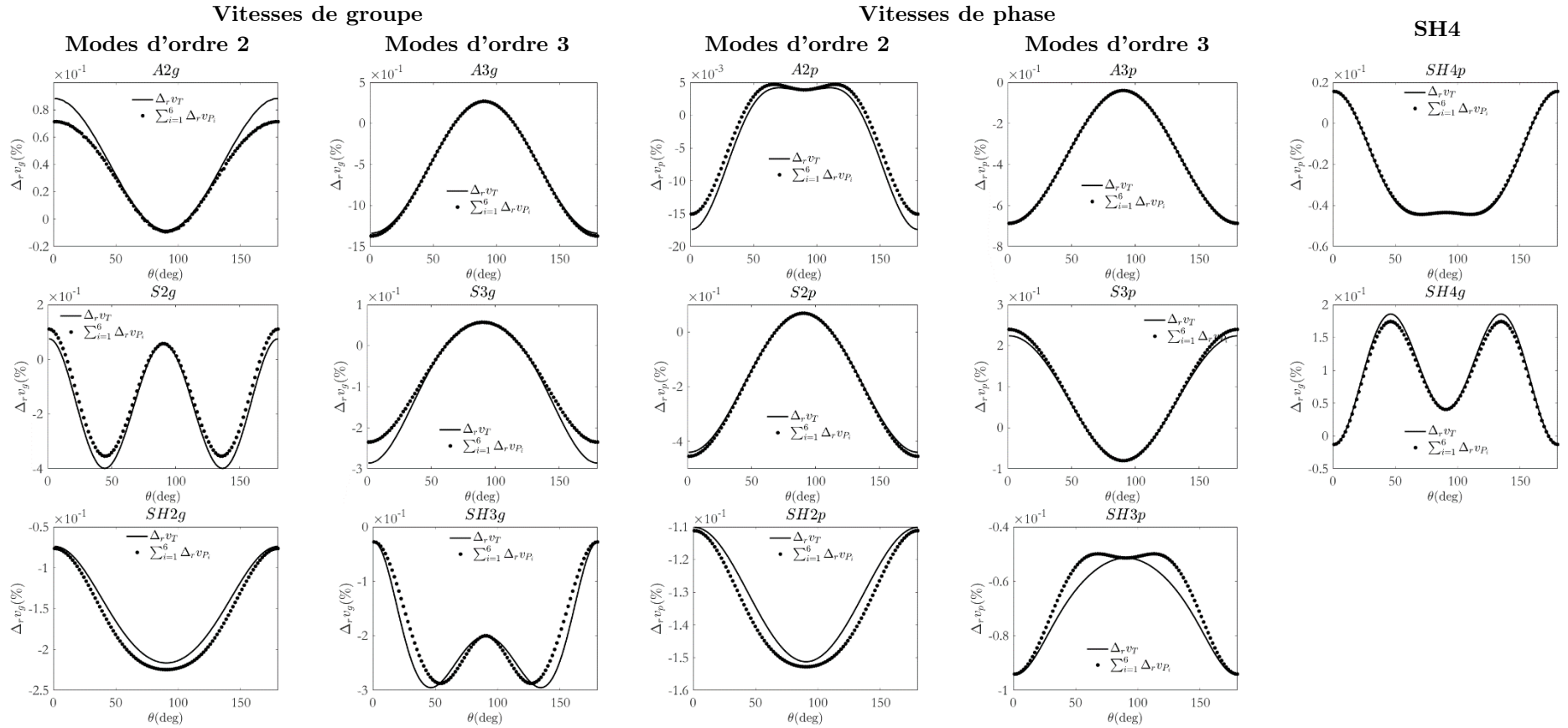
**An-Ch2-Fig. 15** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa.

## La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : (voir IV.E.4 [p. 78])



**An-Ch2-Fig. 16** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$   $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa.

## La décomposition de l'EAE uniaxial vis-à-vis du profil : (mode sup) (voir IV.E.4 [p. 78])



**An-Ch2-Fig. 17** : l'EAE en fonction de l'angle  $\theta$  à 1.5 MHz. La plaque est soumise à un effort uniaxial dans le plan.  $\Delta_r v_T$  est l'EAE induit par l'effort dont le profil est  $P = \sum P_i$  et  $\sum \Delta_r v_{P_i}$  est la somme des EAE induits par chaque profil considéré séparément. Tels que Les profils sont :  $P_1(x_3) = \sigma_1^{1m} \sin(2\pi x_3/d)$ ,  $P_2(x_3) = \sigma_1^{2m} \sin(4\pi x_3/d)$ ,  $P_3(x_3) = \sigma_1^{3m} \sin(6\pi x_3/d)$  avec  $\sigma_1^{1m} = -50$  MPa et  $\sigma_1^{2m} = 100$  MPa,  $\sigma_1^{3m} = 70$  MPa.





### 3. Un MAE analytique pour la résolution du PAEI

#### Résumé

Dans les deux premiers chapitres, nous avons développé le modèle acoustoélastique (MAE) avec lequel on peut prédire la variation de vitesse des ondes de Lamb et SH induite par des contraintes multiaxiales à l'aide d'un calcul par une méthode d'éléments finis semi-analytiques spécifique. Ce modèle constitue la solution du problème acoustoélastique direct (PAED), dont la compréhension est à la base de la résolution du problème acoustoélastique inverse (PAEI). Ce dernier est défini par l'obtention de la contrainte à partir de la connaissance des variations de vitesses de propagation des ondes (en pratique, à partir de mesures de « temps de vol » pris par une onde pour se propager d'un émetteur à un récepteur).

Dans le chapitre précédent nous avons étudié le cas où la contrainte – multiaxiale – est uniforme dans l'épaisseur et le cas où elle possède un profil variable dans l'épaisseur. Dans ce chapitre nous nous intéressons uniquement au premier cas. Ce chapitre traite donc la problématique suivante :

« Trouver les trois composantes de la contrainte et l'orientation du tenseur de contrainte dans le plan de la plaque, en fonction des variations de vitesses / temps de vol de modes de Lamb et/ou de modes SH, induites par la contrainte ».

La résolution que nous proposons de ce problème tient compte des trois observations suivantes :

1. Le problème acoustoélastique direct contient beaucoup de paramètres, ce qui rend difficile l'utilisation des méthodes d'inversion simple (comme c'est le cas pour la perte d'épaisseur, où il n'y a qu'une seule inconnue scalaire).
2. Pour les ondes de volume / surface, il existe des formules analytiques qui donnent les variations de vitesse en fonction de la contrainte, mais pas pour les ondes guidées.
3. Les variations de vitesses induites par la contrainte, calculées par le MAE, ou mesurées dans l'expérience, semblent être décrites par des fonctions usuelles simples.

Ces observations nous ont poussé à rechercher des formules analytiques représentatives de l'effet acoustoélastique induit par la contrainte. L'objectif de cette recherche est donc de trouver des « lois » reliant les variations de vitesses à la contrainte, données par des formules précises et inversibles (*i.e.* permettant de donner la contrainte en fonction des variations de vitesses).

In fine dans ce chapitre on propose une version réduite (analytique) du MAE permettant la résolution du problème acoustoélastique inverse. L'obtention de cette version a été faite par expérimentation numérique à l'aide du code SAFE-AE. Ce chapitre est divisé de la manière suivante :

La sous-sec. I.A [p. 105] présente une étude bibliographique traitant la résolution du problème acoustoélastique inverse, utilisant les ondes de volume / surface. On montre que cette résolution repose sur l'utilisation des relations, dites de biréfringence, déduites à partir des formules analytiques, décrivant les variations de vitesses en fonction de la contrainte. Elles sont obtenues directement par l'application de la théorie d'acoustoélasticité aux ondes de volume / surface. La sous-sec. I.B [p. 106] présente les travaux qu'on a pu trouver sur la résolution du PAEI en utilisant les ondes de Lamb et SH. La sous-sec. I.C [p. 108] définit l'erreur avec laquelle on peut estimer les déviations entre la version réduite (données par des formules analytiques) et le MAE. Nous montrerons que le choix d'une erreur pertinente est essentiel pour avoir un critère d'acceptabilité de cette version.

La sous-sec. II.A [p. 110] traite le PAEI dans le cas d'une contrainte uniaxiale hors plan. Dans ce cas, le problème contient une seule inconnue scalaire. On montre qu'il existe des plages de fréquences où l'EAE induit par cette contrainte est donné par une simple loi linéaire dont le coefficient (coefficient acoustoélastique) dispersif est propre à chaque mode. La résolution du PAEI est réalisée en utilisant un seul mode émis et reçu une seule fois dans une direction quelconque.

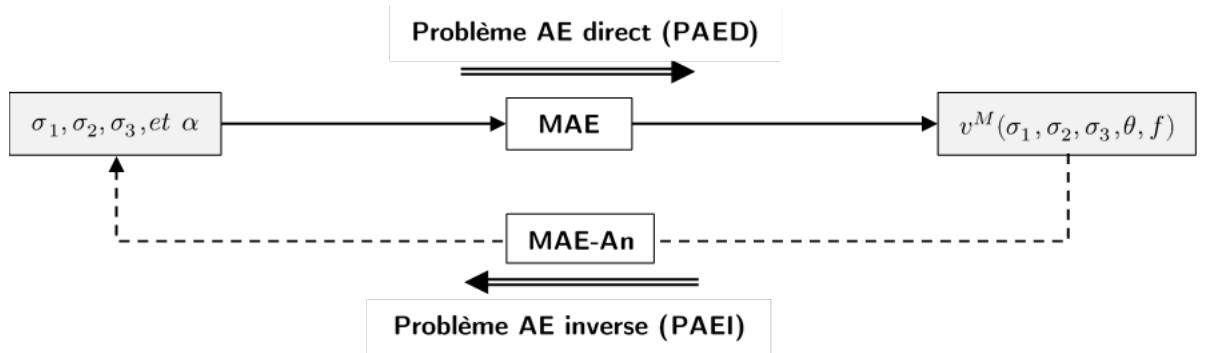
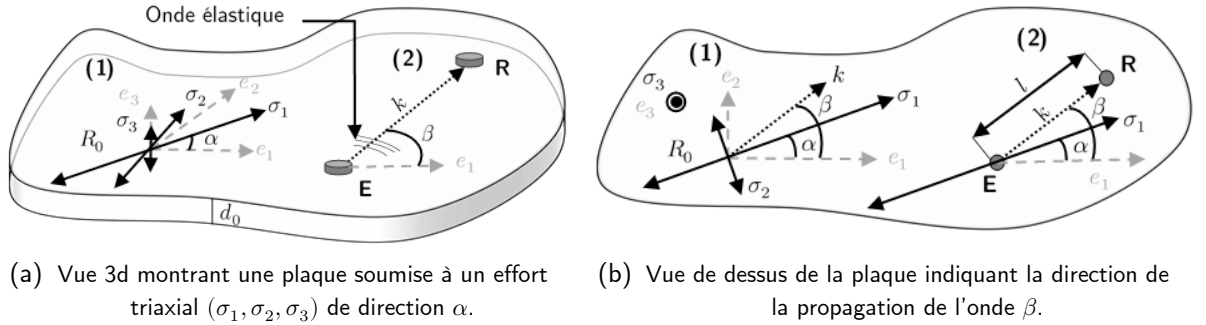
La Sec. II.B [p. 114] traite le PAEI dans le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan. Dans ce cas, le PAEI contient une variable vectorielle (*i.e.* l'amplitude de la contrainte et sa direction). Une étude paramétrique est réalisée pour faire correspondre les résultats du MAE à une formule analytique choisie. Cette formule contient deux paramètres (coefficients acoustoélastiques (CAE)) indépendants de la contrainte et propres à chaque mode. La résolution du PAEI est réalisée en utilisant trois méthodes : la première dite méthode d'inversion multimodale (MI-mM) repose sur l'usage de deux modes émis et reçus dans une seule direction, à la même fréquence centrale. La deuxième dite méthode d'inversion multi fréquentielle utilise un seul mode émis et reçu à deux fréquences centrales, dans une seule direction. La dernière dite méthode d'inversion multi directionnelle (MI-mD) utilise un seul mode émis et reçu à une seule fréquence centrale mais dans deux directions perpendiculaires.

La sous-sec. II.C [p. 126] traite le cas d'une contrainte triaxiale. On montre tout d'abord que l'expression de la formule représentative de l'EAE induit par ce chargement pourrait être déduite à partir des deux formules retrouvées dans les cas uniaxiaux. Cette formule (version analytique du MAE) contient trois coefficients acoustoélastiques (dispersifs et propres à chaque mode). Le premier décrit l'effet des amplitudes des deux composantes de la contrainte dans le plan, le deuxième, l'effet de leurs directions, le troisième, l'effet de l'amplitude de la composante normale. La solution proposée utilise trois capteurs formant un triangle rectangle isocèle pouvant émettre et recevoir des modes S0 et A0.

## I. Introduction

Le tenseur de rigidité équivalent d'un milieu anisotrope soumis à un chargement arbitraire a été donné au premier chapitre. Du fait du grand nombre de paramètres de ce tenseur, l'étude a été par la suite restreinte à des matériaux isotropes soumis à des chargements triaxiaux. Le nombre de paramètres du tenseur se réduit drastiquement et le tenseur peut être explicitement écrit en fonction de la contrainte (triaxiale). Il permet d'étudier l'effet acoustoélastique (EAE) pour tout type d'ondes élastiques. L'étude a ensuite été restreinte au cas des ondes de Lamb et SH au chapitre 2. Le modèle développé pour prédire les variations de vitesses des ondes de Lamb et SH a été validé par des résultats expérimentaux de la littérature. L'étude de l'EAE par expérimentation numérique a permis d'établir que cet effet est dispersif, anisotrope, et non-linéaire. Cette étude a préparé le terrain pour le développement des méthodes d'inversion dans le cas d'une contrainte multiaxiale homogène avec un profil constant dans l'épaisseur. Le modèle acoustoélastique développé aux chapitres précédents permet, en connaissant la contrainte, de donner les variations de vitesses des ondes de Lamb et SH (PAED), mais pas de remonter à la valeur de la contrainte connaissant la(es) variation(s) de vitesses (PAEI).

Pour illustrer la problématique du présent chapitre et mieux notre approche pour la résoudre, on donne la figure suivante :



**Fig. 3-1 :** (a)-(1) Une plaque infinie d'épaisseur  $d_0$  (dans l'état non-contraint) est soumise à une contrainte triaxiale  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  homogène dans toute la plaque. Les directions principales de cette contraintes sont données par l'angle  $\alpha$  dans le repère  $R_0(e_1, e_2, e_3)$  lié à la plaque (la direction normale à la plaque est supposée être une direction principale). (a)-(2) Un émetteur (E) et un récepteur (R) sont utilisés pour émettre et recevoir une onde élastique (la direction de propagation indiquée par le vecteur d'onde  $k$ ) suivant la direction donnée par l'angle  $\beta$ . (b) vue du dessus de la plaque, indiquant que la contrainte  $\sigma_3$  est normale à la plaque. (c) Schéma de principe décrivant la problématique du chapitre, revenant à faire le chemin inverse (MAE-An : version analytique du modèle acoustoélastique, pour résoudre le PAEI).

On considère une plaque infinie d'épaisseur  $d_0$  (dans l'état non-contraint) et un repère  $R_0(e_1, e_2, e_3)$  lié à la plaque. La plaque est soumise à un effort triaxial tel que les  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les contraintes principales. La normale à la plaque  $e_3$  coïncide avec la direction principale de  $\sigma_3$ . Le repère  $R_0$  n'est pas le repère principal de contrainte, ni le repère de propagation introduit dans le chapitre précédent, mais un nouveau repère qui nous permet de repérer la direction de la propagation de l'onde guidée (donnée ici par l'angle  $\beta$ ) et celle de la contrainte donnée par  $\alpha$  (l'angle que fait  $\sigma_1$  avec  $e_1$ ).

Dans le problème acoustoélastique direct les trois composantes de la contrainte et sa direction sont connues, et le MAE permet de prédire la vitesse d'un mode  $M$  (Lamb ou SH) à une fréquence et suivant une direction données.

Le problème acoustoélastique inverse est formulé de la manière suivante : peut-on remonter aux trois composantes de la contrainte  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et sa direction  $\alpha$ , connaissant les variations de vitesses de modes de Lamb et/ou SH ?

Des problèmes similaires à celui-ci ont été traités dans la littérature pour le cas d'une contrainte uniaxiale ou biaxiale (de direction connue). On en donne ici une liste non-exhaustive, qui montre que le PAEI a été traité en grande partie en utilisant des ondes de volume / surface, mais que très peu de travaux utilisent des ondes de Lamb et SH.

### A. Le PAEI résolu par des ondes de Volume/Surface

Contrairement aux vitesses des ondes de Lamb, celles des ondes de volume/Rayleigh peuvent être écrites d'une manière explicite en fonction des propriétés matériau (la densité et les coefficients de Lamé). Cela reste également vrai dans le cas d'un matériau contraint, où les vitesses des ondes L et T (longitudinale et transversale) sont écrites explicitement en fonction de la densité, des coefficients de Lamé, de ceux de Murnaghan et de la contrainte mécanique (voir Réf. [25,28,46,52,66,70]). À partir de ces expressions, les auteurs dérivent des formules de biréfringences acoustoélastique écrites sous la forme générale<sup>1</sup> donnée au premier chapitre, que l'on reporte ici pour plus de clarté :

$$\frac{\Delta v_{l/t}(\boldsymbol{\sigma}, \theta)}{v_{l/t}(\boldsymbol{\sigma} = 0, \theta)} = A_{l/t}(C_{ijkl}, C_{ijklmn})f(\boldsymbol{\sigma}, \theta) \quad (3-1)$$

$\Delta v_{l/t}$  : variation des vitesses des ondes longitudinale/transversale, en fonction de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et de l'angle de propagation  $\theta$ .

$A_{l/t}$  : coefficients acoustoélastiques qui ne dépendent que des constantes élastiques du matériau (dans son état de référence non contraint).

$f(\boldsymbol{\sigma}, \theta)$  : fonction *linéaire* de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , et de  $\sin^2(\theta)$ , avec  $\theta$  l'angle entre la direction de propagation de l'onde et une composante de la contrainte (généralement  $\sigma_1$ ).

Ces formules de biréfringence sont utilisées pour estimer les deux composantes de la contrainte en fonction des vitesses des ondes / temps de vol (TdV). On peut citer les travaux suivants :

King & Fortunko [25] ont traité le PAEI dans le cas d'une contrainte biaxiale dans le plan et montrent que les deux composantes principales de la contrainte peuvent être écrites d'une manière explicite en fonction de la vitesse de l'onde de cisaillement horizontale et sa direction de propagation par rapport à la normale à la pièce (problème 3D). Les auteurs ont validé expérimentalement cette approche (voir Chapitre 1 :I.B.2.i [p. 28]), Ces formules sont également utilisées par Clark & Moulder [59] pour traiter une problématique similaire à celle traitée par la Réf.[25]. Dorfi *et al* [28] ont traité le cas de la caractérisation d'un état de contrainte inhomogène dans le plan d'une plaque et homogène dans l'épaisseur. Cet état de contrainte a été induit en appliquant un chargement uniaxial à la plaque, qui présente une fissure débouchante, avec comme objectif d'induire un état de contrainte inhomogène (maximal près de la fissure, nul loin de celle-ci). La caractérisation de la contrainte était locale, utilisant une grille de capteurs posés sur la surface de la plaque. Ces capteurs (PZT) génèrent des ondes de volume (L, SV, et SH) qui se propagent dans l'épaisseur de la plaque, dans la direction normale à la surface (dans la direction de la propagation, la contrainte est constante). Les auteurs ont donné des formules de biréfringence permettant de remonter à la valeur de la contrainte biaxiale (la symétrie du problème pièce + chargement, rend la composante normale de la contrainte nulle), à partir des vitesses des ondes générées. Ces formules diffèrent de celles données par King & Fortunko [25], du fait qu'elles utilisent

<sup>1</sup> On note que cette formule écrite de cette façon ne figure dans aucune des références, cependant toutes les formules de ces références peuvent être écrites sous la forme donnée par l'Éq. (3-1).

les trois ondes de volume (L, SV, SH) qui se propagent dans une seule direction, alors que celles de la Réf.[25] utilisent seulement SH mais avec plusieurs directions de propagation. Thompson *et al* [66] se sont basés sur les travaux de Thurston [98] et ont utilisé une formule de biréfringence donnant la différence entre deux composantes principales de contrainte ( $\sigma_{ii} - \sigma_{jj}$ ) en fonction de  $v_{ij} - v_{ji}$  telle que  $v_{ij}$  est la vitesse de l'onde de cisaillement qui se propage dans la direction  $i$  et polarisée dans la direction  $j$ . Les auteurs ont ensuite validé cette formule en estimant la valeur de la contrainte uniaxiale appliquée à une plaque en aluminium. Mishakin *et al* [91] se basant sur les travaux de Chattelier & Touratier [99] et ont traité le cas biaxial mettant l'accent sur l'effet de la largeur de bande fréquentielle du signal sur l'estimation de la contrainte. D'autres auteurs Réf [27,61,70,100] ont également utilisé des variantes de la formule de biréfringence (3-1) pour traiter le cas d'une contrainte uniaxiale ou biaxiale dans le plan d'une plaque. Duquennoy *et al* [101] utilisent une variante de la relation de biréfringence (3-1) (pour les ondes de Rayleigh au lieu des ondes L et T) pour mesurer un état de contrainte biaxial dans des barres d'acier. Les auteurs utilisent des ondes de Rayleigh, mieux adaptées à la mesure de contrainte proche de la surface (voir les travaux de Hirao *et al* [102]). L'état de contrainte est induit par traitement thermique, et supposé homogène sur l'axe de la barre et sur la circonférence de celle-ci (mais avec deux valeurs différentes). La relation de biréfringence utilise les mesures des vitesses de l'onde de Rayleigh sur l'axe et la circonférence pour remonter à la valeur de la contrainte.

En conclusion, des solutions du PAEI dans le cas des ondes de volumes ou de Rayleigh, ont été proposées et se basent sur les expressions analytiques des variations de vitesses en fonction de la contrainte. Ces expressions peuvent être déduites de l'application de la théorie d'acoustoélasticité à ces ondes (volume + Rayleigh). Le fait que de telles formules n'existent pas dans le cas des ondes de Lamb et SH pourrait expliquer que très peu de travaux traitent le PAEI avec les ondes guidées. On décrit ci-après les travaux qui s'y intéressent.

## B. Le PAEI résolu par des ondes de Lamb

Murayama [77] s'intéresse au cas d'une contrainte uniaxiale appliquée lors d'un essai de traction, estimée en utilisant les mode S0 et SH0. L'auteur utilise une formule de biréfringence identique à celle des ondes de volume dans le cas uniaxial avec propagation dans la direction de la contrainte. L'auteur ne donne pas de référence ni ne justifie l'usage de cette formule pour traiter le cas des ondes de Lamb et SH. Néanmoins, la formule fonctionne; cela tient au fait que dans cette configuration particulière (chargement uniaxial + propagation dans la direction de celui-ci), les ondes de Lamb et SH peuvent posséder des formules de biréfringence similaires (parfois identiques) à celles des ondes de volume. Une approche différente a été suivie par Shi *et al* [71] dans laquelle les auteurs ont remarqué que la variation de vitesse de phase du mode S0 mesurée en fonction de la direction de propagation  $\theta$ , dans le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan, à une fréquence donnée, peut être représentée par une fonction sinusoïdale (Eq.2 de la Réf. [71] :  $\Delta v_{S0}(\theta) = \sigma_1(K_1 \cos^2(\theta) + K_2 \sin^2(\theta))$  tels que  $K_1$  et  $K_2$  sont les deux constantes acoustoélastiques retrouvées par la méthode des moindres carrés), cette anisotropie ayant déjà été établie pour les ondes de volume, Rayleigh, SH,... voir Réf. [25,28]. Les auteurs ont ensuite fait l'hypothèse que le cas biaxial dans le plan pourrait être traité par sommation linéaire des deux cas uniaxiaux et mettent en œuvre une deuxième fois la méthode des moindres carrés pour remonter aux variables  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\alpha$ .

L'hypothèse faite par Shi *et al* [71] qui suppose que l'effet acoustoélastique (EAE) induit par un chargement biaxial est égal à la somme des EAE induits par deux chargements uniaxiaux, a été traitée au chapitre précédent (l'hypothèse de décomposition traitée dans le chapitre 2 Sec.( III.F [p. 60])). Nous avons montré que sa validité dépend de la fréquence et de la direction de propagation. On a vu notamment que dans le cas du mode S0, aux quatre fréquences considérées, l'hypothèse était valide pour la vitesse de phase (celle utilisée par Shi *et al* [71]) mais pas pour la vitesse de groupe. La validité de l'hypothèse avait été étudiée pour les modes A0, SH0, S0, A1, SH1 (toujours dans le cas d'une contrainte homogène dans l'épaisseur). Le choix fait par Shi *et al* [71] qui consiste à recourir à des formules analytiques simples trouvées par le biais d'un « *fit* » des résultats numériques ou expérimentaux, semble être judicieux. C'est aussi le choix que l'on a adopté pour la suite.

En effet, les variations de vitesses induites par la contrainte ressemblent à des courbes de fonctions usuelles. Il devient clair qu'il faut chercher des formules analytiques représentatives de l'EAE, tout en ayant comme critère d'acceptabilité, leur *inversibilité*.

Shi *et al* [71] utilisent deux fois la méthode des moindres carrés (la première fois pour déterminer les coefficients acoustoélastiques, une seconde pour trouver  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et une valeur possible (parmi deux) de  $\alpha$ ). On montre dans ce chapitre qu'il n'y a pas besoin d'utiliser la méthode des moindres carrés une seconde fois pour remonter aux inconnues du problème et que d'autres méthodes<sup>1</sup> moins coûteuses et plus précises peuvent être proposées (la méthode présentée par la Réf [71] nécessite l'usage de plusieurs couples émetteur-récepteur pour trouver  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et une valeur possible d'  $\alpha$ ).

*In fine*, la résolution du problème acoustoélastique inverse (PAEI) repose sur la capacité à trouver des formules permettant de remonter aux inconnues du problème ( $\sigma_i$  et  $\alpha$ ) à partir des variations de vitesses/temps de vol. Pour chercher ces formules représentatives de l'EAE, on écrit le développement de Taylor de la fonction multi-variables  $\Delta v^M$  (variation de vitesse d'un mode  $M$  en fonction de la contrainte) pour une fréquence et direction de propagation données.

$$\Delta v_\sigma = \sum_{l=1}^{+\infty} \left( \sum_i^3 a_i^{(l)} \sigma_i^l \right) + \sum_{l,m=1}^{+\infty} \left( \sum_{i,j}^3 b_{ij}^{(l,m)} \sigma_i^l \sigma_j^m \right) + \sum_{l,m,n=1}^{+\infty} \left( \sum_{i,j,k}^3 c_{ijk}^{(l,m,n)} \sigma_i^l \sigma_j^m \sigma_k^n \right) \quad (3-2)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_i^{(l)} &= \frac{1}{l!} \left( \frac{\partial^l (\Delta v_\sigma)}{\partial \sigma_i^l} \right) \Bigg|_{\sigma=0}, \quad b_{ij}^{(l,m)} = \frac{1}{(l+m)!} \left( \frac{\partial^{l+m} (\Delta v_\sigma)}{\partial \sigma_i^l \partial \sigma_j^m} \right) \Bigg|_{\sigma=0} \\ c_{ijk}^{(l,m,n)} &= \frac{1}{(l+m+n)!} \left( \frac{\partial^{l+m+n} (\Delta v_\sigma)}{\partial \sigma_i^l \partial \sigma_j^m \partial \sigma_k^n} \right) \Bigg|_{\sigma=0} \end{aligned} \quad (3-3)$$

avec  $i, j, k \in \{1,2,3\}$  et  $i \neq j \neq k$ .

Les coefficients  $a_i^{M(l)}$ ,  $b_{ij}^{M(l,m)}$  et  $c_{ijk}^{M(l,m,n)}$  dépendent de la fréquence et la direction de propagation.

La formule (3.2) comportant des sommes infinies n'est pas inversible (*i.e.* connaissant les variations de vitesse des modes  $\Delta v^M$  et les coefficients  $a_i^{M(l)}$ ,  $b_{ij}^{M(l,m)}$  et  $c_{ijk}^{M(l,m,n)}$  on ne peut pas remonter aux valeurs des  $\sigma_i$  et la direction). En effectuant une troncature des sommes à un ordre  $N$ , alors pour chaque mode  $M$ , on a une équation polynomiale de degré  $3N$  à résoudre. Pour remonter aux valeurs des  $\sigma_i$ , on peut utiliser plusieurs modes. Cependant, la résolution d'un tel système est très complexe. En effet, un grand nombre de paramètres apparaît dans la formule (7 paramètres :  $a_i^{M(l)}$ ,  $b_{ij}^{M(l,m)}$  et  $c_{ijk}^{M(l,m,n)}$  avec  $i, j, k \in \{1,2,3\}$  et  $i \neq j \neq k$ ). De plus, il est nécessaire de faire intervenir plusieurs modes pour résoudre ce système (si  $N = 1$  il nous faut au total 7 modes pour trouver une solution *unique* au problème).

Pour lever ces difficultés, on fait l'hypothèse que  $\Delta v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f, \theta) = a_i^M(f, \theta) \sigma_i$ . Cela revient à dire qu'on peut traiter le cas triaxial comme la somme des trois cas uniaxiaux et que la variation de vitesse est une fonction linéaire de la contrainte. Cette hypothèse n'est pas valide dans le cas général comme on a pu le voir au chapitre précédent mais il est possible de déterminer des situations et des configurations pour lesquelles elle est vérifiée.

**Remarque** : la formule (3.2) prend en compte la non-linéarité de l'EAE, et le couplage entre les composantes de la contrainte. D'un point de vue mathématique on peut dire que cette formule représente le MAE complet, et la formule réduite.  $\Delta v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f, \theta) = a_i^M(f, \theta) \sigma_i$  dont on cherche les conditions de validité, la version réduite / analytique de ce modèle.

Nous allons maintenant estimer l'erreur commise en supposant vérifiées l'hypothèse de décomposition et la linéarité de l'EAE ( $\Delta v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f, \theta) = a_i^M(f, \theta) \sigma_i$ ). Pour ce faire, il nous faut définir une erreur adéquate.

<sup>1</sup> En plus des erreurs numériques introduites par la méthode des moindres carrés, il y a une erreur « physique » du fait qu'une composante de la contrainte n'est pas un vecteur (car elle n'a pas de sens) ce qui donne toujours deux valeurs possibles de l'angle  $\alpha$ .

### C. Définition de l'erreur

Les méthodes d'inversion à développer dans ce chapitre reposent sur la capacité à modéliser les résultats du MAE par des formules analytiques inversibles. La première étape pour aboutir à ces formules consiste à trouver les paramètres  $a_i^M(f, \theta)$ . Cela est fait en utilisant une régression linéaire (ou non-linéaire selon le cas), pour minimiser une fonction coût  $\hat{C}(a_i) = \sum (\Delta_r v_i^M - a_i^M(f, \theta) \sigma_i)^2$ . La fonction coût  $\hat{C}$  fait figurer la variation relative de vitesse ( $\Delta_r v$ ). Ce choix est effectué pour que les paramètres  $a_i^M(f, \theta)$  aient un sens vis-à-vis de l'éventuelle méthode d'inversion qui se base sur les variations de TdV par rapport à l'état non-contraint. Ainsi, la variation relative de vitesse est la grandeur (sans dimension) la mieux adaptée pour déterminer quel mode est le plus sensible.

La minimisation de la fonction coût  $\hat{C}$  est faite en utilisant des fonctions du logiciel Matlab.

Après avoir trouvé les paramètres  $a_i^M(f, \theta)$ , il reste à savoir si la déviation entre ce que donne le MAE et ce que donne la formule analytique est acceptable. Cela constitue la deuxième étape nécessitant de définir une erreur pour estimer cette déviation. À partir de cette erreur, on peut définir un critère d'acceptabilité de la formule.

Le choix classique de la racine de l'erreur quadratique moyenne (ou RMSE en anglais) a d'abord été étudié, mais il s'avère n'être pas le bon pour estimer la déviation des formules par rapport au modèle.

On donne ici une explication brève à cela.

Supposons deux vecteurs de données mesurées  $\tilde{y}_i$  et  $\tilde{z}_i$ , pour  $n$  valeurs ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) de la grandeur  $x_i$  (temps, position, température, ...), et qu'on veut modéliser ces données par des modèles linéaires  $y_i = a_1 x_i$  et  $z_i = b_1 x_i$ . La RMSE est donnée par :

$$RMSE_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - y_i)^2}{n}}, \quad RMSE_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{z}_i - z_i)^2}{n}} \quad (3-4)$$

Supposons que les données sont exactement décrites par les modèles suivants  $\tilde{y}_i = a_1 x_i + a_2 x_i^2$  et  $\tilde{z}_i = b_1 x_i + b_2 x_i^2$ , alors on a :

$$RMSE_y = a_2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}, \quad RMSE_z = b_2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (3-5)$$

Si de plus on choisit les paramètres  $a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$  de sorte qu'ils vérifient  $b_1 \ll b_2 \max(x_i) \ll a_2 \max(x_i) \ll a_1$ , on se retrouve dans la situation où i) d'une part  $RMSE_y \gg RMSE_z$ , ce qui veut dire que la déviation de  $\tilde{y}_i$  par rapport à la loi linéaire  $y_i$  est plus importante que celle de  $\tilde{z}_i$  par rapport à la loi linéaire  $z_i$ ; d'autre part, on a  $\tilde{y}_i = a_1 x_i + a_2 x_i^2 \approx a_1 x_i$  et  $\tilde{z}_i = b_1 x_i + b_2 x_i^2 \approx b_2 x_i^2$ , ce qui veut dire que  $\tilde{y}_i$  est presque linéaire et que  $\tilde{z}_i$  est presque quadratique. Ces déductions contradictoires montrent que la RMSE n'est pas la bonne erreur à considérer, car elle mesure une distance absolue entre les données « mesurées » et celles « modélisées ».

Une deuxième erreur pourrait être proposée. Cette erreur, nommée NRMSE, consiste à normaliser la RMSE par  $y_{max} - y_{min}$ .

$$Ne = \frac{RMSE}{y_{max} - y_{min}} \quad (3-6)$$

Cette erreur souffre du fait qu'elle n'est pas bornée, rendant difficile de formuler un critère d'acceptabilité.

L'erreur suivante (bornée : comprise entre 0 et 1) a été également testée.

$$e' = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\tilde{y}_i - y_i}{\max|\tilde{y}_i - y_i|} \right)^2} \quad (3-7)$$

Cette erreur n'est pas constante car elle vaut 1 si  $\tilde{y}_i - y_i = c$ , où  $c$  est une constante non nulle qu'on peut choisir aussi petite qu'on veut.

On propose donc d'utiliser l'erreur définie par la formule suivante :

$$\epsilon = \frac{1}{\max(\tilde{I}, I)} \int_{x_i} |\tilde{y}_i - y_i| dx_i, \quad \text{avec : } \tilde{I} = \int_{x_i} |\tilde{y}_i| dx_i \quad \text{et} \quad I = \int_{x_i} |y_i| dx_i \quad (3-8)$$

Cette erreur est comprise entre 0 et 1 et permet d'estimer les déviations des données  $\tilde{y}_i$  par rapport au modèle  $y_i$ . Elle est nulle si le modèle épouse parfaitement les données. Elle est égale à 1 si  $y_i = 0$  ou  $\tilde{y}_i = 0$  (ce qui n'a pas un grand sens si les données ou le modèle sont nuls partout).

On montrera avec des exemples pourquoi le choix d'une erreur pertinente est important pour le PAEI.

Dans la suite, on étudie la validité de l'hypothèse simplificatrice qu'on a faite ( $\Delta v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f, \theta) = a_i^M(f, \theta)\sigma_i$ ). Lorsqu'elle est valide, on essaie de développer les méthodes d'inversion permettant de remonter à  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$  en fonction des variations de vitesses / temps de vol.

## II. Problème acoustoélastique inverse

Dans cette section, le cas d'une contrainte uniforme dans l'épaisseur est traité.

La plaque considérée pour étudier la validité de l'hypothèse décrite dans l'introduction et développer les méthodes d'inversion, reste celle du chapitre précédent (Al 6061-T6) dont la densité et l'épaisseur dans l'état *naturel* sont  $\rho_0 = 2704$  kg et  $d_0 = 5$  mm. Le nombre d'éléments utilisés pour discrétiser la section dans la méthode SAFE-AE est également le même (10 éléments). On rappelle ici les constantes de Lamé et celles de Murnaghan du matériau.

**Tableau II** : constantes de Lamé et Murnaghan de l'Al 6061-T6 à 25°C (Asay & Guenther [90])

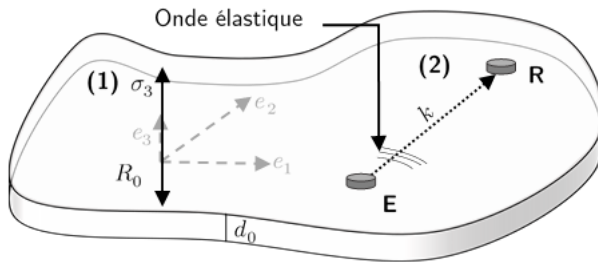
Constante	$\lambda$	$\mu$	$l$	$m$	$n$
Valeur (GPa)	56.35	27.5	-281.5	-339	-416

On traite tout d'abord deux cas uniaxiaux :  $\sigma = \sigma_3$ , puis  $\sigma = \sigma_1$ . Dans chacun des cas, on propose une formule analytique inversible représentative de l'EAE, et on cherche la validité de la formule proposée en calculant l'erreur  $\epsilon$  entre ce que fournit le modèle acoustoélastique (MAE) et ce que fournit la formule analytique. Ensuite on développe les méthodes d'inversion en fonction des TdV.

Seuls les modes A0, SH0, S0, A1 et SH1 sont étudiés ; nous nous arrêtons donc avant la fréquence de coupure de S1. Le choix de cet intervalle de fréquence est motivé d'une part par l'idée que le problème à inverser contient quatre inconnues  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$  ce qui suggère que si le système formé par les quatre inconnues est linéaire, alors il faut au moins quatre équations indépendantes, formées à l'aide des résultats obtenus pour quatre modes. Cependant, on montrera que ce système est non-linéaire et que seuls deux modes suffisent à le résoudre. D'autre part – comme écrit dans l'introduction – les méthodes d'inversion à développer reposent sur la capacité à estimer les TdV des ondes s'étant propagées. Ceci est facile si les écarts de vitesse entre modes sont grands, ce qui est vrai pour les modes fondamentaux dans l'intervalle de fréquence choisi.

### A. Contrainte uniaxiale normale

Ce cas d'une contrainte uniaxiale normale est le plus simple à traiter. Du fait de la symétrie du problème (chargement axisymétrique), la propagation des ondes élastiques guidées (par le plan de la plaque) est isotrope. Le PAEI à résoudre est illustré par la figure suivante.



**Fig. 3-2** : (1) Une plaque d'épaisseur  $d_0$  soumise à un chargement ( $\sigma_3$ ) normal et homogène partout dans la plaque. (2) Deux capteurs : un émetteur et un récepteur utilisés pour mesurer la valeur de cette contrainte *inconnue*.

L'état de contrainte est homogène dans la plaque et inconnu. L'objectif est donc de retrouver la valeur de la contrainte (sa direction étant celle de  $e_3$ , donc connue), en fonction des TdV entre l'émetteur (**E**) et le récepteur (**R**). On cherche une formule analytique inversible permettant de relier la contrainte ( $\sigma_3$ ) à la variation de vitesse des modes guidés.

Dans l'étude paramétrique réalisée, on a fait varier la fréquence  $f$  entre 10 kHz et 500 kHz avec un pas de 5 kHz et la contrainte  $\sigma_3$  entre  $-200$  MPa et  $+200$  MPa avec un pas de 20 MPa. Pour chaque couple  $(f, \sigma_3)$ , les variations relatives de vitesses (groupe et phase) des modes S0, A0, SH0, A1 et SH1 par rapport à l'état non contraint sont calculées.

La variation relative de vitesse en fonction de la contrainte  $\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f, \theta)$  est supposée pouvoir être écrite sous la forme  $A_n^M(f)\sigma_3$  (l'indice  $n$  indique la normale), l'absence de  $\theta$  dans la formule venant de l'isotropie dans ce cas de la propagation des ondes élastiques. Pour chaque fréquence  $f$ , les paramètres

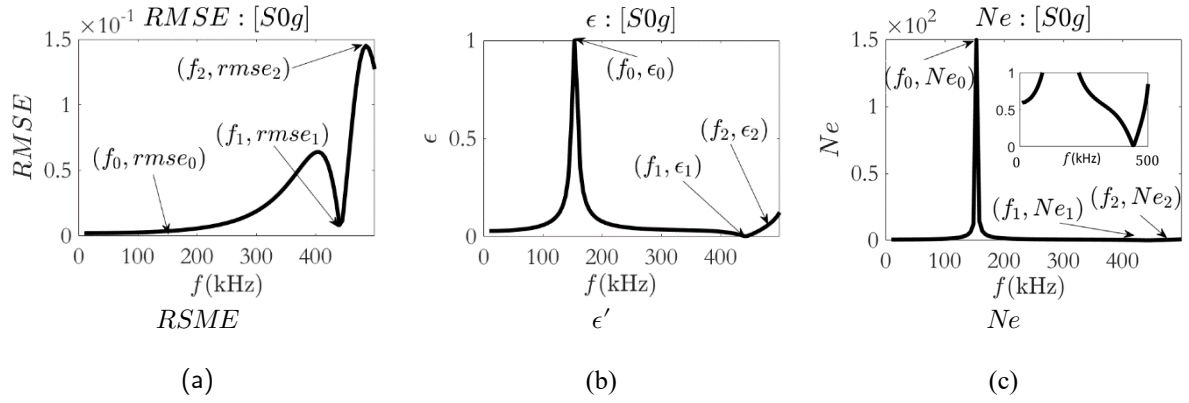


$A_n^M$  appelés dorénavant les *coefficients<sup>1</sup> acoustoélastique* (CAE) sont obtenus et les trois erreurs RMSE,  $\epsilon$  et  $Ne$  sont calculées.

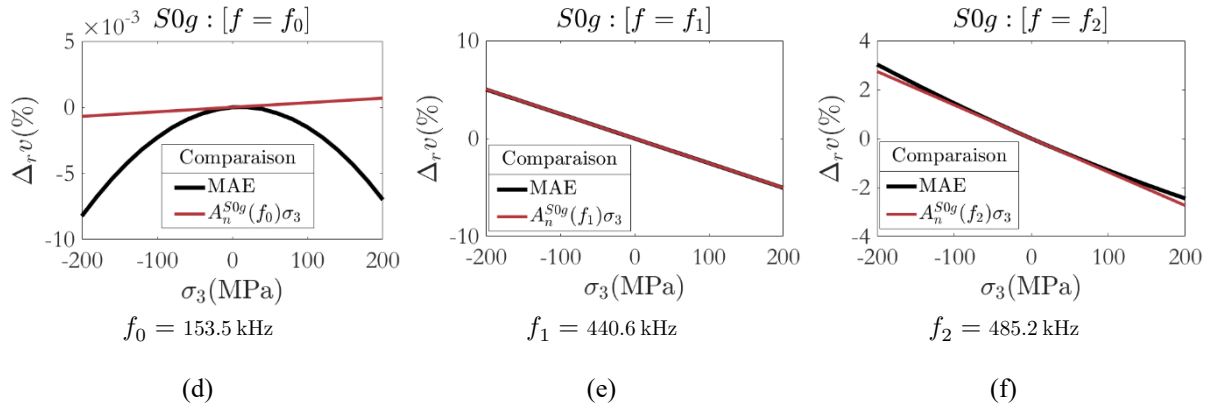
### 1. Comparaison des erreurs

Dans ce paragraphe on étudie le sens des trois erreurs données dans l'introduction (RMSE,  $\epsilon$  et  $Ne$ ). Et on met l'accent sur le fait qu'un bon choix de l'erreur est essentiel pour l'identification d'un critère d'acceptabilité des formules analytiques développées, et par conséquent dans la validité des méthodes d'inversion (qui sont basées sur ces formules).

Ces trois erreurs ont été calculées dans l'étude paramétrique décrite précédemment, on donne ici leurs valeurs (en fonction de la fréquence  $f$ ) pour la vitesse de groupe du mode S0



Les trois erreurs en fonction de la fréquence  $f$



Les variations relatives de vitesses en fonction de  $\sigma_3$

**Fig. 3-3** : 1<sup>ère</sup> ligne [(a), (b), et (c)], les trois erreurs (RMSE,  $\epsilon$  et  $Ne$ ) en fonction de la fréquence  $f$  pour la vitesse de groupe du mode S0. 2<sup>nd</sup>e ligne [(d), (e), et (f)], variations relatives de vitesse en fonction de la contrainte  $\sigma_3$ ; en noir, les variations données par le modèle acoustoélastique (MAE), en rouge, celles estimées en utilisant la formule linéaire :  $\Delta v_r(\sigma_3, f) = A_n^M(f)\sigma_3$ . La variation relative de vitesse est donnée à trois fréquences particulières :  $f_0, f_1$  et  $f_2$ .

Dans la figure ci-dessus, on donne les trois erreurs en fonction de la fréquence [(a), (b) et (c)] et les variations relatives de vitesse de groupe du mode S0 pour trois fréquences particulières :  $f_0, f_1$  et  $f_2$  [(d), (e) et (f)]. L'erreur doit permettre d'estimer quand la déviation de la formule analytique par rapport à ce que donne le modèle acoustoélastique (MAE) est importante. Le choix de trois fréquences permet de tester la consistance des différentes erreurs.

<sup>1</sup> Dans le cas des ondes de volume, ces coefficients seraient appelés les « constantes acoustoélastiques », cependant pour les ondes de Lamb et SH, ils dépendent de la fréquence, d'où le choix de les appeler « coefficients acoustoélastiques ».

- **RMSE**, Fig. 3.3-(a) est la plus faible pour  $f = f_0$  et la plus élevée pour  $f = f_2$ . On s'attend à ce que la variation de vitesses calculées par le MAE par rapport à celles calculées par la formule analytique soient le plus faible pour  $f = f_0$  et la plus forte pour  $f = f_2$ . Ce n'est cependant pas ce que donne la simulation. Dans Fig. 3.3-(d) et Fig. 3.3-(f) on peut voir que la formule analytique décrit mieux les résultats du MAE pour  $f = f_2$  avec une petite déviation, alors qu'à  $f = f_0$  on remarque qu'il est impossible de décrire la variation de vitesse par une loi linéaire.
- $\epsilon$ , Fig. 3.3 (b) est maximale pour  $f = f_0$  où elle vaut  $\epsilon_0 \approx 1$ , et minimale pour  $f = f_1$  où elle vaut  $\epsilon_1 \approx 0$ . Elle vaut  $\epsilon_2 = 0.07$  pour  $f = f_2$ . On s'attend à ce que les résultats du MAE soient parfaitement linéaires à  $f_1$  et très non-linéaire à  $f_0$ , et que les écarts à la non-linéarité soient modérés mais visibles à  $f_2$ . Les résultats Fig. 3.3-[(d), (e), et (f)] y sont conformes. Les fréquences  $f_0$  et  $f_1$  ont été choisies pour étudier le comportement pour les valeurs extrêmes de  $\epsilon$  (0 et 1) ; d'une part l'erreur  $\epsilon$  est consistante<sup>1</sup> même dans le cas où  $\Delta_r v$  est très faible. Cette faible valeur de  $\Delta_r v$  engendre une faible RSME ce qui laisse penser que le comportement est linéaire, ce qui n'est pas le cas.
- $Ne$ , Fig. 3.3- (c) donne des résultats constants : elle est minimale (resp. maximale) quand le MAE et la formule analytique coïncident (resp. sont les plus dissemblables). Contrairement à  $\epsilon$ , elle n'est pas bornée, ce qui empêche de l'utiliser pour formuler un critère d'acceptabilité.

Pour ne pas encombrer le corps du chapitre l'erreur  $\epsilon'$  est donnée en annexe (An-Ch3-Fig. 1 [p. 136]).

En conclusion, parmi les quatre erreurs proposées, seule  $\epsilon$  est capable de donner une information pertinente concernant la capacité des formules analytiques à représenter les résultats du MAE. Cette erreur est utilisée dans le paragraphe suivant pour définir un critère d'acceptabilité des formules.

## 2. Critère d'acceptabilité

Une fois l'erreur choisie, on peut définir un critère d'acceptabilité en se basant sur un seuil que cette erreur ne doit pas dépasser. Ce seuil permet de définir les fréquences auxquelles on peut considérer les formules analytiques comme valides, et donc développer des méthodes d'inversion à partir de ces formules valables dans ces plages de fréquence.

Le choix de ce seuil est défini par la précision des résultats que nous voulons obtenir. Si l'on prend par exemple  $\epsilon = 0.07$  ( $f = f_2$ ) (Fig. 3.3-(b)) comme seuil à ne pas dépasser, alors la précision de nos résultats pourrait être estimée à partir de la Fig. 3.3-(f). Sur cette figure, on peut analyser que si la contrainte (inconnue) à trouver est située entre  $-100$  et  $100$  MPa, alors l'erreur commise est presque nulle. En revanche, dans le cas où elle est proche de  $\pm 200$  MPa, la différence entre le MAE et la formule analytique ( $MAE - A_n^{S0}(f_2)\sigma_3$ ) est de l'ordre de 0.29, ce qui revient à une surestimation de la contrainte  $+10$  MPa =  $(MAE - A_n^{S0}(f_2)\sigma_3)/A_n^{S0}(f_2)$ . Cette erreur (de 5%) sur l'estimation de la contrainte (auxquelles viennent se rajouter – constructivement ou destructivement – les erreurs provenant de la méthode choisie pour estimer le TdV) pourraient être acceptées dans certaines applications industrielles.

Dans ce qui suit, le critère d'acceptabilité des formules est donné par le seuil (valeur maximale) de l'erreur  $\epsilon = \epsilon_s$ . En pratique, nous ne fixons pas cette valeur : cela fixerait l'erreur sur l'estimation de la contrainte qui devra être choisie au cas par cas pour l'application industrielle visée.

Les plages de fréquence admissibles dans lesquelles on peut exciter l'émetteur (si  $\epsilon_s = 0.07$ ), pour ce mode sont :  $f \in [10, 100] \cup [200, 480]$  kHz. Les plages de fréquence admissibles dépendent des modes, comme on peut le voir dans l'annexe (An-Ch3-Fig. 2 [p. 137]), où on donne l'erreur  $\epsilon$  pour les modes A0, SH0, S0, A1 et SH1.

Dans ces plages on peut écrire :

$$\Delta_r v^M(\sigma_3, f) = A_n^M(f)\sigma_3 \quad (3-9)$$

Dans le paragraphe suivant on s'intéresse à la variation des  $A_n^M$  en fonction de la fréquence.

<sup>1</sup> Elle permet de détecter là où les données dévient du modèle, et qu'elle n'est pas affectée par les valeurs des données (contrairement au RMSE)

### 3. Coefficients acoustoélastiques $A_n^M$

Pour aboutir à la méthode d'inversion de la contrainte, une première étape qui consiste à définir un critère d'acceptabilité des formules est faite. La deuxième étape est d'étudier les variations en fonction de la fréquence des coefficients acoustoélastiques, pour choisir le(s) mode(s) et la(es) fréquence(s) optimaux que l'émetteur doit exciter. On donne ci-dessous les  $A_n^M$  pour les cinq modes étudiés.

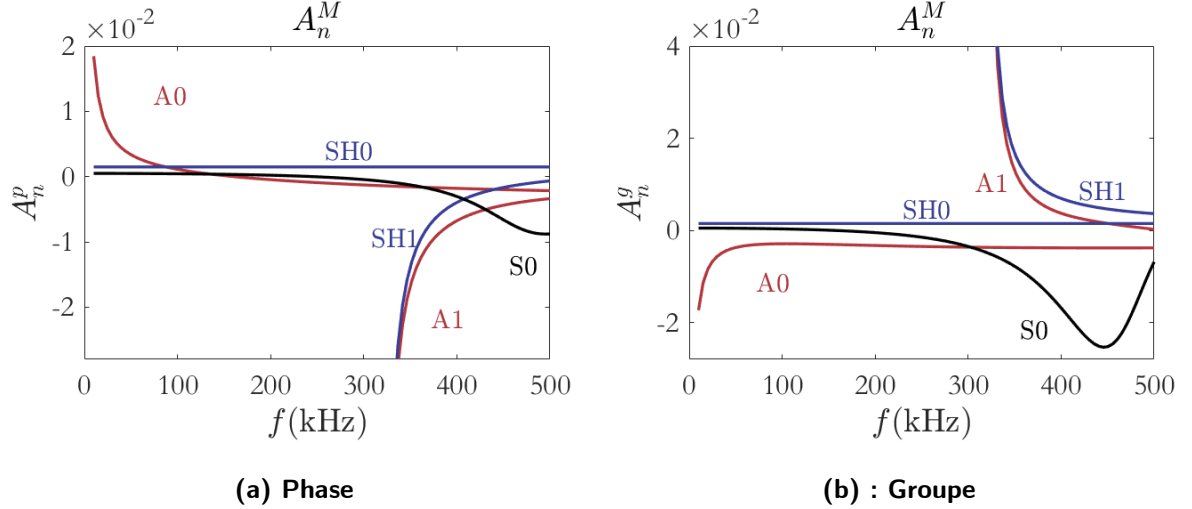


Fig. 3-4 : Les coefficients acoustoélastiques (CAE), des modes A0, SH, S0, A1 et SH1, en fonction de la fréquence.

Dans la figure ci-dessus, les coefficients acoustoélastiques (CAE)  $A_n^M$  sont tracés en fonction de la fréquence, exprimés en  $\%/MPa$  (*i.e.* si  $A_n^M = 0.01 \Rightarrow si \sigma_3 = 200 MPa$ , alors la variation de vitesse par rapport à l'état non-contraint est de 2%). Une vue d'ensemble des  $A_n^M$  montre une ressemblance entre la dispersion de ces coefficients et celle de leurs modes correspondants (voir les courbes de dispersion dans le chapitre précédent Sec. III-B [p. 55]). Cette ressemblance cependant ne peut être considérée que d'une manière qualitative, et ne permet pas de définir des plages de fréquences *a priori* (basées sur la dispersion des modes), dans lesquelles on peut choisir le signal d'excitation de la source.

Pour identifier les fréquences de l'excitation de l'émetteur pour lesquelles on peut garantir une meilleure inversion de la contrainte, on pose les critères suivants :

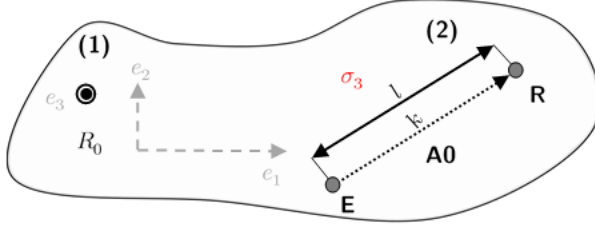
- L'erreur  $\epsilon$  doit être inférieure au seuil  $\epsilon_s$ , ce qui permet d'avoir une formule analytique.
- Les CAE doivent être assez importants pour avoir une variation de TdV mesurable.

Un troisième critère portant sur la dispersion de(s) mode(s) utilisé(s) dans la méthode d'inversion et sur celle du CAE correspondant, pourrait être rajouté, permettant de choisir quelle méthode de mesure de TdV doit être utilisée. Dans le cas où le mode utilisé est fortement dispersif alors que le CAE correspondant ne l'est pas, une méthode de pré-compensation de la dispersion (voir Huthwaite [103]), suivie d'une mesure de la corrélation entre le signal émis et le signal mesuré, pourrait être employée. Dans le cas où le mode et le CAE correspondant sont tous deux fortement dispersifs, une pré-compensation *intelligente* (voir Druet [32]) pourrait être utilisée pour pré-compenser les deux dispersions : celle du mode et celle du défaut (dans notre cas, le défaut est la contrainte et la dispersion est donnée par celle des CAE). Si cela est possible, il vaut mieux se situer dans plage de fréquence où le mode et le CAE correspondant sont les moins dispersifs.

D'après ces critères, dans le cas d'une contrainte uniaxiale normale, le mode A0 constitue le meilleur choix :  $\epsilon$  très faible [voir l'annexe (An-Ch3-Fig. 2 [p. 137])], le CAE correspondant est peu dispersif et suffisamment grand ( $\approx 0.7\%$  de variation de vitesse pour 200 MPa) pour induire une variation de TdV mesurable.

#### 4. Méthode d'inversion

Le cas d'une contrainte uniaxiale normale représente le cas le plus simple à traiter, du fait qu'il n'y a qu'une seule inconnue. Pour remonter à la valeur de la contrainte  $\sigma_3$  (inconnue), il suffit d'inverser la relation linéaire  $\Delta_r v^M(f, \sigma_3) = A_n^M(f) \sigma_3$ . D'après les critères donnés dans le paragraphe précédent, le meilleur choix serait d'utiliser le mode A0. On donne dans la figure ci-dessous une illustration :



**Fig. 3-5:** La plaque avec un état de contrainte uniaxiale normale  $\sigma_3$  inconnu. Un émetteur (E) et un récepteur (R) sont utilisés pour émettre et recevoir le mode A0. La distance entre (E) et (R) est indépendante de la contrainte  $\sigma_3$ , et est égale à  $l$ .

Le problème d'inversion du cas uniaxiale normale est assimilable à celui de la détermination de l'épaisseur  $d$  d'une plaque dont on connaît les propriétés élastiques. Ce dernier se résout en choisissant un mode *dispersif* et une fréquence centrale  $f_c$  du signal d'excitation de l'émetteur. Il faut alors mesurer le TdV pris par l'onde entre l'émetteur et le récepteur, duquel déduire la vitesse du paquet d'onde, à cette fréquence centrale. À partir de la courbe de dispersion de ce mode calculée pour une épaisseur  $d_0$  connue, récupérer la fréquence  $f_0$  donnant la même vitesse que celle mesurée. L'épaisseur  $d$  se déduit par  $d = f_0 d_0 / f_c$ .

La démarche suivie pour trouver la valeur de la contrainte  $\sigma_3$  est similaire :

1. Une fréquence centrale du signal de l'émetteur est choisie (cette fréquence se situe dans les plages tolérées par les critères donnés dans le paragraphe précédent).
2. Le temps de vol  $T$  du mode A0 est mesuré dans le cas contraint.
3. La vitesse du paquet d'onde est estimée à la fréquence centrale.
4. Après usage de la formule  $\Delta_r v^{A0}(f_c, \sigma_3) = A_n^{A0}(f_c) \sigma_3$ , la contrainte  $\sigma_3$  est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_3 = \frac{100}{A_n^{A0}} \left( \frac{l - v_0^{A0} T}{v_0^{A0} T} \right) \quad (3-10)$$

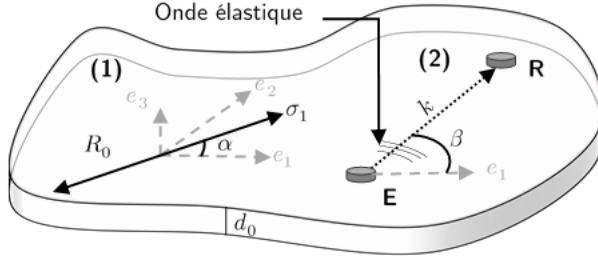
$v_0^{A0}$ , vitesse du mode A0 dans l'état non-contraint à la fréquence centrale  $f_c$ .

#### 5. Conclusion

Dans cette sous-section, une erreur parmi les quatre proposées a été choisie pour estimer les déviations des formules analytiques par rapport aux résultats du MAE. Un critère d'acceptabilité des formules a été défini à partir de cette erreur. D'autres critères ont été donnés dans l'objectif de sélectionner le(s) mode(s) et les plages de fréquence du signal de l'émetteur, permettant d'avoir la meilleure estimation de la contrainte. Finalement, une méthode d'inversion respectant les différents critères et utilisant les formules, a été développée. Cette méthode donne la composante  $\sigma_3$ , en fonction du TdV dans l'état contraint et de la vitesse dans l'état non-contraint.

#### B. Contrainte uniaxiale dans le plan

La présence d'une contrainte uniaxiale dans le plan de la plaque rend le matériau élastiquement anisotrope (transverse isotrope). Cette anisotropie élastique engendre une anisotropie acoustique pour les ondes guidées par le plan de la plaque. Le problème acoustoélastique inverse (PAEI) à résoudre consiste à trouver la valeur et la direction de la contrainte uniaxiale. Il est illustré par la figure suivante :



**Fig. 3-6:** Une plaque qui présente un état de contrainte uniaxial homogène. La valeur  $\sigma_1$  et la direction  $\alpha$  de la contrainte sont inconnues. L'objectif est d'utiliser des émetteurs et récepteurs pour les déterminer. Le problème est acoustiquement anisotrope et la propagation de l'onde (vecteur d'onde  $k$ ) est repérée par l'angle  $\beta$ .

Dans le cas où la direction est connue, ce problème a été résolu par plusieurs auteurs en utilisant les ondes de volume ou de Rayleigh (voir Réf. [24,28,46,52,66,70,91]). Dans le cas des ondes de Lamb Shi *et al* [71] ont montré que la variation de vitesse de phase mesurée du mode S0 en fonction de l'angle  $\theta$  (entre la direction de propagation et celle de la contrainte) pour une fréquence  $f = 400$  kHz et une contrainte uniaxiale  $\sigma_1 = 92$  MPa, pouvait être représentée par la formule analytique suivante :

$$\Delta v^{S0} = \sigma_1(K_1 \cos^2(\theta) + K_2 \sin^2(\theta)) \quad (3-11)$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes.

Cette formule est similaire à celles des ondes de volume pour lesquelles la théorie d'acoustoélasticité permet d'obtenir des formules analytiques (ce qui n'est pas le cas pour les ondes de Lamb et SH).

Shi *et al* [71] ont fait usage de cette formule pour une fréquence  $f = 400$  kHz. Cependant, elle dépend de la fréquence et dans la Fig. 3.7 (ci-après), on donne des résultats qui montrent qu'en fonction de la fréquence, des termes supplémentaires doivent être ajoutés à cette formule pour qu'elle puisse décrire les variations de vitesse.

Dans cette figure, la plaque est soumise à un chargement uniaxial  $\sigma_1 = 250$  MPa. Les variations relatives de vitesses de phase et de groupe du mode S0 sont calculées par le MAE en fonction de la direction, à deux fréquences 400 et 575 kHz.

S'inspirant du fait que l'expression des variations de vitesses des ondes de volume fait apparaître des fonctions *trigonométriques* usuelles, et que les variations de vitesses des ondes de Lamb peuvent également suivre ces mêmes fonctions, on a choisi les trois formules suivantes pour reproduire les résultats du MAE :

$$F_1 = (A_p + B_1 \cos(2\theta))\sigma_1 \quad (3-12)$$

$$F_2 = (A_p + B_1 \cos(2\theta) + B_2 \cos(4\theta))\sigma_1 \quad (3-13)$$

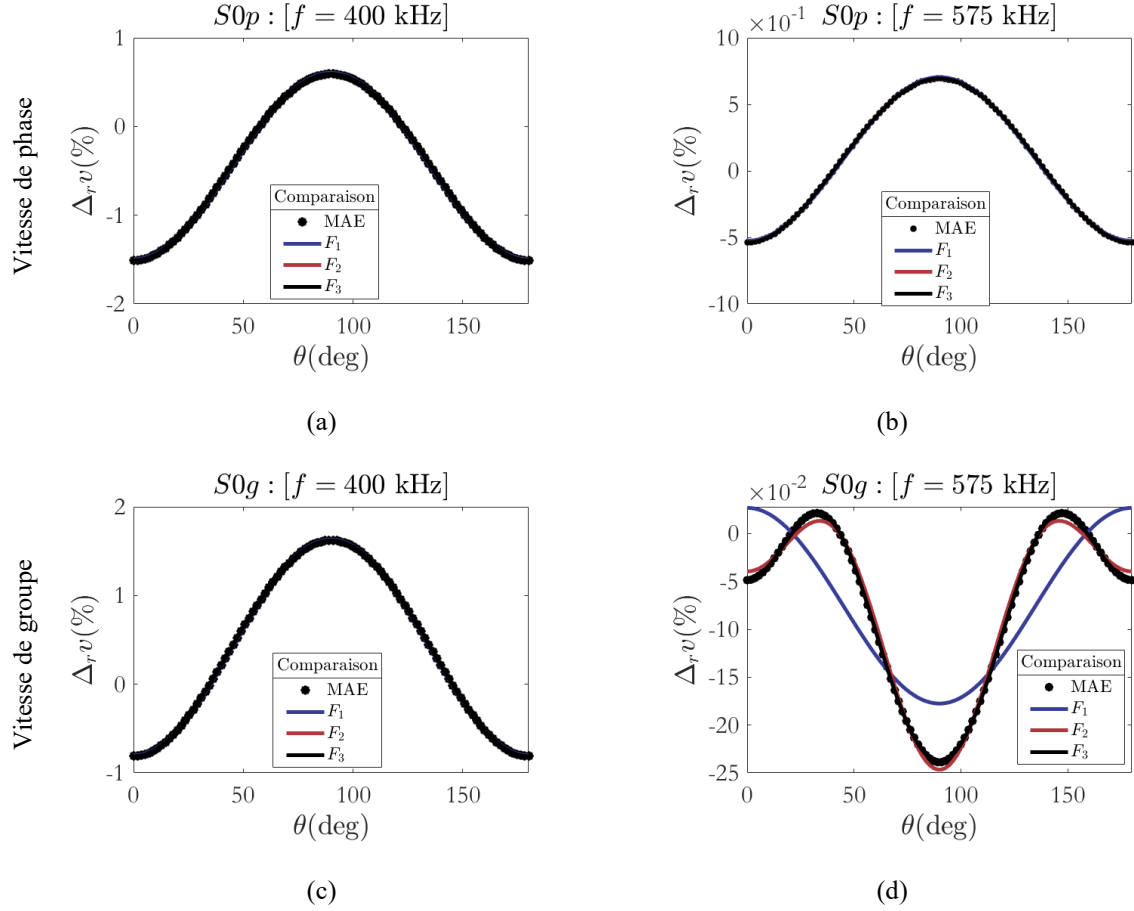
$$F_3 = (A_p + B_1 \cos(2\theta) + B_2 \cos(4\theta) + B_3 \cos(6\theta))\sigma_1 \quad (3-14)$$

$A_p, B_1, B_2$  et  $B_3$  sont les coefficients acoustoélastiques (CAE) qui dépendent de la nature de vitesse (groupe ou phase) et de la fréquence.

La formule  $F_1$  est identique à celle de Shi *et al* [71] (même si écrite différemment) et est similaire à celle des ondes de volume (voir King & Fortunko [25]). Les deux autres formules  $F_2$  et  $F_3$  sont proposées pour mieux représenter l'anisotropie acoustique. Le choix de ces formules (en  $\cos(2n\theta)$ ) vient du fait que la formule qui donne la vitesse au carré de l'onde de cisaillement horizontale dans la Réf. [25], est écrite en fonction de  $\cos^2(\theta)$  et  $\sin^2(\theta)$ . En prenant donc la racine pour trouver la vitesse et en faisant un développement limité à un ordre  $n$  quelconque on peut remarquer que la formule de la vitesse de l'onde de cisaillement contient des termes en  $\cos(2n\theta)$ .

Les variations de vitesses de groupe et de phase du mode S0 à la fréquence  $f = 400$  kHz Fig. 3.7-[(a) et (c)] montrent que le MAE est bien représenté par la formule  $F_1$ . Cela reste vrai pour la vitesse de phase à la fréquence  $f = 575$  kHz. En revanche, pour la vitesse de groupe, la déviation de  $F_1$  par rapport au

MAE est telle qu'on ne peut pas la considérer acceptable. Si on regarde maintenant la déviation de  $F_2$ , on voit qu'elle est petite et que celle de  $F_3$  est quasiment nulle Fig. 3.7-(d).



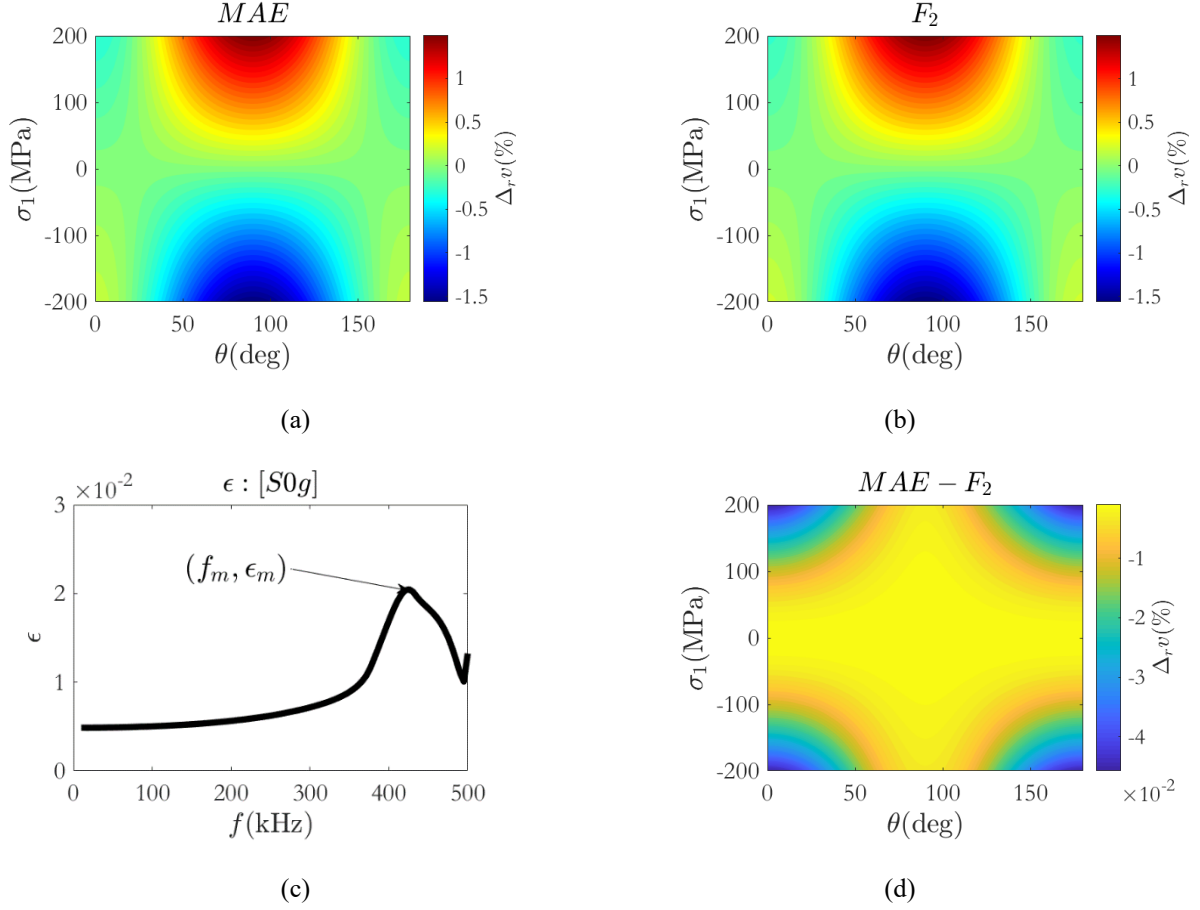
**Fig. 3-7** : (les marqueurs noirs) : Variations relatives de vitesse (groupe et phase) du mode S0 en fonction de la direction à deux fréquences, dans le cas d'une contrainte uniaxiale de 250 MPa. Les traits continus sont les formules analytiques, « fitants » le MAE.

Il importe de rechercher un compromis entre le nombre de CAE devant être déterminés et la précision de la formule. Dans l'étude paramétrique qui a été menée afin de développer une méthode d'inversion, nous avons choisi d'utiliser la formule  $F_2$ . Dans cette étude, la fréquence  $f$  varie entre 10 kHz et 500 kHz. La direction de propagation  $\theta$  entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , la contrainte uniaxiale  $\sigma_1$  (dans la direction  $\theta = 0^\circ$ ) entre  $-200$  MPa et  $+200$  MPa. À chaque fréquence, l'erreur  $\epsilon$  et les CAE ( $A_p^M$ ,  $B_1^M$  et  $B_2^M$  des cinq modes étudiés (A0, SH0, S0, A1 et SH1), sont calculés. On donne dans le paragraphe suivant les résultats pour l'erreur.

### 1. L'erreur $\epsilon$

Pour estimer la déviation entre la formule et le MAE, on donne dans la Fig. 2.8, les deux variations relatives de vitesses en fonction de la direction et de la contrainte, calculées par le MAE (Fig. 2.8-(a)) et par la formule  $F_2$  (Fig. 2.8-(b)). Ces deux variations correspondent à une  $f_m = 421$  kHz où l'erreur  $\epsilon$  est maximale ( $\epsilon_m = 0.02$ ). On remarque que l'erreur  $\epsilon$  est faible à basse fréquence (Fig. 2.8-(c)) et importante dans la plage de fréquence 370 – 500 kHz, qui correspond également à la plage où la dispersion du mode S0 est importante. La Fig. 2.8-(c) montre la différence entre le MAE et la formule  $F_2$ . Cette différence (absolue) est cent fois plus petite que la variation relative de vitesse ; ainsi, même pour la valeur maximale de l'erreur, la déviation de la formule  $F_2$  par rapport au MAE reste très faible. L'annexe (An-Ch3-Fig. 3 [p. 138]) présente l'erreur  $\epsilon$  pour les autres modes.

Sur la Fig. 2.8-(d) apparaît que la déviation de  $F_2$  par rapport au MAE est importante là où la contrainte est grande (en valeur absolue), comme déjà observé dans le cas d'une contrainte uniaxiale hors plan (sous-section précédente). Cela s'explique par le fait que pour des valeurs élevées de la contrainte, les termes d'ordre supérieur du développement de Taylor (*i.e.*  $A_1^{(l)}\sigma_1^l$ ) décrivant l'effet de l'amplitude de la contrainte, contribuent de manière significative aux variations de vitesse.



**Fig. 3-8** : Variations relatives de vitesse de groupe du mode S0 à une fréquence  $f_m = 421$  kHz : (a) calculée en utilisant le MAE, et (b) en utilisant la formule  $F_2$ . (c) Erreur  $\epsilon$  en fonction de la fréquence  $\epsilon_m = 0.02$ . (d) Différence entre MAE et  $F_2$ .

Cela n'explique pas entièrement le fait qu'autour de la direction  $90^\circ$ , la déviation est presque nulle, même pour  $\sigma_1 = \pm 200$  MPa (Fig. 2.8-(d)) ; ceci suggère que la différence entre le MAE et  $F_2$  provient également de la direction de la contrainte et pas seulement de son amplitude, sa norme venant accentuer la différence.

Avec ces résultats obtenus pour une erreur de  $\epsilon = 0.02$ , on peut fixer un seuil  $\epsilon_s$  que cette erreur ne doit pas dépasser, servant de critère d'acceptabilité de la formule  $F_2$ . Ce seuil permet d'identifier les plages de fréquences dans lesquelles on peut travailler ( $f \in \text{plage} \iff \epsilon(f) < \epsilon_s$ ).

Dans le paragraphe suivant on étudie la variation des coefficients acoustoélastiques en fonction de la fréquence.

## 2. Coefficients acoustoélastiques (CAE) : $A_p^M$ , $B_1^M$ et $B_2^M$ .

La Fig. 3.9 montre la variation des CAE avec la fréquence. Les coefficients  $B_2^M$  (décrivant l'anisotropie en  $\cos(4\theta)$ ) sont presque nuls pour les modes fondamentaux dans la plage  $f \in [10, 500]$  kHz, ce qui n'était pas le cas à la fréquence  $f = 575$  kHz (voir la Fig. 3.7-(d)). Ce constat va être utilisé lors du développement

des méthodes d'inversion. Pour les modes d'ordre supérieur, hormis la fréquence de coupure, les CAE sont presque nuls.

Pour le mode A0 (Fig. 3.9-(d)) le CAE  $A_p^{A0g}$  est presque nul dans la plage  $f \in [100, 500]$  kHz et fortement dispersif dans la plage  $f \in [10, 100]$  kHz.  $B_1^{A0g}$  a un comportement similaire à une constante près (dans la plage  $f = [100, 500]$  kHz on a  $B_1^{A0g} \approx 1.7 \times 10^{-3}$ ). En se souvenant des critères à respecter pour une meilleure estimation de la contrainte (voir la sous-section précédente, paragraphe [p. 113]), l'usage de ce mode pour développer des méthodes d'inversion dans la plage  $f = [100, 500]$  kHz est possible, d'autant plus que l'erreur  $\epsilon$  correspondante est faible (voir annexe An-Ch3-Fig. 3 [p. 138]).

Pour le mode SH0 on a  $|B_1^{SH0}| < |A_p^{SH0}|$ , ce qui veut dire que pour ce mode l'effet de l'amplitude de la contrainte domine sur l'effet de sa direction. Comme ce mode est non-dispersif, que son erreur  $\epsilon$  est faible (voir annexe An-Ch3-Fig. 3 [p. 138]) et que le  $A_p^{SH0}$  est suffisamment grand ( $A_p^{SH0} = -2.7 \times 10^{-3}$ ) pour induire une variation de vitesse mesurable, ce mode est un bon candidat pour l'inversion.

Pour le mode S0, contrairement aux deux autres modes fondamentaux, sur presque toute la plage de fréquences, la différence entre  $A_p^{S0g}$  (l'effet de l'amplitude de la contrainte) et  $B_1^{S0g}$  (l'effet de la direction de la contrainte) est faible. Dans la plage de fréquence  $f \in [10, 300]$  kHz, ce mode est également un bon candidat pour l'inversion : les CAE sont assez grands et peu dispersifs, et l'erreur  $\epsilon$  est faible (voir annexe An-Ch3-Fig. 3 [p. 138]).

Pour les modes d'ordre supérieur, les CAE sont plus dispersifs que pour les modes fondamentaux. Les fréquences étudiées ici sont proches des fréquences de coupure. Il est donc préférable d'utiliser les modes fondamentaux – quand c'est possible – pour l'inversion.

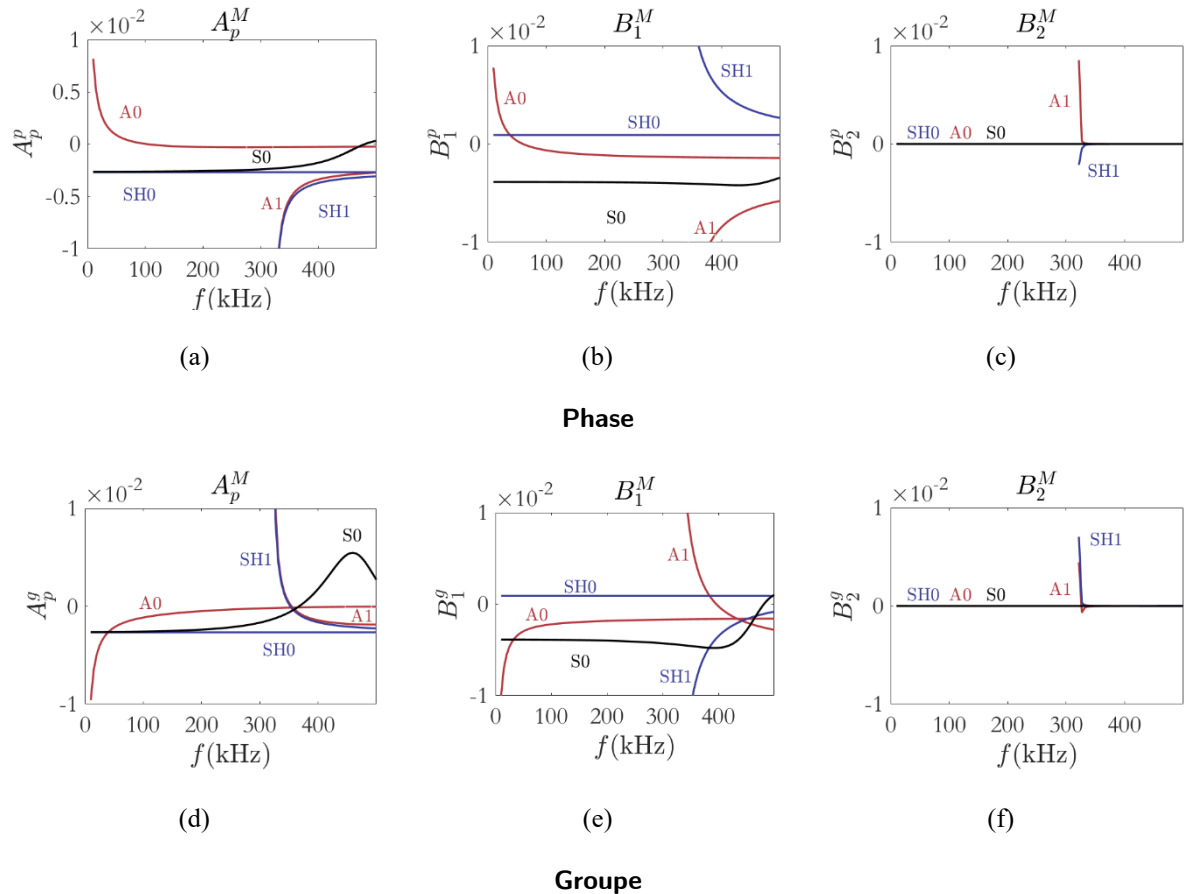


Fig. 3-9 : les CAE en fonction de la fréquence, fités sur la formule  $F_2$



### 3. Méthodes d'inversion

Les méthodes d'inversion développées dans cette sous-section reposent sur les résultats du paragraphe précédent : dans la plage de fréquence  $f \in [10, 500]$  kHz les  $B_2^M$  peuvent être négligés pour les modes fondamentaux. Au lieu d'utiliser la formule  $F_2$  pour développer une méthode d'inversion, on utilisera la formule donc  $F_1$ . Une étude d'erreur entre la formule  $F_1$  et le MAE est donnée dans l'annexe [An-Ch3-Fig. 4](#) [p. 139].

On suppose donc que pour les modes fondamentaux, les variations relatives de vitesse en fonction de la contrainte sont données par la formule  $F_1$ . Les vitesses sont données en fonction de la contrainte, à une fréquence  $f$  (dans la plage  $[10, 500]$  kHz) par l'expression suivante :

$$v^M(\sigma_1, f) = v_0^M(f) + \frac{v_0^M(f)}{100} (A_p^M(f) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))) \sigma_1 \quad (3-15)$$

$v_0^M$  : vitesse du mode  $M$  (fondamental) dans le cas non-contraint,

$\beta$  : angle donnant la direction de propagation de l'onde dans le repère  $R_0$  (voir la [Fig. 3.10](#)),

$\alpha$  : angle donnant la direction de la contrainte dans le repère  $R_0$  (voir la [Fig. 3.10](#)).

Les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Pour  $\alpha$ , cela vient du fait que la contrainte n'est pas affectée d'un sens, donc sa direction n'est pas définie par un angle orienté. La variation de vitesse dans la direction  $\beta$  est égale à celle dans la direction  $\beta + \pi$ .

Le problème inverse consiste donc à trouver l'amplitude de la contrainte  $\sigma_1$  et sa direction  $\alpha$ .

**Remarque :** l'axe de la contrainte est un axe de symétrie du matériau. Ainsi, la variation de vitesse dans une direction  $d_1$  est égale la variation de vitesse de la direction  $d_2$  image de  $d_1$  par la symétrie axiale d'axe la direction de la contrainte – d'où la présence de la fonction  $\cos$  dans l'expression (3-15). Si l'amplitude de la contrainte est connue, une seule mesure donne deux directions possibles de contrainte symétriques par rapport à la direction suivant laquelle la mesure est faite (direction de propagation). Il sera donc nécessaire d'effectuer une mesure supplémentaire pour avoir une *solution unique*.

La résolution du PAEI repose donc sur la formation d'un système de deux équations indépendantes, à partir de la formule (3-15). Trois méthodes ont été développées suivant la façon dont ces deux équations ont été obtenues.

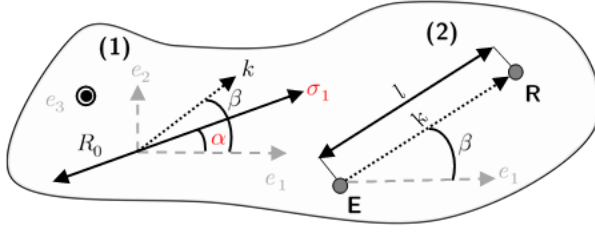
#### i. Inversion multi-Modale (MI-mM)

La méthode la plus intuitive pour résoudre le PAEI, si l'on se réfère à la formule (3-15), est de former un système de  $M$  équations, où  $M$  est le nombre de modes utilisés. Ici, la Méthode d'Inversion multi-Modale repose sur l'utilisation d'un couple de modes pour obtenir l'amplitude et la direction de la contrainte. Ces couples peuvent être (A0, S0), (A0, SH0) ou (S0, SH0). Le choix du couple dépend de l'application. Par exemple, il y a un avantage dans le choix d'un couple qui contient le mode SH0, puisqu'il est non dispersif et que ses CAE le sont aussi, ce qui minimise les erreurs induites par les méthodes de mesure de temps de vol. L'inconvénient vient du fait que les capteurs qui génèrent le mode SH0 ne peuvent pas – en général – générer les modes A0 et S0 : il faudra donc utiliser deux types de capteurs.

L'avantage de l'usage du couple (A0, S0) est le fait que ces deux modes sont en général générés par le même capteur. Cependant ces deux modes et leurs CAE sont dispersifs, ce qui nécessite un traitement supplémentaire pour avoir un temps de vol précis (pré-compensation de la dispersion).

Étant donné que l'expression de la vitesse en fonction de la contrainte est identique pour les trois modes, on fait le choix de résoudre le système d'une manière générique (sans faire le choix du couple de modes).

Le problème inverse est illustré par la figure suivante :



**Fig. 3-10:** Plaque avec contrainte inconnue uniaxiale  $\sigma_1$  dans le plan. Un émetteur (E) et un récepteur (R) sont utilisés pour émettre et recevoir les modes A0, S0, ou SH0. La distance entre (E) et (R) est indépendante de la contrainte  $\sigma_1$ , égale à  $l$ .

On suppose qu'on veut caractériser la contrainte d'une plaque qui présente un état initial de contrainte uniaxiale homogène inconnue, de norme  $\sigma_1$  et de direction  $\alpha$ . Le couple émetteur-récepteur (**E-R**) se trouve sur une ligne qui fait un angle  $\beta$  avec la direction ( $e_1$ ) du repère  $R_0$ . Cet angle décrit la direction de propagation de l'onde élastique.

**Remarque :** la distance entre les capteurs est égale à celle avant l'application de la contrainte. Ceci pourrait être obtenu en utilisant des capteurs sans contact.

Pour trouver ( $\sigma_1$  et  $\alpha$ ) on émet deux modes à la même fréquence centrale  $f_c$  et on mesure le temps de vol de chaque mode entre **E** et **R**. Ces deux TdV sont reliés à la contrainte par :

$$\begin{cases} \frac{l}{T^{(1)}} = v_0^{(1)} + \frac{v_0^{(1)}}{100} (A_p^{(1)} + B_1^{(1)} \cos(2(\beta - \alpha))) \sigma_1 \\ \frac{l}{T^{(2)}} = v_0^{(2)} + \frac{v_0^{(2)}}{100} (A_p^{(2)} + B_1^{(2)} \cos(2(\beta - \alpha))) \sigma_1 \end{cases} \quad (3-16)$$

[ ]<sup>(1),(2)</sup> : indique le mode 1 ou 2 à la fréquence centrale  $f_c$ .

La résolution de ce système donne une unique solution pour l'amplitude de la contrainte  $\sigma_1$  :

$$\sigma_1 = \frac{100l \left( \frac{B_1^{(2)}}{v_0^{(1)} T^{(1)}} - \frac{B_1^{(1)}}{v_0^{(2)} T^{(2)}} \right) - (B_1^{(2)} - B_1^{(1)})}{B_1^{(2)} A_p^{(1)} - B_1^{(1)} A_p^{(2)}} \quad (3-17)$$

Le fait que le dénominateur ne doit pas être très petit (pour ne pas avoir une estimation erronée de la contrainte) impose une contrainte de plus sur le choix des fréquences d'excitation de l'émetteur. Pour éviter que cela arrive, on peut choisir le couple (A0, SH0) ou (A0, S0) puisque dans la plage  $f = [100, 500]$  kHz on a  $A_p^{A0g} \approx 0$ .

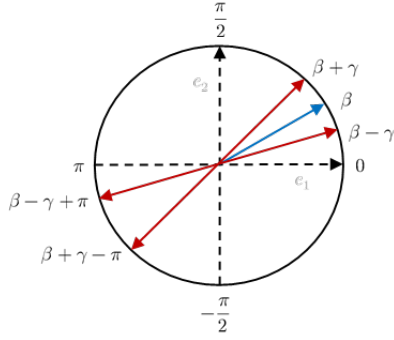
Pour l'angle  $\alpha$  on a quatre solutions possibles :

$$\alpha = \begin{cases} \beta + \gamma \\ \beta + \gamma - \pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta - \gamma \\ \beta - \gamma + \pi \end{cases} \quad (3-18)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{100}{v_0^{(1)} B_1^{(1)} \sigma_1} \left( \frac{l}{T^{(1)}} - v_0^{(1)} \right) - \frac{A_p^{(1)}}{B_1^{(1)}} \right) \quad (3-19)$$

Sans perte de généralité l'angle  $\gamma$  est choisi dans l'intervalle  $[0, \pi/2]$ . La contrainte n'étant pas un vecteur, sa direction n'est pas définie par un angle orienté. Donc parmi les quatre solutions possibles de  $\alpha$ , seules les deux solutions qui sont dans l'intervalle  $[0, \pi]$  sont acceptables. On représente ces directions :



**Fig. 3-11 :** Les directions de la contrainte, dans le cas ou  $\beta - \gamma \in [0, \pi/2]$ .

Dans cet exemple,  $\beta - \gamma \in [0, \pi/2]$  ; les deux directions possibles de la contrainte sont  $\alpha = \beta + \gamma$  ou  $\alpha = \beta - \gamma$ . Dans le cas où  $\beta - \gamma \in [-\pi/2, 0]$ , on aurait  $\alpha = \beta + \gamma$  ou  $\alpha = \beta - \gamma + \pi$ .

Pour trouver la direction de la contrainte, une mesure dans une deuxième direction  $\beta_2$  est nécessaire. Sans perte de généralité on suppose que les deux directions possibles de la contrainte qui sont obtenues par la première mesure sont :

$$(S_1) : \alpha = \begin{cases} \beta + \gamma \\ \beta - \gamma \end{cases} \quad (3-20)$$

Les directions obtenues par la deuxième mesure sont :

$$(S_2) : \alpha = \begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 \\ \beta_2 + \gamma_2 - \pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta_2 - \gamma_2 \\ \beta_2 - \gamma_2 + \pi \end{cases} \quad (3-21)$$

La direction de la contrainte est donc l'intersection de  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .

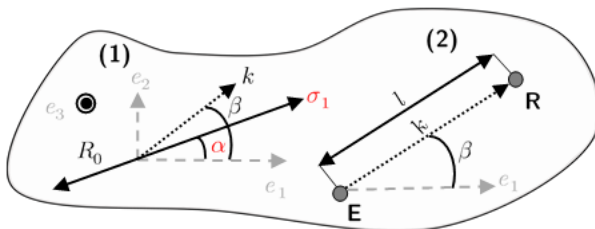
Cependant, il se peut que cette intersection donne deux solutions possibles. Ce cas arrive si :

- $\beta_2 = \beta_1 - \pi/2$  : ce cas est à éviter
- $\gamma = \pi/2$  : Dans ce cas il n'y aura pas besoin d'une deuxième mesure puisque la direction sera donnée par  $\alpha = \beta \pm \pi/2$  (la valeur dans l'intervalle  $[0, \pi]$  est choisie).

**Conclusion :** La Méthode d'Inversion multi-Modale repose sur l'utilisation d'un couple de modes (générés à la même fréquence centrale) pour effectuer d'abord une mesure dans une direction donnée. Cette mesure permet de trouver l'amplitude de la contrainte et deux directions possibles de celle-ci. Pour trouver laquelle est la bonne, une seconde mesure dans une autre direction est faite.

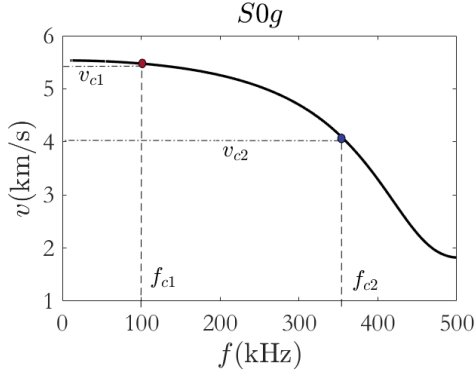
## ii. Inversion multi-Fréquentielles (MI-mF)

Cette méthode repose sur l'utilisation d'un mode unique, généré à deux fréquences centrales distinctes successivement afin de former un système de deux équations indépendantes. La figure suivante illustre le PAEI :



**Fig. 3-12 :** Plaque avec contrainte inconnue uniaxiale  $\sigma_1$  dans le plan. Un émetteur (**E**) et un récepteur (**R**) sont utilisés pour émettre et recevoir un mode unique A0, ou S0. La distance entre (**E**) et (**R**) est indépendante de la contrainte  $\sigma_1$ , égale à  $l$ .

On suppose donc qu'on a deux capteurs (**E** et **R**). Deux mesures sont réalisées successivement, la première où le signal d'excitation du mode unique est centré sur la fréquence  $f_{c1}$ , et sur la fréquence  $f_{c2}$  pour la seconde. Le mode SH0 n'étant pas dispersif ne peut être utilisé. Seuls les modes A0 et S0 sont utilisables. Il est préférable que l'écart entre les deux vitesses (prises aux deux fréquences centrales) soit grand pour une meilleure précision dans la résolution du système d'équations, ce que vérifie bien le mode S0.



**Fig. 3-13** : La vitesse de groupe du mode S0. Deux fréquences centrales  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$  sont choisies de telle sorte que  $|v_{c2} - v_{c1}|$  est suffisamment grand pour une meilleure résolution du système d'équations.

Les TdV pour les deux fréquences centrales sont données par :

$$\begin{cases} \frac{l}{T^{(1)}} = v_{c1} + \frac{v_{c1}}{100} (A_p^{(1)} + B_1^{(1)} \cos(2(\beta - \alpha))) \sigma_1 \\ \frac{l}{T^{(2)}} = v_{c2} + \frac{v_{c2}}{100} (A_p^{(2)} + B_1^{(2)} \cos(2(\beta - \alpha))) \sigma_1 \end{cases} \quad (3-22)$$

[ ]<sup>(1),(2)</sup> indique les deux fréquences  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$ .

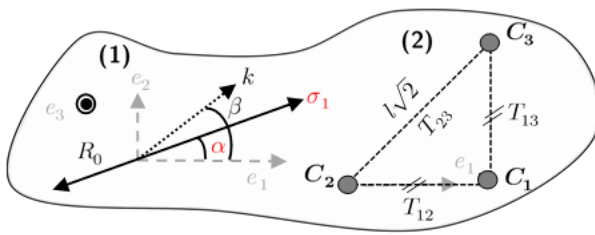
L'écart entre les deux vitesses  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  du mode S0 est assez grand pour que la matrice des coefficients du système (3-22) ne soit pas mal conditionnée.

Cette méthode fournit un système similaire à celui fourni par la méthode précédente et la suite de sa résolution, identique à celle du cas précédent, n'est pas présentée à nouveau ici.

**Conclusion** : Cette méthode utilisant un seul mode (de préférence le mode S0) généré à deux fréquences distinctes, donc deux mesures différentes, permet de résoudre le PAEI.

### iii. Inversion multi-Directionnelle (MI-mD)

La méthode proposée ici consiste à utiliser un seul mode et une seule fréquence centrale, mais en effectuant deux mesures dans deux directions *particulières*. La résolution du PAEI par cette méthode est illustrée par la figure suivante :



**Fig. 3-14** : Plaque avec contrainte inconnue uniaxiale  $\sigma_1$  dans le plan. Trois capteurs pouvant jouer le rôle d'émetteur et récepteur sont utilisés. Les capteurs ( $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ) forment un triangle rectangle isocèle. Le côté  $[C_1C_2]$  est dans la direction  $e_1$ .

Trois capteurs sont utilisés. Ces capteurs peuvent émettre et recevoir l'un des modes A0, SH0, ou S0. Les capteurs forment un triangle rectangle isocèle, Sans perte de généralité le côté  $[C_1C_2]$  est dans la direction  $e_1$  ( $\beta = 0$ ). La mesure consiste à prendre le capteur  $C_1$  comme émetteur et les deux autres comme récepteurs. Les TdV entre  $C_1$  et  $C_2$  ( $\beta = 0$ ) est noté  $T_{12}$  et celui entre  $C_1$  et  $C_3$  ( $\beta = \pi/2$ ) est  $T_{13}$ . Un seul mode est utilisé, généré à la fréquence centrale  $f_c$ .

Le système d'équations formé par les TdV dans les deux directions s'écrit :

$$\begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \frac{l}{T_{12}} = v_0^{(1)} + \frac{v_0^{(1)}}{100} (A_p^{(1)} + B_1^{(1)} \cos(2\alpha)) \sigma_1 \\ \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{l}{T_{13}} = v_0^{(1)} + \frac{v_0^{(1)}}{100} (A_p^{(1)} - B_1^{(1)} \cos(2\alpha)) \sigma_1 \end{cases} \quad (3-23)$$

En additionnant les équations ( $\beta = 0$ ) et ( $\beta = \pi/2$ ), on trouve l'amplitude de la contrainte :

$$\sigma_1 = 50 \times \frac{\left(\frac{l}{T_{12}} - v_0^{(1)}\right) + \left(\frac{l}{T_{13}} - v_0^{(1)}\right)}{v_0^{(1)} A_p^{(1)}} \quad (3-24)$$

Le CAE  $A_p^{(1)}$  est présent au dénominateur. Il est donc préférable d'utiliser des modes pour lesquels ce coefficient n'est pas petit. Cela favorise l'utilisation des modes S0 ou SH0.

En remplaçant dans la formule précédente les termes  $(l/T_{12})$  et  $(l/T_{13})$  par les deux vitesses  $v_{12}$  et  $v_{13}$  du mode choisi se propageant suivant deux directions perpendiculaires, on trouve alors une formule de biréfringence acoustoélastique pour les ondes guidées qui ressemble celle pour les ondes de volume (voir par exemple Réf. [25,59,66,100,104-107]).

Cette formule donne l'amplitude de la contrainte en fonction des variations de vitesse dans deux directions perpendiculaires. Pour retrouver ensuite la direction de la contrainte, il suffit cette fois d'effectuer la soustraction des deux équations ( $\beta = 0$ ) et ( $\beta = \pi/2$ ), ce qui donne :

$$\alpha = \begin{cases} \gamma \\ \pi - \gamma \end{cases} \quad (3-25)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{50}{v_0^{(1)} B_1^{(1)} \sigma_1} \left( \frac{l}{T_{12}} - \frac{l}{T_{13}} \right) \right) \quad (3-26)$$

Cette méthode fournit deux solutions admissibles ( $\in [0, \pi]$ ) pour  $\alpha$ , formant deux directions possible pour la contrainte. Pour rappel les deux **MI-mM** et **MI-mF** fournissent quatre solutions admissibles ( $\in [0, \pi]$ ) pour  $\alpha$ , formant deux directions admissibles pour la contrainte. Pour déterminer quelle est la bonne, une seconde mesure est effectuée, consistant à émettre avec  $C_2$  et recevoir par  $C_3$  ( $\beta = \pi/4$ ). Le TdV correspondant est  $T_{23}$ . Avec la mesure précédente, les TdV forment le système suivant :

$$\begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \frac{l}{T_{12}} = v_0^{(1)} + \frac{v_0^{(1)}}{100} (A_p^{(1)} + B_1^{(1)} \cos(2\alpha)) \sigma_1 \\ \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{l\sqrt{2}}{T_{23}} = v_0^{(1)} + \frac{v_0^{(1)}}{100} (A_p^{(1)} + B_1^{(1)} \sin(2\alpha)) \sigma_1 \end{cases} \quad (3-27)$$

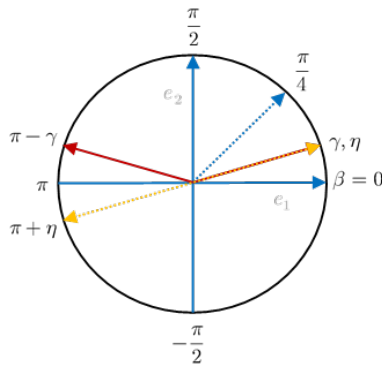
$\sigma_1$  étant connue, la résolution du système ci-dessus donne deux solutions possibles pour l'angle  $\alpha$  :

$$\alpha = \begin{cases} \eta \\ \pi + \eta \end{cases} \quad (3-28)$$

avec

$$\eta = \arctan \left( \frac{100 \left( \frac{l}{T_{23}} - v_0^{(1)} \right) - v_0^{(1)} A_p^{(1)} \sigma_1}{100 \left( \frac{l}{T_{12}} - v_0^{(1)} \right) + v_0^{(1)} \sigma_1 (B_1^{(1)} - A_p^{(1)})} \right) \quad (3-29)$$

Les deux solutions possibles de  $\alpha$  forment une seule direction de la contrainte. La bonne valeur de  $\alpha$  est l'intersection entre les deux solutions ( $\gamma$  et  $\pi - \gamma$ ) trouvées lors de la première mesure (*i.e.* ( $\beta = 0$ ) et ( $\beta = \pi/2$ ),) et les solutions ( $\eta$  et  $\pi + \eta$ ) de la seconde ( $\beta = \pi/4$ ). L'intersection donne une valeur *unique*. Sans perte de généralité on peut prendre  $\gamma = \eta = \alpha$ . Une illustration en est donnée ci-dessous :



**Fig. 3-15** : La première mesure consiste à émettre dans deux directions perpendiculaires ( $\beta = 0$  et  $\beta = \pi/2$ ),. Cela permet de trouver la valeur de la contrainte  $\sigma_1$ , et deux directions possibles ( $\gamma$  et  $\pi - \gamma$ ). Pour la déterminer, une seconde mesure dans la direction ( $\beta = \pi/4$ ), est réalisée. La combinaison des deux mesures permet d'atteindre la bonne valeur de  $\alpha$ . Dans cet exemple on a pris  $\gamma = \eta = \alpha$ .

**Conclusion** : La méthode d'inversion multi-Directionnelles (**MI-mD**) consiste à utiliser un mode unique émis à une seule fréquence centrale, selon deux directions perpendiculaires. Cela permet de trouver l'amplitude de la contrainte, et deux directions possibles de celle-ci. Pour connaître laquelle est la bonne, une seconde mesure est effectuée. Dans la méthode, les capteurs forment un triangle rectangle isocèle.

### Discussion : identification des CAE par mesure

La **MI-mD** donne l'amplitude de la contrainte en fonction des variations de vitesse dans deux directions perpendiculaires. Cette relation – très utilisée en onde de volume – s'appelle la relation de biréfringence acoustoélastique. Connaissant les propriétés élastiques du matériau (constantes de Lamé et celles de Murnaghan), elle permet de trouver la contrainte. L'utilité de cette relation vient du fait que les procédés d'obtention des pièces métalliques peuvent induire, en plus des contraintes mécaniques, une anisotropie élastique due à l'orientation cristalline. Cette anisotropie, même faible, a deux conséquences sur la fiabilité de la théorie d'acoustoélasticité :

1. Elle peut induire des variations de vitesse du même ordre de grandeur que l'effet acoustoélastique (voir Clark & Moulder [59]). Il est donc primordial de la caractériser avant de passer à la caractérisation de la contrainte.
2. Pour que les résultats de la théorie d'acoustoélasticité soient utilisables dans la pratique, l'hypothèse d'isotropie dans l'état non-contraint est faite. Cela permet de réduire le nombre de constantes d'élasticité dans les deux tenseurs de rigidités (du second et troisième ordre) de 77 à 5. En cas d'anisotropie élastique le nombre de constantes d'élasticité à déterminer peut aller jusqu'au 77 (le cas d'une symétrie triclinique). Toutefois, comme il n'est pas pratique de chercher à déterminer ces constantes, le choix fait par les auteurs (Réf. [59,65,70]) a consisté à utiliser la relation de biréfringence obtenue par la théorie d'acoustoélasticité avec une correction qui représente l'anisotropie initiale. Pour mesurer les CAE de cette relation, la variation de vitesse induite par l'anisotropie initiale est mesurée, puis les CAE sont mesurés sur des échantillons dont on connaît l'état de contrainte (étape de calibration). Ils sont ensuite utilisés dans d'autres applications pour caractériser un état de contrainte inconnu.

L'avantage d'utiliser des ondes de volume (non dispersives) vient du fait que les CAE sont constantes et peuvent donc être considérés comme des propriétés matériau affectées à chaque onde. Par exemple, Hira<sub>o</sub> *et al* [108] donnent un CAE de l'onde de cisaillement estimé entre  $-7 \times 10^{-6}$ MPa, et  $-9 \times 10^{-6}$ MPa pour la plupart des aciers<sup>1</sup>.

Le mode SH0 n'étant pas dispersif aurait donc deux CAE qui ne dépendent ni de la fréquence ni de la forme du guide et ces CAE sont déduits du système d'équations (3-23)

<sup>1</sup> Le fait qu'il soit très petit devant les valeurs des CAE dans ce chapitre, vient de quatre raisons :

1. Il y'a un facteur de  $10^2$  qui provient du pourcentage dans les CAE utilisé dans le manuscrit.
2. Il correspond aux ondes de volume et non pas à des ondes guidées.
3. Le matériau utilisé dans ce chapitre est l'aluminium, et non pas l'acier.
4. L'expression de ce CAE est différente de celle des CAE définis dans ce manuscrit.

$$A_p^{SH0} = 50 \times \frac{\left(\frac{l}{T_{12}} - v_0^{SH0}\right) + \left(\frac{l}{T_{13}} - v_0^{SH0}\right)}{v_0^{SH0} \sigma_1} \quad (3-30)$$

$$B_1^{SH0} = 50 \times \frac{\left(\frac{l}{T_{12}} - \frac{l}{T_{13}}\right)}{v_0^{SH0} \sigma_1} \quad (3-31)$$

La formule qui donne  $B_1^{SH0}$  devrait avoir le terme  $\cos(2\alpha)$  au dénominateur. Cependant lors de l'étape de calibration, le choix de faire coïncider le repère de la plaque avec le repère principal pourrait être fait. Ces deux CAE peuvent donc être mesurés sans qu'il y ait besoin de connaître la nature du matériau (notamment ses propriétés élastiques), ou l'épaisseur de la plaque, La vitesse  $v_0^{SH0}$  est mesurée avant l'application de la contrainte. Après leur identification, ils peuvent être utilisés pour caractériser un état de contrainte inconnu.

**Remarque :** il est cependant important à rappeler que si la distance entre l'émetteur et le récepteur dépend du chargement (*e.g.* capteurs collés à la pièce) dans l'étape de calibration, cette dépendance doit être prise en compte, sinon cela conduira à une mauvaise estimation de la contrainte (le lecteur intéressé peut se référer au Duquennoy [109]).

Les deux formules données ci-dessus sont valables pour un matériau élastiquement isotrope dans son état non-contraint. Dans le cas d'un matériau anisotrope, par exemple pour des pièces laminées, on peut proposer les formules suivantes :

$$A_p^{SH0} = 50 \times \frac{\left(\frac{v^{SH0-d_{\parallel}} - v_0^{SH0-d_{\parallel}}}{v_0^{SH0-d_{\parallel}}} + \frac{v^{SH0-d_{\perp}} - v_0^{SH0-d_{\perp}}}{v_0^{SH0-d_{\perp}}}\right)}{\sigma_1} \quad (3-32)$$

$$B_1^{SH0} = 50 \times \frac{\left(\frac{v^{SH0-d_{\parallel}} - v_0^{SH0-d_{\parallel}}}{v_0^{SH0-d_{\parallel}}} - \frac{v^{SH0-d_{\perp}} - v_0^{SH0-d_{\perp}}}{v_0^{SH0-d_{\perp}}}\right)}{\sigma_1} \quad (3-33)$$

Les exposants  $d_{\parallel}$  et  $d_{\perp}$  indiquent la direction parallèle et perpendiculaire à la direction du laminage. La contrainte est supposée appliquée dans la direction du laminage. Des formules similaires (mais différentes) ont été obtenues analytiquement pour les ondes de cisaillement par King & Fortunko [16], pour les matériaux de symétrie orthorhombique.

Les formules ont été proposées ici à titre d'exemple. Elles n'ont pas été obtenues par voie théorique ou numérique.

Le cas des modes A0 et S0 représente une difficulté supplémentaire, provenant de la nature dispersive de ces modes. Cependant s'il s'avère — par voie numérique ou expérimentale — que la relation de biréfringence des ondes guidées pour les matériaux anisotropes est égale à celle pour les matériaux isotropes plus une constante décrivant l'anisotropie (comme cela est le cas pour les ondes de volume), il est alors envisageable d'obtenir à partir de cette relation de biréfringence des courbes de dispersions des coefficients acoustoélastique (CAE) pour les matériaux anisotropes, à l'image de celles données dans ce chapitre pour les matériaux isotropes. Ensuite ces courbes peuvent être utilisées pour caractériser un état de contrainte dans les matériaux élastiquement anisotropes.

#### 4. Conclusion

Dans cette section nous avons étudié le problème acoustoélastique inverse dans le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan. La résolution de ce problème consiste à trouver l'amplitude de la contrainte et sa direction. Pour ce faire, on a commencé par remarquer que les variations de vitesses des ondes guidées peuvent être décrites par des formules mathématiques simples. Outre l'amplitude de la contrainte et sa direction, leurs expressions font appel à trois coefficients qui dépendent de la fréquence, et qui sont spécifiques à chaque mode. Ces coefficients sont appelés les coefficients acoustoélastique (CAE). Dans la première sous-section nous avons utilisé l'erreur  $\epsilon$  définie dans la section précédente pour estimer la déviation entre ces formules et le modèle acoustoélastique (MAE). Cela a permis de définir, suivant la

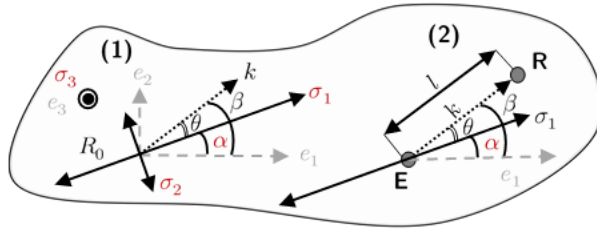
valeur de l'erreur, des plages de fréquence dans lesquelles les formules peuvent être considérées comme fiables, et par suite, de développer dans ces plages de fréquence des méthodes permettant de résoudre le PAEI.

Nous nous sommes intéressés aux variations de ces CAE avec la fréquence. Les courbes de dispersion des CAE ont été données. Ces résultats ont montré que dans la plage de fréquence  $f = [10,500]$  kHz, seuls deux CAE suffisent à décrire les variations de vitesses des modes fondamentaux (A0, SH0, et S0) en fonction de la contrainte. À partir de ce constat, une solution du problème acoustoélastique inverse a été proposée. Elle repose sur l'écriture d'un système de deux équations indépendantes. Suivant comment ces deux équations sont obtenues, on a proposé trois méthodes d'inversion. La première utilise deux modes distincts générés à une seule fréquence centrale (MI-mM). La deuxième utilise un mode unique généré à deux fréquences centrales distinctes (MI-mF). La troisième utilise un mode unique généré à une seule fréquence centrale, émis dans deux directions perpendiculaires (MI-mD).

Ces méthodes ne fournissent que l'amplitude de la contrainte, et deux directions possibles pour celle-ci. Cette information peut suffire dans certaines applications. Pour connaître laquelle des deux directions est la bonne, une mesure supplémentaire est nécessaire. La sous-section suivante traite le problème triaxial dont la solution peut être déclinée à partir des solutions précédemment décrites dans le cas uniaxial.

### C. Contrainte triaxiale

Le problème acoustoélastique inverse à résoudre est illustré par la figure suivante :



**Fig. 3-16** : Plaque avec un état de contrainte triaxial inconnu. Un émetteur (**E**) et un récepteur (**R**) sont utilisés pour émettre et recevoir des ondes de Lamb ou SH. La distance entre (**E**) et (**R**) est indépendante de la contrainte et égale à  $l$ . La propagation de l'onde se fait dans la direction  $\beta$ .

On suppose une plaque soumise à un chargement triaxial inconnu  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . On définit l'orientation de ce tenseur par l'angle  $\alpha = (e_1, \sigma_1)$ , également inconnu. L'onde se propage dans la direction définie par l'angle  $\beta = (e_1, \overline{ER})$ . L'angle entre la composante  $\sigma_1$  et la direction de propagation est  $\theta = \beta - \alpha$ . Notre objectif est donc de trouver  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$  en fonction des variations de vitesses d'ondes de Lamb et SH. Pour ce faire on réutilise des résultats des deux sous-sections précédentes, dans lesquelles on a traité le problème acoustoélastique inverse pour les deux chargements uniaxiaux suivants :

1. *Uniaxial hors plan* : le PAEI contient une seule inconnue (l'amplitude de la contrainte normale  $\sigma_3$ ). On a montré que l'EAE induit par ce chargement peut être représenté par la formule suivante valable pour les trois modes fondamentaux :

$$\Delta_r v^M(\sigma_3, f) = A_n^M(f) \sigma_3 \quad (3-34)$$

L'exposant  $M$  indique le mode utilisé et  $A_n^M$  désigne le coefficient acoustoélastique (CAE) correspondant. On a montré qu'il existe des plages de fréquence où les déviations de cette formule par rapport aux prédictions du modèle acoustoélastique (MAE) sont acceptables, permettant de résoudre le problème inverse. Cette résolution est définie par l'obtention de la valeur de l'amplitude de la contrainte en fonction des variations de vitesse (ou de temps de vol). Un seul mode suffit pour trouver l'amplitude de la contrainte.

2. *Uniaxial dans le plan* : le problème acoustoélastique inverse comporte deux inconnues (l'amplitude de la contrainte  $\sigma_1$  et sa direction  $\alpha$ ). On a montré que l'EAE induit par ce chargement peut être représenté par la formule suivante valable pour les trois modes fondamentaux :



$$\Delta_r v^M(\sigma_1, f) = [A_p^M(f) + B_1^M \cos(2(\beta - \alpha))] \sigma_1 \quad (3-35)$$

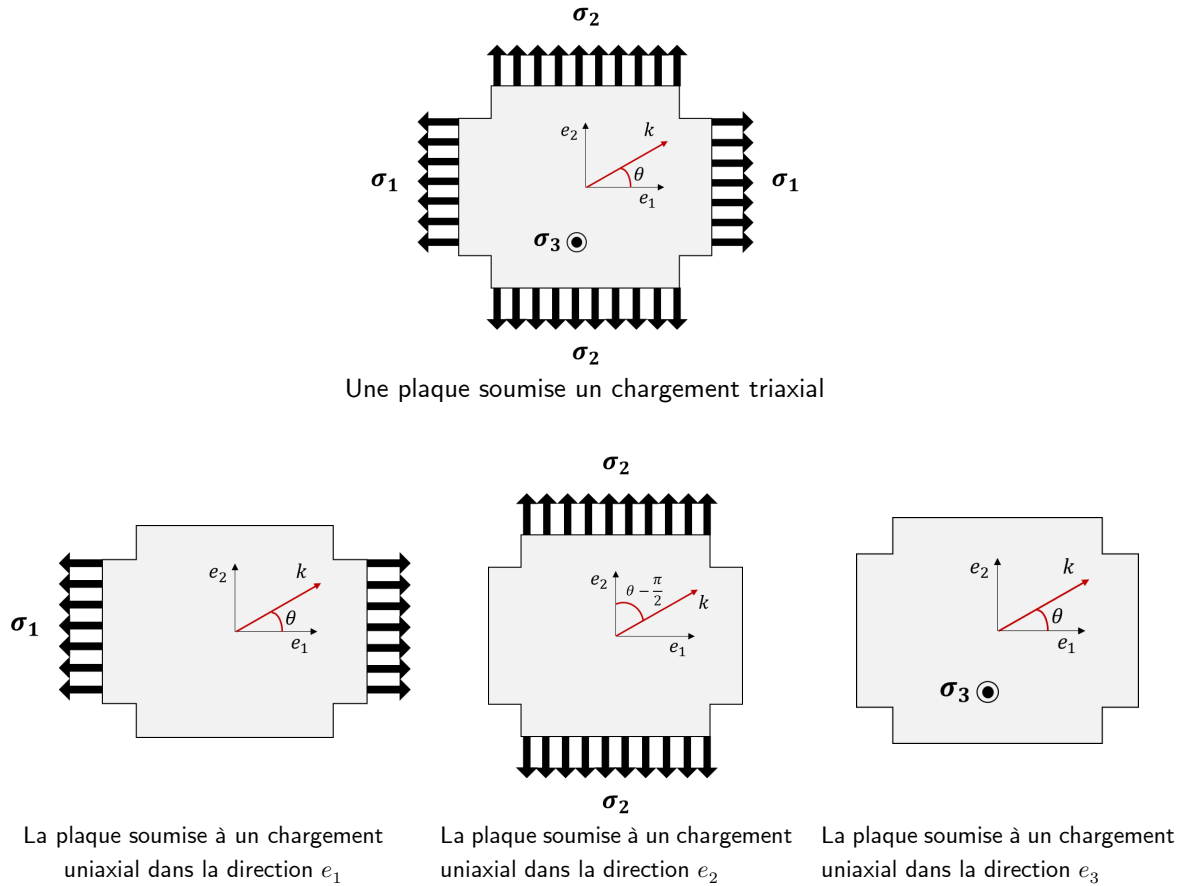
où  $\beta$  est la direction de propagation de l'onde.  $A_p^M$  et  $B_1^M$  désignent les CAE.

Il existe des plages de fréquences où les déviations entre cette formule et le modèle acoustoélastique sont également acceptables. Pour ces plages, on a proposé trois méthodes pour résoudre le problème inverse.

Pour résoudre le problème acoustoélastique inverse pour le cas triaxial, on s'appuie sur l'hypothèse faite dans ce chapitre qui stipule qu'il existe des cas où l'EAE induit par un tenseur triaxial est égal à la somme des EAE induits par chaque composante de ce tenseur considérée séparément. On a montré au chapitre 2 (voir III.F [p. 60]) que sa validité dépend de la fréquence et la direction.

L'objectif est donc d'essayer d'obtenir dans les plages de fréquence où l'hypothèse précédente est valable des formules analytiques inversibles représentatives de l'EAE.

La figure suivante illustre cette hypothèse et comment l'utiliser pour trouver ces formules analytiques :



**Fig. 3-17** : Décomposition du chargement triaxial en trois chargements uniaxiaux. La direction de propagation de l'onde fait un angle  $\theta$  avec  $e_1$ .

La plaque est soumise à un chargement triaxial que l'on suppose induire un EAE sur les modes fondamentaux égal à la somme des EAE induits par chaque composante uniaxiale considérée séparément :

$$\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) = \Delta_r v^M(\sigma_1, f) + \Delta_r v^M(\sigma_2, f) + \Delta_r v^M(\sigma_3, f) \quad (3-36)$$

Pour obtenir maintenant la formule analytique avec laquelle on veut décrire l'EAE donné par le modèle acoustoélastique, on utilise des résultats des deux cas uniaxiaux déjà traités (Éq. ((3-34) et (3-35))) en supposant une formule composite s'écrivant :

$$\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) = [A_p^M(f) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))] \sigma_1 + \Delta_r v^M(\sigma_2, f) + A_n^M(f) \sigma_3 \quad (3-37)$$

Comme la formule analytique décrivant  $\Delta_r v^M(\sigma_2, f)$  doit être identique à celle de  $\Delta_r v^M(\sigma_1, f)$  mais avec une rotation de  $\pi/2$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) &= [A_p^M(f) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))] \sigma_1 + [A_p^M(f) - B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))] \sigma_2 \\ &\quad + A_n^M(f) \sigma_3 \end{aligned} \quad (3-38)$$

réécrite comme :

$$\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f) \sigma_3 \quad (3-39)$$

Cette écriture fait apparaître que le chargement induit deux possibilités de variation de vitesse : la première, isotrope, donnée par le premier terme  $A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2)$  et le troisième terme  $A_n^M(f)\sigma_3$ , la seconde, anisotrope, donnée par le deuxième terme  $B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2)$ . La formule vérifie bien que si  $\sigma_1 = \sigma_2$ , la propagation des ondes guidées est acoustiquement isotrope. Dans le cas où  $\sigma_1 = -\sigma_2$  et  $\sigma_3 = 0$ , le seul terme restant est  $2B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) \sigma_1$  signifiant qu'il existe des directions de propagation dans lesquelles les variations de vitesse sont nulles (ces directions sont  $\beta = \alpha + (2k + 1)\pi/2$   $k \in \mathbb{Z}$ ), et ce indépendamment de la fréquence d'excitation, du mode choisi, et de la vitesse (phase ou groupe).

Les coefficients de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  doivent être identiques (*i.e.*  $A_p^M(f)$  et  $B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))$ ), mais différent de celui de  $\sigma_3$  ( $A_n^M(f)$ ). Pour raison de symétries, les ondes guidées interagissent avec les composantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de la même façon, mais différemment avec  $\sigma_3$ . Cela a des conséquences majeures sur la résolution du problème acoustoélastique inverse, en utilisant la formule (3-39).

## 1. Coefficients acoustoélastiques $A_n^M, A_p^M, B_1^M$

On recherche d'abord les coefficients acoustoélastiques en menant l'étude paramétrique suivante : chaque composante de la contrainte varie entre  $-200$  et  $200$  MPa, la direction de propagation ( $\theta = \beta - \alpha$ ) entre  $0$  et  $180^\circ$  et la fréquence entre  $10$  kHz et  $500$  kHz. Dans cette étude, seuls les trois modes fondamentaux sont considérés. Pour s'assurer que les CAE  $B_2^M$  (voir II-B.2 [p. 117]) sont toujours faibles pour ces modes et donc négligeables, dans l'étude paramétrique la formule utilisée pour coïncider avec les résultats du modèle acoustoélastique est la suivante :

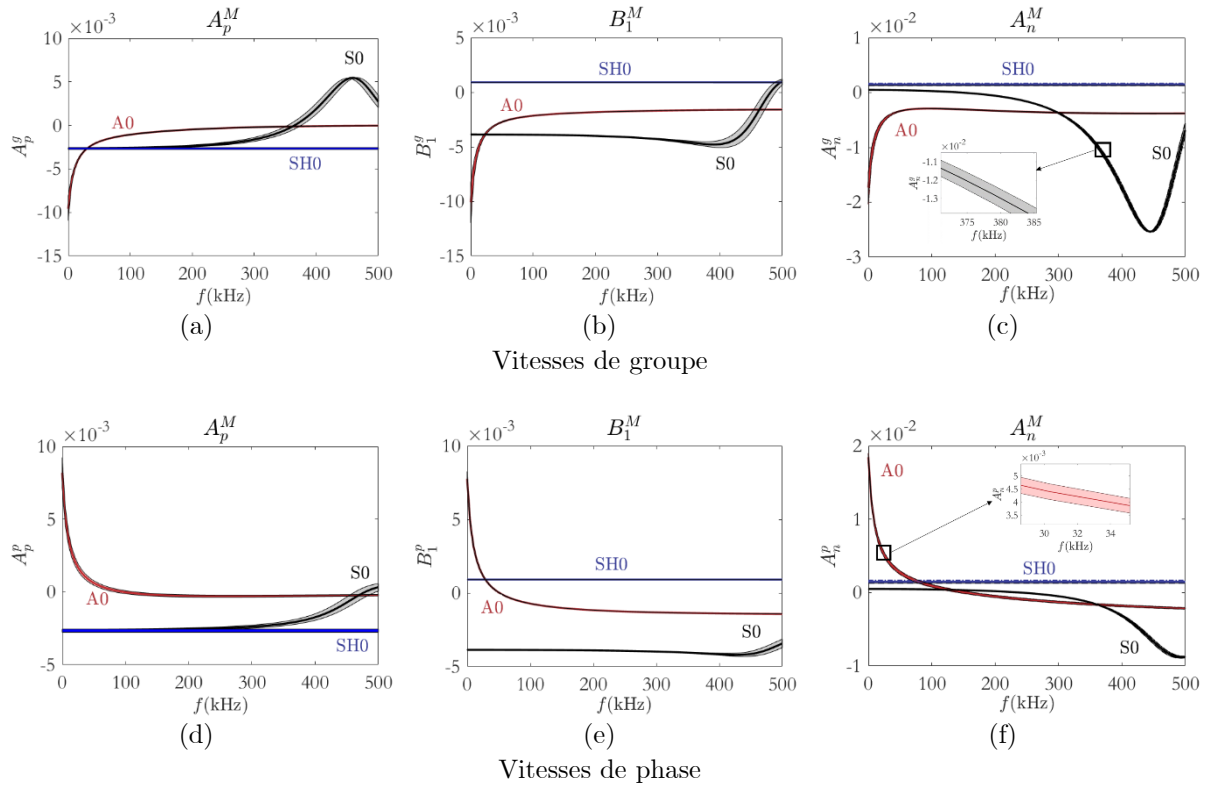
$$\begin{aligned} \Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) &= A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + [B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) + B_2^M(f) \cos(4(\beta - \alpha))] (\sigma_1 - \sigma_2) \\ &\quad + A_n^M(f) \sigma_3 \end{aligned} \quad (3-40)$$

Cette formule – plus précise que la formule (3-39) – permet toujours de résoudre le problème acoustoélastique inverse, mais introduit un coefficient acoustoélastique supplémentaire. Le choix de l'une ou de l'autre dépend de la précision voulue sur l'estimation de la contrainte. Une brève discussion est faite plus loin dans cette sous-section sur l'erreur introduite en négligeant le terme  $B_2^M(f) \cos(4(\beta - \alpha))$ . En se rappelant que les formules (3-39) et (3-40) sont des approximations du modèle acoustoélastique et représentent une troncature du développement limité de la fonction  $\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f)$ , on s'attend à ce que les CAE dépendent de la valeur de la contrainte.

Dans l'étude paramétrique, on a relevé pour chaque fréquence les extrema de ces coefficients. Et on les a comparés aux mêmes CAE ajustés aux cas uniaxiaux, afin de déterminer la possibilité d'utiliser uniquement des chargements uniaxiaux pour identifier les CAE. Les résultats de cette étude paramétrique sont donnés dans la Fig. 3.18:

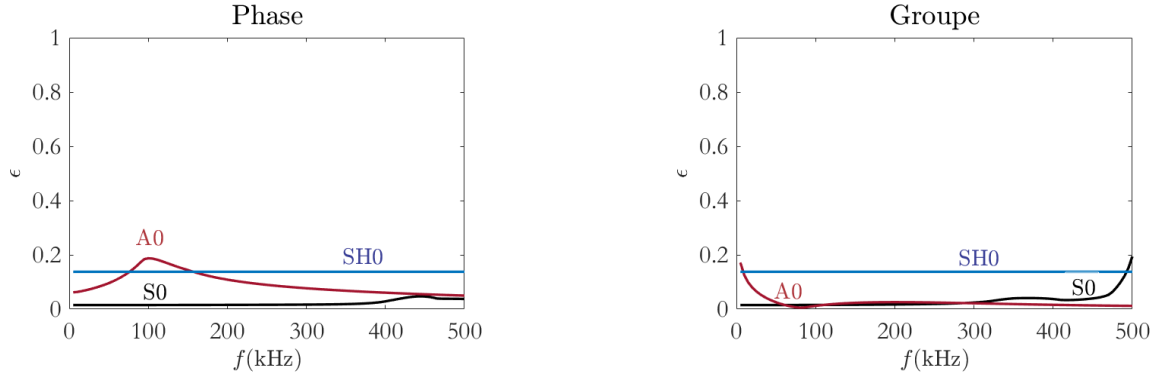
Les CAE  $A_p^M, B_1^M$  et  $A_n^M$  (les  $B_2^M$  étant donnés dans l'annexe [An-Ch3-Fig. 5](#) [p. 139]) ont été identifiés en utilisant la formule (3-40). Les courbes en trait continu représentent les CAE identifiés en considérant les deux cas uniaxiaux (contrainte uniaxiale hors plan et dans le plan). Les zones nuancées en gris, rouge ou bleu représentent les zones de variation de ces coefficients en fonction de la contrainte. Les CAE du mode S0 sont les plus sensibles à la contrainte, et cette sensibilité dépend de la fréquence (maximale dans la plage de fréquence où le mode est le plus dispersif). Les extrema des CAE ne correspondent pas tous au même chargement, et varient en fonction du mode (par exemple pour  $A_p^{S0}$  les extrema correspondent aux chargements  $\sigma = (\sigma_1, 200 \text{ MPa}, -200 \text{ MPa})$  et  $\sigma = (\sigma_1, -200 \text{ MPa}, 200 \text{ MPa})$  alors que pour  $A_n^{S0}$  ce sont les chargements  $\sigma = (\sigma_1, 200 \text{ MPa}, 200 \text{ MPa})$  et  $\sigma = (\sigma_1, -200 \text{ MPa}, -200 \text{ MPa})$  qui induisent les variations maximales).

Les CAE identifiés à partir de cas uniaxiaux représentent une valeur « moyenne » des CAE. En conclusion on remarque qu'il y a des plages de fréquence où ce choix est acceptable (par exemple pour le mode S0 dans  $f \in [10, 300] \text{ kHz}$ ).



**Fig. 3-18** : Coefficients acoustoélastiques (CAE) déterminés en utilisant la formule (3-40) pour décrire les résultats du modèle acoustoélastique (les coefficients  $B_2^M$  sont donnés dans l'annexe [An-Ch3-Fig. 5](#) [p. 139]). Les courbes en trait continu au milieu des bandes grises, rouges, ou bleues, représentent les CAE déterminés dans les deux cas uniaxiaux.

Dans l'étape suivante, les CAE identifiés à partir des cas uniaxiaux sont utilisés dans la formule (3-39) pour comparaison avec les résultats du MAE, en effectuant le calcul de l'erreur  $\epsilon$ .

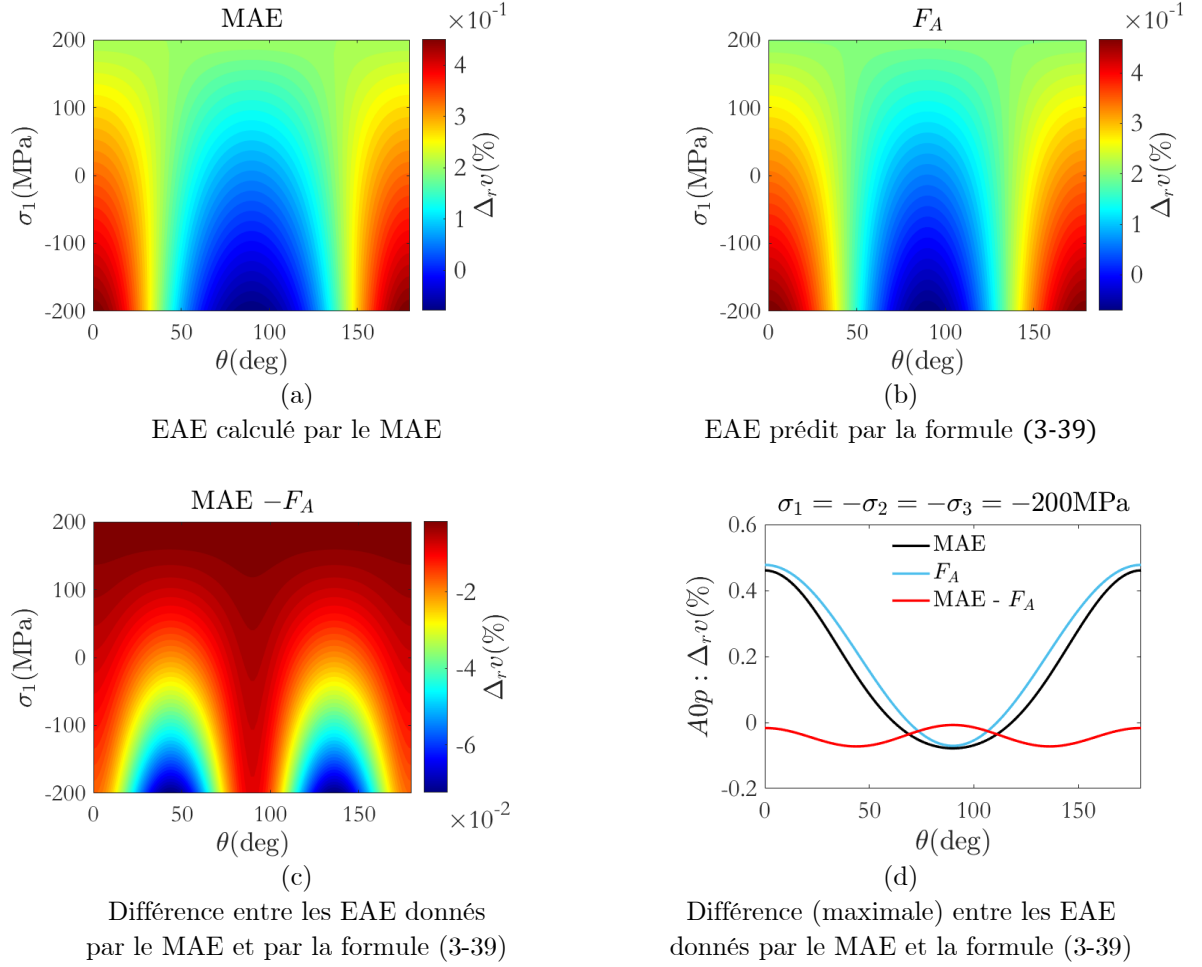


**Fig. 3-19** : l'erreur  $\epsilon$  en fonction de la fréquence, pour les trois modes fondamentaux. Calculée en utilisant la formule (3-39) (dont les CAE sont identifiés à partir des cas uniaxiaux).

Pour les vitesses de groupe S0g et A0g, l'erreur est petite dans la plage de fréquence  $f \in [100, 400]$  kHz. Cependant la figure Fig. 3.18 –(a) et (d)] montre qu'au-delà de 350 kHz les CAE pour le mode  $A_p^{S0}$  (en vitesse de phase ou de groupe) sont affectés par la contrainte (*i.e.* les CAE identifiés sur les cas triaxiaux s'éloignent de ceux identifiés à partir des cas uniaxiaux). Les plages de fréquence permettant une meilleure inversion sont celles où l'erreur  $\epsilon$  est faible et où les CAE sont le moins sensibles au chargement. L'erreur avec le mode SH0 est relativement importante alors que la Fig. 3.18 montre que les CAE de ce mode ( $A_p^{SH0}$ ,  $B_1^{SH0}$  et  $A_n^{SH0}$ ) sont peu sensibles au chargement. De fait, les résultats de la Fig. 3.18 sont obtenus avec la formule (3-40) qui contient un CAE supplémentaire ( $B_2^{SH0}$  voir annexe An-Ch3-Fig. 5 [p. 139]) alors que ceux présentés dans la Fig. 3.19 sont obtenus en utilisant la formule (3-39). L'importance de l'erreur pour le mode SH0 s'explique par le fait que même si les CAE  $B_2^M$  sont faibles devant les autres CAE, ils restent non nuls et dépendent du mode et du chargement. En d'autres termes, les écarts entre les CAE  $A_p^{Lamb}$ ,  $B_1^{Lamb}$  et  $A_n^{Lamb}$  et  $B_2^{Lamb}$  sont plus grands que ceux entre  $A_p^{SH0}$ ,  $B_1^{SH0}$  et  $A_n^{SH0}$  et  $B_2^{SH0}$ , rendant ainsi l'effet de la suppression de  $B_2^M$  plus marqué sur le mode SH0 que sur les modes de Lamb.

La Fig. 3.19 présente la variation de l'erreur en fonction de la fréquence qui ne montre pas clairement si les déviations entre le MAE et la formule (3-39) sont importantes. Pour mieux quantifier, on étudie spécifiquement la vitesse de phase A0p à la fréquence ( $f = 96$  kHz) pour laquelle l'erreur est la plus grande ( $\epsilon \approx 0.19$ , celle de la vitesse A0p) pour un chargement  $\sigma_2 = \sigma_3 = 200$  MPa pour lequel la déviation entre les CAE identifiés à partir des cas uniaxiaux et ceux identifiés à partir du cas triaxial est la plus grande. Ces paramètres permettent d'atteindre une limite supérieure de déviation entre le MAE et la formule (3-39).

Les deux résultats (Fig. 3.20-(a) et (b)) sont proches mais la région autour de la direction  $90^\circ$  (en bleu) est plus large pour le MAE que pour la formule (3-39), alors que les régions autour de la direction  $0^\circ$  (en rouge) sont plus larges pour la formule (3-39) que pour le MAE. La Fig. 3.20-(c) montre la différence entre les EAE calculés par le MAE et ceux par la formule (3-39). La différence est maximale à  $45^\circ$  et  $135^\circ$  et presque nulle autour de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$ . La différence entre le MAE et la formule (3-39) est maximale pour  $\sigma_1 = -200$  MPa. On donne dans la Fig. 3.20-(d) les EAE en fonction de la direction  $\theta = \beta - \alpha$  calculés par le MAE, la formule (3-39) et la différence entre ces deux. Cette différence représente la limite supérieure pour la déviation entre le MAE et la formule (3-39). Une telle erreur peut être acceptée ou pas suivant les applications. Il apparaît que la meilleure inversion probable sera réalisée dans les plages de fréquence où l'erreur est plus faible.



**Fig. 3-20** : Variation relative de vitesse  $A0p$  à la fréquence  $f = 96$  kHz (à laquelle l'erreur est maximale) : calculée par le MAE (a), par la formule (3-39) (b). (c) Différence de ces deux résultats. (d) Les trois résultats précédents pris pour  $\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3 = -200$  MPa.

## 2. Méthode d'inversion

Les déviations de la formule (3-39) du MAE étant estimées, on cherche désormais à résoudre le problème acoustoélastique inverse en travaillant dans les plages de fréquence où ces déviations sont acceptables. L'objectif est donc de résoudre le système suivant, dont les inconnues sont  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$  :

$$\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (3-41)$$

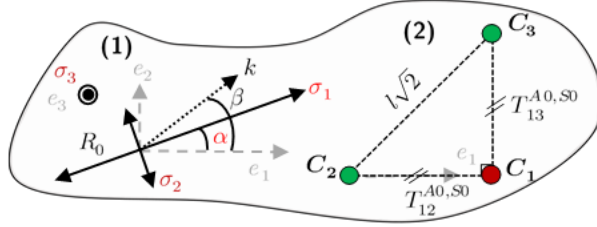
Dans le cas uniaxial dans le plan, on a présenté trois méthodes pour résoudre le problème acoustoélastique inverse : i) MI-mM ([p. 119]) utilise deux modes différents se propageant dans la même direction à la même fréquence ; ii) MI-mF ([p. 121]) utilise un seul mode généré à deux fréquences centrales ; iii) MI-mD ([p. 122]) utilise un seul mode généré à une fréquence se propageant dans deux directions perpendiculaires.

L'analyse du système d'équations (3-41) montre qu'on ne peut pas obtenir les quatre inconnues avec les méthodes MI-mM et MI-mF, car les coefficients de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont identiques. Il n'est donc pas possible de résoudre ce système, dans ce cas. On ne peut déterminer avec ces deux méthodes que l'amplitude  $\sigma_3$  et celle de la somme  $\sigma_1 + \sigma_2$ . Toutefois, si la direction de la contrainte est connue, les deux méthodes permettent de trouver les amplitudes  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ .

Pour résoudre le système général (déterminer les quatre inconnues), il est nécessaire de combiner la MI-mD avec au choix la MI-mF ou la MI-mM. Le choix que nous avons fait est de combiner MI-mD et MI-mM et la démarche est représentée ci-après :

**i. 1<sup>ère</sup> expérience : Émission dans deux directions perpendiculaires**

Dans cette première expérience, on utilise trois capteurs pouvant émettre et recevoir les modes A0 et S0, formant un triangle rectangle isocèle ( $C_1C_2C_3$ ). Le capteur  $C_1$  émet et les deux autres reçoivent. Les deux modes sont générés à la même fréquence centrale  $f_c$ .



**Fig. 3-21** : Plaque dans un état de contrainte triaxial inconnu. Le capteur ( $C_1$ ) joue le rôle d'émetteur et les deux autres de récepteur. Les modes A0 et S0 sont générés à la même fréquence. Le temps de vol entre ( $C_1$ ) et ( $C_i$ ) est noté  $T_{1i}$ . La distance entre ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) est indépendante de la contrainte et égale à  $l$ .

Les temps de vol dans cette expérience pour le mode A0 sont déduits de :

$$\begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \frac{l}{T_{12}^{A0}} = v_0^{A0} + \frac{v_0^{A0}}{100} [A_p^{A0}(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^{A0} \cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{A0} \sigma_3] \\ \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{l}{T_{13}^{A0}} = v_0^{A0} + \frac{v_0^{A0}}{100} [A_p^{A0}(\sigma_1 + \sigma_2) - B_1^{A0} \cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{A0} \sigma_3] \end{cases} \quad (3-42)$$

et pour le mode S0, sont déduits de :

$$\begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \frac{l}{T_{12}^{S0}} = v_0^{S0} + \frac{v_0^{S0}}{100} [A_p^{S0}(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^{S0} \cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0} \sigma_3] \\ \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{l}{T_{13}^{S0}} = v_0^{S0} + \frac{v_0^{S0}}{100} [A_p^{S0}(\sigma_1 + \sigma_2) - B_1^{S0} \cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0} \sigma_3] \end{cases} \quad (3-43)$$

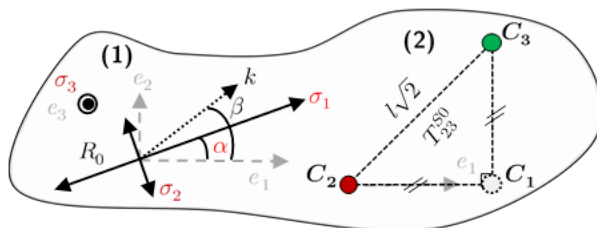
Après un peu d'algèbre, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_3 = 50 \frac{\frac{A_p^{S0}}{v_0^{A0}} \left[ \left( \frac{l}{T_{12}^{A0}} + \frac{l}{T_{13}^{A0}} - 2v_0^{A0} \right) \right] - \frac{A_p^{A0}}{v_0^{S0}} \left[ \left( \frac{l}{T_{12}^{S0}} + \frac{l}{T_{13}^{S0}} - 2v_0^{S0} \right) \right]}{(A_p^{S0} A_n^{A0} - A_p^{A0} A_n^{S0})} \\ \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\left( \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{l}{T_{12}^{S0}} + \frac{l}{T_{13}^{S0}} - 2v_0^{S0} \right) - 2A_n^{S0} \sigma_3 \right)}{2A_p^{S0}} \\ \cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{100 \left( \frac{l}{T_{12}^{S0}} - \frac{l}{T_{13}^{S0}} \right)}{2B_1^{S0}} \end{cases} \quad (3-44)$$

La première expérience permet donc de trouver, l'amplitude  $\sigma_3$ , la somme des amplitudes  $\sigma_1 + \sigma_2$  et le produit  $\cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2)$ . Pour trouver les trois autres inconnues on fait une deuxième expérience.

**ii. 2<sup>ème</sup> expérience : Émission dans la direction ( $C_2C_3$ )**

Le capteur  $C_2$  est cette fois émetteur,  $C_3$  récepteur. Seul le mode S0 est utilisé, généré à la même fréquence centrale  $f_c$ .



**Fig. 3-22** : Plaque dans un état de contrainte triaxial inconnu. Le capteur ( $C_2$ ) est émetteur et ( $C_3$ ) récepteur. Le mode S0 est généré à la fréquence centrale  $f_c$ . Le temps de vol entre ( $C_2$ ) et ( $C_3$ ) est  $T_{23}$ . La distance entre ( $C_2$ ) et ( $C_3$ ) est indépendante de la contrainte et égale à  $l\sqrt{2}$ .

Cette expérience donne le temps de vol  $T_{23}^{S0}$  sous la forme suivante :

$$\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{l\sqrt{2}}{T_{23}^{S0}} = v_0^{S0} + \frac{v_0^{S0}}{100} [A_p^{S0}(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^{S0} \sin(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0}\sigma_3] \quad (3-45)$$

En utilisant cette équation et (3-44) on trouve :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) = 100 \frac{\left(\frac{l}{T_{12}^{S0}} - \frac{l}{T_{13}^{S0}}\right)}{2v_0^{S0} B_1^{S0}} \\ \sin(2\alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) = 100 \frac{\frac{l\sqrt{2}}{T_{23}^{S0}} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{T_{12}^{S0}} + \frac{l}{T_{13}^{S0}}\right)}{v_0^{S0} B_1^{S0}} \end{cases} \quad (3-46)$$

Trois solutions sont possibles pour  $\alpha$  formant deux directions possibles pour la contrainte  $\sigma_1$

$$\alpha = \begin{cases} \gamma \\ \gamma + \frac{\pi}{2} \\ \gamma + \pi \end{cases} \quad (3-47)$$

tel que :

$$\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{\left(\frac{l\sqrt{2}}{T_{23}^{S0}} - \frac{l}{T_{12}^{S0}}\right) + \left(\frac{l\sqrt{2}}{T_{23}^{S0}} - \frac{l}{T_{13}^{S0}}\right)}{\frac{l}{T_{12}^{S0}} - \frac{l}{T_{13}^{S0}}} \right) \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ \quad (3-48)$$

Entre les deux valeurs  $\gamma$  et  $\gamma + \pi$  on conserve celle appartenant à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Sans perte de généralité, on choisit

$$\alpha = \begin{cases} \gamma \\ \gamma + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3-49)$$

L'angle entre ces deux solutions est de  $\pi/2$  qui n'est autre que l'angle entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

Pour trouver maintenant les valeurs des composantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , on pose :

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = S \\ \sigma_1 - \sigma_2 = \pm D \end{cases} \quad (3-50)$$

tels que (en utilisant (3-44)) :

$$\begin{cases} S = \frac{\left(\frac{100}{v_0^{S0}} \left(\frac{l}{T_{12}^{S0}} + \frac{l}{T_{13}^{S0}} - 2v_0^{S0}\right) - 2A_n^{S0}\sigma_3\right)}{2A_p^{S0}} \\ D = \frac{100}{v_0^{S0}} \frac{\left(\frac{l}{T_{12}^{S0}} - \frac{l}{T_{13}^{S0}}\right)}{2B_1^{S0} \cos(2\gamma)} \end{cases} \quad (3-51)$$

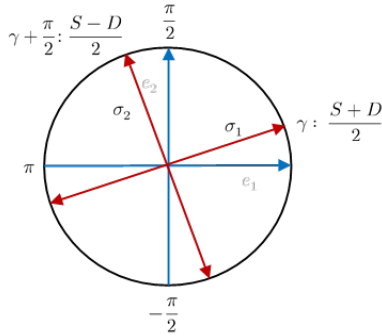
Les deux valeurs possibles de la différence viennent des deux valeurs possibles d'angle  $\alpha$  ( $+D$  si  $\alpha = \gamma$  et  $-D$  si  $\alpha = \gamma + \pi/2$ ). Les solutions de (3-50) sont :

$$\sigma_1 = \left\{ \frac{S+D}{2}, \frac{S-D}{2} \right\} \text{ et } \sigma_2 = \left\{ \frac{S-D}{2}, \frac{S+D}{2} \right\} \quad (3-52)$$

Supposons que la bonne valeur de  $\alpha$  soit  $\gamma$ , alors on a :

$$\sigma_1 = \frac{S+D}{2} \text{ et } \sigma_2 = \frac{S-D}{2} \quad (3-53)$$

Cela veut dire que  $\sigma_1$  est dans la direction qui fait un angle  $\gamma$  avec  $e_1$  et est égale à  $(S+D)/2$ . Dans la direction perpendiculaire ( $e_2$ ), la composante  $\sigma_2$  est égale à  $(S-D)/2$ . Ceci est représenté par la figure suivante :

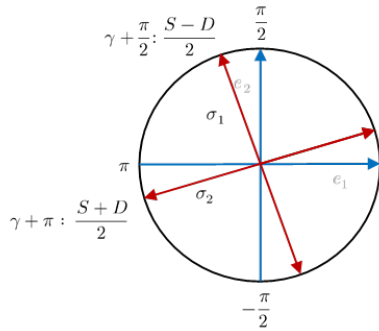


**Fig. 3-23** : la contrainte  $\sigma_1$  dans la direction  $\gamma$  avec  $e_1$  vaut  $(S+D)/2$  ;  $\sigma_2$  suivant ( $e_2$ ) vaut  $(S-D)/2$ .

Si la bonne valeur de  $\alpha$  est  $\gamma + \pi/2$ , on a :

$$\sigma_1 = \frac{S-D}{2} \text{ et } \sigma_2 = \frac{S+D}{2} \quad (3-54)$$

Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ont changé de valeurs par rapport à (3-53), elles ont également changé de directions. La direction de  $\sigma_1$  est  $\gamma + \pi/2$  et celle de  $\sigma_2$  est  $\gamma + \pi = \gamma[\pi]$ , comme représenté sur la figure suivante :



**Fig. 3-24** : la contrainte  $\sigma_2$  dans la direction  $\gamma + \pi$  avec  $e_1$  vaut  $(S+D)/2$  ;  $\sigma_1$  suivant ( $e_2$ ) vaut  $(S-D)/2$ .

Ainsi, dans les deux directions (celle qui fait l'angle  $\gamma$  avec  $e_1$  et celle qui fait un angle  $\gamma + \pi/2$ ), on a toujours les mêmes valeurs de contrainte  $(S+D)/2$  et  $(S-D)/2$ .

### 3. Conclusion

Nous avons traité le problème acoustoélastique inverse (PAEI) pour le cas triaxial. La formule analytique, décrivant l'EAE calculé par le MAE et utilisée pour résoudre le PAEI, se déduit des formules déterminées pour les deux cas uniaxiaux traités aux deux sous-sections précédentes. L'inversion est possible en combinant la méthode multidirectionnelle (MI-mD) et la méthode multimodale MI-mM.

Le problème acoustoélastique inverse peut être résolu en déterminant trois CAE, dont le premier décrit l'effet des amplitudes des deux composantes de la contrainte dans le plan, le second, l'effet de leurs directions, et le troisième l'effet de l'amplitude de la composante normale. La solution proposée utilise trois capteurs formant un triangle rectangle isocèle pouvant émettre et recevoir des modes S0 et A0.



### III. Conclusion

Dans ce chapitre, on a cherché à résoudre le problème acoustoélastique inverse (PAEI) dans le cas d'une contrainte triaxiale, homogène dans l'épaisseur et dans le plan de la plaque. Ce problème revient donc à trouver les quatre inconnues : les trois composantes de la contrainte et l'orientation du tenseur de contrainte dans le plan de la plaque. La résolution de ce problème repose sur notre compréhension du problème acoustoélastique direct.

Le problème direct comporte différents paramètres en plus des quatre inconnues du problème inverse, comme la fréquence et le choix de s'intéresser à la vitesse de groupe ou à celle de phase. Une inversion utilisant des courbes de dispersion en fonction des inconnues du PAEI telle que celle permettant d'obtenir la perte de l'épaisseur n'est pas applicable.

Nous avons utilisé le fait que les variations de vitesse en fonction de la contrainte, calculées par le modèle acoustoélastique (MAE) ou mesurées par l'expérience suivent des courbes d'allure voisine de fonctions usuelles ; pour développer une version réduite (analytique) du MAE, qui permet de résoudre le problème acoustoélastique inverse. Cette version écrit d'une manière explicite la variation de vitesse (des modes fondamentaux) induite par une contrainte triaxiale en fonction des coefficients indépendants de la contrainte, mais fonctions de la fréquence et propres à chaque mode (dits coefficients acoustoélastiques, CAE). Une erreur a été définie permettant d'estimer les déviations de cette version des prédictions du MAE. Cette erreur permet de déterminer les plages de fréquence dans lesquelles le modèle réduit est suffisamment précis pour être utilisées pour résoudre le PAEI.

La résolution du PAEI dans le cas d'une contrainte uniaxiale hors plan est la plus simple, car le problème ne contient qu'une inconnue scalaire et se ramène à un cas semblable à celui de la perte d'épaisseur. Elle est possible en utilisant une seule émission et réception d'un seul mode.

La résolution du PAEI dans le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan est plus complexe car le problème contient deux inconnues (en fait, une variable vectorielle). Trois solutions ont été proposées. La première (MI-mM) est bimodale, monofréquentielle et unidirectionnelle. La seconde (MI-mF) est monomodale, bifréquentielle et unidirectionnelle. La troisième (MI-mD) est monomodale, monofréquentielle et bidirectionnelle, les deux directions étant perpendiculaires.

La résolution du PAEI dans le cas triaxial repose sur l'utilisation d'une formule analytique qui se déduit de celles développée pour les deux cas uniaxiaux. Pour résoudre ce problème nous avons utilisé une méthode combinant la MI-mD et MI-mM. La résolution utilise trois capteurs formant un triangle rectangle isocèle émettant et recevant les modes S0 et A0, à une seule fréquence centrale.

Dans le chapitre suivant nous traitons le cas où la contrainte est inhomogène dans le plan de la plaque, en nous appuyant sur la version réduite (analytique) du MAE définie au présent chapitre.

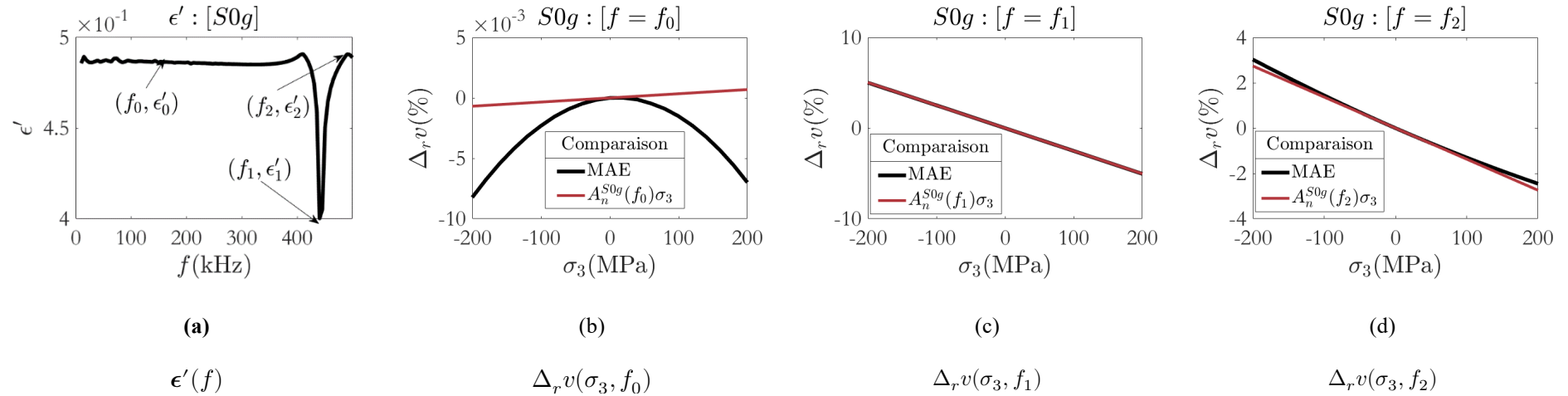
---

#### **Discussion : une version réduite du MAE plus précise (si nécessaire)**

---

La version réduite du MAE présentée dans le corps du chapitre permet de modéliser l'EAE induit pour les trois modes fondamentaux en utilisant trois paramètres (coefficients acoustoélastiques), dans la plage de fréquence avant la fréquence de coupure du mode S1. Si dans une application industrielle la fréquence d'excitation est au-delà de cette limite, ou bien les modes utilisés sont les modes d'ordre supérieur, et que la fréquence est proche de leurs fréquences de coupure, il est possible (comme on l'a pu voir dans ce chapitre) que cette version « simple » ne permet plus de prédire les résultats du MAE complet. C'est pour cette raison que dans l'annexe (A [p. 139]), nous présentons la résolution du PAEI avec une version réduite qui contient quatre coefficients acoustoélastiques, et qui est valide au-delà de cette fréquence et pour les modes d'ordre supérieur. Le CAE supplémentaire dans cette version décrit l'effet des directions des composantes de la contrainte dans le plan. La solution du PAEI avec cette version du MAE est similaire à celle avec la première (combinant les deux MI-mD et MI-mM), mais au lieu d'utiliser trois capteurs, on en utilise quatre, formant un carré.

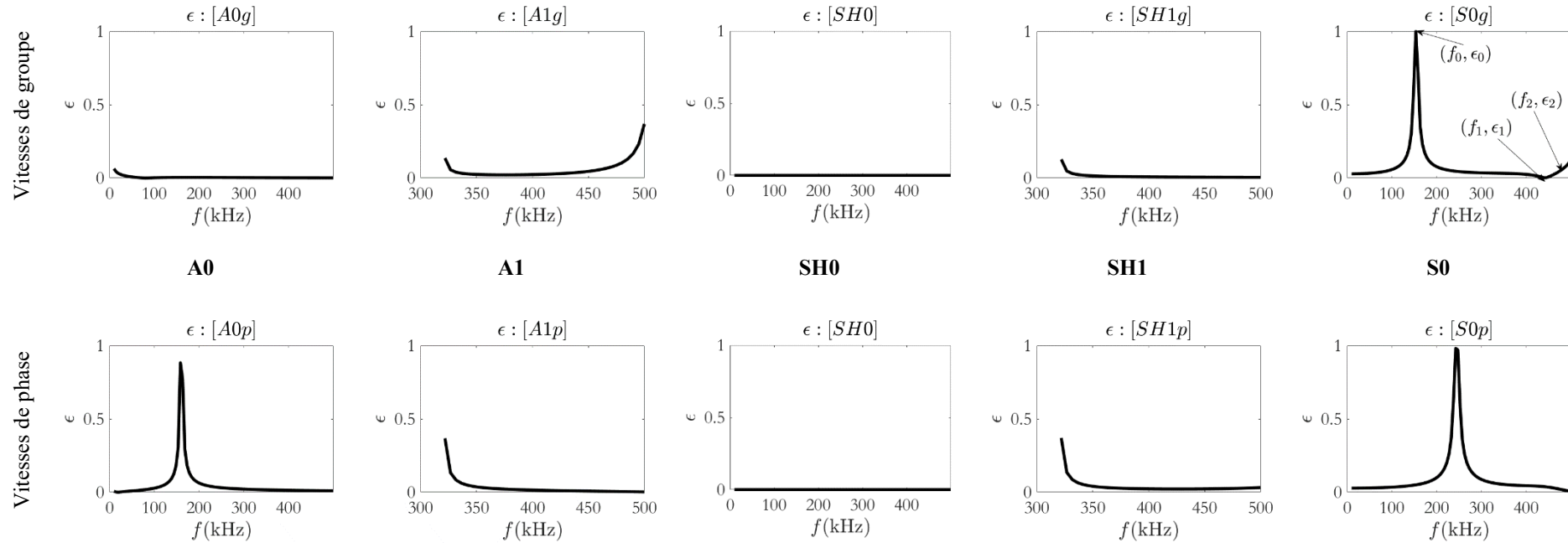
## IV. Annexe

 Erreur  $\epsilon'$  : cas uniaxial hors plan (voir II.A.1. [p. 111])


**An-Ch3-Fig. 1** : (a) Erreur  $\epsilon'$  en fonction de la fréquence  $f$  pour la vitesse de groupe du mode S0. (b),(c) et (d), variations relatives de vitesse en fonction de la contrainte  $\sigma_3$ . En noir, variations données par le modèle acoustoélastique (MAE), en rouge, celles estimées en utilisant la formule linéaire  $\Delta v_r(\sigma_3, f) = A_n^M(f)\sigma_3$ . La variation de vitesse est donnée à trois fréquences :  $f_0 = 153.3$ ,  $f_1 = 440.6$  et  $f_2 = 485$  kHz

Pour cette erreur, on a  $\epsilon'_1 < \epsilon'_0 < \epsilon'_2$  (**Fig-A3. 1**-(a)). On s'attend à avoir la meilleure correspondance entre les résultats du MAE et la formule analytique pour  $f = f_1$ . On s'attend également à ce que la correspondance pour  $f = f_0$  soit meilleure que celle pour  $f = f_2$ . Cependant, les résultats **Fig-A3. 1**-(b), (c), et (d)] montrent que la correspondance à  $f_2$  est meilleure qu'à  $f = f_0$ . Par conséquent, cette erreur ne peut pas être choisie du fait de son inconsistance.

Erreur commise entre MAE par celles données par la formule analytique (voir II.A.2 [p. 112]):  $A_n^M(f)\sigma_3$



An-Ch3-Fig. 2 : Erreur  $\epsilon$  pour les modes A0, A1, SH0, SH1 et S0.

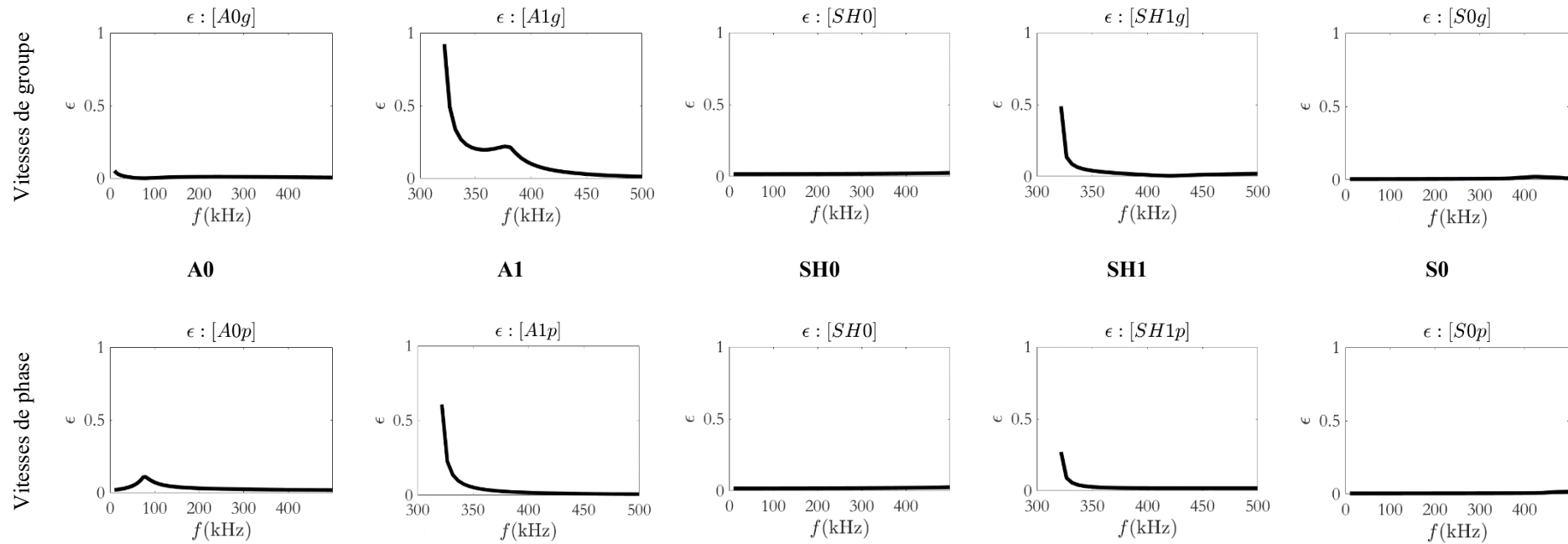
L'erreur est presque nulle pour le mode SH0, signifiant que les variations de vitesse sont quasiment linéaires. Du point de vue modélisation de l'EAE par la formule analytique, ce mode représente le meilleur choix pour être utilisé dans le développement de la méthode d'inversion. Cependant d'autres facteurs (discutés dans II-A.3 [p. 113]) doivent être considérés. D'autres choix possibles reviennent au mode A0 puis au mode SH1.

Pour un mode donné, l'erreur sur la vitesse de groupe diffère de celle sur la vitesse de phase, car l'effet de la contrainte sur la vitesse de groupe diffère de celui sur la vitesse de phase.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux modes fondamentaux, alors la plage de fréquence  $f = [250, 450]$  kHz est celle où l'erreur est la plus faible. Dans le cas des modes A1 et SH1 la plage  $f = [350, 450]$  kHz est celle où l'erreur est la plus faible

Erreur commise en approchant les variations de vitesse données par MAE, par celles données par la formule analytique (voir II.B.1 [p. 116]) :

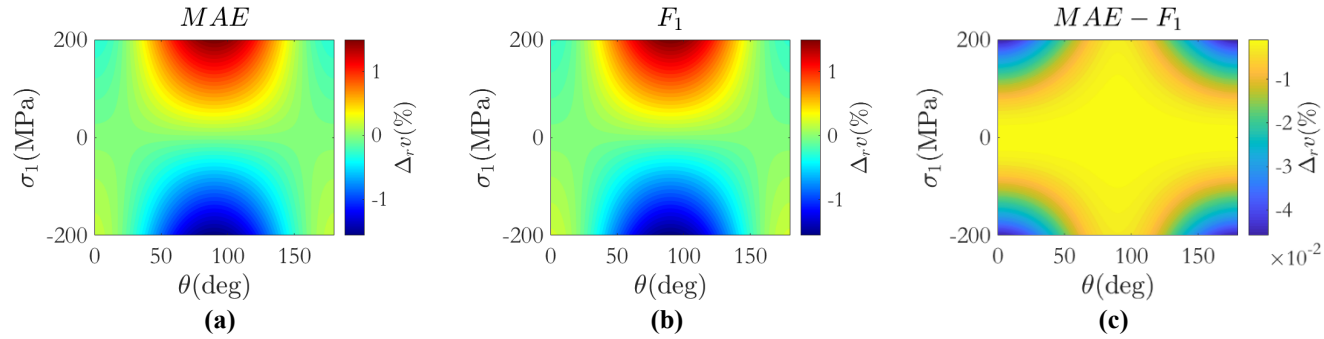
$$F_2(\sigma_1, f) = (A_p(f) + B_1(f) \cos(2\theta) + B_2(f) \cos(4\theta))\sigma_1$$



An-Ch3-Fig. 3 : l'erreur  $\epsilon$  pour les modes A0, A1, SH0, SH1 et S0.

L'erreur pour les modes fondamentaux est plus faible que celle pour les modes d'ordres supérieurs. Parmi ces modes, les deux modes symétriques SH0 et S0 ont une faible erreur. Si en plus leurs coefficients acoustoélastiques (CAE) sont importants, ces modes constitueront le premier choix pour le développement des méthodes d'inversion.

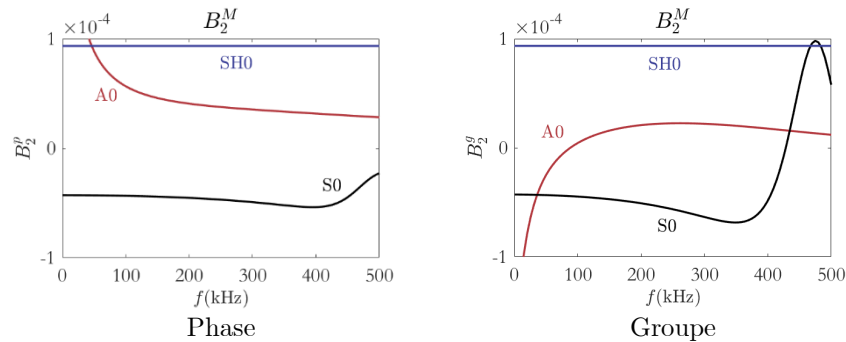
Déviatio entre le MAE et la formule  $F_1(\sigma_1, f) = (A_p(f) + B_1(f) \cos(2\theta))\sigma_1$ :



**An-Ch3-Fig. 4** : Variatio relative de vitesse de groupe du mode S0 en fonction de la contrainte et de la direction, pour une fréquence  $f_m = 421$  kHz. (à laquelle l'erreur est maximale) calculée par le MAE (a) et par la formule  $F_1$  (b). (c) Différence entre ces deux variatio.

On remarque que la déviatio entre la formule  $F_1$  et le MAE est suffisamment faible (presque deux ordres de grandeur en dessous de la variatio relative de vitesse) pour supposer que cette formule décrit bien la variatio de vitesse en fonction de la contrainte.

**Coefficient acoustoélastique  $B_2^M$**  (voir II.C.1 [p. 128])



**An-Ch3-Fig. 5** : CAE, en fonction de la fréquence identifié à partir de la formule (3-40) [p. 128].

Comme les CAE sont exprimés en %/MPa, une valeur de  $10^{-4}$  induira une variatio de vitesse, pour une contrainte de 100 MPa, de 0.01%. Cette variatio de vitesse est petite devant celles que peuvent induire le reste des CAE (qui est de l'ordre de 0.5%). Cependant on ne peut exclure qu'il y a peut-être des applications qui ont besoin d'une estimation très précise de la contrainte, obligeant à prendre en compte les CAE  $B_2^M$ . Dans ce cas, la formule (3-40) doit être utilisée pour résoudre le problème inverse, dont la résolution est présentée dans le paragraphe suivant.

**A. Résolution du problème direct en utilisant la formule :**

$$\begin{aligned} \Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, f) &= A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) \\ &+ [B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) + B_2^M(f) \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 \\ &- \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \end{aligned} \quad (3-55)$$

Dans la Sec II.C [p. 126] on a traité le problème acoustoélastique inverse en utilisant la formule (3-39) [p. 128], qui s'est montrée suffisamment précise (pour les modes fondamentaux dans la plage de fréquence [10, 500] kHz) pour fournir un bon compromis entre précision (sur l'estimation de la contrainte) et nombre de paramètres à identifier (*i.e.* les CAE, on a 3 CAE dans la formule (3-39) [p. 128]).

On note cependant que la validité de la formule (3-39) dépend de la fréquence et des modes. Si la contrainte possède un profil variable dans l'épaisseur, seule la formule (3-55) est capable de décrire les variations de vitesses (voir chapitre 2.IV-C [p. 68]).

Il est donc intéressant d'avoir la résolution du problème acoustoélastique inverse en utilisant cette formule.

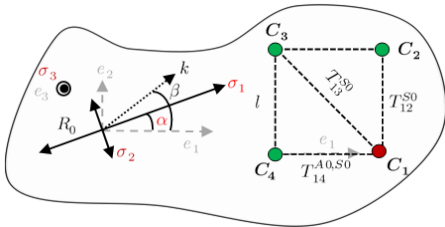
Pour cela, la même démarche que celle suivie dans Sec II.C [p. 126] est développée, à la différence qu'il nous faut quatre capteurs au lieu de trois (dans Sec II.C [p. 126]). Les capteurs forment un carré, et deux expériences sont faites pour trouver les quatre inconnues :  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$ .

### Première expérience :

Le capteur  $C_1$  joue le rôle d'émetteur, les trois autres de récepteurs.

L'émetteur génère les deux modes A0 et S0 à la même fréquence centrale.

Seule la réception du mode A0 par le capteur  $C_4$  est considérée.



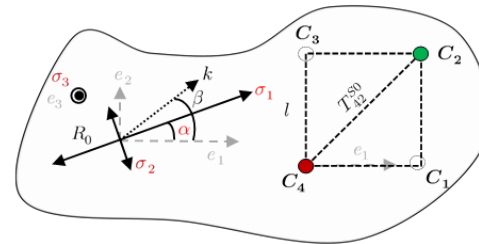
**An-Ch3-Fig. 6 :** Les quatre capteurs forment un carré de côté  $l$ . Le capteur  $C_1$  est un émetteur et les trois autres des récepteurs.

Cette expérience donne le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \Rightarrow \Delta_r v_{14}^{S0} = A_p^{S0}(\sigma_1 + \sigma_2) + \\ [B_1^{S0} \cos(2(\beta - \alpha)) + B_2^{S0} \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0} \sigma_3 \\ \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta_r v_{12}^{S0} = A_p^{S0}(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + \\ [-B_1^{S0} \cos(2(\beta - \alpha)) + B_2^{S0} \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0} \sigma_3 \\ \beta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \Delta_r v_{13}^{S0} = A_p^{S0}(\sigma_1 + \sigma_2) + \\ [-B_1^{S0} \sin(2(\beta - \alpha)) - B_2^{S0} \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0} \sigma_3 \\ \beta = 0 \Rightarrow \Delta_r v_{14}^{A0} = A_p^{A0}(\sigma_1 + \sigma_2) + \\ [B_1^{A0} \cos(2(\beta - \alpha)) + B_2^{A0} \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{A0} \sigma_3 \end{array} \right. \quad (3-56)$$

### Deuxième expérience :

Le capteur  $C_4$  joue le rôle d'émetteur et  $C_2$  celui de récepteur (les autres ne sont pas utilisés). Seul le mode S0 est généré à la même fréquence centrale que dans la première expérience.



**An-Ch3-Fig. 7 :** Les quatre capteurs forment un carré de côté  $l$ . Le capteur  $C_4$  est émetteur et les trois autres récepteurs.

On obtient :

$$\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta_r v_{42}^{S0} = A_p^{S0}(\sigma_1 + \sigma_2) + [B_1^{S0} \sin(2(\beta - \alpha)) - B_2^{S0} \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^{S0} \sigma_3 \quad (3-57)$$

La résolution de (3-56) et (3-57) donne :

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \\ \gamma + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (3-58)$$

tel que

$$\gamma = \text{atan} \left( \frac{\Delta_r v_{42}^{S0} - \Delta_r v_{13}^{S0}}{\Delta_r v_{14}^{S0} - \Delta_r v_{12}^{S0}} \right) \quad (3-59)$$

Pour simplifier, on prend  $\alpha = \gamma$  tout en notant qu'il suffit d'effectuer la réception du mode A0 dans la première expérience pour avoir une solution unique du problème acoustoélastique inverse. On a

$$\sigma_3 = \frac{A_p^{S0} \Delta_r v_{14}^{A0} - A_p^{A0} \Delta_r v_{14}^{S0} - A_p^{S0} Q + A_p^{A0} R}{A_p^{S0} A_n^{A0} - A_p^{A0} A_n^{S0}} \quad (3-60)$$

avec

$$Q = (\Delta_r v_{42}^{S0} - \Delta_r v_{13}^{S0}) \left[ \frac{B_1^{A0}}{2B_1^{S0} \tan(2\gamma)} + \frac{B_2^{A0}}{2B_1^{S0} \tan(4\gamma)} \right] \quad (3-61)$$

et

$$R = (\Delta_r v_{42}^{S0} - \Delta_r v_{13}^{S0}) \left[ \frac{1}{2 \tan(2\gamma)} + \frac{B_2^{S0}}{2B_1^{S0} \tan(4\gamma)} \right] \quad (3-62)$$

ce qui permet de trouver  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\Delta_r v_{14}^{S0} - R - A_n^{S0} \sigma_3}{A_p^{S0}} \right] + \left[ \frac{\Delta_r v_{14}^{S0} - \Delta_r v_{12}^{S0}}{2B_1^{S0} \cos(2\gamma)} \right] \right) \quad (3-63)$$

et

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\Delta_r v_{14}^{S0} - R - A_n^{S0} \sigma_3}{A_p^{S0}} \right] - \left[ \frac{\Delta_r v_{14}^{S0} - \Delta_r v_{12}^{S0}}{2B_1^{S0} \cos(2\gamma)} \right] \right) \quad (3-64)$$

Les variations relatives de vitesses sont données en fonction des temps de vol par :

$$\Delta_r v_{12}^{S0} = \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{l}{T_{12}^{S0}} - v_0^{S0} \right) \quad (3-65)$$

$$\Delta_r v_{14}^{S0} = \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{l}{T_{14}^{S0}} - v_0^{S0} \right) \quad (3-66)$$

$$\Delta_r v_{13}^{S0} = \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{l\sqrt{2}}{T_{13}^{S0}} - v_0^{S0} \right) \quad (3-67)$$

$$\Delta_r v_{42}^{S0} = \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{l\sqrt{2}}{T_{42}^{S0}} - v_0^{S0} \right) \quad (3-68)$$

$$\Delta_r v_{14}^{A0} = \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{l}{T_{14}^{A0}} - v_0^{A0} \right) \quad (3-69)$$





## 4. Méthode tomographique pour l'imagerie de la contrainte

### Résumé :

Dans le chapitre précédent nous avons traité la résolution du problème acoustoélastique inverse (PAE-I) dans le cas où la contrainte est multiaxiale, homogène dans le plan et dans l'épaisseur. Nous nous sommes basés sur une loi analytique obtenue à l'aide d'une étude paramétrique utilisant le modèle acoustoélastique (développé dans les deux premiers chapitres).

Dans ce chapitre, nous traitons la deuxième partie du PAE-I qui est concernée par l'inversion d'une contrainte multiaxiale inhomogène dans le plan de la plaque, mais homogène dans l'épaisseur. Nous développons pour cela plusieurs approches basées sur la loi analytique qui donne la variation de vitesse en fonction de la contrainte (développée au chapitre 3)

Après avoir défini la problématique du chapitre, on donne dans la sous-Sec.(III-A) les bases théoriques sur la technique d'imagerie par tomographie (*i.e.* la technique que nous employons pour résoudre le PAE-I) et les deux types de tomographie (par diffraction, par rayons courbes/droits). Dans la sous-Sec. (III-B) on présente les deux algorithmes utilisés dans les inversions tomographiques utilisant des propagations d'onde dont les trajectoires sont rectilignes : l'algorithme SART (pour simultaneous algebraic reconstruction technique) et l'algorithme FBP (pour filtered back projection) Dans la Sec IV., on souligne les différences entre l'inversion tomographique classique des grandeurs isotropes avec une seule inconnue, et l'inversion tomographique des objets anisotropes avec plusieurs inconnues. Dans la Sec. V, on présente le développement des différentes approches tomographiques, en utilisant l'algorithme FPB. Dans la sous-Sec. (V.A), on traite l'inversion d'une cartographie de contrainte uniaxiale hors plan et on montre que l'approche tomographique dans ce cas est identique à l'approche classique, puisque le problème à inverser est isotrope et contient une seule inconnue. Dans la sous-Sec. (V.B), on traite le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan. Dans ce cas, l'approche classique ne pourrait pas être utilisée puisque le problème contient deux inconnues et est anisotrope. L'approche développée utilise deux modes pour remonter aux valeurs des deux inconnues. Dans la sous-Sec. (V.C), on traite le cas d'une contrainte biaxiale dans / hors plan ; ce problème contient trois inconnues et est anisotrope. L'approche développée est similaire à celle du cas précédent, mais utilise cette fois trois modes. Dans la sous-Sec.(VII-B), on traite le cas d'une contrainte biaxiale dans le plan ; ce problème contient trois inconnues et est anisotrope. Cependant, l'approche développée précédemment ne permet pas de le résoudre. Une nouvelle approche est développée qui se déroule en deux étapes. Dans la première, on fait l'inversion de la somme des amplitudes des composantes de la contrainte biaxiale en utilisant deux modes. Dans la seconde, on utilise une version dérivée de l'algorithme FBP, nommée FBP-Fan-Beam pour inverser la direction, en utilisant un seul mode. Les résultats de ces deux étapes sont combinés pour retrouver les valeurs des amplitudes. Finalement, dans la sous-Sec.VII-C on traite le cas d'une contrainte triaxiale. Ce problème contient quatre inconnues et est anisotrope L'approche développée est similaire à celle du cas précédent mais fait appel à un mode supplémentaire à chaque étape.

## I. Introduction

L'étude au premier chapitre de la théorie d'acoustoélasticité nous a permis d'exprimer l'élasticité d'un milieu contraint par un tenseur de rigidité équivalent fonction du chargement initial. Nous avons montré que pour un matériau isotrope et un chargement triaxial, on peut écrire explicitement ce tenseur en fonction de la contrainte de Cauchy. Cette écriture permet d'étudier l'effet de la contrainte sur toute onde élastique (volume / surface, guidée, ...). L'étude du deuxième chapitre s'est concentrée sur le cas des ondes guidées (Lamb et SH). La méthode SAFE a été adaptée et utilisée pour étudier l'effet sur ces ondes d'une contrainte multiaxiale homogène dans l'épaisseur, puis inhomogène dans l'épaisseur. Ces chapitres constituent notre traitement du « problème acoustoélastique direct (PAED) », prenant en entrée la contrainte et donnant en sortie ses effets sur les ondes de Lamb et SH (variations des vitesses et déplacements modaux).

Le résolution du problème acoustoélastique inverse (PAEI) nécessite de chercher des méthodes permettant de trouver la contrainte en fonction de données (mesurées, calculées...) de variations de vitesse. Dans le chapitre 3, nous avons proposé une version réduite (analytique) du modèle acoustoélastique (MAE) développé dans les deux premiers chapitres. Cette version, –valide sous certaines conditions– a permis de résoudre le PAEI dans le cas d'une contrainte homogène (dans le plan et dans l'épaisseur). Elle exprime les variations de vitesses induites par la contrainte sous la forme analytique suivante :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (4-1)$$

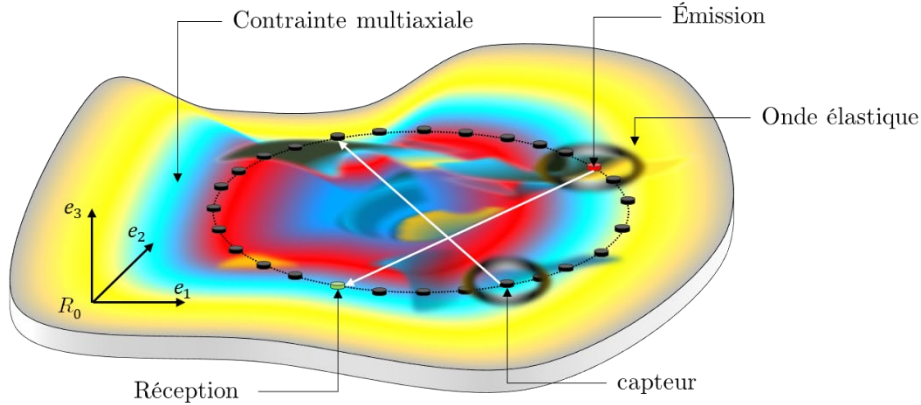
où  $\Delta_r v^M$  est la variation relative de vitesse (par rapport à l'état non contraint), pour un mode  $M$  (de Lamb/SH),  $A_p^M, B_1^M, A_n^M$  sont des coefficients qui dépendent de la fréquence ( $f$ ) et propres à chaque mode, dits coefficients acoustoélastiques,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les trois composantes principales de la contrainte,  $\beta, \alpha$  sont les angles qui repèrent la direction de propagation de l'onde et la direction de la composante  $\sigma_1$  de la contrainte dans un repère  $R_0$  lié à la plaque. Nous avons montré que pour résoudre le PAEI avec cette expression, on peut utiliser deux modes générés à la même fréquence centrale se propageant dans trois directions particulières. Le chapitre 3 constitue la base de la résolution du problème acoustoélastique inverse.

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à la résolution du PAEI quand la contrainte multiaxiale est homogène dans l'épaisseur mais inhomogène dans le plan de la plaque.

## II. Problématique du chapitre

Considérons une plaque présentant un état de contrainte multiaxial inhomogène dans le plan de la plaque mais homogène dans son épaisseur. Les propriétés élastiques du matériau de la plaque et son épaisseur en absence de contrainte sont supposées connues, définissant l'état de référence. On suppose être en mesure d'émettre et de recevoir sélectivement des ondes de Lamb et SH dans la plaque. Le problème à résoudre (illustré Fig. 4.1) est formulé ainsi :

« *Trouver des méthodes permettant de caractériser la contrainte multiaxiale en chaque point, en utilisant les temps de vol de modes de Lamb et/ou SH entre des émetteurs et des récepteurs* ».



**Fig. 4-1** : Une plaque présente un état de contrainte multiaxial homogène dans l'épaisseur et inhomogène dans le plan. Le repère  $R_0$  est lié à cette plaque. Des traducteurs sont utilisés pour émettre et recevoir des ondes guidées (Lamb/SH).

Le terme traducteur désigne ici un dispositif capable d'émettre et/ou recevoir des ondes élastiques ; il peut s'agir d'une pastille PZT, d'un patch magnétostrictif, d'un EMAT... Les méthodes d'inversion développées dans ce chapitre sont indépendantes de la nature du capteur.

La Fig. 4.1 montre des traducteurs disposés sur un cercle, cette configuration illustrant le fait que plusieurs émetteurs et récepteurs sont potentiellement utilisés, ou un seul émetteur et un seul récepteur occupant différentes positions (avec un déplacement rendu possible si ces traducteurs ne sont pas collés à la pièce, comme ce peut être le cas si des EMAT sont utilisés).

L'inhomogénéité de la contrainte multiaxiale est représentée par les inhomogénéités des trois composantes de celle-ci ( $\sigma_1(x, y, z), \sigma_2(x, y, z), \sigma_3(x, y, z)$ ) et de sa direction définie par un angle unique  $\alpha(x, y, z)$ , toutes fonctions de la position  $(x, y, z)$  dans la plaque. Puisque l'on suppose que la contrainte possède un profil constant dans l'épaisseur  $z$ , les quatre variables ne dépendent pas de la position dans l'épaisseur  $z$ . La résolution du PAEI revient donc à former les quatre cartographies  $\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y), \sigma_3(x, y)$  et  $\alpha(x, y)$ .

La Fig. 4.1 représente une contrainte inhomogène par une cartographie qui s'étale sur toute la plaque, notamment au niveau des traducteurs. L'effet de la contrainte sur le fonctionnement des traducteurs et ses conséquences sur la méthode d'inversion sont discutés brièvement dans ce chapitre et l'effet sur les EMAT en particulier est discuté en détail dans le chapitre 6. Finalement dans la Fig. 4.1 des flèches sont tracées afin d'illustrer la propagation de l'onde élastique entre l'émetteur et le récepteur. Dans le cas général, la propagation d'une onde élastique dans un milieu où les propriétés élastiques sont inhomogènes n'est pas rectiligne et s'accompagne de diffraction.

Dans la section suivante, nous présentons le cadre général de la technique d'imagerie avec laquelle nous voulons résoudre le PAEI, et les hypothèses sous lesquelles cette inversion est possible.

### III. La tomographie

La méthode que l'on développe dans ce chapitre pour résoudre le PAEI repose sur la technique d'imagerie tomographique. Cette technique permet de reconstruire une coupe (*slice*) bidimensionnelle d'une propriété physique (par expl. la densité, l'indice de réfraction d'une onde EM, la résistance électrique, ...) ou géométrique (par expl. une perte d'épaisseur) d'un objet, à partir des mesures de certaines grandeurs qui sont sensibles à sa variation (par expl. la vitesse de propagation d'une onde élastique/acoustique, l'atténuation du rayonnement électromagnétique, l'intensité d'un courant électrique, ...).

L'exemple le plus connu de cette technique est l'imagerie par rayon-X (radiographie), dans laquelle la propriété physique imagée est la densité du milieu (la capacité du milieu à absorber le rayonnement électromagnétique) et la grandeur mesurée est l'atténuation du faisceau électromagnétique (rayon-X).

L'imagerie par ondes élastiques est un autre exemple, dans lequel la propriété physique à imager peut être la densité du milieu, son élasticité, ou une hétérogénéité, et la grandeur mesurée est la vitesse de propagation de ces ondes.

L'imagerie par tomographie repose sur deux éléments :

1. La capacité à modéliser la loi qui lie la propriété physique de l'objet qu'on veut imager et la grandeur mesurée.

Par exemple dans le cas de l'imagerie par rayon-X, cette loi est celle de Beer-Lambert, donnée ici :

$$I = I_0 e^{-\mu s} \quad (4-2)$$

où  $I, I_0$  représentent les intensités du faisceau monochromatique avant et après avoir interagi avec l'objet (propriété physique) à imager,  $\mu$  est le coefficient d'atténuation linéaire et  $s$  désigne la position d'un point qui se trouve sur la trajectoire (rectiligne) du faisceau lumineux entre l'émetteur et le récepteur.

2. La capacité à inverser cette loi.

Si le faisceau s'est propagé dans le milieu (le vide est exclu) sur une trajectoire de longueur  $L$  alors la propriété à imager  $\mu$  est donnée en fonction de la grandeur mesurée  $I$  par :

$$\mu = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{I_0}{I} \right) \quad (4-3)$$

#### A. Approches tomographiques

Pour mieux comprendre les différentes approches tomographiques, on présente ici quelques phénomènes physiques qui émergent lors de la propagation d'une onde (élastique, électromagnétique, acoustique,...) dans un milieu donné.

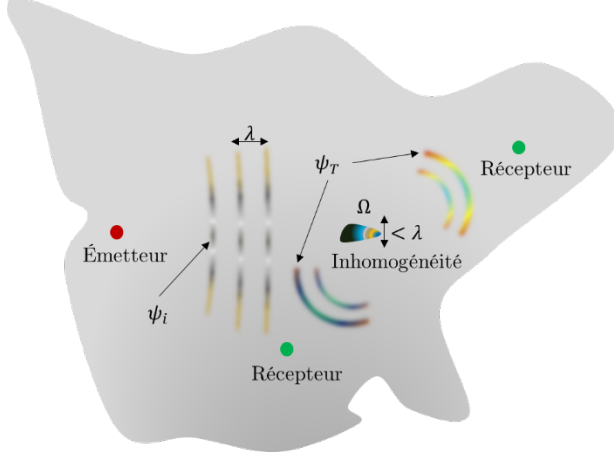
- **Diffraction** : une onde qui interagit avec un obstacle ou une ouverture dont les dimensions sont plus petites que sa longueur d'onde, est renvoyée dans toutes les directions (par ex. une onde plane passant à travers une ouverture de dimension inférieure à sa longueur d'onde se transforme en une onde sphérique).
- **Réfraction** : une onde traversant une interface entre deux milieux de propriétés physiques différentes change de direction de propagation. La direction de réfraction est donnée par exemple par la loi de Snell-Descartes. Elle prend place lors de la propagation dans un milieu aux propriétés physiques inhomogènes.

Suivant l'importance quantitative de ces phénomènes, différentes approches d'imagerie par tomographie doivent être développées pour former des images précises. Ces approches sont indépendantes de la nature

de l'onde (acoustique, élastique, électromagnétique, ...), cependant la bibliographie présentée dans cette section s'intéresse essentiellement aux travaux impliquant la propagation d'ondes élastiques.

### 1. Tomographie par diffraction

La tomographie par diffraction est une technique d'imagerie utilisée si l'objet qu'on veut imager a des dimensions caractéristiques plus petites que la longueur d'onde et que le contraste entre ses propriétés et celles du milieu ambiant est important<sup>1</sup>. On donne ici le formalisme mathématique de cette technique (pour plus de détails voir Kak & Slaney [110] et Müller *et al.* [111]).



**Fig. 4-2** : diffraction par une petite inhomogénéité d'une onde (acoustique, élastique, électromagnétique, ...), dont le champ incident est noté  $\psi_i$  et le champ total diffracté  $\psi_T$ .

Soit un milieu homogène partout, sauf sur un volume  $\Omega$ . Soit  $p_o$  l'une des propriétés physiques/géométriques de ce milieu (*e.g.* densité, élasticité, perméabilité magnétique, épaisseur ...) en dehors de  $\Omega$ . Cette propriété est supposée connue. Le volume  $\Omega$  est illuminé par une onde (acoustique, élastique, ...) dont la longueur d'onde  $\lambda$  est supérieure aux dimensions caractéristiques de  $\Omega$ . Le champ incident de cette onde est noté  $\psi_i$  et le champ diffracté (après interaction avec l'inhomogénéité) est noté  $\psi_T$ . L'objectif de la tomographie par diffraction est d'extraire du champ  $\psi_T$  l'information qui provient de l'inhomogénéité. On étudie ici la propagation des ondes dans un milieu faiblement inhomogène.

L'équation d'onde est écrite dans le domaine fréquentiel (équation d'Helmholtz inhomogène) :

$$[\nabla^2 + k^2]\psi_T = 0 \quad (4-4)$$

La dépendance de  $\psi_T$  et  $k$  avec la position n'est pas notée.  $k$  est le nombre d'onde donné par :

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (4-5)$$

$\omega$  et  $v$  sont la pulsation et la vitesse de l'onde.

On définit l'indice de réfraction  $n$  pour l'inhomogénéité  $\Omega$  par :

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{v_0}{v} \quad (4-6)$$

avec  $k_0$  et  $v_0$  le nombre d'onde et la vitesse dans le même milieu sans l'inhomogénéité.

Pour faire apparaître l'effet de l'inhomogénéité, on remplace  $k$  par  $nk_0$  dans l'Éq.(4-4) réécrite comme :

$$[\nabla^2 + k_0^2]\psi_T = -k_0^2(n^2 - 1)\psi_T \quad (4-7)$$

<sup>1</sup> Nous établirons plus loin de manière plus quantitative quand il est nécessaire d'utiliser la tomographie par diffraction.

Dans le cas où l'inhomogénéité est absente on a  $\psi_T = \psi_i$  et  $n = 1$  et l'équation d'onde est :

$$[\nabla^2 + k_0^2]\psi_i = 0 \quad (4-8)$$

Les propriétés physiques/géométriques du milieu ambiant étant connues, il est possible de connaître  $\psi_i$  partout (en particulier à l'endroit où opère le récepteur).

Le champ détecté par le récepteur est  $\psi_T$ , réécrit comme la somme du champ incident (connu)  $\psi_i$  et d'un deuxième champ provenant *uniquement* de l'effet de l'inhomogénéité, noté  $\psi$ , que l'on cherche à connaître.

En remplaçant maintenant dans le terme de gauche de l'Éq.(4-7),  $\psi_T$  par  $\psi_i + \psi$ , et en notant que  $\psi_i$  vérifie (4-8), on trouve :

$$[\nabla^2 + k_0^2]\psi = -k_0^2(n^2 - 1)\psi_T \quad (4-9)$$

Si l'inhomogénéité est assimilable à un point ( $\Omega = 0$ ) alors la solution de (4-9) est obtenue en supposant que l'inhomogénéité ponctuelle joue le rôle d'une source secondaire. Cette solution est donnée en fonction de la fonction de Green. Dans le cas où  $\Omega \neq 0$  la solution est obtenue comme une sommation des solutions pour le cas des inhomogénéités ponctuelles. Cette solution est donnée sous la forme intégrale suivante (Kak & Slaney [110]) :

$$\psi(r) = \int_{\Omega} k_0^2(n(r')^2 - 1)\psi_T(r') \cdot g(r - r')dr' \quad (4-10)$$

où  $r$  est la position, et où la fonction de Green  $g$  est donnée par :

$$g(r, r') = \frac{e^{ik_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (4-11)$$

Une solution directe de l'Éq.(4-10) n'est pas possible, du fait que le champ  $\psi$  (qu'on veut obtenir) se trouve également dans l'intégrant. Pour pallier ce problème, la technique de tomographie par diffraction fait appel à quelques approximations, les plus connues étant celles de Born ou de Rytov (voir Beydoun [112]).

- **Approximation de Born du premier ordre (nommée ici approximation de Born) :**

Réécrivons l'Éq.(4-10) en fonction de  $\psi_i$  et  $\psi$  :

$$\psi(r) = \int_{\Omega} k_0^2(n(r')^2 - 1)\psi_i(r') \cdot g(r - r')dr' + \int_{\Omega} k_0^2(n(r')^2 - 1)\psi(r') \cdot g(r - r')dr' \quad (4-12)$$

Dans l'approximation de Born, le champ  $\psi$  est supposé petit devant le champ incident  $\psi_i$ . La deuxième intégrale de l'équation ci-dessus est alors négligée. Cela permet donc de trouver le champ  $\psi$  en fonction de  $n$  et  $\psi_i$ . La tomographie par diffraction résout le problème inverse (*i.e.* trouver  $n$  en fonction de  $\psi$  et  $\psi_i$ ).

Cette approximation cependant n'est pas valide si le déphasage entre  $\psi_i$  et  $\psi_T$  est supérieur à  $\pi$  (Réf [110]).

- **Approximation de Rytov (Samuelides [113])**

Dans cette approximation, le champ  $\psi_T$  est donné par une phase complexe  $\psi_T = e^{\phi_T}$  (avec  $\psi = e^{\phi}$  et  $\psi_i = e^{\phi_i}$ ). Cette approximation a un domaine de validité plus étendu que celui de l'approximation de Born, et est donnée par (Réf [110]) :

$$n - 1 \gg \left( \frac{\lambda \nabla \phi}{2\pi} \right)^2 \quad (4-13)$$

Sa validité ne dépend pas de la phase du champ  $\psi$  (et donc du déphasage entre ce champ et le champ incident, ce dont dépend la validité de l'approximation de Born) mais de sa variation spatiale (*i.e.*  $\nabla\phi$ ) sur une longueur d'onde.

Sous ces deux approximations, la technique de tomographie par diffraction a été utilisée pour traiter plusieurs problèmes, en particulier en ultrasons. On donne ci-dessous une liste non exhaustive de travaux utilisant cette technique.

Belanger *et al* [114] travaillent avec l'approximation de Born et traitent la caractérisation de la perte d'épaisseur d'une plaque d'aluminium, en utilisant la variation de vitesse du mode A0. Cette perte est modélisée par deux défauts cylindriques dont les profondeurs sont 50% et 30% de l'épaisseur de la plaque. Chan *et al* [115] traitent de la caractérisation d'un défaut de laminage d'une plaque d'aluminium. Des pastilles PZT sont utilisées pour émettre et recevoir le mode A0.

Il arrive que le contraste entre l'indice de réfraction de l'objet à imager et celui du milieu ambiant est tel que les deux approximations (Born et Rytov) ne sont plus valides. C'est le cas du contraste entre la vitesse des ondes élastiques dans les tissus musculaires (milieu ambiant) et dans les os (objet à imager). Dans ce cas, d'autres moyens sont employés pour mieux prendre en compte l'effet de la diffraction. Par exemple Lasaygues *et al* [116] utilisent une approximation de Born d'ordre supérieur, dite Distorted Born Diffraction Tomography (DBDT), pour imager des os humains (vertèbres, fémurs, et fibules). Falardeau & Belanger [117] traitent un problème similaire (utilisant un modèle d'os), avec un algorithme d'imagerie différent, dit HARBUT<sup>1</sup> (Huthwaite [118]) utilisant à la fois la tomographie de diffraction et celle des rayons courbes (décrite dans plus de détails au paragraphe suivant).

## 2. Tomographie par rayons

La technique de tomographie par rayons se base sur l'hypothèse que les dimensions caractéristiques de l'objet à imager sont plus grandes que la longueur d'onde, donc par nature « haute fréquence » (petite longueur d'onde).

Quand cette hypothèse est vérifiée, la diffraction est négligeable et la propagation de l'onde (acoustique, élastique, ...) respecte alors les lois de Snell-Descartes de la réfraction. La trajectoire suivie par l'onde entre deux points est appelée « rayon ». En milieu homogène et isotrope, cette trajectoire est rectiligne avec des vitesses de phase et de groupe colinéaires. En milieu inhomogène, la trajectoire est courbée et est tangente, en chaque position, à la direction de la vitesse de groupe.

La tomographie par rayons se base sur deux équations : *eikonale* et transport. La première régit le temps de propagation de l'onde, la seconde, son amplitude. Ces deux équations dérivent de l'équation d'onde, quand la fréquence tend vers l'infini. Partant de l'équation d'onde (4-4) (dans le contexte de la tomographie par rayons, champ incident  $\psi_i$  et champ réfracté ne font qu'un et on choisit la notation  $\psi$  pour les deux),

$$[\nabla^2 + k^2]\psi = 0 \quad (4-14)$$

on cherche une solution de la forme :

$$\psi(r, \omega) = \psi_0(r)e^{i\omega T(r)} \quad (4-15)$$

avec  $T$  le temps de vol et  $r$  la position.

On rappelle que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux variables scalaires et  $\mathbf{A}$  un vecteur, alors

$$\nabla(\alpha\beta) = \beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta, \quad \nabla \cdot (\alpha\mathbf{A}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\alpha \quad (4-16)$$

En utilisant ces deux relations, on peut réécrire  $\nabla^2\psi$  sous la forme suivante (pour alléger l'écriture, la dépendance en  $r$  est omise dans les manipulations algébriques qui suivent) :

---

<sup>1</sup> Hybrid Algorithm for Robust Breast Ultrasound Tomography

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \psi &= \nabla \cdot \nabla (\psi_0 e^{i\omega T}) = \nabla \cdot [e^{i\omega T} \nabla \psi_0 + i\omega e^{i\omega T} \psi_0 \nabla T] = \nabla \cdot [e^{i\omega T} \nabla \psi_0] + \nabla \cdot [i\omega e^{i\omega T} \psi_0 \nabla T] = \\
 &= e^{i\omega T} \nabla^2 \psi_0 + i\omega e^{i\omega T} \nabla T \cdot \nabla \psi_0 + i\omega e^{i\omega T} \psi_0 \nabla^2 T + i\omega \nabla (e^{i\omega T} \psi_0) \cdot \nabla T \\
 &= e^{i\omega T} \nabla^2 \psi_0 + i\omega e^{i\omega T} \nabla T \cdot \nabla \psi_0 + i\omega e^{i\omega T} \psi_0 \nabla^2 T + i\omega [e^{i\omega T} \nabla \psi_0 + i\omega e^{i\omega T} \psi_0 \nabla T] \cdot \nabla T
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

Ce qui donne

$$\nabla^2 \psi = (-\omega^2 \psi_0 |\nabla T|^2 + i\omega [2\nabla T \cdot \nabla \psi_0 + \psi_0 \nabla^2 T] + \nabla^2 \psi_0) e^{i\omega T} \tag{4-18}$$

En remplaçant  $\nabla^2 \psi$  par cette valeur et  $k$  par  $\omega/c$  dans l'Éq.(4-14) on trouve :

$$\left( \omega^2 \left( \frac{1}{v^2} - |\nabla T|^2 \right) \psi_0 + i\omega [2\nabla T \cdot \nabla \psi_0 + \psi_0 \nabla^2 T] + \nabla^2 \psi_0 \right) e^{i\omega T} = 0 \tag{4-19}$$

Si l'on fait tendre la fréquence vers l'infini ( $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow \infty$ ), donc pour une longueur d'onde petite devant les dimensions caractéristiques de l'objet à imager, on va pouvoir négliger la diffraction : le dernier terme de l'équation précédente ( $\nabla^2 \psi_0$ ) peut être négligé (cette approximation représente « the first order ray theory » décrite par exemple par Červený [119]). Les deux termes restants donnent les équations *eikonale* et de transport (Réf. [119]) :

*Eikonale* :

$$\frac{1}{v^2} - |\nabla T|^2 = 0 \tag{4-20}$$

Transport

$$2\nabla T \cdot \nabla \psi_0 + \psi_0 \nabla^2 T = 0 \tag{4-21}$$

La méthode d'inversion que nous voulons développer utilise des variations de temps de vol. Nous nous intéressons dorénavant uniquement à l'équation *eikonale*, la vitesse apparaissant dans l'équation étant celle de groupe, car elle permet de définir des temps de vol.

L'équation eikonale, à la base des méthodes tomographiques par temps de vol, est donc une approximation haute fréquence de l'équation d'onde. Cette approximation représente la théorie des rayons (ray theory), dans laquelle l'onde suit une trajectoire courbée dans un milieu inhomogène. Červený [119] donne les trois critères suivants pour considérer qu'elle est valide :

1. la longueur d'onde est petite devant les dimensions caractéristiques de l'objet à imager ;
2. La théorie n'est pas valide au voisinage des caustiques<sup>1</sup> ;
3. les longueurs caractéristiques de l'objet à imager doivent être plus petites que la largeur de la première zone de Fresnel.

Suivant les dimensions caractéristiques de l'objet à imager nous pouvons être amenés à travailler à des fréquences au-delà de la limite de validité de la version réduite du modèle acoustoélastique (celle qui contient trois coefficients acoustoélastiques (CAE)). Pour vérifier la première condition de la validité de la théorie des rayons il est possible d'utiliser la version réduite du MAE qui contient quatre CAE (voire annexe chapitre 3). On suppose cependant dans ce chapitre que les dimensions caractéristiques de l'objet à imager sont plus grandes que les longueurs d'onde des modes fondamentaux dans la plage de fréquence où la version réduite du MAE (avec 3 CAE) est valide.

La validité de la deuxième condition nous impose de placer les traducteurs loin des caustiques. Cependant dans le problème acoustoélastique inverse, la contrainte n'étant pas connue, il est impossible de savoir si les rayons risquent de former des caustiques, et si c'est le cas, d'en connaître les positions. Pour pallier cette difficulté, les modes et fréquences d'excitation utilisés dans l'inversion doivent être choisis de façon à ce que l'effet acoustoélastique ( $\approx$  l'indice de réfraction) soit assez grand pour qu'il soit mesurable, et

<sup>1</sup> Une caustique, est une courbe / surface à laquelle tous les rayons sont tangents. Elle peut résulter de réflexions (par ex. réflexion d'une onde lumineuse plane sur un miroir circulaire), ou de la réfraction (par ex. les rayons lumineux traversant une surface d'eau agitée).



assez petit pour qu'il n'y ait pas intersection de deux rayons (formation d'une caustique) sur la distance de propagation entre l'émetteur et le récepteur (ce qui suggère le rapprochement de l'émetteur et du récepteur).

La troisième condition fait référence à la notion de volume de Fresnel, dont il importe de rappeler la définition pour examiner les conditions de sa validité fournie par la Réf. [119] : soit une source ponctuelle  $S$  émettant une onde – monochromatique – de fréquence  $f$  et soit un point récepteur  $R$ , alors le volume de Fresnel est défini par l'ensemble des points  $M$  vérifiant :

$$|T(S \rightarrow M \rightarrow R) - T(S \rightarrow R)| < \frac{1}{2f} \quad (4-22)$$

où  $T(S \rightarrow R)$  désigne le temps de vol d'une trajectoire reliant  $S$  à  $R$  et  $T(S \rightarrow M \rightarrow R)$  celui d'une trajectoire reliant  $S$  à  $R$  et passant par  $M$ .

Un rayon n'est pas une entité physique mais un objet mathématique (ligne droite ou courbée) visant à représenter la propagation de l'onde, déformation dynamique dans le domaine spatial. Le champ de l'onde émise par une source  $S$  et mesurée en un point  $P$  dépend non seulement de ce que cette onde a rencontré le long du rayon entre  $S$  et  $P$  mais de tout ce qu'elle a rencontré dans le volume de Fresnel (Réf. [119]). En rappelant que pour la résolution de l'équation d'onde on a choisi un champ  $\psi = \psi_0 e^{i\omega T} = \psi_0 e^{i2\pi f T}$ , et en remplaçant  $1/f$  par  $T_p$  (période de l'onde) dans la définition du volume de Fresnel, ce dernier est le lieu des points introduisant un déphasage temporel inférieur à la demi-période de l'onde. Cette condition est similaire à celle introduite pour établir la validité de l'approximation de Born dans le cas de la tomographie par diffraction. Pour les milieux homogènes<sup>1</sup> le volume de Fresnel est une ellipsoïde (et une ellipse dans le cas 2D) de petit axe  $b$  donné par Réf. [119] :

$$b = \sqrt{\lambda L \left(1 + \frac{\lambda}{4L}\right)} \quad (4-23)$$

où  $L$  est la distance entre la source et le récepteur (le milieu étant homogène, cette distance est égale à la longueur du segment [SR]) et  $\lambda$  la longueur d'onde.

À haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$ ) le petit axe  $b$  (largeur du volume de Fresnel) tend vers  $\sqrt{\lambda L}$  et représente la limite de résolution pour la tomographie par rayons. La Fig. 4.3-a schématise le volume de Fresnel dans le cas d'un milieu homogène et la Fig. 4.3-b le volume dans le cas inhomogène. La Fig. 4.3-c présente le cas d'un milieu homogène d'indice de réfraction  $n_0$ , et une inhomogénéité de volume  $\Omega$  et d'indice de réfraction  $n$ . Cette inhomogénéité se trouve sur la trajectoire de l'onde entre la source et le récepteur. Son indice de réfraction est variable dans la direction  $e_1$  (*i.e.* la direction définie par celle du segment [SR]), et constant dans la direction  $e_2$  (*i.e.* direction du petit axe du volume de Fresnel) sur une largeur plus grande que  $\sqrt{\lambda L}$ . Dans ce cas, la condition de validité de la théorie des rayons est vérifiée.

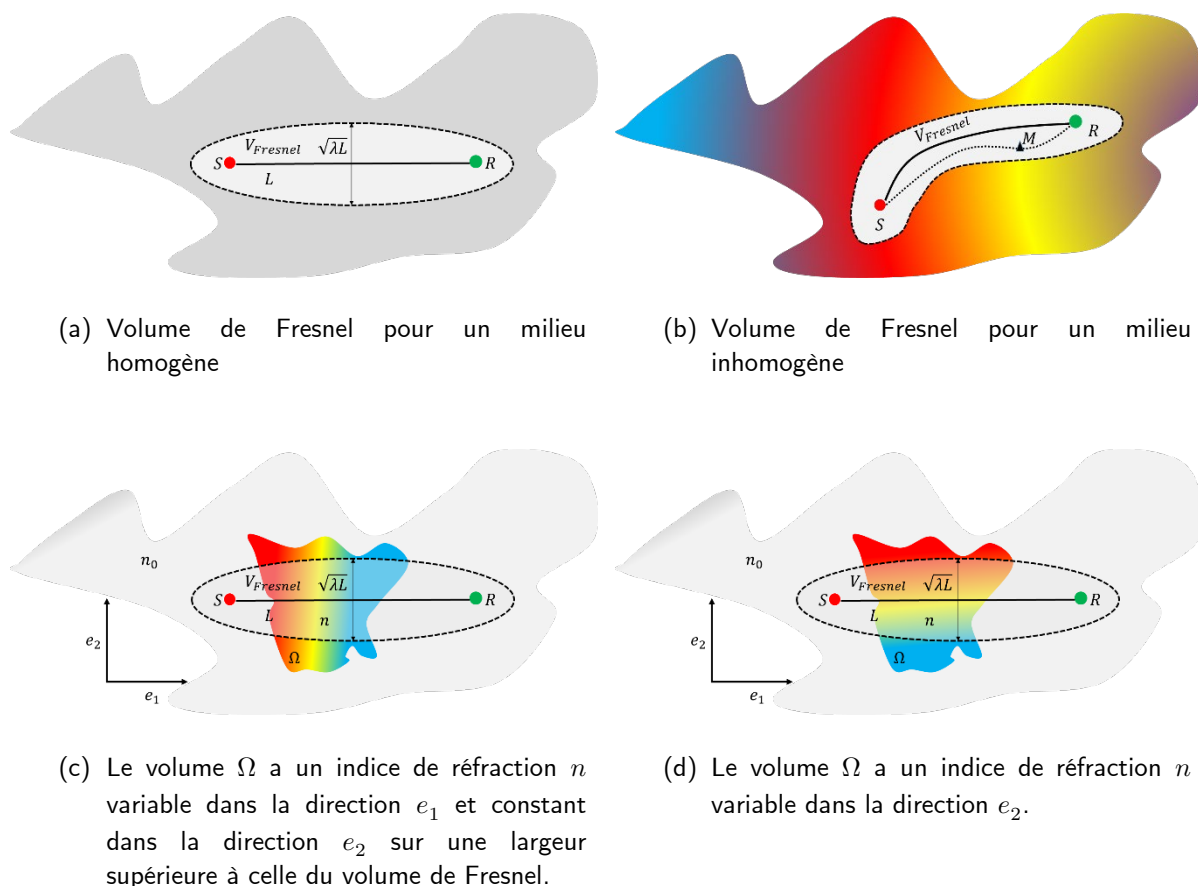
La Fig. 4.3-d présente le cas où l'indice de réfraction de l'inhomogénéité est constant dans la direction  $e_1$  mais variable dans la direction  $e_2$  sur la largeur  $\sqrt{\lambda L}$ . Dans ce cas la condition 3 n'est pas vérifiée et le champ de l'onde mesuré par le récepteur  $R$  contient une information qui moyenne l'indice de réfraction sur la largeur de Fresnel.

En faisant la rotation du couple émetteur-récepteur autour de l'inhomogénéité on peut voir que l'indice de réfraction doit être constant sur un disque (sphère pour le cas 3D) de diamètre  $\sqrt{\lambda L}$ , ce qui définit ainsi la résolution de la tomographie par rayons.

Dans le cas général d'une distance entre l'émetteur et le récepteur plus grande que la longueur d'onde ( $L > \lambda$ ) on peut dire que la condition 3 peut remplacer la condition 1 (voir la page précédente).

Pour améliorer donc la résolution de la tomographie par rayons, il faut réduire la distance entre l'émetteur et le récepteur, ou bien la longueur d'onde (donc travailler à plus haute fréquence).

<sup>1</sup> Pour les matériaux homogènes anisotropes le volume de Fresnel dépend de la direction.



**Fig. 4-3** : Différents volumes de Fresnel suivant les cas considérés.

Il existe deux techniques de tomographie se basant sur la validité de la théorie des rayons :

1. *la tomographie par rayons courbes* (TRC) : dans cette technique la courbure de la trajectoire de l'onde est prise en compte ;
2. *la tomographie par rayons droits* (TRD) : dans cette technique la trajectoire de l'onde est supposée rectiligne. Cette technique est à la base de l'imagerie par rayons-X, (voir Deans [120] et Zeng [121]).

On donne ci-après une liste non exhaustive de travaux utilisant ces techniques pour faire de l'imagerie par ondes acoustiques / élastiques.

Javaherian *et al* [122] traitent l'échographie du sein. Un modèle de variation de vitesse est considéré dans lequel la vitesse du son de l'objet à imager varie entre 1470 m/s et 1580 m/s, et celle du milieu ambiant (l'eau) est de 1500 m/s, ce qui fait une variation relative de vitesse totale de  $\approx 7\%$ .

Les auteurs comparent la tomographie par rayons courbes et à celle par rayons droits. Les résultats montrent d'une part que les deux techniques donnent une information pertinente de l'objet à imager, et d'autre part que l'inversion par la TRC est meilleure que celle par la TRD. L'amélioration est essentiellement due au fait qu'avec la TRC les interfaces entre deux milieux d'indices de réfractifs différents sont plus marquées. Hormati *et al* [123] traitent un problème similaire (échographie d'un modèle du sein), utilisant uniquement la TRC. Dans les travaux (Réf. [122-123]) le modèle utilisé contient des détails plus petits que la largeur du volume de Fresnel ; les résultats montrent que la TRC et TRD donnent une information moyennée de l'objet à imager. Jose *et al* [124] traitent le problème d'imagerie d'un rein d'une souris et les nervures d'une feuille par les deux techniques (TRC et TRD) les auteurs utilisent des impulsions lasers pour générer des ondes acoustiques détectées par des capteurs PZT. Les résultats montrent que les déviations entre la TRC et TRD sont difficilement discernables pour ces deux objets. Choi & Popovics [125] utilisent la TRD pour imager des structures en béton, en se basant sur les variations de vitesse de l'onde P (onde élastique de volume). Willey *et al* [126] traitent

l'imagerie par TRC d'un défaut de corrosion dans des tubes. Les auteurs utilisent des EMAT pour générer et recevoir le mode A0<sup>1</sup> et montrent que l'usage des EMAT permet de réduire les erreurs sur les temps de vol, dont l'origine est la dépendance de la vitesse à la température.

Belanger & Cawley [127] étudient la validité de la tomographie par rayons droits lorsque les ondes guidées sont générées à basse fréquence (avant la première fréquence de coupure). Les auteurs montrent que la validité de cette technique est compromise. La configuration étudiée est très désavantageuse pour la TRD et même pour la TRC, du fait que les dimensions caractéristiques du défaut sont très petites devant la largeur du volume de Fresnel<sup>2</sup>. De plus, le défaut de corrosion a une profondeur de 50% de l'épaisseur de la plaque, ce qui pour un mode dispersif engendre une grande variation de vitesse.

Pour l'imagerie par ondes guidées on peut se référer à la thèse de Druet (Réf. [31]), dans laquelle la TRD s'est montrée fiable<sup>3</sup>, d'autant plus que la méthode pour mesurer le temps de vol est bien choisie (par ex. par le maximum de l'enveloppe du signal, par la méthode temps-fréquence, par compensation intelligente de la dispersion, ...).

### 3. Hybrid Algorithm for Robust Breast Ultrasound Tomography (HARBUT)

Récemment (Huthwaite [118]) un nouvel algorithme (HARBUT) a été développé combinant la tomographie par diffraction et la tomographie par rayons courbes. Cet algorithme a été utilisé pour l'imagerie des défauts de corrosion (perte d'épaisseur) dans les plaques, et s'est montré plus performant que les deux techniques de tomographie par diffraction ou par rayons courbes (voir Réf. [128,129] et une version améliorée de cet algorithme Réf. [130]).

### 4. Conclusion

Dans cette sous-section nous avons présenté brièvement les techniques d'imagerie par tomographie. Ces techniques se divisent en deux catégories :

- *la tomographie par diffraction*, utilisée quand l'objet à imager est petit devant la longueur d'onde ;
  - *la tomographie par rayons*, utilisée quand l'objet à imager est plus grand que la longueur d'onde.
- Pour que cette technique soit applicable, il faut que la théorie des rayons soit valide, ce qui est garanti sous trois conditions (pour plus de détails, cf. la Sec.9 du chapitre 5 de Červený [119]). Quand ces conditions sont vérifiées, deux techniques de tomographie par rayons sont disponibles, la tomographie par rayons courbes ou la tomographie par rayons droits.

Un troisième algorithme (HARBUT) combine la tomographie par diffraction et celle par rayons courbes.

### 5. Choix de la technique d'imagerie pour la résolution du PAEI

La technique de tomographie que nous voulons employer pour résoudre le problème acoustoélastique inverse est choisie en considérant les trois points suivants :

1. Dans notre travail, le cas d'une contrainte localisée (autour d'une soudure ou d'une fissure, ...), n'est pas étudié ; dans ces cas, d'autres facteurs (variation forte des propriétés matériau, comportement élastique non-linéaire de la fissure, ...) rendent impossible l'usage de la théorie acoustoélastique (non-respect d'hypothèses sur lesquelles la théorie est fondée), et par conséquent, impossible le développement d'une méthode de caractérisation basée sur cette théorie.

<sup>1</sup> À basse fréquence les tubes présentent des modes de torsion, flexion, ou extension, qui ressemblent à des modes de vibration de structure. À relativement haute fréquence (longueur d'onde par rapport au diamètre du tube) ces modes ressemblent à des modes de Lamb dans une plaque.

<sup>2</sup> Le défaut étudié par les auteurs est une calotte conique inversée dont le diamètre supérieur est égal à 60mm et le diamètre inférieur est égal à 40mm, et la hauteur est de 5mm (donc une variation de vitesse assez importante sur une distance (10mm) assez faible devant la largeur du volume de Fresnel). Pour le mode A0 la largeur de la zone de Fresnel est de 250mm et pour le mode S0 elle est de 220mm (à la fréquence d'étude).

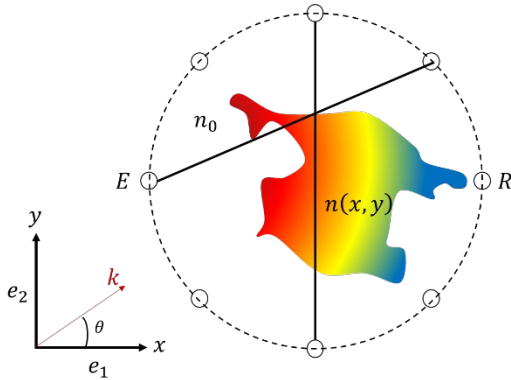
<sup>3</sup> Dans cette thèse l'auteur traite le cas de la tomographie active (ondes générées par des transducteurs) et passive (utilisant le bruit ambiant). La TRD s'est montrée plus performante dans le cas de la tomographie active.

2. La technique doit obligatoirement avoir une notion de trajectoire de propagation. Cela est dû au fait que l'objet qu'on veut imager est anisotrope (champ tensoriel) défini à partir au moins d'une direction (en particulier celle de la propagation l'onde).
3. Seul le problème où le champ de contrainte est continument variable est traité. Nous supposons donc que le champ de contrainte peut être considéré constant sur une distance de plusieurs longueurs d'onde<sup>1</sup>, cette condition de continuité inclut également le passage de la zone de la plaque non-contrainte à la zone où la contrainte est présente.

Les deux premiers points nous permettent d'éliminer la tomographie par diffraction – ainsi que HARBUT –, du fait que la notion de trajectoire en est absente <sup>2</sup>. Les deuxième et troisième points favorisent l'utilisation de la tomographie par rayons droits, surtout que les références citées montrent que dans le cas où le contraste est suffisamment petit ( $\approx 7\%$ ) cette technique donne des résultats fiables. On peut trouver également d'autres références qui conditionnent la validité de la TRD à un contraste inférieur à 5% (Chapitre 4 de Réf. [110]) ou de 10% (voir Réf. [131]). Le choix de la TRD nous semble le plus judicieux pour notre application, d'une part du fait de l'anisotropie de l'objet à imager, et d'autre part, du fait que le contraste de l'objet (dans notre cas l'indice de réfraction est lié à l'effet acoustoélastique) se situe autour de 1%. Cependant, on n'exclut pas la possibilité d'utiliser – si nécessaire – la TRC comme outil complémentaire à la TRD (voir par exemple Réf. [132]).

## B. Algorithmes de tomographie par rayons droits

Nous décrivons dans cette sous-section les deux algorithmes les plus utilisés pour la technique de tomographie par rayons droits que nous avons adoptée à la sous-section précédente pour notre problème d'imagerie. On trouve plus de détails sur ce sujet dans la Réf. [110].



**Fig. 4-4 :** L'indice de réfraction de l'objet à imager est donné par une fonction  $n(x, y)$ . Cet objet se retrouve dans un milieu d'indice de réfraction constant  $n_0$ . Des émetteurs (E) et récepteurs (R) sont utilisés pour générer et recevoir des ondes (acoustiques, élastiques, ...) qui se propagent sur des lignes droites entre l'émetteur et le récepteur.  $\theta$  est la direction de propagation de l'onde et  $k$  son vecteur d'onde.

L'objet à imager a un indice de réfraction donné par une fonction  $n(x, y)$ . Il est entouré d'un milieu d'indice constant  $n_0$ . Des émetteurs (E) et récepteurs (R) sont placés autour de lui et émettent et reçoivent des ondes (acoustiques, élastiques, ...) dont la trajectoire est supposée rectiligne (rayon). On suppose que la quantité suivante est connue :

$$p_{(E,R)} = \int_{(E,R)} n(s) ds \quad (4-24)$$

$p$  est l'intégrale linéique de la fonction  $n$  sur le rayon  $(E,R)$  et  $s$  est la position courante sur ce rayon.

<sup>1</sup> La validation de cette hypothèse est assurée dans le développement de la méthode d'imagerie par l'utilisation des modes dont les longueurs d'onde sont suffisamment petites devant la variation spatiale de la contrainte.

<sup>2</sup> L'absence de la trajectoire ne pose pas de problème dans le cas où la propriété physique/géométrique à imager est scalaire (e.g. densité, perte d'épaisseur, ...), comme on a pu le voir dans les références citées.

Le problème *mathématique* que la technique de tomographie par rayons droits doit résoudre revient à reconstruire la fonction  $n$  (à deux variables) à partir d'un ensemble de telles intégrales. Il a été résolu en 1917 par Johann Radon (une traduction anglaise du papier originellement en allemand est donnée dans l'annexe A de Réf. [110]).

### 1. Algorithmes itératifs

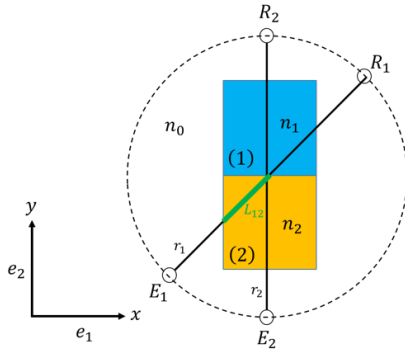
L'objet à imager est découpé en plusieurs cellules ; dans chacune, l'indice de réfraction  $n$  est supposé constant. Le problème tomographique inverse revient à trouver les valeurs de  $n$  de chaque cellule. Les algorithmes itératifs développés pour cela se basent sur la *méthode de projections* (voir Réf. [133]), illustrée par l'exemple suivant.

On suppose un objet qu'on peut découper en seulement deux cellules d'indice de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ . Deux émetteurs ( $E_1$  et  $E_2$ ) et deux récepteurs ( $R_1$  et  $R_2$ ) sont utilisés.  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons impliqués. La longueur du segment formé par l'intersection du rayon 1 et la cellule 2 est  $L_{12}$ . (Par suite, la longueur du segment formé par l'intersection du rayon  $i$  et la cellule  $j$  est noté  $L_{ij}$ .)

En utilisant la définition (4-24), on écrit les deux intégrales linéiques :

$$p_{r_1} = \int_{r_1} n(s) ds = L_{11}n_1 + L_{12}n_2 + l_1n_0, \quad p_{r_2} = \int_{r_2} n(s) ds = L_{21}n_1 + L_{22}n_2 + l_2n_0 \quad (4-25)$$

où  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs des parties des rayons en dehors des cellules.

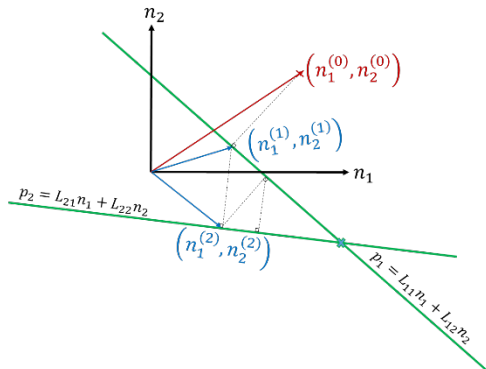


**Fig. 4-5 :** L'indice de réfraction de l'objet à imager est constant et égal à  $n_1$  dans la cellule 1, et constant et égal à  $n_2$  dans la cellule 2. Deux émetteurs ( $E_1$  et  $E_2$ ) et deux récepteurs ( $R_1$  et  $R_2$ ) sont utilisés.  $r_1$  et  $r_2$  sont les trajectoires de la propagation (rayons). La longueur du segment formé par l'intersection du rayon 1 et la cellule 2 est  $L_{12}$ .

Pour simplifier les écritures on pose  $p_1 = p_{r_1} - l_1n_0$  et  $p_2 = p_{r_2} - l_2n_0$ , ce qui donne :

$$p_1 = L_{11}n_1 + L_{12}n_2, \quad p_2 = L_{21}n_1 + L_{22}n_2 \quad (4-26)$$

Le problème à résoudre consiste à trouver les inconnues  $n_1$  et  $n_2$  en fonction des données  $L_{ij}$  et  $p_i$ . Dans ce cas simple, il suffit d'inverser le système pour résoudre le problème. Dans un problème réel, le nombre de cellules à considérer est tel que l'inversion du système constitué n'est pas le meilleur choix *numérique*. De plus, dans la pratique de la tomographie, le nombre de rayons est généralement inférieur à celui de cellules, ce qui conduit à la constitution d'un système sous déterminé, non-inversible. Il est plus judicieux de développer une approche itérative : la *méthode de projections* est illustrée ci-dessous.



**Fig. 4-6 :** Deux droites d'équations  $p_1 = L_{11}n_1 + L_{12}n_2$  et  $p_2 = L_{21}n_1 + L_{22}n_2$  sont représentées dans le repère  $(n_1, n_2)$ . Pour trouver la bonne solution (intersection de ces droites), une solution initiale est choisie  $(n_1^{(0)}, n_2^{(0)})$ , puis projetée sur la première droite, donnant  $(n_1^{(1)}, n_2^{(1)})$ , à son tour projetée sur la deuxième droite, et ainsi de suite jusqu'à convergence.

Les deux droites d'équations  $p_1 = L_{11}n_1 + L_{12}n_2$  et  $p_2 = L_{21}n_1 + L_{22}n_2$  sont représentées dans le repère dont la base est  $(n_1, n_2)$ . Pour trouver la bonne solution (l'intersection de ces droites), une solution initiale est choisie  $(n_1^{(0)}, n_2^{(0)})$ , ce qui représente l'itération 0. Cette solution est ensuite projetée sur la première droite, ce qui donne la solution à l'itération 1  $(n_1^{(1)}, n_2^{(1)})$ , qui à son tour est projetée sur la deuxième droite, et ainsi de suite jusqu'à converger vers la bonne solution.

La vitesse de convergence de l'algorithme dépend non seulement du choix de la solution initiale mais également de celui des rayons. Si les rayons sont proches les uns des autres, les variations des  $L_{ij}$  et  $n_i$  sont faibles se traduisant par des droites (hyperplans dans le cas général) presque parallèles, et par suite par beaucoup d'itérations (projections) pour converger vers la solution.

Pour  $N$  cellules et  $M$  rayons on a :

$$p_i = \sum_{j=1}^N L_{ij}n_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \quad (4-27)$$

avec  $p_i$  l'intégrale de  $n$  sur le rayon  $r_i$ . Dans ce cas la méthode de projections donne (Réf. [110]) :

$$\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{n}^{(i-1)} - \frac{\mathbf{n}^{(i-1)} \cdot \mathbf{L}_i^T - p_i}{\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_i^T} \mathbf{L}_i \quad (4-28)$$

où  $\mathbf{L}_i$  est la ligne  $i$  de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{n}^{(i)}$ , le vecteur qui contient les  $N$  valeurs de l'indice de réfraction à l'itération  $i$ .

Cette formule est la base de l'algorithme ART (algebraic reconstruction technique) qui fonctionne de la façon suivante :

1. Une solution initiale  $\mathbf{n}^{(0)} = (n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \dots, n_N^{(0)})$  des valeurs de l'indice de réfraction dans toutes les cellules est choisie (généralement on prend  $n_i^{(0)} = n_0$  (l'indice de réfraction du milieu ambiant)).
2. L'itération 1 est égale à la projection de  $\mathbf{n}^{(0)}$  sur le premier hyperplan (*i.e.* donné par l'intégrale sur le premier rayon).
3. L'itération  $i$  est égale à la projection de  $\mathbf{n}^{(i-1)}$  sur le  $i$ -ème hyperplan (*i.e.* donné par l'intégrale sur le  $i$ -ème rayon).
4. Une itération de l'algorithme est complète quand on a projeté sur tous les  $M$  hyperplans. Chaque cellule se retrouve mise à jour  $M$  fois.
5. On répète les étapes précédentes, cette fois avec comme valeurs initiales les  $\mathbf{n}^{(M)}$ , jusqu'à ce que la convergence vers la solution du problème (*i.e.* l'intersection de tous les hyperplans) soit atteinte.

Pour converger, l'algorithme effectue beaucoup d'itérations, ce qui est numériquement coûteux. Pour l'accélérer, au lieu de prendre des cellules carrées, on peut projeter d'abord l'indice de réfraction sur une base de fonctions 2D.

$$n(x, y) \approx \sum_{j=1}^N n_j B_j(x, y) \quad (4-29)$$

Les fonctions ( $B_j$ ) peuvent être des ondelettes, B-Splines, ... L'avantage d'utiliser de telles fonctions au lieu de cellules carrées (pixel) vient du fait qu'il faut plusieurs pixels pour représenter une forme simple, ce qui donne des matrices de grandes tailles. De plus, les ondelettes et les B-Splines, ... peuvent se chevaucher, ce qui permet d'avoir une transition « lisse » entre les différentes valeurs.

L'équation (4-27) dévient :

$$p_i = \sum_{j=1}^N b_{ij}n_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \quad (4-30)$$

où  $b_{ij}$  est l'intégrale de  $B_j$  sur le rayon  $r_i$ .

$$b_{ij} = \int_{r_i} B_j(s) ds \quad (4-31)$$

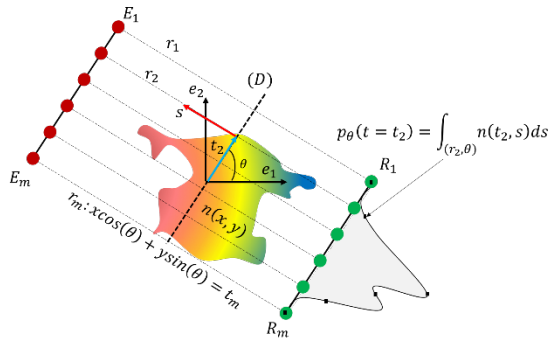
Pour gagner encore en temps de calcul par rapport à l'algorithme ART, un deuxième algorithme est utilisé, dit SART (simultaneous algebraic reconstruction technique), qui se base sur une équation similaire à (4-28) donnée par (Réf. [110]) :

$$\mathbf{n}^{(k)} = \mathbf{n}^{(k-1)} - \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{n}^{(k-1)} \cdot \mathbf{b}_i^T - p_i}{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i^T} \mathbf{b}_i \quad (4-32)$$

On peut remarquer que la différence entre les algorithmes ART et SART vient de ce que ce dernier ne met à jour la valeur de  $\mathbf{n}^{(k)}$  qu'après avoir projeté la valeur de  $\mathbf{n}^{(k-1)}$  sur tous les hyperplans. Le lecteur intéressé peut se référer à Réf. [134] pour une démonstration de la convergence de l'algorithme SART.

## 2. Filtered Back Projection (FBP)

L'algorithme dit « filtered back projection » (FBP) est à la base de la tomographie par rayons-X, grâce à sa précision et sa rapidité par rapport à celles des algorithmes itératifs. Son formalisme mathématique est plus simple que celui de ces derniers. On présente ici le principe de base de son fonctionnement (la Réf. [110] en donne les détails).



**Fig. 4-7 :** L'indice de réfraction de l'objet à imager est  $n(x, y)$ . La droite (D) passe par l'origine du repère  $(e_1, e_2)$  et fait un angle  $\theta$  avec  $e_1$ . Elle est perpendiculaire aux rayons  $r_i$  entre les émetteurs et récepteurs. La distance entre l'origine du repère et un rayon  $r_i$  est  $t_i$  ; la position sur un rayon est donnée par  $s$ . L'intégrale de l'indice de réfraction sur un rayon  $r_i$  est donné par  $p_\theta(t = t_i)$ .

On suppose que les rayons entre les émetteurs et récepteurs sont parallèles entre eux<sup>1</sup>. On définit une droite (D) perpendiculaire aux rayons et qui passe par l'origine du repère  $(e_1, e_2)$ . L'angle entre (D) et  $e_1$  est  $\theta$ . La distance entre l'origine et un rayon  $r_i$  est  $t_i$  et la position le long d'un rayon est  $s$ .

L'équation de droite d'un rayon  $r_i$  (dont le vecteur normal est  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ ) est  $t_i = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ .

L'intégrale de l'indice de réfraction sur un rayon  $r_i$  est :

$$p_\theta(t = t_i) = \int_{(r_i, \theta)} n(t_i, s) ds \quad (4-33)$$

En passant à la forme continue de cette intégrale et en utilisant les variables spéciales  $x, y$  au lieu de  $s$  on trouve la transformée de Radon de la fonction  $n(x, y)$  (Réf. [120]) :

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y) \delta(t - x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) dx dy \quad (4-34)$$

La base de la tomographie par rayons droits est le théorème de Tranche de Fourier donné ci-dessous :

<sup>1</sup> Ceci donne la version parallel-Beam de l'algorithme FBP. D'autres versions (fan-Beam (2d), Cone-Beam (3d)) existent dans lesquelles les rayons divergent de l'émetteur.

La transformée de Fourier 1D de la transformée de Radon d'une fonction  $f$  (notée ici  $S$ ) est égale à une tranche de la transformée de Fourier 2D de la même fonction  $f$  (notée ici  $F$ ).

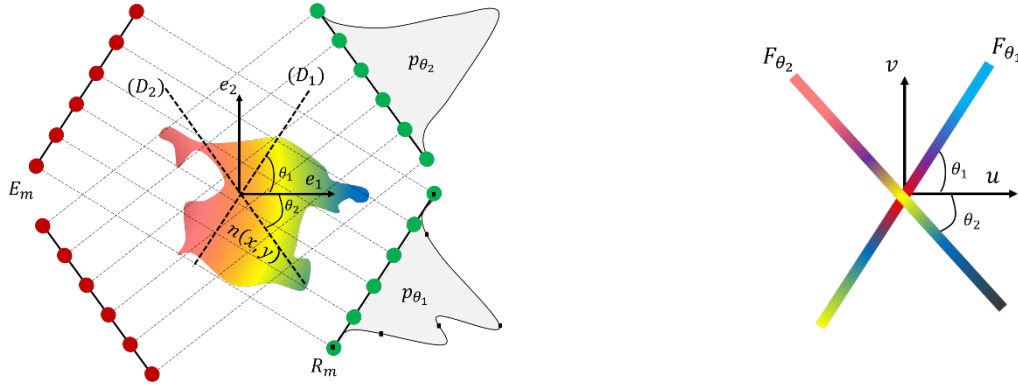
La démonstration est donnée dans l'annexe (VII-A [p. 177])

Ce théorème s'écrit :

$$S_\theta(\eta) = F(u, v) = F(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta)) = F(\eta, \theta) \quad (4-35)$$

$S_\theta$  : transformée de Fourier 1D de la transformée de Radon de la fonction  $n(x, y)$  suivant la direction  $\theta$   
 $F$  : transformée de Fourier 2D de la fonction  $n(x, y)$ .

Ainsi, pour retrouver l'objet, il faut calculer les transformées de Radon dans toutes les directions, calculer leurs transformées de Fourier 1D, puis reconstruire tranche par tranche la transformée de Fourier 2D de l'objet et finalement passer à la transformée de Fourier inverse pour le retrouver. Une illustration avec deux projections est donnée dans la figure suivante :



La transformée de Radon dans deux direction de  $\theta_1$  et  $\theta_2$

Les tranches de la transformée de Fourier 2D de l'objet  $n(x, y)$  dans les deux directions  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

**Fig. 4-8** : Reconstruction de la transformée de Fourier 2D de l'objet  $n(x, y)$ , à partir des tranches données par la transformée de Fourier 1D de la transformée de Radon de l'objet.

Cependant une telle procédure souffre du problème suivant : dans le domaine de Fourier, à basse fréquence ( $u$ , et  $v$  petits), les tranches sont « serrées » et se superposent à l'origine alors qu'à haute fréquence, elles sont éloignées les unes des autres, laissant ainsi un vide si le nombre de tranches (*i.e.* nombre de projection) est fini. Pour pallier ce problème, la transformée de Fourier 2D est écrite dans un repère cylindrique. Pour cela écrivons tout d'abord  $n(x, y)$  en fonction de sa transformée de Fourier 2D :

$$n(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-2i\pi(xu+yv)} dudv \quad (4-36)$$

En rappelant qu'on peut poser  $u = \eta \cos(\theta)$  et  $v = \eta \sin(\theta)$ , (voir annexe (VII-A [p. 177])) et en faisant le changement de variable  $(u, v) \Leftrightarrow (\eta, \theta)$  on trouve :

$$n(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta, \theta) e^{-2i\pi\eta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} \eta d\eta d\theta \quad (4-37)$$



En divisant l'intégrale  $\int_0^{2\pi}$  en  $\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}$  et en utilisant le fait que  $F(\eta, \theta + \pi) = F(-\eta, \theta)$ , l'intégrale précédente devient :

$$n(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| F(\eta, \theta) e^{-2i\pi\eta t} d\eta d\theta \quad (4-38)$$

avec  $t = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ . En utilisant maintenant la relation (4-35), on écrit :

$$n(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| S_\theta(\eta) e^{-2i\pi\eta t} d\eta \right] d\theta \quad (4-39)$$

Cette équation définit l'algorithme « filtered back projection ». Tout d'abord, le filtre est donné par le terme  $|\eta|$  et le « back projection » vient du terme  $t = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ . Finalement la reconstruction d'un point  $(x, y)$  est donné par la sommation de toutes les « back projections » dans toutes les directions (l'intégrale entre  $[0, \pi]$ ).

En résumé, les étapes de l'algorithme FBP sont les suivantes :

Pour un ensemble d'angles  $\theta \in [0, \pi]$

1. Calcul de la transformée de Radon dans une direction  $\theta^{(1)}$ .
2. Calcul de la transformée de Fourier 1D de celle-ci.
3. Filtrage de cette transformée de Fourier.
4. Calcul de la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier filtrée.
5. « back » projection de cette quantité dans la direction  $\theta$

### 3. Comparaison FBP vs SART

La tomographie par rayons droits peut être réalisée avec SART ou FPB, chacun de ces algorithmes est mieux adapté pour une configuration donnée<sup>2</sup>. L'objectif de ce paragraphe est de les comparer en terme de précision et rapidité, dans la configuration que nous envisageons utiliser pour imager un état de contrainte inhomogène. Pour ceci un test numérique est réalisé dans lequel le nombre de données (nombres de rayons et de projections) n'est pas suffisant pour que la reconstruction soit identique à l'objet.

**Remarque** : avec suffisamment de données (nombre de rayons et nombre de projections) les deux algorithmes donnent une reconstruction qui est presque identique à celle de l'objet, ce qui rend difficile de comparer leurs précisions.

On se donne une cartographie 2D  $n(x, y)$ . Pour les deux algorithmes, on considère 32 projections et chaque projection est formée de 11 rayons<sup>3</sup>.

Pour les fonctions de base de l'algorithme SART, on choisit une base de B-Spline d'ordre cinq. Le nombre de ces fonctions est de 729 (=27x27)<sup>4</sup>. Les deux algorithmes ont été implémentés en utilisant Matlab.

La carte originale (Fig. 4.9-b) a été reconstruite à partir de la fonction peaks de matlab, dont on a normalisé la distribution. La reconstruction avec SART est donnée dans Fig. 4.9-a et celle avec FBP dans Fig. 4.9-c, les erreurs absolues sont données (pour SART) dans Fig. 4.9-d et (pour FPB) dans Fig. 4.9-e.

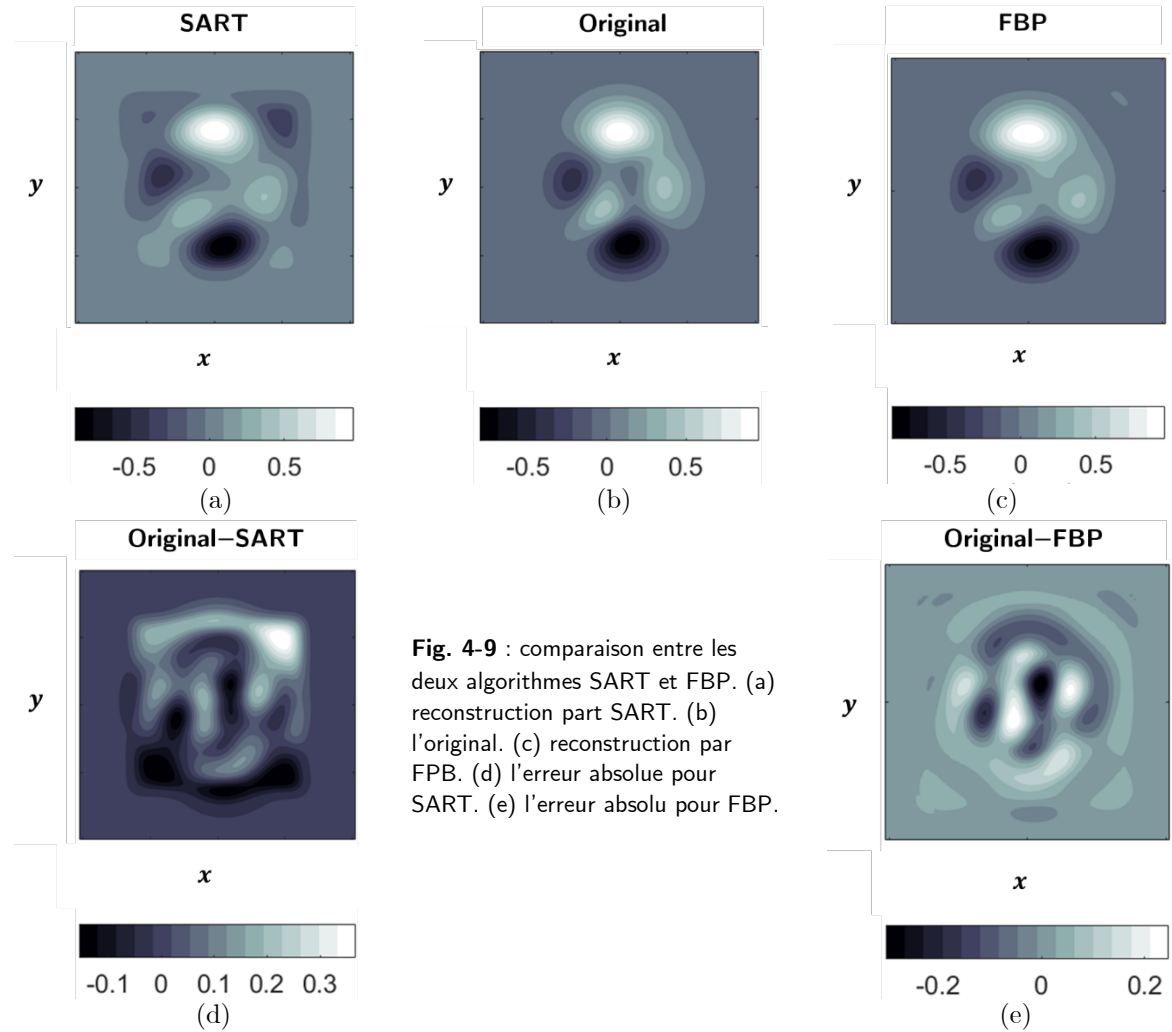
<sup>1</sup> La transformée de Radon n'est pas calculée à partir de la connaissance de l'indice de réfraction, mais de celle de son intégrale sur les rayons. Par exemple en tomographie par temps de vol, elle est donnée par les temps de vol mesurés par les récepteurs, et non pas en intégrant sur un défaut inconnu.

<sup>2</sup> SART : en géophysique (dû à la difficulté d'entourer l'objet à imager par les capteurs), et FPB en médecine (grâce à sa rapidité, précision et la capacité d'entourer l'objet par les capteurs).

<sup>3</sup> On utilise ici la terminologie de l'algorithme FPB (une projection est formée par un ensemble de rayons parallèles comme montré sur la Fig. 4.8, où deux projections sont utilisées).

<sup>4</sup> Ce nombre de fonctions de base s'est avéré suffisant pour engendrer une distribution complexe.

Fig. 4.9-a-c montrent que la reconstruction avec le FPB est meilleure (on voit que la forme de l'objet est bien identifiée). Cependant, l'avantage de cet algorithme n'est pas seulement sa précision mais surtout sa rapidité. Ainsi, l'inversion par SART peut prendre jusqu'à quelques heures, à cause du calcul des éléments  $b_{ij}$  (*i.e.* l'intégrale d'une fonction de base  $B_j$  sur le rayon  $r_i$  voir (4-31)). Ces éléments ne dépendant pas de l'objet à imager, il est possible de les calculer pour une configuration donnée (nombre de projections et nombre de rayons par projection) et de les stocker en mémoire ; cela peut faire gagner du temps. Cela reste néanmoins un obstacle si on veut faire une étude où le nombre de projections et de rayons peuvent changer.



La reconstruction par le FPB en revanche se fait en quelques minutes. En effet, d'une part l'inversion est faite dès lors que la première projection est calculée ; d'autre part, Matlab propose des algorithmes optimisés pour le calcul des transformées de Fourier et transformées inverses.

Les reconstructions présentées dans la suite de ce chapitre seront donc calculées uniquement avec le FPB.

## IV. Inversion tomographique des objets anisotropes

Dans la section précédente, nous avons présenté la méthode d'imagerie par tomographie et les algorithmes utilisés en tomographie par rayons droits, où l'indice de réfraction de l'objet à imager était donné par une fonction 2D (ou 3D) scalaire. La possibilité d'application directe de ces algorithmes tient au fait qu'une loi inversible existe entre une simple grandeur scalaire à inverser et une grandeur à mesurer.

Dans le cas du problème acoustoélastique inverse inhomogène à résoudre, une loi a été établie au Chapitre 3 exprimant les variations de vitesses modales comme des fonctions des composantes  $\sigma_i$  de la contrainte et sa direction  $\alpha$ , sous la forme :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (4-40)$$

où  $\Delta_r v^M$  est la variation relative de vitesse (par rapport à l'état non contraint), pour un mode  $M$  (de Lamb / SH),  $A_p^M, B_1^M, A_n^M$  sont des coefficients qui dépendent de la fréquence ( $f$ ) et sont propres à chaque mode, dits coefficients acoustoélastiques,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les trois composantes de la contrainte (qui dépendent de la position  $(x, y)$ ),  $\beta, \alpha$  sont les angles qui repèrent la direction de la propagation de l'onde et la direction de la composante  $\sigma_1$  de la contrainte dans un repère  $R_0$  lié à la plaque. L'angle  $\alpha$  dépend de la position.

Cette loi contient quatre inconnues à reconstruire ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$ ) au lieu d'une seule (comme considéré précédemment) et est anisotrope car dépendant de la direction de propagation de l'onde  $\beta$  au lieu d'être isotrope (comme par exemple dans la reconstruction d'une densité ou d'une perte d'épaisseur d'une plaque isotrope).

Pour illustrer les conséquences que peuvent avoir les aspects anisotrope et multi-variables sur l'approche tomographique, considérons les trois cas d'études suivants :

### 1. Objet anisotrope à une seule inconnue :

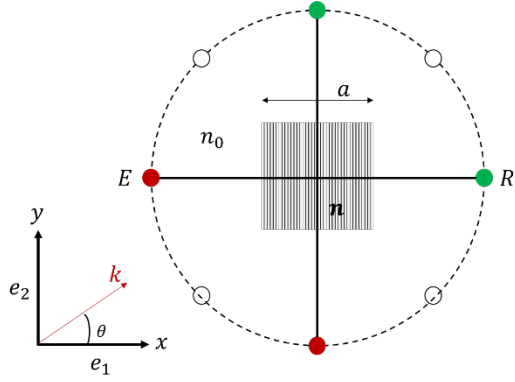
La Fig. 4.10 illustre le cas d'un objet dont l'indice de réfraction  $n$  est donné par un vecteur d'amplitude et de direction constantes dans un carré de côté  $a$  (i.e.  $\mathbf{n} = n\mathbf{e}_2$ ). Les traducteurs utilisés pour la tomographie sont répartis sur un cercle de diamètre  $3a$ . La tomographie procède par sommation des données suivant plusieurs directions. Supposons que la vitesse soit donnée par  $v(\theta) = v_0(2 + \cos(2\theta))$  ( $\theta$  est la direction de propagation de l'onde). Les deux temps de vol dans les deux directions ( $T_1: \theta = 0^\circ$  et  $T_2: \theta = 90^\circ$ ) sont égaux à :

$$T_1 = \frac{2a}{v_0} + \frac{a}{3v_0} \quad (4-41)$$

$$T_2 = \frac{2a}{v_0} + \frac{a}{v_0} \quad (4-42)$$

Comme  $T_1 > T_2$ , que  $v > v_0$  et que les distances entre émetteurs et récepteurs dans les deux directions sont égales, lors de la reconstruction tomographique de l'objet le supposant d'indice constant, l'algorithme établit que l'objet est plus étalé dans la direction  $\mathbf{e}_2$  que dans la direction  $\mathbf{e}_1$  : puisque la propagation a pris moins de temps, l'onde a dû passer plus de temps dans l'objet que dans le milieu ambiant ( $v > v_0$ ), par rapport à ce qui est arrivé dans la direction  $\mathbf{e}_1$ . Cela se traduit par une *élongation/compression* de l'objet à imager dans certaines directions, ce qui résulte en une mauvaise reconstruction.

Ainsi, l'anisotropie pose problème pour la reconstruction classique qui repose sur la sommation des données dans toutes les directions.



**Fig. 4-10 :**  $n_0, n, k, \theta, E,$  et  $R$  sont l'indice de réfraction du milieu ambiant, celui de l'objet à imager, le vecteur d'onde, la direction de propagation, l'émetteur et le récepteur. L'indice est anisotrope.

## 2. Objet isotrope à deux inconnues :

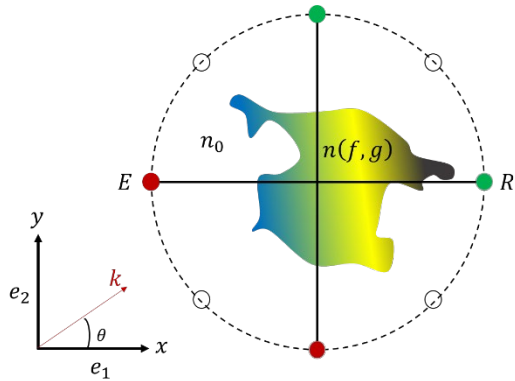
La Fig. 4.11 illustre le cas où l'indice de réfraction de l'objet est isotrope mais dépend de deux fonctions  $f$  et  $g$  dépendantes de la position. Prenons l'exemple où ces deux fonctions sont les deux constantes de Lamé,  $(\lambda(x, y)$  et  $\mu(x, y))$ . Contrairement au cas de la perte d'épaisseur, le problème à inverser ici, contient deux inconnues. Une solution unique ne peut être retrouvée que si on peut former un système d'équations inversible (d'inconnues  $\lambda$  et  $\mu$ ) sur chaque rayon. Une inversion de ce problème est possible en utilisant les deux ondes P et S (pression et cisaillement) dont les vitesses sont données en fonction de la densité et les constantes de Lamé, par :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (4-43)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4-44)$$

Ces deux vitesses forment alors un système d'équations qui permet de retrouver les deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$ . L'onde de cisaillement est utilisée pour déterminer la cartographie de  $\mu$ , puis l'onde de pression est utilisée pour déterminer la cartographie de  $\lambda$  à partir de celle de  $\mu$ .

Ainsi, l'aspect multi-variables impose d'utiliser plusieurs grandeurs (par exemples plusieurs types d'onde) pour reconstruire les inconnues du problème.



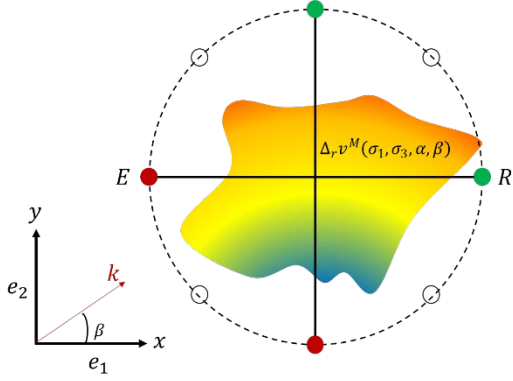
**Fig. 4-11 :**  $n_0, n, k, \theta, E,$  et  $R$  sont l'indice de réfraction du milieu ambiant, celui de l'objet à imager, le vecteur d'onde, la direction de propagation de l'onde, l'émetteur et le récepteur. (c) l'indice de réfraction est inhomogène et isotrope (il dépend de deux fonctions scalaires  $f$  et  $g$  dépendantes de la position).

## 3. Objet anisotrope à trois inconnues :

La Fig. 4.12 illustre le cas où l'indice de réfraction de l'objet à imager est anisotrope et dépend de trois fonctions  $f, g$  et  $\alpha$  dépendantes de la position. Un exemple de ce problème est donné par le cas de la variation de vitesse, pour un mode de Lamb / SH induite par une contrainte biaxiale  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_3)$ . La loi qui suit a été établie au chapitre 3 pour exprimer les variations de vitesse en fonction de la contrainte :

$$\Delta_r v^M(\sigma_1, \sigma_2, \alpha, \beta) = [A_p^M(f) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha(x, y)))] \sigma_1(x, y) + A_n^M(f) \sigma_3(x, y) \quad (4-45)$$

Pour résoudre ce problème, il faut former sur chaque rayon un système d'équations permettant de remonter aux trois inconnus. Cependant, la présence de la fonction  $\cos$  (non bijective) dans la formule rend le problème non-inversible (du moins, dans une seule direction). On a vu au chapitre 3 que pour trouver une solution unique à ce problème, il fallait faire une mesure supplémentaire dans une direction différente (donc en utilisant un autre rayon).



**Fig. 4-12** :  $\Delta_r v, k, \beta, E,$  et  $R$  sont l'indice de réfraction de l'objet à imager, le vecteur d'onde, la direction de propagation de l'onde, l'émetteur et le récepteur. L'indice de réfraction est anisotrope et dépend des trois fonctions  $f, g$  et  $\alpha$  qui dépendent de la position.

Dans la littérature la *tomographie anisotrope* a été considérée en géophysique (en utilisant les ondes P Réf. [131, 135-136], ou les ondes de surface Réf. [137-139]). Récemment en radiographie (Réf. [140]), une méthode dite XTT (X-ray tensor tomography) a été développée. Les approches de ces références diffèrent de celle qu'on développe dans ce chapitre.

Dans la tomographie anisotrope en géophysique, un test synthétique à l'image de l'expérience est construit. Ensuite la propagation de l'onde (dans les couches terrestres) est modélisée par un modèle à plusieurs variables. Le problème inverse est traité comme un problème d'optimisation, dans lequel ces paramètres sont modifiés jusqu'à ce que la déviation entre les temps de vol calculés en utilisant le test et ceux mesurés<sup>1</sup> (par exemple entre l'épicentre d'un séisme et une station de mesure) soit minimale. L'un des modèles les plus connus pour la propagation de l'onde P dans les couches terrestres est celui de Thomsen [141] donné ici :

$$v_p(\theta) = v_p^\perp (1 + \delta \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + \epsilon \sin(\theta)^4) \quad (4-46)$$

où  $\theta$  est la direction de propagation de l'onde, et où les trois paramètres  $v_p^\perp, \delta$  et  $\epsilon$  sont modifiés jusqu'à ce que les temps de vol de l'onde P dans le test synthétique convergent vers les temps de vol mesurés (les détails de la résolution se trouvent dans Thomsen [141]). Le modèle impliquant la propagation d'ondes de Rayleigh est donné par Smith & Dahlen [142]. Il contient cinq paramètres qui dépendent de la fréquence (voir Mazzulo *et al* [137]).

Pour le cas de la radiographie XTT, la résolution du problème consiste à réécrire une loi similaire à celle de Beer-Lambert dans laquelle la variable à inverser est isotrope et contient une seule inconnue.

Les méthodes d'imagerie des grandeurs anisotropes en géophysique et en rayons-X diffèrent de la méthode que nous présentons ici par *l'aspect multimodal*, spécifique au cas des ondes élastiques guidées. Contrairement à l'approche géophysique où une seule onde est utilisée et trois paramètres sont modifiés, nous utilisons plusieurs modes avec des paramètres obtenus par rapport à un état de référence connu. Contrairement à la XTT où la variable à inverser est scalaire, celle à inverser ici est « vectorielle ».

<sup>1</sup> Entre l'épicentre d'un séisme et une station pour la tomographie passive, et entre une source (canon à air, explosifs, ...) et la station, pour la tomographie active.

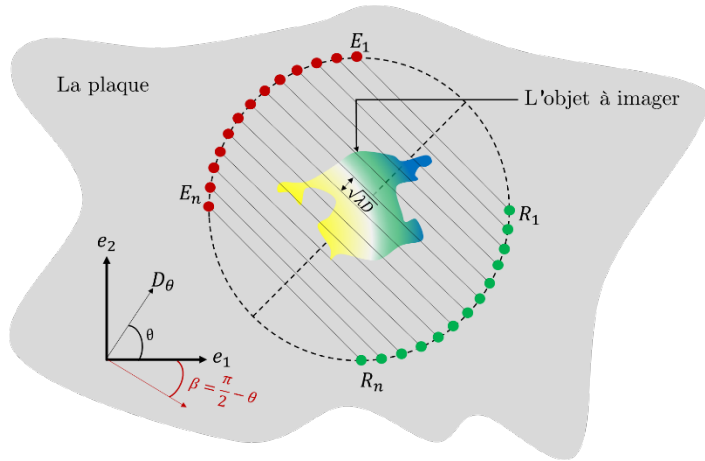
## V. Simulation

Dans cette section, on développe les méthodes d'inversion d'une contrainte multiaxiale inhomogène, en utilisant la tomographie par rayons droits et l'algorithme FBP. Les méthodes développées ici sont indépendantes de la nature des traducteurs utilisés. On a modélisé au chapitre 3, dans la plage de fréquence  $[0, 500]$  kHz, la variation de vitesse des modes fondamentaux induite par une contrainte triaxiale – homogène dans l'épaisseur – sous la forme :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (4-47)$$

où  $\Delta_r v^M$  représente la variation relative de vitesse du mode  $M$  (Lamb ou SH) par rapport à l'état non contraint,  $A_p^M, B_1^M, A_n^M$  sont des coefficients qui dépendent de la fréquence ( $f$ ) et sont propres à chaque mode, dits coefficients acoustoélastiques,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les trois composantes de la contrainte (qui dépendent de la position  $(x, y)$ ),  $\beta, \alpha$  sont les angles qui repèrent la direction de la propagation de l'onde et la direction de la composante  $\sigma_1$  de la contrainte dans un repère  $R_0$  lié à la plaque. L'angle  $\alpha$  dépend de la position.

La résolution du problème acoustoélastique inverse va être effectuée dans cette plage de fréquences, avec les modes fondamentaux, et en utilisant cette formule. La configuration d'inversion tomographique considérée peut-être représentée comme suit :



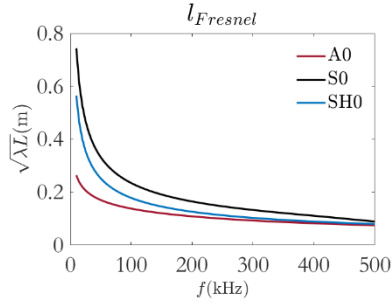
**Fig. 4-13 :** Configuration d'inversion tomographique constituée par  $n$  couples émetteur-récepteur répartis sur un cercle de diamètre  $D$ . L'objet à imager se trouve à l'intérieur du cercle. Une projection est définie par la transformée de Radon dans la direction perpendiculaire à  $D_\theta$ .

Comme l'objet à imager est anisotrope et que nous désirons utiliser l'algorithme FBP pour l'inversion, on se place dans une configuration qui en facilite l'implémentation et qui permet d'avoir des données qu'on peut classer en fonction de la direction. On suppose donc que les  $n$  couples émetteur-récepteur sont positionnés sur un cercle de diamètre  $D$ .

La technique d'inversion de tomographie par rayons droits conduit à une résolution égale à  $\sqrt{L\lambda}$  (largeur du volume de Fresnel) où  $L$  est la distance entre un émetteur et un récepteur. Cette limite de résolution est prise en compte pour définir la distance entre deux traducteurs<sup>1</sup> (par ex., deux récepteurs adjacents). Sa variation avec la fréquence est donnée dans Fig. 4.14 pour les trois modes fondamentaux et pour  $L = 1\text{m}$ .

On définit une projection par l'ensemble de « mesures » dans une direction donnée, et on dit que la projection contient  $n$  mesures si elle contient  $n$  rayons ( $n$  couples émetteur-récepteur). On dit que la reconstruction est faite à l'aide de  $m$  projections, si on a considéré  $m$  projections régulièrement espacées dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . On suppose enfin que les capteurs sont assez éloignés de l'objet à imager pour que l'approximation d'onde plane soit valide.

<sup>1</sup> On note que dans cette configuration la distance  $L$  varie d'un couple à un autre, le choix  $L = D$  définit une limite supérieure.



**Fig. 4-14** : largeur du volume de Fresnel en fonction de la fréquence pour  $L = 1m$ .

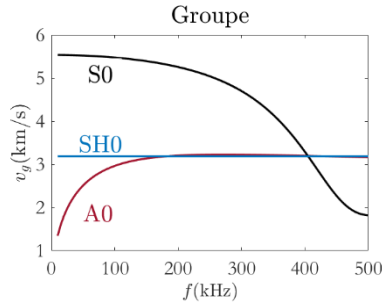
Les variations de temps de vol sont calculées en utilisant l'équation eikonale réécrite comme :

$$T_i^M = \int_{r_i} \frac{ds}{v^M(\sigma)} \quad (4-48)$$

où  $T^M$  est le temps de vol du mode  $M$  sur le rayon  $r_i$ ,  $s$  est la position courante sur le rayon et  $v^M(\sigma)$  est la vitesse de groupe du mode en fonction de la contrainte donnée par :

$$v^M = v_0^M \times \frac{\Delta_r v^M}{100} + v_0^M \quad (4-49)$$

$v_0^M$  : vitesse de groupe dans l'état non-contraint, que l'on donne pour les trois modes fondamentaux.



**Fig. 4-15** : vitesses de groupe des trois modes fondamentaux à l'état non-contraint

Le choix des modes et des fréquences d'excitation doit tenir compte des points suivants :

1. Pour avoir une bonne résolution, il faut que la longueur d'onde soit petite. Cela favorise l'utilisation du mode A0 (voir la Fig. 4.14) et également de travailler dans la limite supérieure de la plage de fréquence [0,500] kHz.
2. Il faut que l'effet acoustoélastique soit suffisamment important pour que la variation du temps de vol soit mesurable, et en même temps il ne faut pas que cet effet soit trop grand afin que l'hypothèse d'une propagation suivant des rayons droits soit valide. On rappelle que les coefficients acoustoélastiques sont en %/MPa et que certains d'entre eux peuvent atteindre une valeur de 0.025 ce qui veut dire que si l'amplitude de la contrainte est de 200 MPa, nous aurons 5,4% de variation de vitesse, ce qui représente un contraste à la limite de validité de cette hypothèse (telle que proposée dans la Réf. [95]).
3. Suivant la méthode utilisée pour le calcul de temps de vol, il peut être préférable de travailler avec un mode faiblement dispersif. Cela favorise l'utilisation du mode SH0, strictement non dispersif, puis du mode A0 dans la plage [200,500] kHz ou de S0 dans la plage de fréquence [50,200] kHz.

Dans ce qui suit de cette section les objets à imager sont des distributions arbitraires (générées par la fonction rand de Matlab, générant une cartographie arbitraire des gaussiennes), supposées vérifier les

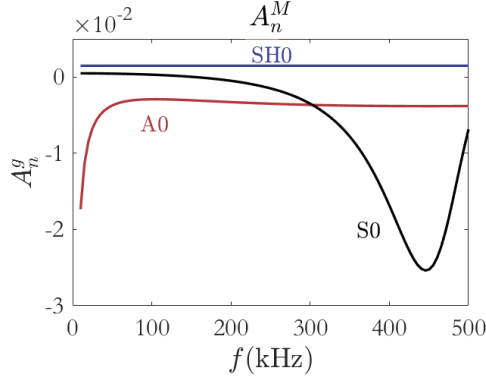
trois conditions de validité de la théorie des rayons, en utilisant les modes fondamentaux dans la plage de fréquence  $]0,500]$  kHz.

### A. Cas d'une contrainte uniaxiale hors plan

Dans le cas d'une contrainte uniaxiale hors plan, la loi à inverser s'écrit très simplement comme :

$$\Delta_r v^M(x, y) = A_n^M(f) \sigma_3(x, y) \quad (4-50)$$

Le coefficient acoustoélastique de chacun des modes en fonction de la fréquence est donné ci-après :



**Fig. 4-16** : Les coefficients acoustoélastiques ( $A_n^M$ ) en fonction de la fréquence.

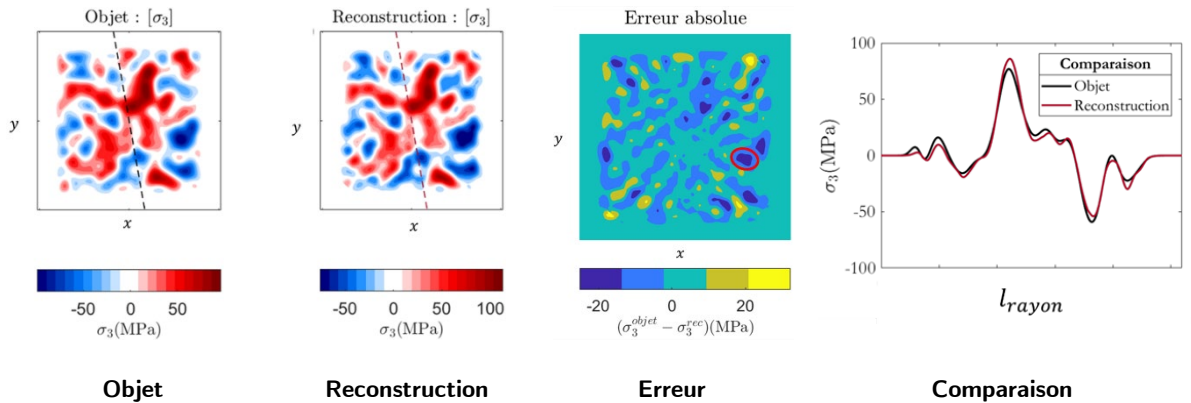
**Inversion tomographique** : ce cas est similaire à une cartographie de variation d'épaisseur/densité. Le problème acoustoélastique inverse est isotrope et contient une seule inconnue ( $\sigma_3$ ). Un seul mode (parmi A0, S0, et SH0) suffit à l'inversion. Prenons par exemple le mode A0. En remplaçant dans l'équation eikonale  $v^{A0}$  par sa valeur (*i.e.* Éq.(4-49)) et  $\Delta_r v^{A0}$  par sa valeur (*i.e.* Éq.(4-50)), on trouve :

$$T_i^{A0} = \int_{r_i} \left[ \frac{100}{v_0^{A0} A_n^{A0} \sigma_3(s) + 100 v_0^{A0}} \right] ds \quad (4-51)$$

Dans l'expérience, le temps de vol sur un rayon  $r_i$  ( $T_i^{A0}$ ) est la grandeur mesurée (donc connue), et dans l'inversion tomographique, la quantité  $\sigma_3$  est supposée constante sur le rayon  $r_i$ , ce qui permet d'écrire :

$$\sigma_3 = \frac{100}{A_n^{A0}} \left( \frac{r_i - v_0^{A0} T_i^{A0}}{v_0^{A0} T_i^{A0}} \right) \quad (4-52)$$

On donne ici un exemple d'inversion pour une distribution de contrainte  $\sigma_3$ . L'inversion est réalisée avec 18 projections et 35 rayons dans chaque projection.



**Fig. 4-17** : de gauche à droite : cartographie originale ; cartographie reconstruite en utilisant 18 projections et 35 rayons dans chaque projection ; cartographie de l'erreur absolue entre l'objet et sa reconstruction ; comparaison des contraintes originale et reconstruite le long de la ligne tracée en pointillés sur les cartographies.



D'une manière qualitative, on constate que la cartographie reconstruite ressemble bien à la distribution de contrainte réelle. Pour être plus quantitatif, on représente la cartographie de l'erreur absolue entre la distribution initiale et celle reconstruite ; mises à part quelques « taches » (où l'erreur peut atteindre 20MPa (20%)) l'erreur commise reste sinon inférieure à 10%. La comparaison des résultats pour une ligne choisie arbitrairement dans les cartographies montre de façon plus quantitative que la convergence de l'algorithme vers la distribution initiale est très bonne.

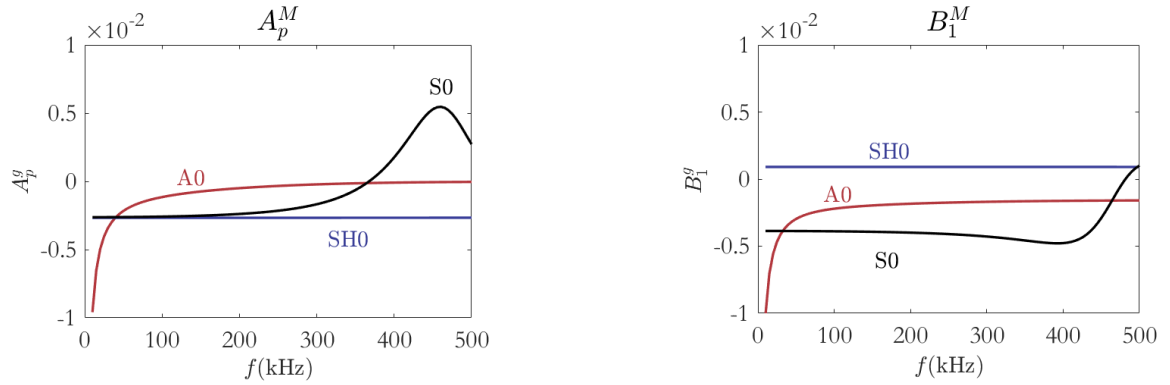
**Remarque :** en théorie l'inversion de l'amplitude  $\sigma_3$  peut être réalisée jusqu'à une précision arbitraire. Cela dans notre cas est possible si on choisit plus de rayons et de projections.

## B. Cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan

Dans le cas d'une contrainte uniaxiale dans le plan, la loi à inverser s'écrit comme :

$$\Delta_r v^M(x, y) = [A_p^M(f) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha(x, y)))] \sigma_1(x, y) \quad (4-53)$$

Les coefficients acoustoélastiques de chacun des modes en fonction de la fréquence sont donnés ci-après :



**Fig. 4-18 :** (à gauche) Coefficient acoustoélastique  $A_p^M$  correspondant à l'effet de l'amplitude de la contrainte. (à droite) Coefficient acoustoélastique  $B_1^M$  correspondant à l'effet de la direction de la contrainte.

**Inversion tomographique :** ce nouveau cas est à la fois anisotrope et multi-variables. Deux cartographies doivent être obtenues :  $\alpha(x, y)$  et  $\sigma_1(x, y)$ . L'inversion doit être réalisée soit avec deux modes, soit avec un seul mais à deux fréquences centrales différentes (cette dernière méthode exclut donc la possibilité d'utiliser le mode SH0 car non dispersif). Nous choisissons d'utiliser les deux modes A0 et S0 générés à la même fréquence centrale. Les temps de vol de ces modes sur le même rayon  $r_i$  s'écrivent :

$$T_i^{A0} = \int_{r_i} \left[ \frac{100}{v_0^{A0} [A_p^{A0} + B_1^{A0} \cos(2(\beta - \alpha(s)))] \sigma_1(s) + 100v_0^{A0}} \right] ds \quad (4-54)$$

$$T_i^{S0} = \int_{r_i} \left[ \frac{100}{v_0^{S0} [A_p^{S0} + B_1^{S0} \cos(2(\beta - \alpha(s)))] \sigma_1(s) + 100v_0^{S0}} \right] ds \quad (4-55)$$

Dans l'expérience, ils sont tous deux mesurés, et dans l'inversion tomographique, les quantités  $\sigma_1$  et  $\alpha$  sont supposées constantes sur le rayon  $r_i$ , ce qui permet d'écrire :

$$\sigma_1 = \frac{100r_i \left( \frac{B_1^{S0}}{v_0^{A0} T_i^{A0}} - \frac{B_1^{A0}}{v_0^{S0} T_i^{S0}} \right) - (B_1^{S0} - B_1^{A0})}{B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0}} \quad (4-56)$$

et

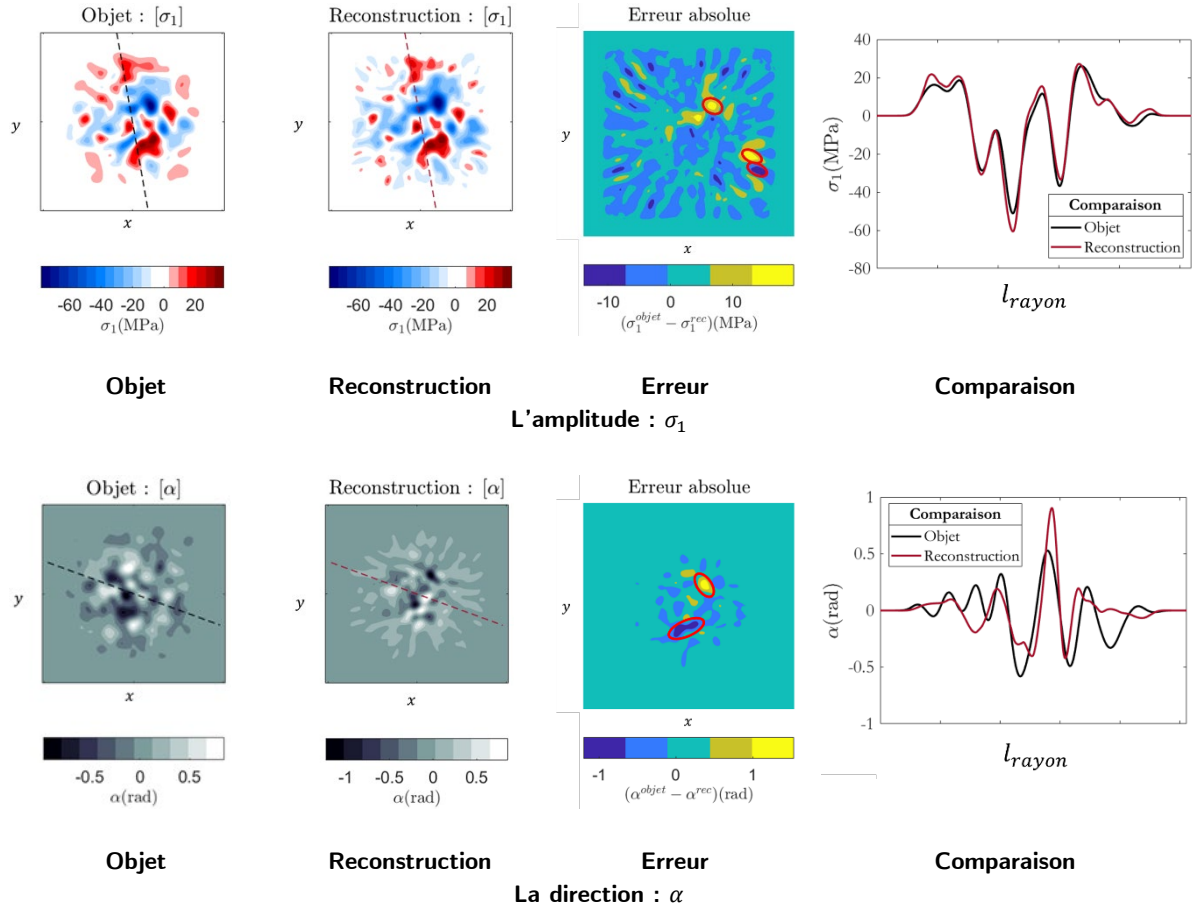
$$\alpha = \begin{cases} \beta + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{100}{v_0^{A0} B_1^{A0} \sigma_1} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right) - \frac{A_p^{A0}}{B_1^{A0}} \right) \\ \beta - \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{100}{v_0^{A0} B_1^{A0} \sigma_1} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right) - \frac{A_p^{A0}}{B_1^{A0}} \right) \end{cases} \quad (4-57)$$

**Inversion de l'amplitude**  $\sigma_1$  : comme les temps de vol ne sont jamais nuls, la seule possibilité pour que l'expression de l'amplitude ne soit pas définie est le cas où le dénominateur s'annule. Ceci est facilement évité en choisissant des fréquences d'excitation où il ne peut l'être. Cette expression est indépendante de la direction (elle ne contient pas  $\alpha$ ). Il est donc en théorie possible de cartographier l'amplitude avec une précision arbitraire (comme pour le problème précédent).

**Inversion de la direction**  $\alpha$  : cette inversion souffre de trois problèmes :

1. L'expression de  $\alpha$  dépend de celle de  $\sigma_1$ , ce qui veut dire que si l'inversion de  $\sigma_1$  n'est pas bonne cela affectera celle de  $\alpha$ .
2. Pour certaines valeurs de  $\sigma_1$ , l'expression de  $\alpha$  n'est pas définie ; cela se traduit dans l'inversion par une perte d'information sur tous les rayons où ce peut être le cas, donc une reconstruction incomplète.
3. Le fait que la contrainte ne soit pas un vecteur, mais une direction, donne deux valeurs admissibles pour  $\alpha$ . Cela se traduit dans l'inversion par un choix entre deux valeurs pour chaque rayon. Les deux valeurs admissibles sont symétriques par rapport à la direction du rayon. Ainsi, l'inversion sera d'autant meilleure que la direction de la contrainte aura peu varié le long d'un rayon.

Dans l'exemple suivant, on présente les résultats d'inversion pour deux cartographies arbitraires  $\sigma_1(x, y)$  et  $\alpha(x, y)$ .

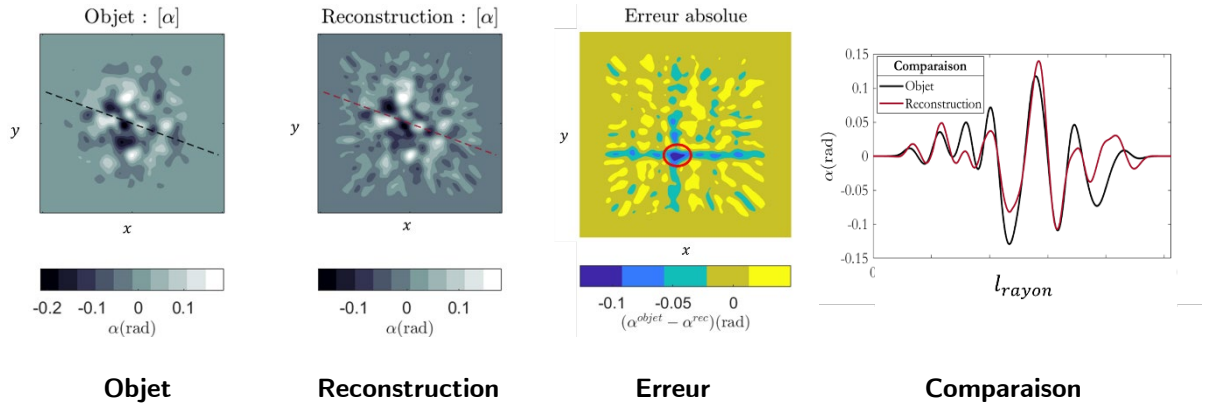


**Fig. 4-19** : Inversion des deux cartographies (amplitude  $\sigma_1$  et direction  $\alpha$ ) pour une configuration de 18 projections et 35 rayons par projection. Les deux modes A0 et S0 sont utilisés.

Comme dans le cas précédent l'inversion de l'amplitude de la contrainte (la première ligne de la figure) est de bonne qualité. L'erreur est presque partout inférieure à 7% sauf en quelques petites régions où elle peut monter à 15%. En revanche, on voit que celle de la direction (la deuxième ligne de la figure) souffre des problèmes discutés (l'erreur peut dépasser les 100% dans les deux régions encerclées en rouge). La comparaison des résultats pour une ligne choisie arbitrairement (figurant en pointillés sur les cartographies) dans les cartographies de la direction montre que l'algorithme reconstruit mieux les grandes variations ( $\pm 0.5$  rad) et que les petites ( $\pm 0.25$  rad) ; il lui est possible de donner une valeur négative au lieu de la valeur correcte positive.

De fait, le cas présenté est très défavorable : 1) D'une part, l'amplitude de la contrainte ne garde pas le même signe sur le rayon, ce qui peut conduire à ce que certaines intégrales soient nulles, donc à une perte d'information dans l'inversion de la direction. 2) D'autre part, dans la cartographie de direction initiale, il est possible que sur le même rayon la direction de la contrainte ait varié de  $180^\circ$ .

Dans des conditions plus favorables (une cartographie de contrainte qui garde majoritairement un seul signe et une cartographie de direction qui ne varie pas fortement), l'inversion de la direction peut être d'une qualité semblable à celle l'amplitude, comme le montre l'exemple ci-après où seule la reconstruction de la direction est comparée à la cartographie originale, et où l'erreur est presque partout inférieure à 30%:



**Fig. 4-20 :** (de gauche à droite) : cartographie originale ; cartographie reconstruite en utilisant 18 projections et 35 rayons dans chaque projection ; cartographie de l'erreur absolue entre les deux cartographies ; comparaison de la valeur de la contrainte de long de la ligne figurant en pointillés sur les cartographies originale et reconstruite.

**Conclusion :** l'inversion d'une cartographie de contrainte uniaxiale dans le plan revient à former deux cartographies (amplitude et direction). La méthode tomographique repose sur la formation d'un système de deux équations sur chaque rayon. Ces équations proviennent des temps de vol de deux modes ( $A_0$  et  $S_0$ ) générés à une même fréquence centrale. L'inversion de l'amplitude peut être réalisée en théorie jusqu'à une précision arbitraire ; celle de la direction souffre du fait que la direction de la contrainte n'est pas définie par un angle orienté, l'information obtenue par inversion tomographique restant toutefois pertinente.

### C. Cas d'une contrainte biaxiale dans/hors plan

Le cas d'une contrainte biaxiale dans et hors plan combine les deux cas traités précédemment ; la loi permettant l'inversion s'écrit comme :

$$\Delta_r v^M(x, y) = [A_p^M(f) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha(x, y)))] \sigma_1(x, y) + A_n^M \sigma_3(x, y) \quad (4-58)$$

Les coefficients acoustoélastiques sont les mêmes que ceux donnés dans les deux cas précédents.

**Inversion tomographique** : le problème acoustoélastique inverse est anisotrope et contient cette fois trois inconnues ( $\sigma_1, \sigma_3$  et  $\alpha$ ). Pour le résoudre, on peut utiliser les trois modes fondamentaux, ou un seul mode généré à trois fréquences centrales différentes, ou une combinaison de modes et de fréquences (par ex : deux modes dont un est généré à deux fréquences différentes). On peut ainsi former pour chaque rayon un système d'équations données par les temps de vol correspondant. On choisit ici d'utiliser trois modes, et les temps de vol, obtenus en utilisant l'équation eikonale, s'écrivent :

$$T_i^{A0} = \int_{r_i} \left[ \frac{100}{v_0^{A0} \left( [A_p^{A0} + B_1^{A0} \cos(2(\beta - \alpha(s)))] \sigma_1(s) + A_n^{A0} \sigma_3(s) \right) + 100v_0^{A0}} \right] ds \quad (4-59)$$

$$T_i^{S0} = \int_{r_i} \left[ \frac{100}{v_0^{S0} \left( [A_p^{S0} + B_1^{S0} \cos(2(\beta - \alpha(s)))] \sigma_1(s) + A_n^{S0} \sigma_3(s) \right) + 100v_0^{S0}} \right] ds \quad (4-60)$$

$$T_i^{SH0} = \int_{r_i} \left[ \frac{100}{v_0^{SH0} \left( [A_p^{SH0} + B_1^{SH0} \cos(2(\beta - \alpha(s)))] \sigma_1(s) + A_n^{SH0} \sigma_3(s) \right) + 100v_0^{SH0}} \right] ds \quad (4-61)$$

À partir de ces temps de vol, on peut remonter aux trois inconnues du problème, en les supposant constantes sur un rayon. On obtient :

$$\sigma_1 = \frac{(B_1^{SH0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{SH0})(B_1^{S0} f_1 - B_1^{A0} f_2) - (B_1^{S0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{S0})(B_1^{SH0} f_1 - B_1^{A0} f_3)}{(B_1^{SH0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{SH0})(B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0}) - (B_1^{S0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{S0})(B_1^{SH0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{SH0})} \quad (4-62)$$

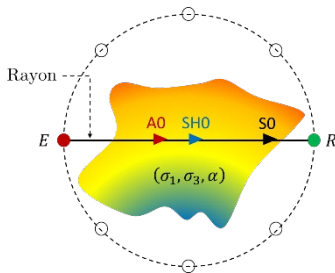
$$\sigma_3 = \frac{(B_1^{SH0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{SH0})(B_1^{S0} f_1 - B_1^{A0} f_2) - (B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0})(B_1^{SH0} f_1 - B_1^{A0} f_3)}{(B_1^{S0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{S0})(B_1^{SH0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{SH0}) - (B_1^{SH0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{SH0})(B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0})} \quad (4-63)$$

et

$$\alpha = \begin{cases} \beta + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{A_n^{S0} f_1 - A_n^{A0} f_2 - (A_n^{S0} A_p^{A0} - A_n^{A0} A_p^{S0}) \sigma_1}{(A_n^{S0} B_1^{A0} - A_n^{A0} B_1^{S0}) \sigma_1} \right) \\ \beta - \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{A_n^{S0} f_1 - A_n^{A0} f_2 - (A_n^{S0} A_p^{A0} - A_n^{A0} A_p^{S0}) \sigma_1}{(A_n^{S0} B_1^{A0} - A_n^{A0} B_1^{S0}) \sigma_1} \right) \end{cases} \quad (4-64)$$

avec :

$$f_1 = \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right), \quad f_2 = \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{S0}} - v_0^{S0} \right), \quad f_3 = \frac{100}{v_0^{SH0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{SH0}} - v_0^{SH0} \right) \quad (4-65)$$

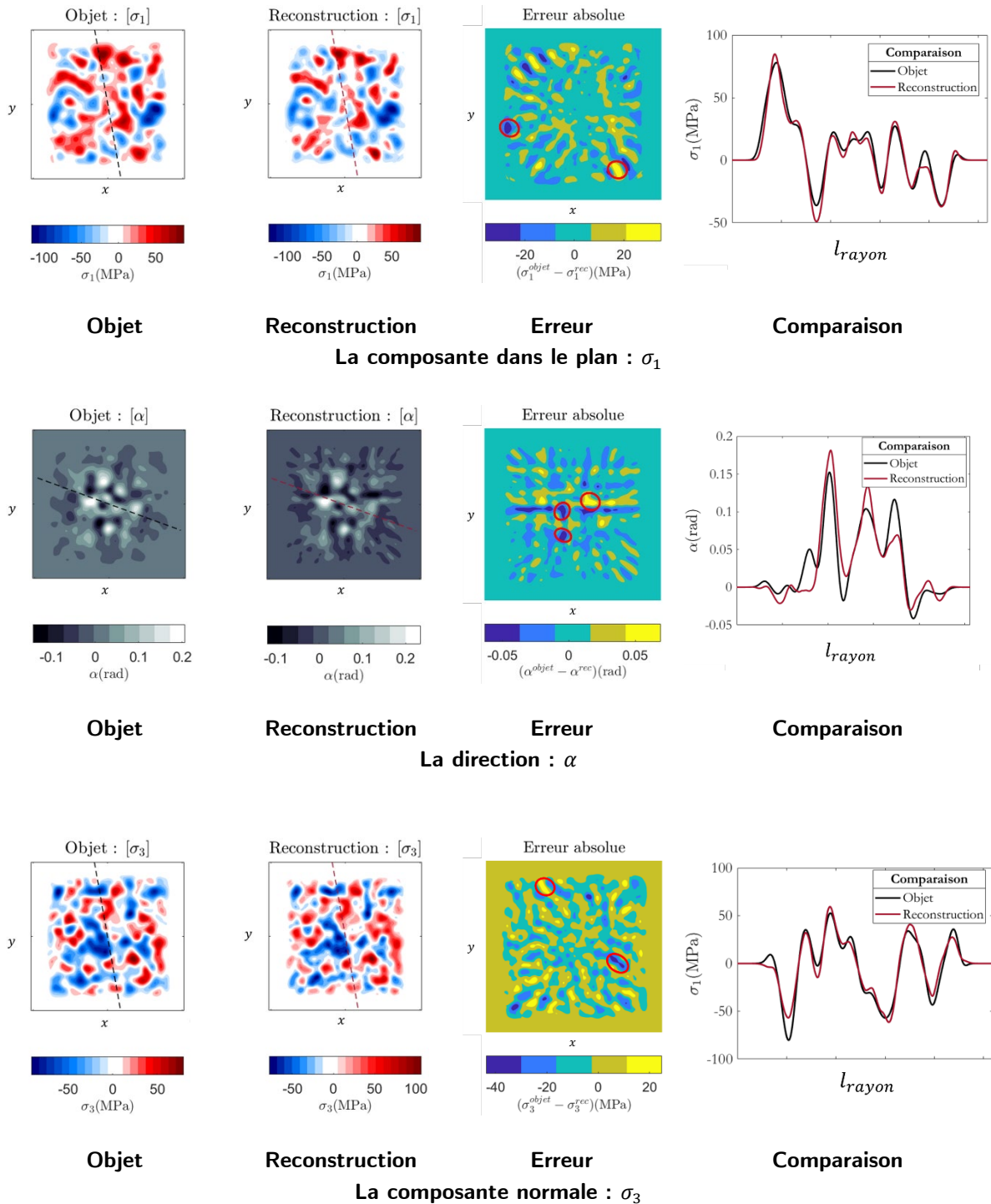


**Fig. 4-21** : Illustration de la méthode d'inversion tomographique d'une contrainte biaxiale dans/hors plan. On fait le choix de former le système de trois équations par les temps de vol des trois modes fondamentaux.

Dans l'exemple suivant Fig. 4.22, on donne les résultats de l'inversion pour les trois cartographies arbitraires  $\sigma_1(x, y)$ ,  $\sigma_3(x, y)$  et  $\alpha(x, y)$ . On peut faire les remarques suivantes :

**Inversion des amplitudes** : les deux amplitudes ( $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ ) sont inversées avec les formules (4-62) et (4-63), indépendantes l'une de l'autre, et prenant en compte les temps de vol des trois modes (et les coefficients acoustoélastiques). Il est donc en théorie possible de former des images jusqu'à une précision arbitraire. Sauf pour quelques « taches » (encadrées en rouges) les erreurs pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont presque partout inférieures à 10%.

**Inversion de la direction** : la direction est inversée avec les mêmes difficultés que celles discutées précédemment. Il est possible de limiter ces problèmes en écrivant  $\alpha$  en fonction de  $\sigma_1$  uniquement, ce qui permet d'éviter les erreurs potentielles provenant de la reconstruction de  $\sigma_3$ . La seconde ligne de la figure montre que même si l'inversion de la direction n'est pas aussi précise que celles des amplitudes, elle reste toutefois pertinente. L'erreur peut atteindre 50% en quelques petites régions et est presque partout inférieure à 25%



**Fig. 4-22** : (a) cartographie originale. (b) reconstruite en utilisant 30 projections et 33 rayons dans chaque projection (c) comparaison de la valeur de la contrainte sur la ligne en pointillée.

**Conclusion** : pour résoudre le PAEI dans les cas d'une contrainte biaxiale dans/hors le plan, il faut pour chaque rayon prélever trois temps de vol pour former un système d'équations dont les inconnues sont  $\sigma_1, \sigma_3$  et  $\alpha$ . Ces temps de vol peuvent provenir de trois modes se propageant dans la direction du rayon, ou bien d'un seul mode généré à trois fréquences différentes, ou encore d'une combinaison de ces solutions (deux modes utilisés dont un généré à deux fréquences différentes, toujours dans la direction du rayon).

#### D. Cas d'une contrainte biaxiale dans le plan

Dans le cas d'une contrainte biaxiale dans le plan, la loi à inverser s'écrit comme :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1(x, y) + \sigma_2(x, y)) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha(x, y))) (\sigma_1(x, y) - \sigma_2(x, y)) \quad (4-66)$$

Les coefficients acoustoélastiques sont les mêmes que ceux du cas uniaxial dans le plan.

Le problème acoustoélastique inverse contient à nouveau trois inconnues ( $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\alpha$ ) et est anisotrope. Dans le cas biaxial dans/hors plan, une solution était possible car on a pu former pour chaque rayon un système d'équations *inversible*. Cela n'est plus le cas ici. Pour bien le comprendre, réécrivons formellement le système des Éqs. (4-66) de  $M$  modes sous la forme suivante :

$$F^M = a^M(X + Y) + b^M Z(X - Y) \quad (4-67)$$

avec

$$\begin{aligned} F^M &= \Delta_r v^M \\ a^M &= A_p^M \\ X &= \sigma_1 \\ Y &= \sigma_2 \\ b^M &= B_1^M \\ Z &= \cos(2(\beta - \alpha)) \end{aligned} \quad (4-68)$$

Le système à résoudre est clairement non-linéaire ; les méthodes de substitution ne peuvent pas être utilisées puisque les coefficients de  $X$  et  $Y$  sont les mêmes dans toutes les équations. Par ailleurs, il est aussi impossible d'utiliser des méthodes itératives (comme les méthodes de Newton ou de Broyden Burden & Faires [143]) puisque la matrice Jacobienne est singulière.

Pour résoudre le PAEI dans ce cas, il est donc nécessaire de développer une nouvelle approche, différente de celle utilisée jusqu'ici.

#### Résolution du problème : nouvelle approche

Dans le cas triaxial homogène dans le plan traité au chapitre 3, on a vu que le système formé par les temps de vol pris dans une direction unique n'est pas inversible. Cette limitation se retrouve en fait dès le cas présent de la contrainte biaxiale dans le plan. Nous avons développé (dans le chapitre 3) une méthode alternative fondée pour l'essentiel sur des mesures prises dans différentes directions. La méthode développée n'est applicable que dans le cas homogène, où, si l'on change de direction, les quantités  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\alpha$  ne changent pas le long de la nouvelle direction.

Ce ne peut plus être le cas ici où ces quantités sont par définition inhomogènes, et donc, changent avec la direction. L'idée que nous proposons ici pour résoudre le problème acoustoélastique inverse dans le cas d'une contrainte inhomogène biaxiale (ou triaxiale) dans le plan, repose sur la capacité de changer de direction, sans que les quantités  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\alpha$ , changent, afin d'utiliser une méthode similaire à celle présentée dans le chapitre 3 pour le cas triaxial. Cette méthode repose sur l'utilisation des deux versions du FPB (parallel-Beam et Fan-Beam) ; la dernière n'étant pas encore implémentée<sup>1</sup> nous avons décrit la démarche de résolution de ce problème et celle du problème triaxial en annexe (VII-B [p. 177] et C [p. 180]).

<sup>1</sup> L'implémentation de cette version de l'algorithme représente l'un des objectifs proches de l'après thèse

## VI. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la deuxième partie du problème acoustoélastique inverse (l'inversion d'une cartographie de contrainte inhomogène).

Nous avons d'abord étudié différentes techniques de tomographie. Nous avons établi que la tomographie par diffraction n'est pas adaptée à l'imagerie de contraintes résiduelles à travers la théorie acoustoélastique :

1. si la contrainte est limitée à un volume de dimensions plus petites que la longueur d'onde, d'autres facteurs comme la variation forte de propriétés matériau interdisent l'utilisation de la théorie d'acoustoélasticité et par suite le développement d'une méthode basée sur la théorie ;
2. en tomographie par diffraction, il n'y a pas de notion de trajectoire de l'onde donc de direction de propagation, ce qui rend impossible l'inversion d'une grandeur tensorielle.

En revanche, la tomographie par rayons est bien adaptée. Elle est utilisable lorsque l'objet à imager a des dimensions plus grandes que la longueur d'onde et intègre la notion de trajectoire de l'onde. Lorsque le contraste de l'indice de réfraction entre l'objet et le milieu ambiant est inférieur à 5%, la courbure des trajectoires peut être négligée et la tomographie par rayons droits est utilisable.

Nous avons ensuite présenté les deux algorithmes SART et FBP les plus utilisés pour résoudre un problème d'imagerie par tomographie par rayons droits, le second étant choisi pour des raisons de précision et de rapidité.

Nous avons poursuivi en mettant en évidence les difficultés spécifiques de la tomographie pour le problème étudié où il est nécessaire d'inverser une grandeur anisotrope et à variables multiples. L'approche classique de la tomographie, limitée à l'inversion de quantités scalaires ne peut être appliquée, et de nouvelles approches ont dû être développées. Nos développements dépendent de la complexité du problème traité. Trois problèmes de complexité croissante l'ont été. Deux problèmes plus complexes, seulement abordés et recevant une solution nouvelle pas encore testée, sont donnés en annexe du chapitre, car pouvant servir de piste pour des recherches futures.

1. **Inversion de contrainte uniaxiale hors plan** : le problème isotrope ne contient qu'une seule inconnue ( $\sigma_3$ ). Sa résolution est semblable à celles connues pour la tomographie par rayon-X ou pour l'imagerie d'un défaut de corrosion ; elle n'utilise qu'un seul mode guidé.
2. **Inversion de contrainte uniaxiale dans le plan** : le problème anisotrope contient deux inconnues ( $\sigma_1$  et  $\alpha$ ). L'approche classique est modifiée en utilisant deux modes sur chaque rayon pour former un système inversible d'équations. L'inversion de l'amplitude peut en théorie être réalisée avec une précision arbitraire. Celle de la direction de la contrainte doit faire face à une indétermination d'origine physique ; même dans un cas défavorable, elle contient une information pertinente.
3. **Inversion de contraintes biaxiale dans/hors plan** : le problème contient trois inconnues ( $\sigma_1, \sigma_3$  et  $\alpha$ ). L'approche développée est similaire à celle du cas précédent, mais trois modes sont utilisés pour former sur chaque rayon un système inversible d'équations.

In fine, les approches développées pour résoudre le problème acoustoélastique inverse reposent sur le fait que l'effet acoustoélastique varie d'un mode à un autre, ce qui rend possible et pertinente l'utilisation de plusieurs modes pour résoudre un problème à plusieurs inconnues.

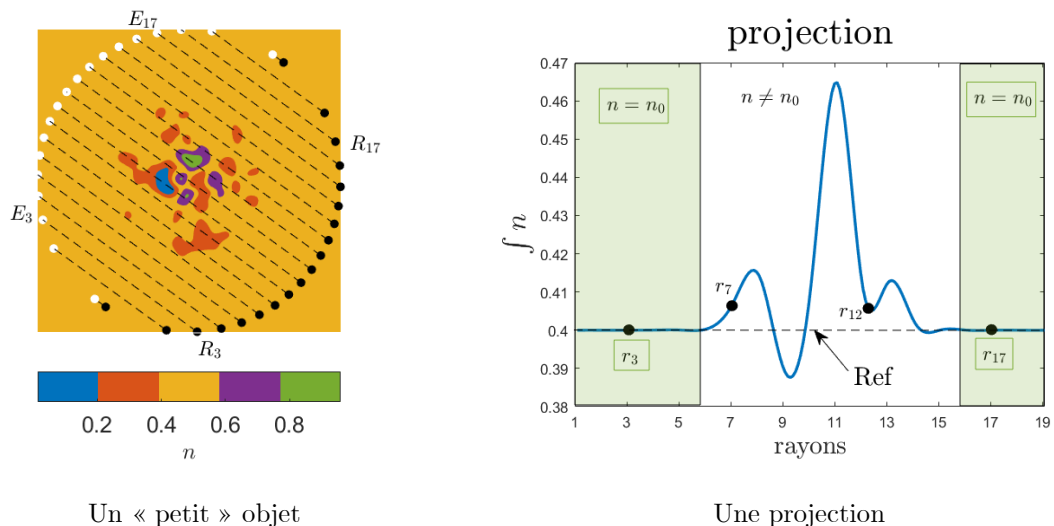
### Discussion 1 : cas d'une contrainte présente sous les capteurs

Dans ce chapitre, les résultats présentés ont été obtenus pour des cas où la contrainte à imager est suffisamment loin des capteurs pour faire l'hypothèse de propagation d'onde plane. Cela a deux conséquences :

1. On a pu réutiliser les formules (lois) développées dans le chapitre 3, valides pour des ondes planes monochromatiques.
2. Avec les traducteurs entourant la zone à imager constituée d'une partie du milieu ambiant, il est possible d'avoir une inversion *quantitative*. En effet, dans une projection, plusieurs rayons ne vont pas interagir avec l'objet à imager, ce qui permet de considérer les grandeurs mesurées (temps de vol, coefficient d'absorption, ...) comme des références. Cela rend possible d'opérer une soustraction et de remonter à une valeur absolue. En revanche si tous les rayons passent par l'objet à imager, la grandeur mesurée du milieu ambiant est perdue, la soustraction impossible, et l'information reconstruite est une mesure relative. On peut illustrer cela en considérant successivement le cas d'un petit objet puis celui d'un grand.

#### a. « Petit » objet :

L'objet est suffisamment petit pour que plusieurs rayons n'interagissent pas avec lui. La grandeur mesurée pour les rayons en question garde la même valeur. Ceci se traduit par des plateaux (pour les premiers et derniers rayons), sur la projection (voir Fig. 4.23). La valeur sur ces plateaux est celle du milieu ambiant, utilisée comme une valeur de référence.

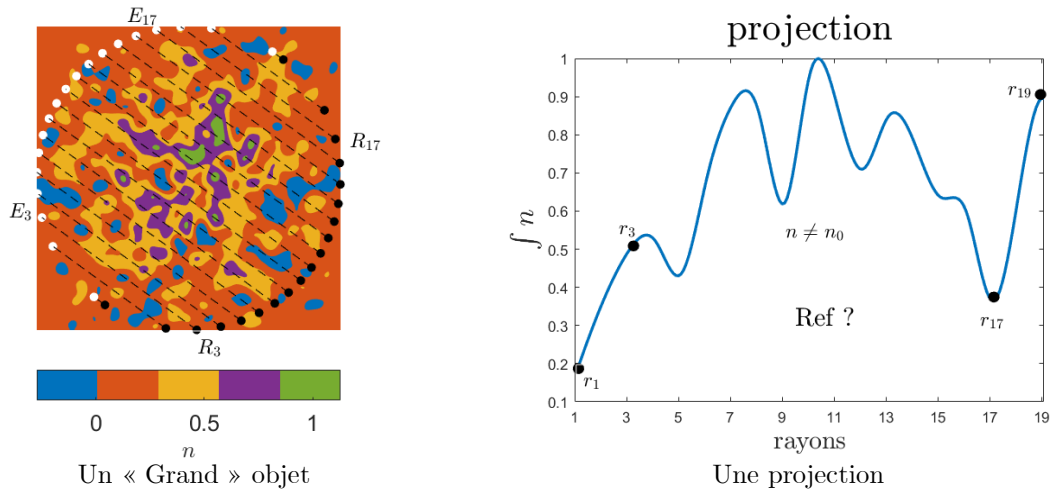


**Fig. 4-23** : (à gauche) un objet dont l'étendue est suffisamment petite pour que plusieurs rayons n'interagissent pas avec lui. (à droite) une projection faite avec 19 rayons.  $n$  et  $n_0$  sont les indices de réfraction de l'objet et du milieu ambiant.  $r_i$  est le rayon numéro  $i$  entre l'émetteur  $E_i$  et le récepteur  $R_i$ .

#### b. « Grand » objet

L'objet est suffisamment grand pour que tous les rayons y passent à travers. Les plateaux significatifs d'une propagation dans le milieu ambiant sont absents. Ceci rend impossible l'identification du milieu ambiant, et on perd sa valeur de référence. L'inversion ne peut être que relative. Ainsi, on sait de combien l'indice de réfraction a varié d'une position à une autre, mais on ne sait pas de combien il a varié par rapport à celui du milieu ambiant.





**Fig. 4-24 :** (à gauche) un objet dont l'étendue est suffisamment grande pour que tous les rayons interagissent avec lui. (à droite) une projection faite avec 19 couples émetteur-récepteur.  $n$  et  $n_0$  sont les indices de réfraction de l'objet et celui du milieu ambiant.  $r_i$  est le rayon numéro  $i$  entre l'émetteur  $E_i$  et le récepteur  $R_i$ .

#### Conséquences pour les approches tomographiques :

1. *Onde non-plane* : les méthodes d'inversion reposent sur une loi développée avec l'hypothèse d'ondes planes monochromatiques. Si la contrainte est présente sous ou à proximité du traducteur, l'onde n'est pas plane dans cette région. Il est donc nécessaire d'étudier comment une onde non-plane interagit avec la contrainte.
2. *Perte de l'information de référence* : Il faut disposer d'un résultat (simulé de façon réaliste, ou mesuré) en plus de l'expérience réalisée dans le cas à imager, qui puisse servir de référence.

#### Conséquence sur la modélisation des capteurs :

En présence de contrainte, les lois de comportement du milieu changent (par exemple l'élasticité par effet acoustoélastique, l'aimantation et la magnétostriction par effet magnéto-élastique). Le fonctionnement de tout traducteur, en émission ou en réception, dépend de ces lois de comportement. Ainsi, le comportement des EMAT dépend à la fois des propriétés élastiques et des propriétés électromagnétiques du milieu dans lequel ils génèrent des (ou sont sensibles aux) ondes. Dans les milieux ferromagnétiques, le fonctionnement d'un EMAT est notamment régi par la perméabilité magnétique du milieu, très sensible à la présence de contrainte (voir Bozorth [15]). Au chapitre 6, une étude plus approfondie est réalisée sur le comportement des EMAT en présence de contrainte dans un milieu ferromagnétique.

---

**Discussion 2 : l'inversion à hautes fréquences**


---

Dans ce chapitre, on s'est basé sur la version réduite du modèle acoustoélastique, utilisant seulement trois coefficients acoustoélastiques, pour développer les approches tomographiques :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (4-69)$$

Cette version permet de prédire l'effet acoustoélastique, avec une bonne précision, pour les modes fondamentaux dans la plage de fréquence étudiée ( $f \in [10, 500]$  kHz). Cependant, on a vu au chapitre 3 qu'au-delà de cette fréquence et pour les modes d'ordres supérieurs, une version plus précise peut être proposée, contenant un coefficient acoustoélastique supplémentaire. Cette loi est donnée sous la forme :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + [B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha)) + B_2^M(f) \cos(4(\beta - \alpha))](\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (4-70)$$

On peut développer des méthodes d'inversion tomographiques avec cette version pour résoudre le problème acoustoélastique inverse de façon très similaire à celle dans le présent chapitre. Si la nouvelle version du MAE est utilisée, il faut mettre en œuvre un mode supplémentaire dans la résolution, pour les quatre cas anisotropes (uniaxial dans le plan, biaxial dans et hors plan, biaxial dans le plan, et triaxial).

## VII. Annexe

### A. Démonstration de la théorie de tranche de Fourier

Pour démontrer ce théorème, réécrivons la transformée de Radon (Éq.(4-33)) pour une variable  $t$  continue sous la forme suivante :

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t, s) ds \quad (4-71)$$

Prenons maintenant la transformée de Fourier 1D de la transformée de Radon  $p_\theta$  :

$$S_\theta(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2i\pi t \eta} dt \quad (4-72)$$

Remplaçons  $p_\theta$  par sa valeur :

$$S_\theta(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} n(t, s) ds \right] e^{-2i\pi t \eta} dt \quad (4-73)$$

En notant que le repère  $(t, s)$  est l'image du repère  $(e_1, e_2)$  par la rotation d'angle  $\theta$ , on a  $t = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$  et  $s = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$ . En effectuant maintenant un changement de variables  $(t, s) \Leftrightarrow (x, y)$  dans l'intégrale précédente, on trouve :

$$S_\theta(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y) e^{-2i\pi \eta (x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy \quad (4-74)$$

En posant  $u = \eta \cos(\theta)$  et  $v = \eta \sin(\theta)$ , la formule précédente devient :

$$S_\theta(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y) e^{-2i\pi \eta (xu + yv)} dx dy \quad (4-75)$$

On reconnaît dans le terme à droite la transformée de Fourier 2D (noté ici  $F(u, v)$ ) de la fonction  $n(x, y)$ . On a donc :

$$S_\theta(\eta) = F(u, v) = F(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta)) = F(\eta, \theta) \quad (4-76)$$

### B. Cas d'une contrainte biaxiale dans le plan

#### 1. Inversion de la quantité $\sigma_1 + \sigma_2$ (Expérience 1):

Tout d'abord, on utilise les deux modes A0 et S0 pour inverser la cartographie de la quantité  $\sigma_1 + \sigma_2$ , en utilisant la formule suivante (obtenue après un simple calcul, à partir de la loi (4-66)) :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\left( B_1^{S0} \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right) - B_1^{A0} \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{S0}} - v_0^{S0} \right) \right)}{(B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0})} \quad (4-77)$$

L'inversion de cette quantité est identique à celle des amplitudes dans les trois cas précédents. Elle pourrait être réalisée en théorie avec une précision arbitraire.

Cela permet de réécrire la loi à inverser sous la forme suivante :

$$\Delta_r v^M - A_p^M (\sigma_1 + \sigma_2) = B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4-78)$$

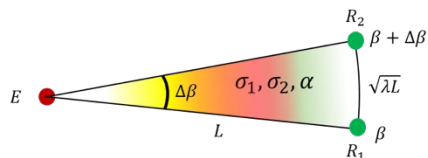
Le terme à gauche est maintenant connu et on le note  $F^M$ . Ce qui donne :

$$F^M = B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4-79)$$

## 2. Inversion de la direction de la contrainte (Expérience 2):

Rappelons que les algorithmes de tomographie qu'on a présentés dans ce chapitre, et les méthodes d'inversion (pour les trois cas : contraintes uniaxiale hors plan, dans le plan, ou biaxiale dans/hors plan) reposent sur la validité de la théorie des rayons, qui impose une résolution de  $\sqrt{L\lambda}$  (la distance émetteur-récepteur  $\times$  la longueur d'onde). Cette limite de résolution prédéfinit l'espacement entre deux capteurs adjacents. Pour arriver à inverser la direction de la contrainte on fait l'hypothèse suivante :

Soit un émetteur  $E$  et deux récepteurs  $R_1$  et  $R_2$  qui se trouvent sur un arc de cercle de centre  $E$  et d'angle d'ouverture  $\Delta\beta$ . On suppose que la variation des trois quantités  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\alpha$  dans la direction tangentielle (circonférentielle) est négligeable. On donne la figure suivante comme illustration



**Fig. 4-25** : deux récepteurs  $R_1$  et  $R_2$  qui se trouvent sur un arc de cercle, de centre l'émetteur  $E$  et d'angle d'ouverture  $\Delta\beta$ . Les trois quantités  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\alpha$  sont constantes dans la direction tangentielle à l'arc.

Il est clair que cette hypothèse pourrait toujours être vérifiée (*e.g.* on peut tendre  $\Delta\beta$  vers 0).

En particulier, elle est vérifiée dans l'approche tomographique par rayons qui à cause de la limite de résolution imposée par la théorie des rayons, ne peut imaginer que des objets qui ne varient pas sur une distance supérieure ou égale à la limite de résolution. Et comme cette dernière est égale à l'espacement entre les capteurs adjacents (*e.g.*  $[R_1 R_2] = \text{à la limite de résolution}$ ), on voit que l'hypothèse prise est vérifiée.

Si on prend par exemple le mode A0, et en utilisant (4-79) la quantité  $F^{A0}$  est donnée dans les deux directions  $\beta$  et  $\beta + \Delta\beta$  par :

$$\begin{cases} F_{\beta}^{A0} = B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) \\ F_{\beta+\Delta\beta}^{A0} = B_1^M \cos(2(\beta + \Delta\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases} \quad (4-80)$$

On rappelle que la quantité  $\sigma_1 + \sigma_2$  est connue grâce à la première expérience tomographique. Ce qui veut dire que les quantités  $F_{\beta}^{A0}$  et  $F_{\beta+\Delta\beta}^{A0}$  sont aussi connues, et on les donne ici.

$$\begin{cases} F_{\beta}^{A0} = \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{L}{T_{\beta}^{A0}} - v_0^{A0} \right) - A_p^{A0} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ F_{\beta+\Delta\beta}^{A0} = \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{L}{T_{\beta+\Delta\beta}^{A0}} - v_0^{A0} \right) - A_p^{A0} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (4-81)$$

Si on suppose maintenant que  $\Delta\beta$  est suffisamment petit pour que le développement de Taylor de  $\cos(2(\beta + \Delta\beta - \alpha))$  au premier ordre soit une bonne approximation, on peut écrire :

$$\begin{cases} F_{\beta}^{A0} = B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) \\ F_{\beta+\Delta\beta}^{A0} = B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) - 2\Delta\beta \cdot B_1^M \sin(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases} \quad (4-82)$$

Ce qui donne après un simple calcul :

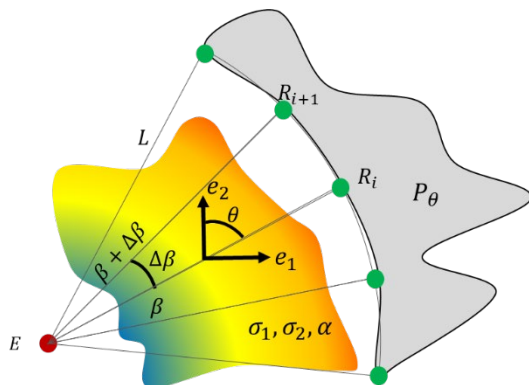
$$\begin{cases} \alpha = \beta - \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{F_{\beta}^{A0} - F_{\beta+\Delta\beta}^{A0}}{2\Delta\beta \cdot F_{\beta}^{A0}} \right) \\ \alpha = \beta - \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{F_{\beta}^{A0} - F_{\beta+\Delta\beta}^{A0}}{2\Delta\beta \cdot F_{\beta}^{A0}} \right) + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4-83)$$

On note que l'inversion de la direction souffre toujours de l'existence de deux solutions admissibles.

### FBP-Fan-Beam :

On rappelle que dans ce chapitre, nous avons choisi l'algorithme filtered back projection (FBP), pour faire les inversions tomographiques. La version de cet

algorithme utilisée jusqu'ici, est celle avec des rayons parallèles (dite FBP-Parallel-Beam). Qui exige aux positions des récepteurs d'être les images par une symétrie axiale des celles des émetteurs. On note cependant que dans ce cas particulier de l'inversion d'une cartographie de contrainte biaxiale dans le plan, nous avons proposé, pour l'inversion de la direction une approche qui se base sur émission dans deux directions divergentes (donc non parallèles). Ce qui impose d'utiliser une autre version de l'algorithme FBP. Cette version s'appelle FBP-Fan-Beam (voir Réf [110, 144-145]), illustrée par la figure suivante :



**Fig. 4-26** : La configuration tomographique faisant usage de l'algorithme FPB fan-beam, repose une émission par une seul émetteur et une réception par un ensemble de récepteurs qui se trouvent sur un arc, dont le centre est la source. On appelle une projection l'ensemble des mesures faites pour une valeur de  $\theta$  (*i.e.* l'angle entre le rayon central, et la direction  $e_2$  du repère lié à la plaque). L'inversion complète est finie si l'émetteur fait une rotation de  $360^\circ$ .

Dans cette version de l'algorithme FPB la configuration tomographique est constitutive d'un seul émetteur et un ensemble de récepteurs, qui sont mis sur un arc<sup>1</sup>. Une projection dans ce cas est définie par la transformée de Radon

<sup>1</sup> On note qu'il y'a une autre version de FBP-Fan-Beam où les récepteurs sont sur une ligne.

sur tous les rayons. Cet ensemble émetteur-récepteurs tourne autour de l'objet à imager. Et après une révolution l'image est reconstruite suivant une procédure similaire à celle de FPB-Parallel-Beam.

L'implémentation de cette version de l'algorithme n'est pas encore faite, elle représente l'un des objectifs proches de l'après thèse.

### 3. Inversion des deux amplitudes : $\sigma_1$ et $\sigma_2$

Maintenant que nous avons un moyen pour imager la direction, on peut revenir aux résultats des deux premières expériences et écrire :

$$\sigma_1 = \frac{F_\beta^{A0}}{2B_1^M \cos(2(\beta - \alpha))} + \frac{\left( B_1^{S0} \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right) - B_1^{A0} \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{S0}} - v_0^{S0} \right) \right)}{2(B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0})} \quad (4-84)$$

Et

$$\sigma_2 = -\frac{F_\beta^{A0}}{2B_1^M \cos(2(\beta - \alpha))} + \frac{\left( B_1^{S0} \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right) - B_1^{A0} \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{S0}} - v_0^{S0} \right) \right)}{2(B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0})} \quad (4-85)$$

On remarque que les inversions des amplitudes souffrent maintenant des problèmes suivants :

1. Les expressions avec lesquelles les inversions sont faites ne sont pas définie si  $\cos(2(\beta - \alpha)) = 0$ , ce qui se traduit dans l'inversion par une perte d'information.
2. Elles dépendent de l'inversion de la direction, qui elle n'est jamais reconstruite parfaitement.

Il est important de noter que l'inversion des deux amplitudes ne fait que réutiliser les mesures faites dans les deux expériences. Elle ne demande donc pas de faire de nouvelles mesures.

### Conclusion :

L'inversion tomographique d'une cartographie d'une contrainte biaxiale dans le plan, se fait en 3 étapes :

1. Utiliser l'algorithme FBP-Parallel-Beam pour inverser la somme des amplitudes (deux modes sont utilisés).
2. Utiliser l'algorithme FBP-Fan-beam pour inverser la direction de la contrainte (un seul mode est utilisé).
3. Réutiliser les résultats précédents pour trouver les valeurs de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

### C. Cas d'une contrainte triaxiale

Dans ce cas la loi à inverser est :

$$\Delta_r v^M = A_p^M(f)(\sigma_1 + \sigma_2) + B_1^M(f) \cos(2(\beta - \alpha))(\sigma_1 - \sigma_2) + A_n^M(f)\sigma_3 \quad (4-86)$$

Les coefficients acoustoélastiques sont les mêmes que ceux pour les cas uniaxiaux.

Le problème acoustoélastique inverse contient quatre inconnues ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\alpha$ ) et est anisotrope. Les étapes d'inversion de ce problème sont similaires à celles du problème précédent, avec la seule différence d'utiliser un mode supplémentaire dans la première expérience. On donne ces étapes ici :

#### 1. Inversion des quantités : $\sigma_1 + \sigma_2$ et $\sigma_3$ (Expérience 1)

Utiliser l'algorithme FPB-Parallel-Beam, et les trois modes fondamentaux pour inverser les deux quantités :  $\sigma_1 + \sigma_2$  et  $\sigma_3$  en utilisant les formules suivantes :

$$\sigma_3 = \frac{S(B_1^{S0} f_1 - B_1^{A0} f_2) - R(B_1^{SH0} f_1 - B_1^{A0} f_3)}{SQ - RS} \quad (4-87)$$

Et

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{S(B_1^{S0} f_1 - B_1^{A0} f_2) - Q(B_1^{SH0} f_1 - B_1^{A0} f_3)}{SP - SQ} \quad (4-88)$$

Avec :

$$f_1 = \frac{100}{v_0^{A0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{A0}} - v_0^{A0} \right) \quad (4-89)$$

$$f_2 = \frac{100}{v_0^{S0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{S0}} - v_0^{S0} \right) \quad (4-90)$$

$$f_3 = \frac{100}{v_0^{SH0}} \left( \frac{r_i}{T_i^{SH0}} - v_0^{SH0} \right) \quad (4-91)$$

$$S = (B_1^{SH0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{SH0}) \quad (4-92)$$

$$P = (B_1^{SH0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{SH0}) \quad (4-93)$$

$$Q = (B_1^{S0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{S0}) \quad (4-94)$$

$$R = (B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0}) \quad (4-95)$$

$T_i$  : le temps de vol sur le rayon  $r_i$ .

On note que l'inversion de  $\sigma_1 + \sigma_2$  et celle de  $\sigma_3$  ne dépendent que des temps de vol et des coefficients acoustoélastiques. Et par conséquence elles peuvent être en théorie réalisées avec une précision arbitraire.

#### 2. Inversion de la direction (Expérience 2)

Maintenant que les deux quantités  $\sigma_1 + \sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont connues, la loi à inverser est réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 G^M &= \Delta_r v^M - A_p^M (\sigma_1 + \sigma_2) - A_n^M \sigma_3 \\
 &= B_1^M \cos(2(\beta - \alpha)) (\sigma_1 - \sigma_2)
 \end{aligned} \quad (4-96)$$

Pour éviter la répétition on peut remarquer que ce problème est identique au problème dans le cas précédent. On donne ici les résultats qui font usage de l'algorithme FBP-Fan-Beam et un seul mode (*e.g.* A0) :

$$\begin{cases}
 \alpha = \beta - \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{G_\beta^{A0} - G_{\beta+\Delta\beta}^{A0}}{2\Delta\beta \cdot G_\beta^{A0}} \right) \\
 \alpha = \beta - \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{G_\beta^{A0} - G_{\beta+\Delta\beta}^{A0}}{2\Delta\beta \cdot G_\beta^{A0}} \right) + \frac{\pi}{2}
 \end{cases} \quad (4-97)$$

### 3. Inversion des amplitudes : $\sigma_1$ et $\sigma_2$

En réutilisant les résultats des deux expériences précédentes on peut retrouver, les valeurs des amplitudes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$

$$\sigma_1 = \frac{G_\beta^{A0}}{2B_1^M \cos(2(\beta - \alpha))} + \frac{P(B_1^{S0} f_1 - B_1^{A0} f_2) - Q(B_1^{SH0} f_1 - B_1^{A0} f_3)}{RP - SQ} \quad (4-98)$$

Et

$$\sigma_2 = -\frac{G_\beta^{A0}}{2B_1^M \cos(2(\beta - \alpha))} + \frac{P(B_1^{S0} f_1 - B_1^{A0} f_2) - Q(B_1^{SH0} f_1 - B_1^{A0} f_3)}{RP - SQ} \quad (4-99)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 P &= (B_1^{SH0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{SH0}) \\
 Q &= (B_1^{S0} A_n^{A0} - B_1^{A0} A_n^{S0}) \\
 R &= (B_1^{S0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{S0}) \\
 S &= (B_1^{SH0} A_p^{A0} - B_1^{A0} A_p^{SH0})
 \end{aligned} \quad (4-100)$$

### Conclusion :

L'inversion tomographique d'une cartographie d'une contrainte triaxiale dans le plan, se fait en 3 étapes :

1. Utiliser l'algorithme FBP-Parrallel-Beam pour inverser la somme des amplitudes  $\sigma_1 + \sigma_2$  et l'amplitude de la composante normale  $\sigma_3$  (trois modes sont utilisés dans cette étape).
2. Utiliser l'algorithme FBP-Fan-beam pour inverser la direction de la contrainte (un seul mode est utilisé dans cet étape).
3. Réutiliser les résultats précédents pour trouver les valeurs de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .





## 5. Modèle de réception d'ondes élastiques par EMAT

### Résumé :

Dans les quatre premiers chapitres de ce manuscrit nous avons traité deux problèmes : le problème acoustoélastique direct (chapitres 1 et 2) et son inverse (chapitres 3 et 4). Le traitement de ces problèmes est indépendant de la nature des émetteurs et récepteurs d'ondes élastiques utilisés, la seule exigence étant leur capacité à émettre et recevoir/détecter des ondes de Lamb et/ou des ondes SH.

Partant du fait que l'objectif de la thèse est de développer une méthode de caractérisation de contrainte par EMAT, nous nous intéressons dans ce chapitre à la modélisation de ces transducteurs en milieu ferromagnétique.

La modélisation du mécanisme de génération d'une onde élastique par EMAT en milieu ferromagnétique a fait l'objet de la thèse de Clauss [37]. Le présent chapitre s'intéresse au problème de réception (PR) d'une onde par EMAT en milieu ferromagnétique. Il contient les cinq sections suivantes :

La Sec. I [p. 184] consiste en un rappel sur quelques notions d'électromagnétisme importantes pour la compréhension du reste du chapitre.

La Sec. II [p. 189] comporte deux sous sections : la première présente le mécanisme de réception d'une onde élastique par différents types de capteurs. La seconde présente la problématique du chapitre, à savoir, l'écriture explicite de la tension induite dans la bobine d'un EMAT au passage de l'onde, en fonction du champ élastodynamique associé.

La Sec. III [p. 192] traite deux problèmes classiques d'induction électromagnétique, afin de fixer la terminologie et de faciliter le traitement du problème de réception, ramené à un problème équivalent d'induction.

La Sec. IV [p. 196] comporte quatre sous sections. La première traite le problème de réception dans le cas d'un matériau magnétique non conducteur ; on montre que l'onde induit deux sources électromagnétiques, la première étant due à la variation de l'aimantation engendrée par le champ de déplacement de l'onde, la seconde étant due à celle de son champ de contrainte. La deuxième sous-section traite le cas d'un matériau ferromagnétique (conducteur + magnétique) ; on montre que le passage de l'onde induit en plus des deux précédentes sources une nouvelle source donnée par les courants de Foucault induits par le champ de vitesse de l'onde. La troisième sous-section est une étude comparative entre les sources inductrices obtenues dans ce chapitre et celles décrites dans la littérature. La dernière sous-section discute de la nécessité du développement d'une nouvelle méthode de réception plus simple et la possibilité de réutiliser les calculs effectués pour prédire la génération des ondes.

Dans la Sec. V [p. 214], nous développons cette nouvelle méthode qui se base sur l'hypothèse de petites perturbations, et profite du fait que l'EMAT utilisé en émission peut être aussi utilisé pour la détection. Cette méthode exprime la tension induite au passage de l'onde sous une forme plus simple (que celle de la méthode directe développée dans les sections précédentes), et permet de réutiliser des résultats calculés pour prédire l'émission d'ondes élastiques.

## I. Quelques rappels d'électromagnétisme

Dans cette section on rappelle quelques notions d'électromagnétisme utiles à la compréhension du chapitre. Pour plus de détails sur ces notions, nos références sont Griffiths [146] et O'Handley [147]).

<b>Force de Lorentz</b>
<p>La force de Lorentz est la force exercée sur une charge électrique qui se trouve dans un champ électromagnétique.</p> $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5-1)$ <p><math>q</math> : charge électrique,  <math>\mathbf{E}</math> : champ électrique,  <math>\mathbf{B}</math> : induction magnétique,  <math>\mathbf{v}</math> : vitesse du déplacement de la charge.</p> <p>Cette force est à l'origine des courants électriques.</p>
<b>Loi d'Ohm</b>
<p>La densité volumique du courant électrique induit dans un conducteur électrique qui se déplace dans un champ électromagnétique est donné par :</p> $\mathbf{J} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5-2)$ <p><math>\mathbf{v}</math> : vitesse du déplacement du conducteur,  <math>\rho</math> : résistivité électrique du matériau du conducteur.</p>
<b>Force de Laplace</b>
<p>La force de Laplace est la version macroscopique de la partie magnétique de la force de Lorentz (<i>i.e.</i> <math>q\mathbf{v} \times \mathbf{B}</math>). C'est la force exercée sur un conducteur électrique qui se déplace dans un champ magnétique. On donne ci-dessous sa formule pour un conducteur linéique (<i>e.g.</i> un fil électrique).</p> $\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (5-3)$ <p><math>I</math> : intensité du courant électrique dans le fil,  <math>d\mathbf{r}</math> : vecteur unitaire donnant la direction du courant électrique,  <math>\mathbf{B}</math> : induction magnétique.</p>
<b>Loi de Biot-Savart</b>
<p>Soit <math>V</math> un volume qui contient une densité volumique de courant électrique <math>\mathbf{J}</math>. L'induction magnétique <math>\mathbf{B}</math> induit en un point <math>\mathbf{r}'</math> est donné par :</p> $\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{ \mathbf{r}' - \mathbf{r} ^3} dV \quad (5-4)$
<b>L'aimantation</b>
<p>L'aimantation <math>\mathbf{M}</math> est la moyenne volumique des moments magnétiques atomiques au sein d'un matériau.  Elle permet de diviser les matériaux en trois catégories :</p>

1. *Diamagnétique* : placé dans un champ magnétique, ce matériau est très peu affecté et le sens de son aimantation induite est opposé à celui du champ (ex : l'eau).
2. *Paramagnétique* : placé dans un champ magnétique, ce matériau est très peu affecté et son aimantation est dans le même sens que celle du champ (ex : l'aluminium) .
3. *Ferro(ferri)magnétique* : contrairement aux deux catégories précédentes, les matériaux ferro(ferri)magnétiques sont très affectés par l'application d'un champ magnétique. D'une part l'aimantation induite est importante, d'autre part elle se maintient partiellement (rémanence) après avoir éliminé le champ magnétique extérieur (ex ferro : l'acier et le Nickel, ferri : NiFe2O).

#### Relation entre les champs $B$ , $H$ et $M$

Un matériau soumis à un champ magnétique  $H$  développe une aimantation  $M$ . On a la relation :

$$B = \mu_0(H + M) \quad (5-5)$$

$B$  : induction magnétique dans le matériau.

#### Loi de comportement magnéto-mécanique

L'aimantation induite dans un matériau ferromagnétique est très sensible à son état de contrainte. Différents modèles sont disponibles dans la littérature pour décrire la loi de comportement magnéto-mécanique (Réf. [29,39-41]). À titre d'exemple on donne ici le modèle multi-échelle de Daniel *et al* [29]. Dans sa version analytique [42], il exprime explicitement la variation d'aimantation en fonction du champ magnétique  $H$  et d'un état de contrainte  $\sigma$  mutliaxial.

$$M(H, \sigma) = \frac{A_x \sinh(\kappa H)}{A_x \cosh(\kappa H) + A_y + A_z} M^{sat} e_x \quad (5-6)$$

$$A_i = e^{\alpha \sigma_{ii}}, \quad i = \{x, y, z\}$$

$$\kappa = \mu_0 A_s M^{sat}$$

$$\alpha = \frac{3}{2} A_s \lambda^{sat}$$

$$A_s = \frac{3\chi^0}{\mu_0 (M^{sat})^2}$$

L'excitation  $H$  est dans la direction  $e_x$ .

$M^{sat}$  : aimantation à saturation du matériau,

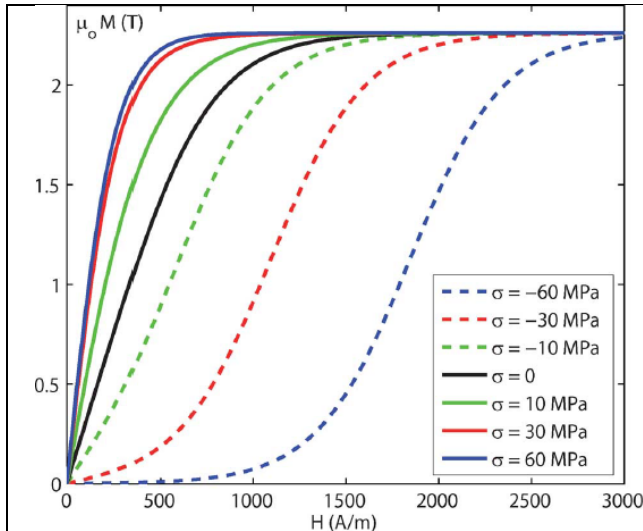
$\lambda^{sat}$  : déformation de magnétostriction à saturation du matériau.,

$\chi^0$  : susceptibilité magnétique anhystérique initiale (voir Daniel. [29]).

La figure suivante (Fig2 de la Réf. [42] ) montre la variation d'aimantation pour un alliage de Fer-Cobalt, en fonction du champ magnétique pour différentes valeurs de contrainte. La contrainte est uniaxiale dans la direction du champ magnétique.

On remarque que dans la limite  $H \rightarrow \infty$  toutes les courbes convergent vers une unique valeur (indépendamment de la valeur de la contrainte) ; cette valeur est l'aimantation à saturation  $M^{sat}$

On voit également que l'aimantation est très sensible à la contrainte, par exemple pour  $H = 600$  A/m on a  $M(H, 60 \text{ MPa}) \approx M^{sat}$  alors que  $M(H, -60 \text{ MPa}) \approx 0$  A/m.



**Fig. 5-1** : variation de l'aimantation  $M$  en fonction du champ magnétique  $H$  pour plusieurs valeurs de contrainte (la contrainte uniaxiale est dans la même direction que le champ).

#### Susceptibilité magnétique différentielle $\chi^d$ (Réf. [148,149])

La susceptibilité magnétique différentielle est définie par :

$$\chi^d = \frac{\partial M(\mathbf{H}, \sigma)}{\partial \mathbf{H}} \quad (5-7)$$

#### Tenseur de couplage magnétostrictif différentiel $\beta^d$ (Réf. [148,149])

Ce tenseur est défini par :

$$\beta^d = \frac{\partial M(\mathbf{H}, \sigma)}{\partial \sigma} \quad (5-8)$$

Il est parfois nommé tenseur piézo-magnétique.

#### Déformation de magnétostriction

Lorsqu'un matériau ferromagnétique est soumis à un champ magnétique, en plus des forces magnétiques d'attraction qui déforment/déplacent ce matériau, le champ magnétique induit une déformation dite de magnétostriction. Cette déformation (qui peut être positive ou négative) est très sensible à l'état de contrainte. Le modèle-multi-échelle de Daniel [150] (ici encore dans une version analytique) donne une expression de cette déformation en fonction d'un état de contrainte  $\sigma$  multiaxial :

$$e^\mu(\mathbf{H}, \sigma) = \lambda \text{diag} \left( 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (5-9)$$

avec

$$\lambda(\mathbf{H}, \sigma) = \lambda^{sat} \left( 1 - \frac{3(A_y + A_z)}{2(A_x \cosh(\kappa H) + A_y + A_z)} \right) \quad (5-10)$$

Le champ  $\mathbf{H}$  est dans la direction  $e_x$ .

La figure (Fig.2 de la Réf.[150] ) montre la variation de la déformation de magnétostriction en fonction de l'excitation magnétique, pour plusieurs valeurs de contrainte.

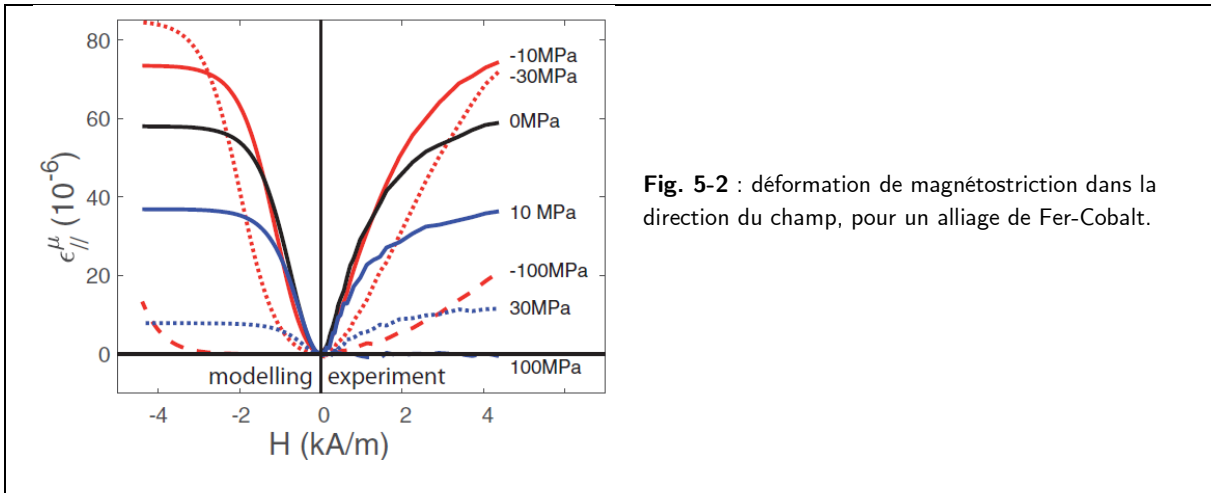


Fig. 5-2 : déformation de magnétostriction dans la direction du champ, pour un alliage de Fer-Cobalt.

**L'EMAT (Electro-Magnetic-Acoustic-Transducer)**

L'EMAT est capteur sans contact composé d'un aimant permanent et d'une bobine. Pour qu'un EMAT génère une onde élastique, on fait circuler dans la bobine un courant électrique alternatif<sup>1</sup>  $I(t)$ , par conséquent la bobine rayonne un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b)$ . Lorsque l'EMAT est utilisé pour détecter une onde élastique, la bobine est en circuit ouvert et le seul champ rayonné est le champ magnétique statique  $\mathbf{H}_s$  que crée l'aimant.

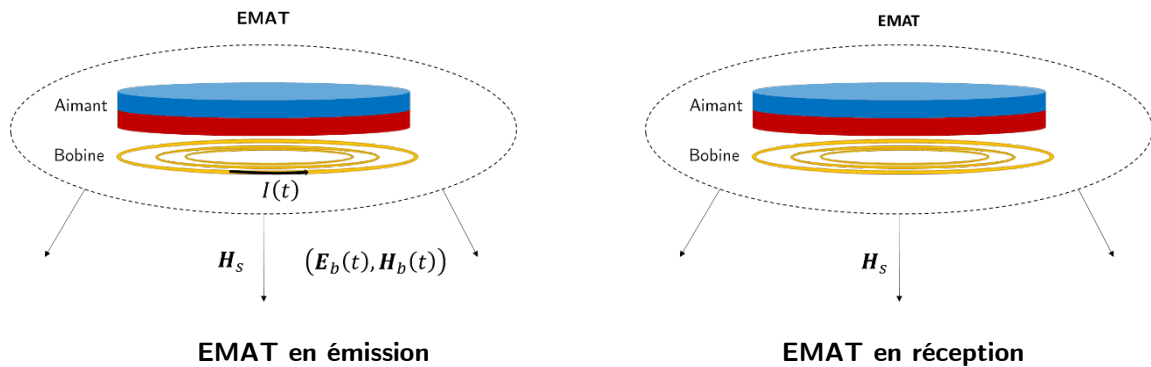


Fig. 5-3 : un EMAT est composé d'un aimant permanent et d'une bobine. (à gauche) lorsque l'EMAT est utilisé pour générer une onde élastique, un courant électrique alternatif  $I(t)$  circule dans la bobine qui rayonne un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b)$ . (à droite) lorsque l'EMAT est utilisé pour détecter une onde, la bobine est en circuit ouvert et le seul champ rayonné par le capteur est le champ magnétique statique  $\mathbf{H}_s$  de l'aimant.

**Lois de comportement magnéto-mécanique linéarisées (Réf. [148,149]))**

L'aimantation dépend non-linéairement du champ magnétique  $\mathbf{H}$  et la contrainte  $\sigma$ . Dans le cas des EMAT, on a deux champs magnétiques, dont un statique  $\mathbf{H}_s$  (qui provient de l'aimant) et un dynamique  $\mathbf{H}_d$  qui provient du courant circulant dans la bobine. L'hypothèse faite couramment pour les EMAT est que  $|\mathbf{H}_d| \ll |\mathbf{H}_s|$  et que son champ de contrainte  $\sigma$  (source de l'onde élastique) est généralement faible ( $< 1$  MPa), ce qui autorise la linéarisation des lois de comportement magnéto-mécanique autour d'un point de fonctionnement statique initial  $(\mathbf{H}_s, \sigma_s)$ <sup>2</sup>. Ceci permet d'écrire l'aimantation (dynamique) sous la forme suivante :

$$M(\mathbf{H}, \sigma) = M(\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d, \sigma_s + \sigma) \approx M(\mathbf{H}_s, \sigma_s) + \chi_s^d \cdot \mathbf{H}_d + \beta_s^d \cdot \sigma \quad (5-11)$$

<sup>1</sup> Le mot alternatif n'est pas à être compris dans le sens strict du terme. Il est utilisé pour dire un courant non continu.  
<sup>2</sup> La contrainte statique  $\sigma_s$  est la contrainte totale présente dans le matériau à l'endroit de l'EMAT (contrainte induite par l'aimant permanent de l'EMAT, contrainte résiduelle, contrainte appliquée).

où  $\chi_s^d$  et  $\beta_s^d$  correspondent au champ magnétique statique  $\mathbf{H}_s$  et un état de contrainte statique initialement présent  $\sigma_s$ .

Cette expression est fondamentale (l'autre étant la loi d'Ohm pour un conducteur mobile) dans le développement du modèle de réception (résolution du problème de réception).

### Équations de Maxwell en milieu ferromagnétique en régime quasi-stationnaire

Les matériaux ferromagnétiques sont généralement de bons conducteurs, ce qui permet de négliger les courants de déplacement, par conséquent les équations de Maxwell s'écrivent :

1. Maxwell-Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-12)$$

2. Maxwell-Thomson

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-13)$$

3. Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5-14)$$

### Loi d'induction de Faraday

Cette loi découle de l'équation de Maxwell-Faraday et donne la tension induite dans un circuit *filiforme* en fonction de la variation temporelle du flux magnétique à travers la surface, dont le contour est défini par le circuit.

$$U = \oint_{\text{contour}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-15)$$

$U$  : tension induite dans le circuit (ex : une bobine).

### Épaisseur de peau

Dans le vide, la loi de Biot-Savart montre que le champ magnétique rayonné par une densité de courant électrique statique, décroît comme l'inverse du carré de la distance.

Dans le cas d'un matériau conducteur magnétique, le champ électromagnétique dynamique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) décroît d'une manière exponentielle dans la profondeur.

Par exemple à une profondeur  $z$ , le champ électrique est donné par :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s e^{-(1+i)z/\delta} \quad (5-16)$$

$\mathbf{E}_s$  : valeur du champ à la surface.

$\delta$  : épaisseur de peau donnée par (approximation basse fréquence, avec une perméabilité magnétique constante et scalaire)

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \quad (5-17)$$

$\rho$  : résistivité électrique,

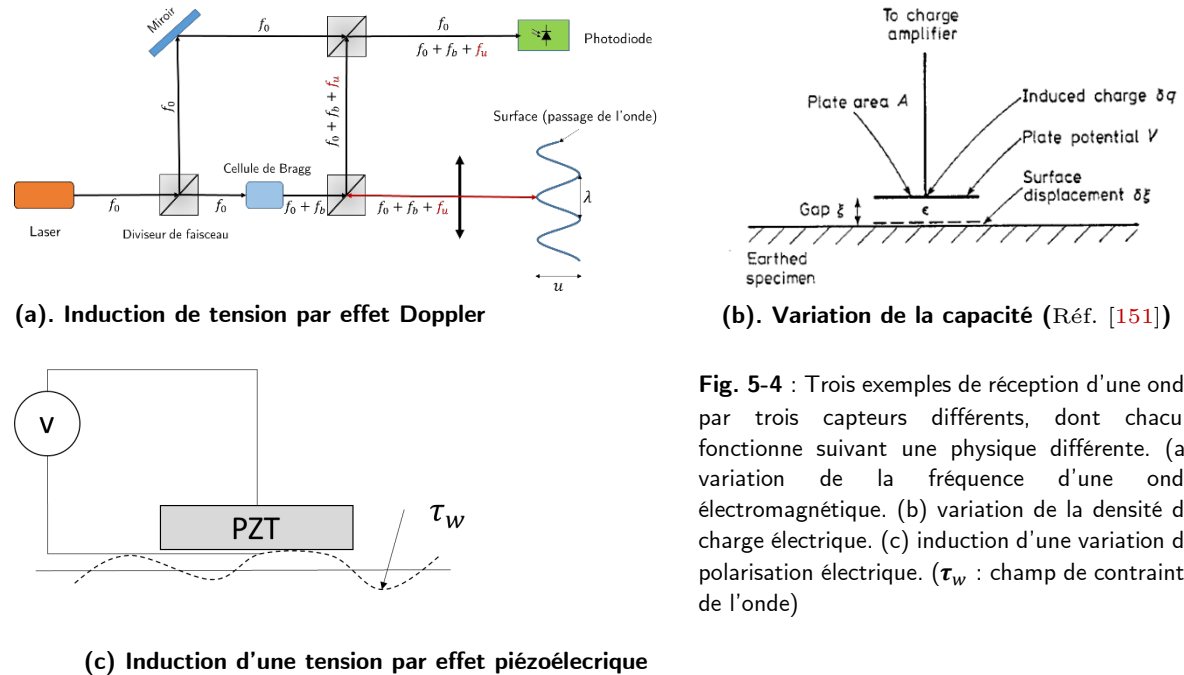
$\omega$  : pulsation du champ,

$\mu$  : perméabilité magnétique du matériau.

## II. Introduction

### A. Réception / détection d'une onde

La réception ou la détection d'une onde élastique par un capteur est définie par la traduction du passage de l'onde sous le capteur par un signal électrique mesuré à la sortie. Différents types de capteurs peuvent être utilisés à cette fin. Chaque capteur se base sur une physique différente (*e.g* piézoélectricité, diffraction de la lumière, induction électromagnétique ...), et mesure une ou plusieurs quantités physiques associées à l'onde (*e.g* champ de déplacement particulaire, de vitesse...). On donne ci-dessous quelques exemples :



**Fig. 5-4** : Trois exemples de réception d'une onde par trois capteurs différents, dont chacun fonctionne suivant une physique différente. (a) variation de la fréquence d'une onde électromagnétique. (b) variation de la densité de charge électrique. (c) induction d'une variation de polarisation électrique. ( $\tau_w$  : champ de contrainte de l'onde)

1. Vibromètre laser (a) : la détection de l'onde par ce capteur se base sur l'effet Doppler et utilise la réflexion d'un faisceau lumineux par la surface perturbée par le passage de l'onde. À l'arrivée de l'onde, la surface de la pièce se déforme ; la fréquence de cette déformation vient moduler la fréquence du faisceau laser incident. La mesure de l'interférence entre le faisceau réfléchi et un autre de référence (de fréquence  $f_0$ ) permet de mesurer le déplacement (normal) du champ élastodynamique de l'onde. (voir Tomasini [152]).
2. Capteur capacitif (b) : la détection de l'onde par ce capteur utilise la variation de la capacité due à la variation de la distance entre les deux armatures. Les armatures du capteur sont : une plaque avec un potentiel imposé, et la surface polie de la pièce, liée à la terre. La distance entre les armatures est modifiée par le passage de l'onde. Cette variation de distance est traduite par un signal électrique mesuré (variation de la charge électrique Réf. [151]).
3. Capteur piézoélectrique (c) : la détection de l'onde par ce capteur utilise l'effet piézoélectrique, (induction d'un champ électrique sous l'effet d'une contrainte/déformation mécanique).

Chacun de ces capteurs utilise une physique différente (effet piézoélectrique, effet Doppler, variation de capacité) et est sensible à une caractéristique différente de l'onde (champ de déformation pour le capteur piézoélectrique, fréquence pour le vibromètre laser et champ du déplacement pour le capteur capacitif).

## B. Problématique du chapitre

Dans ce chapitre nous traitons le problème de réception (PR) d'une onde élastique dans une pièce ferromagnétique par un EMAT.

### Réception d'une onde élastique, par un EMAT dans une pièce ferromagnétique

Dans ce paragraphe, on explique d'une manière brève et qualitative comment un EMAT peut détecter le passage de l'onde. La figure suivante est donnée pour mieux comprendre le problème de réception :

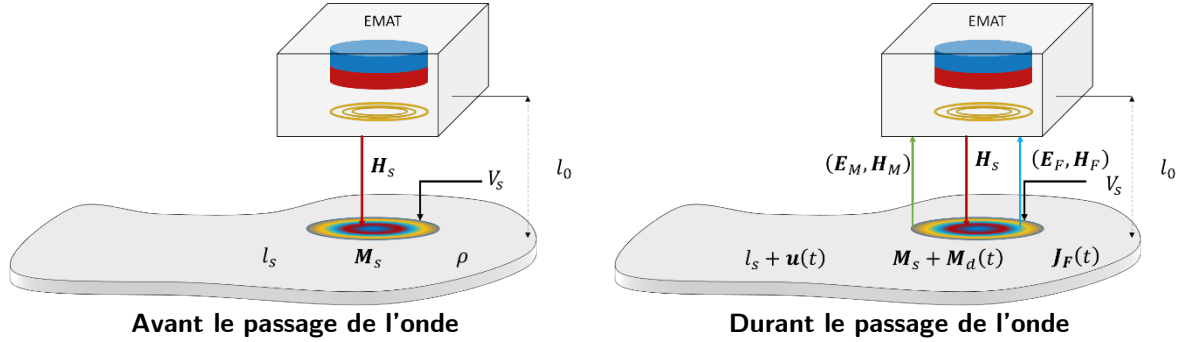


Fig. 5-5 : (à gauche) l'état du système EMAT + pièce avant le passage de l'onde. (à droite) durant le passage de l'onde.

$V_s$  : volume où le champ de l'aimant est non-négligeable (dit volume de la région de sensibilité du capteur<sup>1</sup>),

$l_0$  : distance entre la pièce et l'EMAT, en dehors de ce volume,

$l_s$  : distance entre la pièce et l'EMAT pour un point dans ce volume,

$\rho$  : résistivité électrique de la plaque,

$M_s$  : aimantation induite par le champ magnétique de l'aimant  $H_s$ ,

$u(t)$  : champ du déplacement particulaire de l'onde à l'instant  $t$ ,

$J_F(t)$  : densité de courant de Foucault induite par le passage de l'onde,

$M_d(t)$  : variation de l'aimantation induite par le passage de l'onde,

$(E_M, H_M), (E_F, H_F)$  : champs électromagnétiques induits par  $M_d$  et  $J_F$ .

On définit les deux états suivants :

#### i. Avant le passage de l'onde :

1. L'aimant induit dans la pièce une aimantation statique ( $M_s$ ).
2. Comme la pièce est ferromagnétique donc magnétostrictive, l'aimant y induit une déformation de magnétostriction.
3. En plus de la déformation de magnétostriction, l'aimant exerce une force magnétique (volumique et surfacique) qui déforme la pièce.

Lorsque la plaque est déformée, sa surface supérieure n'est plus plane. On définit donc  $l_s$  comme un champ de déplacement / distance décrivant la distance entre un point de la plaque et l'EMAT, là où la pièce est déformée.

On note que l'aimantation et la déformation induites (*via* la force magnétique ou la magnétostriction) sont fonctions de la distance  $l_s$  et de l'état de contrainte de la pièce.

<sup>1</sup> Une définition plus quantitative est donnée plus loin dans le chapitre.



**ii. Durant le passage de l'onde :**

Au passage de l'onde (déformation dynamique) par le volume  $V_s$  :

1. La distance  $l_s$  est perturbée par le champ du déplacement particulaire de l'onde  $u$ , et devient  $l_s + u^n$ <sup>(1)</sup>. Cette sommation est rendue possible en considérant la déformation dynamique de l'onde comme une petite perturbation de l'état initial (avant le passage de l'onde).
2. L'aimantation est maintenant perturbée par ce passage via deux mécanismes :
  - a. Comme l'aimantation est fonction de la distance  $l_s$  alors, elle varie lorsque  $l_s$  varie.
  - b. L'aimantation est aussi fonction de l'état local de contrainte. Comme l'onde élastique est une déformation (donc ayant un champ de contrainte), elle affecte aussi l'aimantation. La perturbation de l'aimantation par ces deux mécanisme est notée  $M_d$ .
3. La force magnétique (resp. la déformation de magnétostriction) est fonction de  $l_s$ , et comme cette dernière varie lors du passage de l'onde, alors c'est aussi le cas de la force (resp. la déformation de magnétostriction). Par conséquent, le champ de l'onde se trouve perturbé par cette force (resp. déformation de magnétostriction). Ce qui se trouve donc mesuré par l'EMAT n'est pas exactement le champ de l'onde, mais un champ qui contient l'empreinte du capteur.

**Comment le passage de l'onde peut induire une tension dans la bobine de l'EMAT ?**

Considérons tout d'abord le cas d'une pièce conductrice non magnétique. Au passage de l'onde, chaque volume élémentaire de la pièce se déplace dans un champ magnétique. Ainsi, des courants de Foucault sont induits dans la plaque (l'induction de Lorentz Réf. [146]). Le champ électromagnétique de ces courants est noté  $(\mathbf{E}_F, \mathbf{H}_F)$ .

Ces courants électriques peuvent à leur tour induire (via l'induction de Neumann Réf. [153]) une tension dans la bobine, qui atteste du passage de l'onde.

Si l'on s'intéresse maintenant au cas d'une pièce ferromagnétique, on remarque que la perturbation de l'aimantation statique peut induire une tension dans la bobine. En d'autres termes, cela revient à dire qu'au passage de l'onde la pièce joue le rôle d'un aimant secondaire, qui se déplace relativement à la bobine. Le champ électromagnétique dû à la variation (dynamique) de l'aimantation est noté  $(\mathbf{E}_M, \mathbf{H}_M)$ .

Par ailleurs, le champ électrique  $\mathbf{E}_M$  induit aussi des courants de Foucault dans la pièce. Et le champ magnétique  $\mathbf{H}_F$  induit aussi une aimantation dynamique dans la pièce.

En conclusion le passage de l'onde peut induire une tension dans la bobine, *via* les courants de Foucault et la variation de l'aimantation.

La problématique du chapitre est donc de trouver une formule qui donne la tension induite dans la bobine en fonction du champ élastodynamique de l'onde (déplacement, vitesse, contrainte). Cette formule représentera le modèle de réception, qui résout le problème de réception (PR).

Dans la section suivante on traite quelques problèmes d'induction électromagnétique, dans l'objectif de faire un bref rappel sur les notions importantes et la terminologie, nécessaires pour comprendre le chapitre.

---

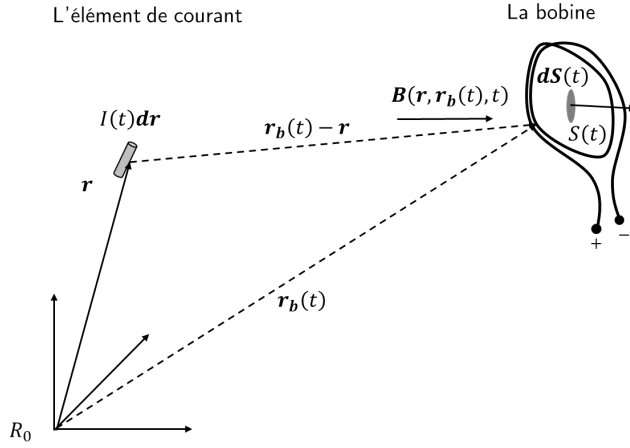
<sup>1</sup> La composante normale du déplacement particulaire.

### III. Problèmes d'induction électromagnétique

Le problème de la réception consiste à trouver la tension induite dans la bobine due au passage de l'onde. La première étape pour résoudre ce problème est de le ramener à un problème classique d'induction électromagnétique. On traite ici deux problèmes types d'induction.

#### A. Élément de courant stationnaire et bobine qui se déplace / se déforme

Cet exemple, différent d'un problème de réception (dans ce dernier, la bobine est stationnaire), a pour objectifs de rappeler quelques lois en électromagnétisme (induction de Faraday, équations de Jefimenko, ...), et de fournir la terminologie utilisée dans la suite, et de présenter certains mécanismes induisant une tension dans une bobine. La configuration de ce problème d'induction est donnée dans la figure suivante :



**Fig. 5-6:** un élément de courant  $I(t)d\mathbf{r}$  est stationnaire dans le repère  $R_0$ . La bobine peut se déplacer/se déformer dans ce repère. L'induction magnétique de l'élément de courant est notée  $\mathbf{B}$ .

$\mathbf{r}$  : position de l'élément de courant,

$I(t)$  : intensité électrique de l'élément de courant,

$d\mathbf{r}$  : vecteur donnant le sens du courant,

$\mathbf{r}_b(t)$  : position d'un point de la bobine,

$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t)$  : induction magnétique de l'élément  $I(t)d\mathbf{r}$  au point  $\mathbf{r}_b(t)$  et à l'instant  $t$ ,

$S(t)$  : surface dont le bord est le fil de la bobine ; on l'appellera par abus de langage la section de la bobine,

$d\mathbf{S}(t)$  : élément surfacique de  $S$ . (dorénavant noté  $d\mathbf{S}$ ),

$+/-$  : indiquent le branchement du voltmètre.

L'élément de courant  $I(t)d\mathbf{r}$ , d'intensité variable, est stationnaire dans le repère  $R_0$  (repère du laboratoire). La bobine de section  $S$  se déforme et se déplace dans ce repère. La tension induite dans la bobine est donnée par la loi d'induction de Faraday (Réf. [154])

$$U^{in}(t) = -\frac{d}{dt}[\Phi] = -\frac{d}{dt} \left[ \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}', \mathbf{r}(t), t) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (5-18)$$

La dérivée par rapport au temps du flux magnétique  $\Phi$  traversant la surface  $S(t)$  est une *dérivée totale*. En utilisant la règle de différentiation sous le signe intégrale de Leibniz, la tension induite peut s'écrire comme :

$$U^{in}(t) = -\iint_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t)) \cdot \mathbf{v}_b \right] \cdot d\mathbf{S} + \int_{-}^{+} [\mathbf{v}_b \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t)] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-19)$$

$\mathbf{v}_b = d\mathbf{r}_b/dt$  : vitesse de déformation / déplacement du fil de la bobine.

**Remarque :** La règle de différentiation de Leibniz donne l'intégrale linéique dans la formule de la tension sur un contour *fermé*. Cependant, dans l'expérience, la bobine toute seule n'est jamais fermée. Le circuit est fermé généralement par un oscilloscope / voltmètre, qui pourrait être pris en compte dans l'intégrale. Cette prise en compte n'a que pour objectif de respecter le théorème mathématique, puisque, l'oscilloscope / voltmètre a une résistance infinie, donc ne peut contenir un champ électrique, ce qui permet d'écrire l'intégrale sur le seul contour de la bobine, (*i.e.*  $\int_{-}^{+}$ ). Pour plus de détails sur ce sujet, voir Romer [155] et Bossavit [156].

En utilisant l'équation de Maxwell-Thomson (*i.e.*  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), la tension induite peut s'écrire sous la forme :

$$U^{in}(t) = - \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{-}^{+} [\mathbf{v}_b \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t)] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-20)$$

Jusqu'ici, on n'a pas écrit la tension en fonction du courant électrique. Pour cela, on utilise l'équation de Jefimenko – pour l'induction magnétique – dans la limite non relativiste<sup>1</sup> (voir Réf.[157,158], ch10. de Réf.[146]) ce qui donne l'induction magnétique de l'élément comme :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b(t), t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I(t) d\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r}|^3} \quad (5-21)$$

$\mu_0$  : perméabilité du vide. En utilisant cette formule, il est possible de réécrire la tension induite comme la somme de deux tensions :

$$U^{in} = U^t + U^m \quad (5-22)$$

telles que

$$U^t(t) = - \frac{\mu_0 \dot{I}(t)}{4\pi} \iint_{S(t)} \frac{d\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-23)$$

$\dot{I}(t)$  : dérivée de l'intensité par rapport au temps, et

$$U^m(t) = - \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \left[ \iint_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r}|^3} \right) \cdot d\mathbf{S} + \int_{-}^{+} \left[ \mathbf{v}_b \times \frac{d\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_b(t) - \mathbf{r}|^3} \right] \cdot d\mathbf{r}_b \right] \quad (5-24)$$

La tension induite est donc composée de :

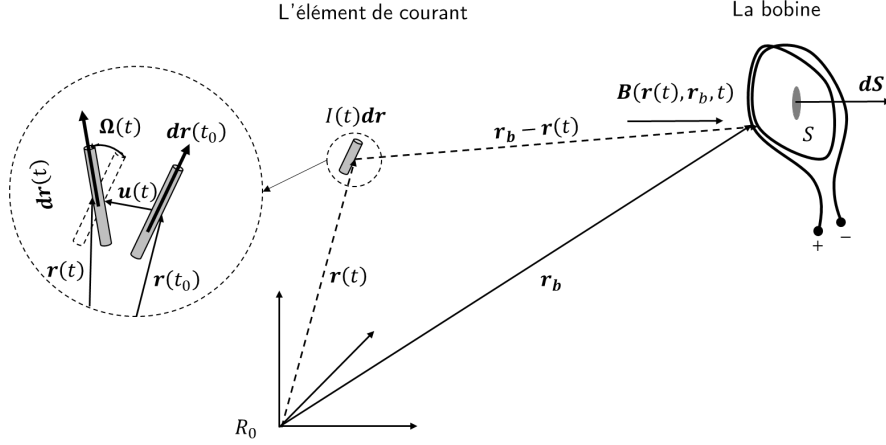
1. celle induite dans la bobine due à la variation temporelle du courant électrique. Cette tension est souvent nommée (en anglais) transformer EMF (electromotive force, voir par exemple Réf. [159]) notée ici  $U^t$ . Cette tension s'annule si le courant électrique est continu ;
2. celle induite dans la bobine due à sa déformation/déplacement dans le référentiel de l'élément de courant. Cette tension est nommée (en anglais) *motional* EMF (Réf. [159]), notée ici  $U^m$ . Elle s'annule si la bobine est stationnaire (et ne se déforme pas) dans le repère lié à l'élément du courant.

La décomposition de la tension induite dans la bobine en deux tensions nous sera d'une grande utilité dans ce chapitre, particulièrement lors du traitement du problème de réception dans un matériau magnétique non conducteur.

## B. Élément de courant en mouvement et bobine stationnaire

Ce cas représente la forme la plus simple (d'un point de vue électromagnétique) du problème de réception. On étudie l'induction d'une tension, dans une bobine *stationnaire*, par un élément de courant variable (en temps) et en mouvement. La configuration est donnée dans la figure suivante :

<sup>1</sup> Les équations de Jefimenko généralisent celles de Coulomb et Biot-Savart.



**Fig. 5-7:** l'élément de courant fait des mouvements de solide rigide (translation + rotation). La bobine est stationnaire dans le repère  $R_0$ .

L'élément de courant fait des mouvements de solide rigide (translation + rotation). La bobine est stationnaire dans le repère  $R_0$ . L'élément de courant se trouve initialement à une position fixe  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t < t_0)$ .

Pour  $t > t_0$ , sa position et sa direction sont repérées par les deux grandeurs  $\mathbf{u}(t)$  (translation) et  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  (rotation) données par :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 \quad (5-25)$$

et

$$\frac{d(\mathbf{dr}(t))}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{dr}(t) \quad (5-26)$$

Pour calculer la tension induite dans la bobine, on donne tout d'abord l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  de l'élément de courant :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I(t) \mathbf{dr} \times (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t))}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|^3} \quad (5-27)$$

En remarquant que

$$\nabla_{\mathbf{r}_b} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right) = - \frac{(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t))}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|^3} \quad (5-28)$$

on peut réécrire l'induction magnétique sous la forme suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I(t) \mathbf{dr} \times \nabla_{\mathbf{r}_b} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right) \quad (5-29)$$

En utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$\mathbf{V} \times \nabla(f) = (\nabla \times \mathbf{V})f - \nabla \times (f\mathbf{V}), \quad (5-30)$$

on réécrit l'induction magnétique sous la forme suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t) = \nabla_{\mathbf{r}_b} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I(t) \mathbf{dr}(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right), \quad (5-31)$$

ce qui permet de définir le *potentiel vecteur magnétique* (PVM):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I(t) \mathbf{dr}(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|}, \quad (5-32)$$

L'induction magnétique s'écrit donc :

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{r}_b} \times \mathbf{A} , \quad (5-33)$$

En suivant la même démarche que précédemment, on donne la tension induite en utilisant la loi de Faraday :

$$U^{in}(t) = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S (\nabla_{\mathbf{r}_b} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t)) \cdot d\mathbf{S} \quad (5-34)$$

En utilisant le théorème de Stokes, on peut écrire la tension sous la forme suivante :

$$U^{in}(t) = -\frac{d}{dt} \iint_S \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_{-}^{+} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t) \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-35)$$

En notant que la section de la bobine ne dépend pas du temps, on peut intervertir le signe de l'intégrale et celui de la dérivée temporelle, ce qui donne :

$$U^{in} = - \int_{-}^{+} \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_b, t)}{dt} \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-36)$$

En développant cette formule on peut écrire la tension induite comme la somme de trois tensions :

$$U^t = -\frac{\mu_0 \dot{I}(t)}{4\pi} \int_{-}^{+} \frac{d\mathbf{r}(t) \cdot d\mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \quad (5-37)$$

$$U_R^m = -\frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \int_{-}^{+} \frac{(\boldsymbol{\Omega}(t) \times d\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \quad (5-38)$$

$$U_T^m = -\frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \int_{-}^{+} \left( \frac{\dot{\mathbf{u}}(t) \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t))}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|^3} \right) d\mathbf{r}(t) \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-39)$$

Ces tensions sont :

1. Une tension qui ne dépend que de la variation temporelle de l'intensité de la source inductrice (élément de courant) notée  $U^t$ .
2. Une tension due à la rotation de la source, notée  $U_R^m$
3. Une tension due à la translation de la source, notée  $U_T^m$

Les deux dernières peuvent être combinées en une seule, décrivant la tension induite due au déplacement de la source, notée  $U^m = U_R^m + U_T^m$ .

## C. Conclusion

Dans cette section, nous avons traité d'abord le cas d'une induction électromagnétique qu'on peut trouver dans les livres de cours (une bobine qui se déforme dans un champ magnétique variable). Ce cas permet de rappeler quelques formules et manipulations utilisées dans les problèmes d'induction, et de fournir la terminologie nécessaire pour comprendre la suite du chapitre.

Le deuxième cas traité est celui d'un élément de courant qui peut faire des rotations et translations dans le référentiel de la bobine réceptrice. La tension induite dans la bobine par cet élément est la somme de deux tensions dont une (notée  $U^t$ ) ne dépend que de la variation temporelle de l'intensité de la source inductrice et l'autre (notée  $U^m$ ) ne dépend que de la variation temporelle de la position de la source (non nulle même pour un courant continu).

Dans ces deux cas, la variation temporelle de l'intensité de la source inductrice (élément de courant) ne dépend pas de la variation temporelle de sa position.

Dans la section suivante on traite quelques problèmes de réception d'une onde élastique où la variation temporelle de l'intensité de la source inductrice *naît* de la variation temporelle de la position.

## IV. Problème de réception par la méthode directe

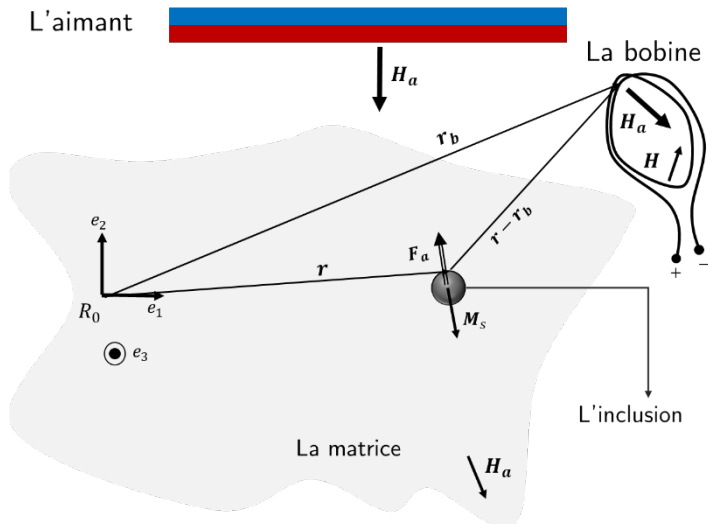
Le traitement de la réception par la méthode directe est défini par l'application directe de la loi d'induction de Faraday pour calculer la tension induite dans la bobine. La description Lagrangienne est utilisée. Cette section contient quatre sous-sections. Dans la première, on traite la réception d'une onde élastique dans une plaque magnétique non conductrice, dans la seconde, le cas d'une plaque ferromagnétique (magnétique + conductrice). Dans chaque cas, l'étape essentielle consiste à écrire d'une manière explicite les sources inductrices en fonction du champ élastodynamique de l'onde, et si possible (par exemple dans le cas d'un matériau magnétique non conducteur) donner la tension induite dans la bobine en fonction de ce champ. La troisième sous-section est une étude bibliographique permettant de comparer les sources inductrices décrites ici et celles décrites dans la littérature. La quatrième discute de la nécessité et de la possibilité de rendre le modèle de réception développé par la méthode directe plus simple .

### A. Cas d'une plaque magnétique non conductrice

Le cas de la réception par EMAT dans une plaque magnétique non conductrice permet d'identifier deux sources inductrices (parmi trois) du problème de réception dans une plaque ferromagnétique et de mettre l'accent sur la présence d'une tension spécifique aux matériaux magnétiques (*i.e.* la tension motrice  $U^m$ ). Ce problème de réception est traité en trois parties : dans la première (resp. seconde), on met en évidence la première (resp. seconde) source inductrice qu'est la variation d'aimantation due au champ de déplacement (resp. contrainte) de l'onde. La troisième partie traite le cas général, dans lequel on utilise ces deux sources inductrices pour résoudre le problème de réception.

#### 1. Variation de l'aimantation due à la variation de la position

Contrairement aux cas traités à la section précédente où l'intensité de la source inductrice (l'élément de courant électrique) était indépendante de sa position, le cas présent correspond à une problématique où l'intensité de la source inductrice ne varie en temps que si elle se déplace. Ce problème représente une forme simple de la réception d'une onde par un EMAT. L'exemple suivant est donné pour mettre en évidence l'induction d'une tension due au champ du déplacement de l'onde :



**Fig. 5-8** : L'inclusion magnétique est non conductrice et indéformable. Elle se trouve dans une matrice non magnétique, non conductrice et déformable. Une bobine électrique est reliée à un voltmètre (non représenté). L'ensemble baigne dans le champ magnétique d'un aimant permanent qui induit une aimantation statique  $M_s$  en chaque point de l'inclusion.

$r$  : position d'un point de l'inclusion,

$r_b$  : position d'un point de la bobine,

$H_a$  : champ magnétique statique de l'aimant,

$M_s$  : l'aimantation statique induite par  $H_a$  dans l'inclusion magnétique,

$F_a$  : la force d'attraction magnétique qu'exerce l'aimant sur l'inclusion,

$H$  : champ magnétique de l'inclusion.

**Avant le passage de l'onde** ( $t < t_0$  :  $t_0$  étant l'instant où l'onde atteint l'inclusion) :

On suppose qu'on a une matrice (une plaque) non conductrice non magnétique et déformable qui contient une inclusion magnétique non-conductrice. Une bobine est placée au-dessus. Un aimant permanent crée un champ magnétique  $H_a$  non-uniforme dans laquelle baigne l'ensemble plaque + inclusion + bobine.

L'aimant induit une aimantation statique  $M_s$  dans l'inclusion (pour un point qui se trouve à  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  l'aimantation est donnée par  $M_s(H_a(\mathbf{r}_0))$ ). L'inclusion, de ce fait, devient un aimant secondaire qui à son tour crée un champ magnétique  $H$ . Le flux magnétique à travers la bobine est la somme du flux provenant de l'aimant et du flux provenant de l'inclusion. Ces deux quantités étant statiques, aucune tension n'est induite dans la bobine.

Par ailleurs, l'aimant permanent exerce une force magnétique d'attraction  $F_a$  sur l'inclusion. Cette force dépend de la position de l'inclusion (faible si l'inclusion est loin de l'aimant et forte si l'inclusion est proche).

Pour simplifier le problème de réception dans cet exemple et ne s'intéresser qu'à la tension induite par le champ du déplacement de l'onde, on suppose que :

1. L'inclusion est indéformable<sup>1</sup>. Cette hypothèse permet de dire qu'au passage de l'onde les mouvements de l'inclusion sont ceux d'un solide rigide (translation + rotation)
2. L'inclusion est sphérique et magnétiquement isotrope<sup>2</sup>. Cette hypothèse permet de dire que le champ magnétique  $H$  de l'inclusion ne dépend que de la translation.

Ces hypothèses permettent de considérer que l'inclusion ne fait que se translater (et donc de négliger la rotation, puisqu'elle n'induit aucune variation du champ magnétique de l'inclusion).

**Durant le passage de la bobine** ( $t_0 < t < t_m$ ,  $t_m$  étant l'instant où l'inclusion cesse de se déplacer)

Une onde élastique est générée dans la plaque de champ de déplacement  $\mathbf{u}(t)$ . Elle se propage de la source (non représentée) vers l'inclusion. Lorsqu'elle atteint celle-ci, elle la fait vibrer autour de sa position initiale ce qui la fait se rapprocher / s'éloigner de l'aimant, ce qui, du fait que le champ de l'aimant n'est pas uniforme, va faire dépendre l'aimantation  $M$  du temps ; l'aimantation a donc la même dépendance temporelle que le déplacement de l'onde. Ainsi, le champ magnétique  $H$  de l'inclusion dépendra aussi du temps, son flux magnétique à travers la bobine n'est plus statique. Cela induit une tension qui atteste du passage de l'onde. Une illustration est donnée sur la [Fig. 5-9](#).

Quand l'onde pousse l'inclusion vers l'aimant, la force magnétique que ce dernier exerce sur l'inclusion facilite ce mouvement (comme indiqué dans le cas *avant le passage de l'onde* cette force est une force d'attraction). En revanche quand l'onde l'éloigne de l'aimant, la force magnétique s'oppose à ce mouvement. La vibration de l'inclusion n'est donc pas libre (elle l'aurait été en absence d'aimant) ; comme la force magnétique dépend de la position de l'inclusion, elle-même dépendante du temps, la force

---

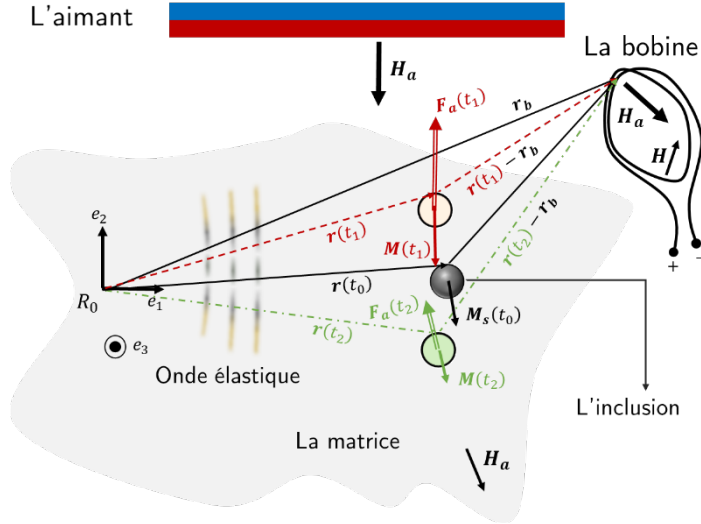
<sup>1</sup> En supposant par exemple que l'inclusion est infiniment rigide et en négligeant la déformation de magnétostriction.

<sup>2</sup> Pour une inclusion sphérique et magnétiquement anisotrope, l'aimantation induite dépend de la direction du champ magnétique  $H_a$ . L'aimantation peut changer si l'inclusion fait une rotation, et par conséquent  $H$ .

Pour une inclusion magnétiquement isotrope et non-sphérique, la variation de  $H$  provient non pas de la variation directe de l'aimantation mais de la variation du facteur de démagnétisation (voir la Réf. [160] et ch5 de la Réf. [161]).

magnétique est dynamique. En d'autres termes, plus l'inclusion s'éloigne de l'aimant plus cette force est faible, plus le mouvement de l'inclusion est libre, et *vice versa*. La résolution de ce problème magnéto-mécanique (*i.e.* trouver le champ élastodynamique perturbé de l'onde) permet de tenir compte des perturbations de l'onde par l'EMAT. Cependant on fait le choix dans ce mémoire de supposer que le champ mesuré par le capteur n'est pas perturbé par la présence du capteur.

En conclusion dans la modélisation de la réception, on suppose que le capteur n'affecte pas l'onde et que ce qui est mesuré correspond au champ électrodynamique associé à l'onde et non pas un champ perturbé.



**Fig. 5-9** : Au passage de l'onde, l'inclusion vibre autour de sa position initiale. Cette vibration la fait se rapprocher/s'éloigner de l'aimant, ce qui fait augmenter / diminuer son aimantation induite. Ainsi, le champ magnétique  $H$  de l'inclusion dépendra du temps ce qui lui permet d'induire une tension dans la bobine.

$r(t_0/t_1/t_2)$  : positions d'un point de l'inclusion à trois instants : celui où l'onde vient d'arriver, un autre où l'onde fait se rapprocher l'inclusion de l'aimant, et un où elle la fait s'éloigner.

### Résolution du problème de réception

Pour résoudre le problème de réception de cet exemple, il est nécessaire d'identifier et expliciter les sources inductrices en fonction du champ élastodynamique de l'onde. Pour cela on rappelle que la bobine et l'aimant sont immobiles dans le repère  $R_0$  et que la matrice est non magnétique et non conductrice ; le seul flux magnétique susceptible d'induire une tension dans la bobine est donc celui de l'inclusion (provenant de son aimantation induite).

Au passage de l'onde, un point matériel de l'inclusion qui se trouvait à  $t < t_0$  à la position  $\mathbf{r}_0$ , se retrouve maintenant à une position  $\mathbf{r}$  donnée par :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \quad (5-40)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$  : déplacement particulière du point matériel qui se trouvait avant le passage de l'onde en  $\mathbf{r}_0$ . Mais comme l'inclusion est indéformable et que seule la translation peut induire une variation de son champ magnétique, ce déplacement, identique pour tous les points de l'inclusion, et est noté dorénavant  $\mathbf{u}(t)$ .

L'aimantation  $\mathbf{M}$  pour un point  $\mathbf{r}$  est donnée par :

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(t))) \quad (5-41)$$



Cette aimantation dépend du temps à travers la dépendance temporelle de la position de l'inclusion. Elle est dynamique et le flux temporellement variable de son champ magnétique à travers la bobine induit une tension électrique. C'est donc la source inductrice. Notre objectif est de l'exprimer explicitement en fonction du déplacement de l'onde  $\mathbf{u}(t)$ .

On suppose que l'aimantation est égale à sa valeur initiale à laquelle s'ajoute une petite perturbation dynamique due au passage de l'onde<sup>1</sup>. On linéarise donc l'aimantation autour de  $\mathbf{M}_s(\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0))$ . Comme l'aimantation dépend de la position à travers l'excitation magnétique de l'aimant  $\mathbf{H}_a$ , la linéarisation est faite en deux étapes, et seul le premier ordre du développement de Taylor est conservé (à chaque étape). On a :

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(t))) = \mathbf{M} \left( \mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_a}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{u}(t) \right) = \mathbf{M}_s(\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0)) + \left( \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}_a} \right|_{\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0)} \right) \cdot \left( \left. \frac{\partial \mathbf{H}_a}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_0} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (5-42)$$

On reconnaît dans le deuxième terme, la susceptibilité magnétique différentielle  $\chi_s^d$  évaluée au champ magnétique statique initial et la matrice jacobienne du champ de l'aimant  $\mathfrak{J}_s^H$  évaluée à la position initiale de l'inclusion. Ces deux matrices sont données par :

$$\chi_s^d = \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}_a} \right|_{\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0)}, \quad \mathfrak{J}_s^H = \left. \frac{\partial \mathbf{H}_a}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_0} \quad (5-43)$$

L'aimantation de l'inclusion s'écrit donc :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_d = \mathbf{M}_s + \chi_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) \quad (5-44)$$

Ainsi, sous l'hypothèse de linéarité, on a écrit de manière explicite la source inductrice en fonction du champ du déplacement de l'onde.

On a vu dans l'exemple de l'élément de courant (section précédente), qu'une source électromagnétique statique peut aussi induire une tension si elle se déplace relativement à la bobine. Il importe donc de considérer l'aimantation statique comme source d'induction.

Maintenant que les sources sont identifiées et écrites explicitement en fonction du champ de déplacement, on peut calculer la tension induite dans la bobine. Pour cela on commence par calculer le potentiel vecteur du champ magnétique de l'inclusion.

### i. Calcul de $\mathbf{A}$

Écrivons les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère

$$\nabla_r \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-45)$$

$$\nabla_r \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (5-46)$$

La première équation est toujours valable, et la seconde est valable dans l'inclusion puisqu'elle n'est pas conductrice. Le fait que l'inclusion ne soit pas conductrice permet de découpler les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday<sup>2</sup> (voir section 1), ce qui permet de trouver la valeur du champ magnétique sans calculer celle du champ électrique. On note également que les dérivées spéciales sont par rapport à la position d'un point  $\mathbf{r}$  de l'inclusion (la dépendance en temps de  $\mathbf{r}$  est omise de la notation, pour l'alléger).

<sup>1</sup> Cette hypothèse est acceptable puisque l'aimantation ne dépend que de la position (via le champ magnétique  $\mathbf{H}_a$ ), et comme le déplacement des ondes élastiques en CND est généralement très faible (quelques dizaines de nanomètres Réf. [162]), la variation de l'aimantation induite sera faible (sous l'hypothèse que la variation spatiale  $\mathbf{H}_a$  soit faible, ce qui est le cas compte tenu des déplacements particuliers des ondes). Un exemple plus quantitatif est donné plus loin dans le chapitre.

<sup>2</sup> Plus exactement découpler les champs magnétique et électrique dans l'inclusion.

L'équation de Maxwell-Thomson montre qu'il existe un vecteur  $\mathbf{A}$  (vecteur potentiel du champ magnétique) tel que

$$\mathbf{B} = \nabla_r \times \mathbf{A}, \quad (5-47)$$

En utilisant  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , l'équation de Maxwell-Ampère devient

$$\nabla_r \times (\nabla_r \times \mathbf{A}) = \mu_0 \nabla_r \times \mathbf{M}, \quad (5-48)$$

ce qui donne :

$$\nabla_r(\nabla_r \cdot \mathbf{A}) - \nabla_r^2 \mathbf{A} = \mu_0 \nabla_r \times \mathbf{M}. \quad (5-49)$$

Sous condition de jauge de Coulomb ( $\nabla_r \cdot \mathbf{A} = 0$ ), la solution suivante est trouvée pour le potentiel magnétique :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\nabla_r \times \mathbf{M}(\mathbf{r}(t), t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)|} d^3r \quad (5-50)$$

$\mathbf{r}(t)$  : position de l'inclusion à l'instant  $t$ ,

$\mathbf{r}'$  : position d'un point dans l'espace privé du point  $\mathbf{r}(t)$ ,

$V_i$  : volume de l'inclusion.

On note :

$$\mathbf{J}_{M_s} = \nabla_r \times \mathbf{M}_s \quad (5-51)$$

$$\mathbf{J}_d^M(t) = \nabla_r \times \mathbf{M}_d \quad (5-52)$$

Dans la littérature (voir Ch6 Réf.[146]), le rotationnel de l'aimantation est appelé (en anglais) *volume bound currents*. Dans ce document, on parlera pour ces deux quantités de densités de courant magnétique<sup>1</sup>.

En rappelant que  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{u}$  il est possible de remplacer le  $\nabla_r$  par  $\nabla_{r_0}$ . Pour cela, on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r_{0_i}} = \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial r_{0_i}} = \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial (u_k + r_k)}{\partial r_i} \approx \frac{\partial}{\partial r_k} + \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial u_k}{\partial r_{0_i}} \quad (5-53)$$

Le gradient du déplacement  $\partial u_k / \partial r_{0_i}$  peut s'écrire comme la somme du tenseur de déformation et d'un tenseur de rotation. Le premier est nul dans l'inclusion puisqu'elle est supposée indéformable, et le second est négligeable puisque la rotation n'affecte pas l'excitation magnétique. Par ailleurs, il est toujours possible de négliger le second terme de cette formule (5-53) dans le cadre de petites déformations.

Faisons maintenant un développement de Taylor de  $\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)|}$  au voisinage de  $\mathbf{r}_0$  au premier ordre<sup>2</sup> :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u}(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} - \nabla_{r_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (5-54)$$

Le potentiel magnétique devient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \left( \frac{\mathbf{J}_{M_s}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} + \frac{\mathbf{J}_d^M(t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} + \mathbf{J}_{M_s} \left[ \nabla_{r_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \right] + \mathbf{J}_d^M(t) \left[ \nabla_{r_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \right] \right) d^3r \quad (5-55)$$

Utilisons les notations suivantes :

<sup>1</sup> Ces courants ne sont pas des courants électriques puisqu'il n'y a pas un déplacement de charges.

<sup>2</sup> Le premier ordre est justifié par le fait que généralement la distance entre la bobine et l'inclusion (dit lift-off dans une expérience EMAT) est plus grande que le déplacement de l'onde.

$$\mathbf{A}^s = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\mathbf{J}_{M_s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0}|} d^3r \quad (5-56)$$

$$\mathbf{A}_\omega^t = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} \times (\boldsymbol{\chi}_s^H \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t))}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} d^3r \quad (5-57)$$

$$\mathbf{A}_\omega^m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \right] d^3r \quad (5-58)$$

$$\mathbf{A}_{2\omega} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \nabla_{\mathbf{r}_0} \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t)) \left[ \nabla_{\mathbf{r}_{i0}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \right] d^3r \quad (5-59)$$

Le potentiel vecteur magnétique s'écrit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^s + \mathbf{A}_\omega^t + \mathbf{A}_\omega^m + \mathbf{A}_{2\omega} \quad (5-60)$$

On peut comprendre ces différents termes comme suit :

$\mathbf{A}^s$  : le potentiel vecteur statique initial (celui de l'inclusion avant le passage de l'onde),

$\mathbf{A}_\omega^t$  : le potentiel vecteur dynamique dû à la variation temporelle de l'intensité de la source, tout en gardant sa position initiale.

$\mathbf{A}_\omega^m$  : le potentiel vecteur dynamique dû à la variation temporelle de la position de la source, tout en gardant son intensité initiale.

$\mathbf{A}_{2\omega}$  : le potentiel vecteur « doublement » dynamique dû à la variation temporelle de l'intensité de la source et à celle de sa position.

L'indice  $\omega$  est choisi pour dire que si l'onde reçue était monochromatique de pulsation  $\omega$ , alors les deux potentiels vecteur  $\mathbf{A}_\omega^t$  et  $\mathbf{A}_\omega^m$  seront aussi monochromatiques de même pulsation alors que la fréquence de  $\mathbf{A}_{2\omega}$  est double.

En CND par ultrasons, le déplacement particulaire associé à une onde élastique dans un métal est généralement très petit (de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres Réf. [162]). Il est donc possible de négliger le terme  $\mathbf{A}_{2\omega}$  (dont l'amplitude est proportionnelle à  $|\mathbf{u}|^2$ ) devant les autres termes.

Maintenant que les potentiels des sources électromagnétiques sont calculés, on peut trouver la tension induite dans la bobine, en appliquant la méthode directe.

## ii. Calcul de la tension induite $U^{in}$

Cette tension est donnée par la loi d'induction de Faraday.

$$U^{in} = - \frac{d}{dt} \int_{-}^{+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_b = - \frac{d}{dt} \int_{-}^{+} [\mathbf{A}^s + \mathbf{A}_\omega^t + \mathbf{A}_\omega^m] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-61)$$

La bobine étant stationnaire, on peut intervertir l'ordre de l'intégrale et de la dérivée temporelle. En notant que  $\mathbf{A}^s$  est statique, la tension totale induite peut alors s'écrire comme la somme de deux contributions :

$$U^{in} = - \int_{-}^{+} \dot{\mathbf{A}}_\omega^t \cdot d\mathbf{r}_b - \int_{-}^{+} \dot{\mathbf{A}}_\omega^m \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-62)$$

$\dot{\phantom{x}}$  désigne une dérivation temporelle.

On reconnaît les deux tensions  $U^t$  et  $U^m$

$$U^t = - \int_{-}^{+} \dot{\mathbf{A}}_{\omega}^t \cdot d\mathbf{r}_b, \quad U^m = - \int_{-}^{+} \dot{\mathbf{A}}_{\omega}^m \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-63)$$

En remplaçant maintenant les potentiels vecteurs par leurs expressions (en fonction du déplacement) et la dérivée temporelle du déplacement par la vitesse particulière associée à l'onde, la tension  $U^{in}$  devient :

$$U^{in}(t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \int_{V_i} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{v}(t))}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_0|} d^3r \cdot d\mathbf{r}_b - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \int_{V_i} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{v}(t) \right] d^3r \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-64)$$

La vitesse particulière n'apparaît dans le premier terme qu'à travers son rotationnel. Même si cela ne pose pas un problème à la résolution du problème de réception, il est préférable d'écrire la formule sans cet opérateur. Ceci est possible en utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (5-65)$$

puis le théorème de Gauss, ce qui donne :

$$U^{in}(t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \left\{ \int_{S_i} \mathbf{n} \times \left( \boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{v}(t) \right) d^2r - \int_{V_i} \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_0|} \right) \times [\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{v}(t)] d^3r \right\} \cdot d\mathbf{r}_b - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \int_{V_i} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{v}(t) \right] d^3r \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-66)$$

$S_i$  : la surface de l'inclusion.

Cette expression donne la tension induite dans la bobine due au passage de l'onde par l'inclusion. Elle définit le modèle de réception de l'exemple traité, sous l'hypothèse de négliger la perturbation due à la présence du capteur. On discute maintenant de cette expression pour quelques cas particuliers :

1. **En absence d'onde** : dans ce cas, l'inclusion ne se déplace pas ( $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ ), aucune tension n'est induite.
2. **Excitation magnétique de l'aimant  $H_a$  uniforme** : dans le cas où l'excitation magnétique est uniforme, ou bien le gradient de cette excitation est faible dans un volume qui englobe toutes les positions de l'inclusion au passage de l'onde, le gradient de l'excitation magnétique est négligeable ( $\mathfrak{J}_s^H \approx 0$ ), les deux premières termes de l'expression de la tension peuvent être négligés, ce qui veut dire que  $U^t = 0$  et que la seule tension induite dans la bobine est  $U^m$  due au déplacement relatif de l'inclusion (avec son aimantation initiale) par rapport à la bobine.
3. **Aimantation à saturation** : si l'inclusion est initialement saturée (du fait de l'aimant), la susceptibilité différentielle initiale est nulle ( $\boldsymbol{\chi}_s^d \approx 0$ ), donc  $U^t = 0$  ; seule la tension  $U^m$  est non nulle. Dans ce cas et le précédent l'inclusion agit comme un aimant permanent d'aimantation constante en mouvement par rapport à la bobine.

**Conclusion** : Dans cet exemple, on a traité la détection par une bobine du passage d'une onde élastique par une inclusion magnétique non conductrice et indéformable. Ce cas nous a permis d'écrire sous forme explicite la source inductrice (*i.e.* la variation de l'aimantation due au champ du déplacement) et par suite, la tension induite dans la bobine en fonction du champ élastodynamique de l'onde. On a montré sous l'hypothèse de linéarité (de  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  autour de  $\mathbf{M}(\mathbf{H}_a(\mathbf{r}_0))$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  autour de  $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$ ), que la tension induite dans la bobine est la somme de deux termes dont l'un décrit la tension du transformateur  $U^t$  et l'autre une tension motrice  $U^m$ . Dans cet exemple la tension induite dans la bobine n'est fonction que du champ du déplacement de l'onde. Dans la sous-section suivante, on traite le cas où la tension induite dans la bobine au passage de l'onde n'est fonction que du champ de contrainte de celle-ci.

## 2. Variation de l'aimantation due à la variation de la contrainte

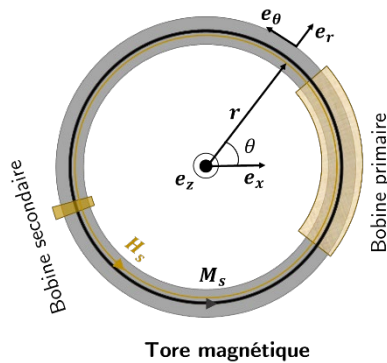
Dans ce nouveau cas, la variation de l'aimantation n'est induite que par le champ de contrainte de l'onde. On considère la configuration suivante :

- **Avant la génération de l'onde :**

Un tore circulaire magnétique non-conducteur et déformable est aimanté initialement par une bobine primaire. L'aimantation statique induite dans le tore est notée  $M_s$ . On suppose que le champ magnétique  $H_s$  (de la bobine primaire) et l'aimantation  $M_s$  sont invariants par translation circulaire autour de  $e_z$  et que partout dans le tore on a  $H_s = H_s e_\theta$  et  $M_s = M_s e_\theta$ .

Le tore contient un état de contrainte statique initial  $\sigma_s$ . Pour simplifier le problème on suppose que les grandeurs statiques ( $H_s, M_s, \sigma_s$ ) et les propriétés physiques sont indépendantes de  $\theta$ .

Une bobine secondaire est utilisée pour mesurer la variation du flux magnétique dans le tore. À présent le flux à travers cette bobine est nul puisque le champ magnétique et l'aimantation sont statiques.



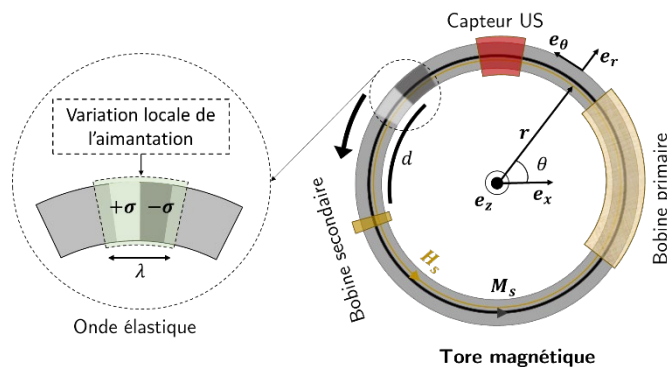
**Fig. 5-10 :** Une bobine primaire est utilisée pour créer un champ magnétique statique  $H_s$ , uniforme dans le tore de matériau magnétique déformable.

- **Au moment de la génération de l'onde**

Un capteur ultrason (capteur US) est utilisé pour générer une onde élastique. Pour simplifier le problème on suppose que cette onde est une onde de pression longitudinale (tel que  $u = u e_\theta$  et  $\sigma = \sigma e_\theta$ ).

Avant la génération de l'onde l'aimantation n'est fonction que de  $H_s$  et  $\sigma_s$ , et la tension induite dans la bobine secondaire est nulle.

Au moment de la génération de l'onde, l'état local de contrainte (à l'endroit du capteur US) passe de la valeur initiale statique  $\sigma_s$  à  $\sigma_s + \sigma$  telle que  $\sigma$  est celle du champ élastodynamique de l'onde<sup>1</sup>. Cette variation temporelle de la contrainte fait varier l'aimantation localement<sup>2</sup>. En notant que le champ élastodynamique de l'onde est parallèle au champ magnétique  $H_s$  et que ce dernier est uniforme dans le tore, le champ du déplacement de l'onde n'induit pas une variation d'aimantation.



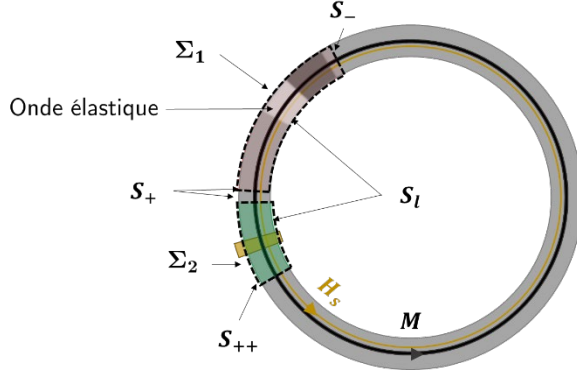
**Fig. 5-11 :** Le capteur US génère une onde élastique qui se propage dans le tore.  $\lambda$  longueur d'onde,  $\pm\sigma$  indique que cette onde passe de la traction (dans la première moitié de  $\lambda$ ) à la compression (dans la deuxième moitié). La flèche indique le sens de propagation de l'onde et  $d$  la position de l'onde par rapport à la bobine secondaire. Dans la région où l'onde est présente (en vert) il y'a une variation locale d'aimantation.

<sup>1</sup> Ceci est possible puisque  $\sigma$  est considérée comme une petite perturbation autour de  $\sigma_s$ .

<sup>2</sup> Comme le champ de contrainte de l'onde n'est pas constant dans la direction  $e_\theta$  (puisque l'on passe de la traction à la compression sur une longueur d'onde  $\lambda$ ), il se peut que la variation nette de l'aimantation due à ce champ de contrainte soit nulle, on suppose cependant que ceci n'est pas le cas.

L'onde élastique générée se propage dans le tore<sup>1</sup>, dans la direction de la bobine secondaire, avec une célérité donnée. On montre ci-dessous que la tension induite dans cette bobine ne dépend pas de la position de l'onde dans le tore (repérée par la distance  $d$ )<sup>2</sup>, et par conséquent ne dépend pas de sa célérité.

Pour ce faire on rappelle tout d'abord que  $\sigma_s$  et les propriétés physiques sont indépendantes de  $\theta$  et on utilise l'équation de Maxwell-Gausse ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), qui montre que le flux magnétique à travers une surface fermée est conservé. On donne la figure (Fig. 5-12) :



**Fig. 5-12** : Deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont choisies, telle que la première contient l'onde élastique et la deuxième la bobine secondaire. Ces deux surfaces sont égales aux portions du tore entre  $S_-$ ,  $S_+$  d'une part et  $S_+$ ,  $S_{++}$  d'autre part.

Deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont choisies. Pour simplifier le problème, ces surfaces sont égales aux portions du tore, entre  $S_-$  et  $S_+$  d'une part et  $S_+$  et  $S_{++}$  d'autre part (telles que  $S_-$ ,  $S_+$  et  $S_{++}$  sont les sections du tore). La surface  $\Sigma_1$  contient l'onde élastique, dans cette surface l'aimantation  $\mathbf{M}$  est égale  $\mathbf{M}_s$  plus une perturbation due au champ de contrainte de l'onde<sup>3</sup>. La surface  $\Sigma_2$  contient la bobine secondaire, et est utilisée pour mesurer le flux magnétique à travers celle-ci.

En rappelant que  $\mathbf{H}_s$ ,  $\mathbf{M}$ <sup>(4)</sup> et  $\sigma$  sont dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  on peut voir que le flux magnétique est nul à travers la surface latérale  $S_l$  par conséquent le flux à travers  $S_-$  est égal à celui à travers  $S_+$ , qui lui est égale au flux à travers  $S_{++}$ . Ce qui montre que la tension induite dans la bobine réceptrice est indépendante de la position de l'onde élastique dans le tore.

En supposant que la propagation des ondes électromagnétiques dans le tore se fait à une vitesse infinie<sup>5</sup>, on peut voir que la tension induite dans la bobine réceptrice est égale à celle induite au moment de la génération de l'onde par le capteur.

**Remarque** : si l'état de contrainte initiale ou les propriétés physiques n'étaient pas invariants par rotation autour de  $\mathbf{e}_z$  la tension induite dans la bobine serait fonction de la position de l'onde dans le tore.

- **Calcul de la tension induite due au champ de contrainte de l'onde**

Comme le champ magnétique de la bobine primaire est constant et le déplacement n'induit pas de variation d'aimantation, on linéarise celle-ci autour de l'état initial de contrainte :

$$\mathbf{M}(\sigma, \mathbf{H}_s) = \mathbf{M}(\sigma_s + \sigma, \mathbf{H}_s) = \mathbf{M}(\sigma_s, \mathbf{H}_s) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \sigma} \Big|_{\mathbf{H}_s, \sigma_s} : \sigma(t) \quad (5-67)$$

On reconnaît le tenseur piézo-magnétique différentiel, calculé à l'état initial  $\beta_s^d$  donné par :

<sup>1</sup> En général le capteur US émet dans les deux directions  $+e_\theta$  et  $-e_\theta$ , cependant pour simplifier on a illustré (dans la figure) seulement l'onde se propageant dans  $+e_\theta$ .

<sup>2</sup> Sous l'hypothèse de négliger l'atténuation du champ élastodynamique.

<sup>3</sup> Cette hypothèse est justifiable puisque le champ de contrainte d'une onde élastique en contrôle non destructif est très faible ( $< 1\text{MPa}$ ) devant la valeur de la contrainte qui peut induire une variation importante de l'aimantation.

<sup>4</sup> Ceci est dû au fait qu'on a supposé que le champ de contrainte de l'onde est unidirectionnel suivant  $\mathbf{e}_\theta$ .

<sup>5</sup> Ceci pour dire que la variation locale de l'aimantation à l'endroit du capteur est ressentie instantanément (à travers la variation de l'induction magnétique totale) par tout le tore.

$$\beta_s^d = \frac{\partial M}{\partial \sigma} \Big|_{H, \sigma_s} \quad (5-68)$$

L'aimantation s'écrit donc :

$$M = M_s + \beta_s^d \cdot \sigma(t) \quad (5-69)$$

On trouve ainsi la source inductrice (*i.e.* la variation de l'aimantation en fonction du champ de contrainte). Dans cet exemple, le calcul de la tension induite dans la bobine réceptrice est simple. Il n'y a pas besoin de passer par le potentiel vecteur du champ magnétique. La tension est donnée ici par la loi d'induction de Faraday :

$$U^{in} = -\frac{d}{dt}[\Phi] = -\frac{d}{dt} \left[ \iint_{S_+} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (5-70)$$

$S_+$  : surface de la section de la bobine secondaire<sup>1</sup>. En notant que  $S_+$  est indépendante du temps et en utilisant  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_s + \mathbf{M})$ , on trouve :

$$U^{in}(t) = -\mu_0 \iint_{S_+} (\beta_s^d \cdot \dot{\sigma}(t)) \cdot d\mathbf{S} \quad (5-71)$$

Dans le cas particulier où les grandeurs statiques ( $M_s$  et  $\sigma_s$ ) et la contrainte de l'onde  $\sigma$  sont uniformes dans la section du tore (indépendantes de  $r$ ), la tension induite devient :

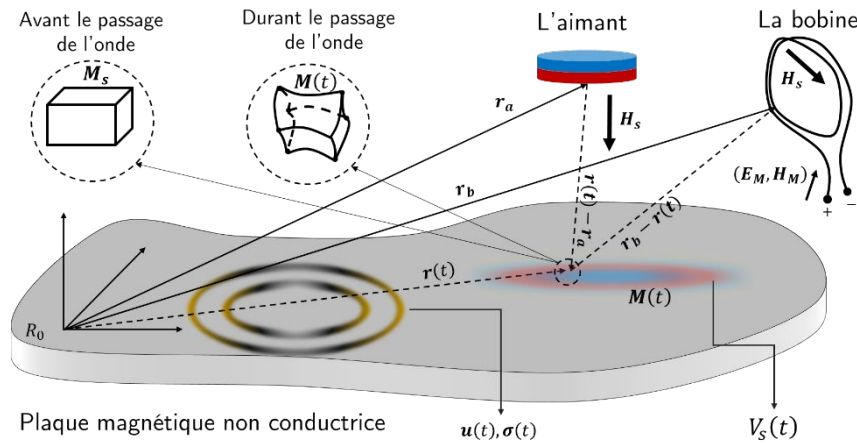
$$U^{in}(t) = -\mu_0 \beta_s^d \cdot \dot{\sigma}(t) S_+ \quad (5-72)$$

Cette formule peut être utilisée pour remonter à la valeur de la contrainte initiale à partir de la mesure de la tension. Un cas similaire à l'exemple présenté ici a été traité par Lolloz *et al* [185].

**Conclusion :** dans ce paragraphe, on a traité un cas simple, afin d'illustrer comment le champ de contrainte de l'onde élastique peut induire une variation d'aimantation, et par suite induire une tension. Dans le cas suivant, on traite la réception par EMAT dans une plaque magnétique déformable.

### 3. Pièce magnétique déformable non conductrice.

On traite ici formellement le problème de réception par EMAT en milieu magnétique non conducteur. La plaque est supposée déformable. Les deux cas précédents ont illustré comment le champ de déplacement ou de contrainte peuvent induire une variation de l'aimantation. Ici, la configuration est représentée par la figure suivante :



**Fig. 5-13 :** un EMAT est placé au-dessus d'une pièce magnétique non conductrice. Avant le passage de l'onde, l'aimant induit une aimantation statique  $M_s$ .  $V_s$  est le volume où l'excitation de l'aimant est non-négligeable. Au passage de l'onde, le volume se déforme et l'aimantation notée  $M$  devient dynamique.

<sup>1</sup> Pour être exacte il faut prendre en compte le nombre de spire de la bobine. Cependant pour simplifier les écriture on suppose que la bobine contient une seule spire.

$\mathbf{H}_s$  : excitation magnétique statique de l'aimant  
 $\mathbf{r}_a$  : position d'un point sur l'aimant,  
 $\mathbf{r}_b$  : position d'un point sur le contour de la bobine,  
 $\mathbf{M}_s$  : aimantation statique, induite par l'aimant,  
 $V_s(t)$  : volume de la pièce où l'excitation de l'aimant n'est pas négligeable, à l'instant  $t$  (dit région de sensibilité),  
 $\mathbf{r}(t)$  : position d'une point dans le volume  $V_s$  à l'instant  $t$ ,  
 $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$  : champs de déplacement et de contrainte de l'onde,  
 $\mathbf{M}$  : aimantation dans le volume  $V_s$ .  
 $(\mathbf{E}_M, \mathbf{H}_M)$  : champ électromagnétique dû à la variation de l'aimantation.

Ce problème est une combinaison des deux problèmes traités précédemment, à la différence (par rapport au cas de l'inclusion) que le volume est déformable donc dépend du temps. Au passage de l'onde, un point matériel de  $V_s$  qui se trouvait (à  $t < t_0$ ) à la position  $\mathbf{r}_0$ , se retrouve maintenant à une position  $\mathbf{r}$  donnée par

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \quad (5-73)$$

Dans ce problème, l'aimantation est fonction de l'excitation magnétique  $\mathbf{H}_s$  et de l'état de contrainte initial  $\boldsymbol{\sigma}_s$  du milieu. On suit ici la même démarche que celle suivie dans le cas précédent. On commence par linéariser l'aimantation autour d'un état de contrainte et d'une excitation magnétique statiques initiaux (*i.e.*  $\boldsymbol{\sigma}_s$  et  $\mathbf{H}_s$ ).

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{H}(t)) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{H}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(t))) \quad (5-74)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}(t), t) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_s, \mathbf{H}_s(\mathbf{r}_0)) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\mathbf{H}_s, \boldsymbol{\sigma}_s} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\mathbf{H}_s(\mathbf{r}_0)} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}_0} \right) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (5-75)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}(t), t) = \mathbf{M}_s + \beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^d \cdot \mathbf{u}(t) \quad (5-76)$$

En suivant les mêmes étapes que dans le cas de l'inclusion, on pose :

$$\mathbf{J}_{M_s} = \nabla_r \times \mathbf{M}_s \quad (5-77)$$

$$\mathbf{J}_M^\sigma = \nabla_r \times (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}(t)) \quad (5-78)$$

$$\mathbf{J}_M^u = \nabla_r \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^d \cdot \mathbf{u}(t)) \quad (5-79)$$

Ces quantités sont les densités de courant magnétique, dont l'une est statique et les deux autres sont dynamiques. La résolution des équations de Maxwell pour obtenir la formule du potentiel vecteur magnétique en fonction des sources inductrices est identique à celle du cas de l'inclusion (les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday sont découplées).

Le potentiel vecteur magnétique est donné en fonction des sources électromagnétiques dans la pièce par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s(t)} \frac{\mathbf{J}_{M_s} + \mathbf{J}_M^\sigma(t) + \mathbf{J}_M^u(t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)|} dV \quad (5-80)$$

$\mathbf{r}'$  : position d'un point de l'espace privé de  $\mathbf{r}(t)$ .

La tension induite dans la bobine est donnée par la loi de Faraday :

$$U^{in} = -\frac{d}{dt} \int_{-}^{+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_b = -\frac{d}{dt} \int_{-}^{+} \left( \frac{d}{dt} \iiint_{V_s(t)} \left[ \frac{\mathbf{J}_{M_s} + \mathbf{J}_M^\sigma(t) + \mathbf{J}_M^u(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] dV \right) \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-81)$$



En notant que l'intégrale porte sur un volume qui varie dans le temps, on utilise le théorème du transport de Reynolds (Réf. [164]). La tension induite devient :

$$U^{in} = \int_{-}^{+} \left[ \iiint_{V_s(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{J}_{M_s} + \mathbf{J}_M^\sigma(t) + \mathbf{J}_M^u(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] dV + \iint_{S_s(t)} v^n(t) \left[ \frac{\mathbf{J}_{M_s} + \mathbf{J}_M^\sigma(t) + \mathbf{J}_M^u(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] dS \right] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-82)$$

$S_s(t)$  : surface de la région de sensibilité,

$v^n$  : composante normale de la vitesse. La normale étant définie sur la surface *déformée*.

En faisant le développement de la formule de la tension induite, on remarque qu'on peut l'écrire comme la somme de  $U^t$  et  $U^m$ , avec :

$$U^m = \int_{-}^{+} \left[ \iiint_{V_s(t)} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \frac{\mathbf{v}^o \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t))}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|^3} \right] dV + \iint_{S_s(t)} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \frac{v^n(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] dS \right] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-83)$$

tension induite par la déformation (changement de forme / taille) du volume  $V_s$ , tout en gardant son aimantation initiale  $\mathbf{M}_s$  <sup>(1)</sup>, et avec

$$U^t = \int_{-}^{+} \left[ \iiint_{V_s(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{J}_M^\sigma(t) + \mathbf{J}_M^u(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] dV + \iint_{S_s(t)} \left[ v^n(t) \left[ \frac{\mathbf{J}_M^\sigma(t) + \mathbf{J}_M^u(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] \right] dS \right] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-84)$$

tension induite par la variation de l'aimantation, due à la variation de la position et de l'état de contrainte local d'un volume élémentaire  $dV$  (qui appartient au volume  $V_s$ ).

#### 4. Conclusion :

Dans cette sous-section nous avons traité le problème de réception dans le cas d'un matériau magnétique déformable et non-conducteur. Pour mieux comprendre l'origine de la tension induite dans la bobine, ce problème a été traité en trois parties. Dans la première, on a traité un exemple où l'aimantation n'est fonction que du champ du déplacement, qui permet d'identifier la première source d'induction. Dans la seconde, l'exemple traité était celui d'une aimantation qui n'est fonction que du champ de contrainte, permettant de mettre en évidence la deuxième source inductrice. Finalement, le problème complet a été traité en suivant la même démarche consistant à écrire d'une manière explicite les sources inductrices en fonction du champ élastodynamique de l'onde.

Dans le cas magnétique non conducteur, les équations de Maxwell sont découplées, ce qui permet de trouver le champ magnétique sans avoir recours au champ électrique. Cela a permis d'écrire la tension induite dans la bobine en fonction des sources inductrices, et par suite en fonction du champ élastodynamique. La tension peut s'écrire comme la somme de deux tensions  $U^t$  et  $U^m$ .

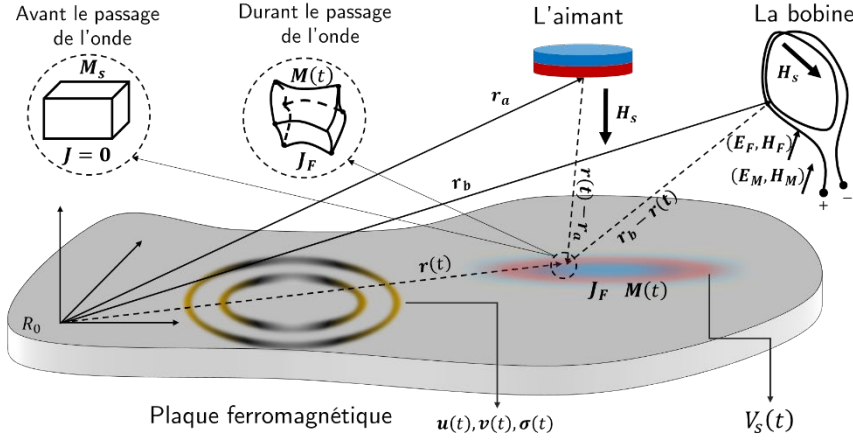
Dans la sous-section suivante nous traitons le cas d'un matériau ferromagnétique.

### B. Cas d'une plaque magnétique conductrice (ferromagnétique)

Nous nous intéressons maintenant au cas de l'étude d'une plaque constituée d'un matériau ferromagnétique (conducteur + magnétique). Cette étude est réalisée sous l'hypothèse de négliger l'effet de l'aimantation sur la résistivité électrique (*i.e.* anisotropic magnetoresistance voir Bartók,[165])<sup>2</sup>. La réception est illustrée dans la Fig. 5-14:

<sup>1</sup> Cette aimantation est similaire à celle induite par le changement de forme d'un aimant déformable, (ce dernier peut être conçu par exemple en mettant des petits aimants dans une matrice élastique).

<sup>2</sup> Inoue [166] estime cet effet à 2% (de variation relative de la résistivité électrique pour le nickel).



**Fig. 5-14** : un EMAT (aimant + bobine) est placé au-dessus d'une pièce ferromagnétique

$H_s$  : champ magnétique statique de l'aimant,

$r_a$  : position d'un point sur l'aimant,

$r_b$  : position d'un point sur le contour de la bobine,

$V_s(t)$  : volume de la région de sensibilité du capteur à l'instant  $t$  <sup>(1)</sup>,

$r(t)$  : position d'un point dans le volume  $V_s$  à l'instant  $t$ ,

$u(t), v(t), \sigma(t)$  : champs de déplacement, de vitesse et de contrainte associés à l'onde,

$M(t)$  : aimantation dans le volume  $V_s$  à l'instant  $t$ ,

$(E_F, H_F)$   $(E_M, H_M)$  : champ électromagnétique dû aux courants de Foucault et à la variation de l'aimantation.

La partie magnétique ayant déjà été traitée à la section précédente, on s'intéresse ici à la partie conductrice. Pour cela écrivons la loi d'Ohm pour un matériau conducteur en mouvement (voir ch7, Réf. [146]) :

$$\mathbf{J}_F = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5-85)$$

$\mathbf{J}$  : densité de courant électrique,

$\rho$  : résistivité électrique,

$\mathbf{v}$  : vitesse du déplacement du conducteur,

$\mathbf{E}$  : champ électrique,

$\mathbf{B}$  : induction magnétique

Au passage de l'onde, la région de sensibilité (*i.e.*  $V_s$ ) se déforme. La déformation se traduit par le déplacement d'un conducteur électrique dans un champ magnétique ce qui crée des courants électriques, dits courants de Foucault (voir Réf. [161]), décrits par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}_F = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_s \quad (5-86)$$

$\mathbf{B}_s$  : induction magnétique de l'aimant dans la plaque.

Ces courants électriques dynamiques créent à leur tour un champ magnétique dynamique, qu'on note  $\mathbf{H}_F$  dont la variation temporelle à travers la bobine crée une tension induite.

En utilisant la relation  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , on écrit cette densité sous la forme :

$$\mathbf{J}_F = \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{v} \times (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (5-87)$$

<sup>1</sup> Ce volume est défini par quelques tailles du capteur sur la surface et quelques épaisseurs de peau dans la profondeur.

Au passage de l'onde par la région de sensibilité, un point matériel de la plaque qui se trouvait aux instants  $t < t_0$  à la position  $\mathbf{r}_0$  se retrouve maintenant à une position  $\mathbf{r}$  donnée par :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \quad (5-88)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$  : déplacement particulaire associé l'onde.

On suppose maintenant que l'onde est une perturbation dynamique de l'état initial et on linéarise l'excitation magnétique de l'aimant et l'aimantation autour de leurs valeurs initiales (calcul identique à celui de la sous-section précédente), ce qui donne :

$$\mathbf{J}_F = \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{v} \times \left( \mathbf{H}_s + \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{M}_s + \beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}(t) + \chi_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) \right) \quad (5-89)$$

Cette densité de courant peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mathbf{J}_F = \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{v} \times (\mathbf{H}_s + \mathbf{M}_s) + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{v} \times \left( \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) + \beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}(t) + \chi_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) \right) \quad (5-90)$$

on pose

$$\mathbf{J}_F^\omega = \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{v}^\omega \times (\mathbf{H}_s + \mathbf{M}_s) \quad (5-91)$$

$$\delta \mathbf{J}_F^{2\omega} = \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{v}^\omega \times \left( \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) + \beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}(t) + \chi_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}(t) \right) \quad (5-92)$$

$\mathbf{J}_F^\omega$  : densité de courants de Foucault induite par le déplacement du matériau dans le champ magnétique statique initial. L'exposant  $\omega$  indique que dans le cas où la vitesse de l'onde est monochromatique de pulsation  $\omega$ , cette densité aurait la même pulsation. Cette densité est dorénavant notée  $\mathbf{J}_F^v$ .

$\delta \mathbf{J}_F^{2\omega}$  : perturbation de la densité de courant de Foucault, induite par la perturbation du champ magnétique initial. L'exposant  $2\omega$  indique qu'en fréquentiel cette perturbation aura le double de la fréquence de l'onde. Cette perturbation est négligée dans notre étude, du fait que les variations de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  sont petites devant leurs valeurs initiales (cette hypothèse nous a permis de faire le développement limité à l'ordre 1 dans toute la section).

---

#### Discussion 1 : effet du capteur sur les mesures :

---

Le passage de l'onde par la région de sensibilité crée des courants électriques (dits courants de Foucault). Ces courants se retrouvent dans une région où règne un champ magnétique, ce qui donne naissance à la force de Lorentz / Laplace. Cette force est induite par le déplacement associé à l'onde, mais en même temps, elle le perturbe. La vibration de l'onde dans la région de sensibilité n'est plus libre, mais forcée. Le champ détecté par l'EMAT n'est donc pas exactement le champ de l'onde, mais un champ perturbé qui tient compte de la présence du capteur. Une discussion similaire a été donnée dans le cas de l'inclusion magnétique, dans lequel la force qui perturbait le passage de l'onde était la force magnétique. On fait ici également la même hypothèse de négliger l'effet du capteur sur le champ élastodynamique de l'onde.

---

#### Discussion 2 : Couplage des équations de Maxwell

---

Écrivons les équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-93)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-94)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{E}}{\rho} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (5-95)$$

avec :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u \quad (5-96)$$

$$\mathbf{J}_F^v = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_s \quad (5-97)$$

$$\mathbf{J}_M^\sigma = \nabla \times (\boldsymbol{\beta}_s^d : \boldsymbol{\sigma}) \quad (5-98)$$

$$\mathbf{J}_M^u = \nabla \times (\boldsymbol{\chi}_s^d : \boldsymbol{\mathfrak{Z}}_s^H \cdot \mathbf{u}) \quad (5-99)$$

Dans la section précédente, trouver une expression de la tension induite était possible, puisque le matériau n'était pas conducteur ( $\rho = \infty$ ). L'équation de Maxwell-Ampère était donc découplée de l'équation de Maxwell-Faraday. Cela a permis de définir l'induction magnétique (et par suite le potentiel vecteur magnétique) entièrement par les deux équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson.

Dans le cas d'un matériau ferromagnétique (donc conducteur  $\rho \neq \infty$ ) la résolution des équations de Maxwell est difficile dans le domaine temporel en description Lagrangienne, du fait qu'on ne peut pas intervertir les dérivées temporelle et spatiales, ces dernières étant dépendantes du temps. Ceci dit notre objectif dans cette sous-section n'est pas de trouver la tension induite, mais plutôt les expressions des sources inductrices pour être capable de les comparer à d'autres que l'on trouve dans la littérature.

### C. Bibliographie

Dans la littérature, on ne trouve que très peu de travaux traitant la réception par EMAT en milieu ferromagnétique et même en milieu conducteur non magnétique. Les travaux qu'on a pu trouver ont en commun les caractéristiques suivantes :

1. seule la tension  $U^t$  est étudiée ;
2. la variation de l'aimantation induite par le déplacement particulaire n'est pas prise en compte ;
3. la méthode utilisée pour calculer la tension induite est la méthode directe.
4. Les travaux supposent des petites perturbations.

Pour le cas d'une pièce conductrice non magnétique le travail de Ludwig [167] traite numériquement un problème de réception dans une pièce en aluminium en utilisant une bobine en méandres (meander-coil), dans un cas 2D. La source inductrice est la densité de courant de Foucault générée par le passage de l'onde (identique à celle trouvée dans cette section).

Pour le cas ferromagnétique, l'unique travail qu'on a pu trouver est celui de Shapporabadi *et al.* [168] qui traite numériquement le problème de réception dans une pièce en acier, en utilisant la même bobine que celle de la Réf. [167] et en supposant aussi que le problème est 2D. La source inductrice totale dans ce travail est donnée par :

$$\mathbf{J}_{tot}^r = \frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_s) + \nabla \times (\boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}) + \nabla \times (\mathbf{M}_s \nabla \mathbf{u}) \quad (5-100)$$

$\mathbf{J}_{tot}^r$  : densité des courants totaux (Foucault + magnétique),

$\rho$  : résistivité électrique,

$\mathbf{v}$  : vitesse particulaire associée de l'onde,

$\boldsymbol{\nu}$  : inverse de la matrice de perméabilité magnétique différentielle,

$\boldsymbol{\epsilon}$  : matrice de déformation de magnétostriction,

$\boldsymbol{\epsilon}$  : déformation associée à l'onde,

$\mathbf{M}_s$  : aimantation statique induite par l'aimant,

$\mathbf{u}$  : champ du déplacement particulaire de l'onde.

Comparons cette expression avec celle des sources inductrices données dans cette section qui interviennent dans le calcul de la tension  $U^t$  (*i.e.* la tension prise en compte dans la Réf. [168])<sup>1</sup>. Pour un matériau conducteur non magnétique, la source donnée par Réf. [168] est  $\mathbf{J}_F = \frac{1}{\rho}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_s)$  qui est identique à celle trouvée dans cette section (voir (5-90) [p. 209]).

Pour un matériau magnétique non conducteur, la source inductrice donnée par la Réf. [168] est :

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times (\mathbf{v} \mathbf{e} : \boldsymbol{\epsilon}) + \nabla \times (\mathbf{M}_s \nabla \mathbf{u}) \quad (5-101)$$

et celle trouvée dans cette section s'écrit

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times (\boldsymbol{\beta}_s^d : \boldsymbol{\sigma}) + \nabla \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H \cdot \mathbf{u}) \quad (5-102)$$

On remarque que chaque source contient deux termes, cependant les termes sont différents.

Le premier terme de chaque expression décrit la variation de l'aimantation due au champ de contrainte de l'onde (dans cette section) et due au champ de déformation de l'onde (dans la Réf. [168]). Ces deux termes, bien qu'écrits différemment, sont en fait équivalents et décrivent la même physique.

Le deuxième terme de source magnétique donné dans cette section ( $\nabla \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H \cdot \mathbf{u})$ ) provient de la variation de l'aimantation due à la variation de la position.

On note tout d'abord que la formule (5-100) n'était pas développée par les auteurs Réf. [168], mais reprise de certaines références qu'ils ont citées. Pour comprendre donc d'où vient le deuxième terme dans la formule, on a cherché dans ces références qui conduisent à la référence suivante Ludwig [169] dans laquelle l'auteur cite trois références par le même auteur (A. Wilbrand) qu'on n'a pas pu trouver (deux de ces références sont en allemand, dont une est donnée ici [170]). Cependant l'extrait suivant du papier de Ludwig [169] permet de comprendre l'origine de ce terme,

« Wilbrand. [170] proposes an additional term to include the magnetization effect due to material density variations as described by the divergence of the particle displacement vector  $u$  »

L'ajout de ce terme est donc fait sur la loi de comportement magnéto-mécanique, pour prendre en compte la variation de l'aimantation due à la variation de la densité (induite par la contrainte).

Les lois de comportement magnéto-mécanique *sans ce terme* décrivent le couplage entre les parties mécanique et magnétique d'un système (voir par exemple Réf. [148, 171-172] et ch2 de la Réf.[149]). Ces lois donnent la variation de l'aimantation en fonction du champ magnétique et de la contrainte par une relation du type :

$$d\mathbf{M}(\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{H} + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\sigma} \quad (5-103)$$

$\boldsymbol{\chi}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  étant les mêmes matrices que celles utilisées dans cette section.

Le terme  $\mathbf{M} \nabla \cdot \mathbf{u}$  ajouté par Wilbrand n'apparaît pas dans les références citées et on ne l'a pas trouvé ailleurs. Il n'a pas été possible de déterminer s'il s'agit d'un ajout artificiel, ou si cela découle d'un développement théorique. De ce fait, ce terme n'est pas pris en compte dans notre développement du modèle de réception.

## D. Conclusion

Dans cette section, nous nous sommes intéressés au traitement du problème de réception dans deux cas : plaque magnétique non conductrice et plaque ferromagnétique.

<sup>1</sup> Puisque les auteurs travaillent sous l'hypothèse de petites perturbations, la tension  $U^m$  est nulle.

Dans chaque cas, la première étape du développement du modèle de réception a consisté à identifier puis écrire les sources électromagnétiques susceptibles d'induire une tension dans la bobine de l'EMAT, en fonction du champ élastodynamique de l'onde. Cette étape se base sur la linéarisation du problème autour de l'état initial (un état statique). Dans le cas magnétique non conducteur, les sources résultent de la variation de l'aimantation due à la variation de la position et celle due à la contrainte ; dans le cas conducteur, la source est formée par les courants de Foucault.

La deuxième étape consiste à calculer la tension induite dans la bobine en fonction du champ élastodynamique de l'onde. Pour cela, on a adopté la méthode classique du calcul d'une tension induite par une densité de courant (en appliquant simplement la loi d'induction de Faraday), méthode appelée « méthode directe ». Celle-ci permet d'exprimer pour le cas d'une plaque magnétique non conductrice une tension s'écrivant comme la somme de deux termes, l'une assimilable à la tension induite par un aimant se déplaçant relativement à une bobine (notée  $U^m$ ), l'autre assimilable à celle induite par une source électrique variable dans le temps et immobile par rapport à la bobine (notée  $U^t$ ).

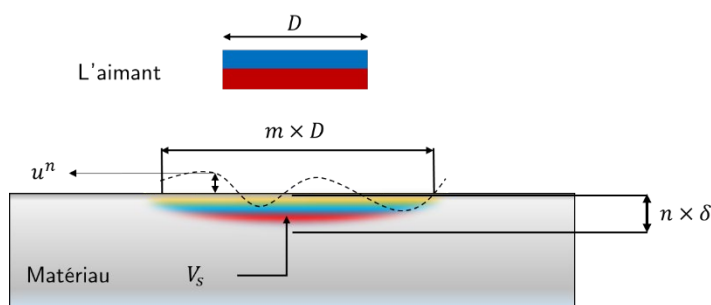
Dans le cas ferromagnétique, une solution simple n'est pas possible, du fait du couplage des équations de Maxwell (couplage du champ électrique et magnétique) et de l'usage qui a été fait de la description Lagrangienne. Cependant, l'identification et l'expression des sources inductrices a permis de comparer les expressions avec celles trouvées dans la littérature.

### E. Hypothèse de petites perturbations

La démarche utilisant la méthode directe et la description Lagrangienne, même si elle est la plus intuitive et permet de bien voir la physique qui intervient dans la réception, donne des expressions (pour la tension induite) qui sont difficilement utilisables. Cela tient notamment du fait qu'il faut réaliser l'intégration sur un volume qui dépend du temps. Une discussion sur ce point est nécessaire.

#### Intégration sur un volume qui dépend du temps :

L'intégration sur la région de sensibilité est à réaliser sur un volume qui dépend du temps. Cela pose un problème du fait qu'il faut connaître comment la forme du volume évolue au cours du temps. Ce calcul, *a priori* coûteux, peut s'avérer inutile si l'on peut négliger la déformation de la région de sensibilité due au passage de l'onde. Pour avoir une estimation grossière de la variation du volume de la région de sensibilité, on prend deux exemples (pour un matériau conducteur non magnétique puis pour un matériau ferromagnétique). On définit tout d'abord le volume de la région de sensibilité de l'EMAT.



**Fig. 5-15** : illustration des dimensions de la région de sensibilité ( $V_s$ ). Cette région dépend des dimensions de l'aimant sur la surface et de l'épaisseur de peau en profondeur.

$D$  : diamètre de l'aimant,

$\delta$  : épaisseur de peau,

$m, n$  : entiers naturels,

$V_s$  : volume de la région de sensibilité,

$u^n$  : composante normale du déplacement associé à l'onde.

Le volume de la région de sensibilité du capteur est défini par quelques dimensions de l'aimant sur la surface (*e.g.* pour un aimant cylindrique, l'étendue de  $V_s$  sur la surface est donnée par  $m \times D$ ), et quelques

( $n$ ) épaisseurs de peau dans la profondeur. Le choix des entiers  $m$  et  $n$  est fait de façon à négliger la valeur du champ électromagnétique au-delà la région de sensibilité.

Par exemple, le champ magnétique décroît dans l'air comme l'inverse du carré de la distance, et dans un matériau ferromagnétique – en plus de la décroissance due à la distance –, décroît exponentiellement en fonction de l'épaisseur de peau. La valeur de l'excitation magnétique au-delà d'une profondeur de cinq épaisseurs de peau ne représente plus que 0.6% de la valeur à la surface.

Comme la dimension  $m \times D$  est généralement très grande devant  $n \times \delta$ ,<sup>(1)</sup> la dimension qui compte lors de la déformation de la région de sensibilité est donc celle dans la profondeur (*i.e.*  $n \times \delta$ ).

Prenons les deux exemples suivants :

1. Pour une plaque en aluminium (matériau non ferromagnétique) l'épaisseur de peau à 250 kHz est de 164  $\mu\text{m}$  donc pour  $n = 5$ , la profondeur de la région de sensibilité est de 820  $\mu\text{m}$ . Le déplacement normal des ondes de Lamb est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres (voir par exemple la Réf. [162]), prenons par exemple  $u^n = 80$  nm. La variation relative de la région de sensibilité dans la profondeur ( $100 \times u^n / (n \times \delta)$ ) est alors de 0.0097%.
2. Pour une plaque en Nickel (matériau ferromagnétique), l'épaisseur de peau à 250 kHz est de 10,7  $\mu\text{m}$ , ce qui donne pour  $n = 5$ , la profondeur de la région de sensibilité de 53,5  $\mu\text{m}$ , et une variation relative de la région de sensibilité dans la profondeur de 0.15% .

---

La variation de la forme de la région de sensibilité est donc très faible, ce qui permet de travailler sous l'hypothèse de petites perturbations (Réf.[173]).

---

Par ailleurs le fait que les capteurs EMAT puissent être à la fois des émetteurs et des récepteurs permet de développer un modèle de réception qui donne la tension induite par une expression plus simple, en développant des arguments de réciprocité *ad hoc*. Cette méthode est développée dans la section suivante.

---

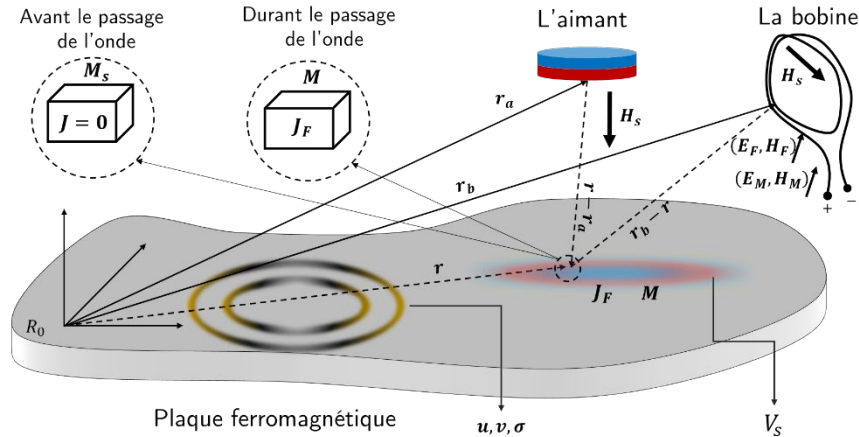
<sup>1</sup> L'épaisseur de peau est généralement égale à quelques dizaines (pour les matériaux ferromagnétiques) ou centaines (pour les matériaux conducteurs non magnétiques) de micromètres, alors que les dimensions de l'aimant sont en millimètre voire en centimètres.

## V. Modèle de réception par réciprocité

Dans la section précédente, nous avons traité de modèle de réception comme on traite un problème d'induction électromagnétique classique. Une fois les termes de source identifiés et exprimés, la résolution du problème de réception, dans la description Lagrangienne, passe par l'écriture des équations de Maxwell dans le domaine temporel, et applique d'une manière directe la loi d'induction de Faraday. Cette démarche, même si elle permet de bien comprendre l'origine des phénomènes physiques en présence, conduit à une formule finale de la tension induite, et par suite, de la réception par EMAT, qui est difficile à mettre en œuvre numériquement. Dans cette section, nous allons travailler à la fois sous l'hypothèse de petites perturbations et dans le domaine fréquentiel, et profiter du fait que, dans une expérience, l'EMAT utilisé pour la réception pourrait être aussi utilisé pour l'émission, et faire appel au concept de réciprocité.

### Hypothèse de petites perturbations

L'hypothèse de petites perturbations, très utilisée en mécanique linéaire (Réf. [173]), permet, si les déplacements sont très petits devant les dimensions de la structure, de dire que celle-ci garde la même géométrie durant la déformation. L'usage de cette hypothèse est justifiée dans le cas de la modélisation de la réception. Chaque point matériel de la plaque est donc supposé stationnaire dans le repère  $R_0$  et on lui attribue les grandeurs dynamiques qu'il aurait si la plaque se déformait. La configuration de réception est représentée par la figure ci-dessous :



**Fig. 5-16** Réception par un EMAT d'une onde élastique dans une pièce ferromagnétique, sous l'hypothèse de petite perturbation.

$H_s$  : champ magnétique de l'aimant (statique),  
 $r_a$  : position d'un point sur l'aimant (statique),  
 $r_b$  : position d'un point sur le contour de la bobine (statique),  
 $M_s$  : aimantation statique, induite par l'aimant,  
 $V_s$  : volume de la région de sensibilité (statique),  
 $r$  : position d'une point dans le volume  $V_s$  (statique),  
 $u, v, \sigma$  : champs de déplacement, vitesse et contrainte associés à l'onde (dynamique),  
 $M$  : aimantation dans le volume  $V_s$  (dynamique),  
 $(E_F, H_F)$   $(E_M, H_M)$  : champs électromagnétiques dus aux courants de Foucault et à la variation de l'aimantation (dynamique).

### A. Problème de réception dans le domaine fréquentiel par la *méthode directe*

Jusqu'ici toutes les équations et expressions ont été données dans le domaine temporel. Dans la suite de ce chapitre, on résout le problème de la réception dans le domaine fréquentiel, la fréquence étant imposée par le champ élastodynamique de l'onde reçue ( $u_{onde} = u(r, \omega)e^{-i\omega t}$ ).



Écrivons les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \quad (5-104)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (5-105)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)}{\rho} + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) \quad (5-106)$$

avec :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u \quad (5-107)$$

$$\mathbf{J}_F^v = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{J}_M^\sigma = \nabla \times (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{J}_M^u = \nabla \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H \cdot \mathbf{u}) \quad (5-108)$$

**Résolution :**

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A}' \text{ tq } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' \quad (5-109)$$

Maxwell-Faraday devient :

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \nabla \times \mathbf{A}', \quad \Rightarrow \exists \phi \text{ (scalaire) tq } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{A}' + \nabla \phi \quad (5-110)$$

En notant que  $\nabla \times (\nabla \cdot f) = 0$  pour tout champ scalaire  $f$ , on choisit le potentiel vecteur magnétique suivant :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \frac{\nabla \phi}{i\omega} \quad (5-111)$$

ce qui donne :

$$\mathbf{E} = i\omega \mathbf{A} \quad (5-112)$$

L'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$-\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{i\omega \mu_0}{\rho} \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (5-113)$$

On fait usage de la jauge de Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) et on note  $k^2 = i\omega \mu_0 / \rho$ . L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5-114)$$

dont la solution est :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5-115)$$

La tension  $U^t$  se calcule par la loi de Faraday comme :

$$U^t(\omega) = i\omega \int_{-}^{+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_b = \frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \left\{ \iiint_{V_s} \left( \frac{\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right\} \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-116)$$

Ainsi, on exprime la tension induite dans la bobine par la variation de l'intensité des sources électromagnétiques dans la pièce. On remarque que la formule de la tension contient une double intégrale dont l'une est sur le contour de la bobine. Dans la sous-section suivante, on développe une méthode qui permet de remplacer cette intégrale par des densités de courants calculées dans le cas de l'émission, si l'EMAT récepteur était utilisé comme un émetteur.

## B. Méthode utilisant la réciprocité

La tension induite dans la bobine donnée par la méthode directe est donnée par :

$$U^t(\omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \left\{ \iiint_{V_s} \left( \frac{\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} \right) e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \right\} \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-117)$$

En remarquant que les densités  $\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u$  et le volume  $V_s$  ne dépendent pas de  $\mathbf{r}_b$ , on peut réécrire la tension sous la forme suivante :

$$U^t(\omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} (\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u) \cdot \left[ \int_{-}^{+} \left( \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} \right) d\mathbf{r}_b \right] dV \quad (5-118)$$

On note :

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b) = \int_{-}^{+} \left( \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} \right) d\mathbf{r}_b \quad (5-119)$$

Cette fonction (fonction de Green) relie un point de la bobine à un point de la région de sensibilité. En remarquant que  $\mathbf{G}_k$  est inchangée par permutation de  $\mathbf{r}_b$  (position d'un point de la bobine) et  $\mathbf{r}$  (position d'un point de la région de sensibilité), on peut faire la conjecture qu'elle doit se retrouver également dans la résolution du problème d'émission, où ce capteur est utilisé comme émetteur.

On donne ici les étapes de résolution des problèmes d'émission et de réception par EMAT en milieu ferromagnétique.

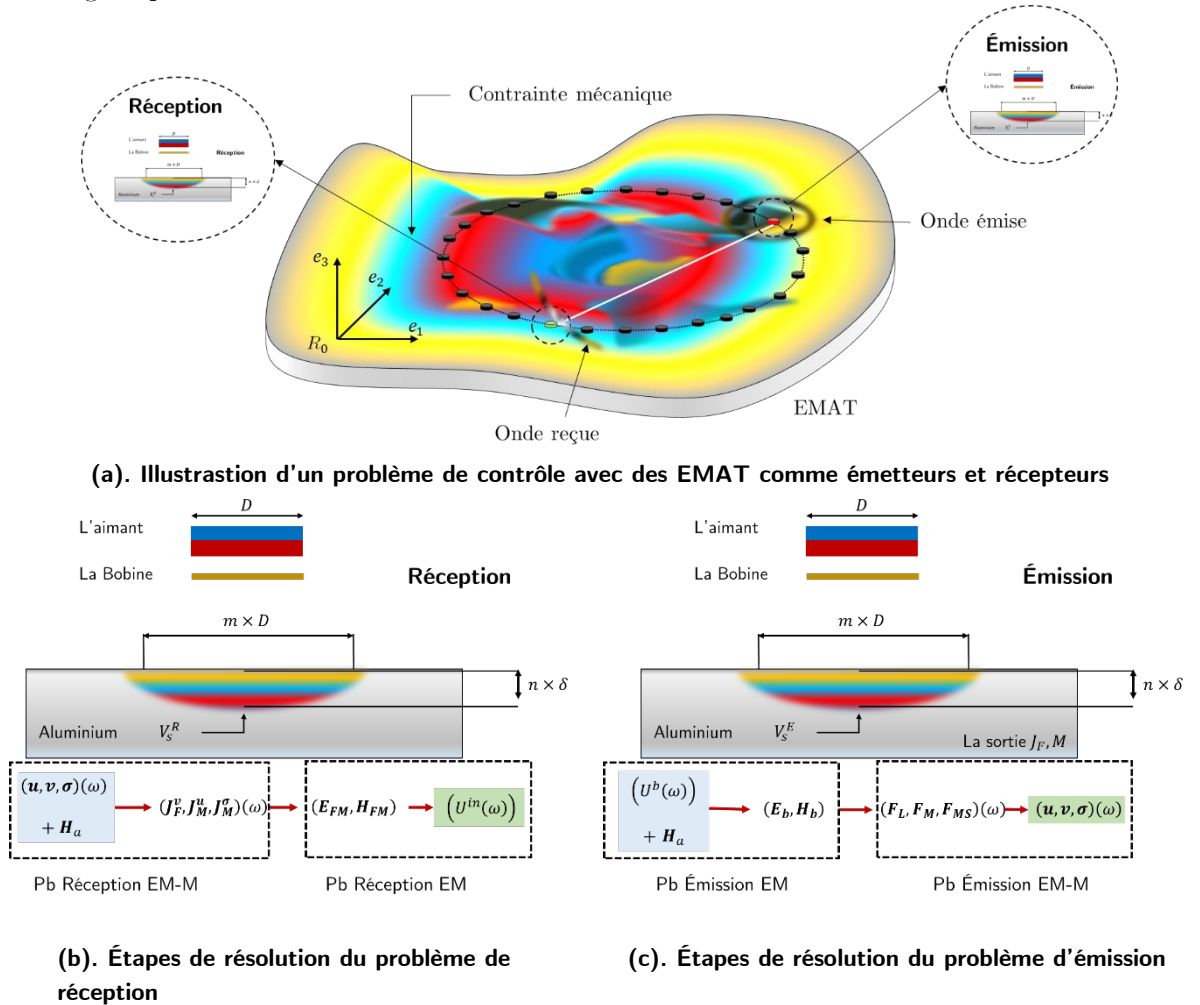


Fig. 5-17 : les étapes de résolution des problèmes d'émission et de réception par EMAT en milieu ferromagnétique.

**Le problème de réception par EMAT :**

La donnée d'entrée dans le problème de réception est le champ élastodynamique de l'onde  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma})(\omega)$  et le champ magnétique statique de l'aimant  $\mathbf{H}_a$  (la bobine est en circuit ouvert). La première étape dans la résolution de ce problème consiste à identifier les sources inductrices et les écrire en fonction du champ élastodynamique de l'onde  $((\mathbf{J}_F^v, \mathbf{J}_M^u, \mathbf{J}_M^\sigma)(\omega))$  (ceci a été fait dans la section précédente). Ce passage d'une grandeur purement mécanique (*i.e.* le champ élastodynamique) à une grandeur électro-magnéto-mécanique (*i.e.* les sources inductrices) représente le problème électro-magnéto-mécanique (Pb E-EM). L'étape suivante consiste à résoudre les équations de Maxwell avec comme entrée ces sources inductrices. L'étape finale est le calcul de la tension induite dans la bobine par ces sources. Ce passage représente le problème électromagnétique<sup>1</sup> (Pb EM) (ceci a été fait dans la sous-section précédente).

**Le problème d'émission par EMAT :**

L'entrée dans ce problème est la tension dans la bobine (générée par exemple par un générateur de tension) et le champ magnétique statique de l'aimant  $\mathbf{H}_a$ . La première étape dans la résolution de ce problème consiste à calculer le champ électromagnétique de la bobine  $(\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b)$  dans la pièce. Ce passage, d'une grandeur électrique (la tension dans la bobine) à une grandeur électromagnétique (le champ électromagnétique) représente le problème d'induction<sup>2</sup> électromagnétique (Pb EM). L'étape suivante consiste à calculer à partir des champs  $(\mathbf{H}_a, \mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b)$  les forces d'origine électrique (*i.e.* force de Lorentz  $\mathbf{F}_L$ ), magnétique (*i.e.* la force magnétique  $\mathbf{F}_M$ ) et d'origine magnétostrictive (*i.e.* transformer la déformation de magnétostriction en une force équivalente  $\mathbf{F}_{MS}$ ). Ce problème est traité dans la thèse de Clause [37]. L'étape finale est la résolution d'un problème élastodynamique<sup>3</sup> pour trouver le champ de l'onde générée. Ces deux étapes représentent le problème électro-magnéto-mécanique (en émission).

Dans ce problème d'émission, seule la première partie (*i.e.* le problème d'émission électromagnétique), nous intéresse pour la suite de cette section auquel on se réfère comme étant le « problème d'émission » purement électromagnétique.

Avant de le résoudre, il nous faut discuter de la région de sensibilité dans l'émission et dans la réception, pour que la fonction de green  $\mathbf{G}_k$  soit identique dans les deux problèmes (en rappelant qu'elle dépend de la région de sensibilité et de  $k = k(\omega, \rho)$ ).

**En émission :**

Cette région est définie par l'intersection des régions dans lesquelles le champ magnétique de l'aimant et le champ électromagnétique de la bobine sont non-négligeables. Cela permet de définir cette région par deux dimensions. La première, sur la surface, et on peut la définir (en se basant sur le fait que les champs magnétique et électromagnétique décroissent dans le vide en l'inverse du carré de la distance) par quelques tailles du capteur . Et la deuxième dimension dans la profondeur, est définie (en se basant sur le fait que le champ électromagnétique décroît dans un matériau conducteur d'une manière exponentielle) par quelques épaisseurs de peau.

**En réception :**

La région de sensibilité est définie par le volume dans lequel le champ magnétique de l'aimant et le champ électromagnétique des sources inductrices (dues au passage de l'onde) sont non-négligeables. On peut ainsi la définir comme elle l'a été précédemment : quelques tailles du capteur à la surface x quelques épaisseurs de peau dans la profondeur.

Les régions de sensibilité de l'EMAT en émission et de l'EMAT en réception dépendent donc de :

---

<sup>1</sup> Même si les sources inductrices contiennent des grandeurs mécaniques, ce problème est résolu comme n'importe quel problème d'induction électromagnétique classique.

<sup>2</sup> L'induction des courants de Foucault et d'une aimantation spontanée.

<sup>3</sup> Même si les forces dans ce problème sont d'origine électro-magnéto-mécanique, ce problème est résolu comme n'importe quel problème élastodynamique classique.

1. la géométrie du capteur,
2. la fréquence (via l'épaisseur de peau),
3. la conductivité / résistivité électrique (via l'épaisseur de peau),
4. la perméabilité magnétique (via l'épaisseur de peau).

À supposer que l'EMAT utilisé est le même en émission et en réception, seuls les trois derniers paramètres peuvent affecter cette région. On discute brièvement ces points.

1. *La fréquence* : dans une expérience EMAT, la fréquence de l'onde générée est imposée par la fréquence de la tension électrique dans la bobine. La tension induite dans la réception est la même que celle de l'onde, et par conséquent identique à celle en émission.
2. *La conductivité / résistivité électrique* : dans le problème qui nous intéresse cette grandeur est uniforme partout dans la plaque, et on suppose qu'elle est peu affectée par la présence de la contrainte mécanique (qui, elle, peut changer entre l'endroit sous l'émetteur et l'endroit sous le récepteur).

Ces deux points permettent donc de dire que  $k$  garde la même valeur en émission et en réception.

3. *La perméabilité magnétique<sup>1</sup>* : dans le cas où cette grandeur est isotrope et homogène<sup>2</sup>, la perméabilité magnétique à proximité de l'émetteur est identique à celle à proximité du récepteur. En revanche, dans le cas où cette grandeur est inhomogène ou anisotrope, il se peut qu'elle change entre ces deux zones d'opération. Cela arrive en présence de contrainte mécanique à proximité des capteurs. Contrairement à la conductivité électrique, la perméabilité est très sensible à la contrainte Bozorth [15]).

**Remarque** : dans le cas où la région de sensibilité du problème d'émission est différente de celle du problème de réception<sup>3</sup> (du fait par exemple de la variation de la perméabilité magnétique due à une contrainte inhomogène), il est possible de définir une nouvelle région de sensibilité qui englobe les deux. Rappelons que si nécessaire, cette région peut être étendue à la plaque entière.

La fonction de Green est donc identique (sous l'hypothèse du choix convenable de la région de sensibilité) dans les deux problèmes émission et réception.

Passons maintenant à la résolution du problème d'induction électromagnétique en émission :

Pour cela écrivons les équations de Maxwell pour ce problème afin de déterminer la densité de courant de Foucault induite dans la région de sensibilité de l'EMAT.

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \quad (5-120)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-121)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\sigma\mathbf{E} + \mu_0(\mathbf{J}_b \oplus (\mathbf{J}_p + \mathbf{J}_M)) \quad (5-122)$$

avec :

$$\mathbf{J}_b = \frac{I d\mathbf{r}}{s} \quad (5-123)$$

<sup>1</sup> On s'intéresse ici à la valeur de la perméabilité magnétique fixée par l'excitation de l'aimant, qui lui est le même dans l'émission et la réception.

<sup>2</sup> Pour un matériau magnétiquement homogène mais anisotrope, la perméabilité magnétique dépend de l'angle entre  $\mathbf{H}_a$  et la direction d'anisotropie du milieu. Cette perméabilité peut donc changer si l'émetteur et le récepteur ne sont pas positionnés de la même façon par rapport à la direction d'anisotropie.

<sup>3</sup> Le mot *différentes*, veut dire, *ont des dimensions différentes*, puisque ces régions sont toujours distinctes (*i.e.* l'une sous l'émetteur et l'autre sous du récepteur).

$I$  : intensité électrique dans la bobine,  
 $s$  : section du fil de la bobine,  
 $d\mathbf{r}$  : élément du fil de la bobine,  
 $\mathbf{J}_b$  : densité de courant dans la bobine,  
 $\mathbf{J}_M$  : densité de courant magnétique induite donnée par  $\nabla \times \mathbf{M}$ ,  
 $\mathbf{J}_p$  : densité de courant de Foucault due à la déformation locale (source de l'onde élastique).

$$\mathbf{J}_p = \frac{1}{\rho} \mathbf{v}_{\text{émission}} \times \mathbf{B}_s \quad (5-124)$$

$\oplus$  : utilisé pour indiquer que ces densités existent dans des régions distinctes (bobine et pièce).

**Remarque** : l'émission par EMAT (Pb EM + EM-M) résulte en la génération d'ondes élastiques dans le matériau. Ces ondes sont des déformations : sous l'émetteur, le matériau s'approche / s'éloigne de l'aimant, ce qui d'une part perturbe la valeur de l'aimantation statique (puisqu'elle dépend de la position, *via* la dépendance du champ magnétique de l'aimant), et d'autre part induit des courants de Foucault perturbateurs, puisque le matériau – conducteur – se déforme dans une région où règne un champ magnétique (celui de l'aimant). Sous l'hypothèse de petites perturbations, la forme non-déformée est utilisée dans les calculs (*i.e.* calcul du champ magnétique de l'aimant) ce qui veut dire que l'aimantation statique n'est pas perturbée. Et dans le cas où on ne s'intéresse qu'au problème d'émission purement électromagnétique, les courants de Foucault perturbateurs  $\mathbf{J}_p$  sont négligés (puisqu'ils proviennent d'une grandeur élastodynamique : la vitesse).

En suivant la même démarche que celle suivie pour la méthode directe, la résolution des équations de Maxwell donne le potentiel vecteur magnétique (PVM) : suivant :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{espace}} \frac{\mathbf{J}_b \oplus \mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5-125)$$

Cette intégrale peut s'écrire comme la somme d'un potentiel vecteur magnétique (PVM) dont la source est le courant dans la bobine, et un PVM dont la source est l'aimantation induite dans la pièce.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{bobine}} + \mathbf{A}_{\text{pièce}} \quad (5-126)$$

$$\mathbf{A}_{\text{bobine}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-}^{+} \frac{e^{ik|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}|} d\mathbf{r}_b \quad (5-127)$$

$$\mathbf{A}_{\text{pièce}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5-128)$$

Le champ électrique total (induit par le courant électrique de la bobine et la variation de l'aimantation dans la plaque) est donné en tout point de la région de sensibilité par :

$$\mathbf{E} = i\omega(\mathbf{A}_{\text{bobine}} + \mathbf{A}_{\text{pièce}}) = \frac{i\omega\mu_0 I}{4\pi} \int_{-}^{+} \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} d\mathbf{r}_b + \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \quad (5-129)$$

qui s'écrit en fonction de  $\mathbf{G}_k$  :

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{G}_k + \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \quad (5-130)$$

La densité de courant de Foucault induite en émission est donnée par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}_F^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \frac{i\omega\mu_0 I}{4\pi\rho} \mathbf{G}_k + \frac{i\omega\mu_0}{4\pi\rho} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \quad (5-131)$$

Cette densité peut être écrite comme :

$$\mathbf{J}_F^e = \mathbf{J}_F^b + \mathbf{J}_F^M \quad (5-132)$$

avec

$$\mathbf{J}_F^b = \frac{i\omega\mu_0 I}{4\pi\rho} \mathbf{G}_k \quad (5-133)$$

Cette densité de courant représente les courants de Foucault induits par le champ électromagnétique de la bobine.

$$\mathbf{J}_F^M = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi\rho} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \quad (5-134)$$

$\mathbf{J}_F^M$  : représente les courants de Foucault induits dans la plaque par l'aimantation induite par le champ électromagnétique de la bobine. Il s'agit donc d'un effet du second ordre par rapport à  $\mathbf{J}_F^b$ . Celle-ci peut donc être négligée, si bien que l'on a :

$$\mathbf{G}_k = \frac{4\pi\rho}{i\omega\mu_0 I} \mathbf{J}_F^e \quad (5-135)$$

Rappelons ici la tension induite dans la bobine (en réception) donnée par la méthode directe :

$$U^{in} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_{zs}} (\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u) \cdot \mathbf{G}_k dV' \quad (5-136)$$

En remplaçant  $\mathbf{G}_k$  par sa valeur on trouve :

$$U^{in} = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u) \cdot \mathbf{J}_F^e dV \quad (5-137)$$

où

$$\mathbf{J}_F = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{J}_M^\sigma = \nabla \times (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{J}_M^u = \nabla \times (\chi_s^d \cdot \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \quad (5-138)$$

On peut écrire la tension comme la somme de deux contributions :

$$U = U_c + U_M \quad (5-139)$$

$$U_c = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} \mathbf{J}_F^v \cdot \mathbf{J}_F^e dV \quad (5-140)$$

$$U_M = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_{zs}} (\mathbf{J}_M^\sigma + \mathbf{J}_M^u) \cdot \mathbf{J}_F^e dV \quad (5-141)$$

$U_c$  : tension induite dans la bobine dans le cas d'un matériau conducteur non magnétique,

$U_M$  : tension induite dans la bobine dans le cas d'un matériau magnétique non conducteur.

On peut réécrire la tension  $U_c$  comme :

$$U_c = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_{zs}} \mathbf{J}_F^v \cdot \mathbf{J}_F^e dV' = \frac{1}{I} \iiint_{V_{zs}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_s) \cdot \mathbf{J}_F^e dV' = -\frac{1}{I} \iiint_{V_{zs}} (\mathbf{J}_F^e \times \mathbf{B}_s) \cdot \mathbf{v} dV' \quad (5-142)$$

On fait ainsi apparaître explicitement la densité de force de Lorentz :

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{J}_F^e \times \mathbf{B}_s \quad (5-143)$$

La tension induite dans le cas des matériaux conducteurs non magnétiques est donnée par :

$$U_c = -\frac{1}{I} \iiint_{V_s} \mathbf{f}_L \cdot \mathbf{v} dV \quad (5-144)$$

Réécrivons différemment la tension  $U_M$  :

$$U_M = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\mathbf{J}_M^{\sigma} + \mathbf{J}_M^u) \cdot \mathbf{J}_F^e dV = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\nabla \times (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma}) + \nabla \times (\chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u})) \cdot \mathbf{J}_F^e dV \quad (5-145)$$

En utilisant l'identité vectorielle :

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (5-146)$$

et le théorème de Gauss, on trouve :

$$U_M = \frac{\rho}{I} \iint_{S_s} [(\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{J}_F^e] \cdot d\mathbf{S} + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_F^e) dV \quad (5-147)$$

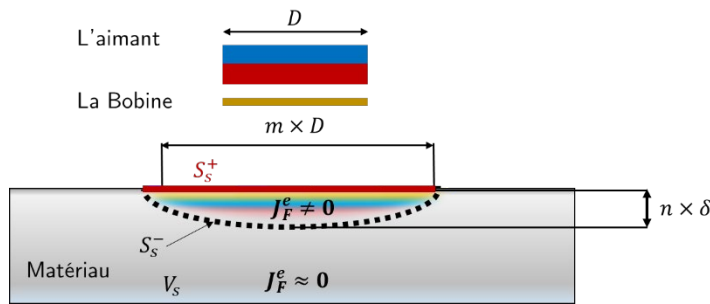
La tension totale induite dans la bobine est donc donnée par :

$$U^{in} = -\frac{1}{I} \iiint_{V_s} \mathbf{f}_L \cdot \mathbf{v} dV + \frac{\rho}{I} \iint_{S_s} [(\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{J}_F^e] \cdot d\mathbf{S} + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_F^e) dV \quad (5-148)$$

La formule ne contient plus l'intégrale sur la bobine et utilise des grandeurs déjà calculées en émission ( $\mathbf{J}_F^e$  et  $I$ ), des termes associés à l'onde élastique ( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}$ ), et des grandeurs statiques ( $\beta_s^d, \chi_s^d, \mathfrak{J}_s^H$ ) et dynamique ( $\mathbf{f}_L$ ), qui *peuvent différer* suivant que l'on est en émission ou en réception.

### Discussion 1 : simplification de la formule de la tension induite

Divisons la surface  $S_s$  (de la région de sensibilité) en deux parties : la surface supérieure (*i.e.*  $S_s^+$  la surface qui coïncide avec celle de la plaque) et la surface inférieure (*i.e.*  $S_s^-$  donnée par la partie inférieure de  $V_s$ ).



**Fig. 5-18** : division de la surface de la région de sensibilité en deux surfaces :  $S_s^+$  (coïncide avec celle de la plaque) et  $S_s^-$  la surface inférieure du volume  $V_s$ .

La région de sensibilité est définie par le volume dans lequel le champ électromagnétique de la bobine est non-négligeable. En rappelant que  $\mathbf{J}_F^e = 1/\rho \mathbf{E}$ , on peut ne garder dans l'intégrale de surface que la partie portant sur la surface supérieure. La tension induite s'écrit donc :

$$U^{in} = -\frac{1}{I} \iiint_{V_s} \mathbf{f}_L \cdot \mathbf{v} dV + \frac{\rho}{I} \iint_{S_s^+} [(\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{J}_F^e] \cdot d\mathbf{S} + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\beta_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \chi_s^d : \mathfrak{J}_s^H \cdot \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_F^e) dV \quad (5-149)$$

Dans le cadre de cette thèse, où on travaille sur des ondes guidées par des plaques ferromagnétiques, où l'épaisseur de peau (de quelques dizaines de micromètres) est faible devant l'épaisseur de la plaque, on peut supposer que la variation de la vitesse particulière dans l'épaisseur de la région de sensibilité est

faible, et on peut approcher sa valeur par celle à sa surface. Ainsi, la tension  $U_c$  (le premier terme de la tension  $U^{in}$ ) devient :

$$U_c = -\frac{1}{I} \iint_{S_s} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{v}_{S_s^+} dS \quad (5-150)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \int_d \mathbf{J}_F^e \times \mathbf{B}_s dz \quad (5-151)$$

$\boldsymbol{\sigma}_L$  : densité surfacique de la force de Lorentz,

$S_s$  : surface de la région de sensibilité,

$\mathbf{v}_{S_s^+}$  : valeur de la vitesse de l'onde sur la surface supérieure de la région de sensibilité.

Le fait que  $\mathbf{J}_F^e$  soit négligeable sur la surface inférieure permet d'écrire :

$$U_c = -\frac{1}{I} \iint_{S_s^+} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{v} dS \quad (5-152)$$

L'expression de la tension  $U_c$  est similaire à celle trouvée dans la thèse de Boulay [174], pour la modélisation de la réception des capteurs PZT (l'auteur applique la réciprocité de Primakoff [148] au cas des matériaux piézoélectriques). La différence vient du fait que dans notre cas, la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_L$  provient de la force de Lorentz alors que dans la Réf. [174], elle provient de la densité surfacique de force appliquée par le capteur PZT en émission.

La forme finale de la tension induite en réception est donc donnée par :

$$U^{in} = \frac{1}{I} \iint_{S_s^+} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{v} dS + \frac{\rho}{I} \iint_{S_s^+} [(\boldsymbol{\beta}_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{J}_F^e] \cdot dS + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\boldsymbol{\beta}_s^d : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H \cdot \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_F^e) dV \quad (5-153)$$

Cette formule contient une intégrale sur la surface de la plaque et une intégrale dans le volume. Pour trouver la valeur de la tension, on a besoin :

1.  $I$  et  $\mathbf{J}_F^e$  : ce sont des grandeurs calculées en émission (Pb EM).
2.  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  : les différentes quantités élastodynamiques associées à l'onde sont les entrées du modèle de réception, et sont calculées par un modèle de propagation (*e.g.* Barras *et al* [35]).
3.  $\boldsymbol{\beta}_s^d, \boldsymbol{\chi}_s^d$  et  $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H$  : ces grandeurs sont des grandeurs statiques ; les deux premières dépendent de l'état local de contrainte. Si cet état est identique sous l'émetteur et sous le récepteur (*e.g.* état non contraint en-dessous des capteurs), ces grandeurs sont identiques à celles calculées en émission (Pb EM + EM-M), pour trouver les forces magnétiques et magnétostrictives. Si les états de contrainte diffèrent, ces grandeurs doivent être calculées en utilisant l'état local sous le récepteur.
4.  $\boldsymbol{\sigma}_L$  : cette quantité dépend de  $\mathbf{J}_F^e$  (calculée en émission) et  $\mathbf{B}_s$ . Cette dernière dépend de l'état local de contrainte ; si cet état est différent sous l'émetteur et le récepteur, elle est calculée en utilisant l'état sous le récepteur.

## Discussion 2 : quelques cas particuliers

Nous discutons de la formule pour trois cas particuliers. Écrivons tout d'abord la tension totale induite dans la bobine sous la forme suivante :

$$U = U_v + U_u + U_\sigma \quad (5-154)$$

avec

$$U_v = -\frac{1}{I} \iint_{S_s^+} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{v} dS \quad (5-155)$$



$$U_u = \frac{\rho}{I} \iint_{S_s^+} [(\chi_d^s \cdot \mathfrak{J}_H^s \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{J}_F^e] \cdot d\mathbf{S} + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\chi_d^s \cdot \mathfrak{J}_H^s \cdot \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_F^e) dV \quad (5-156)$$

et

$$U_u = \frac{\rho}{I} \iint_{S_s^+} [(\beta_d^s : \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{J}_F^e] \cdot d\mathbf{S} + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\beta_d^s : \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_F^e) dV \quad (5-157)$$

**1. Cas 1 : Aimantation à saturation :** ce cas est particulièrement intéressant puisqu'on a envie d'augmenter la rémanence de l'aimant pour rendre l'EMAT plus « performant ». Dans le cas d'un matériau magnétique conducteur aimanté à saturation, la susceptibilité magnétique différentielle  $\chi_s^d$  et le tenseur de déformation piézomagnétique différentiel  $\beta_s^d$  sont nuls, ce qui fait que les densités de courant magnétiques sont nulles et  $U_u = U_\sigma = 0$ . La seule tension induite dans la bobine est donc  $U_v = U_c$ .

**2. Cas 2 : excitation magnétique uniforme :** Dans ce cas, la matrice  $\mathfrak{J}_H^s$  est nulle. La tension  $U_u$  est nulle et seules les deux tensions  $U_v$  et  $U_\sigma$  sont induites dans la bobine.

**3. Cas 3 : matériau magnétique non conducteur, et aimanté à saturation :** Dans ce cas, la tension  $U_v = U_c$  est nulle puisque le matériau est non conducteur. Les tensions  $U_u$  et  $U_\sigma$  sont également nulles puisque le matériau est aimanté à saturation (voir cas 1). La tension totale est donc nulle. Cependant, ce cas est similaire au cas d'un aimant qui se déforme / déplace dans le repère lié à une bobine (tout en gardant son aimantation constante). La tension induite dans la bobine n'est pas nulle (en réalité) et est égale à la tension motrice  $U^m$ . Cette tension est caractéristique des matériaux magnétiques, et sa formule a été donnée dans la section précédente – dans le domaine temporel –, qu'on reporte ici :

$$U^m = \int_{-}^{+} \left[ \iiint_{V_s(t)} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t))}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|^3} \right] dV + \iint_{S_s(t)} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \frac{v^n(t)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}(t)|} \right] dS \right] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-158)$$

Sous l'hypothèse de petites perturbations, cette tension est nulle, puisqu'elle ne dépend que de la déformée de la région de sensibilité. Pour une fréquence donnée cette tension s'écrit :

$$U^m = \int_{-}^{+} \left[ \iiint_{r \in V_s(\omega)} \mathbf{J}_{M_s} \left[ \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}|^3} \right] dV + \iint_{r \in S_s(\omega)} \mathbf{J}_M \left[ \frac{v^n}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}|} \right] dS \right] \cdot d\mathbf{r}_b \quad (5-159)$$

$V_s(\omega)$  et  $S_s(\omega)$  : le volume et la surface de la région de sensibilité, pour la pulsation  $\omega$ .

Il est possible de remplacer l'intégrale sur toute la surface de la région de sensibilité par l'intégrale sur la surface de la plaque, en rappelant que  $\mathbf{J}_{M_s} = \nabla \times \mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{M}_s$  est négligeable là où l'excitation magnétique est négligeable, en particulier sur la surface inférieure de la région de sensibilité. Cependant, même avec cette simplification le calcul de la tension  $U^m$  souffre toujours de la présence de la double intégrale, et de la nécessité de connaître  $V_s(\omega)$  et  $S_s(\omega)$  pour chaque fréquence.

## VI. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de réception / détection par un EMAT d'une onde élastique se propageant dans une plaque ferromagnétique. Ce problème est défini (comme pour n'importe quel autre capteur) par le développement d'un modèle qui donne le signal électrique mesuré par le capteur (la tension électrique pour l'EMAT), en fonction du champ élastodynamique associé à l'onde.

Le fait que le passage de l'onde doit être détecté par une bobine nous a conduit à penser ce problème de réception en termes d'induction électromagnétique. C'est pourquoi nous avons débuté le chapitre par la résolution de deux problèmes classiques d'induction électromagnétique, comme rappels sur ce sujet.

Partant du fait qu'il y a très peu de travaux sur le sujet dans la littérature, nous avons essayé de le traiter avec le plus de détails possible. Ainsi, dans la section qui a suivi, nous avons adopté une démarche permettant de mieux comprendre les phénomènes physiques qui interviennent lors de la réception. Du fait de la dépendance du fonctionnement du capteur EMAT à la nature du matériau de la pièce dans laquelle il génère / reçoit une onde élastique, nous avons traité le problème de réception d'abord pour une plaque magnétique non conductrice, puis pour une plaque ferromagnétique. Dans les deux cas, la démarche suivie a consisté à :

1. identifier et écrire d'une manière explicite les sources inductrices en fonction du champ élastodynamique de l'onde.

Cette étape se base sur l'hypothèse que l'onde est une petite perturbation de l'état initial et représente la transformation d'une grandeur élastodynamique (champ de l'onde) en une grandeur électro-magnéto-mécanique (sources inductrices). Pour un matériau magnétique, il existe deux sources inductrices, l'une associée à la variation de l'aimantation due au champ du déplacement de l'onde, l'autre à la variation de l'aimantation due au champ de contrainte de l'onde. Pour un matériau conducteur, il n'en existe qu'une seule, donnée par la densité de courant de Foucault induite par le champ de vitesse de l'onde.

Cette étape autorise à traiter le problème de réception comme un problème d'induction électromagnétique classique, traité à l'étape suivante.

2. Résoudre le problème d'induction électromagnétique, avec comme sources inductrices celles trouvées à l'étape précédente.

Trouver une solution simple à ce problème d'induction dans le domaine temporel, avec la description Lagrangienne et en appliquant directement la loi d'induction de Faraday, est possible dans le cas d'un matériau magnétique, mais pas dans le cas d'un matériau ferromagnétique (à cause du couplage des champs électrique et magnétique). Dans le premier cas on trouve deux tensions, dont l'une est commune entre les matériaux magnétiques et conducteurs et l'autre est spécifique aux matériaux magnétiques. La première décrit la tension induite dans la bobine due à la variation temporelle de l'intensité de la source inductrice. La seconde est due à la variation de la position de la source inductrice.

Dans la dernière section, du fait que la démarche suivie dans la section précédente donne une expression pour la tension induite difficilement utilisable d'un point de vue numérique, et du fait d'autre part que le champ de déplacement de l'onde est très petit devant les dimensions du problème, nous avons travaillé sous l'hypothèse de petites perturbations, dans le domaine fréquentiel. Nous avons profité du fait que l'EMAT utilisé pour générer l'onde peut aussi être utilisé pour la détecter pour développer une méthode qui donne la tension induite sous la forme d'une expression plus simple et en fonction des grandeurs qui sont (pour la plupart) déjà calculées lorsque l'on considère la génération de l'onde.

Cette formule générale pour le cas très complexe de la réception par un EMAT des ondes élastiques se propageant dans un milieu ferromagnétique autorise une implémentation numérique plus efficace par les concepts de réciprocité qui la sous-tendent.



## 6. Faisabilité de la méthode d'imagerie

### Résumé :

Ce chapitre est une vue d'ensemble de la méthode d'imagerie discutée dans l'introduction du manuscrit. Ses objectifs sont :

- montrer où se situent les travaux de la thèse par rapport au développement de la méthode d'imagerie.
- rappeler l'ensemble de modèles et méthodes nécessaires pour ce développement, et l'état actuel de développement de ces modèles et méthodes.
- attirer l'attention sur les effets de la présence d'une contrainte locale (*i.e.* où opèrent les traducteurs) et de la nécessité du développement d'une méthode de caractérisation de cette contrainte, et la proposition d'une telle méthode.

Ce chapitre contient quatre sections :

La Sec.I [p. 228] illustre la configuration de caractérisation d'un état de contrainte par la méthode d'imagerie. On divise la contrainte en deux parties, une suffisamment loin des capteurs, dite contrainte globale, l'autre proche des capteurs, dite contrainte locale. La Sec.II [p. 229] étudie la faisabilité de la méthode d'imagerie en absence de la contrainte locale. Sec.II-A [p. 229] est une discussion sur la faisabilité de la méthode d'imagerie par une démarche numérique. Celle-ci nécessite six modèles (MMM, ME, MAE, MP, MR, MAE-An)<sup>1</sup> et une méthode d'inversion (MT)<sup>2</sup>. La sec. II-B [p. 236] est une discussion sur la faisabilité par une démarche expérimentale. On montre que celle-ci nécessite quatre modèles (MMM, ME, MR, MAE) dont un (MAE) est optionnel et une méthode d'inversion (MT). La Sec.III [p. 239] étudie la faisabilité de la méthode d'imagerie en présence de la contrainte locale. Dans la Sec III-A [p. 239] on montre que la présence d'une contrainte locale *inconnue* peut rendre difficile voire impossible la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie par une démarche expérimentale, et que la démonstration par une démarche numérique (III-B [p. 245]) est également compromise. Cependant, il est possible de réduire les effets de la contrainte locale en travaillant à aimantation à saturation. La sec. IV [p. 247] propose une méthode de caractérisation de la contrainte locale. Cette méthode se base sur le fait que l'EMAT est non-seulement un traducteur ultrasonore, mais également une sonde courants de Foucault. La méthode donne dans un premier temps la susceptibilité magnétique à l'état contraint en fonction de celle à l'état non-contraint ainsi que la tension induite dans la bobine de l'EMAT par la présence de la contrainte. Dans un deuxième temps la méthode utilise une version analytique de modèle multi-échelle (MME-An<sup>3</sup>) pour passer de la susceptibilité à la contrainte. La sec.IV-A [p. 254] propose une nouvelle démarche expérimentale à suivre pour démontrer la faisabilité de la méthode en prenant en compte la méthode de caractérisation locale (MCL<sup>4</sup>). La sec.IV-B [p. 255] décrit son pendant numérique qui repose cette fois sur sept modèles (MMM, MME-An, ME, MAE, MP, MR, MAE-An) et deux méthodes d'inversion (MT + MCL).

<sup>1</sup> **MMM** (modèle magnéto-mécanique) : le modèle qui donne en sortie l'aimantation et la déformation de magnétostriction.

**ME** (modèle d'émission) : le modèle qui donne en sortie la densité de force source de l'onde élastique.

**MAE** (modèle acoustoélastique) : le modèle qui donne en sortie le tenseur de rigidité, les vitesses des ondes guidées, et les déplacements modaux en fonction de la contrainte.

**MP** (modèle de propagation) : un modèle de propagation qui permet de donner le champ élastodynamique de l'onde quand elle se propage dans un milieu inhomogène.

**MR** (modèle de réception) : le modèle qui permet de détecter le passage de l'onde.

**MAE-An** (MAE analytique) : une version analytique (réduite) du MAE permettant de trouver la contrainte à partir des temps de vol.

<sup>2</sup> **MT** (méthode tomographique) : la méthode qui permet de remonter à une grandeur multi-variable et directionnelle (tenseur de contrainte) à partir des mesures de temps de vol.

<sup>3</sup> **MME-An** (Modèle multi-échelle analytique) : une version analytique du MME permettant de trouver la contrainte à partir de la susceptibilité magnétique.

<sup>4</sup> **MCL** (méthode de caractérisation de la contrainte locale) : cette méthode permet de remonter à la contrainte sous le capteur à partir de la tension induite dans la bobine de l'EMAT.

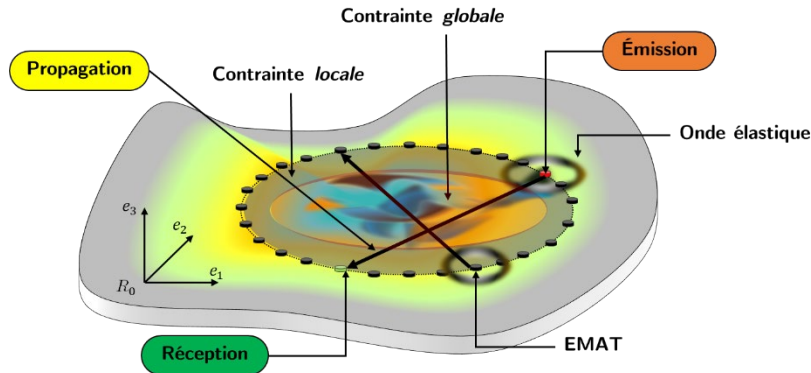


## I. Introduction

L'objectif final de la thèse est de développer une méthode d'imagerie d'un état de contrainte multiaxial inhomogène dans les plaques ferromagnétiques en utilisant les EMAT.

Dans ce chapitre on présente un récapitulatif des modèles et méthodes et de leur état actuel de développement, nécessaires pour cet objectif, afin d'évaluer le travail restant à effectuer pour l'atteindre. Il n'y aura pas d'essais expérimentaux dans ce chapitre. Mais seulement une discussion sur la faisabilité de la méthode d'imagerie suivant si c'est une démarche numérique ou expérimentale qui est choisie.

La figure suivante illustre la configuration d'imagerie.



**Fig. 6-1** : illustration de la configuration d'imagerie en présence d'une contrainte locale.

L'onde élastique émise par un EMAT (émission) se propage dans le milieu contraint (propagation), puis elle est détectée par un EMAT (réception). Ces trois étapes sont répétées pour tous les couples émetteur-récepteur, ce qui permet de collecter suffisamment de données (temps de vol) pour mettre en œuvre une méthode d'imagerie tomographique.

Pour une meilleure compréhension de ce chapitre on distingue les deux cas suivants :

1. Faisabilité de la méthode d'imagerie en absence de contrainte locale.
2. Faisabilité de la méthode d'imagerie en présence de contrainte locale.

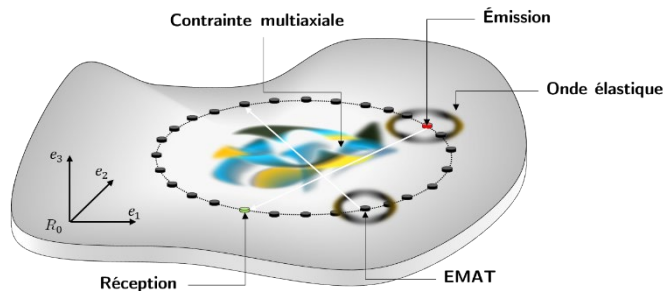
La contrainte locale désigne la contrainte au voisinage des capteurs. Ce voisinage est défini par une longueur dans laquelle l'onde qui s'est propagée de l'émetteur n'est pas plane. *A contrario*, la contrainte globale est définie par la contrainte suffisamment loin des capteurs pour que l'hypothèse d'onde plane soit valide.

**Remarque** : Il est à noter que la planitude de l'onde ne trouve son sens que par rapport à la taille de l'inhomogénéité dans le milieu. Par exemple dans le cas où la contrainte au voisinage du capteur est homogène sur une longueur estimée à plusieurs longueurs d'onde, la présence de la contrainte ne pose pas un problème vis-à-vis de la propagation dans un milieu inhomogène. Cependant cette contrainte pose d'autres problèmes, dont on va discuter dans ce chapitre.

**Remarque** : dans ce chapitre, on présente la méthode d'imagerie pour un matériau ferromagnétique, alors que les chapitres 2-4 n'ont traité que le cas d'un alliage d'aluminium (non ferromagnétique). La démarche développée et les résultats trouvés dans ces chapitres sont également valables pour un matériau ferromagnétique, car l'effet acoustoélastique dans ces matériaux est très proche de celui dans l'aluminium (voir Gandhi *et al* [68]).

## II. Faisabilité de la méthode d'imagerie en absence de contrainte locale

On s'intéresse ici à la faisabilité de la méthode d'imagerie dans le cas où la contrainte locale est absente. La configuration d'imagerie est la suivante :



**Fig. 6-2** : un état de contrainte multiaxial et inhomogène est présent dans une région « éloignée » des capteurs (EMAT).

On suppose qu'on a un état de contrainte multiaxial inhomogène dans le plan de la plaque et dans son épaisseur. La contrainte est supposée suffisamment éloignée des capteurs, pour que :

- l'hypothèse d'onde plane est valide à l'endroit où la contrainte est présente ;
- suffisamment de rayons ne passent pas à travers la contrainte, pour avoir une information relative à l'état non contraint (pour plus de détails voir la discussion dans le chapitre 4 VI [p. 173]).

On suppose que les propriétés élastiques, électriques et magnétiques ainsi que l'épaisseur de la plaque à l'état non-contraint et par conséquent à proximité des capteurs sont connues.

On distingue deux démarches pour démontrer la faisabilité de la méthode d'imagerie :

1. **Démarche numérique** : on se donne une distribution de contrainte mécanique connue et on utilise un ensemble de modèles et méthodes pour reconstruire numériquement cette contrainte, puis on compare ce résultat à la contrainte originale. Cette démarche contient quatre étapes :
  - a. **émission** : modélisation de la source de l'onde élastique,
  - b. **propagation** : modélisation de la propagation de l'onde en milieu contraint,
  - c. **réception** : modélisation de la détection de l'onde,
  - d. **inversion** : pour cartographier la contrainte à partir des résultats de temps de vol.
2. **Démarche expérimentale** : on procède comme dans un test réel de caractérisation de la contrainte, où les capteurs sont conçus en se basant sur des résultats fournis par les modèles, puis sont utilisés pour émettre / détecter des ondes élastiques dans une plaque réelle. La contrainte reconstruite par la méthode d'imagerie est comparée à celle reconstruite par une autre méthode (ex : par diffraction de neutrons). Cette démarche contient quatre étapes :
  - a. **identification des coefficients acoustoélastiques (CAE)** : les CAE sont identifiés à partir des données élastiques de l'état non-contraint. Ceci permet de choisir quels sont les modes à utiliser et dans quelle bande de fréquence ;
  - b. **conception** : connaissant les CAE, et les propriétés électriques + magnétiques, les capteurs sont conçus pour sélectivement générer / détecter les modes choisis ;
  - c. **acquisition des temps de vol** : cette étape se fait en utilisant les capteurs comme émetteurs et récepteurs sur une plaque réelle ;
  - d. **inversion** : pour cartographier la contrainte à partir des résultats de temps de vol.

### A. Démarche numérique

#### 1. Émission

La première étape de démonstration numérique de la faisabilité de la méthode d'imagerie nécessite de modéliser la source d'onde élastique (*i.e.* densité de force) en milieu ferromagnétique créée par EMAT. Cette étape est illustrée dans la figure suivante :

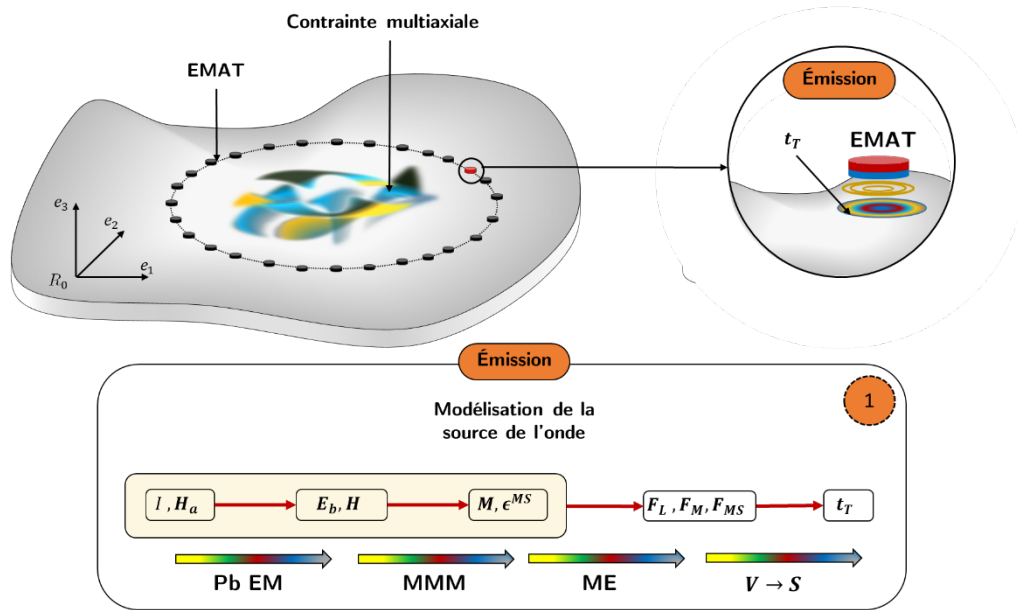


Fig. 6-3 : modélisation de la source de l'onde élastique (étape 1 : émission).

Les entrées sont l'intensité électrique dans la bobine (ou la tension) et le champ magnétique de l'aimant permanent. La sortie est une densité de force surfacique (source de l'onde élastique). Cette étape comporte deux problèmes et repose sur deux modèles qu'on présente ci-après brièvement.

**i. Le problème électromagnétique (Pb EM)**

Ce problème traite la question suivante :

connaissant les données de la bobine (intensité électrique, forme, position par rapport à la pièce, ...), de l'aimant (champ magnétique, forme, position par rapport à la pièce et la bobine, ...) et de la pièce (résistivité électrique, perméabilité magnétique, forme ...), comment peut-on trouver le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}_b, \mathbf{H}_b$ ) de la bobine et  $\mathbf{H}_a$  de l'aimant, dans la pièce.

Dans ce problème les équations de Maxwell sont résolues, par exemple avec un code par éléments finis (comme Comsol).

**ii. Modèle magnéto-mécanique (MMM)**

Contrairement aux matériaux para/diamagnétiques, les matériaux ferromagnétiques possèdent des comportements magnétiques complexes (hystérésis, non-linéarité, ...) devant être prédits.

Ce modèle traite la question suivante :

connaissant la contrainte locale  $\sigma_l$  le champ magnétique de l'aimant  $\mathbf{H}_a$  et celle de la bobine  $\mathbf{H}_b$  (sorties du Pb-EM), comment peut-on trouver l'aimantation  $\mathbf{M}$  induite dans la pièce et la déformation de magnétostriction  $\epsilon^{MS}$  ?

Pour y répondre, plusieurs modèles de la littérature peuvent être utilisés (ex : Preisach Réf. [39], Jiles-Atherton Réf. [40,41] et Daniel *et al* [29]) on fait cependant le choix de prendre le modèle multi-échelle développé par Daniel *et al* [113] comme MMM de la méthode d'imagerie.

**Remarque** : pour un matériau magnétique la résolution du problème électromagnétique (Pb-EM) ne pourra être faite que si un modèle de comportement magnétique est utilisé.



**État actuel du modèle** : le modèle permet de prédire (en configuration anhystrétique) l'aimantation  $\mathbf{M}$  et la déformation de magnétostriction  $\epsilon^{MS}$  d'un matériau ferromagnétique soumis à chargement du type  $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  et un champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

### iii. Modèle d'émission en milieu ferromagnétique (ME)

L'étape suivante dans l'émission de l'onde élastique est le développement d'un modèle qui permet de convertir les grandeurs ( $\mathbf{E}_b, \mathbf{M}$  et  $\epsilon^{MS}$ ) en des forces dynamiques permettant de générer une onde élastique. Ce modèle a été développé durant la thèse de Clause [37] et donne les densités de force volumique et surfacique suivante :

$$\mathbf{f}_{Mx}^{EM} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{M} + \nabla \mathcal{W}_{Gint}^m \quad (6-1)$$

$$\mathbf{t}_{Mx}^{EM} = \left( \mu_0 \frac{M_n^2}{2} - \mathcal{W}_{Gint}^m \right) \mathbf{n} \quad (6-2)$$

$$\mathbf{f}^{MS} = \nabla \cdot (\mathbf{C} : \epsilon^{MS}) \quad (6-3)$$

avec

$$\mathcal{W}_{Gint}^m = -\mu_0 \int_0^{|\mathbf{H}|} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} \quad (6-4)$$

$\mathbf{J}$  : la densité de courant de Foucault donnée par  $\frac{1}{\rho} \mathbf{E}_b$  ( $\rho$  : la résistivité électrique du milieu).

$\mathbf{C}$  : tenseur de rigidité du milieu,

$\mathbf{n}$  : normale à la surface,

$M_n$  : composante normale de l'aimantation.

Les densités de forces électromagnétiques volumique et surfacique ( $\mathbf{f}_{Mx}^{EM}, \mathbf{t}_{Mx}^{EM}$ ) sont retrouvées à partir du tenseur de contrainte de Maxwell ; la première est égale à sa divergence, la seconde à son saut à l'interface entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes.

On reconnaît dans la densité de force volumique  $\mathbf{f}_{Mx}^{EM}$  une partie de la densité de force de Lorentz ( $\mathbf{J} \times \mathbf{H}$ ), l'autre partie ( $\mathbf{J} \times \mathbf{M}$ ) est *cachée* dans le gradient de la co-énergie magnétique  $\mathcal{W}_{Gint}^m$ .

La densité de force magnétostrictive  $\mathbf{f}^{MS}$  résulte de la déformation de magnétostriction, convertie en une densité de force équivalente.

**Remarque** : les deux densités de forces ( $\mathbf{f}_{Mx}^{EM}, \mathbf{t}_{Mx}^{EM}$ ) contiennent  $\mathcal{W}_{Gint}^m$ . Formellement, son expression n'est définie que si l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  et l'aimantation  $\mathbf{M}$  sont colinéaires, où elle est donnée par (voir Henrotte *et al.* [175]) :

$$\mathcal{W}_{Gint}^m = -\mu_0 \int_0^{|\mathbf{H}|} M(\mathbf{h}) dh \quad (6-5)$$

Ce modèle prend donc comme entrée les sorties du modèle magnéto-mécanique et fournit en sortie les densités de forces dynamiques permettant de générer une onde élastique.

**État actuel du modèle** : actuellement ce modèle permet de donner les densités de force électro-magnéto-élastique, à condition que l'aimantation et l'excitation magnétique soient colinéaires.

#### iv. Transformation de densités de force volumique en une densité surfacique (V→S)

La sortie du modèle d'émission précédent est une densité de force volumique ( $f_{Mx}^{EM} + f^{MS}$ ) et une surfacique ( $t_{Mx}^{EM}$ ). En pratique, il est plus facile d'un point de vue numérique de résoudre un problème élastodynamique avec une densité de force – dynamique – surfacique que volumique. Pour cette raison, Clausse & Lhémy [37] ont développé une méthode qui permet de transformer une densité de force volumique en une surfacique, pour un matériau élastiquement isotrope et homogène. Une extension de cette méthode aux matériaux inhomogènes et anisotropes se trouve dans la thèse de Clausse [37] (dans l'annexe D de la thèse. La sortie du modèle d'émission de Clausse [37] est donc une densité surfacique équivalente, qui sera l'entrée de l'étape suivante (modélisation de la propagation de l'onde).

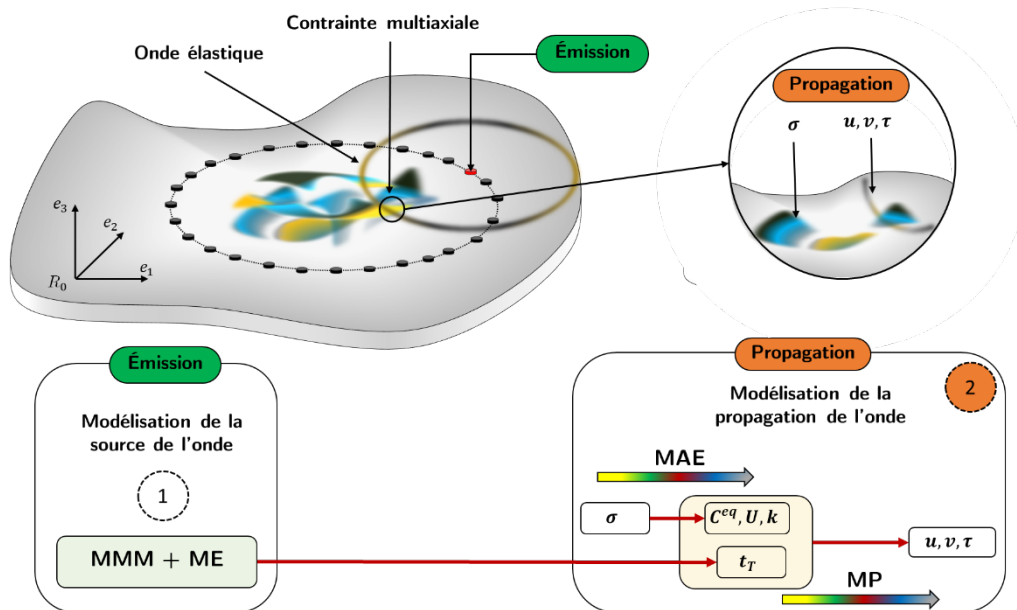
**État actuel de cette méthode :** actuellement la méthode qui transforme la densité de force dynamique induite par l'EMAT en une densité de force surfacique, peut traiter le cas où le milieu est élastiquement anisotrope et inhomogène (par ex : un milieu contraint).

#### v. Conclusion

Les deux modèles présentés permettent de traiter la génération par EMAT d'une onde élastique dans un matériau non-contraint. L'étape suivante s'intéresse à la propagation de l'onde rayonnée dans un milieu élastiquement inhomogène et anisotrope.

## 2. Propagation

La figure suivante illustre le problème posé :



**Fig. 6-4 :** présentation de la deuxième étape (propagation) dans le développement de la méthode d'imagerie.

Dans l'étape 1 (modélisation de la source de l'onde), un modèle de comportement magnétique (MMM) et le modèle d'émission (ME) sont utilisés pour obtenir une densité de force dynamique surfacique (source de l'onde). Pour résoudre le problème de propagation, nous aurons besoin aussi de la contrainte mécanique le long des trajets de propagation. Ces deux quantités représentent les entrées de l'étape 2 (propagation de l'onde). Sa sortie est le champ élastodynamique de l'onde dans la pièce. L'étape est résolue à l'aide de deux modèles :

1. le modèle acoustoélastique (MAE),
2. le modèle de propagation (MP).

On donne ci-après une brève présentation de ce que fait chaque modèle et leurs états actuels respectifs.

**i. Modèle acoustoélastique (MAE)**

Ce modèle traite la problématique suivante :

comment trouver le tenseur de rigidité du milieu  $C^{eq}$ , les vitesses (ou bien les nombres d'onde  $k$ ) des ondes de Lamb et SH, et leurs déplacements modaux  $U$  en fonction de la contrainte  $\sigma$  ?

Ce modèle a fait l'objet des deux premiers chapitres du présent manuscrit.

**État actuel du modèle :** le modèle permet de trouver  $(C^{eq}, U, k)$  pour des matériaux élastiquement isotropes (dans l'état de référence) soumis à des chargements généraux du type  $\sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Les composantes de la contrainte et la direction de celle-ci peuvent varier dans le plan et dans l'épaisseur de la plaque.

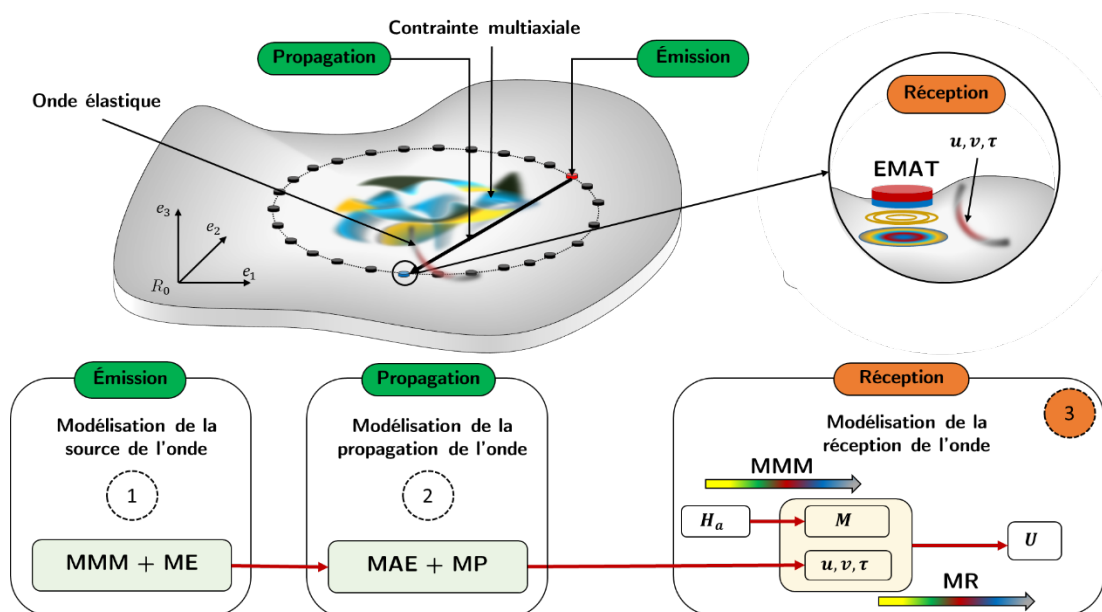
**ii. Le modèle de propagation**

Le problème de propagation des ondes élastiques en milieu anisotrope et inhomogène a été traité dans la littérature par plusieurs auteurs (Réf. [43-45]). Cependant on fait le choix de prendre le modèle de pinceaux développé par Barras [37] dans sa thèse comme modèle de propagation de la méthode d'imagerie. Ce modèle permet, connaissant la densité de source de l'onde ( $t_T$ ), les propriétés élastiques du milieu ( $C^{eq}$ ), les déplacements modaux ( $U$ ) et les nombres d'ondes des modes de Lamb et SH ( $k$ ), de trouver le champ élastodynamique de l'onde  $(u, v, \tau)$  partout dans la plaque (notamment sous les récepteurs).

**État actuel du modèle :** le modèle permet de trouver le champ élastodynamique de l'onde à condition que l'inhomogénéité soit suffisamment loin de la source pour que l'hypothèse d'une onde plane soit localement vérifiée.

**3. Réception**

La troisième étape est la détection / réception de l'onde, illustrée comme suit :



**Fig. 6-5 :** présentation de la troisième étape du développement de la méthode d'imagerie.

À l'aide des quatre modèles MMM, ME, MAE, et MP, on peut prédire le champ élastodynamique à la position du récepteur, associé à l'onde générée par un émetteur EMAT. En plus de cette première entrée du modèle de réception, la seconde est l'aimantation induite sous le récepteur.

Cette étape contient deux modèles :

1. Le modèle de comportement magnéto-mécanique (MMM) ;
2. Le modèle de réception (MR).

Le premier étant déjà présenté (limite d'applicabilité et état actuel), on s'intéresse ici au second.

### i. Modèle de réception EMAT en milieu ferromagnétique

Ce modèle a fait l'objet du chapitre 5 du présent manuscrit et traite la problématique suivante :

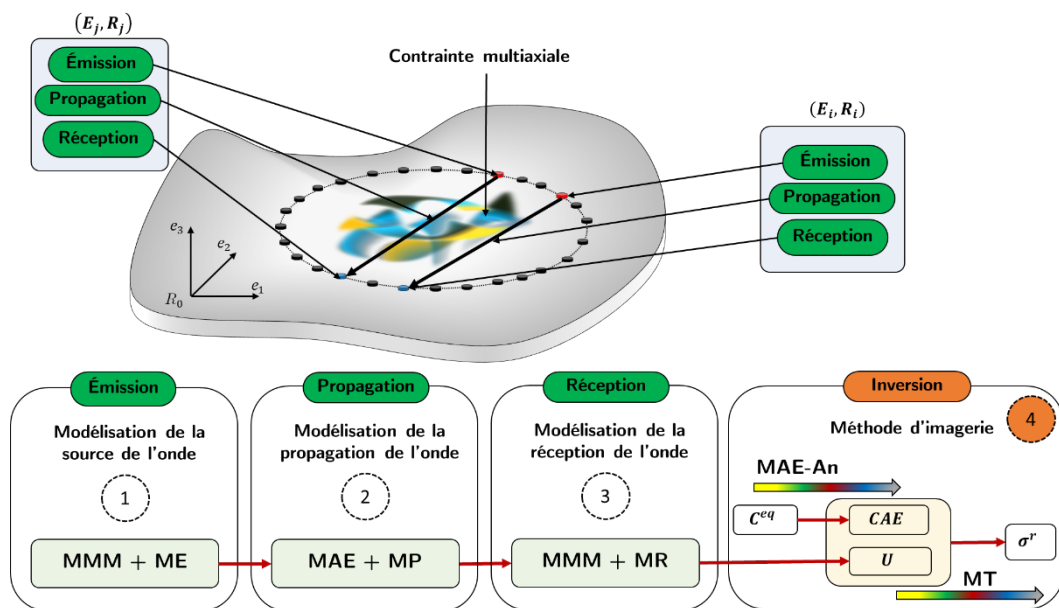
Prédire la tension induite dans la bobine de l'EMAT récepteur au passage de l'onde

**État actuel du modèle** : le modèle permet de trouver la tension induite par un champ élastodynamique quelconque, en présence d'une contrainte du type  $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

**Remarque** : le MMM permet de trouver l'aimantation  $M$  induite à la position du récepteur. En l'absence de contrainte, cette aimantation est identique à celle calculée en émission sous l'émetteur s'il est identique au récepteur et si le matériau est magnétiquement isotrope<sup>1</sup>.

## 4. Inversion

La quatrième et dernière étape est le développement d'une méthode tomographique pour l'inversion des grandeurs multi-variables et directionnelle. Cette étape est illustrée ci-dessous :



**Fig. 6-6** : présentation de la quatrième et dernière étape du développement de la méthode d'imagerie. Cette étape consiste à répéter les trois étapes précédentes entre chaque couple émetteur ( $E$ ) et récepteur ( $R$ ).

Les trois premières étapes se basent sur cinq modèles pour obtenir la tension induite dans le récepteur par le passage de l'onde qui s'est propagée depuis l'émetteur dans le milieu contraint. Cette tension représente l'une des entrées de l'étape d'inversion, l'autre étant les coefficients acoustoélastiques (CAE).

<sup>1</sup> Ce point a été discuté avec plus de détail dans le chapitre 5 ; dans le cas où le matériau est anisotrope, il faut s'assurer que les orientations de l'émetteur et du récepteur sont identiques vis-à-vis de l'anisotropie.

On a vu dans ce manuscrit (chapitre 3) que pour trouver la contrainte à partir des variations de vitesses / temps de vols (de la tension  $U$ ), il faut passer par une version réduite (analytique) du MAE. Cette étape contient donc un modèle et une méthode d'inversion.

**i. Le modèle acoustoélastique analytique (MAE-An)**

Ce modèle traite la problématique suivante :

comment peut-on trouver les trois composantes de la contrainte et sa direction en fonction des variations de vitesse des ondes de Lamb et SH ?

Ce modèle a fait l'objet du troisième chapitre du présent manuscrit.

**État actuel du modèle** : le modèle permet de traiter le cas d'une contrainte triaxiale homogène dans l'épaisseur.

**ii. La méthode tomographique (MT)**

Cette méthode traite la question suivante :

trouver une méthode tomographique pour imager un état de contrainte triaxial inhomogène dans le plan de la plaque et homogène dans l'épaisseur.

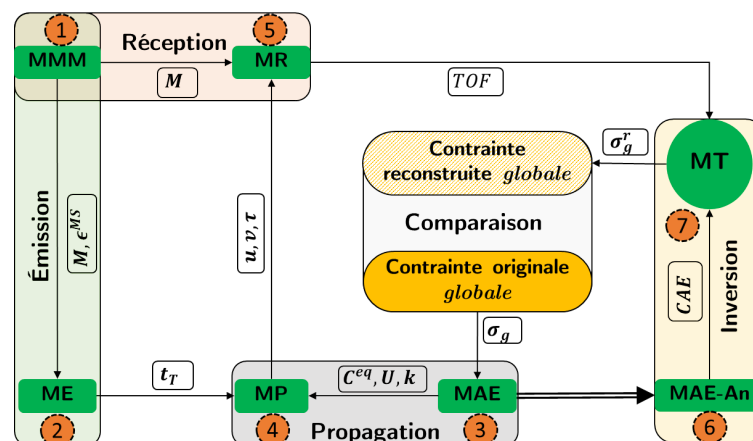
Cette méthode a fait l'objet du quatrième chapitre du présent manuscrit.

**État actuel de la méthode** : la méthode permet de traiter les trois cas : uniaxial hors plan, uniaxial dans le plan, biaxial dans et hors plan.

**5. Conclusion**

Dans cette sous-section nous avons présenté les quatre étapes de la démonstration par démarche numérique de la faisabilité de la méthode d'imagerie dans le cas d'absence de contrainte locale.

On donne ci-dessous une vue globale de ces étapes et les modèles et méthodes qu'elles contiennent :



**Fig. 6-7** : ensemble des modèles et méthodes pour démontrer numériquement la faisabilité de la méthode d'imagerie.

Les modèles sont ordonnés de la manière suivante :

1. Le modèle magnéto-mécanique (MMM) fournit l'aimantation  $M$  et la déformation de magnétostriction  $\epsilon^{MS}$  induites par l'EMAT au ME (modèle d'émission). [Émission]

2. Le modèle d'émission (ME) convertit les sorties du MMM ( $M, \epsilon^{MS}$ ) en une densité de force surfacique dynamique  $t_T$ , (la source d'onde élastique). **[Émission]**
3. Le modèle acoustoélastique (MAE) prend en entrée la contrainte originale (qu'on veut imager) et calcule le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$ , les déplacements modaux  $U$  et les nombres d'onde des modes de Lamb et SH  $k$ . **[Propagation]**
4. Le modèle de propagation (MP), prend comme première entrée la densité de force surfacique calculée dans l'étape d'émission  $t_T$  et comme deuxième entrée les sorties du modèle acoustoélastique ( $C^{eq}, U, k$ ). Ce modèle donne en sortie les champs élastodynamiques de l'onde ( $u, v, \tau$ ). **[Propagation]**
5. Le modèle de réception (MR) prend comme première entrée l'aimantation  $M$  calculée par le Modèle magnéto-mécanique (MMM), et comme deuxième entrée les sorties du modèle de propagation (MP). Ce modèle donne en sortie la tension induite dans l'EMAT, dont on peut extraire le temps de vol (TOF) de l'onde. **[Réception]**
6. Le modèle acoustoélastique analytique est développé à partir du MAE complet. Ce modèle fournit comme sorties les coefficients acoustoélastiques (CAE), du matériau. **[Inversion]**
7. La méthode tomographique (MT) prend comme premières entrées les CAE du MAE-An et les temps de vols (TOF) du modèle de réception (MR). Elle donne en sortie la contrainte reconstruite  $\sigma_g^r$ . **[Inversion]**
8. La dernière étape est la comparaison de la contrainte originale  $\sigma_g$  à la contrainte reconstruite  $\sigma_g^r$ .

---

**Remarque 1 :** pour un matériau non magnétique (ex : l'aluminium) la démonstration de la méthode d'imagerie ne nécessite pas le modèle magnéto-mécanique (MMM). Les modèles d'émission et de réception fonctionnent dans la plateforme CIVA (champs magnétique de l'aimant et électromagnétique de la bobine).

---

**Remarque 2 :** pour un matériau ferromagnétique la démonstration de la faisabilité nécessite la présence du modèle magnétique<sup>1</sup>. Les deux modèles d'émission et de réception peuvent fonctionner en utilisant un logiciel de simulation numérique comme le code par éléments finis multi-physique Comsol.

---

**Remarque 3 :** dans cette section la contrainte est absente à proximité des capteurs et on suppose que les propriétés élastique, électrique et magnétique y sont uniformes. Il est donc possible de faire l'étape d'émission une seule fois. La densité de force (source de l'onde) calculée dans cette étape est identique pour tous les émetteurs. Supposons qu'on a besoin de  $n$  mesures (nombre de temps de vol), pour imager une certaine distribution de contrainte, alors le nombre d'exécutions de chaque modèle est :

MMM, ME, MAE-An, MT : une fois – MAE, MP, MR :  $n$  fois

---

## B. Démarche expérimentale

Dans cette sous-section, on s'intéresse à la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie suivant une démarche expérimentale. On suppose une plaque ferromagnétique dont on connaît les propriétés élastiques, électrique, et magnétique à l'état non-contraint. On suppose connue l'épaisseur de la plaque là où les traducteurs sont positionnés. On suppose enfin qu'on peut placer les traducteurs (EMAT) suffisamment loin de la région de la plaque où la contrainte est présente. L'objectif de l'expérience est d'utiliser les EMAT pour imager cet état de contrainte. Ceci est fait en quatre étapes :

### 1. Identification des CAE

Il est d'abord nécessaire de trouver les courbes de dispersion des coefficients acoustoélastiques (CAE) du matériau. Ce peut être fait par simulation en utilisant le modèle acoustoélastique (MAE), ou par expérience (voir la discussion dans la sous-section II-B du chapitre 3). Cependant, le MAE permet de

---

<sup>1</sup> Puisque dans cette section la contrainte locale est nulle, le MMM se ramène à un modèle magnétique (MM).

voir combien de CAE sont nécessaires pour bien décrire l'effet acoustoélastique. Les CAE obtenus, les modes et les plages de fréquence conduisant à la meilleure inversion de la contrainte sont identifiés, suivant plusieurs critères :

- les CAE sont assez grands pour induire une variation de temps de vol mesurable ;
- les CAE ne sont pas trop grands pour que la tomographie par rayons droits soit valide ;
- il est préférable de choisir des plages de fréquence où les modes et leurs CAE sont faiblement dispersifs.

## 2. Conception des EMAT

Les transducteurs pour émettre/détecter ces modes à ces fréquences doivent être conçus. Cette étape est essentielle pour les transducteurs dont les mécanismes de transduction sont gouvernés par les lois de comportement du matériau. C'est le cas des EMAT : un EMAT conçu pour émettre / détecter une certaine onde dans l'aluminium diffère de celui conçu pour la même onde dans un matériau ferromagnétique<sup>1</sup>. Pour une conception optimale, la simulation est nécessaire et fait appel aux modèles MMM + ME + MR.

## 3. Acquisition des TOF

Les capteurs conçus sont ensuite utilisés pour effectuer des mesures de temps de vol, à condition :

- qu'ils soient placés là où les propriétés de la plaque sont celles utilisées lors de leur conception,
- et suffisamment loin de la contrainte pour que l'hypothèse d'onde plane soit valide.

## 4. Inversion

Pour trouver la distribution de contrainte dans la plaque, la configuration de mesure est refaite par simulation. Les temps de vol –mesurés– et les CAE sont utilisés par la méthode tomographique (MT) pour reconstruire la cartographie de contrainte, comme illustré par la figure suivante :

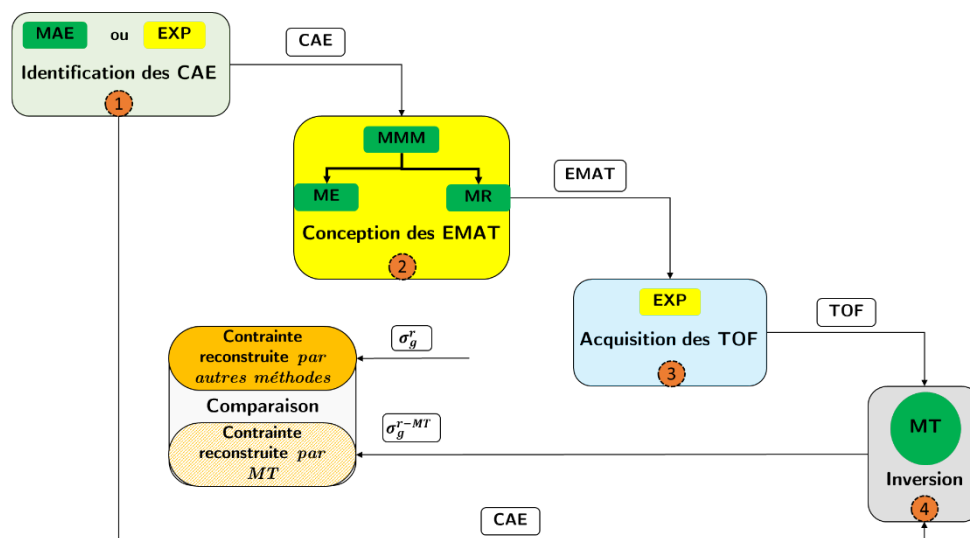


Fig. 6-8 : Étapes nécessaires pour imager un état de contrainte dans une plaque ferromagnétique par EMAT.

Pour démontrer la validité de la méthode d'imagerie, on peut comparer la cartographie de contrainte, reconstruite par cette méthode ( $\sigma_g^{r-MT}$ ), avec la cartographie reconstruite par une autre méthode<sup>2</sup> ( $\sigma^r$ ).

<sup>1</sup> Les mécanismes de transduction d'un EMAT dans l'aluminium sont régis par la force de Lorentz (émission) et les courants de Foucault (réception) qui n'existent que si le matériau est conducteur ; ceci n'est pas le cas en général pour un matériau ferromagnétique (Spaldin [176]) où aimantation et magnétostriction seules les régissent.

<sup>2</sup> Diffraction de neutrons, méthode du contour, ...

On peut voir que dans la démarche expérimentale on fait usage de quatre modèles (MAE, MMM, ME, MR), dont un est optionnel (MAE, si on peut obtenir les coefficients acoustoélastiques par moyen expérimental) et la méthode d'inversion tomographique (MT). On verra dans la section suivante en quoi la présence de la contrainte à proximité (et sous) des traducteurs peut affecter la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie.



### III. Faisabilité de la méthode d'imagerie en présence de contrainte locale

Contrairement au cas de l'imagerie par rayons X ou par IRM (par résonance magnétique), où on a la possibilité de mettre les capteurs loin de l'objet à imager, dans le cas de l'imagerie d'une contrainte mécanique par EMAT, il n'est pas toujours garanti que cela soit possible, du fait que la contrainte peut exister partout dans la pièce. Et même si ce n'est pas le cas, il faut une mesure préalable pour identifier si les régions où opèrent les traducteurs sont contraintes ou pas. La présence de la contrainte à proximité des traducteurs pose quelques problèmes dont certains sont liés à la variation des lois de comportement du matériau. C'est le cas des EMAT dont les mécanismes de transduction dépendent fortement de ces lois.

On explique dans la sous-section suivante en quoi la présence de contrainte là où opèrent les traducteurs (dite contrainte locale) affecte la démarche expérimentale de démonstration de la méthode d'imagerie.

#### A. Conséquences sur la démarche expérimentale

Les quatre étapes à suivre dans la démarche expérimentale décrite en absence de contrainte locale peuvent être affectées par la présence de la contrainte.

##### 1. Acquisition des temps de vol

Cette étape n'est pas affectée par la présence de la contrainte locale.

##### 2. Identification des coefficients acoustoélastiques

Cette étape ne dépend pas de la contrainte ; seules les propriétés élastiques linéaires et non-linéaires à l'état non contraint sont nécessaires. On note cependant qu'elle n'est possible que sous l'hypothèse d'onde plane.

##### 3. Inversion tomographique

L'application de la méthode tomographique pour la reconstruction de la contrainte à partir des temps de vol mesurés est affectée par la présence de la contrainte locale à travers deux effets :

- les coefficients acoustoélastiques (CAE) utilisés dans la méthode tomographique reposent sur l'hypothèse d'onde plane, ce qui n'est plus le cas si la contrainte est inhomogène et présente à proximité des traducteurs ;
- si tous les rayons passent par une zone contrainte, ce qui est le cas si elle est présente localement, la valeur de la contrainte par rapport à l'état non contraint (référence) est perdue (une discussion plus détaillée est donnée dans le chapitre 4 VI [p. 173]).

##### 4. Conception des EMAT.

L'EMAT est conçu pour émettre / détecter sélectivement certains modes dans certaines plages de fréquence. Il faut être capable de modéliser les mécanismes de transduction, ce qui nécessite de connaître les propriétés élastique, électrique, et magnétique des zones où ils opèrent. Ces propriétés dépendent de la contrainte ; si elle est inconnue alors ces propriétés le sont aussi.

###### i. Les propriétés matériaux en fonction de la contrainte :

On donne dans ce paragraphe des expressions qui permettent de calculer les variations des propriétés matériau (impliquées dans la modélisation des EMAT) induites par la contrainte.

- Effet de la contrainte sur les propriétés élastiques : on a vu au premier chapitre que les propriétés élastiques ( $C_{ijkl}$ ) dépendent de l'état de contrainte, et écrit le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$  en fonction de celui-ci. On reporte la formule ici :

$$C_{ijkl}^{eq} = C_{ijkl} + [C_{ijkl}(E_i + E_j + E_k + E_l) + \delta_{ik}C_{jlqq}E_q + C_{ijklmm}E_m] \quad (6-6)$$

$E_i$  : déformations principales, fonctions de la contrainte, données par : (1-69) [p. 43].

- Effet de la contrainte sur les propriétés électriques : la dépendance de la résistivité électrique à l'état de contrainte est appelée effet piézorésistif. Bridgman (voir ch2 de la Pallàs [16]) donne la formule suivante (pour les métaux) :

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \frac{dV}{V} \quad (6-7)$$

où  $\rho$  est la résistivité électrique,  $V$  le volume, et  $C$  : la constante de Bridgman.

Le ratio  $dV/V$  n'est rien d'autre que le déterminant  $J$  du tenseur du gradient de transformation. Ce déterminant est donné pour un matériau élastiquement isotrope soumis à une déformation homogène par (voir ch1, Éq.(1-60) [p.42]) :

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (E_1 + 1)(E_2 + 1)(E_3 + 1) \quad (6-8)$$

ce qui permet d'écrire la variation de résistivité électrique en fonction de la contrainte

$$\frac{d\rho}{\rho} = C[E_1 + E_2 + E_3 + E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3 + E_1 E_2 E_3] \quad (6-9)$$

Les expressions de  $E_i$  en fonction de la contrainte sont données par : (1-69) [p. 43].

- Effet de la contrainte sur les propriétés magnétiques : il est connu (Réf [15,177]) que la perméabilité magnétique / aimantation ou la déformation de magnétostriction sont très sensibles à la contrainte. Daniel [42, 150] en donne par exemple les expressions simplifiées suivantes pour les matériaux isotropes :

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{A_x \sinh(\kappa H)}{A_x \cosh(\kappa H) + A_y + A_z} M^{sat} \mathbf{e}_x \quad (6-10)$$

$$A_i = e^{\alpha \sigma_{ii}}, \quad i = \{x, y, z\}$$

$$\kappa = \mu_0 A_s M^{sat}$$

$$\alpha = \frac{3}{2} A_s \lambda^{sat}$$

$$A_s = \frac{3\chi^0}{\mu_0 (M^{sat})^2}$$

$$\epsilon^\mu(\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}) = \lambda \text{diag} \left( 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (6-11)$$

avec

$$\lambda(\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}) = \lambda^{sat} \left( 1 - \frac{3(A_y + A_z)}{2(A_x \cosh(\kappa H) + A_y + A_z)} \right) \quad (6-12)$$

Le champ  $\mathbf{H}$  est dans la direction  $\mathbf{e}_x$ .

$M^{sat}$ , aimantation à saturation du matériau ;  $\lambda^{sat}$  déformation de magnétostriction à saturation du matériau,  $\chi^0$ , susceptibilité magnétique anhystérétique initiale (voir Daniel. [29]).

## ii. Effet de la contrainte sur les modèles d'émission et de réception

La conception des capteurs est essentiellement régie par les modèles d'émission et de réception. On reporte ici les densités de force données par le ME et la tension induite donnée par le MR :

- **ME** (voir Clause [37]):

$$\mathbf{f}_{Mx}^{EM} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{M} + \nabla \mathcal{W}_{Gint}^m \quad (6-13)$$

$$\mathbf{t}_{Mx}^{EM} = \left( \mu_0 \frac{M_n^2}{2} - \mathcal{W}_{Gint}^m \right) \mathbf{n} \quad (6-14)$$

$$\mathbf{f}^{MS} = \nabla \cdot (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{MS}) \quad (6-15)$$

avec

$$\mathcal{W}_{Gint}^m = -\mu_0 \int_0^{|\mathbf{H}|} \mathbf{M}(\mathbf{h}) \cdot d\mathbf{h} \quad (6-16)$$

$\mathbf{J}$  : densité de courant de Foucault donnée par  $\boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{E}_b$  ( $\rho$ , résistivité électrique du milieu, un tenseur dans le cas général),

$\mathbf{C}$  : tenseur de rigidité du milieu,

$\mathbf{n}$  : normale à la surface,

$M_n$  : composante normale de l'aimantation.

En présence de contrainte sous l'émetteur, les quantités suivantes sont affectées :

- la densité de courant de Foucault  $\mathbf{J}$  (via la résistivité électrique) ;
- l'aimantation du milieu  $\mathbf{M}$  ;
- la déformation de magnétostriction  $\boldsymbol{\epsilon}^{MS}$  ;
- le tenseur de rigidité  $\mathbf{C}$ .

Le modèle d'émission de Clause [37] transforme les densités de force volumique en une densité de force surfacique. Cette transformation dépend de la nature élastique du milieu (voir annexe D de la référence), elle est donc affectée par la présence de la contrainte.

Ainsi, en présence d'une contrainte inconnue, il sera difficile d'ajuster (lors de l'étape de conception) les paramètres de l'émetteur (intensité de l'aimant, du courant dans la bobine, leurs formes, ...), pour que la densité de force puisse sélectionner un mode de façon optimale.

- **MR** (chapitre 5)

On donne ici la formule de la tension dans le cas où la résistivité électrique est scalaire homogène (voir le chapitre 5 Éq.(5-137) [p. 220])

$$U^{in} = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\mathbf{J}_F^v + \mathbf{J}_M^T + \mathbf{J}_M^u) \cdot \mathbf{J}_F^e dV' \quad (6-17)$$

$\rho$  : résistivité électrique.

Rappelons les formules des densités de courants en réception en fonction du champ élastodynamique :

$$\mathbf{J}_F = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{J}_M^T = \nabla \times (\boldsymbol{\beta}_s^d : \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{J}_M^u = \nabla \times (\boldsymbol{\chi}_s^d \cdot \boldsymbol{\mathfrak{J}}_s^H \cdot \mathbf{u}) \quad (6-18)$$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$  : le champ élastodynamique de l'onde.

En présence de contrainte locale, les quantités suivantes sont affectées :

- la densité de courant de Foucault  $\mathbf{J}_F$  (via la résistivité électrique) ;
- l'induction magnétique  $\mathbf{B}_s$  ;
- le tenseur de déformation piézomagnétique  $\boldsymbol{\beta}_s^d$  ;
- la susceptibilité différentielle magnétique  $\boldsymbol{\chi}_s^d$ .

Le choix des paramètres optimaux du récepteur pour détecter sélectivement un mode est compromis par la présence d'une contrainte inconnue.

**iii. Une solution possible pour s'échapper aux effets de la contrainte locale**

Pour que l'étape de conception des traducteurs soit possible en présence d'une contrainte locale inconnue, on peut faire les hypothèses suivantes :

- Sous les traducteurs, on prend  $C^{eq} \approx C$

Pour avoir une estimation grossière de l'erreur commise par cette approximation, on rappelle que la formule (6-6) (donnant le tenseur de rigidité en fonction de la contrainte) est valide dans le régime élastique, et que pour les matériaux métalliques, les déformations principales ( $E_i$ ) dans ce régime sont autour de 0.002. par ailleurs les constantes d'élasticité non-linéaires ( $C_{ijklmn}$ /constante de Murnaghan pour les matériaux isotropes) de l'acier sont de l'ordre de 6-7 fois plus grandes que les constantes linéaires ( $C_{ijkl}$ /constante de Lamé pour les matériaux isotropes) voir Abbasi & Ozevin [178], ce qui permet de dire (après un simple calcul) que  $C^{eq}$  est égal à  $C$  plus/moins une petite perturbation de l'ordre de 2%

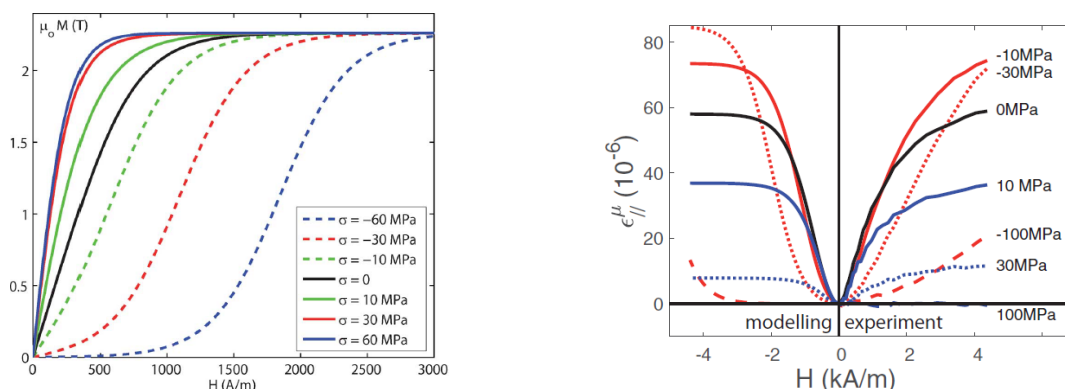
Lors de l'ajustement des paramètres de l'émetteur, l'amplitude du signal (donc l'amplitude de la source de l'onde) n'est pas importante, puisque la méthode d'imagerie développée utilise les temps de vol (équation eikonale, voir chapitre 4 III-A-2 [p. 149]) et pas l'amplitude de l'onde (équation de transport, chapitre 4 III-A-2 [p. 149]). Il est donc possible de supposer que sous l'émetteur les propriétés élastiques sont identiques à celles d'un milieu non-contraint.

- De même, sous les traducteurs, on prend  $\rho = \rho_0$  <sup>(1)</sup>

En notant que la constante de Bridgman (voir formule (6-7)) possède une valeur autour de 1 pour les métaux (voir ch24 de Bajpai [179]), on peut donner une estimation grossière de la variation de la résistivité électrique dans le régime d'élasticité (où les déformation principale pour l'acier sont autour de 0.002) de l'ordre de  $d\rho/\rho = 0.6\%$ :

Il est donc possible de négliger la variation de la résistivité électrique induite par le chargement.

Sous ces deux hypothèses, les modèles d'émission et réception ne sont affectés par la contrainte locale que via l'aimantation ou la déformation de magnétostriction. Contrairement aux propriétés élastique et électrique, pour lesquelles l'effet de la contrainte est relativement faible, les propriétés magnétiques sont très sensibles à la contrainte comme l'illustre la figure suivante qui est une application des formules (6-10) et (6-12) dans le cas d'un alliage de Fer-Cobalt :



**Fig. 6-9 :** Pour différentes valeur de la contraintes (uniaxiale dans la direction du champ), (à gauche) variation de l'aimantation en fonction du champ magnétique  $H$  (Réf [42]) (à droite). déformation de magnétostriction dans la direction du champ, pour un alliage de fer-cobalt.(Réf [150]).

<sup>1</sup>  $\rho_0$  la résistivité électrique à l'état non-contraint.

Pour de grandes valeurs du champ magnétique  $\mathbf{H}$  l'aimantation tend vers une valeur limite constante et indépendante de la contrainte (aimantation à saturation).

En ce qui concerne la déformation de magnétostriction cette valeur limite (visible dans les résultats donnés par le modèle) dépend de la contrainte. Cette dépendance vient de la référence prise pour définir la déformation nulle. Dans Fig. 6.9, la déformation de référence a été prise juste avant l'application du champ, mais après application de la contrainte. Si la référence était choisie avant application de la contrainte, la magnétostriction à saturation serait la même pour toutes les courbes (pour plus de détail voir Daniel & Hubert [180]). Par conséquent il existe toujours un champ magnétique auquel la magnétostriction est saturée.

### Solution possible : aimantation à saturation

Pour réduire les effets de la contrainte locale sur les modèles d'émission (ME) et réception (MR), on peut faire le choix d'utiliser un aimant suffisamment fort pour que l'aimantation (resp la déformation de magnétostriction) induite dans la pièce soit proche de  $M^{sat}$  (resp  $\lambda^{sat}$ ). Dans ce cas les densités de force données par le ME deviennent :

$$\mathbf{f}_{Mx}^{EM} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \mu_0 (\nabla \mathbf{H}) \cdot \mathbf{M}^{sat} + \nabla \mathcal{W}_{Gint}^m \quad (6-19)$$

$$\mathbf{t}_{Mx}^{EM} = -\mathcal{W}_{Gint}^m \mathbf{n} \quad (6-20)$$

$$\mathbf{f}^{MS} = \nabla \cdot (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{MS}) \quad (6-21)$$

avec

$$\mathcal{W}_{Gint}^m = -\mu_0 H M^{sat} \quad (6-22)$$

La densité de force volumique  $\mathbf{f}_{Mx}^{EM}$ ,  $\mathbf{f}^{MS}$  et surfacique  $\mathbf{t}_{Mx}^{EM}$  sont donc indépendantes de la contrainte ; (sous l'hypothèse que le tenseur de rigidité  $\mathbf{C}$  et la résistivité électrique sont égales à celles de l'état non-contraint).

On peut donc essayer d'ajuster les paramètres de l'émetteur pour que ces forces ( $\mathbf{f}_{Mx}^{EM}$ ,  $\mathbf{f}^{MS}$  et  $\mathbf{t}_{Mx}^{EM}$ ) puissent émettre sélectivement un mode donné.

En ce qui concerne la tension induite dans l'EMAT on reporte ici sa valeur sous l'hypothèse  $\rho = \rho_0$  et à aimantation à saturation (les détails sont donnés dans le chapitre 5 V-B) :

$$U_c = -\frac{1}{I} \iint_{S_s^+} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{v} dS \quad (6-23)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \int_d \mathbf{J}_F^e \times \mathbf{B}_s^{sat} dz \quad (6-24)$$

$\boldsymbol{\sigma}_L$  : densité surfacique de la force de Lorentz,

$S_s^+$  : surface supérieure de la région de sensibilité,

$d$  : profondeur de la région de sensibilité,

$\mathbf{B}_s^{sat}$  : induction magnétique à saturation.

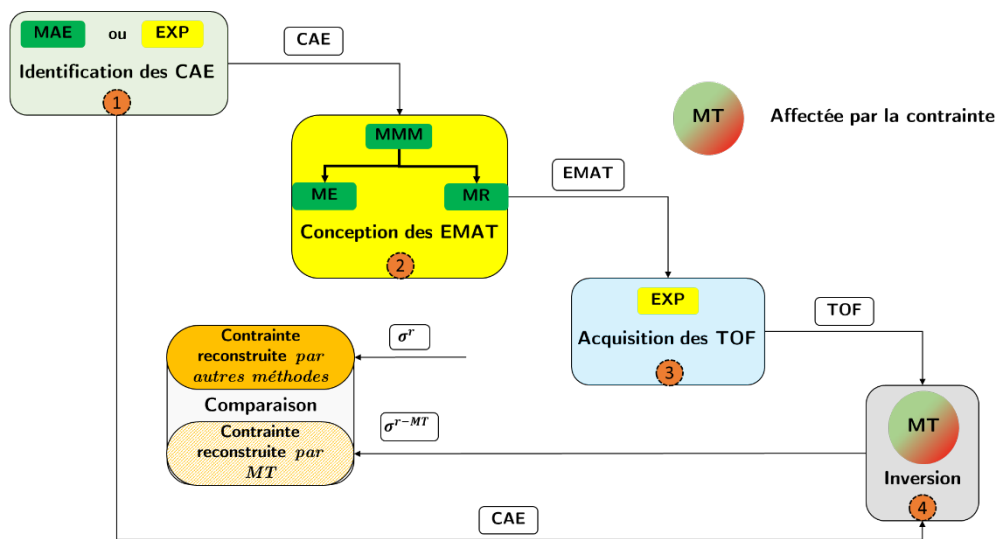
Cette tension est indépendante de la contrainte locale, et permet d'ajuster les paramètres du récepteur (forme de l'aimant et la bobine,...) pour mieux recevoir l'onde élastique.

**Conclusion :**

Dans cette sous-section, on a vu comment la présence de contrainte locale affecte la mise en œuvre expérimentale. La figure ci-après illustre cette démarche et pointe les étapes affectées,

- le modèle d'émission (ME) *via* le tenseur de rigidité, la résistivité électrique, l'aimantation et la déformation de magnétostriction,
- le modèle de réception *via* la résistivité électrique et l'aimantation,
- la méthode tomographique *via* les coefficients acoustoélastiques utilisés qui ne sont valables que pour une onde plane.

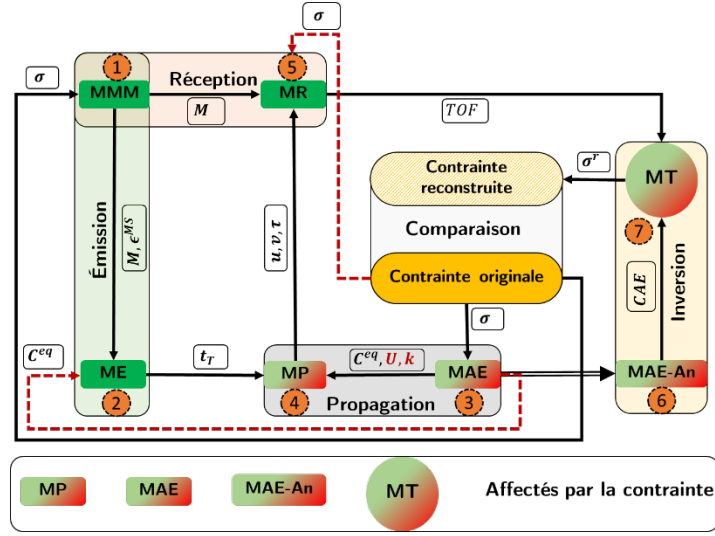
Cependant, sous les hypothèses  $C^{eq} \approx C$  (localement),  $\rho = \rho_0$  et si le champ magnétique de l'aimant permanent est suffisamment fort pour que l'aimantation (resp la déformation de magnétostriction) soit saturée, les effets de la contrainte sur les modèles ME et MR peuvent être négligeables.



**Fig. 6-10** : illustration de la démarche expérimentale en présence de contrainte et sous l'hypothèses :  $C^{eq} \approx C, \rho = \rho_0$   
 $M \approx M^{sat}$  et  $\lambda \approx \lambda^{sat}$  .

## B. Conséquences sur la démarche numérique

On donne dans la figure suivante l'architecture de la démarche numérique pour la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie, avec les parties affectées par la contrainte locale



**Fig. 6-11** : architecture de la démonstration par une démarche numérique de la faisabilité de la méthode d'imagerie, en cas de présence d'une contrainte locale.

La démonstration de la faisabilité de la méthode par une démarche numérique se fait de la manière suivante :

- Le modèle magnéto-mécanique (MMM) prend en entrée la contrainte originale  $\sigma$  puis calcule l'aimantation et la déformation de magnétostriction ( $M, \epsilon^{MS}$ ).
- Le modèle d'émission (ME) prend en entrée  $M, \epsilon^{MS}$  et le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$  calculé par le modèle acoustoélastique (MAE). Sous l'hypothèse  $C^{eq} \approx C$ , cette entrée n'est pas nécessaire pour le ME (trait interrompu rouge sur la figure). La sortie du ME est la densité de force surfacique  $t_T$ .
- Le modèle de propagation (MP) prend en entrée  $t_T$  et les quantités  $C^{eq}, U, k$  (tenseur de rigidité, les déplacements modaux et les nombres d'onde), ces deux derniers ( $U$  et  $k$ ) ne sont valides que si l'onde est plane ce qui n'est pas le cas près des traducteurs. Les sorties du MAE sont donc compromises par la présence de la contrainte locale (même si elle est connue), ce qui affecte le modèle de propagation (modèle de pinceaux).
- Le modèle de réception (MR) prend en entrée le champ élastodynamique de l'onde ( $u, v, \tau$ ), l'aimantation  $M$  et la contrainte  $\sigma$ . Sous l'hypothèse d'aimantation à saturation la contrainte n'est pas nécessaire pour le modèle de réception (trait interrompu rouge).
- La méthode tomographique (MT) prend en entrée les coefficients acoustoélastiques (CAE) et les temps de vols (TOF). Cette méthode est affectée par la contrainte locale (même si elle est connue) du fait que les CAE ne sont valides que pour les ondes planes.

*In fine* la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie par la démarche numérique est affectée par la contrainte locale du fait que l'onde n'étant pas plane près des capteurs, les hypothèses sur lesquelles se basent les modèles acoustoélastiques (MAE), le modèle de pinceaux (MP), et la méthode tomographique (MT) ne sont pas toutes vérifiées.

## C. Conclusion

La présence de la contrainte locale affecte les démarches expérimentale et numérique suivies pour la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie. Pour la première, la conception des capteurs et l'inversion sont affectées ; pour la seconde, ce sont la modélisation de la propagation et l'inversion qui le sont. Il est cependant possible de minimiser les effets de la contrainte locale :

- en supposant le tenseur de rigidité aux endroits des émetteurs égal à celui du matériau non-contraint,
- en supposant la résistivité électrique indépendante de la contrainte,
- en travaillant (pour les émetteurs et récepteurs) à saturation.

Le troisième point est contraignant puisqu'il suggère d'utiliser un aimant permanent fort, ce qui peut rendre le capteur encombrant et pose des problèmes du « collage » à la pièce (à cause de la force d'attraction de celui-ci). Dans la section suivante on propose donc une méthode de caractérisation de contrainte locale, qui ne nécessite pas de travailler à saturation ni de prendre le tenseur de rigidité équivalent (aux endroits des capteurs) égal à celui de l'état non-contraint.



## IV. Une méthode de caractérisation de contrainte locale

Dans cette section on donne le développement formel d'une méthode de caractérisation d'un état de contrainte locale en utilisant les EMAT, sous l'hypothèse que la résistivité électrique est scalaire homogène.

Pour mieux comprendre cette méthode, on rappelle ici le problème d'émission électromagnétique (qu'on a vu dans le chapitre 5 (V-B [p. 216])) et qui représente une partie du problème d'émission par un EMAT<sup>1</sup>.

### 1. Le problème d'émission électromagnétique

La première étape lors de l'émission avec un EMAT est la résolution du problème d'émission électromagnétique (Pb EM). Ce problème consiste à trouver la densité de courant de Foucault, et l'aimantation induites dans la pièce par l'EMAT.

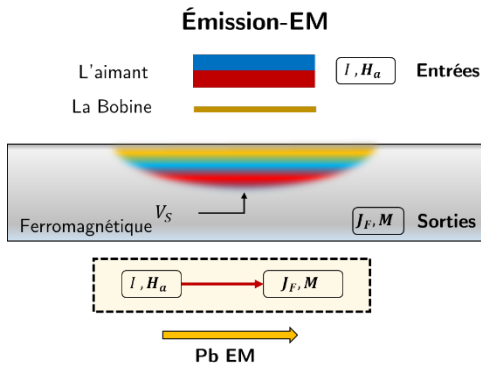


Fig. 6-12 : le problème d'émission électromagnétique.

Ce problème a été résolu dans le chapitre 5 (V-B [p. 216]), et on donne ici la valeur de la densité de courant de Foucault induite :

$$\mathbf{J}_F^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \frac{i\omega\mu_0 I}{4\pi\rho} \mathbf{G}_k + \frac{i\omega\mu_0}{4\pi\rho} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \quad (6-25)$$

$\mathbf{J}_M$  : densité de courant magnétique induite par le champ électromagnétique de la bobine, donnée par  $\nabla \times \mathbf{M}$

$\mathbf{G}_k$  : fonction de Green :

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_b) = \int_{-}^{+} \left( \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} \right) d\mathbf{r}_b \quad (6-26)$$

$+, -$  : sont les bornes de la bobine (liés à l'oscilloscope).

Cette densité s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{J}_F^e = \mathbf{J}_F^b + \mathbf{J}_F^M \quad (6-27)$$

avec

$$\mathbf{J}_F^b = \frac{i\omega\mu_0 I}{4\pi\rho} \mathbf{G}_k \quad (6-28)$$

$\mathbf{J}_F^b$  : représente les courants de Foucault induits par le champs électromagnétique de la bobine ;

<sup>1</sup> Le problème d'émission par EMAT contient deux sous problèmes dont le premier est purement électromagnétique et le second électro-magnéto-mécanique.

$$\mathbf{J}_F^M = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi\rho} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \quad (6-29)$$

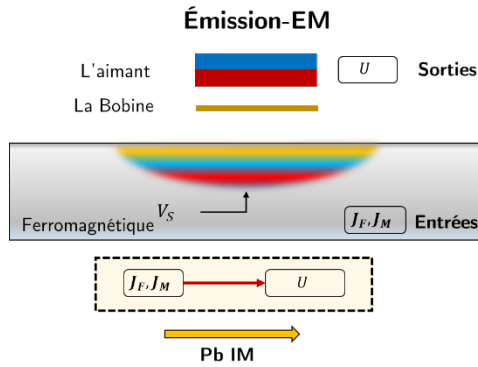
$\mathbf{J}_F^M$  : représente les courants de Foucault induits dans la plaque par l'aimantation induite par le champ électromagnétique de la bobine. Cette densité représente un effet du second ordre par rapport à  $\mathbf{J}_F^b$ . Celle-ci pourrait donc être négligée.

On peut donc écrire :

$$\mathbf{G}_k = \frac{4\pi\rho}{i\omega\mu_0 I} \mathbf{J}_F^e \quad (6-30)$$

## 2. Le problème d'induction mutuelle

Lors de l'émission électromagnétique, le champ électromagnétique de la bobine induit une aimantation et une densité de courant de Foucault dans la pièce. Ces deux densités peuvent à leur tour induire une tension dans la bobine<sup>1</sup> ; on appelle ce phénomène l'induction mutuelle (voir Griffiths [146]).



**Fig. 6-13** : le problème d'induction mutuelle, définie par l'induction d'une tension  $U$  dans la bobine par les sources électromagnétiques qu'elle induit ( $\mathbf{J}_F, \mathbf{J}_M$ ).

On s'intéresse ici au calcul de cette tension induite dans la bobine par les deux sources (courants de Foucault et aimantation). Pour cela, on écrit les équations de Maxwell correspondantes :

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \quad (6-31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6-32)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} + \mu_0(\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \quad (6-33)$$

$\mathbf{J}_F$  : densité de courant de Foucault induite par le champ électromagnétique de la bobine.

$\mathbf{J}_M$  : densité de courant magnétique induite par le champ électromagnétique de la bobine, donnée par  $\nabla \times \mathbf{M}$

**Remarque** : on rappelle qu'en pratique le problème d'émission électromagnétique (induction des  $\mathbf{J}_F$  et  $\mathbf{J}_M$  dans la pièce, par la bobine) et le problème d'induction mutuelle (induction d'une tension  $U$  dans la bobine par  $\mathbf{J}_F$  et  $\mathbf{J}_M$ ), doivent être résolus simultanément puisqu'en réalité ces deux inductions arrivent quasiment en même temps<sup>2</sup>. Cependant comme on travaille en fréquentiel, on fait l'hypothèse de résoudre ces deux problèmes séparément. Le champ électrique qui apparaît donc dans l'équation de Maxwell-Ampère vient des  $\mathbf{J}_F$  et  $\mathbf{J}_M$  et non du courant électrique dans la bobine.

En suivant la même démarche que celle suivie au chapitre 5 (V-B [p. 216]), la résolution des équations de Maxwell donne le potentiel vecteur magnétique (PVM) :

<sup>1</sup> Ces deux sources (courants de Foucault et aimantation) créent des champs électromagnétiques qui affectent la tension dans la bobine.

<sup>2</sup> Le retard pris par la seconde induction vient de la vitesse finie de propagation des ondes électromagnétiques.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (6-34)$$

Pour trouver la tension induite dans la bobine par ce potentiel, on applique simplement la loi d'induction de Faraday, ce qui donne :

$$U(\omega) = i\omega \int_{-}^{+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_b = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \int_{-}^{+} \left\{ \iiint_{V_s} \left( \frac{\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} \right) e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} dV \right\} \cdot d\mathbf{r}_b \quad (6-35)$$

En remarquant que les densités  $\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M$  et le volume  $V_s$  ne dépendent pas de  $\mathbf{r}_b$  (une position sur le contour de la bobine), on peut réécrire la tension en fonction de la fonction de Green  $\mathbf{G}_k$  :

$$U(\omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s} (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \cdot \mathbf{G}_k dV' \quad (6-36)$$

En remplaçant la fonction de Green par sa valeur en fonction de  $J_F$  (Éq.(6-30)) on trouve

$$U(\omega) = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \cdot \mathbf{J}_F dV' \quad (6-37)$$

Cette tension peut s'écrire comme la somme de deux tensions :

$$U^F(\omega) = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} |\mathbf{J}_F|^2 \cdot dV' \quad (6-38)$$

et

$$U^M(\omega) = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{J}_F \cdot dV' \quad (6-39)$$

$U^F$  : tension induite dans la bobine lors de l'émission par les courants de Foucault,

$U^M$  : tension induite dans la bobine lors de l'émission par l'aimantation.

**Remarque** : on note que les formules de  $U^F$  et  $U^M$  sont génériques et ne dépendent pas de l'état local de contrainte. Elles peuvent donc être utilisées en présence ou en absence d'une contrainte locale.

### 3. Tension induite en présence d'une contrainte locale

On propose ici une méthode de caractérisation locale de la contrainte, en utilisant les résultats des deux paragraphes précédents. La démarche de cette méthode est illustrée dans la figure ci-après.

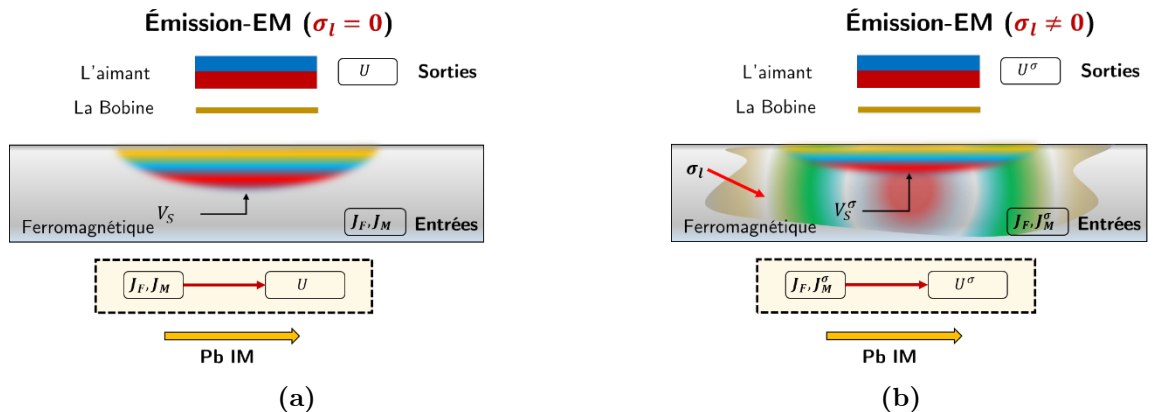


Fig. 6-14 : (a) le problème d'induction mutuelle en absence de contrainte locale. (b) en présence de contrainte locale.

Cette méthode se divise en deux parties :

1. Résolution des problèmes d'émission électromagnétique et induction mutuelle en absence de contrainte locale. La tension induite dans la bobine dans ce cas est donnée par

$$U(\omega) = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} |\mathbf{J}_F|^2 \cdot dV' + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{J}_F \cdot dV' \quad (6-40)$$

telle que

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{H}) \quad (6-41)$$

L'aimantation dans ce cas n'est fonction que du champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

2. Résolution des problèmes d'émission électromagnétique et induction mutuelle en présence de contrainte locale. La tension induite dans la bobine est donnée par :

$$U^\sigma(\omega) = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s^\sigma} |\mathbf{J}_F|^2 \cdot dV' + \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s^\sigma} \mathbf{J}_M^\sigma \cdot \mathbf{J}_F \cdot dV' \quad (6-42)$$

telle que

$$\mathbf{J}_M^\sigma = \nabla \times \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) \quad (6-43)$$

L'aimantation dans ce cas est fonction du champ magnétique  $\mathbf{H}$  et de la contrainte locale  $\boldsymbol{\sigma}_l$ .

Pour trouver la tension induite par la présence de la contrainte locale, on fait la différence entre  $U$  et  $U^\sigma$ . Mais avant de faire cela on note que le volume de la région de sensibilité du capteur dépend de la contrainte locale (pour plus de détails voir le chapitre 5 (V-B [p. 216])). Ceci dit, on rappelle qu'il est possible d'étendre ce volume – si nécessaire – sur tout la pièce<sup>1</sup>. On fait donc le choix de prendre la notation  $V_s^{(2)}$ . En rappelant qu'on a supposé que la résistivité électrique est indépendante de la contrainte, et par conséquent  $\mathbf{J}_F$ , on peut écrire :

$$\Delta U_\sigma = U^\sigma - U = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} [\mathbf{J}_M^\sigma - \mathbf{J}_M] \cdot \mathbf{J}_F \cdot dV' \quad (6-44)$$

On rappelle ici les expressions de  $\mathbf{J}_M$  et  $\mathbf{J}_M^\sigma$  :

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{H}) \quad (6-45)$$

$$\mathbf{J}_M^\sigma = \nabla \times \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}) \quad (6-46)$$

En rappelant qu'on travaille avec des EMAT (aimant + bobine), le champ magnétique total est donc la somme du champ statique (grand)  $\mathbf{H}_s$  provenant de l'aimant et du champ dynamique (petit)  $\mathbf{H}_d$  provenant de la bobine. Sous l'hypothèse  $|\mathbf{H}_d| \ll |\mathbf{H}_s|$  on peut écrire

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{H}) = \mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d) = \mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right|_{\mathbf{H}_s} \cdot \mathbf{H}_d = \mathbf{M}(\mathbf{H}_s) + \boldsymbol{\chi}_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{H}_d \quad (6-47)$$

et

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_d) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right|_{\mathbf{H}_s} \cdot \mathbf{H}_d = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) + \boldsymbol{\chi}_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{H}_d \quad (6-48)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{H}_s)$ , aimantation statique induite par de l'aimant, et  $\boldsymbol{\chi}_s^d$ , susceptibilité magnétique différentielle.

<sup>1</sup> Le calcul fait ici est entre un état contraint et un état non-contraint, et comme la contrainte déforme la pièce, le fait d'étendre le volume de la région de sensibilité sur toute la pièce ne rend pas  $V_s(\sigma \neq 0) = V_s(\sigma = 0)$ , cependant ce volume n'est pas physique, mais un domaine abstrait pour faire le calcul du champ électromagnétique du capteur, il peut donc être étendue à tout l'espace.

<sup>2</sup> Un volume de la région de sensibilité de l'EMAT qui englobe les deux volumes  $V_s(\sigma = 0)$  et  $V_s(\sigma \neq 0)$ .

Les deux densités de courant magnétique sont données par la partie dynamique de l'aimantation [ $\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s)$  et  $\mathbf{M}(\mathbf{H}_s)$  ne peuvent pas induire une tension dans la bobine]. La variation de la tension s'écrit donc<sup>1</sup> :

$$\Delta U_\sigma = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} (\nabla \times [(\chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) - \chi_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s)) \cdot \mathbf{H}_d]) \cdot \mathbf{J}_F \cdot dV' \quad (6-49)$$

Cette expression est valable pour les matériaux magnétiques (isotropes ou anisotropes), dont l'aimantation n'est pas nécessairement dans la direction du champ magnétique. Cependant elle ne permet pas de trouver l'inconnue  $\boldsymbol{\sigma}_l$  en fonction de la grandeur mesurée  $\Delta U_\sigma$ . Pour ceci, on va supposer que l'aimantation est parallèle au champ magnétique, et que le champ magnétique de l'aimant et celui de la bobine sont parallèles ; ceci permet de représenter la susceptibilité différentielle  $\chi_s^d$  par une quantité scalaire.

Pour simplifier l'écriture de  $\Delta U_\sigma$  on utilise les deux relations suivantes :

Soient  $\alpha$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  un scalaire et deux vecteurs, alors

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\alpha \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \alpha \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \alpha [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}] + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \alpha \quad (6-50)$$

En prenant  $\alpha = \chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) - \chi_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s)$ ,  $\mathbf{H}_d = \mathbf{A}$  et  $\mathbf{J}_F = \mathbf{B}$  la tension  $\Delta U_\sigma$  s'écrit

$$\Delta U_\sigma = \frac{\rho}{I} \iiint_{V_s} \left( \chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) - \chi_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s) [\nabla \cdot (\mathbf{H}_d \times \mathbf{J}_F) + \mathbf{H}_d \cdot \nabla \times \mathbf{J}_F] + (\mathbf{H}_d \times \mathbf{J}_F) \cdot \nabla (\chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) - \chi_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s)) \right) \cdot dV' \quad (6-51)$$

Pour qu'on puisse trouver la contrainte en fonction de la variation de tension, on rappelle la définition du volume de la région de sensibilité du capteur

---

$V_s$  est défini par quelques tailles du capteurs sur la surface et quelques épaisseurs de peaux dans la profondeur. Au-delà de ce volume, la densité de courant de Foucault  $\mathbf{J}_F$  et l'excitation dynamique  $\mathbf{H}_d$  peuvent être négligées. Quand la fréquence – du courant électrique de la bobine – tend vers l'infini, la dimension de ce volume dans la profondeur tend vers zéro (car l'épaisseur de peau tend vers zéro). Contrairement à l'excitation dynamique  $\mathbf{H}_d$ , l'excitation statique  $\mathbf{H}_s$  pourrait être non-négligeable au-delà de ce volume.

---

On traite ici le cas particulier défini par les points suivants :

1. L'excitation magnétique statique est supposée uniforme dans la région de sensibilité.
2. La taille du capteur est petite devant la variation spatiale (sur la surface) de la contrainte.
3. La fréquence est choisie de telle sorte que la dimension de la région de sensibilité dans la profondeur est petite devant la variation spatiale de la contrainte dans cette dimension.

Dans ces conditions  $\chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s)$  est uniforme dans le volume de la région de sensibilité, ce qui donne :

$$\Delta U_\sigma = \frac{\rho}{I} (\chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) - \chi_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s)) \iiint_{V_s} ([\nabla \cdot (\mathbf{H}_d \times \mathbf{J}_F) + \mathbf{H}_d \cdot \nabla \times \mathbf{J}_F]) \cdot dV' \quad (6-52)$$

Pour alléger cette expression on pose

$$\mathcal{J}_b = \iiint_{V_s} ([\nabla \cdot (\mathbf{H}_d \times \mathbf{J}_F) + \mathbf{H}_d \cdot \nabla \times \mathbf{J}_F]) \cdot dV' \quad (6-53)$$

---

<sup>1</sup> On note qu'en général le champ magnétique ( $\mathbf{H}_d$ ) dépend de la contrainte, ce qui veut dire qu'il faut prendre cet effet dans la formule de  $\Delta U_\sigma$ .

Ce terme –indépendant de la contrainte– ne dépend que du champ électromagnétique de la bobine. Ceci permet d'écrire :

$$\chi_s^d(\boldsymbol{\sigma}_l, \mathbf{H}_s) = \chi_s^d(\mathbf{0}, \mathbf{H}_s) + \frac{I}{\rho \mathcal{J}_b} \Delta U_\sigma \quad (6-54)$$

Cette expression donne donc la susceptibilité magnétique dans l'état contraint, en fonction de celle dans l'état non-contraint plus un terme supplémentaire fonction de la tension induite par la présence de la contrainte.

Notre objectif cependant n'est pas de trouver la susceptibilité en fonction de la variation de la tension, mais la contrainte. On doit trouver une loi magnéto-mécanique explicite permettant de donner la susceptibilité magnétique en fonction de la contrainte. Cette loi doit également être inversible (permet de donner une valeur unique de la contrainte en faisant une ou plusieurs mesures de la susceptibilité magnétique). A titre d'exemple, une telle loi pourrait être donnée par la version analytique du modèle multi-échelle de Daniel [42].

En faisant l'hypothèse que la direction du champ magnétique correspond à l'une des directions principales de contrainte, sans perte de généralité, on peut supposer que cette direction est  $e_x$  ce qui donne :

$$\chi_s^d(\sigma_l, H) = M^{sat} \kappa A_x \frac{A_x + (A_y + A_z) \cosh(\kappa H_s)}{(A_x \cosh(\kappa H_s) + A_y + A_z)^2} \quad (6-55)$$

avec

$$A_i = e^{\alpha \sigma_{ii}}, \quad i = \{x, y, z\}$$

$$\kappa = \mu_0 A_s M^{sat}$$

$$\alpha = \frac{3}{2} A_s \lambda^{sat}$$

$$A_s = \frac{3\chi^0}{\mu_0 M^{sat2}}$$

L'excitation  $\mathbf{H}$  est dans la direction  $e_x$ .

$M^{sat}$  aimantation à saturation du matériau,

$\lambda^{sat}$  déformation de magnétostriction à saturation du matériau,

$\chi^0$  susceptibilité magnétique anhystérique initiale (voir Daniel *et al.* [29]).

Remplaçons maintenant (dans l'Éq. (6-54)) la susceptibilité magnétique par son expression analytique :

$$M^{sat} \kappa A_x \frac{A_x + (A_y + A_z) \cosh(\kappa H_s)}{(A_x \cosh(\kappa H_s) + A_y + A_z)^2} = M^{sat} \kappa \frac{1 + 2 \cosh(\kappa H_s)}{(\cosh(\kappa H_s) + 2)^2} + \frac{I}{\rho \mathcal{J}_b} \Delta U_\sigma \quad (6-56)$$

Cette équation contient trois inconnues ( $A_x, A_y, A_z$ ). Pour simplifier le problème, on suppose que la contrainte est uniaxiale ( $A_y = A_z = 1$ ), ce qui donne :

$$M^{sat} \kappa A_x \frac{A_x + 2 \cosh(\kappa H_s)}{(A_x \cosh(\kappa H_s) + 2)^2} = M^{sat} \kappa \frac{1 + 2 \cosh(\kappa H_s)}{(\cosh(\kappa H_s) + 2)^2} + \frac{I}{\rho \mathcal{J}_b} \Delta U_\sigma \quad (6-57)$$

Tout calcul fait, on trouve les deux solutions suivantes :

$$\sigma_x = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-(ac - 2cQ) \pm \sqrt{a^2 c^2 - 4aQ(1 + c^2)}}{(a - c^2 Q)} \right) \quad (6-58)$$

avec

$$a = M^{sat} \kappa$$

$$c = \cosh(\kappa H_s)$$

$$Q = \frac{a + 2ac}{(c + 2)^2} + \frac{I}{\rho \mathcal{J}_b} \Delta U_\sigma$$

**Contrainte biaxiale dans le plan** : dans ce cas, il est possible de faire deux mesures (de variation de tension) dont chacune est dans une direction principale. Ceci donne le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} A_1 x^2 - Q_1 y^2 + C_1 xy + D_1 x - 2Q_1 y = Q_1 \\ A_2 y^2 - Q_2 x^2 + C_2 xy + D_2 y - 2Q_2 x = Q_2 \end{cases} \quad (6-59)$$

avec

$$x = e^{\alpha \sigma_x}, \quad y = e^{\alpha \sigma_y}$$

$$A_i = a - c^2 Q_i, \quad C_i = a - 2c Q_i, \quad D_i = ac - 2c Q_i$$

$$a = M^{sat} \kappa$$

$$c = \cosh(\kappa H_s)$$

$$Q_i = \frac{a + 2ac}{(c + 2)^2} + \frac{I}{\rho \mathcal{J}_b^i} \Delta U_\sigma^i$$

La résolution de ce système permet de remonter à des valeurs possibles pour les deux composantes de la contrainte principales de la contrainte. Pour le moment on ne sait pas encore comment identifier la bonne valeur de la contrainte parmi les deux admissibles.

### Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé une méthode de caractérisation de la contrainte locale en utilisant l'EMAT non pas comme un transducteur ultrasonore, mais comme une sonde « courants de Foucault<sup>1</sup> ». Cette méthode donne dans un premier temps la susceptibilité magnétique à l'état contraint en fonction de celle à l'état non-contraint et la variation de la tension mesurée par la bobine de l'EMAT, induite par la présence de la contrainte. Ensuite, pour trouver la contrainte en fonction de la tension, la méthode se base sur l'inversion d'un modèle de comportement magnéto-mécanique. Illustré à l'aide d'un modèle magnéto-mécanique analytique, ceci permet de trouver les composantes de la contrainte biaxiale dans le plan en fonction des tensions mesurées, dans le cas où la direction de la contrainte est connue.

Cette méthode n'est pas encore implémentée, et le fait de la présenter dans ce manuscrit n'a pour objectif que de fournir une idée de comment procéder pour traiter la problématique d'imagerie de contrainte par EMAT dans le cas où une contrainte locale est présente. On indique dans les deux sous-sections suivantes comment les démarches expérimentale et numérique sont affectées en prenant en compte cette méthode de caractérisation locale.

---

<sup>1</sup> L'expression « courants de Foucault » est un abus de langage, pour dire que l'EMAT est utilisé comme le sont les capteurs classiques de courants de Foucault. Il serait plus rigoureux de dire que l'EMAT est un capteur à aimantation.

## A. Nouvelle démarche expérimentale

La démarche expérimentale suivie pour démontrer la faisabilité de la méthode d'imagerie comporte maintenant cinq étapes au lieu de quatre en absence de contrainte locale, comme l'illustre la figure suivante :

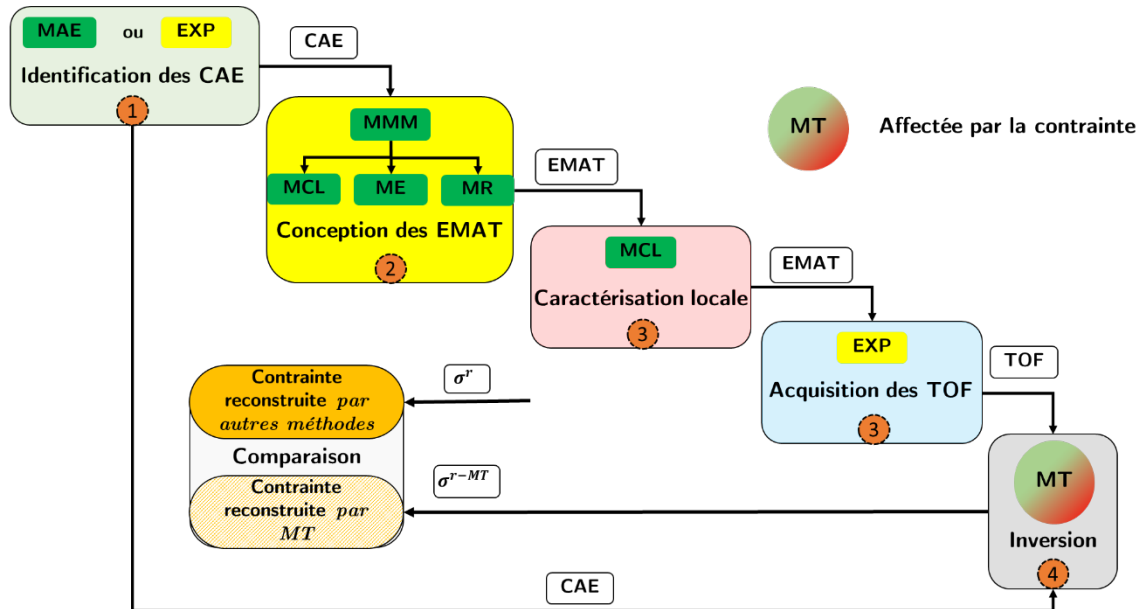


Fig. 6-15 : architecture de la démarche expérimentale suivie pour la validation de la méthode d'imagerie.

### 1. Identification des coefficients acoustoélastique (CAE)

La démarche expérimentale commence toujours par l'identification des CAE. Cette étape n'est pas affectée par la présence de la contrainte locale.

### 2. Conception des EMAT

On a vu à la section 2 qu'en absence de contrainte locale, les EMAT doivent être conçus pour émettre / détecter sélectivement les ondes de Lamb et SH. L'EMAT a donc été traité comme un transducteur ultrasonore. Cette conception était régie par les modèles MMM, ME et MR.

En présence de contrainte locale, l'EMAT doit être conçu à la fois pour émettre / détecter sélectivement les ondes de Lamb et SH, mais également pour caractériser localement l'état de contrainte. L'une des hypothèses faites pour la caractérisation locale (MCL) est que les excitations magnétiques de l'aimant et de la bobine doivent être parallèles et uniformes dans la région de sensibilité du capteur. Cette hypothèse pourrait contraindre la conception de l'EMAT comme un capteur ultrason. En conclusion la conception d'un EMAT en présence de contrainte locale est faite en traitant l'EMAT comme à la fois une sonde « courants de Foucault » et un transducteur ultrasonore. Cette étape est donc régie par le MMM, ME, MR et MCL.

### 3. Caractérisation locale de contrainte

La méthode de caractérisation est utilisée pour trouver la valeur de la contrainte locale, l'EMAT étant traité comme une sonde « courants de Foucault ». Cette méthode à l'heure actuelle ne traite que les cas où la direction de la contrainte (biaxiale dans le plan) est connue.

**Remarque :** pour pouvoir passer de la susceptibilité magnétique à la contrainte dans le développement de la méthode de caractérisation locale (MCL), nous avons dû utiliser la version analytique du MME. Cette version cependant est faiblement prédictive, et n'a été utilisée ici



qu'à titre d'exemple. Ce qui veut dire que ce passage pourrait être fait avec d'autres modèles magnéto-mécanique (si nécessaire) dans le futur.

#### 4. Acquisition des temps de vol

Cette étape est indépendante de la présence de la contrainte locale.

#### 5. Inversion

L'étape d'inversion est affectée par la contrainte locale, et ceci n'est pas résolu par la méthode de caractérisation locale, puisque la contrainte locale affecte la MT par le non-respect de l'hypothèse d'onde plane, à proximité des traducteurs.

### B. Nouvelle démarche numérique

La démarche numérique suivie pour démontrer la faisabilité de la méthode d'imagerie contient maintenant cinq étapes, au lieu de quatre en absence de contrainte locale, comme l'illustre la figure suivante :

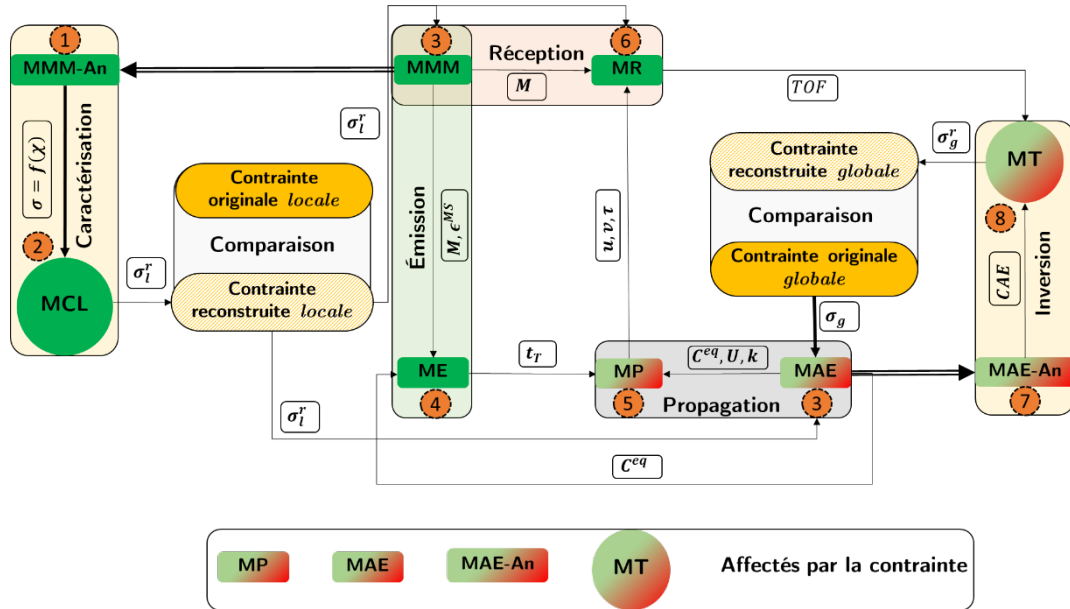


Fig. 6-16 : architecture de la démarche numérique suivie pour valider la faisabilité de la méthode d'imagerie.

#### 1. Caractérisation

La première étape est maintenant la caractérisation de la contrainte locale. Cette étape contient un modèle magnéto-mécanique *inversible*, à titre d'exemple on a pris la version analytique du modèle-multi-échelle (MME-An) et la méthode de caractérisation de contrainte locale (MCL). Le MME-An (MMM-An) fournit la loi qui permet de passer de la susceptibilité magnétique  $\chi$  à la contrainte  $\sigma$  à la MCL, qui permet de retrouver la valeur de la contrainte locale  $\sigma_i^r$ . Pour valider cette méthode une comparaison entre cette contrainte et l'originale est faite.

#### 2. Émission

La contrainte locale  $\sigma_i^r$  est maintenant utilisée par le MMM pour calculer l'aimantation et la déformation de magnétostriction ( $M, \epsilon^{MS}$ ), qui sont ensuite utilisées par le modèle d'émission (ME). Cependant ce dernier doit prendre une deuxième entrée, qui est le tenseur de rigidité équivalent  $C^{eq}$  calculé par le modèle acoustoélastique (MAE) à partir de  $\sigma_i^r$ . Le ME peut maintenant calculer la densité surfacique de force  $t_T$  (source de l'onde), à partir de ces entrées.

### 3. Propagation

Cette étape est affectée par la contrainte locale  $\sigma_l^r$  et ceci n'est pas résolu par la connaissance de celle-ci, puisque les déplacements modaux  $\mathbf{U}$  et les nombres d'onde  $\mathbf{k}$  calculés par le MAE se basent sur l'hypothèse d'onde plane, ce qui n'est pas le cas près des traducteurs<sup>1</sup>. Une erreur est donc introduite à ses valeurs, qui dépend de l'inhomogénéité de la contrainte près des traducteurs. Le modèle de pinceaux (MP) donne en sortie le champ élastodynamique de l'onde  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \tau)$ .

### 4. Réception

Le modèle de réception (MR) prend en entrée le champ élastodynamique de l'onde  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \tau)$  du MP, l'aimantation  $\mathbf{M}$  du MMM et la contrainte locale  $\sigma_l^r$  de la MCL. Et donne en sortie les temps de vols (TOF).

### 5. Inversion

La dernière étape est l'inversion, dans laquelle la version analytique du modèle acoustoélastique (MAE-An) fournit à la méthode tomographique (MT) les coefficients acoustoélastiques (CAE). La MT prend les TOF du MR, puis donne la cartographie de la contrainte globale  $\sigma_g^r$ . Celle-ci est comparée à la contrainte originale. La MT est affectée par la contrainte locale car les CAE utilisés sont calculés sous l'hypothèse d'onde plane.

---

<sup>1</sup> Dans le cas où la contrainte est inhomogène.

## V. Conclusion

Ce chapitre représente une vue d'ensemble de la méthode d'imagerie d'un état de contrainte multiaxial et inhomogène dans les plaques ferromagnétiques en utilisant les EMAT. Ce chapitre a trois objectifs :

1. Montrer là où en sont les travaux de la thèse, par rapport au développement de la méthode d'imagerie.
2. Rappeler l'ensemble de modèles et méthodes nécessaires pour le développement de la méthode d'imagerie et l'état actuel de chaque modèle et méthode.
3. Signaler la nécessité du développement d'une méthode de caractérisation de la contrainte locale, et proposer une telle méthode.

On a vu qu'en absence de contrainte locale, la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie par une démarche numérique nécessite :

- Six modèles : MMM, ME, MAE, MP, MR, MAE-An.
- Une méthode : MT

Et par une démarche expérimentale :

- Quatre modèles : MAE, MMM, ME, MR, dont un (MAE) est optionnel.
- Une méthode : MT

À l'heure actuelle, la démonstration de la faisabilité de la méthode – en absence de contrainte locale – pourrait être testée dans les cas d'une contrainte uniaxiale normale, d'une contrainte uniaxiale dans le plan, d'une contrainte biaxiale dans/hors plan.

En présence d'une contrainte locale, et absence d'une méthode de caractérisation de cette contrainte, la démonstration de la faisabilité de la méthode par une démarche numérique ou expérimentale est compromise. Pour la démarche expérimentale ceci est due à la difficulté de concevoir les EMAT sans savoir les propriétés matériaux de la pièce à proximité des traducteurs<sup>1</sup>. En ce qui concerne la démarche numérique, c'est à cause du non-respect de l'hypothèse d'onde plane, nécessaire pour les modèles acoustoélastiques et pinceaux. Dans les deux démarches la méthode tomographique est également affectée, d'une part à cause du non-respect de l'hypothèse d'onde plane, d'autre part à cause de la perte de la valeur de référence. Une solution possible pour réduire les effets de la contrainte locale est de supposer que le tenseur de rigidité équivalent à l'endroit des émetteurs est égal à celui de l'état non-contraint et de travailler à aimantation à saturation. Ceci a pour conséquence de rendre les modèles de réception et d'émission indépendants de la contrainte. Ceci cependant n'affecte pas le MAE, MP et MT. En présence d'une contrainte locale et prise en compte de la méthode de caractérisation de contrainte locale proposée dans ce chapitre, la démonstration de la faisabilité de la méthode d'imagerie par une démarche numérique nécessite :

- Sept modèles : MMM, MME-An, ME, MAE, MAE-An, MP, MR.
- Deux méthodes : MT, MCL.

Cependant même la connaissance de la contrainte locale ne résout pas entièrement le problème, puisque les modèles MAE et MP et méthode MT se basent sur l'hypothèse d'une onde plane. Celle-ci dépend de l'inhomogénéité de la contrainte près des traducteurs, donc on ne peut pas considérer qu'elle est respectée de manière générale.

Sous l'hypothèse de validité de la méthode de caractérisation locale, des modèles MAE, MP et enfin de la méthode MT près des capteurs, la démonstration de la faisabilité de la méthode pourrait être testée pour les cas suivants : contrainte uniaxiale normale, contrainte uniaxiale dans le plan (avec direction connue là où opèrent les traducteurs), contrainte biaxiale dans/hors plan (avec direction connue là où opèrent les traducteurs).

Dans le chapitre suivant on donne une conclusion générale, puis les perspectives de l'après thèse.

---

<sup>1</sup> La résistivité électrique est faiblement affectée par la contrainte, la variation de la rigidité due à la contrainte pourrait être majorée par 2%, en revanche l'effet de la contrainte sur la perméabilité magnétique est de l'ordre de 100% Par conséquence, si la contrainte est inconnue, alors se serait le cas aussi pour la perméabilité magnétique.

## 7. Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons traité la faisabilité d'une nouvelle méthode d'imagerie d'un état de contrainte multiaxial inhomogène dans les plaques ferromagnétiques utilisant les EMAT. Cette méthode doit résoudre une problématique pour laquelle une solution pratique (non-destructive, peu coûteuse, utilisable sur le terrain, et non-locale) n'existe pas dans la littérature. Cette nouvelle méthode se base sur les effets *magnétoélastiques* et *acoustoélastiques*. Une étude préliminaire (au début de la thèse) a permis d'identifier les étapes essentielles que doit suivre cette méthode, et par conséquent les modèles et méthodes qu'elle comporte. Certains de ces modèles existaient préalablement à cette thèse. L'objectif de la thèse est donc de développer les modèles et méthodes restants. Ceux-ci résolvent les quatre problèmes suivants :

1. **PAED** : problème acoustoélastique direct (trouver les variations de vitesses des ondes de Lamb et SH induites par la contrainte). Ce problème a été résolu par le développement du modèle acoustoélastique (MAE). Ceci a été développé dans les deux premiers chapitres (Ch.1 et Ch.2).

Dans le Ch.1 nous avons présenté tout d'abord le cadre général de la théorie d'acoustoélasticité (la base du MAE), ainsi que ses principales applications et ses limites. Puis nous avons prolongé le développement formel de cette théorie, qu'on peut trouver dans la littérature, aux cas des matériaux élastiquement isotropes soumis à des chargements triaxiaux. Ceci a été fait en exprimant le tenseur de rigidité du matériau contraint en fonction des trois composantes de la contrainte. Dans le Ch.2 nous avons utilisé ce tenseur dans la méthode SAFE, qui a dû être légèrement modifiée pour prendre en compte l'effet acoustoélastique (EAE). Cette méthode a permis de trouver les variations de vitesses des ondes de Lamb et SH (dans les plaques métalliques<sup>1</sup>), induites par un état de contrainte multiaxial homogène ou inhomogène dans l'épaisseur de la plaque. L'effet de la contrainte sur la déformation statique de la plaque (variation de son épaisseur) a notamment été mis en avant et son importance quantitative a été démontrée.

2. **PAEI** : problème acoustoélastique inverse (trouver les trois composantes de la contrainte et sa direction en fonction des variations de vitesses qu'elle induit). Ce problème a été résolu tout d'abord en proposant une version analytique du MAE (Ch.3) puis en développant une nouvelle méthode tomographique (Ch.4).

Dans le Ch.3 on s'est aperçu que pour résoudre le PAEI, il faut chercher des lois analytiques qui donnent les vitesses en fonction de la contrainte, et permettent, connaissant ces vitesses, de remonter à la contrainte (ses trois composantes et sa direction). Ces lois ont été trouvées par expérimentation numérique utilisant le MAE. Le nombre de paramètres apparaissant dans ces lois dépend de la précision cherchée sur la mesure de la contrainte, et de la plage de fréquence utilisée pour effectuer cette mesure. Dans le Ch.4 on a présenté tout d'abord les bases et les hypothèses utilisées lors du développement de la technique d'imagerie par tomographie. Ensuite du fait de la nature multi variables et directionnelle de la contrainte, une nouvelle approche tomographique a dû être développée pour résoudre le PAEI. Cette approche se base essentiellement sur la nature dispersive et multimodale des ondes guidées.

3. **PR** : problème de réception (trouver la tension induite dans la bobine de l'EMAT due au passage de l'onde élastique). La nouvelle méthode d'imagerie utilise les variations de temps de vol induites par la présence de la contrainte. Pour que ces temps de vol soient trouvés, il faut modéliser le mécanisme suivant lequel l'EMAT détecte le passage de l'onde.

Ce problème a été résolu en développant le modèle de réception, dans le Ch. 5, dans lequel nous avons tout d'abord traduit le passage de l'onde sous l'EMAT en induction de plusieurs densités de courant (électrique, magnétique). Ensuite, ces courants ont été utilisés comme source dans les équations de Maxwell pour trouver la tension induite dans la bobine. Cette tension a été écrite d'une manière explicite

---

<sup>1</sup> Magnétiques ou non.

en fonction du champ élastodynamique de l'onde. En supposant que l'émetteur est identique au récepteur, la formulation de cette tension a été drastiquement simplifiée.

4. **PCL** : problème de caractérisation de la contrainte locale (trouver la variation de la tension induite dans la bobine de l'EMAT due à la présence de la contrainte). La résolution du PAEI a montré que la méthode d'imagerie nécessite des capteurs pouvant émettre / détecter sélectivement certains modes dans certaines plages de fréquence. Le choix des EMAT comme capteur a été fait. Cependant le fait que ces capteurs sont très sensibles aux lois du comportement du matériau dans lequel ils génèrent / détectent les ondes élastiques, et que certaines de ces lois, notamment les lois magnéto-mécaniques, sont très sensibles à la présence de la contrainte, a conduit à développer une méthode de caractérisation de la contrainte locale sous le capteur. Une proposition d'une méthode a été donnée dans le Ch.6.

Dans ce chapitre on a passé tout d'abord en revue les modèles et méthodes nécessaires pour la démonstration de la faisabilité de la nouvelle méthode d'imagerie, dans le cas où la contrainte est absente sous les capteurs. Ensuite on a étudié le cas où elle ne l'est pas et montré que la plupart des modèles sont affectés par cette contrainte, surtout si celle-ci est inconnue. Nous avons proposé alors une nouvelle méthode de caractérisation de la contrainte, traitant l'EMAT non pas comme capteur ultrason, mais comme capteur courants de Foucault. La méthode donne la variation de la susceptibilité magnétique induite par la présence de la contrainte en fonction de la variation de tension induite dans la bobine de l'EMAT. Pour passer de la variation de la susceptibilité à la contrainte, nous avons utilisé, à titre d'exemple, un modèle magnéto-mécanique analytique de la littérature.

En conclusion, les travaux de la thèse ont présenté les bases d'une nouvelle méthode d'imagerie. Pour que celle-ci soit utilisable, en laboratoire ou sur le terrain, il faut tout d'abord que tous les modèles nécessaires à cette méthode soient validés expérimentalement. Le modèle de réception (MR) et la méthode de caractérisation locale (MCL) ne l'ont pas été. Le MAE-An étant une réduction du MAE et la méthode tomographique (MT) étant une approche purement mathématique, ne nécessitent pas des validations expérimentales, puisqu'elles représentent des inversions du problème acoustoélastique direct, résolu par le MAE qui a été validé au Ch.2.

Par ailleurs pour résoudre la problématique qui a nécessité le développement de cette nouvelle méthode, il faut être capable d'imager n'importe quel profil de contrainte. Cela n'a pas été réalisé dans cette thèse et représente une perspective importante pour l'avenir de cette méthode.

On présente dans la section suivante les perspectives de l'après thèse et celles de la méthode.

## 8. Perspectives

Les perspectives sont divisées en trois catégories (développement, simulation et validation). Dans la première, on présente les tâches qui restent à faire pour que la méthode d'imagerie permette de résoudre la problématique pour laquelle elle a été proposée. Dans la deuxième, on présente les tâches dont le développement théorique a été fait dans ce mémoire mais dont l'implémentation numérique n'a pas encore été faite. Dans la dernière, on traite des validations expérimentales à mener.

### C. Développements théoriques

1. Développer une méthode qui permette de remonter au profil de contrainte inhomogène dans l'épaisseur de la plaque et homogène dans le plan de la plaque à partir des variations de vitesses des ondes de Lamb et SH.
2. Développer la méthode tomographique correspondant à cette méthode (perspective 1).
3. Étudier l'effet acoustoélastique pour d'autres guides, notamment des tubes.
4. Étudier l'effet acoustoélastique pour des matériaux élastiquement anisotropes.
5. Étudier la capacité des modèles magnéto-mécanique (MMM) et de propagation (MP) à résoudre les problématiques posées par la méthode d'imagerie. Ceci doit être fait puisque ces deux modèles n'ont pas été développés spécifiquement pour être utilisés par la méthode d'imagerie. Par exemple le modèle multi-échelle auquel nous faisons référence ne prend pas en compte l'hystérésis, et le modèle de pinceaux n'a pas encore été testé pour le cas d'une inhomogénéité tensorielle.
6. Développer une version analytique *inversible* du modèle magnéto-mécanique. La version analytique du modèle multi-échelle utilisée dans le Ch.6, a été proposée à titre d'exemple, pour permettre à la méthode de caractérisation locale (MCL) de passer de la susceptibilité magnétique à la contrainte mécanique. Cette version, dérivée du modèle multi-échelle complet (MME), est fondée sur des hypothèses de validité plus restrictives que celles du MME, et par conséquent son utilisation dans la MCL doit être étudiée.

### D. Simulation numérique

1. Implémentation du modèle de réception sous Comsol, pour le cas ferromagnétique.
2. Implémentation de la méthode de caractérisation locale sous Comsol.
3. Implémentation de la partie de la méthode tomographique qui traite les cas biaxial dans le plan et triaxial.

### E. Validation expérimentale

1. Validation du modèle de réception
2. Validation de la méthode de caractérisation locale.

## 9. Références

N°	Thème	Références
[1]	Élasticité	L.D .Landau, E.M. Lifshitz, Theory of elasticity, (Pergamon, 1975)
[2]	Contrainte mécanique	G.S. Schajer .”Practical Residual Stress Measurement Methods” 2013 ISBN:9781118402832 DOI:10.1002/9781118402832
[3]	Contrainte mécanique	P. J. Withers,. “Residual stress and its Role in Failure.” <i>Reports on Progress in Physics</i> 70 (12) pp.2211–2264. (2007)
[4]	Contrainte mécanique	O. Hatamleh, J. Lyons, R.Forman, “Laser and shot peening effects on fatigue crack growth in friction stir welded 7075-T7351 aluminum alloy joints”, <i>Int. J. Fatigue</i> , 29, 3, pp. 421-434, 2007, doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2006.05.007.
[5]	Contrainte mécanique	S. Bagheri and M. Guagliano,. “Review of shot peening processes to obtain nanocrystalline surfaces in metal alloys.” 2013, doi.org/10.1179/026708408X334087
[6]	Contrainte mécanique	C. E. Demers and J. W. Fisher “A Survey of Localized Cracking in Steel Bridges, 1981 to 1988” Center for Advanced Technology for Large Structural Systems (ATLSS), Lehigh University, 1989 - 324 pages
[7]	Contrainte mécanique	B. A.J.M. de Mol <i>et al</i> “Non-destructive assessment of 62 Dutch Björk–Shiley convexo–concave heart valves”, <i>European Journal of Cardio-thoracic Surgery</i> 11 (1997) 703–709.
[8]	Contrainte mécanique	E. Maawad, H.-G. Brokmeier, and L. Wagner “Texture Gradients in Shot Peened Ti-2.5Cu”, <i>Solid State Phenomena</i> . 160 (2010) pp 141-146
[9]	Contrainte mécanique	M.K. Hurst “Prestressed Concrete Design”, ISBN 9780367863555, 2019 CRC Press
[10]	Contrainte mécanique	K. Cho , S. T. Kim, J-R. Cho and Y-H Park “Estimation of Tendon Force Distribution in Prestressed Concrete Girders Using Smart Strand”, <i>Appl. Sci.</i> 2017, 7, 1319; doi:10.3390/app7121319
[11]	Contrainte mécanique	J. H. Nielsen, “Remaining stress-state and strain-energy in tempered glass fragments”, <i>Glass Struct. Eng.</i> 2: pp.45–56 (2017) DOI 10.1007/s40940-016-0036-z
[12]	Photoélasticité	J. Kestens, “ The Photoelastic Effect and Its Applications”, <i>Glass Struct. Eng.</i> 2: pp.45–56 (2017) DOI 10.1007/s40940-016-0036-z
[13]	Acousoélasticité	Y. H. Pao, W. Sachse and H. Fukuoka, “Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses,” in <i>Physical Acoustics</i> , Vol XVII, ed. by W.P. Mason and R.N. Thurston (Academic Press, New York, 1984), pp. 257-273
[14]	Thermoélasticité	A.K..Wong, S.A Dunn, J.G. Sparrow. “Residual stress measurement by means of the thermoelastic effect”. <i>Nature</i> 332, 613–615 (1988). <a href="https://doi.org/10.1038/332613a0">https://doi.org/10.1038/332613a0</a>
[15]	Magnétoélasticité	R. M. Bozorth, “Ferromagnetism”, Hoboken: Wiley-Interscience, 1964.
[16]	Piézo-résistivité	R. Pallàs-Areny, “Sensors and signal conditioning”, John G. Webster, 2001
[17]	Contrainte mécanique	V. Hauk. “Structural and Residual Stress Analysis by Nondestructive Methods”. (1997), <a href="https://doi.org/10.1016/B978-0-444-82476-9.X5000-2">https://doi.org/10.1016/B978-0-444-82476-9.X5000-2</a>
[18]	Contrainte mécanique	G.S. Schajer. “Relaxation Methods for Measuring Residual Stresses: Techniques and Opportunities”. <i>Experimental Mechanics</i> (2010) 50: pp.1117–1127 DOI 10.1007/s11340-010-9386-7

[19]	Magnétoélasticité	M. <b>Rekik</b> , O. Hubert, L. Daniel : Influence of a multiaxial stress on the reversible and irreversible magnetic behaviour of a 3%Si-Fe alloy, <i>International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics</i> , 44(3-4):301-315 (2014).
[20]	Magnétoélasticité	A. <b>Dahia</b> , E. Berthelot, Y. Le Bihan, L. Daniel, "A model-based method for the characterisation of stress in magnetic materials using eddy current non-destructive evaluation", <i>Journal of Physics D : Applied Physics</i> , 48:195002 (2015).
[21]	Magnétoélasticité	M. <b>Sawalem</b> , M. Blaow, "Evaluation of Residual Stresses in Grinding by Magnetic Barkhausen Noise, The international Jaurant of Engineering and Information Technology (IJEIT), 2, (2016)
[22]	Magnétoélasticité	J. <b>Gauthier</b> , T.W. Krause, D.L. Atherton, "Measurement of residual stress in steel using the magnetic Barkhausen noise technique", <i>NDT &amp; E International</i> , 31, Issue 1, pp. 23-31, (1998), doi.org/10.1016/S0963-8695(97)00023-6.
[23]	Photoélasticité	H. <b>Aben</b> and C. Guillemet, "Photoelasticity of Glass", , Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993, 10.1007/978-3-642-50071-8
[24]	Photoélasticité	M. <b>Duquennoy</b> , D. Devos, and M. Ouaftouh, "Ultrasonic evaluation of residual stresses in flat glass tempering: Comparing experimental investigation and numerical modeling", <i>The Journal of the Acoustical Society of America</i> 119, 3773 (2006); <a href="https://doi.org/10.1121/1.2197806">https://doi.org/10.1121/1.2197806</a>
[25]	Acousoélasticité	R. B. <b>King</b> and C. M. Fortunko, "Determination of in-plane residual stress states in plates using horizontally polarized shear waves," <i>J. Appl. Phys.</i> 54, pp. 3027-3035 (1983). <a href="https://doi.org/10.1063/1.332506">https://doi.org/10.1063/1.332506</a>
[26]	Acousoélasticité	M. <b>Duquennoy</b> , M. Ouaftouh, M. Ourak , " Ultrasonic evaluation of stresses in orthotropic materials using Rayleigh waves", <i>NDT&amp;E International</i> 32 pp.189–199 (1999)
[27]	Acousoélasticité	D. <b>Vangi</b> , "Stress evaluation by pulse-echo ultrasonic longitudinal wave," <i>Exp. Mech.</i> 41, pp. 277–281 (2001). <a href="https://doi.org/10.1007/BF02323145">https://doi.org/10.1007/BF02323145</a>
[28]	Acousoélasticité	H. R. <b>Dorfi</b> , H. R. Busby and M. Janssen, " Acoustoelasticity : ultrasonic stress field reconstruction", <i>Exp mechs</i> , 36, (4), pp. 325-332 (1996)
[29]	Magnétoélasticité	L. <b>Daniel</b> , O. Hubert, N. Buiron, R. Billardon : Reversible magneto-elastic behavior: a multiscale approach, <i>Journal of the Mechanics and Physics of Solids</i> , 56(3):1018-1042 (2008).
[30]	Imagerie par ondes élastiques	A. <b>Kulakovskiy</b> , Développement d'un système SHM pour aéronef par ondes élastiques guidées, thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay, 2019.
[31]	Imagerie par ondes élastiques	A. <b>Kulakovskiy</b> , O. Mesnil, B. Chapuis, O. d'Almeida and A. Lhémy, "Statistical analysis of guided wave imaging algorithms performance illustrated by a simple SHM configuration," <i>ASME J. NDE</i> , 4 (2021), 031001.
[32]	Tomographie	T. <b>Druet</b> , "Tomographie passive par ondes guidees pour des applications de contrôle sante integre", Ph.D. thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, Valenciennes, France (2017). Ch2 pp.28-64
[33]	Tomographie	T. <b>Druet</b> , A. Recoquilly, B. Chapuis and E. Moulin, "Passive guided wave tomography for structural health monitoring," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> 146 (2019), pp. 2395-2403.
[34]	Tomographie	T. <b>Hoang</b> , « Contrôle santé des structures passif par ondes élastiques guidées de tuyauteries pour applications nucléaires et pétrochimiques », thèse de doctorat de l'Université Polytechnique Haut-de-France, 2020.
[35]	Propagation d'ondes élastiques	J. <b>Barras</b> , Prédiction modale du rayonnement d'ondes élastiques guidées par une source quelconque dans une structure fine - application au contrôle non destructif, thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay, 2020.



[36]	Propagation d'ondes élastiques	J. <b>Barras</b> , A. Lhémy, A. Impériale,, "Modal pencil method for the radiation of guided wave fields in finite isotropic plates validated by a transient spectral finite element method,," <i>Ultrasonics</i> ,103, (2020), <a href="https://doi.org/10.1016/j.ultras.2020.106078">https://doi.org/10.1016/j.ultras.2020.106078</a> .
[37]	EMAT	B. <b>Clausse</b> . "Modélisation des transducteurs électromagnétiques acoustiques (EMAT) pour le contrôle non-destructif (CND) de milieux ferromagnétiques". PhD. Université Paris-Sacaly, (2018)
[38]	EMAT	B. <b>Clausse</b> , A. Lhémy and H. Walaszek, "A model to predict the ultrasonic field radiated by magnetostrictive effects induced by EMAT in ferromagnetic parts," <i>J. Phys.: Conf. Ser.</i> 797 (2017), 012004.
[39]	Magnétoélasticité	I. <b>Mayergoyz</b> , "Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications", Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, 2003.
[40]	Magnétoélasticité	D.C. <b>Jiles</b> ,, D.L. Atherton., "Theory of ferromagnetic hysteresis", <i>Journal of Magnetism and Magnetic Materials</i> , vol. 61, 1986, pp. 48-60.
[41]	Magnétoélasticité	D.C. <b>Jiles</b> ., "Theory of the magnetomechanical effect", <i>Journal of Physics D: Applied Physics</i> , vol. 28, No. 8, 14 August 1995, pp. 1537-1546.
[42]	Magnétoélasticité	L. <b>Daniel</b> , "An Analytical Model for the Effect of Multiaxial Stress on the Magnetic Susceptibility of Ferromagnetic Materials," <i>IEEE Transactions on Magnetics</i> , vol. 49, no. 5, pp. 2037-2040, (2013), doi: 10.1109/TMAG.2013.2239264.
[43]	Propagation d'ondes élastiques	M. <b>Lou</b> , J. A. Rial, Modelling elastic-wave propagation in inhomogeneous anisotropic media by the pseudo-spectral method, <i>Geophysical Journal International</i> , 120, Issue 1, January 1995, Pages 60-72, <a href="https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1995.tb05910.x">https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1995.tb05910.x</a>
[44]	Propagation d'ondes élastiques	J. <b>Zhang</b> and D. J. Verschuur, "Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method" <i>GEOPHYSICS</i> , 67, Issue 2, <a href="https://doi.org/10.1190/1.1468624">https://doi.org/10.1190/1.1468624</a>
[45]	Propagation d'ondes élastiques	V. <b>Pagneux</b> , A. Maurel, "Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides" <i>Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences</i> , 458, pp. 1913-1930
[46]	Acousoélasticité	P. A. <b>Johnson</b> and P. N. J. Rasolofosaon, "Nonlinear elasticity and stress-induced anisotropy in rock," <i>J. Geophys. Res. B: Solid Earth</i> <b>101</b> (B2), pp. 3113-3124 (1996). <a href="https://doi.org/10.1029/95JB02880">https://doi.org/10.1029/95JB02880</a>
[47]	Acousoélasticité	L. <b>Brillouin</b> , "Les tensions de radiation ; leur interprétation en mécanique classique et en relativité, " <i>J. Phys. Radium</i> , <b>6</b> (11), pp.337-353 (1925). <a href="https://doi.org/10.1051/jphysrad:01925006011033700">https://doi.org/10.1051/jphysrad:01925006011033700</a>
[48]	Acousoélasticité	F. <b>John</b> , "Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type," <i>Commun. Pure and Appl. Math.</i> <b>13</b> (2), pp.239-296 (1960). <a href="https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206">https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206</a>
[49]	Acousoélasticité	S. <b>Tang</b> , "Wave Propagation in Initially-Stressed Elastic Solids, " <i>Acta Mechanica</i> , <b>4</b> , pp. 92-106 (1967). <a href="https://doi.org/10.1007/BF01291091">https://doi.org/10.1007/BF01291091</a>
[50]	Acousoélasticité	C. <b>Truesdell</b> , "Novozhilov's Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, " in <i>An Idiot's Fugitive Essays on Science</i> (Springer, 1984), pp.151-157(1953). <a href="https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8185-3_15">https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8185-3_15</a>
[51]	Acousoélasticité	V. V. <b>Bolotin</b> , "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, " (Elsevier, 1963).
[52]	Acousoélasticité	D. S. <b>Hughes</b> and J. L. Kelly, "Second order elastic deformation of solids," <i>Phys. Rev.</i> <b>92</b> , pp. 1145-1149 (1953). <a href="https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.1145">doi.org/10.1103/PhysRev.92.1145</a>
[53]	Acousoélasticité	F. D <b>Murnaghan</b> (1937), "Finite deformations of an elastic solid," <i>Am. J. Math.</i> <b>59</b> , pp. 235-260 (1937). <a href="https://doi.org/10.2307/2371405">https://doi.org/10.2307/2371405</a>

[54]	<b>Acousoélasticité</b>	K. <b>Brugger</b> , "Thermodynamic Definition of Higher Order Elastic Coefficients," <i>Phys. Rev.</i> <b>133</b> (6A), pp. A1611-A1612 (1963). <a href="https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1611">https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1611</a>
[55]	<b>Acousoélasticité</b>	R. N. <b>Thurston</b> and K. Brugger, "Third-Order Elastic Constants and the Velocity of Small Amplitude Elastic Waves in Homogeneously Stressed Media," <i>Phys. Rev.</i> <b>133</b> , pp. A1604-A1610 (1964); Erratum <i>Phys. Rev.</i> <b>135</b> , AB3 (1964). <a href="https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1604">https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1604</a>
[56]	<b>Acousoélasticité</b>	R. A. <b>Toupin</b> and B. Bernstein, "Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>33</b> , pp. 216-225 (1961). <a href="https://doi.org/10.1121/1.1908623">https://doi.org/10.1121/1.1908623</a>
[57]	<b>Acousoélasticité</b>	M. A. <b>Biot</b> , "The influence of initial stress on elastic waves," <i>J. App. Phys.</i> <b>11</b> (8), pp. 522-530 (1940). <a href="https://doi.org/10.1063/1.1712807">https://doi.org/10.1063/1.1712807</a>
[58]	<b>Acousoélasticité</b>	M. A. <b>Biot</b> , "Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress," <i>Mag. J. Sci.</i> <b>27</b> (183) pp. 468-489 (1939). <a href="https://doi.org/10.1080/14786443908562246">https://doi.org/10.1080/14786443908562246</a>
[59]	<b>Acousoélasticité</b>	A. V. <b>Clark Jr.</b> and J. C. Moulder, "Residual stress determination in aluminium using electromagnetic acoustic transducers," <i>Ultrasonics</i> <b>23</b> , pp. 253-259 (1985). <a href="https://doi.org/10.1016/0041-624X(85)90047-2">https://doi.org/10.1016/0041-624X(85)90047-2</a>
[60]	<b>Acousoélasticité</b>	E. <b>Schneider</b> , "Ultrasonic techniques," in <i>Structural and Residual Stress Analysis by Nondestructive Methods</i> , ed. by V. Hauk (Elsevier, 1977), pp. 522-563. <a href="https://doi.org/10.1007/978-94-015-9231-4_57">https://doi.org/10.1007/978-94-015-9231-4_57</a>
[61]	<b>Acousoélasticité</b>	D. I. <b>Crecraft</b> , "The measurement of applied and residual stresses in metals using ultrasonic waves," <i>J. Sound Vib.</i> <b>5</b> , pp. 173-192 (1967). <a href="https://doi.org/10.1016/0022-460X(67)90186-1">https://doi.org/10.1016/0022-460X(67)90186-1</a>
[62]	<b>Acousoélasticité</b>	N. H. <b>Nelson</b> , "Acoustical Birefringence and the Use of Ultrasonic Waves for Experimental Stress Analysis," <i>Exp. Mech.</i> <b>14</b> , pp. 169-176, (1974). <a href="https://doi.org/10.1007/BF02323061">https://doi.org/10.1007/BF02323061</a>
[63]	<b>Contrainte mécanique</b>	J. <b>Schijve</b> , "Fatigue of Structures and Materials," (Elsevier, 2003). Doi.10.1007/978-1-4020-6808-9
[64]	<b>Acousoélasticité</b>	M. <b>Kobayashi</b> , "Acoustic theory for plastically deformed solids," <i>Jpn. Soc. Mech. Eng</i> , <b>48</b> (432) pp. 1072 (1982) (In Jpn). <a href="https://doi.org/10.1016/0749-6419(87)90014-3">https://doi.org/10.1016/0749-6419(87)90014-3</a>
[65]	<b>Acousoélasticité</b>	M. <b>Hirao</b> and Y. H Pao, "Dependence of acoustoelastic birefringence on plastic strains in a beam," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>77</b> , pp. 1959-1964 (1985). <a href="https://doi.org/10.1121/1.391964">https://doi.org/10.1121/1.391964</a>
[66]	<b>Acousoélasticité</b>	R. B. <b>Thompson</b> , J. F. Smith and S. S. Lee, "Microstructure-independent acoustoelastic measurement of stress," <i>Appl. Phys. Lett.</i> <b>44</b> , pp. 296-298 (1984). <a href="https://doi.org/10.1063/1.94730">https://doi.org/10.1063/1.94730</a>
[67]	<b>Acousoélasticité</b>	E. <b>Tanala</b> , G. Bourse, M. Fremiot and J.-F. de Belleval, "Determination of near surface residual stresses on welded joints using ultrasonic methods," <i>NDT &amp; E Int.</i> <b>28</b> , pp. 83-88 (1995). <a href="https://doi.org/10.1016/0963-8695(94)00013-A">https://doi.org/10.1016/0963-8695(94)00013-A</a>
[68]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	N. <b>Gandhi</b> , J. E. Michaels and S. J. Lee, "Acoustoelastic Lamb wave propagation in biaxially stressed plates," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>132</b> , pp. 1284-1293 (2012). <a href="https://doi.org/10.1121/1.4740491">https://doi.org/10.1121/1.4740491</a>
[69]	<b>Acousoélasticité</b>	Y.-H. <b>Pao</b> and U. Gamer, "Acoustoelastic waves in orthotropic media," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>77</b> , pp. 806-812 (1985).
[70]	<b>Acousoélasticité</b>	M. <b>Hirao</b> , H. Ogi, and H. Fukuoka, "Resonance EMAT system for acoustoelastic stress measurement in sheet metals," <i>Rev. Sci. Instrum.</i> <b>64</b> (11), pp. 3198-3205(1993).
[71]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	F. <b>Shi</b> , J. E. Michaels and S. J. Lee, "In situ estimation of applied biaxial loads with Lamb waves," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>133</b> , pp. 677-687 (2013).

[72]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	N. <b>Pei</b> and L. J. Bond, "Higher order acoustoelastic Lamb wave propagation in stressed plates," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> 140, pp. 3834-3843 (2016). doi:10.1121/1.4967756
[73]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	A. <b>Jäger</b> , J. Hinrichs, G. Allevato, M. Sachsenweger, S. Kadel, D. Stasevich, W. Gebhard, G. Hubschen, T. Hahn-Jose, W. M. D. Wright and M. Kupnik, "Non-contact ultrasound with optimum electronic steering angle to excite Lamb waves in thin metal sheets for mechanical stress measurements," in <i>Proc. IEEE International Ultrasonics Symposium 2019</i> , pp. 924-927 (2019).
[74]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	K. <b>Peddeti</b> and S. Santhanam, "Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> 143, pp. 829-840 (2018).
[75]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	Z. <b>Yang</b> , Z. Wu, J. Zhang, K. Liu, Y. Jiang and K. Zhou, "Acoustoelastic guided wave propagation in axial stressed arbitrary cross-section," <i>Smart Mater. Struct.</i> 28, 045013 (2019).
[76]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	P. <b>Zuo</b> , X. Yu and Z. Fan, "Acoustoelastic guided waves in waveguides with arbitrary prestress," <i>J. Sound Vib.</i> 469, 115113 (2020).
[77]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	R. <b>Murayama</b> , "Non-contact stress measurement during tensile testing using an EMAT for SH0-plate wave and Lamb wave," <i>J. Sensor Tech.</i> 1, 65-70 (2011).
[78]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	F. <b>Treysède</b> , "Dispersion curve veering of longitudinal guided waves propagating inside prestressed seven-wire strands", <i>Journal of Sound and Vibration</i> , 367, pp. 56-68, (2016) <a href="https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.050">https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.050</a> .
[79]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	A. C. <b>Kubrusly</b> , A. M. B. Braga and J.-P. von der Weid, "Derivation of acoustoelastic Lamb wave dispersion curves in anisotropic plates at the initial and natural frames of reference," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> 140, pp. 2412-2417 (2016).
[80]	<b>Acousoélasticité</b>	A. N. <b>Norris</b> , "Finite-amplitude wave in solids," in <i>Nonlinear Acoustics</i> , edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock (Academic, San Diego, 1998), pp. 263-277.
[81]	<b>Élasticité</b>	R. W. <b>Ogden</b> , "Elements of the theory of finite elasticity," in <i>Nonlinear Elasticity Theory and Applications</i> , ed. by R. W. Ogden and Y. B. Fu (Cambridge University Press, 2001), Ch. 1, pp. 1-57.
[82]	<b>Acousoélasticité</b>	S. <b>Eldevik</b> , Measurement of non-linear acoustoelastic effect in steel using acoustic resonance, PhD dissertation, University of Bergen, 2014.
[83]	<b>Élasticité</b>	L. K. <b>Zarembo</b> and V. A. Krasil'nikov, "Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids," <i>Soy. Phys. Acoust, Engl. Transl.</i> 3, 340-347, (1957).
[84]	<b>Élasticité</b>	L. <b>Davison</b> , "Propagation of plane waves of finite amplitude in elastic solids," <i>J. Mech and Phys of Solids</i>
[85]	<b>Acousoélasticité</b>	Z. <b>Abiza</b> , M. Destrade, R.W. Ogden, "Large acoustoelastic effect," <i>Wave Motion</i> , 49 ,pp. 364-374 (2011).
[86]	<b>Élasticité</b>	G. <b>Marckmann</b> and E. Verron, "Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials," <i>Am. Chem. Soc.</i> 79 (5), pp.835-858 (2006).
[87]	<b>SAFE</b>	T. <b>Hayashi</b> , W. J. Song and J. L. Rose, "Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example," <i>Ultrasonics</i> 41, pp. 175-183 (2003).
[88]	<b>SAFE</b>	Z. A. B. <b>Ahmad</b> , Numerical simulations of Lamb waves in plates using a semi-analytical finite element method, PhD dissertation, University of Magdeburg, 2011AIP Conf. Proc. 1581, 324-331 (2014); doi: 10.1063/1.4864837
[89]	<b>SAFE</b>	I. <b>Bartoli</b> , A. Marzani, F. Lanza di Scalea and E. Viol, "Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section," <i>J. Sound Vib.</i> 295, pp. 685-707 (2006).
[90]	<b>Élasticité</b>	J. R. <b>Asay</b> and A. H. Guenther, "Ultrasonic Studies of 1060 and 6061-T6 Aluminum," <i>J. Appl. Phys.</i> 38, pp. 4086-4088 (1967).

[91]	<b>Acousoélasticité</b>	V. V. <b>Mishakin</b> , S. Dixon and M. D. G. Potter, "The use of wide band ultrasonic signals to estimate the stress condition of materials," <i>J. Appl. Phys.</i> <b>39</b> , pp. 4681–4687 (2006).
[92]	<b>Acousoélasticité</b>	R. B. <b>Thompson</b> , S. S. Lee and J. F. Smith, "Angular dependence of ultrasonic wave propagation in a stressed, orthorhombic continuum: Theory and application to the measurement of stress and texture," <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>80</b> , pp. 921-931 (1986).
[93]	<b>Contrainte mécanique</b>	M. <b>Mahmoodi</b> , M. Sedighi, D.A. Tanner, "Investigation of through thickness residual stress distribution in equal channel angular rolled Al 5083 alloy by layer removal technique and X-ray diffraction". <i>Materials and Design</i> <b>40</b> pp.516–520(2012). <a href="https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.03.029">https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.03.029</a>
[94]	<b>Contrainte mécanique</b>	L. <b>Kai</b> W. Yun-xin, G. Hai, Y. Peng-fei, G. Jun-kang, "Effect of non-uniform stress characteristics on stress measurement in specimen". <i>Transactions of Nonferrous metals Society of China</i> Volume 20, Issue 5, pp. 789-794 (2010). <a href="https://doi.org/10.1016/S1003-6326(09)60215-6">https://doi.org/10.1016/S1003-6326(09)60215-6</a>
[95]	<b>Contrainte mécanique</b>	A. T. <b>Özdemir</b> , L. Edwards, "Through-Thickness Residual Stress Distribution After the Cold Expansion of Fastener Holes and Its Effect on Fracturing". <i>J. Eng. Mater. Technol.</i> , 126(1): 129-135 (2004). <a href="https://doi.org/10.1115/1.1634278">https://doi.org/10.1115/1.1634278</a>
[96]	<b>Contrainte mécanique</b>	J.R . <b>Shadley</b> , E.F . Rybicki,. "Experimental evaluation of through-thickness stresses in a welded pipe using the consistent-splitting model". <i>Experimental Mechanics</i> 25, 115–122 (1985). <a href="https://doi.org/10.1007/BF02328800">https://doi.org/10.1007/BF02328800</a>
[97]	<b>Acousoélasticité-OG</b>	N. <b>Gandhi</b> , "Determination of dispersion curves for acoustoelastic Lamb wave propagation," Master report (2010).
[98]	<b>Acousoélasticité</b>	R. N. <b>Thurston</b> , "Effective Elastic Coefficients for Wave Propagation in Crystals under Stress", <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>37</b> , pp. 348 (1965); <a href="https://doi.org/10.1121/1.1909333">https://doi.org/10.1121/1.1909333</a>
[99]	<b>Acousoélasticité</b>	J. Y <b>Chattelier</b> and M. Touratier , " A new method for determining acoustoelastic constants and plane stresses in textured thin plates", <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>83</b> , pp109 (1988); <a href="https://doi.org/10.1121/1.396436">https://doi.org/10.1121/1.396436</a>
[100]	<b>Acousoélasticité</b>	V. K <b>Belchenko</b> <i>et al</i> , "An estimation of the strain-stress under cyclic loading by the acoustoelasticity method", <i>St. Petersburg Polytechnical university Journal : physics and mathematics</i> 3 pp. 71-76 (2017)
[101]	<b>Acousoélasticité</b>	M. <b>Duquenois</b> et al , "Ultrasonic characterization of residual stresses in steel rods using a laser line source and piezoelectric transducers," <i>NDT&amp;E International</i> 34 pp. 355-362 (2001)
[102]	<b>Acousoélasticité</b>	M. <b>Hirao</b> , H. Fukuoka, and K. Hori, "Acoustoelastic Effect of Rayleigh Surface Wave in Isotropic Material," <i>J. Appl. Mech.</i> , 48(1): pp. 119-124 (1981). <a href="https://doi.org/10.1115/1.3157553">https://doi.org/10.1115/1.3157553</a> .
[103]	<b>Tomographie</b>	P. <b>Huthwaite</b> , "Improving accuracy through density correction in guided wave tomography". <i>Proc. R. Soc. A</i> 472: 20150832. (2016) <a href="http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2015.0832">http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2015.0832</a>
[104]	<b>Acousoélasticité</b>	G. C. <b>Johnson</b> , "On the applicability of acoustoelasticity for residual stress determination" , <i>J. Appl. Mech.</i> , 48, pp. 791-795 (1981).
[105]	<b>Acousoélasticité</b>	T. <b>Tokuoka</b> , and Y. Iwashimizu, "Acoustical birefringence of ultrasonic waves in deformed isotropic elastic materials" , <i>Int. J. Solids Structures. Mech.</i> , 4, pp. 383-398 (1968).
[106]	<b>Acousoélasticité</b>	A.V. <b>Clark</b> , H. Fukuoka, D.V Mitraković, J.C Moulder, "Ultrasonic Characterization of Residual Stress and Texture in Cast Steel Railroad Wheels". In: Thompson D.O., Chimenti D.E. (eds) <i>Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Review of Progress in Quantitative Nondestructive</i>

		Evaluation, vol 6 A. Springer. (1987) <a href="https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1893-4_176">https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1893-4_176</a>
[107]	Acousoélasticité	H. Fukuoka, M. Hirao, T. Yamasaki, H. Ogi, G.L Petersen, C.M Fortunko, "Ultrasonic Resonance Method with EMAT for Stress Measurement in Thin Plates". In: Thompson D.O., Chimenti D.E. (eds) Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Springer, . (1993). <a href="https://doi.org/10.1007/978-1-4615-2848-7_273">https://doi.org/10.1007/978-1-4615-2848-7_273</a>
[108]	Acousoélasticité	M. Hirao, H. Ogi and H.Fukuoka, "Advanced ultrasonic method for measuring rail axial stresses with electromagnetic acoustic transducer". <i>Res Nondestr Eval</i> <b>5</b> , pp.211–223 (1994). <a href="https://doi.org/10.1007/BF01606409">https://doi.org/10.1007/BF01606409</a>
[109]	Acousoélasticité	M. Duquennoy, M. Ouaftouh, M. Ourak, and W-J Xu "Influence of natural and initial acoustoelastic coefficients on residual stress evaluation: Theory and experiment" <i>J. Appl. Phys.</i> <b>86</b> , 2490 (1999); doi: 10.1063/1.371082
[110]	Tomographie	A.C. Kak and M. Slaney. "Principles of Computerized Tomographic Imaging". New York : IEEE Press, (1988) <a href="https://doi.org/10.1007/BF02328800">https://doi.org/10.1007/BF02328800</a>
[111]	Tomographie	P. Müller, M.Schürmann, and J.Guck. "The Theory of Diffraction Tomography". <i>arXiv:1507.00466v3</i>
[112]	Tomographie	W. B. Beydoun. "First Born and Rytov approximations: Modeling and inversion conditions in a canonical example". <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>83</b> , pp. 1045 (1988); <a href="https://doi.org/10.1121/1.396537">https://doi.org/10.1121/1.396537</a>
[113]	Tomographie	Y. Samuelides. "Velocity shift using the Rytov approximation". <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> <b>104</b> , pp. 2596 (1998); <a href="https://doi.org/10.1121/1.423843">https://doi.org/10.1121/1.423843</a>
[114]	Tomographie	P. Belanger, P. Cawley, and F. Simonetti. "Guided Wave Diffraction Tomography Within the Born Approximation". <i>IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control</i> , vol. <b>57</b> , 6, pp.1405-1418 (2010)
[115]	Tomographie	E. Chan, C. H. Wang, F. L.R. Rose. "Characterization of Laminar Damage in an Aluminium Panel by Diffraction Tomography Based Imaging Method Using Lamb Waves". EWSHM - 7 <sup>th</sup> European Workshop on Structural Health Monitoring, IFFSTTAR, Inria, Université de Nantes, Jul (2014)
[116]	Tomographie	P. Lasaygues, R. Guillermin, J. P. Lefebvre. "Ultrasonic Computed Tomography". P. Laugier, G. Haiat. <i>Bone Quantitative Ultrasound</i> , Springer, pp.441-459, (2010). <hal-00492836>
[117]	Tomographie	T. Falardeau, and P. Belanger. "Material characterization using ultrasound tomography". <i>AIP Conference Proceedings</i> 1949, 230002 (2018); <a href="https://doi.org/10.1063/1.5031649">https://doi.org/10.1063/1.5031649</a>
[118]	Tomographie	P.E. Huthwaite. "Quantitative imaging with mechanical waves". PhD. Imperial College, London, mar. (2012)
[119]	Élasticité	V. Červený. "Seismic ray theory". In: Geophysics. <i>Encyclopedia of Earth Science</i> . Springer, Boston, MA. (1989) <a href="https://doi.org/10.1007/0-387-30752-4_134">https://doi.org/10.1007/0-387-30752-4_134</a>
[120]	Tomographie	S.R. Deans . "The Radon transform and some of its applications". New York (N.Y.) : Wiley, (1983). ISBN: 047189804X
[121]	Tomographie	G.L. Zeng . "Medical Image Reconstruction". Springer, Berlin, Heidelberg (2010) <a href="https://doi.org/10.1007/978-3-642-05368-9">https://doi.org/10.1007/978-3-642-05368-9</a>
[122]	Tomographie	A. Javaherian , F. Lucka and B.T Cox. "Refraction-corrected ray-based inversion for three-dimensional ultrasound tomography of the breast". <i>Inverse Problems</i> , <b>36</b> , 12 (2020) <a href="https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc0fc">https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc0fc</a>

[123]	<b>Tomographie</b>	A. <b>Hormati</b> , I.Jovanovic, O. Roy, and M. Vetterli. "Robust Ultrasound Travel-time Tomography Using the Bent Ray Model". Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering (2010)doi: 10.1117/12.844693
[124]	<b>Tomographie</b>	J. <b>Jose</b> , RG . Willeminck, W. Steenbergen, CH . Slump, TG . van Leeuwen, S. Manohar "Speed-of-sound compensated photoacoustic tomography for accurate imaging". Med Phys. 39(12) pp. 7262-2271 (2012). doi: 10.1118/1.4764911. PMID: 23231277.
[125]	<b>Tomographie</b>	H. <b>Choi</b> , and J. S. Popovics. "NDE Application of Ultrasonic Tomography to a Full-Scale Concrete Structure".IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and frequency control, <b>62</b> . 6, (2015) DOI: 10.1109/TUFFC.2014.006962 ·
[126]	<b>Tomographie</b>	C. L. <b>Willey</b> , F. Simonetti, P. B. Nagy and G. Instanes. "Thermal Stability of Curved Ray Tomography for Corrosion Monitoring". 40th Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation AIP Conf. Proc. 1581, 324-331 (2014); doi: 10.1063/1.4864837
[127]	<b>Tomographie</b>	P. <b>Belanger</b> , P. Cawley. "Feasibility of low frequency straight ray guided wave tomography". NDT&E International, 42 pp. 113-119 (2009).
[128]	<b>Tomographie</b>	P. <b>Huthwaite</b> . "Evaluation of inversion approaches for guided wave thickness mapping". Proc. R. Soc. A 470: (2014) <a href="https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0063">doi.org/10.1098/rspa.2014.0063</a>
[129]	<b>Tomographie</b>	AAE. <b>Zimmermann</b> , P. Huthwaite, B . Pavlakovic. "High-resolution thickness maps of corrosion using SH1 guided wave tomography". Proc. R. Soc. A 477: 20200380. (2021) <a href="https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0380">https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0380</a>
[130]	<b>Tomographie</b>	P. <b>Huthwaite</b> . "Guided wave tomography with an improved scattering model". Proc. R. Soc. A 472: 20160643. (2016) <a href="http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0643">http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0643</a>
[131]	<b>Tomographie</b>	M. J. <b>Jackson</b> and D. R. Tweeton. "Geophysical Tomography Using Wavefront Migration and Fuzzy Constraints". Rep. of Investigations 9497, U.S. Bureau of Mines, 1994.
[132]	<b>Tomographie</b>	A. H. <b>Andersen</b> and A. C. Kak, "Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields," J. Acoust. Sot. Amer., vol. <b>72</b> , pp. 1593-1606, Nov. 1982.
[133]	<b>Tomographie</b>	K. <b>Tanabe</b> , "Projection method for solving a singular system," Numer. Math., <b>17</b> , pp. 203-214, (1971).
[134]	<b>Tomographie</b>	A. <b>Meléndez</b> , C. E. Jiménez, V. Sallarès, and C. R. Ranero. "Anisotropic P-wave travel-time tomography implementing Thomsen's weak approximation in TOMO3D" Solid Earth, 10, 1857-1876, 2019 <a href="https://doi.org/10.5194/se-10-1857-2019">https://doi.org/10.5194/se-10-1857-2019</a>
[135]	<b>Tomographie</b>	Y. <b>Hua</b> , D. Zhao, and Y. Xu. "P wave anisotropic tomography of the Alps", J. Geophys. Res. Solid Earth, <b>122</b> , pp.4509-4528, (2017), doi:10.1002/2016JB013831.
[136]	<b>Tomographie</b>	A. <b>Mazzullo</b> , E. Stutzmann, J-P Montagner, S. Kiselev, S. Maurya, et al.. "Anisotropic Tomography Around La Réunion Island From Rayleigh Waves". Journal of Geophysical Research : Solid Earth, American Geophysical Union, (2017), <a href="https://hal.univ-reunion.fr/hal-01640504">https://hal.univ-reunion.fr/hal-01640504</a>
[137]	<b>Tomographie</b>	G. <b>Silveira</b> , E. Stutzmann. "Anisotropic tomography of the Atlantic Ocean". Physics of the Earth and Planetary Interiors <b>132</b> pp.237-248 (2002)
[138]	<b>Tomographie</b>	J.K. <b>Magali</b> . "1D Anisotropic Surface Wave Tomography with Bayesian Inference" Geo. Phy : arXiv:2012.03915 (2020)
[139]	<b>Tomographie</b>	A. <b>Malecki</b> , G. Potdevin, T. Biernath, E. Ettl, K. Willer, T. Lasser, J. Maisenbacher, J. Gibmeier, A. Wanner and F. Pfeiffer. "X-Ray Tensor Tomography", 2014 EPL <b>105</b> 38002

[140]	<b>Tomographie</b>	M. <b>Jiang</b> and G. Wang, "Convergence of the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART)," IEEE Transactions on Image Processing, <b>12</b> , 8, pp. 957-961, (2003), doi: 10.1109/TIP.2003.815295.
[141]	<b>Élasticité</b>	L. <b>Thomsen</b> . "Weak elastic anisotropy", Geophysics, <i>51</i> , pp.1954–1966, (1986) <a href="https://doi.org/10.1190/1.1442051">https://doi.org/10.1190/1.1442051</a> , 1986.
[142]	<b>Élasticité</b>	M. L. <b>Smith</b> , and F. Dahlen, "The azimuthal dependence of Love and Rayleigh wave propagation in a slightly anisotropic medium". Journal of Geophysical Research, <i>78</i> (17), pp.3321–3333. (1973).
[143]	<b>Mathématiques</b>	R.L . <b>Burden</b> and J.D .Faires, "Numerical Analysis. Numerical Solutions of Nonlinear Systems of Equations", (pp. 597-640). (2005). Belmont: Thomson Brooks/Cole.
[144]	<b>Tomographie</b>	F. <b>Natterer</b> , "Sampling in Fan Beam Tomography." SIAM J. App. Math. <i>53</i> , no. 2 pp.358-380. (1993):
[145]	<b>Tomographie</b>	A. H. <b>Khan</b> R. A.Chaudhuri, "Fan-beam geometry based inversion algorithm in computed tomography (CT) for imaging of composite materials." Comp. struc. <i>110</i> ,pp.297-304 (2014).
[146]	<b>Électromagnétisme</b>	D.J. <b>Griffiths</b> ," Introduction to electromagnetism" Cambridge University Press; 3e édition (1999)
[147]	<b>Électromagnétisme</b>	R. C. <b>O'Handley</b> , "Modern Magnetic Materials: Principles and Applications" (1999) ISBN: 978-0-471-15566-9 November
[148]	<b>EMAT</b>	H. <b>Primakoff</b> , and Leslie L. Foldy, "A General Theory of Passive Linear Electroacoustic Transducers and the Electroacoustic Reciprocity Theorem. II," The Journal of the Acoustical Society of America <i>19</i> , <i>50</i> (1947); doi: 10.1121/1.1916402
[149]	<b>Électromagnétisme</b>	G. <b>Engdahl</b> . "Handbook of giant magnetostrictive materials". Academic Press, San Diego, 2000.
[150]	<b>Magnétoélasticité</b>	L. <b>Daniel</b> , "An analytical model for the magnetostriction strain of ferromagnetic materials subjected to multiaxial stress", Eur. Phys. J. Appl. Phys. <i>83</i> , 30904 (2018)
[151]	<b>Électromagnétisme</b>	C. B. <b>Scruby</b> and H. N. G. Wadley. "A calibrated capacitance transducer for the detection of acoustic emission". 1978 J. Phys. D: Appl. Phys. <i>11</i> 1487
[152]	<b>Électromagnétisme</b>	E. P. <b>Tomasini</b> , P. Castellini, "Laser Doppler Vibrometry", (2020) Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 10.1007/978-3-662-61318-4
[153]	<b>Électromagnétisme</b>	D. <b>Schieber</b> . "Electromagnetic Induction Phenomena". (1986) doi: 10.1007/978-3-642-71015-5
[154]	<b>Électromagnétisme</b>	M.N.O <b>Sadiku</b> . "Elements of Electromagnetics". Oxford University Press, (2001) ISBN 019513477X, 9780195134773
[155]	<b>Électromagnétisme</b>	R.H. <b>Romer</b> . "What do "voltmeters" measure?: Faraday's law in a multiply connected region". American Journal of Physics <i>50</i> , 1089 (1982); <a href="https://doi.org/10.1119/1.12923">https://doi.org/10.1119/1.12923</a>
[156]	<b>Électromagnétisme</b>	A. <b>Bossavit</b> , "What do voltmeters measure?", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, 2008, <i>27</i> (1), pp. 9–16.
[157]	<b>Électromagnétisme</b>	D.J. <b>Griffiths</b> , M.A. Heald, " Time-dependent generalizations of the Biot–Savart and Coulomb laws" American Journal of Physics, <i>59</i> , <i>2</i> , pp. 111-117 (1991). <a href="https://doi.org/10.1119/1.16589">https://doi.org/10.1119/1.16589</a>
[158]	<b>Électromagnétisme</b>	O.D. <b>Jefimenko</b> ," Electricity and Magnetism: An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields" edit : Electret Scientific Co (1989). 978-0917406089

[159]	Électromagnétisme	K.E. <b>Graves</b> , D. Toncich, P.G. Iovenitti, "Theoretical comparison of motional and transformer EMF device damping efficiency" Journal of Sound and Vibration, 233, Issue 3, pp. 441-453, (2000) <a href="https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2820">https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2820</a> .
[160]	Ferromagnétisme	R. I. <b>Joseph</b> and E. Schlömann, "Demagnetizing Field in Nonellipsoidal Bodies". J. App Phy 36, 1579 (1965); <a href="https://doi.org/10.1063/1.1703091">https://doi.org/10.1063/1.1703091</a>
[161]	Électromagnétisme	J.D. <b>Jackson</b> , "Classical Electrodynamics (third ed.)". John Wiley & Sons.(1999) ISBN 978-0-471-43132-9.
[162]	Élastodynamique	D. <b>Xiao et al.</b> , "A novel reflection removal method for acoustic emission wave propagation in plate-like structures." Journal of Vibroengineering, Vol. 17, Issue 5, pp. 2322-2337. (2015)
[163]	Magnétoélasticité	L <b>Lolloz</b> , S Pattofatto, O Hubert, "Application of piezo-magnetism for the measurement of stress during an impact", Journal of electrical engineering 57 (8), 10-15, 2006.
[164]	Mathématique	T. B. <b>Gatski</b> , J-P Bonnet, "Compressibility, Turbulence and High Speed Flow," Elsevier, (2009), <a href="https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044565-6.00006-3">https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044565-6.00006-3</a>
[165]	Ferromagnétisme	A. <b>Bartók</b> , L. Daniel, A. Razek : A multiscale model for thin film AMR sensors, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 326:116-122 (2013).
[166]	Ferromagnétisme	J;I. <b>Inoue</b> ," GMR, TMR, and BMR" in Nanomagnetism and Spintronics, (edited by T. Shinjo). (Elsevier) pp. 15-92, (2009), <a href="https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53114-8.00002-9">https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53114-8.00002-9</a>
[167]	EMAT	R. <b>Ludwig</b> , Z. You and R. Palanisamy, "Numerical simulations of an electromagnetic acoustic transducer-receiver system for NDT applications," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 29, no. 3, pp. 2081-2089, (1993), doi: 10.1109/20.211323.
[168]	EMAT	R. J. <b>Shapoorabadi</b> , A. Konrad, and A. N. Sinclair, "Computation of current densities in the receiving mode of electromagnetic acoustic transducers," J. Appl. Phys. 97, 10Q106 (2005); <a href="https://doi.org/10.1063/1.1855201">https://doi.org/10.1063/1.1855201</a>
[169]	EMAT	R. <b>Ludwig</b> , "Theoretical basis for a unified conservation law description of the electromagnetic acoustic transduction process," in IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 39, no. 4, pp. 476-480, July 1992, doi: 10.1109/58.148537.
[170]	EMAT	A. <b>Wilbrand</b> , "Theoretische und Experimentelle Untersuchungen zu Einem Quantitativen Model fur Einen Elektromagnetischen Ultraschallprifkopf," Ph.D. dissertation, University of Saarbrucken, Germany, 1990.
[171]	Ferromagnétisme	R. B. <b>Thompson</b> , "A model for the electromagnetic generation of ultrasonic guided waves in ferromagnetic metal polycrystals," in IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, vol. 25, no. 1, pp. 7-15, Jan. 1978, doi: 10.1109/T-SU.1978.30979.
[172]	Ferromagnétisme	H. <b>Ebrahimi et al</b> , "Coupled Magneto-Mechanical Analysis in Isotropic Materials Under Multiaxial Stress," IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 50, NO. 2, FEBRUARY 2014
[173]	Élastodynamique	G. <b>Grioli</b> . "Mathematical theory of elastic equilibrium ". (1962) doi. 10.1007/978-3-642-87432-1
[174]	PZT	N. <b>Boulay</b> . "Modélisation des capteurs d'émission acoustique en vue de la simulation d'un contrôle ". PhD. Université Paris-Sacaly, (2017)
[175]	Ferromagnétisme	F. <b>Henrotte</b> , H. Vande Sande, G. Deliége, K. Hameyer, Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material, IEEE Trans. Magn., 40-2 (2004) 553.
[176]	Ferromagnétisme	N. A . <b>Spaldin</b> .. "Magnetic Materials: Fundamentals and Applications", 2nd Ed. Cambridge University Press. Ch9 (2010). ISBN 9781139491556



[177]	<b>Ferromagnétisme</b>	B. D. <b>Cullity</b> and C. D. Graham, "Introduction to Magnetic Materials, Second Edition" (Second Edition), 2008 DOI:10.1002/9780470386323
[178]	<b>Acoustoélasticité</b>	Z. <b>Abbasi</b> and D. Ozevin,. "Acoustoelastic Coefficients in Thick Steel Plates under Normal and Shear Stresses", <i>Experimental Mechanics</i> 56:pp.1559–1575 (2016) DOI 10.1007/s11340-016-0186-6
[179]	<b>Électromagnétisme</b>	P. <b>Bajpai</b> , "Biermann's Handbook of Pulp and Paper" (Third Edition), Elsevier, 2018, pp.483-492, doi.org/ 10.1016/B978-0-12-814238-7.00024-6.
[180]	<b>Ferromagnétisme</b>	L. <b>Daniel</b> , O. Hubert : An analytical model for the DeltaE effect in magnetic materials, <i>The European Physical Journal - Applied Physics</i> , 45:31101 (2009).